Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

TOPOLOGÍA DE DENSIDAD

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

Matemático

PRESENTA:

Gustavo Chinney Herrera

ASESOR DE TESIS:

Dr. Alejandro Darío Rojas Sánchez

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2019

Agradecimientos

Quisiera agradecer a mi familia por apoyarme en todo momento, a mis amigas Denisse y Zyanya por ser parte importante en mi carrera y vida personal. De igual manera, a Valeria, Zeus, Jorge y demás amigos que tuve a lo largo de la carrera por ser un gran apoyo moral sin el que no hubiera podido realizar este trabajo.

Por supuesto, a mi asesor Alejandro, por ser pilar esencial en mi formación como matemático, así como ser excelente profesor siempre dispuesto a ayudar, además de ser uno de los matemáticos más excepcionales que conozco.

A la Facultad de Ciencias por ser mi hogar de estudio por 4 años, asimismo por brindarme facilidad de acceso a la información necesaria para hacer esta tesis, tales como artículos y libros, además de ofrecer educación de calidad.

Introducción

Nuestro objeto de estudio será $\mathbb{R}$ junto con la medida de Lebesgue λ. Le dotaremos de una nueva topología que es más fina que la usual y, para poder definirla, desarrollaremos el concepto de densidad de un punto de un conjunto medible. Diremos que la densidad de $x \in \mathbb{R}$ en un medible $M \subset \mathbb{R}$ es

$$d(x, M) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\lambda(M \cap [x-h, x+h])}{2h},$$

donde λ es la medida de Lebesgue. Informalmente hablando, esto es una forma de medir qué tan "concentrado" es M en x [16], por lo que preguntarse por el límite de las razones de la medida de lo que se queda dentro del medible tiene sentido. La nueva topología, τ, contendrá justamente a los medibles que están bien concentrados en sus propios puntos, en otras palabras, $M \in \tau$ si para todo punto $x \in M$, $d(x, M) = 1$; bajo esta condición diremos que x es *punto de densidad* de M. A este conjunto de puntos lo denotaremos por $\Phi(M)$. En el primer capítulo se demuestra que todo medible es *casi igual* al conjunto de sus puntos de densidad, siendo este el famoso *Teorema de Densidad de Lebesgue*.

Existe otra forma de definir esta topología y se puede encontrar en [17]; en el capítulo 2, se muestran los resultados necesarios para afirmar que es lo mismo trabajar con la definición que presentamos que con la otra, así como también se demuestra que esta topología es completamente regular pero no normal, siendo el Teorema de Lusin-Menchoff [9] pilar de esta prueba (y también en resultados posteriores). También, se investiga cómo se comportan el interior y derivado en esta topología, visto de manera conjuntista y también en términos de funciones en $\mathbb{R}$, donde esto último nos ayudará a probar que el nuevo espacio es conexo. Además, probaremos que los nulos coinciden con los densos en ninguna parte, los conjuntos de primera categoría y los cerrados discretos en este nuevo espacio. Veremos consecuencias inmediatas de esto tales como el hecho de que está topología es hereditariamente Baire, entre otros.

En el capítulo 3, investigaremos otras propiedades que cumple esta topología no tan inmediatas, como lo es la *condición de la cadena contable*. También se estudiarán propiedades de compacidad interesantes que pueden tener algunos subespacios, como ser cocompacto [1], hereditariamente Lindelöf, Hausdorff por colecciones, κ-compacidad, etcétera [20].

Finalmente, en el capítulo 4, se verá la relación que hay con este espacio y la Teoría de Conjuntos; esto lo usaremos para demostrar la existencia de un espacio regular, hereditariamente Lindelöf, no separable y de Baire, asumiendo la Hipótesis del Continuo. Investigaremos la consistencia e independencia con los axiomas de la teoría de conjuntos y algunas propiedades que puede tener el espacio en cuestión, así como las funciones cardinales en este.

Cabe recalcar que para este trabajo, *numerable* significa ser de tamaño $\aleph_0$, mientras que *contable* significa numerable o finito. Además diremos que un subconjunto de $\mathbb{R}$ es medible como abreviación de Lebesgue-medible.

La mayor parte de las demostraciones presentadas son citadas con su correspondiente autor, sin embargo en este trabajo se pretende hacer esas pruebas más digeribles así como rellenar huecos de algunas. Algunas otras pruebas son propias, no obstante derivadas de los trabajos ya hechos.

Como podrá notar el lector, se espera que tenga conocimientos sólidos en las áreas de Topología, Teoría de la Medida y Teoría de Conjuntos. A pesar de esto, se trató de que cualquier alumno de la licenciatura con dichos conocimientos, pueda leer esta tesis y entender su contenido.

En el apéndice colocaremos los resultados importantes de cada una de las áreas mencionadas antes, teniéndolos sólo como referencias, por lo que no las probaremos.

Índice general

Capítulo 1

Definición de la topología

1.1. Introducción

A lo largo de este trabajo, nuestro objeto de estudio será $\mathbb{R}$ pero con una topología más fina que la usual. En [6] se introduce el concepto de funciones *aproximadamente continuas* y en [10], Goffman y Waterman le dan una nueva topología a $\mathbb{R}$ para que estas funciones también resulten continuas; de hecho en [9] se demuestra que esta es la topología más gruesa que cumple lo anterior. Lo que nos atañe, sin embargo, no es este concepto, sino el estudio de dicha topología, la cual resulta que es rica en propiedades interesantes que responden a algunas preguntas concernientes a la teoría de la medida y a la Topología por supuesto. Por ejemplo, en [17], se resuelve la duda: ¿existe una topología para los reales cuyos Borelianos resulten ser los Lebsegue-medibles?, en contraste con el hecho de que los Borelianos de la topología usual no son todos los Lebsegue-medibles.

El concepto esencial que usaremos para definir la topología es la *densidad* de un punto en un medible, y es una forma de medir qué tan "concentrado" está en un medible. Para hacer eso, podemos ir tomando intervalos centrados en ese punto, haciéndolos cada vez más pequeños, por lo que la razón entre la medida de lo que se queda del medible y el tamaño del intervalo nos da una forma de medir eso. Más precisamente, tenemos la siguiente definición.

Definición 1.1. *Sea $M \subset \mathbb{R}$ medible. Decimos que M tiene **densidad** d en un punto x si*

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\lambda(M \cap [x-h, x+h])}{2h}$$

existe y es igual a d. Denotamos por $d(x, M)$ a este valor. También, definimos

$\Phi(M)$ *como el conjunto de puntos en* $\mathbb{R}$ *tales que* $d(x, M) = 1$*. En este caso decimos que* x *es* ***punto de densidad*** *en* M*.*

De esta manera, si un punto es de densidad en un medible, es porque los intervalos tienden a quedarse casi contenidos en el medible, de alguna manera están "casi" dentro del medible.

Ejemplo 1.2. *Sea* $M = (a, b)$*. Entonces si* $x \in \mathbb{R} \setminus cl(M)$*,* $d(x, M) = 0$*, mientras que todos los puntos de* M *son de densidad en* M*. En este caso* $\Phi(M) = M$*. Observemos que* $d(a, M) = d(b, M) = \frac{1}{2}$*, lo que podemos interpretar informalmente como que* a *y* b *están concentrados por igual tanto en* M *como en su complemento por igual.*

Ejemplo 1.3. *Sea* $M = (0, 1) \cup (1, 2)$*. Evidentemente* $d(1, M) = 1$*, por lo que no es cierto que todo punto de densidad pertenece al medible. Por otro lado si* $N = [0, 1)$ *entonces* $d(0, N) = \frac{1}{2}$ *con lo que tampoco es cierto que todo punto de un medible sea de densidad. Es decir, en general no se tiene que* $M \subset \Phi(M)$ *ni* $\Phi(M) \subset M$*.*

Antes de definir la topología, demostraremos un teorema relevante a lo largo de este trabajo pues nos ayudará a entender mejor el espacio, además de que nos dice lo que nuestra intuición espera.

1.2. Teorema de Densidad de Lebesgue

Lo que nos asegura el Teorema de Densidad de Lebesgue es que cualquier medible, está "concentrado" en casi todos sus puntos y que, los puntos en donde este se concentra, es casi todo el medible; en otras palabras, casi todos sus puntos son de densidad. De manera precisa:

Teorema 1.4. ***(Teorema de Densidad de Lebesgue, TDL)*** *Sea* $M \subset \mathbb{R}$ *medible. Entonces* $\lambda(M \triangle \Phi(M)) = 0$*.*

Existen numerosas demostraciones de este teorema (la más clásica es de Oxtoby en [16]), sin embargo presentamos la prueba dada por Faure en [7] que resulta más elemental e ingeniosa. Primero probaremos un lema técnico.

Lema 1.5. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y $U \subset [a,b]$ abierto en $\mathbb{R}$. Si*

$$U_f = \{x \in U : \textit{existe } y > x \textit{ tal que } (x,y) \subset U \textit{ y } f(x) > f(y)\},$$

entonces U_f es abierto. Más aún, si (c,d) es una componente (Teorema B.1) de U_f, entonces $f(c) \leq f(d)$.

Demostración. Para la demostración de la primera parte del lema, notemos que si $x \in U_f$ existe $y > x$ tal que $(x,y) \subset U$ y $f(x) > f(y)$. Como f es continua existe $\delta > 0$ tal que para toda $z \in (x-\delta, x+\delta)$, $f(z) > f(y)$. Más aún, podemos pedir que $x + \delta < y$ y $(x-\delta, x+\delta) \subset U$. Veamos que $(x-\delta, x+\delta) \subset U_f$. Sea $z \in (x-\delta, x+\delta)$, entonces, como $x+\delta < y$ y $(x,y) \subset U$, $(z,y) \subset U$. Por lo que $f(z) > f(y)$, es decir, $z \in U_f$, por lo tanto U_f es abierto. Ahora, sea (c,d) una componente de U_f. Observemos que si probamos que para toda $x \in (c,d)$, $f(x) \leq f(d)$, acabamos por continuidad. Sea pues $x \in (c,d)$. Como $[x,d]$ es compacto y f continua,

$$s = \max\{z \in [x,d] : f(z) \leq f(x)\}$$

está bien definida. Veamos que $s = d$. En caso contrario, $s < d$, entonces $f(d) > f(x)$. además, dado que $s \in U_f$, existe $y > s$ tal que $(s,y) \subset U$ y $f(y) < f(s)$. Si pasara que $s < y \leq d$, tendríamos que $f(y) < f(s) \leq f(x)$, lo que entraría en contradicción con la maximalidad de s. Así, $s < d < y$ y además $f(y) < f(s) \leq f(x) < f(d)$, lo que por definición nos lleva a $d \in U_f$, pues $(d,y) \subset (s,y) \subset U$, que es una contradicción pues (c,d) es una componente de U_f. Luego, $s = d$, por lo que $f(d) \geq f(x)$ como queríamos. ■

Ahora, antes de la demostración del teorema, comprobaremos la medibilidad de algunas funciones que nos darán la libertad de trabajar y preguntarnos por la medida de $\Phi(M)$, con M medible. A pesar de que no es necesaria la medibilidad de M, lo haremos así pues en el futuro nos ayudarán estos lemas.

Notación. Si $X, A \subset \mathbb{R}$ son medibles, con $\lambda(A) > 0$, definimos la **densidad media** de X en A como

$$D(X,A) = \frac{\lambda(X \cap A)}{\lambda(A)}.$$

También definimos la **densidad inferior derecha** de M en x como

$$D_+(M,x) = \liminf_{h\to 0^+} D(M,[x,x+h]).$$

Análogamente definimos la densidad inferior izquierda $D_-(M,x)$.

Lema 1.6. *Sean $A \subset \mathbb{R}$ medible, $a \in \mathbb{R}$ y $h > 0$. Entonces*

(1) $p(x) = D(A,[x,x+h])$ es continua en $\mathbb{R}$ y

(2) $q(x) = D(A,(a,x))$ es continua en (a,∞)

Demostración. (1) Sean $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$. Sea y tal que $|x_0 - y| < \frac{\epsilon h}{2}$ y, sin pérdida de generalidad, que $x_0 < y$. Tenemos que

$$|\lambda(A\cap[x_0,x_0+h]) - \lambda(A\cap[y,y+h])| = |\lambda(A\cap[x_0,y]) - \lambda(A\cap[x_0+h,y+h])|$$

$$\leq \lambda([x_0,y]) + \lambda([x_0+h,y+h]) \leq \epsilon h.$$

De esta manera tenemos que

$$|p(x_0) - p(y)| = \left|\frac{\lambda(A\cap[x_0,x_0+h])}{h} - \frac{\lambda(A\cap[y,y+h])}{h}\right| < \epsilon.$$

(2) Sea $x_0 > a$. Es claro que, dado $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\lambda(A\cap(a,x_0))}{x_0+\frac{1}{n}-a} \leq \frac{\lambda(A\cap(a,x_0+\frac{1}{n}))}{x_0+\frac{1}{n}-a} \leq \frac{\lambda(A\cap(a,x_0+\frac{1}{n}))}{x_0-a},$$

y con ello $\lim_{n\to\infty} D(A,(a,x_0+\frac{1}{n})) = D(A,(a,x_0))$, y de manera análoga $\lim_{n\to\infty} D(A,(a,x_0-\frac{1}{n})) = D(A,(a,x_0))$. Esto es suficiente para decir que q es continua en (a,∞).

∎

Observación 1.7. *Si* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *son sucesiones cuyos elementos son menores o iguales a* 1*, con* $a_n \geq 0$*, y* $a_n + b_n \to 2$*, entonces* $a_n \to 1$ *y* $b_n \to 1$*. Esto es pues dada* $\epsilon > 0$*, existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que si* $n \geq N$*,* $|1 - a_n| = 1 - a_n < 1 - a_n + 1 - b_n \leq |2 - a_n - b_n| < \epsilon$*.*

Lema 1.8. *Sean* $M \subset \mathbb{R}$ *medible y* $x \in \mathbb{R}$*. Entonces* x *es punto de densidad en* M *si y sólo si* $D_+(M,x) = D_-(M,x) = 1$*.*

Demostración. Supongamos que $D_+(M,x) = D_-(M,x) = 1$. Como el límite inferior siempre es menor o igual que el límite superior y

$$\limsup_{h\to 0^+} \frac{\lambda(M\cap[x-h,x+h])}{2h} \leq 1,$$

basta ver que $\liminf_{h\to 0^+} \frac{\lambda(M\cap[x-h.x+h])}{2h} \geq 1$. En efecto, por propiedades del límite inferior

$$1 = \frac{D_+(M,x) + D_-(M,x)}{2} \leq \liminf_{h\to 0^+} \frac{\lambda(M\cap[x-h,x+h])}{2h}.$$

Por otro lado, si x es un punto de densidad en M, entonces $\lim_{h\to 0^+} \frac{\lambda(M\cap[x-h.x+h])}{2h} = 1$, por lo que, por la Observación 1.7,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\lambda(M\cap[x-h,x])}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\lambda(M\cap[x,x+h])}{h} = 1,$$

lo que termina la prueba. ■

Lema 1.9. *Sea* $M \subset \mathbb{R}$ *medible. Entonces* $g_M(x) = D_+(M,x)$ *es medible. Lo mismo para* $h_M(x) = D_-(M,x)$*.*

Demostración. Observemos que $g_M(x) = \lim_{h\to\infty}(\inf\{D(M,(x,x+h)) : 0 < h < \frac{1}{n}\})$. Así, si hacemos

$$\begin{aligned} g_n(x) &= \inf\{D(M,(x,x+h)) : 0 < h < \frac{1}{n}\} \\ &= \inf\{D(M,(x,x+h)) : 0 < h < \frac{1}{n}, h \text{ racional}\}, \end{aligned}$$

y por el Lema 1.6 y Teorema B.2, son medibles. Luego, como $g_n \to g_M$, g_M es medible, de nuevo por Teorema B.2. ■

Observación 1.10. *Justo el lema anterior nos dice que $\Phi(M)$ es el conjunto de puntos tales que la densidad baja por la izquierda y derecha en M son iguales a 1. Así podemos concluir que $\Phi(M)$ es medible pues es la intersección de la imagen inversa de un medible con funciones medibles.*

Finalmente podemos demostrar el famoso teorema aprovechando que ya sabemos como caracterizar los puntos de densidad mediante una función medible.

Demostración. (**del TDL**) Observemos primero que, para cualquier medible E, $\Phi(E) \setminus E \subset (\mathbb{R} \setminus E) \setminus \Phi(\mathbb{R} \setminus E)$. En efecto, si $x \in \Phi(E) \setminus E$,

$$\begin{aligned}1 &= \lim_{h\to 0^+} \frac{\lambda(\mathbb{R} \cap [x-h, x+h])}{2h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{\lambda(E \cap [x-h, x+h])}{2h} + \lim_{h\to 0^+} \frac{\lambda((\mathbb{R} \setminus E) \cap [x-h, x+h])}{2h} \\ &= 1 + \lim_{h\to 0^+} \frac{\lambda((\mathbb{R} \setminus E) \cap [x-h, x+h])}{2h},\end{aligned}$$

por lo que $x \notin \Phi(\mathbb{R} \setminus E)$ y por lo tanto $x \in (\mathbb{R} \setminus E) \setminus \Phi(\mathbb{R} \setminus E)$. De esta manera, basta con que probemos que, para cualquier medible $M \subset \mathbb{R}$, $\lambda(M \setminus \Phi(M)) = 0$. Supongamos pues que $\lambda(M \setminus \Phi(M)) > 0$. Sean

$$\begin{aligned}A^+ &= \{x \in M : D_+(M, x) < 1\}, \\ A^- &= \{x \in M : D_-(M, x) < 1\}.\end{aligned}$$

Así, por el Lema 1.9, ambos son medibles. Más aún, por la Observación 1.10, $M \setminus \Phi(M) = A^+ \cup A^-$, y por lo tanto $\lambda(A^+) > 0$ ó $\lambda(A^-) > 0$. Supongamos sin pérdidad de generalidad que $\lambda(A^+) > 0$. Entonces $A^+ = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, con $A_n = \{x \in M \cap (-n, n) : D_+(M, x) < \frac{n}{n+1}\}$. Probemos entonces que cada A_n es nulo. Consideremos $f : [-n, n] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \lambda(M \cap (-n, x)) - \frac{n}{n+1}x.$$

La función f es continua pues si $x < y$, $f(y) - f(x) = \lambda(M \cap (x, y)) - \frac{n}{n+1}(y - x)$.

