Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

# EL MÁXIMO PROYECTIVO DE LA SEMIRRETÍCULA SUPERIOR DE COMPACTACIONES HAUSDORFF

T E S I S

Que para obtener el título de:

**MATEMÁTICO**

Presenta:

**DIEGO DAVID RAFAEL RIVERA OSORIO**

Director:

**DR. FIDEL CASARRUBIAS SEGURA**

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2019

*—¡Una vuelta más!*

*Hermes Conrad.*

*—No, media vuelta. Olvidas que en una pista Möbius dos vueltas es una vuelta.*

*Jibby.*

*—¡Ja, ja, ja ,ja! Ustedes y su topología.*

*Doctor Zoidberg.*

Futurama. Temporada 7. Episodio 15:
Aventura en dos dimensiones.

# CONTENIDO

# PROEMIO

La compacidad es una noción que formó parte del estudio del Análisis Real y Complejo años antes de que existiera la Topología General como hoy la conocemos. Es más, los conceptos de conjunto abierto y de compacidad —claramente el segundo depende del primero— van de la mano en la historia de las Matemáticas [23]. En los inicios de la topología, se consideraban las propiedades conocidas del intervalo $[0,1]$ y se extendían a los espacios topológicos, una de esas propiedades está relacionada con el teorema de Heine-Borel, el cual dice que todo subconjunto $A$ de $\mathbb{R}$ tanto cerrado como acotado es tal que toda cubierta abierta de $A$ tiene una subcubierta finita. La definición de compacidad como la conocemos ahora se le atribuye al francés Maurice Fréchet (1878–1973) quien la introdujo, en 1904, en sus llamados $L$-espacios. La estructura de dichos espacios estaba determinada por la convergencia de sus sucesiones, así como la topología de sus subconjuntos abiertos. Un $L$-espacio era compacto cuando toda familia de cerrados con la propiedad de la intersección finita tiene intersección no vacía. En 1914, el alemán Felix Hausdorff (1868–1942) introdujo el concepto de espacio topológico —que varía un poco del actual— y adoptó de los $L$-espacios la idea de compacidad. Actualmente, es bien sabido que no todo espacio topológico es compacto, por lo cual se buscó un procedimiento para extender a un espacio topológico no compacto en uno que sí lo sea.

En 1937, los matemáticos Eduard Čech (1893–1960) y Marshall Stone (1903–1989) construyeron [9, 27, sc.], de manera independiente, compactaciones Hausdorff de un espacio Tychonoff que, expresado con las nociones como actualmente las conocemos, resultan ser semejantes y que dominan a cualquier otra compactación Hausdorff del espacio. Dichas construcciones inspiraron, a mediados del siglo XX, el estudio de la clase de las compactaciones Hausdorff usando métodos topológicos, conjuntistas y algebraicos. El propósito de esta tesis es sintetizar los resultados obtenidos en dicho periodo y entender a la actualmente llamada compactación Stone-Čech mediante sus propiedades topológicas en vez de su construcción.

En el capítulo 1 se encuentra un pequeño repaso del concepto de compactación de un espacio, se presentan algunos ejemplos y se determinan las condiciones bajo las cuales un espacio topológico cuenta con una compactación Hausdorff. Se demuestra que todo espacio tiene una compactación con ayuda de la compactación de Alexandroff. Luego, se determinan las condiciones bajo las cuales dicha compactación es Hausdorff.

En el capítulo 2 recordaremos los conceptos de dominancia y semejanza entre compactaciones Hausdorff. Demostraremos que la semejanza se comporta como una relación de equivalencia en la clase $\mathcal{C}_2(X)$ de compactaciones Hausdorff de un espacio Tychonoff $X$. Como dicha clase resulta no ser un conjunto, desarrollaremos varios resultados inspirados por el alemán Andréi Tychonoff (1896–1982) que nos permitirán considerar subclases de $\mathcal{C}_2(X)$ que sí son conjuntos y que conserven fielmente las propiedades que $\mathcal{C}_2(X)$ posee relacionadas a los conceptos de semejanza y dominancia. Resultará que cada uno de esos conjuntos estará parcialmente ordenado —de hecho, formarán una semirretícula superiormente completa— mediante la relación de dominancia y contará con un máximo. Cada elemento de la colección de dichos máximos serán bautizados como compactaciones Hausdorff máximas de $X$ o compactaciones Stone-Čech.

Una vez introducida la noción de compactación Hausdorff máxima, en el capítulo 3, analizaremos algunos casos particulares de compactaciones Stone-Čech. En concreto, la de los naturales y los espacios ordinales.

Finalmente, en los apéndices, se reúnen varias propiedades relacionadas a ciertos elementos de los capítulos anteriores pero que se escapan del interés central del trabajo.

Diego David Rafael Rivera Osorio
Enero de 2019

# RUDIMENTOS DE TEORÍA DE CONJUNTOS Y TOPOLOGÍA GENERAL

En esta obra utilizaremos el sistema axiomático ZFC [v. 26, p. 9–18] para describir el comportamiento de los conceptos primitivos de conjunto y de pertenencia. Un requisito fundamental para seguir esta tesis sin tropiezos consiste en el manejo de la teoría de conjuntos. A continuación, estableceremos la notación que utilizaremos.

El símbolo $\doteqdot$ lo usaremos como sinónimo de las palabras «definido por». Como es usual en la literatura matemática, utilizaremos los símbolos $\in$, $\subseteq$, $\subset$ y $=$ para denotar la pertenencia, la contención, la contención estricta y la igualdad, respectivamente. Las relaciones opuestas son representadas por $\notin$, $\nsubseteq$, $\not\subset$ y $\neq$, respectivamente. Las operaciones binarias de unión, intersección, diferencia y producto cartesiano son identificadas con los símbolos $\cup$, $\cap$, $\setminus$ y $\times$, respectivamente. En el caso de la unión, la intersección y el producto cartesiano entre todos los elementos de una colección de conjuntos, se utilizan los símbolos $\bigcup$, $\bigcap$ y $\prod$, respectivamente.

El conjunto vacío está representado por $\emptyset$, la potencia de un conjunto $A$ la denotamos por $\wp(A)$ y el conjunto de funciones que van de $A$ en un conjunto $B$ es indicado con el símbolo $B^A$. Se utiliza la figura $f\colon A \to B$ como sinónimo de $f \in B^A$.

En relación a la clase de los ordinales y los cardinales, adoptamos los conceptos y la notación del título *Teoría de conjuntos. Curso intermedio* [2]. En particular, si $X$ es un conjunto y $\varkappa$ es un cardinal, entonces

$$\begin{aligned} & [X]^{<\varkappa} \doteqdot \{A \subseteq X : |A| < \varkappa\}, \\ & [X]^{\leq\varkappa} \doteqdot \{A \subseteq X : |A| \leq \varkappa\} \\ \text{y} \qquad & [X]^{=\varkappa} \doteqdot \{A \subseteq X : |A| = \varkappa\}. \end{aligned}$$

A continuación, reuniremos varios resultados básicos de la Topología General que nos serán de utilidad. La mayoría de los conceptos son tomados de los títulos *Elementos de*

*Topología General* [8] y *General Topology* [13]. Empezaremos con el concepto de producto diagonal de funciones, que nos permiten definir encajes bajo ciertas restricciones.

**0.0.1 Definiciones:** *Sean $W$ un espacio topológico y $S$ un conjunto no vacío. Supongamos que para cada $s \in S$ existe un espacio $X_s$ y una función $f_s\colon W \to X_s$ y consideremos a $\mathcal{F} \doteqdot \{f_s : s \in S\}$ y a $X = \prod\{X_s : s \in S\}$.*

(I) *El **producto diagonal** de $\mathcal{F}$, denotado por $\triangle\mathcal{F}$ es la función de $W$ en $X$ determinada por $\triangle\mathcal{F}(w)(s) = f_s(w)$ para toda $w \in W$ y $s \in S$.*

(II) *Decimos que $\mathcal{F}$ **separa puntos** de $W$ si para cualesquiera $x, y \in W$ distintos existe $s \in S$ tal que $f_s(x) \neq f_s(y)$.*

(III) *Decimos que $\mathcal{F}$ **genera a la topología** de $W$ si el conjunto cuyos elementos son de la forma $f_s^{-1}[U]$ con $s \in S$ y $U \in \mathcal{T}_s$ es una subbase para $W$.*

**0.0.2 Proposición:** *Sea $W$ un espacio topológico. Supongamos que para cada $s \in S$ existe una función $f_s\colon W \to X_s$, donde $X_s$ es un espacio topológico, y consideremos a $\mathcal{F} \doteqdot \{f_s : s \in S\}$.*

(I) *Si $W$ es $T_0$ y $\mathcal{F}$ genera a la topología de $W$, entonces $W$ separa puntos de $X$.*

(II) *Cada elemento de $\mathcal{F}$ es una función continua si y solamente si $\triangle\mathcal{F}$ es una función continua.*

**0.0.3 Teorema de la diagonal** [cf. 13, 2.3.20]**:** *Sean $W$ un espacio topológico y una función $f_s\colon W \to X_s$, donde $X_s$ es un espacio topológico, para cada $s \in S$. Si $\mathcal{F} \doteqdot \{f_s : s \in S\}$ separa puntos de $W$, entonces $\triangle\mathcal{F}$ es una función inyectiva. Además, si todos los elementos de $\mathcal{F}$ son funciones continuas y si $\mathcal{F}$ genera a la topología de $W$, entonces $\triangle\mathcal{F}$ es un encaje.*

Ahora, establezcamos que un espacio topológico $X$ es regular cuando para todo $x \in X$ y todo $F \subseteq X$ cerrado tal que $x \notin X$, existen $U, V \subseteq X$ abiertos y ajenos de tal manera que $x \in U$ y $F \subseteq U$. Más aún, si existe una $f\colon X \to [0,1]$ continua de tal manera que $f(x) = 0$ y $F \subseteq f^{-1}[\{1\}]$, entonces $X$ es completamente regular. Decimos que $X$ es normal cuando para cualesquiera $F, G \subseteq X$ cerrados y ajenos existen $U, V \subseteq X$ abiertos y ajenos tales que $F \subseteq U$ y $G \subseteq V$. Cuando $X$ es regular y $T_0$, decimos que $X$ es $T_3$. Cuando $X$ es completamente regular y $T_1$, decimos que $X$ es Tychonoff. Y cuando $X$ es normal y $T_1$, decimos que $X$ es $T_4$. Hacemos esta aclaración porque existen muchos textos cuya nomenclatura y notación difieren.

**0.0.4 Teorema de Tietze** [8, 6.21]**:** *Sea $X$ un espacio $T_1$. La normalidad en $X$ es equivalente a que toda función continua $f\colon G \to [0,1]$ es extendible a todo $X$ para cualquier $G \subseteq X$ cerrado.*

**0.0.5 Lema de Urysohn** [8, p. 188]**:** *Sea $X$ un espacio normal —no necesariamente $T_1$* [cf. 8, 6.1]—. Supongamos que $F$ y $G$ son conjuntos cerrados y ajenos de $X$. Entonces existe una función continua $f$ de $X$ en $[0,1]$ tal que $F \subseteq f^{-1}[\{0\}]$ y $G \subseteq f^{-1}[\{1\}]$.

A continuación, introduciremos los conceptos de conjuntos funcionalmente cerrados y funcionalmente abiertos y veremos algunas de sus propiedades. A un conjunto funcionalmente cerrado también se le conoce como conjunto cero o conjunto nulo y a un conjunto funcionalmente abierto como conjunto cocero o conulo.

**0.0.6 Definición:** *Sea $A \subseteq X$. Decimos que $A$ es un conjunto* ***funcionalmente cerrado*** *o* ***nulo*** *si existe una función continua $f\colon X \to [0,1]$ tal que $A = f^{-1}[\{0\}]$. Por otro lado, decimos que $A$ es un conjunto* ***funcionalmente abierto*** *o* ***conulo*** *si existe $B \subseteq X$ funcionalmente cerrado tal que $A = X \setminus B$.*

Es fácil probar que si $X$ es un espacio $T_1$, entonces $X$ es completamente regular si y solamente si $X$ admite una base para los cerrados de conjuntos funcionalmente cerrados. Además, en cada punto de cualquier espacio Tychonoff se puede encontrar una base de vecindades formada por conjuntos funcionalmente cerrados.

Los últimos resultados tienen que ver con varias desigualdades relacionadas a las funciones cardinales que nos serán de utilidad. Dichas funciones son el peso, la densidad, la celularidad, el esparcimiento o el *spread*, el grado de Lindelöf, la extensión o el *extent*, la densidad hereditaria, el grado de Lindelöf hereditario, el carácter, el pseudocarácter y la estrechez o el *tightness*. Sus definiciones —que son estándar entre la literatura matemática— así como la nomenclatura —que varía ligeramente entre autores— las adoptamos del artículo *Cardinal Functions I* de Hodel contenido en el título *Handbook of Set-Theoretic Topology* [19] y son repasadas en el apéndice C. Déjenos recalcar que todas las funciones cardinales se suponen infinitas.

**0.0.7 Teorema de Groot** [19, 3.3]: *Si $X$ es regular, entonces $w(X) \leq 2^{d(X)}$.*

**0.0.8 Teorema** [13, 3.12.7.(e) & 3.12.7.(f)]: *Para todo espacio $X$ sucede que*

(I) $\max\{hd(X), hL(X)\} \leq w(X) \leq o(X)$;

(II) $\max\{d(X), s(X)\} \leq hd(X)$;

(III) $\max\{s(X), L(X)\} \leq hL(X)$;

(IV) $c(X) \leq \min\{d(X), s(X)\}$;

(V) $e(X) \leq \min\{s(X), L(X)\}$;

(VI) $t(X) \leq \min\{hd(X), \chi(X)\}$;

(VII) $|X| \leq o(X)$ *siempre que $X$ sea $T_0$;*

(VIII) $\psi(X) \leq \chi(X)$ *siempre que $X$ sea $T_1$; y*

(IX) $\psi(X) \leq hL(X)$ *siempre que $X$ sea $T_2$.*

Decimos que un espacio $X$ es compacto si toda cubierta abierta de $X$ tiene una subcubierta finita. Si $X$ es compacto y $T_2$, entonces es $T_4$. Cabe señalar que existen varios textos donde la compacidad requiere que el espacio sea $T_2$. Existe una equivalencia a la compacidad en términos de familias con la propiedad de la intersección finita. Recordemos que una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de un conjunto $X$ tiene la propiedad de la intersección finita si $\mathcal{F} \neq \emptyset$ y si $\bigcap \mathcal{G} \neq \emptyset$ para toda $\mathcal{G} \in [\mathcal{F}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$.

**0.0.9 Teorema:** *Un espacio $X$ es compacto si y solamente si toda colección $\mathcal{F}$ de subconjuntos cerrados de $X$ con la propiedad de la intersección finita satisface que $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$.*

**0.0.10 Teorema** [19, 7.2]**:** *Si $X$ es compacto y $T_2$, entonces $\psi(X) = \chi(X)$.*

**0.0.11 Teorema** [19, 7.15]**:** *Si $X$ es compacto y $T_2$, entonces $t(X) \leq s(X)$.*

CAPÍTULO

# 1

# COMPACTACIONES

Recordemos que un espacio topológico $X$ es compacto si toda cubierta abierta tiene una subcubierta finita y que no todo espacio topológico es compacto, por ejemplo $\mathbb{R}^n$ con la topología euclidiana. Es fácil notar que un espacio $X$ es compacto si y solamente si toda colección de cerrados con la propiedad de la intersección finita tiene intersección no vacía. Entonces, si $X$ no es compacto, existe al menos una familia de cerrados con la propiedad de la intersección finita cuya intersección es vacía. De esta manera, podemos pensar intuitivamente que al agregar puntos al espacio para que dichas familias tengan intersección no vacía, estamos extendiendo a $X$ a un espacio $K$ compacto de tal manera que $X$ es denso en $K$. Esta idea inspira la siguiente noción.

**1.0.1 Definición:** *Sea $X$ un espacio topológico. Una* ***compactación*** *de $X$ es una pareja $(h, K)$ donde $K$ es un espacio compacto y $h\colon X \to K$ es un encaje con la propiedad de que $h[X]$ es denso en $K$. Si, además, $K$ es un espacio Hausdorff, decimos que $(h, K)$ es una* ***compactación Hausdorff*** *de $X$.*

La mayoría de las referencias citan a Constantin Carathéodory [7] como el primero en construir compactaciones, las cuales se remontan a 1913 y fueron de subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^2$. El primer método para generar compactaciones de un espacio topológico apareció en 1924 en los trabajos de Alexandroff [1]; retomamos su método en el siguiente teorema.

**1.0.2 Teorema:** *Sea $(X,\mathcal{T}_X)$ un espacio topológico y consideremos a $K = X \cup \{X\}$, a $\mathcal{T}_K$ la colección de subconjuntos de $K$ tales que si $X \in A$ entonces $X \setminus A$ es tanto cerrado como compacto en $X$ y si $X \notin A$ entonces $A \in \mathcal{T}_X$, y a $\iota\colon X \to K$ como la inclusión de $X$ en $K$. Entonces $(\iota, K)$ es una compactación de $X$ si y solamente si $X$ no es compacto.*

DEMOSTRACIÓN: [$\Rightarrow$] Supongamos, para generar una contradicción, que el espacio $X$ es compacto. Notemos que $\{X\}$ es un elemento de $\mathcal{T}_K$ Porque contiene a $X$ y porque $X = X \setminus \{X\}$ es compacto. Ésto significa que existe un abierto de $K$ que contiene a $\{X\}$ pero que no interseca a $X$ lo cual implica que $X$ no es un punto de acumulación de $X$, pero ésto es imposible porque $X = \iota[X]$ es denso en $K$.

[$\Leftarrow$] Primero demostraremos que $\mathcal{T}_K$ es una topología para $K$. Como $\emptyset \in \mathcal{T}_X$, tenemos que $\emptyset \in \mathcal{T}_K$. Además, $K \in \mathcal{T}_K$ por que $\emptyset$ es compacto en $X$.

Ahora, sean $A, B \in \mathcal{T}_K$. Si $X \in A$ y $X \in B$, entonces $X \setminus A$ y $X \setminus B$ son subconjuntos compactos de $X$, lo cual implica que $(X \setminus A) \cup (X \setminus B) = X \setminus (A \cap B)$ es compacto en $X$, pero como $X \in A \cap B$, tenemos que $A \cap B \in \mathcal{T}_K$. Si $X \notin A$ y $X \notin B$, entonces $A$ y $B$ son abiertos de $X$, por lo que $A \cap B$ también lo es y, al suceder que $X \notin A \cap B$, tenemos que $A \cap B \in \mathcal{T}_K$. Ahora, si $X \in A$ y $X \notin B$, entones $X \cap A = X \setminus (X \setminus A)$ y $B$ son subconjuntos abiertos de $X$, con lo que $A \cap B = (X \cap A) \cap B$ es abierto en $X$, haciendo que $A \cap B \in \mathcal{T}_K$ ya que $X \notin A \cap B$.

Para finalizar con la prueba de que $\mathcal{T}_K$ es una topología para $K$, sea $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{T}_K$. Consideremos a

$$\begin{aligned} &\mathcal{O}_{\in} = \{U \in \mathcal{O} : X \in U\} \\ \text{y a}\qquad &\mathcal{O}_{\notin} = \{U \in \mathcal{O} : X \notin U\}. \end{aligned}$$

Si $\mathcal{O}_{\in} = \emptyset$, es claro que $\bigcup \mathcal{O}_{\in} \in \mathcal{T}_K$. Pero si $\mathcal{O}_{\in} \neq \emptyset$, entonces $X \in \bigcup \mathcal{O}_{\in}$ y, como $X \setminus U$ es compacto en $X$ para cada $U \in \mathcal{O}_{\in}$, sucede que $X \setminus \bigcup \mathcal{O}_{\in} = \bigcap \{X \setminus U : U \in \mathcal{O}_{\in}\}$ es compacto en $X$, con lo que $\bigcup \mathcal{O}_{\in} \in \mathcal{T}_K$. Por otro lado, notemos que $X \notin \bigcup \mathcal{O}_{\notin}$ y que $\bigcup \mathcal{O}_{\notin} \in \mathcal{T}_X$ porque $U \in \mathcal{T}_X$ para toda $U \in \mathcal{O}_{\notin}$, con lo que $\bigcup \mathcal{O}_{\notin} \in \mathcal{T}_K$. Para ver que $\bigcup \mathcal{O} \in \mathcal{T}_K$, basta ver que $(\bigcup \mathcal{O}_{\in}) \cup (\bigcup \mathcal{O}_{\notin}) \in \mathcal{T}_K$. Si $X \in (\bigcup \mathcal{O}_{\in}) \cup (\bigcup \mathcal{O}_{\notin})$, necesariamente sucede que $X \in \bigcup \mathcal{O}_{\in}$, que $X \notin \bigcup \mathcal{O}_{\notin}$ y, por lo tanto, que $X \setminus \bigcup \mathcal{O}_{\in}$ sea compacto en $X$ y que $\bigcup \mathcal{O}_{\notin}$ sea abierto en $X$. Como $X \setminus \bigcup \mathcal{O}_{\in}$ es cerrado en $X$, tenemos que $X \setminus ((\bigcup \mathcal{O}_{\in}) \cup (\bigcup \mathcal{O}_{\notin})) = (X \setminus \bigcup \mathcal{O}_{\in}) \cap (X \setminus \bigcup \mathcal{O}_{\notin})$ es un subconjunto cerrado de $X \setminus \bigcup \mathcal{O}_{\in}$, haciendo que $X \setminus ((\bigcup \mathcal{O}_{\in}) \cup (\bigcup \mathcal{O}_{\notin}))$ sea compacto. Por otro lado, si $X \notin (\bigcup \mathcal{O}_{\in}) \cup (\bigcup \mathcal{O}_{\notin})$, necesariamente sucede que $\bigcup \mathcal{O}_{\in} = \emptyset$. Notemos que en cualquiera de los dos casos podemos concluir que $(\bigcup \mathcal{O}_{\in}) \cup (\bigcup \mathcal{O}_{\notin}) \in \mathcal{T}_K$. Por lo tanto, $\mathcal{T}_K$ es una topología para $K$.

Ahora veremos que $K$ es compacto. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de $K$. Sea $U \in \mathcal{U}$ de tal manera que $X \in U$ y consideremos a $\mathcal{V} = \mathcal{U} \setminus \{U\}$. Como $U \in \mathcal{T}_K$, tenemos que $X \setminus U$ es compacto y, al ser $\mathcal{V}$ una cubierta abierta de $X \setminus U$, existe $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$ finita que es cubierta de $X \setminus U$. Notemos que $\mathcal{V}' \cup \{U\}$ es una cubierta finita de $K$ tal que $\mathcal{V}' \cup \{U\} \subseteq \mathcal{U}$.

Para finalizar, veremos que $\iota$ es un encaje y que $\iota[X]$ es denso en $K$. Notemos que la topología que $X$ hereda como subespacio de $K$ coincide con $\mathcal{T}_X$, lo cual implica que $\iota$ es un encaje. Es claro que $\mathcal{T}_X \subseteq \mathcal{T}_K$, con lo cual, todo elemento de $\mathcal{T}_X$ es un elemento de la topología que $X$ hereda como subespacio de $K$. Ahora, sea $U \in \mathcal{T}_K$. Si $\mathsf{X} \in U$, tenemos que $X \setminus U$ es compacto en $X$. Como $X \setminus U$ es cerrado, sucede que $X \cap U = X \setminus (X \setminus U)$ es abierto en $X$. Por otro lado, si $\mathsf{X} \notin U$, tenemos que $U \subseteq X$ y que $U \in \mathcal{T}_X$. En resumen, todo elemento de la topología que $X$ hereda como subespacio de $K$ es un elemento de $\mathcal{T}_X$. Para ver que $\iota[X]$ es denso en $K$, basta ver que todo abierto que contiene a $\mathsf{X}$ interseca a $X$. Sea $U \in \mathcal{T}_K$ tal que $\mathsf{X} \in U$, entonces $X \setminus U$ es compacto en $X$. Como $X$ no es compacto, tenemos que $X \setminus U \subset X$, o equivalentemente, que $X \cap U \neq \emptyset$. ⊠

La siguiente noción hace honor a Alexandroff.

**1.0.3 Definición:** *La **compactación de Alexandroff** o **compactación unipuntual** de un espacio $X$ no compacto es la pareja $(\alpha, \alpha X)$ donde $\alpha X = X \cup \{\mathsf{X}\}$ está dotado de la topología $\mathcal{T}$ con la propiedad de que $A \in \mathcal{T}$ si y solamente si $\mathsf{X} \in A$ implica que $X \setminus A$ es cerrado y compacto en $X$ y si $\mathsf{X} \notin A$ implica que $A$ es abierto en $X$; y donde $\alpha : X \to \alpha X$ es la inclusión de $X$ en $\alpha X$.*

Notemos que si $X$ es un espacio compacto, entonces $(\mathrm{id}_X, X)$ es una compactación de $X$. Esta observación, junto con la construcción de la compactación de Alexandroff de un espacio no compacto, nos permiten asegurar que todo espacio topológico tiene una compactación.

## § 1.1

## Compactaciones Hausdorff

Sea $X$ un espacio topológico y supongamos que $(h, K)$ es una compactación Hausdorff de $X$. Como $K$ es compacto y Hausdorff, $K$ es $T_4$ y por ello $K$ es Tychonoff. Dado que $h[X]$ es un subespacio de $K$ homeomorfo a $X$, tenemos que $X$ debe ser Tychonoff. De hecho, la condición de que $X$ sea Tychonoff es necesaria y suficiente para que exista una compactación Hausdorff de $X$. Para demostrar dicha afirmación, introduciremos a los llamados cubos de Tyhonoff, que fueron primeramente construidos en 1930 [29] por el matemático Andrey Tychonoff (1906–1993).

**1.1.1 Definición:** *Sea $\kappa$ un cardinal infinito. El **cubo de Tychonoff** de peso $\kappa$, denotado por $I^\kappa$, es el producto cartesiano $[0,1]^\kappa$ dotado de la topología producto donde $[0,1]$ tiene la topología euclidiana.*

El siguiente teorema fue publicado por Tychonoff en su famoso artículo de 1930 titulado *Über die topologische Erweiterung von Räumen* [29] y exhibe una propiedad universal con la que cuentan los cubos de Tychonoff. Recordemos que un espacio topológico $X$ es universal para todo los espacios topológicos con cierta propiedad si cualquier espacio con la propiedad en cuestión es homeomorfo a un subespacio de $X$.

**1.1.2 Teorema:** *Sea $\varkappa$ un cardinal infinito. El cubo de Tychonoff de peso $\varkappa$ es universal para todos los espacios Tychonoff de peso $\varkappa$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $X$ un espacio Tychonoff de peso $\varkappa$. Como los conjuntos funcionalmente abiertos de un espacio Tychonoff forman una base y como $w(I^{\varkappa}) = \varkappa$ por el teorema A.2.1, existe una base $\mathcal{B}$ de $X$ cuya cardinalidad no es mayor a $\varkappa$ y cuyos elementos son funcionalmente abiertos en $X$. Para cada $B \in \mathcal{B}$, fijemos $f_B : X \to [0,1]$ continua tal que $f_B^{-1}\big[[0,1)\big] = B$. Entonces $\triangle\{f_B : B \in \mathcal{B}\} : X \to [0,1]^{\mathcal{B}}$ es continua. Además, como $X$ es un espacio $T_0$ y

$$\mathcal{B} \subseteq \{f_B^{-1}[U] : B \in \mathcal{B} \wedge U \in \mathcal{T}_e\},$$

invocando a la proposición 0.0.2 y al teorema de la diagonal, deducimos que $X$ es homeomorfo a un subespacio de $I^{\varkappa}$, ya que $[0,1]^{\mathcal{B}}$ es homeomorfo a $I^{|\mathcal{B}|}$ y éste, claramente, es encajable en $I^{\varkappa}$, debido a que $|\mathcal{B}| \leq \varkappa$. ⊠

Del teorema anterior se deriva el siguiente.

**1.1.3 Teorema:** *Sea $X$ un espacio topológico. Entonces existe un espacio $Y$ tanto compacto como Hausdorff y un encaje $f: X \to Y$ tal que $f[X]$ es denso en $Y$ si y solamente si $X$ es Tychonoff.*

DEMOSTRACIÓN: $[\Rightarrow]$ Notemos que, al ser $Y$ compacto y Hausdorff, podemos deducir que es Tychonoff. Ahora, como $Y$ tiene un subespacio denso homeomorfo a $X$ y como la propiedad de ser un espacio Tychonoff es hereditaria y topológica, deducimos que $X$ es un espacio Tychonoff.

$[\Leftarrow]$ Recordemos que el peso de cualquier espacio topológico es infinito, por lo que tiene sentido hablar del cubo de Tychonoff de peso $w(X)$. Como dicho espacio es universal para los espacios Tychonoff de peso $w(X)$, existe un subespacio $Y^\flat$ de $I^{w(X)}$ homeomorfo a $X$. Si consideramos a $Y$ como la cerradura de $Y^\flat$ en $I^{w(X)}$, tenemos que $Y$ es un espacio tanto compacto como Hausdorff que tiene un subespacio denso homeomorfo a $X$, a saber, el subespacio $Y^\flat$. ⊠

Justificados por el teorema anterior, tendremos como supuesto hasta el final de este capítulo que $X$ es un espacio Tychonoff.

Antes de presentar un ejemplo de compactación Hausdorff, recordemos que todo subconjunto compacto de un espacio Hausdorff es cerrado, con lo cual se deduce la siguiente proposición.

**1.1.4 Proposición:** *Supongamos que $(h, K)$ es una compactación Hausdorff de $X$. Si $X$ es compacto, entonces $X$ y $K$ son homeomorfos.*

DEMOSTRACIÓN: Como $X$ es compacto y $h$ es un encaje, tenemos que $h[X]$ es un subconjunto compacto de $K$. Al ser $K$ un espacio Hausdorff, tenemos que $h[X]$ es cerrado, pero como $h[X]$ es denso en $K$, tenemos que $h[X] = K$. Por lo tanto, $h$ es un homeomorfismo. ⊠

Recordemos que en la sección pasada demostramos que todo espacio no compacto tiene al menos una compactación. El siguiente teorema determina las condiciones bajo las cuales la compactación de Alexandroff de un espacio no compacto es una compactación Hausdorff.

**1.1.5 Proposición:** *Supongamos que $X$ es un espacio no compacto. La compactación de Alexandroff de $X$ es Hausdorff si y solamente si $X$ es Hausdorff y localmente compacto.*

Demostración: [$\Rightarrow$] Sea $x \in X$. Como $\alpha X$ es $T_2$, existen $U$ y $V$ abiertos de $\alpha X$ tal que $x \in U$ y $X \in V$. Entonces $X \setminus V$ es compacto y notemos que, como $x \in U \subseteq X \setminus V$, tenemos que $X \setminus V$ es una vecindad compacta de $x$ en $X$.

[$\Leftarrow$] Sean $x, y \in \alpha X$ distintos. Como $\alpha X = X \cup \{X\}$ y $X$ es Tychonoff y, por lo tanto, Hausdorff, basta analizar el caso en que $x \in X$ y $y = X$. Notemos que, al ser $X$ localmente compacto, existe una vecindad compacta $V$ de $x$ en $X$. Por lo tanto, $\alpha X \setminus V$ es un abierto que contiene a $X$. Finalmente, al ser $V$ una vecindad de $x$ en $X$, existe $U \subseteq V$ abierto tal que $x \in U \subseteq V$, por lo que es un abierto de $\alpha X$ ajeno a $\alpha X \setminus V$. ⊠

De la proposición anterior y del hecho de que todo espacio tiene una compactación, podemos deducir que todo espacio Hausdorff y localmente compacto es homeomorfo a un subconjunto de un espacio compacto y Hausdorff. Pero como todo espacio compacto y Hausdorff es $T_4$, lo cual implica que es $T_{3.5}$, y como $T_{3.5}$ es una propiedad hereditaria, el siguiente corolario es verdadero.

**1.1.6 Corolario:** *Todo espacio Hausdorff localmente compacto es Tychonoff.*

Existe una propiedad con la que cuentan las compactaciones Hausdorff relacionada a la compacidad local.

**1.1.7 Proposición:** *Supongamos que $(h, K)$ es una compactación Hausdorff de $X$. Entonces $h[X]$ es abierto en $K$ si y solamente si $X$ es localmente compacto.*

Demostración: [$\Rightarrow$] Demostraremos que $h[X]$ es localmente compacto, lo cual implica, al ser $h$ un encaje, que $X$ es localmente compacto. Sea $p \in h[X]$. Como $K$ es un espacio regular, ya que al ser Hausdorff y compacto sucede que es $T_4$, y $h[X]$ es un abierto de $K$ que contiene a $p$, existe un abierto $U$ de $K$ tal que

$$p \in U \subseteq \mathrm{cl}_K(U) \subseteq h[X].$$

Como $K$ es compacto, tenemos que $\mathrm{cl}_K(U)$ es compacto en $K$ y, como $U \subseteq \mathrm{cl}_K(U) \subseteq h[X]$, entonces $\mathrm{cl}_K(U)$ es una vecindad compacta de $p$ en $h[X]$.

