



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**CONJUNTOS DOMINANTES POR ARISTAS
TRANSVERSALES DE APAREAMIENTOS
MÁXIMOS**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

EDUARDO CASTRO SOLÓRZANO



DIRECTOR DE TESIS:

DRA. MARÍA DEL

ROCÍO SÁNCHEZ

LÓPEZ

CIUDAD DE MÉXICO, 2019



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Castro
Solórzano
Eduardo
55 39 61 32 66
Universidad Nacional Autónoma de
México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
311089831

2. Datos del tutor

Dra
María del Rocío
Sánchez
López

3. Datos del sinodal 1

Dra
Hortensia
Galeana
Sánchez

4. Datos del sinodal 2

Mat
Laura
Pastrana
Ramírez

5. Datos del sinodal 3

Dr
Juan José
Montellano
Ballesteros

6. Datos del sinodal 4

M en C
Germán
Benítez
Bobadilla

7. Datos del trabajo escrito

Conjuntos dominantes por aristas transversales de apareamientos máximos
96 p
2019

Agradecimientos

Quisiera empezar por agradecer a mis padres Silvia y Victor, por todo el amor, apoyo y cariño que me han brindado a lo largo de toda mi vida, sin ustedes nada de esto hubiera sido posible.

También a mis tíos Luis y Mari, por toda la ayuda que me brindaron a lo largo de estos años, y de igual forma a todos mis amigos y amigas los cuales me han apoyado siempre.

A mi asesora y profesora, María del Rocío, gracias a usted es que adquirí este amor a la Teoría de Gráficas, y le agradezco por todo su apoyo en la realización de esta tesis. Además quiero dar las gracias a mis sinodales Hortensia, Laura, Juan José y Germán por el tiempo que emplearon en la revisión de la tesis.

Finalmente agradezco a la UNAM, por todas las experiencias y aprendizaje que obtuve a lo largo de todos estos años.

Índice general

Introducción	1
1. Preliminares	5
1.1. Definiciones básicas.	5
1.2. Tipos de gráficas.	6
1.3. Tipos de subgráficas.	8
1.4. Operaciones en gráficas	9
1.5. Tipos de caminos	9
1.6. Gráfica de líneas y complemento.	13
1.7. Apareamientos.	15
1.8. Conjuntos dominantes por aristas.	19
2. Primeros resultados y cotas generales	21
3. Trayectorias, ciclos y algo más	27
3.1. Trayectorias	27
3.2. Ciclos	40
3.3. Biestrellas	53
3.4. Gráficas bipartitas completas	55
4. Construcciones de gráficas	59
5. Algunas cotas y casos particulares	70
6. $\gamma'_{mt}(G)$ en la corona de una gráfica	79
Conclusiones	89
Bibliografía	90

Introducción

En 1850, los entusiastas del ajedrez en Europa consideraron el problema de determinar el número mínimo de reinas que debían ser colocadas en un tablero de ajedrez de tal forma que cada uno de los cuadros pudiera ser atacado (dominado) por una reina. Este problema se puede considerar como el origen del estudio de los conjuntos dominantes en la Teoría de Gráficas. La figura 1(a) ilustra un tablero de ajedrez de 8 x 8 en el cual está colocada una reina. Sabiendo que una reina puede, en un movimiento, avanzar cualquier número de cuadros en forma horizontal, vertical o diagonal. Entonces la reina de la figura 1(a) puede moverse (o atacar o dominar) cualquier cuadro pintado de color gris. En esa misma época fue planteado, que cinco era el número mínimo de reinas que debían dominar todos los cuadros de un tablero de ajedrez de 8 x 8, la respuesta era correcta. En la figura 1(b) podemos apreciar un ejemplo de la solución al problema planteado.

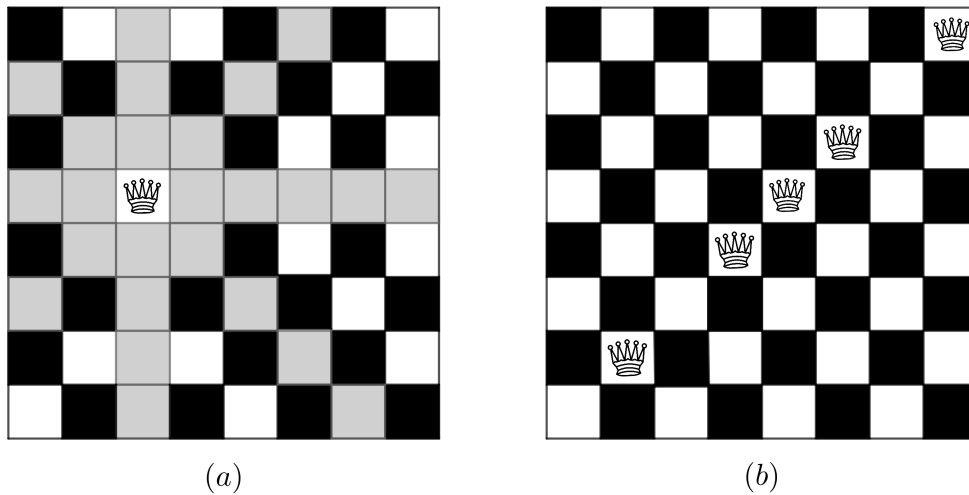


Figura 1:

A pesar de que el estudio en la Teoría de Gráficas sobre los conjuntos dominantes empezó alrededor del año 1960, el tema tuvo sus raíces históricas en el año 1862 cuando Carl Jaenisch estudio el problema de determinar el mínimo número de reinas que son necesarias para cubrir (o dominar) un tablero de ajedrez de $n \times n$. Los entusiastas del ajedrez de la época estudiaron, entre otros más, los siguientes tipos de problemas:

1. Dominación- ¿Cuál es el número mínimo de piezas de ajedrez de un tipo dado que son necesarias para cubrir/atacar/dominar cada cuadro de un tablero de $n \times n$? Este es un ejemplo del problema de encontrar un conjunto dominante de cardinalidad mínima.
2. Dominación independiente- ¿Cuál es el número mínimo de piezas de ajedrez de un tipo dado que son necesarias para dominar cada cuadro de un tablero de $n \times n$ de tal forma que estas piezas no se ataquen entre sí? Este es un ejemplo del problema de encontrar un conjunto dominante independiente de cardinalidad mínima.
3. Independencia- ¿Cuál es el número máximo de piezas de ajedrez de un tipo dado que pueden ser colocadas en un tablero de $n \times n$ de tal forma que ningún par de ellas puedan atacarse/dominarse entre sí? Este es un ejemplo del problema de encontrar un conjunto independiente de cardinalidad máxima.

En 1958, Claude Berge escribió un libro de Teoría de Gráficas en el que definió por primera vez el concepto de número de dominación de una gráfica (aunque él nombró a este número como el coeficiente de estabilidad externa).

En 1962, Oystein Ore publicó su libro de Teoría de Gráficas, en el cual usó, por primera vez, los nombres de conjunto dominante y número de dominación (aunque él uso la notación de $d(G)$ para denotar el número de dominación de una gráfica).

En 1977, Cockayne y Hedetniemi publicaron un compendio con los pocos resultados conocidos hasta ese momento sobre conjuntos dominantes en gráficas. En ese compendio, Cockayne y Hedetniemi fueron los primeros en usar la notación $\gamma(G)$ para denotar el número de dominación de una gráfica, que tiempo después se convirtió en la notación universal.

Con el pasar del tiempo fueron surgiendo distintos tipos de conjuntos dominantes entre los cuales podemos mencionar los siguientes:

1. Conjunto dominante total.
Es un subconjunto S de $V(G)$ con la propiedad que para cada v en $V(G)$, existe un vértice u en S tal que $uv \in A(G)$. El número de dominación total $\gamma_t(G)$ es la cardinalidad mínima tomada sobre todos los conjuntos dominantes totales.
2. Conjunto dominante independiente.
Es un subconjunto S de $V(G)$ con la propiedad de ser independiente, y además para cada v en $V(G) \setminus S$, existe un vértice u en S tal que $uv \in A(G)$. El número de dominación independiente $\gamma_i(G)$ es la cardinalidad mínima tomada sobre todos los conjuntos dominantes independientes.
3. Conjunto independiente máximo.
Es un subconjunto S de $V(G)$ con la propiedad de que cada subconjunto $\{u, v\}$

de $V(G)$, cumple con que $uv \notin A(G)$. El número de independencia $\beta_0(G)$ es la cardinalidad máxima tomada sobre todos los conjuntos independientes máximos.

Así llegamos al año 2012 cuando el autor Ismail Sahul Hamid, introdujo en el artículo; *Independent transversal Domination in Graphs* [3] el concepto de conjunto dominante transversal de independientes máximos el cual se define como un conjunto dominante que intersecta a todo conjunto independiente máximo. Nombró número de dominación transversal de independientes máximos, $\gamma_{it}(G)$, a la cardinalidad mínima tomada sobre todos los conjuntos dominantes transversales de independientes máximos.

Por otro lado, del concepto de dominación (por vértices) surgió su concepto dual, la dominación por aristas, la cual busca de forma análoga encontrar conjuntos dominantes por aristas de cardinalidad mínima; donde un conjunto dominante por aristas es un subconjunto X de $A(G)$ con la propiedad de que para cada c en $A(G) \setminus X$, existe una arista d en X tal que c y d son adyacentes. El número de dominación por aristas, $\gamma'(G)$, es la cardinalidad mínima tomada sobre todos los conjuntos dominantes por aristas.

Unos años más tarde en el año 2016 el autor Anwar Alwardi inspirado por la idea de un conjunto dominante transversal de independientes máximos y un conjunto dominante por aristas, introdujo en el artículo; *Matching Transversal Edge Domination in Graphs* [1] el concepto de conjunto dominante por aristas transversal de apareamientos máximos.

Esta tesis se basa en el artículo *Matching Transversal Edge Domination in Graphs*, en la cual desarrollaremos cada uno de los teoremas expuestos en dicho trabajo, con la intención de profundizar en ellos.

En el capítulo 1 veremos las definiciones básicas que nos ayudarán a comprender los resultados que se desarrollan a lo largo de la tesis.

En el capítulo 2 definiremos lo que son un conjunto dominante por aristas transversal de apareamientos máximos y el número $\gamma'_{mt}(G)$. Veremos que el número $\gamma'_{mt}(G)$ existe para cualquier gráfica G , y además está acotado inferior y superiormente. De igual modo, notaremos la relación que existe entre los números $\gamma'(G)$ y $\gamma'_{mt}(G)$ de una gráfica G . También, conoceremos bajo qué circunstancias se tiene que $\gamma'_{mt}(G) = 1$ y $\gamma'_{mt}(G) = m$.

En el capítulo 3 analizaremos cuál es el número de dominación por aristas transversal de apareamientos máximos de una trayectoria P_n , un ciclo C_n , una bi-estrella $B_{r,s}$ y una gráfica bipartita completa $K_{r,s}$.

En el capítulo 4 observaremos dos construcciones de gráficas que cumplen ciertas condiciones. El primer teorema enuncia que para cualesquiera dos números enteros a y b tales que $b \geq 2a - 1 \geq 2$, existe una gráfica G tal que $|A(G)| = b$ y $\gamma'_{mt}(G) = a$. Por otro lado, el segundo teorema es una aportación de parte nuestra y se puede considerar como una generalización del teorema 4.0.1, al pedir menos restricciones con respecto

a los número a y b , al solo pedir que $b \geq a \geq 2$

En el capítulo 5 averiguaremos cuál es el número $\gamma'_{mt}(G)$ de una gráfica G que tiene una o más componentes conexas. De igual modo, veremos la estrecha relación que existe entre el número $\gamma'_{mt}(G)$ de una gráfica G y el número $\gamma_{it}(L(G))$ de su gráfica de líneas $L(G)$. De igual forma, notaremos bajo qué circunstancias se cumple que $\gamma'_{mt}(G) = m - 1$. También, observaremos que para cualquier gráfica G se cumple que $\gamma'_{mt}(G) \leq \gamma'(G) + \delta'(G)$.

En el capítulo 6 estudiaremos cuál es número de dominación por aristas transversal de apareamientos máximos de la corona de C_n con K_1 , $C_n \circ K_1$.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Definiciones básicas.

En este capítulo veremos las definiciones básicas que nos ayudarán a comprender los resultados que se desarrollan a lo largo de esta tesis.

Definición 1.1.1. *Una gráfica G consiste de un conjunto finito no vacío de objetos, llamados vértices, y de un conjunto de pares no ordenados de elementos distintos de los vértices de G , llamados aristas.*

Notación 1.1.1. *Sea G una gráfica.*

1. $V(G)$ denota el conjunto de vértices de la gráfica G .
2. $A(G)$ denota el conjunto de aristas de la gráfica G .
3. Cada arista se denota por uv , con $\{u, v\} \subseteq V(G)$. A los vértices u y v los llamaremos los **extremos** de la arista uv .

Definición 1.1.2. *Sea G una gráfica. El **orden** de G es el número de vértices de G , denotado por n . El **tamaño** de G es el número de aristas de G , denotado por m .*

Definición 1.1.3. *Sean G una gráfica y $\{u, v\}$ un subconjunto de $V(G)$. Diremos que los vértices u y v son **adyacentes** si $uv \in A(G)$.*

Definición 1.1.4. *Sean G una gráfica, u en $V(G)$ y e en $A(G)$. Diremos que la arista e **incide** en el vértice u si u es un extremo de la arista e .*

Definición 1.1.5. *Sean G una gráfica y $\{e, f\}$ un subconjunto de $A(G)$. Diremos que las aristas e y f son **adyacentes** si un extremo de ambas aristas coincide.*

A continuación mostramos un ejemplo de una gráfica G donde su conjunto de vértices es $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ y su conjunto de aristas es $A(G) = \{v_1v_2, v_1v_4, v_1v_8, v_2v_3, v_2v_8, v_4v_5, v_4v_6, v_5v_6, v_6v_7\}$. Notemos que el orden y tamaño de G es $n = 8$ y $m = 9$, respectivamente.

Observemos que una gráfica G se puede representar de forma geométrica en el plano como sigue: a cada vértice en $V(G)$ se le asocia un punto en el plano y dibujamos una línea entre dos puntos si los vértices correspondientes a los puntos son adyacentes en G . En la figura 1.1 podemos apreciar la representación geométrica de la gráfica del ejemplo anterior.

Definición 1.1.6. Sean G una gráfica y S un subconjunto de $V(G)$. La **vecindad de S** , denotada por $N(S)$ (o $N_G(S)$), se define como el conjunto $\{u \in V(G) \mid uv \in A(G) \text{ para algún } v \text{ en } S\}$. En particular si $S = \{v\}$, para v en $V(G)$, simplemente escribiremos $N(v)$ (o $N_G(v)$) y diremos que $N(v) = \{u \in V(G) \mid uv \in A(G)\}$.

Definición 1.1.7. Sean G una gráfica y S un subconjunto de $V(G)$. La **vecindad cerrada de S** , denotada por $N[S]$ (o $N_G[S]$), se define como el conjunto $N(S) \cup \{S\}$.

Definición 1.1.8. Sean G una gráfica y v en $V(G)$. El **grado de v** , denotado por $\delta(v)$ (o $\delta_G(v)$), se define como la cardinalidad del conjunto $N(v)$; es decir, $|N(v)|$.

Definición 1.1.9. Sea G una gráfica. El **grado mínimo de G** , denotado por $\delta(G)$, se define como el mín $\{\delta(v) \mid v \in V(G)\}$.

Definición 1.1.10. Sea G una gráfica. El **grado máximo de G** , denotado por $\Delta(G)$, se define como el máx $\{\delta(v) \mid v \in V(G)\}$.

Definición 1.1.11. Sean G una gráfica y S un subconjunto de $V(G)$. Diremos que S es **independiente** si para cualesquiera dos vértices u y v en S se cumple que $uv \notin A(G)$.

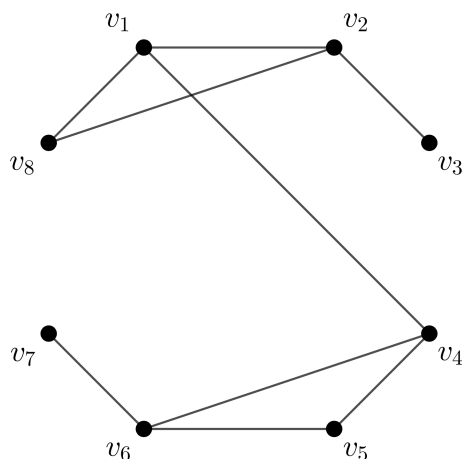
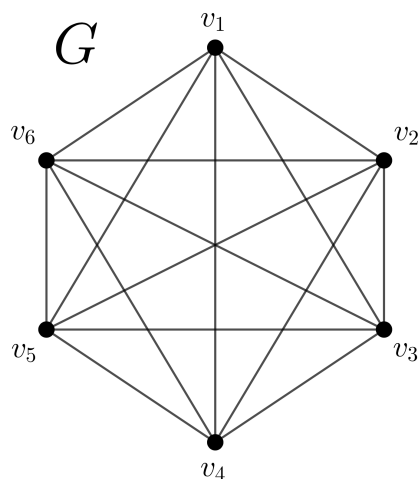
Para ejemplificar el resto de las definiciones consideremos a la gráfica de la figura 1.1. Para el conjunto $S = \{v_3, v_5\}$, tenemos que la vecindad abierta y la vecindad cerrada de S es $N(S) = \{v_2, v_4, v_6\}$ y $N[S] = \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, respectivamente. Observemos que $\delta(v_1) = 3$, $\delta(v_2) = 3$, $\delta(v_3) = 1$, $\delta(v_4) = 3$, $\delta(v_5) = 2$, $\delta(v_6) = 3$, $\delta(v_7) = 1$ y $\delta(v_8) = 2$. Así que, el grado mínimo y grado máximo de G es $\delta(G) = 1$ y $\Delta(G) = 3$, respectivamente. Por otro lado, notemos que $S' = \{v_3, v_4, v_7, v_8\}$ es un conjunto independiente en G .

1.2. Tipos de gráficas.

Definición 1.2.1. Sea G una gráfica. Diremos que G es **completa**, denotado por K_n , si para cualquier par de vértices u y v de $V(G)$ se tiene que $uv \in A(G)$.

En la figura 1.2 podemos apreciar a la gráfica completa G , K_6 .

Definición 1.2.2. Sea G una gráfica. Diremos que G es **k -partita** si existe una partición de $V(G)$ en k conjuntos independientes. En particular si $k=2$, diremos que la gráfica 2-partita es una gráfica **bipartita**.

Figura 1.1: Representación geométrica de una gráfica G Figura 1.2: G es la gráfica completa K_6

Definición 1.2.3. Sean G un gráfica bipartita y $\{V_1, V_2\}$ una partición de $V(G)$ en conjuntos independientes. Diremos que G es **bipartita completa** si todo vértice en V_1 es adyacente a todo vértice en V_2 . G será denotada por $K_{r,s}$ donde $|V_1| = r$ y $|V_2| = s$.

Definición 1.2.4. Sea G una gráfica. Diremos que G es una **biestrella** si se obtiene a partir de K_2 , con $V(K_2) = \{u, v\}$, al añadirle r aristas incidentes a u y s aristas incidentes a v , denotada por $B_{r,s}$.

Podemos apreciar en la figura 1.3 un ejemplo de una gráfica bipartita G , la gráfica bipartita completa $K_{5,2}$, y la gráfica biestrella $B_{3,3}$.

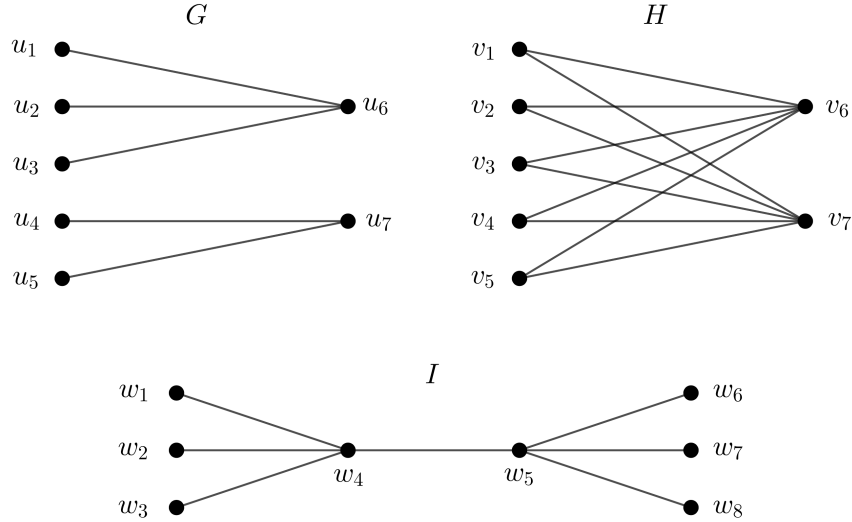


Figura 1.3: G es una gráfica bipartita, H es la gráfica bipartita completa $K_{5,2}$ e I es la biestrella $B_{3,3}$

1.3. Tipos de subgráficas.

Definición 1.3.1. Sean G y H dos gráficas. Diremos que H es **subgráfica** de G si $V(H) \subseteq V(G)$ y $A(H) \subseteq A(G)$.

Definición 1.3.2. Sean G una gráfica y H una subgráfica de G . Diremos que H es **generadora** si $V(H) = V(G)$.

Definición 1.3.3. Sean G una gráfica y H una subgráfica de G . Diremos que H es **inducida** siempre que $uv \in A(H)$ si y solo si $uv \in A(G)$ para cada subconjunto $\{u, v\}$ de $V(H)$.

Definición 1.3.4. Sean G una gráfica y S un subconjunto de $V(G)$. La **gráfica inducida por S** , denotada por $\langle S \rangle$, es la gráfica tal que $V(\langle S \rangle) = S$ y $A(\langle S \rangle) = \{uv \in A(G) \mid \{u, v\} \subseteq S\}$.

Definición 1.3.5. Sean G una gráfica y S un subconjunto de $A(G)$. La gráfica $G - S$ es tal que $A(G - S) = A(G) \setminus S$ y $V(G - S) = V(G)$.

Sea G la gráfica tal que $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ y $A(G) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_1, v_1v_5, v_2v_6, v_3v_7, v_4v_8, v_5v_6, v_6v_7, v_7v_8, v_8v_5\}$. En la figura 1.4 podemos apreciar a la gráfica G . Afirmamos que la gráfica H , con $V(H) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y $A(H) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_1\}$ es subgráfica de G ya que $V(H) \subseteq V(G)$ y $A(H) \subseteq A(G)$, podemos apreciar a la gráfica H en la figura 1.4. Afirmamos que la gráfica I , con $V(I) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ y $A(I) = \{v_1v_2, v_1v_5, v_2v_6, v_3v_4, v_3v_7, v_4v_8\}$ es subgráfica generadora de G ya que $V(I) = V(G)$. Se puede apreciar a la gráfica I en la figura 1.4.

Sea $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ un subconjunto de $V(G)$ y considere la gráfica J de la figura 1.4. Como $V(J) = S$ y $A(J) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_1, v_1v_5, v_5v_6, v_6v_2\} = \{uv \in A(G) \mid \{u, v\} \subseteq S\}$, se sigue que J es la gráfica inducida por S .

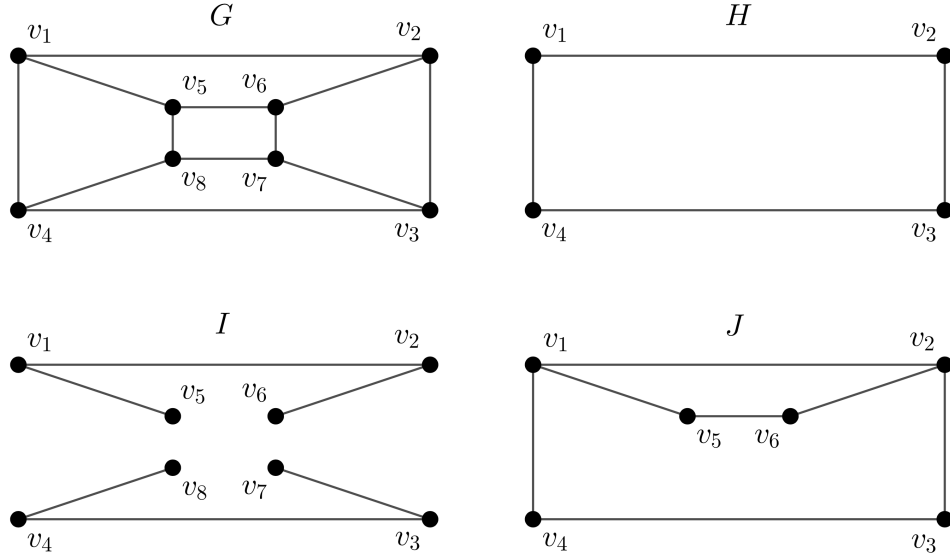


Figura 1.4: G es una gráfica, H es una subgráfica de G , I es una subgráfica generadora de G y J es la subgráfica inducida por el subconjunto S de $V(G)$

1.4. Operaciones en gráficas

Definición 1.4.1. Sean G y H dos gráficas. La **unión de G y H** , denotada por $G \cup H$, es la gráfica tal que $V(G \cup H) = V(G) \cup V(H)$ y $A(G \cup H) = A(G) \cup A(H)$.

Definición 1.4.2. Sean G y H dos gráficas. El **producto corona de G y H** , denotada por $G \circ H$, es la gráfica que se obtiene de tomar una copia de G y $|V(G)|$ copias de H , y unir cada vértice de la i -ésima copia de H al i -ésimo vértice de G con i en $\{1, \dots, |V(G)|\}$.

A continuación en la figura 1.5 exhibimos un ejemplo de una gráfica G , una gráfica H , la unión de G y H , a saber $G \cup H$ y el producto corona de G y H , a saber $G \circ H$.

1.5. Tipos de caminos

Definición 1.5.1. Sea G una gráfica. Diremos que una sucesión de vértices de G , $W = (v_0, \dots, v_n)$, es un **camino** si $v_i v_{i+1} \in A(G)$ para cada i en $\{0, 1, \dots, n-1\}$. Denotaremos a W por $v_0 v_n$ -camino.

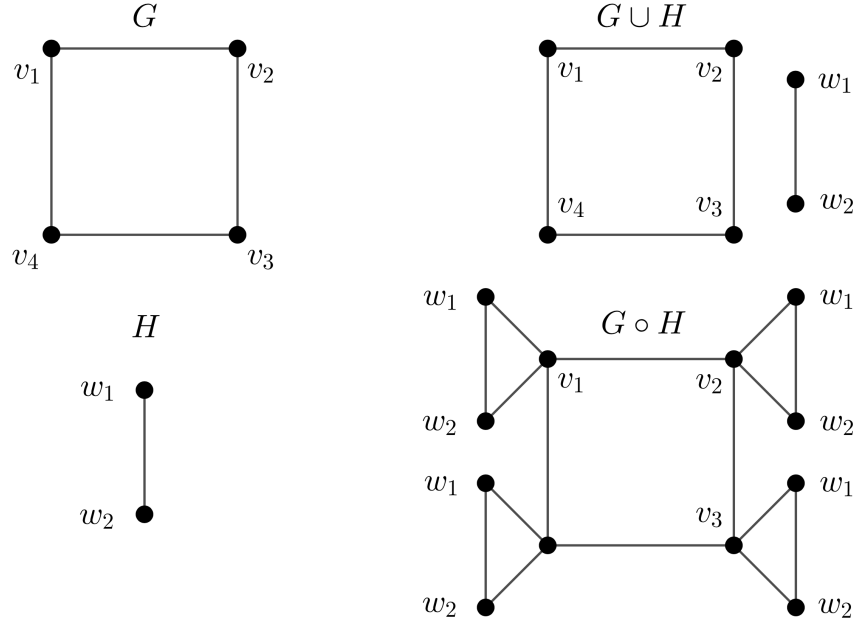


Figura 1.5: Gráfica G , gráfica H , la unión de G y H y el producto corona de G y H

1. Si W no repite vértices diremos que W es una **trayectoria**. Denotaremos a W por v_0v_n -trayectoria.
2. Si $v_0 = v_n$ diremos que W es un **camino cerrado**.
3. La **longitud del camino** W , denotado por $l(W)$, se define como n .
4. W es un **ciclo** si W es cerrado y no repite vértices, salvo el primero y el último, con longitud al menos tres.

Notación 1.5.1.

1. $A(W)$ denota al conjunto $\{v_i v_{i+1} \in A(G) \mid i \in \{0, \dots, n-1\}\}$.
2. $V(W)$ denota al conjunto $\{v_0, \dots, v_n\}$.
3. Si $W_1 = (x_0, \dots, x_k)$ y $W_2 = (x_k = y_0, \dots, y_r)$ son dos caminos, entonces el camino $(x_0, \dots, x_k = y_0, \dots, y_r)$ se denotará por $W_1 \cup W_2$.
4. Una trayectoria con n vértices será denotada por P_n .
5. Un ciclo con n vértices es denotado por C_n .

Definición 1.5.2. Sean G una gráfica y $\{u, v\}$ un subconjunto de $V(G)$. La **distancia** de u a v , denotada por $d(u, v)$, se define como $\min \{l(P) \mid P \text{ es una } uv\text{-trayectoria}\}$. Si no existe ninguna uv -trayectoria, definimos $d(u, v)$ como ∞ .

Definición 1.5.3. Sean G una gráfica y v en $V(G)$. La **excentricidad** de v , denotada por $e(v)$, se define como $\max \{d(v, w) \mid w \in V(G)\}$.

Definición 1.5.4. Sean G una gráfica y v en $V(G)$. El **diámetro** de G , denotado por $\text{diám}(G)$, se define como $\text{máx} \{e(v) \mid v \in V(G)\}$.

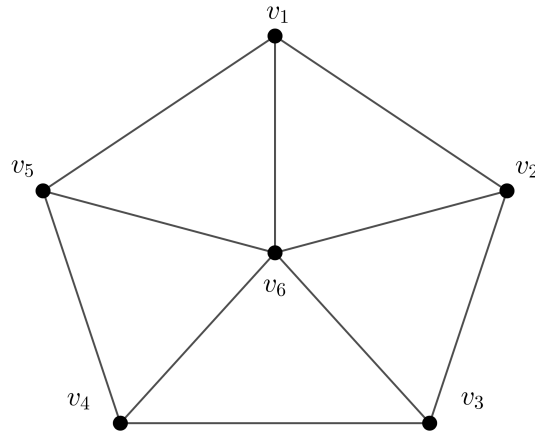


Figura 1.6: Gráfica para ejemplificar las definiciones 1.5.1, 1.5.2, 1.5.3 y 1.5.4

Ahora daremos un ejemplo de un camino, una trayectoria, un camino cerrado y un ciclo. Sea G la gráfica tal que $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ y $A(G) = \{v_1v_2, v_1v_6, v_2v_3, v_2v_6, v_3v_4, v_3v_6, v_4v_5, v_4v_6, v_5v_1, v_5v_6\}$. Se puede apreciar la gráfica G en la figura 1.6. Notemos que $W_1 = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ es un camino, ya que $v_i v_{i+1} \in A(G)$ para cada i en $\{1, 2, 3, 4\}$, y además la longitud de W_1 es 4; es decir, $l(W_1) = 4$. Por otro lado, como W_1 no repite vértices, entonces W_1 es una trayectoria, $W_3 = (v_1, v_2, v_6, v_5, v_4, v_6, v_1)$ es un camino cerrado y $W_4 = (v_3, v_4, v_5, v_6, v_3)$ es un ciclo, puesto que es un camino cerrado que no repite vértices, salvo el primero y el último.

Por otro lado, $d(v_1, v_1) = 0$, $d(v_1, v_2) = 1$, $d(v_1, v_3) = 2$, $d(v_1, v_4) = 2$, $d(v_1, v_5) = 1$, lo que implica que $e(v_1) = 2$. Más aún, $e(v_2) = 2$, $e(v_3) = 2$, $e(v_4) = 2$, $e(v_5) = 2$ y $e(v_6) = 1$. Así que, $\text{diám}(G) = 2$.

Definición 1.5.5. Sea G una gráfica. Diremos que G es **conexa** si para cada subconjunto $\{u, v\}$ de $V(G)$ existe un uv -camino (uv -trayectoria). En otro caso diremos que G es **inconexa**.

Notación 1.5.2. $\omega(G)$ es el número de componentes conexas de G .

Ahora, daremos un ejemplo de una gráfica conexa y una gráfica inconexa. Notemos que la gráfica G de la figura 1.7 es una gráfica conexa, puesto que para cada subconjunto $\{u, v\}$ de $V(G)$ existe un uv -camino. Por otro lado, la gráfica H de la figura 1.7 es inconexa, ya que no existe un $w_1 w_4$ -camino. También notemos que el número de componente conexas de G y H es $\omega(G) = 1$ y $\omega(H) = 3$, respectivamente.

Definición 1.5.6. Sean G una gráfica, uv en $A(G)$ y X y Y dos subconjuntos de $V(G)$. Diremos que uv es una **XY -arista** si $u \in X$ y $v \in Y$.

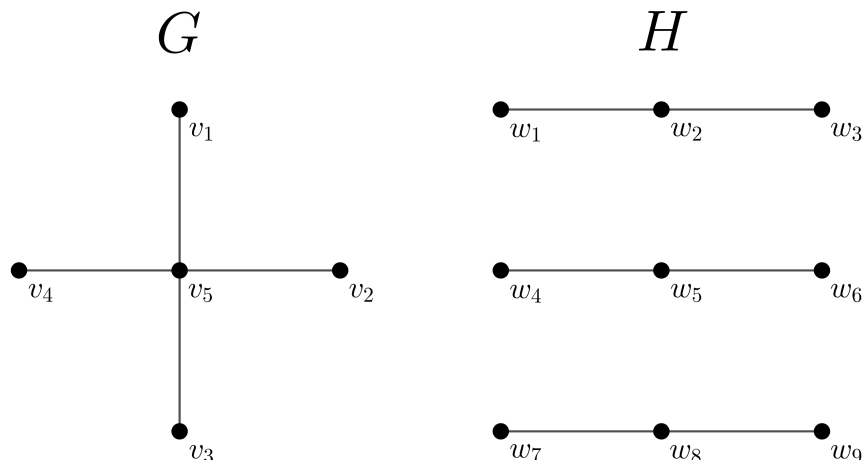


Figura 1.7: G es una gráfica conexa y H es una gráfica inconexa

El siguiente resultado nos da condiciones necesarias y suficientes para la conexidad de una gráfica.

Teorema 1.5.1. *Sea G una gráfica no trivial. G es conexa si y solo si para toda partición $\{X, Y\}$ de $V(G)$ existe una XY -arista.*

Demostración:

(\implies) Supongamos que G es conexa.

Sea $\{X, Y\}$ una partición arbitraria de $V(G)$. Demostraremos que existe una XY -arista. Como ambos conjuntos son no vacíos, se sigue que existe $\{u, v\}$ subconjunto de $V(G)$ tal que $u \in X$ y $v \in Y$. Puesto que G es conexa, entonces existe una uv -trayectoria, llamémosle T . Sin pérdida de generalidad, digamos que T es de la forma $T = (u=w_0, w_1, \dots, w_{r-1}, w_r=v)$. Definimos el conjunto $S = \{i \in \mathbb{N} \mid w_i \in X\}$, es claro que $S \neq \emptyset$, ya que $w_0 \in X$, además para cada i en S , se cumple que $i < r$, puesto que $w_r \in Y$. Así que, S es un conjunto acotado y finito, lo que implica que tiene máximo, digamos k , donde $k < r$, por lo que w_{k+1} es un vértice en $V(T)$ tal que $w_{k+1} \notin X$, lo que implica que $w_{k+1} \in Y$. Así, $w_k w_{k+1}$ es una XY -arista.

Por lo tanto, para toda partición $\{X, Y\}$ de $V(G)$ existe una XY -arista.

(\impliedby) Supongamos que para toda partición $\{X, Y\}$ de $V(G)$ existe una XY -arista.

Demostraremos que G es conexa. Sea $\{u, v\}$ un subconjunto de $V(G)$. Probaremos que existe una uv -trayectoria. Para lograr esto, primero definimos el conjunto $S = \{x \in V(G) \mid \text{Existe una } ux\text{-trayectoria}\}$. Afirmamos que $S = V(G)$. Procediendo por contradicción, supongamos que $S \neq V(G)$, lo que implica que existe un vértice w en $V(G)$ tal que $w \notin S$, se sigue que $w \in (V(G) \setminus S)$. Consideremos a la partición $\{S, V(G) \setminus S\}$ de $V(G)$, por hipótesis sabemos que existe una $S(V(G) \setminus S)$ -arista. Sin pérdida de generalidad, digamos que yz es una arista, con y en S y z en $V(G) \setminus S$. Como $y \in S$, entonces existe una uy -trayectoria, llamémosle T , lo que implica que $T \cup (y, z)$ es una uz -trayectoria con u en S y z en $(V(G) \setminus S)$, por lo que $z \in S$, lo cual es una contradicción. Así que, $S = V(G)$. Puesto que $v \in V(G)$, se sigue que existe

una uv -trayectoria, y como la elección de los vértices u y v fue arbitraria concluimos que G es conexa. ■

1.6. Gráfica de líneas y complemento.

Como vimos anteriormente, el grado de un vértice se puede definir apartir de la cardinalidad de su vecindad abierta. Puesto que en esta tesis se aborda un tema relacionado con conjuntos dominantes por aristas, entonces, con esto en mente, es sensato también definir el grado de una arista por lo que introduciremos el concepto de gráfica de líneas como sigue.

Definición 1.6.1. Sea G una gráfica, con $q \geq 1$. La **gráfica de líneas** de G , denotada por $L(G)$, es la gráfica tal que:

$V(L(G)) = A(G)$ y $A(L(G)) = \{ab \mid a \text{ y } b \text{ son aristas adyacentes en } G\}$.