Sea $\epsilon > 0$. Veamos que $\lambda(A_n) \leq n\epsilon$. Como $A_n \subset (-n, n)$, existe U abierto tal que $A_n \subset U$ y $\lambda(U) < \lambda(A_n) + \epsilon$ (Teorema B.3). Sea pues U_f con en el Lema 1.5. Afirmamos que $A_n \subset U_f$. En efecto, sea $x \in A_n$, entonces existe $h > 0$

suficientemente pequeño tal que $\frac{\lambda(M\cap(x,x+h))}{h} < \frac{n}{n+1}$ y $(x, x+h) \subset U$, por lo que $\lambda(M\cap(-n, x+h)) - \lambda(M\cap(-n,x)) < \frac{n}{n+1}(x-(x-h))$, luego $f(x) > f(x+h)$ y por consiguiente $x \in U_f$. Sean pues (c_k, d_k) las componentes de U_f. Dado que $f(c_k) \leq f(d_k)$, $\lambda(M\cap(c_k,d_k)) \leq \frac{n}{n+1}(d_k - c_k)$. De esta manera

$$\begin{aligned}\lambda(A_n) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(A_n \cap (c_k, d_k)) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(M\cap(c_k,d_k)) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{n+1}(d_k - c_k) = \frac{n}{n+1}\sum_{n\in\mathbb{N}}(d_k-c_k) = \frac{n}{n+1}\lambda(U_f) \leq \frac{n}{n+1}(\lambda(A_n)+\epsilon).\end{aligned}$$

De aquí que $\lambda(A_n) \leq n\epsilon$, y como fue una ϵ arbitraria, tenemos que $\lambda(A_n) = 0$, lo que es una contradicción de la suposición $\lambda(A^+) > 0$, por lo que terminamos la prueba. ■

Con este poderoso resultado, podremos extraer importantes propiedades topológicas a nuestro espacio, que estamos por definir.

1.3. La Topología de Densidad

Definimos la siguiente relación de equivalencia: $A \sim B$ si y sólo si $A\triangle B$ es un conjunto nulo. Veamos algunas propiedades de Φ.

Teorema 1.11. *Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ medibles. Entonces*

(1) $\Phi(A) \sim A$,

(2) Si $A \sim B$ *entonces* $\Phi(A) = \Phi(B)$,

(3) $\Phi(\emptyset) = \emptyset$ *y* $\Phi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$,

(4) $\Phi(A\cap B) = \Phi(A)\cap\Phi(B)$ *y*

(5) Si $A \subset B$, *entonces* $\Phi(A) \subset \Phi(B)$

Demostración. (1) Esto es justamene el TDL.

(2) Para cualquier $x \in \mathbb{R}$, dado que $\lambda(A \triangle B) = 0$, ocurre

$$\begin{aligned} d(x, A) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{\lambda(A \cap [x-h, x+h])}{2h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{\lambda(A \setminus B \cap [x-h, x+h])}{2h} + \frac{\lambda(A \cap B \cap [x-h, x+h])}{2h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{\lambda(B \setminus A \cap [x-h, x+h])}{2h} + \frac{\lambda(A \cap B \cap [x-h, x+h])}{2h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{\lambda(B \cap [x-h, x+h])}{2h} = d(x, B), \end{aligned}$$

por lo que $x \in \Phi(A)$ si y sólo si $x \in \Phi(B)$.

(3) Se sigue de $\lim_{h\to 0^+} \frac{\lambda(\emptyset \cap [x-h, x+h])}{2h} = 0$ y

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\lambda(\mathbb{R} \cap [x-h, x+h])}{2h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\lambda([x-h, x+h])}{2h} = 1$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

(4) Si $x \in \Phi(A \cap B)$, como

$$\frac{\lambda(A \cap B \cap [x-h, x+h])}{2h} \leq \frac{\lambda(A \cap [x-h, x+h])}{2h}, \frac{\lambda(B \cap [x-h, x+h])}{2h} \leq 1,$$

ocurre que $x \in \Phi(A) \cap \Phi(B)$. Ahora supongamos que $x \in \Phi(A) \cap \Phi(B)$. Sea $I = [x-h, x+h]$, con $h > 0$. Entonces $\lambda(I \setminus (A \cap B)) = \lambda(I) - \lambda(I \cap A \cap B)$. Pero $\lambda(I \setminus (A \cap B)) \leq \lambda(I \setminus A) + \lambda(I \setminus B)$ y con ello $\lambda(I) - \lambda(I \cap A \cap B) \leq \lambda(I) - \lambda(I \cap A) + \lambda(I) - \lambda(I \cap B)$, con lo cual $\lambda(I \cap A) + \lambda(I \cap B) - \lambda(I) \leq \lambda(I \cap A \cap B)$ y por lo tanto

$$\frac{\lambda(I \cap A)}{2h} + \frac{\lambda(I \cap B)}{2h} - 1 \leq \frac{\lambda(I \cap A \cap B)}{2h} \leq 1,$$

y por hipótesis la parte izquierda tiene a 1. Así, $x \in \Phi(A \cap B)$.

(5) Por (4), si $A \subset B$, $\Phi(A) \cap \Phi(B) = \Phi(A \cap B) = \Phi(A)$, luego $\Phi(A) \subset \Phi(B)$.

$\blacksquare$

Con estas propiedades demostradas, ya podemos definir la esperada Topología de Densidad. Haremos que un abierto sea un medible tal que todos sus puntos sean de densidad. Concretamente tenemos:

Teorema 1.12. *La familia $\tau = \{M \subset \mathbb{R}$ medible $: M \subset \Phi(M)\}$ es una topología para $\mathbb{R}$. Además, τ es más fina que la topología usual.*

Demostración. Es claro que $\emptyset, \mathbb{R} \in \tau$ por (2) del Teorema 1.11. Ahora, sean $A, B \in \tau$. Entonces $A \cap B \subset \Phi(A) \cap \Phi(B) = \Phi(A \cap B)$, así que $A \cap B \in \tau$. Sea $\mathcal{A} \subset \tau$ una familia arbitraria. Como $A \subset \Phi(A)$, para todo $A \in \mathcal{A}$, $\bigcup \mathcal{A} \subset \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \Phi(A) \subset \Phi(\bigcup \mathcal{A})$, pues $\Phi(A) \subset \Phi(\bigcup \mathcal{A})$ por el teorema anterior. De esta manera τ es topología. Finalmente si tenemos que A es un abierto euclidiano, para cada $x \in A$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq n$, $[x - \frac{1}{m}, x + \frac{1}{m}] \subset A$ y por lo tanto $d(x, A) = 1$. ■

De ahora en adelante, $(\mathbb{X}, \tau)$ (o simplemente $\mathbb{X}$) será $\mathbb{R}$ dotado de esta topología. Algo interesante y útil de esta topología es que la podemos ver en términos de Φ salvo algo de medida cero.

Proposición 1.13. $\tau = \{\Phi(M) \setminus N : M$ *es medible y* N *es nulo*$\}$

Demostración. Sea $E \in \tau$. Entonces $E = E \cap \Phi(E) = \Phi(E) \setminus (\Phi(E) \setminus E)$. Por el TDL, $\Phi(E) \setminus E$ es nulo y E es medible, por lo que tenemos una contención.

Ahora, consideremos $\Phi(A) \setminus N$ con A medible y N nulo. Por la Observación 1.10, $\Phi(A) \setminus N$ es medible por lo que sólo falta ver que $\Phi(A) \setminus N \subset \Phi(\Phi(A) \setminus N)$. Primero observemos que como $\Phi(B) \sim B$, $\Phi(\Phi(B)) = \Phi(B)$ para cualquier medible B. Además, como N es nulo, si $x \in \mathbb{X} \setminus N$ pasa que

$$\begin{aligned}
1 &= \lim_{h \to 0^+} \frac{\lambda(\mathbb{X} \cap [x-h, x+h])}{2h} \\
&= \lim_{h \to 0^+} \frac{\lambda(\mathbb{X} \setminus N \cap [x-h, x+h])}{2h} + \frac{\lambda(N \cap [x-h, x+h])}{2h} \\
&= \lim_{h \to 0^+} \frac{\lambda(\mathbb{X} \setminus N \cap [x-h, x+h])}{2h}.
\end{aligned}$$

Por consiguiente $x \in \Phi(N)$, es decir $\mathbb{X} \setminus N$ es abierto y luego $\mathbb{X} \setminus N \subset \Phi(\mathbb{X} \setminus N)$. Ya con esto notemos que

$$\Phi(A) \setminus N \subset \Phi(A) \cap \Phi(\mathbb{X} \setminus N) = \Phi(\Phi(A)) \cap \Phi(\mathbb{X} \setminus N) = \Phi(\Phi(A) \setminus N),$$

por lo que $\Phi(A) \setminus N \in \tau$. ■

Ejemplo 1.14. *En este espacio, los irracionales pasan a ser abiertos y los racionales cerrados, se pierde este denso euclideano numerable: si* $M = \mathbb{X} \setminus \mathbb{Q}$*, entonces tenemos que* $\Phi(\mathbb{X}) \setminus \mathbb{Q} = M$*, por lo que* M *es un abierto y por lo tanto* $\mathbb{Q}$ *es un cerrado esta vez.*

Capítulo 2

Propiedades básicas

En este capítulo indagaremos en la esencia de la topología. La primera pregunta que resulta natural hacerse cuando tenemos un espacio es ¿qué axioma de separación cumple? Probaremos que $(\mathbb{X}, \tau)$ llega a ser completamente regular pero no normal.

Otra cosa que nos gustaría saber es cómo caracterizar el interior y la cerradura de cualquier conjunto en $\mathbb{X}$, para tener una idea más concreta de *cercanía* en este espacio. Usaremos núcleos medibles para dar esta descripción.

Después estudiaremos a los nulos desde el lente de la nueva topología y descubriremos que tienen una gran importancia en la estructura del espacio. Los nulos resultarán ser justamente los cerrados discretos y también los densos en ninguna parte del espacio en cuestión, arrojándonos hechos tales como ser hereditariamente Baire, no ser ni primero ni segundo numerable, etc.

Finalmente caracterizaremos a los puntos interiores, exteriores y de acumulación de un conjunto medible mediante funciones continuas en $\mathbb{R}$. Con ello tendremos algunas propiedades sobre los borelianos de $\mathbb{X}$, resolviendo la pregunta: ¿existe una topología de $\mathbb{R}$ tal que los borelianos generados son exactamente los Lebesgue-medibles?

2.1. $(\mathbb{X}, \tau)$ es Completamente Regular (Tychonoff, $T_{3\frac{1}{2}}$)

Para probar que esta topología es completamente regular usaremos el teorema de Lusin-Menchoff y otros dos de Zahorski. Estas demostraciones las obtenemos gracias a Goffman [9] y Zahorski [22], que en realidad se puede generalizar a $\mathbb{R}^n$, sin embargo la demostración en el caso de $\mathbb{R}^n$ con $n > 1$ se escapa de los objetivos de este trabajo.

2.1.1. Teorema de Lusin-Menchoff y Lemas de Zahorski

A lo largo de esta sección, trabajaremos con la topología usual de los reales Para ver un enfoque más general de los siguientes resultados puede consultarse [9].

Los siguientes tres lemas nos dicen que es posible meter un conjunto perfecto entre dos subconjuntos específicos de manera conveniente.

El primer lema afirma que si tenemos un punto de densidad de un boreliano entonces existe un perfecto que contiene a tal punto y está contenido en el boreliano. El segundo lema, en lugar de tener un punto, supone un conjunto contable donde todos sus puntos son de densidad en un boreliano y cuya cerradura está contenida en ese mismo boreliano. Finalmente, el tercer lema concluye lo mismo pero ahora teniendo un cerrado contenido en un medible. Después de demostrar estos tres lemas, probaremos el teorema de Lusin-Menchoff, que es una unión de los resultados anteriores, concluyendo la existencia del perfecto y además con información topológica que será bastante útil más adelante.

Lema 2.1. *Sea $B \subset \mathbb{R}$ boreliano, y sea $x \in B$ tal que $d(x, B) = 1$. Entonces existe un conjunto perfecto K con $x \in K \subset B$.*

Demostración. Denotaremos por I_n al intervalo $[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}]$. Debido a que $d(x, B) = 1$, $\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda(B\cap I_n)}{\lambda(I_n)} = 1$ y, por consiguiente, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda(B \cap I_n) > 0$. Más aún hay una cantidad infinita de intervalos que cumplen esto. Además $B \cap I_n = \{x\} \cup \bigcup_{k\geq n}(B \cap (I_k \setminus I_{k+1}))$, entonces existe $k_n \geq n$ tal que $\lambda(B \cap (I_{k_n} \setminus I_{k_n+1})) > 0$. Por lo anterior podemos suponer que para toda $n \in \mathbb{N}$, $\lambda(B \cap (I_n \setminus I_{n+1})) > 0$. Por el Teorema del conjunto perfecto para Borelianos (ver Teorema A.1), existe un conjunto perfecto $P_n \subset B \cap (I_n \setminus I_{n+1})$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $K = \{x\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n$. Evidentemente $x \in K \subset B$. Afirmamos que K es perfecto. En efecto, por un lado tenemos que $K \subset der(K)$ pues dado $y \in K$, si $y \in P_n$, para algún $n \in \mathbb{N}$, existe una sucesión en $P_n \setminus \{y\}$, que converge a y; si

$y = x$, simplemente nos tomamos un punto en cada P_n y esa sucesión convergerá a x, pues los intervalos están anidados. Por otro lado, sea $y \in \mathbb{R}$ tal que hay una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$, distintos de y, que converge a y. Si algún P_k contiene una infinidad de elementos de la sucesión, podemos construir $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ subsucesión en P_k que converge a y, pues P_k es compacto, de aquí que $y \in P_k \subset K$. En otro caso $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x, lo que concluye la prueba. ■

Observación 2.2. *Notemos que de la demostración anterior, podemos escoger una n suficientemente grande para que, dada una $k \in \mathbb{N}$, $diam(K) < diam(I_n) < \frac{1}{k}$.*

Lema 2.3. *Sea $B \subset \mathbb{R}$ conjunto de Borel y sea C subconjunto contable de B tal que $cl(C) \subset B$ y $d(x, B) = 1$, para toda $x \in C$. Entonces existe un conjunto perfecto K tal que $C \subset K \subset B$.*

Demostración. Sea $C = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea K_n perfecto tal que $x_n \in K_n \subset B$ y $diam(K_n) < \frac{1}{n}$ (Observación 2.2). Sea $K = cl(C) \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Probemos que K es perfecto. Por un argumento similar al lema anterior, si $x \in K_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, $x \in der(K)$; si $x \in cl(C) \setminus C$, es claro que $x \in der(C)$ y por lo tanto $x \in der(K)$; si $x \in C$, $x = x_n$ y también tenemos que $x \in der(K)$. Ahora, sea $y \in der(K)$. Entonces hay una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K \setminus \{y\}$ que converge a y. Si existe una infinidad de naturales n tales que $y_n \in cl(C)$ entonces hay una subsucesión en $cl(C)$ que converge a y (para esto simplemente ordenamos el conjunto $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \cap cl(C)$ con los índices en forma creciente) y por lo tanto $y \in cl(C)$. Supongamos que hay una infinidad de y_n en $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Si existe una $i \in \mathbb{N}$ tal que hay una infinidad de y_n en K_i entonces existe una subsucesión $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge en K_i, por lo tanto $y \in K_i \subset K$. Por otro lado, si cada K_n contiene una cantidad finita de y_n, podemos construir una subsucesión $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $|x_k - y_{n_k}| < \frac{1}{k}$ (sin pérdida de generalidad podemos suponer que hay al menos un término de la sucesión en cada K_n; tomamos $n = \max\{l \in \mathbb{N} : y_l \in K_k \cap (y_k)_{k\in\mathbb{N}}\}$ y ponemos a y_n como el k-ésimo término), luego $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a y, y concluimos que $y \in cl(C) \subset K$. Así K es perfecto y $C \subset K \subset B$. ■

Lema 2.4. *Sea $M \subset \mathbb{R}$ medible y sea $F \subset M$ cerrado tal que $d(x, M) = 1$, para toda $x \in F$. Entonces existe un conjunto perfecto P tal que $F \subset P \subset M$.*

Demostración. Es un hecho conocido que todo cerrado en $\mathbb{R}$ es la unión de un conjunto perfecto y uno contable (Teorema A.2). Así pues, $F = K \cup C$, donde K es perfecto y C contable. Dado que M es medible, existe $G \subset M$ conjunto F_σ tal que $\lambda(M \setminus G) = 0$ (Teorema B.4) y además, si $A = G \cup F$, A es F_σ y por lo tanto boreliano con $A \sim M$. Con esto $\Phi(A) = \Phi(M)$, luego, para toda $x \in F$, $d(x, A) = 1$. En particular para toda $x \in C$, $d(x, A) = 1$. Es claro que $cl(C) \subset F \subset A$. Usando el Lema 2.3, existe K_1 perfecto tal que $C \subset K_1 \subset A$. Si hacemos $P = K \cup K_1$, tenemos que P es perfecto (Teorema A.3) y $F \subset P \subset M$, como queríamos. ■

Teorema 2.5 (Lusin-Menchoff). *Sea $E \subset \mathbb{R}$ un conjunto medible y sea $F \subset E$ un conjunto cerrado tal que $d(x, E) = 1$, para toda $x \in F$. Entonces existe un conjunto perfecto P tal que*

(a) $F \subset P \subset E$ y

(b) $d(x, P) = 1$, para toda $x \in F$.

Demostración. Por el Lema 2.4, existe B perfecto tal que $F \subset B \subset E$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$R_n = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{n+1} < \rho(x, B) \leq \frac{1}{n}\right\} \cap E,$$

donde $\rho(x, B) = \text{ínf}\{d(x, y) : y \in B\}$. Supongamos que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n \cup B = E$ (esto es por comodidad pues le encontraremos un subconjunto perfecto a $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n \cup B$). Sabemos que $\rho_B(x) = \rho(x, B)$ es continua, luego cada R_n es un boreliano y por lo tanto medible. Así pues, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $F_n \subset R_n$ cerrado tal que $\lambda(R_n) - \frac{1}{2^n} < \lambda(F_n)$. Con esto, como cada cerrado es unión de un perfecto y un contable, hay $P_n \subset F_n \subset R_n$ perfecto tal que $\lambda(R_n) - \frac{1}{2^n} < \lambda(P_n) < \lambda(R_n)$. Sea $P = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n \cup B$. Veamos que este es el perfecto que buscamos.

Evidentemente $F \subset P \subset E$. Ahora, sea $p \in P$. Si $p \in P_n$, para algún $n \in \mathbb{N}$, todo abierto que tenga a p interseca a P_n en un punto distinto de p y por lo tanto interseca a P en un punto distinto de p. Si $p \in B$, el argumento es el mismo.

Por otro lado, sea $p \in der(P)$. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset P \setminus \{p\}$ sucesión que converge a p. Si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que hay una infinidad de términos de la sucesión en P_n, entonces hay una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contenida en P_n que converge a p; luego $p \in P_n \subset P$. Pasa lo mismo si hay una infinidad de términos de la sucesión en B. Supongamos entonces que hay una cantidad finita de elementos de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en cada P_n y en B; podemos construir una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $P_n \cap (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tiene a lo más un elemento. De esta manera $(\rho(x_{n_k}, B))_{k\in\mathbb{N}}$ converge a 0 y, como ρ_B es continua (Teorema A.4) y $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge a p, $\rho_B(p) = 0$, es decir $p \in B$.