[$\Leftarrow$] Como $h$ es un encaje, tenemos que $h[X]$ es localmente compacto. Sea $p \in h[X]$, entonces existe $U \subseteq h[X]$ abierto en $h[X]$ tal que $p \in U$ y $\mathrm{cl}_{h[X]}(U)$ es compacto en $h[X]$. Gracias a lo último sucede que $\mathrm{cl}_{h[X]}(U)$ es compacto en $K$ y, como $K$ es $T_2$, deducimos que

$\mathrm{cl}_{h[X]}(U)$ es cerrado en $K$. Ahora, sea $V \subseteq K$ abierto de tal manera que $U = h[X] \cap V$. Como $h[X]$ es denso en $K$, tenemos que

$$\mathrm{cl}_K(V) = \mathrm{cl}_K(h[X] \cap V) = \mathrm{cl}_K(U).$$

Al ser $\mathrm{cl}_{h[X]}(U)$ un cerrado de $K$ que contiene a $U$, tenemos que

$$\mathrm{cl}_K(U) \subseteq \mathrm{cl}_{h[X]}(U).$$

Entonces sucede que

$$p \in V \subseteq \mathrm{cl}_K(V) = \mathrm{cl}_K(U) \subseteq \mathrm{cl}_{h[X]}(U) \subseteq h[X].$$

Como $V$ es abierto en $K$, concluimos que $h[X]$ es abierto en $K$. ⊠

§ 1.2

## La compactación de Čech

En 1937, el matemático checo Eduard Čech (1893–1960) construyó una compactación Hausdorff de $X$ inspirándose en el teorema 1.1.2 que Tychonoff demostró 7 años atrás [9]. El siguiente teorema está inspirado en dicha compactación.

**1.2.1 Teorema:** *Sea $X$ un espacio Tychonoff y supongamos que $\beta \colon X \to [0,1]^{C(X,[0,1])}$ es el producto diagonal $\triangle C(X,[0,1])$ y que $\beta X$ es la cerradura del conjunto $\beta[X]$ en el producto cartesiano $[0,1]^{C(X,[0,1])}$. Entonces la pareja $(\beta, \beta X)$ es una compactación Hausdorff de $X$.*

DEMOSTRACIÓN: Primero notemos que $\beta$ es continua. Ahora, como $X$ es de Tychonoff, los conjuntos funcionalmente abiertos forman una base de $X$, lo cual implica que $C(X,[0,1])$ genera a la topología de $X$ y, al ser $X$ un espacio $T_0$, tenemos que $C(X,[0,1])$ separa puntos de $X$. Entonces, por el teorema de la diagonal, tenemos que $\beta$ es un encaje. Finalmente, notemos que $\beta X$ es tanto compacto como Hausdorff ya que es cerrado en el espacio de las funciones de $C(X,[0,1])$ en $[0,1]$, el cual resulta ser compacto y Hausdorff porque $[0,1]$ es compacto y Hausdorff. En conclusión, la pareja $(\beta, \beta X)$ es una compactación Hausdorff de $X$. ⊠

Con el teorema anterior queda justificada la siguiente noción.

**1.2.2 Definición:** *La **compactación de Čech** o **compactación Stone-Čech** de $X$ es la pareja $(\beta, \beta X)$ donde $\beta \colon X \to [0,1]^{C(X,[0,1])}$ es el producto diagonal $\triangle C(X,[0,1])$ y donde $\beta X$ es la cerradura de $\beta[X]$ en el producto cartesiano $[0,1]^{C(X,[0,1])}$.*

El uso de la letra griega β para denotar a la compactación de Čech es estándar en la literatura matemática y surge del mismísimo Čech. De acuerdo con W. W. Comfort [11], es posible que la haya derivado de la palabra *bicompact* —*bicompacto* en español; como antes se le conocía a la compacidad— o que simplemente sirviera para diferenciarla de la notación $\alpha X$ de la compactación de Alexandroff. La aparición del apellido Stone en el nombre será explicada más adelante. A continuación, reuniremos varias propiedades de la compactación de Čech —la siguiente inspira la noción de dominancia entre compactaciones—.

**1.2.3 Teorema:** *Si $(h, K)$ es una compactación Hausdorff de $X$, entonces existe una función continua $\phi\colon \beta X \to K$ tal que $\phi \circ \beta = h$.*

Demostración: Sea $(h, K)$ una compactación Hausdorff de $X$. Como $K$ es un espacio Tychonoff, la familia $\mathcal{F} \doteq C(K, [0,1])$ genera a la topología de $K$ y separa puntos de $K$. Por lo tanto, $\triangle\mathcal{F}\colon K \to [0,1]^{C(K,[0,1])}$ es un encaje.

Consideremos a $\Theta\colon [0,1]^{C(X,[0,1])} \to [0,1]^{C(K,[0,1])}$ dada por

$$\Theta(F)(g) = F(g \circ h),$$

para cualesquiera $F \in [0,1]^{C(X,[0,1])}$ y $g \in C(K, [0,1])$, la cual resulta ser continua porque

$$\Theta \circ y_g = x_{g\circ h}$$

donde $y_g\colon [0,1]^{C(X,[0,1])} \to [0,1]$ y $x_{g\circ h}\colon [0,1]^{C(X,[0,1])} \to [0,1]$ son las proyecciones asociadas a $g$ y a $g \circ h$, respectivamente, con $g \in C(K, [0,1])$.

Demostraremos que $\Theta\left[\beta X\right] \subseteq \triangle\mathcal{F}[K]$ y que $\Theta \circ \beta = \triangle\mathcal{F} \circ h$. En efecto, notemos que si $\Theta\left[\beta[X]\right] \subseteq \triangle\mathcal{F}[K]$, entonces $\Theta\left[\beta X\right] \subseteq \triangle\mathcal{F}[K]$ porque β es continua, $\beta X$ es la cerradura de $\beta[X]$ en $[0,1]^{C(X,[0,1])}$ y $\triangle\mathcal{F}[K]$ es cerrado en $[0,1]^{C(K,[0,1])}$. En virtud de lo anterior, bastará probar que $\Theta\left[\beta[X]\right] \subseteq \triangle\mathcal{F}[K]$. Para ello, supongamos que $x \in X$. Probemos que $\Theta(\beta(x)) = \triangle\mathcal{F}(h(x))$. Sea $g \in C(K, [0,1])$ y veamos que

$$\begin{aligned}\Theta(\beta(x))(g) &= \beta(x)(g \circ h) = \triangle C(X, [0,1])(x)(g \circ h) = \\ &= (g \circ h)(x) = g(h(x)) = \triangle C(K, [0,1])(h(x))(g) = \\ &= \triangle\mathcal{F}(h(x))(g).\end{aligned}$$

Entonces $\Theta(\beta(x)) \in \triangle\mathcal{F}[K]$. Más aún, al ser $x \in X$ arbitrario, logramos demostrar que $\Theta\left[\beta[X]\right] \subseteq \triangle\mathcal{F}[K]$ y que $\Theta \circ \beta = \triangle\mathcal{F} \circ h$. Por lo tanto, si $\phi\colon \beta X \to K$ está dada por

$$\phi(p) = \left(\triangle\mathcal{F}\right)^{-1}\left(\Theta(p)\right)$$

para toda $p \in \beta X$, entonces $\phi$ es una función continua tal que $\phi \circ \beta = h$. ⊠

En el teorema 1.1.2, Tychonoff restringió el número de factores por los que multiplicar el espacio $[0,1]$ para obtener un espacio de peso exactamente $w(X)$, usando la misma técnica, Čech utiliza tantos factores como elementos en $C(X,[0,1])$ con el propósito de que $(\beta,\beta X)$ tenga la propiedad de que para toda función continua $f\colon X\to[0,1]$ existe una función continua $F\colon \beta X\to[0,1]$ tal que $F\circ\beta=f$. Dicha propiedad la podemos deducir del siguiente teorema.

**1.2.4 Teorema:** *Sea $(\rho,\rho X)$ una compactación Hausdorff de $X$. Entonces para toda compactación Hausdorff $(n,P)$ de $X$ existe una función continua $\phi\colon \rho X\to P$ tal que $\phi\circ\rho=n$ si y solamente si para toda función continua $f\colon X\to K$ con $K$ un espacio compacto existe una función continua $F\colon \rho X\to K$ tal que $F\circ\rho=f$.*

DEMOSTRACIÓN: $[\Rightarrow]$ Sea $f\colon X\to K$ continua con $K$ un espacio compacto. Como $\rho\colon X\to\rho X$ es un encaje, la familia $\mathcal{F}\doteq\{\rho,f\}$ genera a la topología de $X$ y separa puntos de $X$. Por el teorema de la diagonal, la función $\triangle\mathcal{F}\colon X\to\rho X\times K$ es un encaje. Consideremos a $P$ como la cerradura de $\triangle\mathcal{F}[X]$ en $\rho X\times K$ y a $n=\triangle\mathcal{F}$, entonces, como $\rho X\times K$ es compacto, la pareja $(n,P)$ es una compactación Hausdorff de $X$. Por lo tanto, existe una función continua $\phi\colon\rho X\to P$ tal que $\phi\circ\rho=n$. Sea $G\colon P\to K$ la proyección de $\rho X\times K$ asociada a $K$ restringida a $P$ y sea $F=G\circ\phi$. Notemos que la continuidad de $G$ implica la de $F$ y, como para toda $x\in X$ sucede que

$$\begin{aligned}(F\circ\rho)(x) &= (G\circ\phi\circ\rho)(x)=(G\circ n)(x)=\\ &= G(\triangle\mathcal{F}(x))=G(\rho(x),f(x))=\\ &= f(x),\end{aligned}$$

concluimos que $F\circ\rho=f$.

$[\Leftarrow]$ Sea $(n,P)$ una compactación Hausdorff de $X$. Como $n\colon X\to P$ es una función continua y $P$ es compacto. Existe $\phi\colon\rho X\to P$ continua tal que $\phi\circ\rho=n$. ⊠

Čech también demostró el siguiente corolario —el cual inspira la noción de semejanza entre compactaciones— y nosotros lo podemos deducir del teorema anterior.

**1.2.5 Corolario:** *Sean $(h_1,K_1)$ y $(h_2,K_2)$ compactaciones Hausdorff de $X$ tales que para toda función contiuna $f\colon X\to[0,1]$ existe $F_i\colon K_i\to[0,1]$ continua de tal manera que $F_i=f\circ h_i$ para cada $i\in\{1,2\}$. Entonces existe un homeomorfismo $\phi\colon K_1\to K_2$ tal que $\phi\circ h_1=h_2$.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema 1.2.4 existen funciones continuas $\phi_1\colon K_1\to K_2$ y $\phi_2\colon K_2\to K_1$ tales que $\phi_1\circ h_1=h_2$ y $\phi_1\circ_2=h_1$. Como $\phi_2\circ\phi_1\circ h_1=h_1$, sucede que $\mathrm{id}_{K_1}$ y $\phi_2\circ\phi_1$ restringidas a $h_1[X]$ coinciden, pero al ser $h_1[X]$ denso en $K_1$ y al ser $K_1$ un espacio Hausdorff, tenemos que $\phi_2\circ\phi_1=\mathrm{id}_{K_1}$. Análogamente deducimos que $\phi_1\circ\phi_2=\mathrm{id}_{K_2}$. En consecuencia, $\phi_1$ es un homeomorfismo. ⊠

§ 1.3

## La compactación de Stone

En su artículo *Applications of the Theory of Boolean Rings to General Topology* de 1937 [27], el matemático M. H. Stone (1903–1989) construyó una compactación Hausdorff de un espacio Tychonoff introduciendo una topología en el conjunto de ideales maximales de un álgebra booleana. Nosotros aplicaremos su construcción a una clase más amplia de anillos.

Permítanos recordar que un conjunto $R$ es un anillo o anillo con unidad si implícitamente existen unas funciones $+, \cdot \colon R \times R \to R$ conocidas como adición o suma y multiplicación o producto, respectivamente. Dichas funciones deben ser tales que $(R, +)$ sea un grupo abeliano, que $(R, \cdot)$ sea un monoide y que la multiplicación sea distributiva sobre la suma. Si, además, la multiplicación es conmutativa, entonces decimos que $R$ es un anillo conmutativo. En textos de la primera mitad del siglo XX [24, 31, 33], un anillo no necesariamente contaba con un neutro multiplicativo y, en caso de que existiera, pasaba a ser un anillo con unidad. En la literatura actual [3, 4, 6], siempre se pide que el conjunto sobre el que está definido el anillo y la multiplicación formen un monoide, lo cual implica la existencia del neutro multiplicativo, es decir, todo anillo es un anillo con unidad. En lo ulterior, nos referiremos a los anillos como anillos con unidad, únicamente para mitigar la nostalgia.

Finalmente, recordemos que un subconjunto $I$ de un anillo $R$ es un ideal si $(I, +)$ es un subgrupo de $(R, +)$ y si $a \cdot I = I \cdot a = I$ para toda $a \in R$. Además, si $I \neq R$, decimos que $I$ es un ideal propio. Por otro lado, decimos que $I$ es un ideal maximal de $R$ si $I$ es un ideal propio de $R$ que no está contenido en algún otro ideal propio de $R$. Al conjunto de ideales maximales de $R$ lo denotamos por $\mathscr{M}(R)$. Para la prueba de la siguiente proposición también necesitamos recordar que un ideal propio $I$ de $R$ es un ideal primo si $a \cdot b \in I$ para algunos $a, b \in R$ implica que $a \in I$ o $b \in I$.

**1.3.1 Proposición:** *Sea $R$ un anillo conmutativo con unidad. Para cada $\mathcal{H} \subseteq \mathscr{M}(R)$, definamos a*

$$\operatorname{cl}(\mathcal{H}) = \left\{M \in \mathscr{M}(R) : \bigcap \mathcal{H} \subseteq M\right\}.$$

*Entonces el operador* cl *es un operador de Kuratowski.*

Demostración: Recordemos que una función $\eta \colon \wp(X) \to \wp(X)$, donde $X$ es un conjunto no vacío, es un operador de Kuratowski si $\eta(\emptyset) = \emptyset$ y si para cualesquiera $E$ y $F$ subconjuntos de $X$ sucede que $E \subseteq \eta(E)$, $\eta(\eta(E)) = \eta(E)$ y $\eta(E \cup F) = \eta(E) \cup \eta(F)$. En virtud de lo anterior, notemos que $\operatorname{cl}(\emptyset) = \emptyset$ porque $\bigcap \emptyset$ no es un conjunto [21, p. 13].

Sea $\mathcal{E} \subseteq \mathscr{M}(R)$. Demostraremos que $\mathcal{E} \subseteq \operatorname{cl}(\mathcal{E})$. Si $\mathcal{E} = \emptyset$, es claro que $\mathcal{E} \subseteq \operatorname{cl}(\mathcal{E})$. Ahora, supongamos que $\mathcal{E} \neq \emptyset$. Sea $M \in \mathcal{E}$ y notemos que $\bigcap \mathcal{E} \subseteq M$, lo cual implica que $M \in \operatorname{cl}(\mathcal{E})$.

Por lo tanto $\mathcal{E} \subseteq \mathrm{cl}(\mathcal{E})$.

Ahora demostraremos que $\mathrm{cl}(\mathcal{E}) = \mathrm{cl}(\mathrm{cl}(\mathcal{E}))$. Por el párrafo anterior, basta demostrar que $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(\mathcal{E})) \subseteq \mathrm{cl}(\mathcal{E})$. Sea $M \in \mathrm{cl}(\mathrm{cl}(\mathcal{E}))$. Entonces $\bigcap \mathrm{cl}(\mathcal{E}) \subseteq M$ y notemos que si $\bigcap \mathcal{E} \subseteq \mathrm{cl}(\mathcal{E})$, sucede que $\bigcap \mathcal{E} \subseteq M$, lo cual implica que $M \in \mathrm{cl}(\mathcal{E})$. En virtud de lo anterior, sea $x \in \bigcap \mathcal{E}$. Como $x \in N$ para toda $N \in \mathscr{M}(R)$ tal que $\bigcap \mathcal{E} \subseteq N$, entoces $x \in \mathrm{cl}(\mathcal{E})$.

Finalmente, sea $\mathcal{G} \subseteq \mathscr{M}(R)$. Demostraremos que $\mathrm{cl}(\mathcal{E} \cup \mathcal{G}) = \mathrm{cl}(\mathcal{E}) \cup \mathrm{cl}(\mathcal{G})$. Primero notemos que $\mathrm{cl}(\mathcal{E}) \cup \mathrm{cl}(\mathcal{G}) \subseteq \mathrm{cl}(\mathcal{E} \cup \mathcal{G})$ porque para toda $M \in \mathscr{M}(R)$ tal que $\bigcap \mathcal{E} \subseteq M$ o $\bigcap \mathcal{G} \subseteq M$ sucede que $\bigcap(\mathcal{E} \cup \mathcal{G}) \subseteq M$. Ahora, sea $M \in \mathrm{cl}(\mathcal{E} \cup \mathcal{G})$, lo cual implica que $\bigcap(\mathcal{E} \cup \mathcal{G}) \subseteq M$. Notemos que si $x \in \bigcap \mathcal{E}$ y $y \in \bigcap \mathcal{G}$, sucede que $x \cdot y \in M$ ya que $\bigcap \mathcal{E}$ y $\bigcap \mathcal{G}$ son ideales de $R$ y $\bigcap(\mathcal{E} \cup \mathcal{G}) = \left(\bigcap \mathcal{E}\right) \cap \left(\bigcap \mathcal{G}\right)$. Como todo ideal maximal es un ideal primo, deducimos que $x \in M$ o $y \in M$. Por lo tanto, $\bigcap \mathcal{E} \nsubseteq M$ implica que $\bigcap \mathcal{G} \subseteq M$ y, por otro lado, $\bigcap \mathcal{G} \nsubseteq M$ implica que $\bigcap \mathcal{E} \subseteq M$. En consecuencia, $\bigcap \mathcal{E} \subseteq M$ o $\bigcap \mathcal{G} \subseteq M$, lo cual es suficiente para que $M \in \mathrm{cl}(\mathcal{E}) \cup \mathrm{cl}(\mathcal{G})$. ⊠

Dado un anillo $R$ conmutativo con unidad, el ***espacio estructural*** de $R$ es el espacio topológico $(\mathscr{M}(R), \mathcal{T})$ donde $\mathcal{T}$ es la topología en $\mathscr{M}(R)$ con la propiedad de que la cerradura de todo subconjunto $\mathcal{H}$ de $\mathscr{M}(R)$ es el conjunto $\mathrm{cl}(\mathcal{H})$ descrito en la proposición anterior. El hecho de que $\mathcal{T}$ sea, en efecto, una topología en $\mathscr{M}(R)$ se sigue de la proposición anterior [8, 2.24].

Para cada elemento $a \in R$ consideremos a

$$\mathcal{C}_R(a) = \left\{M \in \mathscr{M}(R) : a \in M\right\},$$

es decir, $\mathcal{C}_R(a)$ es la colección de ideales maximales de $R$ que contienen a $a$. A continuación, enunciamos algunas propiedades de los conjuntos $\mathcal{C}_R(a)$ relacionadas al espacio estructual $\mathscr{M}(R)$.

**1.3.2 Proposición:** *Sea $R$ un anillo conmutativo con unidad. Para todo $\mathcal{H} \subseteq \mathscr{M}(R)$,*

$$\mathrm{cl}(\mathcal{H}) = \bigcap\left\{\mathcal{C}_R(a) : a \in \bigcap \mathcal{H}\right\}.$$

*Por lo tanto, el conjunto $\left\{\mathcal{C}_R(a) : a \in R\right\}$ es una base para los cerrados del espacio estructural $\mathscr{M}(R)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $\mathcal{H} \subseteq \mathscr{M}(R)$ y $M \in \mathscr{M}(R)$. Notemos que $M \in \mathrm{cl}(\mathcal{H})$ si y solamente si $a \in M$ para toda $a \in \bigcap \mathcal{H}$, lo cual es equivalente a que $M \in \mathcal{C}_R(a)$ para toda $a \in \bigcap \mathcal{H}$. Por lo tanto

$$\mathrm{cl}(\mathcal{H}) = \bigcap\left\{\mathcal{C}_R(a) : a \in \bigcap \mathcal{H}\right\}.$$

Finalmente, como todo cerrado $F$ del espacio estructural $\mathscr{M}(R)$ es tal que $F = \mathrm{cl}(F)$, por el resultado anterior podemos deducir que todo cerrado de $\mathscr{M}(R)$ es la intersección de una colección de elementos de $\left\{\mathcal{C}_R(a) : a \in R\right\}$. ⊠

Con ayuda de la proposición anterior podemos exhibir una condición que satisfacen todo par de espacios estructurales cuando los anillos sobre los que están definidos son isomorfos.

**1.3.3 Teorema:** *Sean $R$ y $S$ anillos conmutativos con unidad. Si $h\colon R \to S$ es un isomorfismo de anillos, entonces la función $H\colon \mathcal{M}(R) \to \mathcal{M}(S)$ dada por*

$$H(M) = h[M]$$

*para toda $M \in \mathcal{M}(R)$ es un homeomorfismo.*

Demostración: Primero veamos que $H$ está bien definida porque, al ser $h$ un isomorfismo de anillos, la imagen bajo $h$ de un ideal maximal de $R$ es un ideal maximal en $S$. Ahora, notemos que $\phi$ es biyectiva porque $h$ es biyectiva. Además, como

$$\begin{aligned} & H\big[\mathcal{C}_R(r)\big] = \mathcal{C}_S\big(h(r)\big) \\ \text{y} \qquad & H^{-1}\big[\mathcal{C}_S(s)\big] = \mathcal{C}_R\big(h^{-1}(s)\big), \end{aligned}$$

tenemos que $H$ es un homeomorfismo. ⊠

Ahora introduciremos las condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales el espacio estructural $\mathcal{M}(R)$ es Hausdorff.

**1.3.4 Teorema:** *Sea $R$ un anillo conmutativo con unidad. El espacio $\mathcal{M}(R)$ es Hausdorff si y solamente si para cualesquiera $M,N \in \mathcal{M}(R)$ distintos existen $a \in R \setminus M$ y $b \in R \setminus N$ de tal manera que $a \cdot b \in \bigcap \mathcal{M}(R)$.*

Demostración: [⇒] Como $\mathcal{M}(R)$ es Hausdorff, para cualesquiera $M,N \in \mathcal{M}(R)$ distintos deben existir abiertos canónicos $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ de $\mathcal{M}(R)$ ajenos tales que $M \in \mathcal{U}$ y $N \in \mathcal{V}$; es decir, existen $a,b \in R$ de tal manera que $\mathcal{M}(R) \setminus \mathcal{U} = \mathcal{C}_R(b)$ y $\mathcal{M}(R) \setminus \mathcal{V} = \mathcal{C}_R(a)$, pero debido a que $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son ajenos, tenemos que

$$\emptyset = \mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \mathcal{M}(R) \setminus \big(\mathcal{C}_R(a) \cup \mathcal{C}_R(b)\big).$$

Notemos que $a \in R \setminus M$ y $b \in R \setminus N$ y que, por lo anterior, $\mathcal{C}_R(a) \cup \mathcal{C}_R(b)$ coincide con $\mathcal{M}(R)$, lo cual implica que $a \cdot b \in \bigcap \mathcal{M}(R)$.

[⇐] Sean $M,N \in \mathcal{M}(R)$ distintos. Entonces sean $a \in R \setminus M$ y $b \in R \setminus N$ de tal manera que $a \cdot b \in \bigcap \mathcal{M}(R)$. Consideremos a

$$\begin{aligned} & \mathcal{U} = \mathcal{M}(R) \setminus \mathcal{C}_R(a) \\ \text{y a} \qquad & \mathcal{V} = \mathcal{M}(R) \setminus \mathcal{C}_R(b), \end{aligned}$$

los cuales resultan ser abiertos que contienen a $M$ y a $N$, respectivamente. Demostraremos que, de hecho, $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son ajenos, lo cual implica que $\mathcal{M}(R)$ es Hausdorff. Notemos que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \mathcal{M}(R) \setminus \left(\mathcal{C}_R(a) \cup \mathcal{C}_R(b)\right)$, pero como $\mathcal{C}_R(a) \cup \mathcal{C}_R(b) = \mathcal{C}_R(a \cdot b)$ y $a \cdot b \in \bigcap \mathcal{M}(R)$, entonces $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$. ⊠

La siguiente proposición establece que, en caso de que el espacio estructural $\mathcal{M}(R)$ es Hausdorff, entonces es compacto. Por lo tanto, la condición de que para cualesquiera $M, N \in \mathcal{M}(R)$ distintos existen $a \in R \setminus M$ y $b \in R \setminus N$ de tal manera que $a \cdot b \in \bigcap \mathcal{M}(R)$ es equivalente a que el espacio estructual $\mathcal{M}(R)$ es compacto y Hausdorff.

**1.3.5 Proposición:** *Si el espacio estructural $\mathcal{M}(R)$ es Hausdorff, entonces es compacto.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $\mathcal{M}(R)$ es Hausdorff. Mostraremos que si una familia no vacía de cerrados de $\mathcal{M}(R)$ tiene intersección vacía, entonces alguna de sus subfamilias finitas tiene intersección vacía, lo cual implica la compacidad de $\mathcal{M}(R)$.

Primero veamos que si $C \subseteq R$ es no vacío, entonces $\bigcap \left\{\mathcal{C}_R(a) : a \in C\right\}$ es el conjunto de ideales maximales que contienen a $C$, así, $\bigcap \left\{\mathcal{C}_R(a) : a \in C\right\} = \emptyset$ si y solamente si el único ideal de $R$ que contiene a todos los elementos de $C$ es el mismísimo anillo $R$, lo cual es equivalente a que el ideal generado por $C$ sea $R$.

Ahora, sea $\mathcal{F}$ una colección no vacía de cerrados de $\mathcal{M}(R)$. Como todo cerrado de $\mathcal{M}(R)$ es la intersección de cerrados canónicos, supongamos, sin perder generalidad, que existe $C \subseteq R$ no vacío de tal manera que $\mathcal{F} = \left\{\mathcal{C}_R(a) : a \in C\right\}$. Si $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$, entonces el ideal generado por $C$ es $R$, con lo cual, existe un natural positivo $\eta$ y dos funciones inyectivas $f \colon \eta \to R$ y $g \colon \eta \to C$ de tal manera que

$$1_R = \sum_{\alpha \in \eta} f(\alpha) \cdot g(\alpha).$$

Por lo tanto, el ideal generado por $g[\eta]$ contiene a $1_R$, lo cual implica que dicho ideal es el anillo $R$, con lo que $\bigcap \left\{\mathcal{C}_R(a) : a \in g[\eta]\right\} = \emptyset$. ⊠

Ahora, consideremos a un espacio topológico $X$ y al conjunto $C^\star(X)$ de funciones que van de $X$ a $\mathbb{R}$ y que son continuas y acotadas. Definiendo a la suma y multiplicación entre elementos de $C^\star(X)$ de manera puntual, es decir, para cualesquiera $f, g \in C^\star(X)$, las funciones $f + g, f \cdot g \colon X \to \mathbb{R}$ están determinadas por

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$\text{y} \qquad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

para toda $x \in X$, entonces $C^\star(X)$ es un anillo conmutativo con unidad, donde el neutro multiplicativo es la función constante 1.

Supongamos que $X$ es un espacio Tychonoff. Lo siguiente será caracterizar a los ideales maximales de $C^\star(X)$. Para facilitar esta tarea, utilizaremos a la compatación de Čech y necesitaremos de los siguientes lemas, de lo cuales, el siguiente fue demostrado por Stone en su artículo de 1937.

**1.3.6 Lema:** *Sea $K$ un espacio compacto y Hausdorff. Consideremos a $\tau\colon K \to \wp\big(C^\star(K)\big)$ dada por*

$$\tau(x) = \big\{ f \in C^\star(K) : f(x) = 0 \big\}.$$

*Entonces $\tau$ es inyectiva y su imagen es la colección de todos los ideales maximales de $C^\star(K)$.*

Demostración: Sean $x, y \in K$ dintintos. Al ser $K$ un espacio tanto compacto como Hausdorff, existe $f \in C^\star(K)$ que separa a $x$ y a $y$, es decir, tal que $f(x) \neq f(y)$. Entonces $\tau(x) \neq \tau(y)$.

Claramente, $\tau(x)$ es un ideal disinto de $C^\star(K)$ para toda $x \in K$. Para terminar la demostración, basta ver que todo ideal $I$ propio, es decir, tal que $I \neq C^\star(K)$, está contenido en $\tau(x)$ para algún $x \in K$. Sea $I$ un ideal propio de $C^\star(K)$. Supongamos, para generar una contradicción, que para toda $x \in K$ existe $f_x \in I$ de tal manera que $f_x(x) \neq 0$ y consideremos a $U(x)$ un abierto de $K$ que contiene a $x$ de tal manera que $0 \notin f_x\big[U(x)\big]$. Como $K$ es compacto y $\big\{U(x) : x \in K\big\}$ es una cubierta abierta de $K$, existe $\Gamma \subseteq K$ finito y no vacío de tal manera que $\big\{U(x) : x \in \Gamma\big\}$ es una cubierta abierta de $K$. Consideremos a $g \in C^\star(K)$ dada por

$$g = \sum_{x \in \Gamma} f_x \cdot f_x$$

y notemos que $g \in I$ y es tal que $0 \notin g[K]$, por lo que si

$$h = \frac{1}{\sum_{x \in \Gamma} f_x \cdot f_x},$$

entonces $h \in C^\star(K)$. Además, toda función $f \in C^\star(K)$ satisface que $f = h \cdot g \cdot f$, implicando que $f \in I$, lo cual es una contradicción porque $I$ es un ideal propio. ⊠

**1.3.7 Lema:** *Existe una única función $\Phi\colon C^\star(X) \to C^\star(\beta X)$ tal que $\Phi$ es un isomorfismo tal que $\Phi(f) \circ \beta = f$ para toda $f \in C^\star(X)$. En particular, los anillos $C^\star(X)$ y $C^\star(\beta X)$ son isomorfos.*

Demostración: Recordemos que si dos funciones restringidas a un subconjunto denso de un espacio Hausdorff son iguales, entonces dichas funciones son iguales en todo el dominio [13, 1.5.4]. Por lo tanto, con ayuda del teorema 1.2.4 y del hecho de que todo intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$ es compacto, podemos deducir que para toda $f \in C^\star(X)$ existe una única $F_f \in C^\star(\beta X)$ tal que $F_f \circ \beta = f$. Consideremos a $\Phi\colon C^\star(X) \to C^\star(\beta X)$ dada por

$$\Phi(f) = F_f$$

para cada $f \in C^\star(X)$, la cual resulta estar bien definida por la deducción anterior. Notemos que $\Phi$ es la única función de $C^\star(X)$ en $C^\star(\beta X)$ tal que $\Phi(f) \circ \beta = f$ para toda $f \in C^\star(X)$ ya que $F_f$ es única para cada $f \in C^\star(X)$. Falta probar que $\Phi$ es un isomorfismo de anillos.

Veamos que $\Phi$ es biyectiva. Sean $f, g \in C^\star(X)$ tales que $\Phi(f) = \Phi(g)$. Notemos que $f = g$ por que $\Phi(f) \circ \beta = \Phi(g) \circ \beta$. Ahora, sea $F \in C^\star(\beta X)$. Notemos que si $f\colon X \to \mathbb{R}$ es la composición $F \circ \beta$, entonces $f \in C^\star(X)$ y $\Phi(f) = F$.

Ahora demostraremos que $C^\star(X)$ y $C^\star(\beta X)$ son anillos isomorfos. Sean $f, g \in C^\star(X)$. Por el teorema 1.2.4 tenemos que

$$\begin{aligned} \Phi(f)\circ\beta &= f, \\ \Phi(g)\circ\beta &= g, \\ \Phi(f+g)\circ\beta &= f+g \\ \text{y que}\qquad \Phi(f\cdot g)\circ\beta &= f\cdot g. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\Phi(f+g)$ restringida a $\beta[X]$ es igual a $\Phi(f)+\Phi(g)$ restringida a $\beta[X]$ y, por otro lado, $\Phi(f\cdot g)$ restringida a $\beta[X]$ es igual a $\Phi(f)\cdot\Phi(g)$ restringida a $\beta[X]$. Como $\beta[X]$ es denso en $\beta X$ y éste último es un espacio Hausdorff, tenemos que

$$\begin{aligned} \Phi(f+g) &= \Phi(f)+\Phi(g) \\ \text{y}\qquad \Phi(f\cdot g) &= \Phi(f)\cdot\Phi(g), \end{aligned}$$

lo cual implica que $\Phi$ es un isomorfismo de anillos. ⊠

**1.3.8 Teorema:** *Un subconjunto $M$ de $C^\star(X)$ es un ideal maximal de $C^\star(X)$ si y solamente si existe $p \in \beta X$ tal que*

$$M = \{f \in C^\star(X) : \Phi(f)(p) = 0\}$$

*donde $\Phi\colon C^\star(X) \to C^\star(\beta X)$ es el isomorfismo tal que $\Phi(f)\circ\beta = f$ para toda $f \in C^\star(X)$.*

DEMOSTRACIÓN: [⇒] Como $M$ es un ideal maximal de $C^\star(X)$ y $\Phi$ es un isomorfismo entre $C^\star(X)$ y $C^\star(\beta X)$, entonces $\Phi[M]$ es un ideal maximal de $C^\star(\beta X)$. Por el lema 1.3.6, existe $p \in \beta X$ de tal manera que

$$\Phi[M] = \{F \in C^\star(\beta X) : F(p) = 0\},$$

con lo cual tenemos que

$$M = \{f \in C^\star(X) : \Phi(f)(p) = 0\}.$$

[⇐] La condición de que $M$ sea un ideal maximal se sigue de que el subconjunto $\{F \in C^\star(\beta X) : F(p) = 0\}$ es un ideal maximal de $C^\star(\beta X)$ gracias al lema 1.3.6; y de que $\Phi$ es un isomorfismo de anillos entre $C^\star(X)$ y $C^\star(\beta X)$, cuya existencia se debe al lema 1.3.7. ⊠

Ahora que sabemos quiénes son los ideales maximales de $C^\star(X)$, es natural preguntarnos si el espacio estructural de $C^\star(X)$ es compacto y Hausdorff. La proposición siguiente responde esta pregunta.

