UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Espacios de Moore e hiperespacios de Pixley-Roy

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

P R E S E N T A :

María Fernanda Villaseñor Espinosa

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. Alejandro Darío Rojas Sánchez

CIUDAD DE MÉXICO, 2019

UNAM
Universidad Nacional Autónoma de México
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mis padres, que durante toda mi vida me han brindado su incondicional apoyo y su inagotable esfuerzo, por alentarme a superarme y por creer en mí. Hoy, a través de estas páginas impresas que conforman mi investigación de tesis para convertirme en Matemática, quisiera retribuirles todo el amor, cada consejo, todos los valores que en mí han inculcado. Quiero que sepan que estoy muy orgullosa de ser su hija, les dedico entonces este trabajo que significa la culminación de mis estudios universitarios que sin duda alguna sin ustedes no habría sido posible. Los llevaré para siempre en mi corazón.

A mis hermanos, por formar parte de los momentos más importantes de mi vida, hoy sigo los pasos de los mayores culminando al igual que ustedes mi carrera universitaria. Su ejemplo me motivó, y ahora siembro lo mismo para el hermano menor. Mis primeros confidentes, mis primeros amigos, de quien tengo hermosos recuerdos, tengan presente que parte de este logro es por su causa, los quiero.

A Alejandro Darío Rojas Sánchez por compartir sus conocimientos conmigo, por su apoyo durante todo este proceso y por el tiempo dedicado a este proyecto.

A todos los amigos que me acompañaron en este camino, por todas las risas, los consejos, los aprendizajes y por estar presentes siempre.

Índice general

Introducción

Los espacios de Moore cobraron mucha importancia en la topología general debido a su cercanía con los espacios métricos. En 1937 Jones demuestra que, bajo $2^{\omega} < 2^{\omega_1}$, todo espacio de Moore, separable y normal es metrizable. Mientras que en 1969, Tall demuestra que la existencia de un espacio de Moore, separable y no metrizable es consistente con los axiomas de ZFC.

Una subclase de los espacios de Moore son los llamados espacios de Moore completos, que están íntimamente relacionados con los espacios métricos completos. Se sabe que todo espacio de Moore completo y metrizable debe ser completamente metrizable.

La motivación del presente trabajo es un resultado postulado por Reed en su artículo, *Concerning completable Moore spaces [14]*, el cual afirma que todo espacio de Moore completable y *ccc*, es separable. Es conocido que todo espacio separable es *ccc*, lo que nos lleva a la pregunta principal de esta tesis:

¿Todo espacio de Moore separable es completable?

La pregunta no es en absoluto trivial; Reed la responde de manera negativa en el mismo artículo presentando un espacio de difícil manejo.

Nuestro objetivo es presentar una prueba alternativa a dicha pregunta. Esta prueba fue realizada por van Douwen inspirada en el trabajo conjunto de Pixley y Roy, quienes presentan un espacio de Moore *ccc* pero no separable.

Los trabajos de Pixley y Roy dieron origen a lo que actualmente se conoce como la topología Pixley-Roy. Como parte medular de esta tesis, se presentará el hiperespacio $\mathcal{F}[X]$, formado por los subconjuntos fnitos de un espacio X y dotado de la topología Pixley-Roy. Se desarrollarán sus propiedades elementales. Se estudiará cómo se ven reflejadas las propiedades de $\mathcal{F}[X]$ en el espacio X y viceversa. Veremos cómo algunas funciones cardinales en $\mathcal{F}[X]$ quedan determinadas por aquellas en X.

A continuación pasaremos al estudio de los espacios de Moore completos y espacios de Moore completables. Se dará una caracterización de los espacios de Moore completos a partir de su compactación de Wallman.

Finalmente abordaremos la construcción de un espacio de Moore separable y no completable.

El desarrollo de este trabajo está divido en tres capítulos así como dos apéndices. En el Capítulo 1 desarrollamos todo lo concerniente al hiperespacio $\mathcal{F}[X]$, desde sus propiedades más elementales hasta algunos resultados más especializados. Será de nuestro particular interés exhibir cómo ciertas propiedades "débiles" en $\mathcal{F}[X]$ reflejan propiedades muy fuertes para X.

En el Capítulo 2 damos un breve estudio de los espacios de Moore en general para después concentrarnos en el concepto de espacio de Moore completo. Presentaremos el concepto de espacio regularmente encajado, el cual es la clave para poder caracterizar a los espacios Moore completos a partir de su compactación de Wallman. Esta caracterización juega un papel importante en la teoría de los espacios Moore completos ya que, representa una generalización a la caracterización de Čech para los espacios completamente metrizables a partir de su compactación de Stone-Čech.

En el Capítulo 3 veremos el concepto de espacio de Moore completable y daremos una construcción muy detallada de un espacio de Moore separable y no completable.

El Apéndice A está dedicado a dar un breve compendio de las funciones cardinales que usaremos durante el Capítulo 1. Nuestro interés es el de permitir un fácil acceso a las definiciones de las funciones cardinales más tradicionales así como mostrar algunas relaciones existentes entre ellas.

En el Apéndice B damos una construcción cuidadosa de la compactación de Wallman, misma que usaremos en el Capítulo 2. Demostraremos con todo detalle que la compactación de Wallman define a un espacio compacto y T_1.

Buena parte de la herramienta topológica utilizada a lo largo de la tesis es de un carácter más especializado de lo acostumbrado a impartir en un primer curso de Topología. Se espera que el lector tenga dominio de conceptos como la compacidad, compactaciones, metrizabilidad, bases, bases locales, axiomas de separación, axiomas de numerabilidad, espacios Lindelöf, así como un conocimiento básico de cardinalidad, aritmética cardinal e inducción transfinita.

Capítulo 1

Topología Pixley-Roy

En el año de 1969, los matemáticos Pixley y Roy dieron a conocer la topología de Pixley-Roy (en el hiperespacio $\mathcal{F}[X]$) en un artículo [11] en el que se mostraba la construcción de un importante ejemplo para la teoría de los espacios de Moore, un espacio de Moore no separable con celularidad numerable.

Con los años, se ha observado que la topología de Pixley-Roy en realidad funciona para dar contraejemplos a variados problemas y ha sido utilizada por matemáticos como Przymusiuski, Tall, van Douwen y Weiss en el estudio de los espacios de Moore.

A lo largo de este capítulo, conoceremos la topología de Pixley-Roy, estudiaremos sus características y algunas de sus propiedades.

Es importante tomar en cuenta que, a lo largo de todo el trabajo, supondremos a todos los espacios con al menos el axioma T_1 y con al menos dos puntos.

1.1. Propiedades generales de $\mathcal{F}[X]$

Consideremos a (X, τ) como cualquier espacio topológico, consideremos, a su vez, a $\mathcal{F}(X)$ como la colección de todos los subconjuntos finitos, no vacíos, de X. A $\mathcal{F}(X)$ le podemos dar estructura topológica de la siguiente manera:

Consideremos los conjuntos de la forma:

$$[A, U] = \{S \in \mathcal{F}(X) : A \subset S \subset U\}.$$

La colección:

$$\mathcal{B} = \{[A, U] : A \in \mathcal{F}(X), U \in \tau\}.$$

forma una base para alguna topología en $\mathcal{F}[X]$.

A la topología generada por $\mathcal{B}$ se le conoce como la base topología Pixley-Roy y al conjunto $\mathcal{F}(X)$ con la topología generada por $\mathcal{B}$ la denotaremos por $\mathcal{F}[X]$.

A $\mathcal{B}$ la conoceremos como la base canónica para la topología de $\mathcal{F}[X]$.

Otra topología con la que se puede dotar al espacio $\mathcal{F}(X)$ es la topología de Vietoris, cuya base $\mathcal{V}$ consiste en todos los conjuntos de la forma:

$$\langle U_0, U_1, U_2, \ldots U_n \rangle = \{A \in \mathcal{F}(X) : A \subset \bigcup_{i=0}^{n} U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \varnothing \ \forall i \in \{0, 1, ..., n\}\}$$

donde $U_0, U_1, U_2, ..., U_n \in \tau$.

Al conjunto $\mathcal{F}(X)$ equipado con la topología de Vietoris lo denotaremos por $\mathcal{F}\langle X \rangle$.

A $\mathcal{V}$ le llamaremos base canónica de la topología de Vietoris.

Proposición 1.1 *La topología de Pixley-Roy es más fina que la de Vietoris.*

Dem. Sea $V \subset \mathcal{F}\langle X \rangle$ un conjunto abierto básico canónico de Vietoris, digamos $V = \langle U_0, U_1, ..., U_n \rangle$ y $V \neq \varnothing$. Veamos que V es abierto en $\mathcal{F}[X]$.

Definamos $S = \bigcup_{i=0}^{n} U_i$ y $R = A$ para alguna $A \in V$. Claramente $[R, S] \in \mathcal{F}[X]$. Además, sea $B \in [R, S]$ tenemos que $R \subset B \subset S$, por lo tanto $B \cap U_i \neq \varnothing \ \forall i \in \{0, 1, ..., n\}$.

Por lo anterior, tenemos que $[R, S] \subset V$ y así V es abierto en $\mathcal{F}[X]$. ■

Observemos que $\mathcal{F}[X]$ tiene una propiedad que parece natural para un espacio formado por subconjuntos: si $A \in \mathcal{F}(X)$, entonces las vecindades de A en $\mathcal{F}[X]$ están determinadas por vecindades de A en X. Para ser precisos, A tiene vecindades arbitrariamente pequeñas en $\mathcal{F}[X]$ de la forma $[A, U]$, donde U es una vecindad de A en X.

Sea $A \in \mathcal{F}(X)$, sea $[A, U]$ vecindad de A en $\mathcal{F}[X]$, en donde U es vecindad de A en X. Al ser U vecindad, existe U_0 abierto en X tal que $A \subset U_0 \subset U$. Luego, para cada $x_i \in A$, existe $V_i \subset X$ abierto básico de X tal que $x_i \subset V_i \subset U_0$. De donde, $A = \bigcup_{i=1}^{n} x_i \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_i = V \subset U_0$ y V es abierto.

Por lo tanto $[A, V]$ es vecindad de A en $\mathcal{F}[X]$ tal que $[A, V] \subset [A, U]$.

Lo anterior no se cumple en la topología de Vietoris.

Proposición 1.2 *Sean $A, U \in \mathcal{F}(X)$ arbitrarios. Entonces $[A, U]$ es cerrado en $\mathcal{F}[X]$ (y en $\mathcal{F}\langle X \rangle$).*

Dem. Demostraremos que $\mathcal{F}(X) \setminus [A, U]$ es abierto tanto en $\mathcal{F}[X]$ como en $\mathcal{F}\langle X \rangle$.

Sea $B \in \mathcal{F}(X) \setminus [A, U]$.

Caso 1. $A \nsubseteq B$. Tomemos $p \in A \setminus B$. Tenemos que $\langle X \setminus \{p\} \rangle$ es una vecindad de B (tanto en $\mathcal{F}[X]$, como en $\mathcal{F}\langle X \rangle$) y $\langle X \setminus \{p\} \rangle$ no intersecta a $[A, U]$. De hacerlo, existiría $R \in \langle X \setminus \{p\} \rangle \cap [A, U]$ tal que $A \subset R \subset X \setminus \{p\}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\mathcal{F}[X] \setminus [A, U]$ es abierto y $\mathcal{F}\langle X \rangle \setminus [A, U]$ es abierto. Por lo tanto, $[A, U]$ es cerrado en $\mathcal{F}[X]$ y $\mathcal{F}\langle X \rangle$.

Caso 2. $B \not\subseteq U$. Consideremos la vecindad $[B, X]$ en $\mathcal{F}[X]$ y observemos que $[B, X] \cap [A, U] = \varnothing$. En caso contrario, existiría $R \in [B, U] \cap [A, U]$ y tendríamos que $B \subset R \subset X$ y $A \subset R \subset U$, lo cual implicaría que $B \subset U$ y esto contradice la hipótesis inicial del caso.

Por lo tanto, $[B, X] \cap [A, U] = \varnothing$. Por lo tanto, $[A, U]$ es cerrado en $\mathcal{F}[X]$.

Además, como $U \in \mathcal{F}(X)$, U es finito y por tanto cerrado en X. Así $\langle X, X \setminus U \rangle$ es vecindad en $\mathcal{F}\langle X \rangle$ de B que no interseca a $[A, U]$. De otro modo, si existiera $R \in \langle X, X \setminus U \rangle \cap [A, U]$, entonces $A \subset R \subset U$ y $R \subset X \cup (X \setminus U)$ y $R \cap X \neq \varnothing \neq R \cap (X \setminus U)$. Así tenemos $R \subset U$ y $R \cap (X \setminus U) \neq \varnothing$ que es una contradicción.

Por lo tanto, tenemos que $[A, U]$ es cerrado en $\mathcal{F}\langle X \rangle$. ■

Corolario 1.3 $\mathcal{F}[X]$ *es un espacio* T_1*.*

Dem. Queremos probar que los puntos son cerrados.

Sea $A \in \mathcal{F}(X)$, se tiene que $\{A\} = [A, A]$ y por la Proposición 1.2, se tiene que $[A, A]$ es cerrado. ■

La Proposición 1.2 trae como consecuencia que el espacio $\mathcal{F}[X]$ es cero dimensional, es decir, posee una base formada por conjuntos que son abiertos y cerrados. Y dado que todo espacio cero dimensional y T_1 es Tychonoff, concluimos que $\mathcal{F}[X]$ siempre es un espacio Tychonoff, incluso cuando el espacio X únicamente sea un espacio T_1.

Corolario 1.4 $\mathcal{F}[X]$ *es un espacio cero dimensional y Tychonoff.*

Dado $A \subset X$, podemos considerar a $\mathcal{F}[A]$ como un subespacio de $\mathcal{F}[X]$, puesto que $\mathcal{F}[A] \subset \mathcal{F}[X]$. A continuación veremos que $\mathcal{F}[A]$ siempre resulta un subespacio cerrado de $\mathcal{F}[X]$.

Proposición 1.5 *Si* A *es subespacio de* X*, entonces* $\mathcal{F}[A]$ *es un subespacio cerrado de* $\mathcal{F}[X]$*.*

Dem. Sea $F \in \mathcal{F}[X]$ y $F \notin \mathcal{F}[A]$, entonces $F \not\subseteq A$.

Sea U_X un abierto en X tal que $F \subset U_X$, consideremos $U = [F, U_X]$. Supongamos que $U \cap \mathcal{F}[A] \neq \varnothing$ y tomemos $G \in U \cap \mathcal{F}[A]$. Como $G \in \mathcal{F}[A]$, se sigue que $G \subset A$. Como además $G \in U$, entonces $F \subset G \subset U_X$. Así, $F \subset G \subset A$ lo cual es una contradicción ya que desde el inicio $F \not\subseteq A$.

Por lo tanto $\mathcal{F}[A]$ es cerrado en $\mathcal{F}[X]$. ■

Definición 1.6 *Un espacio topológico* (X, τ) *es un espacio metacompacto si dada una cubierta abierta, existe un refinamiento que vuelve a ser cubierta con la característica de ser punto-finita, es decir, cada punto del espacio está en una cantidad finita de elementos del refinamiento.*

Claramente, la clase de los espacios metacompactos contiene a la clase de los espacios compactos, puesto que toda cubierta finita es automáticamente punto-finita. Sin embargo, no todo espacio metacompacto es compacto. Los espacios $\mathcal{F}[X]$ son ejemplo de ello (para X infinito) ya que el subespacio $\{\{x\} : x \in X\} \subset \mathcal{F}[X]$ siempre es cerrado y discreto. Ahora veremos que $\mathcal{F}[X]$ no sólo es metacompacto sino que es, de hecho, hereditariamente metacompacto.

Proposición 1.7 $\mathcal{F}[X]$ *es hereditariamente metacompacto.*

Dem. Sea $\mathcal{S}$ un subespacio de $\mathcal{F}[X]$, y sea U_A una vecindad abierta de $A \in \mathcal{S}$.
Consideremos a la cubierta abierta de S

$$\mathcal{C} = \{[A, X] \cap U_A : A \in \mathcal{S}\} \ .$$

Notemos que $\mathcal{C}$ es un refinamiento de $\{U_A : A \in \mathcal{S}\}$. Veamos que $\mathcal{C}$ es punto finita:
Sea $B \in \mathcal{S}$. Notemos que $B \in [A, X]$ si y sólo si $A \subset B$. Como $B \in \mathcal{S} \subset \mathcal{F}[X]$, entonces $B \in \mathcal{F}(X)$ y B es finito, por lo cual tiene un número finito de subconjuntos. Por lo anterior, B pertenece a un número finito de conjuntos de la forma $[A, X]$ y a un número finito de elementos de $\mathcal{C}$. ■

Una propiedad que es importante comprobar si tiene o no cualquier espacio topológico, es saber si para cada punto existe una base local numerable, es decir, si es primero numerable. Para los espacios de Pixley-Roy, conocemos el siguiente resultado:

Proposición 1.8 $\mathcal{F}[X]$ *es primero numerable si y sólo si* (X, τ_X) *es primero numerable.*

Dem. Supongamos que $\mathcal{F}[X]$ es primero numerable. Sea x cualquier elemento de X. Tenemos que $\{x\}$ es elemento de $\mathcal{F}[X]$, que como es primero numerable sabemos que existe una base $\mathcal{B}_{\{x\}}$ numerable para $\{x\}$ en $\mathcal{F}[X]$, digamos que

$$\mathcal{B}_{\{x\}} = \{[\{x\}, W_n] : n \in \mathbb{N}\} \, .$$

A continuación, consideremos

$$\mathcal{B}_x = \{W_n : [\{x\}, W_n] \in \mathcal{B}_{\{x\}}, n \in \mathbb{N}\}.$$

Veamos que $\mathcal{B}_x$ es base local (claramente es numerable) para x en X.
Sea U un conjunto abierto de X tal que $x \in U$. Sabemos que $[\{x\}, U]$ es un conjunto abierto de $\mathcal{F}[X]$ que contiene a $\{x\}$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $[\{x\}, W_N] \subset [\{x\}, U]$, donde $[x, W_N]$ es un elemento de $\mathcal{B}_{\{x\}}$. Además $x \in W_N \subset U$, pues de no ser así existiría w en W_N tal que $w \notin U$, sin embargo por un lado tendríamos que $x \in \{x, w\} \subset W_N$ lo cual implica que $\{x, w\} \in [\{x\}, W_N] \subset [\{x\}, U]$ que a su vez implica que $\{x, w\} \subset [\{x\}, U]$, es decir $w \in U$! Por lo tanto es cierto que $W_N \subset U$.

Por lo anterior $\mathcal{B}_x$ es una base local numerable de x en X.

Ahora supongamos (X, τ_X) es primero numerable.

Sea $F \in \mathcal{F}[X]$. Sabemos que, para todo $x \in F$ existe una base local numerable $\mathcal{B}_x$ de x en (X, τ_X).

Consideremos la colección

$$\mathcal{B}_F = \left\{ \left[F, \bigcup_{x \in F} U_x \right] : U_x \in \mathcal{B}_x, x \in F \right\}.$$

La familia $\mathcal{B}_F$ es numerable y será una base local para F.

Dado un abierto básico U tal que $U \subset \mathcal{F}[X]$, digamos $U = [G, V]$, tal que $F \in U$, se tiene que $G \subset F \subset V$. Para todo $x \in F$, existe $U_x \in \mathcal{B}_x$ tal que $x \in U_x \subset V$. Por lo tanto $\bigcup_{x \in F} U_x \subset V$ y así $\left[F, \bigcup_{x \in F} U_x \right] \subset U$. ■

Una parte importante de nuestro trabajo de tesis esta centrada en el estudio de los llamados espacios de Moore. Dichos espacios están íntimamente relacionados con los espacios métricos, siendo estos últimos casos particulares de los espacios de Moore. Diversos resultados interesantes relacionados con teoremas de metrización están apoyados en los espacios de Moore.

A continuación daremos la definición de espacio de Moore y daremos condiciones necesarias y suficientes para identificar cuándo $\mathcal{F}[X]$ resulta un espacio de Moore. Dejaremos para el Capítulo 2 el estudio de propiedades más específicas de los espacios de Moore en general.

Definición 1.9 *Sean (X, τ) un espacio topológico, $\mathcal{G}$ una cubierta abierta de X y x un punto de X. Definimos la estrella de x respecto a la cubierta $\mathcal{G}$ como*

$$st(x, \mathcal{G}) = \bigcup_{G \in \mathcal{G}} \{G : G \cap \{x\} \neq \varnothing\}.$$

Definición 1.10 *Sea (X, τ) un espacio topológico, lo llamaremos espacio de Moore si y sólo si X es regular y existe un desarrollo para X, es decir, si existe una sucesión de cubiertas abiertas $\{\mathcal{G}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de X, de tal manera que para cada punto x, la familia $\{st(x, \mathcal{G}_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una base local para x.*

Proposición 1.11 *$\mathcal{F}[X]$ es un espacio de Moore si y sólo si X es primero numerable.*

Dem. Si $\mathcal{F}[X]$ es un espacio de Moore, entonces también es un espacio primero numerable. Lo cual, de acuerdo a la Proposición 1.8, implica que X es primero numerable.

Para la implicación contraria, veamos que si X es primero numerable, entonces existe un desarrollo para $\mathcal{F}[X]$.

Como X es primero numerable y T_1, entonces $\mathcal{F}[X]$ es primero numerable y por tanto para cada $A \in \mathcal{F}(X)$ existe una base de vecindades decreciente $\mathcal{B}_A = \{U_n(A) : n \in \mathbb{N}\}$ de A en X. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos:

$$\mathcal{G}_n = \{[A, U_n(A)] : A \in \mathcal{F}[X]\}.$$

Veamos que $\{\mathcal{G}_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un desarrollo para $\mathcal{F}[X]$.

Sean $B \in \mathcal{F}(X)$ y U una vecindad de B en $\mathcal{F}[X]$. Existe un $n_{(B)} \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left[B, U_{n_{(B)}}(B)\right] \subset U;$$

lo anterior es debido a que $\mathcal{B}_B$ es base local para B en X. Notemos que, dado que la familia $\mathcal{B}_B$ es decreciente, entonces para toda $n > n_{(B)}$, $[B, U_n(B)] \subset U$.

Como X es T_1, para cada subconjunto propio no vacío C de B, existe un $n_{(C)} \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq n_{(C)}$, entonces $B \nsubseteq U_n(C)$. Sea $m = \text{máx}\{n_{(C)} : \varnothing \neq C \subset B\}$. Se sigue entonces que, para todo $C \subsetneq B$, $B \nsubseteq U_m(C)$ y además $[B, U_m(B)] \subset U$.

