# Universidad Nacional Autónoma de México

## Facultad de Ciencias

Polinomios ortogonales que verifican ecuaciones diferenciales

# T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Andrea Monserrat Ruiz Gómez

TUTOR

Dr. Manuel Domínguez de la Iglesia

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2019

# Agradecimientos

Al Dr. Manuel Domínguez de la Iglesia, por dirigir este trabajo, por todo lo que me ha enseñado y su infinita paciencia.

A mis padres, Artemio y Luz María, por su apoyo, aliento y enormes esfuerzos.

A mis sinodales, les agradezco por sus consejos y sugerencias.

A Fer, por estar ahí siempre a mi lado y compartir tantas matemáticas conmigo.

A todos los que me acompañaron en estos años de estudio.

Este trabajo fue apoyado por el Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) mediante:

- Proyecto UNAM IA100515 titulado "Ortogonalidad y aproximación: teoría, aplicaciones y generalizaciones."
- Proyecto UNAM IA102617 titulado "Biespectralidad de funciones especiales ortogonales: teoría y aplicaciones a procesos estocásticos."

Agradezco a la DGAPA-UNAM por las becas recibidas.

# Índice general

# Introducción

En 1929 S. Bochner [4] consideró el problema de clasificar todas las familias de polinomios ortogonales que son funciones propias de un operador diferencial de segundo orden con coeficientes polinómicos. Determinó que las únicas familias eran los polinomios ortogonales clásicos de Hermite, Laguerre y Jacobi. El objetivo principal de esta tesis es estudiar el problema de Bochner aplicado a polinomios ortogonales matriciales, que son una extensión donde los coeficientes de los polinomios son matrices cuadradas.

Desde sus principios los polinomios ortogonales han sido una herramienta de gran utilidad en el análisis de problemas en Física y Matemáticas. La primera familia de polinomios ortogonales la introdujo A. M. Legendre en 1782 estudiando la atracción de un cuerpo por un esfera. Posteriormente, en 1826 K. G. Jacobi introdujo una familia de polinomios ortogonales que incluía a los polinomios introducidos por Legendre. En 1851, O. Rodrigues expresó estos polinomios en términos de la conocida fórmula de Rodrigues. La familia de los polinomios de Hermite aparece en 1810, en el trabajo de teoría de probabilidades de P. S. Laplace y fueron estudiados más a detalle por P. L. Chebyshev en 1859. Posteriormente, en 1864, Hermite publica acerca de estos polinomios junto con el caso de varias variables, sin tener conocimiento previo de los trabajos de Laplace y Chebyshev. Por último, los polinomios de Laguerre (para $\alpha = 0$) fueron introducidos por E. N. Laguerre en 1879. Más tarde N. Y. Sonin realizó la generalización de dichos polinomios para $\alpha > -1$. No fue hasta la segunda mitad del siglo XIX cuando surge la teoría general sobre polinomios ortogonales, cuyos pioneros fueron T. J. Stieltjes y P. L. Chebyshev.

Los polinomios ortogonales matriciales fueron considerados inicialmente por M. G. Kreĭn en 1949. Durante los últimos años se han estudiado propiedades que extienden los resultados conocidos en el caso escalar. En 1997, A. J. Durán [9] considera el problema de Bochner para el caso matricial, sin embargo no encontró ningún ejemplo interesante. En los últimos años se han desarrollado distintos métodos para encontrar ejemplos de familias de polinomios ortogonales matriciales que verifican una ecuación diferencial de segundo orden con polinomios matriciales como coeficientes. En este trabajo nos centraremos en uno de esos métodos estudiado inicialmente en [12] y extendido posteriormente en [10]. Este método consiste en resolver un conjunto de ecuaciones de simetría matriciales, que constituyen la versión matricial de la ecuación de Pearson.

En el primer capítulo se estudian los polinomios ortogonales clásicos. Presentamos el concepto de ortogonalidad, así como propiedades que satisface cualquier sucesión de polinomios ortogonales. Se obtiene una demostración del problema de Bochner en términos de la denominada ecuación de Pearson. Además se incluyen propiedades para las familias clásicas, una de ellas es que son las únicas que satisfacen una fórmula de Rodrigues.

El segundo capítulo es de carácter introductorio al caso matricial. Extendemos el concepto de ortogonalidad y las propiedades generales de los polinomios ortogonales vistas en el primer capítulo a este nuevo contexto. Además daremos conceptos necesarios para los siguientes capítulos.

El tercer capítulo es de gran importancia en la tesis, donde consideramos el problema de Bochner para un operador diferencial de segundo orden con polinomios matriciales como coeficientes. Se convertirán las condiciones de simetría sobre el operador diferencial en ecuaciones diferenciales matriciales, con algunas condiciones de frontera. En este capítulo se muestran métodos generales para resolver dichas ecuaciones. Bajo el supuesto de que el coeficiente principal del operador diferencial es escalar, como solución de las ecuaciones de simetría encontraremos un operador diferencial simétrico de segundo orden para pesos matriciales de tipo Hermite de la forma

$$e^{-x^2}e^{Ax}e^{A^*x}, \qquad e^{-x^2}e^{Bx^2}e^{B^*x^2}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

de tipo Laguerre de la forma

$$x^\alpha e^{-x}e^{Ax}e^{A^*x}, \qquad x^\alpha e^{-x}x^B x^{B^*}, \qquad x \in [0,\infty), \quad \alpha > -1,$$

de tipo Jacobi

$$(1+x)^\alpha(1-x)^\beta(1\pm x)^A(1\pm x)^{A^*}, \quad x \in [-1,1], \quad \alpha,\beta > -1,$$

donde $A, B$ en cada caso son matrices específicas de dimensión $N \times N$ que dependen de $N-1$ parámetros. Para el caso en el que el coeficiente principal del operador diferencial no es escalar, el método también se extiende. En esta tesis se aplicará a los pesos matriciales de la forma

$$\begin{aligned}&e^{-x^2}e^{Ax}e^{A^*x}, \qquad x \in \mathbb{R},\\ &x^\alpha e^{-x}e^{Ax}x^B x^{B^*}e^{A^*x}, \qquad x \in [0,\infty),\ \alpha > -1,\end{aligned}$$

para ciertas matrices cuadradas $A$, $B$ que dependen ahora de un sólo parámetro. Frente a las tres únicas familias del caso escalar, en el caso matricial existe una gran cantidad de ejemplos. La existencia de matrices singulares y la no conmutatividad hacen el caso matricial mucho más difícil y de hecho todavía no existe una clasificación formal de estos ejemplos.

Finalmente, en el capítulo 4, presentamos algunos fenómenos nuevos presentes en el caso matricial que no aparecen en el caso escalar. En primer lugar estudiamos varios ejemplos de polinomios ortogonales matriciales que son funciones propias de varios operadores diferenciales linealmente independientes. Esto implicará que el correspondiente álgebra de operadores es mucho más complejo que en el caso escalar, donde es siempre isomorfo a $\mathbb{R}[x]$. En algunos casos aparecen incluso operadores diferenciales de orden impar, cosa que también es imposible en el caso escalar. En segundo lugar se estudiará el fenómeno dual, es decir, se buscarán familias de polinomios ortogonales matriciales, cada una ortogonal con respecto a un peso matricial distinto, que son funciones propias de un mismo operador diferencial de segundo orden fijo. Estas familias constituirán un cono convexo y se mostrará un ejemplo.

# Capítulo 1

# Polinomios Ortogonales

En este capítulo se dará una breve descripción de la teoría de los polinomios ortogonales clásicos. La mayoría de las funciones conocidas como “funciones especiales” son soluciones de una ecuación diferencial lineal de segundo orden. Estas ecuaciones surgen en contextos físicos y matemáticos.

Para un operador diferencial de segundo orden simétrico con respecto a un peso $\omega$, se caracterizarán los casos en que las funciones propias son polinomiales.

## 1.1. Elementos de Integración

En esta sección se proporcionan las definiciones y nociones básicas de medida para definir la integral. Los productos internos en esta tesis los definiremos por medio de una integral con respecto a una medida.

**Definición 1.1.1.** Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto. Una familia $\mathbb{X}$ de subconjuntos de $X$ es una $\sigma$-álgebra si cumple:

i) $\emptyset, X \in \mathbb{X}$.

ii) Si $A \in \mathbb{X}$, entonces el complemento $X \setminus A \in \mathbb{X}$.

iii) $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{X}$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbb{X}$.

*Ejemplo* 1.1.2. La $\sigma$-álgebra de Borel es la $\sigma$-álgebra $\mathcal{B}$ generada por todos los intervalos abiertos $(a,b)$ de $\mathbb{R}$.

Un espacio medible es el par ordenado $(X,\mathbb{X})$ que consiste del conjunto $X$ y la $\sigma$-álgebra de subconjuntos de $X$.

Denotemos por $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ al conjunto de los reales extendidos.

**Definición 1.1.3.** Una función $f$ de $X$ en $\bar{\mathbb{R}}$ es $\mathbb{X}-$*medible* si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ el conjunto

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathbb{X}.$$

Denotaremos por $M(X, \mathbb{X})$ al conjunto de las funciones medibles con valores en los reales extendidos.

**Definición 1.1.4.** Una medida es una función $\mu : \mathbb{X} \to \bar{\mathbb{R}}^+$ que satisface

I) $\mu(\emptyset) = 0$,

II) Para $\{E_n\}$ sucesión disjunta de subconjuntos de $\mathbb{X}$ se cumple

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

*Ejemplo* 1.1.5. Si $X = \mathbb{R}$ y $\mathbb{X} = \mathcal{B}$ la $\sigma$-álgebra de Borel, existe una única medida $\lambda$ que coincide con la medida de los intervalos. Esta medida $\lambda$ es la **medida de Lebesgue**.

Una medida $\mu$ es finita si no toma el valor $+\infty$. Mas generalmente, una medida es $\sigma$-finita si existe una sucesión $\{E_n\}$ de subconjuntos de $\mathbb{X}$ tal que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ y tal que $\mu(E_n) < +\infty \quad \forall n$.

*Ejemplo* 1.1.6. La medida de Lebesgue es $\sigma$-finita. Pues $\mathbb{R} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[k, k+1)$ y para todo $k \in \mathbb{Z}$ se tiene que $\lambda[k, k+1) = 1 < \infty$.

Ahora que tenemos el espacio de medida $(X, \mathbb{X}, \mu)$ procederemos a definir la integral. Primero se define la integral para funciones simples, luego para funciones no negativas y finalmente para funciones integrables.

**Definición 1.1.7.** Una función medible y real valuada es simple si y solo si tiene un número finito de valores. Una función simple medible es de la forma

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} a_j \mathbb{1}_{E_j}, \tag{1.1}$$

donde $a_j \in \mathbb{R}$ y $\mathbb{1}_{E_j}$ es la función característica del conjunto $E_j \in \mathbb{X}$.

**Definición 1.1.8.** Sea $\phi$ simple (de la forma (1.1)) y medible, se define la integral de $\phi$ con respecto a $\mu$ como

$$\int \phi \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_j \mu(E_j).$$

**Definición 1.1.9.** Si $f \in M^+(X, \mathbb{X})$(función medible y no negativa), definimos la integral de $f$ con respecto a $\mu$ como

$$\int f \, d\mu = \sup \int \phi \, d\mu,$$

donde el supremo se extiende sobre todas las funciones simples y medibles $\phi$ que satisfacen $0 \leq \phi(x) \leq f(x)$ para todo $x \in X$.

La integral de una función no negativa esta bien definida, ya que una función no negativa es aproximable por funciones simples.

**Definición 1.1.10.** Una función $f \in M(X, \mathbb{X})$ se dice que es integrable si sus partes negativa y positiva $f^+$, $f^-$, tienen integrales finitas con respecto a $\mu$. En cuyo caso, se define la integral de $f$ con respecto a una medida $\mu$ como

$$\int f\,d\mu = \int f^+\,d\mu - \int f^-\,d\mu.$$

**Definición 1.1.11.** Se define el $n$-ésimo momento de la medida $\mu$ como

$$\int_{\mathbb{R}} x^n\,d\mu(x) \text{ para } n = 0, 1, 2, \ldots.$$

**Definición 1.1.12.** Una medida $\nu$ se dice absolutamente continua con respecto a una medida $\mu$ si $\mu(A) = 0$ implica que $\nu(A) = 0$ para $A \in \mathbb{X}$.

**Teorema 1.1.13.** *Sean $\nu$ y $\mu$ medidas $\sigma$-finitas definidas en $\mathbb{X}$ y supongames que $\nu$ es absolutamente continua con respecto a $\mu$. Entonces existe una función medible $\omega$ tal que*

$$\nu(A) = \int_A \omega(x)\,d\mu \quad \textit{para todo } A \in \mathcal{A}.$$

*Además la función $\omega$ esta únicamente determinda $\mu$ casi en todas partes.*

A la función $\omega$ del teorema se le conoce como la derivada de Radón Nykodym de $\nu$ con respecto a $\mu$, y se denota por $\frac{d\nu}{d\mu}$.

## 1.2. Polinomios Ortogonales

Sea $\mu$ una medida real valuada con todos sus momentos finitos y absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue.

Por teorema de Randon Nikodym existe $\omega$ medible tal que

$$d\mu(x) = \omega(x)\,dx, \qquad x \in I,$$

donde el intervalo $I$ es un intervalo abierto, no necesariamente acotado.

En este contexto a la derivada $\omega$ le llamaremos **peso** y la supondremos suficientemente diferenciable.

**Definición 1.2.1.** Dado una función de peso $\omega$ en el intervalo $I = (a, b)$, se denota por $\mathcal{L}^2_\omega(I)$ al espacio de las funciones real valuadas y medibles $f$ tales que

$$\int_a^b f(x)^2 \omega(x)\,dx < \infty.$$

Dadas $f,\ g \in \mathcal{L}^2_\omega(I)$ su producto interior es $\langle f, g\rangle_\omega = \int_a^b f(x)g(x)\omega(x)\,dx$.

**Definición 1.2.2.** Una sucesión de polinomios $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ donde $P_n(x)$ es un polinomio de grado $n \in \mathbb{N}$, es una **sucesión de polinomios ortogonales con respecto un peso** $\omega$, si se cumple

$$\int_I P_n(x)P_m(x)\omega(x)dx = d_n^2\delta_{nm}, \qquad n, m \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\},$$

donde $\delta_{nm}$ es la delta de Kronecker y $d_n$ es una constante distinta de cero.

Si $d_n = 1$ para toda $n$, se dice que es una *sucesión de polinomios ortonormales*.

