



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO**

**FACULTAD DE QUÍMICA**

TESIS

**Flujo de fluidos newtonianos y no-  
newtonianos en medios porosos fractales.**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
INGENIERO QUÍMICO**

**PRESENTA**

**AXEL GOVANNI GONZÁLEZ GARCÍA**



**CDMX.**

**2019**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JURADO ASIGNADO:**

**PRESIDENTE:**                   **Profesor:** Francisco López Serrano Ramos

**VOCAL:**                           **Profesor:** Eduardo Vivaldo Lima

**SECRETARIO:**               **Profesor:** José Esteban López Aguilar

**1er. SUPLENTE:**               **Profesor:** Simón López Ramírez

**2º SUPLENTE:**               **Profesor:** Marcos Turcio Cuevas

**SITIO DONDE SE DESARROLLÓ EL TEMA:**

FACULTAD DE QUÍMICA, EDIFICO E

**ASESOR DEL TEMA:**

Dr. José Esteban López Aguilar

\_\_\_\_\_

**SUPERVISOR TÉCNICO:**

Dr. Marcos Turcio Cuevas

\_\_\_\_\_

**SUSTENTANTE:**

Axel Giovanni González García

\_\_\_\_\_

## **Dedicatoria**

El presente trabajo de tesis está dedicado principalmente a mi madre, por su amor, trabajo y sacrificio en todos estos años; por ser la principal promotora de mis sueños, y por confiar y creer en mis expectativas. Gracias a ella he logrado llegar hasta aquí e incluso aspirar a más.

También quiero dedicar esta tesis a mi familia: Mis tías, mis abuelos, y mis primos, quienes siempre me apoyaron y aceptaron el camino que decidí.

## **Agradecimientos**

Mi profundo agradecimiento a todas las autoridades y personal que conforman a la Universidad Nacional Autónoma de México; en especial a aquellos que constituyen a la Facultad de Química; por confiar en mí, abrirme las puertas y permitirme realizar mis estudios de licenciatura y tesis dentro de su establecimiento educativo.

Me gustaría agradecer en estas líneas la ayuda que muchas personas y colegas me han prestado durante el proceso de investigación y redacción de este trabajo; a mis amigos y compañeros de clase, aquéllos que, con su apoyo, de una u otra forma favorecieron mi desarrollo profesional.

Durante toda la carrera conocí y tomé clase con una gran cantidad de profesores, todos ellos grandes personas y docentes; ellos que me ayudaron y fomentaron mi crecimiento como persona y como ingeniero. De manera especial al M. en C. Marcos Turcio Cuevas por apoyarme en el desarrollo de este trabajo de tesis y por permitirme trabajar con una de sus ideas de investigación.

Finalmente, quiero expresar mi más grande y sincero agradecimiento al Dr. José Esteban López Aguilar, quien me ha apoyado en múltiples ocasiones, más allá del desarrollo de este trabajo. Gracias por sus consejos y correcciones que me han permitido concluir con esta etapa de mi vida.

## Lista de símbolos

$v_z$	Velocidad del fluido en dirección $z$ [m/s]
$q$	Flujo volumétrico en un tubo [ $\text{m}^3/\text{s}$ ]
$Q$	Flujo volumétrico en el medio poroso [ $\text{m}^3/\text{s}$ ]
$K_e$	Permeabilidad [ $\text{m}^2$ ]
$r$	Radio [m]
$R$	Radio de tubo [m] *
$R_{\min}$	Radio de tubo mínimo en el sistema poroso [m]
$R_{\max}$	Radio de tubo máximo en el sistema poroso [m]
$\tau_{rz}$	Esfuerzo cortante de $r$ en dirección $z$ [Pa]
$\mu$	Viscosidad dinámica [Pa s]
$\tau_0$	Esfuerzo de cedencia [Pa]
$\frac{dP}{dL}$	Gradiente de presión [Pa/m]
$L_o$	Longitud aparente del tubo [m]
$L_t$	Longitud del tubo considerando tortuosidades [m]
$D_f$	Parámetro de porosidad, adimensional, $2 < D_f < 3$
$D_t$	Parámetro de tortuosidad, adimensional, $1 < D_t < 2$
$\phi$	Porosidad, adimensional, $0 < \phi < 1$

\*Se considera como un valor constante para los casos de flujo en un tubo liso y tubo tortuoso, y como variable para el caso de flujo en medio poroso.

# Índice

[0] Resumen.....	9
[1.0] Introducción	
[1.1] Antecedentes .....	10
[1.2] Descripción del medio poroso	
[1.2.1] Ecuación de Hagen-Poiseuille .....	13
[1.2.2] Permeabilidad y porosidad .....	13
[1.2.3] Descripción simplificada de un medio poroso .....	15
[1.3] Escalamientos fractales .....	16
[1.4] Fluidos newtonianos y no newtonianos	
[1.4.1] Fluidos de Newton.....	20
[1.4.2] Fluidos de Bingham.....	21
[1.4.3] Fluidos de Ostwald de Waele .....	22
[1.5] Métodos iterativos.....	23
[1.5.1] Runge-Kutta de cuarto orden .....	24
[1.5.2] Método de Simpson.....	26
[2.0] Hipótesis, justificación y objetivos	
[2.1] Hipótesis.....	27
[2.2] Justificación.....	27
[2.3] Objetivos .....	28

[3.0] Marco teórico .....	29
[3.1] Ecuación de movimiento .....	29
[3.2] Distribución de poros y permeabilidad	
[3.2.1] Distribución de poros.....	31
[3.2.2] Permeabilidad en un tubo .....	32
[3.2.3] Permeabilidad en un medio poroso .....	33
[3.3] Modelo Newtoniano	
[3.3.1] Flujo en un tubo tortuoso para un fluido newtoniano.....	34
[3.3.2] Flujo de un fluido newtoniano en un medio poroso .....	35
[3.4] Modelo de un fluido de Bingham .....	36
[3.4.1] Flujo de un fluido de Bingham en un tubo tortuoso .....	37
[3.4.2] Flujo de un fluido de Bingham en un medio poroso .....	39
[3.5] Modelo de un fluido de Ostwald	
[3.5.1] Flujo de un fluido de Ostwald en un tubo tortuoso .....	40
[3.5.2] Flujo de un fluido de Ostwald en un medio poroso.....	41
[3.6] Algoritmo numérico	
[3.6.1] Selección de caso.....	42
[3.6.2] Definición de variables y procesamiento del código.....	42
[3.6.3] Definir la función a resolver .....	43
[3.6.4] Runge-Kutta de cuarto orden.....	44
[3.6.5] Integral de Simpson y velocidad promedio .....	45
[3.6.6] Medio poroso.....	46
[3.6.7] Tratamiento de datos .....	47

[4.0] Resultados y discusión	
[4.1] Validación de modelos	
[4.1.1] Perfiles de velocidad.....	48
[4.1.2] Permeabilidad del medio poroso .....	53
[4.2] Análisis de sensibilidad paramétrica	
[4.2.1] Efecto de la escala fractal de tortuosidad .....	57
[4.2.2] Efecto de la escala fractal de la distribución de poros.....	58
[4.3] Comparación con modelos fractales conocidos	
[4.3.1] Modelo newtoniano .....	60
[4.3.2] Modelo para un fluido de Bingham.....	61
[4.3.3] Modelo para un fluido de ley de potencia .....	63
[4.4] Comparación con datos experimentales	
[4.4.1] Modelo de permeabilidad con un fluido newtoniano .....	64
[4.4.2] Aproximación a Herschel-Bulkley .....	65
[5.0] Conclusiones .....	68
[6.0] Trabajo futuro .....	69
[7.0] Bibliografía .....	71
[8.0] Apéndices	
[A.1] Flujo de un fluido newtoniano en un tubo recto.....	74
[A.2] Flujo de un fluido de Bingham en un tubo recto.....	75
[A.3] Flujo de un fluido de Ostwald en un tubo recto.....	76

## Índice de Figuras

Figura 1. Representación del flujo a través de los tubos hipotéticos que conforman el medio poroso. ....	16
Figura 2. Ejemplo de un fractal: Curva de Koch. ....	17
Figura 3. Efecto del escalamiento fractal de tortuosidad. ....	18
Figura 4. Efecto del escalamiento fractal de la distribución de poros. ....	19
Figura 5. Ejemplo de una curva de flujo para un fluido newtoniano. ....	21
Figura 6. Ejemplo de una curva de flujo para un fluido de Bingham. ....	22
Figura 7. Ejemplo de una curva de flujo para fluidos de Ostwald. ....	23
Figura 8. Perfiles de velocidad de un fluido newtoniano. ....	49
Figura 9. Perfiles de velocidad para un fluido de Bingham. ....	51
Figura 10. Perfiles de velocidad para un fluido adelgazante. ....	52
Figura 11. Perfiles de velocidad para un fluido dilatante. ....	52
Figura 11. Permeabilidad para un fluido newtoniano en el medio poroso. ....	55
Figura 12. Permeabilidad para un fluido de Bingham en el medio poroso. ....	55
Figura 13. Permeabilidad para un fluido adelgazante ( $n=0.5$ ) en el medio poroso. ....	56
Figura 14. Efecto de la tortuosidad en la permeabilidad. ....	57
Figura 15. Efecto de la distribución de poros en la permeabilidad. ....	58
Figura 16. Efecto de la distribución de poros en la porosidad del medio a diferentes cocientes de radios. ....	59
Figura 17. Comparación de modelos newtonianos de permeabilidad en un medio poroso. ....	60
Figura 18. Comparación de modelos de permeabilidad en el medio poroso para fluidos de Bingham. ....	62

Figura 19. Comparación de modelos de permeabilidad en el medio poroso para fluidos de Ostwald.....	63
Figura 20. Comparación con datos experimentales de permeabilidad. ....	64
Figura 21. Serie de datos para fluidos de Herschel-Bulkley. ....	65
Figura 22. Predicción de datos experimentales de fluidos de Herschel-Bulkley. ....	66

## Índice de Tablas

Tabla 1. Combinaciones analizadas .....	29
Tabla 2. Perfiles de velocidad de un fluido newtoniano.....	48
Tabla 3. Perfiles de velocidad de un fluido de Bingham.....	50
Tabla 4. Perfiles de velocidad de un fluido de Ostwald. ....	51
Tabla 5. Ecuaciones de permeabilidad para las distintas geometrías y fluidos modelados..	54
Tabla 6. Reología de los datos experimentales.....	66

# **Flujo de fluidos newtonianos y no-newtonianos en medios porosos fractales.**

## **Resumen**

En este trabajo se propone un nuevo modelo fractal para el flujo en medios porosos de fluidos newtonianos y no newtonianos. Se considera al medio poroso como un conjunto de capilares, es decir, varios tubos tortuosos agrupados en una determinada superficie y distribuidos según lo determina un escalamiento fractal. De esa forma, para calcular el flujo en el medio poroso, se realiza la suma de las contribuciones de flujo individual de cada poro (tubo tortuoso).

Además, se propone un algoritmo de cálculo numérico para la solución de problemas de flujo en medio poroso de fluidos newtonianos y no newtonianos. Esta herramienta resuelve la ecuación de balance de cantidad de movimiento con la implementación de un nuevo escalamiento fractal, cuyos resultados difieren, y en ciertos casos mejoran algunas predicciones reportadas anteriormente. La herramienta creada es versátil y puede adaptarse a modelos reológicos más complejos como Herschel-Bulkley, partiendo de los algoritmos base para fluidos newtonianos, de Bingham y ley de la potencia.

El presente trabajo esta dividido de la siguiente manera:

En el capítulo de Introducción se presentan los antecedentes y teoría desarrollada previamente, además de la justificación del trabajo de tesis y el marco teórico que explica los conceptos utilizados a lo largo del presente trabajo. En la sección titulada e Hipótesis, justificación y objetivos se explica lo que se busca con este trabajo de tesis, además de las

razones que dieron inicio al desarrollo de este trabajo de investigación. En el capítulo de Resultados y discusión se presentan los resultados obtenidos, dividido en cuatro subsecciones para facilitar su comprensión. Estas subsecciones contienen la validación del modelo propuesto, en el alcance predictivo que tiene el modelo fractal propuesto y un estudio de sensibilidad paramétrica; para cerrar esta subsección, se reporta una comparación con modelos similares y contra datos experimentales reportados en la literatura. En la sección de Conclusiones se describen los puntos clave a los que se llegaron en el desarrollo de este trabajo. Finalmente, en los Apéndices se muestra, de manera detallada el desarrollo de los modelos generados en este trabajo de tesis, así como el algoritmo empleado en la herramienta numérica.

## **I. Introducción**

### **1.1 Antecedentes**

Existen una gran variedad de medios porosos de interés en la ingeniería, como materiales geológicos, productos textiles, camas empacadas y catalizadores (Dullien, 1992). La permeabilidad, una propiedad intrínseca a estos materiales, es parte importante en la extracción de petróleo, en la geofísica y en la producción de polímeros, entre otras aplicaciones (Yu, 2005). Este parámetro macroscópico está relacionado a la tortuosidad de los capilares a través de generalizaciones a la Ley de Darcy. Esta ley correlaciona el flujo volumétrico ( $Q$ ) con la caída de presión aplicada  $\left(\frac{dP}{dL}\right)$ , el área transversal de flujo ( $A_T$ ), la viscosidad ( $\mu$ ) y la permeabilidad ( $K_e$ ), de la siguiente manera (Tek, 1957):

$$q = \frac{K_e \Delta P}{\mu \Delta L} A_T \quad (1)$$

Así, la tortuosidad del medio afecta al flujo volumétrico, lo que genera escalas espaciales variables que se traducen en rapidez de deformación no homogéneas, y que promueven la manifestación de propiedades no lineales en los fluidos no-newtonianos (Bear,1972). Por ejemplo, aquellos que presentan adelgazamiento y/o engrosamiento al corte y a la extensión, plasticidad y tixotropía (de ahí parte la importancia de modelar el flujo en medio poroso).

En otros trabajos, una forma de caracterización de la morfología de medios porosos consiste en utilizar geometrías fractales (Yun et al, 2008; Li et al, 2008; Yu y Li, 2001). Dichas geometrías se describen por medio de escalamientos que reflejan la autosimilitud en la tortuosidad de los capilares, así como en la distribución de los poros en el medio (Yun et al, 2008).

En la mayoría de los modelos fractales que describen el flujo a través de medios porosos, se comparten ciertas características; el escalamiento fractal es aplicado a la longitud de los capilares y a la distribución de los poros (Perrier et al., 1999; Cai et al., 2015). También existen algunos modelos que no consideran la tortuosidad con un escalamiento fractal, sino como un parámetro dependiente de la porosidad (Shou et al., 2010). Para este trabajo, se toma como referencia primaria un modelo fractal, que además de la distribución de los poros, considera la tortuosidad de estos con un escalamiento fractal, la que también interviene en la descripción del flujo en medios porosos (Zhang et al., 2006; Yun et al., 2008).

Dada la estructura del medio poroso, la dinámica de flujo a través de éste depende de la disposición de los poros (Dullien, 1992). Como suposición fundamental de este trabajo, se propone que el sistema de poros es un conjunto de capilares con cierta tortuosidad (Yu, 2005).

Esta suposición reduce el problema a calcular el flujo en tubos rectos, con una corrección por tortuosidad, y finalmente el cálculo del flujo volumétrico en todos los capilares para estimar el flujo total y la permeabilidad del medio.

El análisis de flujo, dispersión y procesos de desplazamiento en rocas han sido estudiados de forma extensiva en la extracción de petróleo en reservas subterráneas (Sahimi, 1993). Además, es importante en el modelado de dichos procesos la descripción reológica de los fluidos involucrados; i.e. la ecuación constitutiva del material. En este trabajo se aborda el fluido newtoniano, el fluido de Bingham y el fluido de ley de la potencia (Bird et al., 1960); los cuales son usados para describir el flujo de agua (Sutera y Skalak, 1993), así como en lodos residuales (Gardea, 2008) y en la industria del petróleo (Frigaard et al., 2017), respectivamente.

Dentro de los fenómenos de transporte, el flujo en un tubo recto es uno de los problemas más simples que se pueden encontrar; pero no por ello carece de importancia en aplicaciones, ya que este flujo es la base para el diseño de distintos equipos industriales: por ejemplo, el flujo en tubos rectos es esencial en sistemas de bombeo y transporte de materiales, en sistemas de enfriamiento, en reactores continuos, etc. (Bird et al., 1960; Sutera y Skalak, 1993). La aplicabilidad de este flujo es tan amplia, que se ha usado para describir el flujo de fluidos newtonianos y no newtonianos en medios porosos (Sochi, 2010a).

Muchos modelos de flujo se basan en la ecuación de Hagen-Poiseuille (HP) para capilares cilíndricos (Cai et al., 2014). Sin embargo, las limitaciones de la descripción de la ecuación de HP son complementadas con las consideraciones de diferentes tamaños y formas de poros, de la tortuosidad de las líneas de corriente y de la distribución aleatoria de los poros mediante un escalamiento fractal (Cai et al., 2015).

## 1.2 Descripción del medio poroso

### 1.2.1. Ecuación de Hagen-Poiseuille.

Para un fluido newtoniano, incompresible y en estado estacionario, en 1847, Jean L. M. Poiseuille buscó relacionar cuatro variables: el flujo volumétrico de agua destilada a través de un tubo, la diferencia de presión aplicada, la longitud del tubo y su diámetro. Con ese propósito, Poiseuille desarrolló múltiples experimentos que le ayudaron a definir una ecuación, aunque en ese momento aún existían impedimentos relacionados con la medición de la viscosidad y la temperatura. Ese problema fue resuelto después, tras hacer la deducción mediante las ecuaciones de Navier-Stokes; la primera de ellas fue realizada por Edward Hagenbach en 1860 (Sutera y Skalak, 1993), y de ahí se conjuntan ambos trabajos: tanto la ley de Poiseuille como la deducción de Hagen, para desarrollar la ecuación descriptiva del flujo de un fluido newtoniano incompresible en un tubo liso:

$$Q = \pi D^4 P / 128 \mu L. \quad (2)$$

### 1.2.2. Permeabilidad y Porosidad.

La ley obtenida experimentalmente por Henri Darcy en 1856, conocida como la Ley de Darcy, describe principalmente el flujo de agua a través de medio poroso, aunque su utilización ha sido muy extensa y se ha generalizado para varios fluidos (Tek, 1957):

$$q = \frac{K_e \Delta P}{\mu \Delta L} A_T \quad (1)$$

En esta ecuación, el coeficiente de permeabilidad de Darcy  $K_e$  engloba todas las características de un medio poroso, las cuales afectan al flujo y que no se pueden determinar

fácilmente (como la porosidad e imperfecciones estructurales). Esta ley establece que la permeabilidad de un medio poroso es proporcional a la velocidad del fluido a través de éste ( $q/A_T$ ), cuando está sujeto a un gradiente de presión definido ( $\Delta P/\Delta L$ ). A grandes rasgos, la permeabilidad es la propiedad que expresa la facilidad con la que el sistema fluido-medio poroso permite el flujo del fluido a través de él. Esta definición, junto con los parámetros que intervienen en la Ec.(1), sugiere que la permeabilidad es la propiedad primaria para describir el flujo a través de un medio poroso (Perrier et al., 1999; Cai et al., 2015).