Para terminar la demostración, basta demostrar que

$$st(B, \mathcal{G}_m) = [B, U_m(B)].$$

Como

$$st(B, \mathcal{G}_m) = \bigcup \{[C, U_m(C)] \in \mathcal{G}_m : [C, U_m(C)] \cap \{B\} \neq \varnothing\}.$$

Si $B \in [C, U_m(C)]$, entonces C no puede ser un subconjunto propio de B, pues si lo fuera, $B \nsubseteq U_m(C)$. En consecuencia $C = B$ para todo $[C, U_m(C)] \in \mathcal{G}_m$ tal que $B \in [C, U_m(C)]$.

Por lo tanto

$$st(B, \mathcal{G}_m) = [B, U_m(B)].$$

■

Como resultado directo del teorema anterior, dejaremos en claro, para futuras referencias que $\mathcal{F}[X]$ es espacio de Moore si y sólo si X es un espacio primero numerable si y sólo si $\mathcal{F}[X]$ es primero numerable.

Otra clase muy importante de espacios son los llamados espacios semiestratificables. Dicha clase contiene a todos los espacios de Moore. En [2] se puede consultar un estudio exhaustivo de los espacios semiestratificables. Nosotros daremos su definición y trataremos de caracterizar cuándo $\mathcal{F}[X]$ es un espacio semiestratificable.

Definición 1.12 *Un espacio topológico (X, τ) es un espacio semiestratificable, si a cada abierto $U \in \tau$ se le puede asignar una sucesión $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos cerrados de X tal que* *i)* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = U$*; y*

ii) siempre que $U \subset V$ *(con* $V \in \tau$*),* $U_n \subset V_n$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$*.*

A la correspondencia $U \to \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *la llamaremos una semiestratificación para el espacio* X*.*

Una observación importante es que si $U \to \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una semiestratificación para X, entonces al definir $\tilde{U}_n = \bigcup_{m\leq n} U_m$, logramos una nueva semiestratificación $U \to \{\tilde{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ pero de tal manera que la familia $\{\tilde{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente. Este hecho lo usaremos en el siguiente teorema.

Teorema 1.13 *Una condición necesaria y suficiente para que un espacio topológico* (X, τ) *sea semiestratificable es que exista una sucesión de funciones* $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, donde* $g_n : X \to \tau$*, tal que:*
i) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} g_n(x) = \{x\}$*, para cualquier* $x \in X$*.*
ii) Si $y \in X$ *y* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ *es tal que* $y \in g_n(x_n)$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$*, entonces* $\{x_n\} \to y$*.*

Dem. Sea $U \to \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una semiestratificación para X, en donde cada sucesión $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos g_n como $g_n(x) = X \setminus (X \setminus \{x\})_n$. Veamos que $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisface $i)$ y $ii)$.

Para probar $i)$ tenemos que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} g_n(x) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (X \setminus (X \setminus \{x\})_n) = X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X \setminus \{x\})_n = X \setminus (X \setminus \{x\}) = \{x\}.$$

Ahora veamos que se cumple $ii)$. Sean $y \in X$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, con $y \in g_n(x_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Dado $U \subset X$ abierto tal que $y \in U$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $y \in U_N$, ya que $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Usando que la sucesión $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, se sigue que $y \in U_n$ para toda $n \geq N$.

Si $n \geq N$ y suponemos que $x_n \notin U$, entonces ocurre que $U \subset X \setminus \{x_n\}$. Y por lo tanto

$$U_n \subset (X \setminus \{x\})_n = X \setminus g_n(x_n),$$

pero esto no es posible ya que $y \in U_n \cap g_n(x_n)$. Concluimos así que $x_n \in U$ para toda $n \geq N$, lo que prueba la convergencia de $\{x_n\}$ hacia y.

Recíprocamente, supongamos que tenemos una sucesión $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que satisface las condiciones $i)$ y $ii)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada U abierto, sea

$$U_n = X \setminus \bigcup \{g_n(x) : x \in X \setminus U\}.$$

Veamos que $U \to \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una semiestratificación. En efecto, U_n es cerrado ya que $g_n(x)$ es abierto para todo $x \in X$.

Probemos que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = U$. Sea $y \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$, entonces $y \in U_n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$. Entonces, $y \in X \setminus \bigcup\{g_n(x) : x \in X \setminus U\}$, es decir, $y \notin g_n(x)$ para toda $x \in X \setminus U$. Como $y \in g_n(y)$, se sigue que $y \in U$.

La demostración de la otra contención se hará por contrapuesta. Supongamos que $y \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$, es decir que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $y \in \bigcup\{g_n(x) : x \in X \setminus U\}$. De manera que, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in X \setminus U$ tal que $y \in g_n(x_n)$. La condición *ii)* nos dice que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a y. Pero $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X \setminus U$ y éste es un cerrado, de modo que $y \in X \setminus U$.

En consecuencia $U \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$.

Finalmente, tomemos U, V abiertos en X tales que $U \subset V$ y demostremos que $U_n \subset V_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $z \in U_n$, donde recordemos que

$$U_n = X \setminus \bigcup\{g_n(x) : x \in X \setminus U\}.$$

Tomemos x en $X \setminus V$, como U es un subconjunto de V, entonces x pertenece a $X \setminus U$ como $x \in U_n$ entonces z no pertenece a $g_{n(x)}$. Por lo tanto, z no pertenece a la unión de todos los $g_{n(x)}$ tales que $x \setminus int(X \setminus V)$ por lo tanto, $z \notin V_n$.

Por lo tanto $U_n \subset V_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Y por lo tanto $U \to \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una semiestratificación para X. ■

A partir del Teorema 1.13 es muy sencillo verificar que todo espacio de Moore es semiestratificable. En efecto, si X es un espacio de Moore con desarrollo $\{\mathcal{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, entonces las funciones g_n definidas como

$$g_n(x) = st(x, \mathcal{G}_n)$$

satisfacen las condiciones del Teorema 1.13 y por lo tanto X es semiestratificable. Para verificar que la sucesión $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cumple con la condición *ii)* del Teorema 1.13, es importante destacar que el desarrollo $\{\mathcal{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ puede tomarse de tal manera que cada cubierta $\mathcal{G}_{n+1}$ sea un refinamiento de $\mathcal{G}_n$. Dejamos los detalles de estos hechos para el lector.

Para dar la caracterización buscada sobre espacios semiestratificables y el espacio $\mathcal{F}[X]$ haremos uso de los conceptos de espacios perfectos y espacios con pseudocarácter numerable. Para ello, aquí recordamos sus definiciones.

Definición 1.14 *Un espacio X es perfecto si todo subconjunto cerrado de X es un conjunto G_δ. Un conjunto es G_δ si es una intersección numerable de conjuntos abiertos.*

Definición 1.15 *Un espacio tiene pseudocaracter numerable si para todo punto en X, $\{x\}$ es un conjunto G_δ.*

Además del espacio $\mathcal{F}[X]$, podemos considerar los espacios $\mathcal{F}_n[X]$ como:

$$\mathcal{F}_n[X] = \{A \in \mathcal{F}[X] : |A| \leq n\}.$$

a los cuales les podemos dar la topología Pixley-Roy como subespacios de $\mathcal{F}[X]$.

Teorema 1.16 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*
a) X tiene pseudocarácter numerable.
b) $\mathcal{F}_2[X]$ tiene pseudocarácter numerable.
c) $\mathcal{F}[X]$ tiene pseudocarácter numerable.
d) $\mathcal{F}[X]$ es perfecto.
e) $\mathcal{F}[X]$ es semiestratificable.
f) $\mathcal{F}[X]$ es unión numerable de subespacios cerrados y discretos.

Dem. Demostraremos $f) \to e) \to d) \to c) \to b) \to a) \to f)$.

$f) \to e)$. Suponemos que $\mathcal{F}[X]$ es unión numerable de subespacios cerrados y discretos: $\mathcal{F}[X] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$. Sea U un conjunto abierto de $\mathcal{F}[X]$, definimos $U_n = U \cap C_n$. Demostremos que $U \to \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es semiestratificación.

Primero veamos que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = U$:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (U \cap C_n) = U \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\right) = U \cap \mathcal{F}[X] = U.$$

Además, U_n es cerrado. Sea $F \in \mathcal{F}[X] \setminus U_n$, entonces $F \notin U \cap C_n$

Caso 1. $F \in C_n$. Existe W abierto en $\mathcal{F}[X]$ tal que $W \cap C_n = \{F\}$ por ser discreto. Afirmamos que $W \cap U_n = \varnothing$, de lo contrario, $W \cap C_n \cap U \neq \varnothing$ y así $F \in U$ lo cual es una contradicción.

Caso 2. $F \notin C_n$. Entonces, $F \in \mathcal{F}[X] \setminus C_n$ abierto en $\mathcal{F}[X]$. Afirmamos que $W = \mathcal{F}[X] \setminus C_n$ es tal que $W \cap U_n = \varnothing$, pues

$$W \cap U_n = W \cap U \cap C_n = \varnothing \cap U = \varnothing.$$

Con esto queda probado que cada U_n es un conjunto cerrado.

Ahora verifiquemos que si U, V son abiertos en $\mathcal{F}[X]$ tales que $U \subset V$, entonces $U_n \subset V_n$. Esto es inmediato ya que si $U \subset V$, entonces $U \cap C_n \subset V \cap C_n$, es decir, $U_n \subset V_n$.

$e) \to d)$. Supongamos que $\mathcal{F}[X]$ es semiestratificable. Demostraremos que $\mathcal{F}[X]$ es perfecto.

Tomemos una semiestratificación $U \to \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para $\mathcal{F}[X]$.

Sea C cerrado en $\mathcal{F}[X]$, entonces $U = \mathcal{F}[X] \setminus C$ es un abierto. Como cada U_n es cerrado, $\mathcal{F}[X] \setminus U_n = A_n$ es abierto en $\mathcal{F}[X]$.

Además se cumple que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\mathcal{F}[X] \setminus U_n) = \mathcal{F}[X] \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = \mathcal{F}[X] \setminus U = C.$$

$d) \to c)$. Suponemos que $\mathcal{F}[X]$ es perfecto. Demostraremos que $\mathcal{F}[X]$ tiene pseudocarácter numerable.

Como $\mathcal{F}[X]$ es perfecto y además, los conjuntos unitarios son cerrados en $\mathcal{F}[X]$, entonces $\{F\}$ es un conjunto G_δ para todo $F \in \mathcal{F}[X]$.

$c) \to b)$. Suponemos que $\mathcal{F}[X]$ tiene pseudocarácter numerable. Demostraremos que $\mathcal{F}_2[X]$ tiene pseudocarácter numerable.

Sea $F \in \mathcal{F}_2[X]$, como $\mathcal{F}_2[X] \subset \mathcal{F}[X]$, entonces $F \in \mathcal{F}[X]$. De lo anterior se sigue que $\{F\} = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ en donde cada $A_n \subset \mathcal{F}[X]$ es abierto de $\mathcal{F}[X]$.

Denotamos por $\mathcal{O}_n$ al elemento $A_n \cap \mathcal{F}_2[X]$. El conjunto $\mathcal{O}_n$ es abierto en $\mathcal{F}_2[X]$ y $\{F\} = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_n$.

$b) \to a)$. Suponemos que $\mathcal{F}_2[X]$ tiene pseudocarácter numerable. Demostraremos que X tiene pseudocarácter numerable.

Sea $x \in X$. Como $\{x\} \in \mathcal{F}_2[X]$, entonces $\{\{x\}\} = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ en donde cada $A_n \subset \mathcal{F}_2[X]$ es abierto en $\mathcal{F}_2[X]$. Como $\{x\} \in A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces existe un abierto U_n de X tal que $[\{x\}, U_n] \cap \mathcal{F}_2[X] \subset A_n$.

Ahora bien, si $y \in \bigcap\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$, entonces $\{x, y\} \in A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. De donde

$$\{x, y\} \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x\}.$$

Lo que prueba que $\{x\} = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Por lo tanto X tiene pseudocarácter numerable.

$a) \to f)$. Supongamos que X tiene pseudocarácter numerable. Demostraremos que $\mathcal{F}[X]$ es unión numerable de subconjuntos cerrados y discretos.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$\mathcal{E}_n = \{F \in \mathcal{F}[X] : |F| = n\}.$$

Notemos que $\mathcal{E}_n$ dotado con la topología de subespacio resulta ser discreto pues si $U = [F, X]$ es tal que $F \in \mathcal{E}_n$, entonces $\mathcal{E}_n \cap U = \{F\}$. De no ser así, exitirá $G \neq F$, $G \in U \cap \mathcal{E}_n$ tal que $|F| = n = |G|$ y $F \subset G$ pero entonces $F = G$ lo cual es una contradicción. En el caso de $\mathcal{E}_1$, es muy sencillo ver que además es un conjunto cerrado.

Luego, para cada $x \in X$ tomemos una sucesión decreciente de abiertos $\{U_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n(x) = \{x\}$ (lo cual es posible pues X tiene pseudocarácter numerable). Para cada $F \in \mathcal{F}[X]$, sea k_F el primer entero k tal que para cualesquiera $x, y \in F$, si $x \neq y$ entonces, $y \notin U_k(x)$ y $x \notin U_k(y)$. Es posible definir a la k_F gracias a que F es finito.

Definimos

$$\mathcal{E}_{n_k} = \{F \in \mathcal{E}_n : k_F = k\} \text{ para todo } n \geq 2 \text{ y } k \geq 1.$$

Ya que

$$\mathcal{F}[X] = \mathcal{E}_1 \cup \bigcup \{\mathcal{E}_{n_k} : n \geq 2 \text{ y } k \geq 1\}$$

sólo resta probar que cada $\mathcal{E}_{n_k}$ es cerrado en $\mathcal{F}[X]$.

Suponga $T \in \mathcal{F}[X] \setminus \mathcal{E}_{n_k}$ con $n \geq 2$ y $k \geq 1$. Si $|F| > n_k$, entonces $[T, X]$ es una vecindad de T que no intersecta a $\mathcal{E}_{n_k}$. Ahora supongamos que $|T| < n_k$, consideremos el abierto

$$V = \bigcup \{U_k(t) : t \in T\}.$$

Si $[T, V]$ contiene a un punto F de $\mathcal{E}_{n_k}$, entonces $T \subset F \subset V$. Indexamos a T y F como:

$$T = \{x_1, x_2, ..., x_m\} \subset F = \{x_1, x_2, ...x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n\} \text{ donde } m = |T|.$$

Dado que $m < n$ y $F \subset V$, debe existir un $x_i \in T$ tal que $U_k(x_i)$ contiene dos elementos distintos de F, lo cual es imposible pues $k_F = k$.

Por lo tanto $[T, V] \cap \mathcal{E}_{n_k} = \varnothing$. Lo que termina la prueba. ■

1.2. Funciones cardinales en $\mathcal{F}[X]$

Las funciones cardinales son importantes en el estudio de la topología debido a que son herramientas muy eficaces cuando se quiere determinar si un espacio tiene propiedades que tienen que ver, entre otras cosas, con numerabilidad, como por ejemplo, ser separable, primero numerable, segundo numerable e incluso determinar la cardinalidad del espacio en el que estamos trabajando.

Durante esta sección, usaremos varias funciones cardinales cuya definición y algunos resultados básicos sobre ellas se pueden consultar en el Apéndice A de la tesis.

El objetivo de esta sección es calcular el valor de las funciones cardinales más tradicionales aplicadas al espacio $\mathcal{F}[X]$ buscando obtener resultados en función de sus respectivos valores en X.

Proposición 1.17 *Si $A \in \mathcal{F}[X]$, entonces se cumple que:*
a) $\psi(A, \mathcal{F}[X]) = \text{máx}\{\psi(x, X) : x \in A\}$*;*
b) $\pi\mathcal{X}(A, \mathcal{F}[X]) = \mathcal{X}(A, \mathcal{F}[X]) \leq \text{máx}\{\mathcal{X}(x, X) : x \in A\}$.

Dem. *a)* Sea $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$ existe una pseudobase local $\mathcal{U}_i$ de x_i en X tal que $|\mathcal{U}_i| \leq \psi(x_i, X)$.

Sean

$$\mathcal{U} = \left\{ U : \forall i \in \{1, ..., n\} \exists U_i \in \mathcal{U}_i \text{ tal que } U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i \right\}.$$

y $\mathcal{B} = \{[A, U] : U \in \mathcal{U}\}$. Notemos que, claramente, $A \in V$ para todo $V \in \mathcal{B}$. Verifiquemos ahora que $\bigcap \mathcal{B} = \{A\}$ para que $\mathcal{B}$ sea pseudobase.

Dado $D \in \bigcap \mathcal{B}$, se sigue que $A \subset D$ pues $D \in [A, U]$ para todo $U \in \mathcal{U}$. Supongamos ahora que existe $x \in D \setminus A$, entonces $x \neq x_i$ para toda $i \in \{1, ..., n\}$. Por lo tanto, existe $U_i \in \mathcal{U}_i$ tal que $x \notin U_i$. Sea $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$, entonces $U \in \mathcal{U}$ y $D \in [A, U]$, lo cual implica que $x \in D \subset U$ que es una contradicción a la forma en que construimos a U. Por lo anterior tenemos que

$$\psi(A, \mathcal{F}[X]) \leq \text{máx}\{\psi(x, X) : x \in A\}.$$

Por otro lado, sea $\mathcal{B}$ una pseudobase local de A en $\mathcal{F}[X]$ formada por abiertos básicos de la forma $[A, U]$ y sea $x \in A$, consideremos:

$$\mathcal{U} = \{U \setminus (A \setminus \{x\}) : [A, U] \in \mathcal{B}\}.$$

Veamos que $\mathcal{U}$ es una pseudobase para x en X.

Primero necesitamos ver que $x \in W$ para todo $W \in \mathcal{U}$. Como W es de la forma $U \setminus (A \setminus \{x\})$, tal que $[A, U] \in \mathcal{B}$, entonces $x \in A \subset U$ y así $x \in U$ y $x \in U \setminus (A \setminus \{x\})$. Por lo tanto $x \in W$ para todo $W \in \mathcal{U}$.

Ahora veamos que $\bigcap \mathcal{U} = \{x\}$. Llamemos:

$$\mathcal{V} = \{U \subset X : [A, U] \in \mathcal{B}\}.$$

Notemos que $\bigcap \mathcal{V} = A$, ya que dado $y \in \bigcap \mathcal{V}$ se sigue que $A \subset A \cup \{y\} \subset U$ para todo $U \in \mathcal{V}$, lo cual implica que $A \cup \{y\} \in \bigcap \mathcal{B} = \{A\}$ pues $\mathcal{B}$ es pseudobase de A. Entonces $A \cup \{y\} = A$, es decir, $y \in A$. Finalmente se sigue que:

$$\bigcap \mathcal{U} = \bigcap_{U \in \mathcal{V}} U \setminus (A \setminus \{x\}) = \left(\bigcap \mathcal{V}\right) \setminus (A \setminus \{x\}) = A \setminus (A \setminus \{x\}) = \{x\}.$$

Así tenemos también que $\psi(x, X) \leq \psi(A, \mathcal{F}[X])$.

b) Primero, como toda base local es una π-base, está implícito que

$$\pi\mathcal{X}(A, \mathcal{F}[X]) \leq \mathcal{X}(A, \mathcal{F}[X]).$$

Para la otra desigualdad, sea $\mathcal{B}$ una π-base local de A en $\mathcal{F}[X]$. Esto quiere decir que para cada abierto $V \subset \mathcal{F}[X]$ tal que $A \in V$, existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $W \subset V$, y los elementos de $\mathcal{B}$ son abiertos no vacíos pero no necesariamente contienen al punto A. De manera que, para cada $W \in \mathcal{B}$ podemos tomar un $A_W \in W$. Además como todos los W son abiertos, existe un subconjunto abierto U_W de X tal que $[A_W, U_W] \subset W$. Ahora definamos

$$\mathcal{U} = \{[A, U_W] : W \in \mathcal{B}, A \subset U_W\}.$$

Veamos que $\mathcal{U}$ es base local de A en $\mathcal{F}[X]$.

Notemos que A está contenida en todos los elementos de $\mathcal{U}$. Tomemos un subconjunto abierto básico canónico $[A, V]$ de $\mathcal{F}[X]$. Como $\mathcal{B}$ es π-base, existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $W \subset [A, V]$ y así, $[A_W, U_W] \subset [A, V]$. Esto implica que se deben dar las siguientes contenciones

$$A \subset A_W \subset U_W \subset V.$$

Veamos que en efecto esto ocurre. Como $A_W \in [A_W, U_W] \subset [A, V]$, entonces $A \subset A_W$. Por otro lado, dado $x \in U_W$ se sigue que

$$A_W \cup \{x\} \in [A_W, U_W] \subset [A, V].$$

De modo que $A_W \cup \{x\} \subset V$, en particular $x \in V$. Es decir, $U_W \subset V$.

De lo anterior se sigue que $[A, U_W] \in \mathcal{U}$ y además $[A, U_W] \subset [A, V]$. Por lo tanto $\mathcal{U}$ es base local para A y es tal que $|\mathcal{U}| \leq |\mathcal{B}|$, lo que prueba que

$$\mathcal{X}\left(A, \mathcal{F}\left[X\right]\right) \leq \pi\mathcal{X}\left(A, \mathcal{F}\left[X\right]\right).$$

Por último hay que demostrar

$$\mathcal{X}(A, \mathcal{F}[X]) \leq \text{máx}\{\mathcal{X}(x, X) : x \in A\}.$$

Sea $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Para cada $i \in \{1, 2, ...n\}$ sea $\mathcal{U}_i$ una base local de x_i en X tal que $|\mathcal{U}_i| \leq \mathcal{X}(x_i, X)$. Sea

$$\mathcal{U} = \left\{U : \forall i \in \{1, ..., n\} \exists U_i \in \mathcal{U}_i \text{ tal que } U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i\right\}.$$

Consideremos $\mathcal{B} = \{[A, U] : U \in \mathcal{U}\}$.Veamos que $\mathcal{B}$ es base local para A en $\mathcal{F}[X]$.

En primer lugar tenemos que $A \in W$ para todo $W \in \mathcal{B}$, pues $W = [A, U]$ con $U \in \mathcal{U}$.

Ahora, tomemos una vecindad básica canónica $[A, V]$ de A en $\mathcal{F}[X]$. Se tiene entonces que V es vecindad abierta de x_i para $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Así existe $U_i \in \mathcal{U}_i$ tal que $x_i \in U_i \subset V$. Consideremos $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Entonces $[A, U] \subset [A, V]$. Por lo tanto $\mathcal{B}$ es base local para A en $\mathcal{F}[X]$. Como $|\mathcal{B}| \leq \text{máx}\{\mathcal{X}(x, X) : i \in \{1, 2, ..., n\}\}$, entonces podemos concluir que

$$\mathcal{X}(A, \mathcal{F}[X]) \leq \text{máx}\{\mathcal{X}(x, X) : x \in A\}.$$

■

Proposición 1.18 *Si $x \in X$, se cumple que:*
a) $\mathcal{X}(\{x\}, \mathcal{F}[X]) = \mathcal{X}(x, X)$; *y*
b) $t(x, X) \leq t(\{x\}, \mathcal{F}[X])$.