Por último, demostraremos que para todo $x \in F$, $d(x, P) = 1$. Sea $x \in F$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $I_n = [x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}]$. Si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $I_k \subset B$, como $x \in F \subset B \subset P$, $d(x,P) = \text{lím}_{n\to\infty} \frac{\lambda(P\cap I_n)}{\lambda(I_n)} = 1$. En caso contrario, para cada $j \in \mathbb{N}$ existe $n_j \in \mathbb{N}$ tal que si $n < n_j$,

$$I_j \cap R_n = \emptyset \text{ y } R_{n_j} \cap I_j \neq \emptyset, \tag{2.1}$$

es decir elegimos el menor índice para el cual pasa que $R_n \cap I_j \neq \emptyset$. Como estamos suponiendo $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n \cup B$ y $P = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n \cup B$, para todo $j \in \mathbb{N}$

$$\lambda(I_j \cap (E \setminus P)) \leq \lambda\left(\bigcup_{n\geq n_j} R_n \setminus P_n\right) = \sum_{n=n_j}^{\infty} \lambda(R_n \setminus P_n) < \frac{1}{2^{n_j-1}}.$$

Luego, como $\lambda(I_j \cap E) - \lambda(I_j \cap P) = \lambda(I_j \cap (E \setminus P))$,

$$\lambda(I_j \cap E) < \lambda(I_j \cap P) + \frac{1}{2^{n_j-1}}. \tag{2.2}$$

Por 2.1, existe $y \in I_j \cap R_{n_j}$ y cumple $\rho(x,y) > \frac{1}{n_j+1}$ pues $x \in F \subset B$, por lo tanto $\lambda(I_j) > \frac{1}{n_j+1}$. Por eso y por 2.2 tenemos que

$$\frac{\lambda(E\cap I_j)}{\lambda(I_j)} \leq \frac{\lambda(P\cap I_j)}{\lambda(I_j)} + \frac{1}{2^{n_j-1}\lambda(I_j)} < \frac{\lambda(P\cap I_j)}{\lambda(I_j)} + \frac{n_j+1}{2^{n_j-1}},$$

y, dado que $\frac{n_j+1}{2^{n_j-1}} \to 0$,

$$1 = d(x,E) = \lim_{j\to\infty} \frac{\lambda(E\cap I_j)}{\lambda(I_j)} = \lim_{j\to\infty} \frac{\lambda(P\cap I_j)}{\lambda(I_j)} = d(x,P),$$

con lo que obtenemos el resultado.

■

Usaremos dos lemas dados por Zahorski y la demostraciones puede ser consultadas en [22]. No lo probaremos pues se escapa del objetivo de la tesis. Para nuestros fines, definiremos una función aproximadamente continua como sigue.

Definición 2.6. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función.*

(1) Decimos que el ***límite aproximado de*** f ***a*** x_0 *es L si existe $S \subset R$ tal que*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\lambda_*(S \cap [x_0 - h, x_0 + h])}{2h} = 1,$$

y $\lim_{x\to x_0, x\in S} f(x) = L$. En tal caso se escribirá $appr_{x\to x_0} f(x) = L$.

(2) Decimos que f es ***aproximadamente continua*** *si para cada $x_0 \in \mathbb{R}$, $applim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

Observemos que las funciones continuas de $\mathbb{X}$ a cualquier espacio topológico son justo las funciones aproximadamente continuas. Para un estudio más concreto de estas funciones puede consultarse [10] y [6]. El lema nos dice que podemos "separar" cierto tipo de conjuntos cuya unión es $\mathbb{R}$ mediante una función aproximadamente continua.

Lema 2.7. *Para cada conjunto E τ-abierto y F_σ-euclideano, existe una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aproximadamente continua tal que $0 < f(x) \leq 1$ para toda $x \in E$ y $f(x) = 0$ para toda $x \notin E$.*

El próximo lema nos dice que si tenemos a los reales separados en conjuntos adecuados, de nuevo los podemos separar por una función aproximadamente continua.

Lema 2.8. *Sean R_1, R_2 y H subconjuntos de $\mathbb{R}$ disjuntos por pares tales que*

(a) $R_1 \cup R_2 \cup H = \mathbb{R}$ y

(b) $R_1 \cup H$ y $R_2 \cup H$ son τ-abiertos y F_σ-euclideanos.

Entonces existe una función aproximadamente continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$, si $x \in R_1$; $0 < f(x) < 1$ si $x \in H$; y $f(x) = 1$ si $x \in R_2$.

2.1.2. Demostración

Teorema 2.9. $(\mathbb{X}, \tau)$ *es completamente regular.*

Demostración. Sean $x_0 \in \mathbb{X}$ y $F \subset \mathbb{X}$ τ-cerrado tal que $x_0 \notin F$. Sabemos que F es medible, entonces existe un G_δ-euclideano G tal que $F \subset G$ y $\lambda(G \setminus F) = 0$ y $x_0 \notin G$ (Teorema B.4). Sean $R_1 = G$, $R_2 = \{x_0\}$ y $H = \mathbb{X} \setminus (R_1 \cup R_2)$. Observemos que son ajenos por pares y

- $R_1 \cup R_2 \cup H = \mathbb{R}$,
- $R_1 \cup H$ es τ-abierto pues $R_1 \cup H = \mathbb{X} \setminus \{x_0\}$ es abierto euclideano, además, es un F_σ-euclideano y
- $R_2 \cup H = \mathbb{X} \setminus G$ es τ-abierto: $(\mathbb{X} \setminus G) \cup (G \setminus F) = \mathbb{X} \setminus F$ es τ-abierto y $\lambda((\mathbb{X} \setminus F) \triangle (\mathbb{X} \setminus G)) = \lambda((G \setminus F) \cup (F \setminus G)) = 0$, luego $\Phi(\mathbb{X} \setminus F) = \Phi(\mathbb{X} \setminus G)$ con lo que tenemos $\mathbb{X} \setminus G \subset (\mathbb{X} \setminus G) \cup (G \setminus F) \subset \Phi(\mathbb{X} \setminus F) = \Phi(\mathbb{X} \setminus G)$. Más aún, es un F_σ-euclideano pues es el complemento de un G_δ-euclideano.

Así, por el Lema 2.8, existe una función aproximadamente continua f tal que $f(y) = 0$ si $y \in R_1 = G$, y $0 < f(y) < 1$ si $y \in H$, y $f(x_0) = 1$, con lo que tenemos el resultado. ■

Observación 2.10. *Notemos que podemos cambiar x_0 por un cerrado euclideano.*

Esta fue la demostración dada por Goffman en [10], quien lo manejó de manera más general.

2.2. τ-interior

En esta sección analizaremos como es el interior de un conjunto cualquiera en $\mathbb{X}$. Un concepto importante que nos ayudará a esto es el *núcleo medible* de un conjunto, que informalmente es un conjunto medible "maximal" contenido en el conjunto.

Proposición 2.11. *Sea $A \subset \mathbb{R}$ un arbitrario. Existe $B \subset \mathbb{R}$ medible tal que $B \subset A$ y $\lambda(B) = \lambda_*(A)$.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $B_n \subset A$ medible tal que $\lambda(B_n) \geq \lambda_*(A) - \frac{1}{n}$. De esta manera, si $B := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$, $\lambda(B) \geq \lambda_*(A) \geq \lambda(B)$. Por lo tanto $\lambda(B) = \lambda_*(A)$. ∎

De esta manera, tenemos la siguiente definición.

Definición 2.12. *Dado A un conjunto cualquiera, definimos un* ***núcleo medible*** *de A como un medible $B \subset A$ tal que $\lambda(B) = \lambda_*(A)$.*

Observación 2.13. *El núcleo medible de un conjunto no necesariamente es único. Sin embargo, si F_1 y F_2 son núcleos medibles de A entonces $F_1 \sim F_2$ pues $\lambda(F_1) \leq \lambda(F_1 \cup F_2) \leq \lambda_*(A) = \lambda(F_1)$. Luego $\lambda(F_1) = \lambda(F_1 \cup F_2)$ y por lo tanto $\lambda(F_2 \setminus F_1) = 0$. Análogamente $\lambda(F_1 \setminus F_2) = 0$. Esto nos dice que $\Phi(F_1) = \Phi(F_2)$.*

Con lo anterior, podemos dar una descripción de $int_\tau(A)$ en términos de núcleos medibles y de Φ.

En el resto de la sección, dados $x \in \mathbb{X}$ y $h > 0$, haremos $I_h = [x-h, x+h]$. La siguiente proposición da una condición suficiente para que un punto esté en el interior de un conjunto. Recordemos que por la Observación 1.10, $\Phi(M)$ es medible para cualquier medible M.

Proposición 2.14. *Sea $A \subset \mathbb{X}$ y sea $B \subset A$ un núcleo medible.*

(1) Si $x \in A$ es tal que $\lim_{h\to 0^+} \frac{\lambda_*(A\cap[x-h,x+h])}{2h} = 1$, entonces $x \in A \cap \Phi(B)$.

(2) $A \cap \Phi(B) \subset \mathbb{X}$ es medible y $A \cap \Phi(B) \subset \Phi(A \cap \Phi(B))$.

(3) Si $x \in A$ es tal que $\lim_{h\to 0^+} \frac{\lambda_*(A\cap[x-h,x+h])}{2h} = 1$, entonces $x \in int_\tau(A)$.

Demostración. (1) Veamos que si $h > 0$ entonces $\lambda_*(A \cap I_h) = \lambda(B \cap I_h)$. Sabemos que $\lambda(B \cap I_h) \leq \lambda_*(A \cap I_h)$, pues λ_* es monótona (Teorema B.5). Además $\lambda_*(A \cap I_h) + \lambda_*(A \setminus I_h) \leq \lambda_*(A) = \lambda(B) = \lambda(B \cap I_h) + \lambda(B \setminus I_h)$. Entonces

$$0 \leq \lambda_*(A \setminus I_h) - \lambda(B \setminus I_h) \leq \lambda(B \cap I_h) - \lambda_*(A \cap I_h),$$

con lo que $\lambda_*(A \cap I_h) = \lambda(B \cap I_h)$. Por ello,

$$1 = \lim_{h\to 0^+} \frac{\lambda_*(A \cap [x-h, x+h])}{2h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\lambda(B \cap [x-h, x+h])}{2h} = d(x, B).$$

(2) De la misma forma que en (1) y por el TDL, tenemos que

$$\lambda_*(A \cap \Phi(B)) = \lambda(B \cap \Phi(B)) = \lambda(B).$$

Así,

$$\lambda^*(A \cap \Phi(B)) \leq \lambda^*(\Phi(B)) = \lambda(\Phi(B)) = \lambda(B) = \lambda_*(A \cap \Phi(B)),$$

es decir, $A \cap \Phi(B)$ es medible. Ahora, veamos la contención.

Sean $x \in A \cap \Phi(B)$ y $h > 0$. Demostraremos que $\lambda(B \cap I_h) = \lambda(A \cap \Phi(B) \cap I_h)$, pues de esta manera obtendremos que

$$d(x, A \cap \Phi(B)) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\lambda(A \cap \Phi(B) \cap [x-h, x+h])}{2h} = 1.$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
\lambda(A \cap \Phi(B) \cap I_h) &= \lambda(A \cap \Phi(B) \cap I_h \setminus [\Phi(B) \setminus B]) \text{ por el TDL} \\
&= \lambda(A \cap \Phi(B) \cap I_h \setminus [(\mathbb{X} \setminus \Phi(B)) \cup B] \\
&= \lambda(A \cap \Phi(B) \cap I_h \cap B) \\
&= \lambda(\Phi(B) \cap B \cap I_h) \\
&= \lambda(\Phi(B) \cap B \cap I_h) + \lambda([B \setminus \Phi(B)] \cap I_h) \\
&= \lambda(B \cap I_h).
\end{aligned}$$

De aquí que $A \cap \Phi(B) \subset \Phi(A \cap \Phi(B))$.

(3) Por (1) y (2) tenemos el resultado.

■

Finalmente, obtenemos una descripción del interior bastante agradable.

Teorema 2.15. *Sea $A \subset \mathbb{X}$ y sea $B \subset A$ un núcleo medible. Entonces*

$$int_\tau(A) = A \cap \Phi(B).$$

Demostración. Por la proposición anterior, $A \cap \Phi(B) \subset int_\tau(A)$. Ahora, sea $x \in int_\tau(A)$. Como éste es abierto, $x \in \Phi(int_\tau(A))$ luego $\lim_{h \to 0^+} \frac{\lambda(int_\tau(A) \cap I_h)}{2h} = 1$. Por otro lado, si $h > 0$,

$$\frac{\lambda(int_\tau(A) \cap I_h)}{2h} = \frac{\lambda_*(int_\tau(A) \cap I_h)}{2h} \leq \frac{\lambda_*(A \cap I_h)}{2h} \leq 1,$$

luego $\lim_{h\to 0^+} \frac{\lambda_*(A\cap I_h)}{2h} = 1$. Por lo tanto, por (1) de la proposición anterior, $x \in A \cap \Phi(B)$. ■

Observación 2.16. *Si $A \subset \mathbb{X}$ es medible, $int_\tau(A) = A \cap \Phi(A)$. Más aún, todo medible no nulo tiene interior no vacío.*

Ejemplo 2.17. *$\mathbb{Q}$ es denso en ninguna parte: ya sabemos que $\mathbb{Q}$ es cerrado; por otro lado $int_\tau(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \cap \Phi(\mathbb{Q}) = \emptyset$, pues $\mathbb{Q}$ es nulo.*

2.3. τ-derivado

Investigaremos el derivado de un conjunto para darnos una idea más concreta de la cerradura en este espacio. Para empezar usaremos un lema meramente técnico.

Lema 2.18. *Si $M \subset \mathbb{X}$ es medible tal que $\lambda(M) < \infty$ y $B \subset \mathbb{X}$ cualquiera. Entonces*

$$\lambda(M) = \lambda^*(M \setminus B) + \lambda_*(M \cap B). \tag{2.3}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\lambda(M) - \lambda^*(M \setminus B) &= \lambda(M) - \inf\{\lambda(G) : G \supseteq M \setminus B \text{ medible}\} \\
&= \lambda(M) - \inf\{\lambda(G) : M \supseteq G \supseteq M \setminus B, \quad \text{con } G \text{ medible}\} \\
&= \lambda(M) - \inf\{\lambda(M \setminus F) : F \subset M \cap B \text{ medible}\} \\
&= \sup\{\lambda(F) : F \subset M \cap B \text{ medible}\} \\
&= \lambda_*(M \cap B).
\end{aligned}$$

■

Esto es suficiente para caracterizar a un punto de acumulación, como veremos a continuación.

Teorema 2.19. *Sean $A \subset \mathbb{X}$ y $x \in \mathbb{X}$. Entonces*

$$x \in der_\tau(A) \text{ si y sólo si } \limsup_{h\to 0^+} \frac{\lambda^*(A \cap [x-h, x+h])}{2h} > 0.$$

Demostración. Primero supongamos que $x \in \mathbb{X}$ es tal que $\limsup_{h\to 0^+} \frac{\lambda^*(A\cap I_h)}{2h} = 0$, entonces $\lim_{h\to 0^+} \frac{\lambda^*(A\cap I_h)}{2h} = 0$. Por el lema anterior, si $h > 0$,

$$\lambda^*(A \cap I_h) + \lambda_*((\mathbb{X} \setminus A) \cap I_h) = \lambda(I_h) = 2h,$$

luego,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\lambda_*((\mathbb{X} \setminus A) \cap I_h)}{2h} = 1 = \lim_{h\to 0^+} \frac{\lambda_*([(\mathbb{X} \setminus A) \cup \{x\}] \cap I_h)}{2h},$$

donde la última igualdad viene de

$$\lambda_*((\mathbb{X} \setminus A) \cap I_h) + \lambda_*(\{x\} \cap I_h) \leq \lambda_*([(\mathbb{X} \setminus A) \cup \{x\}] \cap I_h).$$

Usando (3) de la Proposición 2.14, obtenemos que $x \in int_\tau((\mathbb{X} \setminus A) \cup \{x\})$, con lo que podemos concluir que $x \notin der_\tau(A)$, pues $int_\tau((\mathbb{X} \setminus A) \cup \{x\}) \cap A \setminus \{x\} = \emptyset$. Note que si suponemos que $x \in int_\tau((\mathbb{X} \setminus A) \cup \{x\})$, podemos concluir que

$$\limsup_{h\to 0^+} \frac{\lambda^*(A \cap I_h)}{2h} = 0$$

haciendo los pasos inversos en la demostración anterior. Así, sólo nos resta observar que si $x \notin der_\tau(A)$ entonces $x \in int_\tau((\mathbb{X} \setminus A) \cup \{x\})$. En efecto, si $x \notin der_\tau(A)$, existe $U \in \tau$ tal que $x \in U$ y $U \cap A \setminus \{x\} = \emptyset$, por lo que $x \in U \subset \mathbb{X} \setminus A \cup \{x\}$. ■

Observación 2.20. *Si $A \subset \mathbb{X}$ es medible, entonces $\Phi(A) \subset der_\tau(A) \subset cl_\tau(A)$. También cabe destacar que la cerradura de cualquier conjunto es medible pues los abiertos son medibles.*

Ejemplo 2.21. *De nuevo, usaremos a $\mathbb{Q}$ como ejemplo. Veamos que $\mathbb{Q}$ es cerrado con una prueba diferente. Sólo basta con observar que si $x \in \mathbb{X} \setminus \mathbb{Q}$,*

$$\limsup_{h\to 0^+} \frac{\lambda^*(\mathbb{Q} \cap [x-h, x+h])}{2h} = 0.$$

Con el Teorema 2.19, podemos decir algo acerca de la cerradura de dos subconjuntos, uno contenido en el otro, con la misma medida exterior y acotados.

Proposición 2.22. *Sean $E \subset F \subset \mathbb{X}$ subconjuntos tales que F es acotado y $\lambda^*(E) = \lambda^*(F)$. Entonces $der_\tau(E) = der_\tau(F)$*

Demostración. Sea $x \in der_\tau(F)$. Primero observemos que si tenemos un intervalo $[x-h, x+h]$, con $h > 0$, entonces $\lambda^*(F \cap [x-h, x+h]) = \lambda^*(E \cap [x-h, x+h])$. Sabemos que $\lambda^*(F \cap [x-h, x+h]) \geq \lambda^*(E \cap [x-h, x+h])$ por monotonía; por otro lado, es un hecho conocido (Teorema B.6) que

$$\lambda^*(E) = \lambda^*(E \cap [x-h, x+h]) + \lambda^*(E \setminus [x-h, x+h]) \text{ y}$$

$$\lambda^*(F) = \lambda^*(F \cap [x-h, x+h]) + \lambda^*(F \setminus [x-h, x+h]),$$

así, como F es acotado, tenemos

$$\begin{aligned}&\lambda^*(E \cap [x-h, x+h]) - \lambda^*(F \cap [x-h, x+h]) \\ &= \lambda^*(F \setminus [x-h, x+h]) - \lambda^*(E \setminus [x-h, x+h]) \geq 0,\end{aligned}$$

lo que nos da la igualdad.

De esta manera, como $x \in der_\tau(F)$, ocurre que, por Teorema 2.19,

$$\limsup_{h \to 0^+} \frac{\lambda^*(E \cap [x-h, x+h])}{2h} = \limsup_{h \to 0^+} \frac{\lambda^*(F \cap [x-h, x+h])}{2h} > 0,$$

luego $x \in der_\tau(E)$. ■

Ejemplo 2.23. *Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{X}$, con $a < b$, se cumple que*

$$cl_\tau(a, b) = [a, b].$$

En efecto, por la proposición anterior, $\lambda^*((a, b)) = \lambda^*([a, b])$, así que $der_\tau(a, b) = der_\tau[a, b] = [a, b]$, donde esta última igualdad es por Teorema 2.19 y $d(a, [a, b]) = \frac{1}{2} = d(b, [a, b])$. De esta manera $cl_\tau(a, b) = (a, b) \cup der_\tau(a, b) = [a, b]$.