Al considerar un medio poroso, también existe otra propiedad más específica de este tipo de superficies: La porosidad. Esta propiedad representa la fracción de volumen que ocupan los poros en relación con el volumen de partículas sólidas del material (Dullien, 1992). También se suele utilizar la porosidad efectiva, la cual representa al volumen por el cual algún fluido puede fluir; es decir, el volumen de los canales interconectados que permiten la entrada y salida de fluido en el medio poroso (Dullien, 1992).

Normalmente, se define a la porosidad ( $\phi$ ) como el volumen de espacios para almacenar fluidos dividido por el volumen total; en este caso, se desconoce concretamente el volumen disponible en el lecho poroso, es decir, la cantidad y el volumen de los poros (Dullien, 1992). Como esto hace referencia a la cantidad de poros, representados en nuestro modelo con tubos tortuosos, entonces se debe definir la cantidad de tubos tortuosos en nuestro sistema; por ende, se puede definir como una relación entre los radios de los poros y el escalamiento fractal. A continuación, se muestra una ecuación que describe la porosidad por medio de fractales (Yu y Li, 2001):

$$\phi = \left( \frac{R_{min}}{R_{max}} \right)^{\varepsilon - D_f} . \quad (3)$$

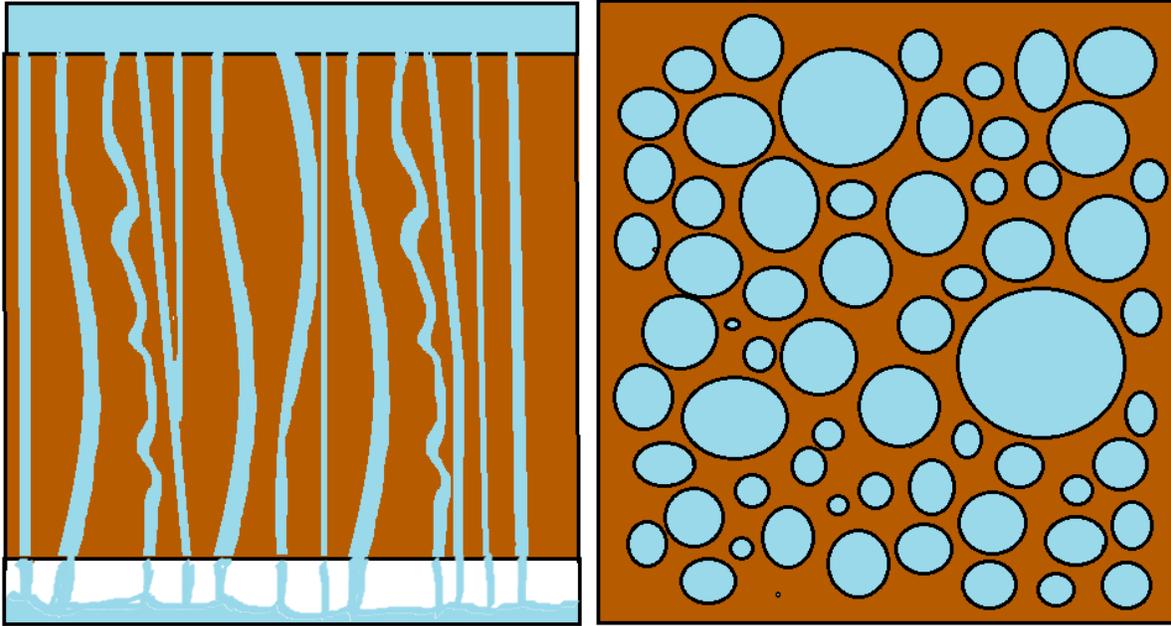
En la Ec.(3) interviene la dimensión euclidiana ( $\varepsilon$ ), es decir, lo que nos define el sistema como una recta ( $\varepsilon = 1$ ), un plano ( $\varepsilon = 2$ ) o un elemento de volumen ( $\varepsilon = 3$ ). En este trabajo se elige un plano, por lo que la Ec.(3) es:

$$\phi = \left( \frac{R_{min}}{R_{max}} \right)^{2-D_f}. \quad (4)$$

En el análisis para un elemento de volumen ( $\varepsilon = 3$ ), la expresión es similar a la que Mandelbrot presentó para un medio poroso, donde la porosidad resulta de sustraer espacios en el material siguiendo un comportamiento aleatorio descrito con fractales (Mandelbrot, 1982).

### *1.2.3. Descripción simplificada de un medio poroso.*

Uno de los usos de la ecuación de Hagen-Poiseuille es la representación de un medio poroso (Cai et al., 2014), el cual puede ser justificado si se piensa que el medio poroso es un conjunto de capilares distribuidos a lo largo de la superficie del medio. A estos capilares se les atribuye una geometría cilíndrica; es decir, se pueden imaginar cómo una colección de tubos rectos por los cuales el flujo ocurre (Fig.1). A partir de la ecuación de Hagen-Poiseuille, se pueden obtener ecuaciones para el flujo en medios porosos en los que se supone que los poros son tubos rectos. La permeabilidad se obtiene al comparar las ecuaciones obtenidas con la ecuación de Darcy (Zhang et al., 2006; Yun et al., 2008).



*Figura 1. Representación del flujo a través de los tubos hipotéticos que conforman el medio poroso.*

### **1.3 Escalamientos fractales**

Se sabe que los fractales son objetos que no siguen la descripción euclidiana de la escala de longitud, área y volumen; estructuras irregulares de la naturaleza como costas o montañas (Mandelbrot, 1982). Un fractal es una figura geométrica compuesta por fragmentos en una infinita variedad de tamaños, tales que cada uno de ellos es una copia reducida del total; esta propiedad es denominada autosimilitud. En general, los fractales están caracterizados por la presencia de infinito detalle: Longitud infinita, un área o volumen finito, y la ausencia de suavidad (Fig.2).

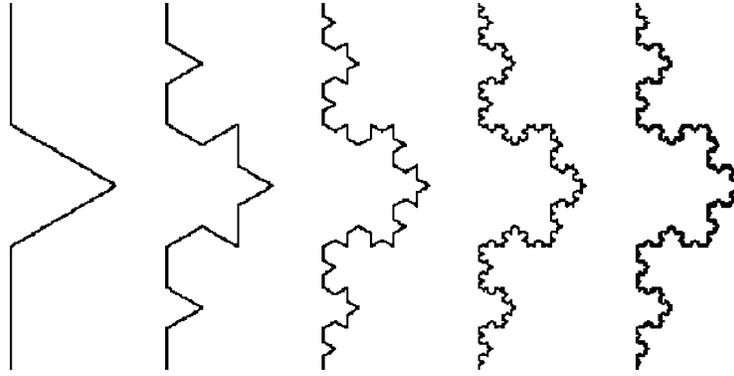


Figura 2. Ejemplo de un fractal: Curva de Koch.

*Se representan cinco iteraciones de la Curva de Koch, de modo que, en el límite de infinitas iteraciones, la figura inicial se convierte en un fractal. Si se amplía un fragmento de la construcción de la derecha, se apreciaría la semejanza como la construcción de la izquierda; a esto se le denomina autosimilitud.*

Ahora bien, un material poroso es un cuerpo sólido con una alta composición interna de huecos dispersos regular o aleatoriamente, sea que dichos huecos estén conectados o no, en donde se observan deformaciones y estructuras similares a un cuerpo rocoso, pero en una escala mucho menor; dicha textura se mantiene en escalas más y más pequeñas. De ese modo, se justifica caracterizar la geometría de los medios porosos al introducir escalamientos fractales.

En este trabajo se utilizan dos escalamientos fractales: La tortuosidad ( $D_t$ ) y la distribución de poros ( $D_f$ ). Ambos buscan describir la transición de una dimensión geométrica a otra, como representación de un fenómeno físico: El flujo a través de una pared porosa.

El primer escalamiento fractal, la tortuosidad  $D_t$ , busca describir como un tubo recto evoluciona a una geometría más complicada y con más distancia que recorrer, lo que se refleja en la extensión del dominio espacial a otras dimensiones (Fig.3). De hecho, los

capilares de un medio poroso real, aunque representados como tubos rectos para facilitar las deducciones de modelos, no siguen una geometría regular, sino que tienden a ser erráticos.

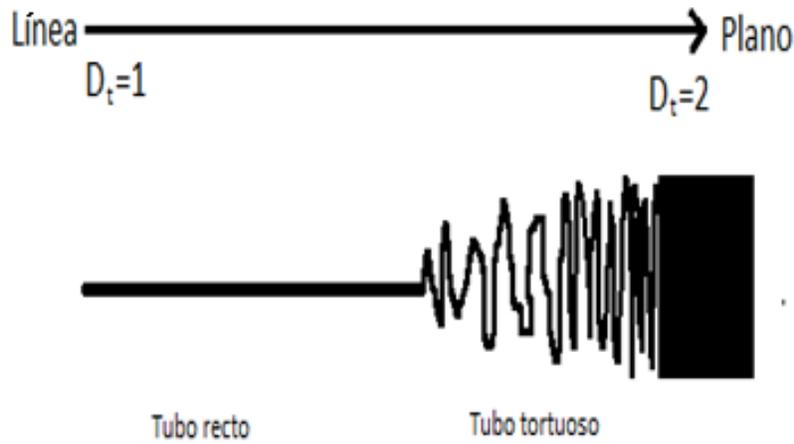


Figura 3. Efecto del escalamiento fractal de tortuosidad.

Como se mencionó con anterioridad, el escalamiento fractal tiene la función de hacer la transición entre distintas dimensiones geométricas. Para la tortuosidad eso implica transitar entre una línea (el tubo recto) y un plano; por ello el valor de  $D_t$  esta limitado en el intervalo de  $1 \leq D_t \leq 2$  (Yu, 2005).

El principal efecto cuantitativo que se observa es la diferencia entre la longitud tubo recto y la nueva longitud del tubo “tortuoso”. En general, se espera que la longitud de un tubo tortuoso sea mayor que la longitud de un tubo recto (Fig.3). Adicionalmente, no se deja de lado que el radio del tubo también sufra alteraciones por la tortuosidad, y por ello se asume que el radio del tubo también debe estar involucrado en la siguiente definición de la longitud tortuosa ( $L_t$ ) (Yu y Cheng, 2002):

$$L_t = L_o^{D_t} (2r)^{1-D_t}. \quad (5)$$

En la Ec.(5) se puede ver que cuando  $D_t = 1$ , se obtiene que  $L_t = L_o$ , donde  $L_o$  es la longitud del tubo recto; es decir, la longitud que el observador puede medir en la escala macroscópica.

El segundo escalamiento fractal que se debe considerar es de la distribución de poros  $D_f$ . Este parámetro expresa la cantidad de poros tiene el medio, que tan juntos o separados se encuentran esos poros entre sí, y que tan diferentes en tamaño son. Esto resulta complicado de representar matemáticamente, por ello se emplea una aproximación mediante un escalamiento fractal  $D_f$ . Este parámetro, en lugar de definir los poros, contempla el flujo e indica la cantidad de espacios libres que permiten al fluido atravesar la pared del medio poroso (Fig.4).

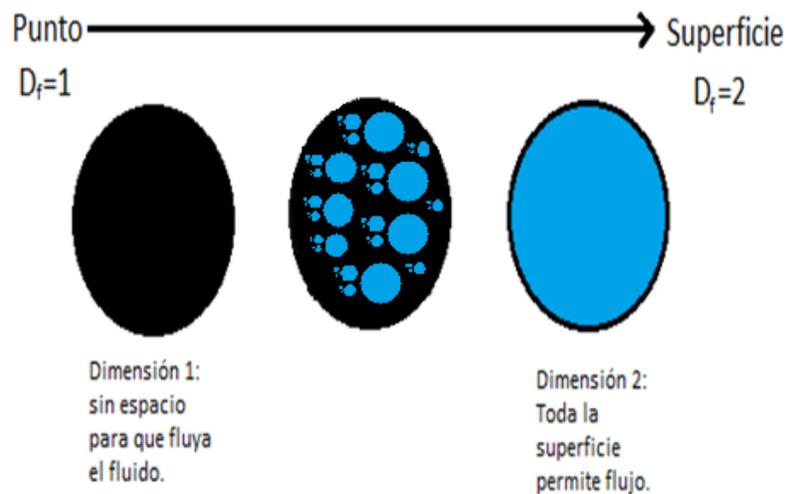


Figura 4. Efecto del escalamiento fractal de la distribución de poros.

Al igual que la tortuosidad,  $D_f$  es considerado únicamente en el intervalo  $1 \leq D_f \leq 2$ , a causa de las dimensiones geométricas en las cuales se ha definido el problema. Aunque es posible hacer un tratamiento similar a una tercera dimensión, por ejemplo, en una esfera. La complejidad del cálculo hace que la aproximación a dimensión dos sea la primera y obvia elección para este trabajo.

La dimensión fractal que describe la distribución de tubos se calcula con base en la cantidad de poros ( $N$ ), tomando en cuenta el radio de cada poro ( $R$ ), el radio máximo de poro que puede encontrarse en el medio poroso ( $R_{m\acute{a}x}$ ) y la dimensión fractal ( $D_f$ ). Esto se establece en la ecuación siguiente (Yu y Li, 2001):

$$N(L \gg R) = \left( \frac{R_{m\acute{a}x}}{R} \right)^{D_f}. \quad (6)$$

Como el efecto directo de este escalamiento fractal es sobre el flujo volumétrico, aquí también interviene otra consideración necesaria para el cálculo del flujo en el medio poroso: Bajo el supuesto de que los poros son tubos con cierta tortuosidad, el medio poroso es, por consiguiente, una agrupación de varios de estos tubos tortuosos dentro de un volumen definido. Por ello es posible determinar el flujo en el medio como la suma de todas las contribuciones de los pequeños capilares tortuosos; o expresado de otra forma, como la integral del flujo en un tubo ( $q_i$ ) con respecto a la distribución de los tubos ( $N$ ) de diferentes radios ( $R_i$ ). Esto se aprecia en la siguiente ecuación (Yun et al, 2008):

$$Q = - \int_{R_{m\acute{i}n}}^{R_{m\acute{a}x}} q_i dN_i(R_i). \quad (7)$$

## 1.4 Fluidos newtonianos y no-newtonianos

### 1.4.1. Fluidos de Newton.

Un fluido newtoniano es todo aquel fluido en el cual el esfuerzo de corte ( $\tau_{rz}$ ) es proporcional a la rapidez de deformación ( $\frac{dv_z}{dr}$ ), y tiene una curva de flujo recta (Fig. 5); es decir que, para una temperatura y una presión dadas, la viscosidad ( $\mu$ ) es siempre constante para cualquier pareja de rapidez de corte y esfuerzo cortante. La ley de la viscosidad de Newton describe el comportamiento de los fluidos newtonianos (Bird et al., 1960):

$$\tau_{rz} = -\mu \frac{dv_z}{dr}. \quad (8)$$

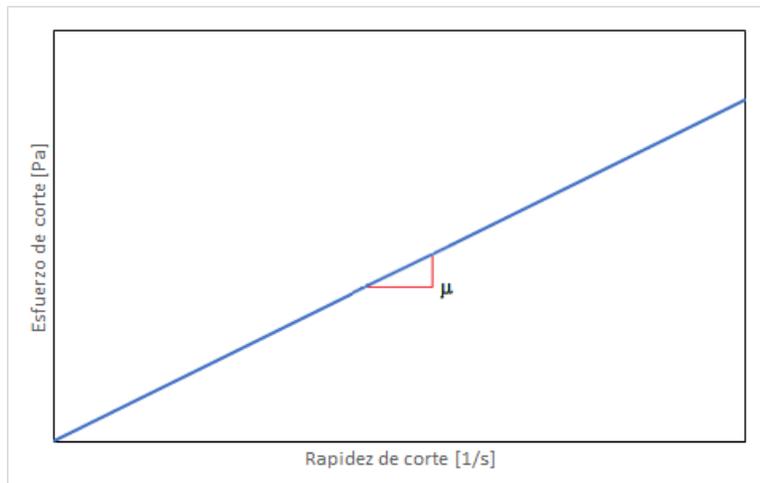


Figura 5. Ejemplo de una curva de flujo para un fluido newtoniano.

### 1.4.2. Fluidos de Bingham.

Un fluido de Bingham se comporta de forma similar al fluido newtoniano, con la particularidad de que no presentará flujo hasta que el esfuerzo aplicado al fluido supere al esfuerzo de cedencia ( $\tau_0$ ); el esfuerzo mínimo para que se presente flujo (Fig.6). La siguiente ecuación describe el comportamiento del fluido de Bingham (Bird et al., 1960):

$$\tau_{rz} = -\mu \frac{dv_z}{dr} + \tau_0. \quad (9)$$

Donde  $\tau_{rz}$  es el esfuerzo de corte,  $\frac{dv_z}{dr}$  es la rapidez de deformación y  $\mu$  es la viscosidad, igual que en la Ec.(8) para el comportamiento newtoniano.

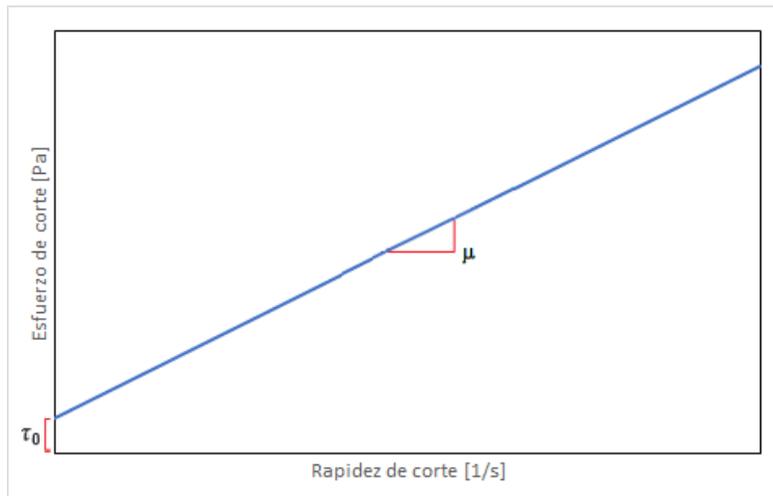


Figura 6. Ejemplo de una curva de flujo para un fluido de Bingham.

En la Fig.6 se aprecia el esfuerzo necesario para que comience el flujo; la única diferencia notable con la Fig.5 para un fluido newtoniano. Físicamente, el esfuerzo de cedencia que los fluidos de viscoplásticos presentan se refleja en la aparición de dos fases en el dominio de flujo: La fase plástica, que es la sección que no se deforma; y la fase viscosa, la sección que se deforma.