Dem. *a*) Por la Proposición 1.17 inciso *b*), tenemos que

$$\mathcal{X}(A, \mathcal{F}[X]) \leq \text{máx}\{\mathcal{X}(x, X) : x \in A\}.$$

Así,

$$\mathcal{X}(\{x\}, \mathcal{F}[X]) \leq \text{máx}\{\mathcal{X}(x, X) : x \in \{x\}\} = \mathcal{X}(x, X).$$

Ahora, si $\mathcal{V}$ es una base local de $\{x\}$ en $\mathcal{F}[X]$ tal que $|\mathcal{V}| \leq \mathcal{X}(\{x\}, \mathcal{F}[X])$ y donde cada $V \in \mathcal{V}$ es de la forma $V = [\{x\}, U]$, entonces podemos considerar a la familia

$$\mathcal{U} = \{U : [\{x\}, U] \in \mathcal{V}\}.$$

Naturalmente ocurre que $|\mathcal{U}| = |\mathcal{V}|$. Veamos que $\mathcal{U}$ es base local de $x \in X$.

Dado un abierto $W \subset X$ tal que $x \in W$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $[\{x\}, U] \subset [\{x\}, W]$. Y por lo tanto $U \subset W$. Por lo tanto se cumple que

$$\mathcal{X}(x, X) \leq \mathcal{X}(\{x\}, \mathcal{F}[X]).$$

b) Recordemos que la estrechez en un punto $p \in X$ está definida como

$$t(p, X) = \text{mín}\{\kappa : \forall Y \subset X \text{ tal que } p \in cl_X Y, \exists A \subset Y \text{ con } |A| \leq \kappa \text{ y } p \in cl_X A\}.$$

Sean $H \subset X$, $x \in X \setminus H$ tal que $x \in cl_X H$. Consideremos:

$$\mathcal{H} = \mathcal{F}[H \cup \{x\}] \setminus \{\{x\}\}.$$

Notemos que $\{x\} \in cl_{\mathcal{F}[X]}(\mathcal{H})$. Esto se da gracias a que $x \in cl_X H$. En efecto, si $U \subset X$ es abierto tal que $x \in U$, entonces $U \cap H \neq \emptyset$; tomando $p \in U \cap H$ se sigue que $\{p\} \in [\{x\}, U] \cap \mathcal{H}$. Es decir, $\{x\} \in cl_{\mathcal{F}[X]}(\mathcal{H})$.

De manera que existe $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ tal que $|\mathcal{M}| \leq t(\{x\}, \mathcal{F}[X])$ y $\{x\} \in cl_{\mathcal{F}[X]}(\mathcal{M})$.

Sea $M = (\bigcup \mathcal{M}) \setminus \{x\}$. El conjunto M cumple que $M \subset H$ y $|M| \leq |\mathcal{M}|$. Resta verificar que $x \in cl_X(M)$.

Para una vecindad V de x en X, como $\{x\} \in cl_{\mathcal{F}[X]}(\mathcal{M})$, existe $A \in [\{x\}, V] \cap \mathcal{M}$. Luego $x \in A \subset V$ y $A \in \mathcal{M}$. Como $A \neq \{x\}$, tenemos que $V \cap M \neq \varnothing$ y en consecuencia $x \in cl_X(M)$. Con esto queda demostrado que

$$t(x, X) \leq t(\{x\}, \mathcal{F}[X]).$$

■

Proposición 1.19 *Si X es un espacio de Hausdorff y $A \in \mathcal{F}[X]$ se sigue que:*

$$\mathcal{X}(A, \mathcal{F}[X]) = \text{máx}\{\mathcal{X}(x, X) : x \in A\}.$$

Dem. Por la Proposición 1.17 inciso *b*) tenemos que

$$\mathcal{X}\left(A, \mathcal{F}[X]\right) \leq \text{máx}\{\mathcal{X}(x, X) : x \in A\}.$$

Supongamos que existe $x \in A$ tal que $\kappa = \mathcal{X}\left(A, \mathcal{F}[X]\right) < \mathcal{X}(x, X)$. Sea $\mathcal{U}$ una base de vecindades de A en $\mathcal{F}[X]$ con $|\mathcal{U}| \leq \kappa$. Podemos asumir que $\mathcal{U}$ es de la forma $\mathcal{U} = \{[A, U_\alpha] : \alpha < \kappa\}$, donde $U_\alpha \in \tau_X$ y $A \subset U_\alpha$. Como X es Hausdorff, existe una vecindad abierta U de x tal que $(A \setminus \{x\}) \cap cl_X(U) = \varnothing$.

Como $\mathcal{X}(x, X) > \kappa$, la familia $\{U \cap U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ no puede ser base local para x. De manera que existe un abierto $V \subset X$ tal que $x \in V$ y $U \cap U_\alpha \nsubseteq V$ para cada $\alpha < \kappa$. Sea $W = V \cup (X \setminus cl_X(U))$, entonces $[A, W]$ es vecindad abierta de A en $\mathcal{F}[X]$. Tomando $\alpha < \kappa$ tal que

$$[A, U_\alpha] \subset [A, W],$$

se sigue que $U_\alpha \subset W$ y por lo tanto $U \cap U_\alpha \subset V$, lo que no es posible.

Por lo tanto $\mathcal{X}(x, X) \leq \mathcal{X}\left(A, \mathcal{F}[X]\right)$ para cada $x \in A$. Por lo tanto $\mathcal{X}\left(A, \mathcal{F}[X]\right) = \text{máx}\{\mathcal{X}(x, X) : x \in A\}$. ∎

Proposición 1.20 *Para cualquier espacio infinito X, se tiene que*

$$|\mathcal{F}[X]| = |X| = nw\left(\mathcal{F}[X]\right) = d\left(\mathcal{F}[X]\right) = L\left(\mathcal{F}[X]\right) = e\left(\mathcal{F}[X]\right).$$

Dem. Comenzaremos por demostrar la igualdad $|\mathcal{F}[X]| = |X|$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$X_n = \{F \subset X : |F| = n\}.$$

Entonces $\mathcal{F}[X] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$. Notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, X_n tiene cardinalidad a lo más $|X|^n = |X|$, por lo tanto $|\mathcal{F}[X]| \leq \omega\,|X| = |X|$ pues X es infinito. Luego $|X| = |\{\{x\} : x \in X\}| \leq |\mathcal{F}[X]|$, entonces $|X| \leq |\mathcal{F}[X]|$. Por lo tanto $|X| = |\mathcal{F}[X]|$

Ahora demostraremos que $d\left(\mathcal{F}[X]\right) = |X|$. Notemos que $d\left(\mathcal{F}[X]\right) \leq |\mathcal{F}[X]| = |X|$.

Si $\mathcal{D}$ es subconjunto denso de $\mathcal{F}[X]$, entonces $\mathcal{D}$ es cubierta de X. En efecto, dado $x \in X$, $[\{x\}, X] \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$; tomando $D \in [\{x\}, X] \cap \mathcal{D}$ se sigue que $x \in D \subset \bigcup \mathcal{D}$. Además, como X es infinito y T_1, cualquier conjunto denso de X es infinito, lo que implica que $\mathcal{D}$ es infinito.

Como $X = \bigcup \mathcal{D}$, entonces

$$|X| = \left|\bigcup \mathcal{D}\right| \leq \sum_{D \in \mathcal{D}} |D| = |\mathcal{D}|.$$

La última igualdad es gracias a que $\mathcal{D}$ es infinito y cada $D \in \mathcal{D}$ es finito. En consecuencia $|X| \leq d(\mathcal{F}[X])$. Con lo que queda probada la igualdad $d\left(\mathcal{F}[X]\right) = |X|$.

Demostremos ahoara que $L\left(\mathcal{F}[X]\right) = |\mathcal{F}[X]|$.

La desigualdad $L(Y) \leq |Y|$ es muy clara para cualquier espacio infinito Y, puesto que toda cubierta abierta de Y tiene una subcubierta de tamaño $|Y|$. En particular tenemos que

$$L(\mathcal{F}[X]) \leq |\mathcal{F}[X]|.$$

Por otro lado, sea

$$\mathcal{C} = \{[\{x\}, X] : x \in X\}.$$

La única subcubierta de $\mathcal{C}$ es ella misma, ya que para todo $x \in X$, $[\{x\}, X]$ es el único elemento que contiene a $\{x\}$. Por lo tanto $|\mathcal{F}[X]| \leq L(\mathcal{F}[X])$.

Para demostrar las igualdades que faltan, veremos que $|X| \leq e(\mathcal{F}[X])$. Para ello, nos apoyamos en el subespacio $M = \{\{x\} : x \in X\} \subset \mathcal{F}[X]$.

Es claro que $|X| = |M|$. Ahora notemos que M es cerrado en $\mathcal{F}[X]$, pues si $F \in \mathcal{F}[X] \setminus M$, entonces $[F, X] \cap M = \varnothing$. Además M también es discreto pues $[\{x\}, X] \cap M = \{x\}$ para toda $x \in X$.

Por lo tanto,

$$|X| = |M| \leq e(\mathcal{F}[X]) = \sup\{|D| : D \subset X \text{ y } D \text{ es cerrado y discreto}\}.$$

Las desigualdades

$$e(\mathcal{F}[X]) \leq L(\mathcal{F}[X]) \leq nw(\mathcal{F}[X]) \leq |\mathcal{F}[X]|.$$

se cumplen para cualquier espacio topológico y están demostradas en el Apéndice A, con lo cual queda completa la prueba. ■

Teorema 1.21 *Para cada espacio X, se cumple que:*

$$\mathcal{X}(\mathcal{F}[X]) = \pi\mathcal{X}(\mathcal{F}[X]) = \mathcal{X}(X).$$

Dem. Ya sabemos que

$$\mathcal{X}(A, \mathcal{F}[X]) \leq \max\{\mathcal{X}(x, X) : x \in A\}.$$

De manera que $\mathcal{X}(A, \mathcal{F}[X]) \leq \mathcal{X}(X)$, para cualquier $A \in \mathcal{F}[X]$. Por lo anterior,

$$\sup\{\mathcal{X}(A, \mathcal{F}[X]) : A \in \mathcal{F}[X]\} \leq \mathcal{X}(X).$$

Luego, sabemos que $\mathcal{X}(x, X) = \mathcal{X}(\{x\}, \mathcal{F}[X])$. Entonces,

$$\begin{aligned} \sup\{\mathcal{X}(x, X) &: x \in X\} = \sup\{\mathcal{X}(\{x\}, \mathcal{F}[X]) : x \in X\} \\ &\leq \sup\{\mathcal{X}(A, \mathcal{F}[X]) : A \in \mathcal{F}[X]\}. \end{aligned}$$

Entonces, $\mathcal{X}(X) \leq \mathcal{X}(\mathcal{F}[X])$. Por lo tanto tenemos que

$$\mathcal{X}(\mathcal{F}[X]) = \mathcal{X}(X).$$

Y como $\pi\mathcal{X}(A, \mathcal{F}[X]) = \mathcal{X}(A, \mathcal{F}[X])$, entonces $\pi\mathcal{X}(\mathcal{F}[X]) = \mathcal{X}(\mathcal{F}[X])$. ■

Teorema 1.22 *Para cualquier espacio X, se cumple que*

$$w(\mathcal{F}[X]) = \pi w(\mathcal{F}[X]) = \mathcal{X}(X)\,|X|\,.$$

Dem. Siempre se cumple que

$$w(\mathcal{F}[X]) \le \mathcal{X}(\mathcal{F}[X])\,|\mathcal{F}[X]| = \mathcal{X}(X)\,|X|\,.$$

Además, como $|X| = d(\mathcal{F}[X]) \le \pi w(\mathcal{F}[X])$ y $\mathcal{X}(X) = \pi\mathcal{X}(\mathcal{F}[X]) \le \pi w(\mathcal{F}[X])$, se sigue que

$$\mathcal{X}(X)\,|X| \le \pi w(\mathcal{F}[X]),$$

y dado que siempre se cumple que $\pi w(\mathcal{F}[X]) \le w(\mathcal{F}[X])$, concluimos que

$$\mathcal{X}(X)\,|X| \le \pi w(\mathcal{F}[X]) \le w(\mathcal{F}[X]) \le \mathcal{X}(X)\,|X|\,.$$

■

Teorema 1.23 *Para cualquier espacio X se cumple que*

$$psw(\mathcal{F}[X]) = \psi(\mathcal{F}[X]) = \psi(X).$$

Dem. De acuerdo con la Proposición 1.17 a), podemos concluir que

$$\begin{aligned}
\psi(\mathcal{F}[X]) &= \sup\{\psi(A,\mathcal{F}[X]) : A \in \mathcal{F}(X)\} \\
&= \sup\{\psi(x,X) : x \in A \in \mathcal{F}(X)\} \\
&= \sup\{\psi(x,X) : x \in X\} = \psi(X).
\end{aligned}$$

Resta probar que $psw(\mathcal{F}[X]) = \psi(\mathcal{F}[X])$.
Es conocido que para cualquier espacio Y, $\psi(Y) \le psw(Y)$ (ver Apéndice A).
Ahora comprobemos que

$$psw(\mathcal{F}[X]) \le \psi(\mathcal{F}[X])\,.$$

Para cada $A \in \mathcal{F}[X]$, consideremos una pseudobase $\mathcal{U}(A)$, con $|\mathcal{U}(A)| \le \psi(\mathcal{F}[X])$. Estas pseudobases pueden ser tomadas de la forma:

$$\mathcal{U}(A) = \{[A,U] : U \in \tau(A)\}\,.$$

En donde $\tau(A)$ es una familia de abiertos en X tal que $|\tau(A)| \le \psi(\mathcal{F}[X])$.
Ahora definimos

$$\mathcal{U} = \bigcup_{A\in\mathcal{F}[X]} \mathcal{U}(A)\,.$$

Claramente, $\mathcal{U}$ es cubierta de $\mathcal{F}[X]$ y además es separadora pues, para todo $A \in \mathcal{F}[X]$,

$$\bigcap\{V \in \mathcal{U} : A \in V\} \subset \bigcap \mathcal{U}(A) = \{A\}.$$

Resta verificar que, para cualquier $A \in \mathcal{F}[X]$, $ord(A,\mathcal{U}) \leq \psi(\mathcal{F}[X])$.

Por definición de $\mathcal{U}(A)$ ocurre que

$$\{V \in \mathcal{U} : A \in V\} \subset \bigcup \{\mathcal{U}(S) : S \in \mathcal{P}(A) \setminus \{\varnothing\}\}.$$

Como A es finito, $\mathcal{P}(A)$ es un conjunto finito y así $\{V \in \mathcal{U} : A \in V\}$ está expresado como la unión finita de conjuntos de tamaño menor o igual que $\psi(\mathcal{F}[X])$. Por lo tanto

$$|\{V \in \mathcal{U} : A \in V\}| \leq \psi(\mathcal{F}[X]).$$

En consecuencia

$$psw(\mathcal{F}[X]) \leq \psi(\mathcal{F}[X]).$$

■

Teorema 1.24 *Para cada espacio X, se sigue que:*

$$hd(X)hL(X) \leq c(\mathcal{F}[X]) \leq nw(X).$$

Dem. Primero veamos que $c(\mathcal{F}[X]) \leq nw(X)$.

Sea $\mathcal{V}$ funa amilia celular en $\mathcal{F}[X]$ formada por abiertos básicos canónicos, digamos

$$\mathcal{V} = \{[A,U] : A \subset X, U \in \tau_X\}$$

y sea $\mathcal{N}$ una red en X tal que $|\mathcal{N}| \leq nw(X)$.

Dado $[A,U] \in \mathcal{V}$, para cada $a \in A$ tomamos $C_{a,U} \in \mathcal{N}$ tal que $a \in C_{a,U} \subset U$ y definimos

$$C_{[A,U]} = \bigcup \{C_{a,U} : a \in A\}.$$

Naturalmente, ocurre que $A \subset C_{[A,U]} \subset U$.

La familia $\mathcal{C} = \left\{C_{[A,U]} : [A,U] \in \mathcal{V}\right\}$ satisface que $|\mathcal{C}| \leq |\mathcal{N}|$ puesto que $\mathcal{C}$ está determinada por todos los subconjuntos finitos de $\mathcal{N}$.

Ahora veamos que la asignación $[A,U] \mapsto C_{[A,U]}$ es inyectiva. Esto probará que $|\mathcal{V}| \leq |\mathcal{C}|$.

Sean $[A,U], [B,V] \in \mathcal{V}$ y supongamos que $C_{[A,U]} = C_{[B,V]}$. Por construcción tenemos que

$$A \subset C_{[A,U]} = C_{[B,V]} \subset V.$$

Así mismo

$$B \subset C_{[B,V]} = C_{[A,U]} \subset U.$$

Se sigue entonces que

$$A \cup B \in [A, U] \cap [B, V] .$$

Dado que $\mathcal{V}$ es celular, concluimos que $[A, U] = [B, V]$. Por lo tanto, $c(\mathcal{F}[X]) \leq nw(X)$.

Falta ver que $hd(X)hL(X) \leq c(\mathcal{F}[X])$.

Comenzaremos demostrando que $hL(X) \leq c(\mathcal{F}[X])$. Supongamos que $hL(X) > \tau$. Luego, existe un subespacio Y de X y una cubierta abierta $\mathcal{G}$ de Y, tales que $Y \nsubseteq \bigcup \mathcal{G}'$ para cada subfamilia $\mathcal{G}'$ de $\mathcal{G}$ con $|\mathcal{G}'| \leq \tau$. Podemos suponer que cada elemento de $\mathcal{G}$ es abierto en X.

Usando inducción transfinita, podemos construir una sucesión de puntos $\{x_\alpha : \alpha < \tau^+\} \subset Y$ y una sucesión de elementos en $\mathcal{G}$, $\{G_\alpha : \alpha < \tau^+\} \subset \mathcal{G}$ tales que para cada $\alpha < \tau^+$

$$x_\alpha \in G_\alpha \setminus \left(\bigcup \{G_\beta : \beta < \alpha\}\right) .$$

Si $\beta < \alpha < \tau^+$, como $x_\alpha \notin G_\beta$, tenemos que:

$$[\{x_\beta\}, G_\beta] \cap [\{x_\alpha\}, G_\alpha] = \varnothing.$$

Así, $\{[\{x_\alpha\}, G_\alpha] : \alpha < \tau^+\}$ es una familia de conjuntos abiertos, ajenos dos a dos en $\mathcal{F}[X]$. Por lo tanto $c(\mathcal{F}[X]) \geq \tau^+$ y en consecuencia $hL(X) \leq c(\mathcal{F}[X])$.

Finalmente probemos que $hd(X) \leq c(\mathcal{F}[X])$. Sea $Y \subset X$. Consideremos el sistema $\mathcal{U}$ de todos los conjuntos de la forma $[A, U]$ donde $A \in \mathcal{F}[Y]$, $U \in \tau_X$ con $A \subset U$. Sea $\mathcal{B}$ una familia maximal de elementos en $\mathcal{U}$ ajenos dos a dos. Sea

$$\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{F}[Y] : \exists U \in \tau_X ([A, U] \in \mathcal{B})\} .$$

Notemos que si $A \in \mathcal{D}$, entonces existe un único $U \in \tau_X$ tal que $[A, U] \in \mathcal{B}$, esto porque $\mathcal{B}$ es una familia celular. De aquí podemos concluir que

$$|\mathcal{D}| \leq |\mathcal{B}| .$$

Hacemos $D = \bigcup \mathcal{D}$. Se sigue que

$$|D| \leq |\mathcal{D}| \leq |\mathcal{B}| \leq c(\mathcal{F}[X]) .$$

Si probamos que D es denso en Y, obtendremos que $d(Y) \leq c(\mathcal{F}[X])$, con lo que habremos terminado la prueba. Suponiendo lo contrario, si $x \in Y \setminus cl_X(D)$, existe una vecindad abierta $V \subset X$ de x en X tal que $V \cap D = \varnothing$. En consecuencia, ocurre que $[\{x\}, V] \cap [A, U] = \varnothing$ para cada $[A, U] \in \mathcal{B}$. De donde, $\mathcal{B} \cup \{[\{x\}, V]\}$ es familia de elementos en $\mathcal{U}$ ajenos dos a dos, en contradicción con la maximalidad de $\mathcal{B}$. Por lo tanto D es denso en Y. Con esto concluimos que $hd(X) \leq c(\mathcal{F}[X])$. ■

1.3. Más propiedades de $\mathcal{F}[X]$

En esta sección veremos algunos resultados más especializados sobre el espacio $\mathcal{F}[X]$. La motivación de esta sección recae en la desigualdad obtenida en el Teorema 1.24, a saber,

$$hd(X)hL(X) \leq c(\mathcal{F}[X]).$$

Esta desigualdad nos dice en particular que si $\mathcal{F}[X]$ es *ccc*, entonces X debe ser hereditariamente Lindelöf y hereditariamente separable, lo cual no es poca cosa. Es conocido que cualquier espacio separable o cualquier espacio hereditariamente Lindelöf es un espacio *ccc*, sin embargo, la propiedad *ccc* difícilmente logra alcanzar a estás propiedades, de ahí la importancia de la desigualdad dada en el Teorema 1.24. El espacio $\mathcal{F}[\mathbb{R}]$ es un ejemplo de un espacio *ccc* que no es ni separable ni Lindelöf.

Ahora bien, vamos a considerar dos propiedades, a las que podemos llamar cercanas, tanto a la propiedad de Lindelöf como a la propiedad *ccc*, nos referimos a la propiedades *débilmente Lindelöf* y la $DCCC$ (discrete countable chain condition). Es muy sencillo verificar que cualquier espacio Lindelöf o cualquier espacio *ccc* es débilmente Lindelöf y $DCCC$. Nosotros demostraremos además que cualquier espacio débilmente Lindelöf y regular, debe ser $DCCC$.

Nuestro objetivo en esta sección es ver cómo estas propiedades "débiles", cuando se las adjudicamos a $\mathcal{F}[X]$, inducen propiedades muy fuertes para X. En concreto, lograremos demostrar que si $\mathcal{F}[X]$ es $DCCC$, entonces X debe ser hereditariamente Lindelöf y cada potencia finita de X debe ser Lindelöf. También demostraremos que si $\mathcal{F}[X]$ es débilmente Lindelöf, entonces X es hereditariamente Lindelöf y cada subespacio cerrado de X debe ser separable. Este resultado es muy cercano al Teorema 1.24 y podría pensarse como "casi una mejora" del teorema, al menos para el caso numerable. Sin embargo, al día de hoy, permanece como un problema abierto del área determinar si el hecho de que $\mathcal{F}[X]$ sea débilmente Lindelöf implica que X sea hereditariamente separable.