A continuación, mostramos un ejemplo de la gráfica de líneas $L(G)$ de una gráfica G . Sea G la gráfica tal que $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ y $A(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\} = \{v_1v_5, v_2v_5, v_3v_5, v_4v_5\}$. La gráfica de líneas $L(G)$ consiste de $V(L(G)) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ y $A(L(G)) = \{e_1e_2, e_1e_3, e_1e_4, e_2e_3, e_2e_4, e_3e_4\}$. En la figura 1.8 podemos apreciar a la gráfica G y su gráfica de líneas $L(G)$.

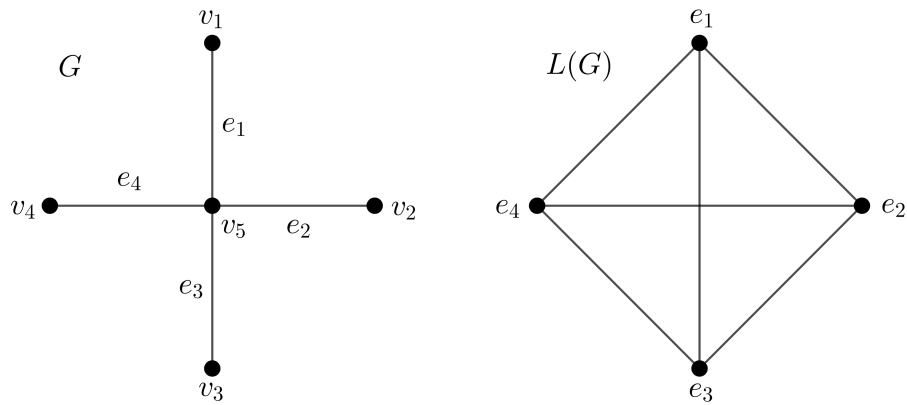


Figura 1.8: G es una gráfica y $L(G)$ es la gráfica de líneas de G

Definición 1.6.2. Sean G una gráfica y b en $A(G)$. La **vecindad abierta por aristas** de b , se define como $N_{L(G)}(b)$.

Definición 1.6.3. Sean G una gráfica y b en $A(G)$. La **vecindad cerrada por aristas** de b , se define como $N_{L(G)}[b]$.

De aquí en adelante cuando hablemos de la vecindad abierta y/o cerrada de una arista b , simplemente se escribirá $N(b)$ y/o $N[b]$ respectivamente.

Definición 1.6.4. Sean G una gráfica y b en $A(G)$. El **grado por aristas** de b , denotado por $\delta'(b)$, se define como $\delta_{L(G)}(b)$.

Definición 1.6.5. Sea G una gráfica. El **grado mínimo por aristas** de G , denotado por $\delta'(G)$, se define como $\delta(L(G))$.

Definición 1.6.6. Sea G una gráfica. El **grado máximo por aristas** de G , denotado por $\Delta'(G)$, se define como $\Delta(L(G))$.

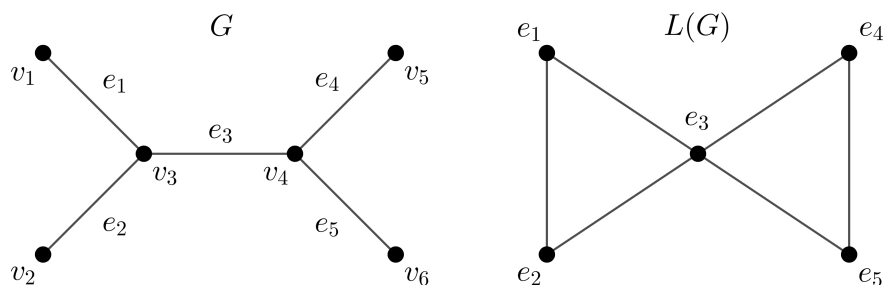


Figura 1.9: G es una gráfica y $L(G)$ es la gráfica de líneas de G

Sea G la gráfica tal que $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ y $A(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, se sigue que su gráfica de líneas $L(G)$ consiste de $V(L(G)) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ y $A(L(G)) = \{e_1e_2, e_1e_3, e_2e_3, e_3e_4, e_3e_5, e_4e_5\}$. Se puede apreciar a la gráfica G y su gráfica de líneas $L(G)$ en la figura 1.9. Sea e_1 en $A(G)$. La vecindad abierta y la vecindad cerrada de e_1 es $N_{L(G)}(e_1) = \{e_2, e_3\}$ y $N_{L(G)}[e_1] = \{e_1, e_2, e_3\}$, respectivamente. Notemos que $\delta'(e_1) = 2$, $\delta'(e_2) = 2$, $\delta'(e_3) = 4$, $\delta'(e_4) = 2$ y $\delta'(e_5) = 2$.

Así que, el grado mínimo por aristas y el grado máximo por aristas de G es $\delta'(G) = 2$ y $\Delta'(G) = 4$, respectivamente.

Definición 1.6.7. Sea G una gráfica. El **complemento** de G , denotado por G^c , es la gráfica tal que $V(G) = V(G^c)$ y $uv \in A(G^c)$ si y solo si $uv \notin A(G)$.

Sea G la gráfica tal que $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ y $A(G) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_1\}$. Notemos que $V(G^c) = V(G)$ y además $\{v_1v_3, v_3v_5, v_5v_2, v_2v_4, v_4v_1\} \not\subseteq A(G)$, lo que implica que $\{v_1v_3, v_3v_5, v_5v_2, v_2v_4, v_4v_1\} = A(G^c)$. En la figura 1.10 se exhibe la gráfica G con su complemento.

El siguiente teorema nos muestra algunas condiciones bajo las cuales se cumple que $\text{diám}(L(G)) \leq 2$. Cabe mencionar que la demostración del teorema se puede encontrar en el artículo *Distance spectra and distance energies of iterated line graphs of regular graphs* [4]. Este resultado será muy importante para dar una cota superior del número

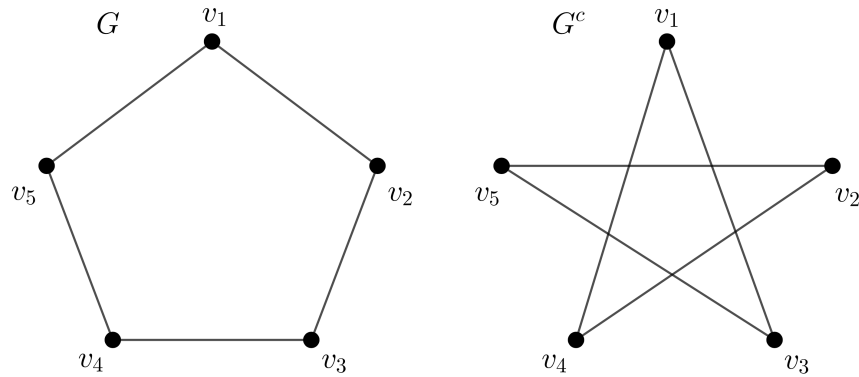


Figura 1.10: G es una gráfica y G^c es el complemento de G

de dominación por aristas transversal de apareamientos máximos en la gráfica de líneas.

Teorema 1.6.1. (Raman, H.S, Revankar, D.S, Gutman, I, and Walikar, H.B. (2009)). *Sea G una gráfica. Si el $\text{diám}(G) \leq 2$ y ninguna de las gráficas F_1 , F_2 y F_3 de la figura 5.3 es una subgráfica inducida de G , entonces el $\text{diám}(L(G)) \leq 2$.*

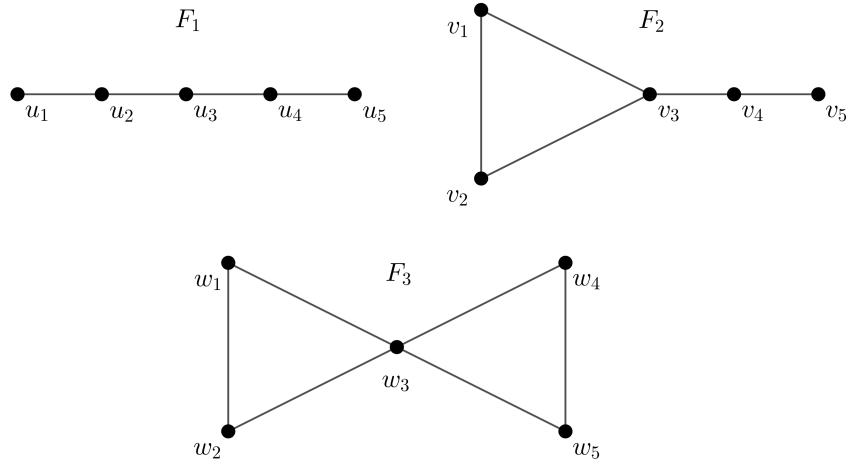


Figura 1.11: Gráfica F_1 , gráfica F_2 y gráfica F_3

1.7. Apareamientos.

Definición 1.7.1. *Sean G un gráfica y M un subconjunto de $A(G)$. Diremos que M es un **apareamiento** si para cualesquiera dos aristas a y b en M se cumple que a y b no son adyacentes.*

Definición 1.7.2. Sean G una gráfica, v en $V(G)$ y M un apareamiento en G . Diremos que v es M **saturado** si existe una arista en M que incide en v .

Definición 1.7.3. Sean G una gráfica y $\{u, v\}$ un subconjunto de $V(G)$. Diremos que u y v están M **apareados** si $uv \in M$.

Definición 1.7.4. Sea G una gráfica. Diremos que M es **máximo** si no existe un apareamiento M' tal que $|M| < |M'|$.

Definición 1.7.5. Sea G una gráfica. Diremos que M es un **apareamiento perfecto** si M satura a cada vértice de G .

De la definición de apareamiento es claro que el conjunto vacío es un apareamiento. Si $|A(G)| \geq 1$, entonces para uv en $A(G)$ se tiene que el conjunto $\{uv\}$ es un apareamiento de G . Por lo tanto, toda gráfica no trivial tiene al menos un apareamiento.

Definición 1.7.6. Sea G una gráfica. El **número de apareamiento** de G , denotado por $\beta_1(G)$, se define como $\max\{|M| : M \text{ es un apareamiento en } G\}$.

Notación 1.7.1. Un $\beta_1(G)$ -conjunto es un apareamiento de cardinalidad máxima en G .

Observación 1.7.1. Sean G una gráfica y M un apareamiento en G . De la definición de apareamiento y la definición de $\beta_1(G)$ se deduce lo siguiente:

1. Si M es un apareamiento perfecto, entonces G tiene un número par de vértices.
2. M es un apareamiento perfecto si y solo si $\beta_1(G) = \frac{n}{2}$.
3. Si $|A(G)| \geq 1$, entonces $1 \leq \beta_1(G) \leq \frac{n}{2}$.
4. Si $|A(G)| \geq 1$ y n es impar, entonces $\beta_1(G) \leq \frac{n-1}{2}$.
5. Un apareamiento perfecto es un apareamiento máximo de G .

Sea G la gráfica tal que $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ y $A(G) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_1v_5, v_1v_6, v_2v_3, v_2v_4, v_2v_5, v_2v_6, v_3v_4, v_3v_5, v_3v_6, v_4v_5, v_4v_6, v_5v_6\}$. Podemos apreciar a la gráfica G en la figura 1.12. Ahora mostraremos un ejemplo de un apareamiento M de G , un vértice M saturado, dos vértices M apareados, un apareamiento máximo, un apareamiento perfecto y el número de apareamiento de G . Sea $M = \{v_1v_2, v_3v_4\}$, se sigue que M es un apareamiento de G , puesto que ningún par de sus aristas son adyacentes entre sí. Además, el vértice v_1 está M saturado, puesto que la arista v_1v_2 de M incide en v_1 . Por otro lado, los vértices v_3 y v_4 están M apareados, ya que $v_3v_4 \in M$. Sea $M' = \{v_1v_2, v_3v_4, v_5v_6\}$, como todos los vértices de G están M' saturados, se sigue que M' es un apareamiento perfecto de G , en particular es un apareamiento máximo de G . Por lo anterior, se concluye que el número de apareamiento de G es $\beta_1(G) = 3$.

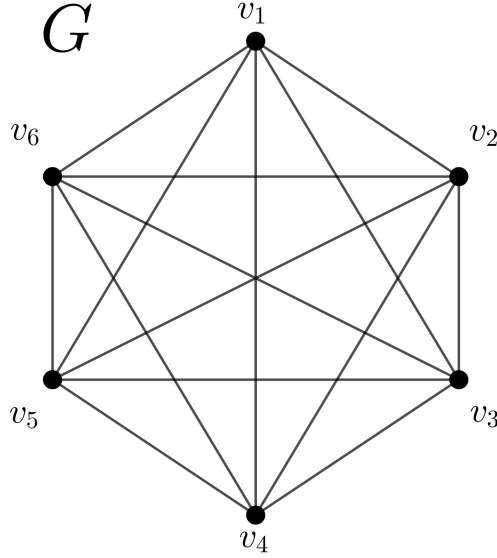


Figura 1.12: \$G\$ es la gráfica completa \$K_6\$

Teorema 1.7.1. Si \$P_n\$ es una trayectoria, con \$n \ge 2\$ entonces \$\beta_1(P_n) = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil\$.

Demostración: Si \$n \in \{2, 3\}\$, se deduce fácilmente que \$\beta_1(P_n) = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil = 1\$.

Si \$n \ge 4\$, entonces supongamos que \$P_n = (v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n)\$ es una \$v_1 v_n\$-trayectoria. Consideremos dos casos sobre \$n\$, si \$n\$ es par o si \$n\$ es impar.

1. Si \$n\$ es par.

Definimos los siguientes conjuntos:

$$N_1 = \{v_{2i+1}v_{2i+2} \mid 0 \leq i \leq \frac{n-2}{2}\} = \{v_1v_2, v_3v_4, \dots, v_{n-3}v_{n-2}, v_{n-1}v_n\}.$$

$$N_2 = \{v_{2i+2}v_{2i+3} \mid 0 \leq i \leq \frac{n-4}{2}\} = \{v_2v_3, v_4v_5, \dots, v_{n-4}v_{n-3}, v_{n-2}v_{n-1}\}.$$

Observemos que \$N_1\$ es un apareamiento perfecto, entonces de la observación 0.2.1 se tiene que \$\beta_1(P_n) = \frac{n}{2}\$.

Por otro lado, como \$n\$ es par, entonces \$n = 2k\$ para algún \$k\$ en \$\mathbb{N}\$, por lo que \$\frac{n}{2} = k \in \mathbb{N}\$. Puesto que \$\frac{n-2}{2} = k-1 \in \mathbb{N}\$, ya que \$n \ge 4\$, y \$k-1 = \frac{n-2}{2} \leq \frac{n-1}{2} \leq \frac{n}{2} = k\$, donde \$\frac{n-1}{2} \in \mathbb{Q}\$, se sigue que \$\lceil \frac{n-1}{2} \rceil = \frac{n}{2}\$.

Por lo tanto, \$\beta_1(P_n) = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil\$, si \$n\$ es par con \$n \ge 4\$.

2. Si \$n\$ es impar.

Definimos los siguientes conjuntos:

$$N_1 = \{v_{2i+1}v_{2i+2} \mid 0 \leq i \leq \frac{n-3}{2}\} = \{v_1v_2, v_3v_4, \dots, v_{n-4}v_{n-3}, v_{n-2}v_{n-1}\}.$$

$$N_2 = \{v_{2i+2}v_{2i+3} \mid 0 \leq i \leq \frac{n-3}{2}\} = \{v_2v_3, v_4v_5, \dots, v_{n-3}v_{n-2}, v_{n-1}v_n\}.$$

Note que por definición se tiene que N_1 y N_2 son apareamientos, donde $|N_1| = \frac{n-1}{2}$ y $|N_2| = \frac{n-1}{2}$. Como N_1 es un apareamiento de cardinalidad $\frac{n-1}{2}$, entonces $\frac{n-1}{2} \leq \beta_1(P_n)$. Luego, por la observación 0.5.1 se tiene que $\beta_1(P_n) \leq \frac{n-1}{2}$, lo que implica que $\beta_1(P_n) = \frac{n-1}{2}$.

Como n es impar se tiene que $\frac{n-1}{2} \in \mathbb{N}$, esto implica que $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil = \frac{n-1}{2}$.

Por lo tanto, $\beta_1(P_n) = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$, si n es impar con $n \geq 4$. ■

Teorema 1.7.2. *Si C_n es un ciclo, con $n \geq 3$ entonces $\beta_1(C_n) = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$.*

Demostración: Si $n = 3$, se deduce fácilmente que $\beta_1(C_3) = \lceil \frac{3-1}{2} \rceil = 1$.

Si $n \geq 4$, entonces nuestro ciclo se ve de la siguiente forma $C_n = (v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n, v_1)$. Consideremos dos casos sobre n , si n es par o si n es impar.

1. Si n es par.

Definimos el conjunto:

$$N_1 = \{v_{2i+1}v_{2i+2} \mid 0 \leq i \leq \frac{n-2}{2}\} = \{v_1v_2, v_3v_4, \dots, v_{n-3}v_{n-2}, v_{n-1}v_n\}.$$

Observemos que N_1 es un apareamiento perfecto, entonces de la observación 1.7.1 (2) se tiene que $\beta_1(C_n) = \frac{n}{2}$.

Por otro lado como n es par, entonces $n = 2k$ para algún k en \mathbb{N} , por lo que $\frac{n}{2} = k \in \mathbb{N}$. Puesto que $\frac{n-2}{2} = k-1 \in \mathbb{N}$, ya que $n \geq 4$, y $k-1 = \frac{n-2}{2} \leq \frac{n-1}{2} \leq \frac{n}{2} = k$, donde $\frac{n-1}{2} \in \mathbb{Q}$, se sigue que $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil = \frac{n}{2}$.

Por lo tanto, $\beta_1(C_n) = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$, si n es par con $n \geq 4$.

2. Si n es impar.

Definimos los siguientes conjuntos:

$$N_1 = \{v_{2i+1}v_{2i+2} \mid 0 \leq i \leq \frac{n-3}{2}\} = \{v_1v_2, v_3v_4, \dots, v_{n-4}v_{n-3}, v_{n-2}v_{n-1}\}.$$

$$N_2 = \{v_{2i+2}v_{2i+3} \mid 0 \leq i \leq \frac{n-3}{2}\} = \{v_2v_3, v_4v_5, \dots, v_{n-3}v_{n-2}, v_{n-1}v_n\}.$$

Note que por definición se tiene que N_1 y N_2 son apareamientos, donde $|N_1| = \frac{n-1}{2}$ y $|N_2| = \frac{n-1}{2}$. Como N_1 es un apareamiento de cardinalidad $\frac{n-1}{2}$, entonces $\frac{n-1}{2} \leq \beta_1(C_n)$. Luego, por la observación 1.7.1 (3) se tiene que $\beta_1(C_n) \leq \frac{n-1}{2}$, lo que implica que $\beta_1(C_n) = \frac{n-1}{2}$.

Como n es impar, observemos que $\frac{n-1}{2} \in \mathbb{N}$, esto implica que $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil = \frac{n-1}{2}$.

Por lo tanto, $\beta_1(C_n) = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$, si n es impar con $n \geq 4$. ■

El siguiente teorema es de gran importancia, ya que nos dice cuándo una gráfica bipartita G tiene un apareamiento que satura a cada uno de los vértices de alguna de las particiones de los vértices de G .

Teorema 1.7.3. (*Teorema de Hall*) Sea G una gráfica bipartita con $\{X, Y\}$ una partición de $V(G)$ en conjuntos independientes. G tiene un apareamiento que satura a cada vértice de X si y solo si $|N(S)| \geq |S|$, para cada subconjunto no vacío S de X .

Corolario 1.7.1. Sea G una gráfica bipartita completa con $\{X, Y\}$ una partición de $V(G)$ en conjuntos independientes tal que $|X| \leq |Y|$, entonces G tiene un apareamiento que satura a cada vértice de X .

Demostración: Como $|X| \leq |Y|$, sin pérdida de generalidad digamos que $|X| = r$ y $|Y| = s$. Puesto que G es una gráfica bipartita completa, se sigue que $|N(H)| = s$ para cada subconjunto no vacío H de X . Por su parte, para cada subconjunto H de X se tiene que $|H| \leq |X| = r$, lo que implica que $|H| \leq |X| = r \leq s = |N(H)|$. Así que, $|H| \leq |N(H)|$ para cada subconjunto no vacío H de X . Por lo tanto, por el teorema 1.7.3 (teorema de Hall), G tiene un apareamiento que satura a cada vértice de X . ■

1.8. Conjuntos dominantes por aristas.

Definición 1.8.1. Sea G una gráfica y S un subconjunto de $A(G)$. Diremos que S es un **conjunto dominante por aristas** si toda arista en $A(G) \setminus S$ es adyacente a alguna arista en S .

Definición 1.8.2. Sea G una gráfica. El **número de dominación por aristas** de G , denotado por $\gamma'(G)$, se define como $\min \{|S| : S \text{ es un conjunto dominante por aristas en } G\}$.

Notación 1.8.1. Un $\gamma'(G)$ -conjunto es un conjunto dominante por aristas de cardinalidad mínima.

A continuación, exhibiremos un ejemplo de un conjunto dominante por aristas de una gráfica G y daremos su número de dominación por aristas. Sea G una gráfica, con $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$ y $A(G) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_4v_5, v_6v_8, v_7v_8, v_9v_8, v_{10}v_8\}$. Se puede apreciar la representación geométrica de la gráfica G en la figura 1.13. Notemos que $S = \{v_1v_2, v_2v_3, v_4v_5, v_6v_8, v_7v_8\}$ es un conjunto dominante por aristas, ya que $A(G) \setminus S = \{v_9v_8, v_{10}v_8\}$ donde v_9v_8 es adyacente a v_6v_8 en S , e igualmente $v_{10}v_8$ es adyacente a v_6v_8 en S . Por otro lado, el número de dominación por aristas de G es $\gamma'(G) = 3$, ya que $\{v_1v_2, v_4v_5, v_6v_8\}$ es un conjunto dominante por aristas de cardinalidad mínima.

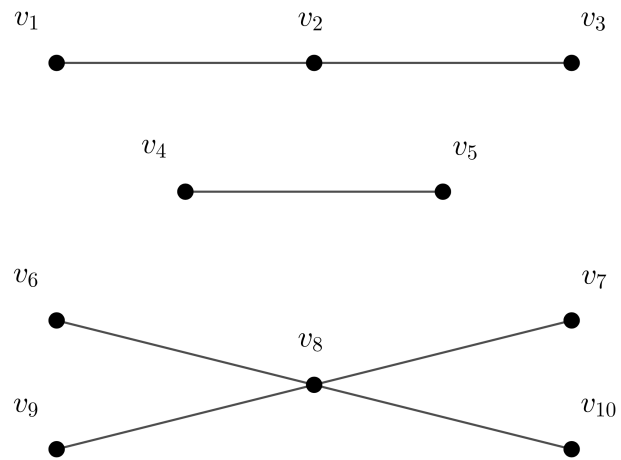


Figura 1.13: Gráfica para ejemplificar las definiciones 1.8.1 y 1.8.2

Capítulo 2

Primeros resultados y cotas generales

En este primer capítulo definiremos lo que es un conjunto dominante por aristas transversal de apareamientos máximos y también definiremos el número $\gamma'_{mt}(G)$. Notaremos que el número $\gamma'_{mt}(G)$ siempre existe para cualquier gráfica G , y además que este número está acotado inferiormente y superiormente por uno y la cardinalidad de $A(G)$, respectivamente. También veremos un resultado que muestra la relación que existe entre los números $\gamma'(G)$ y $\gamma'_{mt}(G)$ de una gráfica G . Por otra parte, observaremos bajo que circunstancias $\gamma'_{mt}(G) = 1$ y $\gamma'_{mt}(G) = m$.

Definición 2.0.1. Sean G una gráfica y S un subconjunto de $A(G)$. Diremos que S es un **conjunto dominante por aristas transversal de apareamientos máximos** si S es un conjunto dominante por aristas y además S interseca a todo apareamiento máximo de G .

Definición 2.0.2. Sea G una gráfica. El **número de dominación por aristas transversal de apareamientos máximos** de G , denotado por $\gamma'_{mt}(G)$, se define como $\min \{|S| : S \text{ es un conjunto dominante por aristas transversal de apareamientos máximos}\}$

Notación 2.0.1. Un $\gamma'_{mt}(G)$ -conjunto es un conjunto dominante por aristas transversal de apareamientos máximos de cardinalidad mínima.

A continuación, mostraremos un ejemplo de un conjunto dominante por aristas transversal de apareamientos máximos de una gráfica G y daremos su número de dominación por aristas transversal de apareamientos máximos. Sea G una gráfica, con $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ y $A(G) = \{v_1v_2, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_7v_8\}$. Podemos apreciar la representación geométrica de la gráfica G en la figura 2.1. Notemos que $S = \{v_1v_2, v_3v_4, v_4v_5, v_7v_8\}$ es un conjunto dominante por aristas transversal de apareamientos máximos, ya que $A(G) \setminus S = \{v_5v_6\}$ donde v_5v_6 es adyacente a v_4v_5 en S , lo que implica que S es un conjunto dominante de G , y además S interseca al único apareamiento máximo de G , a saber $\{v_1v_2, v_3v_4, v_5v_6, v_7v_8\}$. Por otro lado, el número de dominación por aristas transversal de apareamientos máximos de G es $\gamma'_{mt}(G) = 3$, ya

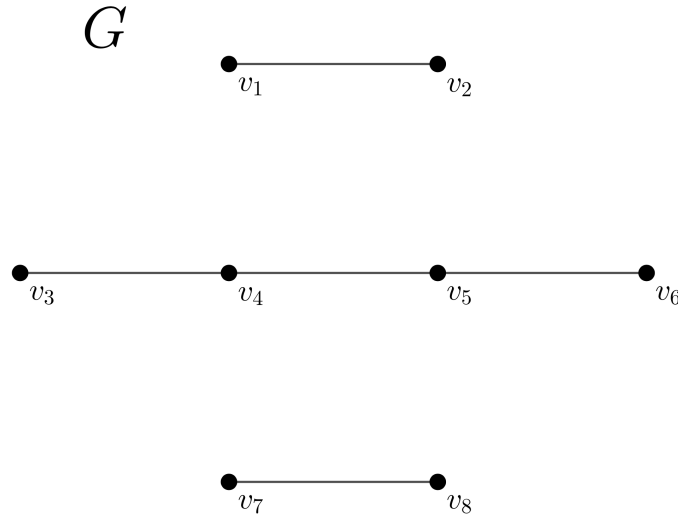


Figura 2.1: Gráfica para ejemplificar las definiciones 2.0.1 y 2.0.2

que $\{v_1v_2, v_4v_5, v_7v_8\}$ es un conjunto dominante por aristas transversal de apareamientos máximos de cardinalidad mínima.

El siguiente resultado prueba que para cualquier gráfica G el número $\gamma'_{mt}(G)$ siempre existe, y además está acotado inferiormente y superiormente.

Teorema 2.0.1. *Sea G una gráfica con $A(G) \neq \emptyset$, entonces $1 \leq \gamma'_{mt}(G) \leq m$.*

Demostración: Es claro que $A(G)$ es un conjunto dominante por aristas. Por otro lado, sabemos que para cualquier apareamiento máximo M de G , se tiene que el conjunto $A(G)$ lo interseca. Por lo tanto, $A(G)$ es un conjunto dominante por aristas transversal de apareamientos máximos, lo que implica que $\gamma'_{mt}(G) \leq m$. Como $A(G) \neq \emptyset$, entonces cualquier conjunto dominante por aristas tiene al menos una arista, lo que implica que $1 \leq \gamma'_{mt}(G)$. Así, $1 \leq \gamma'_{mt}(G) \leq m$. ■

El siguiente teorema muestra la relación que existe entre los números $\gamma'(G)$ y $\gamma'_{mt}(G)$.

Teorema 2.0.2. *Sea G una gráfica, entonces $\gamma'(G) \leq \gamma'_{mt}(G)$.*

Demostración: Sea S' un $\gamma'_{mt}(G)$ -conjunto. Puesto que en particular S' es un conjunto dominante por aristas en G , se sigue que $\gamma'(G) \leq |S'|$.

Por lo tanto, $\gamma'(G) \leq \gamma'_{mt}(G) = |S'|$. ■

A partir del teorema anterior sabemos que $\gamma'(G) \leq \gamma'_{mt}(G)$ para cualquier gráfica G . El siguiente teorema muestra el caso particular cuando G tiene al menos una arista aislada y su relación con el teorema 2.0.2. Cabe mencionar que la siguiente demostración que aquí se presenta es una demostración diferente a la que se da en el artículo.

Teorema 2.0.3. *Sea G una gráfica con al menos una arista aislada, entonces $\gamma'_{mt}(G) = \gamma'(G)$.*

Demostración: Puesto que G tiene al menos una arista aislada, entonces sea $W = \{u_1v_1, \dots, u_rv_r\}$ el conjunto de aristas aisladas de G . Sea S un $\gamma'(G)$ -conjunto, como el conjunto W no es adyacente a ninguna arista en G , se sigue que $\{u_1v_1, \dots, u_rv_r\} \subseteq S$. Por otro lado para cualquier apareamiento máximo M se cumple que $\{u_1v_1, \dots, u_rv_r\} \subseteq M$, por lo que S interseca a todo apareamiento máximo, lo que implica que S es un conjunto dominante por aristas transversal de apareamientos máximos. Por lo tanto, $\gamma'_{mt}(G) \leq |S| = \gamma'(G)$. Por el teorema 2.0.2 se tiene que $\gamma'(G) \leq \gamma'_{mt}(G)$. Por lo tanto, $\gamma'_{mt}(G) = \gamma'(G)$. ■

Corolario 2.0.1. *Para cualquier gráfica G tal que $G = (H \cup K_2)$, donde $V(H) \cap V(K_2) = \emptyset$, se cumple que $\gamma'_{mt}(G) = \gamma'(G)$.*

Demostración: Supongamos que $V(K_2) = \{u, v\}$. Como uv es una arista aislada, se sigue del teorema 2.0.3 que $\gamma'_{mt}(G) = \gamma'(G)$. ■

Como vimos en el teorema 2.0.1, para cualquier gráfica G se tiene $1 \leq \gamma'_{mt}(G) \leq m$. El siguiente teorema muestra bajo qué circunstancias se cumple que $\gamma'_{mt}(G) = 1$.

Teorema 2.0.4. *Sea G una gráfica conexa, entonces $\gamma'_{mt}(G) = 1$ si y solo si $G \cong K_2$.*

Demostración:

(\implies) Supongamos que $\gamma'_{mt}(G) = 1$.

Primero probaremos que $|A(G)| = 1$. Procediendo por contradicción, supongamos que $|A(G)| > 1$. Sea S un $\gamma'_{mt}(G)$ -conjunto, entonces S es de la forma $\{uv\}$ con uv en $A(G)$, como S es un conjunto dominante por aristas, se sigue que toda arista en $A(G) \setminus S = A(G) \setminus \{uv\}$ debe ser adyacente a la arista uv . Por lo tanto G debe ser de alguna de las formas que se pueden apreciar en la figura 2.2. Así que, consideremos los siguientes casos sobre G , respecto a las gráficas de la figura 2.2.

1. En este caso G es una estrella. Por otro lado, podemos apreciar en la figura 2.2 que S no interseca a todo apareamiento máximo, ya que cada $\{uw_i\}$ es un apareamiento máximo, para toda i en $\{1, \dots, m-1\}$.
2. Este caso de igual forma G es una estrella, lo que implica que este caso es análogo al caso (1).
3. En este caso G es una biestrella. Por otro lado, podemos apreciar en la figura 2.2 que S no interseca a ningún apareamiento máximo, ya que los apareamientos máximos son de la forma $\{uw_i, vw_j\}$ con i en $\{1, \dots, r\}$ y j en $\{r+1, \dots, m-1\}$.

Como los tres casos nos llevan a una contradicción concluimos que $|A(G)| \neq 1$, lo que implica que $|A(G)| = 1$. Regresando a nuestra demostración original, y puesto que $|A(G)| = 1$ podemos suponer sin pérdida de generalidad que $A(G) = \{uv\}$, por lo que concluimos que $G \cong K_2$. Por lo tanto, $G \cong K_2$.

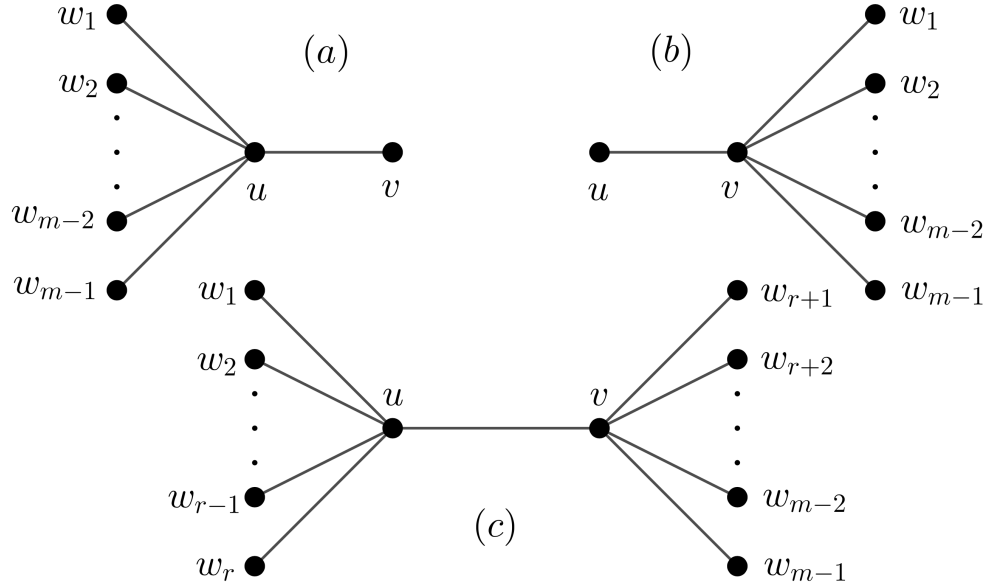


Figura 2.2: (a) es la gráfica del caso 1, (b) es la gráfica del caso 2 y (c) es la gráfica del caso 3

(\Leftarrow) Supongamos que $G \cong K_2$.

Como $A(G)$ es un $\gamma'_{mt}(G)$ -conjunto, y además $|A(G)| = 1$, entonces se concluye que $\gamma'_{mt}(G) = 1$. ■.

Por el teorema 2.0.1 sabemos que para cualquier gráfica G se tiene $1 \leq \gamma'_{mt}(G) \leq m$. En el siguiente teorema se contempla el caso cuando $\gamma'_{mt}(G) = m$.

Teorema 2.0.5. *Para cualquier gráfica conexa G tal que $|A(G)| = m$, se cumple que $\gamma'_{mt}(G) = m$ si y solo si $G \cong K_{1,n-1}$ o $G \cong K_3$.*

Demostración:

(\Rightarrow) Ahora supongamos que $\gamma'_{mt}(G) = m$.

Procediendo por contradicción, supongamos que $G \not\cong K_{1,n-1}$ y $G \not\cong K_3$. Sea u un vértice en $V(G)$, como G es conexa, entonces existe al menos otro vértice, digamos v , al que es adyacente u . Puesto que $G \not\cong K_{1,n-1}$, se sigue que existe un vértice que no es adyacente a u , digamos w . Sea $\{V_1, V_2\}$ una partición de los vértices de G , donde $V_1 = \{u, v\}$ y $V_2 = V(G) \setminus \{u, v\}$, es claro que $V_2 \neq \emptyset$, ya que $w \in V_2$.

Como G es una gráfica conexa y $\{V_1, V_2\}$ es una partición de los vértices de G , por el teorema 1.5.1, entonces existe una V_1V_2 -arista, sin pérdida de generalidad suponemos que esta arista es vw con $v \in V_1$ y $w \in V_2$. Notemos que $S' = A(G) \setminus \{uv\}$ es un conjunto dominante por aristas, ya que $A(G) \setminus S' = \{uv\}$, donde uv es adyacente a la arista vw la cual pertenece a S' . Puesto que S' es un conjunto dominante por aristas, entonces S' no intersecta a todo apareamiento máximo, ya que $|S'| = m - 1$ y $\gamma'_{mt}(G) = m$. Por lo tanto, si M es un apareamiento máximo de G que no intersecta a S' , se sigue que $M = \{uv\}$. Así, $\beta_1(G) = 1$.

De lo visto en el párrafo anterior se tiene que la gráfica (a) de la figura 2.3 es una subgráfica de G .

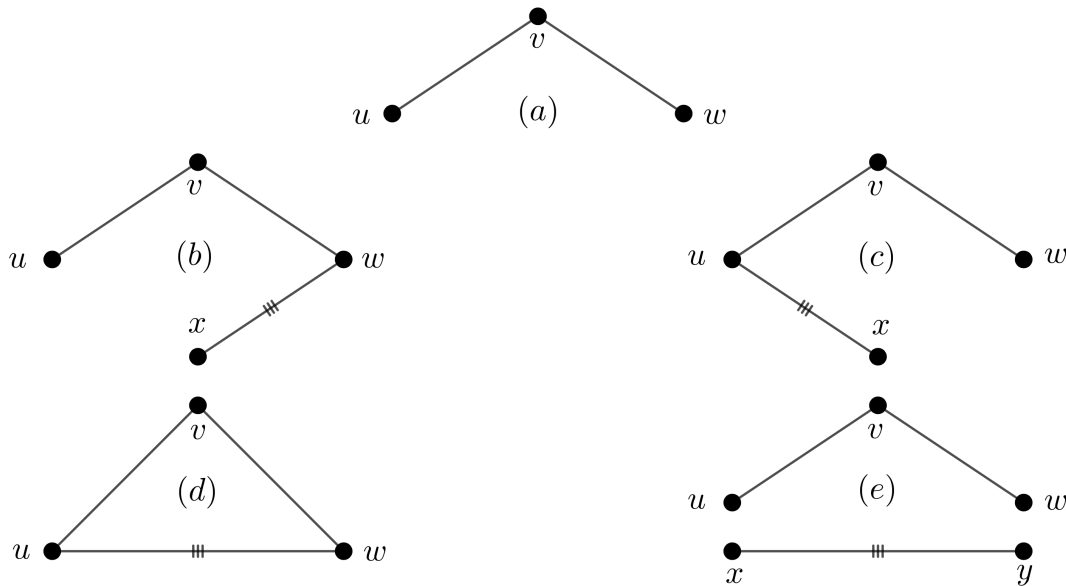


Figura 2.3: $\gamma'_{mt}(G) = m$

Puesto que $G \not\cong K_{1,n-1}$, entonces existe una arista que no incide en v , digamos xy . Consideremos los siguientes casos sobre xy :

1. $y \in \{u, w\}$ y $x \notin \{u, w\}$.