### 1.4.3. Fluidos de Ostwald de Waele.

En el caso de los fluidos de Ostwald de Waele, también conocidos como “Ley de la Potencia” (Bird et al., 1960), la viscosidad cambia con la rapidez de corte debido al índice  $n$  de la Ec.(10), y pueden ser dilatantes ( $n>1$ ) o adelgazantes ( $n<1$ ). Es decir, la viscosidad de estos materiales puede aumentar o disminuir, respectivamente, con la rapidez de corte (Fig. 7). Esto se entiende como la consistencia del material ( $\eta$ ).

$$\tau_{rz} = -\eta \left( \frac{dv_z}{dr} \right)^n . \quad (10)$$

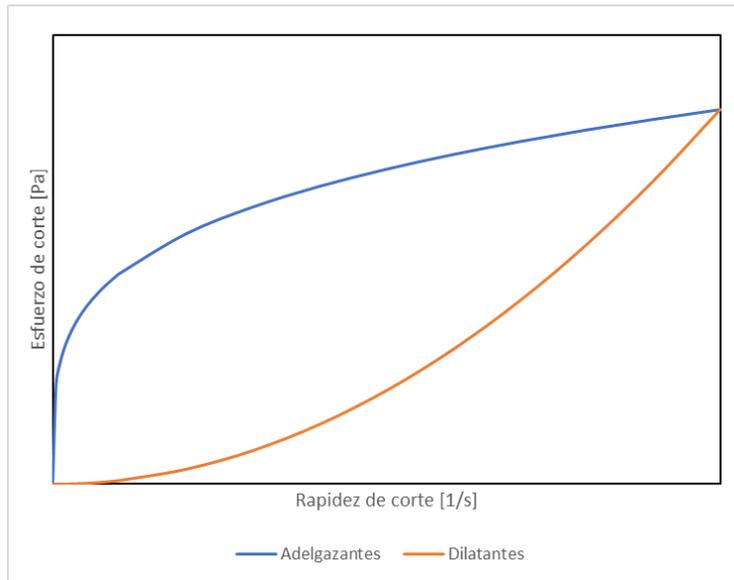


Figura 7. Ejemplo de una curva de flujo para fluidos de Ostwald.

En la curva de flujo para un fluido adelgazante, se observa que el material presenta una alta viscosidad a bajos esfuerzos de corte. Posteriormente, la pendiente de la curva disminuye, por lo que la viscosidad del material disminuye al aumentar la rapidez de corte. Lo contrario ocurre en la curva de flujo para un fluido dilatante, donde al aumentar la rapidez de corte, la pendiente de la curva crece, por lo que la viscosidad del material aumenta.

## 1.5 Métodos iterativos

Por una parte, se tiene el desarrollo de las ecuaciones descriptivas del flujo en el medio poroso; pero, por otro lado, también es necesario hacer énfasis en los métodos por los cuales se lleva a cabo el cálculo numérico de estos resultados. En concreto, los métodos numéricos fundamentales que se emplean son dos:

1. Solución de ecuaciones diferenciales ordinarias. Un Runge-Kutta de cuarto orden, para resolver la ecuación de movimiento, tanto para un tubo liso (Ec.A.1.1) como para un tubo tortuoso (Ec.12). La Ec.A.1.1 proviene del apéndice A.1.

$$\tau_{rz} = \frac{\Delta P}{\Delta L} \frac{r}{2}. \quad (A.1.1)$$

$$\tau_{rz} = \frac{dP}{dL_0} \frac{L_0^{1-D_t} 2^{D_t-1}}{D_t} \frac{r^{D_t}}{(D_t+1)}. \quad (11)$$

Donde el esfuerzo cortante  $\tau_{rz}$  se sustituye por las ecuaciones constitutivas de los diferentes fluidos considerados en este trabajo (Newton, Bingham y ley de potencia), resultando en la ecuación diferencial ordinaria a resolver por el método numérico. La siguiente ecuación, para un fluido newtoniano en un tubo tortuoso, es un ejemplo de la forma de las ecuaciones diferenciales introducidas al algoritmo de cálculo:

$$f(r) = \frac{dv_z}{dr} = - \frac{dP}{dL_0} \frac{L_0^{1-D_t} 2^{D_t-1}}{\mu D_t} \frac{r^{D_t}}{(D_t+1)}. \quad (12)$$

2. Integración numérica. Al resolver las ecuaciones de balance, se obtiene el perfil de velocidades en forma discreta. Por medio de una integración de Simpson compuesto, se obtiene la velocidad promedio y con ello, el flujo volumétrico. Posteriormente, este mismo algoritmo de integración es empleado para calcular el flujo del medio

poroso. El lector puede consultar estos algoritmos a detalle en el capítulo III, en la subsección correspondiente a la herramienta numérica.

### *1.5.1 Runge-Kutta de 4º orden.*

Los métodos de Runge-Kutta consisten en obtener la solución de una ecuación o un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, empleando un número finito de términos en una serie de Taylor, delimitado por el orden de aproximación de acuerdo con los términos considerados de la serie de Taylor (Nieves y Domínguez, 2014). En este trabajo se empleó el método de Runge-Kutta de cuarto orden, el cual es uno de los métodos más usados en esa familia de algoritmos numéricos para las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias. Su expresión recursiva es:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (13)$$

Donde  $h$  es el tamaño de paso, es decir, la razón de incremento de la variable independiente  $x_i$  a cada paso iterativo  $i$ . La variable dependiente  $y_i$  corresponde al valor de la derivada en ese paso iterativo y  $y_{i+1}$  corresponde al valor de la derivada en el paso iterativo siguiente. Además,  $k_1, k_2, k_3$  y  $k_4$  están definidas de la siguiente forma:

$$k_1 = f(x_i, y_i);$$

$$k_2 = f(x_i + h/2, y_i + hk_1/2);$$

$$k_3 = f(x_i + h/2, y_i + hk_2/2);$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3);$$

En la Ec.(14), se puede notar cierta concordancia con los primeros cinco términos de la serie de Taylor, ya que el término  $k_1$  corresponde a el valor de la función  $f$ ,  $k_2$  corresponde al valor de la función al cuadrado sobre dos, y así sucesivamente en los siguientes términos. Esto sugiere que existe una mayor precisión que con métodos de orden inferior. Además, dentro de las ventajas de este método, no se requiere el cálculo de derivadas y en su lugar se evalúa la función (los términos fuente de las ecuaciones diferenciales) en cada intervalo.

### 1.5.2. Método de Simpson.

El otro método numérico empleado para resolver el problema en la parte de integración numérica es una integración compuesta de Simpson. Este método se basa en aproximar la función a integrar con una parábola comprendida en el intervalo definido para la integración, con base en la fórmula de Newton de diferencia finitas (Nieves y Domínguez, 2014).

La expresión tiene la siguiente forma:

$$I \approx \frac{h}{3} \left( f(x_0) + 4 \sum_{\substack{i=1 \\ \Delta i=2}}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{\substack{i=2 \\ \Delta i=2}}^{n-2} f(x_i) + f(x_n) \right) \quad (14)$$

De la cual  $\Delta i$  es el incremento de  $i$  y  $h$  el tamaño de paso entre intervalos.

La integración compuesta es que aproxima con polinomios distintos para los intervalos definidos. Esta característica es útil en especial al resolver el problema de flujo en medio poroso con fluidos de Bingham, pues en esta ecuación constitutiva se producen dos secciones con comportamientos de deformación distintos: La sección viscosa (que se deforma) y la sección plástica (que no se deforma).

## **II. Hipótesis, justificación y objetivos**

### **2.1 Hipótesis**

En ciertos modelos fractales de flujo en medios porosos se hace uso de los escalamientos fractales de tortuosidad de los canales de flujo (poros) y la distribución de estos en el medio poroso (Zhang et al., 2006; Yun et al., 2008). En dichos modelos, se definen los parámetros de tortuosidad  $D_t$  y la distribución de poros  $D_f$ . La definición de tortuosidad es sustituida directamente en la ecuación de flujo volumétrico para un tubo recto (análoga a la ecuación Hagen-Poiseuille), con la reología correspondiente (Newton, Bingham, Ostwald; Bird et al., 1960).

Así, la hipótesis fundamental de este trabajo es:

El análisis y tratamiento riguroso de este problema, mediante la sustitución del escalamiento fractal para la tortuosidad en el balance de cantidad de movimiento, y no directamente en la ecuación del flujo volumétrico, mejorará las soluciones obtenidas, en comparación con otros modelos y con datos experimentales reportados en la literatura.

### **2.2. Justificación**

En este trabajo, se propone un nuevo modelo fractal para el flujo en medios porosos, así como un algoritmo de calculo que ofrezca apoyo y facilite la solución de problemas relacionados con la extracción de petróleo, en técnicas de tratamiento de suelos y diseño de camas catalíticas.

## 2.3 Objetivos

Los objetivos de este trabajo son:

1. La proposición de un modelo matemático para el flujo en medio poroso de fluidos newtonianos y no newtonianos en geometrías fractales, con base en un escalamiento fractal alternativo a los reportados en la literatura (Perrier et al., 1999; Cai et al., 2015; Shou et al., 2010).
2. Planteamiento de un algoritmo numérico y su validación para el modelado de flujo newtoniano y no newtoniano en medios porosos fractales.
3. El planteamiento teórico de una ecuación generalizada de flujo en capilares tanto lisos como tortuosos, que facilite la inclusión diversos modelos constitutivos sencillos [con miras a la caracterización de fracciones de petróleo u otras sustancias como surfactantes para la extracción (Salager, 2005)], tomando en cuenta un escalamiento fractal para la tortuosidad de los capilares (Yu, 2005) y para la distribución de poros (Yu, 2001).
4. Estimación de la permeabilidad en un medio poroso, considerando la reología de fluidos sencillos y la distribución fractal de los poros.
5. Comparación de las soluciones obtenidas del modelo propuesto contra datos experimentales de permeabilidad reportados en la literatura.

### III. Marco teórico

En esta sección se describe el desarrollo y obtención de las soluciones analíticas en los casos analizados. En la Tabla 1 se muestran todas las combinaciones analizadas, dadas por morfología de los tubos (liso, tortuoso y poroso) y los fluidos considerados (newtoniano, Ley de potencia, Bingham).

Tabla 1. Combinaciones analizadas.

Morfología \ Fluido	Newton	Bingham	Ley de Potencia
Tubo Liso	Caso 1.1	Caso 2.1	Caso 3.1
Tubo Tortuoso	Caso 1.2	Caso 2.2	Caso 3.2
Medio Poroso	Caso 1.3	Caso 2.3	Caso 3.3

#### 3.1. Ecuación de movimiento

Se parte del balance de cantidad de movimiento para un fluido generalizado (ecuación de Cauchy) en condiciones de incompresibilidad ( $\nabla \cdot \bar{v} = 0$ ):

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \bar{v} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \bar{\sigma} + \rho \bar{g}. \quad (15)$$

En el presente planteamiento, se toman en cuenta las siguientes consideraciones:

1. Flujo laminar, pues los radios de un poro son pequeños y esto afecta al número de Reynolds considerablemente.
2. Fluido incompresible.
3. Estado estacionario.
4. Movimiento del fluido únicamente en la dirección axial,  $\bar{v} = (0, 0, v_z)$ .

5. Los efectos por presión y las fuerzas externas (gravedad) se agrupan en un solo término, el cual sólo considera la entrada y la salida, y funciona como parámetro de control en el sistema (el gradiente de presión  $\frac{dP}{dL}$ ).

6. Bajo flujo cortante simple, el tensor de esfuerzos se define como como:

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \tau_{rz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{zr} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Con estas suposiciones la Ec. de Cauchy (Ec.15) se reduce a:

$$\frac{dP}{dL} r = \frac{d(r\tau_{rz})}{dr}. \quad (16)$$

Para implementar la condición de tortuosidad de los tubos a la ecuación de movimiento, primero se define una expresión para la longitud tortuosa ( $L_t$ ) utilizando las dimensiones fractales, dada por:

$$L_t = L_o^{D_t} (2r)^{1-D_t}. \quad (5)$$

Esta ecuación cumple con la siguiente condición:  $D_t \rightarrow 1, L_t \rightarrow L_o$ ; donde  $L_o$  es la longitud observable del tubo recto. Después, para poder emplear esta ecuación apropiadamente, se obtiene su derivada, pues es necesario conocer el cambio de esta propiedad a lo largo del tubo. En forma diferencial se obtiene:

$$dL_t = D_t L_o^{D_t-1} (2r)^{1-D_t} dL_o. \quad (17)$$

Ahora, se supone que en la Ec.(16), el gradiente de presión se establece en la longitud tortuosa, y de ese modo se puede sustituir la Ec.(17) en Ec.(16), y se obtiene:

$$\frac{d(r\tau_{rz})}{dr} = \frac{1}{D_t L_o^{D_t-1} (2r)^{1-D_t}} \frac{dP}{dL_o} r \quad . \quad (18)$$

Al resolver la ecuación diferencial Ec.(18) con la condición de frontera  $\tau_{rz}(r = 0) = 0$ , se obtiene la ecuación para el esfuerzo en un sistema con longitud tortuosa:

$$\tau_{rz} = \frac{dP}{dL_o} \frac{L_o^{1-D_t} 2^{D_t-1}}{D_t} \frac{r^{D_t}}{(D_t+1)} \quad (11)$$

La Ec.(11) describe el efecto que tiene la escala fractal de tortuosidad sobre el esfuerzo cortante aplicado al sistema. Esta escala fractal sugiere que el gradiente de presión aplicado tiene que superar la contribución de  $D_t$ , para igualar el esfuerzo cortante existente en un sistema sin tortuosidad.

## 3.2. Distribución de poros y permeabilidad

### 3.2.1. Distribución de poros.

En este caso, se utiliza una expresión con una dimensión fractal autosimilar para definir la distribución de tubos ( $D_f$ ), donde  $R_{m\acute{a}x}$  corresponde al radio más grande encontrado en el medio poroso:

$$N(L \gg R) = \left( \frac{R_{m\acute{a}x}}{R} \right)^{D_f} \quad (6)$$

De igual manera, se obtiene la forma diferencial de la Ec.(6) para realizar el análisis a lo largo del tubo:

$$-dN = D_f R_{m\acute{a}x}^{D_f} R^{-(D_f+1)} dR \quad (19)$$

Al considerarse que el medio poroso consiste en una gran cantidad de tubos agrupados, se puede conocer el flujo total a través de los tubos, haciendo la suma de dichos flujos:

$$Q = - \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} q_i dN_i(R_i). \quad (7)$$

La Ec. (7) describe, por medio de un integral, la suma de todos los flujos volumétricos ( $q_i$ ) en toda la distribución de tubos ( $N$ ) de diferentes radios ( $R_i$ ) a través de un escalamiento fractal ( $D_f$ ).

### 3.2.2. Permeabilidad en un tubo.

Al considerar como base la ley de Darcy:

$$\langle v_z \rangle = \frac{q}{A_T} = \frac{K_e}{\mu} \frac{dP}{dL}, \quad (20)$$

la cual puede ser reescrita para describir el flujo en el tubo:

$$q = \frac{K_e}{\mu} \frac{dP}{dL} A_T, \quad (1)$$

y dado que se conoce el área transversal del tubo, es decir, el área de flujo, la expresión para calcular la permeabilidad en un tubo recto puede escribirse de la siguiente manera:

$$K_e = \frac{q}{\pi R^2} \frac{\mu}{\left(\frac{dP}{dL}\right)}. \quad (21)$$

La Ec.(21) puede generalizarse tanto para un tubo liso como para un tubo tortuoso; pues el efecto de la tortuosidad, si existe, es descrito en la ecuación del flujo ( $q$ ) y la longitud  $L$  es equivalente a la longitud observable del tubo, es decir, la longitud  $L_0$ .

### 3.2.3. Permeabilidad en un medio poroso.

A diferencia del flujo en un solo tubo, para el análisis de un medio poroso, donde éste está compuesto por una colección de tubos, se desconoce el área transversal, pues se tiene una estructura variable de múltiples poros. Por ello, se define un área transversal del medio poroso como sigue (Yun et al, 2008):

$$A = \frac{A_p}{\phi} = \frac{\int_{R_{min}}^{R_{max}} \pi r^2 dN}{\phi},$$

$$A = \frac{\pi D_f R_{max}^2}{\phi(2-D_f)} \left( 1 - \left( \frac{R_{min}}{R_{max}} \right)^{2-D_f} \right). \quad (22)$$

De la Ec.(22), se sabe que  $A_p$  es el área transversal de un solo poro. Además, también se conoce la forma en la que se describe la porosidad en medios fractales (Yu y Li, 2001):

$$\phi = \left( \frac{R_{min}}{R_{max}} \right)^{2-D_f}. \quad (4)$$

De ese modo, la expresión para el área transversal de un medio poroso se reduce a:

$$A = \frac{\pi D_f R_{max}^2}{\phi(2-D_f)} (1 - \phi). \quad (23)$$

Ahora es posible conocer la permeabilidad:

$$K_e = \frac{Q}{A} \frac{\mu}{\left( \frac{dP}{dL_0} \right)}. \quad (24)$$

Finalmente, se requiere definir una velocidad promedio, que ha sido llamada velocidad superficial en el ámbito de flujo en medio poroso (Yun et al, 2008). Esta velocidad promedio se puede calcular como:

$$V = \frac{Q}{A}. \quad (25)$$

### 3.3. Modelo newtoniano

Como primer análisis, se emplea un fluido newtoniano, cuya ecuación constitutiva se define con la siguiente expresión:

$$\tau_{rz} = -\mu \frac{dv_z}{dr}. \quad (8)$$

La solución que corresponde al flujo en un tubo recto (caso 1.1) es ya conocida, por ello no se aborda en esta sección del trabajo; sin embargo, las deducciones de dichas soluciones pueden encontrarse en el apéndice A.1.