Definición 1.25 *Una familia discreta $\mathcal{C}$ en un espacio topológico X es una familia de subconjuntos de X, ajenos dos a dos y que cumple que para todo $x \in X$, existe V vecindad de x tal que $|V \wedge \mathcal{C}| \leq 1$, en donde*

$$V \wedge \mathcal{C} = \{C \in \mathcal{C} : V \cap C \neq \emptyset\}.$$

Definición 1.26 *Un espacio X satisface la condición $DCCC$, si cada familia discreta de subconjuntos abiertos no vacíos de X es numerable.*

El hecho de que toda familia discreta y abierta es una famila celular, nos muestra que, en efecto, todo espacio *ccc* es $DCCC$. Un hecho un poco menos evidente es que todo espacio Lindelöf es $DCCC$.

Proposición 1.27 *Si X es Lindelöf, entonces X es $DCCC$.*

Dem. Sea $\mathcal{C}$ una familia discreta y abierta en X. Para cada $C \in \mathcal{C}$ tomamos $x_C \in C$. Si la familia $\mathcal{C}$ no fuera numerable, entonces el conjunto $M = \{x_C : C \in \mathcal{C}\}$ sería no numerable. Siendo X un espacio de Lindelöf, se sigue que el conjunto M debe tener un punto de acumulación $x \in X$. Como X es T_1, entonces toda vecindad de x intersecta en una cantidad infinita de puntos a M, rompiendo así la condición de familia discreta para $\mathcal{C}$.

Por lo tanto $\mathcal{C}$ es numerable. Lo que prueba que X es $DCCC$. ∎

Definición 1.28 *Una $\omega-$cubierta es una cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X, tal que $X \notin \mathcal{U}$ y para cada subconjunto finito $F \subset X$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $F \subset U$.*

El siguiente lema será de vital importancia para nuestros objetivos. Omitiremos su prueba, porque se escapa del alcance de esta tesis, sin embargo se puede consultar en [15].

Lema 1.29 *Toda potencia finita de X es Lindelöf si y sólo si toda ω-cubierta de X tiene una ω-subcubierta numerable.*

Lema 1.30 *Sea $\mathcal{U}$ una familia abierta de X. Sea*

$$V(\mathcal{U}) = \{F \in \mathcal{F}[X] : F \subset U \text{ para algún } U \in \mathcal{U}\}.$$

Entonces $V(\mathcal{U})$ es abierto y cerrado en $\mathcal{F}[X]$.

Dem. Si $F \in V(\mathcal{U})$, entonces $F \subset U$ para algún $U \in \mathcal{U}$. Así, $[F, U] \subset V(\mathcal{U})$ con $[F, U]$ abierto en $\mathcal{F}[X]$. Por lo tanto $V(\mathcal{U})$ es abierto en $\mathcal{F}[X]$.

Por otro lado, si $F \in \mathcal{F}[X] \setminus V(\mathcal{U})$, entonces $[F, X] \cap V(\mathcal{U}) = \emptyset$, por lo tanto $\mathcal{F}[X] \setminus V(\mathcal{U})$ es abierto . Por lo tanto $V(\mathcal{U})$ es cerrado en $\mathcal{F}[X]$. ∎

Teorema 1.31 *Si $\mathcal{F}[X]$ es $DCCC$, entonces se cumple lo siguiente:*
1) *X es hereditariamente Lindelöf; y*
2) *para una cantidad finita de abiertos U_1, $U_2, ..., U_n$ de X, $U_1 \times U_2 \times ... \times U_n$ es Lindelöf.*

Dem. Para probar la parte 1) del teorema usaremos el Lema 1.29 para deducir que X es Lindelöf . Ya que tengamos que el espacio X es un espacio Lindelöf, bastará con mostrar que todo subespacio abierto de X también lo es para garantizar que X es hereditariamente Lindelöf.

1) Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una ω-cubierta abierta de X. Para cada $\alpha < \kappa$, sea

$$V_\alpha = V(\{U_\alpha\}) \setminus V(\{U_\beta : \beta < \alpha\}).$$

Por el Lema 1.30, cada V_α es abierto y cerrado en $\mathcal{F}[X]$. Dado $F \in \mathcal{F}[X]$, si tomamos

$$\gamma = \text{mín}\{\alpha < \kappa : F \subset U_\alpha\},$$

el cual existe porque $\mathcal{U}$ es una ω-cubierta, entonces $F \in V_\gamma$. Lo que prueba que $\mathcal{U} = \{V_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una cubierta de $\mathcal{F}[X]$. Más aún, $V_\alpha \cap V_\beta = \varnothing$ si $\alpha < \beta < \kappa$. Es decir, $\mathcal{V}$ es una cubierta de $\mathcal{F}[X]$ formada por elementos ajenos dos a dos y cada uno de ellos es un conjunto abierto y cerrado en $\mathcal{F}[X]$. Lo que implica que $\mathcal{V}$ es una familia discreta de abiertos en $\mathcal{F}[X]$.

Dado que $\mathcal{F}[X]$ es $DCCC$, el conjunto $\Gamma = \{\alpha < \kappa : V_\alpha \neq \varnothing\}$ debe ser, a lo más, numerable. Digamos que $\Gamma = \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Ahora veamos que $\{U_{\alpha_n} : n \in \mathbb{N}\}$ es una ω-cubierta de X. Sea $F \in \mathcal{F}(X)$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ con $F \in V_{\alpha_n}$, lo cual implica que $F \subset U_{\alpha_n}$.

Hemos probado entonces que toda ω-cubierta de X tiene una ω-subcubierta numerable. De acuerdo con el Lema 1.29, ya sabemos que X y todas sus potencias finitas son Lindelöf.

Ahora veamos que cada subconjunto abierto de X es Lindelöf. Sea U abierto en X. Si probamos que $\mathcal{F}[U]$ satisface la $DCCC$, de acuerdo a lo ya demostrado, podremos concluir que U es Lindelöf.

En efecto, sea $\mathcal{C}_U$ una familia discreta de abiertos en $\mathcal{F}[U]$ y no vacíos. Siguiendo la notación del Lema 1.29,

$$\mathcal{F}[U] = V(\{U\})$$

y dado que U es abierto en X, tenemos que $\mathcal{F}[U]$ es abierto y cerrado en $\mathcal{F}[X]$. De esta manera, cada $C \in \mathcal{C}_U$, el cual es abierto en $\mathcal{F}[U]$, es a su vez es abierto en $\mathcal{F}[X]$.

Por otro lado $\mathcal{C}_U$ es familia celular en $\mathcal{F}[X]$, pues cada uno de sus elementos es un conjunto abierto y son ajenos dos a dos. Además, dada $F \in \mathcal{F}[X] \setminus \mathcal{F}[U]$, la vecindad $V = \mathcal{F}[X] \setminus \mathcal{F}[U]$ atestigua que $|V \wedge \mathcal{C}_U| \leq 1$ pues $V \cap \mathcal{C}_U = \varnothing$. Como $\mathcal{C}_U$ ya era discreta en $\mathcal{F}[U]$, concluimos que $\mathcal{C}_U$ es discreta en $\mathcal{F}[X]$ y por tanto numerable. En consecuencia $\mathcal{F}[U]$ es $DCCC$ con lo cual concluimos la prueba de 1).

2) Sean $U_1, U_2, ..., U_n$ conjuntos abiertos en X. Como X es hereditariamente Lindelöf, cada subconjunto abierto de X es un conjunto F_σ de X. Por lo tanto $U_1 \times U_2 \times ... \times U_n$ es un subconjunto F_σ del espacio de Lindelöf X^n, así $U_1 \times U_2 \times ... \times U_n$ es Lindelöf. ■

Definición 1.32 *Un espacio X es débilmente Lindelöf si para toda cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X, existe una subfamilia numerable $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$, tal que $\bigcup \mathcal{U}_0$ es denso en X.*

De la definición resulta claro que todo espacio Lindelöf es débilmente Lindelöf. En el Apéndice 1 damos una prueba de que todo espacio ccc es débilmente Lindelöf.

Proposición 1.33 *Si X es regular y débilmente Lindelöf, entonces X es $DCCC$.*

Dem. Sea $\mathcal{C}$ una familia discreta de abiertos no vacíos de X. Para cada $C \in \mathcal{C}$ tomamos $x_C \in C$. Ya que X es regular, existe un abierto U_C de X tal que $x_C \in U_C \subset cl_X(U_C) \subset C$. Consideremos $\mathcal{U} = \mathcal{C} \cup \{W\}$, donde $W = X \setminus \bigcup_{C \in \mathcal{C}} cl_X(U_C)$. Veamos que W es abierto.

Sea $x \in W$. Sabemos que existe $V \subset X$ abierto, con $x \in V$, tal que $|V \wedge \mathcal{C}| \leq 1$.

Si $|V \wedge \mathcal{C}| = 0$, se tiene que $V \cap \bigcup_{C \in \mathcal{C}} cl_X(U_C) = \emptyset$. Entonces $V \subset W$.

Si $|V \wedge \mathcal{C}| = 1$, se tiene que existe un único $C \in \mathcal{C}$ tal que $V \cap C \neq \emptyset$. Consideremos

$$V_0 = V \cap X \setminus cl_X(U_C).$$

Entonces $x \in V_0 \subset W$. Por lo tanto W es abierto en X.

Así, tenemos que $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta para X. Como X es débilmente Lindelöf, existe $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$, con $\mathcal{U}_0$ numerable y $\bigcup \mathcal{U}_0$ denso en X. Veamos que $\mathcal{C} \subset \mathcal{U}_0$.

Sea $C \in \mathcal{C}$. Sabemos que $U_C \cap \bigcup \mathcal{U}_0 \neq \emptyset$, porque $\bigcup \mathcal{U}_0$ es denso en X. Entonces, existe $D \in \mathcal{U}_0$ tal que $U_C \cap D \neq \emptyset$. Por definición de $\mathcal{U}$ se tiene que $D \in \mathcal{C}$ o $D = W$, sin embargo $U_C \cap W = \emptyset$, por lo tanto $D \in \mathcal{C}$. Dado que $\mathcal{C}$ es familia discreta, se sigue que $C = D$, lo que implica que $C \in \mathcal{U}_0$.

Por lo tanto $\mathcal{C} \subset \mathcal{U}_0$ y en consecuencia $\mathcal{C}$ es numerable. ■

Teorema 1.34 *Si $\mathcal{F}[X]$ es débilmente Lindelöf, entonces X es hereditariamente Lindelöf y todo subconjunto cerrado de X es separable. Si además se tiene que $t(X) = \omega$, entonces X es hereditariamente separable.*

Dem. Como $\mathcal{F}[X]$ es Tychonoff y débilmente Lindelöf, $\mathcal{F}[X]$ es $DCCC$. Lo cual implica que X es hereditariamente Lindelöf.

Sea Y cerrado en X y consideremos la siguiente cubierta abierta de $\mathcal{F}[X]$

$$\{[\{y\}, X] : y \in Y\} \cup \{[F, X \setminus Y] : F \in \mathcal{F}[X] \text{ y } F \cap Y = \varnothing\}.$$

Tomemos un subconjunto numerable $D \subset Y$ y $\{F_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{F}[X]$, con $F_n \cap Y = \varnothing$, tales que la familia

$$\mathcal{U} = \{[\{y\}, X] : y \in D\} \cup \{[F_n, X \setminus Y] : n \in \mathbb{N}\}$$

tiene unión densa en $\mathcal{F}[X]$.

Demostraremos que D es denso en Y. Supongamos que existe un punto $y \in Y \setminus cl_X D$. Tomemos el conjunto abierto $[\{y\}, G]$, donde $G = X \setminus cl_X D$.

Como $y \in Y$, $[\{y\}, G] \cap [F_n, X \setminus Y] = \varnothing$ para toda $n \in \mathbb{N}$. De la densidad de $\bigcup \mathcal{U}$, se sigue que existe $d \in D$ tal que

$$[\{y\}, G] \cap [\{d\}, X] \neq \varnothing,$$

lo cual implica que $d \in G$ y esto no es posible. Por lo tanto D es denso en Y, es decir, Y es separable.

Ahora supongamos adicionalmente que $t(X) = \omega$ y veamos que X es hereditariamente separable.

Sea $Y \subset X$, entonces $cl_X Y$ contiene un denso numerable D. Como $t(X) = \omega$, para cada $d \in D$ podemos tomar $Y_d \subset Y$ conjunto numerable tal que $d \in cl_X Y$. Se sigue entonces que $\bigcup\{Y_d : d \in D\}$ es denso numerable en Y. ■

Para finalizar esta sección y este capítulo, demostraremos un resultado acerca de la metrizabilidad de $\mathcal{F}[X]$ cuando éste es $DCCC$. Para ello, hará falta recordar el concepto de espacio colectivamente normal.

Definición 1.35 *Un espacio (X, τ) es colectivamente normal si para cualquier familia discreta de cerrados $C = \{C_\alpha : \alpha \in J\}$ existe una familia discreta de abiertos $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in J\}$, tal que para cada $\alpha \in J$, $C_\alpha \subset U_\alpha$.*

Es conocido que cualquier espacio regular y Lindelöf es colectivamente normal, más aún, cualquier espacio para compacto Hausdorff es colectivamente normal y todo espacio regular y Lindelöf es para compacto (ver [6]).

El hecho de que todo espacio paracompacto Hausdorff es colectivamente normal, también implica que todo espacio metrizable es un espacio colectivamente normal, puesto que todo espacio metrizable es paracompacto (ver [6]). Como ya se había mencionado en esta tesis (aunque no demostrado aún), todo espacio metrizable también es un espacio de Moore. Motivados en estos dos hechos, surge uno de los teoremas de metrización más importantes conocido como el Criterio de metrización de Bing:

Teorema 1.36 *Si X es un espacio de Moore y es colectivamente normal, entonces X es metrizable.*

Apoyados de este poderoso teorema (cuya prueba puede consultarse en [6]) demostraremos que, para un espacio compacto Hausdorff X, $\mathcal{F}[X]$ es metrizable y $DCCC$ si y sólo si X es numerable. Antes de esto necesitamos un sencillo lema.

Lema 1.37 *Si X es metrizable y $DCCC$, entonces $e(X) \leq \omega$.*

Dem. Sea $D \subset X$ un subconjunto cerrado y discreto, entonces $\mathcal{C} = \{\{d\} : d \in D\}$ es una familia discreta de cerrados en X. Como X es metrizable, entonces X es colectivamente normal, lo cual implica que existe una familia discreta de abiertos $\mathcal{U} = \{U_d : d \in D\}$ tal que para toda $d \in D$, $d \in U_d$. Al ser X un espacio $DCCC$, se sigue que $\mathcal{U}$ es numerable. Y por lo tanto D es numerable. Lo que prueba que $e(X) \leq \omega$. ■

Proposición 1.38 *Si X es compacto y Hausdorff, entonces $\mathcal{F}[X]$ es metrizable $DCCC$ si y sólo si X es numerable.*

Dem. Sea X compacto y Hausdorff. Naturalmente, si X es finito, el resultado es inmediato. Así que podemos suponer que X es infinito.

Supongamos primero que $\mathcal{F}[X]$ es metrizable y $DCCC$. Demostraremos que X es numerable. De acuerdo al Lema 1.37, tenemos que $e(\mathcal{F}[X]) = \omega$. Pero por la Proposición 1.20, sabemos que $e(\mathcal{F}[X]) = |X|$. Por lo tanto X es numerable. Vale la pena recalcar que en esta implicación, no hace falta saber que X es compacto Hausdorff.

Ahora supongamos que X es numerable. Por la Proposición 1.20, sabemos que $|\mathcal{F}[X]| = |X|$. De manera que $\mathcal{F}[X]$ es numerable y por tanto Lindelöf. Como ya vimos en la Proposición 1.27, todo Lindelöf es $DCCC$. Por lo tanto $\mathcal{F}[X]$ es $DCCC$.

Ahora veamos que $\mathcal{F}[X]$ es metrizable. En el Apéndice A está demostrado que para un espacio Hausdorff Y ocurre que $\psi(Y) \leq hL(Y)$. Si además el espacio Y es compacto, entonces $\psi(Y) = \mathcal{X}(Y)$. Ahora bien, por hipótesis X es compacto, Hausdorff y numerable, esto implica que $hL(X) = \omega$ y que por lo tanto X es primero numerable. En consecuencia, $\mathcal{F}[X]$ es un espacio de Moore. Dado que $\mathcal{F}[X]$ también es Lindelöf y Tychonoff, concluimos que $\mathcal{F}[X]$ es colectivamente normal. De acuerdo con el Teorema 1.36, obtenemos que $\mathcal{F}[X]$ es metrizable. ■

En la prueba de la Proposición 1.38 queda claro que podemos cambiar la condición de compacidad en X por la condición de X espacio primero numerable y el resultado sigue siendo válido. Sin embargo, es necesario asegurar de alguna manera que X es primero numerable, pues de otra forma $\mathcal{F}[X]$ no será de Moore y por tanto no puede ser metrizable. Como ejemplo tenemos el espacio $X = \omega \cup \{p\}$, donde $p \in \beta\omega \backslash \omega$ y X es considerado como subespacio de $\beta\omega$. El espacio X es Hausdorff (de hecho Tychonoff), numerable pero no es primero numerable, por lo tanto $\mathcal{F}[X]$ no es metrizable (aunque sí es $DCCC$).

Capítulo 2

Espacios de Moore

En este capítulo estudiaremos a los espacios de Moore mostrando algunas de sus propiedades más elementales. Nos interesa en particular mostrar que todo espacio metrizable es un espacio de Moore pero que, naturalmente, no todo espacio de Moore es un espacio metrizable la relación que guardan los espacios de Moore con los espacios metrizables. Presentaremos el concepto de espacio Moore completo tratando de exhibir su cercanía con los espacios completamente metrizables. Daremos una importante caracterización de los espacios Moore completos en términos de su compactación de Wallman.

2.1. Propiedades básicas de los espacios de Moore

Comenzaremos esta sección, recordando la definición de espacio de Moore mencionada en el Capítulo 1.

Definición 2.1 *Sea (X, τ) un espacio topológico. Diremos que X es un espacio de Moore si y sólo si X es regular y existe un desarrollo para X, es decir, si existe una sucesión de cubiertas abiertas $\{\mathcal{G}_n\}$ de X, de tal manera que para cada punto x, la familia $\{st(x, \mathcal{G}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base local para x.*

A partir de la definición de espacio de Moore es posible deducir de manera muy sencilla algunas de sus propiedades. Por ejemplo, es claro que todo espacio de Moore le hereda esta propiedad a todos sus subespacios. También es muy evidente que todo espacio de Moore es automáticamente un espacio primero numerable.

Proposición 2.2 *Si X es un espacio de Moore y $Y \subset X$ es un subespacio, entonces Y es un subespacio de Moore.*

Proposición 2.3 *Si X es un espacio de Moore, entonces X es primero numerable.*

Como ya hemos mencionado, los espacios metrizables son un caso particular de los espacios de Moore y a continuación daremos la prueba de esta afirmación.

Proposición 2.4 *Si X es metrizable, entonces X es un espacio de Moore.*

Dem. Supongamos que X es un espacio metrizable por una métrica d, eso implica en particular que X es regular. Veamos que existe un desarrollo para X. Sea

$$\mathcal{G}_n = \{B(x, 1/n) : x \in X\}$$

en donde $B(x, 1/n)$ denota a la bola centrada en x y de radio $1/n$. La famlia $\mathcal{G}_n$ claramente es cubierta abierta para X. Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$st(x, \mathcal{G}_n) = \bigcup \{A \in \mathcal{G}_n : A \cap \{x\} \neq \varnothing\} = \bigcup \{B(y, 1/n) : d(x, y) < 1/n\}.$$

Ahora, veamos que la familia $\{st(x, \mathcal{G}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base local para x en X. Sea U un subconjunto abierto de X tal que $x \in U$. Como las bolas son básicos, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $B(x, 1/n) \subset U$. Mostraremos que $st(x, \mathcal{G}_{2n}) \subset B(x, 1/n)$. Dado $z \in st(x, \mathcal{G}_{2n})$, $z \in B(y, 1/2n)$ para algún $y \in X$ tal que $d(y, x) < 1/2n$. De la desigualdad del triángulo se sigue

$$d(x, z) < d(x, y) + d(y, z) < \frac{1}{n}.$$

Por lo tanto, $z \in B(x, 1/n)$. Lo que prueba que $st(x, \mathcal{G}_{2n}) \subset B(x, 1/n) \subset U$. Así concluimos que $\{st(x, \mathcal{G}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es base local para x en el espacio X. Por lo tanto, X es un espacio de Moore. ■

Con la Proposición 2.4 obtenemos en particular que todo espacio discreto es un espacio de Moore. Dado que todo espacio topológico es imagen continua de un espacio discreto, se sigue que la propiedad de Moore no es preservada bajo imágenes continuas.

Como ya hemos anunciado, no todo espacio de Moore es un espacio metrizable. Un ejemplo de ello es el plano de Moore.

Ejemplo 2.5 *Sea $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$. Denotemos al conjunto de los puntos del eje X como $\Gamma_0 = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$. También denotemos por d_e a la métrica euclidiana para $\mathbb{R}^2$.*
(1) Para cada $z = (a, b) \in \Gamma \setminus \Gamma_0$ y $r > 0$ definimos:

$$D(z, r) = \Gamma \cap \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d_e((a, b), (x, y)) < r\right\}.$$

(2) Para cada $z = (a, 0) \in \Gamma_0$ y $r > 0$ definimos:

$$C(z, r) = \{z\} \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d_e((a, r), (x, y)) < r\right\}.$$

La familia

$$\mathcal{B} = \{D(z, r) : z \in \Gamma \setminus \Gamma_0, r > 0\}\} \cup \{C(z, r) : z \in \Gamma_0, r > 0\}$$

es base para una topología en Γ. Al espacio $(\Gamma, \tau_{\mathcal{B}})$ se le conoce como el plano de Moore.

Es conocido que el plano de Moore es un espacio Tychonoff pero no normal (la prueba se puede consultar en [1]) y por lo tanto no puede ser metrizable.

Vale la pena destacar que el conjunto $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \cap \Gamma$ es denso en Γ y en consecuencia Γ es un espacio separable. Además, el subespacio Γ_0 es claramente cerrado, discreto y de cardinalidad 2^ω. Gracias a estos dos hechos y como consecuencia del Lema de Jones, se concluye que el plano de Moore no es un espacio normal. Ahora bien, a partir de estos dos hechos también es posible dar un argumento directo de por qué Γ no puede ser metrizable. En efecto, si Γ fuera metrizable, Γ_0 debería heredar la separabilidad de Γ, lo cual no ocurre.

Ahora probemos que Γ es un espacio de Moore.

