Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Grupo de permutaciones y campanología

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C A

P R E S E N T A:

M A Y E R L I N G M E L I S S A
C R U Z M O R E N O

DIRECTOR DE TESIS:
DRA. DIANA AVELLA ALAMINOS

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX.

2019

Agradecimientos

A mi familia, mi hermano, mis hermanas y sobrinos.

A mis hermanas Alba y Kary y mi hermano Omar, sin su alegría no sería la persona que soy, los amo.

A mis sobrinos, Rubí, José, Valentina y Omar, que desde el momento que llegaron a mi vida la llenaron de felicidad.

A mis amigos más entrañables, Dafne, Ada, Sule y Dulce ustedes han estado conmigo en todo este camino recorrido. A mis amigos de Facultad, Yemi, Edgar, Cata, Carmen, que me acompañaron y apoyaron incondicionalmente, que compartieron conmigo frustraciones, tristezas, pero muchas más alegrías.

A mis compañeras de la EFUNAM, mis hermanas de Tuna, que han compartido su música, aventuras y alegría conmigo, las adoro.

A mi maestra Diana Avella, por siempre animarme, apoyarme y por darme esta oportunidad de trabajar con ella, por enseñarme que nada es imposible.

A todos aquellos que estuvieron conmigo durante toda la carrera, animándome en continuar a pesar de lo mucho que me costaba.

A la Facultad, a mis profesores y ayudantes.

Pero sobretodo a mis padres, esta tesis es para ustedes. Gracias por apoyarme en todo lo que he decidido hacer. Por ser los mejores padres...

Índice general

Capítulo 0

Introducción.

En el presente trabajo hablaremos sobre la teoría de grupos aplicada a campanología, un pasatiempo inglés que consiste en hacer sonar varias campanas permutándolas en cierto orden. El objetivo es crear composiciones musicales cambiando el orden en que se tocan las n campanas, es decir, se busca un algoritmo que permita crear una lista de composiciones, tan larga como sea posible, pero el problema es que no todas las composiciones están permitidas, es decir se pide que se cumplan algunas reglas en específico, por ejemplo, se inicia tocando las campanas en orden descendente de tono y se regresa al orden inicial al terminar, pero se busca que cualquier reacomodo en la forma de tocar las campanas no se repita en una misma composición. El reto es tocar las campanas durante el mayor tiempo posible siguiendo estas reglas. En este trabajo estudiaremos diferentes tipos de arreglos conformados por reacomodos de las campanas y con ello veremos ejemplos para un número de campanas en específico. La idea es ir construyendo diferentes arreglos e ir analizando si podemos obtener un arreglo con un número de reordenamientos lo más grande que sea posible usando sólo los tipos de construcción descritos en este trabajo, en especial, el objetivo de esta tesis es verificar si para el caso $n = 7$ campanas podemos obtener un arreglo con 5040 reordenamientos usando solamente los arreglos descritos con anterioridad.

El primer capítulo es una introducción a la teoría de grupos en el cual revisaremos algunos conceptos, notación y propiedades básicas, se prueban algunos resultados y se da la referencia de otros que deberán recordarse para comprender mejor el desarrollo de todo el trabajo. En la parte final de este capítulo se trabaja específicamente con el grupo simétrico que es el que nos interesa para describir las composiciones musicales.

En el capítulo dos comenzaremos describiendo el problema a resolver, introduciremos algunas definiciones y analizaremos la forma de describir el problema en términos matemáticos. Enunciaremos las cuatro reglas importantes que debe de cumplir cada uno de los arreglos; a cada uno de estos arreglos o composiciones musicales que cumplen con las reglas establecidas les llamaremos “métodos”. Veremos las diferentes formas de construir un método, desde el más sencillo, llamado “Plain Hunt” hasta el más complejo “Grandsire”, dando ejemplos específicos y observando que cada uno de ellos sigue un patrón de movimiento, que resaltaremos coloreando cada una de las campanas con un color en específico para poder visualizarlo claramente. Una vez hecho lo anterior, generalizaremos los diferentes métodos para n campanas, todo esto con el objetivo de poder obtener un método tan grande como sea posible, en específico un arreglo con $n!$ reacomodos. En la parte final de este capítulo, abordaremos dos casos específicos: para $n = 5$ y $n = 6$ campanas y nos cuestionaremos si es posible obtener un método con todos los posibles reacomodos de las campanas, sin embargo, probaremos que, usando sólo los tipos de métodos descritos en este trabajo, no es posible conseguirlo, dejando la pregunta abierta para $n = 7$ campanas.

En el tercer capítulo daremos respuesta a la pregunta que se dejó abierta en el capítulo 2: ¿Es posible obtener un arreglo en 7 campanas que conste de 5040 reacomodos usando el tipo de construcción Grandsire? Para ello analizaremos desde otros puntos de vista los métodos, en términos de generadores de grupo, el grupo simétrico y el subgrupo alternante. Definiremos qué es un grupo generado unicursalmente por algún subconjunto del mismo, así como su equivalencia con la definición de E-ciclo, todo esto para poder probar algunos resultados y ver qué condiciones se necesita que cumplan los diferentes métodos para ser de la mayor longitud posible. Enunciaremos y demostraremos una versión del Teorema de Rankin usando los principales resultados expuestos en este capítulo, por último aplicaremos el teorema a nuestro caso para 7 campanas dando respuesta a nuestra pregunta planteada en esta tesis.

Capítulo 1

Introducción a Teoría de Grupos

1.1. Definiciones básicas

Definición 1.1. *Dado G un conjunto y*

$$* : G \times G \to G$$

una operación binaria. Decimos que $(G, *)$ es un grupo si

1. *$*$ es asociativa, es decir $(a * b) * c = a * (b * c)$ para todas $a, b, c \in G$.*

2. *Existe $id \in G$ tal que $a * id = id * a = a$ para toda $a \in G$. Decimos que id es un neutro en G.*

3. *Para cada $a \in G$ existe $\overline{a} \in G$ tal que $a * \overline{a} = \overline{a} * a = id$. Decimos que $\overline{a}$ es un inverso de a.*

Si además $*$ es conmutativa, es decir

$$a * b = b * a$$

para toda $a, b \in G$, decimos que $(G, *)$ es un grupo abeliano.

Observación 1.2. *En un grupo G el neutro es único y para cada elemento $a \in G$ su inverso es único, éste se denotará por a^{-1}.*

Definición 1.3. *Un subconjunto H de un grupo G es un subgrupo de G si*

1. *$id \in H$*

2. *Para todas $a, b \in H$, $ab^{-1} \in H$.*

Observación 1.4. *La operación $*$ es interna, esto es, para cada par de elementos a y b de un grupo G, la composición $a * b$ debe ser un elemento de G. Se conoce también como propiedad de cerradura.*

Definición 1.5. *Sea G un grupo, $a \in G$ definimos*

$$\langle a \rangle = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}.$$

Si $\langle a \rangle = G$ decimos que G es un grupo cíclico y que a genera a todo el grupo.

Observación 1.6. *$\langle a \rangle$ es un subgrupo de G, se llamará el subgrupo generado por a.*

Demostración. Observemos que

$$id = a^0 \in \langle a \rangle.$$

Por otro lado, si $a^n, a^m \in \langle a \rangle$, entonces

$$a^n (a^m)^{-1} = a^{n-m} \in \langle a \rangle$$

por lo tanto $\langle a \rangle$ es un subgrupo de G. □

Definición 1.7. *Sea G un grupo, si G tiene una cantidad finita de elementos, decimos que es un grupo finito y el orden de G es el número de elementos. Lo denotaremos por*

$$|G|.$$

Definición 1.8. *Sea G un grupo con $a \in G$. Decimos que a es de orden finito si existe $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $a^k = id$ y en ese caso el orden de a se define como*

$$o(a) := min\{k \in \mathbb{Z}^+ | a^k = id\}.$$

Teorema 1.9. *Sea G un grupo y $g \in G$ de orden finito.*

1. *$g^m = id$ si y sólo si $o(g)|m$.*

2. *Sea $n \in \mathbb{Z}^+$. Si $g^n = id$ y n divide a m para todo entero m tal que $g^m = id$, entonces n es el orden de g.*

3. *$\langle g \rangle = \{id, g, \dots, g^{o(g)-1}\}$ y $| \langle g \rangle |= o(g)$*

4. *Para $k \in \mathbb{Z}^+$*

$$o(g^k) = \frac{o(g)}{(o(g), k)}$$

Demostración. 1. Supongamos que $g^m = id$, por el algoritmo de la división

$$m = o(g)q + r \qquad r \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < n$$

entonces

$$id = g^m = (g^{o(g)})^q g^r = id^q g^r = g^r$$

por la minimalidad de $o(g)$ se tiene que $r = 0$ y por lo tanto $m = o(g)q$, entonces $o(g)|m$.

Recíprocamente si $o(g)|m$ entonces $m = o(g)q$ y se sigue que

$$g^m = g^{o(g)q} = (g^{o(g)})^q = id.$$

2. Sea $n \in \mathbb{Z}^+$ de modo que $g^n = id$ y n divide a m para todo m tal que $g^m = id$. Como $g^n = id$, por el inciso 1 tenemos que $o(g) \mid n$. Por otro lado como n divide a m para todo m tal que $g^m = id$, en particular n divide a $o(g)$, es decir $n \mid o(g)$. Concluimos entonces que $n = o(g)$.

3. Por definición $\langle g \rangle = \{g^n | n \in \mathbb{Z}\}$. Dado $n \in \mathbb{Z}$ por el algoritmo de la división

$$n = o(g)q + r \qquad r \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < n$$

entonces

$$g^n = (g^{o(g)})^q g^r = id^q g^r = g^r$$

y así

$$\langle g \rangle = \{id, g, \ldots, g^{o(g)-1}\}.$$

Supongamos ahora que $g^i = g^j$ con $0 \leq i \leq j < n$ entonces

$$g^{j-i} = id$$

y así $n|(j-i)$ lo cual se verifica sólo si $j - i = 0$ ya que $0 \leq j - i < n$ es decir, $i = j$. Por lo tanto $| \langle g \rangle |= o(g)$.

4. Sea $m = (o(g), k)$, veamos primero que

$$(g^k)^{\frac{o(g)}{m}} = (g^{o(g)})^{\frac{k}{m}} = id$$

Supongamos ahora que existe $l \in \mathbb{Z}$ tal que $(g^k)^l = id$, entonces por el inciso 1, $o(g)$ divide a kl entonces

$$kl = o(g)t, \qquad t \in \mathbb{Z}$$

y

$$\frac{kl}{(o(g), k)} = \frac{o(g)t}{(o(g), k)}$$

o bien

$$\frac{k}{(o(g),k)}l = \frac{o(g)}{(o(g),k)}t$$

entonces

$$\frac{o(g)}{(o(g),k)} | \frac{k}{(o(g),k)}l$$

y como

$$\left(\frac{o(g)}{(o(g),k)}, \frac{k}{(o(g),k)}\right) = 1$$

entonces

$$\frac{o(g)}{(o(g),k)} | l$$

Por el inciso 2 se obtiene el resultado.

□

Observación 1.10. *El inciso 2 del teorema anterior nos da otra caracterización del orden de un elemento, que usaremos en algunas ocasiones.*

Observación 1.11. *Si G es un grupo finito cíclico y a es un generador, entonces*

$$G = \{a, a^2, \ldots, a^k, \ldots, a^{|G|} = id\}$$

(donde id es el elemento neutro).

Definición 1.12. *Sean S, T subconjuntos de un grupo G*

$$ST = \{st | s \in S, t \in T\}$$

En particular si $S = \{s\}$

$$\{s\}T = \{st | t \in T\}$$

se llama una clase lateral izquierda y se denota por sT, análogamente $T = \{t\}$

$$S\{t\} = \{st | s \in S\}$$

se llama clase lateral derecha y la denotamos por St.

Observación 1.13. *Dos clases laterales izquierdas aH, bH son iguales si y sólo si $b^{-1}a \in H$ es decir*

$$aH = bH \qquad \Longleftrightarrow \qquad b^{-1}a \in H$$

Hay una biyección entre las clases laterales derechas e izquierdas de un grupo G con respecto a un subgrupo H, por lo que hay tantas clases laterales izquierdas como derechas.

Definición 1.14. *Sea G un grupo y $H \leq G$, el índice de H en G es el número de clases laterales izquierdas (o derechas).*

$$|G : H|$$

Teorema 1.15. *(Lagrange) Sea G un grupo finito $H \leq G$, entonces*

$$|G : H| = \frac{|G|}{|H|}.$$

Demostración. Sabemos que existe una clase finita de clases laterales izquierdas, ya que G es finito, consideremos

$$a_1H, a_2H, \ldots, a_tH$$

las distintas clases, con $t = |G : H|$

Sabemos que G es la unión ajena de sus clases laterales izquierdas,

$$G = a_1H \cup a_2H \cup \cdots \cup a_tH$$

entonces

$$\begin{aligned} |G| &= \#(a_1H \cup a_2H \cup \cdots \cup a_tH) \\ &= \#a_1H + \#a_2H + \cdots + \#a_tH \\ &= |H| + |H| + \cdots + |H| \\ &= t|H| \\ &= |G : H||H|. \end{aligned}$$

□

1.2. Grupo Simétrico

Definición 1.16. *Sea X un conjunto. El grupo simétrico en X se define como el conjunto*

$$S_X = \{\sigma : X \to X | \sigma \ \ biyectiva\}$$

con la operación de composición. Si X es un conjunto finito con n elementos se denotará por S_n y se llamará el grupo simétrico para n elementos.

Observación 1.17. *Dado un grupo G finito, una manera de permutar los elementos del grupo es multiplicando a sus elementos por un elemento fijo del grupo, es decir, dado un grupo finito con n elementos $G = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, consideremos la operación $*$ dada por la siguiente tabla*

$*$	a_1	a_2	$\cdots$	a_n
id	a_1	a_2	$\cdots$	a_n
a_1	a_1a_1	a_1a_2	$\cdots$	a_1a_n
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_n	a_na_1	a_na_2	$\cdots$	a_na_n

observemos que en cada columna (y fila) aparecen todos los elementos del grupo, no necesariamente en el mismo orden, ya que si

$$a_ka_j = a_la_j$$

entonces

$$a_k = a_l$$

por lo cual

$$a_1a_j, a_2a_j \ldots, a_na_j$$

son nuevamente los n elementos distintos de G, así, siempre que se tiene un grupo y se decide multiplicar a todos por algún elemento fijo, nos da una manera de permutar a todos los elementos de G.

Observación 1.18. *Generalizando la observación 1.17, definimos para cada $a \in G$ una función*

$$\alpha_a : G \to G$$

tal que $\alpha_a(x) = xa$, se tiene que α es una función biyectiva.

Demostración. Sean $x_1, x_2 \in G$ tal que $\alpha_a(x_1) = \alpha_a(x_2)$ tenemos que

$$x_1a = x_2a$$

como los elementos pertenecen a un grupo, entonces

$$x_1\cancel{a} = x_2\cancel{a}$$

y por lo tanto

$$x_1 = x_2$$

así α_a es una función inyectiva.

Para ver que α es suprayectiva tenemos que para toda $y \in G$

$$\alpha_a(ya^{-1}) = ya^{-1}a = y$$

y α es suprayectiva.

□

Definición 1.19. *Sea $\sigma \in S_n$ con $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Decimos que σ fija a i si $\sigma(i) = i$ o σ mueve a i si $\sigma(i) \neq i$.*

Definición 1.20. *Diremos que las permutaciones $\alpha, \beta \in S_n$ son ajenas si todo elemento movido por α es fijado por β y todo elemento movido por β es fijado por α.*

Observación 1.21. *Si $\alpha, \beta \in S_n$ son ajenas, entonces $\alpha\beta = \beta\alpha$.*

Observación 1.22. *Si $\alpha, \beta \in S_n$ son ajenas, entonces $o(\alpha\beta) = m.c.m.(o(\alpha), o(\beta))$.*

Demostración. Sean $\alpha, \beta \in S_n$ ajenas.

Veamos primero que, dado que las permutaciones conmutan

$$(\alpha\beta)^{m.c.m.(o(\alpha),o(\beta))} = \alpha^{m.c.m.(o(\alpha),o(\beta))}\beta^{m.c.m.(o(\alpha),o(\beta))}$$

y como $o(\alpha) \mid m.c.m.(o(\alpha), o(\beta))$, $\alpha^{m.c.m.(o(\alpha),o(\beta))} = id$, además como $o(\beta) \mid m.c.m.(o(\alpha), o(\beta))$, $\beta^{m.c.m.(o(\alpha),o(\beta))} = id$. Tenemos entonces que

$$(\alpha\beta)^{m.c.m.(o(\alpha),o(\beta))} = id.$$

Consideremos ahora $m \in \mathbb{Z}$ tal que $(\alpha\beta)^m = id$, entonces, usando nuevamente que las permutaciones conmutan tenemos que $\alpha^m\beta^m = id$, lo que implica que

$$\alpha^m = \beta^{-m}.$$

Pero α^m y β^{-m} también son ajenas, entonces concluimos que $\alpha^m = \beta^{-m} = id$. De aquí se sigue que $o(\alpha) \mid m$ y $o(\beta) \mid m$, por lo que m es un múltiplo común de $o(\alpha)$ y $o(\beta)$. Por propiedades del mínimo común múltiplo se tiene que $m.c.m.(o(\alpha), o(\beta)) \mid m$.

Por lo tanto $o(\alpha\beta) = m.c.m.(o(\alpha), o(\beta))$. $\square$

Definición 1.23. *Sea $\sigma \in S_n$. Si existen $i_1, i_2, \ldots, i_t \in \{1, 2, \ldots, n\}$ distintos, tales que*

$$\sigma(i_1) = i_2, \qquad \sigma(i_2) = i_3, \qquad \cdots \quad \sigma(i_{t-1}) = i_t, \qquad \sigma(i_t) = i_1$$

y $\sigma(j) = j$ para todo $j \notin \{1, 2, \ldots, t\}$ decimos que σ es un ciclo de longitud t y lo denotaremos

$$\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_t \end{pmatrix}$$

Teorema 1.24. *Toda permutación es producto de ciclos ajenos.*

La demostración de este teorema es algo laboriosa y se sale del objetivo de esta tesis, quién quiera revisar la prueba, puede revisarla en [3]

Ejemplo 1.25. *Al expresar una permutación α como producto de ciclos ajenos, se omiten todos los ciclos de longitud uno. De esa manera, en S_{13}*

$$\begin{aligned}
\alpha &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 4 & 1 & 7 & 6 & 9 & 3 & 8 & 5 & 2 & 10 & 11 & 13 & 12 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 3 & 7 & 8 & 5 & 9 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 13 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 3 & 7 & 8 & 5 & 9 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 13 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

α mueve a 11 elementos y fija al 10 y al 11.

Definición 1.26. *Sea $\alpha \in S_n$. Una factorización completa de α es una manera de expresar a α como producto de ciclos ajenos que incluye un ciclo de longitud 1 para cada elemento fijado por α.*

Lema 1.27. *$\alpha \in S_n$*

1. *Sea $\alpha = \beta_1\beta_2\cdots\beta_t$ una descomposición en ciclos ajenos, si existe i tal que $\beta_1(i) \neq i$, entonces $\alpha^k(i) = \beta_1^k(i)$ para toda k.*
2. *Sean β, γ ciclos tales que $\beta(i) = \gamma(i) \neq i$, si $\beta^k(i) = \gamma^k(i)$ para toda $k > 1$ entonces $\beta = \gamma$*

Demostración. $\alpha \in S$

1. Sea $\alpha = \beta_1\beta_2\cdots\beta_t$ entonces

$$\alpha^k = (\beta_1\beta_2\cdots\beta_t)^k = \beta_1^k\beta_2^k\cdots\beta_t^k$$

ya que conmutan por ser ajenos, entonces

$$\alpha^k(i) = \beta_1^k(i)\beta_2^k(i)\cdots\beta_t^k(i)$$

como $\beta_1(i) \neq i$ entonces $\beta_2^k(i) = \cdots = \beta_t^k(i) = i$, así

$$\alpha^k(i) = \beta_1^k(i).$$

2. Sean

$$\begin{aligned}
\beta &= \begin{pmatrix} i & i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix}, \qquad \beta^k(i) = i_k, \qquad k \in \{1, 2, \cdots, r\} \\
\gamma &= \begin{pmatrix} i & j_1 & j_2 & \cdots & j_s \end{pmatrix}, \qquad \gamma^k(i) = j_k, \qquad k \in \{1, 2, \cdots, s\}
\end{aligned}$$

Veamos que $r = s$, supongamos por reducción al absurdo que $s > r$, entonces

$$\beta^{r+1}(i) = i, \ \gamma^{r+1} = j_{r+1},$$

lo que nos lleva a una contradicción pues $i \neq j_{r+1}$.

Tenemos entonces que $r = s$ y como $i_k = \beta^k(i) = \gamma^k(i) = j_k$ entonces $\beta = \gamma$. □

Teorema 1.28. *Salvo por el orden de los ciclos, cada permutación tiene una única factorización completa en S_n.*

Demostración. Sea $\alpha \in S_n$, consideremos

$$\alpha = \beta_1\beta_2 \cdots \beta_t = \gamma_1\gamma_2 \cdots \gamma_s$$

factorizaciones completas en ciclos ajenos.

Si α no mueve elementos, entonces $\alpha = id$, $t = s = n$ y tanto los β_i como los γ_j son ciclos de longitud 1.