#### 3.3.1. Flujo en un tubo tortuoso para un fluido newtoniano (Caso 1.2).

Para este caso, se igualan las Ec.(11) y (8):

$$-\mu \frac{dv_z}{dr} = \frac{dP}{dL_o} \frac{L_o^{1-D_t} 2^{D_t-1}}{D_t} \frac{r^{D_t}}{(D_t+1)}. \quad (26)$$

Se resuelve la ecuación diferencial con la condición de frontera de adherencia ( $v_z(r = R) = 0$ ) y, de ese modo, se obtiene la expresión del perfil de velocidades de un fluido newtoniano en un tubo tortuoso:

$$v_z = \frac{dP}{dL_o} \frac{L_o^{1-D_t} 2^{D_t-1}}{\mu(D_t+1)^2 D_t} R^{D_t+1} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^{D_t+1} \right]. \quad (27)$$

Posteriormente, se calcula el flujo volumétrico en el tubo:

$$q = \frac{dP}{dL_o} \frac{\pi L_o^{1-D_t} 2^{D_t-1} R^{D_t+3}}{\mu D_t (D_t+1)(D_t+3)}. \quad (28)$$

Una vez definido el flujo en el tubo, se puede deducir la expresión para la permeabilidad al sustituir la Ec.(28) en la Ec.(21), de donde se obtiene la siguiente expresión:

$$K_e = \left(\frac{L_0}{2}\right)^{1-D_t} \frac{R^{D_t+1}}{D_t(D_t+1)(D_t+3)}. \quad (29)$$

### 3.3.2. Flujo de un fluido newtoniano en un medio poroso (Caso 1.3).

Al ya tener definida la distribución de tubos  $D_f$ , así como el flujo volumétrico en un tubo tortuoso, se sustituyen las Ecs.(19) y (28) en la Ec.(7) para conocer el flujo volumétrico sobre todos los tubos. De esta forma, se obtiene la siguiente expresión:

$$Q = \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} \frac{dP}{dL_0} \frac{\pi L_0^{1-D_t} 2^{D_t-1} R^{D_t+3}}{\mu D_t(D_t+1)(D_t+3)} D_f R_{\max}^{D_f} R^{-(D_f+1)} dR, \quad (30)$$

de cuya solución se obtiene el flujo volumétrico total en un medio poroso como:

$$Q = \left(\frac{dP}{dL_0}\right) \left(\frac{2}{L_0}\right)^{D_t-1} \frac{D_f \pi}{D_t \mu} \frac{R_{\max}^{D_t+3}}{(D_t+1)(D_t+3)(D_t-D_f+3)} \left[1 - \left(\frac{R_{\min}}{R_{\max}}\right)^{D_t-D_f+3}\right]. \quad (31)$$

Finalmente, se sustituye la Ec.(31) en la Ec.(24), para obtener la permeabilidad en un medio poroso:

$$K_e = \left(\frac{\phi}{1-\phi}\right) \frac{\left(\frac{L_0}{2}\right)^{1-D_t} (2-D_f) R_{\max}^{D_t+1}}{D_t(D_t+1)(D_t+3)(D_t-D_f+3)} \left(1 - \left(\frac{R_{\min}}{R_{\max}}\right)^{D_t-D_f+3}\right). \quad (32a)$$

Bajo la suposición de una diferencia muy grande entre los radios máximos y mínimos en el sistema ( $R_{\max} \gg R_{\min}$ ), el cociente  $\frac{R_{\min}}{R_{\max}}$  será mucho menor a la unidad. Además, al considerar a  $D_t$  y  $D_f$  dentro del intervalo de 1 a 2, sabemos que el exponente  $(D_t - D_f + 3)$

siempre tiene un valor positivo. Estas condiciones sugieren que  $\left(\frac{R_{min}}{R_{max}}\right)^{D_t - D_f + 3} \approx 0$ , por lo

que la Ec.(32a) se puede simplificar como:

$$K_e = \left(\frac{\phi}{1-\phi}\right) \frac{\left(\frac{L_0}{2}\right)^{1-D_t} (2-D_f) R_{max}^{D_t+1}}{D_t(D_t+1)(D_t+3)(D_t-D_f+3)}. \quad (32b)$$

Esta simplificación es empleada para comparar con otros modelos fractales (Zhang et al, 2006). En el desarrollo de la herramienta numérica derivada del algoritmo propuesto en este trabajo, el error asociado con la aproximación discreta la permeabilidad se basa en la Ec.(32a). (para conocer acerca del desarrollo de la herramienta numérica consúltese la subsección correspondiente en este capítulo).

### 3.4. Modelo de un fluido de Bingham

Para este caso, se emplea la ecuación constitutiva del fluido de Bingham, el cual se define como:

$$\tau_{rz} = -\mu \frac{dv_z}{dr} + \tau_0. \quad (9)$$

Al igual que en el caso anterior, la solución que corresponde al flujo en un tubo recto (caso 2.1) es conocida y la deducción puede encontrarse en el apéndice A.2.

### 3.4.1. Flujo de un fluido de Bingham en un tubo tortuoso (Caso 2.2).

Para resolver este problema se parte por igualar las Ecs.(11) y (9):

$$-\mu \frac{dv_z}{dr} + \tau_0 = \frac{dP}{dL_o} \frac{L_o^{1-D_t} 2^{D_t-1}}{D_t} \frac{r^{D_t}}{(D_t+1)}. \quad (33)$$

Se resuelve la ecuación diferencial con la suposición de condición de frontera de adherencia ( $v_z(r = R) = 0$ ), y de ese modo se obtiene la expresión del perfil de velocidades de un fluido de Bingham en un tubo tortuoso:

$$v_z = \frac{dP}{dL_o} \frac{L_o^{1-D_t} 2^{D_t-1}}{\mu(D_t+1)^2 D_t} R^{D_t+1} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^{D_t+1} \right] + \frac{\tau_0}{\mu} R \left[ 1 - \frac{r}{R} \right]. \quad (34)$$

Es importante resaltar que la Ec.(34) sólo es aplicable cuando el radio  $r$  sea mayor al radio de cedencia ( $r > R_0$ ). Si la condición no se cumple, entonces deja de existir flujo y el tubo se taponea.

Sin embargo, el análisis del perfil de velocidades en la Ec.(34) sólo sirve para comparar los modelos de tubo liso y tubo tortuoso. El análisis del medio poroso es únicamente posible por medio del flujo volumétrico, y de forma más simple, con la permeabilidad. Por ello, en el caso de Bingham se calcula el flujo volumétrico empleando la siguiente expresión (Bird et al. 1960):

$$q = \pi \int_{R_0}^R \left( -\frac{dv_z}{dr} \right) r^2 dr. \quad (35)$$

La cual considera tanto la parte viscosa como la plástica del perfil de velocidades. En ella se sustituye la Ec.(33) para poder determinar la expresión de flujo volumétrico en el tubo y cuya solución es:

$$q = \pi \frac{dP}{dL_o} \frac{L_o^{1-D_t} 2^{D_t-1} (R^{D_t+3} - R_0^{D_t+3})}{D_t(D_t+1)\mu (D_t+3)} - \pi \frac{\tau_0 (R^3 - R_0^3)}{\mu 3}. \quad (36)$$

De la Ec.(11), se puede deducir la expresión del esfuerzo de cedencia para el sistema tortuoso.

La expresión es la siguiente:

$$\tau_0 = \frac{dP}{dL_o} \frac{L_o^{1-D_t} 2^{D_t-1}}{(D_t+1)D_t} R_0^{D_t}. \quad (37)$$

En la Ec. (37) se puede observar que la tortuosidad afecta directamente al radio de cedencia, lo que implica que, para cierto esfuerzo de cedencia y gradiente de presión, existe un incremento del radio de cedencia, es decir, existe una mayor proporción del fluido que no sufre deformación.

Para obtener la expresión del flujo volumétrico, se sustituye la Ec.(37) en la Ec.(36):

$$q = \pi \frac{dP}{dL_o} \frac{L_o^{1-D_t} 2^{D_t-1} (R^{D_t+3} - R_0^{D_t+3})}{D_t(D_t+1)\mu (D_t+3)} - \pi \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dL_o} \frac{L_o^{1-D_t} 2^{D_t-1}}{(D_t+1)D_t} R_0^{D_t} \frac{(R^3 - R_0^3)}{3},$$

$$q = \pi \frac{dP}{dL_o} \frac{L_o^{1-D_t} 2^{D_t-1}}{D_t(D_t+1)\mu} \frac{R^{D_t+3}}{(D_t+3)} \left[ 1 - \frac{(D_t+3) R_0^{D_t}}{3 R^{D_t}} + \frac{D_t R_0^{D_t+3}}{3 R^{D_t+3}} \right]. \quad (38)$$

Finalmente, se sustituye la Ec.(38) en (21) para obtener la siguiente expresión de la permeabilidad:

$$K_e = \left( \frac{L_0}{2} \right)^{1-D_t} \frac{R^{D_t+1}}{D_t(D_t+1)(D_t+3)} \left[ 1 - \frac{(D_t+3) R_0^{D_t}}{3 R^{D_t}} + \frac{D_t R_0^{D_t+3}}{3 R^{D_t+3}} \right]. \quad (39)$$

### 3.4.2. Flujo de un fluido de Bingham en un medio poroso (Caso 2.3).

Una vez definidos la distribución de tubos  $D_f$  (Ec.19) y el flujo en un tubo tortuoso (Ec.38), se sustituyen en la Ec.(7) y posteriormente se resuelve la integral para conocer el flujo sobre todos los tubos; de donde se obtiene la siguiente expresión:

$$Q = \frac{\pi \left(\frac{dP}{dL_0}\right) \left(\frac{L_0}{2}\right)^{1-D_t} D_f R_{max}^{D_t+3}}{\mu_0 D_t (D_t+1) (D_t+3) (D_t-D_f+3)} \left[ \left(1 - \left(\frac{R_{min}}{R_{max}}\right)^{D_t-D_f+3}\right) - \frac{(D_t+3)(D_t-D_f+3)}{3(3-D_f)} \left(\frac{R_0}{R_{max}}\right)^{D_t} \left(1 - \left(\frac{R_{min}}{R_{max}}\right)^{3-D_f}\right) - \frac{D_t(D_t-D_f+3)}{D_f} \left(\frac{R_0}{R_{max}}\right)^{D_t+3} \left(1 - \left(\frac{R_{min}}{R_{max}}\right)^{-D_f}\right) \right]. \quad (40)$$

Finalmente se sustituye la Ec.(40) en la Ec.(24), de ese modo se obtiene la siguiente expresión para la permeabilidad:

$$K_e = \frac{\left(\frac{\phi}{1-\phi}\right) \left(\frac{L_0}{2}\right)^{1-D_t} (2-D_f) R_{max}^{D_t+1}}{D_t (D_t+1) (D_t+3) (D_t-D_f+3)} \left[ \left(1 - \left(\frac{R_{min}}{R_{max}}\right)^{D_t-D_f+3}\right) - \frac{(D_t+3)(D_t-D_f+3)}{3(3-D_f)} \left(\frac{R_0}{R_{max}}\right)^{D_t} \left(1 - \left(\frac{R_{min}}{R_{max}}\right)^{3-D_f}\right) - \frac{D_t(D_t-D_f+3)}{D_f} \left(\frac{R_0}{R_{max}}\right)^{D_t+3} \left(1 - \left(\frac{R_{min}}{R_{max}}\right)^{-D_f}\right) \right]. \quad (41)$$

Es posible hacer una simplificación como con la Ec.(32a) del caso newtoniano sin embargo, a causa del exponente del termino  $\left(\frac{R_{min}}{R_{max}}\right)^{-D_f}$ , el cual no es posible reducir a cero, no tiene utilidad práctica simplificar la expresión.

### 3.5. Modelo de un fluido de Ostwald

Para este caso, se emplea un fluido de Ostwald, el cual se define como:

$$\tau_{rz} = -\mu \left( \frac{dv_z}{dr} \right)^n. \quad (10)$$

La solución que corresponde al flujo en un tubo recto (caso 3.1) es conocida y la deducción puede encontrarse en el apéndice A.3.

#### 3.5.1. Flujo de un fluido que sigue la ley de la potencia en un tubo tortuoso (Caso 3.2).

Para resolver el problema, se parte por igualar las Ecs.(11) y (10):

$$-\mu \left( \frac{dv_z}{dr} \right)^n = \frac{dP}{dL_o} \frac{L_o^{1-D_t} 2^{D_t-1}}{D_t} \frac{r^{D_t}}{(D_t+1)}. \quad (42)$$

De igual manera que en casos anteriores, se resuelve la ecuación diferencial bajo la condición de frontera de adherencia ( $v_z(r = R) = 0$ ) y de ese modo se obtiene la expresión del perfil de velocidades de un fluido que sigue la ley de la potencia en un tubo tortuoso:

$$v_z = \left( \frac{dP}{dL_o} \frac{L_o^{1-D_t} 2^{D_t-1}}{\mu(D_t+1)D_t} \right)^{1/n} \frac{n}{D_t+n} R^{\frac{D_t+1}{n}} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^{\frac{D_t+1}{n}} \right]. \quad (43)$$

Se calcula el flujo volumétrico en el tubo como sigue:

$$q = \left( \frac{dP}{dL_o} \frac{L_o^{1-D_t} 2^{D_t-1}}{\mu(D_t+1)D_t} \right)^{1/n} \frac{n\pi}{D_t+3n} R^{\frac{D_t+3}{n}}. \quad (44)$$

Finalmente se sustituye la Ec.(44) en la Ec.(21) para obtener la siguiente expresión de la permeabilidad:

$$K_e = \left( \frac{dP}{dL_0} \frac{1}{\mu} \right)^{\frac{1}{n}-1} \left( \left( \frac{L_0}{2} \right)^{1-D_t} \frac{1}{D_t(D_t+1)} \right)^{1/n} \frac{n}{D_t+3n} R_{\frac{D_t}{n}+1}. \quad (45)$$

#### A.4.3. Flujo de un fluido que sigue la ley de la potencia en un medio poroso (Caso 3.3).

Se sustituyen las Ecs.(19) y (42) en la Ec.(7), y posteriormente se integra para conocer el flujo sobre todos los tubos, de donde se obtiene la siguiente expresión:

$$Q = \left( \left( \frac{dP}{dL_0} \right) \left( \frac{L_0}{2} \right)^{1-D_t} \frac{1}{\mu D_t(D_t+1)} \right)^{1/n} \frac{n \pi D_f}{(D_t+3n) \left( \frac{D_t}{n} - D_f + 3 \right)} R_{\frac{D_t}{n}+3}^{\frac{D_t}{n}+3} \left[ 1 - \left( \frac{R_{\min}}{R_{\max}} \right)^{\frac{D_t}{n} - D_f + 3} \right]. \quad (46)$$

Finalmente, se sustituye la Ec.(46) en la Ec.(24), de ese modo se obtiene la siguiente expresión para la permeabilidad:

$$K_e = \left( \frac{\phi}{1-\phi} \right) \left( \frac{\left( \frac{L_0}{2} \right)^{1-D_t}}{D_t(D_t+1)} \right)^{1/n} \frac{\left( \frac{dP/dL_0}{\mu} \right)^{\frac{1}{n}-1} (2-D_f) R_{\frac{D_t}{n}+3}^{\frac{D_t}{n}+1}}{\left( \frac{D_t}{n} + 3 \right) \left( \frac{D_t}{n} - D_f + 3 \right)} \left( 1 - \left( \frac{R_{\min}}{R_{\max}} \right)^{\frac{D_t}{n} - D_f + 3} \right). \quad (47a)$$

A igual que en el caso newtoniano (Ec.32a), en un fluido de ley de potencia es posible simplificar la Ec.(47a) cuando  $R_{\max} \gg R_{\min}$  y las escalas fractales  $D_t$  y  $D_f$  se encuentren en los intervalos de 1 a 2. Además, el valor del parámetro  $n$  no afecta al signo positivo del exponente y por ello se puede considerar a  $\left( \frac{R_{\min}}{R_{\max}} \right)^{\frac{D_t}{n} - D_f + 3} \approx 0$ . Por lo tanto, la expresión se puede simplificar de la siguiente forma:

$$K_e = \left( \frac{\phi}{1-\phi} \right) \left( \frac{\left( \frac{L_0}{2} \right)^{1-D_t}}{D_t(D_t+1)} \right)^{1/n} \frac{\left( \frac{dP/dL_0}{\mu} \right)^{\frac{1}{n}-1} (2-D_f) R_{\frac{D_t}{n}+3}^{\frac{D_t}{n}+1}}{\left( \frac{D_t}{n} + 3 \right) \left( \frac{D_t}{n} - D_f + 3 \right)}. \quad (47b)$$

De forma similar que en caso 1.3, la Ec.(47b) no es utilizada para comparar con el resultado numérico, pero es empleada para comparar con otros modelos fractales (Zhang et al, 2006).

### 3.6. Algoritmo numérico

En esta subsección se presenta el algoritmo con el cual fue diseñado el código numérico realizado en el software matemático Matlab®. El código está dividido en subsecciones, las cuales se explican a continuación:

#### 3.6.1 Especificación de caso de estudio.

En esta primera subsección se definen los diferentes casos de cálculo, que incluyen desde la geometría (tubo liso, tortuoso y el medio poroso) hasta los diferentes fluidos utilizados (Newton; Bingham, Ostwald).

Se utiliza una estructura de opciones (comando *switch\_case*) para seleccionar y ejecutar uno de los varios grupos de instrucciones que corresponden a los diferentes casos de cálculo. Esto funciona pues una variable controla la selección, a través de valores diferentes para cada caso en específico. Se generó una interfaz donde se denota el valor de dicha variable que corresponde con el caso en específico. Esta estructura se sigue en otras secciones del algoritmo.

#### 3.6.2. Definición de variables de cálculo y de procesamiento del código.

En esta sección se definen los parámetros que constituyen y especifican el problema, es decir, las variables que caracterizan al fluido y al sistema. Desde la magnitud del radio del tubo (poro), la viscosidad del fluido, la diferencia de presión, la longitud del tubo y las condiciones iniciales del sistema. Añadido a eso, en esta subsección se definen el número de iteraciones

para los cálculos posteriores y también se definen variables cuya utilidad es la de agilizar el procesamiento del código usando condicionales (comando *if*).

### 3.6.3 Definición de ecuaciones a resolver.

En esta subsección se definen las funciones (ecuaciones diferenciales) a resolver por medio del Runge-Kutta. Utilizando la instrucción para opciones de cálculo, con la cual se separan los distintos casos de cálculo, se definen subsecciones donde se define la función para el caso newtoniano, tanto en un tubo liso como en un tubo tortuoso; otra sección para la función del caso de Bingham en ambas geometrías, y otra última para los casos de ley de la potencia.

Las funciones están definidas de forma similar a la siguiente:

$$f = (-dPdL0*x)/(2*mu0);$$

donde se emplean parámetros ya definidos en la subsección anterior, además de nuevos términos que requieren ser especificados según lo requiera la complejidad del caso de cálculo. Ya sea por la distinta geometría (tubo tortuoso o medio poroso), o porque se emplea un fluido distinto (esfuerzo de cedencia o índice de la ley de la potencia  $n$ ).

Para la definición de algunos de estos parámetros se requieren de implementar ciertas restricciones, por ejemplo, la tortuosidad  $D_t$  que solo existen en el intervalo de 1 a 2. Para lograr esto se empleó un comando de condicionamiento (*while*), el cual restringe el avance del procesador (por medio de un ciclo repetitivo) si se introduce el valor de alguna variable fuera del rango permitido.

#### 3.6.4. Runge-Kutta 4° orden.

El método numérico Runge-Kutta de 4° orden se implementó en una función desarrollada por separado. En dicha función están definidos los diferentes parámetros de entrada y salida que son utilizados en el código principal, es decir, se introducen las condiciones iniciales para obtener una pareja de valores  $[x_i, y_i]$ , que constituyen la solución de la ecuación diferencial en cuestión.

La estructura de esta subsección se basa en definir un intervalo de solución y un tamaño de paso basando en el número de iteraciones, las cuales son usadas en un ciclo de resolución constituido (comando *for*), que repite el mismo algoritmo de cálculo las veces que se hayan definido por el intervalo de solución.

El algoritmo asigna valores a los parámetros  $k_1, k_2, k_3$  y  $k_4$ , reescribiendo las variables  $x_i$  y  $y_i$ , según lo requiera cada parámetro  $k_n$ , y evaluando la función  $f$  definida en la subsección anterior; todo lo anterior con la siguiente estructura:

$$x = x_i + h/2;$$

$$y = y_i + h*k_1/2;$$

$$k_2 = \text{eval}(f);$$

y finalmente evaluando en la siguiente ecuación recursiva para Runge-Kutta, donde se sobrescribe el valor existente de  $y_i$ :

$$y_i = y_i + (k_1 + 2*k_2 + 2*k_3 + k_4*h)/6;$$

Además, en cada iteración se guarda la pareja de valores  $[x_i, y_i]$  que son el dato de salida de la función Runge-Kutta, pero esto sólo ocurre para la sección viscosa, es decir, no completa

la solución para el caso de un fluido de Bingham. En ese caso particular, se define un espacio solución donde existe la sección plástica y tiene un valor de velocidad constante y otra sección de flujo viscosa, que se resuelve numéricamente. Al final, se obtienen dos vectores de datos solución, con el perfil de velocidades seccionado en parte plástica y parte viscosa.