**1.3.9 Proposición:** *El espacio estructural del anillo $C^\star(X)$ es compacto y Hausdorff.*

DEMOSTRACIÓN: En virtud del teorema 1.3.4, de la proposición 1.3.5 y del teorema 1.3.8, sean $p, q \in \beta X$ distintos. Como $\beta X$ es compacto y Hausdorff, existen $F, G \in C^\star(\beta X)$

tales que $F(p) = 1$, $G(p) = 1$ y $(F \cdot G)(x) = 0$ para toda $x \in \beta X$. Consideremos, invocando el lema 1.3.7, al isomorfirmos de anillos $\Phi\colon C^\star(X) \to C^\star(\beta X)$ tal que $\Phi(f) \circ \beta = f$ para cada $f \in C^\star(X)$. Notemos que

$$\Phi^{-1}(F) \in C^\star(X) \setminus \{f \in C^\star(X) : \Phi(f)(p) = 0\}$$

$$\text{y que} \qquad \Phi^{-1}(G) \in C^\star(X) \setminus \{f \in C^\star(X) : \Phi(f)(q) = 0\},$$

pero como $\Phi^{-1}(F) \cdot \Phi^{-1}(G) = \Phi^{-1}(F \cdot G)$ pertenece a todos los ideales maximales de $C^\star(X)$ gracias al teorema 1.3.8 y a que

$$\Phi\big(\Phi^{-1}(F) \cdot \Phi^{-1}(G)\big)(x) = \Phi\big(\Phi^{-1}(F \cdot G)\big)(x) = (F \cdot G)(x) = 0$$

para toda $x \in \beta X$. ⊠

Finalmente, para introducir a la compactación de Stone, necesitamos del siguiente teorema.

**1.3.10 Teorema:** *Sea $K$ un espacio compacto y Hausdorff. Si $\tau\colon K \to \mathcal{M}\big(C^\star(K)\big)$ está dada por*

$$\tau_K(x) = \{f \in C^\star(K) : f(x) = 0\},$$

*entonces $\tau_K$ es un homeomorfismo.*

Demostración: Por el lema 1.3.6, tenemos que $\tau_K$ es biyectiva. Como $K$ es compacto y $C^\star(K)$ es Hausdorff gracias a la proposición anterior y a que $K$ es Tychonoff, basta demostrar que $\tau_K$ es continua para deducir que es un homeomorfismo [8, 7.9], para lo cual es suficiente que $S \subseteq K$ implique que $\tau_K[\mathrm{cl}_K(S)] \subseteq \mathrm{cl}_{\mathcal{M}(C^\star(K))}(\tau_K[S])$ [8, 3.4]. Así, sea $M \in \tau_K[\mathrm{cl}_K(S)]$. Entonces existe $x \in K$ de tal manera que $\tau_K(x) = M$. Por la proposición 1.3.2, tenemos que

$$\mathrm{cl}_{\mathcal{M}(C^\star(K))}(\tau_K[S]) = \bigcap\big\{\mathcal{C}_{C^\star(K)}(f) : f \in \bigcap \tau_K[S]\big\}.$$

Como $\bigcap \tau_K[S]$ es la colección de funciones que se desvanecen en todo elemento de $S$, tenemos que

$$\mathrm{cl}_{\mathcal{M}(C^\star(K))}(\tau_K[S]) = \bigcap\big\{\mathcal{C}_{C^\star(K)}(f) : f[S] = \{0\}\big\}.$$

Ahora, al ser $x \in \mathrm{cl}_K(S)$, toda función continua que se desvanece en todo elemento de $S$ también se desvanece en $x$, lo cual implica que $\tau_K(x) \in \mathrm{cl}_{\mathcal{M}(C^\star(K))}(\tau_K[S])$. ⊠

Ahora tenemos todo lo necesario para construir una compactación Hausdorff de $X$ utilizando a la compactación de Čech y al espacio estructural de $C^\star(X)$.

**1.3.11 Teorema:** *Sea $(\sigma, \sigma X)$ la pareja donde $\sigma X$ es el espacio estructural de $C^\star(X)$ y donde $\sigma\colon X \to \sigma X$ está dada por*

$$\sigma(x) = \{f \in C^\star(X) : \Phi(f)(\beta(x)) = 0\},$$

*para toda $x \in X$ donde $\Phi\colon C^\star(X) \to C^\star(\beta X)$ el isomorfismo de anillos tal que $\Phi(f) \circ \beta = f$ para toda $f \in C^\star(X)$. Entonces $(\sigma, \sigma X)$ es una compactación Hausdorff de $X$ tal que existe un homeomorfismo $H\colon \beta X \to \sigma X$ de tal manera que $H \circ \beta = \sigma$.*

DEMOSTRACIÓN: Consideremos a $\Theta\colon \sigma X \to \mathcal{M}(C^\star(\beta X))$ dada por

$$\Theta(M) = \Phi[M]$$

para toda $M \in \sigma X$. Como $\Phi$ es un isomorfismo, por el teorema 1.3.3 tenemos que $\Theta$ es un homeomorfismo. Demostraremos que $\sigma = \Theta^{-1} \circ \tau_{\beta X} \circ \beta$, lo cual implicaría que $(\sigma, \sigma X)$ es una compactación Hausorff de $X$ ya que $(\beta, \beta X)$ es una compactación Hausdorff de $X$ y porque $\Theta^{-1}$ es un homeormosfismo así como $\tau_{\beta X}$ gracias al teorema anterior. Además, si $H = \Theta^{-1} \circ \tau_{\beta X}$, entonces también tendríamos que $H$ es un homeomorfismo entre $\beta X$ y $\sigma X$ tal que $H \circ \beta = \sigma$.

Sea $x \in \sigma X$. Veamos que

$$(\Theta \circ \sigma)(x) = \Phi\big[\{f \in C^\star(X) : \Phi(f)(\beta(x)) = \emptyset\}\big]$$

y que

$$(\tau_{\beta X} \circ \beta)(x) = \{F \in C^\star(\beta X) : F(\beta(x)) = \emptyset\}.$$

Si $f \in C^\star(X)$ es tal que $\Phi(f)(\beta(x)) = \emptyset$, entonces la función $F \in C^\star(\beta X)$ dada por $F = \Phi(f)$ es tal que $F(\beta(x)) = \emptyset$. Por lo tanto, $(\Theta \circ \sigma)(x) \subseteq (\tau_{\beta X} \circ \beta)(x)$. Por otro lado, si $F \in C^\star(\beta(x))$ es tal que $F(\beta X) = \emptyset$, entonces la función $f \in C^\star(X)$ dada por $f = \Phi^{-1}(F)$ satisface que $\Phi(f)(\beta(x)) = \emptyset$ porque $\Phi(f) = F$. Por lo tanto, $(\tau_{\beta X} \circ \beta)(x) \subseteq (\Theta \circ \sigma)(x)$. En consecuencia, tenemos que $(\Theta \circ \sigma)(x) = (\tau_{\beta X} \circ \beta)(x)$ pero como $x \in \sigma X$ fue arbitraria, concluimos que $\sigma = \Theta^{-1} \circ \tau_{\beta X} \circ \beta$. ⊠

Para finalizar esta sección, distinguiremos a la compactación del teorema anterior rindiéndole homenaje a Stone.

**1.3.12 Definición:** *La **compactación de Stone** de $X$ es la pareja $(\sigma, \sigma X)$ donde $\sigma X$ es el espacio estructural de $C^\star(X)$ y donde $\sigma\colon X \to \sigma X$ está dada por*

$$\sigma(x) = \{f \in C^\star(X) : \Phi(f)(\beta(x)) = \emptyset\},$$

*para toda $x \in X$ donde $\Phi\colon C^\star(X) \to C^\star(\beta X)$ el isomorfismo de anillos tal que $\Phi(f) \circ \beta = f$ para toda $f \in C^\star(X)$.*

CAPÍTULO

# 2

# COMPACTACIONES HAUSDORFF MÁXIMAS

Como mencionamos en la sección 1.2, Čech demostró —aunque el mismo Čech se lo atribuye a Tychonoff [9]— que para todo espacio $X$ completamente regular y $T_1$ existe una compactación Hausdorff $(\beta, \beta X)$ de $X$ con la propiedad de que para toda función continua $f\colon X \to [0,1]$ existe una función $F\colon \beta X \to [0,1]$ continua de tal manera que $F \circ \beta = f$, como lo asegura el teorema 1.2.4. Čech fue más allá probando, con el teorema 1.2.3, que si $(h,K)$ es una compactación Hausdorff de $X$, entonces existe una función continua $\phi\colon \beta X \to K$ de tal manera que $\phi \circ \beta = h$; ésto implica que si $(h_1,K_1)$ y $(h_2,K_2)$ son compactaciones Hausdorff de $X$ tales que para toda función continua $f\colon X \to [0,1]$ existe $F_i\colon K_i \to [0,1]$ continua tal que $F_i = f \circ h_i$ para cada $i \in \{1,2\}$, entonces existe un homeomorfismo $\phi\colon K_1 \to K_2$ de tal manera que $\phi \circ h_1 = h_2$, como lo asegura el corolario 1.2.5. Dichos resultados dan vida a los siguientes conceptos.

## § 2.1

## Semejanza y dominancia entre compactaciones

**2.1.1 Definiciones:** *Sean $(\alpha_1, Y_1)$ y $(\alpha_2, Y_2)$ compactaciones de un espacio $X$. Decimos que $(\alpha_1, Y_1)$ y $(\alpha_2, Y_2)$ son **compactaciones semejantes** o **compactaciones equivalentes** de $X$ si existe $\phi\colon Y_1 \to Y_2$ con la propiedad de que $\phi$ sea un homeomorfismo y que $\phi \circ \alpha_1 = \alpha_2$. En este caso, escribimos $(\alpha_1, Y_1) \equiv (\alpha_2, Y_2)$. Además, decimos que $(\alpha_2, Y_2)$ es **dominada** por $(\alpha_1, Y_1)$, y escribimos $(\alpha_2, Y_2) \leq (\alpha_1, Y_1)$, si existe una función continua $\phi\colon Y_1 \to Y_2$ tal que $\phi \circ \alpha_1 = \alpha_2$.*

Denotaremos por $\mathcal{C}(X)$ a la clase de las compactaciones de un espacio topológico $X$. La siguiente proposición nos dice que la relación $\equiv$ tiene el mismo comportamiento que el de una relación de equivalencia pero en la clase $\mathcal{C}(X)$.

**2.1.2 Proposición:** *Sean $X$ un espacio topológico y $(\alpha_1, Y_1)$, $(\alpha_2, Y_2)$ y $(\alpha_3, Y_3)$ compactaciones de $X$. Entonces*

(I) $(\alpha_1, Y_1) \equiv (\alpha_1, Y_1)$;

(II) $(\alpha_1, Y_1) \equiv (\alpha_2, Y_2)$ *implica que* $(\alpha_2, Y_2) \equiv (\alpha_1, Y_1)$; *y*

(III) $(\alpha_1, Y_2) \equiv (\alpha_2, Y_2)$ *y* $(\alpha_2, Y_2) \equiv (\alpha_3, Y_3)$ *son suficientes para que* $(\alpha_1, Y_1) \equiv (\alpha_3, Y_3)$.

DEMOSTRACIÓN: (I) Notemos que si $\phi\colon Y_1 \to Y_1$ es la identidad en $Y_1$, entonces $\phi$ es un homeomorfismo tal que $\phi \circ \alpha_1 = \alpha_1$, lo cual implica que $(\alpha_1, Y_1) \equiv (\alpha_1, Y_1)$.

(II) Ahora, supongamos que $(\alpha_1, Y_1) \equiv (\alpha_2, Y_2)$. Entonces existe un homeomorfismo $\phi\colon Y_1 \to Y_2$ tal que $\phi \circ \alpha_1 = \alpha_2$. Al ser $\phi$ un homeomorfirmo, la relación $\phi^{-1}$ de $Y_2$ en $Y_1$ es una función que resulta ser un homeomorfismo. Notemos que $\phi^{-1} \circ \alpha_2 = \alpha_1$, lo cual implica que $(\alpha_2, Y_2) \equiv (\alpha_1, Y_1)$.

(III) Finalmente, supongamos que $(\alpha_1, Y_2) \equiv (\alpha_2, Y_2)$ y que $(\alpha_2, Y_2) \equiv (\alpha_3, Y_3)$. Entonces existen $\phi_1\colon Y_2 \to Y_1$ y $\phi_2\colon Y_3 \to Y_2$ homeomorfismos de tal manera que $\phi_1 \circ \alpha_2 = \alpha_1$ y $\phi_2 \circ \alpha_3 = \alpha_2$. Notemos que $\phi_1 \circ \phi_2\colon Y_3 \to Y_1$ es una homeomorfismo con la propiedad de que $(\phi_1 \circ \phi_2) \circ \alpha_3 = \alpha_1$, lo cual implica que $(\alpha_1, Y_1) \equiv (\alpha_3, Y_3)$. ⊠

Afirmar que $\equiv$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{C}(X)$ no tiene sentido en el sistema ZFC porque la clase $\mathcal{C}(X)$ no es un conjunto. El siguiente corolario, que se desprende de la proposición anterior, nos permite ver que $\equiv$ induce una relación de equivalencia en todos los conjuntos de compactaciones Hausdorff de un espacio topológico $X$.

**2.1.3 Corolario:** *Sea $X$ un espacio topológico. Si $K$ es un conjunto de compactaciones Hausdorff de $X$, entonces $\equiv$ restringida a los elementos de $K$ es una relación de equivalencia en $K$.*

Dentro del contexto de las compactaciones Hausdorff de un espacio $X$, podemos determinar condiciones necesarias y suficientes, mediante la relación de dominancia, para que dos compactaciones Hausdorff de $X$ sean semejantes. Se fomenta la comparación entre la demostración del siguiente teorema y la demostración del corolario 1.2.5.

**2.1.4 Teorema:** *Sean $(\alpha_1, Y_1)$ y $(\alpha_2, Y_2)$ compactaciones Hausdorff de un espacio $X$. Entonces $(\alpha_1, Y_1)$ y $(\alpha_2, Y_2)$ son compactaciones semejantes de $X$ si y solamente si $(\alpha_1, Y_1) \le (\alpha_2, Y_2)$ y $(\alpha_2, Y_2) \le (\alpha_1, Y_1)$.*

DEMOSTRACIÓN: [⇒] Siempre que $(\alpha_1, Y_1) \equiv (\alpha_2, Y_2)$, existe un homeomorfismo $\phi\colon Y_1 \to Y_2$ tal que $\phi \circ \alpha_1 = \alpha_2$, lo cual claremente implica que $(\alpha_1, Y_1) \le (\alpha_2, Y_2)$ y que $(\alpha_2, Y_2) \le (\alpha_1, Y_1)$.

[$\Leftarrow$] Sean $\phi_1 \colon Y_1 \to Y_2$ y $\phi_2 \colon Y_2 \to Y_1$ funciones continuas tales que $\phi_1 \circ \alpha_1 = \alpha_2$ y $\phi_1 \circ \alpha_2 = \alpha_1$. Como $\phi_2 \circ \phi_1 \circ \alpha_1 = \alpha_1$, sucede que $\mathrm{id}_{Y_1}$ y $\phi_2 \circ \phi_1$ restringidas a $\alpha_1[X]$ coinciden, pero al ser $\alpha_1[X]$ denso en $Y_1$ y al ser $Y_1$ un espacio Hausdorff, tenemos que $\phi_2 \circ \phi_1 = \mathrm{id}_{Y_1}$. Análogamente podemos deducir que $\phi_1 \circ \phi_2 = \mathrm{id}_{Y_2}$. En consecuencia, $\phi_1$ es un homeomorfismo, lo cual implica que $(\alpha_1, Y_1) \equiv (\alpha_2, Y_2)$. ⊠

**§ 2.2**

## Sistemas de representantes de la clase de compactaciones Hausdorff

En lo que resta del capítulo tendremos como supuesto que $X$ es un espacio Tychonoff y denotaremos por $\mathcal{C}_2(X)$ a la clase de compactaciones Hausdorff de $X$. Como dicha clase resulta no ser un conjunto, es natural preguntarse acerca de la existencia de subclases de $\mathcal{C}_2(X)$ que sí sean conjuntos y que contengan a, al menos, una compactación semejante a cualquier elemento de $\mathcal{C}_2(X)$. La respuesta es afirmativa y los siguientes resultados, inspirados por Tychonoff, sirven a la búsqueda de una subclase con estas propiedades.

**2.2.1 Lema:** *Si $Y$ es un espacio tanto compacto como Hausdorff que contiene un subespacio homeomorfo a $X$, entonces $w(Y) \leq 2^{d(X)}$.*

Demostración: Como $Y$ es un espacio regular, por el teorema de Groot tenemos que $w(Y) \leq 2^{d(Y)}$, pero como $X$ es homeomorfo a un subespacio denso de $Y$, sucede que $d(Y) \leq d(X)$. Por lo tanto, $w(Y) \leq 2^{d(X)}$. ⊠

**2.2.2 Proposición:** *Para cada compactación Hausdorff $(h, K)$ de $X$ existe un subconjunto compacto $P$ de $I^\kappa$ con $\kappa = 2^{d(X)}$ y una función $\rho \colon X \to P$ tal que $(\rho, P)$ es una compactación Hausdorff de $X$ semejante a $(h, K)$.*

Demostración: Sean $(h, K)$ una compactación Hausdorff de $X$ y $\kappa = 2^{d(X)}$. Por el lema 2.2.1, tenemos que $w(K) \leq \kappa$ y, por el teorema 1.1.2, existe un subespacio $P$ de $I^\kappa$ que es homeomorfo a $K$. Sea $\phi \colon K \to P$ un homeomorfismo y consideremos a $\rho = \phi \circ h$. Entonces sucede que $(\rho, P)$ es una compactación Hausdorff de $X$ semejante a $(h, K)$.

Dado un espacio Tychonoff $X$, definimos $\mathcal{I}_X$ como la colección de todas las compactaciones Hausdorff $(h, K)$ de $X$ tales que $K$ es un subconjunto del cubo de Tychonoff de peso $2^{d(X)}$. Dicha colección resulta ser un conjunto porque todos sus elementos están relacionados con un elemento de la potencia del cubo de Tychonoff de peso $2^{d(X)}$, el cual es un conjunto, y porque el esquema de reemplazo [26, p. 11] forma parte del sistema ZFC. Notemos que la existencia del conjunto $\mathcal{I}_X$ responde a interrogante planteada en el inicio de esta sección a merced de la proposición anterior y de que la relación de semejanza restringida a los elementos de $\mathcal{I}_X$ es ya una relación de equivalencia gracias al corolario 2.1.3. Podemos ir más allá de dicha respuesta con ayuda del conjunto $\mathcal{I}_X$.

**2.2.3 Teorema:** *Sea $\mathcal{Q}$ una colección de elementos de la clase $\mathcal{C}_2(X)$ tal que para todo $(h,k) \in \mathcal{C}_2(X)$ existe un único $(n,P) \in \mathcal{Q}$ tal que $(h,K) \equiv (n,P)$. Entonces $\mathcal{Q}$ es un conjunto.*

DEMOSTRACIÓN: Basta encontrar una función cuyo dominio sea un conjunto y cuya imagen del dominio bajo dicha función coincida con $\mathcal{Q}$ gracias al esquema de reemplazo [26, p. 11], el cual forma parte del sistema ZFC.

Consideremos a $f$ la colección de parejas ordenadas $\big((h,K),(n,P)\big)$ de tal manera que $(h,K) \in \mathcal{I}_X$ y $(n,P) \in \mathcal{Q}$ son tales que $(h,K) \equiv (n,P)$. La colección $f$ resulta ser una función porque para todo $(h,K) \in \mathcal{I}_X$ existe $(n,P) \in \mathcal{Q}$ tal que $\big((h,K),(n,P)\big) \in f$ y porque $(n,P)$ es el único elemento de $\mathcal{Q}$ con esa propiedad. ☒

Recordemos que si $A$ es un conjunto y $\sim$ es una relación de equivalencia en $A$, entonces un subconjunto de $S$ de $A$ es un sistema de representantes de acuerdo con $\sim$ si para toda $a \in A$ existe un único $s \in S$ de tal manera que $a \sim s$. De esta manera, el conjunto $\mathcal{Q}$ del teorema anterior se comporta como un sistema de representantes de acuerdo con $\equiv$, pero no es correcto afirmar que lo es porque, de nuevo, la clase $\mathcal{C}_2(X)$ no es un conjunto. Para arreglar este contratiempo, introduciremos el siguiente concepto.

**2.2.4 Definición:** *Sea $\mathcal{Q}$ una colección de compactaciones Hausdorff de $X$. Decimos que $\mathcal{Q}$ es un* ***sistema de representantes de compactaciones Hausdorff*** *de $X$ o* ***sistema de representantes*** *de $\mathcal{C}_2(X)$ si para todo $(h,K) \in \mathcal{C}_2(X)$ existe un único $(n,P) \in \mathcal{Q}$ de tal manera que $(h,K) \equiv (n,P)$.*

Ahora veremos las propiedades que tienen los sistemas de representantes de $\mathcal{C}_2(X)$ relacionadas a la dominancia entre compactaciones.

**2.2.5 Proposición:** *Sea $\mathcal{Q}$ un sistema de representantes de compactaciones Hausdorff de $X$. Entonces, la pareja $(\mathcal{Q},\leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $(h_1,K_1)$, $(h_2,K_2)$ y $(h_3,K_3)$ elementos de $\mathcal{Q}$. Notemos que, si $\phi\colon K_1 \to K_1$ es la función identidad, entonces $\phi$ es continua y $\phi \circ h_1 = h_1$, lo cual implica que $(h_1,K_1) \leq (h_1,K_1)$.

Por el teorema 2.1.4, tenemos que si $(h_1,K_1) \leq (h_2,K_2)$ y si $(h_2,K_2) \leq (h_1,K_1)$, entonces $(h_1,K_1) \equiv (h_2,K_2)$, pero como $\mathcal{Q}$ es un sistema de representantes de $\mathcal{C}_2(X)$, necesariamente sucede que $(h_1,K_1) = (h_2,K_2)$.

Finalmente, supongamos que $(h_1,K_1) \leq (h_2,K_2)$ y que $(h_2,K_2) \leq (h_3,K_3)$. Entonces existen $\phi_1\colon K_2 \to K_1$ y $\phi_2\colon K_3 \to K_2$ continuas tales que $\phi_1 \circ h_2 = h_1$ y $\phi_2 \circ h_3 = h_2$. Notemos que $\phi_1 \circ \phi_2\colon K_3 \to K_1$ es una función continua tal que $(\phi_1 \circ \phi_2) \circ h_3 = h_1$, lo cual implica que $(h_1,K_1) \leq (h_3,K_3)$. ☒

Recordemos que una pareja ordenada $(P,\preceq)$ es una ***semirretícula superiormente completa***, o ***semirretícula superior***, si $(P,\preceq)$ es un conjunto parcialmente ordenado tal que para todo subconjunto $A$ no vacío de $P$ existe el supremo de $A$ en $(P, \preceq)$. En caso de existir, al supremo de $P$ lo conocemos como máximo proyectivo de $(P, \preceq)$. El siquiente lema, en conjunción con el teorema 2.2.2, nos permitirá demostrar que $(\mathcal{Q}, \leq)$ es una semirretícula superiormente completa para todo sistema de representantes $\mathcal{Q}$ de $\mathcal{C}_2(X)$.

**2.2.6 Lema:** *Sea $\mathcal{F}$ un conjunto no vacío con la propiedad de que si $\rho \in \mathcal{F}$, entonces existe $\rho X$ tal que $(\rho, \rho X)$ es una compactación Hausdorff de $X$. Supongamos que $Y^\sharp = \prod\{\rho X \colon \rho \in \mathcal{F}\}$, que $\theta = \triangle \mathcal{F} \colon X \to Y^\sharp$ y que $Y$ es la cerradura de $\theta[X]$ en $Y^\sharp$. Entonces $(\theta, Y)$ es una compactación Hausdorff de $X$ tal que $(\rho, \rho X) \leq (\theta, Y)$ para toda $\rho \in \mathcal{F}$ y tal que $(\theta, Y) \equiv (\gamma, Z)$ siiempre que $(\gamma, Y)$ sea una compactación Hausdorff de $X$ con la propiedad de que $(\rho, \rho X) \leq (\gamma, Z)$ para toda $\rho \in \mathcal{F}$.*

Demostración: Sean $x \in X$ y $U$ un abierto de $X$ tal que $x \in U$. Si $\rho \in \mathcal{F}$, entonces $\rho(x) \in \rho[U]$. Como $\rho \colon X \to \rho X$ es un encaje, existe un abierto $V$ de $\rho X$ de tal manera que $\rho[U] = \rho[X] \cap V$, por lo que $x \in \rho^{-1}[V] \subseteq U$. En consecuencia, $\mathcal{F}$ genera a la topología de $X$ y, al ser éste un espacio $T_0$, también separa puntos de $X$. Por el teorema de la diagonal tenemos que $\theta$ es un encaje, implcando que $(\theta, Y)$ es una compactación Hausdorff de $X$.

Supongamos, para cada $\rho \in \mathcal{F}$, que $\pi_\rho \colon Y^\sharp \to X$ es la proyección asociada a $\rho$. Como $\pi_\rho \circ \theta = \rho$, podemos deducir que $(\rho, \rho X) \leq (\theta, Y)$ para toda $\rho \in \mathcal{F}$.

Finalmente, supongamos que $(\gamma, Z)$ es una compactación Hausdorff de $X$ tal que si $\rho \in \mathcal{F}$, entonces $(\rho, \rho X) \leq (\gamma, Z)$. Consideremos, para cada $\rho \in \mathcal{F}$, a $f_\rho \colon Z \to \rho X$ continua tal que $f_\rho \circ \gamma = \rho$. Si $F = \triangle\{f_\rho : \rho \in \mathcal{F}\}$, entonces $F \circ \gamma = \theta$ y, por lo tanto, $(\theta, Y) \leq (\gamma, Z)$, lo cual implica que $(\theta, Y) \equiv (\gamma, Z)$ ya que $(\gamma, Z) \leq (\rho, \rho X)$ gracias al párrafo anterior. ⊠

**2.2.7 Teorema:** *Para todo sistema de representantes de compactaciones Hausdorff $\mathcal{Q}$ de $X$ sucede que la pareja $(\mathcal{Q}, \leq)$ es una semirretícula superiormente completa.*

Demostración: Sea $\mathcal{Q}$ un sistema de representantes de compactaciones Hausdorff de $X$. Consideremos a $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{Q}$ no vacío. En virtud del lema anterior, sea $\mathcal{F}$ la colección de funciones $\rho$ tales que existe $\rho X$ de tal manera que $(\rho, \rho X) \in \mathcal{P}$. Si $Y^\sharp = \prod\{\rho X \colon \rho \in \mathcal{F}\}$, $\theta = \triangle \mathcal{F} \colon X \to Y^\sharp$ y si $Y$ es la cerradura de $\theta[X]$ en $Y^\sharp$, entonces $(\theta, Y)$ es una compactación Hausdorff de $X$ de tal manera que $(\rho, \rho X) \leq (\theta, Y)$ para toda $\rho \in \mathcal{F}$ y tal que si para toda $(\gamma, Z)$ es una compactación Hausdorff de $X$ de tal manera que $(\rho, \rho X) \leq (\gamma, Z)$ para toda $\rho \in \mathcal{F}$, entonces $(\theta, Y) \equiv (\gamma, Z)$. Como $\mathcal{Q}$ es un sistema de representantes de $\mathcal{C}_2(X)$, existe $(\mu, \mu X) \in \mathcal{Q}$ de tal manera que $(\theta, Y) \equiv (\mu, \mu X)$. Entonces $(\mu, \mu X)$ es el supremo de $\mathcal{P}$ en $(\mathcal{Q}, \leq)$. ⊠

En consecuencia, hemos demostrado que si $X$ es un espacio Tychonoff, entonces todo sistema de representantes de compactaciones Hausdorff $\mathcal{Q}$ de $X$ cumple que la semirretícula superiormente completa $(\mathcal{Q}, \leq)$ tiene máximo proyectivo. De hecho, todas las compactaciones que resulten ser el máximo proyectivo de un sistema de representantes de $\mathcal{C}_2(X)$ son semejantes entre sí y dominarán a cualquier otra compactación Hausdorff de $X$. Dichas compactaciones merecen ser distinguidas de las demás.

**2.2.8 Definición:** *Sea $(h,K)$ una compactación Hausdorff de $X$. Decimos que $(h,K)$ es una **compactación Hausdorff máxima** de $X$ si existe un sistema de representantes $\mathcal{Q}$ de compactaciones Hausdorff de $X$ para el cual $(h,K)$ es su máximo proyectivo.*

El camino que seguimos desde el inicio del capítulo hasta este momento fue inspirado por los títulos *Álgebras booleanas y espacio topológicos* [25, § 2.6] y *General Topology* [13, § 3.5].

## § 2.3

## Caracterizaciones de los máximos proyectivos

En esta sección aglomeramos varias propiedades que determinan las condiciones necesarias y suficientes para que una compactación Hausdorff de $X$ sea una compactación Hausdorff máxima.

**2.3.1 Teorema:** *Sea $X$ un espacio Tychonoff y $(\mu,\mu X)$ una compactación Hausdorff de $X$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

(I) *La pareja $(\mu,\mu X)$ es una compactación Hausdorff máxima de $X$.*

(II) *Para toda compactación Hausdorff $(\rho,\rho X)$ de $X$ sucede que $(\rho,\rho X) \le (\mu,\mu X)$.*

(III) *Para cualquier espacio compacto $K$ y toda función continua $f\colon X \to K$ existe una función $F\colon \mu X \to K$ de tal manera que $F$ es continua y que $F \circ \mu = f$.*

(IV) *El espacio $\mu[X]$ es $C^\star$-encajable en $\mu X$, es decir, toda función continua y acotada de $\mu[X]$ en $\mathbb{R}$ puede extenderse a $\mu X$.*

(V) *Para cualesquiera $A,B \subseteq X$ completamente separados sucede que $\mu[A]$ y $\mu[B]$ tienen cerraduras ajenas en $\mu X$.*

(VI) *Para cualesquiera $A,B \subseteq X$ funcionalmente cerrados y ajenos sucede que $\mu[A]$ y $\mu[B]$ tienen cerraduras ajenas en $\mu X$.*

(VII) *Para cualesquiera $A,B \subseteq X$ funcionalmente cerrados sucede que*

$$\mathrm{cl}_{\mu X}\big(\mu[A]\big) \cap \mathrm{cl}_{\mu X}\big(\mu[B]\big) = \mathrm{cl}_{\mu X}\big(\mu[A] \cap \mu[B]\big).$$

DEMOSTRACIÓN: [(I) ⇒ (II)] Sean $(\rho,\rho X)$ una compactación Hausdorff de $X$ y $\mathcal{Q}$ el sistema de representantes de compactaciones Hausdorff de tal manera que $(\mu,\mu X)$ sea el máximo proyectivo de $\mathcal{Q}$. Entonces existe $(\eta,\eta X) \in \mathcal{Q}$ de tal manera que $(\eta,\eta X) \equiv (\rho,\rho X)$. Como $(\mu,\mu X)$ es el máximo proyectivo de $\mathcal{Q}$, tenemos que $(\rho,\rho X) \le (\mu,\mu X)$.

[(II) ⇒ (III)] Sean $K$ un espacio compacto y $f\colon X \to K$ una función continua. Como $\mu\colon X \to \mu X$ es un encaje, la familia $\mathcal{F} \doteqdot \{\mu, f\}$ genera a la topología de $X$ y separa puntos de $X$. Por el teorema de la diagonal, la función $\triangle\mathcal{F}\colon X \to \mu X \times K$ es un encaje. Consideremos a $P$ como la cerradura de $\triangle\mathcal{F}[X]$ en $\mu X \times K$ y a $n = \triangle\mathcal{F}$, entonces, como $\mu X \times K$ es compacto, la pareja $(n,P)$ es una compactación Hausdorff de $X$. Por lo tanto, existe una función continua $\phi\colon \mu X \to P$ tal que $\phi \circ \mu = n$. Sea $G\colon P \to K$ la proyección de $\mu X \times K$ asociada a $K$ restringida a $P$ y sea $F = G \circ \phi$. Notemos que la continuidad de $G$ implica la de $F$ y, como para toda $x \in X$ sucede que

$$\begin{aligned}(F\circ\mu)(x) &= (G\circ\phi\circ\mu)(x) = (G\circ n)(x) = \\ &= G(\triangle\mathcal{F}(x)) = G(\mu(x), f(x)) = \\ &= f(x),\end{aligned}$$

concluimos que $F \circ \mu = f$.

[(iii) $\Rightarrow$ (iv)] Sea $f\colon \mu[X] \to \mathbb{R}$ continua y acotada. Entonces existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ de tal manera que $f\big[\mu[X]\big] \subseteq [a,b]$. Notemos que $f \circ \mu\colon X \to [a,b]$ es una función continua y, al ser $[a,b]$ compacto en $\mathbb{R}$, sucede que existe $F\colon \mu X \to [a,b]$ continua tal que $F \circ \mu = f \circ \mu$. En otras palabra, si $x \in \mu[X]$, entonces $F(x) = f(x)$, lo cual significa que $F$ es una extensión continua de $f$.

[(iv) $\Rightarrow$ (v)] Sean $A$ y $B$ subconjuntos de $X$ completamente separados y consideremos a $f\colon X \to [0,1]$ continua de tal manera que $A \subseteq f^{-1}\big[\{0\}\big]$ y que $B \subseteq f^{-1}\big[\{1\}\big]$. Como $f \circ \mu^{-1}\colon \mu[X] \to \mathbb{R}$ es continua y acotada, existe $F\colon \mu X \to \mathbb{R}$ tal que $F(x) = f \circ \mu^{-1}(x)$ para toda $x \in \mu[X]$, lo cual es equivalente a que $F \circ \mu = f$. Ésto implica que $\mu[A] \subseteq f^{-1}\big[\{0\}\big]$ y que $\mu[B] \subseteq f^{-1}\big[\{1\}\big]$, con lo cual, al ser $F$ continua, sucede que $\mu[A]$ y $\mu[B]$ tienen cerraduras ajenas en $\mu X$.