Proposición 2.6 *El plano de Moore es un espacio de Moore.*

Dem. Ya mencionamos que Γ es un espacio Tychonoff y por tanto regular. Nos falta exhibir un desarrollo para Γ. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos los siguientes conjuntos $\mathcal{O}_n = \{C(z, 1/n) : z \in \Gamma_0\}$ y

$$\mathcal{P}_n = \{D(z, 1/n) : z \in \Gamma \setminus \Gamma_0 \text{ y } D(z, 1/n) \cap \Gamma_0 = \emptyset\}.$$

Definimos $\mathcal{G}_n = \mathcal{O}_n \cup \mathcal{P}_n$. Veamos que $\{\mathcal{G}_n : n \in \mathbb{N}\}$ es el desarrollo para Γ. Comencemos mostrando que cada $\mathcal{G}_n$ es una cubierta para Γ. Es claro que $\Gamma_0 \subset \bigcup \mathcal{O}_n$. Si $z = (a, b) \in \Gamma \setminus \Gamma_0$ y $z \notin \bigcup \mathcal{P}_n$, entonces $D(z, 1/n) \cap \Gamma_0 \neq \emptyset$. Ahora bien, si $D(z, 1/n) \cap \Gamma_0 \neq \emptyset$, entonces necesariamente ocurre que $0 < b < 1/n$. De donde

$$d_e((a, 1/n), (a, b)) = \frac{1}{n} - b < \frac{1}{n}$$

es decir, $z \in C((a, 0), 1/n) \subset \bigcup \mathcal{O}_n$.

Ahora veamos que $\{st(z, \mathcal{G}_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ forma una base local para cada $z \in \Gamma$. Sea $z_0 \in \Gamma_0$. Tomemos una vecindad básica canónica $C(z_0, r)$ para z_0. Notemos que, por definición de $C(z, r)$, si $z_0 \in C(z, r)$, entonces $z = z_0$ (y esto ocurre para cualquier $r > 0$). Por otro lado, si $D(z, 1/n) \in \mathcal{P}_n$, entonces $z_0 \notin D(z, 1/n)$ puesto que $D(z, 1/n) \cap \Gamma_0 = \emptyset$. De este modo tenemos que $st(z_0, \mathcal{G}_n) = C(z_0, 1/n)$. Tomando $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < r$, se sigue que $st(z_0, \mathcal{G}_n) \subset C(z_0, r)$. Por lo tanto, $\{st(z_0, \mathcal{G}_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es base local en Γ para z_0.

Sea $z \in \Gamma \setminus \Gamma_0$. Tomemos una vecindad básica $D(z, r)$de z. Podemos suponer que $D(z, r) \cap \Gamma_0 = \emptyset$. Bajo este supuesto, el conjunto $D(z, r)$ es simplemente $B(z, r)$.

Notemos que si $N \in \mathbb{N}$ es tal que $1/N < r/2$, entonces para toda $n \geq N$, $z \notin \bigcup \mathcal{O}_n$; en caso contrario, ocurriría que $D(z, r) \cap \Gamma_0 \neq \emptyset$, en contradicción con la elección de r. Esto prueba que, para toda $n \geq N$

$$st(z, \mathcal{G}_n) \subset \bigcup \mathcal{P}_n.$$

Lo anterior nos permite proceder de manera análoga a lo realizado en la Proposición 2.4 y concluir que, para toda $n \geq N$

$$st(z, \mathcal{G}_{2n}) \subset B(z, 1/n).$$

En particular ocurre que

$$st(z, \mathcal{G}_{2N}) \subset B(z, 1/N) \subset B(z, r) = D(z, r),$$

lo que prueba que $\{st(z, \mathcal{G}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es base local en Γ para z.

Por lo tanto Γ es un espacio de Moore. ∎

Aunque el plano de Moore nos da un ejemplo de un espacio de Moore (separable) y no metrizable, parece dejar cierta insatisfacción por el hecho de no ser un espacio normal y que esa sea la razón por la cual no es un espacio metrizable. Sin embargo, por decepcionante que pudiera parecer la no normalidad, no se trata de un hecho menor. Y es que, aunque los ejemplos de espacios de Moore no metrizables abundan, todos los ejemplos "reales" que se conocen, son espacios que no alcanzan a ser normales. Lo anterior motivó una de las conjeturas más importantes en la Topología General: *Todo espacio de Moore normal es metrizable.* Conjetura que tuvo trabajando árduamente a la comunidad matemática durante casi cincuenta años, con resultados verdaderamente sorprendentes.

En 1937, Jones (quien fuera alumno del propio Moore) demuestra que, bajo la hipótesis de $2^{\omega} < 2^{\omega_1}$, todo espacio de Moore, separable y normal debe ser metrizable.

En 1967, Silver construye, bajo el axioma de Martin y la negación de la hipótesis del continuo, un espacio de Moore normal que no es metrizable.

Finalmente, en 1980, apoyado en los trabajos de Kunen, Nykos demuestra que la consistencia de la existencia de un cardinal fuertemente compacto, implica la consistencia de que todo espacio de Moore normal es metrizable.

2.2. Espacios de Moore completos

Motivados en la estrecha cercanía que guardan los espacios metrizables con los espacios de Moore, se crea el concepto de espacio Moore completo, esperando obtener una generalización de los espacios completamente metrizables.

Čech demostró que cualquier espacio metrizable X es completamente metrizable si y sólo si X se puede encajar como un subconjunto G_δ en su compactación de Stone-Čech. Lo cual, como veremos, es equivalente a que X se pueda encajar como un subconjunto G_δ de algún espacio compacto Hausdorff. Uno de los objetivos de esta sección es demostrar que el resultado anterior puede ser extendido a espacios de Moore. Utilizaremos esta caracterización para demostrar que todo espacio de Moore completo y metrizable es completamente metrizable.

Para comenzar veamos los conceptos de espacio de Moore completo y el de espacio regularmente encajado.

Definición 2.7 *Un espacio de Moore es completo respecto a un desarrollo $\{\mathcal{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si, para cada sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ decreciente de conjuntos cerrados y no vacíos, con la*

propiedad de que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $G_n \in \mathcal{G}_n$ tal que $A_n \subset G_n$, se cumple que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \varnothing$.
Diremos que un espacio X es Moore completo si existe un desarrollo respecto al cual X es completo.

Definición 2.8 *Un subespacio X de un espacio topológico Y está regularmente encajado en Y si para cada $p \in X$ y cada $U \subset Y$ abierto en Y tal que $p \in U$, existe un subconjunto $V \subset Y$ abierto en Y y tal que $p \in V \subset cl_Y V \subset U$.*

Notemos que cualquier subespacio de un espacio regular, está regularmente encajado en este. También hay que notar que si X está regularmente encajado en Y, entonces X debe ser un espacio regular, aún cuando Y no lo sea.

Una característica que comparten los espacios Moore completos respecto a los espacios completamente metrizables, es el hecho de que ambas son propiedades que se heredan a cerrados.

Proposición 2.9 *Si X es un espacio Moore completo y $Y \subset X$ es un subespacio cerrado de X, entonces Y es Moore completo.*

Dem. Sea X un espacio de Moore completo y sea Y un subespacio cerrado de X. Consideremos $\{\mathcal{G}_n : n \in \mathbb{N}\}$ la sucesión de cubiertas respecto a la cual X es completo. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}_n = \{G \cap Y : G \in \mathcal{G}_n\}$ es una cubierta abierta para Y y la sucesión $\{\mathcal{H}_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un desarrollo para Y.

Afirmamos que Y es completo respecto al desarrollo $\{\mathcal{H}_n : n \in \mathbb{N}\}$. Como Y es cerrado en X, entonces toda sucesión de cerrados en Y, es una sucesión de cerrados en X. Supongamos, que $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados de Y, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $H_n \in \mathcal{H}_n$ tal que $A_n \subset H_n$. Por definición de $\mathcal{H}_n$ se sigue que $H_n \subset G_n$ para algún $G_n \in \mathcal{G}_n$. Como X es completo respecto a $\{\mathcal{G}_n : n \in \mathbb{N}\}$, entonces, por la completez de X ,se sigue que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \varnothing$. Por lo tanto Y es Moore completo. ∎

En general la propiedad Moore completo no se hereda a cualquier tipo de subespacios. Más adelante tendremos la herramienta para mostrar un ejemplo de un subespacio de un Moore completo que no es Moore completo.

A continuación damos un importante teorema que nos da condiciones suficientes para identificar cuándo un espacio de Moore es completo.

Teorema 2.10 *Sea X un espacio de Moore. Si existe un espacio compacto Y en el cual X está regularmente encajado y para el cual X es un subconjunto G_δ, entonces X es un espacio de Moore completo.*

Dem. Sea $\{\mathcal{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un desarrollo para X y sea $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos abiertos de Y tal que $X = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} P_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $x \in X$, sea $G_n(x)$ un subconjunto abierto de Y que contiene a x tal que $G_n(x) \cap X \in \mathcal{G}_n$. Para cada $x \in X$, sea $\{H_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos abiertos de Y, cada uno de los cuales contiene a x, tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumpla que

$$cl_Y(H_n(x)) \subset G_n(x) \cap P_n \text{ y } H_{n+1}(x) \subset H_n(x).$$

Sea

$$\mathcal{H}_n = \{H_n(x) \cap X : x \in X\}.$$

Como $\mathcal{H}_{n+1}$ refina a $\mathcal{H}_n$ y a su vez $\mathcal{H}_n$ refina a $\mathcal{G}_n$, la sucesión $\{\mathcal{H}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un desarrollo para X.

Veamos que X es completo respecto al desarrollo $\{\mathcal{H}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados no vacíos de X tales que, para cada $n \in \mathbb{N}$, hay un $H'_n \in \mathcal{H}_n$ tal que $A_n \subset H'_n$. Por la compacidad del espacio Y, la sucesión $\{cl_Y(A_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de conjuntos compactos no vacíos y por lo tanto $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} cl_Y(A_n) \neq \varnothing$.

Ahora bien, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $cl_Y(A_n) \subset cl_Y(H'_n) \subset P_n$. Lo cual implica que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} cl_Y(A_n) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} P_n = X.$$

De donde

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} cl_Y(A_n) = X \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} cl_Y(A_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (cl_Y(A_n) \cap X) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

En consecuencia $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} cl_Y(A_n) \neq \varnothing$. Por lo tanto, X es completo respecto al desarrollo $\{\mathcal{H}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. ■

Es importante destacar que, en el Teorema 2.10, al compacto Y en el cual X está regularmente encajado, no se le está pidiendo ningún axioma de separación más fuerte que T_1, el cual es el axioma de separación con el que hemos estado trabajando a lo largo de la tesis.

Teorema 2.11 *Un espacio de Moore completo es un subconjunto G_δ de todo espacio T_1 en el cual es denso y está regularmente encajado.*

Dem. Sea X un espacio de Moore el cual es completo respecto al desarrollo $\{\mathcal{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Supongamos que X es denso en Y y está regularmente encajado en Y. Debemos mostrar que X es un subconjunto G_δ de Y, es decir que existe una suceción $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos abiertos de Y tal que $X = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} P_n$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada punto $x \in X$, sea $G_n(x)$ un conjunto abierto en Y tal que $x \in G_n(x) \cap X \in \mathcal{G}_n$ y sea $H_n(x) \subset Y$ abierto en Y con $x \in H_n(x)$ tal que $cl_Y(H_n(x)) \subset G_n(x)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$P_n = \bigcup \{H_n(x) : x \in X\}.$$

Es evidente que $X \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} P_n$. Sea $p \in Y \setminus X$ y supongamos que $p \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} P_n$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, existe $x_i \in X$ tal que $p \in H_i(x_i)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$A_n = \left(\bigcap_{i=1}^{n} cl_Y \left(H_i \left(x_i \right) \right) \right) \cap X.$$

Veamos que cada A_n es distinto del vacío. Claramente

$$\varnothing \neq H_i(x_i) \subset cl_Y(H_i(x_i)).$$

Además,

$$\bigcap_{i=1}^{n} H_i(x_i) \subset \bigcap_{i=1}^{n} cl_Y(H_i(x_i)).$$

Como $\bigcap\limits_{i=1}^{n} H_i(x_i)$ es abierto en Y y X es denso en Y, entonces

$$\varnothing \neq \left(\bigcap_{i=1}^{n} H_i(x_i) \right) \cap X \subset \left(\bigcap_{i=1}^{n} cl_Y \left(H_i \left(x_i \right) \right) \right) \cap X.$$

Por lo tanto $A_n \neq \varnothing$. Así, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados y distintos del vacío en X tales que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset G_n(x_n)$. Como X es completo respecto al desarrollo $\{\mathcal{G}_i\}_{n\in\mathbb{N}}$, hay un punto q en común a todos los A_n. Como Y es T_1, existe V subconjunto abierto de Y tal que $q \in V$ y $p \notin V$; más aún, como X está regularmente encajado en Y y q es un elemento de X, entonces existe un subconjunto abierto U de Y tal que $q \in U \subset cl_Y(U) \subset V$, y así $q \in U$ y $p \notin cl_Y(U)$. Como $\{\mathcal{G}_i\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un desarrollo para X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que, $st\,(q, \mathcal{G}_k) \subset U \cap X$. Por la definición de A_k, concluimos que

$$q \in cl_Y \left(H_k \left(x_k \right) \right) \subset G_k(x_k).$$

Esto nos indica que $G_k(x_k) \subset st\,(q, \mathcal{G}_k)$ y así obtenemos que

$$H_k \left(x_k \right) \subset cl_Y \left(H_k \left(x_k \right) \right) \subset G_k(x_k) \subset U.$$

Por lo tanto, $p \notin H_k(x_k)$, lo cual contradice la elección de $x_k \in X$. Esto prueba que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} P_n \subset X$. Y en consecuencia X es un conjunto G_δ de Y. ■

Está claro que cualquier espacio Tychonoff es denso y además, está regularmente encajado en su compactación de Stone-Čech, por lo cual, los teoremas anteriores tienen el siguiente corolario.

Corolario 2.12 *Un espacio de Moore y Tychonoff X, es Moore completo si y sólo si existe un espacio compacto y Hausdorff Y, que contiene a X y para el cual X es subespacio G_δ.*

Dem. Supongamos que X es Moore completo. El espacio βX satisface que es compacto, Hausdorff y X está densa y regularmente encajado en él. Por el Teorema 2.11, concluimos que X es subespacio G_δ de βX.

El recíproco es inmediato del Teorema 2.10 y recordando que X está regularmente encajado en cualquier extensión regular. ■

Como se mencionó al inicio de esta sección, Čech demuestra el siguiente teorema (cuya prueba puede consultarse en [17]).

Teorema 2.13 *(Čech) Si X metrizable, entonces X es completamente metrizable si y sólo si X es un subconjunto G_δ de βX.*

A continuación demostraremos un teorema que permite dar una generalización del teorema de Čech. Para ello deberemos echar mano de un lema técnico.

Recordemos que una función $f : X \to Y$ es llamada perfecta si es una función cerrada y cada fibra $f^{-1}[\{y\}]$ es un conjunto compacto en X.

Lema 2.14 *Sean X y Y espacios Hausdorff y $f : X \to Y$ continua. Si $S \subset X$ es denso y $f \restriction_S : S \to f[S]$ es perfecta, entonces*

$$f[X \setminus S] \subset Y \setminus f[S].$$

Dem. Supongamos que existe $x \in X \setminus S$ tal que $f(x) \in f[S]$. Consideremos al subespacio $Z = \{x\} \cup S$. El conjunto S es denso en Z pues S es denso en X. Como $f \restriction_S : S \to f[S]$ es perfecta y $f(x) \in f[S]$, tenemos que $K = f^{-1}[\{f(x)\}] \cap S$ es compacto en S.

Dado que $x \notin K$ y Z es Hausdorff, existe un subconjunto abierto U de Z tal que $K \subset U$ y $x \notin cl_Z(U)$.

Notemos que

$$\begin{aligned} Z &= cl_Z(S) = cl_Z((S \cap U) \cup (S \setminus U)) \\ &= cl_Z(S \cap U) \cup cl_Z(S \setminus U) \\ &\subset cl_Z(U) \cup cl_Z(S \setminus U). \end{aligned}$$

Por lo anterior,

$$Z = cl_Z(U) \cup cl_Z(S \setminus U).$$

Como $x \notin cl_Z(U)$, entonces $x \in cl_Z(S \setminus U)$.

Por la continuidad de $f \restriction_Z : Z \to f[S]$, se sigue que

$$f[cl_z(S \setminus U)] \subset cl_{f[S]} f[S \setminus U].$$

Como $f\restriction_S: S \longrightarrow f[S]$ es cerrada y $S \setminus U$ es cerrado en S, $f[S\setminus U]$ es cerrado de $f[S]$. De manera que la contención anterior es equivalente a

$$f\left[cl_z(S\setminus U)\right] \subset f\left[S\setminus U\right].$$

Finalmente, dado que $x \in cl_Z(S\setminus U)$, entonces $f(x) \in f\left[S\setminus U\right]$. Tomando $p \in S\setminus U$ tal que $f(p) = f(x)$, se tiene que

$$p \in f^{-1}\left[\{f(x)\}\right] \cap S = K \subset U$$

y esto es absurdo.

Por lo tanto ocurre que

$$f\left[S\setminus U\right] \subset Y \setminus f[S].$$

■

Teorema 2.15 *Sea X un espacio de Tychonoff. Si existe una compactación Hausdorff K de X tal que X es subconjunto G_δ de K, entonces X es un subconjunto G_δ de βX.*

Dem. Recordando que βX es la compactación Hausdorff más grande de X. Se tiene que existe una función continua $f : \beta X \longrightarrow K$ tal que

$$f\restriction_X = id_X.$$

Notemos que $f\restriction_X: X \longrightarrow f[X]$ es perfecta pues $f\restriction_X = id_X$.

Aplicando el Lema 2.14 a f y usando que la restricción de f a X es perfecta, podemos concluir que

$$f[\beta X \setminus X] \subset K \setminus f[X].$$

La densidad de X en K y la compacidad de βX nos permiten concluir que f es sobre, ya que

$$K = cl_K(X) = cl_K f[X] \subset cl_K f[\beta X] = f[\beta X].$$

Por lo tanto tenemos que

$$f[\beta X \setminus X] = K \setminus X.$$

De la igualdad anterior y gracias a que $f\restriction_X = id_X$, podemos concluir que

$$\beta X \setminus X = f^{-1}[K \setminus X].$$

Finalmente, por hipótesis, X es un conjunto G_δ de K y por tanto $K \setminus X$ es un conjunto F_σ de K. Esto quiere decir que

$$K \setminus X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$$

en donde cada $F_n \subset K$ es cerrado en K. Por la continuidad de f se sigue que βX es un conjunto F_σ de βX ya que

$$\beta X \setminus X = f^{-1}[K \setminus X] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}[F_n].$$

Por lo tanto X es G_δ en βX. ■

Del teorema de Čech y el Teorema 2.15, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.16 *Si X metrizable, entonces X es completamente metrizable si y sólo si X se puede encajar como un subconjunto G_δ en algún espacio compacto Hausdorff.*

Gracias al Corolario 2.12 y al teorema de Čech, podemos concluir que todo espacio completamente metrizable es un espacio Moore completo, puesto que todo espacio completamente metrizable es un espacio de Moore, Tychonoff y es un subconjunto G_δ de su compactación de Stone-Čech.

Ahora demostraremos que todo espacio metrizable y Moore completo es completamente metrizable.

Teorema 2.17 *Si X es un espacio de Moore completo y metrizable, entonces X es completamente metrizable.*

Dem. Como X es Tychonoff y Moore completo, entonces el Corolario 2.12 nos dice que existe una compactación de Hausdorff K de X para la cual X es un conjunto G_δ. Por el Corolario 2.16, concluimos que X es completamente metrizable. ■

Ejemplo 2.18 *Consideremos a $\mathbb{Q}$ con su topología euclidiana. Sabemos que $\mathbb{Q}$ es un espacio métrico (y por tanto de Moore) pero no es completamente metrizable. De acuerdo con el Teorema 2.17, podemos concluir que $\mathbb{Q}$ no es un espacio Moore completo, sin embargo, sí es un subespacio de un Moore completo, a saber, $\mathbb{R}$.*

Como hemos visto a lo largo de esta sección, el concepto de "regularmente encajado" juega un papel esencial en lo que hemos desarrollado. Tras la Definición 2.8 se hizo el comentario de que un espacio X puede estar regularmente encajado en Y aún cuando Y no sea un espacio regular. Sin embargo, esto no luce como un hecho muy evidente. Y sin la existencia de espacios regularmente encajados en espacios no regulares, el concepto pierde su fuerza, pues en realidad no estaría generando una noción nueva y simplemente se estaría hablando de los ya conocidos espacios regulares.

Como bien se sabe, la compactación de Wallman de un espacio X, denotada por wX, es un espacio T_1, compacto, que no es Hausdorff, a menos que X sea normal.

A continuación mostraremos que si X es regular, entonces X está regularmente encajado en wX. Con lo cual, podremos generar una amplia variedad de ejemplos de espacios regularmente encajados en espacios no regulares.

Para ello recordemos la definición de la compactación de Wallman de un espacio X.

Para un espacio topológico X, denotamos por $\mathcal{L}(X)$ a la familia de todos los subconjuntos cerrados de X. Definimos

$$\mathcal{U}_0(X) = \{\mathcal{F} \subset \mathcal{L}(X) : \mathcal{F} \text{ es un ultrafiltro libre en } \mathcal{L}(X)\}.$$

Para cada subconjunto abierto $U \subset X$, denotamos por

$$U^* = U \cup \{\mathcal{F} \in \mathcal{U}_0(X) : \exists A \in \mathcal{F}\,(A \subset U)\}.$$

Así mismo, para cada subconjunto cerrado $F \subset X$, denotamos por

$$F_* = F \cup \{\mathcal{F} \in \mathcal{U}_0(X) : F \in \mathcal{F}\}.$$

Definición 2.19 *Para un espacio topológico X, definimos la compactación de Wallman de X como el espacio*

$$wX = X \cup \mathcal{U}_0(X)$$

dotado de la topología que tiene por base a la familia formada por todos los conjuntos de la forma U^*, con $U \subset X$ abierto.

En el Apéndice B damos una construcción detallada sobre la compactación de Wallman así como algunas propiedades básicas que usaremos a continuación.

Lema 2.20 *Si X es un espacio regular, entonces para cada $p \in X$ y $q \in wX$, con $p \neq q$, existen dos subconjuntos abiertos ajenos de wX que separan a p y a q.*

Dem. Será necesario distinguir los casos $q \in X$ y $q \notin X$.