Si $y = w$. En este caso la gráfica (b) de la figura 2.3 es una subgráfica de G . Así, $M = \{uv, wx\}$ es un apareamiento de cardinalidad dos de G , lo cual es una contradicción, ya que $\beta_1(G) = 1$.

Si $y = u$. En este caso la gráfica (c) de la figura 2.3 es una subgráfica de G , pero este caso es análogo al caso anterior.

Por lo tanto, de lo visto anteriormente concluimos que la gráfica G no contiene como subgráficas a la gráfica (b) ni a la gráfica (c) de la figura 2.3.

2. $x = u$ y $y = w$.

En este caso la gráfica (d) de la figura 2.3 es una subgráfica de G . Puesto que

$G \not\cong K_3$, entonces existe un vértice distinto de u , v y w , llamémosle z . Además, consideremos la siguiente partición de los vértices de G , $\{V_1 = \{u, v, w\}, V_2 = A(G) \setminus \{u, v, w\}\}$, $V_2 \neq \emptyset$, ya que $z \in V_2$. Como G es conexa, entonces existe una V_1V_2 -arista, digámosle e . Por lo tanto, e tiene tres opciones:

Si e incide en u . Entonces tenemos a la gráfica (c) de la figura 2.3 como subgráfica de G , lo cual es una contradicción, por el caso anterior.

Si e incide en w . Entonces tenemos a la gráfica (b) de la figura 2.3 como subgráfica de G , lo cual es una contradicción, por el caso anterior.

Si e incide en v . Entonces $M = \{uw, e\}$ es un apareamiento de cardinalidad dos, lo cual es una contradicción, ya que $B_1(G) = 1$.

3. $\{x, y\} \cap \{u, w\} = \emptyset$.

En este caso la gráfica (e) de la figura 2.3 es una subgráfica de G . Es claro que $M_1 = \{uv, xy\}$ y $M_2 = \{vw, xy\}$ son apareamientos de cardinalidad dos, lo cual es una contradicción, ya que $\beta_1(G) = 1$.

Como ninguno de estos casos es posible, concluimos que nuestra suposición es falsa, por lo que $G \cong K_{1, n-1}$ o $G \cong K_3$.

(\Leftarrow) Primero supongamos que $G \cong K_{1, n-1}$ o $G \cong K_3$.

Entonces en ambos casos tenemos que todo apareamiento máximo de G es de cardinalidad uno, lo que implica que $A(G)$ es un $\gamma'_{mt}(G)$ -conjunto. Por lo tanto, $\gamma'_{mt}(G) = m$.

■

Capítulo 3

Trayectorias, ciclos y algo más

En este capítulo veremos cuál es el número de dominación por aristas transversal de apareamientos máximos de una trayectoria P_n , un ciclo C_n , una biestrella $B_{r,s}$ y una gráfica bipartita completa $K_{r,s}$.

3.1. Trayectorias

Teorema 3.1.1. *Para cualquiera trayectoria P_n tenemos que*

$$\gamma'_{mt}(P_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n=2 \\ 2 & \text{si } n \in \{3, 4\} \\ 3 & \text{si } n=7 \\ \lceil \frac{n-1}{3} \rceil & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demostración: Supongamos que $V(P_n) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, \dots, v_{n-2}, v_{n-1}, v_n\}$ y $A(P_n) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, \dots, v_{n-2}v_{n-1}, v_{n-1}v_n\}$.

Consideremos los siguientes casos:

1. Si $n = 2$. Demostraremos que $\gamma'_{mt}(P_2) = 1$.

Por el teorema 2.0.4 sabemos que $\gamma'_{mt}(G) = 1$ si y solo si $G \cong K_2$, y puesto que $K_2 \cong P_2$, se sigue que $\gamma'_{mt}(P_2) = 1$. Por lo tanto, $\gamma'_{mt}(P_2) = 1$.

Nota 3.1.1. *A partir de este punto consideraremos que $2 \leq \gamma'_{mt}(P_n)$ para cualquier $n \geq 3$ en consecuencia al teorema 2.0.4.*

2. Si $n \in \{3, 4\}$. Demostraremos que $\gamma'_{mt}(P_3) = \gamma'_{mt}(P_4) = 2$, y para eso consideraremos dos casos sobre n .

Caso 1: $n = 3$.

En este caso $P_3 = (v_1, v_2, v_3)$. Sean $M_1 = \{v_1v_2\}$ y $M_2 = \{v_2v_3\}$, notemos que M_1 y M_2 son los únicos $\beta_1(P_3)$ -conjuntos. Y sea $S = \{v_1v_2, v_2v_3\}$ es claro que S intersecciona a todo apareamiento máximo, y además S es un conjunto dominante por aristas, lo que implica que $\gamma'_{mt}(P_3) \leq 2$. Por otro lado, por lo antes mencionado sabemos que $2 \leq \gamma'_{mt}(P_3)$. Por lo tanto, $\gamma'_{mt}(P_3) = 2$.

Caso 2: $n = 4$.

En este caso $P_4 = (v_1, v_2, v_3, v_4)$. Es claro que $M = \{v_1v_2, v_3v_4\}$ es el único apareamiento máximo de P_4 , y además M es un conjunto dominante por aristas. Así, M es un conjunto dominante por aristas transversal de apareamientos máximos, lo que implica que $\gamma'_{mt}(P_4) \leq 2$. Por otro lado, por lo antes mencionado sabemos que sabemos que $2 \leq \gamma'_{mt}(P_4)$. Por lo tanto, $\gamma'_{mt}(P_4) = 2$.

3. Si $n = 7$. Demostraremos que $\gamma'_{mt}(P_7) = 3$.

En este caso $P_7 = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7)$; además $M_1 = \{v_1v_2, v_3v_4, v_5v_6\}$, $M_2 = \{v_1v_2, v_3v_4, v_6v_7\}$, $M_3 = \{v_1v_2, v_4v_5, v_6v_7\}$ y $M_4 = \{v_2v_3, v_4v_5, v_6v_7\}$ son los únicos apareamientos máximos de P_7 , ver figura 3.1.

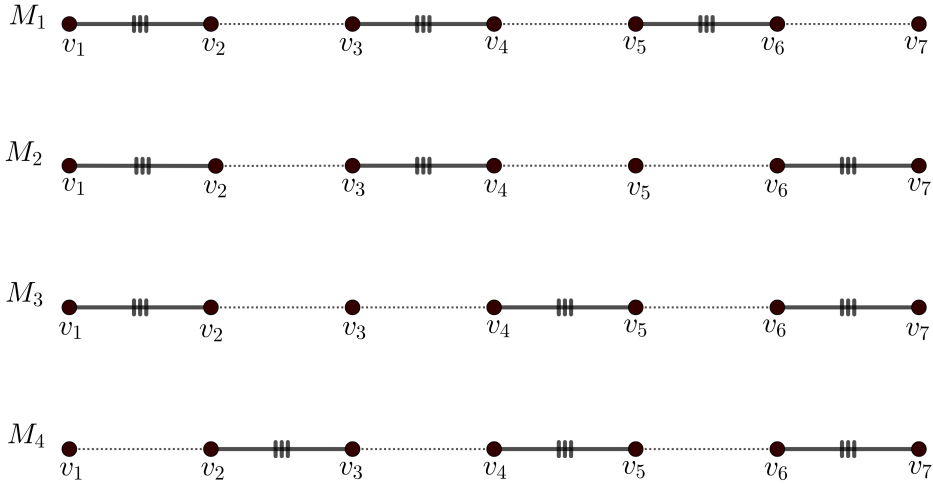


Figura 3.1: Apareamientos máximos de P_7

Afirmación 1: $\gamma'_{mt}(P_7) \leq 3$.

Sea $S = \{v_1v_2, v_4v_5, v_6v_7\} = M_3$. Notemos que $S \cap M_1 = \{v_1v_2\} \neq \emptyset$, $S \cap M_2 = \{v_1v_2, v_6v_7\} \neq \emptyset$, $S \cap M_3 = M_3 \neq \emptyset$ y $S \cap M_4 = \{v_4v_5, v_6v_7\} \neq \emptyset$, por lo que S intersecciona a todo apareamiento máximo de P_7 (esto mismo se puede verificar en

la figura 3.1). Por otro lado, se puede apreciar en la figura 3.1 que $S = M_3$ es un conjunto dominante por aristas, lo que implica que $\gamma'_{mt}(P_7) \leq 3$.

Afirmación 2: $3 \leq \gamma'_{mt}(P_7)$.

Procediendo por contradicción, supongamos que $2 \geq \gamma'_{mt}(P_7)$. Por la nota 3.1.1 sabemos que $\gamma'_{mt}(P_7) \geq 2$, lo que implica que $\gamma'_{mt}(P_7) = 2$. Sea S un $\gamma'_{mt}(P_7)$ -conjunto. Puesto que $S \cap M_i \neq \emptyset$ para cada i en $\{1, 2, 3, 4\}$, entonces consideraremos los siguientes casos:

a) $v_1v_2 \in S$.

Sabemos que $S \cap M_4 \neq \emptyset$, por lo que $S = \{v_1v_2, v_2v_3\}$ o $S = \{v_1v_2, v_4v_5\}$ o $S = \{v_1v_2, v_6v_7\}$, pero en ninguno de estos tres casos S es un conjunto dominante por aristas.

b) $v_2v_3 \in S$.

Sabemos que $S \cap M_3 \neq \emptyset$, por lo que $S = \{v_2v_3, v_1v_2\}$ o $S = \{v_2v_3, v_4v_5\}$ o $S = \{v_2v_3, v_6v_7\}$, pero en ninguno de estos tres casos S es un conjunto dominante por aristas.

c) $v_3v_4 \in S$.

Sabemos que $S \cap M_4 \neq \emptyset$, por lo que $S = \{v_3v_4, v_2v_3\}$ o $S = \{v_3v_4, v_4v_5\}$ o $S = \{v_3v_4, v_6v_7\}$, pero en ninguno de estos tres casos S es un conjunto dominante por aristas.

d) $v_4v_5 \in S$.

Sabemos que $S \cap M_2 \neq \emptyset$, por lo que $S = \{v_4v_5, v_1v_2\}$ o $S = \{v_4v_5, v_3v_4\}$ o $S = \{v_4v_5, v_6v_7\}$, pero en ninguno de estos tres casos S es un conjunto dominante por aristas.

e) $v_5v_6 \in S$.

Sabemos que $S \cap M_2 \neq \emptyset$, por lo que $S = \{v_5v_6, v_1v_2\}$ o $S = \{v_5v_6, v_3v_4\}$ o $S = \{v_5v_6, v_6v_7\}$, pero en ninguno de estos tres casos S es un conjunto dominante por aristas.

f) $v_6v_7 \in S$.

Sabemos que $S \cap M_1 \neq \emptyset$, por lo que $S = \{v_6v_7, v_1v_2\}$ o $S = \{v_6v_7, v_3v_4\}$ o $S = \{v_6v_7, v_5v_6\}$, pero en ninguno de estos tres casos S es un conjunto dominante por aristas.

En todos los casos llegamos a que S no es un conjunto dominante por aristas, lo cual es una contradicción, así concluimos que no existe un $\gamma'_{mt}(P_7)$ -conjunto de cardinalidad dos, por lo que $\gamma'_{mt}(P_7) \neq 2$. Lo que implica que $3 \leq \gamma'_{mt}(P_7)$.

Por lo tanto, $\gamma'_{mt}(P_7) = 3$.

4. Si $n \notin \{2, 3, 4, 7\}$. Demostraremos que $\gamma'_{mt}(P_n) = \lceil \frac{n-1}{3} \rceil$, y para eso consideraremos tres casos sobre n .

Caso 1: $n \equiv 0 \pmod{3}$.

Notemos que como $n \equiv 0 \pmod{3}$ y $n \notin \{2, 3, 4, 7\}$, entonces $n \geq 6$.

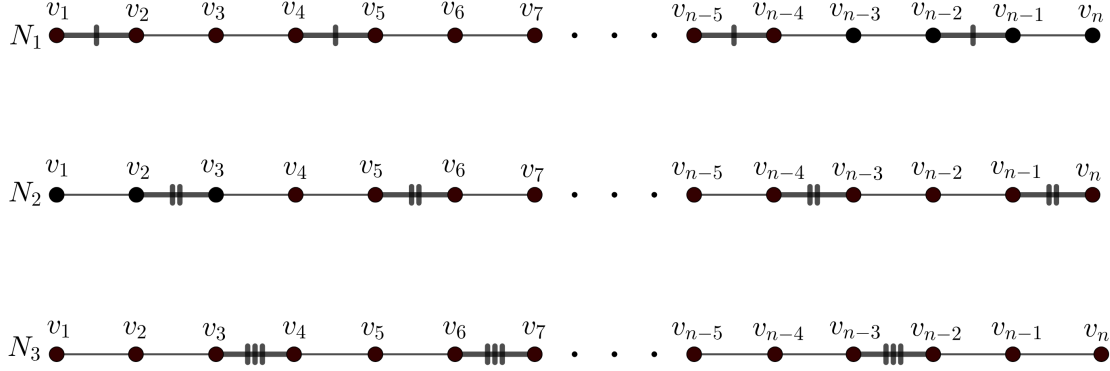


Figura 3.2: N_1 , N_2 y N_3

Afirmación 1.1: $S = \{v_{3i+1}v_{3i+2} \mid 0 \leq i \leq \frac{n-3}{3}\}$ es un conjunto dominante por aristas en P_n .

Recordemos que $|V(P_n)| = n$ y $|A(P_n)| = n - 1$.

Definimos:

$$\begin{aligned} N_1 &= \{v_{3i+1}v_{3i+2} \mid 0 \leq i \leq \frac{n-3}{3}\} = \{v_1v_2, v_4v_5, v_7v_8, \dots, v_{n-5}v_{n-4}, v_{n-2}v_{n-1}\} \\ N_2 &= \{v_{3i+2}v_{3i+3} \mid 0 \leq i \leq \frac{n-3}{3}\} = \{v_2v_3, v_5v_6, v_8v_9, \dots, v_{n-4}v_{n-3}, v_{n-1}v_n\} \\ N_3 &= \{v_{3i+3}v_{3i+4} \mid 0 \leq i \leq \frac{n-6}{3}\} = \{v_3v_4, v_6v_7, v_9v_{10}, \dots, v_{n-6}v_{n-5}, v_{n-3}v_{n-2}\}. \end{aligned}$$

Como $A(P_n) = N_1 \cup N_2 \cup N_3$ y $N_1 = S$, entonces $A(P_n) \setminus S = N_2 \cup N_3$.

Probaremos que toda arista en $A(P_n) \setminus S$ es adyacente a una arista en S . Sea v_rv_{r+1} una arista en $A(P_n) \setminus S$, entonces $v_rv_{r+1} \in N_2$ o $v_rv_{r+1} \in N_3$, ver figura 3.2.

Si $v_rv_{r+1} \in N_2$, entonces $v_rv_{r+1} = v_{3i+2}v_{3i+3}$ para algún i en $\{0, 1, \dots, \frac{n-3}{3}\}$. Como $v_{3i+1}v_{3i+2} \in N_1 = S$, se sigue que la arista v_rv_{r+1} es adyacente a $v_{3i+1}v_{3i+2}$.

Si $v_rv_{r+1} \in N_3$, entonces $v_rv_{r+1} = v_{3i+3}v_{3i+4}$ para algún i en $\{0, 1, \dots, \frac{n-6}{3}\}$. Notemos que la arista $v_{3i+3}v_{3i+4}$ es adyacente a $v_{3i+4}v_{3i+5}$, y además $v_{3i+4}v_{3i+5} = v_{3(i+1)+1}v_{3(i+1)+2}$, por lo que $v_{3(i+1)+1}v_{3(i+1)+2} \in N_1 = S$. Por lo tanto, la arista

$v_r v_{r+1}$ es adyacente a una arista en S , a saber $v_{3i+4} v_{3i+5}$.

Por lo tanto, S es un conjunto dominante por aristas en P_n .

Afirmación 1.2: S es un conjunto dominante por aristas mínimo.

Como $n \equiv 0 \pmod{3}$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $3k = n$. Como $|S| = \frac{n}{3}$, se sigue que $|S| = k$.

Procederemos por contradicción, para probar que no existe un conjunto dominante por aristas de cardinalidad menor que k .

Supongamos que existe W un conjunto dominante por aristas tal que $|W| < |S| = k$. Notemos que $|W| \leq k - 1$, por lo que $2k \leq |W^c|$.

Como W es un conjunto dominante por aristas, entonces toda arista en W^c es adyacente a una arista en W . Por otro lado, $2|W| \leq 2(k - 1) < 2(k)$, lo que implica que $2|W| < 2k$. Así, por el principio del palomar se tiene que existe una arista uv en W que es adyacente a al menos 3 aristas de W^c , lo cual es una contradicción, ya que P_n es una trayectoria.

Por lo tanto, S es un conjunto dominante por aristas mínimo en P_n .

Afirmación 1.3: $\langle A(P_n) \setminus S \rangle \cong \left(\frac{n-3}{3}\right)P_3 \cup K_2$.

Puesto que $(A(P_n) \setminus S) = N_2 \cup N_3$, entonces $\langle A(P_n) \setminus S \rangle = \langle N_2 \cup N_3 \rangle$. Por lo tanto, de la definición de N_2 y N_3 se sigue que $V(\langle N_2 \cup N_3 \rangle) = V(P_n) \setminus \{v_1\}$ y $A(\langle N_2 \cup N_3 \rangle) = N_2 \cup N_3$.

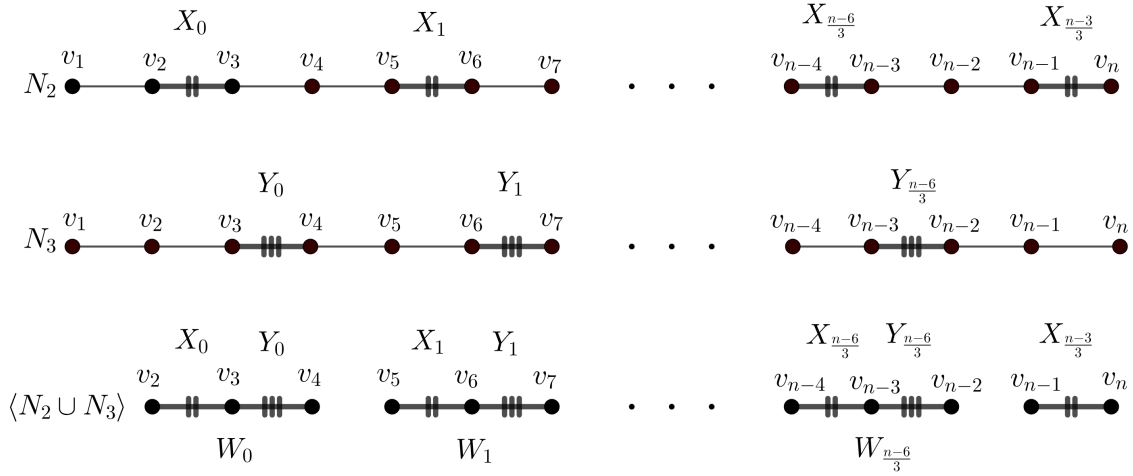
Para cada arista en $N_2 \cup N_3$ definamos los siguientes conjuntos: $X_i = \{v_{3i+2} v_{3i+3}\}$ con i en $\{0, 1, \dots, \frac{n-3}{3}\}$ y $Y_i = \{v_{3i+3} v_{3i+4}\}$ con i en $\{0, 1, \dots, \frac{n-6}{3}\}$, ver figura 3.3.

De la definición de X_i y Y_i se deduce que $N_2 = \bigcup_{i=0}^{\frac{n-3}{3}} X_i$ y $N_3 = \bigcup_{i=0}^{\frac{n-6}{3}} Y_i$.

Si definimos al conjunto W_i como $Y_i \cup X_i$, con i en $\{0, 1, \dots, \frac{n-6}{3}\}$, entonces

$$\bigcup_{i=0}^{\frac{n-6}{3}} W_i = \bigcup_{i=0}^{\frac{n-6}{3}} (X_i \cup Y_i) = (X_0 \cup Y_0) \cup (X_1 \cup Y_1) \dots \cup (X_{\frac{n-6}{3}} \cup Y_{\frac{n-6}{3}}) =$$

$$\left(\bigcup_{i=0}^{\frac{n-6}{3}} X_i \cup \bigcup_{j=0}^{\frac{n-6}{3}} Y_j\right) = ((N_2 \setminus X_{\frac{n-3}{3}}) \cup N_3) = (N_2 \cup N_3) \setminus (X_{\frac{n-3}{3}}) = (N_2 \cup N_3) \setminus \{v_{n-1} v_n\}.$$

Figura 3.3: $\langle A(P_n) \setminus S \rangle = \langle N_2 \cup N_3 \rangle$

Por lo que, $\bigcup_{i=0}^{\frac{n-6}{3}} W_i = (N_2 \cup N_3) \setminus \{v_{n-1}v_n\} = \langle A(P_n) \setminus S \rangle \setminus \{v_{n-1}v_n\}$.

Como $W_i = X_i \cup Y_i = \{v_{3i+2}v_{3i+3}, v_{3i+3}v_{3i+4}\}$ para cada i en $\{0, 1, \dots, \frac{n-6}{3}\}$, entonces $\langle W_i \rangle \cong P_3$ para cada i en $\{0, 1, \dots, \frac{n-6}{3}\}$.

Por lo que, $\bigcup_{i=0}^{\frac{n-6}{3}} \langle W_i \rangle \cong \binom{n-3}{3} P_3$. Esto implica que hay $\binom{n-3}{3}$ copias de P_3 en $\langle A(P_n) \setminus S \rangle$. Por otro lado de la definición de $\langle X_{\frac{n-3}{3}} \rangle$ se tiene que $\langle X_{\frac{n-3}{3}} \rangle \cong K_2$.

Recordemos que $A(\langle A(P_n) \setminus S \rangle) = A(\langle N_2 \cup N_3 \rangle) = N_2 \cup N_3$.

A su vez $\bigcup_{i=0}^{\frac{n-6}{3}} W_i = (N_2 \cup N_3) \setminus X_{\frac{n-3}{3}}$, por lo que $\bigcup_{i=0}^{\frac{n-6}{3}} W_i \cup X_{\frac{n-3}{3}} = (N_2 \cup N_3)$.

Entonces $\langle N_2 \cup N_3 \rangle = \left\langle \bigcup_{i=0}^{\frac{n-6}{3}} W_i \cup X_{\frac{n-3}{3}} \right\rangle \cong \binom{n-3}{3} P_3 \cup K_2$.

Lo que implica que $\langle N_2 \cup N_3 \rangle \cong \binom{n-3}{3} P_3 \cup K_2$.

Por lo tanto, $\langle A(P_n) \setminus S \rangle \cong \binom{n-3}{3} P_3 \cup K_2$.

Afirmación 1.4: S interseca a todo apareamiento máximo en P_n .

Como $\langle A(P_n) \setminus S \rangle \cong \binom{n-3}{3} P_3 \cup K_2$, entonces todo apareamiento M en $\langle A(P_n) \setminus S \rangle$ tiene a lo más $\binom{n-3}{3} + 1$ aristas. Esto se debe a que por cada P_3 podemos elegir exactamente una arista para M , y también en M incluiríamos a la única arista

de K_2 . Por lo tanto, todo apareamiento en $\langle A(P_n) \setminus S \rangle$ tiene a lo más $(\frac{n-3}{3} + 1)$ aristas.

Como $\frac{n-3}{3} + 1 < \frac{n-1}{2}$, entonces $\frac{n}{3} < \frac{n-1}{2}$, lo que implica que $2n < 3n - 3$ y así $3 < n$, esto es cierto, ya que $n \geq 6$. Puesto que $\frac{n-1}{2} \leq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$, entonces $\frac{n-3}{3} + 1 < \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$. Ya que $\beta_1(P_n) = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ se concluye que $\langle A(P_n) \setminus S \rangle$ no tiene ningún apareamiento máximo.

Por lo tanto, S intersecta a todo apareamiento máximo de P_n .

Afirmación 1.5: $\gamma'_{mt}(P_n) = \lceil \frac{n-1}{3} \rceil$.

Por la afirmación 2 y afirmación 4 concluimos que $\gamma'_{mt}(P_n) \leq |S|$ y por el teorema 2.0.2 y afirmación 2 tenemos que $\gamma'(P_n) = |S| \leq \gamma'_{mt}(P_n)$. Por lo tanto, $\gamma'_{mt}(P_n) = |S| = \frac{n}{3}$.

Como $k - 1 = \frac{n-3}{3} \leq \frac{n-2}{3} \leq \frac{n-1}{3} \leq \frac{n}{3} = k$ donde $\{\frac{n-2}{3}, \frac{n-1}{3}\} \subseteq \mathbb{Q}$, entonces $\lceil \frac{n-2}{3} \rceil = \lceil \frac{n-1}{3} \rceil = \frac{n}{3}$, lo que implica que $\gamma'_{mt}(P_n) = \lceil \frac{n-1}{3} \rceil$.

Por lo tanto, $\gamma'_{mt}(P_n) = \lceil \frac{n-1}{3} \rceil$.

Así, $\gamma'_{mt}(P_n) = \lceil \frac{n-1}{3} \rceil$ si $n \equiv 0 \pmod{3}$, $n \geq 6$ y $n \notin \{2, 3, 4, 7\}$.

Caso 2: $n \equiv 1 \pmod{3}$.

Notemos que como $n \equiv 1 \pmod{3}$ y $n \notin \{3, 4, 7\}$, entonces $n \geq 10$.

Afirmación 2.1: $S = \{v_{3i-1}v_{3i} \mid 0 \leq i \leq \frac{n-1}{3}\}$ es un conjunto dominante por aristas en P_n .

Recordemos que $|V(P_n)| = n$ y $|A(P_n)| = n - 1$.

Definimos:

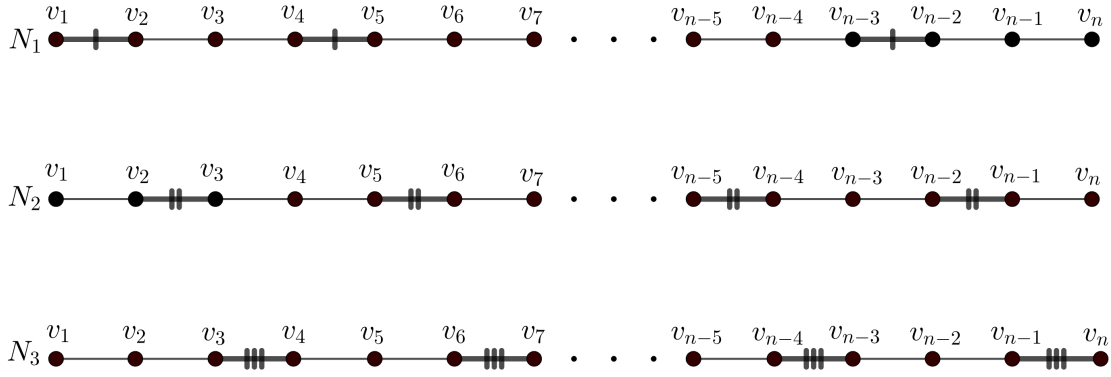
$$N_1 = \{v_{3i-2}v_{3i-1} \mid 1 \leq i \leq \frac{n-1}{3}\} = \{v_1v_2, v_4v_5, v_7v_8, \dots, v_{n-6}v_{n-5}, v_{n-3}v_{n-2}\}$$

$$N_2 = \{v_{3i-1}v_{3i} \mid 1 \leq i \leq \frac{n-1}{3}\} = \{v_2v_3, v_5v_6, v_8v_9, \dots, v_{n-5}v_{n-4}, v_{n-2}v_{n-1}\}$$

$$N_3 = \{v_{3i}v_{3i+1} \mid 1 \leq i \leq \frac{n-1}{3}\} = \{v_3v_4, v_6v_7, v_9v_{10}, \dots, v_{n-4}v_{n-3}, v_{n-1}v_n\}.$$

Como $A(P_n) = N_1 \cup N_2 \cup N_3$ y $N_2 = S$, entonces $A(P_n) \setminus S = N_1 \cup N_3$.

Probaremos que toda arista en $A(P_n) \setminus S$ es adyacente a una arista en S . Sea v_rv_{r+1} una arista en $A(P_n) \setminus S$, entonces $v_rv_{r+1} \in N_1$ o $v_rv_{r+1} \in N_3$, ver figura 3.4

Figura 3.4: N_1 , N_2 y N_3

Si $v_r v_{r+1} \in N_1$, entonces $v_r v_{r+1} = v_{3i-2} v_{3i-1}$ para algún i en $\{1, 2, \dots, \frac{n-1}{3}\}$. Notemos que $v_{3i-2} v_{3i-1}$ es adyacente a $v_{3i-1} v_{3i}$, donde $v_{3i-1} v_{3i} \in N_2 = S$. Por lo tanto la arista $v_r v_{r+1}$ es adyacente a una arista en S , a saber $v_{3i-1} v_{3i}$.

Si $v_r v_{r+1} \in N_3$, entonces $v_r v_{r+1} = v_{3i} v_{3i+1}$ para algún i en $\{1, 2, \dots, \frac{n-1}{3}\}$. Como $v_{3i-1} v_{3i} \in N_2 = S$, se sigue que la arista $v_r v_{r+1}$ es adyacente a $v_{3i-1} v_{3i}$.

Por lo tanto, S es un conjunto dominante por aristas en P_n .

Afirmación 2.2: S es un conjunto dominante por aristas mínimo.

Como $n \equiv 1 \pmod{3}$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $3k = n - 1$. Como $|S| = \frac{n-1}{3}$, se sigue que $|S| = k$.

Procederemos por contradicción para probar que no existe un conjunto dominante por aristas de cardinalidad menor que k .

Supongamos que existe W un conjunto dominante por aristas tal que $|W| < |S| = k$. Notemos que $|W| \leq k - 1$, por lo que, $2k + 1 \leq |W^c|$.

Como W es un conjunto dominante por aristas, entonces toda arista en W^c es adyacente a una arista en W . Por otro lado, $2|W| \leq 2(k - 1) \leq 2(k) < 2(k + 1)$, lo que implica que $2|W| < 2k + 1$. Así, por el principio del palomar se tiene que existe una arista uv en W que es adyacente a al menos 3 aristas de W^c , lo cual es una contradicción, ya que P_n es una trayectoria.

Por lo tanto, S es un conjunto dominante por aristas mínimo en P_n .

Afirmación 2.3: $\langle A(P_n) \setminus S \rangle \cong \binom{n-4}{3} P_3 \cup 2K_2$.

Puesto que $A(P_n) \setminus S = N_1 \cup N_3$, entonces $\langle A(P_n) \setminus S \rangle = \langle N_1 \cup N_3 \rangle$. Por lo tanto, de la definición de N_1 y N_3 se sigue que $V(\langle N_1 \cup N_3 \rangle) = V(P_n)$ y $A(\langle N_1 \cup N_3 \rangle) = N_1 \cup N_3$.

Para cada aristas en $N_1 \cup N_3$ definamos los siguientes conjuntos: $X_i = \{v_{3i-2}v_{3i-1}\}$ con i en $\{1, 2, \dots, \frac{n-1}{3}\}$ y $Y_i = \{v_{3i}v_{3i+1}\}$ con i en $\{1, 2, \dots, \frac{n-1}{3}\}$, ver figura 3.5.

De la definición de X_i y Y_i se deduce que $N_1 = \bigcup_{i=1}^{\frac{n-1}{3}} X_i$ y $N_3 = \bigcup_{i=1}^{\frac{n-1}{3}} Y_i$.

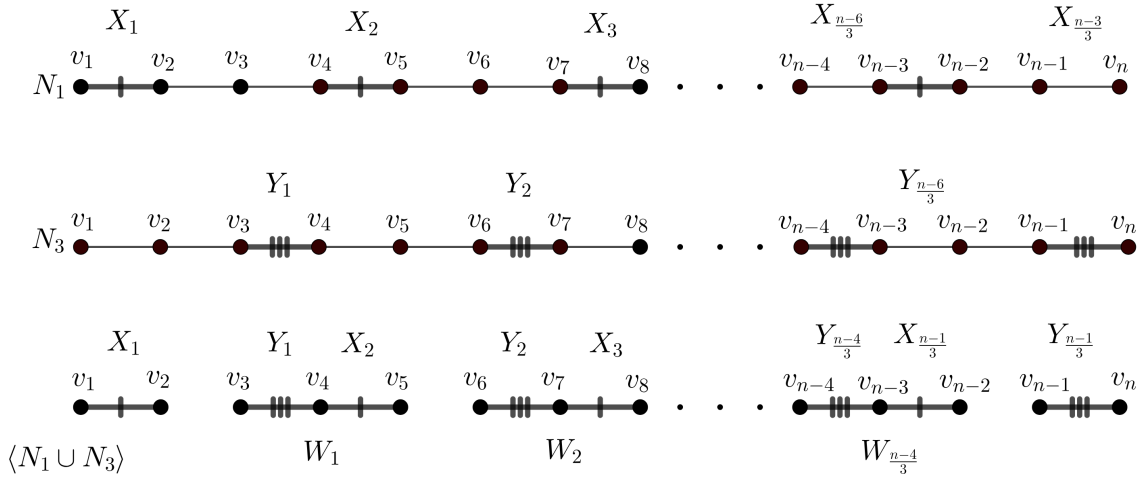


Figura 3.5: $\langle A(P_n) \setminus S \rangle = \langle N_1 \cup N_3 \rangle$

Si definimos al conjunto W_i como $Y_i \cup X_{i+1}$ con i en $\{1, 2, \dots, \frac{n-4}{3}\}$, entonces

$$\bigcup_{i=1}^{\frac{n-4}{3}} W_i = \bigcup_{i=1}^{\frac{n-4}{3}} (Y_i \cup X_{i+1}) = (Y_1 \cup X_2) \cup (Y_2 \cup X_3) \dots \cup (Y_{\frac{n-4}{3}} \cup X_{\frac{n-1}{3}}) =$$

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\frac{n-4}{3}} Y_i \cup \bigcup_{j=2}^{\frac{n-1}{3}} X_j \right) = (N_3 \setminus Y_{\frac{n-1}{3}}) \cup (N_1 \setminus X_1) = (N_3 \cup N_1) \setminus (Y_{\frac{n-1}{3}} \cup X_1) = (N_3 \cup N_1) \setminus \{v_{n-1}v_n, v_1v_2\}.$$

Por lo que, $\bigcup_{i=1}^{\frac{n-4}{3}} W_i = (N_3 \cup N_1) \setminus \{v_{n-1}v_n, v_1v_2\} = \langle A(P_n) \setminus S \rangle \setminus \{v_{n-1}v_n, v_1v_2\}$.

Como $W_i = Y_i \cup X_{i+1} = \{v_{3i}v_{3i+1}, v_{3i+1}v_{3i+2}\}$ para cada i en $\{1, 2, \dots, \frac{n-4}{3}\}$, entonces

$\langle W_i \rangle \cong P_3$ para cada i en $\{1, 2, \dots, \frac{n-4}{3}\}$.

Por lo que, $\bigcup_{i=1}^{\frac{n-4}{3}} \langle W_i \rangle \cong (\frac{n-4}{3})P_3$. Esto implica que hay $(\frac{n-4}{3})$ copias de P_3 en $\langle A(P_n) \setminus S \rangle$. Por otro lado de la definición de $Y_{\frac{n-1}{3}}$ y X_1 se tiene que $\langle Y_{\frac{n-1}{3}} \rangle \cong K_2$ y $\langle X_1 \rangle \cong K_2$, entonces $\langle Y_{\frac{n-1}{3}} \cup X_1 \rangle \cong 2K_2$, lo que implica que hay dos copias de K_2 en $\langle A(P_n) \setminus S \rangle$.

Recordemos que $A(\langle A(P_n) \setminus S \rangle) = A(\langle N_1 \cup N_3 \rangle) = N_1 \cup N_3$.

A su vez $\bigcup_{i=1}^{\frac{n-4}{3}} W_i = (N_3 \cup N_1) \setminus (Y_{\frac{n-1}{3}} \cup X_1)$, por lo que $\bigcup_{i=1}^{\frac{n-4}{3}} W_i \cup (Y_{\frac{n-1}{3}} \cup X_1) = (N_3 \cup N_1)$

donde $\bigcup_{i=1}^{\frac{n-4}{3}} \langle W_i \rangle \cong (\frac{n-4}{3})P_3$ y $\langle Y_{\frac{n-1}{3}} \cup X_1 \rangle \cong 2K_2$.

Entonces $\langle N_3 \cup N_1 \rangle = \left\langle \bigcup_{i=1}^{\frac{n-4}{3}} W_i \cup Y_{\frac{n-1}{3}} \cup X_1 \right\rangle \cong (\frac{n-4}{3})P_3 \cup 2K_2$.

Lo que implica que $\langle N_3 \cup N_1 \rangle \cong (\frac{n-4}{3})P_3 \cup 2K_2$.

Por lo tanto, $\langle A(P_n) \setminus S \rangle \cong (\frac{n-4}{3})P_3 \cup 2K_2$.

Afirmación 2.4: S interseca a todo apareamiento máximo en P_n .