Para $n \in \mathbb{N}$ consideremos la matriz

$$Z_n = \begin{pmatrix} \eta_0 & \eta_1 & \dots & \eta_n \\ \eta_1 & \eta_2 & \dots & \eta_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_n & \eta_{n+1} & \dots & \eta_{2n} \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

donde $\eta_n$ es el $n$-ésimo momento de $\omega$, es decir

$$\eta_n = \int_I x^n\,\omega(x)dx.$$

Se toma $\Delta_{-1} = 1$ y $\Delta_n =$ el determinante de (1.2) para $n \in \mathbb{N}$.
Llamamos forma cuadrática asociada a una matriz $Q$ a la aplicación $T$ de la forma

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^{n+1} &\to \quad \mathbb{R} \\ \bar{a} &\to \quad \bar{a}^T Q\bar{a}. \end{aligned}$$

Consideremos la forma cuadrática asociada a la matriz $Z_n$

$$\sum_{j.k=0}^{n} \eta_{j+k}a_j a_k = \int_a^b \left[\sum_{j=0}^{n} x^j a_j\right]^2 \omega(x)\,dx,$$

que es positiva definida y con esto se concluye que $\Delta_n$ es positivo.
Se define $Q_0(x) = 1$ y para $n \geq 1$ el polimonio

$$Q_n(x) = \begin{vmatrix} \eta_0 & \eta_1 & \dots & \eta_{n-1} & 1 \\ \eta_1 & \eta_2 & \dots & \eta_n & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \eta_n & \eta_{n+1} & & \eta_{2n-1} & x^n \end{vmatrix}. \tag{1.3}$$

Probaremos que $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es una familia de polinomios ortogonales con respecto a $\omega$. Para $m < n$, se tiene que

$$\langle Q_n(x), x^m\rangle_\omega = \begin{vmatrix} \eta_0 & \eta_1 & \dots & \eta_{n-1} & \eta_m \\ \eta_1 & \eta_2 & \dots & \eta_n & \eta_{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \eta_n & \eta_{n+1} & \dots & \eta_{2n-1} & \eta_{n+m} \end{vmatrix}.$$

Es decir, en la última columna del determinante se repite la columna $m+1$.
Por lo tanto

$$\langle Q_n(x), x^m\rangle_\omega = \begin{cases} 0, & si\ m < n; \\ \Delta_n, & si\ m = n. \end{cases}$$

Luego notemos que podemos escribir $Q_n(x) = \Delta_{n-1}x^n$ más términos de menor grado, esto implica que

$$\langle Q_n, Q_n\rangle_\omega = \langle Q_n, \Delta_{n-1}x^n\rangle_\omega = \Delta_{n-1}\langle Q_n, x^n\rangle_\omega = \Delta_n\Delta_{n-1}.$$

Por lo tanto los polinomios

$$P_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}}Q_n(x)$$

son ortonormales. Estos polinomios están únicamente determinados por la condición de que su coeficiente principal sea positivo. El coeficiente principal de $P_n$ es $h_n = \sqrt{\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}}$, esto ya que el coeficiente principal de $Q_n$ es $\Delta_{n-1}$.

**Teorema 1.2.3.** *Cualquier sucesión de polinomios ortonormales $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ satisface una relación de recurrencia de la forma*

$$xP_n(x) = a_nP_{n+1}(x) + b_nP_n(x) + c_nP_{n-1}(x), \tag{1.4}$$

*con $a_n = h_n/h_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$ y $c_n = a_{n-1}$, $n = 0, 1, 2, \dots$.*

*Demostración.* Como $xP_n(x)$ es de grado $n+1$ y ortogonal a $x^m$ para $m < n-1$, se sigue que existen las constantes $a_n$, $b_n$ y $c_n$, tales que

$$xP_n(x) = a_nP_{n+1}(x) + b_nP_n(x) + c_nP_{n-1}(x).$$

Comparando los coeficientes de $x^{n+1}$ tenemos que $a_n = h_n/h_{n+1}$. Por otro lado

$$\begin{aligned} c_n = \langle xP_n, P_{n-1}\rangle_\omega = \langle P_n, xP_{n-1}\rangle_\omega &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}}Q_n, \frac{\Delta_{n-2}x^n}{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_{n-2}}}\right\rangle_\omega \\ &= \frac{\sqrt{\Delta_{n-2}}}{\Delta_{n-1}\sqrt{\Delta_n}}\langle Q_n, x^n\rangle_\omega = \frac{h_{n-1}}{h_n} = a_{n-1}. \end{aligned}$$

□

Cabe destacar que la existencia de una relación de recurrencia a tres términos depende únicamente de las propiedades de ortogonalidad de los polinomios $P_n$ y no del hecho que su norma sea unitaria.

**Definición 1.2.4.** La matriz de Jacobi es una matriz tridiagonal infinita, de la forma

$$J = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & 0 & \dots & & & \\ a_0 & b_1 & a_1 & 0 & \dots & & \\ 0 & a_1 & b_2 & a_2 & 0 & \dots & \\ 0 & 0 & a_2 & b_3 & a_3 & 0 & \dots \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & \end{pmatrix},$$

donde $a_n > 0$ y $b_n \in \mathbb{R}$.

En 1935 Favard introdujo el recíproco del teorema anterior a la teoría de polinomios ortogonales. Sin embargo, este resultado es esencialmente el mismo que utilizó Stieltjes en la teoría fracciones continuas mucho tiempo antes.

**Teorema 1.2.5** (Teorema de Favard)**.** *Sean $a_n$, $b_n$ y $c_n$ sucesiones arbitrarias de números reales y la sucesión $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ definida por la relación de recurrencia*

$$P_{n+1}(x) = (a_n x + b_n)P_n(x) - c_n P_{n-1}(x), \quad n \geq 0,$$

*con $P_0(x) = 1$ y $P_{-1}(x) = 0$. Entonces $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de polinomios ortogonales si y solo si $a_n \neq 0$, $c_n \neq 0$ y $c_n a_n a_{n-1} > 0$ para toda $n$.*

La demostración de este teorema se puede encontrar en [7].

Mediante la matriz de Jacobi, podemos reescribir la relación de recurrencia a tres términos (1.4) como

$$JP = xP$$

donde $P = [P_0(x), P_1(x),\ P_2(x),\ P_3(x),\ P_4(x), \dots]^T$ es el vector de los polinomios ortogonales.

## 1.3. Transformaciones y simetría

La funciones $p$, $q$, $r$, $f$, $u$, $v$,.. denotarán funciones reales definidas en un intervalo finito o un intervalo infinito real abierto. Supongamos que $p(x) > 0$, para todo $x$ en el intervalo. Todas las funciones se suponen continuas, y de clase $\mathcal{C}^1$ y $\mathcal{C}^2$ (i.e. que sus derivadas de orden 1 y 2 son continuas, respectivamente) cuando sea necesario.

La ecuación diferencial de segundo orden en su forma general es

$$p(x)u''(x) + q(x)u'(x) + r(x)u(x) = 0,$$

y su correspondiente operador asociado es

$$L = p(x)\frac{d^2}{dx^2} + q(x)\frac{d}{dx} + r(x). \tag{1.5}$$

**Definición 1.3.1.** Un operador $L$ de la forma (1.5) es simétrico con respecto a la función de peso $\omega$ si

$$\langle Lu, v\rangle_\omega = \langle u, Lv\rangle_\omega$$

para todo par de funciones $u$, $v \in \mathcal{C}^2$ que se anulan fuera de un subintervalo cerrado de $I$.

**Proposición 1.3.2.** *El operador $L$ es simétrico con respecto al peso $\omega$ si y sólo si $q\omega = (p\omega)'$. Además el operador $L$ se puede reescribir de la forma*

$$L = p\frac{d^2}{dx^2} + \frac{(p\omega)'}{\omega}\frac{d}{dx} + r = \frac{1}{\omega}\frac{d}{dx}\left(p\omega\frac{d}{dx}\right) + r. \tag{1.6}$$

*Demostración.* Supongamos que $L$ es simétrico:

$$\begin{aligned}
0 = \langle Lf, g\rangle_\omega - \langle f, Lg\rangle_\omega &= \int_I [p(f''g - fg'') + q(f'g - fg')]\omega\, dx \\
&= \int_I [p(f'g - fg')' + q(f'g - fg')]\omega\, dx \\
&= (f'g - fg')p\omega\Big|_{\partial I} - \int_I (f'g - fg')(p\omega)' + \int_I [(f'g - fg')]q\omega\, dx \quad \text{(integrando por partes)} \\
&= 0 + \int_I (f'g - fg')[q\omega - (p\omega)']\, dx \quad \text{(condición de frontera)}
\end{aligned}$$

En particular, si $f \equiv 1$ dondequiera que $g \neq 0$, entonces

$$0 = -\int_I g'[qw - (p\omega)']\, dx = \int_I g[qw - (p\omega)']'\, dx$$

y podemos concluir que $q\omega - (p\omega)' = c$, $c$ constante.
Por otro lado, si $f(x) = x$ dondequiera que $g \neq 0$, entonces

$$0 = c\int_I (g - xg')\, dx = 2c\int_I g\, dx.$$

De esta expresión se sigue que $c = 0$ para cualquier función $g$. Por lo tanto podemos concluir que la condición de simetría implica que $q\omega = (p\omega)'$.

Conversamente, sí $q\omega = (p\omega)'$, tenemos

$$\langle Lf, g\rangle_\omega - \langle f, Lg\rangle_\omega = \int_I (f'g - fg')[q\omega - (p\omega)']\, dx = 0.$$

$\square$

## 1.4. Polinomios ortogonales como funciones propias

Las familias de polinomios llamadas clásicas además de ser ortogonales son funciones propias de un operador diferencial de segundo orden de la forma (1.5). Para extender la condición de simetría a una clase maximal de funciones se requiere imponer condiciones de frontera. Sea $I = (a, b)$ un intervalo acotado y supongamos que $\omega$, $\omega'$, $p$, $p'$, $q$ y $r$ se extienden como funciones continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$. Supongamos que $f, g \in L^2_\omega$, son dos veces continuamente diferenciables en $(a, b)$ y que $f$, $f'$, $g$, $g'$ son continuas en el intevalo cerrado $[a, b]$. Supongamos también que $L$ es simétrico, en consecuencia que es de la forma (1.6). Procedemos a calcular:

$$\begin{aligned}
\langle Lf, g\rangle_\omega - \langle f, Lg\rangle_\omega &= \int_I p(f'g - fg')'\omega\, dx + \int_I (p\omega)'(f'g - fg')\, dx \\
&= (f'g - fg')\, p\omega|_a^b - \int_I (p\omega)'(f'g - fg')\, dx + \int_I (p\omega)'(f'g - fg')\, dx \\
&= (p\omega)(f'g - fg')|_a^b.
\end{aligned}$$

Si $p\omega$ se anula en los extremos, no se requerirán condiciones adicionales en la frontera, en otro caso las condiciones adicionales serán impuestas sobre las funciones $f$, $g$.

Para el caso $I = (a, \infty)$ si $p\omega \neq 0$ en $x = a$, las condiciones serán impuestas sobre $a$.

Supongamos que tenemos simetría para una clase maximal de funciones. Una función permitida $f \neq 0$ es una función propia para $L$ con valor propio $-\lambda$ si $Lf + \lambda f = 0$.

Sean $f_1$ y $f_2$ son funciones propias con diferentes valores propios $-\lambda_1$ y $-\lambda_2$, entonces

$$-\lambda_1\langle f_1, f_2\rangle = \langle Lf_1, f_2\rangle = \langle f_1, Lf_2\rangle = -\lambda_2\langle f_1, f_2\rangle.$$

Así $\langle f_1, f_2\rangle = 0$, por lo tanto $f_1$ y $f_2$ son ortogonales.

Como las funciones constantes pertenecen al espacio $\mathcal{L}^2_\omega(I)$, en particular se cumple que

$$\int_I \omega(x)dx < \infty. \tag{1.7}$$

Queremos analizar bajo qué condiciones el conjunto de funciones propias de $L$ incluye polinomios de grado 0, 1 y 2, supongamos que el espacio de polinomios de grado $\leq k$ en el dominio de $L$, es enviado en sí mismo por $L$, para $k = 0, 1, 2$. Usaremos fuertemente este supuesto para obtener las siguientes características del operador.

- Aplicando el operador $L$ a $u_0(x) = 1$ se obtiene $Lu_0 = r$, por el supuesto tenemos que $r$ es constante y (salvo traslaciones de los valores propios por $-r$) tomaremos $r = 0$.

- Si aplicamos $L$ a $u_1 = x$, obtenemos

  $$Lu_1 = \frac{(p\omega)'}{\omega} = p' + p\frac{\omega'}{\omega}, \tag{1.8}$$

  y por el supuesto, $Lu_1$ debe ser de grado a lo más uno.

- Por último, aplicamos el operador $L$ al polinomio $u_2(x) = \frac{1}{2}x^2$ y obtenemos

$$Lu_2 = p + \frac{(p\omega)'}{\omega}x.$$

Como $Lu_2$ debe ser polinomial de grado a lo más dos, $p$ es un polinomio de grado a lo más dos.

De lo anterior, se sigue que el operador es de la forma

$$L = p\frac{d^2}{dx^2} + \frac{(p\omega)'}{\omega}\frac{d}{dx}, \quad \textit{con } p \textit{ de grado a lo más dos.}$$

Así que, dependiendo de si el polinomio $p(x)$ es constante, lineal o cuadrático, existen cinco posibles soluciones de

$$(p(x)\omega(x))' = q(x)\omega(x).^1 \tag{1.9}$$

I. *Caso $p(x)$ es constante.* Tomamos $p(x) \equiv 1$ . De la expresión (1.8) se tiene que $\frac{\omega'}{\omega}$ es de grado a lo más 1. Resolviendo la ecuación diferencial se tiene que $\omega(x) = e^h$ donde $h$ es un polinomio de grado a lo más dos. Salvo normalizaciones se puede reducir a los casos, $\omega(x) = e^{-x}$ o $\omega(x) = e^{\pm x^2}$. En el primer caso, como se debe cumplir (1.7) se requiere un intervalo propio, pero la condición de frontera no puede ser alcanzada en tal intervalo. Para el caso $\omega(x) = e^{x^2}$ no existe intervalo que cumpla las condiciones de frontera pues no se anula en ningún punto. Para el último caso $\omega(x) = e^{-x^2}$ la condición de frontera fuerza a que el intervalo sea $I = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$, además integrando se obtiene $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} = \sqrt[2]{\pi} < \infty$. Por lo tanto, el operador en este caso es
$$L = \frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx} \quad \textit{en} \quad L^2_\omega(\mathbb{R}) \quad \textit{con} \quad \omega(x) = e^{-x^2}.$$
Observemos que el operador $L$ mapea el espacio de los polinomios de grado $\leq n$ en sí mismo, por lo tanto, existe un polinomio $H_n$ de grado $n$ que es función propia. Comparando los términos de grado $n$ de $H_n$ y $LH_n$, obtenemos que el valor propio es $\lambda_n = -2n$. Como estos valores propios son distintos para cada $n$, tenemos que los polinomios $H_n$ son ortogonales en $L^2_{e^{-x^2}}(\mathbb{R})$. Estos polinomios son llamados los *polinomios de Hermite.*

II. *Caso $p(x)$ es lineal.* Normalizaremos a $p(x) = x$. Esto implica que $\frac{\omega'}{\omega} = b + \frac{a}{x}$, por lo tanto salvo múltiplos escalares $\omega(x) = x^a e^{bx}$. La condición de frontera implica que el intervalo es $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0)$ o $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$. Supongamos el intervalo $\mathbb{R}_+$, la condición de integrabilidad fuerza a que $a > -1$ y $b < 0$. Reescalando a $b = -1$, el operador es

$$L = x\frac{d^2}{dx^2} + [(a+1) - x]\frac{d}{dx} \quad \textit{en} \quad L^2_\omega(\mathbb{R}_+); \qquad \omega(x) = x^a e^{-x}, \quad a > -1.$$

[1] Esta ecuación es conocida como la ecuación de Pearson.

Análogamente al caso anterior, el espacio de los polinomios de grado $\leq n$ es llevado en sí mismo por el operador $L$. Por lo tanto existe un polinomio $L_n^{(\alpha)}$ de grado $n$ que es función propia. Comparando los términos de grado $n$ obtenemos

$$L(L_n^{(\alpha)}) + nL_n^{(\alpha)} = 0$$

Por lo tanto, los polinomios $L_n^{(\alpha)}$ son ortogonales. Salvo normalizaciones estos son los *polinomios de Laguerre.*

III. *Caso $p(x)$ cuadrático, con raíces distintas.* Normalizaremos $p(x) = 1 - x^2$. Entonces $\frac{\omega'}{\omega} = \beta(1+x)^{-1} - \alpha(1-x)^{-1}$, para $\alpha$ y $\beta$ constantes, resolviendo obtenemos la función de peso $\omega(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$. Las condiciones de frontera fuerzan al intervalo $(-1, 1)$ y la condición de integrabilidad fuerza a $\alpha$, $\beta > -1$. El operador en este caso es

$$L = (1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} + [\beta - \alpha - x(\alpha+\beta+2)]\frac{d}{dx} \qquad en \quad L^2_\omega(-1,1).$$

Para cada polinomio de grado $n$, el operador $L$ lo manda en otro polinomio de grado $n$. El valor propio en este caso es cuadrático: $\lambda_n = -n(n+\alpha+\beta+1)$. Salvo normalización los polinomios ortogonales asociados al peso $(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$ *polinomios de Jacobi.* Estos polinomios se pueden construir en cualquier intervalo acotado $(a, b)$. Por ejemplo podemos reescalar el intervalo $(-1, 1)$ tomando $\frac{1}{2}(1-x)$ como nueva variable $x$ tal que el nuevo intervalo es $(0, 1)$, en cuyo caso el peso normalizado corresponde a la densidad Beta.