[(v) $\Rightarrow$ (vi)] Se deduce inmediatamente del hecho de que cualquier par de subconjuntos funcionalmente cerrados y ajenos de $X$ están completamente separados.

[(vi) $\Rightarrow$ (vii)] Es claro que

$$\mathrm{cl}_{\mu X}\big(\mu[A] \cap \mu[B]\big) \subseteq \mathrm{cl}_{\mu X}\big(\mu[A]\big) \cap \mathrm{cl}_{\mu X}\big(\mu[B]\big).$$

Sea $p \in \mathrm{cl}_{\mu X}\big(\mu[A]\big) \cap \mathrm{cl}_{\mu X}\big(\mu[B]\big)$, entonces para cada vecindad funcionalmente cerrada $V$ de $p$ en $\mu X$ sucede que $p \in \mathrm{cl}_{\mu X}\big(\mu[A] \cap V\big) \cap \mathrm{cl}_{\mu X}\big(\mu[B] \cap V\big)$. Por lo tanto, $A \cap \mu^{-1}[V]$ y $B \cap \mu^{-1}[V]$, que son funcionalmente cerrados en $X$, no pueden ser ajenos, por lo que $\mu^{-1}[V] \cap (A \cap B) \neq \emptyset$, lo cual implica que $V \cap \big(\mu[A] \cap \mu[B]\big) \neq \emptyset$ y, al ser $V$ una vecindad de $p$, tenemos que $p \in \mathrm{cl}_{\mu X}\big(\mu[A] \cap \mu[B]\big)$.

[(vii) $\Rightarrow$ (i)] Sea $(\alpha, Y)$ una compactación Hausdorff de $X$ y consideremos a la función continua $\varphi \doteqdot \alpha \circ \big(\mu^{-1}\big)\colon \mu[X] \to Y$. Afirmamos que podemos extender a $\varphi$ de manera continua a todo $\mu X$. En efecto, como $\mu[X]$ es denso en $\mu X$ y $Y$ es compacto, sean $A_1, A_2 \subseteq Y$ cerrados y ajenos; basta demostrar que las cerraduras en $\mu X$ de $\varphi^{-1}[A_1]$ y de $\varphi^{-1}[A_2]$ son ajenas en $\mu X$. Como $Y$ es normal, por el lema de Urysohn existe una función $f\colon Y \to [0,1]$ continua tal que $A_1 \subseteq f^{-1}\big[\{0\}\big]$ y $A_2 \subseteq f^{-1}\big[\{1\}\big]$. Notemos que, al ser $f^{-1}\big[\{0\}\big]$ y $f^{-1}\big[\{1\}\big]$ funcionalmente cerrados y ajenos en $Y$, sucede que $\alpha^{-1}\big[f^{-1}\big[\{0\}\big]\big]$ y $\alpha^{-1}\big[f^{-1}\big[\{1\}\big]\big]$ son funcionalmente cerrados y ajenos en $X$. Por lo tanto,

$$\mathrm{cl}_{\mu X}\Big(\mu\big[\alpha^{-1}\big[f^{-1}\big[\{0\}\big]\big]\big]\Big) \cap \mathrm{cl}_{\mu X}\Big(\mu\big[\alpha^{-1}\big[f^{-1}\big[\{1\}\big]\big]\big]\Big) =$$

$$= \mathrm{cl}_{\mu X}\Big(\mu\big[\alpha^{-1}\big[f^{-1}\big[\{0\}\big]\big]\big] \cap \mu\big[\alpha^{-1}\big[f^{-1}\big[\{1\}\big]\big]\big]\Big) = \varnothing,$$

y, como

$$\begin{aligned} &\mu\big[\alpha^{-1}[A_1]\big] \subseteq \mu\big[\alpha^{-1}\big[f^{-1}\big[\{0\}\big]\big]\big] \\ \text{y} \qquad &\mu\big[\alpha^{-1}[A_2]\big] \subseteq \mu\big[\alpha^{-1}\big[f^{-1}\big[\{1\}\big]\big]\big], \end{aligned}$$

tenemos que las cerraduras de $\varphi^{-1}[A_1]$ y de $\varphi^{-1}[A_2]$ son ajenas en $\mu X$. Por lo tanto, existe $\phi\colon \mu X \to Y$ continua que extiende a $\varphi$, con lo que $\phi \circ \mu = \alpha$. En consecuencia, cualquier sistema de representantes que contenga a $(\mu, \mu X)$ tendrá a $(\mu, \mu X)$ como su máximo proyectivo. ☒

Del cuarto inciso del teorema anterior se deduce el siguiente corolario que resulta ser una caracterización de las compactaciones Hausdorff máximas para espacios normales.

**2.3.2 Corolario:** *Sea $(\alpha, Y)$ una compactación Hausdorff de $X$. Para cualesquiera $A, B \subseteq X$ cerrados y ajenos sucede que $\alpha[A]$ y $\alpha[B]$ tienen cerraduras ajenas en $Y$ si y solamente si $X$ es normal y si $(\alpha, Y)$ es una compactación Hausdorff máxima de $X$.*

Algunas propiedades que se deducen de las compactaciones Hausdorff máximas son las siguientes. Consideremos, en lo que resta de la sección, a $(\mu, \mu X)$ como una compactación Hausdorff máxima de $X$. Los dos siguientes corolarios se siguen del tercer inciso del teorema 2.3.1.

**2.3.3 Corolario:** *Sea $Y$ un espacio Tychonoff y consideremos a $(\alpha, Z)$ como una compactación Hausdorff de $Y$. Si $f\colon X \to Y$ es una función continua, entonces existe una función continua $F\colon \mu X \to Z$ tal que $F \circ \mu = f$.*

**2.3.4 Corolario:** *Si $M \subseteq X$ es tal que toda función continua de $M$ en un espacio compacto se puede extender de manera continua a todo $X$, entonces $\big(\mu\big|_{\mu[M]}, \mathrm{cl}_{\mu X}(\mu[M])\big)$ es una compactación Hausdorff máxima de $M$.*

*En particular, si $M$ es denso en $X$, entonces $\big(\mu\big|_{\mu[M]}, \mathrm{cl}_{\mu X}(\mu[M])\big)$ es una compactación Hausdorff máxima de $X$.*

Con el corolario anterior y el teorema de Tietze, se deduce en siguiente corolario.

**2.3.5 Corolario:** *Supongamos que $X$ es un espacio normal. Para todo $M \subseteq X$ cerrado sucede que $\big(\mu\big|_{M}, \mathrm{cl}_{\mu X}(\mu[M])\big)$ es una compactación Hausdorff máxima de $M$.*

Notemos que si $A \subseteq X$ es tanto abierto como cerrado, la fución característica de $A$ en $X$ es continua. Invocando el quinto inciso del teorema 2.3.1, deducimos el siguiente corolario.

**2.3.6 Corolario:** *Supongamos que $(\mu, \mu X)$ es una compactación máxima proyectiva de $X$. Sea $A \subseteq X$ tanto abierto como cerrado. Entonces la cerradura de $\mu[A]$ en $\mu X$ es un abierto. Por lo tanto, si $X$ es no conexo, entonces $\mu X$ es no conexo.*

Teniendo estas caracterizaciones, ahora somos capaces de determinar si las compactaciones de Čech y de Stone son compactaciones máximas. El siguiente corolario se sigue de los teoremas 1.2.4 y 1.3.11.

**2.3.7 Corolario:** *Las compactaciones de Čech y de Stone de $X$ son máximas.*

Hasta aquí, la conexión entre las compactaciones de Čech y de Stone es evidente y explica la existencia del concepto de «compactación Stone-Čech». En 1943 [18], el matemático Edwin Hewitt (1920–1999) afirmó que el famoso teorema 1.1.2 que Tychonoff demostró en 1930 fue extendido por Stone y por Čech, refiriéndose a sus respectivas compactaciones. Más tarde, en 1949 [12], el matemático Jean Dieudonné (1906–1992), en su crítica del artículo de Hewitt, introduce el término «compactación Stone-Čech». Pero, ¿por qué Hewitt referenció a Stone antes que a Čech en contra del orden alfabético? De acuerdo con Richard E. Chandler en su artículo publicado en el segundo volumen de la serie *Handbook of the History of General Topology* [10], existen dos posibles explicaciones. Una es que Hewitt homenajeó a Stone por ser su director de tesis doctoral y la otra es que simplemente los ordenó de acuerdo a la fecha de publicación de los artículos. Como la compactación de Čech es más sencilla que la de Stone en el sentido de que no requiere muchos conocimientos fuera de la topología general, es usual que se le refiera como la compactación de Stone-Čech, aunque creemos que la mejor manera de utilizar los términos es haciendo que la compactación de Čech sea la construcción explícita y que la figura «Stone-Čech» sea una propiedad que las compactaciones Hausdorff tienen cuando son compactaciones máximas. Es decir, una compactación Hausdorff de $X$ sería una compactación Stone-Čech si satisface alguna condición del teorema 2.3.1.

En las secciones consecuentes introduciremos otras métodos para construir compactaciones Hausdorff que fueron inspiradas por los descubrimientos de Čech y de Stone. También, habiendo introducido el concepto de compactación máxima, determinaremos las condiciones bajo las que dichas compactaciones satisfacen esta condición.

## § 2.4

## La compactación de Wallman-Frink

Un año después [32] de que Stone construyera su compactación, el matemático estadounidense Henry Wallman (1915–1992) se basó en el método utilizado por Stone para poder definir una compactación no necesariamente Hausdorff de un espacio topológico $T_1$ a partir de una colección de subconjuntos de $X$ con ciertas propiedades. Más tarde, en

1964 [15], motivado por estas dos construcciones, el matemático estadounidense Orrin Frink (1901-1988) generalizó ambos métodos y proporcionó las condiciones bajo las que dicha compactación es máxima. En esta sección, estudiaremos sus resultados.

**2.4.1 Definición:** *Sean $X$ un conjunto no vacío y $\mathcal{R} \subseteq \wp(X)$ con $\emptyset, X \in \mathcal{R}$ y si $A, B \in \mathcal{R}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{R}$ y $A \cup B \in \mathcal{R}$. Decimos que un subconjunto $\mathcal{F}$ de $\mathcal{R}$ es un* ***filtro*** *de $\mathcal{R}$ si*

(I) $\emptyset \notin \mathcal{F}$;

(II) *$A, B \in \mathcal{F}$ es suficiente para que $A \cap B \in \mathcal{F}$; y si*

(III) *para todo $B \in \mathcal{R}$ tal que $A \subseteq B$ para algún $A \in \mathcal{F}$ ocurre que $B \in \mathcal{F}$.*

*Decimos que un filtro de $\mathcal{R}$ es un* ***ultrafiltro*** *o un* ***filtro maximal*** *si no está estrictamente contenido en algún filtro de $\mathcal{R}$. Al conjunto de ultrafiltros de $\mathcal{R}$ lo denotamos por $\Omega_{\mathcal{R}}$.*

Notemos que si $\mathcal{R}$ es como en la definición anterior, entonces $(\mathcal{R}, \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado tal que si $A, B \in \mathcal{R}$, entonces $\inf\{A, B\} = A \cap B$ y $\sup\{A, B\} = A \cup B$, es decir, $(\mathcal{R}, \subseteq)$ es una retícula. Por esta razón, introducimos el siguiente concepto.

**2.4.2 Definición:** *Sea $X$ un conjunto no vacío y $\mathcal{R} \subseteq \wp(X)$. Decimos que $\mathcal{R}$ es una* ***retícula de subconjuntos*** *de $X$ si $\emptyset, X \in \mathcal{R}$ y si $A, B \in \mathcal{R}$ implica que $A \cap B \in \mathcal{R}$ y $A \cup B \in \mathcal{R}$.*

Para el resto de esta sección, consideremos que $X$ denota un conjunto no vacío y que $\mathcal{R}$ denota una retícula de subconjuntos de $X$. Para caracterizar a los ultrafiltros de $\mathcal{R}$, recordemos que una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de $X$ tiene la propiedad de la intersección finita si $\mathcal{F} \neq \emptyset$ y si la intersección de toda subcolección finita de $\mathcal{F}$ es no vacía. Además, decimos que $\mathcal{F}$ es una familia centrada maximal si $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de la intersección finita y si no está contenida propiamente en otra familia con la propiedad de la intersección finita.

**2.4.3 Teorema:** *Sea $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{R}$ no vacío. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(I) *$\mathcal{P}$ es un ultrafiltro de $\mathcal{R}$.*

(II) *$\mathcal{P}$ es una familia centrada maximal.*

(III) *$\mathcal{P}$ tiene la propiedad de que $\emptyset \notin \mathcal{P}$, de que $A, B \in \mathcal{P}$ implica que $A \cap B \in \mathcal{P}$ y de que para toda $C \in \mathcal{R}$ sucede que $C \in \mathcal{P}$ es equivalente a que $A \cap C \neq \emptyset$ para toda $A \in \mathcal{P}$.*

DEMOSTRACIÓN: Primero demostraremos que los incisos (II) y (III) son equivalentes. Luego, sabiendo lo anterior, demostraremos que (I) y (II) son equivalentes.

[(II) $\Rightarrow$ (III)] Es claro que $\emptyset \notin \mathcal{P}$ porque, de lo contrario, $\{\emptyset\}$ sería un subconjunto finito de $\mathcal{P}$ tal que $\bigcap\{\emptyset\} = \emptyset$, lo cual es imposible.

Sean $A, B \in \mathcal{P}$. Para ver que $A \cap B \in \mathcal{P}$, basta probar que $\mathcal{P} \cup \{A \cap B\}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Consideremos a $\Gamma \subseteq \mathcal{P} \cup \{A \cap B\}$ finito y no vacío. Si $A \cap B \in \Gamma$, sucede que $(\Gamma \setminus \{A \cap B\}) \cup \{A, B\}$ es un subconjunto finito no vacío de $\mathcal{P}$ cuya intersección coincide con $\bigcap \Gamma$, lo cual implica que $\bigcap \Gamma \neq \emptyset$. Por otro lado, si $A \cap B \notin \Gamma$, entonces $\Gamma \subseteq \mathcal{P}$ y, al ser finito y no vacío, sucede que $\bigcap \mathcal{P} \neq \emptyset$. En conclusión, $\mathcal{P} \cup \{A \cap B\}$ tiene la propiedad de la intersección finita.

Finalmente, sea $C \in \mathcal{P}$. Como para toda $A \in \mathcal{P}$ sucede que $\{A, C\}$ es un subconjunto finito y no vacío de $\mathcal{P}$, entonces $A \cap C \neq \emptyset$. Para el recíproco, supongamos que $C \in \mathcal{R}$ es tal que $A \cap C \neq \emptyset$ para todo $A \in \mathcal{P}$. Entonces $\mathcal{P} \cup \{C\}$ tiene la propiedad de la intersccción finita, lo cual implica que $\mathcal{P} = \mathcal{P} \cup \{C\}$.

[(iii) ⇒ (ii)] Como $\emptyset \notin \mathcal{P}$ y como para cualesquiera $A, B \in \mathcal{P}$ sucede que $A \cap B \in \mathcal{P}$, podemos deducir que $\mathcal{P}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Ahora, supongamos que existe $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{R}$ con la propiedad de la interseción finita tal que $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{F}$. Consideremos a $C \in \mathcal{F}$ y notemos que para toda $A \in \mathcal{P}$ sucede que $\{A, C\}$ es un subconjunto finito no vacío de $\mathcal{F}$, por lo que $A \cap C \neq \emptyset$, lo cual implica que $C \in \mathcal{P}$.

[(i) ⇒ (ii)] Como $\mathcal{P}$ es un ultrafiltro de $\mathcal{R}$, tenemos que $\emptyset \notin \mathcal{P}$ y que $A, B \in \mathcal{P}$ es suficiente para que $A \cap B \in \mathcal{P}$. Así, $\mathcal{P}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Ahora, sea $C \in \mathcal{R}$. Si $C \in \mathcal{P}$, es claro que $A \cap C \neq \emptyset$ para toda $A \in \mathcal{P}$ ya que, de lo contrario, $\emptyset \in \mathcal{P}$. Para el recíproco, supongamos que $A \cap C \neq \emptyset$ para toda $A \in \mathcal{P}$ pero que $C \notin \mathcal{P}$. Consideremos a $\mathcal{F} \doteqdot \mathcal{P} \cup \{R \in \mathcal{R} : C \subseteq R\}$ y notemos que $\mathcal{F}$ es un filtro que contiene estrictamente a $\mathcal{P}$, lo cual es imposible. En conclusión, al ser los incisos (ii) y (iii) equivalentes, tenemos que $\mathcal{P}$ tiene la propiedad de la intersección finita y no está contenido estrictamente en algún otro subconjunto de $\mathcal{R}$ con la propiedad de la intersección finita.

[(ii) ⇒ (i)] Como los incisos (ii) y (iii) son equivalentes, podemos deducir fácilmente que $\emptyset \notin \mathcal{P}$ y que $A, B \in \mathcal{P}$ implica que $A \cap B \in \mathcal{P}$. Ahora, sea $B \in \mathcal{R}$ y supongamos que $B \notin \mathcal{P}$. Entonces existe $C \in \mathcal{P}$ tal que $C \cap B = \emptyset$. Pero, como $\mathcal{P}$ tiene la propiedad de intersección finita, podemos deducir que $A \nsubseteq B$ para toda $A \in \mathcal{P}$. En conclusión, $\mathcal{P}$ es un filtro de $\mathcal{R}$. Finalmente, supongamos que $\mathcal{F}$ es un filtro de $\mathcal{R}$ tal que $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{F}$. Sea $F \in \mathcal{F}$ y notemos que $F \in \mathcal{P}$ porque $A \cap F \neq \emptyset$ para toda $A \in \mathcal{P}$. ⊠

**2.4.4 Teorema:** *Todo subconjunto de $\mathcal{R}$ con la propiedad de la intersección finita está contenida en un ultrafiltro de $\mathcal{R}$.*

Demostración: Sea $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{R}$ con la propiedad de la intersección finita. Consideremos a $\mathfrak{F}(\mathcal{P})$ como la colección de todos los subconjuntos de $\mathcal{R}$ con la propiedad de la intersección finita que contienen a $\mathcal{P}$. Claramente $\mathcal{P} \in \mathfrak{F}(\mathcal{P})$, por lo que $\mathfrak{F}(\mathcal{P})$ es no vacío. En virtud del lema de Zorn [20, 5.4], sea $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{F}(\mathcal{P})$ tal que $(\mathfrak{C}, \subseteq)$ es un conjunto linealmente ordenado. Afirmamos que $\bigcup \mathfrak{C}$ es una cota superior de $\mathfrak{C}$ en $(\mathfrak{F}(\mathcal{P}), \subseteq)$.

Notemos $\bigcup \mathfrak{C}$ tiene la propiedad de la intersección finita por que si $\Gamma \in [\bigcup \mathfrak{C}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$, entonces para cada $A \in \Gamma$ existe $\mathcal{P}_A \in \mathfrak{C}$ tal que $A \in \mathcal{P}_A$ y, al ser $\Gamma$ finito, se deduce la existencia de un $M \in \Gamma$ tal que $\mathcal{P}_M = \text{máx}\{\mathcal{P}_A : A \in \Gamma\}$, con lo que $\Gamma \subseteq \mathcal{P}_M$, pero como $\mathcal{P}_M$ tiene la propiedad de la intersección finita, podemos deducir que $\bigcup \Gamma \neq \emptyset$. Además, como $\mathcal{P}$ es un subconjunto de todo elemento de $\mathfrak{C}$, tenemos que $\mathcal{P} \subseteq \bigcup \mathfrak{C}$. Por lo tanto $\bigcup \mathfrak{C} \in \mathfrak{F}(\mathcal{P})$. Finalmente, como todo elemento de $\mathfrak{C}$ es un subconjunto de $\bigcup \mathfrak{C}$, podemos concluir que

$\bigcup \mathcal{C}$ es una cota superior de $\mathcal{C}$ en $(\mathcal{F}(\mathcal{P}), \subseteq)$. ⊠

El teorema anterior nos permite considerar, para cada elemento $A$ de $\mathcal{R}$, al conjunto de ultrafiltros de $\mathcal{R}$ que tienen a $A$ como elemento. Consideremos, justificados por lo anterior, a la función $\vartheta_{\mathcal{R}} : \mathcal{R} \to \wp(\Omega_{\mathcal{R}})$ dada por

$$\vartheta_{\mathcal{R}}(A) = \{\mathcal{F} \in \Omega_{\mathcal{R}} : A \in \mathcal{F}\}$$

para toda $A \in \mathcal{R}$. Algunas de sus propiedades están sumarizadas en los dos enunciados siguientes.

**2.4.5 Lema:** *La función $\vartheta_{\mathcal{R}} : \mathcal{R} \to \wp(\Omega_{\mathcal{R}})$ tiene la propiedad de que*

(I) $\vartheta_{\mathcal{R}}(\emptyset) = \emptyset$;

(II) $\vartheta_{\mathcal{R}}(X) = \Omega_{\mathcal{R}}$;

(III) $\vartheta_{\mathcal{R}}(A \cup B) = \vartheta_{\mathcal{R}}(A) \cup \vartheta_{\mathcal{R}}(B)$;

(IV) $\vartheta_{\mathcal{R}}(A \cap B) = \vartheta_{\mathcal{R}}(A) \cap \vartheta_{\mathcal{R}}(B)$; *y*

(V) $\{\mathcal{F}\} = \bigcap\{\vartheta_{\mathcal{R}}(F) : F \in \mathcal{F}\}$,

*para cualesquiera $A, B \in \mathcal{R}$ y $\mathcal{F} \in \Omega_{\mathcal{R}}$.*

DEMOSTRACIÓN: Es claro que $\vartheta_{\mathcal{R}}(\emptyset) = \emptyset$ y que $\vartheta_{\mathcal{R}}(X) = \Omega_{\mathcal{R}}$. Ahora, sean $A, B \in \mathcal{R}$ y $\mathcal{F} \in \Omega_{\mathcal{R}}$. Notemos que $A \cup B \in \mathcal{F}$ si y solamente si $A \in \mathcal{F}$ o $B \in \mathcal{F}$, lo cual implica que

$$\{\mathcal{G} \in \Omega_{\mathcal{R}} : A \cup B \in \mathcal{G}\} = \{\mathcal{G} \in \Omega_{\mathcal{R}} : A \in \mathcal{G}\} \cup \{\mathcal{G} \in \Omega_{\mathcal{R}} : B \in \mathcal{G}\},$$

lo cual demuestra el tercer inciso. Notemos que $A \cap B \in \mathcal{F}$ si y solamente si $A \in \mathcal{F}$ y $B \in \mathcal{F}$, por lo tanto

$$\{\mathcal{G} \in \Omega_{\mathcal{R}} : A \cap B \in \mathcal{G}\} = \{\mathcal{G} \in \Omega_{\mathcal{R}} : A \in \mathcal{G}\} \cap \{\mathcal{G} \in \Omega_{\mathcal{R}} : B \in \mathcal{G}\},$$

lo cual demuestre el cuarto inciso. Finalmente, notemos que si $\mathcal{G} \in \bigcap\{\vartheta_{\mathcal{R}}(F) : F \in \mathcal{F}\}$, entonces $\mathcal{G} \in \vartheta_{\mathcal{R}}(F)$ para todo $F \in \mathcal{F}$, es decir, $F \in \mathcal{G}$ para toda $F \in \mathcal{F}$, lo cual implica que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, pero como $\mathcal{G}$ es un ultrafiltro de $\mathcal{R}$, tenemos que $\mathcal{G} = \mathcal{F}$. Así, por lo anterior y como $\mathcal{F} \in \vartheta_{\mathcal{R}}(F)$ para toda $F \in \mathcal{F}$, hemos demostrado el quinto inciso. ⊠

**2.4.6 Teorema:** *Sea $\mathcal{B}_{\mathcal{R}} \doteqdot \{\Omega_{\mathcal{R}} \setminus \vartheta_{\mathcal{R}}(A) : A \in \mathcal{R}\}$. Entonces*

(I) $\bigcup \mathcal{B}_{\mathcal{R}} = \Omega_{\mathcal{R}}$; *y*

(II) *para cualesquiera $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}$ y $\mathcal{F} \in B_1 \cap B_2$ existe $B_3 \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}$ tal que $\mathcal{F} \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.*

Por el teorema anterior, para cada retícula $\mathcal{R}$ de subconjuntos de un conjunto $X$ no vacío, la colección $\mathcal{B}_{\mathcal{R}}$ genera una topología $\mathcal{T}_{\mathcal{R}}$ en $\Omega_{\mathcal{R}}$ que tiene a $\mathcal{B}_{\mathcal{R}}$ como base. Notemos que, por el lema 2.4.5, el conjunto $\vartheta_{\mathcal{R}}[\mathcal{R}]$ es una base para los cerrados de $(\Omega_{\mathcal{R}}, \mathcal{T}_{\mathcal{R}})$.

**2.4.7 Teorema:** *El espacio $(\Omega_{\mathcal{R}}, \mathcal{T}_{\mathcal{R}})$ es compacto y $T_1$.*

Demostración: Por el lema 2.4.5, sucede que $\{\mathcal{F}\} = \bigcap\{\vartheta_{\mathcal{R}}(F) : F \in \mathcal{F}\}$ para toda $\mathcal{F} \in \Omega_{\mathcal{R}}$. Como $\vartheta_{\mathcal{R}}[\mathcal{R}]$ es una base para los cerrados de $(\Omega_{\mathcal{R}}, \mathcal{T}_{\mathcal{R}})$, tenemos que $\{\mathcal{F}\}$ es cerrado en $(\Omega_{\mathcal{R}}, \mathcal{T}_{\mathcal{R}})$, lo cual implica que $(\Omega_{\mathcal{R}}, \mathcal{T}_{\mathcal{R}})$ es un espacio $T_1$.

Ahora, demostraremos que toda familia no vacía de cerrados de $(\Omega_{\mathcal{R}}, \mathcal{T}_{\mathcal{R}})$ con la propiedad de intersección finita tiene intersección no vacía, para lo cual, basta demostrarlo para cualquier familia no vacía de elementos de $\vartheta_{\mathcal{R}}[\mathcal{R}]$ ya que dicho conjunto es una base para los cerrados de $(\Omega_{\mathcal{R}}, \mathcal{T}_{\mathcal{R}})$.

Sea $\mathfrak{F} \subseteq \vartheta_{\mathcal{R}}[\mathcal{R}]$ no vacío con la propiedad de la intersección finita. Por el lema 2.4.5, tenemos que $\vartheta_{\mathcal{R}}(A \cap B) = \vartheta_{\mathcal{R}}(A) \cap \vartheta_{\mathcal{R}}(B)$ para cualesquieta $A, B \in \mathcal{R}$, podemos deducir que cualquier subconjunto de $\vartheta_{\mathcal{R}}^{-1}[\mathfrak{F}]$ finito no vacío tiene intersección no vacía. Por lo tanto, gracias al teorema 2.4.4 existe $\mathcal{U} \in \Omega_{\mathcal{R}}$ de tal manera que $\vartheta_{\mathcal{R}}^{-1}[\mathfrak{F}] \subseteq \mathcal{U}$. Notemos que si $\mathcal{G} \in \mathfrak{F}$, entonces existe $A \in \mathcal{R}$ tal que $\vartheta_{\mathcal{R}}(A) = \mathcal{G}$ ya que $\mathfrak{F} \subseteq \vartheta_{\mathcal{R}}[\mathcal{R}]$, pero como $\vartheta_{\mathcal{R}}^{-1}[\mathcal{F}] \subseteq \mathcal{U}$, tenemos que $A \in \mathcal{U}$, lo cual implica que $\mathcal{U} \in \vartheta_{\mathcal{R}}(A) = \mathcal{G}$. Luego, $\mathcal{U} \in \bigcap \mathcal{F}$, por lo que $\bigcap \mathfrak{F} \neq \emptyset$. ⊠

En síntesis, hemos construido un espacio topológico compacto y $T_1$ para cualquier conjunto no vacío $X$ y cualquier retícula $\mathcal{R}$. Notemos que si $X$ no es un espacio compacto, entonces existen familias de cerrados de $X$ con la propiedad de la intersección finita cuya intersección es vacía. Dichas familias representan un punto en $\Omega_{\mathcal{R}}$ haciéndonos imaginar que $\Omega_{\mathcal{R}}$ tiene los puntos que le hacen falta a $X$ para llegar a la compacidad. Con el propósito de encontrar un encaje de $X$ en $\Omega_{\mathcal{R}}$, supongamos, para el resto de la sección, que $X$ es un espacio $T_1$ y definamos a $\omega_{\mathcal{R}} : X \to \wp(\mathcal{R})$ mediante

$$\omega_{\mathcal{R}}(x) = \{A \in \mathcal{R} : x \in A\}$$

para cada $x \in X$. Ahora, nuestro propósito será encontrar las condiciones que debe cumplir $\mathcal{R}$ para que $\omega_{\mathcal{R}}$ funcione como encaje del espacio $X$ en $(\Omega_{\mathcal{R}}, \mathcal{T}_{\mathcal{R}})$.

**2.4.8 Definición:** *Sea $X$ un conjunto no vacío y $\mathcal{R}$ una retícula de subconjuntos de $X$. Decimos que $\mathcal{R}$ es **disyuntiva** si para cualesquiera $x \in X$ y $A \in \mathcal{R}$ tales que $x \notin A$ existe $B \in \mathcal{R}$ de tal manera que $x \in B$ y $A \cap B = \emptyset$.*

**2.4.9 Teorema:** *El rango de $\omega_{\mathcal{R}}$ es un subconjunto de $\Omega_{\mathcal{R}}$ si y solamente si $\mathcal{R}$ es una retícula disyuntiva.*

Demostración: $[\Rightarrow]$ Sean $x \in X$ y $A \in \mathcal{R}$ tales que $x \notin A$, entonces $A \notin \omega_{\mathcal{R}}(x)$ y, al ser $\omega_{\mathcal{R}}(x)$ un ultrafiltro de $\mathcal{R}$, por el teorema 2.4.3 deducimos que existe $B \in \omega_{\mathcal{R}}(x)$ tal que $A \cap B = \emptyset$.

$[\Leftarrow]$ Sea $x \in X$. Claramente $\emptyset \notin \omega_{\mathcal{R}}(x)$ y $A, B \in \omega_{\mathcal{R}}(x)$ implica que $A \cap B \in \omega_{\mathcal{R}}(x)$. Además, si $A \in \omega_{\mathcal{R}}(x)$ y $A \subseteq B \in \mathcal{R}$, entonces $B \in \omega_{\mathcal{R}}(x)$. Sea $C \in \mathcal{R}$ y supongamos que $A \cap C \neq \emptyset$ para todo $A \in \omega_{\mathcal{R}}(x)$. Como $\mathcal{R}$ es disyuntiva, sucede que $x \in C$. Además, por el teorema 2.4.3 concluimos que $\omega_{\mathcal{R}}(x)$ es un ultrafiltro de $\mathcal{R}$. ⊠

En lo que resta de la sección, bajo la justificación del teorema anterior, supondremos que $\mathcal{R}$ es una retícula disyuntiva de $X$.

El siguiente lema, que nos ayudará a encontrar las condiciones necesarias y suficientes para que $\omega_{\mathcal{R}}$ sea continua, es consecuencia del hecho de que $\omega_{\mathcal{R}}(x) \in \vartheta_{\mathcal{R}}(A)$ es equivalente a que $x \in A$ para cualesquiera $x \in X$ y $A \in \mathcal{R}$.

**2.4.10 Lema:** *Para toda $A \in \mathcal{R}$ sucede que $\omega_{\mathcal{R}}^{-1}\left[\vartheta_{\mathcal{R}}(A)\right] = A$.*

**2.4.11 Teorema:** *La función $\omega_{\mathcal{R}}$ es continua si y solamente si todo elemento de $\mathcal{R}$ es cerrado en $X$.*

**2.4.12 Definición:** *Sean $X$ un espacio topológico y $\mathcal{R}$ una retícula de subconjuntos de $X$. Decimos que $\mathcal{R}$* ***genera a los cerrados*** *de $X$ si todo cerrado de $X$ puede expresarse como la intersección de los elementos de algún subconjunto de $\mathcal{R}$.*

El siguiente lema se deduce inmediatamente de las definiciones de $\omega_{\mathcal{R}}$ y de $\vartheta_{\mathcal{R}}$ y nos servirá para encontrar las condiciones necesarias y suficientes para que $\omega_{\mathcal{R}}$ sea inyectiva y para que $\omega_{\mathcal{R}}^{-1}\colon \omega_{\mathcal{R}}[X] \to X$ sea continua.

**2.4.13 Lema:** *Para toda $A \in \mathcal{R}$ sucede que $\omega_{\mathcal{R}}[A] \subseteq \vartheta_{\mathcal{R}}(A)$.*

**2.4.14 Teorema:** *La función $\omega_{\mathcal{R}}$ es inyectiva y $\omega_{\mathcal{R}}^{-1}\colon \omega_{\mathcal{R}}[X] \to X$ es continua si y solamente si $\mathcal{R}$ genera a los cerrados de $X$.*

Demostración: $[\Rightarrow]$ Sea $Z$ un subconjunto cerrado de $X$. Como $\omega_{\mathcal{R}}^{-1}$ es continua, tenemos que $\left(\omega_{\mathcal{R}}^{-1}\right)^{-1}[Z]$ es cerrado en $\omega_{\mathcal{R}}[X]$ pero, como $\omega_{\mathcal{R}}$ es inyectiva, simplemente tenemos que $\omega_{\mathcal{R}}[Z]$ es cerrado en $\omega_{\mathcal{R}}[X]$. Como $\vartheta_{\mathcal{R}}[\mathcal{R}]$ es una base para los cerrados de $\left(\Omega_{\mathcal{R}}, \mathcal{T}_{\mathcal{R}}\right)$, existe $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{R}$ de tal manera que

$$\omega_{\mathcal{R}}[Z] = \omega_{\mathcal{R}}[X] \cap \left(\bigcap\left\{\vartheta_{\mathcal{R}}[\mathcal{Q}]\right\}\right).$$

A partir de lo cual podemos deducir que

$$Z = \bigcap\left\{\omega_{\mathcal{R}}^{-1}\left[\vartheta_{\mathcal{R}}(A)\right] : A \in \mathcal{Q}\right\}.$$

Invocando el lema 2.4.10, tenemos que $Z$ puede expresarse como la intersección de elementos de $\mathcal{R}$, a saber, de los de $\mathcal{Q}$.