### 3.6.5. Integral de Simpson compuesta y cálculo de la velocidad promedio.

Del mismo modo que para el Runge-Kutta, se generó una función separada del código principal, la cual ejecuta la integración numérica de Simpson compuesta. Esta requiere como valores de entrada un conjunto de datos en vector  $[x_1, x_2, x_3, \dots]$ , y un número de iteraciones que concuerda con la cantidad de datos del vector.

El algoritmo se basa en sumar los valores del conjunto de datos de manera repetitiva, segmentados con base en los diferentes intervalos que requiere el método:  $\sum_{\Delta i=2}^{n-1} f(x_i)$  y

$$\sum_{\Delta i=2}^{n-2} f(x_i).$$

Para calcular la velocidad promedio se tiene la pareja de datos  $[x_i, y_i]$  resultante del Runge-Kutta, y sabemos que la velocidad promedio se define como:

$$\langle \bar{v}_z \rangle = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R v_z r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta}, \quad (48)$$

Dicha expresión puede discretizarse de la siguiente forma:

$$\langle \bar{v}_z \rangle = \frac{2\pi \sum_{i=0}^n v_{zi} r_i}{2\pi \sum_{i=0}^R r_i},$$

$$\langle \bar{v}_z \rangle = \frac{\sum_{i=0}^n y_i x_i}{\sum_{i=0}^n x_i}. \quad (49)$$

Lo que reduce el problema a realizar el cociente de dos sumas.

Para el caso específico de un fluido de Bingham, se tiene un algoritmo similar; sin embargo, en este algoritmo en particular se requiere de suministrar un vector de valores extra para la sección plástica, el cual también es considerado en la integral.

### 3.6.6. Medio poroso.

Para calcular el flujo en el medio poroso se realiza la suma de los flujos volumétricos individuales de cada poro. Esto implica realizar el algoritmo de cálculo del flujo de un tubo tortuoso para diferentes tamaños de poro (radios). Este problema se resuelve mediante ciclos para un intervalo  $[R_{min}, R_{max}]$  con cierto tamaño de paso.

El ciclo consta de repetir el algoritmo de cálculo del flujo volumétrico de las subsecciones anteriores, con el paso añadido de generar una matriz de valores de flujo  $[q_i, R_i]$ . Dicha matriz es evaluada discretizando la siguiente expresión de flujo:

$$Q = - \int_{R_{mín}}^{R_{máx}} q_i dN_i(R_i). \quad (7)$$

$$Q = - \sum_{i=0}^n q_i dN_i(R_i). \quad (50)$$

De ese modo, se alimentan los valores de flujo de la matriz  $[q_i, R_i]$  a la función de Simpson compuesta para obtener la suma, es decir, el flujo volumétrico total en el medio poroso.

### 3.6.7. Tratamiento de datos.

El mayor trabajo que realiza el algoritmo es el cálculo de los flujos volumétricos para cada caso. Este flujo volumétrico es generalizado en una sola variable ( $q$ ) que aplica para todos los demás casos. El paso final del algoritmo es el cálculo de variables como lo son la permeabilidad  $K_e$  y la velocidad superficial  $V$  (sólo para el caso de medio poroso).

Finalmente, una parte de esta subsección es la comparación con los modelos analíticos contra las soluciones numéricas obtenidas, que se evalúan mediante la comparación de dichas soluciones para la velocidad promedio, flujo volumétrico y permeabilidad, específicos para cada caso, y evalúa el error con la siguiente relación:

$$\%Error = \frac{Valor_{analitico} - Valor_{numérico}}{Valor_{analitico}} \times 100. \quad (51)$$

## IV. Resultados y discusión

Esta sección se divide en cuatro subsecciones. La primera subsección presenta las comparaciones realizadas entre las ecuaciones analíticas y los resultados numéricos, demostrando con ello la validez del modelo. La segunda subsección muestra el análisis de sensibilidad de los parámetros involucrados ecuaciones de permeabilidad; los escalamientos fractales. La tercera subsección compara los modelos desarrollados con modelos existentes en la literatura. Y, por último, se muestran las comparaciones del modelo fractal con datos experimentales obtenidos de la literatura.

### 4.1. Validación de modelos

#### 4.1.1. Perfiles de velocidad.

En la Tabla 2, se muestran las soluciones analíticas obtenidas en forma de perfiles de velocidad para un fluido newtoniano bajo dos morfologías: 1) tubo liso y 2) tubo tortuoso. Estas soluciones analíticas sirven para la validación, a través de pruebas de consistencia, de las soluciones del modelo y del algoritmo numérico usado para la obtención de soluciones numéricas en este trabajo. La deducción de la Ec.(A.1.3) se puede consultar en el apéndice A.1.

*Tabla 2. Perfiles de velocidad para un fluido newtoniano.*

	Caso	Ecuación
Ec.(A.1.3)	Newton- tubo liso	$v_z = \frac{\Delta P R^2}{L 4\mu} \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right)$
Ec.(27)	Newton - tubo tortuoso	$v_z = \frac{dP}{dL_o} \frac{L_o^{1-D_t} 2^{D_t-1}}{\mu(D_t+1)^2 D_t} R^{D_t+1} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^{D_t+1} \right]$

En primera instancia, se nota que en un medio tortuoso con una tortuosidad unitaria  $D_t = 1$ , la Ec.(27) del perfil de velocidades para un tubo tortuoso se reduce al perfil de velocidades de un tubo recto, es decir, a la Ec.(A.1.3). La contraparte numérica refleja su correcta solución en la Fig.8; aquí, los perfiles de velocidad obtenidos numéricamente para tubos lisos y tortuosos predicen con precisión a las soluciones analíticas. Esto demuestra la precisión de la herramienta para reproducir los resultados analíticos, tanto para el flujo en un tubo liso como para un tubo tortuoso. Al comparar las soluciones analítica y numérica, se calculó con la Ec.(51) un error del 0.116934% entre ambas soluciones.

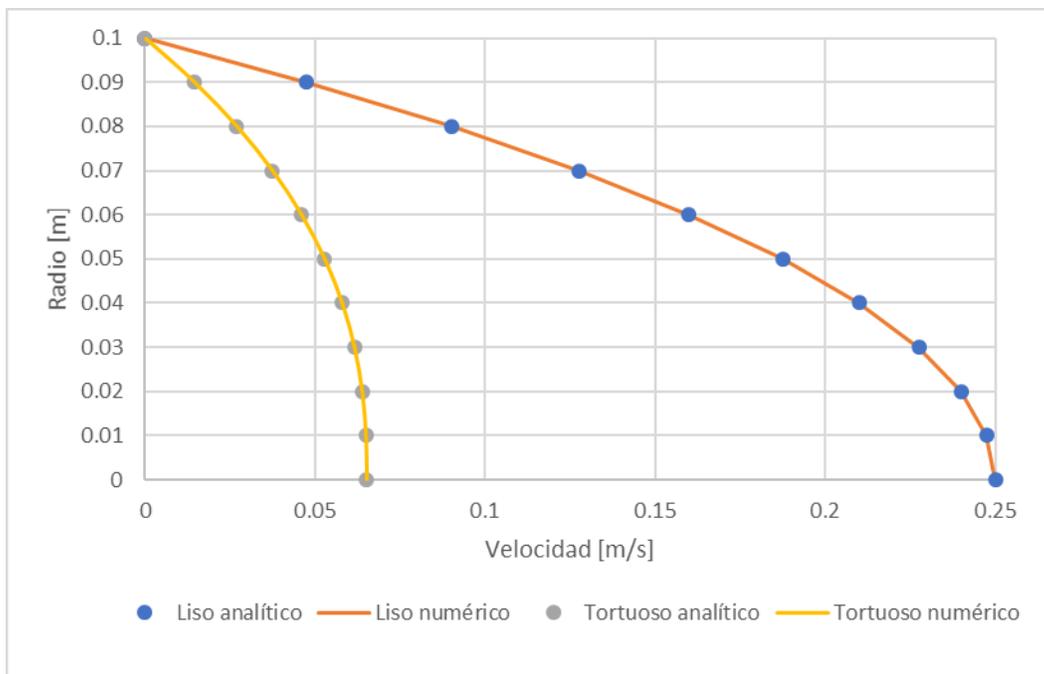


Figura 8. Perfiles de velocidad de un fluido newtoniano.

Es importante señalar el fuerte impacto que tiene la escala fractal de tortuosidad ( $D_t$ ) en la velocidad del fluido: Al incrementar el valor de la escala fractal, se disminuye la velocidad.

Esto tiene sentido, pues la tortuosidad es considerada como un impedimento para el flujo y, por consiguiente, mientras más tortuoso el medio, menor será el flujo.

En la Tabla 3, se muestran las soluciones analíticas obtenidas en forma de perfiles de velocidades para un fluido de Bingham bajo dos morfologías: 1) tubo liso y 2) tubo tortuoso.

Tabla 3. Perfiles de velocidad para un fluido de Bingham.

	Caso	Ecuación
Ec.(A.2.2)	Bingham- tubo liso	$v_z = \frac{\Delta P R^2}{L 4\mu} \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) - \tau_0 \frac{R}{\mu} \left(1 - \frac{r}{R}\right)$
Ec.(34)	Bingham - tubo tortuoso	$v_z = \frac{dP}{dL_o} \frac{L_o^{1-D_t} 2^{D_t-1}}{\mu(D_t+1)^2 D_t} R^{D_t+1} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{D_t+1}\right] + \frac{\tau_0}{\mu} R \left[1 - \frac{r}{R}\right]$

En la Ec.(34) se observa que en un medio tortuoso con  $D_t = 1$ , el perfil de velocidad se reduce a la Ec.(A.2.2) para un tubo liso. Además, en la Ec.(A.2.2) y Ec.(34) se aprecia que al definir  $\tau_0 = 0$ , estas se reducen a las expresiones equivalentes para un fluido newtoniano; Ec.(A.1.3) y Ec.(27), respectivamente. La importancia de reducir las expresiones para fluidos más complejos al caso newtoniano (los casos límite), es para establecer una base y realizar comparaciones entre los modelos. De ese modo, al igual que con el perfil de velocidad newtoniano, la herramienta numérica reproduce con precisión los resultados analíticos para un fluido de Bingham, tanto de la sección viscosa como la plástica (Fig. 9). La comparación entre las soluciones analíticas y numéricas, arrojó un error del 0.116934%; idéntico que con el perfil de velocidad newtoniano.

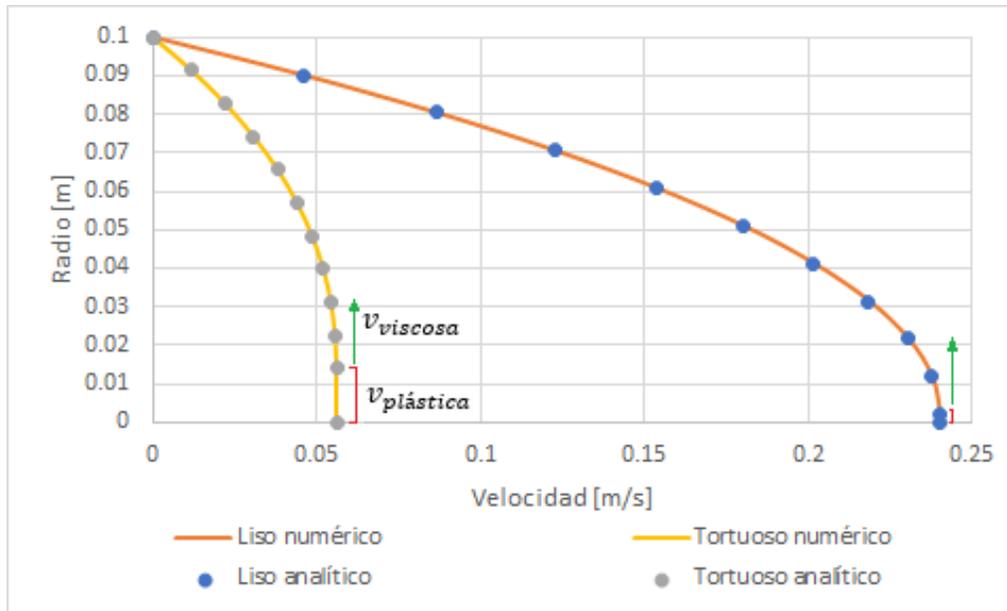


Figura 9. Perfiles de velocidad para un fluido de Bingham.

En la Tabla 4, se muestran las soluciones analíticas obtenidas en forma de perfiles de velocidades para un fluido de Ostwald bajo dos morfologías: 1) tubo liso y 2) tubo tortuoso.

Tabla 4. Perfiles de velocidad para un fluido de Ostwald.

	Caso	Ecuación
Ec.(A.3.2)	Ostwald- tubo liso	$v_z = \left( \frac{\Delta P}{L} \frac{1}{2\mu} \right)^{1/n} \frac{nR^{n+1}}{1+n} \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^{\frac{1}{n}+1} \right)$
Ec.(43)	Ostwald - tubo tortuoso	$v_z = \left( \frac{dP}{dL_o} \frac{L_o^{1-D_t} 2^{D_t-1}}{\mu(D_t+1)D_t} \right)^{1/n} \frac{n}{D_t+n} R^{\frac{D_t}{n}+1} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^{\frac{D_t}{n}+1} \right]$

Al igual que en ecuaciones anteriores [Ec.(27) y Ec.(34)], la Ec.(43) muestra que en un medio tortuoso con  $D_t = 1$ , la expresión se reduce a la Ec.(A.3.2) para un tubo liso. Además, ambas ecuaciones para fluidos de Ostwald pueden reducirse a los casos newtonianos (Ec.(A.1.3) para tubo liso y Ec.(27) para tubo tortuoso) cuando  $n = 1$ .

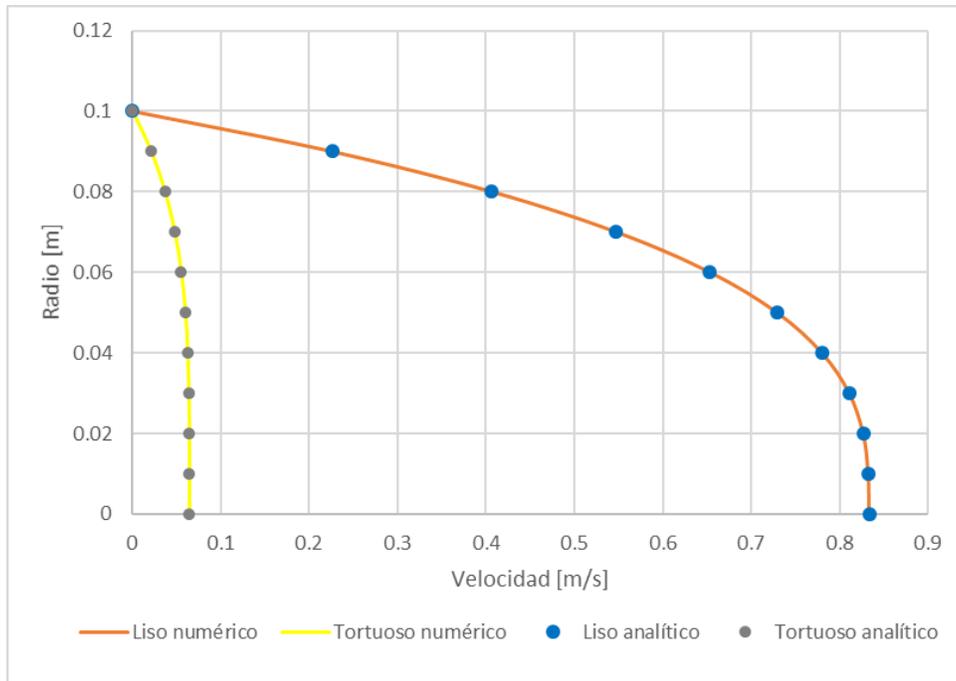


Figura 10. Perfiles de velocidad para un fluido adelgazante.

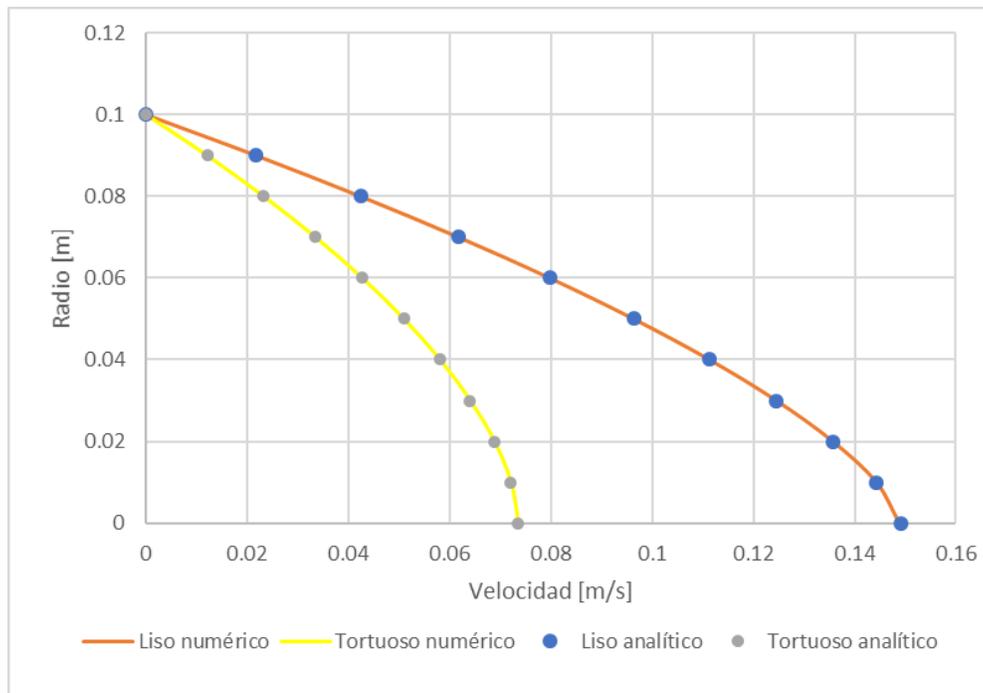


Figura 11. Perfiles de velocidad para un fluido dilatante.

La tortuosidad afecta al flujo de manera similar al caso newtoniano, y de la misma forma que en las Fig.8 y Fig.9, se observa en las Fig.10 y Fig.11 que los resultados numéricos aproximan con precisión a la solución analítica, al reproducir con las curvas de la solución numérica con los puntos de la solución analítica.