Como $\langle A(P_n) \setminus S \rangle = (\frac{n-4}{3})P_3 \cup 2K_2$, entonces todo apareamiento M en $\langle A(P_n) \setminus S \rangle$ tiene a lo más $(\frac{n-4}{3} + 2)$ aristas. Esto se debe a que por cada P_3 podemos elegir exactamente una arista para M , por otro lado para cada K_2 elegimos su única arista, y al tener 2 copias de K_2 tendremos 2 aristas para incluir a nuestro apareamiento. Por lo tanto, todo apareamiento en $\langle A(P_n) \setminus S \rangle$ tiene a lo más $(\frac{n-4}{3} + 2)$ aristas.

Como $\frac{n-4}{3} + 2 < \frac{n-1}{2}$, entonces $\frac{n+2}{3} < \frac{n-1}{2}$, lo que implica que $2n + 4 < 3n - 3$ y así $7 < n$, esto es cierto, ya que $n \geq 10$. Puesto que $\frac{n-1}{2} \leq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$, entonces $\frac{n-4}{3} + 2 < \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$. Ya que $\beta_1(P_n) = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ se concluye que $\langle A(P_n) \setminus S \rangle$ no tiene ningún apareamiento máximo de P_n .

Por lo tanto, S interseca a todo apareamiento máximo de P_n .

Afirmación 2.5: $\gamma'_{mt}(P_n) = \lceil \frac{n-1}{3} \rceil$.

Por la afirmación 2 y afirmación 4 concluimos que $\gamma'_{mt}(P_n) \leq |S|$ y por el teorema 2.0.2 y afirmación 2 tenemos que $\gamma'(P_n) = |S| \leq \gamma'_{mt}(P_n)$. Por lo tanto,

$$\gamma'_{mt}(P_n) = |S| = \frac{n-1}{3}.$$

Puesto que $k = \frac{n-1}{3} \in \mathbb{N}$, se sigue que $\frac{n-1}{3} = \lceil \frac{n-1}{3} \rceil$, lo que implica que $\gamma'_{mt}(P_n) = \lceil \frac{n-1}{3} \rceil$.

Por lo tanto, $\gamma'_{mt}(P_n) = \lceil \frac{n-1}{3} \rceil$.

Así, $\gamma'_{mt}(P_n) = \lceil \frac{n-1}{3} \rceil$ si $n \equiv 1 \pmod{3}$, $n \geq 10$ y $n \notin \{2, 3, 4, 7\}$.

Caso 3: $n \equiv 2 \pmod{3}$.

Notemos que como $n \equiv 2 \pmod{3}$ y $n \notin \{2, 3, 4, 7\}$, entonces $n \geq 5$.

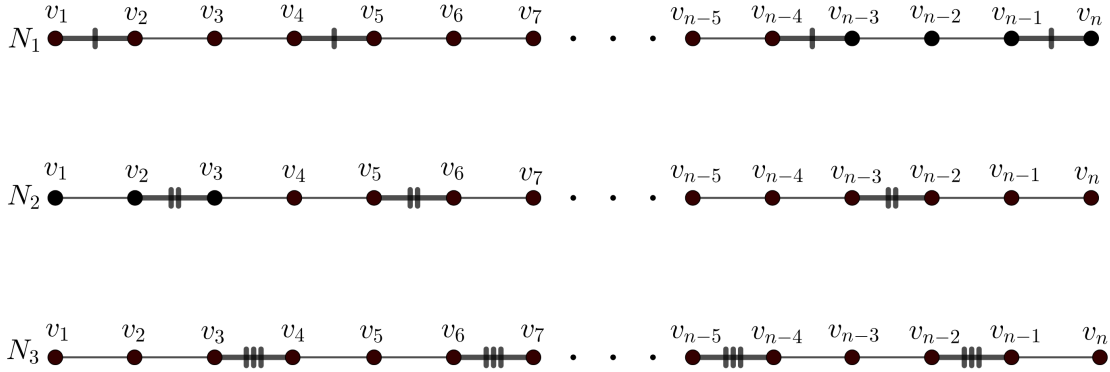


Figura 3.6: N_1 , N_2 y N_3

Afirmación 3.1: $S = \{v_{3i+1}v_{3i+2} \mid 0 \leq i \leq \frac{n-2}{3}\}$ es un conjunto dominante por aristas en P_n .

Recordemos que $|V(P_n)| = n$ y $|A(P_n)| = n - 1$.

Definimos:

$$N_1 = \{v_{3i+1}v_{3i+2} \mid 0 \leq i \leq \frac{n-2}{3}\} = \{v_1v_2, v_4v_5, v_7v_8, \dots, v_{n-4}v_{n-3}, v_{n-1}v_n\}$$

$$N_2 = \{v_{3i+2}v_{3i+3} \mid 0 \leq i \leq \frac{n-5}{3}\} = \{v_2v_3, v_5v_6, v_8v_9, \dots, v_{n-6}v_{n-5}, v_{n-3}v_{n-2}\}$$

$$N_3 = \{v_{3i+3}v_{3i+4} \mid 0 \leq i \leq \frac{n-5}{3}\} = \{v_3v_4, v_6v_7, v_9v_{10}, \dots, v_{n-5}v_{n-4}, v_{n-2}v_{n-1}\}.$$

Como $A(P_n) = N_1 \cup N_2 \cup N_3$ y $N_1 = S$, entonces $A(P_n) \setminus S = N_2 \cup N_3$.

Probaremos que toda arista en $A(P_n) \setminus S$ es adyacente a una arista en S . Sea v_rv_{r+1} una arista en $A(P_n) \setminus S$, entonces $v_rv_{r+1} \in N_2$ o $v_rv_{r+1} \in N_3$, ver figura 3.6.

Si $v_r v_{r+1} \in N_2$, entonces $v_r v_{r+1} = v_{3i+2} v_{3i+3}$, para algún i en $\{0, 1, \dots, \frac{n-5}{3}\}$. Como $v_{3i+1} v_{3i+2} \in N_1 = S$, se sigue que la arista $v_r v_{r+1}$ es adyacente a $v_{3i+1} v_{3i+2}$.

Si $v_r v_{r+1} \in N_3$, entonces $v_r v_{r+1} = v_{3i+3} v_{3i+4}$, para algún i en $\{0, 1, \dots, \frac{n-5}{3}\}$. Notemos que $v_{3i+3} v_{3i+4}$ es adyacente a $v_{3i+4} v_{3i+5}$, además $v_{3i+4} v_{3i+5} = v_{3(i+1)+1} v_{3(i+1)+2}$, por lo que $v_{3(i+1)+1} v_{3(i+1)+2} \in N_1 = S$. Por lo tanto la arista $v_r v_{r+1}$ es adyacente a una arista en S , a saber $v_{3i+4} v_{3i+5}$.

Por lo tanto, S es un conjunto dominante por aristas en P_n .

Afirmación 3.2: S es un conjunto dominante por aristas mínimo.

Como $n \equiv 2 \pmod{3}$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $3k = n - 2$, por lo que $k = \frac{n-2}{3}$. Como $|S| = \frac{n+1}{3}$, se sigue que $|S| = k + 1$.

Procederemos por contradicción para probar que no existe un conjunto dominante por aristas de cardinalidad menor que $k + 1$.

Supongamos que existe W un conjunto dominante por aristas tal que $|W| < |S| = k + 1$. Notemos que $|W| \leq k$, por lo que, $2k + 1 \leq |W^c|$.

Como W es un conjunto dominante por aristas, entonces toda arista en W^c es adyacente a una arista en W . Por otro lado, $2|W| \leq 2(k) < 2(k) + 1$, lo que implica que $2|W| < 2(k) + 1$. Así, por el principio del palomar se tiene que existe una arista uv en W que es adyacente a al menos 3 aristas de W^c , lo cual es una contradicción, ya que P_n es una trayectoria.

Por lo tanto, S es un conjunto dominante por aristas mínimo en P_n .

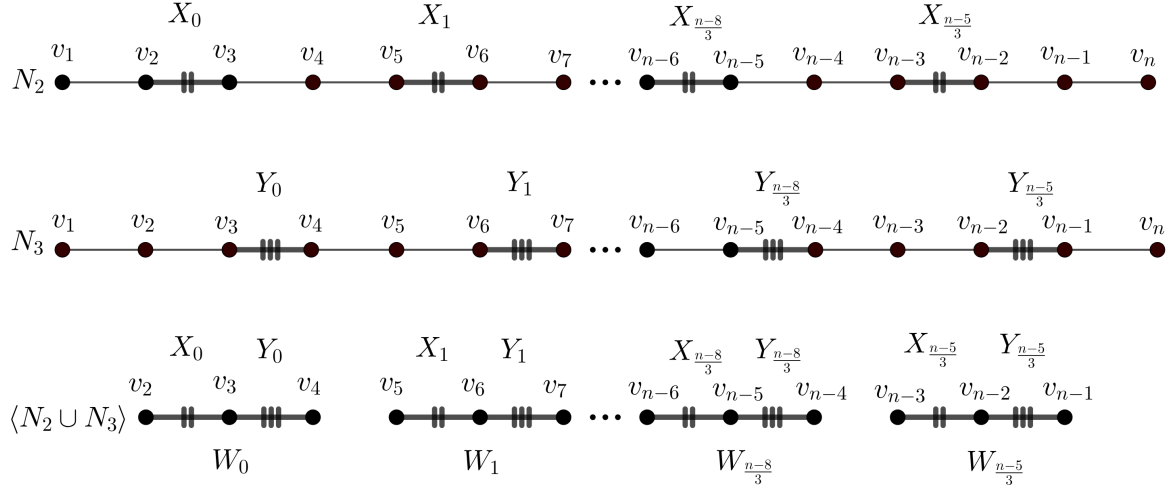
Afirmación 3.3: $\langle A(P_n) \setminus S \rangle \cong (\frac{n-2}{3})P_3$.

Puesto que $A(P_n) \setminus S = N_2 \cup N_3$, entonces $\langle A(P_n) \setminus S \rangle = \langle N_2 \cup N_3 \rangle$. Por lo tanto, de la definición de N_2 y N_3 se sigue que $V(\langle N_2 \cup N_3 \rangle) = V(P_n) \setminus \{v_1, v_n\}$ y $A(\langle N_2 \cup N_3 \rangle) = N_2 \cup N_3$.

Para cada arista en $N_2 \cup N_3$ definamos los siguientes conjuntos: $X_i = \{v_{3i+2} v_{3i+3}\}$ con i en $\{0, 1, \dots, \frac{n-5}{3}\}$ y $Y_i = \{v_{3i+3} v_{3i+4}\}$ con i en $\{0, 1, \dots, \frac{n-5}{3}\}$, ver figura 3.7.

De la definición de X_i y Y_i se deduce que $N_2 = \bigcup_{i=0}^{\frac{n-5}{3}} X_i$ y $N_3 = \bigcup_{i=0}^{\frac{n-5}{3}} Y_i$.

Si definimos al conjunto W_i como $X_i \cup Y_i$ con i en $\{0, 1, \dots, \frac{n-5}{3}\}$, entonces

Figura 3.7: $\langle A(P_n) \setminus S \rangle = \langle N_2 \cup N_3 \rangle$

$$\bigcup_{i=0}^{\frac{n-5}{3}} W_i = \bigcup_{i=0}^{\frac{n-5}{3}} (X_i \cup Y_i) = (X_0 \cup Y_0) \dots \cup (X_{\frac{n-5}{3}} \cup Y_{\frac{n-5}{3}}) = \left(\bigcup_{i=0}^{\frac{n-5}{3}} X_i \right) \cup \left(\bigcup_{i=0}^{\frac{n-5}{3}} Y_i \right) = N_2 \cup N_3.$$

Por lo que, $\bigcup_{i=0}^{\frac{n-5}{3}} W_i = (N_2 \cup N_3) = (A(P_n) \setminus S)$.

Como $W_i = X_i \cup Y_i = \{v_{3i+2}v_{3i+3}, v_{3i+3}v_{3i+4}\}$ para cada i en $\{0, 1, \dots, \frac{n-5}{3}\}$, entonces $\langle W_i \rangle \cong P_3$ para cada i en $\{0, 1, \dots, \frac{n-5}{3}\}$.

Por lo que, $\bigcup_{i=0}^{\frac{n-5}{3}} \langle W_i \rangle \cong \binom{n-2}{3} P_3$. Esto implica que hay $\binom{n-2}{3}$ copias de P_3 en $\langle A(P_n) \setminus S \rangle$.

Recordemos que $A(\langle A(P_n) \setminus S \rangle) = A(\langle N_2 \cup N_3 \rangle) = N_2 \cup N_3$.

A su vez $N_2 \cup N_3 = \bigcup_{i=0}^{\frac{n-5}{3}} W_i$. Entonces $\langle N_2 \cup N_3 \rangle = \left\langle \bigcup_{i=0}^{\frac{n-5}{3}} W_i \right\rangle \cong \binom{n-2}{3} P_3$.

Lo que implica que $\langle N_2 \cup N_3 \rangle \cong \binom{n-2}{3} P_3$.

Por lo tanto, $\langle A(P_n) \setminus S \rangle \cong \binom{n-2}{3} P_3$.

Afirmación 3.4: S interseca a todo apareamiento máximo en P_n .

Como $\langle A(P_n) \setminus S \rangle = \binom{n-2}{3} P_3$, entonces todo apareamiento M en $\langle A(P_n) \setminus S \rangle$ tiene a lo más $\frac{n-2}{3}$ aristas. Esto se debe a que por cada P_3 podemos elegir exactamente una arista para M . Por lo tanto, todo apareamiento en $\langle A(P_n) \setminus S \rangle$ tiene

a lo más $\frac{n-2}{3}$ aristas.

Como $\frac{n-2}{3} < \frac{n-1}{2}$, entonces $2n - 4 < 3n - 3$, lo que implica que $-1 < n$, y esto es cierto, ya que $n \geq 5$. Puesto que $\frac{n-1}{2} \leq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$, entonces $\frac{n-2}{3} < \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$. Ya que $\beta_1(P_n) = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ se concluye que $\langle A(P_n) \setminus S \rangle$ no contiene ningún apareamiento máximo de P_n .

Por lo tanto, S intersecta a todo apareamiento máximo de P_n .

Afirmación 3.5: $\gamma'_{mt}(P_n) = \lceil \frac{n-1}{3} \rceil$.

Por la afirmación 2 y afirmación 4 concluimos que $\gamma'_{mt}(P_n) \leq |S|$ y por el teorema 2.0.2 y afirmación 2 tenemos que $\gamma'(P_n) = |S| \leq \gamma'_{mt}(P_n)$. Por lo tanto $\gamma'_{mt}(P_n) = |S| = \frac{n+1}{3}$.

Como $k = \frac{n-2}{3} \leq \frac{n-1}{3} \leq \frac{n}{3} \leq \frac{n+1}{3} = k+1$ donde $\{\frac{n-1}{3}, \frac{n}{3}\} \subseteq \mathbb{Q}$, entonces $\lceil \frac{n-1}{3} \rceil = \lceil \frac{n}{3} \rceil = \frac{n+1}{3}$, lo que implica que $\gamma'_{mt}(P_n) = \lceil \frac{n-1}{3} \rceil$.

Por lo tanto, $\gamma'_{mt}(P_n) = \lceil \frac{n-1}{3} \rceil$.

Así, $\gamma'_{mt}(P_n) = \lceil \frac{n-1}{3} \rceil$ si $n \equiv 2 \pmod{3}$, $n \geq 5$ y $n \notin \{2, 3, 4, 7\}$. ■

3.2. Ciclos

Teorema 3.2.1. *Para cualquier ciclo C_n tenemos que*

$$\gamma'_{mt}(C_n) = \begin{cases} 3 & \text{si } n \in \{3, 5\} \\ \lceil \frac{n}{3} \rceil & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demostración: Supongamos que $V(C_n) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, \dots, v_{n-2}, v_{n-1}, v_n\}$ y $A(C_n) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, \dots, v_{n-2}v_{n-1}, v_{n-1}v_n, v_nv_1\}$.

1. Si $n = 3$. Demostraremos que $\gamma'_{mt}(C_3) = 3$.

En este caso $C_3 = (v_1, v_2, v_3, v_1)$. Sean $M_1 = \{v_1v_2\}$, $M_2 = \{v_2v_3\}$ y $M_3 = \{v_3v_1\}$, es claro que M_1 , M_2 y M_3 son los únicos $\beta_1(C_3)$ -conjuntos.

Sea S un $\gamma'_{mt}(C_3)$ -conjunto. Demostraremos que $|S| = 3$. Como S intersecta a todo apareamiento de cardinalidad máxima, entonces $S \cap M_1 \neq \emptyset$, $S \cap M_2 \neq \emptyset$ y $S \cap M_3 \neq \emptyset$, lo que implica que $\{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_1\} \subseteq S$, pero $A(C_3) =$

$\{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_1\}$. Entonces $S = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_1\}$.

Por lo tanto, $\gamma'_{mt}(C_3) = 3$.

2. Si $n = 5$. Demostraremos que $\gamma'_{mt}(C_5) = 3$.

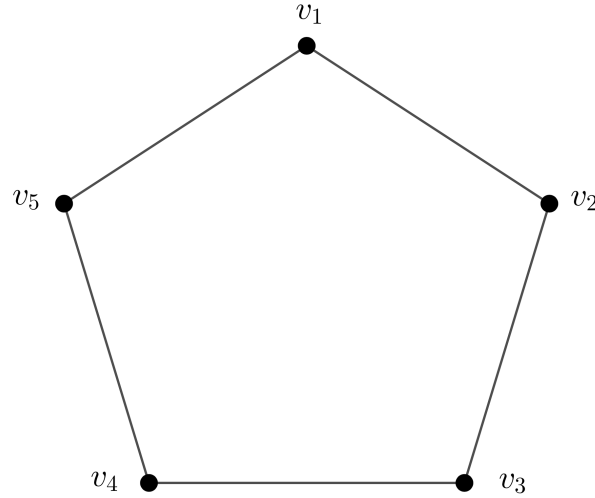


Figura 3.8: Ciclo C_5

En este caso $C_5 = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1)$. En la figura 3.8 podemos apreciar que $M_1 = \{v_1v_2, v_3v_4\}$, $M_2 = \{v_1v_2, v_4v_5\}$, $M_3 = \{v_2v_3, v_4v_5\}$, $M_4 = \{v_2v_3, v_5v_1\}$ y $M_5 = \{v_3v_4, v_5v_1\}$ son los únicos $\beta_1(P_4)$ -conjuntos. Notemos que $S = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4\}$ interseca a todo apareamiento máximo y además S es un conjunto dominante por aristas. Por lo que, S es un conjunto dominante por aristas transversal de apareamientos máximos, lo que implica que $\gamma'_{mt}(C_5) \leq 3$. Ahora probaremos que $\gamma'_{mt}(C_5) \geq 3$, y para esto procederemos por contradicción suponiendo que $\gamma'_{mt}(C_5) \leq 2$. Es claro, que no existe un conjunto dominante por aristas de cardinalidad uno, ver figura 3.8, así que $\gamma'_{mt}(C_5) \neq 1$. Entonces $\gamma'_{mt}(C_5) = 2$. Sea S un $\gamma'_{mt}(C_5)$ -conjunto, donde $|S| = 2$, consideremos los casos siguientes:

a) $v_1v_2 \in S$.

Sabemos que $S \cap M_4 \neq \emptyset$, por lo que $S = \{v_1v_2, v_2v_3\}$ o $S = \{v_1v_2, v_5v_1\}$, pero en ninguno de los dos casos S es un conjunto dominante por aristas.

b) $v_2v_3 \in S$.

Sabemos que $S \cap M_1 \neq \emptyset$, por lo que $S = \{v_2v_3, v_1v_2\}$ o $S = \{v_2v_3, v_3v_4\}$, pero en ninguno de los dos casos S es un conjunto dominante por aristas.

c) $v_3v_4 \in S$.

Sabemos que $S \cap M_3 \neq \emptyset$, por lo que $S = \{v_3v_4, v_2v_3\}$ o $S = \{v_3v_4, v_4v_5\}$, pero en ninguno de los dos casos S es un conjunto dominante por aristas.

d) $v_4v_5 \in S$.

Sabemos que $S \cap M_5 \neq \emptyset$, por lo que $S = \{v_4v_5, v_3v_4\}$ o $S = \{v_4v_5, v_5v_1\}$, pero en ninguno de los dos casos S es un conjunto dominante por aristas.

e) $v_5v_1 \in S$.

Sabemos que $S \cap M_2 \neq \emptyset$, por lo que $S = \{v_5v_1, v_1v_2\}$ o $S = \{v_5v_1, v_4v_5\}$, pero en ninguno de los dos casos S es un conjunto dominante por aristas.

Como ninguno de los casos anteriores es posible, concluimos que no existe un $\gamma'_{mt}(C_5)$ -conjunto de cardinalidad dos, por lo que $\gamma'_{mt}(C_5) \neq 2$. Lo que implica que $\gamma'_{mt}(C_5) \geq 3$.

Por lo tanto, $\gamma'_{mt}(C_5)=3$.

3. Si $n \notin \{3, 5\}$. Demostraremos que $\gamma'_{mt}(C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$, y para eso consideraremos tres casos sobre n .

Caso 1: $n \equiv 0 \pmod{3}$.

Notemos que como $n \equiv 0 \pmod{3}$ y $n \notin \{3, 5\}$, entonces $n \geq 6$.

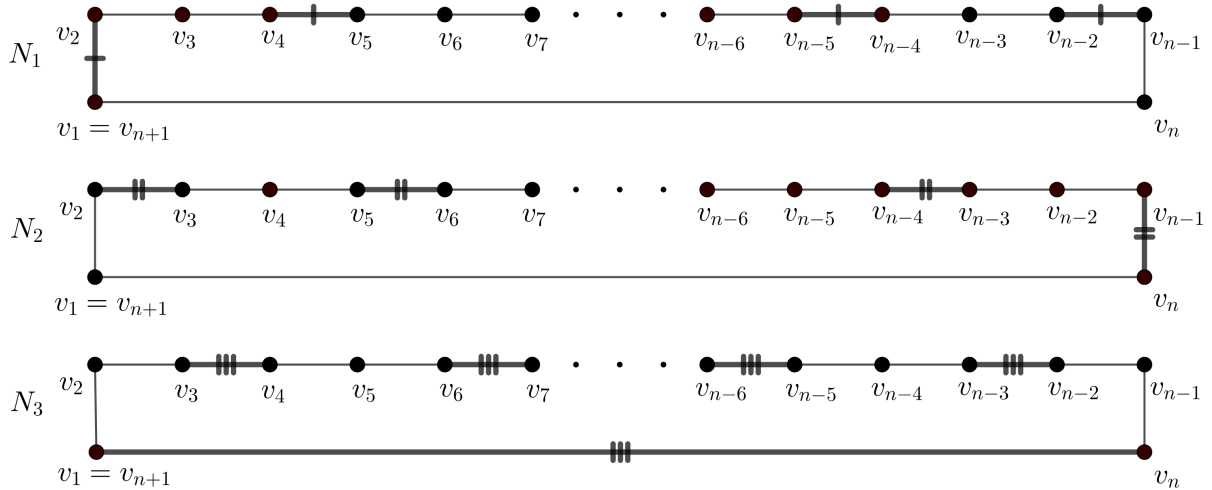


Figura 3.9: N_1 , N_2 y N_3

Afirmación 1.1: $S = \{v_{3i+1}v_{3i+2} \mid 0 \leq i \leq \frac{n-3}{3}\}$ es un conjunto dominante por aristas en C_n .

Recordemos que $|V(C_n)| = n$ y $|A(C_n)| = n$.

Definimos:

$$\begin{aligned}
N_1 &= \{v_{3i+1}v_{3i+2} \mid 0 \leq i \leq \frac{n-3}{3}\} = \{v_1v_2, v_4v_5, v_7v_8, \dots, v_{n-5}v_{n-4}, v_{n-2}v_{n-1}\} \\
N_2 &= \{v_{3i+2}v_{3i+3} \mid 0 \leq i \leq \frac{n-3}{3}\} = \{v_2v_3, v_5v_6, v_8v_9, \dots, v_{n-4}v_{n-3}, v_{n-1}v_n\} \\
N_3 &= \{v_{3i+3}v_{3i+4} \mid 0 \leq i \leq \frac{n-3}{3}\} = \{v_3v_4, v_6v_7, v_9v_{10}, \dots, v_{n-6}v_{n-5}, v_{n-3}v_{n-2}, v_nv_{n+1}\}.
\end{aligned}$$

Donde $v_{n+1} = v_1$.

Como $A(C_n) = N_1 \cup N_2 \cup N_3$ y $N_1 = S$, entonces $A(C_n) \setminus S = N_2 \cup N_3$.

Probaremos que toda arista en $A(C_n) \setminus S$ es adyacente a una arista en S . Sea v_rv_{r+1} una arista en $A(C_n) \setminus S$, entonces $v_rv_{r+1} \in N_2$ o $v_rv_{r+1} \in N_3$, ver figura 3.9.

Si $v_rv_{r+1} \in N_2$, entonces $v_rv_{r+1} = v_{3i+2}v_{3i+3}$ para algún i en $\{0, 1, \dots, \frac{n-3}{3}\}$. Como $v_{3i+1}v_{3i+2} \in N_1 = S$, se sigue que la arista v_rv_{r+1} es adyacente a $v_{3i+1}v_{3i+2}$.

Si $v_rv_{r+1} \in N_3$, entonces $v_rv_{r+1} = v_{3i+3}v_{3i+4}$ para algún i en $\{0, 1, \dots, \frac{n-3}{3}\}$. Notemos que la arista $v_{3i+3}v_{3i+4}$ es adyacente a $v_{3i+4}v_{3i+5}$, y además $v_{3i+4}v_{3i+5} = v_{3(i+1)+1}v_{3(i+1)+2}$, por lo que, $v_{3(i+1)+1}v_{3(i+1)+2} \in N_1 = S$. Por lo tanto, la arista v_rv_{r+1} es adyacente a una arista en S , a saber $v_{3i+4}v_{3i+5}$.

Por lo tanto, S es un conjunto dominante por aristas en C_n .

Afirmación 1.2: S es un conjunto dominante por aristas mínimo.

Como $n \equiv 0 \pmod{3}$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $3k = n$. Como $|S| = \frac{n}{3}$, se sigue que $|S| = k$.

Procederemos por contradicción, para probar que no existe un conjunto dominante por aristas de cardinalidad menor que k .

Supongamos que existe W un conjunto dominante por aristas tal que $|W| < |S| = k$. Notemos que $|W| \leq k - 1$, por lo que, $2k + 1 \leq |W^c|$.

Como W es un conjunto dominante por aristas, entonces toda arista en W^c es adyacente a una arista en W . Por otro lado, $2|W| \leq 2(k - 1) < 2(k) + 1$, lo que implica que $2|W| < 2(k) + 1$. Así, por el principio del palomar se tiene que existe una arista uv en W que es adyacente a al menos 3 aristas de W^c , lo cual es una contradicción, ya que C_n es un ciclo.

Por lo tanto, S es un conjunto dominante por aristas mínimo en C_n .

Afirmación 1.3: $\langle A(C_n) \setminus S \rangle \cong \left(\frac{n}{3}\right)P_3$.

Puesto que $A(C_n) \setminus S = N_2 \cup N_3$, entonces $\langle A(C_n) \setminus S \rangle = \langle N_2 \cup N_3 \rangle$. Por lo tanto, de la definición de N_2 y N_3 se sigue que $V(\langle N_2 \cup N_3 \rangle) = V(C_n)$ y $A(\langle N_2 \cup N_3 \rangle) = N_2 \cup N_3$.

Para cada arista en $N_2 \cup N_3$ definamos los siguientes conjuntos: $X_i = \{v_{3i+2}v_{3i+3}\}$ con i en $\{0, 1, \dots, \frac{n-3}{3}\}$ y $Y_i = \{v_{3i+3}v_{3i+4}\}$ con i en $\{0, 1, \dots, \frac{n-3}{3}\}$, ver figura 3.10.

De la definición de X_i y Y_i se deduce que $N_2 = \bigcup_{i=0}^{\frac{n-3}{3}} X_i$ y $N_3 = \bigcup_{i=0}^{\frac{n-3}{3}} Y_i$.

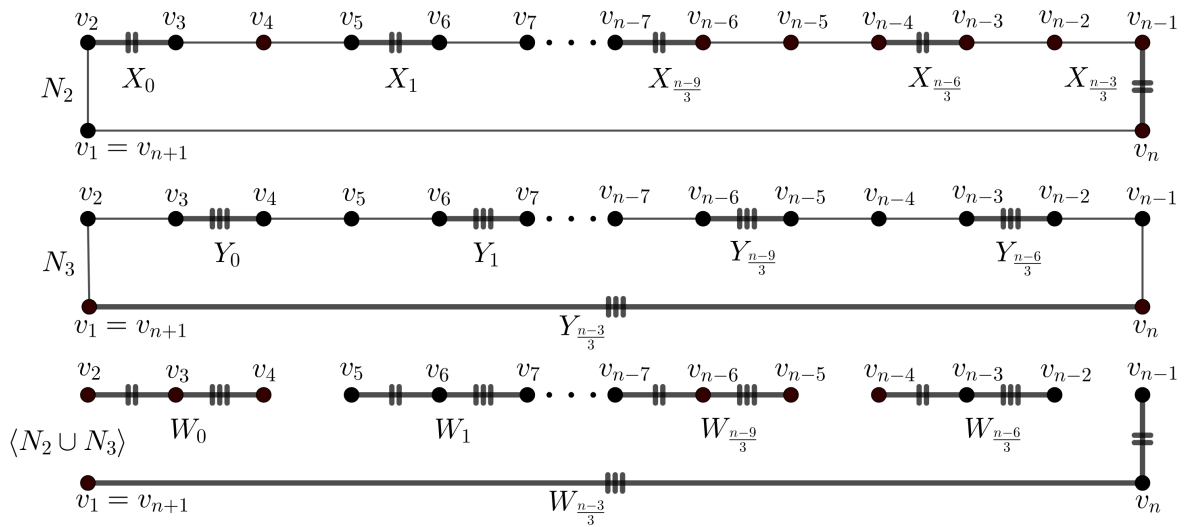


Figura 3.10: $\langle A(C_n) \setminus S \rangle = \langle N_2 \cup N_3 \rangle$

Si definimos al conjunto W_i como $X_i \cup Y_i$ con i en $\{0, 1, \dots, \frac{n-3}{3}\}$, entonces

$$\bigcup_{i=0}^{\frac{n-3}{3}} W_i = \bigcup_{i=0}^{\frac{n-3}{3}} (X_i \cup Y_i) = (X_0 \cup Y_0) \cup \dots \cup (X_{\frac{n-3}{3}} \cup Y_{\frac{n-3}{3}}) = \left(\bigcup_{i=0}^{\frac{n-3}{3}} X_i \right) \cup \left(\bigcup_{j=0}^{\frac{n-3}{3}} Y_j \right) = N_2 \cup N_3.$$

Por lo que, $\bigcup_{i=0}^{\frac{n-3}{3}} W_i = (N_2 \cup N_3) = (A(C_n) \setminus S)$.

Como $W_i = X_i \cup Y_i = \{v_{3i+2}v_{3i+3}, v_{3i+3}v_{3i+4}\}$ para cada i en $\{0, 1, \dots, \frac{n-3}{3}\}$, entonces $\langle W_i \rangle \cong P_3$ para cada i en $\{0, 1, \dots, \frac{n-3}{3}\}$.

Por lo que, $\bigcup_{i=0}^{\frac{n-3}{3}} \langle W_i \rangle \cong \binom{n}{3} P_3$. Esto implica que hay $\binom{n}{3}$ copias de P_3 en $\langle A(C_n) \setminus S \rangle$.

Recordemos que $A(\langle A(C_n) \setminus S \rangle) = A(\langle N_2 \cup N_3 \rangle) = N_2 \cup N_3$.

A su vez $N_2 \cup N_3 = \bigcup_{i=0}^{\frac{n-3}{3}} W_i$. Entonces $\langle N_2 \cup N_3 \rangle = \left\langle \bigcup_{i=0}^{\frac{n-3}{3}} W_i \right\rangle \cong \binom{n}{3} P_3$.

Lo que implica que $\langle N_2 \cup N_3 \rangle \cong \binom{n}{3} P_3$.

Por lo tanto, $\langle A(C_n) \setminus S \rangle \cong \binom{n}{3} P_3$.

Afirmación 1.4: S interseca a todo apareamiento máximo en C_n .

Como $\langle A(C_n) \setminus S \rangle \cong \binom{n}{3} P_3$, entonces todo apareamiento M en $\langle A(C_n) \setminus S \rangle$ tiene a lo más $\binom{n}{3}$ aristas. Esto se debe a que por cada P_3 podemos elegir exactamente una arista para M . Por lo tanto, todo apareamiento en $\langle A(C_n) \setminus S \rangle$ tiene a lo más $\binom{n}{3}$ aristas.

Como $\frac{n}{3} < \frac{n-1}{2}$, entonces $2n < 3n-3$, lo que implica que $3 < n$, y esto es cierto, ya que $n \geq 6$. Puesto que $\frac{n-1}{2} \leq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$, entonces $\frac{n}{3} < \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$. Ya que $\beta_1(C_n) = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ se concluye que $\langle A(C_n) \setminus S \rangle$ no tiene ningún apareamiento máximo de C_n .

Por lo tanto, S interseca a todo apareamiento máximo de C_n .

Afirmación 1.5: $\gamma'_{mt}(C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Por la afirmación 2 y afirmación 4 concluimos que $\gamma'_{mt}(C_n) \leq |S|$ y por el teorema 2.0.2 y afirmación 2 tenemos que $\gamma'(C_n) = |S| \leq \gamma'_{mt}(C_n)$. Por lo tanto, $\gamma'_{mt}(C_n) = |S| = \frac{n}{3}$.

Puesto que $k = \frac{n}{3} \in \mathbb{N}$, se sigue que $\frac{n}{3} = \lceil \frac{n}{3} \rceil$, lo que implica que $\gamma'_{mt}(C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Por lo tanto, $\gamma'_{mt}(C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Así, $\gamma'_{mt}(C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ si $n \equiv 0 \pmod{3}$, $n \geq 6$ y $n \notin \{3, 5\}$.

Caso 2: $n \equiv 1 \pmod{3}$.

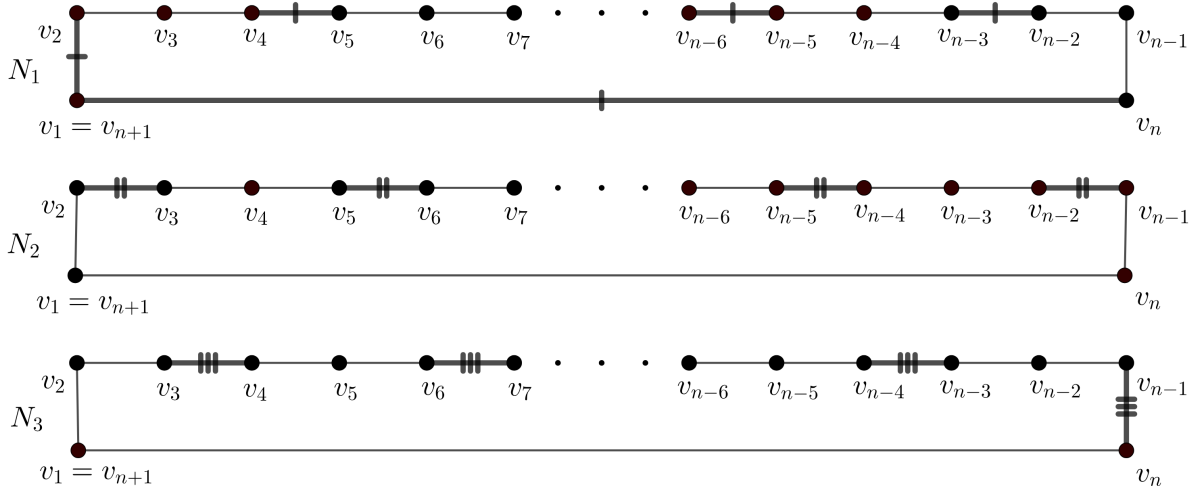
Notemos que como $n \equiv 1 \pmod{3}$ y $n \notin \{3, 5\}$, entonces $n \geq 4$.

Afirmación 2.1: $S = \{v_{3i+1}v_{3i+2} \mid 0 \leq i \leq \frac{n-1}{3}\}$ es un conjunto dominante por aristas en C_n .

Recordemos que $|V(C_n)| = n$ y $|A(C_n)| = n$.

Definimos:

$N_1 = \{v_{3i+1}v_{3i+2} \mid 0 \leq i \leq \frac{n-1}{3}\} = \{v_1v_2, v_4v_5, v_7v_8, \dots, v_{n-6}v_{n-5}, v_{n-3}v_{n-2}, v_nv_{n+1}\}$.

Figura 3.11: N_1 , N_2 y N_3

$$N_2 = \{v_{3i+2}v_{3i+3} \mid 0 \leq i \leq \frac{n-4}{3}\} = \{v_2v_3, v_5v_6, v_8v_9, \dots, v_{n-5}v_{n-4}, v_{n-2}v_{n-1}\}.$$

$$N_3 = \{v_{3i+3}v_{3i+4} \mid 0 \leq i \leq \frac{n-4}{3}\} = \{v_3v_4, v_6v_7, v_9v_{10}, \dots, v_{n-4}v_{n-3}, v_{n-1}v_n\}.$$

Donde $v_{n+1} = v_1$.

Puesto que $A(C_n) = N_1 \cup N_2 \cup N_3$ y $N_1 = S$, entonces $A(C_n) \setminus S = N_2 \cup N_3$.

Probaremos que toda arista en $A(C_n) \setminus S$ es adyacente a una arista en S . Sea v_rv_{r+1} una arista en $A(C_n) \setminus S$, entonces $v_rv_{r+1} \in N_2$ o $v_rv_{r+1} \in N_3$, ver figura 3.11.

Si $v_rv_{r+1} \in N_2$, entonces $v_rv_{r+1} = v_{3i+2}v_{3i+3}$ para algún i en $\{0, 1, \dots, \frac{n-4}{3}\}$. Como $v_{3i+1}v_{3i+2} \in N_1 = S$, se sigue que la arista v_rv_{r+1} es adyacente a $v_{3i+1}v_{3i+2}$.