Consideremos $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $\alpha(i) \neq i$, sabemos que existen β_r, γ_l tales que

$$\beta_r(i) \neq i \neq \gamma_l(i)$$

sin pérdida de generalidad, supongamos que

$$\beta_1(i) \neq i \neq \gamma_1(i)$$

entonces, por 1. del lema 1.27

$$\beta_1^k(i) = \alpha^k(i) \ , \ \gamma_1^k(i) = \alpha^k(i) \text{ para toda } k$$

entonces

$$\beta_1^k(i) = \gamma_1^k(i) \text{ para toda } k$$

entonces por 2. del lema 1.27

$$\beta_1 = \gamma_1$$

así

$$\beta_2 \cdots \beta_t = \gamma_2 \cdots \gamma_s$$

Si por reducción al absurdo $s < t$, aplicando el procedimiento s veces, llegamos a que

$$\beta_{s+1} \cdots \beta_t = id$$

por lo tanto $s = t$ y los β_i y los γ_j coinciden salvo por el orden en que aparecen. □

Definición 1.29. $\alpha \in S_n$. *Decimos que α es una transposición si su factorización completa es*

$$\alpha = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_4 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} i_n \end{pmatrix}$$

Teorema 1.30. *Toda permutación de S_n, distinta de la id, se puede descomponer como producto de transposiciones.*

Se puede probar que toda permutación es siempre un producto de una cantidad par de transposiciones o siempre un producto de una cantidad impar de transposiciones, lo que justifica lo siguiente:

Definición 1.31. $\alpha \in S_n$. *Decimos que* α *es una permutación par si es producto de un número par de transposiciones o permutación impar en caso contrario. Definimos el signo de* α *como*

$$sgn(\alpha) = \begin{cases} +1, & si\ \alpha\ \ es\ \ par; \\ -1, & si\ \alpha\ \ es\ \ impar. \end{cases}$$

Observación 1.32. *La función signo es multiplicativa, es decir para todas* $\alpha, \beta \in S_n$ *se tiene que* $sgn(\alpha\beta) = sgn(\alpha)sgn(\beta)$.

Observación 1.33. *Un* r*-ciclo es par, es decir, tiene signo* 1 *si y solamente si el orden de dicha permutación como elemento del grupo es impar.*

Teorema 1.34. *Sea* π *una permutación de* n *elementos con* r *ciclos en su factorización completa, entonces*

$$sgn(\pi) = (-1)^{n+r}.$$

Demostración. Antes de hacer la demostración, observemos primero que si tenemos una permutación $\alpha \in S_n$ de la forma $\alpha = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_t \end{pmatrix}$, llamaremos a t la longitud del ciclo y la denotaremos por $long(\alpha) = t$.

Consideremos ahora la descomposición de α en transposiciones

$$\alpha = \underbrace{\begin{pmatrix} i_1 & i_t \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} i_1 & i_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \end{pmatrix}}_{t-1\ \ transposiciones}$$

por lo que $sgn(\alpha) = (-1)^{t-1}$, entonces $sgn(\alpha) = (-1)^{long(\alpha)-1}$.

Ahora, sea $\pi \in S_n$ con $\pi = \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_r$ su factorización completa en ciclos, veamos que

$$\begin{aligned} sgn(\pi) &= \prod_{i=1}^{r} sgn(\alpha_i) \\ &= \prod_{i=1}^{r} (-1)^{long(\alpha_i)-1} \\ &= (-1)^{\sum_{i=1}^{r} long(\alpha_i)-1} \\ &= (-1)^{(\sum_{i=1}^{r} long(\alpha_i))-r} \\ &= (-1)^{n-r} \\ &= (-1)^{n-r}(-1)^{2r} \\ &= (-1)^{n-r+2r} \\ &= (-1)^{n+r} \end{aligned}$$

por lo tanto, si π una permutación de n elementos con r ciclos en su factorización completa, entonces

$$sgn(\pi) = (-1)^{n+r}$$

□

Observación 1.35. *Sean π, α dos permutaciones de n elementos con r y t ciclos en sus factorizaciones completas respectivamente, entonces $sgn(\pi) = sgn(\alpha)$ si y sólo si r y t son congruentes módulo 2.*

Definición 1.36. *El grupo diédrico D_n, para $n \geq 2$, es un grupo de orden $2n$ que es generado por dos elementos s y t tales que*

$$s^n = id$$

$$t^2 = id$$

$$tst = s^{-1}$$

Notemos que D_n no es abeliano para $n \geq 3$, mientras que D_2 es el 4-grupo de Klein.

Teorema 1.37. *Si G es un grupo finito y $a, b \in G$ tales que $a^2 = id = b^2$, entonces $\langle a, b\rangle \simeq D_n$ para alguna n.*

Demostración. Sea $a^2 = id = b^2$, por demostrar que $\langle a, b\rangle \simeq D_n$ para alguna n.

Definamos el elemento $s \in G$ como $s = ab$, como G es finito, el elemento s es de orden finito, digamos n, veamos que

$$asa = s^{-1}$$

notemos que como $a^2 = id$ y $b^2 = id$, entonces $a = a^{-1}$ y $b = b^{-1}$, entonces

$$asa = a(ab)a = a^2ba = ba = b^{-1}a^{-1} = (ab)^{-1} = s^{-1}$$

Por la definición 1.36 tenemos que $\langle a, s\rangle$ es un grupo diédrico de orden $2n$.

Ahora veamos que

$$\langle a, s\rangle = \langle a, b\rangle$$

Para $\langle a, s\rangle \subseteq \langle a, b\rangle$ la demostración es directa, puesto que cualquier palabra formada por a y $s = ab$ o sus inversos, a y ba respectivamente, puede ser expresada con a y b.

Para $\langle a, b\rangle \subseteq \langle a, s\rangle$ basta mostrar que los generadores $a, b \in \langle a, s\rangle$.

$a \in \langle a, s\rangle$ por ser uno de los generadores.

$b \in \langle a, s\rangle$ ya que $as = a(ab) = b$.

como los generadores de $\langle a, b\rangle$ están en $\langle a, s\rangle$, cualquier palabra formada por a, b o sus inversos (que son ellos mismos), puede ser expresada en términos de a y s y por lo tanto $\langle a, b\rangle \subseteq \langle a, s\rangle$.

De lo anterior se sigue que

$$\langle a, s\rangle = \langle a, b\rangle$$

y como $\langle a, s\rangle \simeq D_n$ entonces $\langle a, b\rangle \simeq D_n$.

□

Debido a que la función signo es multiplicativa, el subconjunto de permutaciones pares resulta ser un subgrupo del grupo simétrico:

Definición 1.38. $A_n = \{\sigma \in S_n | sgn(\sigma) = 1\}$ *es el grupo alternante.*

Teorema 1.39.

$$|A_n| = \frac{|S_n|}{2} = \frac{n!}{2}$$

Demostración. Definamos

$$f : A_n \to S_n \diagdown A_n$$

como $f(\alpha) = \alpha(12)$.

La función

$$g : S_n \diagdown A_n \to A_n$$

$g(\beta) = \beta(12)$ es la inversa de f por lo cual estos dos conjuntos tienen el mismo número de elementos, es decir

$$|A_n| = |S_n \diagdown A_n|$$

además $S_n = A_n \cup (S_n \diagdown A_n)$ entonces $|S_n| = |A_n| + |S_n \diagdown A_n|$, por lo tanto

$$|A_n| = \frac{|S_n|}{2}.$$

□

Observación 1.40. *Sean* $\alpha, \beta \in S_t$ *con* α *un ciclo de longitud* 5 *y* β *un ciclo de longitud* 3*. Si* $\alpha^n = \beta^m$ *para algunas* $n, m \in \mathbb{Z}$*, entonces* n *es un múltiplo de* 5 *y* m *es un múltiplo de* 3*.*

Demostración. Como α es un 5-ciclo y β un 3-ciclo, α y β tienen orden 5 y 3 respectivamente, por Lagrange, las potencias no triviales de α tienen orden 5 y las potencias no triviales de β tienen orden 3, pero 5 y 3 son primos relativos, por lo que las potencias de un 5-ciclo no coinciden con las potencias de un 3-ciclo, a menos que sean triviales. Así $\alpha^n = id = \beta^m$, entonces $5|n$ y $3|m$. $\square$

Capítulo 2

Preliminares

Entre los años 1600 a 1650 las campanas de las iglesias se construyen afianzadas en una circunferencia, lo que les permitió a los campaneros tener un mejor control del momento en que éstas sonarían. Surge por ello una moda en Inglaterra entre los campaneros, que consistía en cambiar el orden en que se tocaban las campanas de una iglesia para crear composiciones. Debido a cuestiones técnicas, sonoras y para incrementar el desafío, se establecen reglas para crear dichas composiciones, por ejemplo, se inicia tocando las campanas en orden descendente y se regresa al orden inicial al terminar, pero se busca que cualquier reacomodo en la forma de tocar las campanas, no se repita en una misma composición. El reto es tocar las campanas bajo estas reglas por el mayor tiempo posible, convirtiendo a este juego en un desafío.

Antes de explicar con detalle las reglas establecidas para crear las composicones musicales mencionadas, introduciremos algunas definiciones y analizaremos la forma de describir el problema anterior en términos matemáticos.

2.1. Definiciones básicas

Supongamos que tenemos n campanas sonando, enumeradas en orden de tono $1, 2, 3, \ldots, n$. Cuando las campanas son tocadas en orden descendente de tono $1, 2, 3, \ldots, n$ diremos que están sonando por rondas. Llamaremos una fila a las n campanas tocadas de una manera en particular, por ejemplo, para $n = 5$ el tocar primero la campana 3, después la 5, seguida de la 2, después de la campana 3 y tocando al final la número 1, es una fila, que representaremos por el momento como *3 5 2 3 1*.

Por ejemplo, la ronda en este caso sería

1 2 3 4 5,

mientras que la fila

$$\mathit{2\ 1\ 4\ 3\ 5}$$

significa que la campana con el tono *2* ahora suena en el primer lugar, la campana con tono *1* en segundo lugar, la campana con tono *4* suena en tercer lugar, la campana con tono *3* en cuarto lugar y la campana con tono *5* suena en quinto lugar, es decir, con respecto a la posición inicial las campanas que estaban en las posiciones uno y dos intercambian de lugar, las campanas que se tocaban en las posiciones tres y cuatro se intercambian de lugar y la campana que estaba en la posición cinco se queda fija.

Podemos representar la fila

$$\mathit{2\ 1\ 4\ 3\ 5}$$

de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} = (12)(34) \in S_5$$

donde el primer renglón del arreglo anterior representa las posiciones en que se tocan las campanas, el segundo renglón cuáles de las campanas son tocadas en esa posición. Formalmente, podemos entonces considerar una fila como un elemento en S_5 en este caso, y en general como un elemento de S_n:

Definición 2.1. *Una* **fila** *es cualquier permutación de las n campanas, es decir, una función biyectiva f tal que*

$$f : \{1, 2, 3, \ldots, n\} \to \{1, 2, 3, \ldots, n\}$$

donde el dominio de f representa las posiciones en que se tocan las campanas y la imagen de f representa a las distintas campanas y

$$f(i) \qquad\qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

representa a la campana que se toca en el lugar i. La **ronda** *es la permutación identidad.*

Notación 2.2. *Escribiremos también la fila*

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & i & \cdots & n \\ f(1) & f(2) & f(3) & \cdots & f(i) & \cdots & f(n) \end{pmatrix}$$

de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} f(1) & f(2) & f(3) & \cdots & f(i) & \cdots & f(n) \end{bmatrix}$$

donde el paréntesis cuadrado denota al segundo renglón de la permutación.

Ejemplo 2.3. *La permutación* $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$*, con* $f(1) = 2$*,* $f(2) = 1$*,* $f(3) = 4$*,* $f(4) = 3$ *y* $f(5) = 5$ *es una fila que corresponde a tocar las cinco campanas* $1, 2, 3, 4, 5$ *ahora en el orden* $2, 1, 4, 3, 5$*. Tenemos que en este caso*

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

La ronda en este caso es

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Recordemos ahora que el problema inicial busca crear composiciones cambiando el orden en que se tocan las campanas. Por ejemplo, si tenemos la ronda

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

podemos cambiarla a la fila

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

que significa que la campana con el tono *2* ahora suena en el primer lugar, la campana con tono *1* en segundo lugar, la campana con tono *4* suena en tercer lugar, la campana con tono *3* en cuarto lugar y la campana con tono *5* suena en quinto lugar, es decir, las campanas que estaban en las posiciones uno y dos intercambian de lugar, las campanas que se tocaban en las posiciones tres y cuatro se intercambian de lugar y la campana que estaba en la posición cinco se queda fija.

Dado que esto corresponde a un reacomodo en el orden en que se tocan las campanas, podemos representar el proceso en que la fila

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

se convierte en la fila

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

también como una permutación de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \in S_5$$

En su forma matricial, cada renglón de la matriz representa a las distintas posiciones en que se tocan las campanas. Sabemos que así como una permutación se puede representar en forma matricial, podemos representarla también como producto de ciclos, así, en el ejemplo, observamos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} = (12)(34) \in S_5$$

donde justamente la permutación (12)(34) indica que las campanas que se encuentran en la posición 1 y 2 intercambian de posición al igual que las campanas que están en la posición 3 y 4.

Definición 2.4. *Un* **cambio** *es cualquier permutación en el orden en que se tocan n campanas, es decir, una función biyectiva a tal que*

$$a : \{1, 2, 3, \ldots, n\} \to \{1, 2, 3, \ldots, n\}$$

donde tanto el dominio como la imagen de a representan las posiciones en que se tocan las campanas e indica que en la posición i ahora se tocará la campana que se tocaba en la posición $a(i)$, $i = 1, 2, 3, ..., n$.

Ejemplo 2.5. *La permutación $a : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$, con $a(1) = 2$, $a(2) = 1$, $a(3) = 4$, $a(4) = 3$ y $a(5) = 5$ o bien*

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} = (12)(34),$$

es un cambio que en el que las campanas que se encuentran en la posición 1 y 2 intercambian de posición al igual que las campanas que están en la posición 3 y 4.

Ejemplo 2.6. *La permutación $b : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$, con $b(1) = 2$, $b(2) = 3$, $b(3) = 1$, $b(4) = 4$ y $b(5) = 5$ o bien*

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = (123),$$

es un cambio en el que primero se tocará la campana que se tocaba en la posición 2, en la segunda posición se tocará la campana que se tocaba en la posición 3, en tercer lugar se tocará la campana que antes se tocaba en la posición 1 y las campanas que se tocaban en las posiciones 4 y 5, no cambian de posición, es decir, se siguen tocando en las posiciones 4 y 5 respectivamente.

Usaremos los cambios para modificar a las filas. Por ejemplo si tenemos la fila

$$f = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

el cambio (12)(34) da lugar a la fila

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

ya que las campanas que se encuentran en la posición 1 y 2 intercambian de posición al igual que las campanas que están en la posición 3 y 4. Por otro lado, al aplicar el cambio (123) a la fila

$$f = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

dado que este cambio indica que primero se tocará la campana que se tocaba en la posición 2, en la segunda posición se tocará la campana que se tocaba en la posición 3, en tercer lugar se tocará la campana que antes se tocaba en la posición 1 y las campanas que se tocaban en las posiciones 4 y 5, no cambian de posición, se tiene que ahora se debe tocar primero la campana que se tocaba en la posición 2, es decir la campana 4, en la segunda posición se tocará la campana que se tocaba en la posición 3, es decir la 3, en tercer lugar se tocará la campana que antes se tocaba en la posición 1, es decir, la campana 5 y las campanas que se tocaban en las posiciones 4 y 5, no cambian de posición. Obtenemos entonces la fila:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

o escrito en lenguaje matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pero observemos que esta permutación es la que se obtiene de componer (123) seguida de f[1]:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} (123) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En pocas palabras, los cambios son permutaciones que actúan sobre las filas. Definamos esta acción en general:

Definición 2.7. *Consideremos n campanas, F el conjunto de filas y C el conjunto de cambios. Definimos $\bullet : F \times C \to F$ como*

$$f \bullet a = fa$$

para cada $a \in C$ y $f \in F$.

Veamos que efectivamente es una acción por la izquierda:

1. $f \bullet id = fid = f$ para cada $f \in F$,
2. $(f \bullet a) \bullet b = (f \bullet a)b = (fa)b = f(ab) = f \bullet (ab)$ para cualesquiera $a, b \in C$, $f \in F$.

[1] Recordemos que en este trabajo las permutaciones se componen de derecha a izquierda, es decir, dadas x y y permutaciones, xy significa que aplicamos primero y y después x.

Ejemplo 2.8.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&5&4&3\end{pmatrix}\bullet(25)(134) &= \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&5&4&3\end{pmatrix}(25)(134)\\ &= \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&5&4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&5&4&1&2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&3&4&2&1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Observemos que si hacemos actuar una permutación a en la fila

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$$

tenemos

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}\bullet a &= \begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\x_1&x_2&\cdots&x_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\a(1)&a(2)&\cdots&a(n)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\x_{a(1)}&x_{a(2)}&\cdots&x_{a(n)}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

en otras palabras tenemos que:

Observación 2.9.

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}\bullet a = \begin{bmatrix} x_{a(1)} & x_{a(2)} & \cdots & x_{a(n)} \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 2.10. *Consideremos el cambio $a = (25)(134)$. Por la observación anterior sabemos que:*

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{bmatrix}\bullet a &= \begin{bmatrix} x_{a(1)} & x_{a(2)} & x_{a(3)} & x_{a(4)} & x_{a(5)} \end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} x_3 & x_5 & x_4 & x_1 & x_2 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Si la fila del ejemplo 2.10 es $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ tenemos que $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 5$, $x_4 = 4$, $x_5 = 3$, y así

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}\bullet a = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 2.11.

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&2&1&3&5\end{pmatrix}\bullet(13) = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&4&3&5\end{pmatrix}$$

o usando la otra notación

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}\bullet(13) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 2.12.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \bullet (2451) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

o usando la otra notación

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \bullet (2451) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ahora que ya hemos definido los conceptos básicos, retomemos el problema a resolver.

2.2. Reglas

Recordemos que el objetivo es crear composiciones musicales, cambiando el orden en que se tocan n campanas, en otras palabras, se busca un algoritmo que permita crear una lista de filas, pero el problema es que no todas las permutaciones están permitidas en el proceso. Se pide que se cumplan las siguientes reglas:

(R1) Se inicia y se termina con la ronda, es decir, la primera y última fila son rondas.

(R2) Salvo el inicio y el final, los demás reacomodos de las campanas son distintos, es decir, no se repiten filas (excepto la primera y la última).

(R3) Cada campana sólo puede cambiar su lugar por una posición adyacente cuando se mueva de una fila a otra.

(R4) Ninguna campana ocupa el mismo lugar por más de dos filas consecutivas.

A cualquier lista de filas que cumpla con las condiciones anteriores le llamaremos un método:

Definición 2.13. *A una sucesión finita de filas que cumplan con las condiciones R1, R2, R3 y R4 le llamaremos un* **método***.*

Se busca crear métodos de la mayor longitud posible. La mayor longitud posible que puede tener un método (mayor número de filas) es $n!+1$ debido a que S_n tiene $n!$ elementos, más la permutación identidad que se repite. ($P_n^n = n!$ más la identidad).

Definición 2.14. *Llamaremos una* **extensión** *a un método que tenga longitud* $n!+1$*.*

El problema esencial es construir métodos de varias longitudes, en particular la construcción de extensiones.

A continuación describiremos cómo contruir diferentes tipos de métodos.

2.3. Tipos de métodos

2.3.1. Plain Hunt (PH)

El siguiente método es alguno de los más simples de obtener, haremos los casos para 5 y 6 campanas y después lo generalizaremos para n campanas.

Ejemplo 2.15. Plain Hunt en 5 campanas ($PH5$)
Usaremos dos permutaciones de manera alternada iniciando con la ronda hasta llegar nuevamente a ella.

Sean

$$x = (12)(34)$$

$$y = (23)(45)$$

las permutaciones o cambios a usar.

Escribimos x o y para indicar qué permutación se ha usado para pasar de una fila a otra, del lado derecho escribiremos el producto de todos los cambios usados hasta el momento. También, para simplificar la notación, de aquí en adelante omitiremos los paréntesis cuadrados al denotar a las filas, por ejemplo, denotaremos la ronda para cinco campanas como 12345 en lugar de $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.

$$\begin{array}{rl}
12345 & \\
x & x = (12)(34) \\
21435 & \\
y & xy = (12453) \\
24153 & \\
x & xyx = (14)(35) \\
42513 & \\
y & (xy)^2 = (14325) \\
45231 & \\
x & (xy)^2x = (15)(24) \\
54321 & \\
y & (xy)^3 = (15234) \\
53412 & \\
x & (xy)^3x = (13)(25) \\
35142 & \\
y & (xy)^4 = (13542) \\
31524 & \\
x & (xy)^4x = (23)(45) \\
13254 & \\
y & (xy)^5 = id \\
12345 &
\end{array}$$

Observamos que después de aplicar las permutaciones 10 veces (alternadas) regresamos a la ronda inicial, así tenemos un total de 11 filas en $PH5$ que incluye a la ronda inicial y a la ronda final.

Tomando en cuenta que, como se verá más adelante, las permutaciones x, y generan un grupo de orden 10, pudimos haber predicho esto desde un principio, sin embargo, no necesariamente sucede que al emplear dos permutaciones A y B tales que $|\langle A, B\rangle| = m$ podamos conseguir un método de longitud $m+1$.