Si $q \in X$, consideremos el ultrafiltro

$$\mathcal{Q} = \{B \in \mathcal{L}(X) : q \in B\}.$$

Sabemos que $\bigcap \mathcal{Q} = \{q\}$. Como $p \neq q$, existe $Q \in \mathcal{Q}$ tal que $p \notin Q$. Como X es regular, existen subconjuntos abiertos ajenos U y V de X tales que $p \in U$ y $Q \subset V$. Los subconjuntos abiertos U^* y V^* de wX inducidos por U y V son ajenos y contienen a p y a q respectivamente.

Si $q \notin X$, entonces q es un ultrafiltro libre en $\mathcal{L}(X)$. De manera que existe $Q \in q$ tal que $p \notin Q$. Por la regularidad de X, existen subconjuntos abiertos ajenos U y V de X tales que $p \in U$ y $Q \subset V$. Nuevamente obtenemos que los abiertos U^* y V^* de wX separan a p y q. $\blacksquare$

Teorema 2.21 *Cualquier espacio regular está regularmente encajado en su compactación de Wallman.*

Dem. Sea X un espacio regular.

Sea $x \in X$, y sea U^* un abierto básico canónico de wX, tal que $x \in U^*$. Como U^* es de la forma

$$U^* = U \cup \{\mathcal{U} \in \mathcal{U}_0(X) : \exists A \in \mathcal{U}\,(A \subset U)\},$$

se sigue que $x \in U$. Por la regularidad de X, existe $V \subset X$ abierto tal que $x \in V \subset cl_X(V) \subset U$. Afirmamos que, V^* es el abierto buscado, es decir, que se cumple que

$$x \in V^* \subset cl_{wX}(V^*) \subset U^*.$$

. Para ello notemos primero que $cl_{wX}(V^*) \subset (cl_X(V))_*$

Sea $p \in cl_{wX}(V^*)$. Por la densidad de X en wX y dado que V^* es abierto en wX, se tiene que

$$cl_{wX}(V^*) \cap X = cl_{wX}(V^* \cap X) \cap X = cl_{wX}(V) \cap X = cl_X(V).$$

De manera que si $p \in X$, entonces $p \in cl_X(V) \subset (cl_X(V))_*$.

Supongamos ahora que $p \notin X$, es decir, $p \in \mathcal{U}_0(X)$. Para ver que $p \in (cl_X(V))_*$, necesitamos probar que $cl_X(V) \in p$.

Supongamos que $cl_X(V) \notin p$. Entonces existe $F \in p$ tal que $F \cap cl_X(V) = \emptyset$, equivalentemente $F \subset X \backslash cl_X(V)$. Esto significa que $p \in W^*$, donde $W = X \backslash cl_X(V)$. Dado que W y V son ajenos, se sigue que W^* y V^* son ajenos, pero esto contradice el hecho de que $p \in cl_{wX}(V^*)$. Con lo que concluimos que $p \in (cl_X(V))_*$.

Para concluir la prueba, vamos a demostrar que $(cl_X(V))_* \subset U^*$.

Sea $p \in (cl_X(V))_*$. Si $p \in X$, entonces $p \in cl_X(V) \subset U \subset U^*$. Si $p \notin X$, entonces $p \in \mathcal{U}_0(X)$ y $cl_X(V) \in p$. Dado que $cl_X(V) \subset U$, se cumple la definición de $p \in U^*$. Por lo tanto $(cl_X(V))_* \subset U^*$. Con lo que queda demostrado que

$$x \in V^* \subset cl_{wX}(V^*) \subset U^*.$$

Por lo tanto, X está regularmente encajado en wX. ■

El Teorema 2.21 además de brindarnos una técnica para crear espacios regularmente encajados en espacios no regulares, nos permite mostrar la tan anunciada caracterización de los espacios Moore completos a partir de su compactación de Wallman.

Teorema 2.22 *Si X es un espacio de Moore, entonces X es Moore completo si y sólo si X es un subconjunto G_δ de wX.*

Dem. Si X es Moore completo, entonces por el Teorema 2.21 y el Teorema 2.11 concluimos que X es un subconjunto G_δ de wX.

Recíporcamente, si X es un subconjunto G_δ de wX, entonces gracias al Teorema 2.21, tenemos todas las condiciones para aplicar el Teorema 2.10. Con lo que concluimos que X es Moore completo. ■

Capítulo 3

Un Moore separable y no completable

Durante este capítulo, daremos respuesta a la interrogante planteada al inicio de la tesis y la cual es la motivación central de ésta: ¿Existe un espacio de Moore separable que no sea completable?

Definición 3.1 *Un espacio de Moore X es completable si existe un espacio de Moore completo Y que contenga a X como subespacio.*

A diferencia de los espacios Moore completos, la propiedad de ser un espacio de Moore completable, se hereda a cualquier subespacio.

Proposición 3.2 *La propiedad de ser un espacio de Moore completable es una propiedad hereditaria.*

Dem. Sea X espacio de Moore completable y sea $A \subset X$. Consideremos a Y el espacio de Moore completo tal que X es subespacio de Y. Se cumple que Y también funciona para A pues, todo $U \in \tau_A$, es igual a $V \cap A$ con $V \in \tau_X$ que a su vez es igual a $W \cap X$ con $W \in \tau_Y$ y se tiene que $W \cap A = U$ pues $A \subset X$.

Por lo tanto, ser espacio de Moore completable es una propiedad hereditaria. ■

Como consecuencia de lo anterior, es fácil percatarnos que cualquier espacio de Moore completable está contenido en un espacio de Moore completo como subespacio denso.

Proposición 3.3 *Sea X un espacio de Moore. Entonces X es completable si y sólo si existe un espacio de Moore completo Y que contiene a X como subespacio denso.*

Dem. Sea X espacio de Moore completable, entonces existe Y espacio de Moore completo tal que $X \subset Y$. Luego, consideremos a

$$M = cl_Y(X).$$

Entonces M es un cerrado de Y y por lo tanto también es un espacio Moore completo. De esta manera hemos conseguido un espacio Moore completo en el cual X es un subespacio denso.

El recíproco es inmediato. ■

El siguiente resultado que únicamente enunciaremos, juega un papel fundamental para la construcción del espacio que nos interesa. Su prueba se escapa de los alcances de esta tesis, sin embargo, puede consultarse en [14].

Teorema 3.4 *Si M es un espacio de Moore completable y ccc, entonces M es separable.*

Este resultado es importante pues, gracias a esto, podemos observar que $\mathcal{F}[\mathbb{R}]$ no es un espacio completable. Ya hemos demostrado que para cualquier espacio infinito X se da la igualdad

$$d(\mathcal{F}[X]) = |X|.$$

Lo que en particular nos dice esta desigualdad es que $\mathcal{F}[\mathbb{R}]$ no es un espacio separable. También sabemos la relación

$$c(\mathcal{F}[X]) \leq nw(X).$$

Dado que $nw(\mathbb{R}) = \omega$, se sique que $\mathcal{F}[\mathbb{R}]$ es un espacio *ccc*. De manera que $\mathcal{F}[\mathbb{R}]$ es un espacio de Moore (por ser primero numerable), *ccc* que no es separable. Por lo tanto $\mathcal{F}[\mathbb{R}]$ no es un espacio de Moore completable.

Ahora sabemos que $\mathcal{F}[\mathbb{R}]$ no es candidato para ser ejemplo de la interrogante planteada. El espacio $\mathcal{F}[\mathbb{R}]$ tiene muchas cualidades, pero entre ellas no se encuentra ser separable.

El hecho de que $\mathcal{F}[\mathbb{R}]$ no sea nuestro espacio buscado, no significa que todo está perdido, sino todo lo contrario. Gracias a la Proposición 3.2, sabemos que cualquier espacio de Moore que contenga a $\mathcal{F}[\mathbb{R}]$ como subespacio, no podrá ser completable. De manera que nos vamos a dar a la tarea de construir un espacio de Moore separable que contenga a $\mathcal{F}[\mathbb{R}]$ como subespacio y con ello habremos encontrado un espacio de Moore separable pero no completable.

A partir de un espacio topológico X, se pueden definir distintos hiperespacios y darles estructura topológica. Hasta ahora hemos definido un par de ellos a $\mathcal{F}(X)$ (la colección de los subconjuntos finitos de X). También utilizamos a $\mathcal{F}_2[X]$ y siguiendo la misma lógica podemos pensar en $\mathcal{F}_n[X]$. Así utilizando diferentes tipos de subconjuntos podemos formar distintos hiperespacios. Por ejemplo, podemos pedir que los subconjuntos solamente sean distintos del vacío, cerrados o compactos.

Denotemos por $\mathcal{C}(X)$ la colección de subconjuntos compactos y no vacíos de un espacio X. A $\mathcal{C}(X)$, al igual que a $\mathcal{F}[X]$, lo podemos dotar con la topología de Pixley-Roy e incluso con la topología de Vietoris.

Definición 3.5 *Denotaremos como $\mathcal{C}[X]$ al hiperespacio $\mathcal{C}(X)$ equipado con la topología de Pixley-Roy. Es decir, los abiertos básicos canónicos para $\mathcal{C}[X]$ son de la forma*

$$[A, U] = \{B \in \mathcal{C}[X] : A \subset B \subset U\}$$

en donde $A \in \mathcal{C}[X]$ y $U \subset X$ es un abierto de X tal que $A \subset U$.

Una observación importante es que el espacio $\mathcal{F}[X]$ siempre es un subespacio de $\mathcal{C}[X]$.

De manera análoga a lo demostrado en la Proposición 1.2, tenemos que los conjuntos $[A, U]$ también son cerrados en $\mathcal{C}[X]$. Y en consecuencia, al igual que $\mathcal{F}[X]$, el espacio $\mathcal{C}[X]$ siempre es T_1 y cero-dimensional.

Proposición 3.6 *Para cualquier espacio X, $\mathcal{C}[X]$ es un espacio T_1 y cero-dimensional.*

Corolario 3.7 *Para cualquier espacio X, $\mathcal{C}[X]$ es un espacio Tychonoff.*

Para nuestros propósitos, únicamente necesitamos conocer más a fondo al espacio $\mathcal{C}[\mathbb{R}]$. De manera que de aquí en adelante sólo nos concentraremos en $\mathcal{C}[\mathbb{R}]$.

Una propiedad importante de $\mathcal{C}[\mathbb{R}]$ es que es un espacio primero numerable.

Proposición 3.8 *El espacio $\mathcal{C}[\mathbb{R}]$ es primero numerable.*

Dem. Para cada $A \in \mathcal{C}[\mathbb{R}]$ y cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$U_n(A) = \bigcup \{B(a, 1/n) : a \in A\}$$

Veamos que $\{[A, U_n(A)] : n \in \mathbb{N}\}$ es una base local para A en $\mathcal{C}[\mathbb{R}]$.

Cada $U_n(A)$ es abierto de $\mathbb{R}$, pues es unión de conjuntos abiertos, de manera que los conjuntos de la forma $[A, U_n(A)]$ son abiertos básicos en $\mathcal{C}[\mathbb{R}]$. Así, podemos proceder a verificar que en efecto $\{[A, U_n(A)] : n \in \mathbb{N}\}$ es una base local para A en $\mathcal{C}[\mathbb{R}]$.

Sea $\mathcal{V} \subset \mathcal{C}[\mathbb{R}]$ un conjunto abierto básico canónico de $\mathcal{C}[\mathbb{R}]$ tal que $A \in \mathcal{V}$; digamos que $\mathcal{V}$ es de la forma $\mathcal{V} = [A, V]$.

Consideremos $r = \min\{d(a, \mathbb{R} \smallsetminus V) : a \in A\}$, donde $d(a, \mathbb{R} \smallsetminus V)$ representa la distancia del punto a al conjunto $\mathbb{R} \smallsetminus V$. Debido a que A es compacto y a que $\mathbb{R} \smallsetminus V$ es cerrado ajeno a A, podemos afirmar que se alcanza el mínimo del conjunto mencionado y que $r > 0$.

Luego, sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < r$. Afirmamos que $[A, U_n(A)] \subset \mathcal{V}$. De lo contrario, si existiera un $B \in [A, U_n(A)]$ tal que $B \notin \mathcal{V}$, entonces necesariamente existiría $b \in B$ tal que $b \in \mathbb{R} \setminus V$. Dado que $B \in [A, U_n(A)]$, tenemos que $b \in B \subset U_n(A)$. Por lo tanto $b \in B(a, 1/n)$ para algún $a \in A$. De donde

$$\frac{1}{n} < r \leq d(a, \mathbb{R} \smallsetminus V) \leq |a - b| < \frac{1}{n}$$

lo cual es absurdo. Por lo tanto $[A, U_n(A)] \subset \mathcal{V}$, con lo que queda demostrado que $\mathcal{C}[\mathbb{R}]$ es primero numerable. ■

Proposición 3.9 *El espacio $\mathcal{C}[\mathbb{R}]$, es un espacio separable.*

Dem. Definamos

$$\mathcal{B} = \left\{ \left[q - \frac{1}{n}, q + \frac{1}{n} \right] : q \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

y definamos también

$$\mathcal{N} = \left\{ \bigcup \mathcal{U} : \mathcal{U} \subset \mathcal{B}, 0 < |\mathcal{U}| < \omega \right\}.$$

La numerabilidad del conjunto $\mathcal{B}$ implica que $\mathcal{N}$ es numerable. Veamos que $\mathcal{N} \subset \mathcal{C}[\mathbb{R}]$ y que es denso en $\mathcal{C}[\mathbb{R}]$.

Sea $V \in \mathcal{N}$, con $V = \bigcup \mathcal{U}$ para algún $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$ finito y no vacío. Digamos que $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, ..., U_n\}$ y cada U_i es de la forma $U_i = \left[q_i - \frac{1}{n_i}, q_i + \frac{1}{n_i} \right]$.

De esta manera, V es unión finita de subconjuntos compactos no vacíos, por lo tanto V es compacto no vacío, es decir, $V \in \mathcal{C}[\mathbb{R}]$. Por lo tanto $\mathcal{N} \subset \mathcal{C}[\mathbb{R}]$. Ahora, veamos que $\mathcal{N}$ es denso en $\mathcal{C}[\mathbb{R}]$. Tomemos $[C, W]$ conjunto abierto básico $\mathcal{C}[\mathbb{R}]$.

Vamos a comenzar suponiendo que C es un intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$. Después atacaremos el caso general. Supongamos entonces que

$$C = [c_1, c_2] \subset \mathbb{R}.$$

Por la compacidad y conexidad de C, podemos encontrar un intervalo abierto $(a, b) \subset \mathbb{R}$ tal que

$$C \subset (a, b) \subset W$$

y por lo tanto ocurrirá que $[C, (a, b)] \subset [C, W]$. Esto nos permite suponer, sin pérdida de generalidad, que W ya es un intervalo abierto, digamos $W = (w_1, w_2)$. Demostraremos que $[C, W] \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$.

Sea $r = \text{mín}\{c_1 - w_1, w_2 - c_2\}$. El hecho de que $C \subset W$, nos dice que $r > 0$. Tomemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < r$.

Consideremos al conjunto $\mathcal{J} = \left\{ \left(q - \frac{1}{n}, q + \frac{1}{n} \right) : q \in C \cap \mathbb{Q} \right\}$. Por la densidad de $C \cap \mathbb{Q}$ en C, se sigue que $\mathcal{J}$ es cubierta abierta de C.

Por la compacidad de C, existen $q_1, q_2, \ldots, q_m \in C \cap \mathbb{Q}$ tales que $C \subset \bigcup_{i=1}^{m} \left(q_i - \frac{1}{n}, q_i + \frac{i}{n} \right)$.

Llamemos $F = \bigcup_{i=1}^{m} \left[q_i - \frac{1}{n}, q_i + \frac{1}{n} \right] \in \mathcal{N}$. Está claro que $C \subset F$. Ahora veamos que $F \subset W$.

Observemos que, para toda $i \in \{1, \ldots, m\}$,

$$w_1 < c_1 \leq q_i \leq c_2 < w_2.$$

De modo que

$$q_i - w_1 \geq c_1 - w_1 \geq r > \frac{1}{n}$$

o equivalentemente, $w_1 < q_i - \frac{1}{n}$. De manera análoga se obtiene que $q_i + \frac{1}{n} < w_2$. En consecuencia, para toda $i \in \{1, \ldots, m\}$

$$\left[q_i - \frac{1}{n}, q_i + \frac{1}{n}\right] \subset W.$$

Y por lo tanto $F \subset W$. Esto prueba que $[C, W] \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$.

Ahora supongamos que C es un compacto arbitrario de $\mathbb{R}$. Para cada punto $c \in C$, podemos encontrar un intervalo $[p_c, q_c]$ tal que

$$c \in (p_c, q_c) \subset [p_c, q_c] \subset W.$$

Por la compacidad de C, existe un subconjunto finito $C_0 \subset C$ tal que

$$C \subset \bigcup_{c \in C_0} (p_c, q_c) \subset \bigcup_{c \in C_0} [p_c, q_c] \subset W.$$

Ahora bien, sabemos que para cada $c \in C_0$, existe $F_c \in [[p_c, q_c], W] \cap \mathcal{N}$. Pero entonces, $F = \bigcup_{c \in C_0} F_c$ es un conjunto compacto en $\mathbb{R}$ que satisface que $F \in [C, W] \cap \mathcal{N}$. Con lo que hemos probado que $\mathcal{N}$ es un denso numerable para $\mathcal{C}[\mathbb{R}]$. Por lo tanto $\mathcal{C}[\mathbb{R}]$ es separable. ■

Parecería que ahora tenemos un candidato para dar un ejemplo de un espacio de Moore separable y no completable. ¿Será cierto que $\mathcal{C}[\mathbb{R}]$ es el espacio que hemos estado buscando? La respuesta es negativa. Si bien es cierto que $\mathcal{C}[\mathbb{R}]$ es un espacio separable y que contiene a $\mathcal{F}[\mathbb{R}]$ como subespacio, el espacio $\mathcal{C}[\mathbb{R}]$ no es un espacio de Moore. Este hecho marca una diferencia importante entre los espacios $\mathcal{C}[X]$ y $\mathcal{F}[X]$ pues, a diferencia de lo que sí ocurre con $\mathcal{F}[X]$, lo primero numerable en $\mathcal{C}[X]$ no implica que $\mathcal{C}[X]$ sea un espacio de Moore. Ahora bien, aunque $\mathcal{C}[\mathbb{R}]$ no es el espacio que estabamos buscando, sí nos era necesario conocer que $\mathcal{C}[\mathbb{R}]$ es un espacio separable y primero numerable.

Teorema 3.10 *Existe un espacio de Moore separable y no completable.*

Dem. Para demostrar este teorema describiremos a un subconjunto de $\mathcal{C}[\mathbb{R}]$, al cual le podremos asignar un desarrollo haciéndolo así un espacio de Moore. Y desde luego, tendrá la característica de ser separable pero no así la de ser completable.

Consideremos a los conjuntos

$$\mathcal{B} = \left\{\left[q - \frac{1}{n}, q + \frac{1}{n}\right] : q \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}\right\}$$

y

$$\mathcal{N} = \left\{ \bigcup \mathcal{U} : \mathcal{U} \subset \mathcal{B}, 0 < |\mathcal{U}| < \omega \right\}.$$

En la Proposición 3.9 hemos demostrado ya que $\mathcal{N}$ es un conjunto denso (y numerable) de $\mathcal{C}[\mathbb{R}]$. Ahora bien, dado que cada elemento en $\mathcal{N}$ es un conjunto infinito, se sigue que

$$\mathcal{N} \cap \mathcal{F}[\mathbb{R}] = \emptyset.$$

Definamos $X = \mathcal{N} \cup \mathcal{F}[\mathbb{R}]$ considerado como subespacio de $\mathcal{C}[\mathbb{R}]$; X será el espacio que demuestre este teorema así que no lo perdamos de vista.

La densidad de $\mathcal{N}$ en $\mathcal{C}[\mathbb{R}]$ (y por tanto en X) nos asegura que el espacio X es separable. Una vez que demostremos que X es un espacio de Moore, podremos asegurar que X no es completable pues contiene a $\mathcal{F}[\mathbb{R}]$ como subespacio.

Una observación importante es que los básicos canónicos de X tienen la forma

$$[A, U] = \{B \in X : A \subset B \subset U\}.$$

Además, $\mathcal{N}$ es un conjunto abierto de X, ya que para cualquier $M \in \mathcal{N}$ y cualquier básico canónico $[M, U]$ de X, se tiene que

$$[M, U] \cap \mathcal{F}[\mathbb{R}] = \emptyset$$

puesto que todo conjunto que contenga a M automáticamente es un conjunto infinito.

En la Proposición 3.8 vimos que $\mathcal{C}[\mathbb{R}]$ es un espacio primero numerable, propiedad que le hereda en particular a $\mathcal{N}$. Esto nos permite obtener otra característica importante del conjunto $\mathcal{N}$. Y es que, al ser $\mathcal{N}$ un conjunto numerable y a la vez ser un espacio primero numerable, es entonces un espacio segundo numerable. Recordando el teorema de metrización de Urysohn, el cual nos dice que un conjunto que segundo numerable y regular es un conjunto metrizable, podemos concluir que el conjunto $\mathcal{N}$ es metrizable. Así, supongamos que d es una métrica para $\mathcal{N}$ tal que $\tau_d = \tau_{\mathcal{N}}$.

A continuación procederemos a construir un desarrollo para X.

Para cada $A \in \mathcal{N}$, denotamos por $D(A, r) = \{B \in \mathcal{N} : d(A, B) < r\}$. El conjunto $\left\{D\left(A, \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$ forma una base local para A en X, ya que $\left\{D\left(A, \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$ es una base local para A en $(\mathcal{N}, \tau_d) = (\mathcal{N}, \tau_{\mathcal{N}})$ y $\mathcal{N}$ es abierto en X. Es importante recalcar y tener presente que para todo $A \in \mathcal{N}$ y para todo $r > 0$, el conjunto $D(A, r)$ siempre es un conjunto totalmente contenido en $\mathcal{N}$, y por tanto

$$D(A, r) \cap \mathcal{F}[\mathbb{R}] = \emptyset.$$

Ahora, numerando a los elementos de $\mathcal{N}$ como sigue: $\mathcal{N} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$, definimos $D_n = \{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Usando la notación de los conjuntos $U_n(A)$ que utilizamos en la demostración de la Proposición 3.8, definimos para cada $n, m \in \mathbb{N}$ al conjunto

$$\mathcal{V}_n(m) = \left\{ D\left(A, \frac{1}{n}\right) : A \in \mathcal{N} \right\} \cup \{[A, U_n(A)] \setminus D_m : A \in \mathcal{F}[\mathbb{R}]\}.$$

Observemos que $\mathcal{V}_n(m)$ forma una cubierta abierta de X.