2.4. Nulos en $(\mathbb{X}, \tau)$

En esta sección estudiaremos los conjuntos de medida cero, siendo muy importantes para la topología. Primero, observemos que el hecho de que $\mathbb{Q}$ sea cerrado en $\mathbb{X}$, no es casualidad.

Observación 2.24. *Si $B \subset \mathbb{X}$ es un conjunto nulo entonces es cerrado. En efecto, sea $x \in \mathbb{X} \setminus B$. Para toda $h > 0$,*

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{h\to 0^+} \frac{\lambda(\mathbb{X} \cap [x-h, x+h])}{2h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \left(\frac{\lambda(B \cap [x-h, x+h])}{2h} + \frac{\lambda(\mathbb{X} \setminus B \cap [x-h, x+h])}{2h} \right) \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{\lambda\Big(\mathbb{X} \setminus B \cap [x-h, x+h]\Big)}{2h} = d(x, \mathbb{X} \setminus B). \end{aligned}$$

Es decir $x \in \Phi(\mathbb{X} \setminus B)$. Por lo tanto B es cerrado.

El siguiente teorema caracteriza a los conjuntos nulos, siendo exactamente los cerrados discretos. Más aún, son justamente los conjuntos de primera categoría. Esto es parte fundamental en lo que resta del trabajo.

Teorema 2.25. *Las siguientes condiciones son equivalentes para $Y \subset \mathbb{X}$:*

(1) Y es un conjunto nulo,

(2) Y es denso en ninguna parte,

(3) Y es de primera categoría,

(4) Y es cerrado discreto.

Demostración. *(1) → (2)* : Si Y es nulo, por la observación anterior, Y es cerrado. Además $Y \sim \emptyset$. Entonces $\Phi(Y) = \Phi(\emptyset) = \emptyset$. Por lo tanto por la Observación 2.16, $int_\tau(cl\tau(Y)) = int_\tau(Y) = Y \cap \Phi(Y) = \emptyset$.

(2) → (3) : Es claro.

(3) → (1) : Supongamos que $Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, con A_n denso en ninguna parte. Tenemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\emptyset = int_\tau(cl\tau(A_n)) = cl_\tau(A_n) \cap \Phi(cl_\tau(A_n))$. Así, como $cl_\tau(A_n) = \Big[cl_\tau(A_n) \cap \Phi(cl_\tau(A_n))\Big] \cup \Big[cl_\tau(A_n) \setminus \Phi(cl_\tau(A_n))\Big]$ y por TDL, $cl_\tau(A_n)$ es nulo y por lo tanto A_n lo es. Luego Y es nulo.

(1) → (4) : Si Y es nulo, por la Observación 2.24, Y es cerrado. Además, para toda $y \in Y$, $Y \setminus \{y\}$ es nulo y por lo tanto cerrado. De esta manera $(\mathbb{X} \setminus Y) \cup \{y\}$ es abierto y entonces $\{y\}$ es abierto en Y, es decir, Y es discreto.

(4) → (1) : Si Y es cerrado discreto y es tal que $\lambda(Y) > 0$, existe $W \subset Y$ no medible (Teorema B.7). Por un lado W no puede ser cerrado pues, de lo contrario, su complemento debería ser medible por como está definida la topología. Por otro lado, como Y es discreto, W es cerrado en Y y por lo tanto cerrado en $\mathbb{X}$, lo cual es una contradicción. Entonces Y es nulo. ■

Con estas útiles equivalencias tenemos muchas propiedades que podemos descartar fácilmente en $\mathbb{X}$.

Corolario 2.26. *$\mathbb{X}$ no es ni separable ni primero numerable ni Lindelöf, por lo tanto tampoco es metrizable.*

Demostración. Por el teorema anterior anterior, todo nulo es cerrado discreto, por lo que $\mathbb{X}$ no puede tener un denso numerable. Además, si $\mathbb{X}$ tuviera un punto x con base local numerable, entonces existiría un conjunto numerable que contiene a x y siendo este un punto de acumulación de tal conjunto (simplemente tomamos un punto de cada vecindad de la base local), lo que contradice que todo numerable es discreto. Finalmente, notemos que el conjunto de Cantor es nulo y por lo tanto es cerrado discreto en $\mathbb{X}$. De esta manera $\mathbb{X}$ no puede ser Lindelöf pues contiene un cerrado discreto no numerable ■

Observación 2.27. *Dado que $\mathbb{X}$ no es primero numerable, tampoco es segundo numerable.*

Enseguida probaremos que $\mathbb{X}$ es hereditariamente Baire, no sin antes hacer una observación acerca de subespacios densos en ninguna parte y la preservación de esta propiedad en todo el espacio.

Observación 2.28. *Si Y es un espacio y $B \subset A \subset Y$ con B no vacío denso en ninguna parte en A entonces es denso en ninguna parte en Y: si existe $V \subset cl_Y(B)$ abierto no vacío, entonces $\emptyset \neq A \cap V \subset A \cap cl_Y(B) = cl_A(B)$ lo que es una contradicción.*

Observemos de la prueba anterior que si además A es abierto, B es denso en ninguna parte en A si B es denso en ninguna parte en Y.

Una consecuencia de todo lo anterior es que todos los subconjuntos de $\mathbb{X}$ son Baire.

Corolario 2.29. *$\mathbb{X}$ es hereditariamente Baire.*

Demostración. Sea $Y \subset \mathbb{X}$ un subespacio. Sea $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ familia de cerrados densos en ninguna parte en Y. Entonces por la Observación 2.28 también son densos en ninguna parte en $\mathbb{X}$, por lo que son nulos y por lo tanto $C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ es nulo y por consiguiente es cerrado discreto en $\mathbb{X}$. Si existe $x \in int_Y(C)$, entonces existe un abierto en Y, U tal que $x \in U \subset C$; por otro lado existe un abierto en $\mathbb{X}$, V, tal que $x \in V$ y $V \cap C \setminus \{x\} = \emptyset$. Así $\{x\} = (V \cap Y) \cap U$ es abierto en Y, lo que es una contradicción, pues existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in C_n$ y C_n es cerrado denso en ninguna parte, con lo que acabamos la prueba. ■

2.5. $(\mathbb{X}, \tau)$ es conexo y no es normal

Podemos caracterizar los puntos interiores, exteriores y de acumulación de manera interesante mediante una función continua. Esto nos ayudará a ver la conexidad de $\mathbb{X}$, así como ver la relación de algunos subconjuntos con la topología usual de $\mathbb{R}$.

Teorema 2.30. *Para cada $M \subset \mathbb{X}$ medible, sea*

$$f_M(x) = \int_0^x \chi_M(t)dt.$$

Entonces

(1) $x_0 \in int_\tau(M)$ si y sólo si $f'_M(x_0) = 1$ y $x_0 \in M$,

(2) $x_0 \in ext_\tau(M)$ si y sólo si $f'_M(x_0) = 0$ y $x_0 \in \mathbb{X} \setminus M$, y

(3) $x_0 \in der_\tau(M)$ si y sólo si una de las derivadas laterales de f_M en x_0 es distinta de 0.

Demostración. (1) Por Teorema 2.15 y Observación 1.7 tenemos que

$$
\begin{aligned}
& x_0 \in int_\tau(M) \\
& \text{si y sólo si } \lim_{h\to 0^+} \frac{\lambda(M\cap[x_0-h,x_0+h])}{2h} = 1 \text{ y } x_0 \in M \\
& \text{si y sólo si } \lim_{h\to 0^+} \left(\frac{\lambda(M\cap[x_0-h,x_0])}{h} + \frac{\lambda(M\cap[x_0,x_0+h])}{h}\right) = 2 \\
& \text{si y sólo si } \lim_{h\to 0^+} \frac{\lambda(M\cap[x_0-h,x_0])}{h} = 1 = \lim_{h\to 0^+} \frac{\lambda(M\cap[x_0,x_0+h])}{h} \\
& \text{si y sólo si } \lim_{h\to 0^+} \frac{\int_{x_0-h}^{x_0} \chi_M(t)dt}{h} = 1 = \lim_{h\to 0^+} \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} \chi_M(t)dt}{h} \\
& \text{si y sólo si } \lim_{h\to 0^+} \frac{f_M(x_0)-f_M(x_0-h)}{h} = 1 = \lim_{h\to 0^-} \frac{f_M(x_0+h)-f_M(x_0)}{h} \\
& \text{si y sólo si } f_M'(x_0) = 1.
\end{aligned}
$$

(2) $x_0 \in ext_\tau(M)$ si y sólo si $x_0 \in int_\tau(\mathbb{X}\setminus M)$ si y sólo si

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\lambda(\mathbb{X}\setminus M\cap[x_0-h,x_0+h])}{2h} = 1$$

y $x_0 \in \mathbb{X}\setminus M$ si y sólo si $\lim_{h\to 0^+} \frac{\lambda(M\cap[x_0-h,x_0+h])}{2h} = 0$ si y sólo si $f_M'(x_0) = 0$.

(3) Las dos derivadas son 0 si y sólo si $f_M'(x_0) = 0$ si y sólo si

$$\limsup_{h\to 0^+} \frac{\lambda^*(M\cap[x_0-h,x_0+h])}{2h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\lambda(M\cap[x_0-h,x_0+h])}{2h} = 0$$

si y sólo si, por Teorema 2.19, $x_0 \notin der_\tau(A)$.

■

Lo primero que podemos ver con estas equivalencias es la conexidad.

Observación 2.31. *Notemos que f_M es continua pues*

$$|f_M(x) - f_M(y)| \leq \lambda(M)\,|x-y|\,.$$

Corolario 2.32. $(\mathbb{X},\tau)$ *es conexo.*

Demostración. Si existiera $A \neq \emptyset$ τ-abierto con $\mathbb{X} \setminus A$ τ-abierto, entonces, por el teorema anterior, f'_A es 1 en A y 0 en $\mathbb{X} \setminus A$. Pero, por el Teorema de Darboux (si $h : [x, y] \to \mathbb{R}$ es derivable, entonces h' tiene la propiedad del valor intermedio), f'_A tiene la propiedad del valor intermedio, por lo que existiría $x \in \mathbb{X}$ tal que $f'_A(x) = \frac{1}{2}$, lo que es una contradicción. ■

Ahora veamos como se relacionan los borelianos de $\mathbb{X}$ con la topología usual de $\mathbb{R}$.

Proposición 2.33.

(1) Los conjuntos de Borel de $\mathbb{X}$ son exactamente los conjuntos Lebesgue medibles.

(2) Todo conjunto de Borel de $\mathbb{X}$ es un G_δ-euclidiano y por lo tanto también lo es en $\mathbb{X}$.

(3) Todo abierto regular en $\mathbb{X}$ es un conjunto de Borel euclidiano. Más aún, es un $F_{\sigma\delta}$-euclidiano (intersección contable de conjuntos F_σ).

Demostración. (1) Ya que todo τ-abierto es medible, todo boreliano de $\mathbb{X}$ también lo es. Ahora sea M medible. Por la Observación 2.16, $M \cap \Phi(M)$ es abierto, mientras que $M \setminus \Phi(M)$ es cerrado por la Observación 2.24. Así, como $M = [M \cap \Phi(M)] \cup [M \setminus \Phi(M)]$, también es boreliano.

(2) Sea M boreliano de $\mathbb{X}$. Por (1), es medible, por lo que existe una sucesión $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de abiertos euclidianos tal que $M \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ y $\lambda(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \setminus M) = 0$. Hacemos $U'_k = U_k \setminus (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \setminus M)$, de esta manera $\bigcap U'_k = M$ con U'_k abierto pues es un abierto menos un cerrado. Es decir, M es G_δ-euclidiano.

(3) Sea $A = int_\tau(cl_\tau(A))$. Veamos que $A = \{x \in \mathbb{X} : f'_A(x) = 1\}$. Sabemos que $cl_\tau(A) \setminus A$ es denso en ninguna parte pues $int_\tau(cl_\tau(A) \cap \mathbb{X} \setminus A) = int_\tau(cl_\tau(A)) \cap int_\tau(\mathbb{X} \setminus A) = A \cap int_\tau(\mathbb{X} \setminus A) = \emptyset$. Por el Teorema 2.25, $cl_\tau(A) \setminus A$ es nulo y por lo tanto $f_A = f_{cl_\tau(A)}$(Teorema B.8). Usando el Teorema 2.30, podemos decir que

$$A = int_\tau(cl_\tau(A)) = \{x \in cl_\tau(A) : f'_{cl_\tau(A)}(x) = 1\} = \{x \in cl_\tau(A) : f'_A(x) = 1\}.$$

Además, si $x_0 \notin cl_\tau(A)$, por (3) del Teorema 2.30, $f'_A(x_0) = 0$, es decir, $x_0 \notin \{x \in \mathbb{X} : f'_A(x) = 1\}$. Así, $\{x \in \mathbb{X} : f'_A(x) = 1\} \subset cl_\tau(A)$, lo que nos lleva a

$$\{x \in \mathbb{X} : f'_A(x) = 1\} = \{x \in cl_\tau(A) : f'_A(x) = 1\},$$

pues la otra contención evidentemente se da. Luego

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{X} : f'_A(x) = 1\} \\ &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{\substack{|m|\geq n \\ m\in\mathbb{Z}}} \left\{ x \in \mathbb{X} : \left| \frac{f_A(x+\frac{1}{m}) - f_A(x)}{\frac{1}{m}} - 1 \right| \leq \frac{1}{n} \right\}, \end{aligned}$$

es un boreliano y en particular un $F_{\sigma\delta}$-euclideano.

■

Con (3), ya podemos mostrar que $\mathbb{X}$ no es normal, prueba dada por Scheinberg en [17].

Corolario 2.34. $(\mathbb{X}, \tau)$ *no es normal.*

Demostración. Primero veamos que si tenemos dos abiertos ajenos A y B en un espacio topológico cualquiera, entonces $int(cl(A)) \cap int(cl(B)) = \emptyset$. En efecto, si $x \in int(cl(A)) \cap int(cl(B)) = int(cl(A) \cap cl(B))$, existe U abierto tal que $x \in U \subset cl(A) \cap cl(B)$, por lo que $U \cap A$ es un abierto no vacío contenido en $cl(A) \cap cl(B)$, por lo que $U \cap A \cap B \neq \emptyset$. De esta manera, por (3) de la proposición anterior, concluimos que si dos conjuntos están separados por dos τ-abiertos, entonces también los podemos separar con dos borelianos estándar.
Ahora, consideremos el conjunto de Cantor usual, $\mathcal{C}$ (el que resulta de dividir el segmento unitario en tres partes de manera inductiva). Es un hecho conocido que todo conjunto no numerable de $\mathbb{R}$ contiene un no boreliano (Teorema B.9). Así pues, sea M tal conjunto contenido en $\mathcal{C}$ y sea $N = \mathcal{C} \backslash M$. Como $\mathcal{C}$ es nulo, también lo son M y N, por lo que ambos son τ-cerrados. Si M y N son separados por dos τ-abiertos, entonces también los podemos separar con dos borelianos estándar, supongamos que A es el boreliano tal que $M \subset A$. Luego, esta contención es propia y por lo tanto $A \cap N \neq \emptyset$, lo que es una contradicción. ■

Sabemos que un abierto regular es un abierto A, tal que $A = int(cl(A))$. Algo que podemos decir del tamaño de $RO(\mathbb{X})$ (el conjunto de abiertos regulares) es que, como al menos tiene a los intervalos abiertos usuales, $2^{\aleph_0} \leq |RO(\mathbb{X})|$. Por otro lado, sabemos que la topología usual tiene tamaño $2^{\aleph_0}$ (Teorema A.5); de esta manera, como cada abierto regular es un $F_{\sigma\delta}$ euclidiano, $|RO(\mathbb{X})| \leq 2^{\aleph_0}$. En conclusión tenemos el siguiente

Corolario 2.35. $|RO(\mathbb{X})| = 2^{\aleph_0}$.

Los abiertos regulares en este espacio son bonitos, pues se ven como abiertos sin "impurezas", lo que se formaliza en la siguiente proposición.

Proposición 2.36. *$A \subset \mathbb{X}$ es abierto regular si y sólo si $\Phi(A) = A$.*

Demostración. Por la Observación 2.20 y la Observación 2.16, si A es abierto regular, entonces

$$\Phi(A) \subset cl_\tau(A) \cap \Phi(A) \subset cl_\tau(A) \cap \Phi(cl_\tau(A)) = int_\tau(cl_\tau(A)) = A \subset \Phi(A),$$

por lo que $\Phi(A) = A$. Para la otra dirección, como $\Phi(A) = A$, A es abierto y por lo tanto $cl_\tau(A) \setminus A$ es un cerrado de interior vacío, por lo que también es nulo. De esta manera $\Phi(A) = \Phi(cl_\tau(A))$. Luego

$$A \subset int_\tau(cl_\tau(A)) = cl_\tau(A) \cap \Phi(cl_\tau(A)) = cl_\tau(A) \cap \Phi(A) = \Phi(A) = A,$$

lo que concluye la prueba. ∎

Este resultado es interesante pues nos dice que el álgebra de los abiertos regulares de $\mathbb{X}$, $RO(\mathbb{X})$, se puede ver de la siguiente manera: sabemos que si tomamos dos medibles A y B, tales que $A \sim B$ entonces $\Phi(A) = \Phi(B)$, por 1.11, pero también sabemos que $\Phi(\Phi(A)) = \Phi(A)$. En otras palabras, dos medibles que difieran en un conjunto de medida cero, tienen asociado un mismo abierto regular. Es decir, el álgebra $RO(\mathbb{X})$ es el álgebra de los medibles módulo nulos.

También es curioso comparar este conjunto de abiertos con la topología, pues por la Proposición 1.13, los abiertos se ven de la forma $\Phi(M) \setminus N$, con M medible y N nulo. Así, para conseguir un abierto regular, simplemente tomamos un abierto y le pegamos el nulo correspondiente.

Capítulo 3

Otras propiedades

3.1. $\mathbb{X}$ satiface la *ccc*

El objetivo de esta sección, como bien dice el título, es demostrar que $\mathbb{X}$ tiene la *condición de la cadena contable*; es decir, cualquier familia de abiertos ajenos dos a dos, es contable, propiedad que uno debe preguntarse con naturalidad si se cumple cuando se esta enfrentando a un nuevo espacio. Con ello podremos escribir a los subconjuntos de $\mathbb{X}$ de una manera particular.

Antes, recordemos algunos conceptos importantes. Una **medida de Borel** en un espacio topológico (Y, σ) es una medida μ en $\mathcal{B}(\sigma)$ (σ-álgebra más pequeña que contiene a σ) que es localmente finita, es decir, para cada $y \in Y$ existe una vecindad $U \in \mathcal{B}(\sigma)$ con $\mu(U) < +\infty$. Además, el **soporte** de una medida, μ, es el conjunto de puntos $y \in Y$ tales que para todo abierto U que contiene a y, $\mu(U) > 0$. También recordemos una definición relevante acerca de familias y puntos en un espacio.

Definición 3.1. *Una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de un espacio Y se llama* ***punto-finita*** *si cada punto $y \in Y$ pertenece a una cantidad finita de elementos en $\mathcal{A}$.*

El siguiente lema se debe a Gardner [8], y nos dice que si tenemos una familia punto-finita, bajo las condiciones adecuadas, sólo una cantidad contable de sus elementos son no nulos. Esas condiciones por suerte las cumple $\mathbb{X}$ y podremos probar que tiene la *ccc* fácilmente.