Se aprecia que, más allá de la diferencia de convexidad de la curva entre los perfiles adelgazantes (Fig. 10) y dilatante (Fig. 11), el comportamiento del perfil de velocidades en el tubo tortuoso concuerda con el comportamiento respectivo del caso liso. Un efecto considerable de la tortuosidad en la velocidad es la disminución en su magnitud; para un fluido adelgazante existe una disminución de aproximadamente el 92% de su velocidad, mientras que para un fluido dilatante la disminución es del 50%. Esto sugiere que la tortuosidad tiene mayor impacto en los fluidos adelgazantes.

#### *4.1.2. Permeabilidad del medio poroso.*

A continuación, se muestran los resultados obtenidos referentes a la permeabilidad en el medio poroso (Tabla 5); siendo necesario demostrar la efectividad de la herramienta numérica para estimar las propiedades que mejor describen al medio poroso: la permeabilidad y la porosidad.

El primer detalle de interés a recalcar es que, en el límite cuando  $\phi \rightarrow 1$  y  $D_f \approx 2$ , las Ecs.(32a), (41) y (47a) del medio poroso se simplifican a las Ecs.(29), (39) y (45) respectivamente. Estas corresponden a la permeabilidad en un medio tortuoso. Sin embargo, al hablar de una porosidad  $\phi \rightarrow 1$ , significa que el medio es en su totalidad espacios vacíos, es decir, el fluido fluye a través de un medio vacío y por consiguiente las expresiones pierden

todo sentido físico. Por otro lado, cuando  $D_t = 1$ , las Ecs.(29), (39) y (45) del tubo tortuoso se simplifican a las Ecs.(A.1.5), (A.2.6) y (A.3.4) respectivamente; éstas corresponden a un tubo liso.

Tabla 5. Ecuaciones de permeabilidad para las distintas geometrías y fluidos modelados.

	Caso	Ecuación
Ec.(A.1.5)	Newtoniano-liso	$K_e = \frac{R^2}{8}$
Ec.(29)	Newtoniano-tortuoso	$K_e = \left(\frac{L_0}{2}\right)^{1-D_t} \frac{R^{D_t+1}}{D_t(D_t+1)(D_t+3)}$
Ec.(32a)	Newtoniano-poroso	$K_e = \left(\frac{\phi}{1-\phi}\right) \frac{\left(\frac{L_0}{2}\right)^{1-D_t} (2-D_f) R_{m\acute{a}x}^{D_t+1}}{D_t(D_t+1)(D_t+3)(D_t-D_f+3)} \left(1 - \left(\frac{R_{m\acute{i}n}}{R_{m\acute{a}x}}\right)^{D_t-D_f+3}\right)$
Ec.(A.2.6)	Bingham-liso	$K_e = \frac{R^2}{8} \left[1 - \frac{4 R_0}{3 R} + \frac{1 R_0^4}{3 R^4}\right]$
Ec.(39)	Bingham-tortuoso	$K_e = \left(\frac{L_0}{2}\right)^{1-D_t} \frac{R^{D_t+1}}{D_t(D_t+1)(D_t+3)} \left[1 - \frac{(D_t+3) R_0^{D_t}}{3 R^{D_t}} + \frac{D_t R_0^{D_t+3}}{3 R^{D_t+3}}\right]$
Ec.(41)	Bingham-poroso	$K_e = \left(\frac{\phi}{1-\phi}\right) \frac{\left(\frac{L_0}{2}\right)^{1-D_t} (2-D_f) R_{m\acute{a}x}^{D_t+1}}{D_t(D_t+1)(D_t+3)(D_t-D_f+3)} \left[\left(1 - \left(\frac{R_{m\acute{i}n}}{R_{m\acute{a}x}}\right)^{D_t-D_f+3}\right) - \frac{(D_t+3)(D_t-D_f+3)}{3(3-D_f)} \left(\frac{R_0}{R_{m\acute{a}x}}\right)^{D_t} \left(1 - \left(\frac{R_{m\acute{i}n}}{R_{m\acute{a}x}}\right)^{3-D_f}\right) - \frac{D_t(D_t-D_f+3)}{D_f} \left(\frac{R_0}{R_{m\acute{a}x}}\right)^{D_t+3} \left(1 - \left(\frac{R_{m\acute{i}n}}{R_{m\acute{a}x}}\right)^{-D_f}\right)\right]$
Ec.(A.3.4)	Ostwald-liso	$K_e = \left(\frac{\Delta P}{L \mu}\right)^{\frac{1}{n}-1} \frac{n R^{\frac{1}{n}+1}}{\sqrt[n]{2}(1+3n)}$
Ec.(45)	Ostwald-tortuoso	$K_e = \left(\frac{dP}{dL_0 \mu}\right)^{\frac{1}{n}-1} \left(\frac{L_0}{2}\right)^{1-D_t} \frac{1}{D_t(D_t+1)} \frac{1}{D_t+3n} R^{\frac{D_t+1}{n}}$
Ec.(47a)	Ostwald-poroso	$K_e = \left(\frac{\phi}{1-\phi}\right) \left(\frac{L_0}{2}\right)^{1-D_t} \frac{1}{D_t(D_t+1)} \frac{\left(\frac{dP}{dL_0 \mu}\right)^{\frac{1}{n}-1} (2-D_f) R_{m\acute{a}x}^{\frac{D_t+1}{n}}}{\left(\frac{D_t+3}{n}\right) \left(\frac{D_t-D_f+3}{n}\right)} \left(1 - \left(\frac{R_{m\acute{i}n}}{R_{m\acute{a}x}}\right)^{\frac{D_t-D_f+3}{n}}\right)$

La Fig. 11, Fig.12 y Fig.13 presentan la comparación entre los resultados del algoritmo numérico contra los resultados de las soluciones analíticas de la Tabla 5.

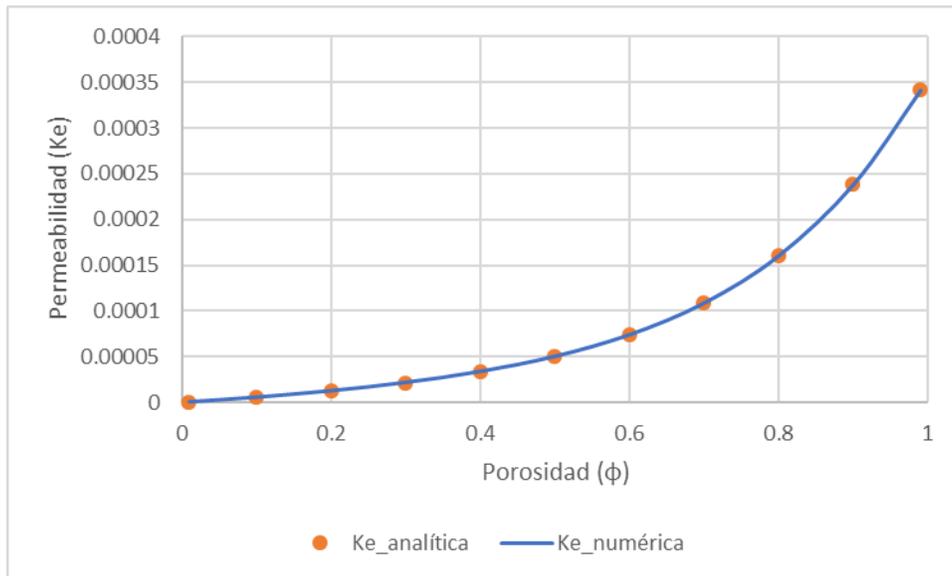


Figura 12. Permeabilidad para un fluido newtoniano en el medio poroso.

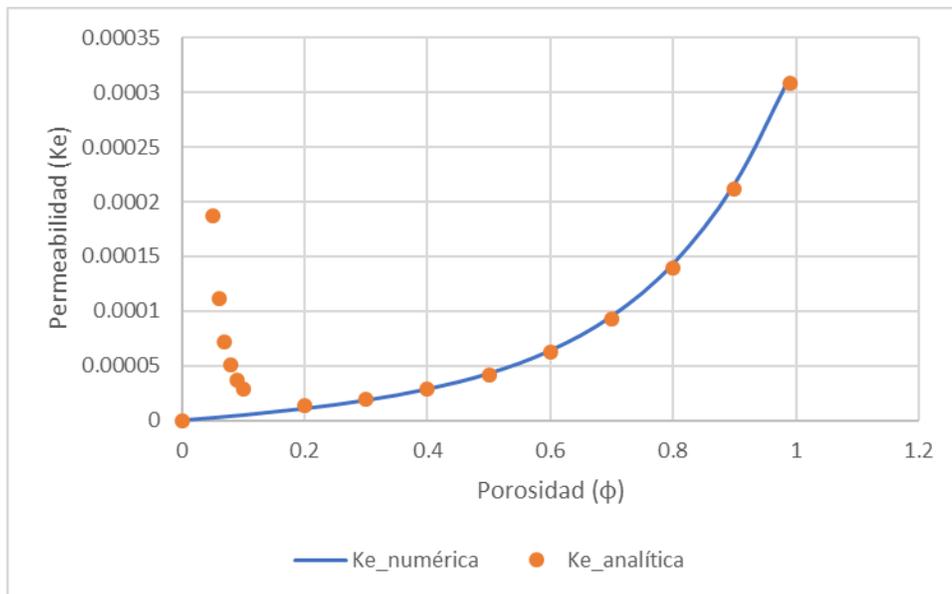


Figura 13. Permeabilidad para un fluido de Bingham en el medio poroso.

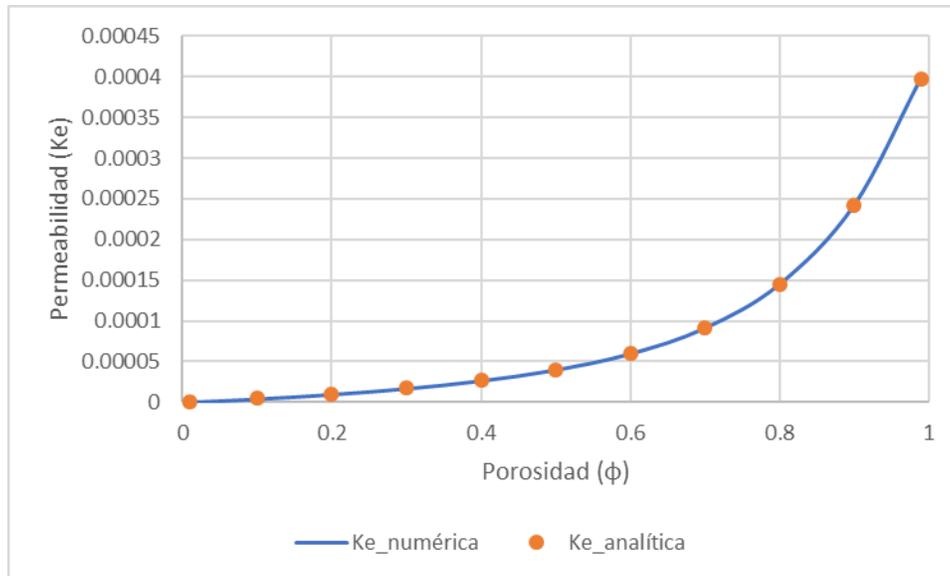


Figura 14. Permeabilidad para un fluido adelgazante ( $n=0.5$ ) en el medio poroso.

Las curvas de la Fig.11, Fig.12 y Fig.13 presentan un comportamiento ascendente, donde el punto máximo se encuentra a  $\phi = 1$  y el mínimo a  $\phi = 0$ . Sin embargo, porosidades iguales a uno, nos indican que el medio es enteramente espacios vacíos que permiten el flujo; lo que implica que el medio no es poroso. Por su parte, porosidades iguales a cero, nos indican que en el medio no existe ningún espacio vacío, es decir, no existen poros o canales por los cuales fluir. Esto nos indica que ese medio no es permeable ( $K_e = 0$ ).

En las Figs. 11 y 13 se aprecia que la solución numérica reproduce con exactitud los resultados analíticos, y que también las curvas siguen el comportamiento físico apropiado para el sistema: mientras más poroso el medio, mayor cantidad de flujo permite.

Por otra parte, la Fig. 12 se aprecia que la permeabilidad analítica aumenta conforme la porosidad tiende a cero ( $\phi < 0.2$ ) y esto, como ya se mencionó, carece de sentido físico.

Aunque en la solución analítica se cumple que  $\lim_{\phi \rightarrow 0} K_e = 0$ , este comportamiento

inconsistente de los puntos cercanos a cero, deja en claro que la solución analítica falla cuando se manejan porosidades pequeñas; sin embargo, la solución numérica no sólo predice la solución analítica a  $\phi > 0.2$ , sino que también mantiene el comportamiento de la curva y tiende a cero para  $\phi < 0.2$ ; por lo que la solución numérica concuerda con la interpretación física del sistema.

## 4.2. Análisis de sensibilidad paramétrica

### 4.2.1. Efecto de la escala fractal de tortuosidad.

Para apreciar el efecto que tiene la escala fractal  $D_t$  en la permeabilidad, se realizó el análisis de sensibilidad paramétrica con las Ec.(29), (39) y (45) para la permeabilidad en un tubo tortuoso para los fluidos de Newton, Bingham y Ostwald, respectivamente.

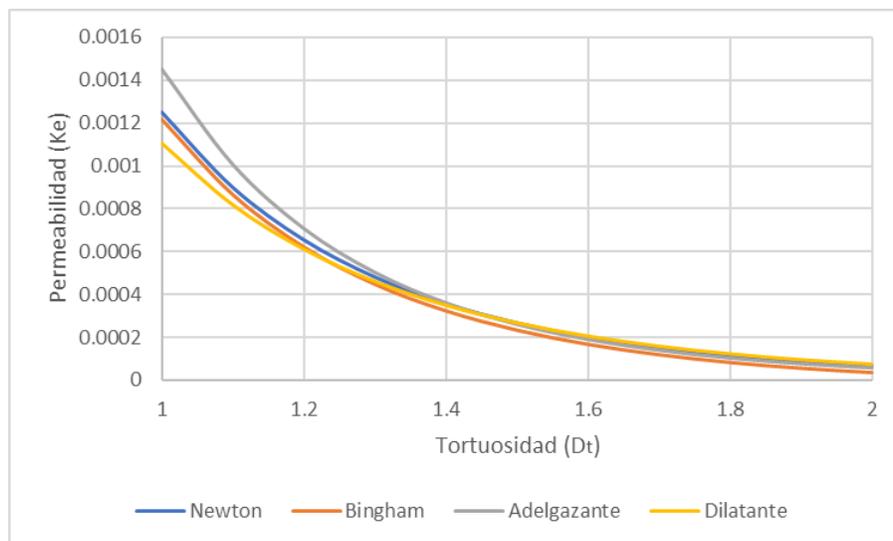


Figura 15. Efecto de la tortuosidad en la permeabilidad.

El efecto principal que tiene la escala fractal  $D_t$  es disminuir la permeabilidad, es decir, obstruye el flujo a través del material. Se sabe que cuando  $D_t = 1$ , la ecuación vuelve a la

forma del tubo liso; instancia en la que ocurren los valores máximos de permeabilidad en todos los fluidos.

Lo más importante a destacar es que el comportamiento de la curva se mantiene para todos los fluidos; lo que pone en evidencia que la escala fractal  $D_t$  es una propiedad inherente al medio y no al material que fluye por este.

#### 4.2.2. Efecto de la escala fractal de la distribución de poros.

Para observar el efecto que tiene la escala fractal  $D_f$  en la permeabilidad, se realizó el análisis de sensibilidad paramétrica con las Ecs.(32a), (41) y (47a) para la permeabilidad en un medio poroso para los fluidos de Newton, Bingham y Ostwald, respectivamente.

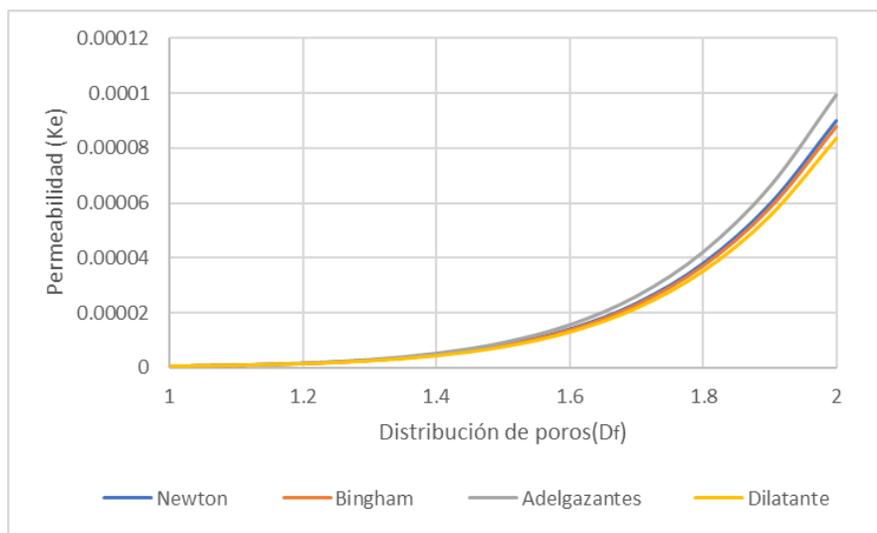


Figura 16. Efecto de la distribución de poros en la permeabilidad.

En la Fig. 15 se observa que el flujo incrementa al aumentar la escala fractal  $D_f$ . Por una parte, sabemos que cuando  $D_f$  se acerca a la unidad, la permeabilidad tiende a cero; esto implica que el medio está obstruido casi por completo, o que existen muy pocos poros que permiten el flujo. Por otra parte, al incrementar el valor de  $D_f$ , la cantidad de espacios vacíos del material que permiten el flujo aumenta, es decir, se incrementa la permeabilidad.

Al igual que la tortuosidad, el comportamiento de las curvas para los diferentes fluidos tratados en la Fig. 15 es semejante, por ello se puede concluir que los escalamientos fractales sólo afectan al medio, tal y como se había mencionado anteriormente.

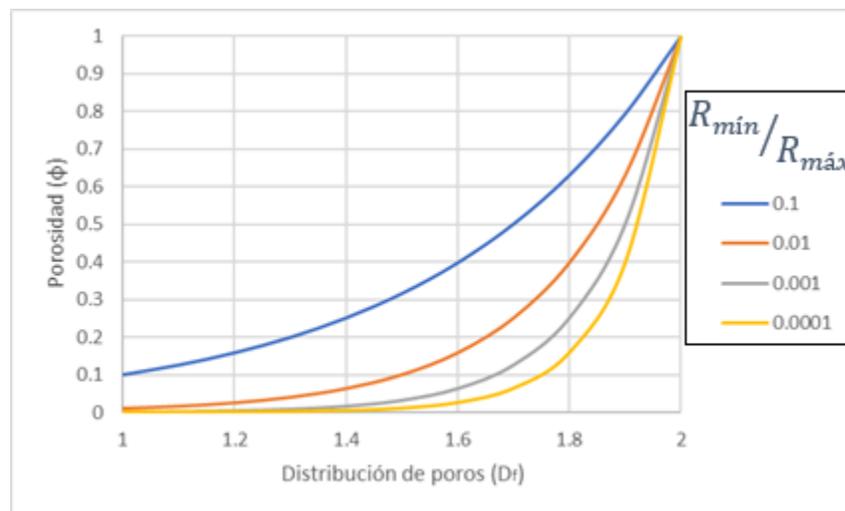


Figura 17. Efecto de la distribución de poros en la porosidad del medio a diferentes cocientes de radios.