Si $v_rv_{r+1} \in N_3$, entonces $v_rv_{r+1} = v_{3i+3}v_{3i+4}$ para algún i en $\{0, 1, \dots, \frac{n-4}{3}\}$. Notemos que la arista $v_{3i+3}v_{3i+4}$ es adyacente a $v_{3i+4}v_{3i+5}$, y además $v_{3i+4}v_{3i+5} = v_{3(i+1)+1}v_{3(i+1)+2}$, por lo que, $v_{3(i+1)+1}v_{3(i+1)+2} \in N_1 = S$. Por lo tanto, la arista v_rv_{r+1} es adyacente a una arista en S , a saber $v_{3i+4}v_{3i+5}$.

Por lo tanto, S es un conjunto dominante por aristas en C_n .

Afirmación 2.2: S es un conjunto dominante por aristas mínimo.

Como $n \equiv 1 \pmod{3}$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $3k = n - 1$. Como $|S| = \frac{n+2}{3}$, se sigue que $|S| = k + 1$.

Procederemos por contradicción para probar que no existe un conjunto dominante por aristas de cardinalidad menor que $k + 1$.

Supongamos que existe W un conjunto dominante por aristas tal que $|W| < |S| = k + 1$. Notemos que $|W| \leq k$ por lo que $2k + 1 \leq |W^c|$.

Como W es un conjunto dominante por aristas, entonces toda arista en W^c es adyacente a una arista en W . Por otro lado, $2|W| \leq 2(k) < 2(k) + 1$, lo que implica que $2|W| < 2(k) + 1$. Así, por el principio del palomar se tiene que existe una arista uv en W que es adyacente a al menos 3 aristas de W^c , lo cual es una contradicción, ya que C_n es un ciclo.

Por lo tanto, S es un conjunto dominante por aristas mínimo en C_n .

Afirmación 2.3: $\langle A(C_n) \setminus S \rangle \cong \binom{n-1}{3} P_3$.

Puesto que $A(C_n) \setminus S = N_2 \cup N_3$, entonces $\langle A(C_n) \setminus S \rangle = \langle N_2 \cup N_3 \rangle$. Por lo tanto, de la definición de N_2 y N_3 se sigue que $V(\langle N_2 \cup N_3 \rangle) = V(C_n) \setminus \{v_1\}$ y $A(\langle N_2 \cup N_3 \rangle) = N_2 \cup N_3$.

Para cada arista en $N_2 \cup N_3$ definamos los siguientes conjuntos: $X_i = \{v_{3i+2}v_{3i+3}\}$ con i en $\{0, 1, \dots, \frac{n-4}{3}\}$ y $Y_i = \{v_{3i+3}v_{3i+4}\}$ con i en $\{0, 1, \dots, \frac{n-4}{3}\}$, ver figura 3.12.

De la definición de X_i y Y_i se deduce que $N_2 = \bigcup_{i=0}^{\frac{n-4}{3}} X_i$ y $N_3 = \bigcup_{i=0}^{\frac{n-4}{3}} Y_i$.

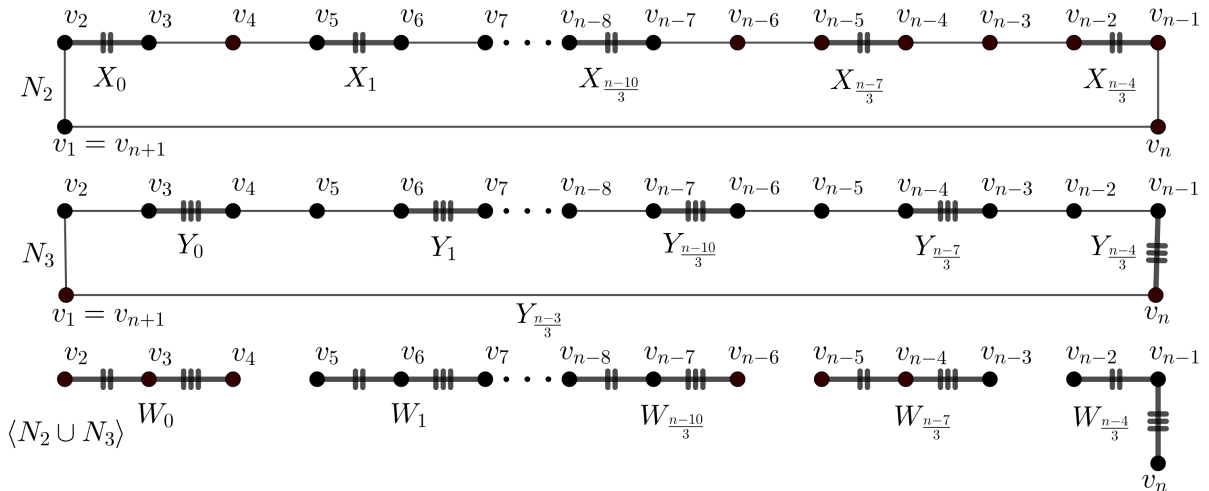


Figura 3.12: $\langle A(C_n) \setminus S \rangle = \langle N_2 \cup N_3 \rangle$

Si definimos al conjunto W_i como $X_i \cup Y_i$ con i en $\{0, 1, \dots, \frac{n-4}{3}\}$, entonces

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=0}^{\frac{n-4}{3}} W_i &= \bigcup_{i=0}^{\frac{n-4}{3}} (X_i \cup Y_i) = (X_0 \cup Y_0) \cup (X_1 \cup Y_1) \dots \cup (X_{\frac{n-4}{3}} \cup Y_{\frac{n-4}{3}}) = \\ &= \left(\bigcup_{i=0}^{\frac{n-4}{3}} X_i \cup \bigcup_{j=0}^{\frac{n-4}{3}} Y_j \right) = N_2 \cup N_3. \end{aligned}$$

Por lo que, $\bigcup_{i=0}^{\frac{n-4}{3}} W_i = (N_2 \cup N_3) = (A(C_n) \setminus S)$.

Como $W_i = X_i \cup Y_i = \{v_{3i+2}v_{3i+3}, v_{3i+3}v_{3i+4}\}$ para cada i en $\{0, 1, \dots, \frac{n-4}{3}\}$, entonces $\langle W_i \rangle \cong P_3$ para cada i en $\{0, 1, \dots, \frac{n-4}{3}\}$.

Por lo que, $\bigcup_{i=0}^{\frac{n-4}{3}} \langle W_i \rangle \cong \binom{n-1}{3} P_3$. Esto implica que hay $\binom{n-1}{3}$ copias de P_3 en $\langle A(C_n) \setminus S \rangle$.

Recordemos que $A(\langle A(C_n) \setminus S \rangle) = A(\langle N_2 \cup N_3 \rangle) = N_2 \cup N_3$.

A su vez $N_2 \cup N_3 = \bigcup_{i=0}^{\frac{n-4}{3}} W_i$. Entonces $\langle N_2 \cup N_3 \rangle = \left\langle \bigcup_{i=0}^{\frac{n-4}{3}} W_i \right\rangle \cong \binom{n-1}{3} P_3$.

Lo que implica que $\langle N_2 \cup N_3 \rangle \cong \binom{n-1}{3} P_3$.

Por lo tanto, $\langle A(C_n) \setminus S \rangle \cong \binom{n-1}{3} P_3$.

Afirmación 2.4: S interseca a todo apareamiento máximo en C_n .

Como $\langle A(C_n) \setminus S \rangle \cong \binom{n-1}{3} P_3$, entonces todo apareamiento M en $\langle A(C_n) \setminus S \rangle$ tiene a lo más $\binom{n-1}{3}$ aristas. Esto se debe a que por cada P_3 podemos elegir exactamente una arista para M . Por lo tanto, todo apareamiento en $\langle A(C_n) \setminus S \rangle$ tiene a lo más $\binom{n-1}{3}$ aristas.

Como $\frac{n-1}{3} < \frac{n-1}{2}$, entonces $2n - 2 < 3n - 3$, lo que implica que $1 < n$, y esto es cierto, ya que $n \geq 4$. Puesto que $\frac{n-1}{2} \leq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$, entonces $\frac{n-1}{3} < \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$. Ya que $\beta_1(C_n) = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ se concluye que $\langle A(C_n) \setminus S \rangle$ no tiene ningún apareamiento máximo de c_n .

Por lo tanto, S interseca a todo apareamiento máximo de C_n .

Afirmación 2.5: $\gamma'_{mt}(C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Por la afirmación 2 y afirmación 4 concluimos que $\gamma'_{mt}(C_n) \leq |S|$ y por el teorema 2.0.2 y afirmación 2 tenemos que $\gamma'(C_n) = |S| \leq \gamma'_{mt}(C_n)$. Por lo tanto, $\gamma'_{mt}(C_n) = |S| = \frac{n+2}{3}$.

Como $k = \frac{n-1}{3} \leq \frac{n}{3} \leq \frac{n+1}{3} \leq \frac{n+2}{3} = k+1$ donde $\{\frac{n}{3}, \frac{n+1}{3}\} \subseteq \mathbb{Q}$, entonces $\lceil \frac{n}{3} \rceil = \lceil \frac{n+1}{3} \rceil = \frac{n+2}{3}$, lo que implica que $\gamma'_{mt}(C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Por lo tanto, $\gamma'_{mt}(C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Así, $\gamma'_{mt}(C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ si $n \equiv 1 \pmod{3}$, $n \geq 4$ y $n \notin \{3, 5\}$.

Caso 3: $n \equiv 2 \pmod{3}$.

Notemos que como $n \equiv 2 \pmod{3}$ y $n \notin \{3, 5\}$, entonces $n \geq 8$.

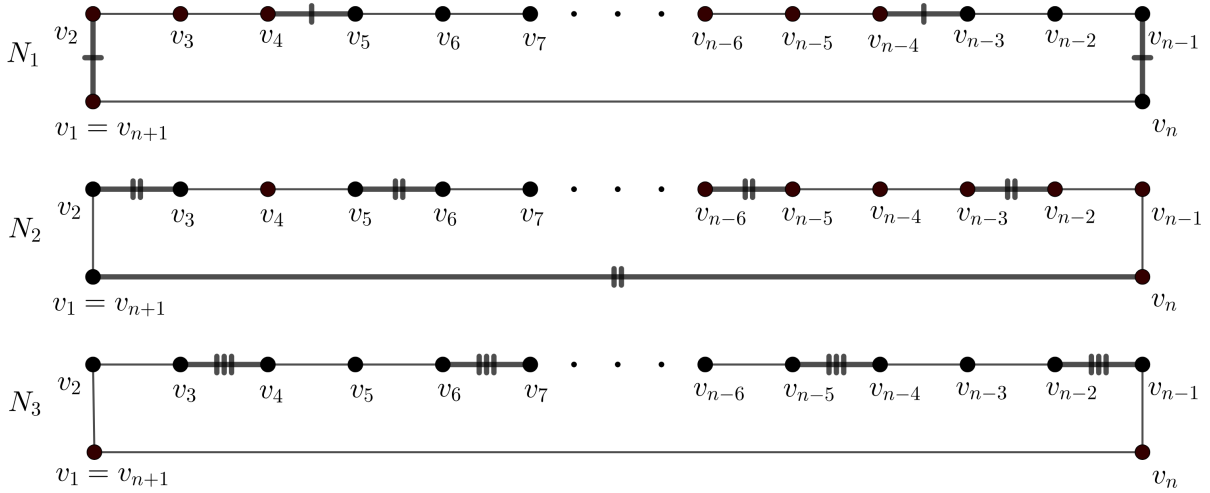


Figura 3.13: N_1 , N_2 y N_3

Afirmación 3.1: $S = \{v_{3i+1}v_{3i+2} \mid 0 \leq i \leq \frac{n-2}{3}\}$ es un conjunto dominante por aristas en C_n .

Recordemos que $|V(C_n)| = n$ y $|A(C_n)| = n$.

Definimos:

$$N_1 = \{v_{3i+1}v_{3i+2} \mid 0 \leq i \leq \frac{n-2}{3}\} = \{v_1v_2, v_4v_5, v_7v_8, \dots, v_{n-4}v_{n-3}, v_{n-1}v_n\}$$

$$N_2 = \{v_{3i+2}v_{3i+3} \mid 0 \leq i \leq \frac{n-2}{3}\} = \{v_2v_3, v_5v_6, v_8v_9, \dots, v_{n-3}v_{n-2}, v_nv_{n+1}\}$$

$$N_3 = \{v_{3i+3}v_{3i+4} \mid 0 \leq i \leq \frac{n-5}{3}\} = \{v_3v_4, v_6v_7, v_9v_{10}, \dots, v_{n-5}v_{n-4}, v_{n-2}v_{n-1}\}.$$

Puesto que $A(C_n) = N_1 \cup N_2 \cup N_3$ y $N_1 = S$, entonces $A(C_n) \setminus S = N_2 \cup N_3$.

Probaremos que toda arista en $A(C_n) \setminus S$ es adyacente a una arista en S . Sea $v_r v_{r+1}$ una arista en $A(C_n) \setminus S$, entonces $v_r v_{r+1} \in N_2$ o $v_r v_{r+1} \in N_3$, ver figura 3.13.

Si $v_r v_{r+1} \in N_2$, entonces $v_r v_{r+1} = v_{3i+2} v_{3i+3}$ para algún i en $\{0, 1, \dots, \frac{n-2}{3}\}$. Como $v_{3i+1} v_{3i+2} \in N_1 = S$, se sigue que la arista $v_r v_{r+1}$ es adyacente a $v_{3i+1} v_{3i+2}$.

Si $v_r v_{r+1} \in N_3$, entonces $v_r v_{r+1} = v_{3i+3} v_{3i+4}$ para algún i en $\{0, 1, \dots, \frac{n-5}{3}\}$. Notemos que $v_{3i+3} v_{3i+4}$ es adyacente a $v_{3i+4} v_{3i+5}$, y además $v_{3i+4} v_{3i+5} = v_{3(i+1)+1} v_{3(i+1)+2}$, por lo que $v_{3(i+1)+1} v_{3(i+1)+2} \in N_1 = S$. Por lo tanto, la arista $v_r v_{r+1}$ es adyacente a una arista en S , a saber $v_{3i+4} v_{3i+5}$.

Así, S es un conjunto dominante por aristas en C_n .

Afirmación 3.2: S es un conjunto dominante por aristas mínimo.

Como $n \equiv 2 \pmod{3}$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $3k = n - 2$, por lo que $k = \frac{n-2}{3}$. Como $|S| = \frac{n+1}{3}$, se sigue que $|S| = k + 1$.

Procederemos por contradicción para probar que no existe un conjunto dominante por aristas de cardinalidad menor que $k + 1$.

Supongamos que existe W un conjunto dominante por aristas tal que $|W| < |S| = k + 1$. Notemos que $|W| \leq k$, por lo que, $2k + 2 \leq |W^c|$.

Como W es un conjunto dominante por aristas, entonces toda arista en W^c es adyacente a una arista en W . Por otro lado, $2|W| \leq 2(k) < 2(k) + 2$, lo que implica que $2|W| < 2(k) + 2$. Así, por el principio del palomar se tiene que existe una arista uv en W que es adyacente a al menos 3 aristas de W^c , lo cual es una contradicción, ya que C_n es una trayectoria.

Por lo tanto, S es un conjunto dominante por aristas mínimo en C_n .

Afirmación 3.3: $\langle A(C_n) \setminus S \rangle \cong (\frac{n-2}{3})P_3 \cup K_2$.

Puesto que $A(C_n) \setminus S = N_2 \cup N_3$, entonces $\langle A(C_n) \setminus S \rangle = \langle N_2 \cup N_3 \rangle$. Por lo tanto, de la definición de N_2 y N_3 se sigue que $V(\langle N_2 \cup N_3 \rangle) = V(C_n)$ y $A(\langle N_2 \cup N_3 \rangle) = N_2 \cup N_3$.

Para cada arista en $N_2 \cup N_3$ definamos los siguientes conjuntos: $X_i = \{v_{3i+2} v_{3i+3}\}$ con i en $\{0, 1, \dots, \frac{n-2}{3}\}$ y $Y_i = \{v_{3i+3} v_{3i+4}\}$ con i en $\{0, 1, \dots, \frac{n-5}{3}\}$, ver figura 3.14.

De la definición de X_i y Y_i se deduce que $N_2 = \bigcup_{i=0}^{\frac{n-2}{3}} X_i$ y $N_3 = \bigcup_{i=0}^{\frac{n-5}{3}} Y_i$.

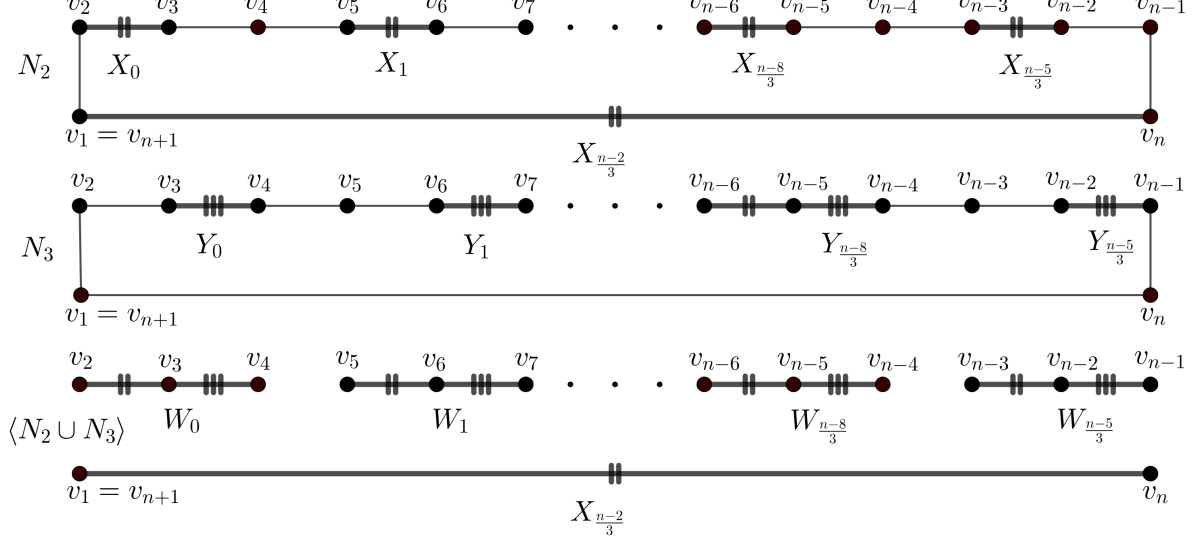


Figura 3.14: $\langle A(P_n) \setminus S \rangle = \langle N_2 \cup N_3 \rangle$

Si definimos al conjunto W_i como $X_i \cup Y_i$, con i en $\{0, 1, \dots, \frac{n-5}{3}\}$, entonces

$$\bigcup_{i=0}^{\frac{n-5}{3}} W_i = \bigcup_{i=0}^{\frac{n-5}{3}} (X_i \cup Y_i) = (X_0 \cup Y_0) \cup (X_1 \cup Y_1) \dots \cup (X_{\frac{n-5}{3}} \cup Y_{\frac{n-5}{3}}) =$$

$$\left(\bigcup_{i=0}^{\frac{n-5}{3}} X_i \cup \bigcup_{j=0}^{\frac{n-5}{3}} Y_j \right) = ((N_2 \setminus X_{\frac{n-2}{3}}) \cup N_3) = (N_2 \cup N_3) \setminus (X_{\frac{n-2}{3}}) = (N_2 \cup N_3) \setminus \{v_n v_{n+1}\}.$$

Por lo que, $\bigcup_{i=0}^{\frac{n-5}{3}} W_i = (N_2 \cup N_3) \setminus \{v_n v_{n+1}\} = (A(C_n) \setminus S) \setminus \{v_n v_{n+1}\}$.

Como $W_i = X_i \cup Y_i = \{v_{3i+2} v_{3i+3}, v_{3i+3} v_{3i+4}\}$ para cada i en $\{0, 1, \dots, \frac{n-5}{3}\}$, entonces $\langle W_i \rangle \cong P_3$ para cada i en $\{0, 1, \dots, \frac{n-5}{3}\}$.

Por lo que, $\bigcup_{i=0}^{\frac{n-5}{3}} \langle W_i \rangle \cong \binom{n-2}{3} P_3$. Esto implica que hay $\binom{n-2}{3}$ copias de P_3 en $\langle A(C_n) \setminus S \rangle$. Por otro lado de la definición de $\langle X_{\frac{n-2}{3}} \rangle$ se tiene que $\langle X_{\frac{n-2}{3}} \rangle \cong K_2$.

Recordemos que $A(\langle A(C_n) \setminus S \rangle) = A(\langle N_2 \cup N_3 \rangle) = N_2 \cup N_3$.

A su vez $\bigcup_{i=0}^{\frac{n-5}{3}} W_i = (N_2 \cup N_3) \setminus X_{\frac{n-2}{3}}$, por lo que $\bigcup_{i=0}^{\frac{n-5}{3}} W_i \cup X_{\frac{n-2}{3}} = (N_2 \cup N_3)$.

Entonces $\langle N_2 \cup N_3 \rangle = \left\langle \bigcup_{i=0}^{\frac{n-5}{3}} W_i \cup X_{\frac{n-2}{3}} \right\rangle \cong \binom{n-2}{3} P_3 \cup K_2$.

Lo que implica que $\langle N_2 \cup N_3 \rangle \cong \binom{n-2}{3} P_3 \cup K_2$.

Por lo tanto, $\langle A(C_n) \setminus S \rangle \cong \binom{n-2}{3} P_3 \cup K_2$.

Afirmación 3.4: S interseca a todo apareamiento máximo en C_n .

Como $\langle A(C_n) \setminus S \rangle \cong \binom{n-2}{3} P_3 \cup K_2$, entonces todo apareamiento en $\langle A(C_n) \setminus S \rangle$ tiene a lo más $\binom{n-2}{3} + 1$ aristas. Esto se debe a que por cada P_3 podemos elegir exactamente una arista para M , y también en M incluiríamos a la única arista de K_2 . Por lo tanto, todo apareamiento en $\langle A(C_n) \setminus S \rangle$ tiene a lo más $\binom{n-2}{3} + 1$ aristas.

Como $\frac{n-2}{3} + 1 < \frac{n-1}{2}$, entonces $\frac{n+1}{3} < \frac{n-1}{2}$, lo que implica que $2n + 2 < 3n - 3$, y así $5 < n$, esto es cierto, ya que $n \geq 8$. Puesto que $\frac{n-1}{2} \leq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$, entonces $\frac{n-2}{3} + 1 < \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$. Ya que $\beta_1(C_n) = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ se concluye que $\langle A(C_n) \setminus S \rangle$ no tiene ningún apareamiento máximo de C_n .

Por lo tanto, S interseca a todo apareamiento máximo de C_n .

Afirmación 3.5: $\gamma'_{mt}(C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Por la afirmación 2 y afirmación 4 concluimos que $\gamma'_{mt}(C_n) \leq |S|$ y por el teorema 2.0.2 y afirmación 2 tenemos que $\gamma'(C_n) = |S| \leq \gamma'_{mt}(C_n)$.

Por lo tanto, $\gamma'_{mt}(C_n) = |S| = \frac{n+1}{3}$.

Como $k = \frac{n-2}{3} \leq \frac{n-1}{3} \leq \frac{n}{3} \leq \frac{n+1}{3} = k+1$ donde $\{\frac{n-1}{3}, \frac{n}{3}\} \subseteq \mathbb{Q}$, entonces $\lceil \frac{n-1}{3} \rceil = \lceil \frac{n}{3} \rceil = \frac{n+1}{3}$, lo que implica que $\gamma'_{mt}(C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Por lo tanto, $\gamma'_{mt}(C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Así, $\gamma'_{mt}(C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ si $n \equiv 2 \pmod{3}$, $n \geq 8$ y $n \notin \{3, 5\}$. ■

3.3. Biestrellas

Teorema 3.3.1. *Sea $B_{r,s}$ una biestrella, entonces $\gamma'_{mt}(B_{r,s}) = \min\{r, s\} + 1$.*

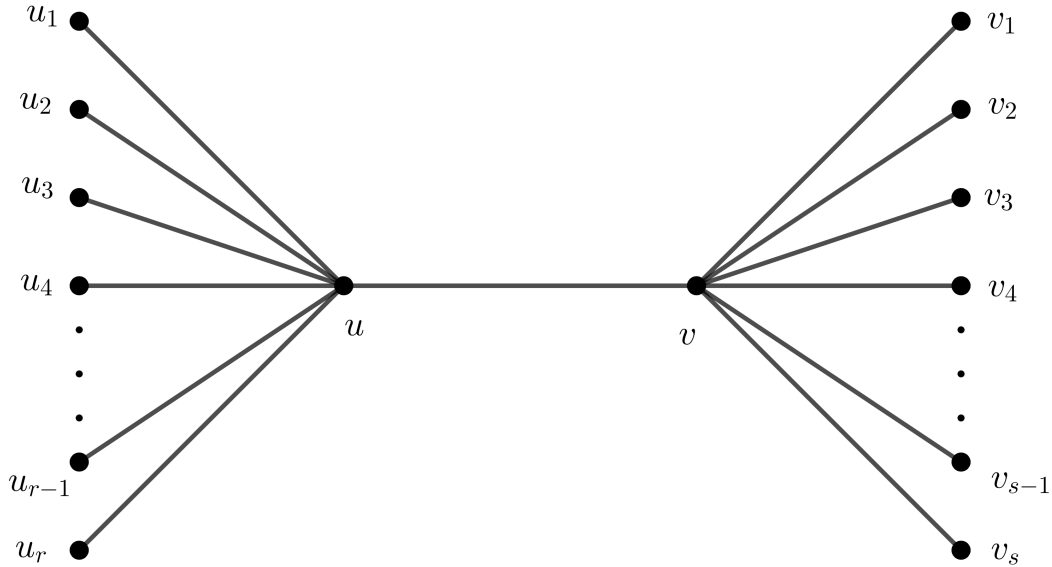


Figura 3.15: Biestrella

Demostración: Supongamos que $B_{r,s}$ es la gráfica que se muestra en la figura 3.15, con $r \leq s$, lo que implica que $\min\{r, s\} = r$. Probaremos que $\gamma'_{mt}(B_{r,s}) \leq r + 1$. Sea $S = \{u_i u \mid 1 \leq i \leq r\} \cup \{u, v\}$. Notemos que $A(B_{r,s}) \setminus S = \{v_j v \mid 1 \leq j \leq s\}$, donde $v_j v$ es adyacente a $uv \in S$ para toda j en $\{1, \dots, s\}$, lo que implica que S es un conjunto dominante por aristas. Por otro lado, por la figura 3.15 podemos ver que todo apareamiento máximo es de la forma $\{u_i u, v_j v\}$ con $i \in \{1, \dots, r\}$ y $j \in \{1, \dots, s\}$, lo que implica que S intersecta a todo apareamiento máximo. Así, S es un conjunto dominante por aristas transversal de apareamientos máximos. Por lo tanto, $\gamma'_{mt}(B_{r,s}) \leq r + 1$.

Ahora probaremos que $\gamma'_{mt}(B_{r,s}) \geq r + 1$. Para esto primero definamos los siguientes conjuntos $N_1 = \{u_i u \mid 1 \leq i \leq r\}$, $N_2 = \{v_j v \mid 1 \leq j \leq s\}$ y $N_3 = \{uv\}$, es claro que $A(B_{r,s}) = N_1 \cup N_2 \cup N_3$.

Procediendo por contradicción, supongamos que $\gamma'_{mt}(B_{r,s}) \leq r$. Así que, sea S' un $\gamma'_{mt}(B_{r,s})$ -conjunto, se sigue que $|S'| \leq r$. Consideremos los siguientes casos sobre S' :

1. $S' \subseteq N_1$.

Como la arista $v_j v$ no es adyacente a ninguna arista en S' para toda j en $\{1, \dots, s\}$, entonces S' no es un conjunto dominante por aristas.

2. $S' \subseteq N_2$.

Como la arista $u_i u$ no es adyacente a ninguna arista en S' para toda i en $\{1, \dots, r\}$, entonces S' no es un conjunto dominante por aristas.

3. $S' \subseteq N_3$.

Entonces $S' = \{uv\}$, pero S' no interseca a ningún apareamiento máximo.

4. $S' \subseteq N_1 \cup N_3$.

De los casos 1 y 3 se deduce que existe un subconjunto no vacío S_1 de N_1 tal que $S' = S_1 \cup N_3$ y $|S_1| \leq r - 1$. Como $|S_1| \leq r - 1$, entonces existe un u_iu en N_1 tal que $u_iu \notin S_1$, por lo que $S \cap \{u_iu, v_1v\} = \emptyset$, lo que implica que S' no interseca a todo apareamiento máximo de la biestrella.

5. $S' \subseteq N_2 \cup N_3$.

De los casos 2 y 3 se deduce que existe un subconjunto no vacío S_2 de N_2 tal que $S' = S_2 \cup N_3$ y $|S_2| \leq r - 1 \leq s - 1$. Como $|S_2| \leq r - 1$, entonces existe un v_iv en N_2 tal que $v_iv \notin S_2$, por lo que $S \cap \{v_iv, u_1u\} = \emptyset$, lo que implica que S' no interseca a todo apareamiento máximo de la biestrella.

6. $S' \subseteq N_1 \cup N_2$.

De los casos 1 y 2 se deduce que existen un subconjunto no vacío S_1 de N_1 y un subconjunto no vacío S_2 de N_2 tal que $S' = S_1 \cup S_2$ y $|S_1| = r_1$ y $|S_2| = r_2$ tal que $r_1 + r_2 \leq r$, lo que implica que $r_1 \leq r - 1$ y $r_2 \leq r - 1 \leq s - 1$. Como $r_1 \leq r - 1$ y $r_2 \leq s - 1$, entonces existen u_iu en N_1 y v_jv en N_2 tal que $u_iu \notin S_1$ y $v_jv \notin S_2$, por lo que $S \cap \{u_iu, v_jv\} = \emptyset$, lo que implica que S' no interseca a todo apareamiento máximo de la biestrella.

7. $S \subseteq N_1 \cup N_2 \cup N_3$.

De los casos 1, 2 y 3 se deduce que existen un subconjunto no vacío S_1 de N_1 y un subconjunto no vacío S_2 de N_2 tal que $S' = S_1 \cup S_2 \cup N_3$ y $|S_1| = r_1$ y $|S_2| = r_2$ tal que $r_1 + r_2 \leq r - 1$, lo que implica que $r_1 \leq r - 2$ y $r_2 \leq r - 2 \leq s - 2$. Como $r_1 \leq r - 2$ y $r_2 \leq s - 2$, entonces existen u_iu en N_1 y v_jv en N_2 tal que $u_iu \notin S_1$ y $v_jv \notin S_2$, por lo que $S \cap \{u_iu, v_jv\} = \emptyset$, lo que implica que S' no interseca a todo apareamiento máximo de la biestrella.

Como los siete casos nos llevan a una contradicción, concluimos que no existe un $\gamma'_{mt}(B_{r,s})$ -conjunto de cardinalidad menor o igual que r , por lo que $\gamma'_{mt}(B_{r,s}) \geq r + 1$.

Por lo tanto, $\gamma'_{mt}(B_{r,s}) = \min \{r, s\} + 1$. ■

3.4. Gráficas bipartitas completas

La demostración que presentamos del siguiente teorema es alternativa a la del artículo original.

Teorema 3.4.1. *Para cualquier gráfica bipartita completa $K_{r,s}$ donde $r \leq s$, se cumple que $\gamma'_{mt}(K_{r,s}) = s$.*

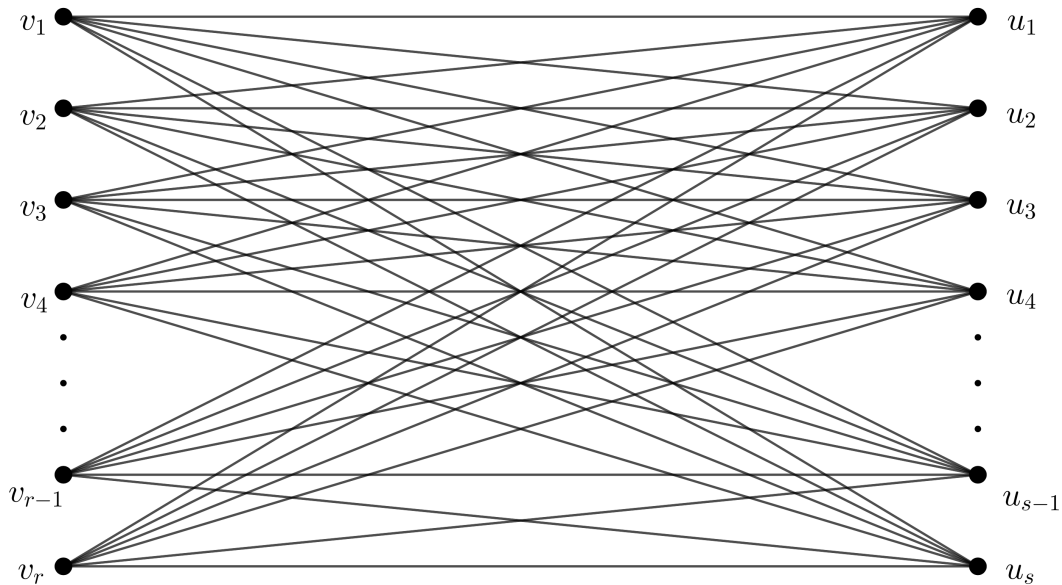


Figura 3.16: Gráfica bipartita completa $K_{r,s}$

Demostración: Sea $\{V_1, V_2\}$ una partición de los vértices de $K_{r,s}$ en conjuntos independientes donde $|V_1| = r$ y $|V_2| = s$ con $r \leq s$. Supongamos que $V_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_{r-1}, v_r\}$ y $V_2 = \{u_1, u_2, \dots, u_{r-1}, u_r, \dots, u_{s-1}, u_s\}$, se sigue que $V(K_{r,s}) = V_1 \cup V_2$ y $A(K_{r,s}) = \{v_i u_j \mid i \in \{1, 2, \dots, r\} \text{ y } j \in \{1, 2, \dots, s\}\}$, ver figura 3.16.

Definimos $N = \{v_1 u_j \mid j \in \{1, 2, \dots, s\}\}$. Primero probaremos que $\gamma'_{mt}(K_{r,s}) \leq s$. Para esto demostraremos las siguientes tres afirmaciones.

Afirmación 1: N es un conjunto dominante por aristas de $K_{r,s}$.

Notemos que $(A(K_{r,s}) \setminus N) = \{v_i u_j \mid i \in \{2, 3, \dots, r\} \text{ y } j \in \{1, 2, \dots, s\}\}$, donde cada arista $v_i u_j$ es adyacente a una arista en N , a saber $v_1 u_j$, y esto pasa para cada i en $\{2, 3, \dots, r\}$ y para cada j en $\{1, 2, \dots, s\}$, lo que implica que N es un conjunto dominante por aristas en $K_{r,s}$.

Afirmación 2: $\beta_1(K_{r,s}) = r$.

Es claro que $M = \{v_1u_1, v_2u_2, \dots, v_ru_r\}$ es un apareamiento de cardinalidad r , lo que implica que $r \leq \beta_1(K_{r,s})$.

Ahora probaremos que $r \geq \beta_1(K_{r,s})$. Procediendo por contradicción, supongamos que $r < \beta_1(K_{r,s})$, lo que implica que $r + 1 \leq \beta_1(K_{r,s})$. Sea M' un $\beta_1(K_{r,s})$ -conjunto, se sigue que $r + 1 \leq |M'|$. Puesto que $|V_1| = r$, entonces $|V_1| = r < r + 1 \leq |M'|$, lo que implica que $|V_1| < |M'|$. Así que, por el principio del palomar, se sigue que existe un vértice v_i en V_1 al que le inciden al menos dos aristas de M' , lo cual es una contradicción, ya que M' no sería apareamiento. Así que, $r \geq \beta_1(K_{r,s})$.

Por lo tanto, $\beta_1(K_{r,s}) = r$.

Afirmación 3: N interseca a todo apareamiento máximo de $K_{r,s}$.

Sea M un apareamiento máximo de $K_{r,s}$. Por el corolario 1.7.1 sabemos que cada vértice de V_1 está M -saturado, en particular v_1 , por lo que existe un u_j en V_2 tal que $v_1u_j \in M$, pero por definición de N también tenemos que $v_1u_j \in N$, lo que implica que $N \cap M \neq \emptyset$.

Como el apareamiento que elegimos fue arbitrario, se tiene que N interseca a todo apareamiento máximo de $K_{r,s}$.

Por la afirmación 1 y afirmación 3 podemos concluir que N es un conjunto dominante por aristas transversal de apareamientos máximos, lo que implica que $\gamma'_{mt}(K_{r,s}) \leq |N| = s$.

Ahora probaremos que $\gamma'_{mt}(K_{r,s}) \geq s$. Procediendo por contradicción, supongamos que $\gamma'_{mt}(K_{r,s}) < s$, lo que implica que $\gamma'_{mt}(K_{r,s}) \leq s - 1$. Sea W un $\gamma'_{mt}(K_{r,s})$ -conjunto, se sigue que $|W| \leq s - 1$. Por comodidad denotemos a $K_{r,s}$ por G . Sea $H = (G - W)$, notemos que $\{V_1, V_2\}$ es una partición de $V(H)$ en conjuntos independientes.