$[\Leftarrow]$ Sean $x, y \in X$ distintos. Como $X$ es $T_1$ y $\mathcal{R}$ genera a los cerrados de $X$, tenemos que existen $\mathcal{Q}_x$ y $\mathcal{Q}_y$ subconjuntos de $\mathcal{R}$ tales que

$$\{x\} = \bigcap \mathcal{Q}_x \quad \text{y} \quad \{y\} = \bigcap \mathcal{Q}_y.$$

Lo cual implica que $\omega_{\mathcal{R}}(x) \neq \omega_{\mathcal{R}}(y)$ porque $\mathcal{Q}_x \neq \mathcal{Q}_y$ y $\mathcal{Q}_z \subseteq \omega_{\mathcal{R}}(z)$ para cada $z \in \{x, y\}$. Siendo de nuestro conocimiento que $\omega_{\mathcal{R}}$ es inyectiva, entonces la relación $\omega_{\mathcal{R}}^{-1}$ de $X$ en

$\omega_{\mathcal{R}}[X]$ es una función. Ahora, sea $Z \subseteq X$ cerrado. Entonces existe $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{R}$ de tal manera que $Z = \bigcap \mathcal{Q}$ y notemos que, por el lema 2.4.13 y por el hecho de que $\omega_{\mathcal{R}}$ es inyectiva, tenemos que

$$\omega_{\mathcal{R}}[Z] = \bigcap \left\{ \omega_{\mathcal{R}}[A] \cap \vartheta_{\mathcal{R}}(A) : A \in \mathcal{Q} \right\},$$

lo cual nos garantiza la continuidad de $\omega_{\mathcal{R}}^{-1}$. ⊠

Finalmente, de los teoremas anteriores podemos obtener el siguiente.

**2.4.15 Teorema:** *Sean $X$ un espacio topológico $T_1$, $\mathcal{R}$ una retícula disyuntiva de $X$, $\Omega_{\mathcal{R}}$ el conjunto de ultrafiltros de $\mathcal{R}$ dotado de la topología cuyos cerrados son la intersección de elementos de la forma $\left\{ \mathcal{F} \in \Omega_{\mathcal{R}} : A \in \mathcal{F} \right\}$ con $A \in \mathcal{R}$ y $\omega_{\mathcal{R}} : X \to \Omega_{\mathcal{R}}$ dada por*

$$\omega_{\mathcal{R}}(x) = \left\{ A \in \mathcal{R} : x \in A \right\}.$$

*Entonces $\omega_{\mathcal{R}}$ es un encaje si y solamente si todo elemento de $\mathcal{R}$ es cerrado en $X$ y $\mathcal{R}$ genera a los cerrados de $X$.*

En lo que resta de la sección, supondremos que $\mathcal{R}$ es disyuntiva, que genera a los cerrados de $X$ y que es un subconjunto de los cerrados de $X$. Por el teorema anterior es claro que la pareja $(\omega_{\mathcal{R}}, \omega_{\mathcal{R}} X)$, donde $\omega_{\mathcal{R}} X$ es la cerradura de $\omega_{\mathcal{R}}[X]$ en $\Omega_{\mathcal{R}}$, resulta ser una compactación de $X$. Pero antes de definir indiscrimidamente compactaciones a partir de retículas con las propiedades antes mencionadas, prestemos atención a la siguiente proposición.

**2.4.16 Proposición:** *Sea $A \in \mathcal{R}$. Entonces la cerradura de $\omega_{\mathcal{R}}[A]$ en $\Omega_{\mathcal{R}}$ es $\vartheta_{\mathcal{R}}(A)$.*

Demostración: A partir del lema 2.4.13, concluimos que la cerradura de $\omega_{\mathcal{R}}[A]$ en $\Omega_{\mathcal{R}}$ se queda contenida en $\vartheta_{\mathcal{R}}(A)$. Para obtener la contención contraria, consideremos a $Z \in \mathcal{R}$ tal que $\omega_{\mathcal{R}}[A] \subseteq \vartheta_{\mathcal{R}}(Z)$. Notemos que basta demostrar que $\vartheta_{\mathcal{R}}(A) \subseteq \vartheta_{\mathcal{R}}(Z)$ gracias al teorema 2.4.6. Sea $\mathcal{U} \in \Omega_{\mathcal{R}}$ tal que $A \in \mathcal{U}$. Si $x \in A$, entonces $\omega_{\mathcal{R}}(x) \in \vartheta_{\mathcal{R}}(Z)$, con lo que $Z \in \omega_{\mathcal{R}}(x)$, lo cual implica que $x \in Z$. Por lo tanto $A \subseteq Z$, pero como $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro de $\mathcal{R}$, tenemos que $Z \in \mathcal{U}$. En conclusión, $\vartheta_{\mathcal{R}}(A) \subseteq \vartheta_{\mathcal{R}}(Z)$. ⊠

En particular, debido a que $\vartheta_{\mathcal{R}}(X) = \Omega_{\mathcal{R}}$, tenemos que la cerradura de $\omega_{\mathcal{R}}[X]$ en $\Omega_{\mathcal{R}}$ coincide con $\Omega_{\mathcal{R}}$, por lo que la pareja $(\omega_{\mathcal{R}}, \Omega_{\mathcal{R}})$ resulta ser una compactación de $X$, lo cual justifica la siguiente definición.

**2.4.17 Definición:** *Sea $X$ un espacio topológico $T_1$ y $\mathcal{R}$ una retícula disyuntiva de $X$ tal que todo elemento de $\mathcal{R}$ es cerrado en $X$ y que genera a los cerrados de $X$. Definimos a la* ***compactación de Wallman-Frink*** *de $X$ acorde con $\mathcal{R}$ como la pareja $(\omega_{\mathcal{R}}, \Omega_{\mathcal{R}})$ donde $\Omega_{\mathcal{R}}$ el conjunto de ultrafiltros de $\mathcal{R}$ dotado de la topología con la propiedad de que sus cerrados son la intersección de elementos de la forma $\left\{ \mathcal{F} \in \Omega_{\mathcal{R}} : A \in \mathcal{F} \right\}$ con $A \in \mathcal{R}$ y donde $\omega_{\mathcal{R}} : X \to \Omega_{\mathcal{R}}$ está dada* *por*

$$\omega_{\mathcal{R}}(x) = \{A \in \mathcal{R} : x \in A\}.$$

A continuación, determinaremos cuándo la compactación de Wallman-Frink acorde con una retícula de $X$ es una compactación Hausdorff. Dicho resultado fue enunciado y demostrado por Frink en 1964 [15], para lo cual, introdujo el siguiente concepto.

**2.4.18 Definición:** *Sea $X$ un espacio topológico $T_1$ y $\mathcal{R}$ una retícula de $X$. Decimos que $\mathcal{R}$ es una **retícula normal** si $R$ es disyuntiva, si todo elemento de $\mathcal{R}$ es un cerrado de $X$, si genera a los cerrados de $X$ y si para cualesquiera $A, B \in \mathcal{R}$ ajenos existen $A', B' \in \mathcal{R}$ tales que $A \subseteq X \setminus A'$, $B \subseteq X \setminus B'$ y $(X \setminus A') \cap (X \setminus B') = \emptyset$.*

**2.4.19 Teorema:** *Sea $X$ un espacio topológico $T_1$ y $\mathcal{R}$ una retícula de $X$. La compactación de Wallman-Frink de $X$ acorde con $\mathcal{R}$ es una compactación Hausdorff de $X$ siempre que $\mathcal{R}$ es una retícula normal.*

DEMOSTRACIÓN: Como $(\omega_{\mathcal{R}}, \Omega_{\mathcal{R}})$ es una compactación de $X$, basta ver que $\Omega_{\mathcal{R}}$ es Hausdorff. Sean $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1 \in \Omega_{\mathcal{R}}$ distintos. Como dichos puntos son ultrafiltros de $X$, existen $A_0, A_1 \in \mathcal{R}$ tales que $A_0 \in \mathcal{F}_0$, $A_1 \in \mathcal{F}_1$ y $A_0 \cap A_1 = \emptyset$. Como $\mathcal{R}$ es normal, existen $B_0, B_1 \in \mathcal{R}$ tales que $A_0 \subseteq X \setminus B_0$, $A_1 \subseteq X \setminus B_1$ y que $(X \setminus B_0) \cap (X \setminus B_1) = \emptyset$. Afirmamos que los conjuntos $\Omega_{\mathcal{R}} \setminus \vartheta_{\mathcal{R}}(B_0)$ y $\Omega_{\mathcal{R}} \setminus \vartheta_{\mathcal{R}}(B_1)$ son abiertos de $\Omega_{\mathcal{R}}$ tales que

$$\begin{aligned} & \vartheta_{\mathcal{R}}(A_0) \subseteq \Omega_{\mathcal{R}} \setminus \vartheta_{\mathcal{R}}(B_0), \\ & \vartheta_{\mathcal{R}}(A_1) \subseteq \Omega_{\mathcal{R}} \setminus \vartheta_{\mathcal{R}}(B_1) \\ \text{y} \qquad & \big(\Omega_{\mathcal{R}} \setminus \vartheta_{\mathcal{R}}(B_0)\big) \cap \big(\Omega_{\mathcal{R}} \setminus \vartheta_{\mathcal{R}}(B_1)\big) = \emptyset. \end{aligned}$$

En efecto, sean $i \in \{0,1\}$, $\mathcal{F} \in \varpi[A_i]$ y $\mathcal{G} \in \Omega_{\mathcal{R}} \setminus \vartheta_{\mathcal{R}}(B_i)$. Como $A_i \subseteq X \setminus B_i$, tenemos que $B_i \notin \mathcal{F}$, lo cual implica que $\mathcal{F} \in \Omega_{\mathcal{R}} \setminus \vartheta_{\mathcal{R}}(B_i)$. Por otra parte, como $\mathcal{G} \notin \vartheta_{\mathcal{R}}(B_i)$, existe $G \in \mathcal{G}$ tal que $G \cap B_i = \emptyset$ pero como $X \setminus B_0$ y $X \setminus B_1$ son ajenos, entonces $G \cap B_{1-i} \neq \emptyset$, haciendo que $\mathcal{G} \in \vartheta_{\mathcal{R}}(B_{1-i})$, o bien, que $\mathcal{G} \notin \Omega_{\mathcal{R}} \setminus \vartheta_{\mathcal{R}}(B_{i-1})$. Finalmente, notemos que $\mathcal{F}_0 \in \vartheta_{\mathcal{R}}(A_0)$ y que $\mathcal{F}_1 \in \vartheta_{\mathcal{R}}(A_1)$, por lo que $\Omega_{\mathcal{R}}$ es Hausdorff. ⊠

## § 2.5

## La extensión de Wallman

Consideremos a $X$ un espacio $T_1$ y a $\mathcal{F}$ la colección de subconjuntos cerrados de $X$. Notemos que $\mathcal{F}$ es una retícula disyuntiva —porque $X$ es un espacio $T_1$— de $X$ que genera a los cerrados de $X$. La compactación Wallman-Frink de $X$ acorde con $\mathcal{F}$ fue la compactación que Wallman desarrolló en 1938 [32] inspirándose en el método que utilizó Čech.

Dicha compactación, conocida como ***extensión de Wallman***, puede que no sea $T_2$. El siguiente teorema determina las condiciones suficientes y necesarias para que la extensión de Wallman sea una compactación Hausdorff de $X$.

**2.5.1 Teorema:** *Sea $X$ un espacio topológico $T_1$ y consideremos a $\mathcal{F}$ como la colección de subconjuntos cerrados de $X$. La compactación Wallman-Frink de $X$ acorde con $\mathcal{F}$ es una compactación Hausdorff de $X$ si y solamente si $X$ es normal.*

Demostración: $[\Rightarrow]$ Sean $E, F \in \mathcal{F}$ ajenos. Por la proposición 2.4.16, las cerraduras de $\omega_{\mathcal{F}}[E]$ y de $\omega_{\mathcal{F}}[F]$ en $\Omega_{\mathcal{F}}$ son $\vartheta_{\mathcal{F}}(E)$ y $\vartheta_{\mathcal{F}}(F)$, las cuales resultan ser ajenas en gracias al lema 2.4.5. Ahora, debido a que $\Omega_{\mathcal{F}}$ es tanto compacto como Hausdorff y a que $\omega_{\mathcal{F}}$ es continua, tenemos que existen abiertos $U, V \subseteq X$ ajenos tales que $E \subseteq U$ y $F \subseteq V$.

$[\Leftarrow]$ En virtud del teorema 2.4.19, sean $E, F \in \mathcal{F}$ ajenos. Por la normalidad de $X$, existen $U$ y $V$ abiertos de $X$ ajenos tales que $E \subseteq U$ y $F \subseteq V$. Si $E' = X \setminus V$ y $F' = X \setminus U$, entonces $E', F' \in \mathcal{F}$ son tales que $E \subseteq X \setminus E'$, $F \subseteq X \setminus F'$ y $(X \setminus E') \cap (X \setminus F') = \emptyset$. Por lo tanto, $\mathcal{F}$ es una retícula normal de $X$. ⊠

Gracias al teorema anterior y al corolario 2.3.2, podemos deducir una caracterización de los espacios $T_4$ en términos de la extensión de Wallman.

**2.5.2 Corolario:** *Sea $X$ un espacio topológico $T_1$ y consideremos a $\mathcal{F}$ como la colección de subconjuntos cerrados de $X$. El espacio $X$ es normal si y solamente si la extensión de Wallman de $X$ es una compactación Hausdorff máxima de $X$.*

Demostración: $[\Rightarrow]$ En virtud del corolario 2.3.2, sean $E, F \subseteq X$ cerrados y ajenos. Por la proposición 2.4.16, las cerraduras de $\omega_{\mathcal{F}}[E]$ y de $\omega_{\mathcal{F}}[F]$ en $\Omega_{\mathcal{F}}$ son $\vartheta_{\mathcal{F}}(E)$ y $\vartheta_{\mathcal{F}}(F)$, las cuales resultan ser ajenas en gracias al lema 2.4.5. Por lo tanto, la extensión de Wallman de $X$ es una compactación Hausdorff máxima de $X$.

$[\Leftarrow]$ Como la extensión de Wallman de $X$ es una compactación Hausdorff máxima de $X$, en particular es una compactación Hausdorff de $X$. Así, por el teorema anterior concluimos que $X$ es normal. ⊠

**§ 2.6**

## La compactación de Gillman-Jerison

En el título *Rings of Continuous Functions* de los matemáticos estadounidenses Leonard Gillman (1917–2009) y Meyer Jerison (1922–1995), publicado en 1960, se construye una compactación Hausdorff máxima de un espacio Tychonoff [16, cap. 6] de una manera similar a como Wallman contruyó su compactación. Para presentarla, recordemos que un subcojunto $A$ de un espacio topológico $X$ es un conjunto funcionalmente cerrado si existe una función continua $f\colon X \to [0,1]$ tal que $A = f^{-1}[\{0\}]$; por otro lado, decimos que $A$ es un conjunto funcionalmente abierto si existe una función continua $f\colon X \to [0,1]$ de tal manera que $A = f^{-1}\big[(0,1]\big]$.

**2.6.1 Proposición:** *Sea $\mathcal{Z}$ la colección de conjuntos funcionalmente cerrados de un espacio Tychonoff $X$. Entonces $\mathcal{Z}$ es una retícula de $X$.*

DEMOSTRACIÓN: Consideremos a las funciones $f_X, f_\emptyset : X \to [0,1]$ dadas por

$$\begin{aligned} & f_X(x) = 0 \\ \text{y por} \qquad & f_\emptyset(x) = 1 \end{aligned}$$

para toda $x \in X$. Como dichas funciones son continuas, tenemos que tanto $X$ como $\emptyset$ son conjuntos funcionalmente cerrados de $X$.

Ahora, sean $A, B \in \mathcal{Z}$. Entonces existen $f_A, f_B : X \to [0,1]$ tales que $A = f_A^{-1}\big[\{0\}\big]$ y $B = f_B^{-1}\big[\{0\}\big]$. Consideremos a las funciones $f_{A\cup B}, f_{A\cap B} : X \to [0,1]$ dadas por

$$\begin{aligned} & f_{A\cup B}(x) = f_A(x)\cdot f_B(x) \\ \text{y por} \qquad & f_{A\cap B}(x) = \frac{f_A(x)+f_B(x)}{2} \end{aligned}$$

para toda $x \in X$. Notemos que

$$\begin{aligned} & f_{A\cup B}^{-1}\big[\{0\}\big] = f_A^{-1}\big[\{0\}\big] \cup f_B^{-1}\big[\{0\}\big] \\ \text{y que} \qquad & f_{A\cap B}^{-1}\big[\{0\}\big] = f_A^{-1}\big[\{0\}\big] \cap f_B^{-1}\big[\{0\}\big], \end{aligned}$$

lo cual implica que tanto $A \cup B$ como $A \cap B$ son funcionalmente cerrados. ☒

En lo que resta de la sección, supondremos que $X$ es un espacio Tychonoff y que $\mathcal{Z}$ es la colección de los conjuntos funcionalmente cerrados de $X$. A los filtros y ultrafiltros de $\mathcal{Z}$ se les suele llamar ***z-filtros*** y ***z-ultrafiltros***, respectivamente. Cabe destacar que dichos conceptos son conceptos topológicos y no meramente conjuntistas, como los filtros y ultrafiltros. A la compactación de Wallman-Frink acorde con $\mathcal{Z}$ la bautizamos como ***compactación de Gillman-Jerison***.

**2.6.2 Teorema:** *La retícula $\mathcal{Z}$ es normal.*

DEMOSTRACIÓN: La retícula $\mathcal{Z}$ es disyuntiva porque si $x \in X$ y $Z \in \mathcal{Z}$ son tales que $x \notin Z$, entonces existe una función continua $f\colon X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ y $Z \subseteq f^{-1}\big[\{1\}\big]$. Notemos que $f^{-1}\big[\{0\}\big]$ es un elemento de $\mathcal{Z}$ ajeno a $Z$ que contiene a $x$.

Es claro que todo conjunto funcionalmente cerrado es cerrado, por lo que $\mathcal{Z}$ se queda contenido en los cerrados de $X$.

Como $X$ es Tychonoff, los conjuntos funcionalmente abiertos generan una base para $X$. Por lo tanto, todo cerrado de $X$ es la intersección de un subconjunto de $\mathcal{Z}$.

Finalmente, sean $A, B \in \mathcal{Z}$ ajenos. Entonces existen $f_A, f_B : X \to [0,1]$ continuas de tal manera que $A = f_A^{-1}[\{0\}]$ y $B = f_B^{-1}[\{0\}]$. Como $A \cap B = \emptyset$, si $f\colon X \to [0,1]$ está dada por

$$f(x) = \frac{f_B(x)}{f_B(x) + f_A(x)}$$

para toda $x \in X$, tenemos que $f$ es continua y además $A = f^{-1}[\{0\}]$ y $B = f^{-1}[\{1\}]$. Consideremos a $A' = \{x \in X : f(x) \geq \frac{1}{2}\}$ y a $B' = \{x \in X : f(x) \leq \frac{1}{2}\}$ y notemos que sus complementos son ajenos y cumplen que $A \subseteq X \setminus A'$ y $B \subseteq X \setminus B'$. Además, si $f_{A'}, f_{B'} : X \to [0,1]$ están dadas por

$$f_{A'} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A' \\ 1 - 2f(x) & \text{si } x \notin A' \end{cases}$$

y por
$$f_{B'} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in B' \\ 2f(x) + 1 & \text{si } x \notin B', \end{cases}$$

entonces $f_{A'}$ y $f_{B'}$ son continuas y son tales que $A' = f_{A'}^{-1}[\{0\}]$ y $B' = f_{B'}^{-1}[\{0\}]$. ⊠

Por los teoremas 1.1.3, 2.4.19 y 2.6.2, tenemos el siguiente corolario, el cual nos proporciona otra caracterización de los espacios Tychonoff aparte del teorema 1.1.2.

**2.6.3 Corolario:** *Sea $X$ un espacio $T_1$. Entonces $X$ es Tychonoff si y solamente si existe una retícula $\mathcal{R}$ de subconjuntos de $X$ que sea una retícula normal.*

Finalizaremos este capítulo probando que la compactación de Gillman-Jerison de un espacio Tychonoff es una compactación Hausdorff máxima.

**2.6.4 Teorema:** *La compactación de Gillman-Jerison de $X$ es una compactación Hausdorff máxima de $X$.*

Demostración: En virtud del teorema 2.3.1, sean $A, B \subseteq X$ completamente separados. Entonces existe $f\colon X \to [0,1]$ continua tal que $A \subseteq f^{-1}[\{0\}]$ y $B \subseteq f^{-1}[\{1\}]$. Notemos que si $A' = f^{-1}[\{0\}]$ y si $B' = f^{-1}[\{1\}]$, entonces $A'$ y $B'$ son conjuntos funcionalmente cerrados y ajenos tales que $A \subseteq A'$ y $B \subseteq B'$. Por la proposición 2.4.16, las cerraduras de $\omega_{\mathcal{Z}}[A]$ y de $\omega_{\mathcal{Z}}[B]$ se quedan contenidas en $\vartheta_{\mathcal{Z}}(A')$ y en $\vartheta_{\mathcal{Z}}(B')$ las cuales, por el lema 2.4.5, son ajenas. Así, $(\omega_{\mathcal{R}}, \Omega_{\mathcal{R}})$ es una compactación Hausdorff máxima de $X$. ⊠

CAPÍTULO

# 3

# APLICACIONES

En esta sección revisaremos a la compactación Stone-Čech —lo cual es suficiente para revisar a todas las compactaciones Hausdorff máximas— de algunos espacios topológicos, los cuales aportan una gran cantidad de ejemplos y contraejemplos en varios campos de las matemáticas. El primero será la compactación Stone-Čech de los naturales con la topología discreta y después, como una forma de generalizar el ejemplo anterior, la compactación Stone-Čech de los espacios ordinales.

## § 3.1

## Compactación Stone-Čech de los naturales

La compactación máxima proyectiva de los naturales $\mathbb{N}$ con la topología discreta es uno de los espacios más interesantes ya que su estudio entretiene no solamente a topólogos, sino matemáticos en las áreas de la Teoría de Conjuntos, Combinatoria, Álgebra e incluso Teoría de Números y Análisis Matemático [22]. De acuerdo con Jan van Mill, el espacio $\beta\mathbb{N}$ es un monstruo de tres cabezas. Si se trabaja en un modelo que incluya la Hipótesis del Continuo [26, p. 36], entonces podremos ver una de las tres cabezas. Cuando la Hipótesis del Continuo se supone falsa, la segunda cabeza de $\beta\mathbb{N}$ se asoma. La última cabeza es cuando trabajamos únicamente en ZFC. Una introducción al estudio de todas las cabezas puede encontrarse en las primeras dos secciones del artículo de Jan van Mill contenido en el título *Handbook of Set-Theoretic Topology* [22]. En esta sección nos centraremos en estudiar algunas propiedades que encontramos en la tercera cabeza que están más relacionadas a los números cardinales.

El primero en estudiar a $\beta\mathbb{N}$ fue Čech quien en 1937 [9] utilizó su cardinalidad para determinar las cardinalidades de varios subespacios de su compactación. No obstante, Čech únicamente demostró que la cardinalidad de $\beta\mathbb{N}$ era, al menos, $\mathfrak{c} \doteqdot 2^\omega$ y, como mucho, $2^{\mathfrak{c}}$. Determinar la cardinalidad exacta de $\beta\mathbb{N}$ fue calificado como problema abierto durante muy poco tiempo ya que en 1938, el matemático Pospíšil lo resolvió en términos más generales.

**3.1.1 Teorema de Pospíšil:** *Sea $\varkappa$ un cardinal infinito. Si $D(\varkappa)$ es el espacio discreto de cardinalidad $\varkappa$, entonces la cardinalidad de $\beta D(\varkappa)$ es $2^{2^\varkappa}$.*

DEMOSTRACIÓN: De la construcción de la compactación de Čech, obtenemos que $|\beta D(\varkappa)| \leq 2^{2^\varkappa}$ por que $|C(D(\varkappa),[0,1])| = 2^\varkappa$. Ahora demostraremos que $2^{2^\varkappa} \leq |\beta D(\varkappa)|$. Por el teorema de Hewitt-Marczewski-Pondiczery y por el hecho de que $2^{2^\varkappa} = |I^{2^\varkappa}|$, tenemos que $d(I^{2^\varkappa}) \leq \varkappa < |I^{2^\varkappa}|$. Entonces existe $f\colon D(\varkappa) \to I^{2^\varkappa}$ inyectiva de tal manera que $f[D(\varkappa)]$ es denso en $I^{2^\varkappa}$. Al estar $D(\varkappa)$ dotado de la topología discreta, tenemos que $f$ es continua y, como $I^{2^\varkappa}$ es compacto, existe $F\colon \beta D(\varkappa) \to I^{2^\varkappa}$ continua de tal manera que $F \circ \beta = f$. La continuidad de $F$ implica que $F[\beta D(\varkappa)]$ es compacto en $I^{2^\varkappa}$ y como éste último es Hausdorff, tenemos que $F[\beta D(\varkappa)]$ es cerrado en $I^{2^\varkappa}$. Ahora, veamos que $f[D(\varkappa)] \subseteq F[\beta D(\varkappa)]$ porque $\beta[D(\varkappa)] \subseteq \beta D(\varkappa)$ y porque $F \circ \beta = f$. Al ser $f[D(\varkappa)]$ denso en $I^{2^\varkappa}$, tenemos que $F[\beta D(\varkappa)] = I^{2^\varkappa}$, lo cual implica que $F$ es suprayectiva y, por lo tanto, $2^{2^\varkappa} \leq |\beta D(\varkappa)|$. ⊠

**3.1.2 Corolario:** *La cardinalidad de $\beta\mathbb{N}$ es $2^{\mathfrak{c}}$.*

La primera aplicación del teorema de Pospíšil será probar que todo subconjunto infinito cerrado de $\beta\mathbb{N}$ contiene a una copia de $\beta\mathbb{N}$ y, por lo tanto, tiene cardinalidad $2^{\mathfrak{c}}$. Además, con ayuda de lo anterior, veremos que todo abierto no numerable de $\beta\mathbb{N}$ tiene cardinalidad $2^{\mathfrak{c}}$. Los siguientes lemas sirven a dicho propósito.

**3.1.3 Lema:** *Todo subespacio discreto e infinito numerable de $\beta\mathbb{N}$ es $C^\star$-encajable en $\beta\mathbb{N}$.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $M \subseteq \beta\mathbb{N}$ discreto e infinito numerable y $f\colon M \to \mathbb{R}$ continua y acotada. Supongamos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión inyectiva de tal manera que

$$M = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Como $\beta\mathbb{N}$ es Hausdorff, existe un abierto $V_n \subseteq \beta\mathbb{N}$ de tal manera que $a_n \in V_n$ y $V_n \cap V_m = \emptyset$ para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \neq m$. Consideremos a $f_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_0(n) = \begin{cases} f(a_i) & \text{si } \beta(n) \in \beta[\mathbb{N}] \cap V_i \\ 0 & \text{si } \beta(n) \in \beta[\mathbb{N}] \setminus \bigcup\{V_i : i \in \mathbb{N}\}, \end{cases}$$

la cual resulta ser continua. Por el teorema 2.3.1, tenemos que existe $F_\emptyset\colon \beta\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ continua y acotada tal que $F_\emptyset \circ \beta = f_\emptyset$. Considerando que $\beta[\mathbb{N}]$ es denso en $\beta\mathbb{N}$, deducimos que $\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{N}}(V_n) = \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{N}}(\beta[\mathbb{N}] \cap V_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces $n \in \mathbb{N}$ y $p \in \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{N}}(V_n)$ implican que $F_\emptyset(p) = f(a_n)$. En consecuencia, $F_\emptyset$ restringida a $M$ coincide con $f$. ⊠

**3.1.4 Lema:** *La cerradura en $\beta\mathbb{N}$ de cualquier subespacio discreto e infinito numerable de $\beta\mathbb{N}$ es homeomorfo a $\beta\mathbb{N}$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $M$ un subespacio discreto e infinito numerable de $\beta\mathbb{N}$. Por el lema 3.1.3, para toda función $f\colon M \to [0,1]$ continua existe $F\colon \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{N}}(M) \to [0,1]$ extensión continua de $f$ a $\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{N}}(M)$. Por el corolario 2.3.4, tenemos que $(\iota, \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{N}}(M))$ es una compactación Hausdorff máxima de $M$, donde $\iota\colon M \to \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{N}}$ es la inclusión de $M$ en $\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{N}}(M)$. Por lo tanto, $\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{N}}(M)$ es homeomorfo a $\beta M$ y, al ser $M$ y $\mathbb{N}$ homeomorfos, tenemos que también es homeomorfo a $\beta\mathbb{N}$. ⊠

Y, finalmente, por el teorema de Pospíšil, podemos deducir lo que queríamos.

**3.1.5 Teorema:** *La cardinalidad de cada subconjunto infinito cerrado de $\beta\mathbb{N}$ es $2^{\mathfrak{c}}$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $F \subseteq \beta\mathbb{N}$ cerrado e infinito. Como $\beta\mathbb{N}$ es Hausdorff, existe $M \subseteq F$ discreto e infinito numerable. Por el lema anterior, tenemos que $\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{N}}(M)$ es homeomorfo a $\beta\mathbb{N}$ y, por lo tanto, tiene cardinalidad $2^{\mathfrak{c}}$. Finalmente, deducimos que $F$ tiene cardinalidad $2^{\mathfrak{c}}$ porque, al ser $F$ cerrado, sucede que $\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{N}}(M) \subseteq F \subseteq \beta\mathbb{N}$. ⊠

El siguiente corolario se sigue del hecho de que la cerradura de la imagen de cualquier sucesión es un espacio topológico siempre es numerable.

**3.1.6 Corolario:** *Ninguna sucesión infinita en $\beta\mathbb{N}$ es convergente.*

Para demostrar que todo abierto no numerable de $\beta\mathbb{N}$ tiene cardinalidad $2^{\mathfrak{c}}$, necesitamos del siguiente corolario que se desprende del teorema 3.1.5.

**3.1.7 Corolario:** *Todo abierto de $\beta\mathbb{N}$ que interseca a $\beta\mathbb{N} \setminus \beta[\mathbb{N}]$ tiene cardinalidad $2^{\mathfrak{c}}$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $A \subseteq \beta\mathbb{N}$ abierto tal que $A \cap \beta\mathbb{N} \setminus \beta[\mathbb{N}] \neq \emptyset$. Sea $p \in \beta\mathbb{N} \setminus \beta[\mathbb{N}]$ y notemos que, como $\beta\mathbb{N}$ es Tychonoff, existe $U \subseteq \beta\mathbb{N}$ abierto tal que $p \in U \subseteq \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{N}}(U) \subseteq A$. Probaremos que $\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{N}}(U)$ es infinito, lo cual, por el teorema 3.1.5, implicaría que $A$ tiene cardinalidad $2^{\mathfrak{c}}$. Supongamos, para generar una contradicción, que $\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{N}}(U)$ es finito. Entonces $U$ es finito. Como $\beta\mathbb{N}$ es Hausdorff, tenemos que $U$ es discreto, por lo que existe $V \subseteq \beta\mathbb{N}$ abierto de tal manera que $U \cap V = \{p\}$, lo cual es imposible porque $U \cap V$ debe intersecar a $\beta[\mathbb{N}]$. ⊠

**3.1.8 Teorema:** *Todo conjunto abierto no numerable de $\beta\mathbb{N}$ tiene cardinalidad $2^{\mathfrak{c}}$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $A \subseteq \beta\mathbb{N}$ abierto no numerable. Como $\beta$ es un encaje, se tiene que $\beta[\mathbb{N}]$ es numerable y, por lo tanto, $A \cap \beta\mathbb{N} \setminus \beta[\mathbb{N}] \neq \emptyset$. Por el corolario anterior deducimos que $A$ tiene cardinalidad $2^{\mathfrak{c}}$. ☒

A continuación, desarrollaremos algunas propiedades de $\beta\mathbb{N}$ y de $\beta\mathbb{N}\setminus\beta[\mathbb{N}]$ relacionadas con los conjuntos que son tanto abiertos como cerrados. A $\beta\mathbb{N}\setminus\beta[\mathbb{N}]$ se le suele llamar como la ampliación, el crecimiento o la corona de $\mathbb{N}$ y se le suele denotar por $\mathbb{N}^\star$. Dichos resultados nos ayudarán a determinar varias funciones cardinales de $\beta\mathbb{N}$.