La Fig. 16 tiene como objetivo explicar más a fondo el efecto de la distribución de poros. Sabemos que, a porosidades iguales a la unidad, el medio es en su totalidad espacio vacío por el cual se permite el flujo; por ello, en este punto se puede hacer referencia a un tubo recto; lo cual concuerda con el comportamiento a  $D_f = 2$ .

Al ir al otro extremo, es decir, cuando  $\phi \rightarrow 0$ , lo que corresponde a valores de  $D_f \rightarrow 1$  (pues la tendencia de la Fig. 15 nos indica que a estos valores la permeabilidad es nula), se encuentra que no todos los cocientes de radios de poro cumplen con esta condición. Por ello se entiende que debe existir cierta diferencia de magnitud entre los radios para que puedan ser considerados dentro del escalamiento fractal utilizado.

### 4.3 Comparación con modelos fractales conocidos

#### 4.3.1. Modelo newtoniano.

En esta sección se realiza una comparación entre el modelo newtoniano de la permeabilidad para un medio poroso desarrollado en este trabajo (Ec.32b), con el modelo propuesto por Zhang et. al. en el 2006:

$$K_e = 2^{D_t-4} \frac{\phi}{(1-\phi)} \frac{L_0^{1-D_t} (2-D_f) R_{max}^{1+D_t}}{D_t(D_t-D_f+3)}. \quad (52)$$

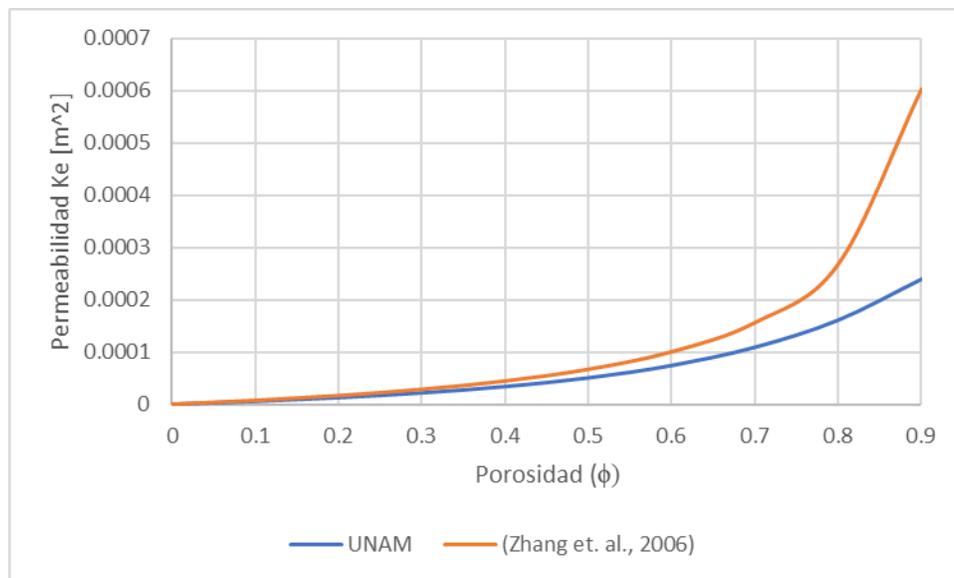


Figura 18. Comparación de modelos newtonianos de permeabilidad en un medio poroso.

En la Fig. 17 se observa que, a bajas porosidades, ambos modelos proporcionan soluciones similares, pero el comportamiento de la curva al incrementar la porosidad es distinto. En el modelo fractal propuesto, permeabilidad obtenida (Ec.32b) siempre es menor que la permeabilidad comparada del modelo de Zhang.

#### 4.3.2. Modelo para un fluido de Bingham.

En esta sección se realiza una comparación entre el modelo de Bingham de la permeabilidad en un medio poroso desarrollado en este trabajo (Ec.(3.4.10) del desarrollo analítico), con el modelo de propuesto por Yun et. al. en el 2008:

$$V = \frac{\phi(2-D_f)R_{max}^{1+D_t}}{\mu L_0^{D_t-1} 2^{4-D_t} D_t(3+D_t-D_f)(1-\phi)} \left[ \frac{\Delta P}{L_0} + \frac{F \sigma \cos \theta (1-\phi)(3+D_t-D_f)}{2 L_0 \phi (2+D_t-D_f) R_{max}} - \frac{L_0^{D_t-1} D_t (3+D_t-D_f) \tau_0}{2^{D_t-2} (3-D_f) R_{max}^{D_t}} \right]; \quad (53)$$

Sin embargo, la ecuación presentada es para la velocidad superficial del medio ( $V$ ), por lo que, para calcular la permeabilidad por medio de dicha expresión se emplea la ley Darcy:

$$K_e = \frac{Q}{A} \frac{\mu}{\left(\frac{dP}{dL_0}\right)}, \quad (24)$$

donde:

$$V = \frac{Q}{A}. \quad (25)$$

Además, dado que la Ec.(53) considera la capilaridad de los poros, se hace la reducción considerando  $\theta = \frac{\pi}{2}$  (Yun et. al., 2008), lo que indica que no hay contribución por parte de la capilaridad y, de ese modo, poder realizar la comparación con la ecuación planteada en este trabajo Ec.(41). La ecuación resultante, derivada del modelo de Yun et. al. en el 2008, es la siguiente:

$$K_e = \frac{\phi}{(1-\phi)} \frac{(2-D_f)R_{max}^{1+D_t}}{L_0^{D_t-1} 2^{4-D_t} D_t (3+D_t-D_f)} \left[ \frac{\Delta P}{L_0} - \frac{L_0^{D_t-1} D_t (3+D_t-D_f) \tau_0}{2^{D_t-2} (3-D_f) R_{max}^{D_t}} \right]. \quad (54)$$

Se observa en la Fig. 18 que, a diferencia del modelo fractal en la Fig. 17, las curvas comienzan a discrepar a menores porosidades, aunque el comportamiento de la curva es similar al del modelo newtoniano. La porosidad obtenida por medio del modelo propuesto siempre es menor al presentado por Yun et. al. en el 2008. Además, en el modelo de Yun et. al. en el 2008 se observa que la porosidad tiene una mayor influencia; esto puede ser explicado con la siguiente ecuación, la cual relaciona ambos modelos de permeabilidad:

$$\frac{K_e^{Unam}}{K_e^{Yun}} = \left( \frac{dP}{dL_0} \right) \frac{2^3}{(D_t+1)(D_t+3)} \frac{\left[ \left( 1 - \left( \frac{R_{min}}{R_{max}} \right)^{D_t-D_f+3} \right) - \frac{(D_t+3)(D_t-D_f+3)}{3(3-D_f)} \left( \frac{R_0}{R_{max}} \right)^{D_t} \left( 1 - \left( \frac{R_{min}}{R_{max}} \right)^{3-D_f} \right) - \frac{D_t(D_t-D_f+3)}{D_f} \left( \frac{R_0}{R_{max}} \right)^{D_t+3} \left( 1 - \left( \frac{R_{min}}{R_{max}} \right)^{-D_f} \right) \right]}{\left[ \frac{\Delta P}{L_0} - \frac{L_0^{D_t-1} D_t (3+D_t-D_f) \tau_0}{2^{D_t-2} (3-D_f) R_{max}^{D_t}} \right]}. \quad (55)$$

En la Ec.(55) se observan una mayor cantidad de términos en el numerador, los cuales funcionan como amortiguadores de la función para evitar los cambios de pendiente bruscos, además de que la tortuosidad tiene una mayor relevancia en nuestro modelo. Esto implica que al volverse más tortuoso el medio, habrá una menor permeabilidad.

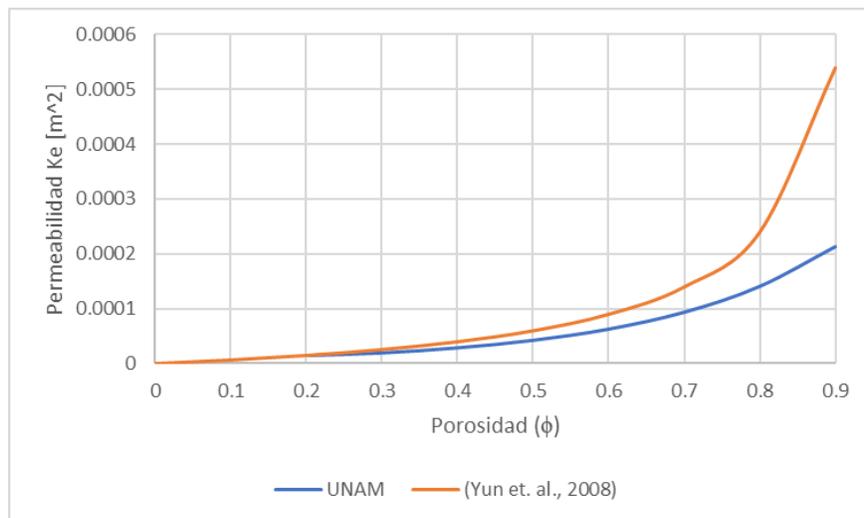


Figura 19. Comparación de modelos de permeabilidad en el medio poroso para fluidos de Bingham.

#### 4.3.3. Modelo para un fluido de ley de potencia.

En esta última sección se realiza una comparación entre el modelo de Ostwald de la permeabilidad en un medio poroso desarrollado en este trabajo (Ec.47b), con el modelo de Zhang et. al. del 2006:

$$K_e = 2^{D_t-2} D_f^{n-1} \frac{n^2 \phi L_0^{1-D_t}}{(1+3n)D_t} \left( \frac{n}{D_t-nD_f} \right)^{n-1} \frac{(2-D_f)R_{max}^{1+D_t}}{(D_t-nD_f+3n)(1-\phi)} \left[ 1 - \left( \frac{R_{min}}{R_{max}} \right)^{\frac{D_t-D_f}{n}} \right]^{n-1} \quad (56)$$

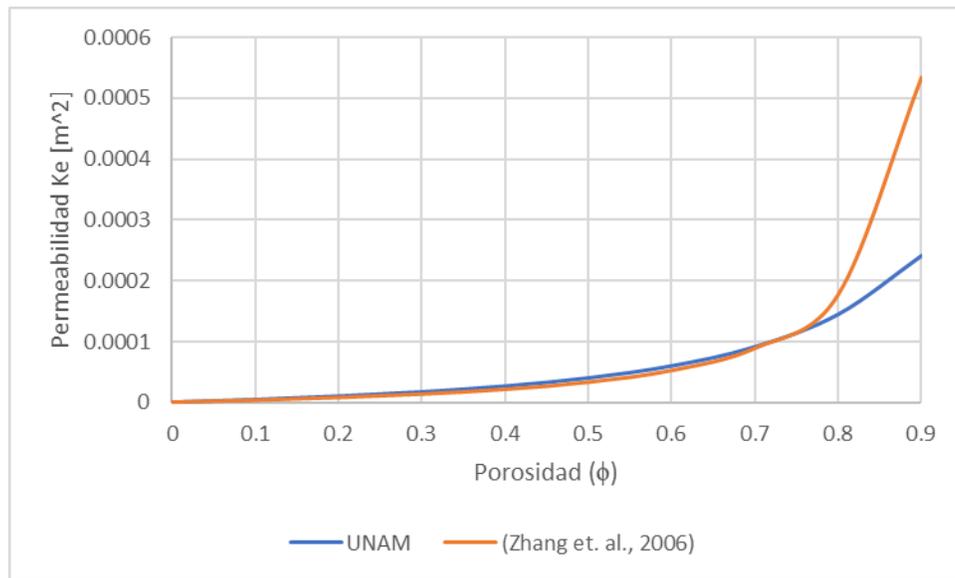


Figura 20. Comparación de modelos de permeabilidad en el medio poroso para fluidos de Ostwald.

En la Fig. 19, a diferencia de las Figs. 17 y 18, se observa que las discrepancias entre el modelo propuesto y el modelo de Zhang son mínimas para un gran intervalo de porosidad  $\phi = [0,0.75]$ . También es importante considerar que, al alcanzarse cierto valor de porosidad, las pendientes de las curvas discrepan considerablemente, pues ocurre un cambio muy drástico en la pendiente del modelo de Zhang.

## 4.4 Comparación con datos experimentales

### 4.4.1. Modelo de permeabilidad con un fluido newtoniano.

Se empleó la Ec.(32a) de permeabilidad en un medio poroso para un fluido newtoniano. En el modelo de flujo en medio poroso de referencia (Zhang et. al., 2006) se usaron datos experimentales (Yu & Cheng, 2002), para corroborar la precisión del modelo. Con estos mismos datos se realizaron las comparaciones con el modelo fractal newtoniano propuesto en este trabajo.

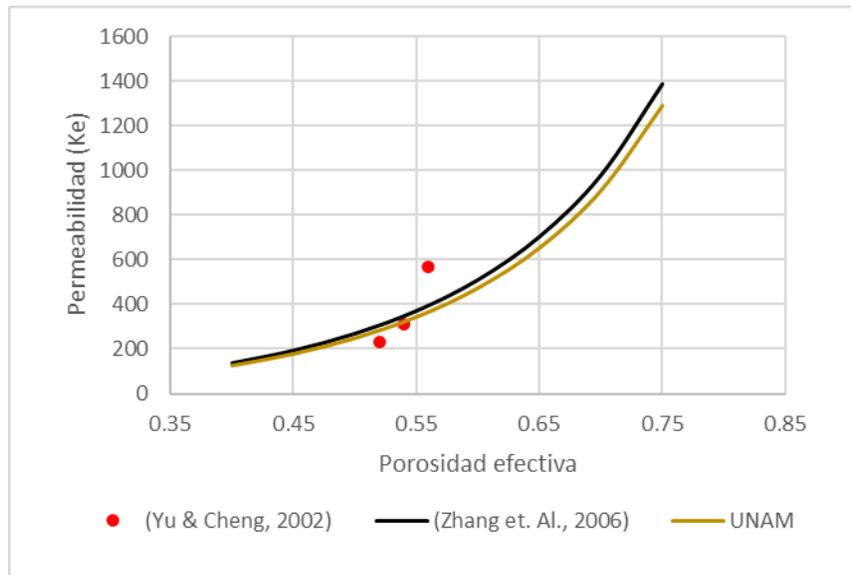


Figura 21. Comparación con datos experimentales de permeabilidad.

En primera instancia, se aprecia en la Fig. 20 que los modelos no difieren tanto uno del otro; ambos siguen la misma tendencia con respecto a la porosidad efectiva. La diferencia radica en que el modelo fractal propuesto en este trabajo predice permeabilidades menores. Cabe señalar que la cantidad de puntos experimentales no proporciona la suficiente información para determinar si los modelos aproximan o no el comportamiento real a bajas porosidades efectivas.

#### 4.4.2. Aproximación a Herschel-Bulkley.

Se empleo un conjunto de datos experimentales de soluciones acuosas de Poli-MetilCelulosa (PMC 400 y PMC 25 con 0.5% y 0.3% concentración masa), fluyendo a través de una cama empacada con permeabilidad  $K = 366 \text{ Darcy}$  y una porosidad  $\phi = 0.39$  (Fig.21; Sochi, 2010b; Park, 1972).

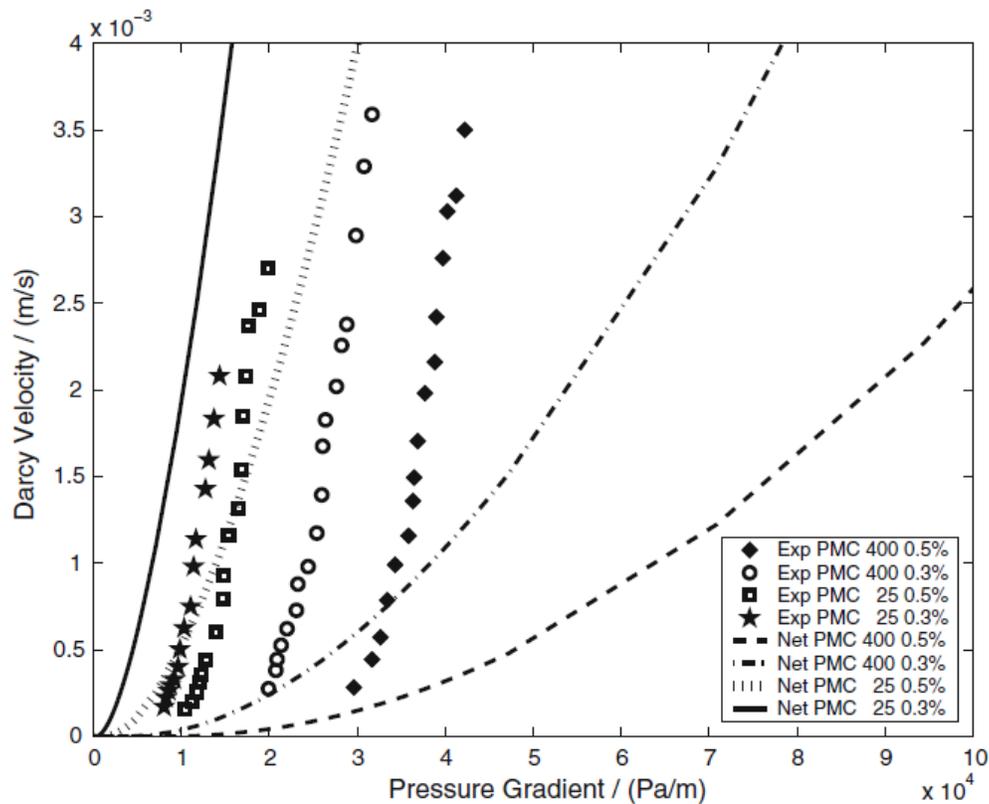


Figura 22. Serie de datos para fluidos de Herschel-Bulkley.

En la figura se encuentran tanto los valores experimentales (Park, 1972), como las aproximaciones obtenidas por el modelo (Sochi, 2010b).

Dado que en este trabajo de tesis no se obtuvieron soluciones analíticas para predecir el comportamiento de fluidos de Herschel-Bulkley en medios poroso, se hizo uso del algoritmo numérico propuesto y su adaptabilidad para implementar dicha ecuación constitutiva y obtener soluciones numéricas.

Con base a los valores de permeabilidad y porosidad de la cama empacada, se determinaron los valores de tortuosidad  $D_t = 1.6$ , distribución de poro  $D_f = 1.8$  y radio máximo de poro  $R_{max} = 0.00203$ , empleando la Ec.(32b) de permeabilidad de un fluido newtoniano. Además, se usaron los siguientes datos proporcionados de la reología del fluido (Tabla 6; Park, 1972):

Tabla 6. Reología de los datos experimentales.