Lema 3.2. *Sea $(Y, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida, con μ una medida σ-finita. Si $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}$ es familia punto-finita, entonces $\mu(A) > 0$, para una cantidad contable de elementos en $\mathcal{A}$.*

Demostración. Sean $Y_n \subset Y$ tales que $Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$ y $\mu(Y_n) < +\infty$. Veamos que, si $\mathcal{A}' = \{A \in \mathcal{A} : \mu(A) > 0\}$, entonces

$$\mathcal{A}' = \bigcup_{\substack{m\geq 1\\ n\in\mathbb{N}}} \left\{A \in \mathcal{A} : \mu(A\cap Y_n) > \frac{1}{m}\right\}.$$

Por un lado, si $A \in \mathcal{A}'$, $0 < \mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A\cap Y_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A\cap Y_n)$, entonces existe $n \geq 1$ y $m \geq 1$ tales que $\frac{1}{m} < \mu(A\cap Y_n)$. Por otro lado, si $A \in \mathcal{A}$ es tal que $\mu(A\cap Y_n) > \frac{1}{m}$ para algunos enteros positivos m, n, entonces $0 < \mu(A\cap Y_n) \leq \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A\cap Y_n) = \mu(A)$.

Supongamos que $\mathcal{A}'$ es no numerable. Entonces uno de los uniendos de $\mathcal{A}'$ tiene una infinidad de elementos, es decir, existen m_0, n_0 enteros positivos tales que hay una infinidad de elementos $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $\mu(A_n \cap Y_{n_0}) > \frac{1}{m_0}$. Consideremos a $B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} (A_k \cap Y_{n_0})$. De esta manera, como para toda $k \in \mathbb{N}$, $\mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}(A_k\cap Y_{n_0})\right) \geq \frac{1}{m_0}$, $\mu(B) \geq \frac{1}{m_0}$, por lo que $B \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción pues si existe $x \in B$, entonces x pertenece a una infinidad de A_k's pero $\mathcal{A}$ es punto-finita. ∎

Es suficiente pedir que el soporte de una medida de Borel sea todo el espacio para garantizar que tiene la *ccc*.

Corolario 3.3. *Sea μ una medida de Borel σ-finita en (Y, σ). Si Y es el soporte de μ, entonces Y satisface la ccc.*

Demostración. Si Y es el soporte de μ, entonces todo abierto cumple que tiene medida estrictamente positiva. Así, si $\mathcal{A}$ es una familia de abiertos disjuntos dos a dos, en particular es familia punto-finita y por lo tanto es a lo más numerable. ∎

Corolario 3.4. $\mathbb{X}$ *satisface la ccc.*

Demostración. Es claro que $\lambda|_{\mathcal{B}(\tau)}$ es un medida de Borel σ-finita en $\mathbb{X}$. Además para cada $x \in \mathbb{X}$, si $x \in U$ con U abierto, existe $h > 0$ tal que $x \in (x-h, x+h) \subset U$, por lo que el soporte de $\lambda|_{\mathcal{B}(\tau)}$ es $\mathbb{X}$. Luego $\mathbb{X}$ tiene la *ccc*. ∎

El corolario que sigue nos da una descripción de un subconjunto cualquiera en $\mathbb{X}$, en términos de un subespacio *ccc* y un cerrado discreto, que nos resultará útil después. Este hecho fue probado por F.D. Tall [20].

Corolario 3.5. *Todo $Y \subset \mathbb{X}$ es la unión de un ccc y un cerrado discreto.*

Demostración. Observemos que $Y = [Y \cap int_\tau(cl_\tau(Y))] \cup [Y \cap (cl_\tau(Y) \setminus int_\tau(cl_\tau(Y)))]$. Es un hecho conocido que la propiedad *ccc* se hereda a abiertos y densos (Teorema A.6), por lo que el primer uniendo es *ccc*: $int_\tau(cl_\tau(Y))$ es abierto y $Y \cap int_\tau(cl_\tau(Y))$ es denso en $int_\tau(cl_\tau(Y))$. Además, como $cl_\tau(Y) \setminus int_\tau(cl_\tau(Y))$ es denso en ninguna parte, $Y \cap (cl_\tau(Y) \setminus int_\tau(cl_\tau(Y)))$ también lo es, por lo que es cerrado discreto y tenemos el resultado. ■

Observación 3.6. *Notemos que la unión $Y = [Y \cap int_\tau(cl_\tau(Y))] \cup [Y \cap (cl_\tau(Y) \setminus int_\tau(cl_\tau(Y)))]$ es disjunta y el subespacio ccc es abierto en Y.*

Sorprendentemente, para que un subconjunto sea nulo, basta con que sea discreto, pues tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.7. *Todo subespacio discreto de $\mathbb{X}$ es cerrado.*

Demostración. Dado un subespacio discreto, por el corolario anterior, es unión de un *ccc* y un cerrado, por lo tanto el primero es un conjunto contable y por consiguiente cerrado. ■

3.2. $\mathbb{X}$ es cocompacto

En esta sección veremos lo que es una cotopología y lo que es ser cocompacto. Con estos conceptos probaremos que $\mathbb{X}$ es cocompacto. La razón por la que nos será importante ver esto es porque nos ayudará a probar que el espacio es α-favorable, además de ser interesante por sí misma. La noción de *cotopología*, nació del trabajo de J. de Groot, en [5].

Definición 3.8. *Sea (Y, σ) espacio topológico. A una topología σ^* le llamamos **cotopología** de σ (y $Y^* = (Y, \sigma^*)$ es el **coespacio de** Y) si*

(1) $\sigma^* \subset \sigma$ y

(2) para cada punto x y cada σ-vecindad cerrada V de x, existe una σ-vecindad U de x tal que $U \subset V$ y U es σ^*-cerrado.

Si Y es regular, la segunda condición puede cambiarse por

(2)' Cada punto x tiene una base local cuyos elementos son cerrados en Y^*.

Observación 3.9. *Es claro que cualquier topología es cotopología de sí misma. Notemos además que si σ^* es una cotopología de σ, entonces cualquier topología α con $\sigma^* \subset \alpha \subset \sigma$ es una cotopología de σ.*

Como bien se menciona en [1], el origen de la teminología "co" viene de la forma original de definirse la cotopología, tomando complementos: sea (Y, σ) un espacio regular y sea $\mathcal{U}$ una familia de cerrados tal que cada punto en Y tiene una base local de vecindades cerradas contenida en $\mathcal{U}$. Entonces $\mathcal{U}^* = \{Y \setminus U : U \in \mathcal{U}\}$ es justo una cotopología. No profundizaremos en ello pues no es parte de nuestro objetivo.

Definición 3.10. *Dada cualquier propiedad $\mathcal{P}$ que se le pueda atribuir a un espacio, decimos que Y es co-$\mathcal{P}$ si existe un coespacio Y^* de Y tal que Y^* tiene la propiedad $\mathcal{P}$.*

El siguiente teorema se debe a H. E. White dada en [21].

Teorema 3.11. $(\mathbb{X}, \tau)$ *es cocompacto.*

Demostración. Veamos que $\tau^* = \{U \in \tau_e : (\mathbb{X} \setminus U, \tau_e|_{\mathbb{X}\setminus U})$ es compacto$\}$ es una topología. Sean $A, B \in \tau^*$. Entonces $A \cap B$ tiene complemento compacto pues es unión de dos compactos; del mismo modo, si $\mathcal{A} \subset \tau$ arbitraria no vacía, tenemos que $\mathbb{X} \setminus \bigcup \mathcal{A} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} (\mathbb{X} \setminus A)$ es un cerrado contenido en un compacto, por lo que $\bigcup \mathcal{A} \in \tau$. También notemos que $\tau^* \subset \tau$, pues los abiertos euclidianos son abiertos en $\mathbb{X}$. Ahora probemos que $(\mathbb{X}, \tau^*)$ es compacto. Sea $\mathcal{U}$ cubierta τ^*-abierta de $\mathbb{X}$ y sea $U \in \mathcal{U}$ cualquiera. Existe una subfamilia finita $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ tal que $\mathbb{X} \setminus U \subset \bigcup \mathcal{U}_0$, por lo tanto $\mathcal{U}_0 \cup \{U\}$ es subcubierta finita de $\mathbb{X}$.
Finalmente, veamos que τ^* es una cotopología para $(\mathbb{X}, \tau)$. Sea $x \in \mathbb{X}$ y V una vecindad τ-cerrada de x. Podemos suponer que V está acotada pues de lo contrario, intersecamos V con el intervalo $[x - h, x + h]$, para algún $h > 0$, y lo que resulta es una vecindad τ-cerrada. Como V es medible, por el Teorema 2.5, existe

P perfecto euclidiano (y por lo tanto cerrado euclidiano), tal que $x \in P \subset V$ y $d(x, P) = 1$, es decir, $x \in int_\tau(P)$, por Observación 2.16. Luego, $(P, \tau_e|_P)$ es compacto y por lo tanto P es τ^*-cerrado, lo que concluye la prueba. ■

3.3. $\mathbb{X}$ es fuertemente α-favorable y pseudocompleto

En esta sección probaremos que $\mathbb{X}$ cumple dos propiedades de completez muy particulares, es α-favorable y pseudocompleto. Veamos lo primero.

El siguiente juego es mejor conocido como el **juego de Choquet**, y fue introducido por G. Choquet en [4], quien también introdujo el concepto de α-favorabilidad. Sean Y cualquier espacio topológico, y α y β dos jugadores con β el primero en tirar. Primero β escoge un abierto no vacío. Después podemos tener dos juegos ligeramente diferentes:

(1) el movimiento de cada jugador es escoger un abierto no vacío U en Y, contenido en el abierto previamente escogido por el oponente.

(2) lo mismo que en (1) pero ahora β escoge un punto en U y el abierto que escoja α deberá contener este punto.

Si al final del juego, ocurre que la intersección de los abiertos seleccionados es no vacía, entonces gana α, de lo contrario gana β. Diremos que Y es **α-favorable** o **espacio de Choquet**(respectivamente **fuertemente α-favorable** o **espacio de Choquet fuerte**) si α tiene una estrategia ganadora en (1) (respectivamente (2)), es decir, si α puede elegir una suceción de abiertos $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \neq \emptyset$ sin importar lo que escoja β, en cuyo caso gana α. Formalmente tenemos la siguiente definición.

Definición 3.12. *Diremos que un espacio (Y, σ) es **α-favorable**(o de **Choquet**) si existe una función $f : \sigma \setminus \{\emptyset\} \to \sigma \setminus \{\emptyset\}$ (la estrategia ganadora), tal que $f(U) \subset U$, y para cualquier sucesión U_0, U_2,... definida inductivamente de manera que*

$$U_0 \supset U_1 = f(U_0) \supset U_2 \supset U_3 = f(U_2) \supset ...,$$

se tiene que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \neq \emptyset$.

Un espacio (Y,σ) *es* ***fuertemente*** α***-favorable*** *(o* ***espacio de Choquet fuerte****) si existe una función* $f : \mathcal{P} \to \sigma \setminus \{\emptyset\}$, *donde* $\mathcal{P} = \{(U,x) : U \in \sigma\setminus\{\emptyset\} \ \text{ y } x \in U\}$, *tal que* $f(U,x) \subset U$ *para cualquier sucesión de parejas* (U_0,x_0), (U_2,x_2),... *en* $\mathcal{P}$ *definida inductivamente de manera que*

$$U_0 \supset U_1 = f(U_0,x_0) \supset U_2 \supset U_3 = f(U_2,x_2) \supset ...,$$

se tiene que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \neq \emptyset$.

La siguiente proposición demuestra que $\mathbb{X}$ es fuertemente α-favorable, siendo aquí donde aprovechamos el hecho de que $\mathbb{X}$ es cocompacto.

Proposición 3.13. *Todo espacio regular y cocompacto es fuertemente* α*-favorable*

Demostración. Sea (Y,σ) como en las hipótesis, con σ^* una cotopología compacta de σ y sea $(U,x) \in \mathcal{P}$, con $\mathcal{P}$ igual que en la Definición 3.12. Entonces existe un σ-abierto V tal que $x \in V \subset cl_\sigma(V) \subset U$. Luego, dado que Y es cocompacto, existe una σ-vecindad W de x tal que $x \in W \subset cl_\sigma(V) \subset U$, con W σ^*-cerrado. De esta manera, tenemos definida la función $f : \mathcal{P} \to \sigma\setminus\{\emptyset\}$ tal que $f(U,x) = W$. Debido a que (Y,σ^*) es compacto, si tenemos una sucesión de parejas (U_0,x_0), (U_2,x_2),... tal que $U_0 \supset U_1 = f(U_0,x_0) \supset U_2 \supset U_3 = f(U_2,x_2) \supset ...$, pasa que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_{2n} \neq \emptyset$. ■

Corolario 3.14. $\mathbb{X}$ *es fuertemente* α*-favorable.*

En [4], se demuestra que si un espacio es α-favorable, entonces también es Baire, lo cual ya sabemos (de hecho, es hereditariamente Baire), aunque la prueba es bastante sencilla. De hecho se sabe que un espacio es Baire si y sólo si β no tiene estrategia ganadora.

Ahora veremos que $\mathbb{X}$ es pseudocompleto. Para ello necesitamos las siguientes definiciones, introducidas por J.C. Oxtoby en [15]. Para que esta definición tenga sentido, basta con que el espacio sea regular, no obstante originalmente se le pide que sea ***quasiregular***, es decir, que cada abierto no vacío contenga la cerradura de un abierto no vacío.

Definición 3.15. *Sea* Y *un espacio topológico.*

(1) Una ***pseudobase*** *para Y, es una familia de abiertos no vacíos, $\mathcal{B}$, tal que cada abierto no vacío contiene un elemento de $\mathcal{B}$.*

(2) Decimos que Y es ***pseudocompleto*** *si tiene una sucesión de pseudobases $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tal que para cada suscesión $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $B_n \in \mathcal{B}_n$ y $cl(B_{n+1}) \subset B_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n \neq \emptyset$.*

Cabe destacar que al término *pseudobase* también se le conoce como π-base (ver Definición 4.13). Colocamos ambos nombres para facilitar el reconocimiento de estos términos.

La prueba del siguiente teorema es, de nuevo, dada por a H. E. White en [21], aunque la haremos más explicita.

Teorema 3.16. $\mathbb{X}$ *es pseudocompleto.*

Demostración. Dado un abierto U en $\mathbb{X}$, optaremos por la siguiente notación: $U^* = cl_{\tau_e}U$, $a(U) = \text{ínf}\, U^*$ y $b(U) = \sup U^*$, si existen. Dada $n \in \mathbb{N}$, sea $\mathcal{B}_n$ el conjunto de abiertos U, tales que

(I) $(U^*, \tau_e|_{U^*})$ es compacto,

(II) $b(U) - a(U) < \frac{1}{n}$ y

(III) $\frac{\lambda(U\cap[a(U),b(U)])}{b(U)-a(U)} = \frac{\lambda(U)}{b(U)-a(U)} > 1 - \frac{1}{n}$.

Notemos que (I) nos dice que tiene sentido pedir las condiciones (II) y (III). Ahora, observemos que cada $\mathcal{B}_n$ es base para τ: sean $n \in \mathbb{N}$, $V \in \tau$ y $x \in V$. Entonces existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $2n < M$ y si $m \geq M$,

$$\frac{1}{n} > \left| 1 - \frac{\lambda\left(V \cap \left[x - \frac{1}{m}, x + \frac{1}{m}\right]\right)}{\frac{2}{m}} \right| = 1 - \frac{\lambda\left(V \cap \left[x - \frac{1}{m}, x + \frac{1}{m}\right]\right)}{\frac{2}{m}}.$$

De este modo, si hacemos $U = V \cap \left(x - \frac{1}{M}, x + \frac{1}{M}\right)$, tenemos que el subespacio $(U^*, \tau_e|_{U^*})$ es compacto pues es cerrado euclidiano y acotado, $b(U) - a(U) \leq \frac{2}{M} < \frac{1}{n}$, y por la desigualdad de arriba, tenemos (III). Por lo que $U \in \mathcal{B}_n$ y es tal que $x \in U \subset V$.

Finalmente veamos que si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión tal que $B_n \in \mathcal{B}_n$ y $cl_\tau(B_{n+1}) \subset B_n$, entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n \neq \emptyset$. Es claro que, de (I), $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n^* \neq \emptyset$ pues es intersección de compactos; más aún, esta intersección sólo tiene exactamente un punto, debido a que $b(B_n) - a(B_n) \to 0$, digamos x_0. Observemos que, si $k \geq n$,

$$1 \geq \frac{\lambda\left(B_n \cap [a(B_k), b(B_k)]\right)}{b(B_k) - a(B_k)} \geq \frac{\lambda(B_k)}{b(B_k) - a(B_k)} > 1 - \frac{1}{k}$$

pues $B_n \cap [a(B_k), b(B_k)] \supset B_k$; de aquí que $\lim_{k\to\infty} \frac{\lambda(B_n\cap[a(B_k),b(B_k)])}{b(B_k)-a(B_k)} = 1$. Además, dado que $\lambda\left(\left[x_0 - \frac{1}{k}, x_0 + \frac{1}{k}\right] \setminus [a(B_k), b(B_k)]\right) \to 0$, se cumple

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\lambda(B_n \cap [x_0 - \frac{1}{k}, x_0 + \frac{1}{k}])}{\frac{2}{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\lambda\left(B_n \cap [a(B_k), b(B_k)]\right)}{b(B_k) - a(B_k)} = 1,$$

por lo que $x_0 \in cl_\tau(B_n)$ por Teorema 2.19, es decir

$$x_0 \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} cl_\tau(B_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n.$$

■

Como dato extra, Oxtoby demostró que ser pseudocompleto y quasiregular implica ser de Baire, por lo que tenemos otra demostración de que $\mathbb{X}$ es Baire.

3.4. Compacidad en $\mathbb{X}$

En esta sección estudiaremos algunas propiedades de compacidad en subconjuntos de $\mathbb{X}$. Una primer propiedad que es fácil ver es la de ser *numerablemente compacto*, puesto que en un numerablemente compacto, todo conjunto infinito tiene un punto de acumulación (Teorema A.7), por lo que los subespacios de $\mathbb{X}$ numerablemente compactos son finitos.

Observación 3.17. *Con lo anterior, podemos descartar que $\mathbb{X}$ sea numerablemente compacto o hereditariamente pseudocompacto. De igual manera, no es paracompacto, pues ya sabemos que no es normal (Teorema A.9). También es fácil ver que $\mathbb{X}$ no es localmente compacto, pues los compactos son finitos en este espacio.*

Veamos más propiedades de compacidad interesantes. Dado un espacio Y, decimos que una familia $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(Y)$ es ***discreta*** si para cada $y \in Y$ existe una vecindad de y tal que interseca a lo más un elemento de $\mathcal{C}$. Por otro lado, diremos que $\mathcal{C}$ es ***σ-discreta*** si es unión contable de familias discretas.

Definición 3.18. *Diremos que un espacio Y es **subparacompacto** si toda cubierta abierta tiene un refinamiento cerrado y σ-discreto.*

Estos espacios fueron introducidos por McAuley en [13], mientras que D. K. Burke hace varias contribuciones sobre caracterizaciones y aplicaciones de esta clase de espacios en [2].