Observación 2.16. *Debido a que se busca que el arreglo cumpla la regla* 3*, es decir, que cada campana sólo pueda cambiar su lugar por una posición adyacente cuando se mueva de una fila a otra, debemos tomar permutaciones* A *y* B *que manden a cada* i *en* $i-1$ *o en* $i+1$*, y para hacerlo lo más sencillo posible se eligen* A *y* B *productos de transposiciones.*

Observación 2.17. *Supongamos que tenemos* A *y* B *dos permutaciones que son producto de transposiciones, así* $A^2 = B^2 = id$*, y tales que* $|\langle A, B\rangle| = m$*. Al iniciar con la ronda e ir aplicando alternadamente* A *y* B*, puede ser que se obtengan* $m+1$ *filas contando la ronda, pero eso no garantiza que se obtenga una extensión ya que no necesariamente se cumple la regla* 4*.*

Ejemplo 2.18. *Sean*

$$A = (23)(45)$$

$$B = (23).$$

Éstas dos permutaciones son un producto de transposiciones y tenemos que:

$$AB = (45)$$

$$ABA = (45)(23)(45) = (23) = B$$

$$BA = (23)(23)(45) = AB = (45),$$

de donde observamos que

$$|\langle A, B\rangle| = |\{id, A, AB, B\}| = 4.$$

A la ronda 12345 *le aplicamos* A *y* B *alternadamente, así tenemos:*

$$\begin{array}{rl}
12345 & \\
A & A = (23)(45) \\
13254 & \\
B & AB = (23)(45)(23) = (45) \\
12354 & \\
A & ABA = (45)(23)(45) = (23) \\
13245 & \\
B & (AB)^2 = (45)(45) = id \\
12345. &
\end{array}$$

Tenemos un arreglo con $m+1$ filas, pero que no cumple con la regla 4 ya que la campana 1 ocupa siempre la misma posición.

Veamos ahora el ejemplo para $PH6$:

Ejemplo 2.19. Plain Hunt en 6 campanas ($PH6$)
Las permutaciones que vamos a usar son

$$x = (12)(34)(56)$$

$$y = (23)(45).$$

Tenemos entonces el siguiente método:

$$\begin{array}{rl}
123456 & \\
x & x = (12)(34)(56) \\
214365 & \\
y & xy = (12)(34)(56)(23)(45) = (124653) \\
241635 & \\
x & xyx = (124653)(12)(43)(56) = (14)(36) \\
426153 & \\
y & (xy)^2 = (14)(36)(23)(45) = (145)(263) \\
462513 & \\
x & (xy)^2x = (145)(263)(12)(34)(56) = (16)(24)(35) \\
645231 & \\
y & (xy)^3 = (16)(35)(24)(23)(45) = (16)(25)(34) \\
654321 & \\
x & (xy)^3x = (25)(34)(16)(12)(34)(56) = (15)(26) \\
563412 & \\
y & (xy)^4 = (15)(26)(23)(45) = (154)(236) \\
536142 & \\
x & (xy)^4x = (154)(236)(12)(34)(56) = (13)(25)(46) \\
351624 & \\
y & (xy)^5 = (13)(25)(46)(23)(45) = (135642) \\
315264 & \\
x & (xy)^5x = (135642)(12)(34)(56) = (23)(45) \\
132546 & \\
y & (xy)^6 = (23)(45)(24)(45) = id \\
123456. &
\end{array}$$

Siguiendo los ejemplos anteriores, para desarrollar $PH7$ las permutaciones a usar serían:

$$x = (12)(34)(56)$$

$$y = (23)(45)(67).$$

Veamos ahora el caso general:

Plain Hunt en n campanas (PHn)

Se inicia con la ronda y se aplican alternadamente las permutaciones x y y, cuya definición depende de si n es par o impar.

Caso 1. $n = 2m$ con $m \in \mathbb{N}^+$

Las permutaciones usadas serán

$$x = (12)(34)(56)\cdots((n-1)n)$$

$$y = (23)(45)(67)\cdots((n-2)(n-1)).$$

Caso 2. $n = 2m+1$ con $m \in \mathbb{N}^+$

Las permutaciones a usar serán

$$x = (12)(34)(56)\cdots((n-2)(n-1))$$

$$y = (23)(45)(67)\cdots((n-1)n).$$

Por el teorema 1.37, sabemos que las permutaciones x y y generan un grupo isomorfo al subgrupo diédrico, $D_n \leq S_n$, con $|D_n| = 2n$.

Veamos entonces cómo D_5 es generado a partir de las permutaciones x y y que se usan para obtener $PH5$.

Ejemplo 2.20. D_5 generado por las permutaciones x y y

Sean

$$x = (12)(34)$$

$$y = (23)(45).$$

Una de las posibles palabras que podríamos formar sería:

$$xyyxxyxxxyxy = xyxyxy;$$

de modo más general, haciendo este tipo de reducciones, todas las palabras tendrían alguna de las siguientes cuatro formas:

$$xyxy\cdots\cdots y$$

$$xyxy\cdots\cdots x$$

$$yxyx\cdots\cdots y$$

$$yxyx\cdots\cdots x.$$

Entonces tenemos por ejemplo las siguientes palabras:

$$x = (12)(34)$$

$$xy = (12)(34(23)(45) = (12453)$$
$$xyx = (24531)(12)(34) = (14)(35)$$
$$(xy)^2 = (14)(35)(23)(45) = (14325)$$
$$(xy)^2x = (25143)(12)(34)(56) = (15)(24)$$
$$(xy)^3 = (14)(24)(23)(45) = (15234)$$
$$(xy)^3x = (23415)(12)(34)(56) = (13)(25)$$
$$(xy)^4 = (13)(25)(23)(45) = (13542)$$
$$(xy)^4x = (13542)(12)(34) = (23)(45)$$
$$(xy)^5 = (23)(45)(23)(45) = id.$$

Observemos que

$$yx = idyx = (xy)^5yx = xyxyxyxyxyyx = (xy)^4,$$

así $yx = (xy)^4$ *y cuando formemos palabras empezando con* y*, podemos cambiar a palabras que comiencen con* x*, y por lo tanto en el arreglo anterior están todas las palabras posibles.*

El generado es entonces

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle =&\{(12)(34), (12453), (14)(35), (14525), (15)(24), (15234), (13)(25),\\ &(13542), (23)(54), id\}\end{aligned}$$

con $|\langle x, y\rangle| = 10$ *y como* x *y* y *son producto de transposiciones, en particular tienen orden* 2*, por el teorema 1.37* $\langle x, y\rangle \cong D_n$ *para alguna* n*, pero* $|\langle x, y\rangle| = 10 = 2(5)$*, por lo tanto* $\langle x, y\rangle \cong D_5$ *pues* $|D_5| = 2(5) = 10$.

Usando PHn logramos un método de longitud $2n$ al usar dos permutaciones x y y de orden 2 que generaban a D_n. La pregunta que surge entonces es ¿Podemos describir un método con más de $2n$ filas?

La idea general es diseñar métodos con más de $2n$ filas, para ello hay que agregar otras permutaciones usando el menor número de permutaciones para dejar el método tan simple como sea posible, pero obteniendo un método con mayor longitud, esperando obtener una extensión.

Para ello, podemos empezar por observar el comportamiento que tiene cada campana en PHn y así obtener a partir de ello cómo deben de ser las permutaciones que deben agregarse. Para darnos una idea de esto, veamos los siguientes ejemplos para $PH5$

Ejemplo 2.21. Modificación de $PH5$

Para $PH5$, consideramos solamente las filas, sin considerar la ronda final, tenemos entonces:

$$\begin{array}{c} 12345 \\ 21435 \\ 24153 \\ 42513 \\ 45231 \\ 54321 \\ 53412 \\ 35142 \\ 31524 \\ 13254 \end{array}$$

Queremos encontrar una permutación que al aplicarla a la última fila del método anterior (sin tomar en cuenta la ronda final) pueda extender el método a uno más grande. Si usamos la permutación $x = (12)(34)$ repetiríamos la penúltima fila del arreglo anterior, por lo tanto, descartamos usar 'x'. Si usamos la permutación $y = (23)(45)$, regresaríamos a la ronda, lo cual no extiende el método. Buscamos entonces otras permutaciones posibles.

Como la regla tres, R3, nos dice que sólo podemos cambiar el lugar de las campanas por una posición adyacente, empezamos por usar permutaciones que hagan esto, es decir, transposiciones que intercambian un número con su sucesor o productos ajenos de dos de estas transposiciones. Veamos cómo podemos realizar estos movimientos verificando que se cumplan las cuatro reglas establecidas.

Si en la última fila del arreglo anterior aplicamos la permutación (12), es decir intercambiamos las campanas que están en el lugar 1 y 2

$$\begin{array}{r} 13254 \\ (12) \\ 31254. \end{array}$$

Considerando ahora el arreglo completo más este cambio obtenemos el siguiente arreglo

12345
21435
24153
42513
45231
54321
53412
35142
31524
13254
31254.

Veamos que la campana que está en la posición 5, que en este caso es la campana número '4' ocupa el mismo lugar por más de dos filas consecutivas, violando R4, por lo tanto, la permutación (12) *no es la adecuada. Necesitamos entonces una permutación que mueva al elemento que se encuentra en la quinta posición, lo que descarta también a las permutaciones* (23) *y* (34)*.*

Consideremos entonces la permutación $c = (45)$*, que actúa en la fila* 13254 *del siguiente modo*

$$\begin{array}{r} 13254 \\ c \\ 13245 \end{array}$$

Consideramos ahora el arreglo completo, es decir, las 10 filas que teníamos al principio más la fila resultante, tenemos:

12345
21435
24153
42513
45231
54321
53412
35142
31524
13254
13245.

Hasta el momento, este arreglo no viola ninguna de las reglas a seguir. Si aplicamos 'x' a la fila 13245 *y seguimos el procedimiento que usamos para* $PH5$*,* *obtenemos*

$$\begin{array}{c}
13245\\
31425\\
34152\\
43512\\
45321\\
54231\\
52413\\
25143\\
21534\\
12354\\
13245.
\end{array}$$

pero 13245*, que es el resultado de aplicar 'y' a* 12354*, aparece al inicio y al final del arreglo. Si aplicaramos 'x' a* 12354 *obtendríamos* 21534 *lo que hace que se repitan la penúltima fila de esa columna y la primera fila de la siguiente columna, por lo tanto, no podemos aplicar ni 'x' ni 'y'. Lo que hacemos es aplicar la permutación* $c = (45)$*, así regresamos a la ronda* 12345*.*

Así, pudimos construir un método más largo que PH5 usando otro tipo de permutación, a saber

$$\begin{array}{rrr}
 & c & c\\
12345 & 13245 & 12345.\\
x & x & \\
21435 & 31425 & \\
y & y & \\
24153 & 34152 & \\
x & x & \\
42513 & 43512 & \\
y & y & \\
45231 & 45321 & \\
x & x & \\
54321 & 54231 & \\
y & y & \\
53412 & 52413 & \\
x & x & \\
35142 & 25143 & \\
y & y & \\
31524 & 21534 & \\
x & x & \\
13254 & 12354 &
\end{array}$$

Para pasar de 13254 *a la fila* 13245 *usamos la permutación* $c = (45)$*, de igual manera, para pasar de* 12354 *a la fila* 12345

Ahora, para pasar de la ronda 12345 *a la fila* 13245 *usamos*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = (23)$$

que es el producto $xyxyxyxyxc = (xy)^4xc = y^{-1}c = (23)(45)(45) = (23)$.

La segunda igualdad se debe a que $(xy)^5 = id$, *o bien* $((xy)^4)xy = id$, *de donde se tiene que* $(xy)^4x$ *es el inverso de* y.

Observemos que las primeras 10 filas corresponden a los elementos de D_5, *cuando aplicamos la permutación c, obtenemos otras 10 filas, más la identidad; las 10 filas que obtuvimos consisten de los elementos de* $y^{-1}cD_5$ *y si repitiéramos este mismo proceso, tendríamos una nueva columna con los elementos de* $(y^{-1}c)^2D_5$ *pero* $(y^{-1}c)^2 = id$ *y por lo tanto* $(y^{-1}c)^2D_5 = D_5$.

Observación 2.22. *Ahora que pudimos encontrar una permutación adecuada para poder ampliar* $PH5$, *notemos que en el ejemplo 2.21 cada una de las campanas sigue comportamientos similares, veamos cómo son éstos coloreando cada una de las distintas campanas involucradas:*

12345	13245	12345.
21435	31425	
24153	34152	
42513	43512	
45231	45321	
54321	54231	
53412	52413	
35142	25143	
31524	21534	
13254	12354	

Observamos con ellos que la campana '1' sigue el mismo camino en cada una de las dos columnas anteriores. En la segunda columna, la campana '2' que ahora se encuentra en la tercera posición, sigue el camino que la campana '3' seguía en la primera columna cuando se encontraba en ese sitio. La campana '3' que ahora se encuentra en la segunda posición, sigue el camino que la campana '2' seguía cuando se encontraba en ese sitio. Las campanas '4' y '5' siguen el mismo camino que seguían anteriormente. Observamos también que la campana 1 *siempre aparece en la primera posición tanto en la primera como en la última fila de cada columna, esto va a servirnos más adelante para probar resultados más interesantes.*

Notando el comportamiento de los colores que tienen las campanas en $PH5$ podemos describir un método que lo extienda, tratando de seguir el mismo patrón de colores pero usando campanas diferentes, usando el hecho de que al repetir el comportamiento de las campanas en otro arreglo de 10 filas, garantizamos que se cumplan R1, R2, R3 y R4 pues $PH5$ ya las cumplía.

Ejemplo 2.23. *Tomando sólo en cuenta el comportamiento dado por la coloración vista en 2.22, ampliaremos $PH5$ a un metódo más largo que el que obtuvimos en 2.21. Consideremos $PH5$*

12345
21435
24153
42513
45231
54321
53412
35142
31524
13254

En el diagrama anterior, observemos que el camino que sigue la campana 1 está marcado en azul, vamos a tratar de extender el método y en lugar de que sea la campana 1 la que siga el recorrido azul vamos a cambiarla por la campana 3, la campana 2 que seguía el camino magenta vamos a cambiarla por la campana 1, la campana 3 que seguía el camino negro se cambiará por la campana 2 y las campanas 4 y 5 seguirán el mismo camino que seguían anteriormente, así tenemos

12345	31245
21435	13425
24153	14352
42513	41532
45231	45123
54321	54213
53412	52431
35142	25341
31524	23514
13254	32154

De manera análoga, para construir la tercera columna, haremos que la campana 2 siga el camino que seguía la campana 1 en $PH5$, la campana 3 siga el camino que seguía la campana 2, la campana 1 siga el camino que seguía la campana 3 y las campanas 4 y 5 sigan el mismo camino que seguían anteriormente, por lo que tenemos

12345	31245	23145	12345.
21435	13425	32415	
24153	14352	34251	
42513	41532	43521	
45231	45123	45312	
54321	54213	54132	
53412	52431	51423	
35142	25341	15243	
31524	23514	12534	
13254	32154	21354	

Observemos que para pasar de la ronda 12345 *a la fila* 31245*, es decir, para ir de la primera fila de la primera columna a la primera fila de la segunda columna, usamos*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = (132)$$

Esta permutación es el producto $xyxyxyxyxm = (xy)^4xm = y^{-1}m$*, así* $y^{-1}m =$ (132) *y equivale a cambiar la campana* 1 *por la* 3*, la* 3 *por la* 2 *y la* 2 *por la* 1*.*

La segunda columna corresponde entonces a la clase lateral $y^{-1}mD_5$*, mientras que la tercera columna es* $(y^{-1}m)^2D_5$*. Si continuáramos de esta manera obtendríamos* $(y^{-1}m)^3D_5$ *pero* $(y^{-1}m)^3 = id$ *y por lo tanto* $(y^{-1}c)^3D_5 = D_5$*, lo cual nos daría la columna con la que comenzamos.*

Notamos entonces por el ejemplo 2.21 y la observación 2.22 que usando clases laterales obtenemos un método más largo pero bastante simple y así, por construcción, tenemos que en cada clase lateral se cumple el mismo patrón que en el arreglo original.

De modo más general, los métodos que describiremos serán uniones de clases laterales de D_n, pero ¿cómo debemos elegir esas clases laterales de modo que cumplan con las reglas?

Para responder a esta pregunta veremos otro tipo de método.

2.3.2. Plain Bob (PB)

La idea general de este método es combinar Plain hunt con algunas clases laterales en particular, agregando una permutación adecuada antes de que en Plain hunt se llegue a la ronda.

Daremos la construcción de Plain Bob en 4 campanas ($PB4$) usando primero $PH4$.

Consideremos $PH4$

$$\begin{array}{rl}
1234 & \\
x & x=(12)(34) \\
2143 & \\
y & xy=(12)(34)(23)=(1243) \\
2413 & \\
x & xyx=(1243)(12)(34)=(14) \\
4231 & \\
y & (xy)^2=(14)(23) \\
4321 & \\
x & (xy)^2x=(14)(23)(12)(34)=(13)(24) \\
3412 & \\
y & (xy)^3=(13)(24)(23)=(1342) \\
3142 & \\
x & (xy)^3x=(1342)(12)(34)=(23) \\
1324 & \\
y & (xy)^4=(23)(23)=id \\
1234 &
\end{array}$$

donde x, xy, xyx, $(xy)^2$, $(xy)^2x$, $(xy)^3$, $(xy)^3x$ y $(xy)^4$ son los elementos de D_4

Para hacer Plain Bob en 4 campanas, en lugar de hacer al final y, hacemos $z=(34)$ y seguimos aplicando x, y alternadamente, es decir

$$\begin{array}{rlrl}
 & & z & y^{-1}z=(234) \\
1234 & & 1342 & \\
x & x=(12)(34) & x & (y^{-1}z)x=(132) \\
2143 & & 3124 & \\
y & xy=(1243) & y & (y^{-1}z)xy=(13) \\
2413 & & 3214 & \\
x & xyx=(14) & x & (y^{-1}z)xyx=(1234) \\
4231 & & 2341 & \\
y & (xy)^2=(14)(23) & y & (y^{-1}z)(xy)^2=(124) \\
4321 & & 2431 & \\
x & (xy)^2x=(13)(24) & x & (y^{-1}z)(xy)^2x=(143) \\
3412 & & 4213 & \\
y & (xy)^3=(1342) & y & (y^{-1}z)(xy)^3=(1432) \\
3142 & & 4123 & \\
x & (xy)^3x=(23)=y^{-1} & x & (y^{-1}z)y^{-1}=(24) \\
1324 & & 1432. &
\end{array}$$

Hasta este momento hemos aplicado el cambio

$$(y^{-1}z)(xy)^3x=(y^{-1}z)y^{-1}$$

y análogamente en lugar de hacer y al final (pues esto provocaría que se repitiera la fila 1342) hacemos z nuevamente y volvemos a alternar x y y para obtener ahora la clase lateral

$$(y^{-1}zy^{-1}z)D_4 = (y^{-1}z)^2 D_4$$

es decir

$$
\begin{array}{rlrl}
z & (y^{-1}z) = (234) & z & y^{-1}zy^{-1}z = (y^{-1}z)^2 = (243) \\
1342 & & 1423 & \\
x & (y^{-1}z)x = (132) & x & (y^{-1}z)^2x = (142) \\
3124 & & 4132 & \\
y & (y^{-1}z)xy = (13) & y & (y^{-1}z)^2xy = (1423) \\
3214 & & 4312 & \\
x & (y^{-1}z)xyx = (1234) & x & (y^{-1}z)^2xyx = (1324) \\
2341 & & 3421 & \\
y & (y^{-1}z)(xy)^2 = (124) & y & (y^{-1}z)^2(xy)^2 = (134) \\
2431 & & 3241 & \\
x & (y^{-1}z)(xy)^2x = (143) & x & (y^{-1}z)^2(xy)^2x = (123) \\
4213 & & 2314 & \\
y & (y^{-1}z)(xy)^3 = (1432) & y & (y^{-1}z)^2(xy)^3 = (12) \\
4123 & & 2134 & \\
x & (y^{-1}z)y^{-1} = (24) & x & (y^{-1}z)^2y^{-1} = (34) \\
1432 & & 1243 &
\end{array}
$$

y al aplicar ahora el cambio z, tenemos en total el cambio

$$(y^{-1}z)^2 y^{-1}z = (y^{-1}z)^3$$

aplicado a la ronda inicial. Como $y^{-1} = (23)$ y $z = (34)$ entonces, calculando, tenemos que $y^{-1}z = (23)(34) = (234)$ que es un elemento de orden 3, por lo cual $(y^{-1}z)^3 = id$. En consecuencia, cuando aplicamos z, regresamos a la ronda inicial. Escribimos pues $PB4$ de la siguiente manera:

		z	$(y^{-1}z) = (234)$	z	$(y^{-1}z)^2 = (243)$	z	$(y^{-1}z)^3 = id$
1234		1342		1423		1234.	
x	$x = (12)(34)$	x	$(y^{-1}z)x = (132)$	x	$(y^{-1}z)^2x = (142)$		
2143		3124		4132			
y	$xy = (1243)$	y	$(y^{-1}z)xy = (13)$	y	$(y^{-1}z)^2xy = (1423)$		
2413		3214		4312			
x	$xyx = (14)$	x	$(y^{-1}z)xyx = (1234)$	x	$(y^{-1}z)^2xyx = (1324)$		
4231		2341		3421			
y	$(xy)^2 = (14)(23)$	y	$(y^{-1}z)(xy)^2 = (124)$	y	$(y^{-1}z)^2(xy)^2 = (134)$		
4321		2431		3241			
x	$(xy)^2x = (13)(24)$	x	$(y^{-1}z)(xy)^2x = (143)$	x	$(y^{-1}z)^2(xy)^2x = (123)$		
3412		4213		2314			
y	$(xy)^3 = (1342)$	y	$(y^{-1}z)(xy)^3 = (1432)$	y	$(y^{-1}z)^2(xy)^3 = (12)$		
3142		4123		2134			
x	$(xy)^3x = y^{-1} = (23)$	x	$(y^{-1}z)y^{-1} = (24)$	x	$(y^{-1}z)^2y^{-1} = (34)$		
1324		1432		1243			

Cada columna del método anterior es una clase lateral de D_4, a saber D_4, $(y^{-1}z)D_4$ y $(y^{-1}z)^2D_4$ respectivamente. Podemos observar que en el arreglo anterior no se repiten filas, lo que se debe a que el resultado del producto de las permutaciones usadas para llegar de una fila a otra es diferente, obteniendo así tres clases laterales distintas y por lo tanto disjuntas.