Grupo de datos	Coefficiente de viscosidad ( $Pa s^n$ )	$n$	$\tau_0$ (Pa)
PMC 400 0.3%	0.059	0.61	0.25
PMC 25 0.5%	0.021	0.63	0.072
PMC 25 0.3%	0.009	0.66	0.018

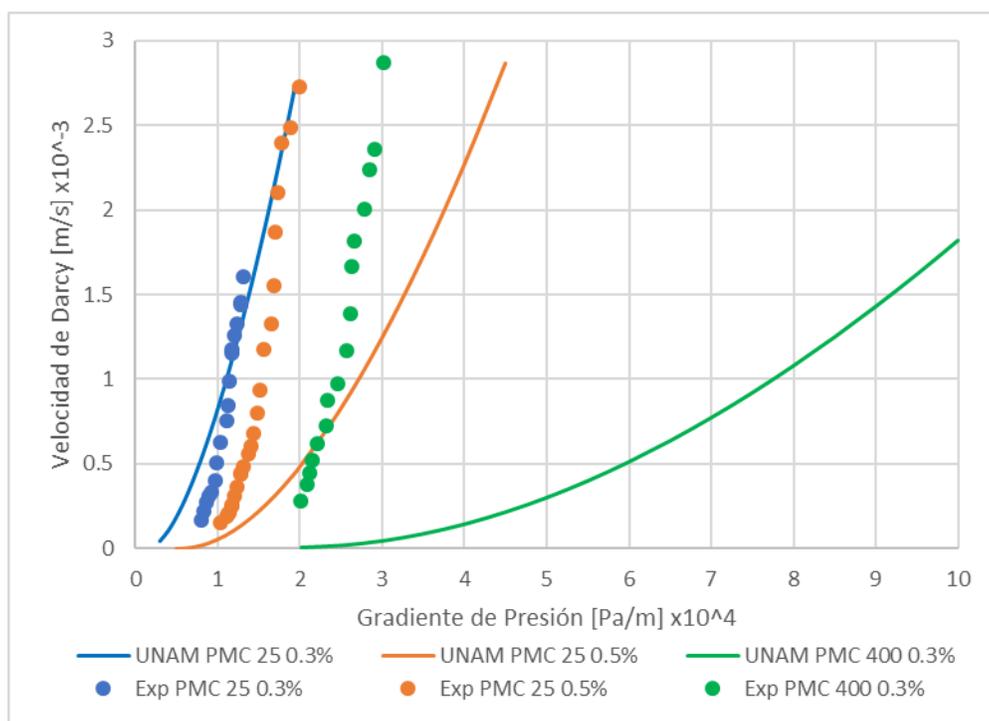


Figura 23. Predicción de datos experimentales de fluidos de Herschel-Bulkley.

En la Tabla 6, se listan los parámetros del modelo de Herschel-Bulkley para tres soluciones de PMC. Aquí, uno puede detectar las diferencias entre las concentraciones de PMC reportadas, de las cuales, las variaciones en el esfuerzo de cedencia y la viscosidad son las que se consideran de mayor relevancia. En particular, el aumento en concentración de PMC aumenta el coeficiente de viscosidad y el esfuerzo de cedencia de las soluciones, mientras que el índice  $n$  disminuye con el aumento de la concentración de PMC, lo que deriva en fluidos con características adelgazantes al corte más severas.

Como se observa en la Fig. 22, las soluciones numéricas obtenidas describen de manera razonable (tanto en orden de magnitud como en tendencia) los datos experimentales a bajas viscosidad y concentración (PMC 25 0.3%; azul); sin embargo, para los casos restantes, las soluciones predicen un aumento retardado de la velocidad de Darcy con respecto a los datos experimentales. Esto indica que nuestro modelo hace predicciones razonables para sistemas diluidos con bajas viscosidades.

Por otra parte, de las curvas “Net PMC” de la Fig. 21 se observa un comportamiento cualitativo similar al modelo propuesto en este trabajo. Cabe notar que las soluciones del modelo de Sochi (2010b) difieren de los datos experimentales incluso a bajas concentraciones de soluto, tendencia que se marca al incrementar la concentración de PMC. De ese modo, esta evidencia indica que el modelo propuesto en este trabajo y sus predicciones proporcionan una mejor descripción de los datos experimentales reportados por Park (1972), en comparación con las soluciones reportadas por Sochi (2010b). Además, con esto se demuestra la versatilidad del algoritmo numérico para adaptarse a modelos más complicados, derivados de un fluido de Newton generalizado.

## V. Conclusiones

En este trabajo de tesis se ha llegado a las siguientes conclusiones:

1.- Un nuevo modelo que considera un escalamiento fractal alternativo. A diferencia de los escalamientos fractales reportados en la literatura, la distinta implementación del escalamiento fractal  $D_t$  en la ecuación de movimiento propuesta en este trabajo, generó un modelo matemático de flujo en medio poroso con términos adicionales en la ecuación de movimiento. Estos nuevos términos repercuten considerablemente en las predicciones de flujo en el medio poroso y contribuyen una descripción cuantitativa de datos experimentales de fluidos viscoplásticos en medios poroso a bajas concentraciones de soluto y bajas viscosidades, a diferencia de otros modelos (Sochi, 2010b; Park, 1972).

2.- Propuesta de un algoritmo numérico. Se propuso un algoritmo numérico para la solución de flujo en medio poroso de fluidos newtonianos y no newtonianos en geometrías fractales. De las comparaciones entre las predicciones numéricas contra las soluciones analíticas, se demuestra que el algoritmo numérico propuesto en este trabajo predice con precisión el flujo volumétrico y la permeabilidad de fluidos newtonianos, de Bingham y ley de la potencia a través de medios porosos fractales. Además, este algoritmo puede modelar comportamientos reológicos más complejos derivados del fluido newtoniano generalizado y generar aproximaciones similares a modelos analíticos ya conocidos. Finalmente, las soluciones cumplen con las pruebas de consistencia, en donde el flujo volumétrico y permeabilidad, indistinto al caso analizado, siempre regresan a la solución de un fluido newtoniano en un tubo recto al definir los parámetros  $D_t = 1, D_f = 2, n = 1$  y  $\tau_0 = 0$ .

3.- Características del sistema y permeabilidad. La tortuosidad, así como la distribución de poros, son parámetros inherentes del medio poroso. Se ha demostrado que la permeabilidad es una propiedad del sistema, que agrupa tanto las propiedades del medio como las propiedades reológicas del fluido que fluye a través de él.

4.- Comparación de soluciones con otros modelos reportados en la literatura. El tratamiento matemático de la tortuosidad empleado en este trabajo predice permeabilidades que difieren de otros modelos propuestos en la literatura. En los resultados obtenidos se observa una curva sin cambios bruscos de pendiente; una tendencia diferente a otros modelos reportados (Zhang et. al., 2006; Yun et. al., 2008).

## **VI. Trabajo futuro**

1.- Implementación de otras ecuaciones constitutivas. La versatilidad de la herramienta numérica puede permitir modelar comportamientos reológicos más complejos, aunque con ciertas restricciones debido a la complejidad matemática de las ecuaciones constitutivas. Como siguiente paso, se planea incluir ecuaciones constitutivas que incluyan viscoelasticidad, a través de la aproximación dada por el fluido de segundo orden.

2.- Fluidos viscoplásticos y otras físicas. Para los fluidos donde existe esfuerzo de cedencia, el modelo analítico desarrollado presenta fallas a bajas porosidades. Se planea solucionar el problema con la implementación de las contribuciones de la capilaridad de los poros (Yun et al., 2008).

3.- Parámetros de medios porosos. En el modelo propuesto se requiere de conocer dos parámetros fractales: la tortuosidad y la distribución de poros. De ese modo, para utilizar el

modelo y el algoritmo numérico propuestos, es necesario desarrollar herramientas de predicción del valor de dichos parámetros para los sistemas en los que se quiera modelar el flujo.

4.- Escalamientos fractales tridimensionales. El modelo propuesto en este trabajo usa un escalamiento fractal bidimensional para la distribución de poros. Como punto a tratar en un futuro, está la caracterización del medio poroso mediante escalamientos fractales tridimensionales (Mandelbrot, 1982).

## Bibliografía

- [1] Bear J. Dynamics of fluids in porous media, Elsevier, New York, 1972.
- [2] Bird, R.B. W.E. Stewart, E.N. Lightfoot, Transport Phenomena, Wiley, New York, 1960.
- [3] Cai, J., Luo, L., Ye, R., Zeng, X.F. y Hu, X.Y., Recent advances on fractal modeling of permeability for fibrous porous media, *Fractals*, Vol. 23, No. 1, 2015.
- [4] Cai, J., Perfect, E., Cheng, C.L., Hu, X.Y., Generalized Modeling of Spontaneous Imbibition Based on Hagen–Poiseuille Flow in Tortuous Capillaries with Variably Shaped Apertures, *Langmuir*, 2014, 30 (18), pp 5142–5151.
- [5] Dullien, F.A.L., Porous media: fluid transport and pore structure, Academic Press, Inc., San Diego, California, 1992.
- [6] Frigaard, I.A., Paso, K.G., Mendes, P.R. de S., Bingham’s models in the gas and oil industry, *Rheol Acta* (2017) 56:259–282.
- [7] Gardea Villegas, H., Dos propuestas para el proyecto del bombeo de fluidos no newtonianos. Caso de los lodos residuales de plantas de tratamiento de aguas negras, *Ing. invest. y tecnol.* vol.9 no.2, México, 2008.
- [8] Li Y.H, Yu B.M, Chen J. y Wang C.Y. Analysis of Permeability for Ellis Fluid Flow in Fractal Porous Media, *Chemical Engineering Communications* 195:10 (2008) 1240-1256.
- [9] Mandelbrot B.B. The Fractal Geometry of Nature, W. H. Freeman, New York, 1982, pp. 23–57 (see also pp. 117–119).
- [10] Nieves, H.A. y Domínguez S.F.C., Métodos numéricos aplicados a la ingeniería, 4ta. Edición, Grupo editorial Patria, México, 2014.

- [11] Park, H.C.: The flow of non-Newtonian fluids through porous media. PhD thesis, Michigan State University (1972).
- [12] Perrier, E., Bird, N. y Rieu, M. Generalizing the fractal model of soil structure: the pore–solid fractal approach, *Geoderma* 88, 1999, 137–164.
- [13] Sahimi, M., Flow phenomena in rocks: from continuum models to fractals, percolation, cellular automata, and simulated annealing, *Reviews of Modern Physics*, Vol. 65, No. 4, 1993.
- [14] Salager, J.L., Recuperación mejorada de petróleo, Cuaderno FIRP N° S357C, 2005.
- [14] Shou, D., Fan, J. y Ding, F., A difference-fractal model for the permeability of fibrous porous media, *Physics Letters A* 374 (2010) 1201–1204.
- [15] Sochi, T., Flow of non-Newtonian fluids in porous media, *Polymer Physics* 48:23 (2010) 2437-2767. (a)
- [16] Sochi, T., Modelling the Flow of Yield-Stress Fluids in Porous Media, *Transp Porous Med* (2010) 85:489–503. (b)
- [17] Suter, S.L. y Skalak, R., The history of Poiseuille’s law, *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1993.25:1-20.
- [18] Tek, M.R., Development of a Generalized Darcy Equation. Society of Petroleum Engineers (1957, June 1). doi:10.2118/741-G
- [19] Yu, B.M. Fractal character for tortuous streamtubes in porous media, *Chin. Phys. Lett.* 22 (2005) 158–160.1.
- [20] Yu, B.M. y Cheng, P. A fractal model for permeability of bi-dispersed porous media, *Int. J. Heat Mass Transf.* 45 (2002) 2983–2993.

- [21] Yu, B.M. y Li, J.H. Some fractal characters of porous media, *Fractals* 9 (2001) 365–372.
- [22] Yun, M.J., Yu, B.M. y Cai J.C. A fractal model for the starting pressure gradient for Bingham fluids in porous media, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 51 (2008) 1402–1408.
- [23] Zhang, B., Yu, B.M, Wang, H.X. y Yun, M.J. A fractal analysis of permeability for Power-Law fluids in porous media, *Fractals*, Vol. 14, No. 3 (2006) 171–177.

## Apéndices

### A.1. Flujo de un fluido newtoniano en un tubo recto (Caso 1.1)

Un fluido newtoniano se define con la siguiente ecuación constitutiva:

$$\tau_{rz} = -\mu \frac{dv_z}{dr}. \quad (A.E.1)$$

El esfuerzo cortante para el flujo de cualquier material incompresible en un tubo recto liso es:

$$\tau_{rz} = \frac{\Delta P}{\Delta L} \frac{r}{2}. \quad (A.1.1)$$

Partiendo de lo anterior, se resuelve el problema igualando las Ecs.(A.E.1) y (A.1.1):

$$-\mu \frac{dv_z}{dr} = \frac{\Delta P}{L} \frac{r}{2}. \quad (A.1.2)$$

Se resuelve la ecuación diferencial con la condición de frontera de adherencia en las paredes del tubo, i.e.  $v_z(r = R) = 0$ , y de ese modo obtenemos la expresión del perfil de velocidades:

$$v_z = \frac{\Delta P}{L} \frac{R^2}{4\mu} \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right). \quad (A.1.3)$$

Finalmente se calcula el flujo en el tubo por medio de la siguiente expresión:

$$q = \pi R^2 \int_0^R v_z r \, dr, \quad (A.1.4)$$
$$q = \frac{\Delta P}{L} \frac{\pi R^4}{8\mu}.$$

Pero además de ello, resulta importante el cálculo de la permeabilidad para realizar comparaciones con los modelos tortuosos y fractales. Sustituyendo la Ec.(A.1.4) en la siguiente expresión de permeabilidad:

$$K_e = \frac{q}{\pi R^2} \frac{\mu}{\left(\frac{dP}{dL}\right)}, \quad (A.E.2)$$

De ese modo se obtiene la expresión para la permeabilidad en un tubo liso:

$$K_e = \frac{R^2}{8}. \quad (A.1.5)$$

## A.2. Flujo de un fluido de Bingham en un tubo recto (Caso 2.1)

Para este caso, se emplea un fluido de Bingham, el cual tiene como ecuación de estado reológica:

$$\tau_{rz} = -\mu \frac{dv_z}{dr} + \tau_0. \quad (A.E.3)$$

La ecuación de movimiento para un tubo recto se define de la siguiente forma:

$$\tau_{rz} = \frac{\Delta P}{\Delta L} \frac{r}{2}. \quad (A.1.1)$$

Partiendo de lo anterior, se resuelve el problema igualando las Ecs.(A.E.3) y (A.1.1):

$$-\mu \frac{dv_z}{dr} + \tau_0 = \frac{\Delta P}{L} \frac{r}{2}. \quad (A.2.1)$$

Considerando la condición de frontera  $v_z(r = R) = 0$  se obtiene la expresión del perfil de velocidades:

$$v_z = \frac{\Delta P}{L} \frac{R^2}{4\mu} \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) - \tau_0 \frac{R}{\mu} \left(1 - \frac{r}{R}\right). \quad (A.2.2)$$

En el caso, de Bingham se calcula el flujo del tubo empleando la siguiente expresión (Bird et al. 1960):

$$q = \pi \int_{R_0}^R \left(-\frac{dv_z}{dr}\right) r^2 dr, \quad (A.E.4)$$

la cual considera tanto la parte viscosa como la fluida del perfil de velocidades. En ella se sustituye la Ec.(A.2.1) y se resuelve la integral para obtener la siguiente expresión:

$$q = \pi \int_{R_0}^R \left(-\left(-\frac{\Delta P}{L} \frac{r}{2\mu} + \frac{\tau_0}{\mu}\right)\right) r^2 dr, \quad (A.2.3)$$

$$q = \pi \frac{\Delta P}{L 2\mu} \frac{(R^4 - R_0^4)}{4} - \pi \frac{\tau_0}{\mu} \frac{(R^3 - R_0^3)}{3}.$$

Se sabe que el esfuerzo de cedencia se expresa de la siguiente forma (Bird et al. 1960):

$$\tau_0 = \frac{\Delta P}{L} \frac{R_0}{2}. \quad (A.2.4)$$

Por lo tanto, se sustituye la Ec.(A.2.4) en la Ec.(A.2.3) y se reduce algebraicamente hasta obtener una forma conocida (Bird et al. 1960):

$$q = \pi \frac{\Delta P}{L 2\mu} \frac{(R^4 - R_0^4)}{4} - \pi \frac{\Delta P}{L} \frac{R_0}{2\mu} \frac{(R^3 - R_0^3)}{3},$$

$$q = \pi \frac{\Delta P}{L} \frac{1}{\mu} \frac{R^4}{8} \left[ 1 - \frac{4}{3} \frac{R_0}{R} + \frac{1}{3} \frac{R_0^4}{R^4} \right]. \quad (A.2.5)$$

Se sustituye la Ec.(A.2.5) en la expresión de permeabilidad:

$$K_e = \frac{q}{\pi R^2 \left( \frac{dP}{dL} \right)}, \quad (A.E.2)$$

de ese modo se obtiene la expresión para la permeabilidad en un tubo liso:

$$K_e = \frac{R^2}{8} \left[ 1 - \frac{4}{3} \frac{R_0}{R} + \frac{1}{3} \frac{R_0^4}{R^4} \right]. \quad (A.2.6)$$

### A.3. Flujo de un fluido que sigue la ley de la potencia a través de un tubo recto (Caso 3.1)

Para este caso se emplea un fluido de Ostwald, el cual se define:

$$\tau_{rz} = -\mu \left( \frac{dv_z}{dr} \right)^n. \quad (A.E.5)$$

La ecuación de movimiento para un tubo recto se define de la siguiente forma:

$$\tau_{rz} = \frac{\Delta P}{\Delta L} \frac{r}{2}. \quad (A.1.1)$$

Partiendo de lo anterior, se resuelve el problema igualando las Ecs.(10) y (A.1.1):

$$-\mu \left( \frac{dv_z}{dr} \right)^n = \frac{\Delta P}{L} \frac{r}{2}. \quad (A.3.1)$$

Tomando en cuenta la condición de frontera  $v_z(r = R) = 0$  se obtiene la expresión del perfil de velocidades:

$$v_z = \left( \frac{\Delta P}{L} \frac{1}{2\mu} \right)^{1/n} \frac{n R^{n+1}}{1+n} \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^{\frac{1}{n}+1} \right). \quad (A.3.2)$$

Se calcula el flujo en el tubo:

$$q = \pi R^2 \int_0^R v_z r \, dr,$$
$$q = \left( \frac{\Delta P}{L} \frac{1}{2\mu} \right)^{1/n} \frac{n \pi R^{\frac{1}{n}+3}}{1+3n}. \quad (\text{A.3.3})$$

Resulta importante el cálculo de la permeabilidad por ello se sustituye la Ec.(A.3.3) en la siguiente expresión:

$$K_e = \frac{q}{\pi R^2} \frac{\mu}{\left( \frac{dP}{dL} \right)}, \quad (\text{A.E.2})$$

de ese modo se obtiene la expresión para la permeabilidad en un tubo liso:

$$K_e = \left( \frac{\Delta P}{L} \frac{1}{\mu} \right)^{\frac{1}{n}-1} \frac{n R^{\frac{1}{n}+1}}{\sqrt[n]{2}(1+3n)}. \quad (\text{A.3.4})$$