Teorema 3.19. *$\mathbb{X}$ es hereditariamente subparacompacto.*

Demostración. Primero demostraremos que todo subespacio *ccc* de $\mathbb{X}$ es subparacompacto. Sea $\mathcal{V}$ una cubierta abierta de $Y \subset \mathbb{X}$, un subespacio *ccc*. Dado un punto cualquiera $y \in Y$, hay un elemento $V \in \mathcal{V}$ tal que $y \in V$ y como Y es regular (pues $\mathbb{X}$ lo es), existe U_y abierto en Y tal que $y \in U_y \subset cl_Y(U_y) \subset V$. Así, $\mathcal{V}_0 = \{U_y : y \in Y\}$ es una cubierta abierta tal que las cerraduras de sus elementos forman un refinamiento de $\mathcal{V}$. Sea $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una familia maximal de abiertos en Y disjuntos (Teorema A.10), cada uno contenido en algún elemento de $\mathcal{V}_0$ (notemos que es a lo más numerable pues Y es *ccc*). Entonces $K = Y \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ es denso en ninguna parte en Y. En efecto, si $\emptyset \neq int_Y(cl_Y(K)) = int_Y(K)$ entonces $\emptyset \neq int_Y(K) \cap V \subset V$, para algún $V \in \mathcal{V}_0$, lo que contradice la maximalidad de $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Luego, por la Observación 2.28, K es denso en ninguna parte en $\mathbb{X}$ y por lo tanto es cerrado discreto en $\mathbb{X}$.Ahora, veamos que la familia $\mathcal{C} = \{\{x\} : x \in K\}$ es discreta en Y. Para cada $x \in K$, existe U_x abierto en $\mathbb{X}$ tal que $x \in U_x$ y $U_x \cap K = \{x\}$; por otro lado, para cada $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ tenemos que justo $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ es un abierto en Y que no interseca a ningún elemento de $\mathcal{C}$ pues $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n \cap K = \emptyset$, por lo que $\mathcal{C}$ es familia discreta de cerrados cuyos elementos están contenidos en algún elemento de $\mathcal{V}_0$. Ahora construyamos las otras familias discretas. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\mathcal{C}_n = \{cl_Y(C_n)\}$. Así, cada $\mathcal{C}_n$ es familia cerrada y discreta tal que sus elementos están contenidos en algún elemento de $\mathcal{V}_0$, por lo que $\mathcal{U} = \mathcal{C} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_n$ es un refinamiento cerrado y σ-discreto de $\mathcal{V}$.

Ahora, sea $Y \subset \mathbb{X}$ un subespacio cualquiera y sea $\mathcal{U}$ una familia de abiertos en Y tal que $Y = \bigcup \mathcal{U}$. Por el Corolario 3.5, Y es unión de un *ccc* y un cerrado discreto, digamos $Y = C \cup F$ con C un *ccc* y F un cerrado discreto. Sabemos que para cada $x \in F$, existe un abierto en $\mathbb{X}$, U_x, tal que $x \in U_x$ y $U_x \cap F = \{x\}$; para cada punto en $C = Y \setminus F$ tomamos C (por Observación 3.6, C es abierto en Y) pues este no contiene a ningún elemento de F . De esta manera la familia $\mathcal{C}_0 = \{\{x\} : x \in F\}$ es discreta en Y. También, por lo demostrado anteriormente, podemos extraer un refinamiento cerrado σ-discreto en C de $\mathcal{C} = \{C \cap U : U \in \mathcal{U}\}$, digamos $\mathcal{C}_1$. Con lo que $\mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1$ es el refinamiento buscado. ■

Con esta afirmación, obtenemos un ejemplo de un espacio subparacompacto que no es paracompacto.

Como mencionamos al inicio de la sección, los subconjuntos numerablemente compactos de $\mathbb{X}$ sólo pueden ser finitos, sin embargo podemos preguntarnos por una propiedad más débil: en lugar de pedir que no tenga cerrados discretos numerables, pediremos que no tenga cerrados discretos de tamaño κ. Sorprendentemente resultará que los subespacios $\aleph_1$-compactos de $\mathbb{X}$ son hereditariamente Lindelöf. Veamos además otras dos propiedades peculiares.

Definición 3.20. *Diremos que un espacio es*

(a) ***κ-compacto*** *si todo subconjunto cerrado discreto es de cardinalidad menor a κ,*

(b) ***metacompacto(σ-metacompacto)*** *si toda cubierta abierta tiene un refinamiento abierto punto-finito(σ-punto-finito) y*

(c) ***colectivamente Hausdorff*** *si para cada subconjunto cerrado discreto C existe un familia de abiertos disjuntos por pares, cada uno conteniendo exactamente un elemento de C.*

Descubriremos que todo subespacio σ-metacompacto o colectivamente Hausdorff de $\mathbb{X}$, también cumple algo similar a uno que es $\aleph_1$-compacto: es unión de un hereditariamente Lindelöf y un cerrado discreto.

Primero veamos el resultado correspondiente a los subespacios $\aleph_1$-compactos, para lo cual, usaremos dos lemas; el primero de ellos aprovechará el hecho poderoso de que $\mathbb{X}$ es hereditariamente subparacompacto, y el otro sólo es una cuestión técnica para concluir. La mayoría de las afirmaciones en la sección son gracias a F.D. Tall [20].

Lema 3.21. *Todo espacio subparacompacto $\aleph_1$-compacto es Lindelöf.*

Demostración. Sea Y un espacio subparacompacto $\aleph_1$-compacto. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de Y. Entonces tiene un refinamiento de la forma $\mathcal{U}_0 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_n$, donde cada familia $\mathcal{C}_n$ es discreta y de elementos cerrados. Observemos que cada $\mathcal{C}_n$ es familia ajena. En efecto, si $A, B \in \mathcal{C}_n$ son diferentes entonces son ajenos, pues de lo contrario, si $x \in A \cap B$ entonces toda vecindad de x interseca a A y B, lo que contradice que $\mathcal{C}_n$ sea discreta. Ahora, sea C un conjunto de puntos que resulta de seleccionar exactamente un punto de cada elemento en $\mathcal{C}_n$ (en esta tesis aceptamos el Axioma de Elección). Afirmamos que este conjunto es cerrado y discreto. Primero veamos que es cerrado. Sea $y \in Y \setminus C$. Si $y \notin \bigcup \mathcal{C}_n$, sea V un abierto tal que $y \in V$ e interseca a lo más a un elemento de $\mathcal{C}_n$; si no interseca a algún elemento, tampoco intersecará a C. Por otro lado, si interseca a un elemento, digamos $K \in \mathcal{C}_n$, $V \setminus K$ es un abierto que no interseca a C y contiene a y. Si $y \in F$ con $F \in \mathcal{C}_n$, y U es la vecindad de y que sólo interseca a F, consideramos a la vecindad de y, $U \setminus \{x\}$, donde x es el elemento en C que pertenece a F, por lo que C es cerrado.

Finalmente C es discreto ya que para cada $z \in C$, la vecindad de z que sólo interseca al cerrado al que pertenece, sólo interseca a C en z. De esta manera, como Y es $\aleph_1$-compacto, $\mathcal{C}_n$ es contable, para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego $\mathcal{U}_0$ es contable. ■

El siguiente es un ejercicio clásico de un curso de topología, no obstante nos será de utilidad.

Lema 3.22. *Un espacio Lindelöf es hereditariamente Lindelöf si todo cerrado es G_δ*

Demostración. Sea Y un espacio Lindelöf. Es un hecho conocido que un espacio es hereditariamente Lindelöf si y sólo si sus abiertos son Lindelöf. Sea pues, $A \subset Y$ abierto, entonces $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$, con $C_n \subset Y$ cerrado. Sea $\mathcal{U}$ familia de abiertos en Y tales que $A \subset \bigcup \mathcal{U}$. Como la propiedad Lindelöf se hereda a cerrados, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}$, contable tal que $C_n \subset \bigcup \mathcal{U}_n$. De esta manera $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_n$, es subcubierta contable, luego A es Lindelöf y por lo tanto Y es hereditariamente Lindelöf. ■

La siguiente proposición nos dice justamente que los subconjuntos de $\mathbb{X}$ que son $\aleph_1$-compactos, son hereditariamente Lindelöf, lo que nos ayudará en el siguiente capítulo a establecer la existencia de un L-espacio bajo la Hipótesis del Continuo.

Proposición 3.23. *Si $Y \subset \mathbb{X}$ es $\aleph_1$-compacto, Y es hereditariamente Lindelöf.*

Demostración. Por el Lema 3.21 y Teorema 3.19, Y es Lindelöf. Además, por la Proposición 2.33, todo cerrado en $\mathbb{X}$ es G_δ, por lo tanto todo cerrado en Y también es G_δ. Luego, por el Lema 3.22, Y es hereditariamente Lindelöf. ■

A continuación, construiremos la demostración de la afirmación acerca de los subespacios colectivamente Hausdorff y σ-metacompactos. Para probar ese resultado debemos ver primero varios detalles técnicos acerca de ciertos tipos de familias, siendo parte del trabajo de Tall en [19], salvo los próximos dos lema que son gracias a Burke en [3].

Notación. Dada una familia de subconjuntos $\mathcal{U}$ en un espacio Y, si $W \subset Y$, haremos $\mathcal{U}_W = \{A \subset Y : A \cap W \neq \emptyset\}$. Cuando $W = \{y\}$, con $y \in Y$, $\mathcal{U}_{\{y\}}$ simplemente lo denotaremos por $\mathcal{U}_y$.

Lema 3.24. *Sea Y un espacio de Baire. Entonces toda cubierta abierta punto-finita es localmente finita en un abierto denso.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta punto-finita de Y. Sea A el conjunto de puntos en Y donde $\mathcal{U}$ es localmente finita, es decir, para todo $x \in A$, existe U abierto que contiene a x tal que sólo interseca a una cantidad finita de elementos de $\mathcal{U}$, por ello $U \subset A$, por lo que A es abierto. Entonces sólo resta ver que A

es denso. Sea $V \subset Y$ un abierto no vacío y distinto de Y, y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $U_n = \{x \in V : |\mathcal{U}_x| \leq n\}$. Observemos que cada $V \setminus U_n$ es abierto pues si $x \in V \setminus U_n$ entonces, como $n < |\mathcal{U}_x| < \omega$, $\bigcap \mathcal{U}_x \cap V \subset V$ es una vecindad de x que no interseca a U_n.

Ahora, si $int(U_n) = \emptyset$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces cada $D_n = (Y \setminus cl(V)) \cup (V \setminus U_n)$ sería un abierto denso, ya que $cl(V \setminus U_n) = cl(V)$ (si $x \in cl(V)$ y $x \in W$ con W abierto, como $W \cap V \neq \emptyset$ y $int(U_n)\emptyset$, ocurre $W \cap V \not\subset U_n$, por lo que $W \cap V \setminus U_n \neq \emptyset$). Notemos que $V \setminus (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n) = \emptyset$, pues para toda $x \in V$, $x \in U_n$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n = Y \setminus cl(V) \cup (V \setminus (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n)) = Y \setminus cl(V)$ es denso, pues Y es Baire, lo que es una contradicción. Sea pues, $k \in \mathbb{N}$ tal que $int(U_k) \neq \emptyset$. Sean $y \in int(U_k)$ y $W = int(U_k) \cap \bigcap \mathcal{U}_y$. De esta manera, W es una vecindad de y que interseca sólo a una cantidad finita de elementos en $\mathcal{U}$, es decir, $y \in A \cap V$, lo que termina la prueba. ■

Recordemos que una familia $\mathcal{U}$ de subconjuntos de una espacio Y es ***estrella-finita*** si para cada $U \in \mathcal{U}$, la familia $\{V \in \mathcal{U} : U \cap V \neq \emptyset\}$ es finita. Los siguientes son hechos conocidos y sólo los usaremos como herramienta.

Lema 3.25. *Sea Y un espacio.*

(1) Si $\mathcal{U}$ es una familia estrella-finita en Y, entonces $\mathcal{U}$ es la unión de familias ajenas entre sí, cada una de ellas contable.

(2) Si Y es ccc entonces toda familia estrella-finita abierta es contable.

Demostración. (1) Para cada $U \in \mathcal{U}$, sea $A(U) = \{V \in \mathcal{U} : U \to V\}$, donde $U \to V$ significa que hay una cadena de elementos en $\mathcal{U}$ de U a V; es decir, si existe una sucesión finita de elementos en $\mathcal{U}$, $B_0, B_1, ..., B_n$ tal que $B_0 = U$, $B_n = V$ y $B_i \cap B_{i+1} \neq \emptyset$. Veamos que $A(U)$ es contable; la demostración es por inducción sobre n donde n es el número de cadenas. Por definición $\mathcal{U}_U$ es finito, por lo que el número de cadenas de tamaño 2 que empiezan en U, es finito; inductivamente el número de cadenas de tamaño n es finito, por lo que $A(U)$ es contable. Además, si $A(U_1) \cap A(U_2) \neq \emptyset$ entonces $A(U_1) = A(U_2)$ ya que si $V \in A(U_1)$ y $W \in A(U_1) \cap A(U_2)$, $U_2 \to W \to V$; la otra contención es análoga. Finalmente es claro que $\mathcal{U} = \bigcup_{U\in\mathcal{U}} A(U)$.

(2) Sea $\mathcal{U} = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} A(U)$ una familia estrella-finita abierta. Si $A(U_1) \neq A(U_2)$, $V \in A(U_1)$ y $W \in A(U_2)$ entonces $V \cap W = \emptyset$, por definición. De esta manera, hay a lo más una cantidad numerable de familias $A(U)$, por lo que $\mathcal{U}$ es contable.

■

Con esto probado, el siguiente lema mejora al primero, apoyándonos de la hipótesis extra sobre Y, le pediremos ser *ccc*.

Lema 3.26. *Si Y es Baire y ccc, entonces toda familia abierta punto-finita es a lo más numerable.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ una familia abierta punto-finita. Como $U = \bigcup \mathcal{U}$ es abierto, U es Baire y *ccc*. Así, si A es el conjunto de puntos en U tales que $\mathcal{U}$ es localmente finita, A es denso y abierto en U por Lema 3.24 y por lo tanto *ccc*. De esta manera, $\mathcal{V} = \{V \cap A : V \in \mathcal{U}\}$ es una familia abiertos y localmente finita en A . Sea pues, para cada $V \cap A \in \mathcal{V}$, $U_V \subset V \cap A$ un abierto en A tal que interseca a lo más una cantidad finita de elementos en $\mathcal{V}$. Entonces $\mathcal{B} = \{U_V : V \in \mathcal{U}\}$ es una familia de abiertos estrella-finita en A. Luego, por (2) del lema anterior, $\mathcal{B}$ es contable. Ahora, como $\mathcal{U}$ es punto-finita, cada U_V tiene asociado a lo más una cantidad finita de elementos en $\mathcal{V}$, por lo que $\mathcal{V}$ es contable. Del mismo modo, cada $V \cap A \in \mathcal{V}$ tiene asociado una cantidad finita de elementos en $\mathcal{U}$, pues de lo contrario, existirían una infinidad de elementos V_0, V_1,..., en $\mathcal{U}$ tales que $V_0 \cap A = V_n \cap A$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $A \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n \neq \emptyset$, en contradicción con la definición de A. Luego $\mathcal{U}$ es contable. ■

Para continuar con la prueba del hecho que nos concierne, puntualizaremos una observación que es intuitivamente clara pues se relaciona con otras propiedades de hereditarias a subconjuntos cerrados.

Observación 3.27. *Si un espacio Y es σ-metacompacto entonces todo cerrado en Y es σ-metacompacto y la prueba es análoga a otras propiedades de compacidad. En efecto, sea $C \subset Y$ cerrado y $\mathcal{U}$ familia de abiertos tales que $C \subset \bigcup \mathcal{U}$. Entonces $\{Y \setminus C\} \cup \mathcal{U}$ es cubierta abierta de Y, por lo que tiene un refinamiento abierto*

σ-punto-finito $\mathcal{U}_0$. Por lo que $\mathcal{V}_0 = \{U \cap C : U \in \mathcal{U}_0\}$ es refinamiento abierto σ-punto-finito de $\mathcal{V} = \{U \cap C : U \in \mathcal{U}\}$.

Finalmente, ya podemos demostrar la proposición mencionada antes.

Proposición 3.28. *Si $Y \subset \mathbb{X}$ es o colectivamente Hausdorff o σ-metacompacto, Y es la unión de un hereditariamente Lindelöf y un cerrado discreto.*

Demostración. Sabemos que $Y = C \cup D$, donde C es *ccc* y D es un cerrado discreto de $\mathbb{X}$. Si Y es colectivamente Hausdorff, entonces todo cerrado discreto en C, digamos F, es cerrado discreto en Y y por lo tanto existe una familia de abiertos disjuntos dos a dos tal que cada uno contiene exactamente un elemento F. Luego, como C es *ccc*, esta familia es contable, con lo que F es contable. De aquí que C es $\aleph_1$-compacto y consecuentemente hereditariamente Lindelöf.

Ahora, supongamos que Y es σ-metacompacto. Observemos primero que C es σ-metacompacto: Sea $\mathcal{A}$ familia de abiertos en Y tal que $C \subset \bigcup \mathcal{A}$. Por la Observación 3.6, C es abierto en Y, y por la Proposición 2.33, es F_σ en Y. Entonces $C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ con cada C_n cerrado en Y. Por la Observación 3.27, cada $\mathcal{A}_n = \mathcal{A} \cup \{Y \setminus C_n\}$ tiene un refinamiento abierto σ-punto-finito en Y, digamos $\mathcal{B}_n = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_{n,m}$, con $\mathcal{B}_{n,m}$ punto-finito. De esta manera, si $\mathcal{W}_{n,m} = \{B \in \mathcal{B}_{n,m} : B \subset A,\ \text{para algún } A \in \mathcal{A}\}$, $\mathcal{W}_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{W}_{n,m}$ es familia de abiertos σ-punto-finita en Y tal que $C_n \subset \bigcup \mathcal{W}_n$; en efecto, si $x \in C_n$, existe $B \in \mathcal{B}_{n,m}$ tal que $x \in B$, para algún $m \in \mathbb{N}$, por lo que si $A \in \mathcal{A}_n$ es tal que $B \subset A$, $A \not\subset Y \setminus C_n$, con lo que $A \in \mathcal{A}$, luego $x \in \bigcup \mathcal{W}_n$. Entonces $\mathcal{W} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{W}_n$ es una familia de abiertos σ-punto-finito tal que $C \subset \bigcup \mathcal{W}$ y para cada $W \in \mathcal{W}$, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $W \subset A$, por lo que $\{W \cap C : W \in \mathcal{W}\}$ es refinamiento cerrado σ-punto-finito en C de $\{A \cap C : A \in \mathcal{A}\}$, lo que hace a C σ-metacompacto.