Este método puede representarse como una secuencia de permutaciones, a saber

$$x, y, x, y, x, y, x, z$$

$$x, y, x, y, x, y, x, z$$

$$x, y, x, y, x, y, x, z$$

donde $xyxyxyxz = y^{-1}z$. Denotemos por P a la permutación $y^{-1}z$. Con esta notación las columnas de $PB4$ son entonces:

$$\{id, x, xy, xyx, (xy)^2, (xy)^2x, (xy)^3, (xy)^3x\} = D_4$$
$$\{P, Px, Pxy, Pxyx, P(xy)^2, P(xy)^2x, P(xy)^3, P(xy)^3x\} = PD_4$$
$$\{P^2, P^2x, P^2xy, P^2xyx, P^2(xy)^2, P^2(xy)^2x, P^2(xy)^3, P^2(xy)^3x\} = P^2D_4.$$

Así, agregando clases laterales de D_4 a $PH4$ aumentamos el número de filas en el método, que es la idea principal. De manera más concisa podemos describir $PB4$ como:

$$D_4, PD_4, P^2D_4, id,$$

donde aparece al final la identidad pues es la ronda que se repite.

Dentro de cada clase lateral se usa el mismo procedimiento que se usa en $PH4$, obtenemos tres clases laterales pues $P = y^{-1}z = (234)$ es de orden 3 y la unión de todas las clases laterales nos da S_4, así $PB4$ resulta ser una extensión, pero esto no sucede en general.

Para el caso $PB6$, se agregan clases laterales de D_6 a $PH6$ de modo que obtengamos más filas sin desobedecer las reglas. Consideremos a las siguientes permutaciones como los generadores de D_6

$$x = (12)(34)(56)$$

$$y = (23)(45).$$

Agregamos $z = (34)(56)$ de la misma manera como lo hicimos en $PH4$, así $y^{-1}z = (23)(45)(34)(56) = (23564)$ resulta ser una permutación de orden 5, así, obtendremos 5 clases laterales de D_6, para un total de 60 permutaciones (pues $5|D_6| = 5(12) = 60$), logrando un método de 61 filas, incluyendo la ronda inicial y la final.

Tenemos entonces el siguiente arreglo

		z	(23564)	z	(25436)	z	(26345)	z	(24653)	z	*id.*
123456		135264		156342		164523		142635		123456.	
x	(12)(34)(56)	x	(132)(45)	x	(152)(46)	x	(162)(35)	x	(142)(36)		
214365		312546		513624		615432		416253			
y	(124653)	y	(13)	y	(156423)	y	(162543)	y	(145263)		
241635		321456		531264		651342		461523			
x	(14)(36)	x	(1234)(56)	x	(13254)	x	(15264)	x	(1624)(35)		
426153		234165		352146		563124		645132			
y	(145)(263)	y	(12465)	y	(135)	y	(15)(2364)	y	(1625)(34)		
462513		243615		325416		536214		654312			
x	(16)(24)(35)	x	(1436)	x	(123456)	x	(132546)	x	(1526)		
645231		426351		234561		352641		563421			
y	(16)(25)(34)	y	(145326)	y	(1246)	y	(1356)	y	(154236)		
654321		462531		243651		325461		536241			
x	(15)(26)	x	(1635)(24)	x	(14365)	x	(12345)	x	(1325)(46)		
563412		645213		426315		234516		352614			
y	(154)(236)	y	(1634)(25)	y	(14)(2653)	y	(124)	y	(13564)		
536142		654123		462135		243156		325164			
x	(13)(25)(46)	x	(153)(26)	x	(163)(24)	x	(143)(56)	x	(123)(45)		
351624		561432		641253		421365		231546			
y	(135642)	y	(154362)	y	(163452)	y	(146532)	y	(12)		
315264		516342		614523		412635		213456			
x	(23)(45)	x	(25)(46)	x	(26)(35)	x	(24)(36)	x	(34)(56)		
132546		153624		165432		146253		124365			

Las distintas columnas son:

$$D_6,\ y^{-1}zD_6,\ (y^{-1}z)^2D_6,\ (y^{-1}z)^3D_6,\ (y^{-1}z)^4D_6,\ id.$$

Se puede ver, comparando las distintas columnas, que en el arreglo anterior no hay filas repetidas, por lo tanto las clases laterales son disjuntas. Sin embargo, dado que buscamos generalizar el método anterior, comprobaremos nuevamente que las clases laterales anteriores son disjuntas, pero no mediante una inspección directa sino utilizando la observación 1.13.

Si dos clases laterales fueran iguales, digamos $(y^{-1}z)^iD_6 = (y^{-1}z)^jD_6$ con $i, j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $i > j$, tendríamos que $(y^{-1}z)^{i-j}D_6 = D_6$ con $0 < i-j \leq 4$, lo que es equivalente a que $(y^{-1}z)^{i-j} \in D_6$ con $0 < i-j \leq 4$.

Por lo tanto tenemos que ver que $(y^{-1}z)^{i-j} \notin D_6$ con $0 < i-j \leq 4$. Tenemos entonces las siguentes opciones:

Caso 1. Si $i-j = 1$ entonces

$$\begin{aligned}(y^{-1}z)^{i-j} = y^{-1}z &= (23564)\\ &= \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 1 & 3 & 5 & 2 & 6 & 4\end{pmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}1 & 3 & 5 & 2 & 6 & 4\end{bmatrix} \notin D_6.\end{aligned}$$

Caso 2. Si $i-j = 2$ entonces

$$\begin{aligned}(y^{-1}z)^{i-j} = (y^{-1}z)^2 &= (25436)\\ &= \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 1 & 5 & 6 & 3 & 4 & 2\end{pmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}1 & 5 & 6 & 3 & 4 & 2\end{bmatrix} \notin D_6.\end{aligned}$$

Caso 3.

Si $i-j = 3$ entonces

$$\begin{aligned}(y^{-1}z)^{i-j} = (y^{-1}z)^3 &= (26345)\\ &= \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 1 & 6 & 4 & 5 & 2 & 3\end{pmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}1 & 6 & 4 & 5 & 2 & 3\end{bmatrix} \notin D_6.\end{aligned}$$

Caso 4.

Si $i-j = 4$ entonces

$$\begin{aligned}(y^{-1}z)^{i-j} = (y^{-1}z)^4 &= (24653)\\ &= \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 1 & 4 & 2 & 6 & 3 & 5\end{pmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}1 & 4 & 2 & 6 & 3 & 5\end{bmatrix} \notin D_6.\end{aligned}$$

Así concluimos que $(y^{-1}z)^{i-j} \notin D_6$ con $0 < i-j \leq 4$, por lo cual todas las clases laterales usadas en $PB6$ son distintas. Como se mencionó, podemos observar esto fácilmente mediante observación directa debido a que el método no es muy grande, pero en general, para n campanas sería difícil verificar fila por fila que realmente las clases laterales que se obtienen de PBn son disjuntas. Más adelante se verificará el caso general de un modo análogo a lo que acabamos de realizar para $PB6$.

Para construir $PB6$, como x, y, z son el producto de transposiciones disjuntas de números consecutivos y sólo se usa una de ellas para pasar de una fila a otra, R3 se cumple. R1 se cumple por construcción, además como las clases laterales son disjuntas y por lo tanto no comparten elementos, no pueden repetirse filas y así R2 se cumple. Dado que sólo se agrega una permutación y el patrón que sigue cada campana en las distintas clases laterales es análogo al que seguía otra campana en $PH6$, R4 se cumple, pues ya se cumplía en $PH6$, por lo tanto $PB6$ satisface R1,R2,R3, y R4 y así es realmente un método.

En general, si queremos hacer Plain Bob en n campanas (PBn), ¿cómo debemos elegir z? Veamos algunos ejemplos que nos den idea de cómo puede ser la permutación z.

Ejemplo 2.24. *Para* $n = 5$ *consideremos las permutaciones*

$$x = (12)(34)$$

$$y = (23)(45)$$

queremos que $(y^{-1}z)^4 = id$*, por lo que proponemos* $z = (34)$*. Así* $(y^{-1}z) = (23)(45)(34) = (2354)$ *que es de orden 4, y entonces* $(y^{-1}z)^4 = id$*.*

Ejemplo 2.25. *Para* $n = 8$ *consideremos las permutaciones*

$$x = (12)(34)(56)(78)$$

$$y = (23)(45)(67)$$

queremos que $(y^{-1}z)^7 = id$*, por lo que proponemos* $z = (34)(56)(78)$*. Así* $(y^{-1}z) = (23)(45)(67)(34)(56)(78) = (2357864)$ *que es de orden 7, y entonces* $(y^{-1}z)^7 = id$*.*

En general, z depende de la paridad de n. Describamos ahora el método de manera general:

Plain Bob en n campanas (PBn)

Se inicia con la ronda y se aplican alternadamente las permutaciones x y y, salvo en los pasos múltiplos de n en los que se aplica z, seguido de lo cual se aplican alternadamente las permutaciones x y y, siempre iniciando con la permutación x. La definición de x, y y z depende de si n es par o impar.

Caso 1. $n = 2m$ con $m \in \mathbb{N}^+$

Las permutaciones usadas serán

$$x = (12)(34)(56)\cdots((n-1)n)$$

$$y = (23)(45)(67)\cdots((n-2)(n-1))$$

$$z = (34)(56)(78)\cdots((n-1)n).$$

Así

$$\begin{aligned} y^{-1}z &= (23)(45)(67)\cdots((n-2)(n-1))(34)(56)(78)\cdots((n-1)n) \\ &= (23579\cdots(n-1)n(n-2)(n-4)\cdots 4), \end{aligned}$$

con lo que tenemos que $y^{-1}z$ es de orden $n-1$ que es lo que buscábamos.

Caso 2. $n = 2m+1$ con $m \in \mathbb{N}^+$
Las permutaciones a usar serán

$$x = (12)(34)(56)\cdots((n-2)(n-1))$$

$$y = (23)(45)(67)\cdots((n-1)n)$$

$$z = (34)(56)(78)\cdots((n-2)(n-1)).$$

Así

$$\begin{aligned} y^{-1}z &= (23)(45)(67)\cdots((n-1)n)(34)(56)(78)\cdots((n-2)(n-1)) \\ &= (23579\cdots(n-2)n(n-1)(n-3)\cdots 4) \end{aligned}$$

que es un $(n-1)$-ciclo, por tanto de orden $n-1$ que es lo buscado.

Como z es un producto de transposiciones disjuntas de números consecutivos y sólo aplicamos x, y o z una vez para llegar de una fila a otra, se cumple la regla 3, como agregamos sólo z y hacemos lo mismo que en PHn, la regla 4 se cumple, basta entonces ver que las clases laterales son distintas para que se cumpla la regla 2.

Teorema 2.26. *Las $n-1$ clases laterales de D_n que surgen al construir el método PBn, a saber*

$$D_n,\ (y^{-1}z)D_n,\ (y^{-1}z)^2D_n,\ (y^{-1}z)^3D_n, \ldots, (y^{-1}z)^{n-2}D_n,$$

son clases laterales disjuntas.

Demostración. Demostraremos que si $(y^{-1}z)^iD_n = (y^{-1}z)^jD_n$ entonces $i = j$ con $i, j \in \{0, 1, 2, \ldots, n-2\}$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $i \geq j$, así $0 \leq i-j \leq n-2$. Sabemos que

$$\begin{aligned} (y^{-1}z)^iD_n = (y^{-1}z)^jD_n &\iff (y^{-1}z)^{i-j}D_n = D_n \\ &\iff (y^{-1}z)^{i-j} \in D_n. \end{aligned}$$

Basta ver entonces que $(y^{-1}z)^k \notin D_n$ con $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-2\}$ es decir, que $(y^{-1}z)^k$ no es un elemento del subgrupo diédrico de $2n$ elementos generado por x y y. Debido a que el diédrico corresponde a las simetrías del polígono de n lados, tenemos reflexiones o rotaciones, pero las rotaciones son potencia de la rotación de ángulo $2\pi/n$ que es un elemento de orden n, entonces los elementos del diédrico tendrán como orden un divisor de n o serán elementos de orden 2. Basta ver entonces que

$$(y^{-1}z)^k \text{ no es una reflexión en el diédrico y que } o((y^{-1}z)^k) \not| n.$$

Caso 1. $n = 2m$ con $m \in \mathbb{N}^+$

Veamos primero que $(y^{-1}z)^k$ no es una reflexión en el diédrico probando que $o((y^{-1}z)^k) \neq 2$.

Dado que $y^{-1}z = (23579 \cdots (n-1)n(n-2)(n-4) \cdots 4)$ que es un $(n-1)$-ciclo, para que $o((y^{-1}z)^k) = 2$, $(y^{-1}z)^k$ debería ser un producto de transposiciones disjuntas, pero una potencia de un $(n-1)-$ciclo es un producto de transposiciones disjuntas sólo en el caso en que su longitud sea par y el exponente utilizado sea la mitad de su longitud, lo cual no ocurre en este caso ya que $(n-1)$ es impar. Así $o((y^{-1}z)^k) \neq 2$.

Ahora verificaremos que $o((y^{-1}z)^k) \not| n$. Supongamos por contradicción que $o((y^{-1}z)^k)|n$. Recordando por el teorema 1.9 que $o((y^{-1}z)^k) = \frac{o(y^{-1}z)}{(k, o(y^{-1}z))}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
o((y^{-1}z)^k)|n \quad &\Longrightarrow \quad \tfrac{o(y^{-1}z)}{(k,o(y^{-1}z))}|n \\
&\Longrightarrow \quad \exists q \in \mathbb{Z} \;\; tal \;\; que \;\; n = \tfrac{o(y^{-1}z)}{(k,o(y^{-1}z))}q \\
&\Longrightarrow \quad \exists q \in \mathbb{Z} \;\; tal \;\; que \;\; n(k, o(y^{-1}z)) = o(y^{-1}z)q \\
&\Longrightarrow \quad \exists q \in \mathbb{Z} \;\; tal \;\; que \;\; n(k, n-1) = (n-1)q.
\end{aligned}$$

Por las propiedades del máximo común divisor tenemos que existe $u \in \mathbb{Z}$ tal que $n - 1 = (k, n-1)u$, de donde obtenemos que

$$n(k, n-1) = (k, n-1)uq$$

lo cual implica que $n = uq$. Así $u|n$ y $u|(n-1)$, pero $(n, n-1) = 1$, por lo cual $u = 1$. Tenemos en consecuencia las siguientes implicaciones:

$$\begin{aligned}
u = 1 \quad &\Longrightarrow \quad n = q \\
&\Longrightarrow \quad \tfrac{o(y^{-1}z)}{(k,o(y^{-1}z))} = 1 \\
&\Longrightarrow \quad o(y^{-1}z) = (k, o(y^{-1}z)) \\
&\Longrightarrow \quad n - 1 = (k, n-1) \;\; con \;\; k = 1, 2, \ldots, n-2 \\
&\Longrightarrow \quad (n-1)|k \;\; con \;\; k = 1, 2, \ldots, n-2.
\end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción. Por lo tanto $o((y^{-1}z)^k) \not| n$.

Caso 2. $n = 2m + 1$ con $m \in \mathbb{N}^+$

La demostración de $o((y^{-1}z)^k) \not| n$ es análoga al caso n par, queda entonces mostrar que $(y^{-1}z)^k$ no es una reflexión en el diédrico. Supongamos que $o((y^{-1}z)^k) = 2$, por lo observado en el caso previo tenemos que $(y^{-1}z)^k$ debería ser un producto de transposiciones disjuntas, pero esto sólo ocurre si $k = \frac{n-1}{2}$. Veamos ahora de qué forma es $(y^{-1}z)^{\frac{(n-1)}{2}}$

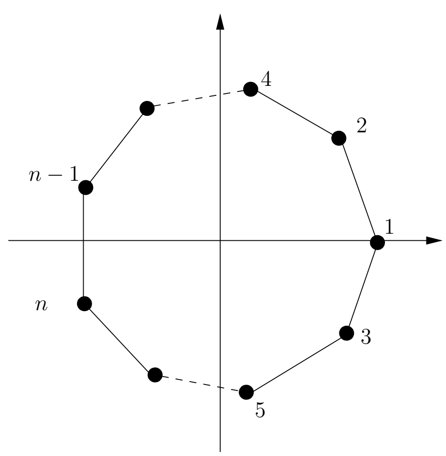
$$\begin{aligned}(y^{-1}z)^{\frac{(n-1)}{2}} &= (23579\cdots(n-2)n(n-1)\cdots 4)^{\frac{(n-1)}{2}} \\ &= (2\ n)(3(n-1))(5(n-3))\cdots((n-2)4).\end{aligned}$$

Sin embargo, veamos que $(2\ n)(3(n-1))(5(n-3))\ldots((n-2)4) \notin D_n$.

Sabemos que el grupo diédrico que estamos considerando es el generado por x y y, es decir $\langle x, y\rangle = D_n$, pero

$$\begin{aligned} xy &= (12)(34)\cdots((n-2)(n-1))(23)(45)\cdots((n-1)n) \\ &= (12468\cdots(n-1)n(n-2)(n-4)\ldots 3)\end{aligned}$$

de donde $(xy)^n = id$ y entonces xy es un generador para el subgrupo de rotaciones del diédrico. De este modo podemos visualizar a D_n como el grupo de simetrías de la siguiente figura:



$Gráfica$

Υ

Notamos que $(2\ n)(3(n-1))(5(n-3))\cdots((n-2)4) \notin D_n$ pues este elemento fija al 1 y mueve a todos los demás, pero la manera en que los mueve no representa a ninguna reflexión del polígono de la figura anterior, por lo tanto

$$(2n)(3(n-1))(5(n-3))\cdots((n-2)4) = (y^{-1}z)^{\frac{(n-1)}{2}} \notin D_n$$

de esto se sigue que $o((y^{-1}z)^k) \neq 2$.

De lo anterior vemos que si $(y^{-1}z)^i D_n = (y^{-1}z)^j D_n$ entonces $i = j$, concluyendo así que las clases laterales que surgen del método PBn son disjuntas. $\square$

Por el resultado anterior, para PBn usamos $(n-1)$ clases laterales distintas, y por lo tanto no se repiten filas (excepto la primera y la última) cumpliendo así la regla 2. Tendremos entonces $2n(n-1)$ permutaciones, pues en PHn teníamos $2n$ permutaciones y las $(n-1)$ clases laterales

$$D_n, (y^{-1}z)D_n, (y^{-1}z)^2 D_n, (y^{-1}z)^3 D_n, \ldots, (y^{-1}z)^{n-2} D_n, id$$

tienen cada una $2n$ elementos, por lo tanto obtendremos $2n(n-1)+1$ filas contando la primera y la última ronda.

Antes de seguir con la descripción de otros tipos de métodos, primero introduciremos dos tipos de permutaciones diferentes a las ya descritas anteriormente, x, y, z que nos servirán para extender a PBn y en otro caso para describir otro tipo de método, que es el que nos ayudará a resolver el problema a tratar en este trabajo.

2.3.3. Cadenas

Notemos que un método compuesto por clases laterales de D_n, que son los que trabajaremos a lo largo de esta tesis, está dividido justamente en columnas que representan a cada clase lateral de D_n, por ejemplo, para PBn se tiene

$$D_n, (y^{-1}z)D_n, (y^{-1}z)^2 D_n, (y^{-1}z)^3 D_n, \ldots, (y^{-1}z)^{n-2} D_n, id$$

en donde cada columna consta de $2n$ filas.

Definición 2.27. *Le llamaremos* **cadena** *a cada columna, es decir a cada clase lateral, que compone a un método.*

Con lo anterior diremos que el método está compuesto por una sucesión de cadenas, así, para plain bob en n campanas, tendremos $n-1$ clases laterales, es decir $n-1$ cadenas.

A continuación veremos cómo es posible describir un método usando sólo las filas iniciales de cada cadena.

Consideremos las $2n(n-1)+1$ filas que hay en PBn, sabemos que la primera fila de la primera columna, es decir, de la primera cadena, es la ronda

$$123\ldots n$$

y la última fila de esa cadena resulta de hacer actuar la permutación y^{-1} en la misma, es decir

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{bmatrix} \bullet y^{-1}.$$

Cuando n es par, $y^{-1} = (23)(45)\cdots((n-2)(n-1))$, entonces

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{bmatrix} \bullet y^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{bmatrix} \bullet (23)\cdots((n-2)(n-1)) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 & 4 & \cdots & n-1 & n-2 & n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Cuando n es impar, $y^{-1} = (23)(45)\ldots((n-1)n)$, entonces

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{bmatrix} \bullet y^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{bmatrix} \bullet (23)(45)\cdots((n-1)n) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 & 4 & \cdots & n & n-1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta lo anterior, tenemos en la primera cadena, tanto en la primera como en la última fila, a la campana 1 en la primera posición; ahora, sabemos que la primera fila de la segunda cadena o segunda clase lateral, resulta de hacer actuar $y^{-1}z$ en la ronda inicial, es decir

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{bmatrix} \bullet (y^{-1}z)$$

pero sabemos que $y^{-1}z$ fija a la campana 1 tanto si n es par o impar, entonces, la primera fila de la segunda cadena también comienza con la campana 1.