IV. *Caso $p(x)$ cuadrático, con raíces complejas distintas.* Podemos normalizar a $1 + x^2$. Como $Lu_1 = 2x + (x^2+1)\frac{\omega'}{\omega}$ debe ser un polinomio de grado a lo sumo 1 y $\omega > 0$ entonces $\frac{\omega'(x)}{\omega(x)} = \frac{(ax+b)}{1+x^2}$. Resolviendo la ecuación diferencial, se tiene, salvo constantes

$$\omega(x) = (1+x^2)^{-a/2+1}e^{b \arctan x}$$

Las condiciones de frontera e integrabilidad se cumplen para el intervalo $(-\infty, \infty)$ y $a > 1/2$. El valor de $a$ condiciona la existencia de una sucesión de polinomios ortogonales, ya que para construirla es necesario que todos los momentos sean finitos, y en este caso solo hay $n < 2a - 1$ momentos finitos, con lo cual habrá un número finito de polinomios ortogonales $p_n(x : a, b)$, son conocidos como los *polinomios de Romanovski.*

V. *Caso $p(x)$ cuadrático, con raíces dobles.* Normalizamos $p(x) = x^2$. Procedemos como en los casos anteriores, y obtenemos $\frac{\omega'}{\omega} = \frac{-a}{x} + \frac{b}{x^2}$. Resolviendo la ecuación se obtiene salvo constantes $\omega(x) = x^{-a}e^{-b/x}$. Las condiciones de frontera e integrabilidad se cumplen en en el intervalo $(0, \infty)$ para $a > 1$, $b \geq 0$. Pero se tiene que solo hay un número finito de momentos finitos, de hecho solo hay $n < a-1$ momentos, con lo cual solo habrá un númer finito de polinomios ortogonales. Para $b = 1$ estos polinomios son conocidos como *polinomios de Bessel,* sin embargo por el argumento anterior esta familia no figura en nuestra clasificación.

A las familias de Hermite, Laguerre y Jacobi se les suele denominar familias clásicas. Así hemos probado el siguiente resultado.

**Teorema 1.4.1.** *Las familias clásicas de Hermite, Laguerre y Jacobi, son las únicas familias de polinomios ortogonales que son funciones propias de un operador diferencial de segundo orden de la forma*

$$L = p\frac{d^2}{dx^2} + \frac{(p\omega)'}{\omega}\frac{d}{dx} = \frac{1}{\omega}\frac{d}{dx}\left(p\omega\frac{d}{dx}\right).$$

*(i.e. simétrico con respecto a una medida positiva de soporte real).*

## 1.5. Propiedades generales de las familias clásicas

El siguiente resultado nos permite describir a las familias clásicas de polinomios ortogonales en términos de sus derivadas sucesivas que involucren al peso $\omega$.

**Proposición 1.5.1.** *(Fórmula de Rodrigues) Toda solución de $Lp_n = \lambda_n p_n$ donde $L$ es de la forma*

$$p\frac{d^2}{dx^2} + \frac{(p\omega)'}{\omega}\frac{d}{dx} = \frac{1}{\omega}\frac{d}{dx}\left(p\omega\frac{d}{dx}\right)$$

*se puede escribir, salvo normalizaciones, como*

$$p_n(x) = \frac{1}{\omega(x)}\frac{d^n}{dx^n}\{p^n\omega(x)\} = \omega^{-1}(p^n\omega)^{(n)}. \tag{1.10}$$

*Demostración.* Sea $p_n$ una familia de polinomios ortogonales que verifica

$$p(x)p_n''(x) + q(x)p_n'(x) = \lambda_n p_n(x), \qquad q = \frac{(p\omega)'}{\omega}. \tag{1.11}$$

Esta ecuación se puede reescribir como

$$(p\omega p_n')' = \lambda_n\omega p_n. \tag{1.12}$$

Veamos que la derivada de una solución $p_n$ de la ecuación (1.11) satisface una ecuación similar. Procedemos derivando (1.11)

$$p[p_n']'' + (q + p')[p_n']' = (\lambda_n - q')p_n',$$

además se tiene

$$q + p' = \frac{(p\omega)'}{\omega} + p' = \frac{p^2\omega' + 2pp'\omega}{p\omega} = \frac{[p(p\omega)]'}{p\omega}.$$

A partir de las dos igualdades anteriores se obtiene la relación

$$(p^2\omega p_n'')' = (\lambda_n - q')p\omega p_n'.$$

Así la función $p\omega$ es también una función de peso. Como $q'$ es constante para las tres familias, $p_n'$ es un polinomio ortogonal de grado $n-1$ para el peso $p\omega$. De igual manera, $p_n''$ es un polinomio ortogonal de grado $n-2$ para el peso $p^2\omega$, con valor propio

$$\lambda_n - q' - (p' + q)' = \lambda_n - 2q' - p''.$$

Procediendo por inducción, la derivada $m$-ésima corresponde al peso $p^m\omega$, con valor propio

$$\lambda_n - mq' - \frac{1}{2}m(m-1)p''.$$

Como $p_n$ es un polinomio de grado $n$, $p_n^{(n)}$ es constante con valor propio cero y tenemos una fórmula general

$$\lambda_n = nq' + \frac{1}{2}n(n-1)p''.$$

Una vez que tenemos este valor propio, se reescribe (1.12) como

$$\omega p_n = \lambda_n^{-1}(p\omega p_n')',$$

Como $p\omega$ es un peso correspondiente a $p_n'$, obtenemos la relación

$$\omega p_n = [\lambda_n(\lambda_n - q')]^{-1}(p^2\omega p_n^{(n)})^{(n)}$$

y recurrentemente

$$\begin{aligned}\omega p_n &= \prod_{m=0}^{n-1}\left[\lambda_n - mq' - \frac{1}{2}m(m-1)p''\right]^{-1}(p^n\omega p^{(n)})^{(n)} \\ &= (-1)^n\prod_{m=0}^{n-1}\left[-\lambda_n + mq' + \frac{1}{2}m(m-1)p''\right]^{-1}(p^n\omega p^{(n)})^{(n)}.\end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad, tomamos $p_n^{(n)} = 1$ y llegamos a la *fórmula de Rodrigues.* □

Ésta es una propiedad especial de las familias de polinomios ortogonales clásicos, pues satisfacen una relación de derivación, tal que sus derivadas son de nuevo polinomios ortogonales.

A continuación recopilaremos fórmulas importantes y significativas para cada una de las familias clásicas de polinomios ortogonales.

### 1.5.1. Polinomios de Hermite

Los polinomios de Hermite $\{H_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ son polinomios ortogonales asociados a la función de densidad $\omega(x) = e^{-x^2}$ en el intervalo $I = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Los coeficientes de (1.9) son $p(x) = 1$ y $q(x) = -2x$, así la ecuación diferencial que satisfacen es

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0.$$

Además satisfacen la relación de derivación

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x).$$

La forma más generalizada de definir a los polinomios de Hermite es mediante la fórmula de Rodrigues

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \left(e^{-x^2}\right)^{(n)}.$$

Sus normas:

$$\|H_n\|_\omega^2 = 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

La relación de recurrencia a tres términos para los polinomios ortogonales de Hermite es

$$xH_n(x) = \frac{1}{2}H_{n+1}(x) + nH_{n-1}(x).$$

Normalizando se obtiene la sucesión de polinomios ortonormales de Hermite $\{h_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, que satisfacen la siguiente relación de recurrencia a tres términos

$$xh_n(x) = \sqrt{\frac{n+1}{2}}h_{n+1}(x) + \sqrt{\frac{n}{2}}h_{n-1}(x).$$

Por lo tanto la matriz de Jacobi es

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1/2} & 0 & \dots & & & \\ \sqrt{1/2} & 0 & 1 & 0 & \dots & & \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3/2} & 0 & \dots & \\ 0 & 0 & \sqrt{3/2} & 0 & \sqrt{4/2} & 0 & \dots \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}.$$

### 1.5.2. Polinomios de Laguerre

Los polinomios de Laguerre $\left\{L_n^{(\alpha)}(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$ son los polinomios ortogonales asociados al peso $\omega(x) = x^\alpha e^{-x}$ en $I = \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$, para $\alpha > -1$, $p(x) = x$ y $q(x) = \alpha + 1 - x$. La fórmula mas generalizada de definir a los polinomios de Laguerre es la fórmula de Rodrigues:

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{n!}x^{-\alpha}e^x(x^{n+\alpha}e^{-x})^{(n)}.$$

La ecuación diferencial que satisfacen es

$$x[L_n^{(\alpha)}]''(x) + (\alpha + 1 - x)[L_n^{(\alpha)}]'(x) + nL_n^{(\alpha)} = 0.$$

Sus normas son:

$$\|L_n^{(\alpha)}\|_\omega^2 = \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{n!}.$$

En particular, para $\alpha = 0$

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!k!} x^k.$$

La relación de recurrencia a tres términos para la sucesión de polinomios ortogonales es

$$xL_n^{(\alpha)} = -(n+1)L_{n+1}^{(\alpha)}(x) + (2n + \alpha + 1)L_n^{(\alpha)}(x) - (n + \alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x).$$

La sucesión de polinomios ortonormales $\{l_n^{(\alpha)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ satisface la siguente relación de recurrencia a tres términos

$$xl_n^{(\alpha)} = -\sqrt{(n+1)(n+\alpha+1)}\,l_{n+1}^{(\alpha)}(x) + (2n + \alpha + 1)l_n^{(\alpha)}(x) - \sqrt{(n)(n+\alpha)}\,l_n^{(\alpha)},$$

luego se deriva la siguiente expresión para la matriz de Jacobi:

$$J = \begin{pmatrix} \alpha+1 & -\sqrt{\alpha+1} & 0 & \dots & & \\ -\sqrt{\alpha+1} & \alpha+3 & -\sqrt{2(\alpha+2)} & 0 & \dots & \\ 0 & -\sqrt{2(\alpha+2)} & \alpha+5 & -\sqrt{3(\alpha+3)} & 0\dots & \\ 0 & 0 & -\sqrt{3(\alpha+3)} & \alpha+7 & -\sqrt{4(\alpha+4)} & \dots \\ & & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}.$$

### 1.5.3. Polinomios de Jacobi

Los polinomos de Jacobi $\{P_n^{(\alpha,\beta)}\}_{n=0}^{\infty}$, con índices $\alpha, \beta > -1$, son ortogonales con respecto al peso $\omega(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ en el intervalo $(-1, 1)$. Los coeficientes de (1.9) vienen dados por $p(x) = 1 - x^2$, $q(x) = \beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x$, así la ecuación diferencial que satisfacen los polinomios $P_n^{(\alpha,\beta)}$ es

$$(1-x^2)\left[P_n^{(\alpha,\beta)}\right]'' + [\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)x]\left[P_n^{(\alpha,\beta)}\right]' + n(n+\alpha+\beta+1)P_n^{(\alpha,\beta)} = 0.$$

Además, satisfacen la relación de derivación

$$\left[P_n^{(\alpha,\beta)}\right]'(x) = \frac{1}{2}(n + \alpha + \beta + 1)P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x).$$

Teniendo en cuenta que

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\,dx = 2^{\alpha+\beta+1}\int_{0}^{1}s^{\alpha}(1-s)^{\beta}\,ds = 2^{\alpha+\beta+1}B(\alpha+1,\beta+1),$$

las normas de los $P_n^{(\alpha,\beta)}$ son

$$\|P_n^{(\alpha,\beta)}\|^2 = \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}.$$

La forma más generalizada de definir a los polinomios de Jacobi es mediante la fórmula de Rodrigues

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}\{(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\}.$$

Usando la fórmula de Leibniz en la ecuación anterior, obtenemos la siguiente expresión de los polinomios de Jacobi

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!(n-k)!}\times\frac{(\alpha+1)_n(\beta+1)_n}{(\alpha+1)_{n-k}(\beta+1)_k}(1-x)^{n-k}(1+x)^k.$$

Con esto se tiene que los valores en los extremos del intervalo son

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!}, \qquad P_n^{(\alpha,\beta)}(-1) = (-1)^n\frac{(\beta+1)_n}{n!}.$$

La relación de recurrencia a tres términos es

$$\begin{aligned} xP_n^{(\alpha,\beta)}(x) &= \frac{2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)}P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) \\ &+ \frac{\beta^2-\alpha^2}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \\ &+ \frac{2(n+\alpha)(n+\beta)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)}P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x). \end{aligned}$$

La relación de recurrencia a tres términos para polinomios ortonormales es

$$\begin{aligned} xp_n^{(\alpha,\beta)}(x) &= \frac{2}{2n+\alpha+\beta+2}\sqrt{\frac{(n+1)(n+\alpha+1)(n+\beta+1)(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)}}p_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) \\ &+ \frac{\beta^2-\alpha^2}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}p_n^{(\alpha,\beta)}(x) \\ &+ \frac{2}{2n+\alpha+\beta}\sqrt{\frac{n(n+\alpha)(n+\beta)(n+\alpha+\beta)}{(2n+\alpha+\beta-1)}}p_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x). \end{aligned}$$

Finalmente la matriz de Jacobi es de la forma

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta+2} & \frac{2\sqrt{(\alpha+1)(\beta+1)}}{\alpha+\beta+2} & 0 & \cdots & \\ \frac{2\sqrt{(\alpha+1)(\beta+1)}}{\alpha+\beta+2} & \frac{\beta^2-\alpha^2}{(2+\alpha+\beta)(4+\alpha+\beta)} & \frac{2\sqrt{2(\alpha+2)(\beta+2)(\alpha+\beta+2)}}{(\alpha+\beta+4)\sqrt{(\alpha+\beta+3)}} & 0 & \cdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Existen casos especiales de polinomios de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}$ con índice repetido $\alpha = \beta$:

- Los polinomios de Legendre $\{P_n\}$ cuando $\alpha = \beta = 0$:

$$P_n(x) = P_n^{(0,0)}(x),$$

  con función de peso asociada $\omega(x) = 1$ en el intervalo $[-1, 1]$.

- Los polinomios de Gegenbauer o polinomios ultraesféricos $\{C_n^\lambda\}$, para el caso $\alpha = \beta = \lambda - 1/2$:

$$C_n^\lambda(x) = \frac{(2\lambda)_n}{(\lambda + \frac{1}{2})_n} P_n^{(\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2})}.$$

- Existen dos tipos de polinomios de Chebyshev:
  - Polinomios de Chebyshev de primera especie $T_n(x)$, cuando $\alpha = \beta = -1/2$.
  - Polinomios de Chebyshev de segunda especie $U_n(x)$, cuando $\alpha = \beta = 1/2$.

Notemos que en estos casos la función de peso $(1-x^2)^\alpha$ es función par. Para estas familias especiales de polinomios de Jacobi las fórmulas estructurales se simplifican considerablemente.

# Capítulo 2

# Polinomios ortogonales matriciales

## 2.1. Definiciones

Se denota con $\mathbb{C}^{N\times N}$ ($\mathbb{R}^{N\times N}$) al conjunto de matrices cuadradas con entradas complejas (reales) de tamaño $N \times N$. Se define a la matriz identidad de tamaño $N$ como

$$I_N = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_{i,i},$$

donde $\varepsilon_{i,j}$ denota a la matriz con entrada $(i, j)$ igual a 1 y en cualquier otra entrada 0. Denotaremos como $\theta$ a la matriz nula, el tamaño será determinado por el contexto.