Así, basta con ver que C es Lindelöf, por Lema 3.22. Sea pues, $\mathcal{U}$ cubierta abierta de C. Sabemos que existe $\mathcal{V}$ refinamiento σ-punto-finito de $\mathcal{U}$, digamos $\mathcal{V} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_n$, donde cada $\mathcal{V}_n$ es punto-finito. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $V_n = \bigcup \mathcal{V}_n$. Con esto, V_n es abierto y por lo tanto *ccc* (y Baire por Corolario 2.29). Luego, por el lema anterior, cada $\mathcal{V}_n$ es contable, de aquí que $\mathcal{V}$ también lo es. Por consiguiente C es hereditariamente Lindelöf. ■

Observación 3.29. *De la demostración anterior, notemos que también probamos que todo espacio Baire, ccc y σ-metacompacto es Lindelöf.*

Corolario 3.30. $\mathbb{X}$ *no es ni colectivamente Hausdorff ni σ-metacompacto.*

Demostración. Por la prueba del Corolario 2.26, el conjunto de Cantor es un cerrado discreto en $\mathbb{X}$ no numerable. Así, como $\mathbb{X}$ es *ccc*, no existe una familia de abiertos disjuntos tales que cada uno contiene exactamente un elemento del Cantor. Por otro lado, por la observación anterior, si $\mathbb{X}$ fuera σ-metacompacto, también sería Lindelöf, en contradicción con el Corolario 2.26. ∎

Capítulo 4

Teoría de Conjuntos

En este capítulo veremos algunos resultados que se tienen acerca de este espacio y que están íntimamente relacionados con la teoría de conjuntos.

4.1. (CH)Existencia de un L-espacio

Un problema clásico en la Topología General es sobre la existencia de L-espacios (espacios regulares que son hereditariamente Lindelöf pero no separables) y S-espacios (espacios regulares que son hereditariamente separables pero no Lindelöf). Por un lado, está demostrado que la existencia de un S-espacio es independiente de los axiomas de la teoría de conjuntos(**ZFC**). En cuanto al otro problema, J. T. Moore construye un L-espacio en [14]. Aquí, sin embargo, probaremos la existencia de un L-espacio asumiendo la Hipótesis del Continuo, de forma sencilla, siendo un resultado de Tall en [20].

Primero recordemos algunos detalles sobre la medida de Lebesgue.

(1) El conjunto de los borelianos de $\mathbb{R}$ es igual a la σ-álgebra generada por los intervalos abiertos con extremos racionales.

(2) Todo nulo en $\mathbb{R}$ está contenido en un boreliano nulo. Esto es pues, dado un nulo N, existe una sucesión de abiertos $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $N \subset B_n$ y $\lambda(B_n) < \frac{1}{2^n}$, por lo que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$ es un boreliano nulo que contiene a N.

Definición 4.1. *Decimos que $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto de* ***Sierpinski*** *si es no numerable e interseca a todos los conjuntos nulos en una cantidad contable de elementos.*

El siguiente teorema es bien conocido en el ámbito de la teoría de conjuntos y fue demostrado por Sierpinski en [18].

Teorema 4.2. ***CH*** *implica la existencia de un Sierpinski.*

Demostración. Observemos que, por (2) de la observación anterior, basta con encontrar un conjunto no numerable tal que interseca en una cantidad contable a cada boreliano nulo. También notemos que, por (1) de la observación anterior, el conjunto de los borelianos nulos, $\mathcal{N}$, está contenido en una σ-álgebra generada por una familia numerable, por lo que a lo más tiene $2^{\aleph_0}$ elementos; además, este conjunto es no numerable pues contiene a todos los subconjuntos numerables de $\{\{x\} : x \in \mathbb{R}\}$. De esta manera

$$\mathcal{N} = \{N_\alpha : \alpha < \omega_1\},$$

con $N_\alpha \neq N_\beta$ si $\alpha \neq \beta$. Ahora, construiremos un conjunto $S = \{s_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ tal que si $\alpha < \beta < \omega_1$:

(a) $s_\alpha \neq s_\beta$ y

(b) $s_\beta \notin N_\alpha$,

usando recursión transfinita. Supongamos que $\alpha < \omega_1$ es tal que $\{s_\beta : \beta < \alpha\}$ está construido. Entonces

$$S_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} N_\beta \cup \{s_\beta : \beta < \alpha\}$$

es nulo ya que $\alpha < \omega_1$ y por lo tanto existe $s \in \mathbb{R} \setminus S_\alpha$. Sea pues, $s_\alpha = s$. De esta manera existe tal S. Observemos que cumple lo que queremos: por (a), S es no numerable; por (b), para cada $\alpha < \omega_1$, $s_\beta \notin S \cap N_\alpha$ para toda $\beta > \alpha$, por lo que $S \cap N_\alpha$ es a lo más numerable, lo que termina la prueba. ■

Cabe recalcar que **CH** no es necesaria para la existencia de un Sierpinski, pues hay modelos de **ZFC** en los que la negación de **CH** es válida y existe un Sierpinski [12].

Regresando al espacio en cuestión, probaremos que es lo mismo tener un subespacio hereditariamente Lindelöf que un Sierpinski, dándonos así la existencia de un L-espacio bajo **CH**.

Teorema 4.3. *Sea $Y \subset \mathbb{X}$ subespacio. Entonces Y es hereditariamente Lindelöf si y sólo si Y es Sierpinski.*

Demostración. Supongamos que Y es hereditariamente Lindelöf y sea N un nulo. Entonces $Y \cap N$ es nulo también y por lo tanto cerrado discreto en $\mathbb{X}$, y por consiguiente en Y. Es un hecho conocido que todo cerrado discreto en un Lindelöf es a lo más numerable (Teorema A.11), luego Y es Sierpinski.

Por otro lado, supongamos que Y es Sierpinski. Por el Corolario 3.5, $Y = C \cup F$ con C *ccc* y F cerrado discreto en $\mathbb{X}$, por lo que F es nulo (Teorema 2.25) y por estar en un Sierpinski, contable. Ahora, observemos que todo cerrado discreto en C es discreto en $\mathbb{X}$ pues C es abierto en Y (Observación 3.6). Así, por el Corolario 3.7, todo cerrado discreto en C es cerrado discreto en $\mathbb{X}$ y por lo tanto nulo. De esta manera todo cerrado discreto de C es nulo, y por estar contenido en un Sierpinski, es a lo más numerable. Luego C es $\aleph_1$-compacto, con lo que, por la Proposición 3.23, C es hereditariamente Lindelöf. Así, Y es la unión de un hereditariamente Lindelöf y un conjunto contable, lo que hace evidentemente a Y hereditariamente Lindelöf. ■

De esta forma, por los Teoremas 4.2, 4.3 y lo expuesto en el segundo capítulo, obtenemos directamente el siguiente

Corolario 4.4. ***CH*** *implica la existencia de un espacio herediratriamente Lindelöf, regular, Baire y no separable.*

Hay modelos de **ZFC** en los que no es cierta la Hipótesis del Continuo y a pesar de ello existe un Sierpinski, así como modelos en los que no existen. Por lo que es consistente con la Teoría de Conjuntos ¬**CH** y la existencia de un Sierpinski.

4.2. Consistencia e independencia de dos enunciados

Como implícitamente se vio en la sección anterior, sabemos que hay enunciados que son independientes de la teoría de conjuntos; es decir, no podemos probar ni refutar dicho enunciado con los axiomas de **ZFC**. De forma análoga hay enunciados que su veracidad es consistente con los axiomas de **ZFC**, es decir, no se puede deducir alguna contradicción. En este caso, veremos dos afirmaciones acerca de $\mathbb{X}$, evidentemente, que resultarán ser consistentes con e independientes de **ZFC**; en la siguiente sección mencionaremos otras más.

Definamos primero los conceptos que usaremos.

Definición 4.5. *Decimos que un espacio*

*(1) es **metalindelöf** si toda cubierta abierta tiene un refinamiento abierto punto-contable,*

*(2) tiene **calibre** κ si para toda familia de tamaño κ de abiertos no vacíos $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ existe $A \subset \kappa$ tal que $|A| = \kappa$ y $\bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha \neq \emptyset$.*

Observación 4.6. *Es fácil ver que un espacio tiene calibre $\aleph_1$ si y sólo si toda familia de abiertos punto-contable es contable. En efecto, toda familia de abiertos punto-contable es contable si y sólo si toda familia de $\aleph_1$ abiertos no es punto-contable, si y sólo si toda familia de $\aleph_1$ abiertos tiene una subfamilia de cardinalidad $\aleph_1$ tal que su intersección es no vacía.*

Observación 4.7. *Es importante notar que $\mathbb{X}$ no puede ser al mismo tiempo metalindelöf y de calibre $\aleph_1$, dado que $\mathbb{X}$ no es Lindelöf. En efecto, supongamos que $\mathbb{X}$ es metalindelöf y de calibre $\aleph_1$. Si $\mathfrak{U}$ es cubierta abierta de $\mathbb{X}$, entonces tiene un refinamiento abierto punto-contable, siendo este contable, por lo que, si tomamos un abierto de $\mathfrak{U}$ por cada elemento del refinamiento tal que lo contiene, tenemos una subcubierta contable, lo que es una contradicción.*

El objetivo es probar que es consistente e independiente de la teoría de Conjuntos la siguiente afirmación: "$\mathbb{X}$ no es metalindelöf y es de calibre $\aleph_1$". Para ello, necesitaremos los siguientes dos resultados. Diremos que una familia de abiertos es ***localmente-κ en*** x si existe un abierto que contiene a x que interseca a menos de κ elementos de dicha familia. El próximo lema es demostrado de manera general por F.D. Tall en [19].

Lema 4.8. *Sean Y un espacio ccc y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta tal que*

$$D = \{x \in Y : \mathcal{U} \text{ es localmente-}\aleph_1 \text{ en } x\}$$

es denso. Entonces $|\mathcal{U}| \leq \omega$

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ una familia maximal de abiertos disjuntos tales que cada uno de sus elementos interseca a una cantidad contable de elementos de $\mathcal{U}$ (Teorema A.10). Afirmamos que cada elemento de $\mathcal{U}$ interseca al menos un elemento de $\mathcal{A}$. De lo contrario, si $U \in \mathcal{U}$ es tal que no interseca a ningún elemento de $\mathcal{A}$ y $x \in U \cap D$, existe un abierto $V \subset Y$ tal que $x \in V$ e interseca una cantidad contable de elementos de $\mathcal{U}$, lo que contradice la maximalidad de $\mathcal{A}$ pues $U \cap V$ es un abierto que no interseca a ningún elemento de $\mathcal{A}$ e interseca a lo más una cantidad contable de elementos de la cubierta.

Así, para cada $A \in \mathcal{A}$, $A \subset \bigcup \mathcal{U}_A$, con $\mathcal{U}_A = \{U \in \mathcal{U} : U \cap A \neq \emptyset\}$ contable. Como cada $U \in \mathcal{U}$ pertenece a algún $\mathcal{U}_A$ y $\mathcal{A}$ es contable (Y es *ccc*), $\mathcal{U}$ es contable. ∎

Este lema nos da un criterio para decidir cuándo una cubierta es contable en un *ccc*; aprovecharemos esto para ver que en un *ccc* donde la unión de $\aleph_1$ densos en ninguna parte es de primera categoría, las familias abiertas punto-contables son contables. La hipótesis extraña sobre la unión de densos en ninguna parte nos indica hacia donde va la cosa.

Proposición 4.9. *Si Y es un espacio de Baire y ccc tal que la unión de $\aleph_1$ densos en ninguna parte es de primera categoría, entonces Y es de calibre $\aleph_1$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \aleph_1\}$ es familia de abiertos punto-contable de Y (estamos usando la Observación 4.6). Observemos que las hipótesis de la proposición se heredan a los abiertos de Y (Observación 2.28), por lo que podemos suponer que $\mathcal{U}$ es cubierta de Y. Veamos pues que $D = \{x \in Y : \mathcal{U}$ es localmente-$\aleph_1$ en $x\}$ es denso en Y. Supongamos que existe $U \subset Y$ abierto no vacío tal que $\mathcal{U}$ no es localmente-$\aleph_1$ en ninguno de sus puntos. Para cada $\beta < \aleph_1$ hacemos

$$V_\beta = U \setminus \bigcup_{\beta \leq \alpha < \aleph_1} U_\alpha.$$

Observemos que $U = \bigcup_{\beta<\aleph_1} V_\beta$, ya que si $x \in U$, existe $\beta_x = \max\{\alpha < \aleph_1 : x \in U_\alpha\} + 1$ pues $\mathcal{U}$ es punto-contable, por lo que $x \in U \cap (Y \setminus \bigcup_{\beta_x \leq \alpha < \aleph_1} U_\alpha) = V_{\beta_x}$. También es claro que $int_Y(V_\beta) = \emptyset$, pues de lo contrario, si $x \in int_Y(V_\beta)$, como $int_Y(V_\beta) \subset U \setminus \bigcup_{\beta \leq \alpha < \aleph_1} U_\alpha$, este abierto interseca a lo más una cantidad contable de elementos de $\mathcal{U}$, entonces $\mathcal{U}$ es localmente-$\aleph_1$ en x, lo que es una contradicción, por la suposición de U. Luego, como cada V_β es cerrado en U y U es abierto,

$$int_U(cl_U(V_\beta)) = int_U(V_\beta) = int_Y(V_\beta) = \emptyset.$$

Así, por la Observación 2.28, V_β es denso en ninguna parte en Y. Por lo tanto U es de primera categoría, lo que es una contradicción pues Y es Baire (Teorema A.12). Por consiguiente D es denso en Y, y entonces por el Lema 4.8, $\mathcal{U}$ es contable. ■

Ahora, recordemos que el *Axioma de Martin* es un enunciado independiente de **ZFC** pero que es consistente con **ZFC** y la negación de **CH**, y en general dice lo siguiente: Sea κ un cardinal.

MA(κ): Dado un orden parcial $\mathbb{P}$ con la *ccc* y $\mathcal{D} \subset \mathbb{P}$ una familia de densos en $\mathbb{P}$ tal que $|\mathcal{D}| \leq \kappa$, existe un filtro $\mathcal{F}$ que es $\mathcal{D}-$genérico en P; es decir, tal que $\mathcal{F} \cap A \neq \emptyset$, para todo $A \in \mathcal{D}$.

En particular, cuando $\kappa = \mathfrak{c}$ escribiremos **MA** en lugar de **MA(κ)**. Para más información, puede consultarse [11], en donde también se demuestra el Teorema A.13 que usaremos en seguida. Veamos pues la consistencia e independencia dada por, de nuevo, F.D. Tall en [20], lo que estará establecido si demostramos los siguientes teoremas.

Teorema 4.10. ***MA***$+\neg$***CH*** *implica que* $\mathbb{X}$ *tiene calibre* $\aleph_1$ *y no es metalindelöf.*

Demostración. Por la Observación 4.7 basta con probar que $\mathbb{X}$ es de calibre $\aleph_1$. Es bien sabido que el Axioma de Martin junto con $\neg$**CH** implican que la unión de $\aleph_1$ nulos es un nulo (Teorema A.13), por lo que si unímos $\aleph_1$ densos en ningúna parte, entonces lo que resulta es un nulo y por lo tanto un conjunto de primera categoría. Luego, por la Proposición 4.9, $\mathbb{X}$ es de calibre $\aleph_1$. ■

Teorema 4.11. ***CH*** *implica que* $\mathbb{X}$ *es metalindelöf pero no tiene calibre* $\aleph_1$.

Demostración. De nuevo, por la Observación 4.7, basta probar que $\mathbb{X}$ es metalindelöf. Sea pues $\mathcal{U}$ un cubierta abierta de $\mathbb{X}$. Supongamos que $\mathbb{X} = \{x_\alpha : \alpha < \aleph_1\}$ (con $x_\alpha \neq x_\beta$ si $\alpha \neq \beta$) y también que $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \aleph_1 \text{ y } x_\alpha \in U_\alpha\}$; esto último se puede suponer debido a que podemos escoger una subcubierta eligiendo un elemento de $\mathcal{U}$ por cada elemento de $\mathbb{X}$. Para cada $\alpha < \aleph_1$ consideremos

$$f(\alpha) = \text{mín}\{\beta < \aleph_1 : x_\alpha \in U_\beta\} \text{ y } V_\alpha = U_\alpha \setminus \{x_\beta \in \mathbb{X} : \beta < \alpha\}\,.$$

Veamos que $\mathcal{V} = \{V_\alpha : \alpha < \aleph_1\}$ es un refinamiento abierto punto-contable de $\mathcal{U}$. Evidentemente $V_\alpha \subset U_\alpha$ y cada V_α es abierto pues $\{x_\beta \in \mathbb{X} : \beta < \alpha\}$ es cerrado ya que es contable. Notemos también que $\mathcal{V}$ cubre a $\mathbb{X}$. Sea $x_\gamma \in \mathbb{X}$, entonces $x_\gamma \in U_{f(\gamma)}$, pero $x_\gamma \in U_\gamma$, por lo que $f(\gamma) \leq \gamma$, así que $x_\gamma \notin \{x_\beta \in \mathbb{X} : \beta < f(\gamma)\}$, luego $x_\gamma \in V_{f(\gamma)}$. Finalmente veamos que $\mathcal{V}$ es punto-contable. Sea $A \subset \omega_1$ no numerable. Notemos que

$$\mathbb{X} = \bigcup_{\alpha \in A} \{x_\beta \in \mathbb{X} : \beta < \alpha\}\,,$$

pues dado $x_\gamma \in \mathbb{X}$, si $x_\gamma \notin \bigcup_{\alpha \in A} \{x_\beta \in \mathbb{X} : \beta < \alpha\}$, entonces $\gamma > \alpha$, para todo $\alpha \in A$, lo que contradice la no numerabilidad de A. De esta manera

$$\bigcap_{\alpha \in A} V_\alpha = \bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha \setminus \bigcup_{\alpha \in A} \{x_\beta \in \mathbb{X} : \beta < \alpha\} = \emptyset,$$

luego $\mathcal{V}$ es punto-contable. Por lo tanto $\mathbb{X}$ es metalindelöf y por lo tanto no es de calibre $\aleph_1$. ■

4.3. Funciones cardinales en $\mathbb{X}$

Recordemos que una *función cardinal* es un funcional de la clase de los espacios topológicos en los cardinales infinitos. Estas tienen la propiedad de que si Y y Z son homeomorfos, entonces tienen los mismos valores en Y y Z, por lo que esto es útil para distinguir espacios. Así pues, nos interesa saber cuánto valen algunas de estas funciones en $\mathbb{X}$ y así tener más información que distinga a este espacio de otros. En ciertos casos nos encontraremos con desigualdades que serán igualdades o estrictas en ciertos modelos, pero no ahondaremos en ello. Definamos algunas de ellas.

Definición 4.12. *Dado un espacio Y, definimos*

(1) el ***peso*** *de Y como*

$$w(Y) = \min \{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ es una base } Y\} + \omega,$$

(2) la ***densidad*** *de Y como*

$$d(Y) = \min \{|D| : D \subset Y, cl(D) = Y\} + \omega,$$

(3) el ***spread*** *de Y como*

$$s(Y) = \sup \{|F| : F \subset Y, F \text{ es discreto}\} + \omega,$$

(4) el ***extent*** *de Y como*

$$e(Y) = \sup \{|D| : D \subset Y, D \text{ es cerrado discreto}\} + \omega,$$

(5) el ***carácter*** *de Y como*

$$\chi(Y) = \sup \{\chi(p, Y) : p \in Y\} + \omega,$$

donde

$$\chi(p, Y) = \min \{|\mathcal{V}| : \mathcal{V} \text{ es una base local para } p\},$$

(6) la ***estrechez*** *de Y como*

$$t(Y) = \sup \{t(p, Y) : p \in Y\} + \omega,$$

donde

$$t(p, Y) = \min\{\kappa : \text{para todo } A \subset Y \text{ con } p \in cl(A), \text{ existe } B \subset A \text{ tal que}$$

$$|B| \leq \kappa \text{ y } p \in cl(B)\}.$$

Por último definiremos el π-peso de un espacio. Para ello necesitamos saber que es una π-base.