**3.1.9 Lema:** *Para todo $U\subseteq\beta\mathbb{N}$ abierto se tiene que $\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{N}}(U)$ es abierto.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $U\subseteq\beta\mathbb{N}$ abierto. Como $\beta^{-1}[U]$ es tanto abierto como cerrado en $\mathbb{N}$ y como $\beta\left[\beta^{-1}[U]\right]=\beta[\mathbb{N}]\cap U$ ya que $\beta$ es un encaje, por el corolario 2.3.6, tenemos que

$$\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{N}}\left(\beta\left[\beta^{-1}[U]\right]\right)=\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{N}}\left(\beta[\mathbb{N}]\cap U\right)=\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{N}}(U)$$

es tanto abierto como cerrado en $\beta\mathbb{N}$. En particular, $\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{N}}(U)$ es abierto en $\beta\mathbb{N}$. ☒

**3.1.10 Teorema:** *El espacio $\beta\mathbb{N}$ es cero-dimensional.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $U\subseteq\beta\mathbb{N}$ abierto y $p\in U$. Como $\beta\mathbb{N}$ es regular, existe $V\subseteq\beta\mathbb{N}$ abierto tal que $p\in V\subseteq\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{N}}(V)\subseteq U$. Por el lema anterior tenemos que $\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{N}}(V)$ es abierto. En conclusión, es posible encontrar una base de $\beta\mathbb{N}$ cuyos elementos son tanto abiertos como cerrados. ☒

La siguiente proposición exhibe la forma que tienen los subconjuntos de $\beta\mathbb{N}$ que son tanto abiertos como cerrados.

**3.1.11 Proposición:** *Todo subconjunto tanto cerrado como abierto de $\beta\mathbb{N}$ es de la forma $\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{N}}(\beta[M])$ para alguna $M\subseteq\mathbb{N}$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $U\subseteq\beta\mathbb{N}$ tanto abierto como cerrado. Por ser abierto, $U$ interseca a $\beta[\mathbb{N}]$ y, por ser cerrado, $U$ es compacto. Consideremos a $M=\beta^{-1}[U]$. Como $\beta[M]\subseteq U$ y como $U$ es cerrado, tenemos que $\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{N}}(\beta[M])\subseteq U$. Por otro lado, como $U$ es abierto y como $\beta[M]=\beta[\mathbb{N}]\cap U$, tenemos que $U\setminus\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{N}}(\beta[M])$ es un abierto de $\beta\mathbb{N}$ que no interseca a $\beta[\mathbb{N}]$, implicando que sea vacío. Por lo tanto, $\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{N}}(\beta[M])=U$. ☒

Ahora determinaremos la forma de los subconjuntos de $\beta\mathbb{N}\setminus\beta[\mathbb{N}]$ que son tanto cerrados como abiertos en $\beta\mathbb{N}\setminus\beta[\mathbb{N}]$.

**3.1.12 Proposición:** *Todo subconjunto no vacío tanto abierto como cerrado de $\beta\mathbb{N}\setminus\beta[\mathbb{N}]$ es de la forma $\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{N}}(\beta[A])\setminus\beta[A]$ para alguna $A\subseteq\mathbb{N}$ infinita.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $U\subseteq\beta\mathbb{N}\setminus\beta[\mathbb{N}]$ no vacío tanto abierto como cerrado en $\beta\mathbb{N}\setminus\beta[\mathbb{N}]$. Consideremos a $f^\flat\colon\beta\mathbb{N}\setminus\beta[\mathbb{N}]\to[0,1]$ dada por

$$f^\flat(p)=\begin{cases}0 & \text{si } p\in U\\ 1 & \text{si } p\notin U,\end{cases}$$

para cada $p \in \beta\mathbb{N} \setminus \beta[\mathbb{N}]$. Como $U$ es tanto abierto como cerrado, tenemos que $f^\flat$ es continua. De la proposición 1.1.7, tenemos que $\beta\mathbb{N} \setminus \beta[\mathbb{N}]$ es cerrado en $\beta\mathbb{N}$. Invocando el teorema de Tietze, tenemos que existe $f\colon \beta\mathbb{N} \to [0,1]$ continua que extiende a $f^\flat$. Consideremos a $A = \left\{n \in \mathbb{N} : f(\beta(n)) \leq \frac{1}{2}\right\}$. Demostraremos que

$$U \subseteq \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{N}}(\beta[A]) \setminus \beta[A]$$

$$\text{y que} \qquad \big(\beta\mathbb{N} \setminus \beta[\mathbb{N}]\big) \setminus U \subseteq \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{N}}(\beta[\mathbb{N} \setminus A]) \setminus \beta[\mathbb{N} \setminus A],$$

lo cual implicaría que $U = \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{N}}(\beta[A]) \setminus \beta[A]$ ya que, al ser $A$ y $\mathbb{N} \setminus A$ cerrados y ajenos en $\mathbb{N}$, por el corolario 2.3.2, tenemos que $\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{N}}(\beta[A])$ y $\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{N}}(\beta[\mathbb{N} \setminus A])$ son ajenos en $\beta\mathbb{N}$; además, como $\beta[\mathbb{N}] = \beta[A] \cup \beta[\mathbb{N} \setminus A]$, sucede que $\beta\mathbb{N} \setminus \beta[\mathbb{N}]$ es la unión ajena de $\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{N}}(\beta[A]) \setminus \beta[A]$ y de $\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{N}}(\beta[\mathbb{N} \setminus A]) \setminus \beta[\mathbb{N} \setminus A]$.

Sea $p \in U$. Entonces $f(p) = 0$. Como $U \subseteq \beta\mathbb{N} \setminus \beta[\mathbb{N}]$, tenemos que $p \notin \beta[A]$. Así, para ver que $p \in \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{N}}(\beta[A])$, basta ver que $p$ es un punto de acumulación de $\beta[A]$ en $\beta\mathbb{N}$. Sea $V \subseteq \beta\mathbb{N}$ abierto en $\beta\mathbb{N}$ tal que $p \in V$. Del hecho de que $f$ es continua y $f(p) = 0$, tenemos que $V \cap f^{-1}\left[\left[0, \frac{1}{2}\right)\right]$ es un abierto de $\beta\mathbb{N}$ que contiene a $p$. Al ser $\beta[\mathbb{N}]$ denso en $\beta\mathbb{N}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\beta(n) \in V \cap f^{-1}\left[\left[0, \frac{1}{2}\right)\right]$. Entonces $n \in A$, lo cual implica que $V$ interseca a $\beta[A]$.

Ahora, sea $p \in \big(\beta\mathbb{N} \setminus \beta[\mathbb{N}]\big) \setminus U$. Entonces $f(p) = 1$. Como $\big(\beta\mathbb{N} \setminus \beta[\mathbb{N}]\big) \setminus U \subseteq \beta\mathbb{N} \setminus \beta[\mathbb{N}]$, tenemos que $p \notin \beta[\mathbb{N} \setminus A]$. Así, para ver que $p \in \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{N}}(\beta[\mathbb{N} \setminus A])$, basta ver que $p$ es un punto de acumulación de $\beta[\mathbb{N} \setminus A]$ en $\beta\mathbb{N}$. Sea $V \subseteq \beta\mathbb{N}$ abierto en $\beta\mathbb{N}$ tal que $p \in V$. Del hecho de que $f$ es continua y $f(p) = 1$, tenemos que $V \cap f^{-1}\left[\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right]$ es un abierto de $\beta\mathbb{N}$ que contiene a $p$. Al ser $\beta[\mathbb{N}]$ denso en $\beta\mathbb{N}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\beta(n) \in V \cap f^{-1}\left[\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right]$. Entonces $n \notin A$, lo cual implica que $V$ interseca a $\beta[\mathbb{N} \setminus A]$. ⊠

Por la proposición anterior y por el teorema 3.1.5, tenemos el siguiente corolario.

**3.1.13 Corolario:** *Sean $A, B \subseteq \mathbb{N}$ infinitos. Entonces $\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{N}}(A) \setminus \beta[A]$ y $\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{N}}(B) \setminus \beta[B]$ son ajenos si y solamente si $A \cap B$ es finito.*

Los siguientes lemas relacionados a la estrechez —*tightness*— de $\beta\mathbb{N}$ y a la celularidad de $\beta\mathbb{N} \setminus \beta[\mathbb{N}]$, nos servirán para determinar varias funciones cardinales en $\beta\mathbb{N}$ y en $\beta\mathbb{N} \setminus \beta[\mathbb{N}]$.

**3.1.14 Lema:** *Sea $M \subseteq \mathbb{N}$ infinito. Entonces existe una colección, cuya cardinalidad es $\mathfrak{c}$, de subconjuntos infinitos de $M$ que son casi ajenos dos a dos, es decir, que la intersección de cualesquiera dos de sus elementos es finita. Por lo tanto, $\mathfrak{c} \leq c\big(\beta\mathbb{N} \setminus \beta[\mathbb{N}]\big)$.*

Demostración: Sea $M \subseteq \mathbb{N}$ infinito. Entonces $M$ es numerable. Sea $\varphi\colon M \to \mathbb{Q}$ una biyección. Para cada $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sea $(q(x)_\eta)_{\eta \in \omega}$ una sucesión en $\mathbb{Q}$ creciente de tal manera que $(q(x)_\eta)_{\eta \in \omega}$ converga a $x$. Para cada $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sea $E_x = \phi^{-1}\left[\left\{q(x)_\eta : \eta \in \omega\right\}\right]$ y consideremos a $\mathcal{E} = \left\{E_x : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\right\}$. Notemos que si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, entonces $E_x$ es un subconjunto infinito de $M$ porque $\phi$ es una biyección y porque $\{q(x)_\eta : \eta \in \omega\}$ es infinito al ser $(q(x)_\eta)_{\eta\in\omega}$ creciente. Además, si $x, y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ con $x < y$, entonces $E_x \cap E_y$ es finito porque, como $(q(y)_\eta)_{\eta\in\omega}$ es creciente, existe $\eta \in \omega$ de tal manera que si $\mu < \eta$, entonces $x < q(y)_\mu$; por lo tanto, $E_x$ y $E_y$ son distintos, lo cual implica que $\mathcal{E}$ es una colección de subconjuntos de $M$ que son casi ajenos dos a dos y tiene la misma cardinalidad de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, a saber, $\mathfrak{c}$.

Para ver que $\mathfrak{c} \le c\big(\beta\mathbb{N}\setminus\beta[\mathbb{N}]\big)$, notemos que $\mathcal{E}' \doteq \{\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{N}}(E_x)\setminus\beta[E_x] : x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\}$ es una colección de subconjuntos tanto abiertos como cerrados de $\beta\mathbb{N}\setminus\beta[\mathbb{N}]$, gracias a la proposición 3.1.12, y son ajenos dos a dos gracias al corolario 3.1.13. Como $|\mathcal{E}| = \mathfrak{c}$, tenemos que $\mathcal{E}'$ es una familia celular de $\beta\mathbb{N}\setminus\beta[\mathbb{N}]$ de cardinalidad $\mathfrak{c}$. ☒

**3.1.15 Lema:** *Existe $p \in \beta\mathbb{N}\setminus\beta[\mathbb{N}]$ de tal manera que $\mathfrak{c} \le t(p, \beta\mathbb{N}\setminus\beta[\mathbb{N}])$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $C \subseteq \beta\mathbb{N}\setminus\beta[\mathbb{N}]$ no vacío tanto abierto como cerrado de $\beta\mathbb{N}\setminus\beta[\mathbb{N}]$. Invocando el lema 3.1.14, sea $(D_\alpha)_{\alpha\in\mathfrak{c}}$ una sucesión de subconjuntos no vacíos tanto abiertos como cerrados de $C$ ajenos dos a dos. Sea $C_\emptyset \in [C]^{<\mathfrak{c}}$. Entonces existe $\alpha \in \mathfrak{c}$ de tal manera que $D_\alpha \cap C_\emptyset = \emptyset$. Notemos que si $p \in D_\alpha$, entonces $C \subseteq \beta\mathbb{N}\setminus\beta[\mathbb{N}]$ es tal que $p \in \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{N}\setminus\beta[\mathbb{N}]}(C)$ y $C_\emptyset \in [C]^{<\mathfrak{c}}$ es tal que $p \notin \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{N}\setminus\beta[\mathbb{N}]}(C_\emptyset)$ ya que, al ser $D_\alpha \cap C_\emptyset = \emptyset$, al ser $D_\alpha$ tanto abierto como cerrado en $C$ y al ser $C$ tanto abierto como cerrado en $\beta\mathbb{N}\setminus\beta[\mathbb{N}]$, sucede que $\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{N}\setminus\beta[\mathbb{N}]}(C_\emptyset) \subseteq D_\alpha$. En conclusión, es imposible que $t(p, \beta\mathbb{N}\setminus\beta[\mathbb{N}]) < \mathfrak{c}$ para todo $p \in D_\alpha$. ☒

La demostración del lema anterior resulta más sencilla que utilizando el lema 3.3.4 del artículo *An Introduction to $\beta\omega$* de Jan van Mill contenido en el título *Handbook of Set-Theoretic Topology* [22] como lo señala Hodel en el segundo párrafo de la demostración del ejemplo 7.22 de su artículo *Cardinal Functions I* [19] contenido en el mismo título.

**3.1.16 Corolario:** $\mathfrak{c} \le t\big(\beta\mathbb{N}\setminus\beta[\mathbb{N}]\big)$.

Recordemos que para todo espacio $X$ sucede que $o(X) \le w(X)^{hL(X)}$ ya que si $\mathcal{B}$ es una base para $X$ cuya cardinalidad no rebase a $w(X)$, entonces todo abierto de $X$ puede expresarse como la unión de una subcolección de $\mathcal{B}$ cuya cardinalidad no rebasa a $hL(X)$.

**3.1.17 Teorema:** *Para $\beta\mathbb{N}$ se tiene que*

(I) $\phi(\beta\mathbb{N}) = \omega$ *cuando* $\phi \in \{d, L, c, e\}$; *que*

(II) $\phi(\beta\mathbb{N}) = \mathfrak{c}$ *cuando* $\phi \in \{w, hd, hL, hc, \chi, t, \psi\}$; *y que*

(III) $o(\beta\mathbb{N}) = 2^{\mathfrak{c}}$.

DEMOSTRACIÓN: (I) Como todas las funciones cardinales se suponen infinitas, basta demostrar que $d(\beta\mathbb{N}) \le \omega$ y que $L(\beta\mathbb{N}) \le \omega$. Dichas desigualdades se siguen de que $\beta[\mathbb{N}]$ es denso en $\beta\mathbb{N}$ y de que $\beta\mathbb{N}$ es compacto.

(II) Como $\beta\mathbb{N}$ es compacto y Hausdorff, se tiene que $\chi(\beta\mathbb{N}) = \psi(\beta\mathbb{N})$ y $t(\beta\mathbb{N}) \le s(\beta\mathbb{N})$.

Así, basta demostrar que $w(\beta\mathbb{N}) \leq \mathfrak{c}$ y que $\mathfrak{c} \leq t(\beta\mathbb{N})$. Por el lema 2.2.1 tenemos que

$$w(\beta\mathbb{N}) \leq 2^{d(\mathbb{N})} = 2^{\omega} = \mathfrak{c}.$$

Por el corolario 3.1.16 y como la estrechez es una función cardinal monótona, es decir que si $Y$ es un subespacio de un espacio $X$, entonces $t(Y) \leq t(X)$, tenemos que $\mathfrak{c} \leq t(\beta\mathbb{N})$.

(iii) Como $\beta\mathbb{N}$ es $T_\emptyset$ y tiene cardinalidad $2^{\mathfrak{c}}$, tenemos que

$$2^{\mathfrak{c}} \leq o(\beta\mathbb{N}) \leq w(\beta\mathbb{N})^{hL(\beta)} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}},$$

por lo que $o(\beta\mathbb{N}) = 2^{\mathfrak{c}}$. ⊠

**3.1.18 Teorema:** *Para $\beta\mathbb{N} \setminus \beta[\mathbb{N}]$ se tiene que*

(i) $\phi\big(\beta\mathbb{N} \setminus \beta[\mathbb{N}]\big) = \omega$ *cuando* $\phi \in \{L, e\}$.

(ii) $\phi\big(\beta\mathbb{N} \setminus \beta[\mathbb{N}]\big) = \mathfrak{c}$ *cuando* $\phi \in \{w, hd, hL, \chi, t, \psi, hc, d, c\}$

(iii) $o\big(\beta\mathbb{N} \setminus \beta[\mathbb{N}]\big) = 2^{\mathfrak{c}}$.

Demostración: (i) Como todas las funciones cardinales se suponen infinitas, basta demostrar $L\big(\beta\mathbb{N} \setminus \beta[\mathbb{N}]\big) \leq \omega$. Notemos que $\beta\mathbb{N} \setminus \beta[\mathbb{N}]$ es compacto ya que es cerrado en $\beta\mathbb{N}$, lo cual implica $L\big(\beta\mathbb{N} \setminus \beta[\mathbb{N}]\big) \leq \omega$.

(ii) Como $\beta\mathbb{N} \setminus \beta[\mathbb{N}]$ es compacto y Hausdorff, se tiene que $\chi\big(\beta\mathbb{N} \setminus \beta[\mathbb{N}]\big) = \psi\big(\beta\mathbb{N} \setminus \beta[\mathbb{N}]\big)$ y $t\big(\beta\mathbb{N} \setminus \beta[\mathbb{N}]\big) \leq hc\big(\beta\mathbb{N} \setminus \beta[\mathbb{N}]\big)$. Por lo tanto, basta demostrar que $w\big(\beta\mathbb{N} \setminus \beta[\mathbb{N}]\big) \leq \mathfrak{c}$, que $\mathfrak{c} \leq t\big(\beta\mathbb{N} \setminus \beta[\mathbb{N}]\big)$ y que $\mathfrak{c} \leq c\big(\beta\mathbb{N} \setminus \beta[\mathbb{N}]\big)$. La primera desigualdad se sigue de que el peso es una función cardinal monótona y las otras dos se siguen del corolario 3.1.16 y del lema 3.1.14, respectivamente.

(iii) Como $\beta\mathbb{N} \setminus \beta[\mathbb{N}]$ es $T_\emptyset$ y la cardinalidad de los abiertos es una función cardinal monótona, tenemos que $\big|\beta\mathbb{N} \setminus \beta[\mathbb{N}]\big| \leq o\big(\beta\mathbb{N} \setminus \beta[\mathbb{N}]\big) \leq o(\beta\mathbb{N})$. Por los teoremas 3.1.5 y 3.1.17, tenemos que $o\big(\beta\mathbb{N} \setminus \beta[\mathbb{N}]\big) = 2^{\mathfrak{c}}$. ⊠

## § 3.2

## Espacios ordinales

La definición de número ordinal generaliza la idea de los números naturales y abre la puerta a los números cardinales proporcionándonos una manera formal de contar los elementos de un conjunto. Además, con ayuda del axioma de elección, es posible probar que todo conjunto bien ordenado es isomorfo a un único ordinal con el orden inducido por la relación de pertenencia. Por todo ésto, resulta natural estudiar las propiedades resultantes de dotar de una topología a los números ordinales.

**3.2.1 Definiciones:** *Sea $\alpha$ y $\beta$ ordinales tales que $\alpha \leq \beta$. Sean*

$$S(\alpha, \beta) = \{\xi \in \mathfrak{Ord} : \alpha < \xi < \beta\},$$

$$\begin{aligned} & S[\alpha,\beta] = \left\{\xi \in \mathfrak{Ord} : \alpha \leq \xi \leq \beta\right\}, \\ & S(\alpha,\beta] = \left\{\xi \in \mathfrak{Ord} : \alpha < \xi \leq \beta\right\} \\ y \qquad & S[\alpha,\beta) = \left\{\xi \in \mathfrak{Ord} : \alpha \leq \xi < \beta\right\}. \end{aligned}$$

*Decimos que un conjunto es un* ***segmento*** *o un* ***intervalo*** *—cuando no hay confusión con los intervalos de $\mathbb{R}$— entre $\alpha$ y $\beta$ si es un elemento de $\left\{S(\alpha,\beta), S[\alpha,\beta], S(\alpha,\beta], S[\alpha,\beta)\right\}$.*

**3.2.2 Teorema:** *Sea $\zeta$ un ordinal tal que $1 \in \zeta$. El conjunto*

$$\mathcal{B}_\zeta \doteq \left\{S \subseteq \zeta : \exists \alpha, \beta \in \zeta \left(\alpha \leq \beta \ \wedge\ S \in \left\{S[\emptyset,\beta), S(\alpha,\beta), S(\alpha,\zeta)\right\}\right)\right\}$$

*es una base para alguna topología de $\zeta$.*

DEMOSTRACIÓN: Notemos que $\bigcup \mathcal{B}_\zeta = \zeta$ porque $S[\emptyset,1), S(\emptyset,\zeta) \in \mathcal{B}_\zeta$.

Ahora, sean $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_\zeta$ y supongamos que $\xi \in B_1 \cap B_2$. Tenemos nueve casos. Primer caso. Si $B_1 = S[\emptyset,\beta_1)$ y $B_2 = S[\emptyset,\beta_2)$ para algunos $\beta_1, \beta_2 \in \zeta$, entonces $B_3 \doteq S[\emptyset, \text{mín}\{\beta_1,\beta_2\})$ es tal que $\xi \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. Segundo caso. Si $B_1 = S[\emptyset,\beta_1)$ y $B_2 = S[\alpha_2,\beta_2)$ para algunos $\beta_1, \alpha_2, \beta_2 \in \zeta$, entonces $B_3 \doteq S(\alpha_2, \text{mín}\{\beta_1,\beta_2\})$ es tal que $\xi \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. Tercer caso. Si $B_1 = S[\emptyset,\beta_1)$ y $B_2 = S(\alpha_2,\zeta)$ para algunos $\alpha_2, \beta_2 \in \zeta$, entonces $B_3 \doteq S(\alpha_2,\beta_1)$ es tal que $\xi \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. Cuarto caso. Si $B_1 = S(\alpha_1,\beta_1)$ y $B_2 = S[\emptyset,\beta_2)$ para algunos $\alpha_1, \beta_1, \beta_2 \in \zeta$, entonces este caso es análogo al segundo. Quinto caso. Si $B_1 = S(\alpha_1,\beta_1)$ y $B_2 = S(\alpha_2,\beta_2)$ para algunos $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \zeta$, entonces $B_3 \doteq S(\text{máx}\{\alpha_1,\alpha_2\}, \text{mín}\{\beta_1,\beta_2\})$ es tal que $\xi \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. Sexto caso. Si $B_1 = S(\alpha_1,\beta_1)$ y $B_2 = S(\alpha_2,\zeta)$ para algunos $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1 \in \zeta$, entonces este caso es análogo al anterior. Extrapolando los casos séptimo, octavo y noveno, resultan ser análogos al tercer, quinto y, valga la redundancia, quinto caso. ☒

Por lo tanto, la siguiente definición queda justificada.

**3.2.3 Definición:** *Sea $\zeta$ un ordinal infinito. El* ***espacio ordinal*** *asociado a $\zeta$, denotado por $[\emptyset,\zeta)$, es el conjunto $\zeta$ dotado de la topología cuyos elementos básicos son de la forma $S[\emptyset,\alpha)$, $S(\alpha,\beta)$ o $S(\beta,\zeta)$ para algunos $\alpha, \beta \in \zeta$.*

Supongamos, para el resto del capítulo, que $\zeta$ es un ordinal infinito y que el símbolo $[\emptyset,\zeta)$, además de denotar meramente al espacio topológico, también denotará al conjunto $\zeta$.

El teorema siguiente proporciona las condiciones necesarias y suficientes para que un espacio ordinal sea compacto y, con ello, se deduce que todo espacio ordinal es localmente compacto.

**3.2.4 Teorema:** *El espacio $[\emptyset,\zeta)$ es compacto si y solamente si $\zeta$ es un ordinal sucesor.*

DEMOSTRACIÓN: $[\Rightarrow]$ Supongamos, para llegar a una contradicción, que $\zeta$ no es un ordinal sucesor y consideremos a $\mathcal{U} = \left\{S[\emptyset,\xi) : \xi < \zeta\right\}$. Como $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de $[0,\zeta)$, existen $\eta \in \omega$ y $\xi_i \in [0,\zeta)$ para cada $i \in \eta$ tal que $\mathcal{V} = \{S[0,\xi_i) : i \in \eta\}$ es una subcubierta finita. Si $j \in \omega$ es tal que $\xi_j = \text{máx}\{\xi_i : i \in \eta\}$, entonces $\bigcup\mathcal{V} = S[0,\xi_j)$, lo cual es imposible porque $\xi_j + 1 \in [0,\zeta) \setminus S[0,\xi_j)$.

[$\Leftarrow$] Supongamos que $\rho$ es el ordinal tal que $\zeta = \rho+1$, que $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de $[0,\zeta)$ y que

$$X \doteq \left\{\xi \in [0,\zeta) : \exists \mathcal{F} \in [\mathcal{U}]^{<\omega} \left(S[0,\xi] \subseteq \bigcup\mathcal{F}\right)\right\}.$$

Notemos que si $\rho \in X$, entonces existe un subconjunto finito $\mathcal{F}$ de $\mathcal{U}$ tal que $S[0,\rho] = \bigcup\mathcal{F}$, pero al ser $[0,\zeta) = S[0,\rho]$, podemos deducir que $\mathcal{U}$ tiene una subcubierta finita. Ahora, supongamos que $\rho \notin X$ y sea

$$\mu = \text{mín}\left([0,\zeta) \setminus X\right).$$

Sea $U \in \mathcal{U}$ tal que $\mu \in U$ y, como $0 < \mu$ ya que es claro que $0 \in X$, existe $\xi \in S[0,\mu)$ de tal manera que $S(\xi,\mu] \subseteq U$. Por cómo definimos a $\mu$, necesariamente sucede que $\xi \in X$, por lo que existe $\mathcal{F} \in [\mathcal{U}]^{<\omega}$ de tal manera que $S[0\xi] \subseteq \bigcup\mathcal{F}$, pero entonces

$$S[0,\mu] \subseteq \bigcup\left(\mathcal{F} \cup \{U\}\right),$$

implicando que $\mu \in X$, lo cual es una contradicción. $\boxtimes$

**3.2.5 Corolario:** *El espacio $[0,\zeta)$ es localmente compacto.*

Demostración: Sea $\xi \in [0,\zeta)$. Si $\xi$ es finito, notemos que $\{\xi\}$ es una vecindad de $\xi$ cuya cerradura es compacta. Ahora, supongamos que $\xi$ es infinito. Si $\xi+1 \in [0,\zeta)$, notemos que $S[0,\xi]$ con la topología de subespacio es homeomorfo a $[0,\xi+1)$, por lo que resulta ser una vecindad de $\xi$ cuya cerradura es compacta. Ahora, si $\xi+1 \notin [0,\zeta)$, necesariamente sucede que $\xi+1 = \zeta$ y notemos que $[0,\zeta)$ es una vecindad de $\xi$ cuya cerradura es compacta. $\boxtimes$

La siguiente proposición nos permitirá caracterizar otras propiedades similares a la compacidad en los espacios ordinales. Además, nos ayudará a determinar la compactación Stone-Čech de una subclase de espacios ordinales.

**3.2.6 Proposición:** *Si $\omega < \text{cf}(\zeta)$, entonces para toda función continua $f\colon [0,\zeta) \to \mathbb{R}$ se tiene que existe $\xi \in [0,\zeta)$ de tal manera que $f(\xi) = f(\nu)$ para todo $\nu \in S[\xi,\zeta)$.*

Demostración: Supongamos que $\omega < \text{cf}(\zeta)$ y sea $f\colon [0,\zeta) \to \mathbb{R}$ una función continua. Afirmamos que existe $\xi \in [0,\zeta)$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$ se puede encontrar $\xi_n \in [0,\zeta)$ tal que

$$\left|f(\xi_n) - f(\xi)\right| < \frac{1}{2n}.$$

En efecto, supongamos, para generar una contradicción, que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para toda $\xi \in [0,\zeta)$ se puede encontrar $\xi' \in [0,\zeta)$ de tal manera que

$$\frac{1}{2m} \leq \left|f(\xi) - f(\xi')\right|.$$

Fijemos $\xi_1 \in [0,\zeta)$. Ahora, sea $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que existe $\xi_n \in [0,\zeta)$ y definamos a $\xi_{n+1} = \xi'_n + 1$. Hemos construido, de manera recursiva, una sucesión $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de tal manera que $\xi_{n+1} = \xi'_n + 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Consideremos a

$$\sigma = \sup\left(\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\xi'_n : n \in \mathbb{N}\}\right)$$

y notemos que, al ser $\omega < \mathrm{cf}(\zeta)$, sucede que $\sigma \in [0,\zeta)$. Además, como $\sigma \neq 0$ ya que $0 < \xi'_1 + 1 = \xi_2 \leq \sigma$ y como

$$U \doteq f^{-1}\left[\left(f(\sigma) - \frac{1}{4m}, f(\sigma) + \frac{1}{4m}\right)\right]$$

es un abierto de $[0,\zeta)$ que contiene a $\sigma$, existe $\xi \in S[0,\sigma)$ tal que $S(\xi,\sigma] \subseteq U$, pero como $\xi$ no es cota superior de $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\xi'_n : n \in \mathbb{N}\}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\xi_n$ y $\xi'_n$ son elementos de $S(\xi,\sigma]$, implicando que

$$\left|f(\xi_n) - f(\sigma)\right| < \frac{1}{4m} \quad \wedge \quad \left|f(\xi'_n) - f(\sigma)\right| < \frac{1}{4m},$$

con lo que

$$\frac{1}{2m} \leq \left|f(\xi_n) - f(\xi'_n)\right| \leq \left|f(\xi_n) - f(\sigma)\right| - \left|f(\sigma) - f(\xi'_n)\right| < \frac{1}{4m} + \frac{1}{4m} = \frac{1}{2m},$$

lo cual es imposible.

Consideremos $\sigma = \sup\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ y, como $\omega < \mathrm{cf}(\zeta)$, tenemos que $\sigma \in [0,\zeta)$. Ahora, sea $\xi \in S[\sigma,\zeta)$ y notemos que, para toda $n \in \mathbb{N}$, sucede que $\xi$ y $\sigma$ son elementos de $S[\xi_n,\zeta)$. Por lo tanto, para toda $n \in \mathbb{N}$ sucede que

$$\left|f(\sigma) - f(\xi)\right| \leq \left|f(\sigma) - f(\xi_n)\right| + \left|f(\xi_n) - f(\xi)\right| < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n},$$

lo cual implica que $f(\sigma) = f(\xi)$. En consecuencia, $f$ es acotada.

Antes de preguntarnos por la compactación Stone-Čech de los espacios ordinales, debemos asegurarnos de que dichos espacios son de Tychonoff. Para ello, determinaremos los axiomas de separación que dichos espacios satisfacen utilizando los siguientes lemas.

**3.2.7 Lema:** *Para cada $\xi \in [0,\zeta)$ sucede que $\{\xi\}$ es cerrado.*

DEMOSTRACIÓN: Si $\xi = 0$, notemos que $\{\xi\} = [0,\zeta) \setminus S(0,\zeta)$. Si $\xi + 1 = \zeta$, notemos que $\{\xi\} = [0,\zeta) \setminus S[0,\nu)$ siempre que exista $\nu \in [0,\zeta)$ tal que $\xi = \nu + 1$, pero si $\xi$ es límite, notemos que $\{\xi\} = [0,\zeta) \setminus \bigcup\{S[0,\nu) : \nu < \xi\}$. Finalmente, si $0 < \xi$ y $\xi + 1 < \zeta$, tenemos que $\{\xi\} = [0,\zeta) \setminus \left(S[0,\nu) \cup S(\xi+1,\zeta)\right)$ siempre que exista $\nu \in [0,\zeta)$ tal que $\xi = \nu + 1$, pero si $\xi$ es límite, tenemos que $\{\xi\} = [0,\zeta) \setminus \left(\bigcup\{S[0,\nu) : \nu < \xi\} \cup S(\xi+1,\zeta)\right)$. ⊠

Recordemos que un espacio $X$ es hereditariamente normal si todo subespacio es normal. Si para cualesquiera $A, B \subseteq X$ separados —es decir, que $A$ no contiene puntos de acumulación de $B$ y viceversa— existen $U, V \subseteq X$ abiertos y ajenos tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$, entonces $X$ es hereditariamente normal. De hecho, dichas condiciones son equivalentes [13, 2.1.7].

**3.2.8 Lema:** *El espacio $[\emptyset, \zeta)$ es hereditariamente normal.*

Demostración: Sean $A$ y $B$ conjuntos separados y no vacíos de $[\emptyset, \zeta)$. Para cada $\alpha \in A$ y cada $\beta \in B$ definimos a

$$U_\alpha = \begin{cases} S\big(\bigcup(S[\emptyset, \alpha) \cap B)\big), \alpha] & \text{si } \alpha \neq \emptyset \\ \{\emptyset\} & \text{si } \alpha = \emptyset \end{cases}$$

y a

$$V_\beta = \begin{cases} S\big(\bigcup(S[\emptyset, \beta) \cap A), \beta] & \text{si } \beta \neq \emptyset \\ \{\emptyset\} & \text{si } \beta = \emptyset. \end{cases}$$

Ahora, sean

$$U = \bigcup\{U_\alpha : \alpha \in A\}$$

y

$$V = \bigcup\{V_\beta : \beta \in B\}$$

y notemos que $U$ y $V$ son abiertos tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$. Supongamos, para llegar a una contradicción, que existe $\xi \in U \cap V$. Entonces existen $\alpha \in A$ y $\beta \in B$ de tal manera que $\xi \in U_\alpha \cap V_\beta$. Primero notemos que, como $A$ y $B$ son separados, podemos suponer, sin perder generalidad, que $\alpha < \beta$. Si $\alpha = \emptyset$, se implicaría de $\xi \in U_\alpha$ que $\xi = \emptyset$, haciendo falso que $\xi \in S\big(\bigcup(S[\emptyset, \beta) \cap A), \beta\big]$. Por lo tanto, sucede que $\emptyset < \alpha$, implicando que

$$\xi \in \Big(S\big(\bigcup(S[\emptyset, \alpha) \cap B), \alpha\big]\Big) \cap \Big(S\big(\bigcup(S[\emptyset, \beta) \cap A), \beta\big]\Big).$$

Ahora, veamos que, como $\alpha \in S[\emptyset, \beta) \cap A$, sucede que $\alpha \leq \bigcup(S[\emptyset, \beta) \cap A)$, implicando que

$$\alpha \leq \bigcup(S[\emptyset, \beta) \cap A) < \xi \leq \alpha,$$

lo cual es imposible. En conclusión, $U$ y $V$ son ajenos. ⊠

**3.2.9 Teorema:** *El espacio $[\emptyset, \zeta)$ es $T_\emptyset$, $T_1$, $T_2$, $T_3$, $T_{3.5}$, $T_4$ y $T_5$.*

Las condiciones bajo las cuales un espacio ordinal es perfectamente normal se escapan del interés de esta sección, pero son expuestas en el apéndice B.