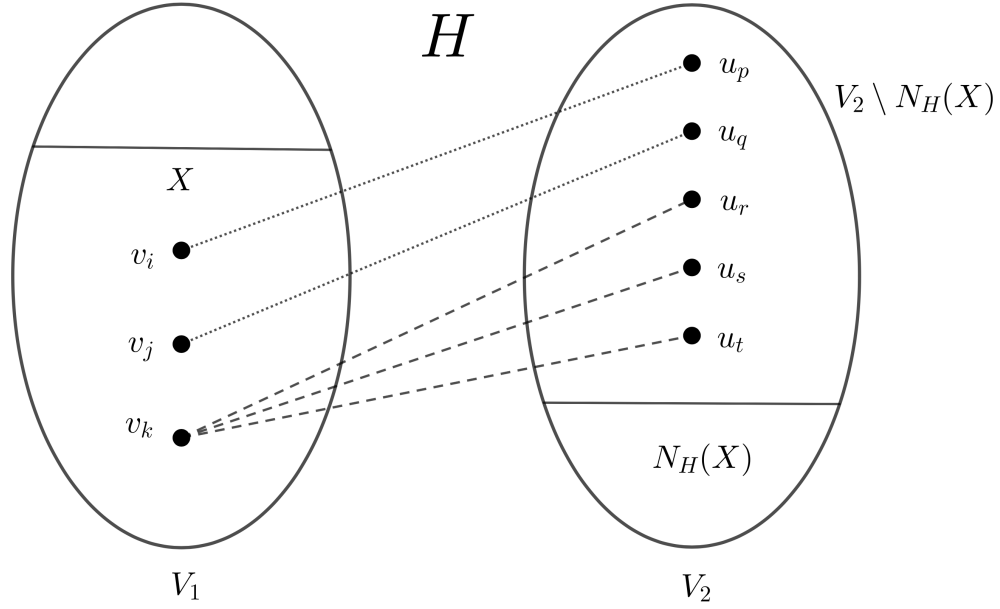
Probaremos que existe un apareamiento máximo M en H tal que $M \cap W = \emptyset$, lo cual nos lleva a una contradicción, para esto probaremos las siguientes afirmaciones:

Afirmación 4: $|N_H(S)| \geq |S|$ para cada subconjunto S de V_1 .

Procediendo por contradicción, supongamos que existe X un subconjunto de V_1 tal que $|N_H(X)| < |X|$.

Primero notemos que $X \subseteq V_1$ y $V_2 = N_H(X) \cup (V_2 \setminus N_H(X))$, es claro, que $X \neq \emptyset$ y $N_H(X) \neq \emptyset$. Además, como $|N_H(X)| < |X|$ y $|X| \leq |N_G(X)|$, (por el teorema de Hall 1.7.3), se sigue que $|N_G(X)| > |N_H(X)|$, lo que implica que existe al menos un vértice u' en $N_G(X)$ tal que $u' \notin N_H(X)$. Por lo tanto, $(V_2 \setminus N_H(X)) \neq \emptyset$.

Afirmamos que $\{v_iu_j \mid v_i \in X \text{ y } u_j \in (V_2 \setminus N_H(X))\} \subseteq W$. Procediendo por con-


 Figura 3.17: Partición $\{V_1, V_2\}$ de $V(H)$ en conjuntos independientes

tradicción, supongamos que existe $v'u'$ en $\{v_i u_j \mid v_i \in X \text{ y } u_j \in (V_2 \setminus N_H(X))\}$ tal que $v'u' \notin W$. Puesto que $v'u' \notin W$ y G es una gráfica bipartita completa, se sigue $v'u' \in (A(G) \setminus W)$, pero $(A(G) \setminus W) = A(H)$, lo que implica que $v'u' \in A(H)$. Por otro lado, como $v' \in X$ y $v'u' \in A(H)$, se sigue que $u' \in N_H(X)$, lo cual es una contradicción, ya que $u' \in (V_2 \setminus N_H(X))$. Por lo tanto,

$$\{v_i u_j \mid v_i \in X \text{ y } u_j \in (V_2 \setminus N_H(X))\} \subseteq W. \quad (3.1)$$

Ahora veremos al menos cuántos elementos tiene el conjunto W .

Como $|V_2| = s$, entonces $|(V_2 \setminus N_H(X))| = s - |N_H(X)|$. Por otro lado, puesto que $|N_H(X)| < |X|$, se sigue que $-|N_H(X)| > -|X|$, lo que implica que

$$s - |N_H(X)| > s - |X|. \quad (3.2)$$

Sea v_k en X , como $\{v_k u_j \mid u_j \in (V_2 \setminus N_H(X))\} \subseteq \{v_i u_j \mid v_i \in X \text{ y } u_j \in (V_2 \setminus N_H(X))\} \subseteq W$ y $|\{v_k u_j \mid u_j \in (V_2 \setminus N_H(X))\}| = |(V_2 \setminus N_H(X))|$, se sigue que

$$|(V_2 \setminus N_H(X))| \leq |W|. \quad (3.3)$$

Como $|(V_2 \setminus N_H(X))| = s - |N_H(X)|$, obtenemos de (3.3) que

$$s - |N_H(X)| \leq |W|. \quad (3.4)$$

Luego de (3.2) y (3.4) se tiene que $s - |X| < |W|$, por lo que

$$s - |X| + 1 \leq |W|. \quad (3.5)$$

Por otro lado, como $\{v_p u_j \mid v_p \in (X \setminus \{v_k\}) \text{ y } u_j \in (V_2 \setminus N_H(X))\} \subseteq \{v_i u_j \mid v_i \in X \text{ y } u_j \in (V_2 \setminus N_H(X))\} \subseteq W$ y $|\{v_p u_j \mid v_p \in (X \setminus \{v_k\}) \text{ y } u_j \in (V_2 \setminus N_H(X))\}| \geq |X| - 1$, se sigue que

$$|X| - 1 \leq |W|. \quad (3.6)$$

Así por (3.5) y (3.6) se sigue que $((s - |X| + 1) + (|X| - 1)) = s \leq |W|$, lo cual es una contradicción, ya que $|W| \leq s - 1$.

Por lo tanto, $|N_H(S)| \geq |S|$.

Así, del teorema 1.7.3 (teorema de Hall) se sigue que H tiene un apareamiento que satura a cada vértice de V_1 , digamos M . Como H es una subgráfica generadora de G , entonces M es un apareamiento máximo de G , el cual no es intersectado por W , lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, $\gamma'_{mt}(K_{r,s}) \geq s$.

Así, $\gamma'_{mt}(K_{r,s}) = s$. ■

Capítulo 4

Construcciones de gráficas

En este capítulo veremos dos teoremas los cuales hablan sobre construcciones. El primer teorema se encuentra en el artículo *Matching Transversal Edge Domination in Graphs* [1] y dice lo siguiente “Sean a y b dos números enteros positivos con $b \geq 2a - 1$, entonces existe una gráfica G tal que $|A(G)| = b$ y $\gamma'_{mt}(G) = a$ ” cabe mencionar que este teorema fue modificado por parte nuestra, debido a que presentaba dos errores, el primero se presentaba en el caso cuando $b > 1$ y $a = 1$, ya que al ser $\gamma'_{mt}(G) = a = 1$, por el teorema 2.0.4 se tiene que $G \cong K_2$, lo que implica que $|A(G)| = b = 1$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, se necesita la condición de que $b \geq 2a - 1 > 1$; es decir, $b \geq 2a - 1 \geq 2$. Por este motivo nosotros agregamos esta hipótesis adicional al teorema para evitar el problema. El segundo error que se presentaba el teorema original era en la construcción que el autor da para probar el teorema, ya que en el caso cuando $b = 2a - 1$ se tiene que $|A(G)| = b$, pero $\gamma'_{mt}(G) = a - 1$, lo cual no cumple las condiciones que establece el teorema, esto será exhibido con un ejemplo más adelante en la demostración. Por otro lado, el segundo teorema es una aportación nuestra y se puede considerar como una generalización del primer teorema.

Teorema 4.0.1. *Sean a y b dos números enteros positivos con $b \geq 2a - 1 \geq 2$, entonces existe una gráfica G tal que $|A(G)| = b$ y $\gamma'_{mt}(G) = a$.*

Demostración:

Caso 1) Sean $b = 2a + r$, con $r \geq 0$, y H una gráfica de la forma $K_{1,a}$; es decir, H es un estrella, sin pérdida de generalidad, supongamos que $V(H) = \{z, v_1, v_2, \dots, v_{a-1}, v_a\}$ y $A(H) = \{e_1, e_2, \dots, e_{a-1}, e_a\}$ donde $e_i = zv_i$ para cada i en $\{1, 2, \dots, a\}$. En la figura 4.1 se puede apreciar la gráfica H .

Sea G la gráfica obtenida a partir de H , al unir $r + 1$ aristas al vértice v_1 y denotemos $\{g_1, g_2, \dots, g_r, g_{r+1}\}$ al conjunto de aristas adyacentes a e_1 . A su vez uniremos una arista f_i a cada vértice v_i para i en $\{2, 3, \dots, a - 1, a\}$. Diremos que $V(G) = V(H) \cup \{u_1, u_2, \dots, u_r, u_{r+1}\} \cup \{w_2, w_3, \dots, w_{a-1}, w_a\}$ y $A(G) = A(H) \cup \{g_1, g_2, \dots, g_r, g_{r+1}\} \cup \{f_2, f_3, \dots, f_{a-1}, f_a\}$, donde $g_i = v_1u_i$ para cada i en $\{1, 2, \dots, r, r+1\}$ y $f_j = v_jw_j$ para cada j en $\{2, 3, \dots, a - 1, a\}$. Podemos apreciar la forma de la gráfica G en la figura 4.1.

Notemos que $|A(G)| = a + (r + 1) + (a - 1) = 2a + r = b$, por lo que $|A(G)| = b$. Así que, solo nos falta probar que $\gamma'_{mt}(G) = a$.

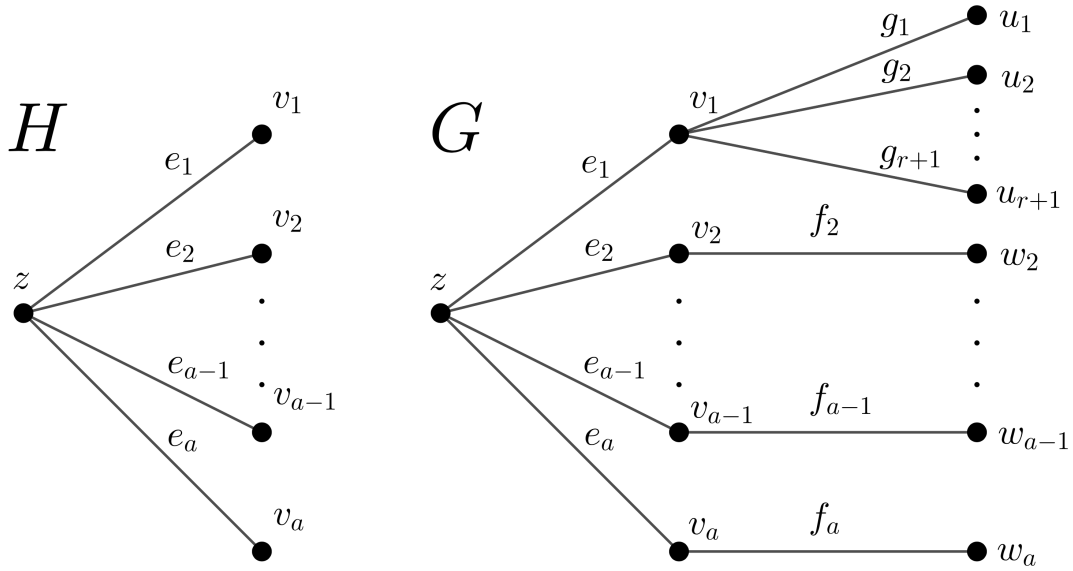


Figura 4.1: Gráfica H y gráfica G

Primero probaremos que $\gamma'_{mt}(G) \leq a$. Para esto definiremos los siguientes conjuntos $N_1 = \{e_1\}$, $N_2 = \{e_2, \dots, e_{a-1}, e_a\}$, $N_3 = \{g_1, g_2, \dots, g_r, g_{r+1}\}$ y $N_4 = \{f_2, f_3, \dots, f_{a-1}, f_a\}$; es claro, que $A(G) = N_1 \cup N_2 \cup N_3 \cup N_4$.

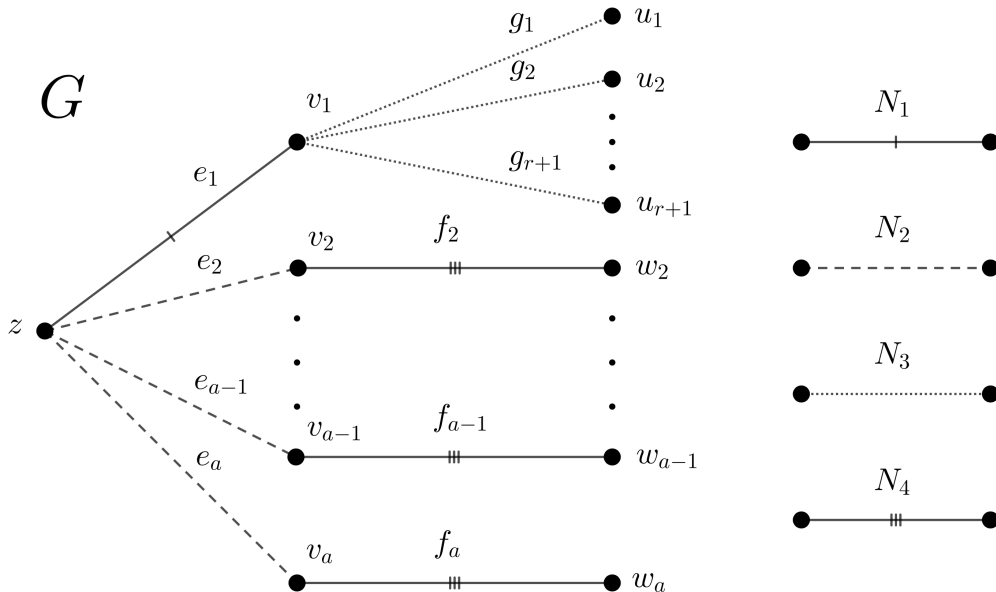


Figura 4.2: Gráfica G

Sea $S = \{e_1, f_2, f_3, \dots, f_{a-1}, f_a\} = N_1 \cup N_4$. Por demostrar que S es un conjunto dominante por aristas. Notemos que $A(G) \setminus S = N_2 \cup N_3$, donde cada e_i en N_2 es

adyacente a f_i para i en $\{2, 3, \dots, a-1, a\}$, y por otro lado cada g_j en N_3 es adyacente a e_1 . Por lo tanto, S es un conjunto dominante por aristas. Ahora probaremos que S intersecta a todo apareamiento máximo de G . Por la figura 4.2, se puede apreciar que todo apareamiento máximo es de la forma $M_1 = \{e_1\} \cup \{f_2, f_3, \dots, f_{a-1}, f_a\}$ o $M'_i = \{g_i\} \cup \{f_2, f_3, \dots, f_{a-1}, f_a\}$ con i en $\{1, 2, \dots, r+1\}$ o $M''_{ij} = \{g_i\} \cup \{e_j\} \cup \{f_k \mid k \in \{2, \dots, a\} \text{ y } k \neq j\}$ con i en $\{1, 2, \dots, r+1\}$ y j en $\{2, 3, \dots, a\}$. Notemos que $(S \cap M_1) = \{e_1\} \cup \{f_2, f_3, \dots, f_{a-1}, f_a\}$, $(S \cap M'_i) = \{f_i\}$ para cada i en $\{1, 2, \dots, r+1\}$ y $(S \cap M''_{ij}) = \{f_k \mid k \in \{2, \dots, a\} \text{ y } k \neq j\}$ para cada i en $\{1, 2, \dots, r+1\}$ y j en $\{2, 3, \dots, a\}$, por lo que S intersecta a todo apareamiento máximo de G . Por lo tanto, S es un conjunto dominante por aristas transversal de apareamientos máximos, lo que implica que $\gamma'_{mt}(G) \leq a$.

Ahora probaremos que $\gamma'_{mt}(G) \geq a$. Procediendo por contradicción, supongamos que $\gamma'_{mt}(G) < a$, por lo que $\gamma'_{mt}(G) \leq a-1$. Sea S' un $\gamma'_{mt}(G)$ -conjunto, se sigue que $|S'| \leq a-1$. Así que, consideremos los siguientes casos sobre S' :

1. $S' \subseteq N_1$.

Puesto que $N_1 = \{e_1\}$, se sigue que $S' = \{e_1\}$, por lo que S' no intersecta a ningún apareamiento máximo de G de la forma $\{g_i\} \cup \{f_2, f_3, \dots, f_a\}$.

2. $S' \subseteq N_2$.

Como $|S'| \leq a-1$, entonces existe una arista e_i en N_2 tal que $e_i \notin S'$, por lo que f_i no es adyacente a ninguna arista en S' , lo que implica que S' no es un conjunto dominante por aristas.

3. $S' \subseteq N_3$.

Es claro que ningún elemento de S' es adyacente a alguna arista f_i de N_4 , por lo que S' no es un conjunto dominante por aristas.

4. $S' \subseteq N_4$.

Es claro que ningún elemento de S' es adyacente a alguna arista g_j de N_3 , por lo que S' no es un conjunto dominante por aristas.

5. $S' \subseteq N_1 \cup N_2$.

De los casos 1 y 2 se deduce que existe un subconjunto no vacío S_2 de N_2 tal que $S' = N_1 \cup S_2$ y $|S_2| \leq a-2$. Como $|S_2| \leq a-2$, porque $|S'| \leq a-1$, entonces existe un e_i en N_2 tal que $e_i \notin S_2$, por lo que la arista $f_i \in N_4$ no es adyacente a ninguna arista en S' , lo que implica que S' no es un conjunto dominante por aristas.

6. $S' \subseteq N_1 \cup N_3$.

De los casos 1 y 3 se deduce que existe un subconjunto no vacío S_3 de N_3 tal que $S' = N_1 \cup S_3$, pero ninguna arista f_i en N_4 es adyacente a alguna arista en S' , por lo que S' no es un conjunto dominante por aristas.

7. $S' \subseteq N_1 \cup N_4$.

De los casos 1 y 4 se deduce que existe un subconjunto no vacío S_4 de N_4 tal

que $S' = N_1 \cup S_4$ y $|S_4| \leq a - 2$, por que $|S'| \leq a - 1$. Como $|S_4| \leq a - 2$, entonces existe un f_i en N_4 tal que $f_i \notin S_4$, por lo que la misma arista f_i en N_4 no es adyacente a ninguna arista en S' , lo que implica que S' no es un conjunto dominante por aristas.

8. $S' \subseteq N_2 \cup N_3$.

De los casos 2 y 3 se deduce que existen un subconjunto no vacío S_2 de N_2 y un subconjunto no vacío S_3 de N_3 tal que $S' = S_2 \cup S_3$ y $|S_2| = r_2$ y $|S_3| = r_3$ tal que $r_2 + r_3 \leq a - 1$, lo que implica que $r_2 \leq a - 2$ y $r_3 \leq a - 2$. Como $r_2 \leq a - 2$, entonces existe un e_i en N_2 tal que $e_i \notin S_2$, por lo que la arista f_i de N_4 no es adyacente a ninguna arista en S' , lo que implica que S' no es un conjunto dominante por aristas.

9. $S' \subseteq N_2 \cup N_4$.

De los casos 2 y 4 se deduce que existen un subconjunto no vacío S_2 de N_2 y un subconjunto no vacío S_4 de N_4 tal que $S' = S_2 \cup S_4$ y $|S_2| = r_2$ y $|S_4| = r_4$ tal que $r_2 + r_4 \leq a - 1$, lo que implica que $r_2 \leq a - 2$ y $r_4 \leq a - 2$. Pero ninguna arista g_j en N_3 es adyacente a alguna arista en S' , lo que implica que S' no es un conjunto dominante por aristas.

10. $S' \subseteq N_3 \cup N_4$.

De los casos 3 y 4 se deduce que existen un subconjunto no vacío S_3 de N_3 y un subconjunto no vacío S_4 de N_4 tal que $S' = S_3 \cup S_4$ y $|S_3| = r_3$ y $|S_4| = r_4$ tal que $r_3 + r_4 \leq a - 1$, lo que implica que $r_3 \leq a - 2$ y $r_4 \leq a - 2$. Como $r_4 \leq a - 2$, entonces existe un f_i en N_4 tal que $f_i \notin S_4$, por lo que la misma arista f_i de N_4 no es adyacente a ninguna arista en S' , lo que implica que S' no es un conjunto dominante por aristas.

11. $S' \subseteq N_1 \cup N_2 \cup N_3$.

De los casos 5, 6 y 8 se deduce que existen un subconjunto no vacío S_2 de N_2 y un subconjunto no vacío S_3 de N_3 tal que $S' = N_1 \cup S_2 \cup S_3$ y $|S_2| = r_2$ y $|S_3| = r_3$ tal que $r_2 + r_3 \leq a - 2$, lo que implica que $r_2 \leq a - 3$. Como $r_2 \leq a - 3$, entonces existe un e_i en N_2 tal que $e_i \notin S_2$, por lo que la arista f_i de N_4 no es adyacente a ninguna arista en S' , lo que implica que S' no es un conjunto dominante por aristas.

12. $S' \subseteq N_1 \cup N_2 \cup N_4$.

De los casos 5, 7 y 9 se deduce que existen un subconjunto no vacío S_2 de N_2 y un subconjunto no vacío S_4 de N_4 tal que $S' = N_1 \cup S_2 \cup S_4$ y $|S_2| = r_2$ y $|S_4| = r_4$ tal que $r_2 + r_4 \leq a - 2$, lo que implica que $r_2 \leq a - 3$ y $r_4 \leq a - 3$.

Afirmación: Existen e_i en N_2 y f_i en N_4 con i en $\{2, 3, \dots, a\}$ tal que $e_i \notin S'$ y $f_i \notin S'$. Supongamos que esto no fuera cierto, entonces para todo e_i en N_2 y f_i en N_4 con i en $\{2, 3, \dots, a\}$ se cumple que $e_i \in S'$ o $f_i \in S'$, además $N_1 \subseteq S'$, lo que implica que $(a - 1) + 1 \leq |S'|$, lo cual es una contradicción, ya que $|S'| \leq a - 1$. Por lo tanto, como $e_i \notin S$ y $f_i \notin S$ se sigue que S' no es un conjunto dominante por aristas.

13. $S' \subseteq N_1 \cup N_3 \cup N_4$.

De los casos 6, 7 y 10 se deduce que existen un subconjunto no vacío S_3 de N_3 y un subconjunto no vacío S_4 de N_4 tal que $S' = N_1 \cup S_3 \cup S_4$ y $|S_3| = r_3$ y $|S_4| = r_4$ tal que $r_3 + r_4 \leq a - 2$, lo que implica que $r_4 \leq a - 3$. Como $r_4 \leq a - 3$, entonces existe al menos un f_j en N_4 tal que $f_j \notin S_4$, por lo que la misma arista $f_j \in N_4$ no es adyacente a ninguna arista en S' , lo que implica que S' no es un conjunto dominante por aristas.

14. $S' \subseteq N_2 \cup N_3 \cup N_4$.

De los casos 8, 9 y 10 se deduce que existen un subconjunto no vacío S_2 de N_2 , un subconjunto no vacío S_3 de N_3 y un subconjunto no vacío S_4 de N_4 tal que $S' = S_2 \cup S_3 \cup S_4$ y $|S_2| = r_2$ y $|S_3| = r_3$ y $|S_4| = r_4$ tal que $r_2 + r_3 + r_4 \leq a - 1$, lo que implica que $r_2 \leq a - 3$ y $r_4 \leq a - 3$.

Afirmación: Existen e_i en N_2 y f_i en N_4 con i en $\{2, 3, \dots, a\}$ tal que $e_i \notin S'$ y $f_i \notin S'$. Supongamos que esto no fuera cierto, entonces para todo e_i en N_2 y f_i en N_4 con i en $\{2, 3, \dots, a\}$ se cumple que $e_i \in S'$ o $f_i \in S'$, además $S_3 \subseteq S'$, lo que implica que $(a - 1) + 1 \leq |S'|$, lo cual es una contradicción, ya que $|S'| \leq a - 1$. Por lo tanto, la existencia de e_i y f_i implica que S' no es un conjunto dominante por aristas.

15. $S' \subseteq N_1 \cup N_2 \cup N_3 \cup N_4$.

De los casos 11, 12, 13 y 14 se deduce que existen un subconjunto no vacío S_2 de N_2 , un subconjunto no vacío S_3 de N_3 y un subconjunto no vacío S_4 de N_4 tal que $S' = N_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$ y $|S_2| = r_2$ y $|S_3| = r_3$ y $|S_4| = r_4$ tal que $r_2 + r_3 + r_4 \leq a - 2$, lo que implica que $r_2 \leq a - 4$ y $r_4 \leq a - 4$.

Afirmación: Existen e_i en N_2 y f_i en N_4 con i en $\{2, 3, \dots, a\}$ tal que $e_i \notin S'$ y $f_i \notin S'$. Procediendo por contradicción, supongamos que para todo e_i en N_2 y f_i en N_4 con i en $\{2, 3, \dots, a\}$ se cumple que $e_i \in S'$ o $f_i \in S'$, entonces $a - 1 \leq |S'|$. Por otro lado, $N_1 \subseteq S'$ y $S_3 \subseteq S'$, lo que implica que $(a - 1) + 1 + 1 \leq |S'|$, lo cual es una contradicción, ya que $|S'| \leq a - 1$. Por lo tanto, se concluye que S' no es un conjunto dominante por aristas, lo cual no es posible.

Como los quince casos nos llevan a una contradicción, concluimos que no existe un $\gamma'_{mt}(G)$ -conjunto de cardinalidad menor o igual que $a - 1$, por lo que $\gamma'_{mt}(G) \geq a$.

Por lo tanto, $\gamma'_{mt}(G) = a$.

Así, $\gamma'_{mt}(G) = a$ y $|A(G)| = b$, si $b = 2a + r$ con $r \geq 0$.

En este punto mostraremos el segundo error que presentaba el teorema 4.0.1 en el artículo original. El problema se encuentra en la construcción que el autor propuso para probar el teorema debido a que en el caso cuando $b = 2a - 1$, se tiene que $|A(G)| = b$, pero $\gamma'_{mt}(G) = a - 1$, se puede apreciar la construcción en la figura 4.1.

A continuación, se ejemplifica lo antes mencionado.

Sean $a = 3$ y $b = 5$, es claro que, $|A(G)| = b = 2(a) - 1 = 2(3) - 1 = 5$.

Afirmamos que $\gamma'_{mt}(G) = a - 1 = 2$. Primero probaremos que $\gamma'_{mt}(G) \leq 2$. Sea $S = \{e_2, f_3\}$. Por la figura 4.3, es fácil ver que S es un conjunto dominante por aristas. Por otro lado, $M = \{e_1, f_2, f_3\}$ es el único apareamiento máximo de G , por lo que S intersecta a todo apareamiento máximo, lo que implica que S es un conjunto dominante por aristas transversal de apareamientos máximos. Por lo tanto, $\gamma'_{mt}(G) \leq 2$. Ahora probaremos que $\gamma'_{mt}(G) \geq 2$. Notemos que no existe un conjunto dominante por aristas de G de cardinalidad uno, ver figura 4.3, lo que implica que $\gamma'_{mt}(G) \geq 2$. Por lo tanto, $\gamma'_{mt}(G) = a - 1 = 2$. Así que, G es una gráfica tal que $|A(G)| = b = 5$, pero $\gamma'_{mt}(G) = a - 1 = 2$, lo cual muestra que la construcción anterior no satisface las condiciones del teorema 4.0.1 en este caso en particular.

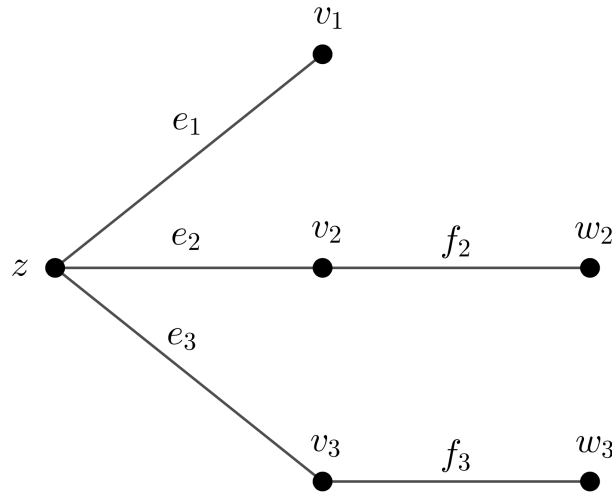


Figura 4.3: Gráfica G del teorema original 4.0.1 cuando $a = 3$ y $b = 5$

Por este motivo nosotros proponemos la siguiente construcción para el caso cuando $b = 2a - 1$.

Caso 2) Sean $b = 2a - 1$ y H una gráfica de la forma $K_{1,a-1}$; es decir, H es una estrella, sin pérdida de generalidad supongamos que $V(H) = \{z, v_1, v_2, \dots, v_{a-2}, v_{a-1}\}$ y $A(H) = \{e_1, e_2, \dots, e_{a-2}, e_{a-1}\}$ donde $e_i = zv_i$ para cada i en $\{1, 2, \dots, a - 1\}$. En la figura 4.4 se puede apreciar la gráfica H .

Sea G la gráfica obtenida a partir de H , al unir una arista f_i a cada vértice v_i para i en $\{1, 2, \dots, a - 2, a - 1\}$, y a su vez al agregar una arista aislada a H , digamos g_1 . Supongamos sin pérdida de generalidad que $V(G) = V(H) \cup \{w_1, w_2, \dots, w_{a-2}, w_{a-1}\} \cup \{x_1, y_1\}$ y $A(G) = A(H) \cup \{f_1, f_2, \dots, f_{a-2}, f_{a-1}\} \cup \{g_1\}$, donde $f_i = v_i w_i$ para cada i en $\{1, 2, \dots, a - 2, a - 1\}$ y $g_1 = x_1 y_1$. Podemos apreciar la forma de la gráfica G en la figura 4.4.

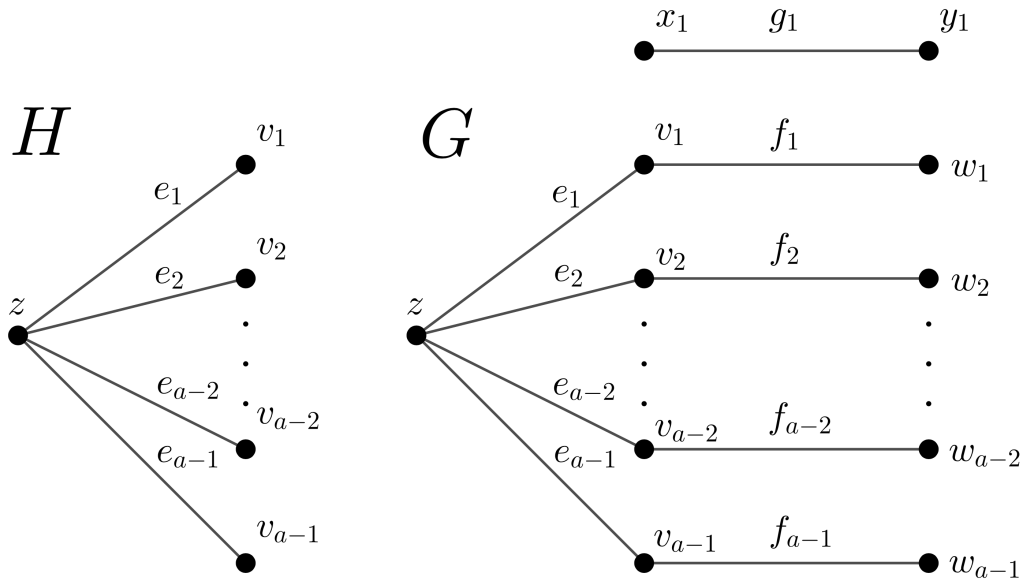


Figura 4.4: Gráfica H y gráfica G

Notemos que $|A(G)| = (a-1) + (a-1) + 1 = 2a-1 = b$, por lo que $|A(G)| = b$. Así que, solo nos falta probar que $\gamma'_{mt}(G) = a$, pero por el teorema 2.0.3, al tener G una arista aislada, se sigue que $\gamma'_{mt}(G) = \gamma'(G)$. Por lo tanto, solo debemos probar que $\gamma'(G) = a$.

Primero probaremos que $\gamma'(G) \leq a$. Para esto definimos los siguientes conjuntos $N_1 = \{e_1, e_2, \dots, e_{a-2}, e_{a-1}\}$, $N_2 = \{f_1, f_2, \dots, f_{a-2}, f_{a-1}\}$ y $N_3 = \{g_1\}$, es claro que $A(G) = N_1 \cup N_2 \cup N_3$.

Sea $S = \{f_1, f_2, \dots, f_{a-2}, f_{a-1}\} \cup \{g_1\} = N_2 \cup N_3$. Notemos que $A(G) \setminus S = N_1$, donde cada e_i en N_1 es adyacente a $f_i \in S$ para i en $\{1, 2, \dots, a-2, a-1\}$.

Así que, S es un conjunto dominante por aristas, por lo que $\gamma'(G) \leq a$.

Ahora probaremos que $\gamma'(G) \geq a$. Procediendo por contradicción, supongamos que $\gamma'(G) < a$, lo que implica que $\gamma'(G) \leq a-1$.

Sea S' un $\gamma'(G)$ -conjunto, se sigue que $|S'| \leq a-1$. Así que, consideremos los siguientes casos sobre S' :

1. $S' \subseteq N_1$.

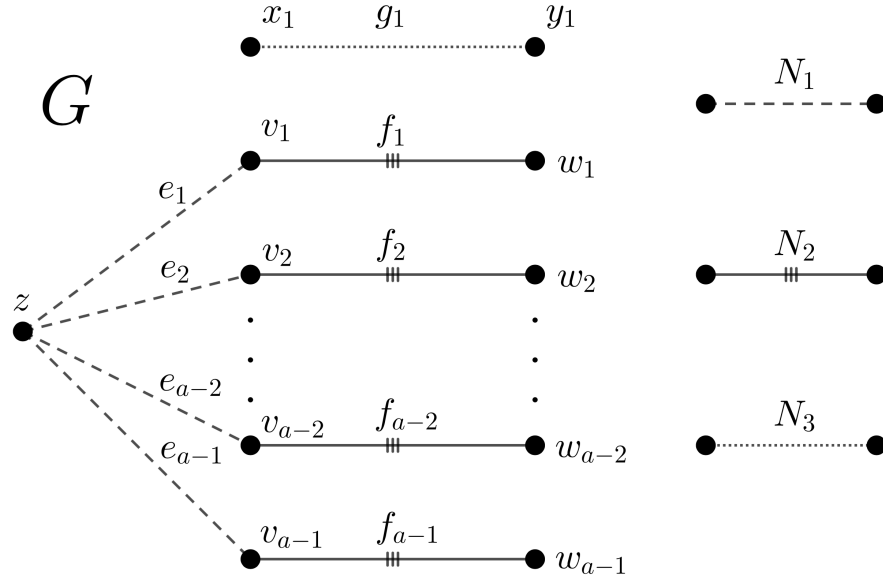
Es claro que ningún elemento de S' es adyacente a g_1 , la única arista de N_3 , por lo que S' no es un conjunto dominante por aristas.

2. $S' \subseteq N_2$.

Es claro que ningún elemento de S' es adyacente a g_1 , la única arista de N_3 , por lo que S' no es un conjunto dominante por aristas.

3. $S' \subseteq N_3$.

Puesto que $N_3 = \{g_1\}$, se sigue que $S' = \{g_1\}$, pero g_1 no es adyacente a ninguna

Figura 4.5: Gráfica G

arista de N_1 ni de N_2 , lo que implica que S' no es un conjunto dominante por aristas.

4. $S' \subseteq N_1 \cup N_2$.

Es claro que ningún elemento de S' es adyacente a g_1 , la única arista de N_3 , por lo que S' no es un conjunto dominante por aristas.

5. $S' \subseteq N_1 \cup N_3$.

De los casos 1 y 3 se deduce que existe un subconjunto no vacío S_1 de N_1 tal que $S' = S_1 \cup N_3$ y $|S_1| \leq a - 2$. Como $|S_1| \leq a - 2$, porque $|S'| \leq a - 1$, entonces existe un e_i en N_1 tal que $e_i \notin S_1$, por lo que la arista f_i en N_2 no es adyacente a ninguna arista en S' , lo que implica que S' no es un conjunto dominante por aristas.

6. $S' \subseteq N_2 \cup N_3$.

De los casos 2 y 3 se deduce que existe un subconjunto no vacío S_2 de N_2 tal que $S' = S_2 \cup N_3$ y $|S_2| \leq a - 2$. Como $|S_2| \leq a - 2$, porque $|S'| \leq a - 1$, entonces existe un f_i en N_2 tal que $f_i \notin S_2$, por lo que la arista e_i en N_1 no es adyacente a ninguna arista en S' , lo que implica que S' no es un conjunto dominante por aristas.

7. $S' \subseteq N_1 \cup N_2 \cup N_3$.

De los casos 4, 5 y 6 se deduce que existen un subconjunto no vacío S_1 de N_1 y un subconjunto no vacío S_2 de N_2 tal que $S' = S_1 \cup S_2 \cup N_3$ y $|S_1| = r_1$ y $|S_2| = r_2$ tal que $r_1 + r_2 \leq a - 2$, lo que implica que $r_1 \leq a - 3$ y $r_2 \leq a - 3$.

Afirmación: Existen e_i en N_1 y f_i en N_2 con i en $\{1, 2, \dots, a - 1\}$ tal que $e_i \notin S'$ y $f_i \notin S'$. Supongamos que esto no fuera cierto, entonces para todo e_i en N_1

y f_i en N_2 con i en $\{1, 2, \dots, a-1\}$ se cumple que $e_i \in S'$ o $f_i \in S'$, además $N_3 \subseteq S'$, lo que implica que $(a-1) + 1 \leq |S'|$, lo cual es una contradicción, ya que $|S'| \leq a-1$. Por lo tanto, como $e_i \notin S'$ y $f_i \notin S'$ se sigue que S' no es un conjunto dominante por aristas.

Como los siete casos nos llevan a una contradicción, concluimos que no existe un $\gamma'(G)$ -conjunto de cardinalidad menor o igual que $a-1$, por lo que $\gamma'(G) \geq a$. Puesto que $\gamma'_{mt}(G) = \gamma'(G)$, se sigue que $\gamma'_{mt}(G) = a$.