Definición 4.13. *Sea Y un espacio.*

*(1) Decimos que una colección de abiertos no vacíos en Y, $\mathcal{B}$, es una π-**base** si para todo abierto no vacío A en Y, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset A$.*

*(2) Definimos el π-**peso** de Y como*

$$\pi w(Y) = \text{mín}\,\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ es una } \pi\text{-base para } Y\} + \omega.$$

Los primeros valores en el espacio $\mathbb{X}$ que son fáciles de ver son el peso, el spread y el extent, todos ellos se basan en el hecho de que hay un cerrado discreto del tamaño del continuo. Los resultados restantes son de F.D Tall [20].

Teorema 4.14. $w(\mathbb{X}) = s(\mathbb{X}) = e(\mathbb{X}) = 2^{\aleph_0}$.

Demostración. Sabemos que el conjunto Cantor es de tamaño $2^{\aleph_0}$ y nulo, por lo que $\mathbb{X}$ tiene un cerrado discreto de tamaño $2^{\aleph_0}$. De esta manera, $\mathbb{X}$ no puede tener una base abierta de tamaño $< 2^{\aleph_0}$, por lo que $2^{\aleph_0} \leq w(\mathbb{X})$. De igual manera, $2^{\aleph_0} \leq e(\mathbb{X}), s(\mathbb{X})$. Por otro lado, $w(\mathbb{X}) \leq 2^{\aleph_0}$, pues $RO(\mathbb{X})$ es una base para $\mathbb{X}$(es regular) y $|RO(\mathbb{X})| = 2^{\aleph_0}$, por el Corolario 2.35; además $e(\mathbb{X}), s(\mathbb{X}) \leq |\mathbb{X}| = 2^{\aleph_0}$, por lo que tenemos el resultado. ∎

Teorema 4.15. $\aleph_0 < d(\mathbb{X}), \chi(\mathbb{X}), t(\mathbb{X}), \pi w(\mathbb{X}) \leq 2^{\aleph_0}$

Demostración. Como todo contable es nulo, la densidad de $\mathbb{X}$ es mayor que $\aleph_0$. Además, por la demostración del Corolario 2.26, cada punto en $\mathbb{X}$ no puede tener una base local contable, por lo que $\aleph_0 < \chi(\mathbb{X})$. Por otro lado, para todo $p \in \mathbb{X}$, $\aleph_0 < t(p, \mathbb{X})$, pues $A = \mathbb{X} \setminus \{p\}$ es tal que $p \in cl_\tau(A)$ y para todo $B \subset A$ tal que $|B| \leq \aleph_0$, $p \notin B = cl(B)$, por lo que $\aleph_0 < t(\mathbb{X})$. Finalmente, es un hecho conocido que $d(Y) \leq \pi w(Y)$, para cualquier espacio (si Y tiene una π-base de tamaño $< d(Y)$, entonces el conjunto formado por un punto de cada elemento de la π-base es un denso, lo que es una contradicción), por lo que $\aleph_0 < \pi w(\mathbb{X})$. Por otro lado, la densidad claramente es menor o igual al continuo; también es un hecho conocido que $\pi w(\mathbb{X}), \chi(\mathbb{X}) \leq w(\mathbb{X})$ y que $t(\mathbb{X}) \leq \chi(\mathbb{X})$, lo que termina la prueba.

∎

Si usamos el Axioma de Martin o **CH**, podemos concluir que los anteriores valores son precisamente el continuo, aunque lo que en realidad necesitamos para llegar a esa conclusión es lo siguiente.

Teorema 4.16. *Si todo conjunto de reales de tamaño* $< 2^{\aleph_0}$ *es nulo, entonces* $d(\mathbb{X}) = \chi(\mathbb{X}) = t(\mathbb{X}) = \pi w(\mathbb{X}) = 2^{\aleph_0}$

Demostración. Por lo anterior, como todo nulo es cerrado discreto, $d(\mathbb{X}) = 2^{\aleph_0}$. Ahora, si existe $p \in \mathbb{X}$ con una base local de tamaño $\kappa < 2^{\aleph_0}$ digamos $\mathcal{V} = \{V_\alpha : \alpha < \kappa\}$, entonces si elegimos $x_\alpha \in V_\alpha \setminus \{p\}$ para cada $\alpha < \kappa$, $A = \{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es de tamaño $\leq \kappa$ y es tal que $p \in der(A)$ con $p \notin A$, pero eso es una contradicción pues por hipótesis A es cerrado discreto. Para ver la estrechez, notemos que para cada $p \in \mathbb{X}$, $t(p, \mathbb{X}) = 2^{\aleph_0}$, pues si $\kappa < 2^{\aleph_0}$ y tomamos $A = \mathbb{X} \setminus \{p\}$, se cumple por hipótesis que para todo $B \subset A$ tal que $|B| \leq \kappa$, $p \notin cl_\tau(B) = B$, por lo que $t(p, \mathbb{X}) \neq \kappa$ y luego $t(\mathbb{X}) = 2^{\aleph_0}$. Finalmente, como $d(\mathbb{X}) \leq \pi w(\mathbb{X})$, $\pi w(\mathbb{X}) = 2^{\aleph_0}$. ■

Para finalizar la sección, demostraremos una relación importante que hay entre la densidad y la estrechez de $\mathbb{X}$ y como consecuencia se obtendrá una relación entre el π-peso y el carácter de $\mathbb{X}$. En concreto, probaremos que $d(\mathbb{X}) \leq t(\mathbb{X})$ y $\pi w(\mathbb{X}) \leq \chi(\mathbb{X})$. Vale la pena recordar que, en general, la densidad y la estrechez no son funciones cardinales comparables, así como el π-peso y el carácter, razón por la cual las relaciones anteriores cobran importancia.

Teorema 4.17. $d(\mathbb{X}) = \text{mín}\,\{|A| : A \subset (0,1)$ *y* $\lambda^*(A) = 1\}$.

Demostración. Sea $\kappa = \text{mín}\,\{|A| : A \subset (0,1) \text{ y } \lambda^*(A) = 1\}$, y observemos que está bien definido pues $\lambda^*((0,1)) = 1$. Primero veamos que $d(\mathbb{X}) \leq \kappa$. Sea $D \subset \mathbb{X}$ denso y notemos que $D \cap (0,1)$ es denso en $(0,1)$. Sea pues $A = D \cap (0,1)$. Es claro que $\lambda^*(A) \leq 1$. Supongamos que $\lambda^*(A) < 1$. Entonces, aplicando el Lema 2.18 en $(0,1)$ y $B = (0,1) \setminus A$,

$$1 = \lambda((0,1)) = \lambda^*(A) + \lambda_*(B),$$

por lo que $\lambda_*(B) > 0$, luego B contiene un abierto euclidiano no vacío, lo que contradice la densidad de A en $(0,1)$, Por lo tanto $\lambda^*(A) = 1$.

Ahora, sea $A \subset (0,1)$ tal que $|A| = \kappa$ y $\lambda^*(A) = 1$ y observemos que, como $\lambda^*(A) = \lambda^*((0,1))$, por la Proposición 2.22,

$$der_\tau(A) = der_\tau((0,1)) = [0,1],$$

entonces $(0,1) \subset cl_\tau(A)$ por lo que A es denso en $(0,1)$. Sea $D = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} D_n$, donde $D_n = n + A$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. Notemos que, de igual manera que antes, D_n es denso en $(n, n+1)$, pues $D_n \subset (n, n+1)$ y la medida exterior es invariante bajo traslaciones, más aún, $|D_n| = |A| = \kappa$. Así, $|D| = \kappa$ (κ es no numerable pues de lo contrario A sería nulo) y D es denso en $\mathbb{X}$. Sea $U \subset \mathbb{X}$ abierto no vacío. Entonces $U \not\subset \mathbb{Z}$, por lo que existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $U \cap (n, n+1) \neq \emptyset$, luego $U \cap (n, n+1) \cap D_n \neq \emptyset$ lo que concluye la prueba.

■

Teorema 4.18. $d(\mathbb{X}) \leq t(\mathbb{X})$.

Demostración. Por el Teorema 4.17, basta demostrar que existe $B \subset (0,1)$ tal que $\lambda^*(B) = 1$ y $|B| \leq t(\mathbb{X})$. Para cada $q \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$ definimos

$$n_q = \min\{n \in \mathbb{N} : \left(q, q + \frac{1}{n}\right) \subset (0,1)\}.$$

Evidentemente para toda $n \geq n_q$, $(q, q + \frac{1}{n}) \subset (0,1)$. De esta manera, por el Ejemplo 2.23, para toda $n \geq n_q$, $q + \frac{1}{n} \in cl_\tau(q, q + \frac{1}{n})$, por lo que existe $B_{q,n} \subset (0,1)$ tal que $|B_{q,n}| \leq t(\mathbb{X})$ y $q + \frac{1}{n} \in cl_\tau(B_{q,n})$. Sea pues

$$B = \bigcup\{B_{q,n} : q \in \mathbb{Q} \cap (0,1), n \geq n_q\}.$$

Como $\{B_{q,n} : q \in \mathbb{Q} \cap (0,1), n \geq n_q\}$ es contable, se sigue que $|B| \leq t(\mathbb{X})$. Además $B \subset (0,1)$, así que sólo resta ver que $\lambda^*(B) = 1$. Claramente $\lambda^*(B) \leq 1$. Supongamos que $\lambda^*(B) < 1$. Por el Lema 2.18,

$$1 = \lambda((0,1)) = \lambda^*(B) + \lambda_*((0,1) \setminus B),$$

entonces $\lambda_*((0,1) \setminus B) > 0$, de modo que existe $W \subset (0,1) \setminus B$ abierto euclidiano no vacío. Sea pues $q \in W \cap \mathbb{Q}$, entonces existe $n \geq n_q$ tal que $\left(q, q + \frac{1}{n}\right) \subset W$. De esta manera, como $B_{q,n} \neq \emptyset$ (pues $q + \frac{1}{n} \in cl_\tau B_{q,n}$),

$$\emptyset \neq B_{q,n} \subset \left(q, q + \frac{1}{n}\right) \cap B \subset W \cap B,$$

lo que contradice $W \subset (0,1) \setminus B$. Luego $\lambda^*(1)$, lo que termina la prueba. ■

Corolario 4.19. $\pi w(\mathbb{X}) \leq \chi(\mathbb{X})$.

Demostración. Es conocido que para cualquier espacio Y, $\pi w(Y) \leq d(Y) \cdot \chi(Y)$ y $t(Y) \leq \chi(Y)$. Así, con el teorema anterior tenemos

$$\pi w(\mathbb{X}) \leq d(\mathbb{X}) \cdot \chi(\mathbb{X}) \leq t(\mathbb{X}) \cdot \chi(\mathbb{X}) \leq \chi(\mathbb{X}).$$

■

Por último, cabe destacar que se sabe lo siguiente:

Teorema 4.20.

(1) Es consistente que $d(\mathbb{X}) = t(\mathbb{X}) = \aleph_1 < 2^{\aleph_0}$.

(2) Es consistente que $d(\mathbb{X}) < t(\mathbb{X})$.

(3) Es consistente que $\pi(\mathbb{X}) = \chi(\mathbb{X}) = \aleph_1 < 2^{\aleph_0}$.

Las pruebas de estos resultados requieren el manejo de técnicas de *forcing*, y las ideas pueden ser consultadas en el artículo de Tall [20].

Apéndice A

Topología

Teorema A.1 (**Teorema del conjunto perfecto para Borelianos**). *Si Y es un espacio Polaco (separable y completamente metrizable) y $B \subset Y$ es no numerable, entonces B contiene un conjunto perfecto. En particular se cumple lo anterior para $\mathbb{R}$.*

Teorema A.2. *Si Y es segundo numerable entonces todo cerrado es unión de un conjunto perfecto y uno contable.*

Teorema A.3. *Para cualquier espacio Y, unión de dos conjuntos perfectos es un conjunto perfecto.*

Teorema A.4. *Sean (Y, d) un espacio métrico, y $E \subset Y$ ($E \neq \emptyset$). Definimos la distancia de x a E como*

$$\rho_E(x) = \inf_{z \in E} d(x, z).$$

Entonces

(1) $\rho_E(x) = 0$ si y sólo si $x \in \overline{E}$.

(2) ρ_E es una función uniformemente continua en Y.

Teorema A.5. *La topología usual de $\mathbb{R}$ tiene tamaño $2^{\aleph_0}$.*

Teorema A.6. *Sea Y un espacio ccc, entonces todo subconjunto abierto (denso) es ccc.*

Teorema A.7. *Y es un espacio numerablemente compacto si y sólo si todo subconjunto infinito de Y tiene un punto de acumulación.*

Teorema A.8. *Si Y es un espacio Tychonoff, entonces X es pseudocompacto si y sólo si toda cubierta abierta contable tiene una subfamilia finita cuya unión es densa en Y.*

Teorema A.9. *Todo espacio paracompacto Hausdorff es normal.*

Teorema A.10 (Lema de Zorn). *Todo conjunto parcialmente ordenado no vacío en el que toda cadena tiene una cota superior, contiene al menos un elemento maximal.*

Teorema A.11. *Todo subespacio cerrado discreto de un espacio Lindelöf es contable.*

Teorema A.12. *Un espacio Y es Baire si y sólo si la unión contable de cerrados densos en ninguna parte tiene interior vacío.*

Teorema A.13. ***MA**(κ) implica que la unión κ nulos es nulo.*

Teorema A.14. *Para cualquier espacio Y se tiene que*

$$\pi w(Y) \leq d(Y) \cdot \chi(Y),\ d(Y) \leq \pi w(Y) \text{ y } t(Y) \leq \chi(Y).$$

Apéndice B

Teoría de la Medida

Teorema B.1. *Todo abierto en* $\mathbb{R}$ *es unión de a lo más una cantidad numerable de intervalos disjuntos. A estos abiertos los llamamos componentes del abierto.*

Teorema B.2. *El supremo e ínfimo de una sucesión de funciones medibles en un espacio de medida, es medible. Más aún, el límite de una sucesión de funciones medibles es medible.*

Teorema B.3. *Sea* $A \subset \mathbb{R}$ *medible. entonces para toda* $\epsilon > 0$*, existe* U *abierto tal que* $A \subset U$ *y* $\lambda(U) < \lambda(A) + \epsilon$*.*

Teorema B.4. *A es un conjunto medible si y sólo si puede escribirse como un conjunto* F_σ *unión un conjunto nulo(o como un* G_δ *menos un nulo)[16].*

Teorema B.5. *La medida interior y exterior de Lebesgue cumplen las siguientes propiedades. Sean* $A, B \subset \mathbb{R}$*.*

1. *Si* $A \subset B$ *entonces* $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$ *y* $\lambda_*(A) \leq \lambda_*(B)$*.*
2. $\lambda^*(A \cup B) \leq \lambda^*(A) + \lambda^*(B)$ *y* $\lambda_*(A \cup B) \geq \lambda_*(A) + \lambda_*(B)$*.*

Teorema B.6 (Criterio de Carathéodory). $E \subset \mathbb{R}$ *es medible si y sólo si para todo* $A \subset \mathbb{R}$*,*

$$\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \setminus E).$$

Teorema B.7. *Si* $E \subset \mathbb{R}$ *es de medida positiva, entonces contiene un no medible.*

Teorema B.8. *Sea $(S, \mathcal{A}, \mu)$ espacio medible. Si $f, g : S \to \mathbb{R}$ son funciones integrables tales que son casi iguales(es decir, son iguales salvo en un subconjunto de medida cero) entonces*

$$\int_S f d\mu = \int_S g d\mu.$$

Teorema B.9. *La σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$ tiene cardinalidad $2^{\aleph_0}$, mientras que la cardinalidad de la cantidad de subconjuntos de un no numerable $A \subset \mathbb{R}$ es $2^{2^{\aleph_0}}$, por lo que todo no numerable tiene un subconjunto no boreliano.*

Bibliografía

[1] Aarts, J., De Groot, J., McDowell, R., et al. (1970). Cotopology for metrizable spaces. *Duke Mathematical Journal*, 37(2):291–295. vi, 34

[2] Burke, D. K. (1969). On subparacompact spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 23(3):655–663. 39

[3] Burke, D. K. (1984). Covering properties. In *Handbook of set-theoretic topology*, pages 347–422. Elsevier. 42

[4] Choquet, G., Gelbart, S., Lance, T., and Marsden, J. E. (1969). *Lectures on Analysis, edited by J. Marsden, T. Lance, and S. Gelbart*. WA Benjamin. 35, 36

[5] De Groot, J. (1963). Subcompactness and the baire category theorem. *Indag. Math*, 25:761–767. 33

[6] Denjoy, A. (1915). Sur les fonctions dérivées sommables. *Bull. Soc. Math. France*, 43:161–248. 1, 16

[7] Faure, C.-A. (2002). A short proof of lebesgue's density theorem. *The American mathematical monthly*, 109(2):194–196. 2

[8] Gardner, R. and Pfeffer, W. (1984). Borel measures. In *Handbook of set-theoretic topology*, pages 961–1043. Elsevier. 31

[9] Goffman, C., Neugebauer, C., Nishiura, T., et al. (1961). Density topology and approximate continuity. *Duke Mathematical Journal*, 28(4):497–505. v, 1, 12

[10] Goffman, C. and Waterman, D. (1961). Approximately continuous transformations. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 12(1):116–121. 1, 16, 17

[11] Jech, T. (2013). *Set theory*. Springer Science & Business Media. 52

[12] Kharazishvili, A. (2014). *Set Theoretical Aspects of Real Analysis*. Monographs and Research Notes in Mathematics. Taylor & Francis. 48

[13] McAuley, L. F. (1958). A note on complete collectionwise normality and paracompactness. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 9(5):796–799. 39

[14] Moore, J. (2006). A solution to the l space problem. *Journal of the American Mathematical Society*, 19(3):717–736. 47

[15] Oxtoby, J. (1961). Cartesian products of baire spaces. *Fundamenta Mathematicae*, 49:157–166. 36

[16] Oxtoby, J. C. (2013). *Measure and category: A survey of the analogies between topological and measure spaces*, volume 2. Springer Science & Business Media. v, 2, 61

[17] Scheinberg, S. (1971). Topologies which generate a complete measure algebra. *Advances in Mathematics*, 7(3):231 – 239. v, 1, 28

[18] Sierpiński, W. (1924). Sur l'hypothèse du continu ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$). *Fundamenta Mathematicae*, 1(5):177–187. 48

[19] Tall, F. D. (1974). The countable chain condition versus separability-applications of martin's axiom. *General Topology and its applications*, 4(4):315–339. 42, 50

[20] Tall, F. D. (1976). The density topology. *Pacific J. Math.*, 62(1):275–284. vi, 32, 41, 47, 52, 55, 58

[21] White, H. (1974). Topological spaces in which blumberg's theorem holds. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 44(2):454–462. 34, 37

[22] Zahorski, Z. (1950). Sur la premiere derivee. *Transactions of the American Mathematical Society*, 69(1):1–54. 12, 16