Si seguimos este procedimiento en las $n-1$ cadenas, tendremos que en la primera y la última fila de cada cadena la campana 1 siempre se encuentra en la primera posición. Tenemos entonces el siguiente arreglo:

$$\begin{array}{ccccc} 12345\cdots n & 1\cdots & \cdots & 1\cdots & 12345\cdots n. \\ 21436\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 2463\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 4261\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 462\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 13254\cdots & 1\cdots & \cdots & 1\cdots & \\ & & \cdots & & \\ \underbrace{\qquad\qquad}_{1era\ \ cadena} & \underbrace{\qquad\qquad}_{2da\ \ cadena} & & \underbrace{\qquad\qquad}_{(n-1)\ \ cadena} & \end{array}$$

Definición 2.28. *Llamaremos* **eslabón inicial** *a la primera fila que se encuentre en cada cadena o clase lateral de un método y de manera análoga, llamaremos* **eslabón final** *a la última fila que se encuentre en cada cadena o clase lateral de un método.*

Observación 2.29. *Por cómo se construyó PBn, observamos que:*

1. *El primer eslabón inicial es* $123\cdots n$.

2. *El segundo eslabón inicial es el resultado de hacer actuar $y^{-1}z$ en la ronda inicial.*
3. *El tercer eslabón inicial es el resultado de hacer actuar $(y^{-1}z)^2$ en la ronda inicial, o bien de hacer actuar $y^{-1}z$ en el segundo eslabón inicial.*

Siguiendo de esta manera, el $(n-1)-$eslabón inicial es el resultado de hacer actuar $(y^{-1}z)^{n-2}$ en la ronda inicial, o bien es obtenido del anterior eslabón inicial mediante la aplicación de $P = y^{-1}z$.

Como $y^{-1}z$ es de orden $n-1$, entonces tenemos sólo $(n-1)$ cadenas, y por lo tanto tendríamos un total de $n-1$ eslabones iniciales. Con lo anterior nos percatamos también de que PBn se puede describir por elementos de S_{n-1} actuando sobre eslabones iniciales, pues estamos dejando fija a la campana 1 en cada eslabón inicial.

Recordemos que cuando explicamos PBn, lo describimos por la secuencia de permutaciones

$$x, y, x, y, x, y, x, \dots, z$$

$$x, y, x, y, x, y, x, \dots, z$$

$$\vdots$$

$$x, y, x, y, x, y, x, \dots, z$$

con $xyxyxyx \dots z = y^{-1}z = P$.

En ocasiones identificaremos la cadena con la secuencia de cambios que se aplican a cada uno de sus eslabones, en este caso $x, y, x, y, x, y, x, \dots, z$. Usando lo anterior, tenemos la siguiente definición:

Definición 2.30. *Llamaremos a cada cadena de PBn o a la secuencia de cambios que se hacen actuar sobre cada uno de sus eslabones $x, y, x, y, x, y, x, \dots, z$, junto con su eslabón inicial, una* **cadena simple**.

Observemos que en el caso de una cadena simple, la permutación usada para evitar repetir filas es la permutación z.

Como dijimos, cualquier cadena simple y la forma de pasar de una cadena simple a la siguiente, puede ser identificada con su primer eslabón y con la sucesión de permutaciones

$$x, y, x, y, x, y, x, \dots, z.$$

Si consideramos sólo los eslabones iniciales, podemos utilizar sólo la composición de las permutaciones en la sucesión anterior, que es igual a $y^{-1}z = P$. Así, podemos describir el método completo mediante la secuencia de los $n-1$ eslabones iniciales, o de modo equivalente, mediante la sucesión de permutaciones que se hacen actuar en la ronda para obtener dichos eslabones iniciales, en este caso:

$$P, P, P, \ldots, P.$$

Veamos ahora un ejemplo para 4 y 6 campanas:

Ejemplo 2.31. *Consideremos primero $PB4$*

$$\begin{array}{cccc}
 & z & z & z \\
1234 & 1342 & 1423 & 1234. \\
x & x & x & \\
2143 & 3124 & 4132 & \\
y & y & y & \\
2413 & 3214 & 4312 & \\
x & x & x & \\
4231 & 2341 & 3421 & \\
y & y & y & \\
4321 & 2431 & 3241 & \\
x & x & x & \\
3412 & 4213 & 2314 & \\
y & y & y & \\
3142 & 4123 & 2134 & \\
x & x & x & \\
1324 & 1432 & 1243 &
\end{array}$$

El arreglo completo es un método con 24 filas, sin considerar la última fila que es una ronda. Cada columna es una cadena y en este caso el método se divide en tres cadenas de 8 filas cada una, es decir, se divide en tres clases laterales. Observemos que cada campana aparece dos veces en el mismo lugar y en la primera y última fila de cada cadena la campana 1 siempre se encuentra en la primera posición.

Los eslabones iniciales para $PB4$ son

$$1234, 1342, 1423$$

Tenemos que el primer eslabón inicial es la ronda, el segundo eslabón inicial es el resultado de $y^{-1}z = (234) = P$ actuando en la ronda, o en el primer eslabón inicial y, por último, el tercer eslabón inicial es 1423 que resulta de hacer actuar $(y^{-1}z)^2 = (243)$ en la ronda. Veamos cómo podemos describir $PB4$ por elementos de S_3 actuando sobre los eslabones iniciales. Como se mencionó previamente, los eslabones iniciales son

$$1234, 1342, 1423$$

y para pasar de 1234 *a* 1342 *y de* 1342 *a* 1423 *usamos un elemento de* S_3*, a saber* $P = (234)$*. Por lo tanto,* $PB4$ *se puede describir mediante elementos de* S_3*.*

Describamos ahora $PB6$ mediante sus eslabones iniciales.

Ejemplo 2.32. *Consideremos la primera cadena y también el segundo eslabón inicial.*

$$
\begin{array}{rl}
 & \quad z \\
123456 & 135264. \\
x & \\
214365 & \\
y & \\
241635 & \\
x & \\
426153 & \\
y & \\
462513 & \\
x & \\
645231 & \\
y & \\
654321 & \\
x & \\
563412 & \\
y & \\
536142 & \\
x & \\
351624 & \\
y & \\
315264 & \\
x & \\
132546 &
\end{array}
$$

En este caso $y^{-1}z = (23564)$ *y el primer eslabón inicial es* 123456*. Buscamos quiénes son* P^2*,* P^3*,* P^4 *y* P^5 *para hacerlos actuar en* 123456 *y así obtener los demás eslabones iniciales.*

$$
\begin{array}{lllll}
P & = & (23564) & & \\
P^2 & = & (23564)(23564) & = & (25436) \\
P^3 & = & (25436)(23564) & = & (26345) \\
P^4 & = & (26345)(23564) & = & (24653) \\
P^5 & = & id. & &
\end{array}
$$

Haciendo actuar cada una de las permutaciones anteriores en el primer eslabón inicial, la ronda, se tiene

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \bullet P &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \bullet (23564) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \\[1em]
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \bullet P^2 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \bullet (25436) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \\[1em]
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \bullet P^3 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \bullet (26345) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 & 5 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\[1em]
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \bullet P^4 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \bullet (24653) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 6 & 3 & 5 \end{bmatrix} \\[1em]
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \bullet P^5 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \bullet id \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Debido a que cada eslabón inicial es obtenido del anterior mediante la aplicación de P, que es de orden 5*, sólo tendremos 5 cadenas y por lo tanto tendremos 5 eslabones iniciales.*

El método completo se compone de una sucesión de cadenas, y cada una de las cadenas simples en $PB6$ se identifican con su eslabón inicial y con la secuencia

$$x, y, x, y, x, y, x, y, x, y, x, z$$

Si consideramos sólo eslabones iniciales, la secuencia anterior está descrita por P y por lo tanto el arreglo completo se describe por la secuencia

$$P, P, P, P, P.$$

Observación 2.33. *Recordemos que cuando describimos PBn, agregamos la permutación z antes de llegar a la ronda inicial para alargar el método, pero de hecho, no es la única manera de modificar PHn ya que podemos hacer modificaciones análogas no necesariamente usando la permutación z. Podemos usar una permutación diferente, siempre y cuando cumpla con las reglas establecidas. Otra permutación que puede usarse es $w = (23)(56)(78)\cdots(n-1n)$ si n es par o $w = (23)(56)(78)\cdots((n-2)(n-1))$ si n es impar, que es un producto de transposiciones disjuntas de números consecutivos que deja fija a la campana en la posición* 4*. A un método obtenido a partir de PHn de manera análoga a PBn pero permitiendo el uso no sólo de z sino también de la permutación w antes descrita, le llamaremos* **plain bob generalizado en n campanas** *y lo denotaremos por $PBGn$.*

Teniendo en cuenta la observación anterior damos paso a la siguiente definición:

Definición 2.34. *Llamaremos a cada cadena de $PBGn$, o a su eslabón inicial junto con la secuencia de cambios que se hacen actuar sobre cada uno de sus eslabones, una* **cadena compuesta** *si en lugar de usar la permutación z para evitar repetir filas usamos la permutación w, es decir si dicha secuencia de cambios es $x, y, x, y, x, y, x, \ldots, w$.*

Ejemplo 2.35. *Para $n = 6$ campanas, sea*

$$x = (12)(34)(56)$$

$$y = (23)(45)$$

$$w = (23)(56)$$

Usando la cadena compuesta tenemos

$$
\begin{array}{rlrl}
 & & w & (456) = y^{-1}w \\
123456 & & & 123564. \\
x & (12)(34)(56) & & \\
214365 & & & \\
y & (124653) & & \\
241635 & & & \\
x & (14)(36) & & \\
426153 & & & \\
y & (145)(263) & & \\
462513 & & & \\
x & (16)(24)(35) & & \\
645231 & & & \\
y & (16)(25)(34) & & \\
654321 & & & \\
x & (15)(26) & & \\
563412 & & & \\
y & (154)(236) & & \\
536142 & & & \\
x & (13)(25)(46) & & \\
351624 & & & \\
y & (135642) & & \\
315264 & & & \\
x & (23)(45) & & \\
132546 & & &
\end{array}
$$

A $y^{-1}w$ lo denotamos como B, es decir, $y^{-1}w = B$ donde B corresponde a una cadena compuesta.

Anteriormente usamos P para describir cualquier cadena simple de $PB6$, la cual correspondía a la sucesión

$$x, y, x, y, x, y, x, y, x, y, x, z$$

Ahora usaremos B en lugar de P para describir la cadena compuesta, así podemos construir métodos más largos combinando cadenas simples y compuestas.

Por ejemplo

	z	z	z	z	w	z	z
123456	135264	156342	164523	142635	142356	125463	156234
x	x	x	x	x	x	x	x
214365	312546	513624	615432	416253	413265	214536	512643
y	y	y	y	y	y	y	y
241635	321456	531264	651342	461523	431625	241356	521463
x	x	x	x	x	x	x	x
426153	234165	352146	563124	645132	346152	423165	254136
y	y	y	y	y	y	y	y
462513	243615	325416	536214	654312	364512	432615	245316
x	x	x	x	x	x	x	x
645231	426351	234561	352641	563421	635421	346251	423561
y	y	y	y	y	y	y	y
654321	462531	243651	325461	536241	653241	364521	432651
x	x	x	x	x	x	x	x
563412	645213	426315	234516	352614	562314	635412	346215
y	y	y	y	y	y	y	y
536142	654123	462135	243156	325164	526134	653142	364125
x	x	x	x	x	x	x	x
351624	561432	641253	421365	231546	251643	561324	631452
y	y	y	y	y	y	y	y
315264	516342	614523	412635	213456	215463	516234	613542
x	x	x	x	x	x	x	x
132546	153624	165432	146253	124365	124536	152643	165324
P	P	P	P	B	P	P	P

z	z	w	z	z	z	z	w
163542	134625	134256	145362	156423	162534	123645	123456.
x	x	x	x	x	x	x	
615324	316452	312465	413526	514632	615243	216354	
y	y	y	y	y	y	y	
651234	361542	321645	431256	541362	651423	261534	
x	x	x	x	x	x	x	
562143	635124	236154	342165	453126	564132	625143	
y	y	y	y	y	y	y	
526413	653214	263514	324615	435216	546312	652413	
x	x	x	x	x	x	x	
254631	562341	625341	236451	342561	453621	564231	
y	y	y	y	y	y	y	
245361	526431	652431	263541	324651	435261	546321	
x	x	x	x	x	x	x	
423516	254613	564213	625314	236415	342516	453612	
y	y	y	y	y	y	y	
432156	245163	546123	652134	263145	324156	435162	
x	x	x	x	x	x	x	
341265	421536	451632	561243	621354	231465	341526	
y	y	y	y	y	y	y	
314625	412356	415362	516423	612534	213645	314256	
x	x	x	x	x	x	x	
136452	143265	143526	154632	165243	126354	132465	
P	B	P	P	P	P	B	

Que es descrito por la sucesión de cadenas simples y compuestas como

$$P, P, P, P, B, P, P, P, P, B, P, P, P, P, B$$

en pocas palabras, al realizar la sucesión, las primeras 5 columnas corresponden a las 60 permutaciones que conforman el método $PB6$ *salvo por la ronda final de éste. Cuando llegamos a la permutación 60, lo que antes se aplicaba era* z*, pero al hacerlo volvíamos a la ronda pues* $P^5 = id$*, por lo tanto, en lugar de hacer* z *aplicamos* $w = (23)(56)$ *con el efecto de llevarnos por otra clase lateral, a saber* $(z^{-1}w)D_6$ *con* $z^{-1}w = (34)(56)(23)(56) = (243)$*.*

Repetimos nuevamente el proceso y después de otras 60 permutaciones hacemos w *otra vez para evitar repetir filas. Después de realizar una vez más el procedimiento regresamos a la ronda inicial pues* $z^{-1}w = P^4B = R$ *es de orden 3.*

Al finalizar, obtenemos 180 permutaciones y 181 filas contado la ronda inicial y la final.

Como x, y, z, w *son producto de transposiciones disjuntas de números consecutivos y las aplicamos una a la vez para llegar de una fila a la otra, se cumple R3.*

Las primeras 5 columnas equivalen a $PB6$ *que cumple todas las reglas, como agregamos sólo* w *y aplicamos exactamente las mismas permutaciones que usamos en* $PB6$ *el arreglo completo sigue cumpliendo todas las reglas.*

¿Cómo ver que no se repiten filas de un bloque de 60 filas a otro? Recordemos que para $PB6$ *extendimos* $PH6$ *agregando* z *y haciendo que las campanas siguieran comportamientos similares en cada cadena (columna), garantizando cumplir con R1, R2, R3 y R4 y por lo tanto en* $PB6$ *no se repetían filas. Cuando agregamos* $w = (23)(56)$ *antes de regresar a la ronda inicial en* $PB6$*, da como resultado* 142356 *que no corresponde a ninguna fila de* $PB6$*, lo que podemos revisar comparando directamente esta fila con las de* $PB6$ *pero, ¿podemos verificar que no es una fila de* $PB6$ *sin necesidad de analizar todas las filas de* $PB6$*? Hagamos este análisis en la observación que se presenta a continuación, usando argumentos más teóricos que podamos generalizar después.*

Sabemos que sólo la primera y última fila de cada cadena comienza con la campana 1, entonces 142356 *tendría que ser un eslabón inicial de* $PB6$ *o la última fila de una cadena del mismo.*

Veamos primero que no hay eslabones iniciales repetidos. Si los hubiera tendríamos que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \bullet (P^4B)^m P^n \quad = \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \bullet (P^4B)^{m'} P^{n'}$$

con $m, m' \in \{0,1,2\}, n, n' \in \{0,1,2,3,4\}$.

Entonces

$$id \circ (P^4B)^m P^n = id \circ (P^4B)^{m'} P^{n'}$$

es decir

$$(P^4B)^m P^n = (P^4B)^{m'} P^{n'}$$

o bien

$$(P^4B)^{m-m'} = P^{n'-n}.$$

Pero entonces $(243)^{m-m'} = (23564)^{n'-n}$ *y por la observación 1.40, como se trata de potencias de un 3-ciclo y un 5-ciclo respectivamente,* $m - m'$ *es un múltiplo de* 5 *y* $n' - n$ *es un múltiplo de* 3*, pero debido al rango en el que se encuentran* m, m', n, n'*, esto implica que* $m = m'$ *y* $n = n'$.

Sabemos ahora que un eslabón inicial no coincide con otro eslabón inicial. Veamos que tampoco coincide con las otras filas. Dado que inicia en 1 y no coincide con los otros eslabones iniciales, basta descartar la posibilidad de que coincida con el último elemento de una de las cadenas. En este caso tendríamos:

$$\begin{aligned}\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}\right] \bullet (P^4B)^m P^n \quad &= \\ &\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}\right] \bullet (P^4B)^{m'} P^{n'} y^{-1}\end{aligned}$$

con $m, m' \in \{0,1,2\}, n, n' \in \{0,1,2,3,4\}$.

Entonces

$$(P^4B)^m P^n = (P^4B)^{m'} P^{n'} y^{-1}.$$

Así

$$(P^4B)^{m-m'} P^n = P^{n'} y^{-1}.$$

Pero $Py^{-1} = y^{-1}P^{-1}$, *por lo cual*

$$(P^4B)^{m-m'} P^n = y^{-1} P^{-n'},$$

de donde

$$(P^4B)^{m-m'} P^{n+n'} = y^{-1}.$$

Si $m = m'$ *la expresión del lado izquierdo sería la potencia de un 5-ciclo, y no podría entonces ser igual a* $y^{-1} = (23)(45)$. *Así,* $m \neq m'$, *y entonces tenemos*

$$P^4BP^{n+n'} = y^{-1} \text{ o bien } (P^4B)^{-1} P^{n+n'} = y^{-1}.$$

En el primer caso

$$(243)(23564)^{n+n'} = (23)(45)$$

o bien

$$(23564)^{n+n'} = (234)(23)(45) = (245)$$

y en el segundo caso tenemos

$$(234)(23564)^{n+n'} = (23)(45)$$

o bien

$$(23564)^{n+n'} = (243)(23)(45) = (345)$$

ambos imposibles ya que las expresiones del lado izquierdo son potencias de un 5-ciclo.

Para verificar que no se van a repetir filas de un bloque a otro es necesario recordar que en cada cadena, el patrón que sigue la campana 1 *es siempre el mismo, así, si alguna fila coincidiera con alguna otra fila de otro bloque, ésta debe tener a la campana* 1 *en la misma posición que la fila con la que se compara, y por como se comporta la campana* 1, *esto sólo sucede si la fila se encuentran en la misma hilera horizontal o se encuentra en la hilera simétrica.*

Supongamos que dos filas de diferentes bloques coinciden, por lo tanto, se encuentran a la misma altura (misma hilera), es decir

$$(P^4B)^m P^n (xy)^i = (P^4B)^{m'} P^{n'} (xy)^i$$

o

$$(P^4B)^m P^n (xy)^i x = (P^4B)^{m'} P^{n'} (xy)^i x$$

con $m, m' \in \{0, 1, 2\}, n, n' \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, i \in 1, 2, 3, 4, 5$

En ambos casos

$$(P^4B)^m P^n = (P^4B)^{m'} P^{n'}$$

así coincidirían dos eslabones iniciales, lo que anteriormente probamos no es posible.

Basta mostrar que no coincide con alguna fila que se encuentra en la hilera simétrica, es decir

$$(P^4B)^m P^n (xy)^i = (P^4B)^{m'} P^{n'} y^{-1} (xy)^i$$

o

$$(P^4B)^m P^n (xy)^i x = (P^4B)^{m'} P^{n'} y^{-1} (xy)^i x$$

con $m, m' \in \{0, 1, 2\}, n, n' \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, i \in 1, 2, 3, 4, 5$

En ambos casos

$$(P^4B)^m P^n = (P^4B)^{m'} P^{n'} y^{-1}$$

así coincidiría un eslabón inicial con la última fila de algún bloque, lo cual no es posible.

Así, sabemos que no se repiten filas de un bloque a otro, es decir, no se repiten filas en el arreglo completo.

No hemos podido conseguir una extensión usando 6 campanas, es decir, no hemos obtenido un método con 721 filas contando ambas rondas, o bien $6! + 1 = 721$ permutaciones. Debido a ellos nos preguntamos ¿Es posible que combinando cadenas simples y compuestas de manera diferente podamos obtener una extensión? El siguiente resultado descarta esta posibilidad.

Teorema 2.36. *No existe una extensión de $PB6$ usando sólo cadenas simples y compuestas. El método más largo usando sólo cadenas simples y compuestas tiene 360 permutaciones.*

Demostración. Observemos que

$$P = (23564) \quad B = (456) \quad z = (34)(56) \quad w = (23)(56)$$

son permutaciones pares. Recordemos que las filas con la campana 1 en la primera posición se encuentran sólo en la primera y la última fila de cada cadena. El hecho de que P y B sean permutaciones pares de $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ implica que cualquier eslabón inicial será una permutación par de $\{2, 3, 4, 5, 6\}$. La última fila de cada columna es el resultado de aplicar z^{-1} o w^{-1} a cada eslabón inicial de la siguiente columna. Como z y w también son permutaciones pares de $\{2,3,4,5,6\}$, en cualquier método que combine cadenas simples y compuestas, todas la filas con la campana 1 en la primera posición se obtienen de otra con la campana 1 en la primera posición a partir de una permutación par de $\{2,3,4,5,6\}$. Si se pudiera lograr una extensión, tendríamos, como parte de las filas del método, filas con la campana 1 seguidas de todas las permutaciones posibles de $\{2,3,4,5,6\}$, entonces también tendríamos permutaciones impares de $\{2,3,4,5,6\}$ lo cual no sucede. Por lo tanto no tenemos una extensión usando unicamente cadenas simples y compuestas.