**Definición 2.1.1.** Sea $x \in \mathbb{R}$, un polinomio matricial $P_i(x)$ es una matriz de tamaño $N \times N$, definida por

$$P_i(x) = \sum_{j=0}^{i} x^j C_j^{(i)},$$

donde los coeficientes $C_j^{(i)} \in \mathbb{C}^{N\times N}$ (o $\mathbb{R}^{N\times N}$).

Denotaremos por $\mathcal{P}_{N\times N}[x]$ al espacio de los polinomios $N \times N$-matriciales de variable real y con entradas complejas. Los elementos de $\mathcal{P}_{N\times N}[x]$ son matrices con entradas polinomiales, o lo que es lo mismo polinomios de variable $x$ con coeficientes matriciales.

Sea $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$, la transpuesta conjugada de $A$ está definida por $A^* = \bar{A}^T$, donde $\bar{A}$ es la conjugada de $A$ componente a componente.

**Definición 2.1.2.** Una matriz $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ es una matriz hermitiana si es igual a su transpuesta conjugada, i.e. , $A = A^*$.

**Definición 2.1.3.** Sea $Q \in \mathbb{C}^{N\times N}$ matriz hermitiana. $M$ es:

- **Definida positiva** si $xQx^* > 0$ para todo $x \in \mathbb{C}^N$ no nulo.

- **Semi definida positiva** si $xQx^* \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{C}^N$ no nulo.

La ortogonalidad matricial se entenderá con respecto a una matriz de medidas $M \in \mathbb{C}^{N\times N}$ con soporte real, que cumple

- Para cualquier conjunto de Borel $A \subset \mathbb{R}$, $M(A)$ es una matriz semi-definida positiva.
- $\forall n \geq 0$ se cumple $\int x^n \, dM(x) < \infty$.
- Si el coeficiente principal de la matriz polinomial $P$ es invertible implica que $\int P(x)dM(x)P^*(x)$ es invertible.

Esta tercera condición es necesaria y suficiente para garantizar la existencia de la sucesión de polinomios ortogonales matriciales $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ con respecto a $M$ y que además el coeficiente principal de cada polinomio ortogonal sea invertible.

**Definición 2.1.4.** Dada una matriz de medidas $M \in \mathbb{C}^{N\times N}$, se define su $n$-ésimo momento:

$$\mu_n = \int x^n \, dM(x), \quad n = 0, 1, \ldots \text{ y } x \in \mathbb{R}.$$

Obsérvese que toda $\mu_n$ es una matriz Hermitiana.

A continuación definiremos un producto interno respecto a la matriz de medidas $M$.

**Proposición 2.1.5.** *El producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ con respecto a $M$, para $P$, $Q \in \mathcal{P}_{N\times N}[x]$ esta definido por*

$$\langle P, Q \rangle = \int P(x)dM(x)Q^*(x) \in \mathbb{C}^{N\times N}. \tag{2.1}$$

Para $A, B \in \mathbb{C}^{N\times N}$ y $P, Q, R \in \mathcal{P}_{N\times N}[x]$ se tienen las siguientes propiedades:

- *Linealidad.*

$$\begin{aligned}\langle AP + BQ, R \rangle &= \int (AP + BQ)dMR^* = \int AP \; dMR^* + \int BQ \; dMR^* \\ &= \langle AP, R \rangle + \langle BQ, R \rangle = A \langle P, R \rangle + B \langle Q, R \rangle ,\end{aligned}$$

- *Conjugación.*

$$\begin{aligned}\langle Q, P \rangle^* &= \left( \int Q \; dMP^* \right)^* = \int P \; dMQ^* \; \textit{(pues } M \textit{ es matriz de medidas sobre } \mathbb{R}) \\ &= \langle P, \; Q \rangle ,\end{aligned}$$

- *Positividad.*

$$\langle P, P \rangle \geq \theta; \; \textit{y además } \langle P, P \rangle = \theta \textit{ si y sólo si } P = \theta,$$

pues se sigue directamente del la tercera condición que cumple la matriz de medidas.

**Definición 2.1.6.** El espacio $\mathcal{P}_{N\times N}[x]$ junto con el producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$, es denominado un $C^* -$ *módulo de Hilbert.*

Dada una matriz $M$ y un producto interno respecto a esta $M$, podemos considerar los polinomios matriciales con respecto a dicho producto interno. Aplicando una generalización del proceso de Gram-Schmidt para el conjunto $\{\ I,\ xI,\ x^2I,\ \dots\}$, se puede generar una sucesión de polinomios ortogonales $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}} P_j(x)dM(x)P_k^*(x) = \delta_{j,k}K_j \qquad j,k = 0,1,2,\dots$$

donde

$$K_j = \int_{\mathbb{R}} P_j(x)dM(x)P_j^*(x),$$

y $\delta_{j,k}$ es la delta de Kroenecker.

Además se tiene que $P_n(x)$ es un polinomio matricial de grado $n$, con coeficiente principal no singular. Por lo tanto, la norma de $P_n \in \mathcal{P}_{N\times N}$ esta dada por

$$\|P_n\|^2 = \int_{\mathbb{R}} P_n(x)dM(x)P_n^*(x) \in \mathbb{C}^{N\times N}.$$

Se sigue de la definición del producto (2.1), que esta norma es una matriz definida positiva. Entonces siempre es posible generar una familia de polinomios ortonormales matriciales $\bar{P}_n(x) = \|P_n\|^{-1}P_n(x)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}} \bar{P}_j(x)dM(x)\bar{P}_k^*(x) = \delta_{j,k}(x)I_N \qquad j,k = 0,1,2,\dots$$

## 2.2. Ortogonalidad en términos de los momentos de medida: caso escalar

En esta sección trataremos únicamente polinomios matriciales real valuados y con entradas reales. Veremos que es posible extender algunas propiedades de los polinomios ortogonales escalares al caso matricial. La extensión será natural de la definición del determinante de los momentos (1.2). Así como en el caso escalar, supondremos que la matriz de medidas $M$ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue y se escribirá $dM(x) = W(x)\,dx$ con $W(x) \in \mathbb{R}^{k\times k}$, $x \in \mathbb{R}$, $k \geq 1$ diferenciable.

Introducimos la siguiente notación:

1. Para $n \geq 1$ se define la matriz $T_n$ por bloques como se sigue

$$T_n = \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_{n-1} & I \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_n & xI \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \dots & \mu_{2n-2} & x^{n-1}I \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \dots & \mu_{2n-1} & x^nI \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k(n+1)\times k(n+1)}, \tag{2.2}$$

donde $I = I_k$.

2. Para $n \geq 1$ se define la matriz de Hankel por bloques

$$H_n = \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{n-1} \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \mu_{2n-2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{kn \times kn}. \tag{2.3}$$

3. La matriz $H$ es la versión semi-infinita de $H_n$ cuando $n \to \infty$.

4. El vector
$$\nu_{n,2n-1} = \begin{pmatrix} \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n-1} \end{pmatrix}^*,$$
para $n \geq 1$.

5. La matriz
$$H_{n+1} = \begin{pmatrix} H_n & \nu_{n,2n-1} \\ \nu^*_{n,2n-1} & \mu_{2n} \end{pmatrix}$$
denota el complemento de Schur del bloque $\mu_{2n}$
$$S_n = \mu_{2n} - \nu^*_{n,2n-1} H_n^{-1} \nu_{n,2n-1}, \ \textit{con } S_0 = \mu_0. \tag{2.4}$$
También introducimos la matriz diagonal por bloques:
$$S = diag[S_0, \ S_1, \ldots].$$

A continuación utilizaremos la notación anterior para definir una sucesión de polinomios matriciales mónicos en la recta real. Notemos que $H_n$ y $S_n$, $n = 0, 1, \ldots$ son matrices Hermitianas.

**Definición 2.2.1.** Se define la familia de polinomios $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ como el complemento de Schur de $x^n I$ en la matriz $T_n$, es decir

$$P_n(x) = x^n I - \begin{pmatrix} \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{n-1} \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \mu_{2n-2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ xI \\ \vdots \\ x^{n-1} I \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

con $P_0(x) = I$.

Se denota por $P$ el vector renglón de los polinomios matriciales

$$P = [P_0(x), P_1(x), \ldots].$$

Como se vio en el capítulo anterior, en el caso escalar los polinomios ortogonales mónicos se definen como

$$p_n(x) = \frac{Q_n(x)}{\Delta_{n-1}}, \quad \text{con } p_0(x) = 1,$$

lo que es exactamente lo que se obtiene usando la Definición 2.5. Esto ya que $Q_n(x) = \det(T_n)$ y $\Delta_{n-1} = \det(H_n)$.

En la Definición 2.5 se supone que las matrices $H_n$ son invertibles para todo $n \geq 1$, lo cual es una restricción sobre la matriz $W(x)$. En particular, que todas las matrices $H_n$ sean invertibles implica que las matrices $S_n$ también son invertibles, esto se cumple ya que $\det(H_{n+1}) = \det(H_n)\det(S_n)$.

Como $M$ es absolutamente continua se define el producto interno en $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^k)$ por medio de

$$\langle P, Q \rangle_W = \int P(x)W(x)Q^*(x)\,dx.$$

Ahora verificaremos que una familia de polinomios ortogonales mónicos definida como en (2.5) es ortogonal.

**Proposición 2.2.2.** *Sea $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ una familia de polinomios matriciales definida como en (2.5) y $S_n$ definida como en (2.4). Entonces $\langle P_i, P_j \rangle_W = \delta_{i,j} S_i$, para cualesquiera $i, j \geq 0$.*

*Demostración.* Observemos que para $0 \leq m \leq n-1$

$$\nu^*_{m,m+n-1} H_n^{-1} = \begin{bmatrix} \mu_m & \mu_{m+1} & \mu_{m+2} & \dots & \mu_{m+n-1} \end{bmatrix} H_n^{-1} = \begin{bmatrix} 0 \dots I \dots 0 \end{bmatrix},$$

donde $I$ está en la posición $m$-ésima. Por lo tanto

$$\nu^*_{m,m+n-1} H_n^{-1} \nu_{n,2n-1} = \mu_{m+n}.$$

Es suficiente con mostrar que $P_n$ es ortogonal a $x^m I$ para todo $0 \leq m \leq n-1$, es decir

$$\begin{aligned}
\int x^m W(x) P_n^*(x)\,dx &= \int x^m W(x) \left( x^n I - \begin{bmatrix} I & xI & \dots & x^{n-1} I \end{bmatrix} H_n^{-1} \nu_{n,2n-1} \right) dx \\
&= \int x^m W(x) x^n - x^m W(x) \begin{bmatrix} I & xI & \dots & x^{n-1} I \end{bmatrix} H_n^{-1} \nu_{n,2n-1}\,dx \\
&= \mu_{m+n} - \int \begin{bmatrix} x^m I & x^{m+1} I & \dots & x^{m+n-1} I \end{bmatrix} H_n^{-1} \nu_{n,2n-1}\,dx \\
&= \mu_{m+n} - \begin{bmatrix} \mu_m & \mu_{m+1} & \dots & \mu_{m+n-1} \end{bmatrix} H_n^{-1} \nu_{n,2n-1}\,dx \\
&= \mu_{m+n} - \mu_{m+n} = 0.
\end{aligned}$$

Esto prueba que para cualquier $m < n$

$$\int P_m(x) W(x) P_n^*(x)\,dx = 0.$$

Si $m = n$

$$\begin{aligned}
\int x^n W(x) P_n^*(x)\, dx &= \int x^n W(x) \left(x^n I - \begin{bmatrix} I & xI & \dots & x^{n-1}I \end{bmatrix} H_n^{-1} \nu_{n,2n-1}\right) dx \\
&= \int x^n W(x) x^n - x^n W(x) \begin{bmatrix} I & xI & \dots & x^{n-1}I \end{bmatrix} H_n^{-1} \nu_{n,2n-1}\, dx \\
&= \mu_{2n} - \begin{bmatrix} \mu_n & \mu_{n+1} & \dots & \mu_{2n-1} \end{bmatrix} H_n^{-1} \nu_{n,2n-1}\, dx \\
&= \mu_{2n} - \nu_{n,2n-1}^* H_n^{-1} \nu_{n,2n-1} = S_n,
\end{aligned}$$

lo cual concluye la prueba. □

**Lema 2.2.3.** *Sea $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ una familia de polinomios ortogonales matriciales, donde $n$ corresponde al grado del polinomio. Entonces, para algunas matrices $A_n$, $B_n$ y $C_n$.*

$$xP_n(x) = C_n P_{n+1}(x) + B_n P_n(x) + A_n P_{n-1}(x).$$

*Demostración.* Como los polinomios $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ forman una base para el espacio de los polinomios matriz valuados, podemos escribir

$$xP_n(x) = \sum_{i=0}^{n+1} \alpha_i P_i(x),$$

donde $\alpha_i$ son matrices constantes. Multiplicando la expresión de arriba por $P_m^*(x)W(x)$ por la derecha e intregrando se obtiene la siguiente expresión

$$\int xP_n(x) W(x) P_m^*(x)\, dx = \alpha_m.$$

De la ecuación anterior y la propiedad de ortogonalidad se sigue que $\alpha_m = 0$ para $m \leq n-2$, por lo tanto existen $A_n$, $B_n$ y $C_n$ matrices, tales que

$$xP_n(x) = C_n P_{n+1}(x) + B_n P_n(x) + A_n P_{n-1}(x).$$

□

En el siguiente lema se expresan las matrices $A_n$, $B_n$ y $C_n$ en términos de los momentos de la medida.

**Lema 2.2.4.** *Los polinomios ortogonales mónicos definidos como en (2.5) satisfacen la siguiente relación de recurrencia*

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + B_n P_n(x) + A_n P_{n-1}(x). \tag{2.6}$$

*con $A_n^* = S_{n-1}^{-1} S_n$, $B_n^* = u_n^n - u_{n-1}^{n-1}$, donde*

$$u^{n-1} = \begin{pmatrix} u_0^{n-1} \\ u_1^{n-1} \\ \vdots \\ u_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} = H_n^{-1} \nu_{n,2n-1}; \quad u_n^n = S_n^{-1}(\mu_{2n+1} - \nu_{n,2n-1}^* H_n^{-1} \nu_{n+1,2n}). \tag{2.7}$$

*Demostración.* Del lema se obtiene la siguiente relación de recurrencia

$$xP_n(x) = C_nP_{n+1}(x) + B_nP_n(x) + A_nP_{n-1}(x). \tag{2.8}$$

Multiplicando la expresión (2.8) por $W(x)P_{n+1}^*(x)$ a la derecha e integrando se obtiene

$$\int xP_n(x)W(x)P_{n+1}^*(x)\,dx = C_nS_{n+1}.$$

Notemos que de la propiedad de ortogonalidad se sigue que

$$\int xP_n(x)W(x)P_{n+1}^*(x)\,dx = \int xP_n(x)W(x)x^{n+1}\,dx = S_{n+1},$$

por lo tanto $C_n = I$. Podemos reescribir la expresión anterior de la siguiente manera