Por lo tanto, $\gamma'_{mt}(G) = a$.

Así, $\gamma'_{mt}(G) = a$ y $|A(G)| = b$, si $b = 2a - 1$. ■

El siguiente teorema es una aportación nuestra y puede considerarse como una generalización del teorema 4.0.1, al pedir menos restricciones con respecto a los números a y b , y solamente pedir que $b \geq a \geq 2$. Esta idea surgió a partir, de pensar que la condición $b \geq 2a - 1 \geq 2$ del teorema 4.0.1 podía ser eliminanda, si tomamos en cuenta el teorema 2.0.3 el cual nos dice que si una gráfica G tiene al menos una arista aislada, entonces $\gamma'_{mt}(G) = \gamma'(G)$, así que usando este teorema solo tenemos que encontrar una gráfica G con aristas aisladas que cumpliera que $|A(G)| = b$ y $\gamma'(G) = a$, lo cual nos llevo a dar la construcción que se ve en el teorema 4.0.2.

Teorema 4.0.2. *Sean a y b dos números enteros positivos con $b \geq a \geq 2$, entonces existe un gráfica G tal que $|A(G)| = b$ y $\gamma'_{mt}(G) = a$.*

Demostración:

Sea H una gráfica de la forma $H \cong aK_2$, sin pérdida de generalidad supongamos que $V(H) = \{u_1, u_2, \dots, u_{a-1}\} \cup \{v_1, v_2, \dots, v_{a-1}\}$ y $A(H) = \{e_1, e_2, \dots, e_{a-2}, e_{a-1}\}$ donde $e_i = u_i v_i$ para cada i en $\{1, 2, \dots, a-1\}$. En la figura 4.6 se puede apreciar la gráfica H .

Sea G la gráfica obtenida a partir de H , al unirle la estrella $K_{1, (b-a+1)}$, lo que implica que $G = H \cup K_{1, (b-a+1)}$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $V(G) = V(H) \cup \{z, w_1, w_2, \dots, w_{b-a}, w_{b-a+1}\}$ y $A(G) = A(H) \cup \{f_1, f_2, \dots, f_{b-a}, f_{b-a+1}\}$ donde $f_i = z w_i$ para cada i en $\{1, 2, \dots, b-a, b-a+1\}$. Se puede apreciar la gráfica G en la figura 4.6.

Notemos que $|A(G)| = (a-1) + (b-a+1) = b$, lo que implica que $|A(G)| = b$. Solo falta probar que $\gamma'_{mt}(G) = a$, pero G tiene al menos una arista aislada, se sigue por el teorema 2.0.3 que $\gamma'_{mt}(G) = \gamma'(G)$, así que basta con probar que $\gamma'(G) = a$.

Primero probaremos que $\gamma'(G) \leq a$. Sea $S = \{e_1, e_2, \dots, e_{a-1}\} \cup \{f_1\}$. Notemos que $A(G) \setminus S = \{f_2, f_3, \dots, f_{b-a}, f_{b-a+1}\}$, donde cada f_i es adyacente a f_1 para i en $\{2, 3, \dots, b-a, b-a+1\}$. Por lo tanto, S es un conjunto dominante por aristas, lo que implica que $\gamma'(G) \leq a$.

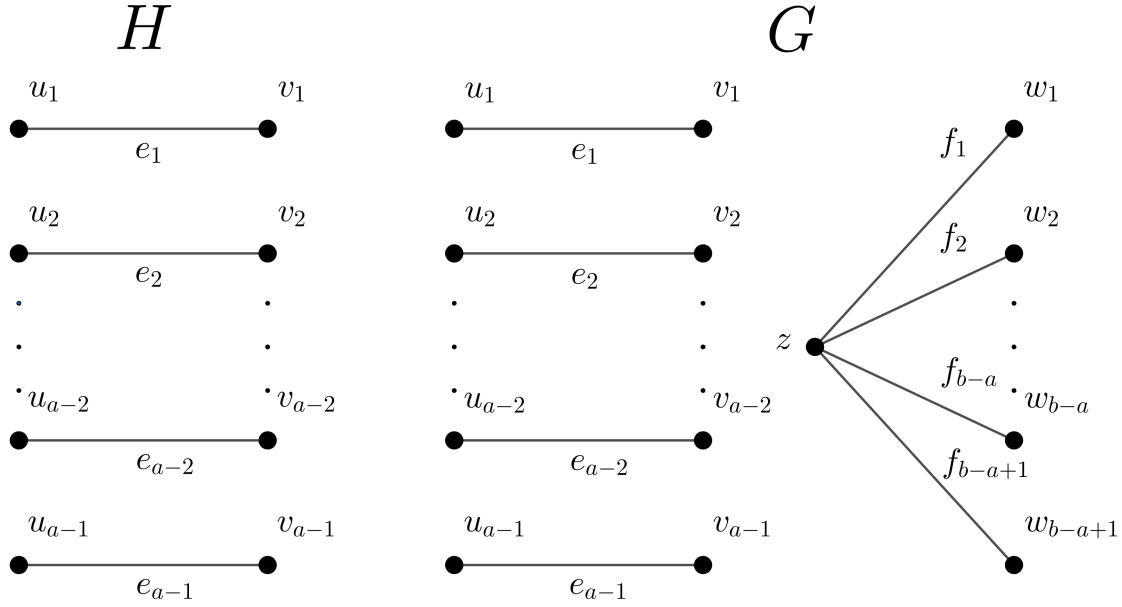


Figura 4.6: Gráfica H y gráfica G

Ahora probaremos que $\gamma'(G) \geq a$. Sea S un $\gamma'(G)$ -conjunto. Puesto que $\{e_1, e_2, \dots, e_{a-1}\}$ es un conjunto de aristas aisladas de G , se sigue que $\{e_1, e_2, \dots, e_{a-1}\} \subseteq S$, por lo que $a - 1 \leq |S|$. Por otro lado, cualquier conjunto dominante por aristas en una estrella contiene al menos una arista, lo que implica que $\{f_i\} \subseteq S$ para algún i en $\{1, 2, \dots, b - a, b - a + 1\}$, se sigue que $(a - 1) + 1 \leq |S|$, por lo que $a \leq \gamma'(G)$. Por lo tanto, $\gamma'(G) = a$, lo que implica que $\gamma'_{mt}(G) = \gamma'(G) = a$.

Concluimos que G es una gráfica tal que $A(G) = b$ y $\gamma'_{mt}(G) = a$. ■

Para ver la relevancia del teorema 4.0.2 (el cual fue una aportación nuestra) con respecto al teorema 4.0.1 veremos que existe al menos una familia de gráficas que satisfacen el teorema 4.0.2, pero no satisfacen el teorema 4.0.1.

Recordemos que el teorema 4.0.1 dice lo siguiente: Sean a y b dos números enteros positivos con $b \geq 2a - 1 \geq 2$, entonces existe una gráfica G tal que $|A(G)| = b$ y $\gamma'_{mt}(G) = a$. Y por otro lado, el teorema 4.0.2 dice lo siguiente: Sean a y b dos números enteros positivos con $b \geq a \geq 2$, entonces existe una gráfica G tal que $|A(G)| = b$ y $\gamma'_{mt}(G) = a$.

Notemos que en el teorema 4.0.1 se tiene que $2a - 1 \geq 2$, lo que implica que $a \geq 2$, y de igual forma en el teorema 4.0.2 se cumple que $a \geq 2$.

Primero consideremos el caso cuando $b = (a + n)$ con $n \in \mathbb{N}$, si queremos que b cumpla las hipótesis del teorema 4.0.1, entonces $b = (a + n) \geq 2a - 1 \geq 2$, lo que implica que $a + n \geq 2a - 1$, por lo que $n + 1 \geq a$. De este manera, tenemos que si $b = (a + n)$ y $n + 1 \geq a$ se cumplen las condiciones del teorema 4.0.1, por lo que existe una gráfica

G tal que $|A(G)| = b = (a + n)$ y $\gamma'_{mt}(G) = a$.

Así que, si consideremos $b = (a + n)$ y $n + 1 < a$, entonces las condiciones del teorema 4.0.1 no se cumplen, puesto que si se cumplieran se tendría que $b = (a + n) \geq 2a - 1 \geq 2$, lo que implica que $a + n \geq 2a - 1$, por lo que $n + 1 \geq a$, lo cual es una contradicción, ya que $n + 1 < a$. Por lo tanto, no podemos asegurar que existe una gráfica G tal que $|A(G)| = b = (a + n)$ y $\gamma'_{mt}(G) = a$. He aquí la relevancia del teorema 4.0.2, ya que su hipótesis solo nos pide que $b \geq a \geq 2$, y es fácil ver que $b = (a + n) \geq a$ donde $a > n + 1$ y $a \geq 2$. Por lo tanto, gracias al teorema 4.0.2 sabemos que si $b = (a + n)$ y $n + 1 < a$, existe una gráfica G tal que $|A(G)| = b = (a + n)$ y $\gamma'_{mt}(G) = a$.

A partir de esto podemos ver que existe al menos una familia de gráficas que satisfacen el teorema 4.0.2, pero no satisfacen el teorema 4.0.1.

Ahora consideraremos el caso cuando $b = a$, si queremos que b cumpla las hipótesis del teorema 4.0.1, necesitamos que $b = a \geq 2a - 1 \geq 2$, lo que implica que $a \geq 2a - 1$, por lo que $1 \geq a$, pero recordemos que $a \geq 2$. Por lo tanto, en este caso b no puede cumplir la hipótesis del teorema 4.0.1, así que no podemos asegurar que existe una gráfica G tal que $|A(G)| = b = a$ y $\gamma'_{mt}(G) = a$. Pero el teorema 4.0.2 solo nos pide como hipótesis que $b \geq a \geq 2$, lo cual se cumple ya que $b = a \geq a$ y $a \geq 2$. Por lo tanto, gracias al teorema 4.0.2 sabemos existe una gráfica G tal que $|A(G)| = b = a$ y $\gamma'_{mt}(G) = a$.

Así que, podemos ver que existe otra familia de gráficas que satisfacen el teorema 4.0.2, pero no satisfacen el teorema 4.0.1.

Por lo anterior, podemos concluir que existen al menos dos familias de gráficas que satisfacen el teorema 4.0.2, pero no satisfacen el teorema 4.0.1.

Capítulo 5

Algunas cotas y casos particulares

En este capítulo veremos cual es el número $\gamma'_{mt}(G)$ de una gráfica G con un único apareamiento máximo, observaremos que para cualquier gráfica G se cumple que $\gamma'_{mt}(G) \leq \gamma'(G) + \delta'(G)$, analizaremos bajo qué circunstancias se cumple que $\gamma'_{mt}(G) = m - 1$, averiguaremos cual es el número $\gamma'_{mt}(G)$ de una gráfica G que tiene una o más componentes conexas y estudiaremos la estrecha relación que existe entre el número $\gamma'_{mt}(G)$ de una gráfica G y el número $\gamma_{it}(L(G))$ de su gráfica de líneas $L(G)$.

Teorema 5.0.1. *Sea G una gráfica con un único apareamiento máximo, entonces $\gamma'_{mt}(G) \leq \gamma'(G) + 1$.*

Demostración: Sean M el único apareamiento máximo de G , S un $\gamma'(G)$ -conjunto y $uv \in M$, entonces $S \cup \{uv\}$ es un conjunto dominante por aristas, y además $S \cup \{uv\}$ interseca a M , por lo que $S \cup \{uv\}$ es un conjunto dominante por aristas transversal de apareamientos máximos.

Por lo tanto $\gamma'_{mt}(G) \leq |S| + 1 = \gamma'(G) + 1$. ■

El siguiente teorema exhibe una cota superior para el número de dominación por aristas transversal de apareamientos máximos para cualquier gráfica G .

Teorema 5.0.2. *Para cualquier gráfica G , se cumple que $\gamma'_{mt}(G) \leq \gamma'(G) + \delta'(G)$.*

Demostración: Sean $b \in A(G)$ tal que $\delta(b) = \delta'(G)$ y S un $\gamma'(G)$ -conjunto. Primero probaremos que todo apareamiento máximo M contiene una arista de $N[b]$. Supongamos que esto no pasa, entonces existe un apareamiento máximo M_1 tal que $M_1 \cap N[b] = \emptyset$, esto implica que $M_1 \cup \{b\}$ es un apareamiento con $|M_1| < |M_1 \cup \{b\}| = |M_1| + 1$, lo cual es una contradicción, porque M es máximo. Por lo tanto, todo apareamiento máximo contiene una arista de $N[b]$. Por lo que $S \cup N[b]$ interseca a todo apareamiento máximo. Además $S \cap N[b] \neq \emptyset$, ya que si esto no pasará, entonces en particular la arista b no sería adyacente a ninguna arista en S , lo cual sería una contradicción. Por otro lado, S es un conjunto dominante por aristas, lo que implica que $S \cup N[b]$ es un conjunto dominante por aristas, por lo que $S \cup N[b]$ es un

conjunto dominante por aristas transversal de apareamientos máximos. Por lo tanto, $\gamma'_{mt}(G) \leq |S \cup N[b]| < |S| + |N[b]| = \gamma'(G) + (\delta'(G) + 1)$, lo que implica que $\gamma'_{mt}(G) < \gamma'(G) + (\delta'(G) + 1)$. Así, $\gamma'_{mt}(G) \leq \gamma'(G) + \delta'(G)$.

Por lo tanto, $\gamma'_{mt}(G) \leq \gamma'(G) + \delta'(G)$. ■

El siguiente teorema muestra bajo que circunstancias una gráfica G cumple con que $\gamma'_{mt}(G) = m - 1$. Cabe mencionar que este teorema fue modificado por parte nuestra, debido a que presentaba un error en la hipótesis.

Primero notemos que en el artículo original el teorema 5.0.3 dice lo siguiente: “Sea G una gráfica tal que $|A(G)| = m$, entonces $\gamma'_{mt}(G) = m - 1$ si y solo si $G \cong P_4$ ”. Lo cual es falso, como se puede apreciar en el siguiente ejemplo, ver figura 5.1, donde $G = (K_{2,1} \cup K_2)$ y $\gamma'_{mt}(G) = m - 1 = 3 - 1 = 2$, pero $G \not\cong P_4$.

Así que, agregamos la hipótesis de que G es una gráfica conexa, lo cual es suficiente para asegurar que $G \cong P_4$.

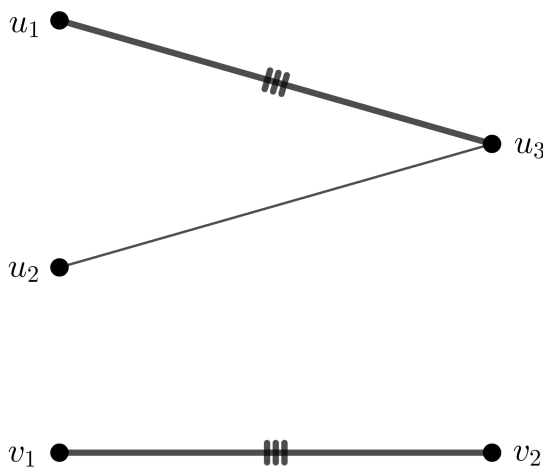


Figura 5.1: Gráfica G la cual es un contraejemplo al teorema original 5.0.3

Teorema 5.0.3. *Sea G una gráfica conexa tal que $|A(G)| = m$, entonces $\gamma'_{mt}(G) = m - 1$ si y solo si $G \cong P_4$.*

Demostración:

(\Leftarrow) Supongamos que $G \cong P_4$.

Por el teorema 3.1.1 sabemos que $\gamma'_{mt}(P_4) = 2$, pero $|A(P_4)| = 3$, lo que implica que $\gamma'_{mt}(P_4) = m - 1 = 3 - 1 = 2$. Por lo tanto, $\gamma'_{mt}(G) = m - 1$.

(\Rightarrow) Supongamos que $\gamma'_{mt}(G) = m - 1$.

Sea S un $\gamma'_{mt}(G)$ -conjunto. Como $|A(G)| = m$ y $|S| = m - 1$, se sigue que $|A(G) \setminus S| = 1$,

sin pérdida de generalidad, supongamos que $(A(G) \setminus S) = \{e\}$. Como S es un conjunto dominante por aristas, entonces la única arista de $A(G) \setminus S$, a saber e , debe ser adyacente a una arista en S . Sin pérdida de generalidad, supongamos que es adyacente a f . Además, supongamos que $e = uv$ y $f = vw$.

A continuación, probaremos cuatro afirmaciones que nos ayudarán con nuestra demostración.

Afirmación 1: $\beta_1(G) \geq 2$.

Procediendo por contradicción, supongamos que $\beta_1(G) = 1$. Puesto que $A(G) \setminus S = \{e\}$ y $\beta_1(G) = 1$, se sigue que $M = \{e\}$ es un apareamiento máximo, al cual S no intersecta, lo cual es una contradicción, ya que S es un $\gamma'_{mt}(G)$ -conjunto. Por lo tanto, $\beta_1(G) \geq 2$.

Afirmación 2: Para cualesquiera c y d aristas adyacentes, se cumple que $\delta'(c) = 1$ o $\delta'(d) = 1$.

Procediendo por contradicción, supongamos que existen a y b aristas adyacentes tales que $\delta'(a) \geq 2$ y $\delta'(b) \geq 2$. Como $\delta'(a) \geq 2$ y $\delta'(b) \geq 2$, se sigue que a es adyacente a al menos una arista distinta de b y lo mismo pasa con b respecto a a . Esto implica que $S = A(G) \setminus \{a, b\}$ es un conjunto dominante por aristas. Además S intersecta a todo apareamiento máximo de G , ya que $\langle \{a, b\} \rangle$ no tiene apareamientos máximos debido a que $\beta_1(G) \geq 2$. Así, S es un conjunto dominante por aristas transversal de apareamientos máximos, con $|S| = m - 2$, por lo que, $\gamma'_{mt}(G) \leq m - 2$, lo cual es una contradicción, ya que $\gamma'_{mt}(G) = m - 1$.

Por lo tanto, para cualesquiera c y d aristas adyacentes, se cumple que $\delta'(c) = 1$ o $\delta'(d) = 1$.

Afirmación 3: G no tiene ciclos.

Procediendo por contradicción, supongamos que $(x_0, x_1, \dots, x_k, x_0)$ es un ciclo. Entonces $\delta'(x_0x_1) \geq 2$ y $\delta'(x_1x_2) \geq 2$, lo cual es una contradicción por la afirmación 2. Por lo tanto, G no tiene ciclos.

Afirmación 4: $|V(G)| \geq 4$.

Procediendo por contradicción, supongamos que $|V(G)| = 3$, lo que implica que $G \cong P_3$, por la afirmación 3, y así $\gamma'_{mt}(P_3) = m = 2$, lo cual es una contradicción, ya que $\gamma'_{mt}(G) = m - 1$. Por lo tanto, $|V(G)| \geq 4$.

Continuando con nuestra demostración. Como $|V(G)| \geq 4$, entonces existe un vértice x en $V(G) \setminus \{u, v, w\}$, tal que al ser G una gráfica conexa, se sigue que x debe ser adyacente a alguno de los vértices antes mencionados. Consideremos los siguientes casos sobre x :

1. $xv \in A(G)$.

Este caso se puede apreciar en la gráfica (3) de la figura 5.2. Se puede ver claramente que $\delta'(e) \geq 2$ y $\delta'(f) \geq 2$, lo cual contradice la afirmación 2.

2. $\{xu, xw\} \cap A(G) \neq \emptyset$.

En este caso (x, u, v, w) o (u, v, w, x) es una trayectoria de longitud 3 (ver figura 5.2 (1) y (2)).

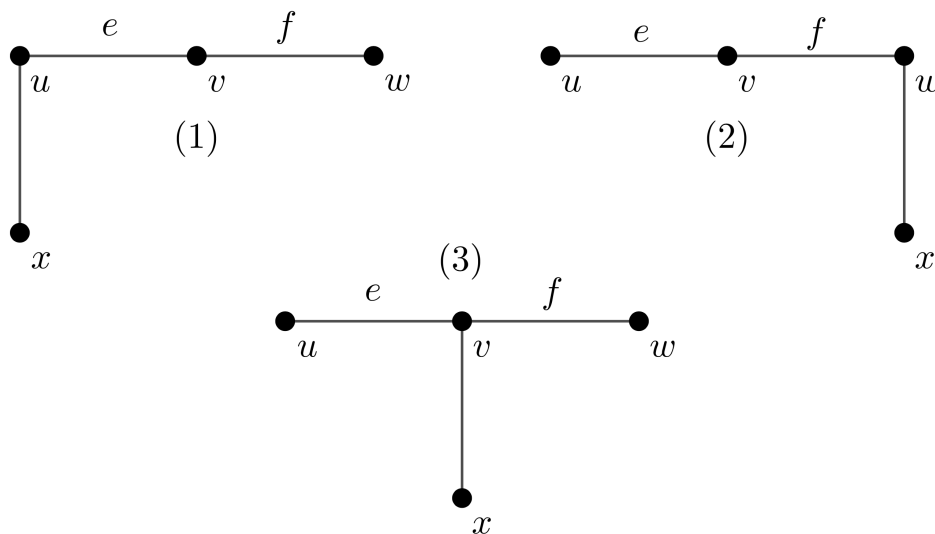


Figura 5.2: Casos (1) y (2) de la afirmación 4 del teorema 5.0.3

Afirmamos que $|V(G)| = 4$, de otra manera se sigue que existe z en $V(G) \setminus \{u, v, w, x\}$ tal que z es adyacente a a algún vértice de $\{u, v, w, x\}$, pero esto nos lleva a encontrar dos aristas adyacentes en $\langle\{u, v, w, x\}\rangle$ tal que sus grados son al menos 2, lo cual contradice la afirmación 2.

Por lo tanto, $G = \langle\{u, v, w, x\}\rangle$; es decir, G es isomorfa a P_4 , por la afirmación anterior y la afirmación 3. ■

A continuación, veremos un resultado que nos ayudará a conocer cuál es el número $\gamma'_{mt}(G)$ de una gráfica G , si esta no tiene vértices aislados y además tiene una o más componentes conexas.

Teorema 5.0.4. Sean G una gráfica sin vértices aislados $\{G_1, G_2, \dots, G_r\}$ las componentes conexas de G , entonces $\gamma'_{mt}(G) = \min \{\gamma'_{mt}(G_i) + \sum_{j=1, j \neq i}^r \gamma'(G_j)\}$.

Demostración:

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\min \{\gamma'_{mt}(G_i) + \sum_{j=1, j \neq i}^r \gamma'(G_j)\} = \gamma'_{mt}(G_1) + \sum_{j=2}^r \gamma'(G_j)$. Sean S un conjunto dominante por aristas transversal de apareamientos máximos de G_1 , y N_j un $\gamma'(G_j)$ -conjunto para $j \geq 2$.

Afirmación 1: $S \cup N_2 \cup \dots \cup N_r$ es un conjunto dominante por aristas de G .

Sea uv en $A(G) \setminus (S \cup N_2 \cup \dots \cup N_r)$, entonces $uv \in A(G_k)$ para algún k en $\{1, 2, \dots, r\}$.

Consideremos dos casos sobre k :

1. $k = 1$.

Puesto que $uv \notin S$ y S es un conjunto dominante por aristas transversal de apareamientos máximos de G_1 , en particular S es un $\gamma'(G_1)$ -conjunto, por lo que existe una arista xy en S la cual es adyacente a uv .

2. $k \geq 2$.

Como N_k es un $\gamma'(G_k)$ -conjunto para k en $\{2, 3, \dots, r\}$ y $uv \notin N_k$, entonces existe una arista xy en N_k la cual es adyacente a uv .

Así, $S \cup N_2 \cup \dots \cup N_r$ es un conjunto dominante por aristas en G .

Afirmación 2: $S \cup N_2 \cup \dots \cup N_r$ interseca a todo apareamiento máximo de G .

Note que $M \cap A(G_1) \neq \emptyset$, de otra manera podemos elegir una arista f de G_1 y así $M \cup \{f\}$ es un apareamiento que contiene propiamente a M , lo cual no es posible. Luego, $M \cap A(G_1)$ es un apareamiento máximo en G_1 , lo que implica que $(M \cap A(G_1)) \cap S \neq \emptyset$. Así, $S \cap M \neq \emptyset$ y por lo tanto, $(S \cup N_2 \cup \dots \cup N_r) \cap M \neq \emptyset$.

Así, $S \cup N_2 \cup \dots \cup N_r$ interseca a todo apareamiento máximo de G .

Por la afirmación 1 y afirmación 2, concluimos que $S \cup \{N_2, \dots, N_r\}$ es un conjunto dominante por aristas transversal de apareamientos máximos de G , lo que implica que $\gamma'_{mt}(G) \leq |S \cup \{N_2, \dots, N_r\}| = \gamma'_{mt}(G_1) + \sum_{j=2}^r \gamma'(G_j)$.

Por lo tanto, $\gamma'_{mt}(G) \leq \min \{ \gamma'_{mt}(G_i) + \sum_{j=1, j \neq i}^r \gamma'(G_j) \}$.

Ahora probaremos que $\gamma'_{mt}(G) \geq \min \{ \gamma'_{mt}(G_i) + \sum_{j=1, j \neq i}^r \gamma'(G_j) \}$.

Sea S un conjunto dominante por aristas transversal de apareamientos máximos de G de cardinalidad $\gamma'_{mt}(G)$.

Afirmación 1: $S \cap A(G_i) \neq \emptyset$ para cada i en $\{1, 2, \dots, r\}$.

Procediendo por contradicción, supongamos que existe un G_j tal que $S \cap A(G_j) = \emptyset$ para algún j en $\{1, 2, \dots, r\}$. Sin pérdida de generalidad supongamos que este conjunto es G_1 , se sigue que $S \cap A(G_1) = \emptyset$, lo que implica que para toda arista uv de $A(G_1)$ se tiene que uv no es adyacente a ninguna arista de S , lo cual es una contradicción, ya que S es un conjunto dominante por aristas transversal de apareamientos máximos de G .

Afirmación 2: $S \cap A(G_i)$ es un conjunto dominante por aristas de G_i para cada i en $\{1, 2, \dots, r\}$.

Procediendo por contradicción, supongamos que existe un G_j tal que $S \cap A(G_j)$ no es un conjunto dominante por aristas de G_j para algún j en $\{1, 2, \dots, r\}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que este conjunto es G_1 , se sigue que $S \cap A(G_1)$

no es un conjunto dominante por aristas de G_1 , lo que implica que existe al menos una arista uv en $A(G_1)$ tal que uv no es adyacente a ninguna arista de $S \cap A(G_1)$. Por lo tanto uv no es adyacente a ninguna arista de S (por definición de componente conexa), lo cual es una contradicción, ya que S , en particular, es un conjunto dominante por aristas transversal de apareamientos máximos de G .

Afirmación 3: Existe al menos un G_i con $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ tal que $S \cap A(G_i)$ interseca a todo apareamiento máximo de G_i .

Procediendo por contradicción, supongamos que para todo G_j con j en $\{1, 2, \dots, r\}$, se cumple que $S \cap A(G_j)$ no interseca a todo apareamiento máximo de G_j . Sea M_j el apareamiento máximo de G_j que no interseca $A(G_j) \cap S$. Afirmamos que $M_1 \cup M_2, \cup \dots \cup M_r$ es un apareamiento máximo de G , ya que si no lo fuera, entonces existiría W un apareamiento máximo de G tal que $|W| > |M_1 \cup M_2, \cup \dots \cup M_r|$, lo que implica que para alguna componente conexa G_k de G , $W \cap A(G_k)$ es un apareamiento máximo de G_k tal que $|W \cap A(G_k)| > |M_k|$, lo cual es una contradicción, puesto que M_k es un apareamiento máximo de G_k . Por lo tanto, $M_1 \cup M_2, \cup \dots \cup M_r$ es un apareamiento máximo de G . De esta manera, $S \cap (M_1 \cup M_2, \cup \dots \cup M_r) = \emptyset$, lo cual es una contradicción, ya que S es un conjunto dominante por aristas transversal de apareamientos máximos de G .

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $S \cap A(G_1)$ interseca a todo apareamiento máximo de G_1 . Puesto que $S \cap A(G_1)$ es un conjunto dominante por aristas de G_1 , se sigue que $S \cap A(G_1)$ es un conjunto dominante por aristas transversal de apareamientos máximos de G_1 .

Como $S = \bigcup_{i=1}^r (S \cap A(G_i))$, entonces $|S| = \sum_{i=1}^r |S \cap A(G_i)|$.

Ya que $S \cap A(G_i)$ es un conjunto dominante por aristas de G_i para cada i en $\{1, 2, \dots, r\}$, se sigue que $|S \cap A(G_i)| \geq \gamma'(G_i)$, lo que implica que:

$$\sum_{i=2}^r |S \cap A(G_i)| \geq \sum_{i=2}^r \gamma'(G_i). \quad (5.1)$$

Por otro lado, $S \cap A(G_1)$ es un conjunto dominante por aristas de G_1 , lo que implica que:

$$|S \cap A(G_1)| \geq \gamma'_{mt}(G_1). \quad (5.2)$$

Por lo tanto de (5.1) y (5.2) se sigue que $|S \cap A(G_1)| + \sum_{i=2}^r |S \cap A(G_i)| \geq \gamma'_{mt}(G_1) + \sum_{i=2}^r \gamma'(G_i)$, lo que implica que $|S| = \sum_{i=1}^r |S \cap A(G_i)| \geq \gamma'_{mt}(G_1) + \sum_{i=2}^r \gamma'(G_i)$. Además, puesto que:

$$\gamma'_{mt}(G_1) + \sum_{i=2}^r \gamma'(G_i) \geq \min \{ \gamma'_{mt}(G_i) + \sum_{j=1, j \neq i}^r \gamma'(G_j) \}. \quad (5.3)$$

Se concluye, $|S| \geq \min \{ \gamma'_{mt}(G_i) + \sum_{j=1, j \neq i}^r \gamma'(G_j) \}$. Ya que S es un conjunto dominante por aristas transversal de apareamientos máximos de G de cardinalidad mínima, se deduce que $\gamma'_{mt}(G) \geq \min \{ \gamma'_{mt}(G_i) + \sum_{j=1, j \neq i}^r \gamma'(G_j) \}$.

Por lo tanto, $\gamma'_{mt}(G) = \min \{ \gamma'_{mt}(G_i) + \sum_{j=1, j \neq i}^r \gamma'(G_j) \}$. ■

El siguiente teorema muestra la estrecha relación que existe entre el número $\gamma'_{mt}(G)$ de una gráfica G y el número $\gamma_{it}(L(G))$ de su gráfica de líneas $L(G)$.

Teorema 5.0.5. *Sea G una gráfica, entonces $\gamma'_{mt}(G) = \gamma_{it}(L(G))$.*

Demostración:

Primero probaremos que $\gamma'_{mt}(G) \leq \gamma_{it}(L(G))$.

Sea S un $\gamma_{it}(L(G))$ -conjunto. Puesto que S es un conjunto dominante, entonces todo vértice x en $V(L(G)) \setminus S$ es adyacente a algún vértice en S , digamos y . Como $S \subseteq V(L(G))$, entonces por definición de $L(G)$ se tiene que $S \subseteq A(G)$. Por lo tanto, toda arista uv en $A(G) \setminus S$ es adyacente a alguna arista en S , lo que implica que S es un conjunto dominante por aristas de G . Además, S intersecta a todo conjunto independiente máximo de $L(G)$, ya que un conjunto independiente máximo de $L(G)$ es un apareamiento máximo de G . Por lo tanto, S intersecta a todo apareamiento máximo de G , lo que implica que S es un conjunto dominante por aristas transversal de apareamientos máximos, por lo que $\gamma'_{mt}(G) \leq |S| = \gamma_{it}(L(G))$. Así que, $\gamma'_{mt}(G) \leq \gamma_{it}(L(G))$.

Ahora probaremos que $\gamma_{it}(L(G)) \leq \gamma'_{mt}(G)$.

Sea S un $\gamma'_{mt}(G)$ -conjunto. Puesto que S es un conjunto dominante por aristas, entonces toda arista uv en $A(G) \setminus S$ es adyacente a alguna arista en S , digamos vw . Como $S \subseteq A(G)$, entonces $S \subseteq V(L(G))$, lo que implica que, todo vértice x en $V(L(G)) \setminus S$ es adyacente a algún vértice en S , así S es un conjunto dominante de $L(G)$. Puesto que $A(G) = V(L(G))$, se sigue que un apareamiento máximo de G es un conjunto independiente máximo de $L(G)$. Por lo tanto, S intersecta a todo conjunto independiente máximo de $L(G)$, porque S intersecta a todo apareamiento máximo de G , lo que implica que S es un conjunto dominante por aristas transversal de apareamientos máximos, por lo que $\gamma_{it}(L(G)) \leq |S| = \gamma'_{mt}(G)$. Así que, $\gamma_{it}(L(G)) \leq \gamma'_{mt}(G)$.

Por lo tanto, $\gamma'_{mt}(G) = \gamma_{it}(L(G))$. ■

Teorema 5.0.6. *Sea G una gráfica tal que $\text{diám}(G) \leq 2$ y ninguna de las gráficas F_1 , F_2 y F_3 de la figura 5.3 es una subgráfica inducida de G , entonces $\gamma'_{mt}(G) \leq \delta'(G) + 1$.*

Demostración:

Sea f una arista en $A(G)$ con $\delta'(f) = \delta'(G)$. Puesto que $\text{diám}(G) \leq 2$ y ninguna de las gráficas F_1 , F_2 y F_3 de la figura 5.3 es una subgráfica inducida de G , se sigue por el teorema 1.6.1 que $\text{diám}(L(G)) \leq 2$.

Afirmación 1: $A(G) = N[f] \cup N(N[f])$.

Primero probaremos que $A(G) \subseteq N[f] \cup N(N[f])$.

Procediendo por contradicción, supongamos que $A(G) \not\subseteq N[f] \cup N(N[f])$. Entonces

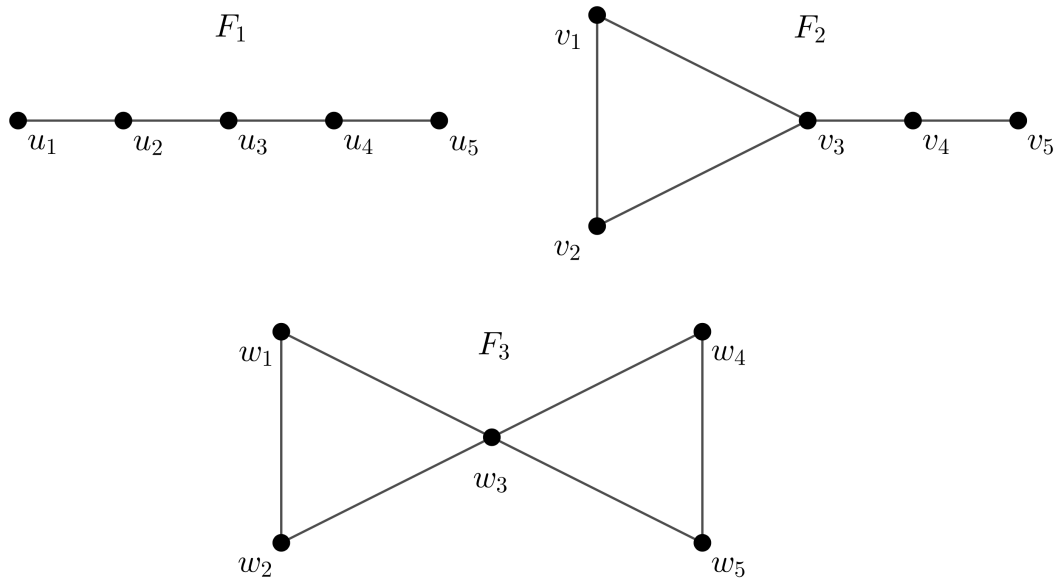


Figura 5.3: Gráfica F_1 , gráfica F_2 y gráfica F_3

existe una arista g en $A(G)$ tal que $g \notin N[f] \cup N(N[f])$.

Notemos que $d_{L(G)}(f, h) \leq 1$ para cada arista $h \in N[f]$, y por otro lado $d_{L(G)}(f, h) \leq 2$ para cada $h \in N(N[f])$. Por lo tanto $d_{L(G)}(f, g) \geq 3$, lo cual es una contradicción, ya que $\text{diám}(L(G)) \leq 2$. Así que, $A(G) \subseteq N[f] \cup N(N[f])$.

Por otro lado, es claro que $N[f] \cup N(N[f]) \subseteq A(G)$.

Por lo tanto, $A(G) = N[f] \cup N(N[f])$.

Afirmación 2: $N[f]$ es un conjunto dominante por aristas de G .

Consideraremos dos casos sobre $N(N[f])$.

1. $N(N[f]) = \emptyset$.

En este caso $(A(G) \setminus N[f]) = N(N[f]) = \emptyset$, por lo que $N[f]$ es un conjunto dominante por aristas en G .

2. $N(N[f]) \neq \emptyset$.

Sea g una arista en $(A(G) \setminus N[f]) = N(N[f])$. Por la definición de $N(N[f])$ se sigue que g es adyacente a alguna arista de $N[f]$, lo que implica que $N[f]$ es un conjunto dominante por aristas de G .

Por lo tanto, $N[f]$ es un conjunto dominante por aristas de G .

Afirmación 3: $N[f]$ intersecta a todo apareamiento máximo de G .

Consideraremos dos casos sobre $N(N[f])$.

1. $N(N[f]) = \emptyset$.

Notemos que $(A(G) \setminus N[f]) = N(N[f]) = \emptyset$, lo que implica que todo apareamiento máximo esta contenido en $N[f]$, por lo que $N[f]$ intersecta a todo apareamiento máximo de G .

2. $N(N[f]) \neq \emptyset$.