Dado que el orden de las permutaciones pares en n objetos es $|A_n| = \frac{n!}{2}$, hay $\frac{5!}{2} = 60$ permutaciones pares de $\{2,3,4,5,6\}$. De acuerdo a lo anterior, cualquier método que use cadenas simples y compuestas puede tener a lo más 60 filas distintas con la campana 1 en la primera posición. Ahora, cada cadena tiene exactamente dos filas con la campana 1 en la primera posición, a saber su eslabón inicial y su eslabón final, así que habría a lo mucho

$$\frac{\frac{5!}{2}}{2} = \frac{60}{2} = 30$$

cadenas. Como cada cadena cuenta con 12 filas, entonces tendríamos a lo más $12 \cdot 30 = 360$ permutaciones, usando sólo cadenas simples y compuestas.

El método de 360 filas está dado por la siguiente sucesión

$$B,P,P,P,B,B,P,P,P,P,B,P,P,P,B,B,P,P,P,P,B,P,P,P,B,B,P,P,P,P$$

$\square$

Ahora que ya hemos descrito Plain Hunt, Plain Bob, Plain Bob generalizado y los dos tipos de cadenas, veamos un último método que es el que vamos a utilizar más adelante para resolver el problema a tratar en este trabajo.

2.3.4. Grandsire en n campanas (GSn)

Este método se toca en un número impar de campanas. Introducimos la permutación

$$q = (12)(45)(67)\cdots((n-1)n)$$

La diferencia de este método con los anteriores es que hacemos actuar el cambio q al inicio, después aplicamos y y x sucesivamente, la última permutación a aplicar será y, es decir, aplicamos en total

$$qyxyxy\cdots xy = qx$$

(pues $xyxyxy\cdots xy = id$ y por lo tanto $yxyxy\cdots xy = x^{-1}$ pero al ser x un producto de transposiciones disjuntas se tiene que $x = x^{-1}$, entonces $qyxyxy\cdots xy =$

$qx^{-1} = qx$). Denotaremos por Q a la composición de esta secuencia de cambios, es decir

$$Q = qyxyxy \cdots xy = qx$$

Observación 2.37. *La secuencia de cambios*

$$Q = qyxyxy \cdots xy = qx$$

nos hace recorrer la clase lateral qD_n.

Sabemos que

$$\langle x, y\rangle = \{x, xy, xyx, (xy)^2, (xy)^2x, \ldots, (xy)^n\} = D_n,$$

por lo que

$$qD_n = \{qx, qxy, qxyx, q(xy)^2, q(xy)^2x, \ldots, q(xy)^n\}.$$

Tenemos que ver entonces que

$$\{qy, qyx, qyxy, q(yx)^2, \ldots, q(yx)^{n-1}y\} = qD_n,$$

como $y = (xy)^{n-1}x$, tenemos

$$\begin{array}{rcl} qy & = & q(xy)^{n-1}x \\ qyx & = & q(xy)^{n-1} \\ qyxy & = & q(xy)^{n-2}x \\ q(yx)^2 & = & q(xy)^{n-2} \\ & \vdots & \\ q(yx)^{n-1} & = & q(xy) \\ q(yx)^{n-1}y & = & qx \end{array}$$

Es decir, los elementos de la forma yx pueden ser representados por elementos de la forma xy, así, al aplicar la secuencia Q recorremos toda la clase lateral qD_n

Ahora que ya sabemos que la secuencia Q nos lleva a la clase lateral qD_n repetimos la misma secuencia de permutaciones

$$qyxyxy \cdots xy = Q = qx$$

para obtener la clase lateral $(qxq)D_n$ y volvemos a repetir el procedimiento hasta llegar a la ronda.

A este método le llamaremos **Grandsire en n campanas** y lo denotaremos por $GSGn$, a cada columna en él o a la secuencia de cambios que se aplican a sus filas le llamaremos una **cadena simple para GSn**.

Cuando describimos la cadena compuesta para $PBGn$ agregábamos en lugar de la permutación z una pemutación diferente, a saber w, y podíamos extender el método agregando esta permutación w para obtener uno más grande.

De manera análoga definamos entonces una cadena compuesta para el método Grandsire.

Consideremos la cadena simple para GSn, la cual describimos mediante la sucesión

$$q, y, x, y, x, y, x, y, \ldots, x, y$$

(donde $qyxyxyxy \cdots xy = Q$) en lugar de hacer actuar la última x, lo que hacemos actuar es la permutación q, obteniendo la siguiente sucesión de permutaciones

$$q, y, x, y, x, y, x, y, \cdots, q, y$$

donde $qyxyxyxy \ldots qy$ será denotada por T. Así, a un método que se obtenga de aplicar las permutaciones Q o T a la ronda le llamaremos **Grandsire generalizado en n campanas** y lo denotaremos por $GSGn$, a cada columna en él, o a la secuencia de cambios que se aplican a sus filas, en la que se usa la secuencia $q, y, x, y, x, y, x, y, \ldots, q, y$ le llamaremos una **cadena compuesta para GSGn**.

El problema al que nos referimos en concreto es para 7 campanas, pero estudiemos primero el caso para 5 campanas.

Ejemplo 2.38. Grandsire en 5 campanas (GS5)

Primero consideremos el arreglo aplicando sólo $q, y, x, y, x, y, x, y, x, y$ *hasta llegar a la ronda, es decir, aún no aplicamos la cadena compuesta.*

Sea $q = (12)(45)$*, consideremos la ronda* 12345 *y aplicamos* $q, y, x, y, x, \ldots, x$ *hasta obtener la clase lateral lateral* qD_5*, repetimos las mismas permutaciones hasta conseguir* $qxqD_5$ *y volvemos a repetir las permutaciones obteniendo* $(qxqxq)D_5$*, con lo cual se tiene el siguiente arreglo*

	y	y	y
12345	12534	12453	12345
q	q	q	
21354	21543	21435	
y	y	y	
23145	25134	24153	
x	x	x	
32415	52314	42513	
y	y	y	
34251	53241	45231	
x	x	x	
43521	35421	54321	
y	y	y	
45312	34512	53412	
x	x	x	
54132	43152	35142	
y	y	y	
51423	41325	31524	
x	x	x	
15243	14235	13254.	

A cada columna le llamaremos una cadena simple para $GS5$.

Observación 2.39. *Es importante señalar, que en los casos anteriores PHn y PBn, tanto la primer cadena como la primera secuencia $x, y, x, y, \ldots x, y$ coincidían con D_n. Sin embargo, para GSn no es así, pues al aplicar primero q a la identidad, y después las permutaciones 'y' y 'x' sucesivamente, de manera que en la cadena nos queden las primeras $2n$ filas, lo que resulta en la primera cadena no es en sí D_n sino $(qD_n) - id$, pues para obtener la primera cadena lo que se aplica es $qyxyxyx \cdots x$, y para obtener la siguiente cadena, se aplica 'y' a la última fila de la cadena anterior.*

Notemos que hay 3 cadenas simples pues el primer eslabón inicial es:

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}\right]$$

el segundo eslabón inicial es

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 5 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

que es el resultado de aplicar $qyxyxyxyxy = qx = (12)(45)(12)(34) = (354) = Q$ al primer eslabón inicial, y el tercer eslabón inicial es

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{array}\right]$$

que es el resultado de aplicar $qyxyxyxyxy = qx = (12)(45)(12)(34) = (354) = Q$ *al segundo eslabón inicial o* $(qyxyxyxyxy)^2 = (qx)^2 = (354)(354) = (345)$ *al primer eslabón inicial. Como* qx *es de orden 3, volvemos a la ronda después de 30 permutaciones, pues hay 3 eslabones iniciales, con lo cual tenemos 3 columnas de 10 filas cada una, más la ronda final. Así nuestro método cuenta con 31 filas, repartidas en 3 cadenas simples.*

Ejemplo 2.40. Grandsire generalizado en 5 campanas (GSG5) *Ahora que ya dimos el ejemplo de cadena simple para* $GS5$*, construyamos la cadena compuesta para* $GSG5$*.*

Consideremos la primera cadena simple de $GS5$*, pero en lugar de hacer la última* x*, hacemos actuar la permutación* $q = (12)(45)$*, es decir*

$$\begin{array}{rr}
 & y \\
12345 & 14523. \\
q & \\
21354 & \\
y & \\
23145 & \\
x & \\
32415 & \\
y & \\
34251 & \\
x & \\
43521 & \\
y & \\
45312 & \\
x & \\
54132 & \\
y & \\
51423 & \\
q & \\
15432 &
\end{array}$$

De este modo el segundo eslabón inicial que era 12534*, es reemplazado por* 14523 *que es el resultado de aplicar* $T = qyxyxyxyqy = (24)(35)$ *a la ronda inicial. Como* T *tiene orden* 2*, volveremos a la ronda después de usar dos cadenas compuestas.*

Lo que haremos a continuación será combinar cadenas simples y compuestas para $GS5$ *alternando* T *y* Q *respectivamente, con lo cual obtenemos*

	y	y	y	y	y	y
12345	14523	14352	15243	15324	12453	12345
q	q	q	q	q	q	
21354	41532	41325	51234	51342	21435	
y	y	y	y	y	y	
23145	45123	43152	52143	53124	24153	
x	x	x	x	x	x	
32415	54213	34512	25418	35214	42513	
y	y	y	y	y	y	
34251	52431	35412	24531	32541	45231	
x	x	x	x	x	x	
43521	25341	53241	42351	23451	54321	
y	y	y	y	y	y	
45312	23514	52314	43215	24315	53412	
x	x	x	x	x	x	
54132	32154	25134	34125	42135	35142	
y	y	y	y	y	y	
51423	31245	21543	31452	41253	31524	
q	x	q	x	q	x	
15432	13425	12534	13542	14235	13254	
T	Q	T	Q	T	Q	

que incrementa las 30 permutaciones de $GS5$ a 60 permutaciones usando la sucesión

$$T, Q, T, Q, T, Q$$

es decir, ahora el método cuenta com 61 filas contando la ronda inicial y la final.

Análogamente como en el caso 2.35, queremos saber si es posible obtener una extensión de $GS5$ usando cadenas simples y compuestas solamente. Para dar respuesta a ello, veamos el siguiente teorema.

Teorema 2.41. *No existe una extensión de $GS5$ usando solamente cadenas simples y compuestas. El método más grande usando cadenas simples y compuestas es de* 60 *permutaciones.*

Demostración. Como se vio en el ejemplo 2.40, hay un método de 60 permutaciones con las características buscadas. Veamos ahora que no puede haber uno con un mayor número de permutaciones. Notemos que

$$Q = (354) \quad T = (24)(35) \quad y = (23)(45)$$

son todas permutaciones pares, el hecho de que Q y T lo sean, implica que cualquier eslabón inicial es una permutación par de $\{2, 3, 4, 5\}$. La última fila de cada columna es el resultado de aplicar y^{-1} a cada eslabón inicial de la siguiente columna, al ser y una permutación par, en cualquier método de cadenas simples y compuestas, todas las filas con la campana 1 en la primera posición se obtienen de otra con la campana 1 en la primera posición aplicando en ella una permutación par de $\{2,3,4,5\}$. Si existiera un extensión, tendríamos tantas filas distintas con la campana 1 en la primera posición, como permutaciones posibles de $\{2,3,4,5\}$, es decir, también tendríamos a todas las permutaciones impares de $\{2,3,4,5\}$ después de la campana 1, lo cual no sucede. En cada cadena hay exactamente dos eslabones que tienen a la campana 1 en la primera posición. Sabemos que hay $\frac{4!}{2} = 12$ permutaciones pares de $\{2,3,4,5\}$ y como cada cadena cuenta con 2 filas con la campana 1 en la primera posición, entonces tendremos a lo más

$$\frac{\frac{4!}{2}}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

cadenas. Como cada cadena cuenta con 10 filas, entonces tendremos a lo más $10 \cdot 6 = 60$ permutaciones usando cadenas simples y compuestas. Por lo tanto el mayor número posible de permutaciones usando cadenas simples y compuestas de Grandsire es de 60 permutaciones, es decir, 61 filas contado la ronda final. $\square$

Para obtener el máximo número de permutaciones en 5 campanas, tendríamos que utilizar también una permutación impar, lo que implica usar otro tipo de cadena. Veamos qué pasa cuando se utilizan 7 campanas, este caso es más interesante que $GS5$ pues la cadena compuesta que agregamos involucra una permutación impar.

Ejemplo 2.42. *Sea*

$$x = (12)(34)(56) \quad y = (23)(45)(67) \quad q = (12)(45)(67)$$

Como en $GS5$ *hacemos* $q, y, x, y, x, y, x, y, x, y, x, y, x, y,$

$$
\begin{array}{rl}
 & y \\
1234567 & 1253746. \\
q & \\
2135476 & \\
y & \\
2314567 & \\
x & \\
3241657 & \\
y & \\
3426175 & \\
x & \\
4362715 & \\
y & \\
4637251 & \\
x & \\
6473521 & \\
y & \\
6745312 & \\
x & \\
7654132 & \\
y & \\
7561423 & \\
x & \\
5716243 & \\
y & \\
5172634 & \\
x & \\
1527364 &
\end{array}
$$

Así, el segundo eslabón inicial es 1253746 *que es el resultado de aplicar* $Q = qx = (35764)$ *a la ronda inicial. Como* Q *es de orden* 5*, tendremos 5 cadenas simples, y como en cada cadena simple hay 14 filas, tendremos un total de 70 permutaciones en* $GS7$*, es decir, 71 filas.*

Para extender el método usaremos la cadena compuesta, que usa la permutación $q = (12)(45)(67)$ *aplicada en lugar de la última* x *que se usa en* $GS7$*.*

Si iniciamos con la cadena compuesta se tiene

	y
1234567	1752634
q	
2135476	
y	
2314567	
x	
3241657	
y	
3426175	
x	
4362715	
y	
4637251	
x	
6473521	
y	
6745312	
x	
7654132	
y	
7561423	
x	
5716243	
y	
5172634	
q	
1576243	

en el cual observamos que el segundo eslabón inicial es 1752634 *que es el resultado de* $T = qyxyxyxyxyxyqy = (274)(356)$ *actuando en* 1234567*. Si combinamos la cadena simple y la compuesta se tiene la siguiente sucesión:*

$$T, Q, Q, Q, Q, T, Q, Q, Q, Q, T, Q, Q, Q, Q$$

Pues T tiene orden 3 y Q tiene orden 5.

Al finalizar, obtenemos 210 permutaciones y 211 filas contado la ronda inicial y final.

Observamos que es posible obtener grandes conjutos de permutaciones usando cadenas simples y compuestas en diferentes secuencias, pero, al igual que en los ejemplos anteriores, nos hacemos la siguiente pregunta: ¿Cuál es el mayor conjunto de permutaciones que podemos conseguir? ¿Podemos conseguir una extensión usando solamente cadenas simples y compuestas para 7 campanas? En GS5 usamos el hecho de que las permutaciones x, y y z son pares para obtener una cota superior, en ese caso 60, sin embargo este argumento NO funciona para el caso $n = 7$ campanas, pues x y y son impares, esto deja abierta la posibilidad de que exista una extensión de 7! permutaciones. Para ello debemos considerar la acción de T y Q en los eslabones iniciales.

Capítulo 3

Formulación Teórica

Ahora que ya hemos descrito y estudiado los distintos tipos de métodos y hemos entendido cómo se contruyen cada uno de ellos, la pregunta a responder es ¿es posible obtener las 5040 permutaciones en $GS7$ usando únicamente cadenas simples y compuestas? Para responder a esta pregunta, es necesario estudiar desde otros puntos de vista estos métodos, en términos de generadores del grupo simétrico y del subgrupo alternante.

Como vimos anteriormente, algunos métodos nos daban maneras de escribir los elementos de S_n en una lista (no todos los métodos, pues no todos resultaban extensiones). Sin embargo notamos que en todos los métodos, cada uno de los elementos de la lista se obtenía a partir del elemento previo mediante la aplicación de una permutación (x, y, z, w, q, etc.).

3.1. Unicursalidad

Teniendo en cuenta lo anterior, introducimos la siguiente definición.

Definición 3.1. *Sea G un grupo finito de orden n, y sea $T \subseteq G$. Se dice que T genera unicursalmente a G si podemos enumerar a los elementos de $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ de tal manera que para todo g_i con $i \in \{1, \ldots, n\}$ existe $t \in T$ tal que*

$$g_{i+1} = g_i t$$

considerando los subíndices módulo n.

Dada la definición anterior, veamos algunos ejemplos de grupos generados unicursalmente por algún subconjunto del mismo.

Ejemplo 3.2. *Sea el grupo $GL(2, \mathbb{C})$ y sean $a = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ donde a y b satisfacen que $a^2 = b^2$ y $a^3 b = ba$.*

Consideremos $H \leq Gl(2,\mathbb{C})$ generado por a y por b, como $a^3b = ba$, existe conmutatividad parcial, por lo que todas las palabras con a y b se pueden reducir a expresiones del tipo a^tb^l con t y l números enteros, de donde los inversos de a y de b se pueden expresar como potencias de a y b respectivamente con exponentes positivos, así

$$H = \{a^tb^k | t, k \in \{0,1,2,3\}\}$$

Como $a^2 = b^2$, entonces $a^2b = b^3$ por lo tanto

$$H = \{a^tb^k | t \in \{0,1,2,3\}, k \in \{0,1\}\}$$

es decir,

$$\begin{aligned} H &= \{a^0b^0, a^0b, ab^0, ab, a^2b^0, a^2b, a^3b^0, a^3b\} \\ &= \{id, b, a, ab, a^2, a^2b, a^3, a^3b\}. \end{aligned}$$

Ahora consideremos $T = \{a, b\}$. Si iniciamos con el elemento a^2 y aplicamos a y b sucesivamente obtenemos:

$$a^2a = a^3$$

$$a^3b = a^3b$$

$$(a^3b)a = a^3(ba) = a^3(a^3b) = a^2b$$

$$(a^2b)b = a^2b^2 = a^2a^2 = a^4 = id$$

$$ida = a$$

$$ab = ab$$

$$(ab)a = aba = a(a^3b) = a^4b = b$$

$$bb = b^2 = a^2$$

Si etiquetamos a cada elemento de H como

$$\begin{aligned} a^2 &= h_1 \\ a^3 &= h_2 \\ a^3b &= h_3 \\ a^2b &= h_4 \\ id &= h_5 \\ a &= h_6 \\ ab &= h_7 \\ b &= h_8 \end{aligned}$$

Tenemos

$$\begin{aligned} h_1 a &= h_2 \\ h_2 b &= h_3 \\ h_3 a &= h_4 \\ h_4 b &= h_5 \\ h_5 a &= h_6 \\ h_6 b &= h_7 \\ h_7 a &= h_8 \\ h_8 b &= h_1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, T genera unicursalmente a H.

Ejemplo 3.3. *Sea $(\mathbb{Z}_7^*, \cdot)$, consideremos $G = \langle \bar{2} \rangle = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}\}$ donde $G \leq (\mathbb{Z}_7^*, \cdot)$ y sea $T \subseteq G$ con $T = \{\bar{4}\}$. Si aplicamos $\bar{4}$ a cada uno de los elementos de G, se tiene*

$$\begin{aligned} \bar{4}\bar{4} &= \bar{2} \\ \bar{2}\bar{4} &= \bar{1} \\ \bar{1}\bar{4} &= \bar{4} \end{aligned}$$

si ordenamos a los elementos de G de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \bar{4} &= g_1 \\ \bar{2} &= g_2 \\ \bar{1} &= g_3 \end{aligned}$$

Obtenemos

$$\begin{aligned} g_1\bar{4} &= g_2 \\ g_2\bar{4} &= g_3 \\ g_3\bar{4} &= g_1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene que cada elemento de G se obtiene a partir de otro mediante la aplicación de $\bar{4}$, así, T genera a G unicursalmente.

En el ejemplo anterior, si tomamos $T = \{\bar{2}\}$ se tiene

$$\begin{aligned} \bar{2}\bar{2} &= \bar{4} \\ \bar{4}\bar{2} &= \bar{1} \\ \bar{1}\bar{2} &= \bar{2} \end{aligned}$$

nuevamente acomodamos, obteniendo

$$\begin{aligned} \bar{2} &= g_1 \\ \bar{4} &= g_2 \\ \bar{1} &= g_3 \end{aligned}$$

así

$$\begin{array}{rcl} g_1\bar{2} & = & g_2 \\ g_2\bar{2} & = & g_3 \\ g_3\bar{2} & = & g_1 \end{array}$$

Vemos entonces que $\{\bar{2}\}$ también genera unicursalmente a G, por lo que damos la siguiente observación.

Observación 3.4. *Todo grupo cíclico finito es generado unicursalmente por cualquier elemento generador del grupo.*

Demostración. Sea $G = \langle x \rangle$ un grupo cíclico finito de orden n, donde el elemento x es un elemento generador de G, por demostrar que $T = \{x\}$ genera unicursalmente a G.

Al ser G cíclico, podemos representar a sus elementos como potencias del elemento generador, en este caso x, es decir,

$$G = \{id, x, x^2, x^3, \dots x^{n-1}\}$$

si sacamos a x como factor de cada uno de los elementos de G tenemos

$$\begin{array}{rcl} id & = & x^{n-1}x \\ x & = & idx \\ x^2 & = & xx \\ x^3 & = & x^2x \\ & \vdots & \\ x^i & = & x^{i-1}x \\ & \vdots & \\ x^{n-1} & = & x^{n-2}x \end{array}$$

si renombramos, sin pérdida de generalidad, como $g_1 = id$, $g_2 = x$, $g_3 = x^2$ y en general $g_i = x^{i-1}$ para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$, tenemos

$$\begin{array}{rcl} g_1 & = & g_nx \\ g_2 & = & g_1x \\ g_3 & = & g_2x \\ g_4 & = & g_3x \\ & \vdots & \\ g_{i-1} & = & g_{i-2}x \\ & \vdots & \\ g_n & = & g_{n-1}x \end{array}$$

es decir, cada elemento de G, se obtiene a partir del anterior mediante la aplicación de x, por lo tanto $\{x\} = T$ genera a G unicursalmente.