Un elemento de X puede provenir de $\mathcal{N}$ o de $\mathcal{F}[\mathbb{R}]$. En caso de que sea un elemento de $\mathcal{N}$, digamos B_p, entonces $B_p \in D(B_p, \frac{1}{n}) \in \mathcal{V}_n(m)$. Si por otro lado, el elemento proviene de $\mathcal{F}[\mathbb{R}]$, digamos F, entonces F no está en $\left\{D\left(A, \frac{1}{n}\right) : A \in \mathcal{N}\right\}$. En este caso ocurre que $F \in [F, U_n(F)]$ y además, F no se encuentra en ningún elemento de la forma D_m pues $D_m \subset \mathcal{N}$. Por lo tanto $F \in [F, U_n(F)] \setminus D_m$. Y con ello queda demostrado que $\mathcal{V}_n(m)$ forma una cubierta abierta para X.

Ahora veamos que el conjunto $\{\mathcal{V}_n(m) : n, m \in \mathbb{N}\}$ es un desarrollo para X.

Mostremos que $\{st(A, \mathcal{V}_n(m)) : n, m \in \mathbb{N}\}$ forma una base local para A en X.

Sean $A \in X$ y sea $[A, V]$ abierto básico en X.

Caso 1. Supongamos que $A \in \mathcal{N}$. Podemos considerar a A como un B_k para algún $k \in \mathbb{N}$.

Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > k$, entonces $A \in D_m$. Sabemos que $[A, V] \cap \mathcal{F}[\mathbb{N}] = \varnothing$, por lo tanto $[A, V] \subset \mathcal{N}$ y así $[A, V] \in \tau_{\mathcal{D}} = \tau_d$. Entonces debe existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $D\left(A, \frac{1}{n}\right) \subset [A, V]$.

Afirmamos que $st(A, \mathcal{V}_{2n}(m)) \subset [A, V]$. Sea $U \in \mathcal{V}_{2n}(m)$, tal que $A \in U$ debemos mostrar que $U \subset [A, V]$. Como $A \in D_m$, entonces $U = D\left(C, \frac{1}{2n}\right)$ para algún $C \in \mathcal{N}$. Si $E \in D\left(C, \frac{1}{2n}\right)$, entonces

$$d(A, E) \leq d(A, C) + d(C, E) < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$$

es decir, $E \in B(A, \frac{1}{n}) \subset [A, V]$. Por lo tanto, $st(A, V_{2n}(m)) \subset [A, V]$.

Caso 2. Supongamos $A \in \mathcal{F}[\mathbb{R}]$.

De acuerdo con lo demostrado en la Propoposición 3.8, los conjuntos de la forma $[A, U_n(A)]$, con $n \in \mathbb{N}$, atestiguan que el espacio $\mathcal{C}[\mathbb{R}]$ es primero numerable. Ahora bien, como $A \in \mathcal{F}[\mathbb{R}]$, siempre existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $[A, U_n(A)] \subset [A, V]$ y para la cual podemos asegurar que, para cualesquiera $a, b \in A$, si $a \neq b$, entonces

$$B\left(a, \frac{1}{n}\right) \cap B\left(b, \frac{1}{n}\right) = \emptyset.$$

Afirmamos que $st(A, \mathcal{V}_n(1)) \subset [A, V]$. Sea $U \in \mathcal{V}_n(1)$ tal que $A \in U$. Como $D\left(E, \frac{1}{n}\right) \subset \mathcal{N}$ y $A \notin \mathcal{N}$, entonces $U \neq D\left(E, \frac{1}{n}\right)$ para toda $E \in \mathcal{N}$. Por lo tanto existe $F \in \mathcal{F}[\mathbb{R}]$ tal que $U = [F, U_n(F)] \setminus D_1$.

Demostremos que $F = A$. Ya se tiene que $F \subset A$. Luego, dado que $a \in A$, como $A \subset U_n(F)$, entonces existe $b \in F$ tal que $a \in B(b, \frac{1}{n})$, por lo cual $a \in B\left(a, \frac{1}{n}\right) \cap B\left(b, \frac{1}{n}\right)$. Por la elección de la $n \in \mathbb{N}$ se sigue que $a = b$. Por lo tanto $F = A$. Por lo tanto $U = [A, U_n(A)] \setminus D_1$.

Esto prueba que $st(A, \mathcal{V}_n(1)) = [A, U_n(A)] \setminus D_1$. Y en consecuencia $st(A, \mathcal{V}_n(1)) \subset [A, V]$

Y así queda demostrado que X es un espacio de Moore.

Por lo tanto X es un espacio de Moore separable que no es completable. ∎

Apéndice A

Funciones Cardinales

En este apéndice, definiremos algunas de las funciones cardinales más conocidas, mismas que usamos en el Capítulo 1 para determinar sus valores en el espacio $\mathcal{F}[X]$. El único objetivo de este apéndice es permitir al lector un rápido acceso a las definiciones de las funciones cardinales, no así el de presentar un estudio detallado de las mismas. En [9] puede encontrarse un amplio estudio de las funciones cardinales.

Definición A.1 *La función cardinal peso, $w(X)$, está definida como sigue:*

$$w(X) = \text{mín}\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ es base de } X\} + \omega.$$

Definición A.2 *La función densidad, $d(X)$, se define como:*

$$d(X) = \text{mín}\{|S| : S \subset X, cl_X(S) = X\} + \omega.$$

Un espacio con peso numerable es lo que conocemos como espacio segundo numerable, mientras que un espacio con densidad numerable es lo que conocemos como espacio separable.

Es muy claro que la función densidad queda acotada por el peso del espacio, es decir, $d(X) \leq w(X)$. También ocurre que $d(X) \leq |X|$ cuando X es un espacio infinito. Sin embargo, los cardinales $w(X)$ y $|X|$ no presentan un domino el uno sobre el otro, es decir, puede ocurrir tanto que $|X| < w(X)$ como $w(X) < |X|$.

La función peso es una función monótona, es decir, si Y es subespacio de X, entonces $w(Y) \leq w(X)$. Esto no ocurre con la función densidad, lo que lleva a la definición de la función densidad hereditaria, la cual sí es una función monótona.

Definición A.3 *La función densidad hereditaria para un espacio X está dada por:*

$$hd(X) = \sup\{d(Y) : Y \subset X\}.$$

Una familia celular, es una colección de conjuntos abiertos de X, distintos del vacío y ajenos dos a dos. Con esta noción podemos definir la función llamada celularidad.

Definición A.4 *La función celularidad,* $c(X)$*, se define como:*

$$c(X) = \sup\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V} \text{ es familia celular en } X\} + \omega.$$

Se dice que X es un espacio *ccc* (countable chain condition) si sucede que $c(X) = \omega$.

La celurasidad de un espacio está dominada por la densidad del mismo, es decir, $c(X) \leq d(X)$. En particular ocurre que todo espacio separable es un espacio *ccc*.

Proposición A.5 *Si* $\mathcal{U}$ *es una cubierta abierta para* X*, entonces existe una subcolección* $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$*, con* $|\mathcal{U}_0| \leq c(X)$ *tal que* $\bigcup \mathcal{U}_0$ *es denso en* X*.*

Dem. Sea $\mathcal{G}$ la colección de todos los abiertos de X que son subconjuntos de algún elemento de $\mathcal{U}$. Usando el lema de Zorn se obtiene una familia celular maximal $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}$. Luego $|\mathcal{G}_0| \leq c(X)$. Supongamos $\bigcup \mathcal{G}_0$ no es un conjunto denso de X. Tomemos $x \in X \setminus cl_X (\bigcup \mathcal{G}_0)$. Sea $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$. Como $x \notin cl_X (\bigcup \mathcal{G}_0)$, podemos encontrar un abierto $V \subset X$, con $V \subset U$, tal que $x \in V$ y

$$V \cap \bigcup \mathcal{G}_0 = \emptyset.$$

Entonces $V \in \mathcal{G}$ y la familia $\mathcal{G} \cup \{V\}$ es celular y rompe la maximalidad de $\mathcal{G}_0$. Por lo tanto $\bigcup \mathcal{G}_0$ es denso en X.

Ahora bien, para cada $V \in \mathcal{G}_0$ fijamos $U_V \in \mathcal{U}$ tal que $V \subset U_V$ y consideramos a

$$\mathcal{U}_0 = \{U_V : V \in \mathcal{G}_0\}.$$

La famila $\mathcal{U}_0$ es tal que $|\mathcal{G}_0| \leq c(X)$ y además

$$X = cl_X \left(\bigcup \mathcal{G}_0\right) \subset cl_X \left(\bigcup \mathcal{U}_0\right).$$

■

Corolario A.6 *Si* X *es ccc, entonces* X *es débilmente Lindelöf.*

Dem. Recordemos que un espacio débilmente Lindelöf es aquel en el que para toda cubierta abierta $\mathcal{U}$, existe $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ numerable cuya unión es densa en el espacio. El resultado es ahora inmediato de la Proposición A.5. ■

Definición A.7 *El grado de Lindelöf de* X*, denotado por* $L(X)$*, se define como el mínimo cardinal infinito* κ*, tal que toda cubierta abierta de* X *tiene una subcubierta de cardinalidad menor o igual que* κ*.*

Cuando $L(X) = \omega$ tenemos simplemente el concepto de espacio Lindelöf. Es muy sencillo corroborar que en general, para un espacio infinito X, ocurre que

$$L(X) \leq \text{mín}\{w(X), |X|\}.$$

Al igual que la densidad de un espacio, el grado de Lindelöf no es una función monótona.

Definición A.8 *La función grado de Lindelöf hereditario para un espacio X está dada por:*

$$hL(X) = \sup\{L(Y) : Y \subset X\}.$$

Definición A.9 *La función cardinal extensión, $e(X)$, está definida por:*

$$e(X) = \sup\{|D| : D \textit{ es subconjunto discreto y cdo de } X\} + \omega.$$

La extensión de un espacio está dominada por el grado de Lindelöf del mismo, es decir, $e(X) \leq L(X)$.

Proposición A.10 *Para cualquier espacio X, $e(X) \leq L(X)$.*

Dem. Si $D \subset X$ es un subespacio cerrado y discreto de X, entonces podemos generar una cubierta abierta de X de la forma

$$\mathcal{V} = \{U_d : d \in D\} \cup \{X \setminus D\}$$

en donde cada $U_d \subset X$ es un abierto de X tal que $U_d \cap D = \{d\}$. Para esta cubierta, existe una subcubierta $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}$, con $|\mathcal{V}| \leq L(X)$. Pero para dicha subcubierta ocurre que $U_d \in \mathcal{V}_0$ para toda $d \in D$, puesto que U_d es el único elemento de $\mathcal{U}$ que contiene a d. Esto prueba que $|D| \leq L(X)$. Por lo tanto $e(X) \leq L(X)$. ■

Una noción cercana al concepto de base de un espacio es el de red de un espacio.

Definición A.11 *Una red para un espacio topológico X, es una colección $\mathcal{N}$ de subconjuntos de X (no necesariamente abiertos), tal que todo conjunto abierto de X es la unión de elementos de $\mathcal{N}$. Es decir, para todo $U \subset X$ abierto y para cada $x \in U$, existe $A \in \mathcal{N}$ tal que*

$$x \in A \subset U.$$

A partir del concepto de red podemos definir el peso red de un espacio.

Definición A.12 *La función peso red, $nw(X)$, se define como:*

$$nw(X) = \text{mín}\{|\mathcal{N}| : \mathcal{N} \textit{ es una red en } X\} + \omega.$$

Toda base de un espacio es automáticamente una red para el mismo, lo que nos lleva a la desigualdad $nw(X) \leq w(X)$. Quizá la red más trivial que podemos definir en un espacio X es $\mathcal{N} = \{\{x\} : x \in X\}$; esto prueba que para un espacio infinito se cumple que $nw(X) \leq |X|$. El peso red a su vez domina tanto a la densidad como al grado de Lindelöf, como veremos a continuación.

Proposición A.13 *Para un espacio X se cumple que $d(X)\, L(X) \leq nw(X)$.*

Dem. Sea $\mathcal{N}$ una red para X con $|\mathcal{N}| \leq nw(X)$. Primero veamos que $d(X) \leq nw(X)$. Para cada $A \in \mathcal{N}$ fijemos $x_A \in A$ y sea

$$D = \{x_A : A \in \mathcal{N}\}.$$

El conjunto D es denso en X. En efecto, si $U \subset X$ es un abierto no vacío, entonces existe $A \in \mathcal{N}$ tal que $A \subset U$ y por lo tanto $x_A \in D \cap U$. Con esto queda probado que $d(X) \leq nw(X)$.

Ahora probemos que $L(X) \leq nw(X)$. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta para X. Consideremos la siguiente familia

$$\mathcal{N}_0 = \{A \in \mathcal{N} : \exists U \in \mathcal{U}\,(A \subset U)\}.$$

Para cada $A \in \mathcal{N}_0$ fijemos $U_A \in \mathcal{U}$ tal que $A \subset U_A$. La familia

$$\mathcal{U}_0 = \{U_A \in \mathcal{U} : A \in \mathcal{N}_0\}$$

satisface que $|\mathcal{U}_0| \leq |\mathcal{N}| \leq nw(X)$. Además $\mathcal{U}_0$ resulta ser una subcubierta. Dado $x \in X$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$. como $\mathcal{N}$ es red, debe existir $A \in \mathcal{N}$ tal que $x \in A \subset U$. Esto significa que $A \in \mathcal{N}_0$ y por tanto $U_A \in \mathcal{U}_0$ es tal que $x \in A \subset U_A$. Con lo que concluimos que $L(X) \leq nw(X)$. ■

Al igual que el peso de un espacio, el peso red también es una función monótona. Juntando este hecho con lo obtenido en la Proposición A.13, conseguimos el siguiente corolario.

Corolario A.14 *Para un espacio X se cumple que $hd(X)\, hL(X) \leq nw(X)$.*

A modo de resumen, podemos trazar una retícula con las relaciones que hemos establecido hasta el momento:

$$
\begin{array}{ccccc}
w(X) & & & & |X| \\
 & \diagdown & & \diagup & \\
 & & nw(X) & & \\
 & \diagup & & \diagdown & \\
hd(X) & & & & hL(X) \\
| & & & & | \\
d(X) & & & & L(X) \\
| & & & & | \\
c(X) & & & & e(X)
\end{array}
$$

Una función parecida al peso, es la llamada π-peso cuya definición recae en el concepto de π-base para un espacio.

Definición A.15 *Una π-base para un espacio es una familia de conjuntos abiertos, no vacíos $\mathcal{B}$ con la propiedad de que, para todo $U \subset X$ abierto no vacío, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $V \subset U$.*

La diferencia entre una π-base y una base es sútil pero trascendente. Esencialmente, a una π-base le estamos quitando la parte puntual que tienen las bases. Con ello, toda base es una π-base pero no toda π-base es una base.

Definición A.16 *La función cardinal π-peso, $\pi w(X)$, está definida como sigue:*

$$\pi w(X) = \text{mín}\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \textit{ es } \pi\textit{-base de } X\} + \omega.$$

Queda claro que $\pi w(X) \leq w(X)$. También es muy sencillo corroborar que $d(X) \leq \pi w(X)$. Sin embargo, el π-peso no guarda relación directa con el grado de Lindelöf ni con el peso red.

La siguiente función cardinal que definiremos está dada en términos de las llamadas cubiertas separadoras.

Definición A.17 *Sea $\mathcal{U}$ una cubierta para el espacio X. Decimos que $\mathcal{U}$ es separadora si para cada $x \in X$ se cumple que*

$$\{x\} = \bigcap \{U \in \mathcal{U} : x \in U\}.$$

Definición A.18 *Sea $\mathcal{U}$ una cubierta para el espacio X. Para un punto $x \in X$, definimos:*

$$ord(x, \mathcal{U}) = |\{U \in \mathcal{U} : x \in U\}|.$$

Definición A.19 *La función peso punto separador, $psw(X)$, se define como el mínimo cardinal κ para el cual existe una cubierta abierta separadora $\mathcal{U}$, tal que $ord(x, \mathcal{U}) \leq \kappa$ para todo $x \in X$.*

Una característica importante del peso punto separador es que sólo está definida para espacios que al menos poseen el axioma de separación T_1, a diferencia de las demás funciones cardinales que hemos definido en las cuales la separación del espacio no entra en juego para su definición. La razón de esto es muy sencilla: un espacio X es T_1 si y sólo si X tiene una cubierta separadora.

Las funciones cardinales descritas anteriormente se definen basándonos en propiedades topológicas que dan información global del espacio. A continuación, definiremos importantes funciones cardinales que se basan en propiedades topológicas locales.

Definición A.20 *Sea (X, τ_X) un espacio topológico y $x \in X$. Sea $\mathcal{V}$ una colección de conjuntos abiertos no vacíos de X.*
i) La familia $\mathcal{V}$ es una π-base local para x si para toda vecindad abierta U de x, existe $V \in \mathcal{V}$, tal que $V \subset U$.
ii) Si $\mathcal{V}$ cumple i) y además, $x \in V$ para cualquier $V \in \mathcal{V}$, entonces $\mathcal{V}$ es una base local para x.
iii) Si $\{x\} = \bigcap \mathcal{V}$, entonces $\mathcal{V}$ es llamada una pseudobase para x.

A partir de los conceptos anteriores podemos definir los siguientes números cardinales para cada $x \in X$

$$\mathcal{X}(x, X) = \text{mín}\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V} \text{ es base local para } x\},$$

$$\pi\mathcal{X}(x, X) = \text{mín}\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V} \text{ es } \pi\text{-base local para } x\},$$

$$\psi(x, X) = \text{mín}\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V} \text{ es pseudobase para } x\}.$$

Ahora definimos las funciones cardinales locales

Definición A.21 *La función carácter, $\mathcal{X}(X)$, se define como:*

$$\mathcal{X}(X) = \sup\{\mathcal{X}(x, X) : x \in X\} + \omega.$$

Definición A.22 *La función π-carácter, $\pi\mathcal{X}(X)$, se define como:*

$$\pi\mathcal{X}(X) = \sup\{\pi\mathcal{X}(x, X) : x \in X\} + \omega.$$

Definición A.23 *La función pseudocarácter, $\psi(X)$, se define como:*

$$\psi(X) = \sup\{\psi(x, X) : x \in X\} + \omega.$$

Vale la pena destacar que el pseudocarácter de un espacio está definido si y sólo si el espacio es T_1. Tanto el carácter como el pseudocarácter son funciones monótonas, sin embargo, el π-carácter no lo es.

Es claro que toda base local de un punto es a su vez una π-base local y una pseudobase (en el caso de los espacios T_1). De manera que $\pi\mathcal{X}(X) \leq \mathcal{X}(X)$ y $\psi(X) \leq \mathcal{X}(X)$. En general no existe una relación directa entre el π-carácter y el pseudocarácter.

Un espacio con carácter numerable es lo que conocemos como un espacio primero numerable.

Si $x \in X$ es tal que $\psi(x, X) = \omega$, entonces x tiene una pseudobase numerable, lo que significa que el conjunto $\{x\}$ puede verse como la intersección numerable de conjuntos abiertos, es decir, $\{x\}$ es un conjunto G_δ del espacio. De modo que, cuando un espacio tiene pseudocarácter numerable, todos los conjuntos unipuntuales son conjuntos G_δ del espacio. La definición de espacio con pseudocarácter numerable fue dada de esta manera en el Capítulo 1.

Proposición A.24 *Para un espacio infinito X se cumple que $w(X) \leq \mathcal{X}(X)|X|$.*

Dem. Si para cada $x \in X$ fijamos una base local $\mathcal{B}_x$, entonces $\mathcal{B} = \bigcup_{x\in X} \mathcal{B}_x$ es una base para X. El resultado es claro ahora. ■

Proposición A.25 *Para un espacio T_1, X, se cumple que $\psi(X) \leq psw(X)$.*

Dem. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta separadora tal que, para todo $x \in X$, $ord(x, \mathcal{U}) \leq psw(X)$. Entonces, para cada $x \in X$, la familia

$$\mathcal{U}_x = \{U \in \mathcal{U} : x \in U\}$$

es una pseudobase para x tal que $|\mathcal{U}_x| = ord(x, \mathcal{U}) \leq psw(X)$. Por lo tanto $\psi(x, X) \leq psw(X)$ para todo $x \in X$. En consecuencia $\psi(X) \leq psw(X)$. ■

Proposición A.26 *Si X es Hausdorff, entonces $\psi(X) \leq hL(X)$.*

Dem. Sea X un espacio Hausdorff. Sea $p \in X$. Para cada $q \in X \setminus \{p\}$, existen V_q y U_q abiertos ajenos en X tales que, $q \in V_q$ y $p \in U_q$. Sea $\mathcal{U} = \{V_q : q \in X \setminus \{p\}\}$. Tenemos que $\mathcal{U}$ es cubierta de $X \setminus \{p\}$, de manera que existe $A \subset X \setminus \{p\}$, con $|A| \leq hL(X)$, tal que

$$X \setminus \{p\} \subset \bigcup_{q\in A} V_q.$$

Sea $\mathcal{B} = \{U_q : V_q \in A\}$. Afirmamos que $\mathcal{B}$ es pseudobase para p. Si lo es, ya terminamos puesto que tendríamos que

$$\psi(p, X) \leq |\mathcal{B}| \leq |A| \leq hL(X),$$

lo cual implica que $\psi(X) \leq hL(X)$, pues p fue arbitrario.

Veamos que $\mathcal{B}$ es pseudobase para p. Por construcción, $p \in U_q$ para todo $U_q \in \mathcal{B}$. Supongamos que existe $x \in \bigcap \mathcal{B}$, con $x \neq p$. Como $x \neq p$, existe $q \in A$ tal que $x \in V_q$. Pero entonces $x \in U_q \cap V_q$, es decir, $U_q \cap V_q \neq \emptyset$, lo que no es posible. Por lo tanto $\bigcap \mathcal{B} = \{p\}$. Por lo tanto $\mathcal{B}$ es pseudobase para p. ■

Proposición A.27 *Si X es compacto Hausdorff, entonces, $\psi(X) = \mathcal{X}(X)$.*

Dem. Únicamente necesitamos probar que $\mathcal{X}(X) \leq \psi(X)$. Sean $p \in X$ y $\mathcal{V}$ una pseudobase para p, con $|\mathcal{V}| \leq \psi(p, X)$.

Recordemos que todo espacio compacto y Hausdorff es, en particular, un espacio regular. De manera que para cada $V \in \mathcal{V}$ podemos tomar un abierto $U_V \subset X$, tal que $p \in U_V \subset cl_X(U_V) \subset V$. Obtenemos así que

$$\{x\} \subset \bigcap_{V\in\mathcal{V}} cl_X(U_V) \subset \bigcap_{V\in\mathcal{V}} V = \{x\}.$$

Ahora bien, dado un abierto $W \subset X$ tal que $p \in W$, para cada $q \in X \setminus W$, existe $V_q \in \mathcal{V}$ tal que $q \notin cl_X\left(U_{V_q}\right)$. Así, el conjunto $\left\{X \setminus cl_X\left(U_{V_q}\right) : q \in X \setminus W\right\}$ es una cubierta abierta del compacto $X \setminus W$. Por lo tanto, existe $F \subset X \setminus U$ finito tal que

$$X \setminus W \subset \bigcup_{q \in F} \left(X \setminus cl_X\left(U_{V_q}\right)\right).$$

Entonces

$$\bigcap_{q \in F} U_{V_q} \subset \bigcap_{q \in F} cl_X\left(U_{Vq}\right) \subset W.$$

.