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \int P_n(x)W(x)xP_{n+1}^*(x)\,dx \\ &= \int P_n(x)W(x)\left(P_{n+2}(x) + B_{n+1}P_{n+1}(x) + A_{n+1}P_n(x)\right)^*\,dx \\ &= 0 + 0 + \int P_n(x)W(x)P_n^*(x)A_{n+1}^*\,dx = S_nA_{n+1}^*, \end{aligned}$$

implicando que

$$A_n^* = S_{n-1}^{-1}S_n, \ \ o \ A_n = S_nS_{n-1}^{-1}.$$

Después de multiplicar (2.8) por $W(x)P_n^*(x)$ a la derecha e integrar obtenemos

$$\int xP_n(x)W(x)P_n^*\,dx = B_n\left(\int P_n(x)W(x)P_n^*\,dx\right) = B_nS_n,$$

por otro lado se tiene

$$\int P_n(x)W(x)xP_n^*\,dx = \left(\int P_n(x)W(x)P_n^*\,dx\right)B_n^* = S_nB_n^*,$$

lo cual implica que $B_nS_n = S_nB_n^*$. Para calcular $B_n$ en términos de los momentos se comparan las potencias de $x$ en la relación de recurrencia (2.7), se procede reescribiéndola como

$$\begin{aligned} x\left(x^nI - \begin{bmatrix} I & xI & \dots & x^{n-1}I \end{bmatrix} u^n\right) &= \left(x^{n+1}I - \begin{bmatrix} xI & x^2I & \dots & x^nI \end{bmatrix} u^n\right) \\ &= B_n\left(x^nI - \begin{bmatrix} I & xI & \dots & x^{n-1}I \end{bmatrix} u^{n-1}\right) \\ &= A_n\left(x^{n-1}I - \begin{bmatrix} I & xI & \dots & x^{n-2\cdot}I \end{bmatrix} u^{n-2}\right). \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes de $x^n$ obtenemos $-u_{n-1}^{n-1} = -u_n^n + B_n$, por lo tanto

$$B_n = u_n^n - u_{n-1}^{n-1}.$$

Calculemos $u_n^n$ en términos de la medida de ortogonalidad. Con el fin de calcular el inverso de $H_{n+1}$ particionamos las matrices $H_{n+1}$ y $H_{n+1}^{-1}$ de la siguiente manera

$$H_{n+1} = \begin{pmatrix} H_n & \nu_{n,2n-1} \\ \nu_{n,2n-1}^* & \mu_{2n} \end{pmatrix} \quad y \quad H_{n+1}^{-1} = \begin{pmatrix} a & \gamma \\ \gamma^* & \alpha \end{pmatrix}, \tag{2.9}$$

luego mediante cálculos directos se obtienen las siguientes relaciones

$$\alpha = S_n^{-1}, \quad \gamma = -H_n^{-1}\nu_{n,2n-1}S_n^{-1}, \tag{2.10}$$

y

$$A = H_n^{-1} + H_n^{-1}\nu_{n,2n-1}S_n^{-1}\nu_{n,2n-1}^* H_n^{-1} = \left(H_n - \nu_{n,2n-1}\mu_{2n}^{-1}\nu_{n,2n-1}^*\right)^{-1}. \tag{2.11}$$

De la definición de $u^n = H_{n+1}^{-1}\nu_{n+1,2n+1}$ y la expresión para $H_n^{-1}$ se sigue que

$$\begin{aligned} u_n^n &= \gamma^*\nu_{n+1,2n} + \alpha\mu_{2n+1} = -S_n^{-1}\nu_{n,2n-1}^* H_n^{-1}\nu_{n+1,2n} + S_n^{-1}\mu_{2n+1} \\ &= S_n^{-1}(\mu_{2n+1} - \nu_{n,2n-1}^* H_n^{-1}\nu_{n+1,2n}), \end{aligned}$$

lo cual concluye la prueba del teorema. □

Como ya habíamos notado que la invertibilidad de las matrices $H_n$ implica la invertibilidad de las matrices $S_n$ se tiene que las matrices $A_n$ están bien definidas.

*Observación* 2.2.5. Podemos reescribir la relación de recurrencia (2.7) como

$$\bar{J}P(x) = xP(x)$$

donde

$$\bar{J} = \begin{pmatrix} B_0 & I & 0 & \dots & & & \\ A_1 & B_1 & I & 0 & \dots & & \\ 0 & A_2 & B_1 & I & 0 & \dots & \\ 0 & 0 & A_3 & B_3 & I & 0 & \dots \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & \end{pmatrix}$$

y $P(x) = [P_0(x), P_1(x),\ P_2(x),\ P_3(x),\ P_4(x), \dots]^T$ es el vector de los polinomios matriciales.

*Observación* 2.2.6 (Teorema de Favard). Recordemos el teorema de Favard que enunciamos en el capítulo anterior para polinomios ortogonales (escalares). En [18] se ha probado que un sistema de polinomios ortogonales matriciales que satisfacen una relación de recurrencia a $2N+1$ términos se puede expresar en términos de polinomios ortonormales matriciales, tal que sus coeficientes son matrices de tamaño $N \times N$. Por otro lado en [8] se prueba que que cualquier sucesión de polinomios que satisface una relación de recurrencia a $2N+1$ términos es ortogonal con respecto a una matriz de medidas definida positiva, de tamaño $N \times N$. Como consecuencia de los resultados de estos dos artículos, se tiene que para cualquier sucesión de polinomios ortonormales matriciales existe un peso matricial positivo definido con respecto al cual los polinomios son ortonormales.

**Definición 2.2.7.** Se define una familia $\{\bar{P}_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ de polinomios ortonormales matriciales de la siguiente manera

$$\bar{P}_n(x) = S_n^{-1/2} P_n(x), \; n \geq 0, \tag{2.12}$$

donde $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ son los polinomios definidos en (2.5).

**Proposición 2.2.8.** *La sucesión de polinomios matriciales $\{\bar{P}_n\}_{n=0}^{\infty}$ definida por (2.12) es ortonormal.*

*Demostración.* Como la sucesión definida en (2.5) es ortogonal y por el Lema 2.2.2 se tiene

$$\begin{aligned}\int \bar{P}_n(x)W(x)\bar{P}_n^*(x)\,dx &= S_n^{-1/2}\left(\int P_n(x)W(x)P_n^*(x)\,dx\right)S_n^{-1/2}, \\ &= S_n^{-1/2} S_n S_n^{-1/2} = I.\end{aligned}$$

□

**Lema 2.2.9.** *La sucesión de polinomios $\{\bar{P}_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ definida en (2.12) satisface la siguiente relación de recurrencia*

$$x\bar{P}_n(x) = \bar{C}_n\bar{P}_{n+1} + \bar{B}_n\bar{P}_n + \bar{A}_n\bar{P}_{n-1}(x), \tag{2.13}$$

$$\textit{donde } \bar{B}_n = \bar{B}_n^*,$$

$$\bar{A}_n = S_n^{1/2}S_{n-1}^{-1/2} \quad y \quad C_n = A_{n+1}^*.$$

*Demostración.* Como la sucesión $\{\bar{P}_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es ortogonal, existen $\bar{A}_n$, $\bar{B}_n$ y $\bar{C}_n$ coeficientes matriciales, de tal forma que

$$x\bar{P}_n(x) = \bar{C}_n\bar{P}_{n+1}(x) + \bar{B}_n\bar{P}_n(x) + \bar{A}_n\bar{P}_{n-1}(x).$$

Consideremos

$$\int x\bar{P}_{n+1}(x)W(x)\bar{P}_n^*(x)\,dx = \int \bar{A}_{n+1}\bar{P}_n(x)W(x)\bar{P}_n^*(x)\,dx = \bar{A}_{n+1},$$

por otro lado

$$\int x\bar{P}_{n+1}(x)W(x)\bar{P}_n^*(x)\,dx = \int \bar{P}_{n+1}^*W(x)x^{n+1}S_n^{-1/2}\,dx = S_{n+1}^{-1/2}S_{n+1}S_n^{-1/2} = S_{n+1}^{1/2}S_n^{-1/2},$$

esto implica que

$$\bar{A}_n = S_n^{1/2}S_{n-1}^{-1/2}.$$

Análogamente obtenemos

$$\bar{B}_n = \int x\bar{P}_n(x)W(x)\bar{P}_n^*(x)\,dx = \bar{B}_n^* = S_n^{-1/2}B_nS_n^{1/2}.$$

Por último de la ecuación

$$\bar{C}_n = \int x\bar{P}_n(x)W(x)\bar{P}_{n+1}^*(x)\,dx = \int \bar{P}_n(x)W(x)x\bar{P}_{n+1}^*(x)\,dx = \bar{A}_{n+1}^*,$$

se concluye que $\bar{C}_n = \bar{A}_{n+1}^*$. □

## 2.3. Condiciones de Normalización

A continuación se propone un producto interno distinto al definido en (2.1).

**Proposición 2.3.1.** *El producto interno* $(\cdot,\cdot)$ *con respecto a* $M$, *se define de la siguiente manera*

$$(P,Q)=\int Q^*(x)dM(x)P(x)\ \in \mathbb{C}^{N\times N} \tag{2.14}$$

*con* $P$, $Q\in\mathcal{P}_{N\times N}[x]$.

Este producto satisface las mismas propiedades de positividad y conjugación que el producto (2.1), sin embargo la propiedad de linealidad es distina como se exhibe a continuación:

$$\begin{aligned}(R,PA+BQ)&=\int R^*dM(PA+BQ)=\int R^*\ dMPA+\int R^*\ dMQB\\ &=(R,P)A+(R,Q)B\end{aligned}.$$

**Proposición 2.3.2.** *Los productos internos definidos en (2.1) y (2.14) verifican la siguiente relación*

$$\langle P^*,\ Q^*\rangle^*=(P,Q).$$

*Demostración.* Sean $P,Q\in\mathcal{P}_{N\times N}[x]$, por propiedad del producto $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$ interno se tiene

$$\langle P^*,Q^*\rangle^*=\langle Q^*,P^*\rangle$$

y por definición

$$\langle Q^*,P^*\rangle=\int Q^*dMP=(P,Q).$$

□

**Definición 2.3.3.** Dos pesos matriciales $W_1(x)$ y $W_2(x)$ son **similares** si existe un matriz no singular $T$, tal que

$$W_1(x)=TW_2(x)T^*.$$

Dada está noción de similitud, consideremos dos casos específicos.

**Definición 2.3.4.** Un peso matricial $W$ se **reduce a tamaños menores**, si existe una matriz invertible $T$ para la cual

$$W(x)=T\begin{pmatrix}Z_1(x)&\theta\\ \theta&Z_2(x)\end{pmatrix}T^*,$$

donde $Z_1$ y $Z_2$ son pesos matriciales de menor tamaño.

Notemos que los polinomios ortogonales matriciales con respecto a $W$ son

$$P_n(x) = \begin{pmatrix} P_{n,1} & \theta \\ \theta & P_{n,2} \end{pmatrix} T^{-1}, \qquad n \geq 0,$$

donde $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ son los polinomios ortogonales matriciales con respecto a $Z_i(x)$, $i = 1, 2$.

**Definición 2.3.5.** Un peso matricial $W$ se reduce a pesos escalares si existe una matriz invertible $T$, para la cual $W(x) = TD(x)T^*$ con $D(x)$ diagonal.

En otras palabras, se puede definir una relación de recurrencia para pesos matriciales: $W_1$ es similar a $W_2$ si existe una matriz $T$ no singular e independiente tal que $W_1 = TW_2T^*$. Los pesos matriciales reducibles a escalares son precisamente los que corresponden a la clase de los pesos diagonales.

# Capítulo 3

# Polinomios ortogonales matriciales que satisfacen una ecuación diferencial de segundo orden

## 3.1. Introducción

Como ya vimos para el caso escalar, las familias clásicas son las únicas familias que satisfacen una ecuación diferencial de la forma (1.5). Es natural buscar aquellas familias de polinomios ortogonales matriciales que verifiquen ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes independientes del grado de cada polinomio.

En este capítulo supondremos que la matriz de medidas $M$ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue y se escribirá $dM(x) = W(x)\,dx$, con $W(x) \in \mathbb{C}^{k\times k}$, $x \in \mathbb{R}$, $k \geq 1$. A la matriz $W(x)$ le llamaremos peso matricial y lo supondremos suficientemente diferenciable.

**Definición 3.1.1.** Existen dos operadores diferenciales matriciales de segundo orden, asociado a las funciones matriciales $A_2$, $A_1$, $A_0$ y se definen:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{2,R} &= D''A_2 + D'A_1 + D^0 A_0 \qquad \textbf{a derecha} \\ \mathcal{D}_{2,L} &= A_2 D'' + A_1 D' + A_0 D^0 \qquad \textbf{a izquierda}. \end{aligned}$$

Observemos que

$$\begin{aligned} (CP+Q)\mathcal{D}_{2,R} &= CP''A_2 + CP'A_1 + CPA_0 + Q''A_2 + Q'A_1 + QA_0 \\ &= C(P)\mathcal{D}_{2,R} + (Q)\mathcal{D}_{2,R}, \end{aligned}$$

donde $P, Q$ son polinomios matriciales y $C$ una matriz constante. Esto quiere decir que $\mathcal{D}_{2,R}$ es lineal a izquierda, pero en general no es lineal a derecha (i.e. $\mathcal{D}_{2,R}(PC) \neq \mathcal{D}_{2,R}(P)C$). Por otro lado se tiene que el operador $\mathcal{D}_{2,L}$ es lineal a derecha, pero en general no es lineal a izquierda. La falta de linealidad a izquierda del operador $\mathcal{D}_{2,L}$ tendrá ciertas consecuencias no deseadas. La razón por la que el operador diferencial a derecha es más natural con el producto interior asociado al peso $W$ definido por

$$\langle P, Q\rangle = \int P(x)W(x)Q^*(x)\,dx, \tag{3.1}$$

es la linealidad a izquierda de este.

Otra razón para considerar el operador diferencial a izquierda de menor interés en este trabajo, es que para operadores de la forma $\mathcal{D}_{2,L}$ con respecto al producto definido 2.1, en [9] expone el siguiente lema.

**Lema 3.1.2.** *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$W$ es un peso matricial tal que su producto interior definido como en (2.1), tiene un operador diferencial simétrico a izquierda de segundo orden.*

2. *Existe una matriz no singular $T$ tal que $W = T^*XT$ donde $X = \nu I$, con $\nu$ un peso escalar clásico (i.e. alguno de los pesos de Jacobi, Laguerre o Hermite salvo un cambio lineal de variable).*

Por lo tanto en este capítulo, consideraremos únicamente el operador diferencial a derecha $\mathcal{D}_{2,R}$. Para hacer más ligera la notación lo denotaremos $\mathcal{D} := \mathcal{D}_{2,R}$.

## 3.2. Ecuaciones diferenciales y de momentos

En esta sección nos enfocaremos en caracterizar las sucesiones de polinomios ortogonales matriciales $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ que satisfacen una ecuación diferencial de segundo orden (a derecha) de la forma

$$P_n''(x)A_2(x) + P_n'(x)A_1(x) + P_n(x)A_0(x) = \Gamma_n P_n(x), \quad n \geq 0, \tag{3.2}$$

donde $A_2$, $A_1$ y $A_0$ son polinomios ortogonales matriciales de grados a lo más 2, 1 y 0 respectivamente y $\Gamma_n$ son matrices Hermitianas.

Esto significa que cada polinomio ortogonal matricial $P_n$ es función propia del operador diferencial a derecha

$$\mathcal{D}_{2,R} = \frac{d^2}{dx^2}A_2(x) + \frac{d^1}{dx^1}A_1(x) + \frac{d^0}{dx^0}A_0(x).$$

Notemos que si una sucesión de polinomios ortonormales con respecto a $W$, satisface una ecuación diferencial de segundo orden a derecha, entonces también la sucesión de polinomios ortonormales con respecto al peso matricial $TWT^*$ para cualquier matriz $T$ invertible, satisface una ecuación de la forma (3.2) con coeficientes diferenciales $TA_iT^{-1}$, $i = 1, 2, 3$. Por lo tanto, cuando busquemos pesos matriciales $W$ que tengan una sucesión de polinomios ortonormales tal que satisface una ecuación diferencial como (3.2), no es una restrición suponer que $W(a) = I$ para cierto número real $a$ mientras tengamos que $W(x)$ es invertible para alguna $x$.

La consecuencia de estas consideraciones, es que cuando estemos en búsqueda de los ejemplos de tamaño $N$ que satisfagan (3.2), siempre vamos a suponer que nuestro peso matricial no se reduce a tamaños menores o a pesos escalares, y que para cierto número real $a$, tenemos que $W(a) = I$. Es directo verificar que para el operador a derecha $\mathcal{D}$ la condición de simetría es la siguiente.