De la proposición 3.2.6 se puede deducir que si $\omega < \mathrm{cf}(\zeta)$, entonces $[\emptyset, \zeta)$ es pseudocompacto. Además, ahora que sabemos que $[\emptyset, \zeta)$ es $T_4$, con ayuda del teorema de Tietze podemos ver que si $[\emptyset, \zeta)$ es pseudocompacto, entonces es numerablemente compacto. Estos y otros resultados relacionados son señalados en el siguiente teorema.

**3.2.10 Teorema:** *En $[\emptyset,\zeta)$ son equivalentes que*
(i) *$[\emptyset,\zeta)$ sea pseudocompacto; que*
(ii) *$[\emptyset,\zeta)$ sea numerablemente compacto; que*
(iii) *$[\emptyset,\zeta)$ sea secuencialmente compacto; y que*
(iv) *$\zeta$ sea un ordinal sucesor o que $\omega < \mathrm{cf}(\zeta)$.*

DEMOSTRACIÓN: [(i) ⇒ (ii)] Supongamos, para llegar a una contradicción, que $[\emptyset,\zeta)$ no es numerablemente compacto. Entonces existe una sucesión $(\xi_n)_{n\in\omega}$ que no tiene puntos de acumulación, es decir, $\{\xi_n : n \in \omega\}$ es discreto en $[\emptyset,\zeta)$. Sea $f\colon \{\xi_n : n\in\omega\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(\xi_n) = n$ que resulta ser continua y veamos que, por el teorema de Tietze, existe una función $F\colon [\emptyset,\zeta) \to \mathbb{R}$ continua tal que $F(\xi_n) = f(\xi_n)$ para cada $n \in \omega$, todo esto porque $[\emptyset,\zeta)$ es un espacio $T_4$ y $\{\xi_n : n\in\omega\}$ no tiene puntos de acumulación. Finalmente, al ser $F$ una extensión de $f$, sucede que $F$ no es acotada, contradiciendo el hecho de que $[\emptyset,\zeta)$ es pseudocompacto.

[(ii) ⇒ (iii)] Sea $(\xi_\eta)_{\eta\in\omega}$ una sucesión en $[\emptyset,\zeta)$. Si $\{\xi_\eta : \eta \in \omega\}$ es finito, entonces existe una subsucesión de $(\xi_\eta)_{\eta\in\omega}$ que es convergente. Supongamos que $\{\xi_\eta : \eta\in\omega\}$ es infinito. Entonces existe $\sigma \in \mathrm{der}\left(\{\xi_\eta : \eta\in\omega\}\right)$. Notemos que

$$\sigma = \sup\left(\{\xi_\eta : \eta\in\omega\} \cap S[\emptyset,\sigma)\right)$$

y que $\{\xi_\eta : \eta\in\omega\} \cap S[\emptyset,\sigma)$ es infinito numerable porque, de no serlo, sucedería que $\sigma$ es el supremo de un conjunto finito, implicando que $\sigma \in \{\xi_\eta : \eta\in\omega\} \cap S[\emptyset,\sigma)$, lo cual es imposible. Así, supongamos que

$$\{\theta_\eta : \eta\in\omega\} = \{\xi_\eta : \eta\in\omega\} \cap S[\emptyset,\sigma).$$

Sea $\xi_{\eta_\emptyset} = \theta_\emptyset$. Ahora, sea $\mu \in \omega$ y supongamos que existe $\xi_{\eta_\mu} \in \{\theta_\eta : \eta\in\omega\}$. Notemos que no es posible que para todo $\eta \in \omega$ con $\eta_\mu < \eta$ suceda que $\xi_\eta < \xi_{\eta_\mu}$ porque $\sigma$ sería el supremo del conjunto finito $\{\xi_{\eta_i} : i < \mu\} \cap S[\emptyset,\sigma)$. Entonces, escojamos a

$$\xi_{\eta_{\mu+1}} \in S\big(\text{máx}\,\{\xi_{\eta_\mu}, \theta_\mu\}, \sigma\big)$$

tal que $\eta_\mu < \eta_{\mu+1}$. De manera recursiva definimos a la subsucesión $(\xi_{\eta_\mu})_{\mu\in\omega}$ de $(\xi_\eta)_{\eta\in\omega}$ y notemos que si $U$ es un abierto que contiene a $\sigma$, existe $\xi < \sigma$ tal que $S[\xi,\sigma] \subseteq U$, pero como $\sigma = \sup\{\theta_\eta : \eta\in\omega\}$, existe $\lambda \in \omega$ tal que $\xi < \theta_\lambda < \sigma$, por lo que para todo $\mu\in\omega$ tal que $\lambda < \mu$ sucede que $\xi_{\eta_\mu} \in U$, es decir, la sucesión $(\xi_{\eta_\mu})_{\mu\in\omega}$ converge a $\sigma$.

[(iii) ⇒ (iv)] Supongamos, para llegar a una contradicción, que $\zeta$ es un ordinal límite tal que $\mathrm{cf}(\zeta) \le \omega$, es decir, $\mathrm{cf}(\zeta) = \omega$. Sea $f\colon \omega \to \zeta$ una función estrictamente creciente con $f[\omega]$ cofinal en $\zeta$. Como $[\emptyset,\zeta)$ es secuencialmente compacto, existe una función $g\colon \omega \to \omega$ estrictamente creciente de tal manera que $f\circ g$ es una sucesión que converge a, digamos, $\xi \in [\emptyset,\zeta)$. Como $f[\omega]$ es cofinal en $[\emptyset,\zeta)$, existe $\eta\in\omega$ de tal manera que $\xi \le f(\eta)$, pero como $g$ es estrictamente creciente, existe $\mu \in \omega$ de tal manera que $\eta < g(\mu)$, por lo que $\xi < (f \circ g)(\mu)$, lo cual hace imposible que $f \circ g$ converja a $\xi$ ya que dicha sucesión también es estrictamente creciente.

[(iv) $\Rightarrow$ (i)] Si $\zeta$ es sucesor, se tiene que $[0,\zeta)$ es compacto, implicando ser pseudocompacto. Ahora, supongamos que $\omega < \mathrm{cf}(\zeta)$ y sea $f\colon [0,\zeta) \to \mathbb{R}$ una función continua. Por la proposición 3.2.6, existe $\xi \in [0,\zeta)$ tal que $f(\xi) = f(\nu)$ para toda $\nu \in S[\xi,\zeta)$. En consecuencia, $f$ es acotada. ⊠

**3.2.11 Teorema:** *Sea* $\iota\colon [0,\zeta) \hookrightarrow [0,\zeta+1)$ *la función inclusión de* $[0,\zeta)$ *en* $[0,\zeta+1)$. *Siempre que* $\omega < \mathrm{cf}(\zeta)$, *sucede que* $(\iota,[0,\zeta+1))$ *es una compactación Hausdorff máxima de* $[0,\zeta)$.

Demostración: Como $\omega < \mathrm{cf}(\zeta)$, tenemos que $\zeta$ es un ordinal límite, por lo que $[0,\zeta)$ resulta ser denso en $[0,\zeta+1)$. En consecuencia, al ser $\iota$ un encaje, podemos deducir que $(\iota,[0,\zeta+1))$ es una compactación Hausdorff de $[0,\zeta)$.

Ahora, en virtud del teorema 2.3.1, sea $f\colon [0,\zeta) \to [0,1]$ una función continua. Como $\omega < \mathrm{cf}(\zeta)$, de la proposición 3.2.6 podemos deducir que existe $\xi \in [0,\zeta)$ tal que $f(\xi) = f(\nu)$ para toda $\nu \in S[\xi,\zeta)$. Notemos que si definimos a $F\colon [0,\zeta+1) \to [0,1]$ por medio de

$$F(\nu) = \begin{cases} f(\nu) & \text{si } \nu \in S[0,\zeta) \\ f(\xi) & \text{si } \nu = \zeta, \end{cases}$$

resulta que $F$ es una extensión continua de $f$, con lo que $F \circ \iota = f$. ⊠

Por el teorema 3.2.4, tenemos que la compactación Stone-Čech de $[0,\zeta)$ es homeomorfa a $[0,\zeta)$ cuando $\zeta$ es sucesor. Ahora, si $\zeta$ es límite, el teorema anterior nos dice que la compactación Stone-Čech de $[0,\zeta)$ es $[0,\zeta+1)$ cuando $\omega < \mathrm{cf}(\zeta)$. El siguiente lema nos servirá para saber si la compactación Stone-Čech de $[0,\zeta)$ es, al menos, homeomorfa a algún otro espacio ordinal.

**3.2.12 Lema:** *Si* $\mathrm{cf}(\zeta) = \omega$, *entonces* $\beta[0,\zeta)$ *no es secuencialmente compacto.*

Demostración: Sea $f\colon \omega \to [0,\zeta)$ una función creciente tal que $f[\omega]$ sea cofinal en $[0,\zeta)$. Notemos que, para cualquier función creciente $g\colon \omega \to \omega$, se tiene que

$$\begin{aligned} & A \doteqdot \{(f \circ g)(\eta) : \eta \in \omega \wedge \eta \equiv 0 \text{ mód } 2\} \\ \text{y} \qquad & B \doteqdot \{(f \circ g)(\eta) : \eta \in \omega \wedge \eta \equiv 1 \text{ mód } 2\} \end{aligned}$$

son dos subconjuntos de $[0,\zeta)$ cerrados y ajenos. Así, dado que $[0,\zeta)$ es normal, por el corolario 2.3.2, se tiene que $\beta[A]$ y $\beta[B]$ tienen cerraduras ajenas en $\beta[0,\zeta)$, implicando que cualquier subsucesión de $\beta \circ f$ no es convergente en $\beta[0,\zeta)$. ⊠

Por 3.2.4 y por 3.2.10 podemos deducir lo siguiente.

**3.2.13 Proposición:** *Si* $\mathrm{cf}(\zeta) = \omega$, *entonces no existe un ordinal* $\lambda$ *de tal manera que* $\beta[0,\zeta)$ *sea homeomorfo a* $[0,\lambda)$.

APÉNDICE

# A

# CUBOS DE CANTOR Y DE TYCHONOFF

Recordemos que para todo cardinal infinito $\varkappa$, el cubo de Tychonoff de peso $\varkappa$, denotado por $I^{\varkappa}$, es el producto cartesiano $[0,1]^{\varkappa}$ dotado de la topología producto donde $[0,1]$ tiene la topología euclidiana. De manera similar se define al cubo de Cantor de peso $\varkappa$.

**A.0.1 Definiciones:** *Sea $\varkappa$ un cardinal infinito. El* ***cubo de Cantor*** *de peso $\varkappa$, denotado por $D^{\varkappa}$, es el producto cartesiano $2^{\varkappa}$ dotado de la topología producto donde $2$ tiene la topología discreta.*

En lo que resta del apéndice tendremos como supuesto que $\varkappa$ es un cardinal infinito y que para cada $i \in \varkappa$, las funciones $\pi_i \colon I^{\varkappa} \to [0,1]$ y a $\rho_i \colon 2^{\varkappa} \to 2$ son las proyecciones asociadas a $i$.

## § A.1

## Teorema de Hewitt-Marczewski-Pondiczery

Notemos que

$$\mathcal{B}_D = \left\{ \bigcap \left\{ \rho_j^{-1}\left[ \{ \Phi(j) \} \right] : j \in J \right\} : J \in [\varkappa]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\} \wedge \Phi \in 2^{\varkappa} \right\}$$

es una base para $D^{\varkappa}$. De lo cual se sigue el siguiente lema que servirá para demostrar el teorema de Hewitt-Marczewski-Pondiczery relacionada con la densidad de espacios producto. Dicho teorema se debe a los matemáticos Edwin Hewitt (1920–1999), Edward Marczewski (1907–1976) y al pseudónimo E. S. Pondiczery utilizado por Ralph P. Boas Jr. (1921–1992).

**A.1.1 Lema:** $w(D^\kappa) \leq \kappa$.

**A.1.2 Teorema de Hewitt-Marczewski-Pondiczery:** *Sean $\lambda$ un cardinal infinito, $S$ un conjunto no vacío tal que $|S| \leq 2^\lambda$ y, para cada $s \in S$, un espacio topológico $X_s$ tal que $d(X_s) \leq \lambda$. Entonces $d(X) \leq \lambda$, donde $X = \prod\{X_s : s \in S\}$ está dotado de la topología producto.*

DEMOSTRACIÓN: Para cada $s \in S$ consideremos a $D_s \subseteq X_s$ denso en $X_s$ de tal manera que $|D_s| = d(X_s)$. Si definimos a $D = \prod\{D_s : s \in S\}$, entonces $D$ es denso en $X$ [13, 2.3.5] y, por lo tanto,

$$d(X) \leq d(D).$$

Por el axioma de elección, para cada $s \in S$, al ser $|D_s| \leq \lambda$, existe una función suprayectiva $f_s : \lambda \to D_s$ que resulta ser continua cuando a $\lambda$ lo dotamos de la topología discreta. Dotemos, entonces, a $\lambda$ con la topología discreta y consideremos a la función $F\colon S^\lambda \to D$ dada por

$$F(x)(s) = f_s(x(s))$$

para toda $x \in S^\lambda$, la cual resulta ser suprayectiva y continua, por lo que [13, 1.4.10]

$$d(D) \leq d\big(S^\lambda\big).$$

Gracias a que $|S| \leq 2^\lambda$, podemos suponer, sin perder generalidad, que $S \subseteq D^\lambda$. Tomemos a $\mathcal{B}$ una base de $S$ tal que $|\mathcal{B}| \leq \lambda$, lo cual es posible porque $S$ es subespacio de $D^\lambda$ y, por el lema anterior, $w(D^\lambda) \leq \lambda$. Consideremos al conjunto $\mathcal{F}$ de familias finitas de $\mathcal{B}$ cuyos elementos son ajenos dos a dos y al conjunto $\mathcal{D}$ de funciones $\Phi\colon S \to \lambda$ con la propiedad de que existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $\Phi$, restringida a cada elemento de $F \cup \{S \setminus \bigcup F\}$, es constante. En concreto,

$$\mathcal{F} = \left\{F \in [\mathcal{B}]^{<\omega} : \forall B_1, B_2 \in F \left(B_1 \neq B_2 \Rightarrow B_1 \cap B_2 = \emptyset\right)\right\}$$

$$\text{y} \qquad \mathcal{D} = \left\{\Phi \in S^\lambda : \exists F \in \mathcal{F}\ \forall X \in F \cup \left\{S \setminus \bigcup F\right\} \left(|\Phi[X]| \leq 1\right)\right\}.$$

Sea $U \subseteq S^\lambda$ un abierto no vacío, entonces existen $J \in [S]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ y $U_j \subseteq \lambda$ para cada $j \in J$ de tal manera que

$$\bigcap\{p_j^{-1}[U_j] : j \in J\} \subseteq U$$

donde $p_s : S^\lambda \to \lambda$ es la proyección asociada a $s$ con $s \in S$. Note que, al ser $U$ no vacío, sucede que $U_j$ es no vacío para cada $j \in J$. Ahora, para cada $j \in J$ sea $\xi_j \in U_j$ arbitrario y consideremos a $B_j \in \mathcal{B}$ de tal manera que si $j, k \in J$ son distintos, entonces $B_j \cap B_k = \emptyset$, lo cual es posible porque $S$ es $T_2$. Entonces cualquier función $\Phi \in S^\lambda$ que sea constante en $S \setminus \bigcup\{B_j : j \in J\}$ y que $\Phi[B_j] = \{\xi_j\}$ para cada $j \in J$, cumplirá que $\Phi \in \mathcal{D}$, ya que $J$ es finito y

$$\Phi \in \bigcap\{p_j^{-1}[U_j] : j \in J\} \subseteq U.$$

En conclusión, $\mathcal{D}$ es denso en $S^\lambda$ y, al tener cardinalidad no mayor a $\lambda$, deducimos que

$$d(S^\lambda) \leq \lambda.$$

Finalmente concluimos que $d(X) \leq \lambda$. ⊠

El siguiente resultado concerniente a la celularidad de espacios productos, se deduce con facilidad del teorema anterior.

**A.1.3 Corolario:** *Sean $\lambda$ un cardinal infinito, $S$ un conjunto no vacío y $X_s$ un espacio topológico tal que $d(X_s) \leq \lambda$ para cada $s \in S$. Si $X = \prod\{X_s : s \in S\}$, entonces $c(X) \leq \lambda$.*

Demostración: Supongamos, para llegar a una contradicción, que $\lambda < c(X)$. Entonces existe un cardinal $\mu$ tal que $\lambda < \mu \leq c(X)$ y se puede encontrar $V_\alpha \subseteq X$ para cada $\alpha \in \mu$ de tal manera que $\{V_\alpha : \alpha \in \mu\}$ es una familia celular en $X$ de cardinalidad $\mu$. Supongamos, sin perder generalidad, que para cada $\alpha \in \mu$ existen $J_\alpha \in [S]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ y un abierto $U_j^\alpha \subseteq X_j$ para cada $j \in J_\alpha$ tales que

$$V_\alpha = \bigcap\{p_j^{-1}[U_j^\alpha] : j \in J_\alpha\}$$

donde $p_s : X \to X_s$ es la función proyección asociada a $s$, para cada $s \in S$. Supongamos que $J \doteq \bigcup\{J_\alpha : \alpha \in \text{mín}\{\mu, 2^\lambda\}\}$ y consideremos a

$$Y = \prod\{X_j : j \in J\}.$$

Por el teorema de Hewitt-Marczewski-Pondiczery, teniendo que $|J| \leq 2^\lambda$ y que $d(X_j) \leq \lambda$ para cada $j \in J$, podemos deducir que $d(Y) \leq \lambda$. Ahora consideremos a

$$\mathcal{W} = \{p_J[V_\alpha] : \alpha \in \text{mín}\{\mu, 2^\lambda\}\},$$

donde $p_J : X \to \prod\{X_j : j \in J\}$ es la proyección asociada a $J$, y notemos que $\mathcal{W}$ es una familia celular en $Y$ porque, de no serlo, existirían $\alpha, \beta \in \text{mín}\{\mu, 2^\lambda\}$ distintos tales que

$$p_J[V_\alpha] \cap p_J[V_\beta] \neq \emptyset,$$

implicando que existan $f \in V_\alpha$ y $g \in V_\beta$ de tal manera que $f(j) = g(j)$ para cada $j \in J$, lo cual es imposible porque $J_\alpha \cup J_\beta \subseteq J$ y, al ser $V_\alpha \cap V_\beta = \emptyset$, sucede que $f(j) \neq g(j)$ tanto en el caso en que $j \in J_\alpha$ como en el caso en que $j \in J_\beta$. Finalmente, deducimos que

$$\text{mín}\{\mu, 2^\lambda\} = |\mathcal{W}| \leq c(Y) \leq d(Y) \leq \lambda,$$

lo cual es una contradicción porque tanto $\mu$ como $2^\lambda$ son mayores que $\lambda$. ⊠

§ A.2

## Funciones cardinales

**A.2.1 Teorema:** *Para el cubo de Tychonoff de peso $\varkappa$ tenemos que*

(I) $\phi(I^\varkappa) = \varkappa$ *cuando* $\phi \in \{w, hd, hL, hc, t, \psi, \chi\}$; *que*

(II) $d(I^\varkappa) = \log(\varkappa) \doteqdot \min\{\lambda \in \mathfrak{Car} : \varkappa \leq 2^\lambda\}$; *y que*

(III) $\phi(I^\varkappa) = \omega$ *cuando* $\phi \in \{c, e, L\}$.

DEMOSTRACIÓN: (I) Notemos que, gracias al teorema 0.0.8, es suficiente demostrar que $w(I^\varkappa) \leq \varkappa$, que $\varkappa \leq s(I^\varkappa)$ y que $\varkappa \leq \min\{t(I^\varkappa), \psi(I^\varkappa)\}$.

Veamos que $w(I^\varkappa) \leq \varkappa$ ya que

$$\mathcal{B}_I \doteqdot \left\{ \bigcap \left\{ \pi_j^{-1}\left[ B\left(\Phi(j), \tfrac{1}{N(j)}\right) \right] : j \in J \right\} : J \in [\varkappa]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\} \wedge N \in \mathbb{N}^\varkappa \wedge \Phi \in [0,1]^\varkappa \right\}$$

es una base para de $I^\varkappa$ de cardinalidad $\varkappa$ gracias a que una base para la topología euclidiana en $[0,1]$ es el conjunto de bolas abiertas con centro en algún punto de $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ de radio racional.

Ahora, para cada $\alpha \in \varkappa$, sea $f_\alpha \in I^\varkappa$ dada por

$$f_\alpha(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \alpha \\ 0 & \text{si } i \neq \alpha \end{cases}$$

y notemos que $\{f_\alpha : \alpha \in \varkappa\}$ es un discreto de $I^\varkappa$, ya que

$$\pi_i^{-1}\left[\left(\tfrac{1}{2}, 1\right]\right] \cap \{f_\alpha : \alpha \in \varkappa\} = \{f_i\}$$

para cada $i \in \varkappa$, de cardinalidad $\varkappa$. Por lo tanto $\varkappa \leq s(I^\varkappa)$.

Para ver que $\varkappa \leq \psi(I^\varkappa)$, supongamos que existe $f \in I^\varkappa$ tal que $\psi(f, I^\varkappa) < \varkappa$. Entonces existe una pseudobase $\mathcal{V} = \{V_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ para $f$ en $I^\varkappa$ de cardinalidad $\lambda$ donde $\lambda < \varkappa$. Notemos que para cada $\alpha \in \lambda$ existen $J_\alpha \in [\varkappa]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ y $U_j^\alpha \subseteq [0,1]$ abierto para cada $j \in J_\alpha$ de tal manera que

$$f \in \bigcap \left\{ \pi_j^{-1}\left[U_j^\alpha\right] : j \in J_\alpha \right\} \subseteq V_\alpha.$$

Escojamos a $\beta \in \varkappa \setminus \bigcup \{J_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ y a $x \in [0,1] \setminus \{f(\beta)\}$, lo cual es posible porque, al ser $\lambda < \varkappa$ y $J_\alpha$ finito para cada $\alpha \in \lambda$, entonces $\bigcup\{J_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ no supera en cardinalidad a $\varkappa$ y porque $[0,1]$ es infinito. Si definimos a $g \in I^\varkappa$ por

$$g(i) = \begin{cases} f(i) & \text{si } i \neq \beta \\ x & \text{si } i = \beta, \end{cases}$$

entonces sucede que $g \neq f$ y que

$$g \in \bigcap\left\{\bigcap\left\{\pi_j^{-1}\left[U_j^\alpha\right] : j \in J_\alpha\right\} : \alpha \in \lambda\right\} \subseteq \bigcap \mathcal{V} = \{f\},$$

lo cual genera la contradicción que buscábamos.

Finalmente, para ver que $\varkappa \leq t(I^\varkappa)$, demostraremos que $\varkappa \leq t(f, I^\varkappa)$ donde $f \in I^\varkappa$ es tal que $f[\varkappa] = \{0\}$. Ahora, para cada $J \in [\varkappa]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ definamos a $f_J \in I^\varkappa$ dada por

$$f_J(j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \in J \\ 1 & \text{si } j \notin J, \end{cases}$$

y sea $C = \left\{f_J : J \in [\varkappa]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}\right\}$. Es claro que $f \in \operatorname{cl}(C)$ y que $|C| = \varkappa$. Entonces, sea $C_\emptyset \subseteq C$ tal que $|C_\emptyset| \leq t(f, I^\varkappa)$ y $f \in \operatorname{cl}(C_\emptyset)$. Demostraremos que $\varkappa \leq |C_\emptyset|$ supongamos, para llegar a una contradicción, que $\lambda = |C_\emptyset| < \varkappa$ para algún cardinal $\lambda$, entonces existe $J_i \in [\varkappa]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ para cada $i \in \lambda$ de tal manera que

$$C_\emptyset = \left\{f_J \in C : \exists i \in \lambda\ (J = J_i)\right\}.$$

Consideremos a $J = \bigcup\left\{J_i : i \in \lambda\right\}$ y veamos que, como $\lambda < \varkappa$ y $J_i$ es finito para cada $i \in \lambda$, sucede que $J$ no supera en cardinalidad a $\varkappa$. Ahora, sea $J' \in [\varkappa \setminus J]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ y notemos que

$$\bigcap\left\{\pi_j^{-1}\left[\left[0, \tfrac{1}{2}\right)\right] : j \in J'\right\}$$

es un abierto que contiene a $f$ pero que no interseca a $C_\emptyset$, lo cual es imposible. En consecuencia, $\varkappa \leq |C_\emptyset| \leq t(f, I^\varkappa) \leq t(I^\varkappa)$.

(ii) Por el teorema de Hewitt-Marczewski-Pondiczery tenemos que $d(I^\varkappa) \leq \log(\varkappa)$ ya que $\varkappa \leq 2^{\log(\varkappa)}$ y por que $d([0,1]) \leq \log(\varkappa)$. Además, como $I^\varkappa$ es regular, podemos invocar el teorema de Groot para deducir que $\varkappa \leq 2^{d(I^\varkappa)}$, lo cual implica que $\log(\varkappa) \leq d(I^\varkappa)$.

(iii) Gracias al teorema 0.0.8 y al hecho de que todas las funciones cardinales son infinitas, es suficiente demostrar que $L(I^\varkappa) \leq \omega$ y que $c(I^\varkappa)$, Primero, al ser $I^\varkappa$ compacto, tenemos que $L(I^\varkappa) \leq \omega$. Además, por el corolario A.1.3 y por el hecho de que $d([0,1]) = \omega$, tenemos que $c(I^\varkappa) \leq \omega$. ⊠

## § A.3

## Compacidad secuencial

Como bien sabemos, el producto de una cantidad numerable de espacios secuencialmente compactos resulta en un espacio secuencialmente compacto [13, 3.10.35], por lo que tanto $D^\omega$ como $I^\omega$ son secuencialmente compactos. Como 2 con la topología discreta es un subespacio cerrado de $[0,1]$ con la topología euclideana, tenemos que $D^\varkappa$ es homeomorfo a un subconjunto cerrado de $I^\varkappa$. Además, recordemos que la compacidad secuencial se hereda a subconjuntos cerrados.

**A.3.1 Teorema:** *El cubo de Cantor de peso $\mathfrak{c}$ no es secuencialmente compacto.*

DEMOSTRACIÓN: Consideremos a $\phi\colon \mathfrak{c} \to 2^\omega$ una biyección y a $\theta\colon 2^\omega \to \mathfrak{c}$ su respectiva función inversa. Para cada $\eta \in \omega$, definamos a $f_\eta \in D^{\mathfrak{c}}$ por

$$f_\eta(i) = \phi(i)(\eta)$$

y sea $(f_{\eta_\mu})_{\mu\in\omega}$ una subsucesión de $(f_\eta)_{\eta\in\omega}$. Sean

$$A = \{\eta_\mu \in \omega : \mu \equiv 0 \bmod 2\}$$
$$\text{y} \qquad B = \{\eta_\mu \in \omega : \mu \equiv 1 \bmod 2\}$$

y definamos a $k \in 2^\omega$ por

$$k(\eta) = \begin{cases} 0 & \text{si } \eta \in A \\ 1 & \text{si } \eta \notin A. \end{cases}$$

Como $f_{\eta_\mu}(\theta(k)) = k(\eta_\mu)$, tenemos que

$$\{f_{\eta_\mu} : \eta_\mu \in A\} \subseteq p^{-1}_{\theta(k)}[\{0\}],$$
$$\text{y que} \qquad \{f_{\eta_\mu} : \eta_\mu \in B\} \subseteq p^{-1}_{\theta(k)}[\{1\}],$$

pero como $p^{-1}_{\theta(k)}[\{0\}]$ y $p^{-1}_{\theta(k)}[\{1\}]$ son cerrados y ajenos en $D^{\mathfrak{c}}$, entonces $\{f_{\eta_\mu} : \eta_\mu \in A\}$ y $\{f_{\eta_\mu} : \eta_\mu \in B\}$ tienen cerraduras ajenas en $D^{\mathfrak{c}}$, lo cual hace imposible que $(f_{\eta_\mu})_{\mu\in\omega}$ sea convergente. En conclusión, al ser $(f_{\eta_\mu})_{\mu\in\omega}$ una subsucesión arbitraria de $(f_\eta)_{\mu\in\omega}$, deducimos que $(f_\eta)_{\mu\in\omega}$ no tiene subsucesiones convergentes, lo cual implica que $D^{\mathfrak{c}}$ no es secuencialmente compacto. ☒

Entonces, si $\mathfrak{c} \leq \varkappa$, sucede que tanto $D^\varkappa$ como $I^\varkappa$ no son secuencialmente compactos. Si incluimos a la hipótesis del continuo en nuestros axiomas, deducimos fácilmente que $D^\varkappa$ es secuencialmente compacto si y solamente si $\varkappa = \omega$ y, por lo tanto, $I^\varkappa$ es secuencialmente compacto si y solamente si $\varkappa = \omega$.

Los siguientes resultados nos llevarán a la conclusión de que todo espacio compacto y $T_2$ cuya cardinalidad sea menor que $2^{\omega_1}$ resulta ser secuencialmente compacto, lo cual podría hacernos intuir que $2^{\omega_1}$ debe de ser compacto sin importar la existencia de la hipótesis del continuo en nuestros axiomas.

**A.3.2 Lema:** *Sean $\lambda$ un cardinal infinito y $X$ un espacio topológico con la propiedad de que $X$ es la intersección de una cantidad menor a $\lambda$ de abiertos de un espacio tanto compacto como $T_2$. Si para todo $x \in X$ sucede que $\lambda \leq \chi(x,X)$, entonces $2^\lambda \leq |X|$.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $(K, \mathcal{T}_K)$ un espacio tanto compacto como $T_2$ y $\theta$ un cardinal tal que $\theta < \lambda$. Supongamos que para cada $\xi \in \theta$ existe $U_\xi \subseteq K$ abierto con la propiedad de que $X = \bigcap\{U_\xi : \xi \in \theta\}$ y digamos que $\mathcal{T}_X$ la topología que $X$ hereda de $K$. Definamos a $O_\emptyset : 2^\emptyset \to \mathcal{T}_X$ por $O_\emptyset(\emptyset) = X$ y notemos que $O_\emptyset$ es una función porque $2^\emptyset = \{\emptyset\}$ y es tal que para toda $f \in 2^\emptyset$ sucede que

$$\bigcap\{O_\beta(f|_\beta) : \beta \in 1\} \neq \emptyset.$$

Sea $\alpha \in \lambda$ y supongamos que para cada $\beta \in \alpha+1$ existe una función $O_\beta\colon 2^\beta \to \mathcal{T}_X$ de tal manera que si $f \in 2^\alpha$, entonces

$$\bigcap\{O_\beta(f|_\beta) : \beta \in \alpha+1\} \neq \emptyset.$$

Sea, para cada $\beta \in \alpha+1$, una función $P_\beta\colon 2^\beta \to \mathcal{T}_K$ tal que $P_\beta(f) \cap X = O_\beta(f)$ para cada $f \in 2^\beta$. Dicha función existe porque $\mathcal{T}_X$ es la topología que $X$ hereda como subespacio de $(K, \mathcal{T}_K)$.