Por lo anterior, la familia

$$\mathcal{B} = \left\{\bigcap_{V \in \mathcal{F}} U_V : \mathcal{F} \subset \mathcal{V}, 0 < |\mathcal{F}| < \omega\right\}$$

es base local para p en X y $|\mathcal{B}| \leq |\mathcal{V}| \leq \psi(p, X)$. Por lo tanto $\mathcal{X}(X) \leq \psi(X)$. ■

La última función cardinal que presentaremos es la llamada *estrechez de un espacio*. Ésta también es una función cardinal local.

Definición A.28 *Para $x \in X$ definimos el cardinal $t(x, X)$ como:*

$$t(p, X) = \text{mín}\{\kappa : \forall Y \subset X, \text{ con } p \in cl_X Y, \exists A \subset Y, \text{ con } |A| \leq \kappa \text{ y } p \in cl_X A\}.$$

Definimos la función estrechez como

$$t(X) = \sup\{t(p, X) : p \in X\} + \omega.$$

Es fácil comprobar que la función estrechez es monótona y satisface que $t(X) \leq \mathcal{X}(X)$. No existe relación directa entre la estrechez y el π-carácter ni el pseudocarácter. Sin embargo, es posible demostrar que, para un espacio compacto y Hausdorff, $t(X) = h\pi\mathcal{X}(X)$, donde $h\pi\mathcal{X}(X)$ denota el π-carácter hereditario de X (ver [9]).

Apéndice B

Compactación de Wallman

En este segundo apéndice describimos una construcción detallada de la compactación Wallman. Al final del apéndice únicamente dejaremos enunciado algunas de sus propiedades más impotantes.

Para cada espacio T_1, X, definiremos un espacio T_1 compacto wX que contiene a X como subespacio denso y que tiene como propiedad que cualquier mapeo continuo $f : X \to Z$, con Z un espacio compacto, se puede extender a un mapeo continuo $F : X \to Z$.

Sea X un espacio T_1. Denotamos por $\mathcal{L}(X)$ a la familia de todos los subconjuntos cerrados de X.

Definición B.1 *Sea X un espacio topológico T_1. Definimos un filtro en $\mathcal{L}(X)$ como una familia no vacía $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}(X)$ con las siguientes propiedades:*
i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
ii) Si A_1, $A_2 \in \mathcal{F}$, entonces $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F}$.
iii) Si $A \in \mathcal{F}$ y $B \in \mathcal{L}(X)$ son tales que $A \subset B$, entonces $B \in \mathcal{F}$.

A un filtro en $\mathcal{L}(X)$ con la propiedad de ser maximal respecto a la contención, lo llamaremos ultrafiltro en $\mathcal{L}(X)$. Se sigue del lema de Teichmüler-Tukey que toda familia de subconjuntos cerrados de X que posee la propiedad de intersección finita, está contenida en un ultrafiltro en $\mathcal{L}(X)$; generalmente este ultrafiltro no es único. Denotaremos por $\mathcal{U}(X)$ a la familia de todos los utlrafiltros en $\mathcal{L}(X)$.

Proposición B.2 *Sean $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathcal{U}(X)$, entonces se cumple lo siguiente:*
i) Si $B \in \mathcal{L}(X)$ es tal que, para toda $A \in \mathcal{F}$, $B \cap A \neq \varnothing$, entonces $B \in \mathcal{F}$.
ii) Si A, $B \in \mathcal{L}(X)$ son tales que $A \cup B \in \mathcal{F}$, entonces $A \in \mathcal{F}$ ó $B \in \mathcal{F}$.
iii) $\mathcal{F} \neq \mathcal{G}$ si y sólo si existen $A \in \mathcal{F}$ y $B \in \mathcal{G}$ tales que $A \cap B = \varnothing$.

Dem. i) Sea $B \in \mathcal{L}(X)$ tal que, para toda $A \in \mathcal{F}$, $B \cap A \neq \varnothing$. Entonces la familia $\mathcal{F} \cup \{B\}$ tiene la propiedad de intersección finita y por lo tanto, existe $\mathcal{F}_0 \in \mathcal{U}(X)$ tal que $\mathcal{F} \cup \{B\} \subset \mathcal{F}_0$. Por la maximiladad de $\mathcal{F}$ se sigue que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$, lo que implica que $B \in \mathcal{F}$.

ii) Sean A, $B \in \mathcal{L}(X)$ tales que $A \cup B \in \mathcal{F}$. Supongamos que $A \notin \mathcal{F}$. Por el inciso *i*) concluimos que existe $C \in \mathcal{F}$ tal que $A \cap C = \varnothing$.

Ahora bien, como $A \cup B \in \mathcal{F}$, entonces

$$(A \cup B) \cap C \in \mathcal{F}.$$

Pero $(A \cup B) \cap C = B \cap C$, de manera que $B \cap C \in \mathcal{F}$. Finalmente, como $B \in \mathcal{L}(X)$ y $B \cap C \subset B$, se sigue que $B \in \mathcal{F}$.

iii) Primero supongamos que $\mathcal{F} \neq \mathcal{G}$. Por la maximalidad de $\mathcal{F}$, se sigue que $\mathcal{F} \nsubseteq \mathcal{G}$, es decir, existe $A \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{G}$. Del inciso *i*) aplicado al ultrafiltro $\mathcal{G}$, concluimos que existe $B \in \mathcal{G}$ tal que $A \cap B = \varnothing$.

Recíprocamente, si $A \in \mathcal{F}$ y $B \in \mathcal{G}$ tales que $A \cap B = \varnothing$, entonces $A \notin \mathcal{G}$ (de otra forma $\emptyset \in \mathcal{G}$). Por lo tanto $\mathcal{F} \neq \mathcal{G}$. ■

Para cada $x \in X$ podemos definir el siguiente conjunto:

$$\mathcal{F}_x = \{A \in \mathcal{L}(X) : x \in A\}.$$

Vale la pena notar que, como estamos trabajando con espacios T_1, $\{x\} \in \mathcal{L}(X)$. De manera que siempre ocurre que $\{x\} \in \mathcal{F}_x$.

Proposición B.3 *Para cada $x \in X$, el conjunto $\mathcal{F}_x$ es un ultrafiltro en $\mathcal{L}(X)$.*

Dem. Primero notemos que el vacío no es elemento de $\mathcal{F}_x$ pues $x \notin \varnothing$.

Ahora, sean $A, B \in \mathcal{L}(X)$ tales que $A \subset B$ y $A \in \mathcal{F}_x$. Entonces $x \in A \subset B$, lo que implica que $x \in B$ y así $B \in \mathcal{F}_x$.

Finalmente, sean $A, B \in \mathcal{F}_x$. Entonces $x \in A$ y $x \in B$, lo que implica que $x \in A \cap B$ y así $A \cap B \in \mathcal{F}_x$. Con esto hemos terminado de probar que $\mathcal{F}_x$ es un filtro en $\mathcal{L}(X)$.

Para ver que $\mathcal{F}_x$ es un ultrafiltro en $\mathcal{L}(X)$, tomemos $\mathcal{G} \subset \mathcal{L}(X)$ un filtro tal que $\mathcal{F}_x \subset \mathcal{G}$. Dado $A \in \mathcal{G}$, ocurre que

$$\{x\} \cap A \neq \emptyset$$

esto debido a que $\{x\} \in \mathcal{F}_x \subset \mathcal{G}$. Por lo tanto $x \in A$, es decir, $A \in \mathcal{F}_x$. Por lo tanto $\mathcal{F}_x \in \mathcal{U}(X)$. ■

Claramente podemos notar que $\bigcap \mathcal{F}_x = \{x\}$. Ahora, observemos que si $\mathcal{G} \in \mathcal{U}(X)$ es tal que $x \in \bigcap \mathcal{G}$, sucede que $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}_x$. Pero como $\mathcal{G}$ y $\mathcal{F}_x$ son ultrafiltros, se sigue que $\mathcal{G} = \mathcal{F}_x$. Por lo anterior, podemos concluir que cada ultrafiltro $\mathcal{G} \in \mathcal{U}(X)$, satisface que $|\bigcap \mathcal{G}| \leq 1$.

Definición B.4 *Si $\mathcal{F} \in \mathcal{U}(X)$ satisface que $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$, diremos que $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro libre. A la colección de todos los ultrafiltros libres en $\mathcal{L}(X)$ la denotaremos por $\mathcal{U}_0(X)$.*

De acuerdo con lo que hemos probado, un ultrafitro $\mathcal{G} \in \mathcal{U}(X)$, es libre o existe un único $x \in X$ tal que $\mathcal{G} = \mathcal{F}_x$.

Dado un espacio topológico X, denotamos por wX al conjunto

$$wX = X \cup \mathcal{U}_0(X).$$

Vamos a definir dos clases de subconjuntos en wX:

1) Para cada conjunto abierto $U \subset X$, definimos:

$$U^* = U \cup \{\mathcal{F} \in \mathcal{U}_0(X) : \exists A \in \mathcal{F}\,(A \subset U)\}.$$

2) Para cada conjunto cerrado $F \subset X$, definimos:

$$F_* = F \cup \{\mathcal{F} \in \mathcal{U}_0(X) : F \in \mathcal{F}\}.$$

Los conjuntos U^* y F_* guardan propiedades muy importantes, a partir de las cuales se define la compactación de Wallman. En particular vale la pena notar que $\emptyset^* = \emptyset_* = \emptyset$, mientras que $X^* = X_* = wX$.

Proposición B.5 *Sean $U \subset X$ un subconjunto abierto y $C \subset X$ un subconjunto cerrado. Las siguientes afirmaciones se cumplen:*
a) $U^* = wX \setminus (X \setminus U)_*$
b) $C_* = wX \setminus (X \setminus C)^*$

Dem. *a)* Sea $p \in U^*$. Si $p \in X$, entonces $p \in U$. De manera que $p \notin X \setminus U \subset (X \setminus U)_*$. Por otro lado, si $p \notin X$, entonces $p \in \mathcal{U}_0(X)$. Por definición de U^*, existe $A \in p$ tal que $A \subset U$. De manera que, $A \cap (X \setminus U) = \emptyset$, lo que implica que $X \setminus U \notin p$. Por lo tanto $p \notin (X \setminus U)_*$.

Para la contención contraria, sea $p \in wX \setminus (X \setminus U)_*$. Si $p \in X$, entonces $p \notin X \setminus U$, es decir, $p \in U \subset U^*$. Si $p \notin X$, entonces $p \in \mathcal{U}_0(X)$. Como $p \notin (X \setminus U)_*$, entonces $X \setminus U \notin p$. Dado que $p \in \mathcal{U}_0(X)$, existe $A \in p$ tal que $A \cap (X \setminus U) = \emptyset$, lo que significa que $A \subset U$. Por definición de U^* obtenemos que $p \in U^*$.

b) Para probar la igualdad $C_* = wX \setminus (X \setminus C)^*$, aplicamos el inciso *a)* al abierto $U = X \setminus C$. Entonces:

$$U^* = wX \setminus (X \setminus U)_* = wX \setminus C_*$$

De donde, $C_* = wX \setminus U^* = wX \setminus (X \setminus C)^*$. ■

Proposición B.6 *Sean $C_1, C_2 \subset X$ subconjuntos cerrados de X. Las siguientes afirmaciones se cumplen:*
a) $(C_1 \cap C_2)_* = C_{1*} \cap C_{2*}$.
b) $(C_1 \cup C_2)_* = C_{1*} \cup C_{2*}$.

Dem. *a*) Observemos que:

$$\begin{aligned}(C_1 \cap C_2)_* &= (C_1 \cap C_2) \cup \{\mathcal{F} \in \mathcal{U}_0(X) : C_1 \cap C_2 \in \mathcal{F}\} \text{ y} \\ C_{1*} \cap C_{2*} &= (C_1 \cap C_2) \cup \{\mathcal{F} \in \mathcal{U}_0(X) : C_1, C_2 \in \mathcal{F}\}.\end{aligned}$$

Por lo cual, solo es necesario revisar la doble contención de los elementos que son ultrafiltros.

Sea $\mathcal{F} \in (C_1 \cap C_2)_* \cap \mathcal{U}_0(X)$. Entonces $C_1 \cap C_2 \in \mathcal{F}$. Como $C_1 \cap C_2 \subset C_1$ y $C_1 \cap C_2 \subset C_2$, se tiene que tanto C_1 como C_2 son elementos de $\mathcal{F}$. Por lo tanto $\mathcal{F} \in C_{1*} \cap C_{2*}$.

Para la otra contención, sea $\mathcal{F} \in (C_{1*} \cap C_{2*}) \cap \mathcal{U}_0(X)$. Tenemos que tanto C_1 como C_2 son elementos de $\mathcal{F}$ y así $C_1 \cap C_2 \in \mathcal{F}$. Por lo tanto $\mathcal{F} \in (C_1 \cap C_2)_*$.

b) Observemos que:

$$\begin{aligned}(C_1 \cup C_2)_* &= (C_1 \cup C_2) \cup \{G \in \mathcal{G}_0(X) : C_1 \cup C_2 \in G\} \text{ y} \\ C_{1*} \cup C_{2*} &= (C_1 \cup C_2) \cup \{G \in \mathcal{G}_0(X) : C_1 \in G \text{ o } C_2 \in G\}.\end{aligned}$$

Igual que en el inciso anterior, basta con verificar la doble contención en los elementos que son ultrafiltros.

Sea $\mathcal{F} \in (C_1 \cup C_2)_* \cap \mathcal{U}_0(X)$. Tenemos que $C_1 \cup C_2 \in \mathcal{F}$. Usando el inciso *ii*) de la Proposición B.2, tenemos que $C_1 \in \mathcal{F}$ o $C_2 \in \mathcal{F}$. Por lo tanto $G \in C_{1*} \cup C_{2*}$.

Por otro lado, sea $\mathcal{F} \in (C_{1*} \cup C_{2*}) \cap \mathcal{U}_0(X)$. Tenemos que C_1 o C_2 es elemento de $\mathcal{F}$, sin importar el caso, se sigue que $C_1 \cup C_2 \in \mathcal{F}$. Por lo tanto $\mathcal{F} \in (C_1 \cup C_2)_*$. ∎

Proposición B.7 *Sean $U_1, U_2 \subset X$ subconjuntos abiertos de X. Las siguientes afirmaciones se cumplen:*
a) $(U_1 \cup U_2)^* = U_1^* \cup U_2^*$.
b) $(U_1 \cap U_2)_* = U_1^* \cap U_2^*$.

Dem. Para demostrar estas igualdades utilizaremos las leyes de De Morgan así como las proposiciones B.5 y B.6.

a)

$$\begin{aligned}(U_1 \cup U_2)^* &= wX \setminus (X \setminus (U_1 \cup U_2))_* \\ &= wX \setminus [(X \setminus U_1) \cap (X \setminus U_2)]_* \\ &= wX \setminus [(X \setminus U_1)_* \cap (X \setminus U_2)_*] \\ &= [wX \setminus (X \setminus U_1)_*] \cup [wX \setminus (X \setminus U_2)_*] \\ &= U_1^* \cup U_2^*.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
(U_1 \cap U_2)_* &= wX \setminus (X \setminus (U_1 \cap U_2))_* \\
&= wX \setminus [(X \setminus U_1) \cup (X \setminus U_2)]_* \\
&= wX \setminus [(X \setminus U_1)_* \cup (X \setminus U_2)_*] \\
&= [wX \setminus (X \setminus U_1)_*] \cap [wX \setminus (X \setminus U_2)_*] \\
&= U_1^* \cap U_2^*.
\end{aligned}$$

■

Corolario B.8 *Si $U_1, U_2 \subset X$ son abiertos ajenos, entonces $U_1^* \cap U_2^* = \emptyset$.*

La Proposición B.7 nos dice que la familia formada por todos los subconjuntos U^*, donde U es un abierto de X, forma una base para alguna topología en wX.

Definición B.9 *Sea X un espacio topológico. Definimos la compactación de Wallman de X, como el espacio $wX = X \cup \mathcal{U}_0(X)$, dotado de la topología que tiene por base a la familia*

$$\{U^* \subset wX : U \subset X \text{ es abierto en } X\}.$$

Vale la pena recalcar que, gracias a la Proposición B.5, los conjuntos C_* son cerrados en wX y la familia

$$\{F_* \subset wX : F \subset X \text{ es cerrado en } X\}$$

forma una base para los cerrados de wX.

Teorema B.10 *Para todo espacio X, su compactación de Wallman, wX, es un espacio T_1, compacto que contiene a X como un subespacio denso.*

Dem. El hecho de que X sea subespacio denso de wX se sigue a partir de la definición de U^* y el hecho de que $U^* = \emptyset$ si y sólo si $U = \emptyset$.

Para ver que wX es T_1, hay que probar que los conjuntos unipuntuales son cerrados en wX.

Sea $p \in wX$. Si $p \in X$, entonces $\{p\} = \{p\}_*$, esto es gracias a que el único ultrafiltro en $\mathcal{L}(X)$ que contiene a $\{p\}$ es $\mathcal{F}_p = \{A \in \mathcal{L}(X) : p \in A\}$ y éste no es un ultrafiltro libre. Ahora supongamos que $p \notin X$, es decir, $p \in \mathcal{U}_0(X)$. En este caso notemos que

$$\{p\} = \bigcap \{F_* : F \in p\}.$$

En efecto, esta desigualdad se cumple porque dado $q \in \bigcap \{F_* : F \in p\}$, se tiene en primer lugar que $q \in \mathcal{U}_0(X)$, puesto que

$$X \cap \bigcap \{F_* : F \in p\} = \bigcap \{F : F \in p\} = \bigcap p = \emptyset.$$

Además, si $p \neq q$, entonces existirían $A \in p$ y $B \in q$ ajenos, lo cual implicaría que $q \notin A_*$. Con esto concluimos que wX es T_1.

Para probar la compacidad de wX, tomemos una familia de cerrados $\mathcal{H}$ contenida en wX con la propiedad de intersección finita. Lo que debemos demostrar es que $\bigcap \mathcal{H} \neq \emptyset$.

Para cada $F \in \mathcal{H}$, existe una colección de cerrados $\mathcal{C}_F \subset \mathcal{L}(X)$ tal que

$$F = \bigcap \{C_* : C \in \mathcal{C}_F\}.$$

Como $\mathcal{H}$ tiene la propiedad de intersección finita, se sigue de la Proposición B.6 y del hecho de que $C_* = \emptyset$ si y sólo si $C = \emptyset$, que la familia

$$\mathcal{C} = \bigcup_{F \in \mathcal{H}} \mathcal{C}_F$$

también tiene la propiedad de intersección finita. De manera que existe un ultrafiltro $\mathcal{F} \in \mathcal{U}(X)$ tal que $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$.

Ahora distangamos dos casos. Si $\mathcal{F}$ no es un ultrafiltro libre, entonces existe $x \in X$ tal que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_x$. Lo que implica que

$$\{x\} = \bigcap \mathcal{F}_x = \bigcap \mathcal{F} \subset \bigcap \mathcal{C}.$$

Pero $X \cap \bigcap \mathcal{H} = \bigcap \mathcal{C}$, así que $\bigcap \mathcal{H} \neq \emptyset$.

Por otro lado, si $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro libre, como $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$, entonces para todo $C \in \mathcal{C}$ se tiene que $\mathcal{F} \in C_*$. Y en consecuencia

$$\mathcal{F} \in \bigcap \mathcal{H}.$$

Por lo tanto wX es un espacio compacto. ■

Para la compactación de Wallman tenemos dos importantes resultados cuyas pruebas pueden consultarse en [6].

Teorema B.11 *Para un espacio X, la compactación de Wallman de X tiene como propiedad que todo mapeo continuo $f : X \to Z$, con Z un espacio compacto, se puede extender a un mapeo continuo $F : wX \to Z$.*

Teorema B.12 *La compactación de Wallman, wX, es un espacio Hausdorff si y sólo si X es normal.*

Corolario B.13 *Para todo espacio X normal, wX es equivalente a la compactación de Stone-Cech βX, es decir, existe un homeomorfismo $f : wX \to \beta X$ tal que $f \restriction_X = id_X$.*

Bibliografía

[1] Casarrubias F., Tamariz Á, *Elementos de Topología General*, Aportaciones Matemáticas 37 (2012).

[2] Creede G., *Concerning semi-stratifiable spaces*, Pacific Journal of Mathematics 32, No. 1 (1970), 47-54.

[3] Creede G., *Embedding of Complete Moore Spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 28, No. 2 (1971), 609-612.

[4] Daniels P., *Pixley-Roy spaces over subsets of the reals*, Topology and its Applications 29 (1988), 93-106.

[5] van Douwen E., *The Pixley-Roy topology on spaces of subsets*, in: Reed G. Set-Theoretic Topology (Academic Press, New York), 111-134.

[6] Engelkind R., *General Topology*, Sigma Series in Pure Mathematics, vol 6, Heldermann Verlag Berlin (1989).

[7] Fitzpatrick B., *On dense subspaces of Moore spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 16, No. 6 (1992), 1324-1328.

[8] Green J., *Moore-closed spaces, completeness and centered bases*, Topology and its Applications 4 (1974), 297-313.

[9] Hodel R., *Cardinal Functions I*, in: Handbook of Set-Theoretic Topology, Elsevier Science Publishers (1984).

[10] Lutzer D., *Pixley-Roy Topology*, Topology Proceedings 3 (1978) 139-158.

[11] Pixley C., Roy P., *Uncompletable Moore Spaces*, Proc. 1969, Auburn Topology Conf., (1969), 75-85.

[12] Porter J., Woods R., *Extensions and Absolutes of Hausdorff Spaces*, Springer–Verlag New York, Inc. (1988).

[13] Przymusiuski T., *Normality and Paracompactness of Pixley-Roy Hyperspaces opology*, Fund. Math. 113 (1981), 201-219.

[14] Reed G., *Concerning Completable Moore Spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 36, No. 2 (1972), 591-596.

[15] Sakai M., *Cardinal functions of Pixley-Roy hyperspaces*, Topology and its Applications 159 (2012), 3080-3088.

[16] Sakai S., *Cardinal functions on Pixley-Roy hyperspaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 89 (1983), 336-340.

[17] Willard S., *General Topology*, Dover Publications, Inc. (2004).