**Proposición 3.2.1.** *El operador $\mathcal{D}_2$ es simétrico con respecto al producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ definido en $\mathcal{P}_{N\times N}$, si para cualesquiera $P$, $Q$ polinomios matriciales se cumple*

$$\langle P\mathcal{D}_2, Q \rangle_W = \langle P, Q\mathcal{D}_2 \rangle_W$$

El operador $\mathcal{D}_2$ es simétrico con respecto al producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ definido en $\mathcal{P}_{N\times N}$, si para cualesquiera $P$, $Q$ polinomios matriciales se cumple

$$\langle P\mathcal{D}_2, Q \rangle_W = \langle P, Q\mathcal{D}_2 \rangle_W$$

**Lema 3.2.2.** *Sea $\mathcal{D}_2$ operador simétrico para $\langle \cdot\, , \cdot \rangle_W$, entonces la sucesión $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, de polinomios ortonormales matriciales con respecto a W, satisface una ecuación diferencial de segundo orden de la forma*

$$(P_n)\mathcal{D}_2 = \Gamma_n P_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

*con $\Gamma_n$ matrices Hermitianas.*

*Demostración.* Sea $n \in \mathbb{N}$ (fija) tenemos $(P_n)\mathcal{D}_2 = \sum_{k=0}^{n} \Gamma_{n,k} P_k$.

Si $k < n$, por la simetría y ortonormalidad de la sucesión se cumplen las expresiones:

$$\Gamma_{n,k} = \langle (P_n)\mathcal{D}_2, P_k \rangle = \langle P_n, (P_k)\mathcal{D}_2 \rangle = \theta.$$

Para concluir la prueba basta con probar que $\Gamma_n := \Gamma_{n,n}$ es Hermitiana.

Por la ortonormalidad de la sucesión y la simetría del operador se tiene

$$\Gamma_{n,n} = \langle (P_n)\mathcal{D}_2, P_n \rangle = \langle P_n, (P_n)\mathcal{D}_2 \rangle = \Gamma_{n,n}^*.$$

$\square$

Se ha demostrado en [9] que el converso del Lema anterior se cumple para el operador $\mathcal{D}_{2,R}$, pero no para $\mathcal{D}_{2,L}$, pues recordemos que este último operador no es lineal a izquierda.

Escribimos $A_2(x) = x^2 A_{2,2} + xA_{2,1} + A_{2,0}$ y $A_1(x) = xA_{1,1} + A_{1,0}$ donde $A_{i,j}$ son matrices númericas.

El siguiente lema establece la relación entre la existencia del operador diferencial simétrico $\mathcal{D}_2$ y la existencia una fórmula para los momentos.

**Proposición 3.2.3.** *Las siguientes condiciones son equivalentes.*

*(1) El operador $\mathcal{D}_2$ es simétrico con respecto a $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$.*

*(2) Los momentos $\mu_n$ de $W$ satisfacen las siguientes ecuaciones*

$$A_{2,2}\mu_n + A_{2,1}\mu_{n-1} + A_{2,0}\mu_{n-2} = \mu_n A_{2,2}^* + \mu_{n-1}A_{2,1}^* + \mu_{n-2}A_{2,0}^*, \qquad n \geq 2, \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} -2(n-1)(A_{2,2}\mu_n + A_{2,1}\mu_{n-1} + A_{2,0}\mu_{n-2}) & \\ - (A_{1,1}\mu_n + A_{1,0}\mu_{n-1}) &= \mu_n A_{1,1}^* + \mu_{n-1}A_{1,0}^*, \quad n \geq 1. \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} n(n-1)(A_{2,2}\mu_n + A_{2,1}\mu_{n-1} + A_{2,0}\mu_{n-2}) & \\ + n(A_{1,1}\mu_n + A_{1,0}\mu_{n-1}) + A_0\mu_n &= \mu_n A_0^*, \qquad n \geq 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} &\langle (x^nI)\mathcal{D}_2, x^mI\rangle_W \\ &= \left\langle A_2(x)n(n-1)x^{n-2} + A_1(x)nx^{n-1} + A_0(x)x^nI, x^mI\right\rangle_W \\ &= \left\langle A_{2,2}n(n-1)x^nI + A_{2,1}n(n-1)x^{n-1}I + A_{2,0}n(n-1)x^nI, x^mI\right\rangle_W \\ &+ \left\langle A_{1,1}nx^nI + A_{1,0}nx^{n-1}I + A_0x^nI, x^mI\right\rangle_W \\ &= n(n-1)(A_{2,2}\mu_{n+m} + A_{2,1}\mu_{n+m-1} + A_{2,0}\mu_{n+m-2}) + n(A_{1,1}\mu_{n+m} \\ &+ A_{1,0}\mu_{n+m-1}) + A_0\mu_{n+m} \\ &= n(n-1)B_{n+m} + nC_{n+m} + D_{n+m}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Donde

$$\begin{aligned} B_{n+m} &:= A_{2,2}\mu_{n+m} + A_{2,1}\mu_{n+m-1} + A_{2,0}\mu_{n+m-2}, \\ C_{n+m} &:= A_{1,1}\mu_{n+m} + A_{1,0}\mu_{n+m-1}, \\ D_{n+m} &:= A_0\mu_{n+m}. \end{aligned}$$

Análogamente obtenemos

$$\langle x^nI, \mathcal{D}_2(x^mI)\rangle_W = m(m-1)B_{n+m}^* + mC_{n+m}^* + D_{n+m}^*$$

Como $\mathcal{D}_2$ es simétrico $\langle (x^nI)\mathcal{D}_2, x^mI\rangle_W = \langle x^nI, (x^mI)\mathcal{D}_2\rangle_W$, tenemos la siguiente ecuación de momentos

$$\begin{aligned} n(n-1)B_{n+m} + nC_{n+m} + D_{n+m} & \\ = m(m-1)B_{n+m}^* + mC_{n+m}^* + D_{n+m}^*, &\qquad n, m \geq 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Para $n-1$ y $m=1$, obtenemos

$$(n-1)(n-2)B_n + (n-1)C_n + D_n = C_n^* + D_n^* \tag{3.8}$$

Para $m = 0$, obtenemos

$$n(n-1)B_n + nC_n + D_n = D_n^*. \tag{3.9}$$

Así la ecuación (3.5) se cumple.

Para probar las otras dos ecuaciones, se resta (3.8) a (3.9) y obtenemos

$$2(n-1)B_n + C_n = -C_n^*,$$

lo que implica

$$B_n = \frac{-1}{2(n-1)}(C_n^* + C_n), \tag{3.10}$$

esto prueba la ecuación (3.4).

También de (3.10), se concluye que $B_n = B_n^*$, que es la afirmación (3.3).

Ahora supongamos (2) y veremos que el operador $\mathcal{D}$ es simétrico. De la ecuación (3.4) para $n+m$ se obtiene

$$n(n-1)B_{n+m} + nC_{n+m} + D_{n+m} = -m(m-1)B_{n+m} - 2mnB_{n+m} - mC_{n+m} + D_{n+m}^*$$

y por la ecuación (3.3) se sigue

$$n(n-1)B_{n+m} + nC_{n+m} + D_{n+m} = m(m-1)B_{n+m} + mC_{n+m}^* + D_{n+m}^*.$$

Por último por la ecuación (3.5) tenemos

$$n(n-1)B_{n+m} + nC_{n+m} + D_{n+m} = m(m-1)B_{n+m}^* + mC_{n+m}^* + D_{n+m}^*.$$

Como consecuencia de lo anterior $\langle (x^n I)\mathcal{D}_2, x^m I\rangle_W = \langle x^n I, (x^m I)\mathcal{D}_2\rangle_W$, $n, m \geq 0$. Extendiendo por linealidad, concluimos que $\mathcal{D}_2$ es simétrico. □

Las ecuaciones de momentos del Lema previo, pueden escribirse en términos de ecuaciones diferenciales para la matriz de medidas $W$.

**Proposición 3.2.4.** *Sea $W$ función de peso con soporte en el intervalo $(a, b)$. Si $\mathcal{D}_2$ es simétrico con respecto al producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$, entonces $W$ satisface*

$$A_2W = WA_2^*, \tag{3.11}$$

$$2(A_2W)' = WA_1^* + A_1W, \tag{3.12}$$

$$(A_2W)'' - (A_1W)' + A_0W = WA_0^*. \tag{3.13}$$

*Con condiciones de frontera*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0} A_2(x)W(x) &= 0 \\ \lim_{x\to x_0} (A_2(x)W(x))' - A_1(x)W(x) &= 0 \end{aligned} \tag{3.14}$$

*para $x_0 = a, b$.*

*Demostración.* Consideremos las ecuaciones de momento del la proposición anterior. Reescribiendo la ecuación (3.3) se tiene

$$\int_a^b x^{n-2} A_2 W(x)\, dx = \int_a^b x^{n-2} W(x) A_2^*\, dx, n \geq 2$$

que implica que $A_2 W = W A_2^*$. Hacemos lo mismo para (3.4)

$$-2(n-1) \int_a^b x^{n-2} W(x) A_2\, dx - \int_a^b x^{n-1} A_1 W\, dx = \int_a^b x^{n-1} W A_1^*\, dx.$$

Integrando por partes se tiene

$$\begin{aligned} -2x^{n-1} W(x) A_2(x)|_a^b + 2 \int_a^b x^{n-1} (W(x) A_2(x))'\, dx& \\ - \int_a^b x^{n-1} A_1(x) W(x)\, dx &= \int_a^b x^{n-1} W(x) A_1^*(x)\, dx, \end{aligned}$$

luego como $A_2(x)W(x)$ se anula en los extremos del intervalo, se tiene que

$$2 \int_a^b x^{n-1} (W(x) A_2(x))'\, dx - \int_a^b x^{n-1} A_1(x) W(x)\, dx = \int_a^b x^{n-1} W(x) A_1^*(x)\, dx \quad n \geq 0.$$

Entonces

$$2(W(x)A_2(x))' = W(x)A_1^*(x) + A_1(x)W(x).$$

Análogamente para (3.5), integrando por partes y aplicando las condiciones de frontera, se obtiene

$$\int_a^b x^n (A_2(x)W(x))''\, dx + \int_a^b x^n (A_1 W)'\, dx + \int_a^b x^n A_0(x) W(x)\, dx = \int_a^b x^n W(x) A_0^*(x)\, dx$$

Con lo cual obtenemos (3.13). □

Bajo ciertas condiciones la ecuación (3.12) es consecuencia de (3.11) y (3.13). Sin embargo, veremos que (3.12) jugará un papel importante, para encontrar una solución general de las tres ecuaciones (3.11), (3.13) y (3.12). Cuando $W$, $A_2$, $A_1$ y $A_0$ son reales, las tres ecuaciones de simetría (3.11), (3.13) y (3.12) dan como resultado la ecuación $(A_2 W)' = A_1 W$, esta es la ecuación de Pearson (1.9).

## 3.3. Un método general para determinar $\{W, \mathcal{D}\}$

En esta sección se dará un método para calcular soluciones para las ecuaciones de simetría:

$$\begin{aligned} A_2 W &= W A_2^* \\ 2(A_2 W)' &= W A_1^* + A_1 W \\ (A_2 W)'' - (A_1 W)' + A_0 W &= W A_0^*. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Como resultado de este proceso obtendremos una forma particularmente atractiva para el peso matricial $W(x)$.

El objetivo es "extraer" un peso escalar apropiado $\rho(x)$ de $W(x)$, por ejemplo para el caso escalar: $W(x) = \rho(x)I$.

Regresamos a la tarea de resolver las ecuaciones en (3.15). Supongamos primero que $A_2(x)$ es una matriz escalar real-valuada: $A_2(x) = a_2(x)I$ y $a_2(x)$ no se anula en el interior del soporte de $W(x)$. Más adelante veremos el caso general.

La primera ecuación en (3.15) se satisface trivialmente.

A continuación definiremos algunas funciones auxiliares. Para un peso escalar no específico $\rho(x)$, definimos $c(x)$ como

$$c(x) = \frac{(\rho a_2)'}{\rho}. \tag{3.16}$$

También, se define la función matricial real-valuada $F(x)$, mediante la siguiente relación

$$A_1(x) = 2a_2(x)F(x) + c(x)I. \tag{3.17}$$

Aquí encontramos la diferencia más grande con respecto al caso escalar, donde $F(x) \equiv 0$. Veremos que $F(x)$ da lugar a una familia no trivial de matrices $T(x)$, que factorizan $W(x)$. Finalmente, definimos $Z(x)$ por $W = Z\rho$. Reescribimos, la segunda ecuación en términos de estas funciones

$$\begin{aligned} 2c(x)\rho(x)Z(x) + a_2(x)\rho(x)Z'(x) - (2a_2(x)F(x) + c(x))W(x) \\ = W(x)(2F^*(x)a_2(x) + c(x)), \end{aligned} \tag{3.18}$$

que simplificando se obtiene

$$Z'(x) = F(x)Z(x) + Z(x)F^*(x). \tag{3.19}$$

Ahora, si definimos la función matriz valuada $T(x)$ por $T'(x) = F(x)T(x)$, $T(a) = I$, tenemos

$$Z(x) = T(x)Z(a)T^*(x), \tag{3.20}$$

o finalmente, obtenemos la forma factorizada de nuestro peso matricial

$$W(x) = \frac{\rho(x)}{\rho(a)} T(x)W(a)T^*(x). \tag{3.21}$$

La elección de $a$ es de manera conveniente. Finalmente, consideremos la tercera ecuación en (3.15). Restando el doble de la ecuación (3.13) a la derivada de (3.12) se obtiene

$$(WA_1^* - A_1W)' = 2(WA_0^* - A_0W). \tag{3.22}$$

Aplicando la adjunta de la ecuación (3.17) obtenemos

$$(a_2WF^* - Fa_2W)' = (WA_0^* - A_0W). \tag{3.23}$$

Usando la ecuación (3.12) para reemplazar la expresión $(a_2W)'$ se sigue que

$$\left(\frac{WA_1^* + A_1W}{2}\right)F^* + (a_2W)(F^*)' - F'(a_2W) - F\left(\frac{WA_1^* + A_1W}{2}\right) = WA_0^* - A_0W \tag{3.24}$$

y luego aplicando la ecuación (3.17) y su adjunta se tiene

$$W(x)(a_2(F^*)^2 + cF + a_2(F^*)' - A_0^*) = (a_2F^2 + cF + a_2F' - A_0)W(x). \tag{3.25}$$

Tomamos $\chi(x) = T^{-1}(a_2F^2 + cF + a_2F' - A_0)T$ y concluimos que la expresión (3.25) es equivalente a que la matriz $\chi(x)W(a)$ sea Hermitiana para toda $x$.

Así hemos probado el siguiente teorema.

**Teorema 3.3.1.** *Sean $\rho$, $a_2$, $A_1$ y $A_0$ una función (real) escalar, un polinomio real de grado a lo más 2, y polinomios matriciales de grados menores o iguales que 1 y 0, respectivamente. Definimos $A_2(x) = a_2(x)I$, la función escalar $c$ como*

$$c(x) = \frac{(\rho(x)a_2(x))'}{\rho(x)}, \tag{3.26}$$

*y la función matricial $F(x)$ definida por la relación*

$$A_1(x) = a_2(x)F(x) + c(x)I. \tag{3.27}$$

*Denotamos por $T$ la solución de la ecuación diferencial*

$$T'(x) = F(x)T(x), \qquad T(a) = I, \tag{3.28}$$

*y se define la función matricial $\chi$ como*

$$\chi(x) = T^{-1}(x)(a_2(x)F^2(t) + c(x)F(x) + a_2(x)F'(x) - A_0)T(x). \tag{3.29}$$

*Si la función matricial $\chi(x)W(a)$ es Hermitiana para toda $x$, entonces el peso matricial*

$$W(x) = \frac{\rho(x)}{\rho(a)}T(x)W(a)T^*(x) \tag{3.30}$$

*satisface las ecuaciones diferenciales de simetría (3.15). El converso también se cumple.*

Las siguientes tres secciones despliegan una variedad de ejemplos interesantes. Todos los ejemplos tienen en común que para exactamente una de las matrices ($A$ o $B$) que constituyen función matricial $F(x)$, está permitida ser no nula. Estamos interesados únicamente ejemplos en los que $W(x)$ no se reduzca a tamaños menores.