Procediendo por contradicción, supongamos que existe M un apareamiento máximo de G tal que $M \cap N[f] = \emptyset$, lo que implica que M esta contenido en $N(N[f])$. Notemos que f no es adyacente a ningun arista de $N(N[f])$, por lo que $M \cup \{f\}$ es un apareamiento tal que $|M \cup \{f\}| > |M|$, lo cual es una contradicción, puesto que M es un apareamiento máximo de G . Así que, $N[f]$ intersecta a todo apareamiento máximo de G .

Por lo tanto, $N[f]$ intersecta a todo apareamiento máximo de G .

Por la afirmación 2 y afirmación 3 podemos concluir que $N[f]$ es un conjunto dominante por aristas transversal de apareamientos máximos, lo que implica que $\gamma'_{mt}(G) \leq |N[f]|$, pero $|N[f]| = \delta'(f) + 1 = \delta'(G) + 1$.

Por lo tanto, $\gamma'_{mt}(G) \leq \delta'(G) + 1$. ■

Capítulo 6

$\gamma'_{mt}(G)$ en la corona de una gráfica

En este capítulo veremos cual es el número de dominación por aristas transversal de apareamientos máximos de la corona de C_n con K_1 , $C_n \circ K_1$, ver figura 6.1. Cabe mencionar que el siguiente teorema fue modificado por parte nuestra, debido a que presentaba un error en el enunciado, además la demostración es de nuestra autoría. Al final de la demostración de este teorema se encuentra el teorema original y se exhibe un contraejemplo para mostrar el error que presentaba.

Teorema 6.0.1. *Para cualquier ciclo C_n se tiene que $\gamma'_{mt}(C_n \circ K_1) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$.*

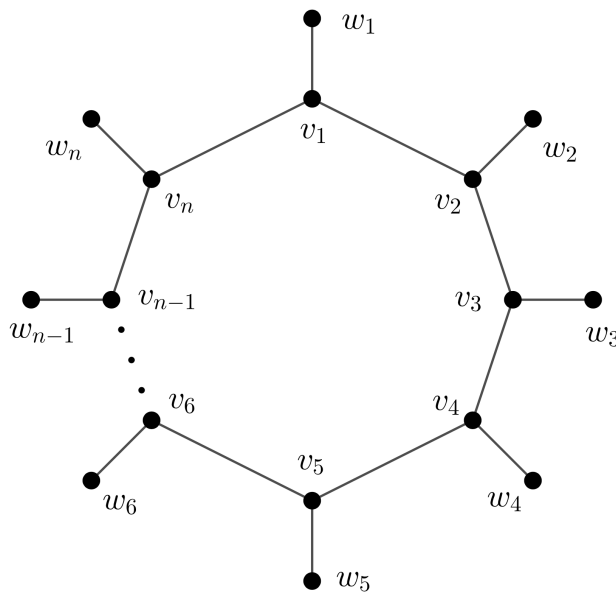


Figura 6.1: Gráfica $(C_n \circ K_1)$

Demostración: Supongamos que $V(C_n \circ K_1) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\} \cup \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_n\}$ y $A(C_n \circ K_1) = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_1\} \cup \{v_1w_1, v_2w_2, \dots, v_{n-1}w_{n-1}, v_nw_n\}$ con $v_{n+1} = v_1$ y $V(C_n) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ y $A(C_n) = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_1\}$.

Consideraremos dos casos sobre n :

Caso 1: n es par.

Afirmación 1: $S = \{v_1w_1\} \cup \{v_{2i}v_{2i+1} \mid 1 \leq i \leq \frac{n}{2}\}$ es un conjunto dominante por aristas en $C_n \circ K_1$.

Notemos que $|V(C_n \circ K_1)| = 2n$ y $|A(C_n \circ K_1)| = 2n$, ver figura 6.2.

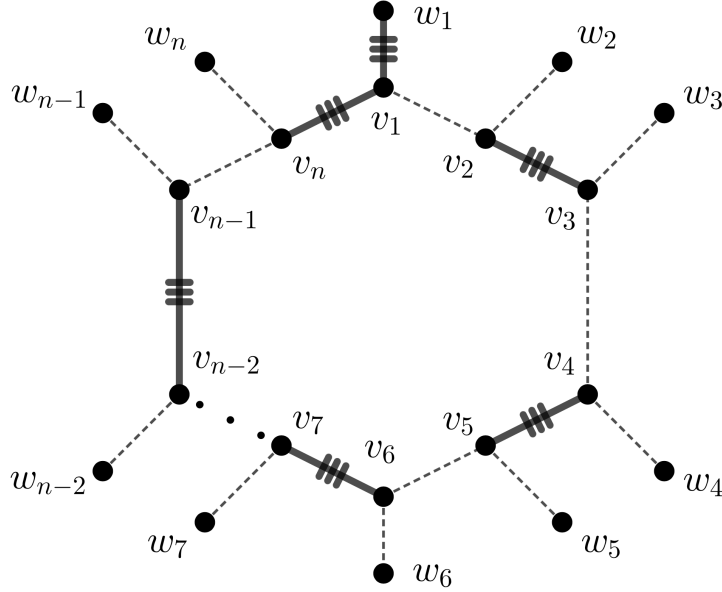


Figura 6.2: Gráfica $(C_n \circ K_1)$ del caso (1) del teorema 6.0.1

Definimos:

$$N_1 = \{v_i v_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n\} = \{v_1 v_2, v_2 v_3, \dots, v_{n-1} v_n, v_n v_{n+1}\} = A(C_n).$$

$$N_2 = \{v_i w_i \mid 1 \leq i \leq n\} = \{v_1 w_1, v_2 w_2, v_3 w_3, \dots, v_{n-1} w_{n-1}, v_n w_n\}.$$

Como $A(C_n \circ K_1) = N_1 \cup N_2$, se sigue que:

$$A(C_n \circ K_1) \setminus S = (N_1 \cup N_2) \setminus S = (N_1 \setminus S) \cup (N_2 \setminus S), \text{ notemos lo siguiente:}$$

$$(N_1 \setminus S) = (\{v_i v_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n\} \setminus \{v_{2i} v_{2i+1} \mid 1 \leq i \leq \frac{n}{2}\}) = \{v_{2i-1} v_{2i} \mid 1 \leq i \leq \frac{n}{2}\} = \{v_1 v_2, v_3 v_4, v_5 v_6, \dots, v_{n-5} v_{n-4}, v_{n-3} v_{n-2}, v_{n-1} v_n\}.$$

$$(N_2 \setminus S) = (\{v_i w_i \mid 1 \leq i \leq n\} \setminus \{v_1 w_1\}) = \{v_i w_i \mid 2 \leq i \leq n\} = \{v_2 w_2, v_3 w_3, \dots, v_n w_n\}.$$

Notemos que $|S| = \frac{n}{2} + 1$ y $|A(C_n \circ K_1) \setminus S| = \frac{n}{2} + (n - 1)$.

Por otro lado, $(N_2 \setminus S) = \{v_i w_i \mid 2 \leq i \leq n\} = \{v_{2i} w_{2i} \mid 1 \leq i \leq \frac{n}{2}\} \cup \{v_{2i+1} w_{2i+1} \mid 1 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1\}$.

Nombremos los conjuntos de la siguiente manera: $S_1 = \{v_{2i} w_{2i} \mid 1 \leq i \leq \frac{n}{2}\}$ y $S_2 = \{v_{2i+1} w_{2i+1} \mid 1 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1\}$. Así que, $(N_2 \setminus S) = S_1 \cup S_2$.

Probaremos que toda arista en $A(C_n \circ K_1) \setminus S$ es adyacente a una arista en S . Sea $v_r v_{r+1}$ una arista en $A(C_n \circ K_1) \setminus S$, entonces $v_r v_{r+1} \in (N_1 \setminus S)$ o $v_r v_{r+1} \in (N_2 \setminus S)$.

Si $v_r v_{r+1} \in (N_1 \setminus S)$, entonces $v_r v_{r+1} = v_{2i-1} v_{2i}$ para algún i en $\{1, \dots, \frac{n}{2}\}$. Como $v_{2i} v_{2i+1} \in S$, se sigue que la arista $v_r v_{r+1}$ es adyacente a $v_{2i} v_{2i+1}$.

Si $v_r v_{r+1} \in (N_2 \setminus S)$, se sigue que $v_r v_{r+1} \in S_1$ o $v_r v_{r+1} \in S_2$.

Consideremos los dos casos sobre $v_r v_{r+1}$:

1. $v_r v_{r+1} \in S_1$.
Entonces $v_r v_{r+1} = v_{2i} w_{2i}$ para algún i en $\{1, \dots, \frac{n}{2}\}$. Como $v_{2i} v_{2i+1} \in S$, se sigue que la arista $v_r v_{r+1}$ es adyacente a $v_{2i} v_{2i+1}$.
2. $v_r v_{r+1} \in S_2$.
Entonces $v_r v_{r+1} = v_{2i+1} w_{2i+1}$ para algún i en $\{1, \dots, \frac{n}{2} - 1\}$. Como $v_{2i} v_{2i+1} \in S$, se sigue que la arista $v_r v_{r+1}$ es adyacente a $v_{2i} v_{2i+1}$.

Por lo tanto, toda arista en $A(C_n \circ K_1) \setminus S$ es adyacente a alguna arista en S . Así, S es un conjunto dominante por aristas en $C_n \circ K_1$.

Afirmación 2: S interseca a todo apareamiento máximo en $C_n \circ K_1$.

Notemos que $M = \{v_i w_i \mid 1 \leq i \leq n\} = \{v_1 w_1, v_2 w_2, \dots, v_n w_n\}$ es el único apareamiento máximo de $C_n \circ K_1$, y puesto que $v_1 w_1 \in S$, entonces S interseca a todo apareamiento máximo.

Por lo tanto, S interseca a todo apareamiento máximo en $C_n \circ K_1$.

Por la afirmación 1 y la afirmación 2, se sigue que S es un conjunto dominante por aristas transversal de apareamientos máximos, por lo que, $\gamma'_{mt}(C_n \circ K_1) \leq |S| = \frac{n}{2} + 1$.

Ahora probaremos que $\gamma'_{mt}(C_n \circ K_1) \geq \frac{n}{2} + 1$.

Procediendo por contradicción, supongamos que $\gamma'_{mt}(C_n \circ K_1) \leq \frac{n}{2}$.

Sea W un $\gamma'_{mt}(C_n \circ K_1)$ -conjunto, se sigue que $|W| \leq \frac{n}{2}$.

Consideremos los siguientes casos sobre W :

1. $W \subseteq N_1$.

Puesto que $M = \{v_1w_1, v_2w_2, \dots, v_nw_n\}$ es el único apareamiento máximo de $C_n \circ K_1$, es claro que $W \cap M = \emptyset$, lo cual no es posible.

2. $W \subseteq N_2$.

Como $|W| \leq \frac{n}{2}$, se sigue que existe una arista v_iw_i en N_2 tal que $v_iw_i \notin S$, lo que implica que v_iw_i no es adyacente a ninguna arista en W , por lo que W no es un conjunto dominante por aristas, lo cual no es posible.

3. $W \subseteq N_1 \cup N_2$.

De los casos 1 y 2 se deduce que existen un subconjunto no vacío S_1 de N_1 y un subconjunto no vacío S_2 de N_2 tal que $W = S_1 \cup S_2$ y $|S_1| = r_1$ y $|S_2| = r_2$ donde $r_1 + r_2 \leq \frac{n}{2}$, lo que implica que

$$|S_1| < \frac{n}{2} \text{ y } |S_2| < \frac{n}{2} \quad (6.1)$$

Consideremos a la subgráfica $\langle A(C_n) \setminus W \rangle$.

Primero notemos que $A(C_n) \setminus W = A(C_n) \setminus S_1$, lo que implica que $\langle A(C_n) \setminus W \rangle = \langle A(C_n) \setminus S_1 \rangle$.

Sean W_1, W_2, \dots, W_r las componentes conexas de $\langle A(C_n) \setminus W \rangle$. Fijemos que las componentes conexas deben ser trayectorias, lo que implica que $W_i = P_i$ donde P_i es una $v_{i_1}v_{i_{k_i}}$ -trayectoria para cada i en $\{1, 2, \dots, r\}$ con $i_1 < i_{k_i}$ e $i_{k_i} < (i+1)_1$ y $k \leq n$. Sin pérdida de generalidad, diremos que P_i tiene la forma $(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_{k_i}})$ con i en $\{1, \dots, r\}$.

$$\text{Entonces } \langle A(C_n) \setminus W \rangle = \langle A(C_n) \setminus S_1 \rangle = \bigcup_{i=1}^r W_i = \bigcup_{i=1}^r P_i.$$

Por otro lado,

$$|A(C_n) \setminus S_1| = \sum_{i=1}^r |A(P_i)| = \sum_{i=1}^r l(P_i). \quad (6.2)$$

Notemos que como $|S_1| < \frac{n}{2}$, entonces existe al menos una trayectoria P_i con $l(P_i) \geq 2$.

Afirmación: Existe una trayectoria $P_i = (v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_{k_i-1}}, v_{i_{k_i}})$ de longitud al menos dos en $\langle A(C_n) \setminus W \rangle$ tal que $\{v_{i_2}w_{i_2}, v_{i_3}w_{i_3}, \dots, v_{i_{k_i-1}}w_{i_{k_i-1}}\} \not\subseteq W$.

Procediendo por contradicción, supongamos que para toda trayectoria $P_i = (v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_{k_i-1}}, v_{i_{k_i}})$ con longitud al menos dos en $\langle A(C_n) \setminus W \rangle$ se cumple que $\{v_{i_2}w_{i_2}, v_{i_3}w_{i_3}, \dots, v_{i_{k_i-1}}w_{i_{k_i-1}}\} \subseteq W$.

Así que, por cada trayectoria P_i se tiene que $(k_i - 2) \leq |W|$.

Además, afirmamos que para cualquier trayectoria $P_i = (v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_{k_i-1}}, v_{i_{k_i}})$ se cumple que $v_{i_{k_i}}v_{i_{k_i+1}} \in W$, ya que si no pasará, entonces $v_{i_{k_i}}v_{i_{k_i+1}} \notin W$, lo que implica que $v_{i_{k_i}}v_{i_{k_i+1}} \in A(C_n) \setminus W$, por lo que $v_{i_{k_i}}v_{i_{k_i+1}} \in A(P_j)$ para alguna

trayectoria P_j con $j > i$, se sigue que $P_i \cup P_j$ es una trayectoria, por lo que el número de componentes conexas en $\langle A(C_n) \setminus W \rangle$ es menor que r , lo cual no es posible. Por lo tanto, por cada trayectoria P_i se tiene que $v_{i_{k_i}} v_{i_{k_i+1}} \in W$ con i en $\{1, \dots, r\}$, lo que implica que $1 \leq |W|$ por cada trayectoria.

Así que, por cada trayectoria P_i se tiene que $(k_i - 2) + 1 = k_i - 1 \leq |W|$, y puesto que $l(P_i) = k_i - 1$, se sigue que $l(P_i) \leq |W|$ por cada trayectoria P_i .

Por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^r l(P_i) \leq |W|. \quad (6.3)$$

Por otro lado, como $\sum_{i=1}^r l(P_i) = |A(C_n) \setminus S_1|$ (por 6.2) y $|A(C_n) \setminus S_1| = n - |S_1| > (n - \frac{n}{2}) = \frac{n}{2}$ (por 6.1), entonces se sigue de 6.3 que $\frac{n}{2} < |A(C_n) \setminus S_1| = \sum_{i=1}^r l(P_i) \leq |W|$, lo que implica que $\frac{n}{2} < |W|$, lo cual es una contradicción, ya que $|W| \leq \frac{n}{2}$.

Por lo tanto, existe una trayectoria $P_i = (v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_{k_i-1}}, v_{i_{k_i}})$ de longitud al menos dos en $\langle A(C_n) \setminus W \rangle$ tal que $\{v_{i_2} w_{i_2}, v_{i_3} w_{i_3}, \dots, v_{i_{k_i-1}} w_{i_{k_i-1}}\} \not\subseteq W$.

Como $\{v_{i_2} w_{i_2}, v_{i_3} w_{i_3}, \dots, v_{i_{k_i-1}} w_{i_{k_i-1}}\} \not\subseteq W$, se sigue que existe una arista $v_{i_l} w_{i_l}$ para algún l en $\{2, \dots, k_i - 1\}$ tal que $v_{i_l} w_{i_l} \notin W$. Puesto que $A(P_i) \not\subseteq W$, se sigue que la arista $v_{i_l} w_{i_l}$ no es adyacente a ninguna arista en W , lo que contradice que W es un conjunto dominante por aristas en $C_n \circ K_1$.

Como los tres casos nos llevan a una contradicción, concluimos que no existe un $\gamma'_{mt}(C_n \circ K_1)$ -conjunto de cardinalidad menor o igual que $\frac{n}{2}$, lo que implica que $\gamma'_{mt}(C_n \circ K_1) \geq \frac{n}{2} + 1$.

Así, $\gamma'_{mt}(C_n \circ K_1) = \frac{n}{2} + 1$.

Puesto que n es par, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $2k = n$, lo que implica que $k = \frac{n}{2} \in \mathbb{N}$, por lo que $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \frac{n}{2}$.

Por lo tanto, $\gamma'_{mt}(C_n \circ K_1) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ si n es par.

Caso 2: n es impar.

Afirmación 1: $S = \{v_1w_1\} \cup \{v_{2i}v_{2i+1} \mid 1 \leq i \leq \frac{n-1}{2}\}$ es un conjunto dominante por aristas en $C_n \circ K_1$.

Notemos que $|V(C_n \circ K_1)| = 2n$ y $|A(C_n \circ K_1)| = 2n$, ver figura 6.3.

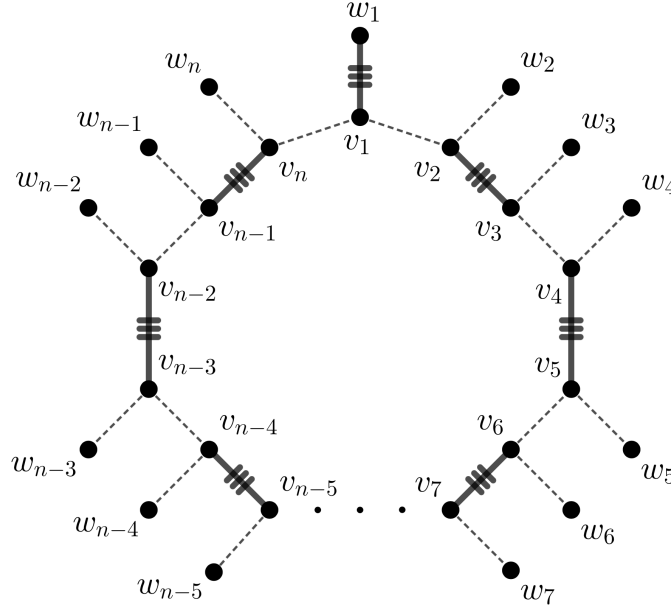


Figura 6.3: Gráfica $(C_n \circ K_1)$ del caso (2) del teorema 6.0.1

Definimos:

$$N_1 = \{v_i v_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n\} = \{v_1 v_2, v_2 v_3, \dots, v_{n-1} v_n, v_n v_{n+1}\} = A(C_n).$$

$$N_2 = \{v_i w_i \mid 1 \leq i \leq n\} = \{v_1 w_1, v_2 w_2, v_3 w_3, \dots, v_{n-1} w_{n-1}, v_n w_n\}.$$

Como $A(C_n \circ K_1) = N_1 \cup N_2$, se sigue que:

$$A(C_n \circ K_1) \setminus S = (N_1 \cup N_2) \setminus S = (N_1 \setminus S) \cup (N_2 \setminus S), \text{ notemos lo siguiente:}$$

$$(N_1 \setminus S) = (\{v_i v_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n\} \setminus \{v_{2i} v_{2i+1} \mid 1 \leq i \leq \frac{n-1}{2}\}) = \{v_{2i-1} v_{2i} \mid 1 \leq i \leq \frac{n+1}{2}\} = \{v_1 v_2, v_3 v_4, v_5 v_6, \dots, v_{n-4} v_{n-3}, v_{n-2} v_{n-1}, v_n v_{n+1}\}.$$

$$(N_2 \setminus S) = (\{v_i w_i \mid 1 \leq i \leq n\} \setminus \{v_1 w_1\}) = \{v_i w_i \mid 2 \leq i \leq n\} = \{v_2 w_2, v_3 w_3, \dots, v_n w_n\}.$$

$$\text{Notemos que } |S| = \frac{n-1}{2} + 1 \text{ y } |A(C_n \circ K_1) \setminus S| = \frac{n+1}{2} + (n-1).$$

Por otro lado $(N_2 \setminus S) = \{v_i w_i \mid 2 \leq i \leq n\} = \{v_{2i} w_{2i} \mid 1 \leq i \leq \frac{n-1}{2}\} \cup \{v_{2i+1} w_{2i+1} \mid 1 \leq i \leq \frac{n-1}{2}\}$.

Nombremos los conjuntos de la siguiente manera: $S_1 = \{v_{2i} w_{2i} \mid 1 \leq i \leq \frac{n-1}{2}\}$ y $S_2 = \{v_{2i+1} w_{2i+1} \mid 1 \leq i \leq \frac{n-1}{2}\}$. Así que, $(N_2 \setminus S) = S_1 \cup S_2$.

Probaremos que toda arista en $A(C_n \circ K_1) \setminus S$ es adyacente a una arista en S . Sea $v_r v_{r+1}$ una arista en $A(C_n \circ K_1) \setminus S$, entonces $v_r v_{r+1} \in (N_1 \setminus S)$ o $v_r v_{r+1} \in (N_2 \setminus S)$.

Caso 1) $v_r v_{r+1} \in (N_1 \setminus S)$.

Si $v_r v_{r+1} = v_n v_{n+1}$, entonces $v_n v_{n+1}$ es adyacente a $v_1 w_1$ donde $v_1 w_1 \in W$. Supongamos que $v_r v_{r+1} \neq v_n v_{n+1}$, entonces $v_r v_{r+1} = v_{2i-1} v_{2i}$ para algún i en $\{1, \dots, \frac{n+1}{2}\}$. Como $v_{2i} v_{2i+1} \in S$, se sigue que la arista $v_r v_{r+1}$ es adyacente a $v_{2i} v_{2i+1}$.

Caso 2) $v_r v_{r+1} \in (N_2 \setminus S)$.

En este caso, se sigue que $v_r v_{r+1} \in S_1$ o $v_r v_{r+1} \in S_2$.

Consideremos los dos casos sobre $v_r v_{r+1}$:

1. $v_r v_{r+1} \in S_1$.

Entonces $v_r v_{r+1} = v_{2i} w_{2i}$ para algún i en $\{1, \dots, \frac{n-1}{2}\}$. Como $v_{2i} v_{2i+1} \in S$, se sigue que la arista $v_r v_{r+1}$ es adyacente a $v_{2i} v_{2i+1}$.

2. $v_r v_{r+1} \in S_2$.

Entonces $v_r v_{r+1} = v_{2i+1} w_{2i+1}$ para algún i en $\{1, \dots, \frac{n-1}{2}\}$. Como $v_{2i} v_{2i+1} \in S$, se sigue que la arista $v_r v_{r+1}$ es adyacente a $v_{2i} v_{2i+1}$.

Por lo tanto, toda arista en $A(C_n \circ K_1) \setminus S$ es adyacente a alguna arista en S . Así, S es un conjunto dominante por aristas en $C_n \circ K_1$.

Afirmación 2: S intersecta a todo apareamiento máximo en $C_n \circ K_1$.

Notemos que $M = \{v_i w_i \mid 1 \leq i \leq n\} = \{v_1 w_1, v_2 w_2, \dots, v_n w_n\}$ es el único apareamiento máximo de $C_n \circ K_1$, y puesto que $v_1 w_1 \in S$, entonces S intersecta a todo apareamiento máximo.

Por lo tanto, S intersecta a todo apareamiento máximo en $C_n \circ K_1$.

Por la afirmación 1 y la afirmación 2, se sigue que S es un conjunto dominante por aristas transversal de apareamientos máximos, lo que implica que $\gamma'_{mt}(C_n \circ K_1) \leq |S| = \frac{n-1}{2} + 1$.

Ahora probaremos que $\gamma'_{mt}(C_n \circ K_1) \geq \frac{n-1}{2} + 1$.

Procediendo por contradicción, supongamos que $\gamma'_{mt}(C_n \circ K_1) \leq \frac{n-1}{2}$.

Sea W un $\gamma'_{mt}(C_n \circ K_1)$ -conjunto, se sigue que $|W| \leq \frac{n-1}{2}$.

Consideremos los siguientes casos sobre W :

1. $W \subseteq N_1$.

Puesto que $M = \{v_1w_1, v_2w_2, \dots, v_nw_n\}$ es el único apareamiento máximo de $C_n \circ K_1$, es claro que $W \cap M = \emptyset$, lo cual no es posible.

2. $W \subseteq N_2$.

Como $|W| \leq \frac{n-1}{2}$, se sigue que existe una arista v_iw_i en N_2 tal que $v_iw_i \notin W$, lo que implica que v_iw_i no es adyacente a ninguna arista en W , por lo que W no es un conjunto dominante por aristas, lo cual no es posible.

3. $W \subseteq N_1 \cup N_2$.

De los casos 1 y 2 se deduce que existen un subconjunto no vacío S_1 de N_1 y un subconjunto no vacío S_2 de N_2 tal que $W = S_1 \cup S_2$ y $|S_1| = r_1$ y $|S_2| = r_2$ donde $r_1 + r_2 \leq \frac{n-1}{2}$, lo que implica que

$$|S_1| < \frac{n-1}{2} \text{ y } |S_2| < \frac{n-1}{2}. \quad (6.4)$$

Consideremos a la subgráfica $\langle A(C_n) \setminus W \rangle$.

Primero notemos que $A(C_n) \setminus W = A(C_n) \setminus S_1$, lo que implica que $\langle A(C_n) \setminus W \rangle = \langle A(C_n) \setminus S_1 \rangle$.

Sean W_1, W_2, \dots, W_r las componentes conexas de $\langle A(C_n) \setminus W \rangle$. Fijémonos que las componentes conexas deben ser trayectorias, lo que implica que $W_i = P_i$ donde P_i es una $v_{i_1}v_{i_{k_i}}$ -trayectoria para cada i en $\{1, 2, \dots, r\}$ con $i_1 < i_{k_i}$ e $i_{k_i} < (i+1)_1$ y $k \leq n$. Sin pérdida de generalidad, diremos que P_i tiene la forma $(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_{k_i}})$ con i en $\{1, \dots, r\}$.

$$\text{Entonces } \langle A(C_n) \setminus W \rangle = \langle A(C_n) \setminus S_1 \rangle = \bigcup_{i=1}^r W_i = \bigcup_{i=1}^r P_i.$$

Por otro lado,

$$|A(C_n) \setminus S_1| = \sum_{i=1}^r |A(P_i)| = \sum_{i=1}^r l(P_i). \quad (6.5)$$

Notemos que como $|S_1| < \frac{n-1}{2}$, entonces existe al menos una trayectoria P_i con $l(P_i) \geq 2$.

Afirmación: Existe una trayectoria $P_i = (v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_{k_i-1}}, v_{i_{k_i}})$ de longitud al menos dos en $\langle A(C_n) \setminus W \rangle$ tal que $\{v_{i_2}w_{i_2}, v_{i_3}w_{i_3}, \dots, v_{i_{k_i-1}}w_{i_{k_i-1}}\} \not\subseteq W$.

Procediendo por contradicción, supongamos que para toda trayectoria $P_i = (v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_{k_i-1}}, v_{i_{k_i}})$ con longitud al menos dos en $\langle A(C_n) \setminus W \rangle$ se cumple que $\{v_{i_2}w_{i_2}, v_{i_3}w_{i_3}, \dots, v_{i_{k_i-1}}w_{i_{k_i-1}}\} \subseteq W$.

Así que, por cada trayectoria P_i se tiene que $(k_i - 2) \leq |W|$.

Además, afirmamos que para cualquier trayectoria $P_i = (v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_{k_i-1}}, v_{i_{k_i}})$ se cumple que $v_{i_{k_i}} v_{i_{k_i+1}} \in W$, ya que si no pasara, entonces $v_{i_{k_i}} v_{i_{k_i+1}} \notin W$, lo que implica que $v_{i_{k_i}} v_{i_{k_i+1}} \in A(C_n) \setminus W$, por lo que $v_{i_{k_i}} v_{i_{k_i+1}} \in A(P_j)$ para alguna trayectoria P_j con $j > i$, se sigue que $P_i \cup P_j$ es una trayectoria, por lo que el número de componentes conexas en $\langle A(C_n) \setminus W \rangle$ es menor que r , lo cual no es posible. Por lo tanto, por cada trayectoria P_i se tiene que $v_{i_{k_i}} v_{i_{k_i+1}} \in W$ con i en $\{1, \dots, r\}$, lo que implica que $1 \leq |W|$ por cada trayectoria.

Así que, por cada trayectoria P_i se tiene que $(k_i - 2) + 1 = k_i - 1 \leq |W|$, y puesto que $l(P_i) = k_i - 1$, se sigue que $l(P_i) \leq |W|$ por cada trayectoria P_i .

Por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^r l(P_i) \leq |W|. \quad (6.6)$$

Por otro lado, como $\sum_{i=1}^r l(P_i) = |A(C_n) \setminus S_1|$ (por 6.5) y $|A(C_n) \setminus S_1| = n - |S_1| > (n - \frac{n-1}{2}) = \frac{n+1}{2}$ (por 6.4), entonces se sigue de 6.6 que $\frac{n+1}{2} < |A(C_n) \setminus S_1| = \sum_{i=1}^r l(P_i) \leq |W|$, lo que implica que $\frac{n+1}{2} < |W|$, lo cual es una contradicción, ya que $|W| \leq \frac{n-1}{2}$.

Por lo tanto, existe una trayectoria $P_i = (v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_{k_i-1}}, v_{i_{k_i}})$ de longitud al menos dos en $\langle A(C_n) \setminus W \rangle$ tal que $\{v_{i_2} w_{i_2}, v_{i_3} w_{i_3}, \dots, v_{i_{k_i-1}} w_{i_{k_i-1}}\} \not\subseteq W$.

Como $\{v_{i_2} w_{i_2}, v_{i_3} w_{i_3}, \dots, v_{i_{k_i-1}} w_{i_{k_i-1}}\} \not\subseteq W$, se sigue que existe una arista $v_{i_l} w_{i_l}$ para algún l en $\{2, \dots, k_i - 1\}$ tal que $v_{i_l} w_{i_l} \notin W$. Puesto que $A(P_i) \not\subseteq W$, se sigue que la arista $v_{i_l} w_{i_l}$ no es adyacente a ninguna arista en W , lo que contradice que W es un conjunto dominante por aristas en $C_n \circ K_1$.

Como ninguno de los casos anteriores es posible, concluimos que no existe un $\gamma'_{mt}(C_n \circ K_1)$ -conjunto de cardinalidad menor o igual que $\frac{n-1}{2}$, lo que implica que $\gamma'_{mt}(C_n \circ K_1) \geq \frac{n-1}{2} + 1$.

Así, $\gamma'_{mt}(C_n \circ K_1) = \frac{n-1}{2} + 1$.

Como n es impar, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $2k + 1 = n$, por lo que, $k = \frac{n-1}{2}$, se sigue que $\frac{n-1}{2} \in \mathbb{N}$. Notemos que $k = \frac{n-1}{2} \leq \frac{n}{2} \leq \frac{n+1}{2} = k + 1$, donde $\frac{n}{2} \in \mathbb{Q}$, lo que implica que $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \frac{n-1}{2}$.

Por lo tanto, $\gamma'_{mt}(C_n \circ K_1) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ si n es impar. ■

Ahora mostraremos la corrección que hicimos al teorema original. Primero veamos que en el artículo el teorema 6.0.1 originalmente decía lo siguiente: “Para cualquier ciclo C_n se tiene que $\gamma'_{mt}(C_n \circ K_1) = n$ ”. Lo cual es falso, como se puede apreciar en la figura 6.4, ya que $\gamma'_{mt}(C_5 \circ K_1) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{5}{2} \rfloor + 1 = 3$.

Por lo tanto $\gamma'_{mt}(C_5 \circ K_1) = 3 \neq n = 5$.

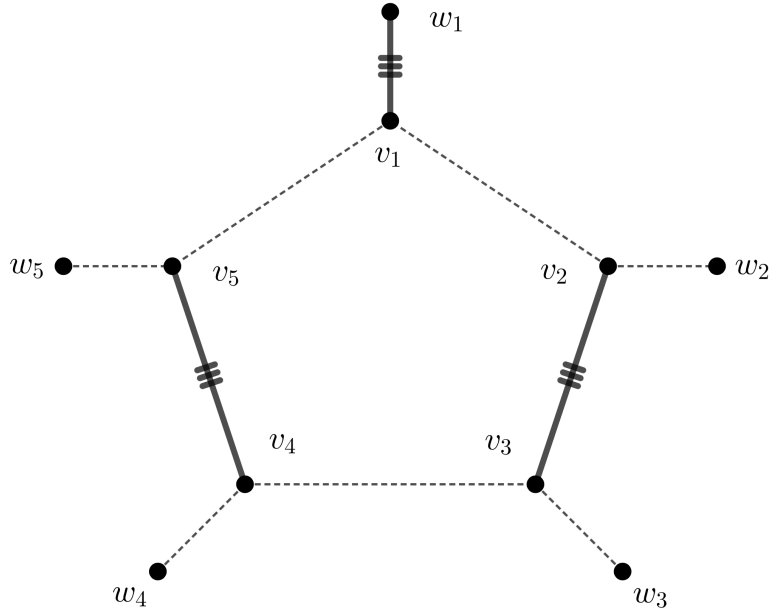


Figura 6.4: Gráfica $(C_5 \circ K_1)$

Conclusiones

Al desarrollar los resultados expuestos en el artículo nos encontramos con algunos errores en los teoremas, los cuales corregimos, y a continuación mostramos cuales fueron algunos de ellos:

En el artículo original el autor enunció el teorema 4.0.1 de la siguiente forma: “Sean a y b dos números enteros positivos con $b \geq 2a - 1$, entonces existe una gráfica G tal que $|A(G)| = b$ y $\gamma'_{mt}(G) = a$ ”. Sin embargo el enunciado presenta un problema, ya que si $a = 1$ y $b > 1$, por el teorema 2.0.4, se tiene que $G \cong K_2$, lo que implica que $|A(G)| = b = 1$, lo cual sería una contradicción. Por esto mismo agregamos la condición de que $b \geq 2a - 1 \geq 2$ al teorema original. Además, la construcción que el autor exhibe para demostrar que existe una gráfica G que cumple las características antes mencionadas (esta construcción se puede apreciar en la figura 4.2) presenta un problema cuando $b = 2a - 1$, ya que se tiene que $|A(G)| = b$, pero $\gamma'_{mt}(G) = a - 1$. En la figura 4.3 se puede apreciar un ejemplo que muestra lo antes mencionado. Por esta razón propusimos una construcción para el caso cuando $b = 2a - 1$, la cual se puede apreciar en la figura 4.5, y cumple con que $|A(G)| = b$ y $\gamma'_{mt}(G) = a$.

Por otro lado, propusimos el teorema 4.0.2, el cual se puede considerar una generalización del teorema 4.0.1, ya que solo pide la condición de que $b \geq a \geq 2$ en lugar de $b \geq 2a - 1 \geq 2$, la construcción que exhibimos para probar el teorema se puede apreciar en la figura 4.6.

También el teorema 5.0.3 presenta un error, ya que en el artículo original el teorema decía lo siguiente: “Sea G una gráfica tal que $|A(G)| = m$, entonces $\gamma'_{mt}(G) = m - 1$ si y solo si $G \cong P_4$ ”. El problema se presenta al no pedir que la gráfica G sea conexa, ya que sin esta hipótesis existen otras gráficas G que cumplen con que $\gamma'_{mt}(G) = m - 1$, pero $G \not\cong P_4$. En la figura 5.1 se muestra un ejemplo de lo antes mencionado. Por este motivo es que nosotros agregamos la hipótesis de G sea conexa, lo cual es suficiente para solucionar el problema presentado.

De igual forma, el teorema 6.0.1 presentaba un problema, ya que el teorema original decía lo siguiente: “Para cualquier ciclo C_n se tiene que $\gamma'_{mt}(C_n \circ K_1) = n$ ”. Lo cual es erróneo, como se puede ver en el ejemplo que se aprecia en la figura 6.4. Esto nos llevo a buscar cual era el verdadero número de dominación por aristas transversal de apareamientos máximos de la corona de C_n y K_1 , $(C_n \circ K_1)$. Después de trabajar un

poco en el teorema fue que llegamos a la conclusión de que $\gamma'_{mt}(C_n \circ K_1) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$.

Cabe mencionar que hasta la fecha la única información conocida acerca de este tema se encuentra en el artículo *Matching Transversal Edge Domination in Graphs* [1] mismo en el que se basó esta tesis, así que aún queda mucha información por investigar acerca del tema. Algunas preguntas que podríamos hacernos son:

1. ¿Cuál es el número de dominación por aristas transversal de apareamientos máximos de las gráficas completas?
2. ¿Cuál es el número de dominación por aristas transversal de apareamientos máximos de las gráficas bipartitas no completas?
3. ¿Cuál es el número de dominación por aristas transversal de apareamientos máximos de la rueda, W_n ?
4. ¿Cuál es el número de dominación por aristas transversal de apareamientos máximos de los árboles?

Bibliografía

- [1] ALWARDI, A. (2016) *Matching Transversal Edge Domination in Graphs*, Applications and Applied Mathematics: An International Journal (AAM), 11(2), pp. 919-929.
- [2] BONDY, J AND MURTHY U. (1976) *Graph Theory with applications*, North Holland, New York.
- [3] HAMID, I.S. (2012) *Independent transversal Domination in Graphs*, Graphs, Discussions Mathematicae Graph Theory, 32, pp. 5-17
- [4] RAMAN, H.S, REVANKAR, D.S, GUTMAN, I, AND WALIKAR, H.B. (2009) *Distance spectra and distance energies of iterated line graphs of regular graphs*, Publ. Inst. Math. (Beograd), 85, pp. 39-46.