□

Ejemplo 3.5. *Sea* $G = S_3 = \{(12), (123), (13), (132), (23), id\}$ *y* $T = \{(12), (23)\}$ *y donde* $t_1 = (12)$ *y* $t_2 = (23)$. *Si consideramos aplicar* t_1 *y* t_2 *de manera alternada a cada uno de los elementos de* S_3, *se tiene.*

$$(123)t_1 = (123)(12) = (13)$$

$$(13)t_2 = (13)(23) = (132)$$

$$(132)t_1 = (132)(12) = (23)$$

$$(23)t_2 = (23)(23) = id$$

$$idt_1 = id(12) = (12)$$

$$(12)t_2 = (12)(23) = (123)$$

Si nombramos a cada uno de los elementos como

$$\begin{array}{rcl} g_1 & = & (123) \\ g_2 & = & (13) \\ g_3 & = & (132) \\ g_4 & = & (23) \\ g_5 & = & id \\ g_6 & = & (12) \end{array}$$

Tenemos

$$\begin{array}{rcl} g_1t_1 & = & g_2 \\ g_2t_2 & = & g_3 \\ g_3t_1 & = & g_4 \\ g_4t_2 & = & g_5 \\ g_5t_1 & = & g_6 \\ g_6t_2 & = & g_1 \end{array}$$

Por lo que T *genera a* G *unicursalmente.*

Ejemplo 3.6. *Sea* $G = D_5$ *y* $T = \{(12)(34), (23)(45)\}$ *con* $x = (12)(34)$, $y = (23)(45)$, *sabemos que* $\langle x, y\rangle = D_5$. *En* $PH5$, *para pasar de una fila a otra lo que se hace es aplicar el elemento* x *y el elemento* y *(siendo las filas elementos de* D_5*), por tanto* T *genera unicursalmente a* D_5.

Ejemplo 3.7. *Sea* $G = S_4$ *y* $T = \{(12)(34), (23), (34)\}$ *con* $x = (12)(34)$, $y = (23)$, $z = (34)$. *Para construir* $PB4$, *las permutaciones usadas para pasar de una fila a otra fueron* x, y, z, *en ese caso en particular, el método resultó ser una extensión, es decir, se pudo obtener todo* S_4, *así* $\langle x, y, z\rangle = S_4$ *más aún,* T *genera a* S_4 *unicursalmente.*

Observación 3.8. *Sea $G = S_n$ y $T = \{(12), (23), (34), \ldots, ((n-1)n)\}$. T genera unicursalmente a G.*

Para dar solución a este problema, se construyen todos los arreglos de $n+1$ objetos inductivamente, usando todos los arreglos de n objetos para $n > 3$. Para darnos una idea de cómo se construye el arreglo, veamos primero los casos para 2, 3 y 4 objetos.

***Caso** $k = 2$. Tenemos las filas*

$$\begin{array}{c} 12 \\ 21 \end{array}$$

y para pasar de una fila a otra se utiliza la permutación (12), por lo que $T = \{(12)\}$ genera unicursalmente a S_2.

***Caso** $k = 3$. Para este caso, lo que se tiene que hacer es repetir $k = 3$ veces cada una de las filas del arreglo de S_2*

$$\begin{array}{c} 12 \\ 12 \\ 12 \\ 21 \\ 21 \\ 21 \end{array}$$

para después reemplazar cada número por su sucesor, así tenemos

$$\begin{array}{c} 23 \\ 23 \\ 23 \\ 32 \\ 32 \\ 32 \end{array}$$

una vez hecho lo anterior, en la primera fila vamos a agregar al 1 en la posición 1, en la segunda fila en la posición 2 y en la tercera fila en la posición 3, para la cuarta fila dejaremos al 1 en la posición 3, (esto es para que los cambios sean entre posiciones adyacentes) en la quinta fila en la posición 2 y para la sexta fila en la posición 1, así nos queda

$$\begin{array}{c} 123 \\ 213 \\ 231 \\ 321 \\ 312 \\ 132 \end{array}$$

Observemos que al tener todas las permutaciones de S_2 e ir agregando al 1 de todas las formas posibles, garantizamos que tenemos todo S_3, notemos que para pasar de una fila a otra sólo intercambiamos de posición a objetos adyacentes, ya sea por el siguiente o por el anterior objeto por lo que ocupamos las permutaciones (12) y (23), no se repiten filas, por lo que obtenemos un total $3! = 6$ filas distintas, así $T = \{(12), (23)\}$ genera unicursalmente a S_3.

***Caso** $k = 4$. Repetir $k = 4$ veces cada una de las filas del caso anterior*

123	231	312
123	231	312
123	231	312
123	231	312
213	321	132
213	321	132
213	321	132
213	321	132

después, reemplazar cada número por su sucesor

234	342	423
234	342	423
234	342	423
234	342	423
324	432	243
324	432	243
324	432	243
324	432	243

una vez hecho lo anterior, en la primera fila vamos a agregar al 1 en la posición 1, en la segunda fila en la posición 2, en la tercera fila en la posición 3, para la cuarta fila dejaremos al 1 en la posición 4, en la quinta fila en la posición 4 en la sexta fila en la posición 3, en la séptima fila en la posición 2 y en la octava fila en la posión 1 repitiendo el proceso hasta recorrer todas las filas, así nos queda

1234	1342	1423
2134	3142	4123
2314	3412	4213
2341	3421	4231
3241	4321	2431
3214	4312	2413
3124	4132	2143
1324	1432	1243

Al tener todas las permutaciones de S_3 e ir agregando al 1 de todas las formas posibles, garantizamos que tenemos todo S_4, notemos que para pasar *de una fila a otra sólo intercambiamos de posición a objetos adyacentes, como en el caso anterior, por lo que ocupamos las permutaciones* (12)*,* (23) *y* (34)*, no se repiten filas, por lo que obtenemos un total* $4! = 24$ *filas distintas, así* $T = \{(12), (23), (34)\}$ *genera unicursalmente a* S_4*.*

Caso $k = n$***.*** *Supongamos entonces* $T = \{(12), (23), (34), \ldots, ((n-1)n\}$ *genera unicursalmente a* S_n *usando la construción anterior.*

Caso $k = n+1$***.*** *Observemos que para construir las filas de* S_{n+1} *se usan las filas obtenidas en* S_n*, repitiendo* $n+1$ *veces cada una de las filas de* S_n*, así, el número total de filas sería*

$$(n+1)n! = (n+1)!$$

para después reemplazar cada uno de los objetos del 1 *al* n *por su sucesor y agregar en la primera fila al* 1 *en la primera posición, en la segunda fila en la posición* 2 *y así sucesivamente hasta que en la* $n+1$ *fila el* 1 *quede en la posición* $n+1$*, para la fila* $n+2$ *el* 1 *deberá quedar en la misma posición que en la fila anterior, es decir, en la posición* $n+1$ *(para que los cambios sean entre posiciones adyacentes) y a partir de ahora se va a ir regresando al* 1 *una posición, es decir, para la fila* $n+3$*, el* 1 *deberá de estár en la posición* n*, hasta regresar a la primera posición y así, el proceso se repite hasta que se termine de recorrer todas las filas.*

Las filas no se repiten puesto que si lo hicieran el 1 *debería estar en la misma posición y al eliminarlo de estas filas, los demás elementos quedarían ordenados de igual manera, lo cual indicaría que ambas filas provenían de una misma permutación de* n *y de acuerdo al algoritmo que se está usando, no es posible que en dos copias iguales de la misma permutación de* n *elementos sea insertado el* 1 *en ambas en la misma posición.*

En S_n*, para pasar de una fila a otra usamos las permutaciones* (12)*,* (23)*,* $\ldots$*,* $((n-1)n)$*, por lo que al agregar un objeto más, para* S_{n+1} *usamos las permutaciones* (12)*,* (23)*,* $\ldots$*,* $(n(n+1))$*, así* S_{n+1} *es generado unicursalmente por* $T' = \{(12), (23), \ldots, (n(n+1))\}$*.*

Observación 3.9. El problema del Motel

La construcción dada en la observación anterior, muestra la solución a un caso especial del siguiente problema de D. H. Lehmer's "El problema del Motel" de [4].

"El señor Smith maneja un motel. Se compone de n *habitaciones en fila recta. No hay vacantes. Smith es un psicólogo que planea estudiar los efectos de reordenar a sus invitados en todas las formas posibles. Todas las mañanas los reordena, el clima es miserable, llueve casi a diario y para minimizar la incomodidad de sus huéspedes, cada reordenamiento diario se realiza mediante intercambios de solo los ocupantes de habitaciones contiguas.*

¿Habrá algún algoritmo simple que se ejecute a través de todos los posibles reordenamientos cambiando sólo un par de ocupantes adyacentes en cada paso?"

Cabe mencionar que esta solución, dada por Johnson-Steinhaus-Trotter, satisface las reglas $R1$, $R2$ y $R3$ pero no cumple con $R4$ ya que algunos objetos ocupan el mismo lugar por más de dos filas consecutivas y por lo tanto no es solución para el problema de las campanas.

Hemos visto algunos ejemplos de grupos generados unicursalmente por algún subconjunto del mismo, sin embargo, no sólo T debe ser un subconjunto de G sino que es necesario que T sea un generador de G, aunque no es suficiente. Más adelante veremos un ejemplo en donde $T \subseteq G$ no genera unicursalmente a G aunque T sea un conjunto generador de G.

Observación 3.10. *Dadas $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ producto de transposiciones disjuntas de números consecutivos (con $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ no necesariamente distintas), la existencia de una extensión en n campanas usando $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ para pasar de una fila a otra es equivalente a que $T = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k\}$ genere unicursalmente a S_n y para toda i, x_i y x_{i+1} no tengan puntos fijos en común.*

Demostración. Demostraremos la primera implicación. Supongamos que existe un método en n campanas usando $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ para pasar de una fila a otra, tal que la longitud del método es de $n! + 1$ y que cumple R1, R2, R3 y R4, sin pérdida de generalidad, supongamos que $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ se aplican de acuerdo a los subíndices, así tenemos el siguiente arreglo:

$$\begin{array}{rl}
12\cdots n & \\
x_1 & x_1 \\
\cdots\cdots & \\
x_2 & x_1x_2 \\
\cdots\cdots & \\
x_3 & x_1x_2x_3 \\
\cdots\cdots & \\
\vdots & \vdots \\
12\cdots n &
\end{array}$$

Recordemos que las filas las podíamos representar como permutaciones, sabemos que aparecen todas las permutaciones de S_n ya que es una extensión, la primera fila corresponde a la permutación id, la segunda fila corresponde al producto idx_1, la tercera a x_1x_2 y así sucesivamente hasta llegar a la fila $n!+1$ que corresponde a la id (ronda) y es también el producto $x_1x_2x_3\cdots x_k$ con lo cual, observamos que cada una de las filas la podemos obtener a partir de la anterior mediante la aplicación $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$, que justamente es la definición de unicursalidad, por lo tanto, $T = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k\}$ genera unicursalmente a S_n, falta ver que x_i y x_{i+1} no tienen puntos fijos en común para toda i. Supongamos por contradicción que para alguna i, x_i y x_{i+1} fijan al mismo punto, a saber j, es decir, x_i y x_{i+1} fijan a la campana j, por lo que tenemos en el método

$$\begin{array}{r} 12\cdots n \\ \vdots \\ \cdots j\cdots \\ x_i \\ \cdots j\cdots \\ x_{i+1} \\ \cdots j\cdots \\ \vdots \\ 12\cdots n \end{array}$$

así, la campana j ocupa el mismo lugar en tres filas consecutivas, lo que contradice que el método cumpla R4, por lo tanto x_i, x_{i+1} no tienen puntos fijos en común.

Ahora supongamos que $T = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k\}$ con $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ producto de transposiciones disjuntas de números consecutivos (no necesariamente distintas) genera unicursalmente a S_n, con la propiedad de que x_i y x_{i+1} no tienen puntos fijos en común para toda i, por demostrar que existe una extensión en n campanas usando las permutaciones $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ para pasar de una fila a otra.

Sea $S_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n!}\}$ y $T = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k\}$, donde T genera unicursalmente a S_n. No sabemos cuántos elementos tiene T sin embargo sabemos que S_n tiene $n!$ elementos, como T genera a S_n unicursalmente, a cada elemento del simétrico le aplicamos alguna x_i, por lo que vamos a denotar a los elementos de T como $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n!}$ donde cada y_i es la permutación que aplicamos a a_i para llegar a a_{i+1} y donde las y_i no necesariamente son diferentes, es decir, podemos reacomodar a los elementos de S_n de tal manera que cada elemento sea obtenido a partir del anterior mediante la aplicación de alguna y_i, supongamos, sin pérdida de generalidad que el reacomodo es el siguiente

$$\begin{aligned}
a_1y_1 &= a_2\\
a_2y_2 &= a_3\\
a_3y_3 &= a_4\\
&\vdots\\
a_iy_i &= a_{i+1}\\
&\vdots\\
a_{n!-1}y_{n!-1} &= a_{n!}\\
a_{n!}y_{n!} &= a_1\\
a_1y_1 &= a_2
\end{aligned}$$

Como se tomaron los subíndices módulo n, en algún momento el proceso se cierra y por lo tanto se regresa al elemento inicial. Alguna de las a_i corresponde al elemento identidad, suponiendo que a_j es la identidad, tenemos

$$\begin{aligned}
a_1y_1 &= a_2\\
a_2y_2 &= a_3\\
a_3y_3 &= a_4\\
&\vdots\\
a_{j-1}y_{j-1} &= a_j \quad = \quad id\\
&\vdots\\
a_{n!-1}y_{n!-1} &= a_{n!}\\
a_{n!}y_{n!} &= a_1\\
a_1y_1 &= a_2
\end{aligned}$$

por lo que reordenando el arreglo anterior de manera que la identidad aparezca al inicio nos queda el siguiente arreglo

$$\begin{aligned}
a_{j-1}y_{j-1} &= a_j \quad = \quad id\\
a_jy_j &= a_{j+1}\\
&\vdots\\
a_{n!}y_{n!} &= a_1\\
a_1y_1 &= a_2\\
a_2y_2 &= a_3\\
&\vdots\\
a_{j-2}y_{j-2} &= a_{j-1}\\
a_{j-1}y_{j-1} &= a_j \quad = \quad id
\end{aligned}$$

Aquí el elemento identidad corresponde a la ronda inicial, al aplicar sucesivamente los elementos y_i, se llega a un punto en el que se repite una fila, $a_{j-1}y_{j-1} = id$, obteniendo así nuevamente la ronda, (R1). Al generar T a S_n unicursalmente, sabemos que en la lista anterior van a aparecer todos los elementos de S_n, es decir

$n!$ elementos, por la definición de unicursalidad, el primer y el último elemento son el mismo, por lo que hay un elemento que se repite (la ronda) y por tanto tenemos $n!+1$ filas. Al generar unicursalmente T a S_n, los elementos no se repiten, al ver a los elementos de S_n como filas, garantizamos entonces que las filas no van a repetirse, sólo la primera y la última fila (R2), al ser $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n!}$ producto de transposiciones disjuntas de números consecutivos, cada campana sólo puede cambiar su lugar por una posición adyacente cuando se mueva de una fila a otra (R3). Al aplicar $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_k$ para pasar de una fila a otra con la propiedad de que y_i y y_{i+1} no tienen puntos fijos en común para toda i, garantizamos que ninguna campana ocupa el mismo lugar por más de dos filas consecutivas (R4), supongamos por contradicción una campana tiene la misma posición en tres filas consecutivas, entonces tenemos en el arreglo

$$\begin{array}{r} 12\cdots n \\ \vdots \\ \cdots k \cdots \\ y_i \\ \cdots k \cdots \\ y_{i+1} \\ \cdots k \cdots \\ \vdots \\ 12\cdots n \end{array}$$

que indica que las permutaciones y_i y y_{i+1} dejan fija a la campana k, lo que contradice que y_i y y_{i+1} no tienen puntos fijos en común para toda i, j. De lo anterior, obtenemos un método de longitud $n!+1$ que cumple (R1)-(R4), por lo cual, el método es una extensión en n campanas.

□

Ejemplifiquemos ahora cada una de las implicaciones de la observación anterior.

Ejemplo 3.11. $T = \{(12),(23)\}$ *genera unicursalmente a* S_3*, entonces existe una extensión en* 3 *campanas.*

De acuerdo a la observación 3.10, sabemos que hay una extensión en 3 campanas, con $3!+1 = 7$ *filas. Demos el método de manera explícita usando la idea de la demostración de dicha observación.*

Sea $G = S_3 = \{(12),(123),(13),(132),(23),id\}$ *y* $T = \{(12),(23)\}$ *y donde* $t_1 = (12)$ *y* $t_2 = (23)$*.*

$$(123)t_1 = (123)(12) = (13)$$

$$(13)t_2 = (13)(23) = (132)$$

$$(132)t_1 = (132)(12) = (23)$$

$$(23)t_2 = (23)(23) = id$$
$$idt_1 = id(12) = (12)$$
$$(12)t_2 = (12)(23) = (123)$$

que puede ser reordenada de tal manera que la identidad sea el primer elemento al que se le aplica (12)*, así obtenemos*

$$idt_1 = id(12) = (12)$$
$$(12)t_2 = (12)(23) = (123)$$
$$(123)t_1 = (123)(12) = (13)$$
$$(13)t_2 = (13)(23) = (132)$$
$$(132)t_1 = (132)(12) = (23)$$
$$(23)t_2 = (23)(23) = id.$$

Al ver a los elementos de S_3 *como filas, se tiene el siguiente arreglo*

$$\begin{array}{r} 123 \\ t_1 \\ 213 \\ t_2 \\ 231 \\ t_1 \\ 321 \\ t_2 \\ 312 \\ t_1 \\ 132 \\ t_2 \\ 123. \end{array}$$

El cual es un método con 7 filas que cumple que la primera y última fila son rondas, no se repiten filas pues G *es generado unicursalmente por* T *y como* (12) *y* (23) *son transposiciones de números consecutivos, sólo cambian su lugar por un lugar adyacente, por lo tanto se tiene un extensión en* 3 *campanas.*

Ejemplo 3.12. *Existe un extensión en* 4 *campanas usando las permutaciones* $(12)(34), (23), (34)$ *para pasar de una fila a otra, entonces* $T = \{(12)(34), (23), (34)\}$ *genera unicursalmente a* S_4*.*

Dado que las permutaciones consideradas son productos de transposiciones disjuntas de números consecutivos, por la observación 3.10, sabemos que efectivamente T *genera unicursalmente a* S_4*. Veamos de manera explícita por qué eso ocurre.*

Consideremos la extensión para 4 campanas mencionada en el ejemplo 3.7

	1234		z	1342	$(y^{-1}z) = (234)$	z	1423	$(y^{-1}z)^2 = (243)$	z	1234.	id
x	2143	$x = (12)(34)$	x	3124	$(y^{-1}z)x = (132)$	x	4132	$(y^{-1}z)^2x = (142)$			
y	2413	$xy = (1243)$	y	3214	$(y^{-1}z)xy = (13)$	y	4312	$(y^{-1}z)^2xy = (1423)$			
x	4231	$xyx = (14)$	x	2341	$(y^{-1}z)xyx = (1234)$	x	3421	$(y^{-1}z)^2xyx = (1324)$			
y	4321	$(xy)^2 = (14)(23)$	y	2431	$(y^{-1}z)(xy)^2 = (124)$	y	3241	$(y^{-1}z)^2(xy)^2 = (134)$			
x	3412	$(xy)^2x = (13)(24)$	x	4213	$(y^{-1}z)(xy)^2x = (143)$	x	2314	$(y^{-1}z)^2(xy)^2x = (123)$			
y	3142	$(xy)^3 = (1342)$	y	4123	$(y^{-1}z)(xy)^3 = (1432)$	y	2134	$(y^{-1}z)^2(xy)^3 = (12)$			
x	1324	$(xy)^3x = y^{-1} = (23)$	x	1432	$(y^{-1}z)y^{-1} = (24)$	x	1243	$(y^{-1}z)^2y^{-1} = (34)$			

Sea $T = \{(12)(34), (23), (34)\}$ *con* $x = (12)(34)$*,* $y = (23)$ *y* $z = (34)$*, tenemos que ver que* T *genera unicursalmente a* S_4*.*

Si reordenamos los elementos de S_4 *de la misma forma como se van obteniendo en la extensión anterior, tenemos que*

$$\begin{aligned} S_4 = \{&(12)(34), (1243), (14), (14)(23), (13)(24), (1342), (23), (342), (132), (13), \\ &(1234), (124), (143), (2143), (24), (243), (142), (1423), (1324), (134), (123), \\ &(21), (34), id\} \end{aligned}$$

por como se construyó $PB6$*, cada una de las permutaciones es obtenida a partir de la anterior mediante la aplicación de* x*,* y *o* z*, que justamente es la definición de unicursalidad.*

Como vimos en el capítulo anterior, podemos describir los métodos mediante la aplicación de alguna permutación a cada fila, también podemos describirlas mediante la aplicación de una permutación a cada eslabón inicial, así, representábamos nuestro método como una sucesión de cadenas. Teniendo en cuenta lo anterior, damos el siguiente resultado.