Para hacer más ligera la notación en todo lo que resta del capítulo introducimos las siguientes matrices.

- Dados $\nu_1, \cdots, \nu_{N-1} \in \mathbb{C}$ arbitrarios, tal que $\nu_1 \cdots \nu_{N-1} \neq 0$, introducimos la matriz nilpotente de orden $N$ definida por

$$L := \begin{pmatrix} 0 & \nu_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \nu_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \nu_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{N-1} \nu_i \varepsilon_{i,i+1}. \tag{3.31}$$

- La matriz diagonal $J \in \mathbb{C}^{N\times N}$ esta definida por

$$J := \sum_{i=1}^{N} (N-i)\varepsilon_{i,i}. \tag{3.32}$$

## 3.4. Ejemplos con $A_2 = I$

En el caso escalar, la única función de peso que tiene un operador simétrico diferencial de segundo orden con $a_2 = 1$ es la función de peso $\omega(x) = e^{-x^2}$ asociada a los polinomios de Hermite, salvo cambios lineales de variable.

Consideremos $\rho(x) = e^{-x^2}$ y $a = 0$, pues estamos buscando funciones de peso matriciales $W$ que satisfagan $W(0) = I$. Como $A_2(x) = I$ la expresión para la función escalar $c$ es

$$c(x) = -2x.$$

De esto se sigue directamente que la función matricial $F$ es

$$F(x) = \frac{A_1(x)}{2} + xI.$$

Como $A_1(x)$ es un polinomio matricial de grado a lo más 1, existen $A$ y $B$ matrices independientes de $x$, tales que

$$F(x) = 2Bx + A. \tag{3.33}$$

La ecuación diferencial para la función $T(x)$ viene entonces dada por

$$T'(x) = (2Bx + A)T(x). \tag{3.34}$$

Si $A$ y $B$ no conmutan, en general solo podemos dar una solución formal en serie de potencias para la ecuación diferencial (3.34).

### 3.4.1. Pesos matriciales de la forma $e^{-x^2}e^{Ax}e^{A^*x}$

Resolviendo la ecuación (3.34) para el caso en el que $B$ se anula ($B = \theta$), tenemos $T(x) = e^{Ax}$. Así el peso matricial que estamos buscando tiene la forma

$$W(x) = e^{-x^2}e^{Ax}e^{A^*x}, \qquad \textit{donde } A \textit{ es una matriz de } N \times N. \tag{3.35}$$

Supongamos que $A$ no es unitariamente equivalente a una matriz diagonal por bloques. En otro caso el peso matricial $e^{-x^2}e^{Ax}e^{A^*x}$ se reduce a tamaños menores. En particular $A$ no es una matriz normal.

Por el Teorema (3.34), se debe verificar cual es una elección conveniente de $A_0$ tal que la función matricial

$$\chi(x) = T^{-1}(x)(a_2(x)F(x)^2 + c(x)F(x) + a_2(x)F'(x) - A_0)T(x)$$

es Hermitiana.

Esto quiere decir que tenemos que encontrar aquellas matrices $A$, no unitariamente equivalentes a una matriz diagonal por bloques, para las cuales existe $A_0$ tal que la función matricial

$$\chi(x) = A^2 - 2xA - e^{-Ax}A_0e^{Ax} \tag{3.36}$$

es Hemitiana.

A continuación introduciremos notación, para el manejo de la ecuación anterior.

**Definición 3.4.1.** El conmutador de dos matrices $X, Y \in \mathbb{C}^{N\times N}$ se define como

$$[X,Y] = XY - YX.$$

Observemos que $[X,Y] = 0$ si y sólo si $X$ y $Y$ conmutan.

Para $X \in \mathbb{C}^{N\times N}$ fija, se define el mapeo $ad_X^1(Y) : \mathbb{C}^{N\times N} \to \mathbb{C}^{N\times N}$ dado por $ad_X^1(Y) = [X,Y]$.

Análogamente definimos los siguientes mapeos

$$ad_X^0 Y = Y, \qquad ad_X^2 Y = [X,[X,Y]] = ad_X^1(ad_X^1(Y))$$

y en general

$$ad_X^{n+1}Y = [X, ad_X^n Y]. \tag{3.37}$$

**Lema 3.4.2.** *Sean $A$ y $B \in \mathbb{C}^{N\times N}$, se tiene la siguiente identidad*

$$e^{-Ax}Be^{Ax} = e^{-x(ad_A)}(B).$$

*Demostración.* Consideremos la función $f(x) = e^{-Ax}Be^{Ax}$, donde $x$ es un parámetro real. Calculamos sus derivadas

$$f'(x) = -e^{-Ax}ABe^{Ax} + e^{-Ax}BAe^{Ax} = e^{-Ax}(-1)[A,B]e^{Ax},$$
$$f''(x) = e^{-Ax}(-1)^2A[A,B]e^{Ax} + e^{-Ax}(-1)[A,B]Ae^{Ax} = e^{-Ax}[A,[A,B]]e^{Ax},$$
$$f'''(x) = e^{-Ax}(-1)^3A[A,[A,B]]e^{Ax} + e^{-Ax}(-1)^2[A,[A,B]]e^{Ax}A = -e^{-Ax}[A,[A,[A,B]]]e^{Ax}.$$

Así la derivada $n$-ésima esta dada por

$$f^{(n)}(x) = e^{-Ax} ad_A^n(B) e^{Ax}.$$

A partir de esto, calculamos el polinomio de Taylor alrededor de 0 :

$$\begin{aligned}
e^{-Ax} B e^{Ax} &= f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + \dots \\
&= B + (-1)[A,B]x + (-1)^2[A,[A,B]]\frac{x^2}{2!} + (-1)^3[A,[A,[A,B]]]\frac{x^3}{3!} + \dots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}(ad_A)^n(B) \\
&= e^{-x(ad_A)}(B).
\end{aligned}$$

□

Regresando a nuestro problema, por el Lema anterior podemos reescribir la función matricial $\chi(x)$ como

$$\begin{aligned}
\chi(x) &= A^2 - 2Ax - e^{-x\ ad_A}(A_0) \\
&= (A^2 - A_0) - x(2A - ad_A A_0) - \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n x^n}{n!} ad_A^n A_0.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Entonces la existencia de la matriz $A_0$ que cumple (3.36) es equivalente a la existencia de la matriz $A_0$ tal que las siguientes matrices

$$A^2 - A_0, \qquad 2A - [A, A_0], \qquad ad_A^n A_0, \quad n \geq 2 \tag{3.39}$$

son Hermitianas.

**Teorema 3.4.3.** *Sean $L$ y $J$ definidas por (3.31) y (3.32), respectivamente. Así el peso matricial $W(x) = e^{-x^2} e^{Lx} e^{L^* x}$ satisface la ecuación diferencial*

$$W''(x) + [(2xI - 2L)W(x)]' + A_0 W(x) = W(x) A_0^*, \tag{3.40}$$

*donde la matriz $A_0$ esta dada por*

$$A_0 = L^2 - 2J. \tag{3.41}$$

*Demostración.* Basta verificar que las ecuaciones dadas en (3.39) sean Hermitianas para $A_0$ y $L$.

De la definición de $A_0$ se sigue que $L^2 - A_0$ es diagonal.

Para la segunda condición, mediante un cálculo se obtiene

$$2A - [A, A_0] = 2L + A_0L - LA_0 = \theta. \tag{3.42}$$

También de la ecuación (3.42) se concluye que $L = [L, A_0]/2$, así $L$ conmuta con $[L, A_0]$. Por lo tanto para $n \geq 2$,

$$ad_L^n A_0 = \theta.$$

Así pues las ecuaciones en (3.39) son Hermitianas. □

Además este ejemplo es maximal en el sentido de que si el peso matricial $e^{-t^2}e^{At}e^{A^*t}$, con $A$ nilpotente de orden $N$, satisface una ecuación diferencial de segundo orden dada por (3.12) con $A_2 = I$, entonces $A$ es unitariamente equivalente a la matriz $L$ para ciertos números $\nu_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, N-1$. La demostración de este resultado puede verse en [14].

Podemos obtener más ejemplos a partir de estos, reemplazando los números $\nu_i$ por bloques $V_i$. Estos ejemplos son maximales para matrices nilpotentes $A$ de cualquier orden.

Como existen matrices nilpotentes de orden $N$ las cuales no son unitariamente equivalentes a $A_{N,\nu_1,\ldots,\nu_{N-1}}$, $\nu_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots N-1$, por ejemplo

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

nuestro ejemplo maximal muestra que no todos los pesos matriciales de la forma $W(x) = e^{-x^2}e^{Ax}e^{A^*x}$ que surgen de matrices nilpotentes $A$ de orden $N$ satisfacen una ecuación diferencial como (3.12) con $A_2 = I$.

Es directo ver que el Teorema 3.4.3 se cumple para las matrices $A$ de la forma $A = \alpha I - J$, $\alpha \in \mathbb{C}$; los coeficientes $A_1$ y $A_0$ son entonces $A_1(x) = -2xI + 2A$ y $A_0 = A^2 - J$. Solo falta probar las condiciones de frontera (3.14).

**Proposición 3.4.4.** *Todo peso matricial de la forma $W(x) = e^{-x^2}e^{Lx}e^{L^*x}$ satisface las condiciones de frontera de la Proposición 3.2.4.*

*Demostración.* Podemos reescribir el peso matricial como

$$W(x) = e^{-x^2}Z(x),$$

donde $Z(x)$ es un polinomio matricial. Además $A_2$ y $A_1$ también son polinomiales, por lo que es directo verficar las siguientes ecuaciones

$$\lim_{x\to\pm\infty} A_2(x)W(x) = \lim_{x\to\pm\infty} W(x) = \theta;$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\pm\infty} (A_2(x)W(x))' - A_1(x)W(x) &= \lim_{x\to\pm\infty} W'(x) - A_1(x)W(x) \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} e^{-x^2}Z'(x) - 2xe^{-x^2}Z(x) - A_1(x)W(x) = \theta. \end{aligned}$$

□

Esta familia de polinomios ortogonales matriciales que satisfacen una ecuación diferencial de segundo orden, también verifican una fórmula de tipo Rodrigues, como las familias clásicas. Consideremos la familia de polinomios ortogonales matriciales de tamaño $2 \times 2$ con respecto al peso matricial:

$$W_{a,1}(x) = e^{-x^2} \begin{pmatrix} 1 + a^2x^2 & ax \\ ax & 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R} \backslash \{0\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Denotamos por $\{P_{n,a,1}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ a la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a $W_{a,1}(x)$. La ecuación diferencial de segundo orden que satisface $\{P_{n,a,1}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es

$$P''_{n,a,1}(x) + P'_{n,a,1}(x) \begin{pmatrix} -2x & 2a \\ 0 & -2x \end{pmatrix} + P_{n,a,1}(x) \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2n-2 & 0 \\ 0 & -2n \end{pmatrix} P_{n,a,1}(x).$$

En [13] se prueba que $\{P_{n,a,1}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ satisface la fórmula:

$$\begin{aligned} P_{n,a,1}(x) =& (-2)^{-n} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{a^2n+2} \end{pmatrix} \left[ e^{-x^2} \left( \begin{pmatrix} 1 + a^2x^2 & ax \\ ax & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{a^2n}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \right]^{(n)} \\ & \times \begin{pmatrix} 1 & -ax \\ -ax & 1 + a^2x^2 \end{pmatrix} e^{x^2}, \end{aligned} \tag{3.43}$$

que es una fórmula de tipo Rodrigues.

### 3.4.2. Pesos matriciales de la forma $e^{-x^2}e^{Bx^2}e^{B^*x^2}$

Resolviendo la ecuación (3.34) para el caso $A = \theta$ y entonces el peso matricial que estamos buscando tiene la forma

$$W(x) = e^{-x^2}e^{Bx^2}e^{B^*x^2}, \tag{3.44}$$

donde $B$ es una matriz de $N \times N$. De nuevo suponemos que $B$ no es unitariamente equivalente a una matriz diagonal por bloques, en otro caso el peso matricial $e^{-x^2}e^{Bx^2}e^{B^*x^2}$ se reduciría a tamaños menores.

Del Teorema (3.3.1), tenemos que verificar cual es una elección conveniente de $A_0$ tal que la función matricial (3.25) es Hermitiana. Esto significa encontrar aquellas matrices $B$ no unitariamente equivalentes a una matriz diagonal por bloques para la cual existe $A_0$ tal que la función matricial

$$\chi(x) = 2B + 4(B^2 - B)x^2 - e^{-Bx^2}A_0e^{Bx^2}, \tag{3.45}$$

es Hemitiana o equivalentemente

$$\begin{aligned} \chi(x) &= 2B + 4(B^2 - B)x^2 - e^{-x^2 ad_B A_0} \\ &= (2B - A_0) + (4B^2 - 4B + ad_B A_0)x^2 - \sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} ad_B^n A_0 \end{aligned} \tag{3.46}$$

es Hermitiana. La existencia de la matriz $A_0$ tal que (3.45) se cumple es entonces equivalente a la existencia de la matriz $A_0$ tal que las siguientes matrices

$$2B - A_0, \qquad 4B^2 - 4B + [B, A_0], \qquad ad_B^n A_0,\ n \geq 2. \tag{3.47}$$

son Hermitianas. Primero enfocaremos nuestra atención en las matrices nilpotentes de orden $N$, para las cuales desplegaremos el siguiente ejemplo maximal:

**Teorema 3.4.5.** *Sean $\nu_1, \ldots \nu_{N-1} \in \mathbb{C}, \nu_1, \ldots, \nu_{N-1} \neq 0$ consideremos la matriz nilpotente de orden $N$ definida por*

$$B_{N,\nu_1,\ldots,\nu_{N-1}} = \begin{pmatrix} 0 & \nu_1 & -\nu_1\nu_2 & \nu_1\nu_2\nu_3 & \ldots & (-1)^N\nu_1\nu_2\cdots\nu_{N-1} \\ 0 & 0 & \nu_2 & -\nu_2\nu_3 & \ldots & (-1)^{N-1}\nu_2\cdots\nu_{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -\nu_{N-2}\nu_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \nu_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.48}$$

*Entonces el peso matricial $W(x) = e^{-x^2} e^{B_{N,\nu_1,\ldots,\nu_{N-1}}x^2} e^{B^*_{N,\nu_1,\ldots,\nu_{N-1}}x^2}$, satisface la ecuación diferencial*

$$W''(x) + [(2I - 4B_{N,\nu_1,\ldots,\nu_{N-1}})xW(x)]' + A_0W(x) = W(x)A_0, \tag{3.49}$$

*donde la matriz $A_0$ está dada por*

$$A_0 = 2B_{N,\nu_1,\ldots,\nu_{N-1}} - 4J,$$

*donde $J$ está definida por (3.32). Además este ejemplo es maximal en el sentido de que si el peso matricial $e^{-x^2}e^{Bx^2}e^{B^*x^2}$, con $B$ nilpotente de orden $N$, satisface una ecuación diferencial de segundo orden dada por (3.12) con $A_2 = I$, entonces $B$ es unitariamente equivalente a la matriz $B_{N,\nu_1,\ldots,\nu_{N-1}}$ para ciertos números $\nu_1, \ldots, \nu_{N-1} \in \mathbb{C}$.*

Notemos que $B_{N,\nu_1,\ldots,\nu_{N-1}}$ se puede escribir en términos de $L$ definida en (3.31) como

$$B = \sum_{j=1}^{N-1} (-1)^{j+1} L^j.$$

*Demostración.* Por el Teorema 3.3.1, es suficiente verificar las condiciones en (3.47) para $B = B_{\nu_1,\ldots,\nu_{N-1}}$ y $A_0 = 2B - 4J$.

Se sigue de la definición de $A_0$ que $2B - A_0$ es diagonal, por lo tanto Hermitiana.

Mediante un cálculo y considerando que $B$ es nilpotente se obtiene

$$4(B)^2 - 4B + [B, A_0] = 0,$$

esta es la segunda condición.