Sean $f \in 2^{\alpha+1}$ y

$$x \in \bigcap\{O_\beta(f|_\beta) : \beta \in \alpha+1\}.$$

Como $K$ es tanto compacto como Hausdorff, entonces es un espacio $T_4$, por lo que, para cada $\xi \in \theta$, existe $V_\xi \in \mathcal{T}_K$ tal que

$$x \in V_\xi \subseteq \mathrm{cl}_K(V_\xi) \subseteq U_\xi.$$

Además, para cada $\beta \in \alpha+1$ existe $V_{\theta+\beta} \in \mathcal{T}_K$ tal que

$$x \in V_{\theta+\beta} \subseteq \mathrm{cl}_K(V_{\theta+\beta}) \subseteq P_\beta(f|_\beta).$$

Notemos que $\{V_\xi \cap X : \xi \in \theta+(\alpha+1)\}$ no puede ser una pseudobase local en $X$ de $x$ ya que, de lo contrario, sucedería que

$$\psi(x,X) \leq \left|\{V_\xi \cap X : \xi \in \theta+(\alpha+1)\}\right| \leq \left|\theta+(\alpha+1)\right| < \lambda \leq \chi(x,X),$$

lo cual es imposible porque, al ser $X$ tanto compacto como Hausdorff, $\psi(x,X) = \chi(x,X)$. Sea

$$y \in \left(\bigcap\{V_\xi \cap X : \xi \in \theta+(\alpha+1)\}\right) \setminus \{x\}.$$

Como $\bigcap\{\mathrm{cl}_K(V_\xi) : \xi \in \theta\} \subseteq X$ es cerrado en $K$, del lema de Urysohn deducimos que existe una función $F\colon \bigcap\{\mathrm{cl}_K(V_\xi) : \xi \in \xi \in \theta\} \to [0,1]$ continua de tal manera que $F[\{x\}] \subseteq \{0\}$ y que $F[\{y\}] \subseteq \{1\}$. Definamos a

$$O_{\alpha+1}(f) = \begin{cases} f^{-1}\left[\left[0,\frac{1}{3}\right)\right] \cap V_{\theta+\alpha} & \text{si } f(\alpha) = 0 \\ f^{-1}\left[\left(\frac{2}{3},1\right]\right] \cap V_{\theta+\alpha} & \text{si } f(\alpha) = 1. \end{cases}$$

Como $\bigcap\{\mathrm{cl}_K(V_\xi) : \xi \in \xi \in \theta\} \subseteq X$ es cerrado en $K$, la cerradura en $\bigcap\{\mathrm{cl}_K(V_\xi) : \xi \in \xi \in \theta\}$ de cualquier conjunto coincide con la cerradura en $X$ de dicho conjunto. Además, como $F$ es continua y $V_{\theta+\alpha} \in \mathcal{T}_K$, tenemos que $O_{\alpha+1}(f) \in \mathcal{T}_X$, que

$$\mathrm{cl}_K\left(O_{\alpha+1}(f)\right) = \mathrm{cl}_X\left(O_{\alpha+1}(f)\right),$$

$$\begin{aligned} \text{que} \qquad & \mathrm{cl}_X\left(O_{\alpha+1}\left(f|_\alpha \cup \{(\alpha,0)\}\right)\right) \subseteq f^{-1}\left[\left[0,\tfrac{1}{3}\right]\right] \cap \mathrm{cl}_K(V_{\theta+\alpha}) \\ \text{y que} \qquad & \mathrm{cl}_X\left(O_{\alpha+1}\left(f|_\alpha \cup \{(\alpha,1)\}\right)\right) \subseteq f^{-1}\left[\left[\tfrac{2}{3},1\right]\right] \cap \mathrm{cl}_K(V_{\theta+\alpha}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, al ser $[0,\frac{1}{3}]$ y $[\frac{2}{3},1]$ ajenos, sucede que

$$\begin{aligned} & \mathrm{cl}_X\left(O_{\alpha+1}\left(f|_\alpha \cup \{(\alpha,0)\}\right)\right) \cup \mathrm{cl}_X\left(O_{\alpha+1}\left(f|_\alpha \cup \{(\alpha,1)\}\right)\right) \subseteq O_\alpha\left(f|_\alpha\right) \\ \text{y que} \qquad & \mathrm{cl}_X\left(O_{\alpha+1}\left(f|_\alpha \cup \{(\alpha,0)\}\right)\right) \cap \mathrm{cl}_X\left(O_{\alpha+1}\left(f|_\alpha \cup \{(\alpha,1)\}\right)\right) = \varnothing. \end{aligned}$$

También notemos que

$$\bigcap\left\{O_\beta\left(f|_\beta\right) : \beta \in (\alpha+1)+1\right\} \neq \varnothing$$

debido a que $x \in O_{\alpha+1}(f)$ cuando $f(\alpha)=0$, a que $y \in O_{\alpha+1}(f)$ cuando $f(\alpha)=1$ y a que

$$\begin{aligned} \{x,y\} &\subseteq \bigcap\left\{V_\xi \cap X : \xi \in \theta+(\alpha+1)\right\} = \\ &= \left(\bigcap\left\{V_\xi \cap X : \xi \in \theta\right\}\right) \cap \left(\bigcap\left\{V_{\theta+\beta} \cap X : \beta \in \alpha+1\right\}\right) \subseteq \\ &\subseteq X \cap \left(\bigcap\left\{P_\beta\left(f|_\beta\right) \cap X : \beta \in \alpha+1\right\}\right) = \\ &= \bigcap\left\{O_\beta\left(f|_\beta\right) : \beta \in \alpha+1\right\}. \end{aligned}$$

Ahora, sea $\gamma \in \lambda$ un ordinal límite y supongamos que para cada $\alpha \in \gamma$ existe una función $O_\alpha\colon 2^\alpha \to \mathcal{T}_X$ de tal manera que si $f \in 2^\alpha$, entonces

$$\begin{gathered} \mathrm{cl}_K\left(O_{\alpha+1}(f)\right) = \mathrm{cl}_X\left(O_{\alpha+1}(f)\right), \\ \mathrm{cl}_X\left(O_{\alpha+1}\left(f|_\alpha \cup \{(\alpha,0)\}\right)\right) \cup \mathrm{cl}_X\left(O_{\alpha+1}\left(f|_\alpha \cup \{(\alpha,1)\}\right)\right) \subseteq O_\alpha\left(f|_\alpha\right), \\ \mathrm{cl}_X\left(O_{\alpha+1}\left(f|_\alpha \cup \{(\alpha,0)\}\right)\right) \cap \mathrm{cl}_X\left(O_{\alpha+1}\left(f|_\alpha \cup \{(\alpha,1)\}\right)\right) = \varnothing \\ \text{y} \qquad \bigcap\left\{O_\beta\left(f|_\beta\right) : \beta \in \alpha+1\right\} \neq \varnothing. \end{gathered}$$

Definamos a $O_\gamma\colon 2^\gamma \to \mathcal{T}_X$ tal que $O_\gamma(f) = X$ para toda $f \in 2^\gamma$. Escojamos a $f \in 2^\gamma$ y a $F \in [\mathrm{suc}(\gamma)]^{<\omega} \setminus \{\varnothing\}$ y notemos que

$$\varnothing \neq \bigcap\left\{O_\alpha\left(f|_\alpha\right) : \alpha \in \max F+1\right\} \subseteq \bigcap\left\{\mathrm{cl}_K\left(O_\alpha\left(f|_\alpha\right)\right) : \alpha \in F\right\},$$

con lo que $\left\{\mathrm{cl}_K(O_\alpha(f|_\alpha)) : \alpha \in \mathrm{suc}(\gamma)\right\}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Como $K$ es compacto y como $\mathrm{cl}_K(O_\alpha(f|_\alpha)) = \mathrm{cl}_X(O_\alpha(f|_\alpha))$ para todo $\alpha \in \mathrm{suc}(\gamma)$, por el teorema 0.0.9 tenemos que

$$\bigcap\left\{\mathrm{cl}_X\left(O_\alpha\left(f|_\alpha\right)\right) : \alpha \in \mathrm{suc}(\gamma)\right\} \neq \varnothing$$

y, como $\mathrm{cl}_X(O_{\alpha+1}(f|_{\alpha+1})) \subseteq O_\alpha(f|_\alpha)$ para todo $\alpha \in \gamma$, tenemos que

$$\bigcap\left\{\mathrm{cl}_X\left(O_\alpha\left(f|_\alpha\right)\right) : \alpha \in \mathrm{suc}(\gamma)\right\} \subseteq \bigcap\left\{O_\alpha\left(f|_\alpha\right) : \alpha \in \gamma\right\},$$

por lo que, al ser $O_\gamma(f) = X$, concluimos que

$$\bigcap\left\{O_\alpha\left(f|_\alpha\right) : \alpha \in \gamma+1\right\} \neq \varnothing.$$

Por recursión transfinita, para cada $\alpha \in \lambda$ hemos defino a $O_\alpha : 2^\alpha \to \mathcal{T}_X$ de tal manera que si $f \in 2^\alpha$, entonces

$$\begin{aligned} &\mathrm{cl}_K\left(O_{\alpha+1}(f)\right) = \mathrm{cl}_X\left(O_{\alpha+1}(f)\right),\\ &\mathrm{cl}_X\left(O_{\alpha+1}\left(f|_\alpha \cup \{(\alpha,\emptyset)\}\right)\right) \cup \mathrm{cl}_X\left(O_{\alpha+1}\left(f|_\alpha \cup \{(\alpha,1)\}\right)\right) \subseteq O_\alpha\left(f|_\alpha\right)\\ &\mathrm{cl}_X\left(O_{\alpha+1}\left(f|_\alpha \cup \{(\alpha,\emptyset)\}\right)\right) \cap \mathrm{cl}_X\left(O_{\alpha+1}\left(f|_\alpha \cup \{(\alpha,1)\}\right)\right) = \emptyset\\ \text{y} \qquad &\bigcap\left\{O_\beta\left(f|_\beta\right) : \beta \in \alpha+1\right\} \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Notemos que si $f \in 2^\lambda$, por un procedimiento análogo al caso en que $\gamma \in \lambda$ es un ordinal límite, entonces

$$\bigcap\left\{O_\alpha\left(f|_\alpha\right) : \alpha \in \lambda\right\} \neq \emptyset.$$

Así, definamos a $\Phi\colon 2^\lambda \to X$ tal que

$$\Phi(f) \in \bigcap\left\{O_\alpha\left(f|_\alpha\right) : \alpha \in \lambda\right\}$$

y a $\Theta\colon 2^{\mathrm{suc}(\lambda)} \to 2^\lambda$ de tal manera que

$$\Theta(f)(\alpha) = \begin{cases} f(\alpha) & \text{si } \alpha \in \mathrm{suc}(\lambda)\\ \emptyset & \text{si } \alpha \in \mathrm{lím}(\lambda) \cup \{\emptyset\}. \end{cases}$$

Sean $f, g \in 2^{\mathrm{suc}(\lambda)}$ distintos. Entonces tales que $f(\alpha) \neq g(\alpha)$ para algún $\alpha \in \mathrm{suc}(\lambda)$. Veamos que $\Phi(\Theta(f)) \neq \Phi(\Theta(g))$ ya que si $\mu = \mathrm{mín}\{\alpha \in \mathrm{suc}(\lambda) : f(\alpha) \neq g(\alpha)\}$, entonces

$$\begin{aligned} &\Phi(\Theta(f)) \in O_{\mu+1}\left(\Theta(f)|_\mu \cup \{(\mu, f(\mu))\}\right),\\ &\Phi(\Theta(g)) \in O_{\mu+1}\left(\Theta(g)|_\mu \cup \{(\mu, g(\mu))\}\right)\\ \text{y} \qquad &\mathrm{cl}_X\left(O_{\mu+1}\left(\Theta(f)|_\mu \cup \{(\mu, f(\mu))\}\right)\right) \cap \mathrm{cl}_X\left(O_{\mu+1}\left(\Theta(g)|_\mu \cup \{(\mu, g(\mu))\}\right)\right) = \emptyset. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\Phi \circ \Theta$ es una función inyectiva, con lo que $2^\lambda = \left|2^{\mathrm{suc}(\lambda)}\right| \leq |X|$. ⊠

**A.3.3 Lema:** *Sean $\alpha$ un ordinal y $X$ un espacio tanto compacto como $T_2$ de tal manera que $\omega_\alpha \leq |X| < 2^{\omega_\alpha}$. Entonces existe $\phi\colon \omega_{\alpha+1} \to X$ inyectiva tal que $X$ tiene una base local en $\phi(\xi)$ cuya cardinalidad no rebasa a $\omega_\alpha$.*

Demostración: Por el lema anterior, existe $x_\emptyset \in X$ de tal manera que existe una base local $\mathcal{B}_\emptyset$ de $x_\emptyset$ tal que $|\mathcal{B}_\emptyset| < \omega_{\alpha+1}$, o equivalentemente, que $|\mathcal{B}_\emptyset| \leq \omega_\alpha$.

Sea $\alpha \in \omega_{\alpha+1} \setminus \{\emptyset\}$ y supongamos que para todo $\xi \in \alpha$ está definido $x_\xi \in X$ de tal manera que existe una base local $\mathcal{B}_\xi$ de $x_\xi$ tal que $|\mathcal{B}_\xi| \leq \omega_\alpha$. Como $X$ es un espacio $T_2$, para cada $\xi \in \alpha$ tenemos que $X \setminus \{x_\xi\}$ es un abierto de $X$. Debido a que $|\alpha| \leq \omega_\alpha$ y a que $\omega_{\alpha+1} \leq |X|$, también tenemos que $\bigcap\left\{X \setminus \{x_\xi\} : \xi \in \alpha\right\}$ no es vacío. Por el lema anterior podemos deducir que existe

$$x_\alpha \in \bigcap\left\{X \setminus \{x_\xi\} : \xi \in \alpha\right\}$$

de tal manera que se puede encontrar una base local $\mathcal{B}_\alpha$ de $x_\alpha$ tal que $|\mathcal{B}_\alpha| < \omega_{\alpha+1}$, o equivalentemente, que $|\mathcal{B}_\alpha| \leq \omega_\alpha$. Por recursión transfinita, hemos definido una función $\phi\colon \omega_{\alpha+1} \to X$ tal que, para cada $\alpha \in \omega_{\alpha+1}$, sucede que $\phi(\alpha) = x_\alpha$ y existe $\mathcal{B}_\alpha$ una base local de $x_\alpha$ tal que $|\mathcal{B}_\alpha| \leq \omega_\alpha$. Además, si $\alpha, \beta \in \omega_1$ son distintos, sucede que $x_\alpha \neq x_\beta$, por lo que $\phi$ es inyectiva. ⊠

**A.3.4 Teorema:** *Sea $X$ un espacio compacto y $T_2$ tal que $|X| < 2^{\omega_1}$. Entonces $X$ es secuencialmente compacto.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $(x_\eta)_{\eta\in\omega}$ una sucesión en $X$. Si $\{x_\eta : \eta \in \omega\}$ es finito, es fácil ver que $(x_\eta)_{\eta\in\omega}$ tiene una subsucesión convergente. Supongamos que $\{x_\eta : \eta \in \omega\}$ es infinito y consideremos a $C$ como la cerradura de dicho conjunto en $X$ y dotémoslo de la topología de subespacio.

Supongamos que $C$ es numerable. Entonces $C$ es primero numerable. Además, como $X$ es compacto y $T_2$, podemos deducir que $C$ es numerablemente compacto y $T_2$, pero como también es primero numerable, inferimos que es secuencialmente compacto, lo cual es suficiente para que exista una subsucesión de $(x_\eta)_{\eta\in\omega}$ que sea convergente.

Ahora, supongamos que $C$ no es numerable, entonces $\omega_1 \leq |C| < 2^{\omega_1}$. Por el lema anterior, podemos deducir que existe una cantidad no numerable de puntos de $C$ que tienen una base local cuya cardinalidad no rebasa a $\omega$. Entonces, al ser $\{x_\eta : \eta \in \omega\}$ numerable, deben existir $x \in C \setminus \{x_\eta : \eta \in \omega\}$ y $\mathcal{B}$ una base local de $x$ tal que $|\mathcal{B}| \leq \omega$. Supongamos, sin perder generalidad, que $\mathcal{B} = \{B_\eta : \eta \in \omega\}$. Como $x \in C \setminus \{x_\eta : \eta \in \omega\}$, podemos deducir que $x$ es un punto de acumulación de $\{x_\eta : \eta \in \omega\}$, ya que $C$ es la cerradura de dicho conjunto. Entonces, para cada $\mu \in \omega$, existe $x_{\eta_\mu} \in B_\mu$, lo cual implica que $(x_{\eta_\mu})_{\mu\in\omega}$ converja a $x$. ⊠

A pesar de que, gracias al teorema anterior, para todo $\lambda \in \omega_1$ sucede que $D^\lambda$ es secuencialmente compacto. Cabe mencionar que la compacidad secuencial de $D^{\omega_1}$ es independiente de ZFC [5].

## § A.4

## Propiedades universales

Como demostramos en el capítulo 1, el cubo de Tychonoff de peso $\kappa$ es universal para la clase de espacios Tychonoff de peso $\kappa$. Tychonoff utilizó, en 1930 [29], un caso particular del teorema de la diagonal para demostrar su versión del teorema 1.1.2 —que es exactamente la misma a la nuestra pero la manera en que la escribió, aparte de estar en alemán, es diferente—. Los siguientes corolarios se siguen del teorema 1.1.2.

**A.4.1 Corolario:** *El cubo de Tychonoff de peso $\kappa$ es universal para todos los espacios tanto compactos como Hausdorff de peso $\kappa$.*

**A.4.2 Corolario:** *Un espacio topológico es Tychonoff si y solamente si es encajable en un espacio tanto compacto como Hausdorff.*

Otro resultado importante se sigue del hecho de que todo espacio tanto segundo numerable como $T_3$ es $T_4$ [13, 1.5.16], de que el producto topológico de una cantidad numerable de espacios separables es separable [13, 2.3.5] y de que el producto topológico de una cantidad numerable de espacios métricos es metrizable [13, 4.2.2]. Dicho teorema fue demostrado por Tychonoff en 1926 [28] pero lleva el nombre de Urysohn porque en un artículo póstumo de él publicado en 1925 [30] demostró que todo espacio tanto segundo numerable como $T_4$ es metrizable.

**A.4.3 Teorema de metrización de Urysohn:** *Sea $X$ un espacio topológico $T_1$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

(i) *El espacio $X$ es segundo numerable y $T_3$.*
(ii) *El espacio $X$ es homeomorfo a un subespacio del cubo de Tychonoff de peso $\omega$.*
(iii) *El espacio $X$ es separable y metrizable.*

**A.4.4 Teorema:** *El cubo de Cantor de peso $\varkappa$ es universal para todos los espacios $T_0$ y cero-dimensionales de peso $\varkappa$.*

Demostración: Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio cero-dimensional $T_0$ de peso $\varkappa$. Consideremos a $\mathcal{B}$ una base de conjuntos que son tanto abiertos como cerrados cuya cardinalidad no sea mayor a $\varkappa$ y definamos, para cada $B\in\mathcal{B}$, a $f_B : X\to 2$ dada por

$$f_B(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\in B\\ 1 & \text{si } x\notin B.\end{cases}$$

Si dotamos a 2 con la topología discreta, tenemos que $\triangle\{f_B : B\in\mathcal{B}\} : X\to 2^{\mathcal{B}}$ es continua. Además, como $X$ es un espacio $T_0$ y

$$\mathcal{B}\subseteq\{f_B^{-1}[U] : B\in\mathcal{B}\wedge U\in\wp(2)\},$$

tenemos que $\{f_B : B\in\mathcal{B}\}$ separa puntos y genera a la topología de $X$, implicando que $X$ sea homeomorfo a un subespacio de $2^{\mathcal{B}}$. Finalmente, notemos que $D^{|\mathcal{B}|}$ es homeomorfo a $2^{\mathcal{B}}$ y, a su vez, a un subespacio de $D^{\varkappa}$. ⊠

APÉNDICE

# B

# NORMALIDAD PERFECTA EN LOS ESPACIOS ORDINALES

Supongamos que $\zeta$ es un ordinal infinito. Recordemos que un espacio $X$ es perfectamente normal si para cualesquiera $F, G \subseteq X$ cerrados y ajenos existe $f\colon X \to [0,1]$ continua de tal manera que $F = f^{-1}[\{0\}]$ y $G = f^{-1}[\{1\}]$. Además, si $X$ es $T_1$, decimos que $X$ es $T_6$. Por el lema de Urysohn tenemos que si $X$ es $T_6$, entonces todo subconjunto cerrado de $X$ es $G_\delta$ y, por otro lado, si todo subconjunto cerrado de $X$ es $G_\delta$, entonces $X$ es perfectamente normal. Para determinar las condiciones bajo las cuales un espacio ordinal es perfectamente normal, necesitamos del teorema de Fodor.

**B.0.1 Teorema de Fodor [14]:** *Sean $\gamma$ un ordinal límite con $\omega < \mathrm{cf}(\gamma)$, $S$ un conjunto estacionario de $\gamma$ y $f\colon S \to \gamma$ una función regresiva. Entonces existen $\alpha \in \gamma$ y un conjunto $T \subseteq S$ estacionario en $\gamma$ tales que $f(\xi) \leq \alpha$ para todo $\xi \in T$.*

*En particular, si $\gamma$ es regular, existe $\alpha \in \gamma$ tal que $f^{-1}[\{\alpha\}]$ es estacionario en $\gamma$.*

Únicamente al último párrafo del teorema anterior es lo que comúnmente se le conoce como teorema de Fodor [20, 8.7] o *Pressing-Down Lemma* [21, 6.15] y su demostración directa [17, 10.66, 10.68, 10.71 & 10.73] es estudiada en cualquier curso intermedio de teoría de conjuntos.

**B.0.2 Teorema:** *El espacio $[0, \zeta)$ es perfectamente normal si y solamente si $\zeta < \omega_1$.*

DEMOSTRACIÓN: [$\Rightarrow$] Como $[\emptyset,\zeta)$ es $T_1$, tenemos que todo subconjunto cerrado de $[\emptyset,\zeta)$ es $G_\delta$. Supongamos, para llegar a una contradicción, que $\omega_1 \leq \zeta$. Si $\omega_1 < \zeta$, tenemos que $\{\omega_1\}$ es un conjunto cerrado de $[\emptyset,\zeta)$, y, al ser $[\emptyset,\zeta)$ un espacio $T_1$, tenemos que $\{\omega_1\}$ es un conjunto $G_\delta$, por lo que existe un abierto $U_\eta$ para cada $\eta \in \omega$ de tal manera que

$$\{\omega_1\} = \bigcap_{\eta\in\omega} U_n.$$

Como $\omega_1$ es límite, para cada $\eta \in \omega$ existe $\xi_\eta < \omega_1$ tal que $S[\xi_\eta,\omega_1] \subseteq U_\eta$. Notemos que si $\xi < \omega_1$, al ser $\xi \not\in \{\omega_1\}$, existe $\eta \in \omega$ tal que $\xi \not\in U_n$, con lo que $\xi \not\in S[\xi_n,\omega_1]$, implicando que $\xi < \xi_n$. Por lo tanto, si definimos a $f\colon \omega \to \xi$ como $f(\eta) = \xi_\eta$ para cada $\eta \in \omega$, tendremos que $f[\omega]$ es cofinal en $\omega_1$, lo cual es imposible porque $\omega < \mathrm{cf}(\omega_1)$.

Ahora, supongamos que $\omega_1 = \zeta$. Como $\mathrm{der}([\emptyset,\omega_1))$ es cerrado, existe un abierto $U_\eta$ para cada $\eta \in \omega$ de tal manera que

$$\mathrm{der}\big([\emptyset,\omega_1)\big) = \bigcap_{\eta\in\omega} U_n.$$

Sea $\eta \in \omega$ y definamos a $f\colon \mathrm{der}([\emptyset,\omega_1)) \to \omega_1$ tal que $f_\eta(\gamma) < \gamma$ y $S[f_\eta(\gamma),\gamma] \subseteq U_\eta$ para cada $\gamma \in \mathrm{der}([\emptyset,\omega_1))$. Entonces $f_\eta$ es una función regresiva. Por el teorema de Fodor, existe $\xi_\eta \in [\emptyset,\omega_1)$ de tal manera que $f_\eta^{-1}\big[\{\xi_\eta\}\big]$ es un conjunto estacionario de $[\emptyset,\omega_1)$. Notemos que si $\nu \in S[\xi_n,\zeta)$, al ser $S[\nu,\zeta)$ un club de $[\emptyset,\omega_1)$, existe $\theta \in f_\eta^{-1}[\{\xi_\eta\}] \cap S[\nu,\zeta)$, pero como $S[f_\eta(\theta),\theta] \subseteq U_\eta$ y $f_\eta(\theta) = \xi_\eta \leq \nu \leq \theta$, se tiene que $\nu \in U_\eta$. Por lo tanto $S[\xi_\eta,\zeta) \subseteq U_\eta$. Ahora, como $\omega < \mathrm{cf}(\omega_1)$, entonces si $\xi = \sup\{\xi_\eta : \eta \in \omega\}$, sucede que $\xi \in [\emptyset,\omega_1)$ y es tal que $S[\xi,\zeta) \subseteq U_\eta$ para cada $\eta \in \omega$, con lo que

$$\xi + 1 \in S[\xi,\zeta) \subseteq \bigcap_{\eta\in\omega} U_\eta = \mathrm{der}([\emptyset,\omega_1)),$$

lo cual es imposible.

[$\Leftarrow$] Sea $U$ un abierto de $[\emptyset,\zeta)$. Notemos que

$$U = \bigcup_{\xi\in U} \{\xi\}$$

y, al ser $U$ numerable y $\{\xi\}$ cerrado para cada $\xi \in U$, sucede que $U$ es un conjunto $F_\delta$. Como $U$ fue arbitrario, podemos deducir que $[\emptyset,\zeta)$ es perfectamente normal. ☒

**B.0.3 Corolario:** *El espacio $[\emptyset,\zeta)$ es $T_6$ si y solamente si $\zeta < \omega_1$.*

APÉNDICE

# C

## FUNCIONES CARDINALES

Supongamos que $X$ es un espacio topológico. El ***peso*** de $X$, denotado por $w(X)$ es la mínima cardinalidad que una base de $X$ puede tener. Una función cardinal que siempre domina al peso y que usualmente domina a $|X|$ es $o(X)$, definido como la cardinalidad de los abiertos de $X$.

La ***densidad*** de $X$, denotada por $d(X)$ es la mínima cardinalidad que un denso en $X$ puede tener. Claramente, $X$ es separable si y solamente si $d(X) = \omega$. Si $D \subseteq X$ es denso, entonces todo subconjunto de $\{\operatorname{int}(\operatorname{cl}(A)) : A \subseteq D\}$ es un abierto regular de $X$. Del hecho anterior y de que los abiertos regulares forman una base para $X$ dado el caso en que $X$ es regular, se puede deducir el teorema de Groot.

Recordemos que una colección de abiertos no vacíos de $X$ ajenos dos a dos es llamada una ***familia celular***. La ***celularidad*** de $X$, denotada por $c(X)$, es el supremo de las cardinalidades de todas las familias celulares de $X$. Se dice que $X$ satisface la ***condición de cadena contable*** si y solamente si $c(X) = \omega$.

El ***esparcimiento*** o ***spread*** de $X$, denotado por $s(X)$, es el supremo de las cardinalidades de todos los subconjuntos discretos de $X$.

El ***grado de Lindelöf*** de $X$, denotado por $L(X)$, es el mínimo cardinal $\varkappa$ tal que toda cubierta abierta de $X$ tiene una subcubierta cuya cardinalidad no supera a $\varkappa$. Notemos que $X$ es Lindelöf si y solamente si $L(X) = \omega$.

Una generalización del grado de Lindelöf es la ***extensión*** o ***extent*** de $X$, denotado por $e(X)$, y definido como el supremo de las cardinalidad de todos los subconjuntos cerrados y discretos de $X$.

Una función cardinal $\phi$ es ***monótona*** si $\phi(Y) \leq \phi(X)$ para cada subespacio $Y$ de $X$. De las funciones cardinales retomadas hasta el momento, el peso y el esparcimiento son funciones monótonas mientras que la densidad, la celularidad, el grado de Lindelöf y la extensión no lo son. A propósito, la celularidad es monótona para subconjuntos abiertos y en densos; la densidad es monótona para subconjuntos abiertos; y tanto el grado de Lindelöf como la extensión son monótonos para subconjuntos cerrados. Para cada función cardinal $\phi$ no monótona, existe otra función $h\phi$ definida como el supremo de $\{\phi(Y) : Y \subseteq X\}$. Como $hc(X) = he(X) = s(X)$, hemos introducido dos nuevas funciones cardinales, a saber, $hd$ y $hL$, conocidas como ***densidad hereditaria*** y ***grado de Lindelöf hereditario***, respectivamente.

Las funciones cardinales introducidas anteriormente son globales, es decir, su definición es basada en una propiedad topológica que proporciona información global del espacio. Ahora, introduciremos funciones cardinales basadas en propiedades locales del espacio. Sea $x \in X$.

El ***carácter*** de $x$ en $X$, denotado por $\chi(x,X)$, es la mínima cardinalidad que una base local para $x$ en $X$ puede tener.

Recordemos que una colección $\mathcal{V}$ de vecindades no vacías de $X$ es una ***pseudobase*** para $x$ en $X$ si $\bigcap\{V : V \in \mathcal{V}\} = \{x\}$. El ***pseudocarácter*** de $x$ en $X$, denotado por $\psi(x,X)$, es la mínima cardinalidad que una pseudobase para $x$ en $X$ puede tener. Notemos que $\psi(x,X)$ solamente está definida cuando $X$ es $T_1$.

La ***estrechez*** o ***tightness*** de $x$ en $X$, denotado por $t(x,X)$, es el mínimo cardinal $\kappa$ tal que para todo $C \in \{Y \subseteq X : x \in \mathrm{cl}_X(Y)\}$ existe $C_\emptyset \in [C]^{\leq\kappa}$ tal que $x \in \mathrm{cl}_X(C_\emptyset)$. No se deje impresionar por la definición de $t(x,X)$; recuerde que si $X$ es un espacio métrico, entonces si $x \in \mathrm{cl}_X(C)$ con $x \in X$ y $C \subseteq X$, existe una sucesión $(x_\eta)_{\eta\in\omega}$ —claramente de longitud $\omega$— en $C$ que converge a $x$, por lo que si $C_\emptyset = \{x_\eta : \eta \in \omega\}$, tenemos que $C_\emptyset \in [C]^{\leq\omega}$ y que $x \in \mathrm{cl}_X(C_\emptyset)$. Como esta propiedad no es satisfecha por cualquier espacio topológico, es natural preguntarser por el mínimo cardinal $\kappa$ tal que si $x \in \mathrm{cl}_X(C)$ con $x \in X$ y $C \subseteq X$, entonces existe una sucesión de longitud $\kappa$ en $C$ que converge a $x$. Dicho cardinal es la estrechez de $X$ en $x$.

Finalmente, definimos al ***carácter*** de $X$ como $\chi(X) = \sup\{\chi(p,X) : p \in X\}$, al ***pseudocarácter*** de $X$ como $\psi(X) = \sup\{\psi(p,X) : p \in X\}$ y a la ***extrechez*** o ***tightness*** de $X$ como $t(X) = \sup\{t(p,X) : p \in X\}$.

Todas las funciones cardinales se suponen infinitas, por lo que en la definición de cada una de ellas debe entenderse que dicho cardinal es mayor a $\omega$. Ésto puede forzarse uniendo el conjunto $\omega$ a cada cardinal.

# REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS


[1] Alexandroff, P. (1924). Über die metrisation der im kleinen kompakten topologischen räume. *Mathematische Annalen*, 92(3-4):294–301.

[2] Amor, J. A., Campero, G. & Miranda, F. (2014). *Teoría de conjuntos. Curso intermedio*. Las prensas de ciencias, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, segunda edición.

[3] Artin, M. (1991). *Algebra*. Prentice-Hall.

[4] Atiyah, M. & Macdonald, I. G. (1969). *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Wesley.

[5] Booth, D. (1974). A boolean view of sequential compactness. *Fundamenta Mathematicae*, 85(2):99–102.

[6] Bourbaki, N. (1998). *Algebra I*. Springer.

[7] Carathéodory, C. (1913). Über die begrenzung einfach zusammenhängender gebiete. *Mathematische Annalen*, 73(3):323–370.

[8] Casarrubias, F. & Tamariz, Á. (2015). *Elementos de topología general*, vol. 37 de *Aportaciones Matemáticas*. Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México, segunda edición.

[9] Čech, E. (1937). On bicompact spaces. *Annals of Mathematics*, 38(4):823–844.

[10] Chandler, R. E. & Faulkner, G. D. (1998). Hausdorff compactifications: A retrospective. En *Handbook of the History of General Topology, vol. 2*, p. 631–667. Springer.

[11] Comfort, W. W. (1976). Review of: Hewitt-Nachbin spaces, by Maurice D. Weir. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 82:857–863.

[12] Dieudonné, J. (1949). Review of: A problem of set-theoretic topology, by Edwin Hewitt. *Mathematical Reviews*, 10:126–127.

[13] Engelking, R. (1989). *General Topology*. Sigma series in pure mathematics. Heldermann Verlag, edición revisada.

[14] Fodor, G. (1956). Eine bemerkung zur theorie der regressiven funktionen. *Acta Scientiarum Mathematicarum, János Bolyai Mathematical Institute, University of Szeged*, 17(3–4):139–142.

[15] Frink, O. (1964). Compactifications and semi-normal spaces. *American Journal of Mathematics*, 86(3):602–607.

[16] Gillman, L. & Jerison, M. (1960). *Rings of Continuous Functions*. The university series in higher mathematics. Springer-Verlag New York.

[17] Hernández, F. (2017). *Teoría de conjuntos (una introducción)*, vol. 13 de *Aportaciones Matemáticas*. Papirhos, Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México.

[18] Hewitt, E. (1943). A problem of set-theoretic topology. *Duke Mathematical Journal*, 10(2):309–333.

[19] Hodel, R. E. (1984). Cardinal functions. En *Handbook of Set-Theoretic Topology*, p. 1–62. North-Holland.

[20] Jech, T. (2006). *Set Theory: The Third Millennium Edition, revised and expanded*. Springer Monographs in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg.

[21] Kunen, K. (2009). *The Foundations of Mathematics*. Mathematical logic and foundations. College Publications.

[22] Mill, J. v. (1984). An introdiction to $\beta\omega$. En *Handbook of Set-Theoretic Topology*, p. 503–567. North-Holland.

[23] Moore, G. H. (2008). The emergence of open sets, closed sets, and limit points in analysis and topology. *Historia Mathematica*, 35(3):220–241.

[24] Noether, E. (1921). Idealtheorie in ringbereichen. *Mathematische Annalen*, 83(1–2):24–66.

[25] Pichardo, R. & Tamariz, Á. (2017). *Álgebras booleanas y espacios topológicos*, vol. 40 de *Aportaciones Matemáticas*. Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México.

[26] Schindler, R. (2014). *Set Theory: Exploring Independence and Truth*. Universitext. Springer.

[27] Stone, M. (1937). Applications of the theory of boolean rings to general topology. *Transactions of the American Mathematical Society*, 41(3):375–481.

[28] Tychonoff, A. (1926). Über einen metrsationssatz von P. Urysohn. *Mathematische Annalen*, 95:139–142.

[29] Tychonoff, A. (1930). Über die topologische erweiterung von räumen. *Mathematische Annalen*, 102:544–561.

[30] Urysohn, P. (1925). Zum metrisationsproblem. *Mathematische Annalen*, 94:309–315.

[31] van der Waerden, B. L. (1930). *Moderne Algebra. Teil I*, vol. 33 de *Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag.

[32] Wallman, H. (1938). Lattices and topological spaces. *Annals of Mathematics*, 39:112–126.

[33] Zariski, O. & Samuel, P. (1958). *Commutative Algebra*, vol. 1 de *University Series in Higher Mathematics*. Van Nostrand.