Observación 3.13. *Si existe una extensión en* n *campanas conformada sólo por cadenas simples y compuestas y donde denotaremos a* T' *como el conjunto de todas las permutaciones que son usadas para pasar de un eslabón inicial a otro, entonces* A_{n-1} *es generado unicursalmente por* T'*.*

Demostración. Supongamos que existe una extensión en n campanas conformada sólo por cadenas simples y compuestas. Por cómo se eligen las permutaciones en estos métodos en específico, en cada eslabón inicial y en cada eslabón final la campana 1 ocupa la primera posición.

$$\begin{array}{cccccc} 1\cdots n & 1\cdots & 1\cdots & \cdots & 1\cdots & 1\cdots n. \\ & & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ & & & & & \\ 1\cdots & 1\cdots & 1\cdots & 1\cdots & 1\cdots & \end{array}$$

Sea $T' = \{P, B, Q\}$ donde P, B, Q son las permutaciones aplicadas a cada eslabón inicial para pasar de un eslabón a otro. Al tener una extensión que sólo usa cadenas simples y compuestas, las permutaciones $T' = \{P, B, Q, \}$ resultan ser pares. Como cada eslabón inicial tiene en la primera posición a la campana 1 y el hecho de que P, B y Q sean pares, implica que cualquier eslabón inicial es una permutación par de $\{2, 3, 4, \cdots, n\}$, por lo que cada eslabón inicial es un elemento de A_{n-1}. Al tener una extensión, contamos con $n!$ filas distintas, y como cada cadena es una clase lateral de D_n se tiene que cada cadena tiene $2n$ filas, así, para poder obtener el número de cadenas, que es equivalente al número de eslabones iniciales, hay que dividir el total de filas, $n!$, entre el número de filas de cada cadena, $2n$, obtenemos

$$\frac{n!}{2n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot \cancel{n}}{2\cancel{n}} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)}{2} = \frac{(n-1)!}{2} = |A_{n-1}|$$

es decir, existen tantos eslabones iniciales como el orden de A_{n-1} y como el método se trata de una extensión, garantizamos que las filas no se repiten por lo que tenemos todo A_{n-1} (observemos entonces que en consecuencia, las últimas filas de cada cadena son permutaciones impares de $\{2, 3, 4, \cdots, n\}$). Como cada eslabón inicial se obtiene del anterior mediante la aplicación de alguna permutación de T', entonces T' genera unicursalmente a A_{n-1}.

□

3.2. E-ciclo

Veremos más adelante que $\alpha = \{(34675), (247)(365)\} \subseteq A_6$ no genera unicursalmente a A_6, por lo cual no existe una extensión en 7 campanas usando sólo cadenas simples y compuestas, pero antes de analizar eso, probaremos algunos resultados.

Definición 3.14. *Sea G un grupo finito y $E \subseteq G$. Un E-ciclo en G es un subconjunto ordenado cíclicamente $g_1, g_2, \cdots, g_n$ de G tal que $g_i^{-1} g_{i+1} \in E$ para toda $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ donde los subíndices son considerados módulo n.*

Dada la definición anterior, damos la siguiente equivalencia:

Observación 3.15. *Si G es un grupo finito y $E \subseteq G$. G es un E-ciclo si y sólo si E genera a G unicursalmente.*

Demostración. Sea $E \subseteq G$, supongamos que E es un E-ciclo en G, por demostrar que E genera a G unicursalmente. Al ser G un E-ciclo, podemos ordenar cíclicamente los elementos de $G = \{g_1, g_2, g_3, \cdots, g_n\}$ de modo que por hipótesis, para cada $i \in \{1, 2, 3, \cdots, n\}$, existe $t \in E$ tal que

$$t = g_i^{-1} g_{i+1} \in E$$

aplicando g_i por la izquierda, tenemos

$$g_i t = g_i(g_i^{-1} g_{i+1})$$

es decir

$$g_i t = g_{i+1}$$

de este modo, ordenando cíclicamente a G en el mismo orden que da la definición de E-ciclo, cada elemento de G se obtiene a partir del elemento anterior mediante la aplicación de algún elemento de E, por lo tanto E genera unicursalmente a G.

Sea $E \subseteq G$, supongamos que E genera unicursalmente a G, por demostrar que G es un E-ciclo. Como E genera unicursalmente a G, podemos ordenar los elementos de $G = \{g_1, g_2, g_3, \cdots, g_n\}$ de modo que para cada $i \in \{1, 2, 3, \cdots, n\}$, existe un $h \in E$ tal que

$$g_i h = g_{i+1}$$

o de manera equivalente

$$h = g_i^{-1} g_{i+1}$$

de ese modo, estamos ordenando cíclicamente a G de modo que para cada i, $g_i^{-1} g_{i+1}$ es un elemento en E, por lo tanto G es un E-ciclo.

$\square$

Definición 3.16. *Sea X un conjunto finito y sea E un conjunto de permutaciones de X. Un E-ciclo en X es un subconjunto ordenado $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de X tal que para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ se tiene que $x_{i+1} = \alpha_i(x_i)$ para alguna $\alpha_i \in E$, donde los subíndices son considerados módulo n.*

Teorema 3.17. *Sea $E = \{\alpha, \beta\}$ con α, β permutaciones de un conjunto finito X, teniendo k y l ciclos respectivamente. Supongamos que X tiene una partición en r E-ciclos disjuntos. Si $\gamma = \beta^{-1}\alpha$ tiene orden impar (es decir, es una permutación par), entonces*

$$r \equiv k \equiv l \pmod{2}$$

Demostración. Observemos primero que existe una correspondencia uno a uno entre particiones de X en subconjuntos cíclicos disjuntos y permutaciones π de X, en donde los subconjuntos de X son los ciclos de π, es decir, si se tiene una permutación π en X, podemos ver a los ciclos de esa permutación como subconjuntos cíclicos disjuntos de X y viceversa. Además, esos ciclos son E-ciclos si y sólo si para cada $x \in X$ se tiene que $\alpha_x = \pi(x)$ para alguna $\alpha_x(x) \in E$.

Por hipótesis sabemos que hay una partición de X en r E-ciclos disjuntos, sea π la permutación de n elementos que corresponde a estos r E-ciclos.

Sea $P = \{x \in X | \pi(x) = \alpha(x)\}$ y $Q = \{x \in X | \pi(x) = \beta(x)\}$. Es claro que P y Q son subconjuntos de X, por lo que $P \cup Q \subseteq X$.

Por otro lado, si $x \in X$, como X tiene una partición en r E-ciclos disjuntos dada por π, en particular x aparece en un E-ciclo. Por la definición de E-ciclo, donde $E = \{\alpha, \beta\}$, el subconjunto donde aparece x y $\pi(x)$ está ordenado de forma cíclica y donde para pasar de un elemento a otro se usa α o β, es decir, para pasar de x a $\pi(x)$, $\alpha(x) = \pi(x)$ o $\beta(x) = \pi(x)$, es decir, $x \in P \cup Q$ y por lo tanto $X \subseteq P \cup Q$, concluyendo así que $P \cup Q = X$.

Sea $\tau = \beta^{-1}\pi$ y $x \in Q$, entonces

$$\tau(x) = \beta^{-1}\pi(x) = \beta^{-1}\beta(x) = x$$

por lo tanto τ actúa en Q como la identidad.

Sea $x \in P - Q$, observemos que $P - Q$ es invariante bajo τ, es decir

$$\tau(x) \in P - Q$$

además $\tau(x) = \gamma(x)$.
Sea $x \in P - Q$. Veamos primero que $\tau(x) = \gamma(x)$ pues

$$\tau(x) = \beta^{-1}\pi(x) = \beta^{-1}\alpha(x) = \gamma(x).$$

Por otro lado, si

$$\pi(\tau(x)) = \beta(\tau(x))$$

$$\begin{array}{rrcl}
\Rightarrow & \pi(\tau(x)) & = & \beta(\beta^{-1}\pi(x)) \\
\Rightarrow & \pi(\tau(x)) & = & \pi(x) \\
\Rightarrow & \tau(x) & = & x \\
\Rightarrow & \beta^{-1}\pi(x) & = & x \\
\Rightarrow & \pi(x) & = & \beta(x) \\
\Rightarrow & x \in Q & &
\end{array}$$

lo cual es una contradicción ya que $x \in P - Q$, por lo tanto

$$\tau(x) \notin Q.$$

Como $\tau(x)$ pertenece a un E-ciclo, si

$$\begin{array}{rrcl}
 & \pi(\tau(x)) & \neq & \beta(\tau(x)) \\
\Rightarrow & \pi(\tau(x)) & = & \alpha(\tau(x))
\end{array}$$

y por definición $\tau(x) \in P$, por lo tanto

$$\tau(x) \in P - Q$$

así, $P - Q$ es invariante bajo τ y, como se observó anteriormente, concuerda con γ en dicho subconjunto. Así

$$\tau\mid_{P-Q} = \gamma\mid_{P-Q}$$

y

$$\tau \mid_Q = id \mid_Q .$$

Podemos entonces expresar a τ y a γ en ciclos disjuntos de la siguiente forma:

$$\gamma = p_1 \cdots p_t q_1 \cdots q_s, \ \tau = p_1 \cdots p_t,$$

donde $p_1, \ldots, p_t$ son los ciclos que permutan los elementos de $P - Q$ y $q_1, \ldots, q_s$ los que permutan los elementos de Q. Observamos que dado que son ciclos disjuntos, $o(\gamma)$ es el mínimo común múltiplo de $o(p_1 \cdots p_t) = o(\tau)$ y $o(q_1 \cdots q_s)$. De este modo, si $o(\tau)$ fuera par, $o(\gamma)$ también lo sería, lo que contradice nuestra hipótesis. Concluimos entonces que τ tiene orden impar y por la observación 1.33, $sgn(\tau) = 1$, es decir, τ es una permutación par.

Observemos que

$$sgn(\tau) = sgn(\beta^{-1}\pi) = sgn(\beta)sgn(\pi)$$

entonces

$$sgn(\beta) = sgn(\pi)$$

y por la observación 1.35 se sigue que

$$l \equiv r \pmod 2$$

Por otro lado

$$sgn(\tau) = sgn(\gamma) = sgn(\beta^{-1}\alpha) = sgn(\beta)sgn(\alpha)$$

por lo que

$$sgn(\beta) = sgn(\alpha)$$

y por la observación 1.35

$$l \equiv k \pmod 2$$

De lo anterior se sigue que

$$l \equiv r \equiv k \pmod 2$$

que es lo que queríamos demostrar. □

Lema 3.18. *Sea G un grupo finito y $a \in G$, consideremos la función dada en 1.18*

$$\alpha : G \to G$$

como

$$\alpha(x) = xa.$$

Si $\alpha = \beta_1\beta_2\cdots\beta_t$ es la descomposición en ciclos ajenos no triviales, para cada $x \in G$ existe $j \in \{1, 2, \ldots, t\}$ tales que

$$sop(\beta_j) = x\langle a\rangle.$$

Entonces las clases laterales izquierdas del subgrupo $\langle a\rangle$ están determinadas por los ciclos en los que se descompone la permutación α.

Demostración. Observemos primero que el soporte de cada β_j es una clase lateral de $\langle a\rangle$.

Sea $j \in \{1, 2, \ldots, t\}$ y $x \in G$ tal que $\beta_j(x) \neq x$ entonces

$$\begin{array}{rcl} \beta_j & = & \begin{pmatrix} x & \alpha(x) & \cdots & \alpha^m(x) \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} x & xa & \cdots & xa^m \end{pmatrix} \end{array}$$

y por otro lado $x\langle a\rangle = \{x, xa, \cdots, xa^m\}$ entonces

$$sop(\beta_j) = x\langle a\rangle.$$

Ahora consideremos cualquier clase lateral $x\langle a\rangle$, como $a \neq e$, sabemos que $xa \neq x$ así $\alpha(x) \neq x$ entonces existe un único j tal que $\beta_j(x) \neq x$ y por lo anterior

$$sop(\beta_j) = x\langle a\rangle.$$

es decir, las clases laterales izquierdas de $\langle a\rangle$ están determinadas por los ciclos en los que se descompone la permutación α.

□

Antes de dar paso a los siguientes resultados, veamos algunos ejemplos del lema anterior.

Ejemplo 3.19. *Sea $G = \langle t\rangle = \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ donde $o(t) = 6$ y $a_i = t^i$ con $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.*

Consideremos $a = t^2 = a_2$ así $\langle a\rangle = \langle t^2\rangle = \{e, t^2, t^4\} = \{a_0, a_2, a_4\}$ entonces

$$\begin{array}{rcccl} \alpha(a_0) & = & a_0a_2 & = & a_2 \\ \alpha(a_1) & = & a_1a_2 & = & a_3 \\ \alpha(a_2) & = & a_2a_2 & = & a_4 \\ \alpha(a_3) & = & a_3a_2 & = & a_5 \\ \alpha(a_4) & = & a_4a_2 & = & a_0 \\ \alpha(a_5) & = & a_5a_2 & = & a_1 \end{array}$$

es decir

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_0 & a_1 \end{pmatrix} = (a_0 \;\; a_2 \;\; a_4)(a_3 \;\; a_5 \;\; a_1).$$

Por otro lado, consideremos las clases laterales izquierdas de $\langle a\rangle$

$$\begin{array}{rcl} a_0\langle a\rangle & = & \{a_0, a_2, a_4\} \\ a_1\langle a\rangle & = & \{a_1a_0, a_1a_2, a_1a_4\} \quad = \quad \{a_1, a_3, a_5\} \end{array}$$

es decir, las clases laterales izquierdas de $\langle a\rangle$ están determinadas por lo ciclos en los que se descompone α.

Ejemplo 3.20. *Sea G el grupo de los cuaterniones*

$$G = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$$

con $a = j$, así

$$\langle j\rangle = \{j, j^2, j^3, j^4\} = \{j, -1, -j, 1\}$$

entonces

$$\begin{array}{rcccl} \alpha(1) & = & 1j & = & j \\ \alpha(-1) & = & (-1)j & = & -j \\ \alpha(i) & = & ij & = & k \\ \alpha(-i) & = & (-i)j & = & -k \\ \alpha(j) & = & jj & = & -1 \\ \alpha(-j) & = & (-j)j & = & 1 \\ \alpha(k) & = & kj & = & -i \\ \alpha(-k) & = & (-k)j & = & i \end{array}$$

es decir

$$\begin{array}{rcl} \alpha & = & \begin{pmatrix} 1 & -1 & i & -i & j & -j & k & -k \\ j & -j & k & -k & -1 & 1 & -i & i \end{pmatrix} \\ & = & (1\ \ j\ \ -1\ \ -j)(k\ \ -i\ \ -k\ \ i) \end{array}$$

Por otro lado, si consideramos las clases laterales izquierdas de $\langle j\rangle$, tenemos

$$\begin{array}{rcl} 1\langle j\rangle & = & \{j, -1, -j, 1\} \\ i\langle j\rangle & = & \{ij, -i, i(-j), i\} \quad = \quad \{k, -i, -k, i\} \end{array}$$

es decir, $i\langle j\rangle$ y $1\langle j\rangle$ están determinadas por $(1\ \ j\ \ -1\ \ -j)$ y $(k\ \ -i\ \ -k\ \ i)$ respectivamente.

3.3. Teorema de Rankin

Teorema 3.21. *(Rankin, 1948) Sea $E = \{a, b\}$ un subconjunto de un grupo finito G. Supongamos que G tiene una partición en r E-ciclos disjuntos. Si $c = ab^{-1}$ tiene orden impar, entonces*

$$r \equiv |G : \langle a\rangle| \equiv |G : \langle b\rangle| \pmod 2$$

Demostración. Sea $G = X$ y $x \in G$, definimos a α y β por

$$\alpha(x) = xa$$

$$\beta(x) = xb$$

con k y l los ciclos de α y β respectivamente, entonces

$$\gamma(x) = \beta^{-1}\alpha(x) = \beta^{-1}(xa) = xab^{-1} = xc$$

es decir

$$\gamma(x) = xc$$

.

Sea $o(\gamma) = t$ y $o(c) = m$, observemos primero que

$$x = \gamma^t(x) = xc^t$$

entonces, como $\gamma^t(x) = x$, se tiene que $xc^t = x$ por lo que $c^t = id$, pero como $o(c) = m$, entonces $m|t$.

Por otro lado, tenemos que $c^m = id$, entonces, para toda $x \in G$

$$x = xc^m = \gamma^m(x)$$

así $\gamma^m = id$ pero $o(\gamma) = t$, entonces $t|m$.

De lo anterior se sigue que

$$o(\gamma) = o(c).$$

Por el lema 3.18, las clases laterales de $\langle a \rangle$ y de $\langle b \rangle$ están determinadas por los ciclos de α y β respectivamente, es decir

$$k = |G : \langle a \rangle|$$

$$l = |G : \langle b \rangle|$$

y por el teorema 3.17

$$k \equiv r \equiv l \pmod 2$$

es decir

$$|G : \langle a \rangle| \equiv r \equiv |G : \langle b \rangle| \pmod 2$$

□

Corolario 3.22. *Sea $E = \{a, b\}$ un subconjunto de un grupo finito G. Supongamos que G tiene una partición en un E-ciclo. Si $c = ab^{-1}$ tiene orden impar, entonces*

$$1 \equiv |G : \langle a \rangle| \equiv |G : \langle b \rangle| \pmod 2$$

Demostración. Como consecuencia del teorema 3.21, si $r = 1$, entonces se cumple que

$$1 \equiv |G : \langle a\rangle| \equiv |G : \langle b\rangle| \pmod{2}$$

□

En otros trabajos [5], el Teorema de Rankin mencionado anteriormente se enuncia de la siguiente manera:

Teorema 3.23. *Sea G un grupo finito. Supongamos que G es generado por $T = \{x, y\}$ y que $\langle x^{-1}y\rangle$ tiene orden impar. Si G es generado unicursalmente por T entonces $|G : \langle x\rangle|$ y $|G : \langle y\rangle|$ son impares.*

Demostración. Como G es generado unicursalmente por T, G es un T-ciclo, en este caso G tiene una partición en $r = 1$ T-ciclos disjuntos. Haciendo $a = x^{-1}$ y $b = y^{-1}$ con $c = ab^{-1} = x^{-1}y$, sabemos que $\langle ab^{-1}\rangle = \langle x^{-1}y\rangle$ es de orden impar, así

$$|G : \langle a\rangle| \equiv 1 \equiv |G : \langle b\rangle| \pmod{2}$$

es decir

$$|G : \langle x^{-1}\rangle| \equiv 1 \equiv |G : \langle y^{-1}\rangle| \pmod{2}$$

como

$$\langle x^{-1}\rangle = \langle x\rangle$$

$$\langle y^{-1}\rangle = \langle y\rangle$$

entonces $|G : \langle x\rangle|$ y $|G : \langle y\rangle|$ son impares. □

Una vez que hemos analizado los resultados anteriores, regresemos al problema a resolver en este trabajo ¿es posible obtener las 5040 permutaciones en $GS7$ usando sólo cadenas simples y cadenas compuestas?, en otras palabras ¿existe una extensión en $GS7$ usando solo cadenas simples y compuestas? Si consideramos sólo los eslabones iniciales tendríamos

$$5040/14$$

cadenas, es decir, tendríamos 360 eslabones iniciales.

Consideremos las permutaciones $P = (34675)$ y $B = (247)(365)$, estas permutaciones generan a A_6, si existiera una extensión en $GS7$, por la observación 3.13 P y B generarían a A_6 unicursalmente, por lo tanto llegamos a la siguiente pregunta ¿Es A_6 generado unicursalmente por $T = \{(34675), (247)(365)\}$?

Teorema 3.24. *No existe una extensión en $GS7$.*

Demostración. Supongamos por contradicción que existe una extensión en $GS7$, entonces por la observación 3.13 A_6 es generado unicursalmente por el conjunto $T = \{(35764), (274)(356)\}$, entonces por la observación 3.15 A_6 es un T-ciclo.

Sea $T = \{a, b\}$ donde $a = (35764)$ y $b = (274)(356)$, A_6 tiene una partición en un T-ciclo y sea

$$c = ab^{-1} = (35764)(247)(365) = (23467)$$

con el orden de c impar, por el teorema 3.21

$$1 \equiv |G : \langle a \rangle| \equiv |G : \langle b \rangle| \pmod 2$$

por otro lado,

$$|\langle a \rangle| = |\langle (35764) \rangle| = 5$$

$$|\langle b \rangle| = |\langle (274)(356) \rangle| = 3$$

entonces

$$|A_6 : \langle a \rangle| = |A_6| / |\langle a \rangle| = 360/5 = 72$$

y

$$|A_6 : \langle b \rangle| = |A_6| / |\langle b \rangle| = 360/3 = 120$$

lo cual nos lleva a una contradicción pues no se cumple que

$$1 \equiv 72 \equiv 120 \pmod 2$$

por lo que T no genera unicursalmente a A_6 y por lo tanto no existe una extensión en $GS7$ usando sólo cadenas simples y compuestas. □

Bibliografía

[1] J. L. Alperin, Groups and Representations, *Department of Mathematics University of Chicago* (2001), Chicago, IL, ISBN: 60637-1514.

[2] T. J. Fletcher, Campanological groups, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 63, 9 (1956), 619-626.

[3] I. N. Herstein, Álgebra Moderna: grupos, teoría de Galois, anillos, campos, *Trillas, México* (2001), ISBN: 978-968-24-3965-0.

[4] D. H. Lehmer, Permutations by Adjacent Interchanges, *Amer. Math. Monthly*, 72 (1965) 36–46.

[5] G. McGuire, Bells, Motels and Permutation Groups, *School of Mathematical Sciences University College Dublin Ireland*, 33 (2012) 15-16. arXiv:1203.1835v1 [math.GR] 8 Mar 2012.

[6] J. J. Rotman, An Introduction to the Theory of Groups, *Springer-Verlag* (1995), New York, ISBN: 978-0387942858.

[7] R. G. Swan, A simple proof of Rankin's Campanological Theorem, *American Mathematical Monthly*, Vol. 106, 2 (1999), 159-161.