De lo anterior también se puede concluir que $\frac{[B,A_0]}{4} = B^2$. De esto se sigue que $B_{\nu_1,\ldots,\nu_{N-1}}$ conmuta con $\frac{[B,A_0]}{4}$. Por lo tanto para todo $n \geq 2$, $ad_B^n(A_0) = \theta$. $\square$

Como existen matrices nilpotentes de orden $N$ las cuales no son unitarimanete equivalentes a $B_{N,\nu_1,\ldots,\nu_{N-1}}$, $\nu_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, N-1$, por ejemplo $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, la condición de maximalidad del Teorema 3.4.3 muestra que no todos los pesos matriciales de la forma (3.44) proporcionados por matrices nilpotentes $B$ de orden $N$ que verifican una ecuación diferencial como (3.12). De nuevo por bloques, se obtienen más ejemplos que involucran matrices nilpotentes.

**Proposición 3.4.6.** *Todo peso matricial de la forma*

$$W(x) = e^{-x^2} e^{B_{N,\nu_1,\ldots,\nu_{N-1}} x^2} e^{B^*_{N,\nu_1,\ldots,\nu_{N-1}} x^2}$$

*satisface las condiciones de frontera de la proposición (3.2.4).*

*Demostración.* Podemos reescribir el peso matricial como

$$W(x) = e^{-x^2} Z(x),$$

donde $Z(x)$ es un polinomio matricial. Además $A_2$ y $A_1$ también son polinomiales, por lo que es directo verificar las siguientes ecuaciones

$$\lim_{x\to\pm\infty} A_2(x)W(x) = \lim_{x\to\pm\infty} W(x) = \theta;$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\pm\infty} (A_2(x)W(x))' - A_1(x)W(x) &= \lim_{x\to\pm\infty} W'(x) - A_1(x)W(x) \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} e^{-x^2} Z'(x) - 2xe^{-x^2} Z(x) - A_1(x)W(x) = \theta. \end{aligned}$$

□

Enunciaremos un par de fórmulas estructurales, para un peso $W$ de tamaño $2 \times 2$. Tomando $B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ obtenemos el peso matricial

$$W_{a,2}(x) = \begin{pmatrix} 1 + a^2x^4 & ax^2 \\ ax^2 & 1 \end{pmatrix} e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Denotamos por $\{P_{n,a,2}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ a la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a $W_{a,2}(x)$. La ecuación diferencial de segundo orden que satisface $\{P_{n,a,2}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es

$$P''_{n,a,2}(x) + P'_{n,a,2}(x) \begin{pmatrix} -2x & 4ax \\ 0 & -2x \end{pmatrix} + P_{n,a,2}(x) \begin{pmatrix} -4 & 2a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2n-4 & 2a(2n+1) \\ 0 & -2n \end{pmatrix} P_{n,a,2}(x).$$

La sucesión $\{P_{n,a,2}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ también satisface la siguiente ecuación de tipo Rodrigues

$$\begin{aligned} P_{n,a,2}(x) =&(-1)^n \left[ e^{-x^2} \left( \begin{pmatrix} 1+a^2x^4 & ax^2 \\ ax^2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{|a|^2}{2}\binom{n+1}{2} + a^2(n-\frac{1}{2})x^2 & -\frac{a}{2} \\ an & 0 \end{pmatrix} \right) \right]^{(n)} \\ &\times \begin{pmatrix} 1 & -ax^2 \\ -ax^2 & 1+a^2x^4 \end{pmatrix} e^{x^2}. \end{aligned}$$

Esto se prueba en [13].

## 3.5. Ejemplos con $A_2 = xI$

En el caso escalar las funciones de peso que admiten un operador diferencial de segundo orden con $a_2 = x$ son las funciones de peso de Laguerre $w(x) = x^\alpha e^{-x},\ \alpha > -1$ (salvo un cambio lineal de variable, como es usual).

Tomamos $\rho(x) = x^\alpha e^{-x}$, $\alpha > -1$, $A_2(x) = xI$ y $a = 1$ (i.e. buscamos un peso matricial $W$ que satisfaga $W(1) = I$). Para la función $c$, estas elecciones nos dan la siguiente expresión

$$c(x) = (\alpha + 1) - x,$$

y para la matriz $F$ tenemos

$$F(x) = \frac{1}{2x}(A_1(x) - (\alpha + 1 - x)I).$$

Tomando en cuenta que $A_1$ es un polinomio de grado a lo más 1, podemos escribir

$$F(x) = A + \frac{B}{x}.$$

Por lo tanto, buscamos la solución de $T$ para la ecuación diferencial

$$T'(x) = \left(A + \frac{B}{x}\right)T(x), \qquad T(1) = I. \tag{3.50}$$

Como en la sección anterior, estudiamos aquí dos casos específicos pero de interés: cuando $A$ o $B$ se anula.

### 3.5.1. Pesos matriciales de la forma $x^\alpha e^{-x}e^{Ax}e^{A^*x}$

Resolviendo la ecuación (3.50) para el caso $B = \theta$, encontramos $T(x) = e^{Ax}e^{-A}$ y entonces normalizando el peso matricial de tal manera que $W(1) = e^{-1}e^{A}e^{A^x}$, se tiene que

$$W(x) = x^\alpha e^{-x}e^{Ax}e^{A^*x}, \tag{3.51}$$

donde $A$ es una matriz de $N \times N$.

Como antes, de nuevo supongamos que $A$ no es unitariamente equivalente a una matriz diagonal por bloques. Del Teorema 3.3.1, tenemos que verificar cuándo existe una elección conveniente de $A_0$ tal que la función matricial

$$\chi(x)W(1) = T^{-1}(x)(A_2(x)F'(x) + A_2(x)F^2(x) + c(x)F(x) - A_0)T(x)W(1)$$

es Hermitiana. Esto significa que tenemos que encontrar aquellas matrices $A$ no unitariamente equivalentes a una matriz diagonal por bloques, para las cuales existe $A_0$ tal que la función matricial

$$\chi(x)W(1) = e^{A}[(\alpha+1)A + (A^2 - A)x - e^{-Ax}A_0e^{Ax}]e^{A^*} \tag{3.52}$$

es Hermitiana, o equivalentemente,

$$\begin{aligned}\chi(x)W(1) &= e^{A}[(\alpha+1)A + (A^2 - A)x - e^{-x}ad_A(A_0)]e^{A^*} \\ &= e^{A}[((\alpha+1)A - A_0) + (A^2 - A + ad_A(A_0))x - \sum_{n\geq 2}\frac{(-x)^n}{n!}ad_A^n(A_0)]e^{A^*}\end{aligned} \tag{3.53}$$

es Hermitiana. La existencia de la matriz $A_0$ tal que (3.52) se cumple es equivalente a que las siguientes matrices

$$(\alpha+1)A - A_0, \qquad A^2 - A + [A, A_0], \qquad ad_A^n A_0,\ n \geq 2. \tag{3.54}$$

sean Hermitianas. Estas ecuaciones son similares a las estudiadas en la sección anterior. Podemos deducir el siguiente teorema.

**Teorema 3.5.1.** *Para $\nu_1, \ldots, \nu_{N-1} \in \mathbb{C}$, $\nu_1 \cdots \nu_{N-1} \neq 0$, consideremos la matriz nilpotente $B$ de orden $N$ dada por (3.48). Entonces el peso matricial*

$$W(x) = x^{\alpha}e^{-x}e^{Bx}e^{B^*x}, \qquad x \geq 0, \tag{3.55}$$

*satisface una ecuación diferencial*

$$(xW)''(x) + [(x(I - 2B) - (\alpha+1)I)W(x)]' + A_0W(x) = W(x)A_0^*$$

*donde $A_0$ es la matriz dada por*

$$A_0 = (\alpha+1)B - J.$$

*Además, este ejemplo es maximal en el siguiente sentido: si el peso matricial $x^{\alpha}e^{-x}e^{Ax}e^{A^*x}$, con $A$ nilpotente de orden $N$, satisface una ecuación diferencial de segundo orden como (3.12), con $A_2 = xI$, entonces $A$ es unitariamente equivalente a una matriz $B$, para ciertos números $\nu_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, N-1$.*

Como en los ejemplos anteriores, el ejemplo del Teorema 3.5.1 puede generalizarse trabajando por bloques.

**Proposición 3.5.2.** *Todo peso matricial de la forma*

$$W(x) = x^\alpha e^{-x} e^{B_{N,\nu_1,\dots,\nu_{N-1}} x} e^{B^*_{N,\nu_1,\dots,\nu_{N-1}} x}, \quad x \geq 0,$$

*satisface las condiciones de frontera del Lema 3.2.4.*

*Demostración.* Podemos reescribir el peso matricial como

$$W(x) = x^\alpha e^{-x} Z(x),$$

donde $Z(x)$ es un polinomio matricial y $\alpha > -1$. Además $A_2$ y $A_1$ también son polinomiales, por lo que es directo verficar las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} A_2(x)W(x) &= \lim_{x\to 0} x^{\alpha+1} e^{-x} Z(x) = \theta; \\
\lim_{x\to \infty} A_2(x)W(x) &= \lim_{x\to \infty} x^{\alpha+1} e^{-x} Z(x) = \theta; \\
\lim_{x\to 0} (A_2(x)W(x))' - A_1(x)W(x) &= \lim_{x\to 0} \left[\alpha x^\alpha e^{-x} Z(x) - x^{\alpha+1} e^{-x} Z(x) + x^{\alpha+1} e^{-x} Z'(x)\right] = \theta; \\
\lim_{x\to \infty} (A_2(x)W(x))' - A_1(x)W(x) &= \lim_{x\to \infty} \left[\alpha x^\alpha e^{-x} Z(x) - x^{\alpha+1} e^{-x} Z(x) + x^{\alpha+1} e^{-x} Z'(x)\right] = \theta.
\end{aligned}$$

□

Consideremos la familia de polinomios ortogonales matriciales de tamaño $2 \times 2$ con respecto al peso matricial:

$$W_{a,3}(x) = x^\alpha e^{-x} \begin{pmatrix} 1 + a^2x^2 & ax \\ ax & 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha > -1.$$

Denotamos por $\{P_{n,a,3}(x)\}_{n=0}^\infty$ a la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a este peso matricial. La ecuación diferencial de segundo orden que satisface $\{P_{n,a,3}(x)\}_{n=0}^\infty$ es

$$\begin{aligned}
xP''_{n,a,3}(x) + P'_{n,a,3}(x) &\begin{pmatrix} \alpha + 1 - x & 2ax \\ 0 & \alpha + 1 - x \end{pmatrix} \\
&+ P_{n,a,3}(x) \begin{pmatrix} -1 & (\alpha+1)a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -n-1 & a(2n+\alpha+1) \\ 0 & -n \end{pmatrix} P_{n,a,3}(x).
\end{aligned}$$

En [17] se prueba que $\{P_{n,a,3}(x)\}_{n=0}^\infty$ satisface la fórmula de tipo Rodrigues:

$$\begin{aligned}
P_{n,a,3}(x) =& \frac{1}{n!} \left[ x^{n+\alpha} e^{-x} \left( \begin{pmatrix} 1 + a^2x^2 & ax \\ ax & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a^2(\alpha+1)x & -a(n+\alpha+1) \\ an & 0 \end{pmatrix} \right) \right]^{(n)} \\
&\times \begin{pmatrix} 1 & -ax \\ -ax & 1 + a^2x^2 \end{pmatrix} x^{-\alpha} e^x.
\end{aligned} \tag{3.56}$$

### 3.5.2. Pesos matriciales de la forma $x^{\alpha}e^{-x}x^{B}x^{B^*}$

Ahora resolvemos la ecuación (3.50) para el caso $A = \theta$. Tenemos $T(x) = x^B = e^{B\log x}$. La presencia de los términos logarítmicos hacen este caso más delicado que los analizados hasta ahora. El peso matricial que estamos buscando es de la forma

$$W(x) = x^{\alpha}e^{-x}x^{B}x^{B^*}, \tag{3.57}$$

donde $B$ es una matriz de $N \times N$ ($W(x)$ satisface $W(1) = e^{-1}I$, en lugar de $W(1) = I$. Del Teorema 3.3.1, tenemos que verificar cuál es una elección conveniente de $A_0$ tal que la función matricial

$$\chi(x) = \left[(B^2 + \alpha B)\frac{1}{x} - B\right] - x^{-B}A_0x^B$$

sea Hermitiana.

Esto se puede escribir como

$$\begin{aligned}\chi(x) &= \left[(B^2 + \alpha B)\frac{1}{x} - B\right] - e^{\log x \; ad_B}(A_0)\\ &= (B^2 + \alpha B)\frac{1}{x} - (B + A_0) - \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n \log^n x}{n!}ad_B^n A_0.\end{aligned} \tag{3.58}$$

Aquí la estrategia para asegurarse que $\chi(x)$ es Hermitiana es encontrar matrices $B$ y $B_0$ tal que

$$ad_B(B_0) = B_0, \tag{3.59}$$

con $A_0 = B_0 - B$. Considerando la identidad $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n log^n x}{n!} = \frac{1-x}{x}$, podemos reescribir $\chi(x)$ de la siguiente manera

$$\chi(x) = \frac{B^2 + \alpha B - B_0}{x}. \tag{3.60}$$

Por lo tanto necesitamos satisfacer (3.59) así como la condición

$$B^2 - \alpha B - B_0 \textit{ es Hermitiana.}$$

La condición (3.59) sugiere introducir matrices $J$ y $L$ definidas como en (3.32) y (3.31), respectivamente. De esto resulta $ad_J(L) = L$.

Como la matriz $J^2 + \alpha J - L$ es triangular superior, sus valores propios están dados por las entradas de la matriz diagonal $J^2 + \alpha J$. Entonces los valores propios son $\lambda_i = (N - i)(N - i + \alpha)$, para $i = 1, \ldots, N$.

Sea $\lambda_j = (N-j)(N-j+\alpha)$, $j \in \{1, \ldots, N-1\}$ fijo. Se calcula el $ker(J^2+\alpha J+L-\lambda_j)$:

$$\ker \begin{pmatrix} \lambda_1-\lambda_j & -\nu_1 & 0 & \ldots & & & & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ & & 0 & \lambda_{j-1}-\lambda_j & -\nu_{j-1} & 0 & \ldots & & & \\ & & & & 0 & -\nu_j & 0 & \ldots & & \\ & & & & & 0 & \lambda_{j+1}-\lambda_j & -\nu_{j+1} & 0 & \\ & & & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & & & & & & & 0 & 0-\lambda_j \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} -\lambda_j x_N &= 0 & &\Rightarrow x_N = 0 \\ (\lambda_{N-1}-\lambda_j)x_{N-1} - \nu_{N-1}x_N &= 0 & &\Rightarrow x_{N-1} = 0 \\ (\lambda_{j+1}-\lambda_j)x_{j+1} - \nu_{j+1}x_{j+2} &= 0 & &\Rightarrow x_{j+1} = 0 \\ 0x_j - \nu_j x_{j+1} &= 0 & &\Rightarrow \textit{podemos normalizar } x_j = 1 \\ (\lambda_{j-1}-\lambda_j)x_{j-1} - \nu_{j-1}x_j &= 0 & &\Rightarrow x_{j-1} = \frac{\nu_{j-1}}{(\lambda_{j-1}-\lambda_j)} \\ (\lambda_2-\lambda_j)x_2 - \nu_2 x_3 &= 0 & &\Rightarrow x_2 = \frac{\nu_2\cdots\nu_{j-1}}{(\lambda_2-\lambda_j)\cdots(\lambda_{j-1}-\lambda_j)} \\ x_1(\lambda_1-\lambda_j) - \nu_1 &= 0 & &\Rightarrow x_1 = \frac{\nu_1\cdots\nu_{j-1}}{(\lambda_1-\lambda_j)\cdots(\lambda_{j-1}-\lambda_j)} \end{aligned}$$

Análogamente para el valor propio $\lambda_N = 0$, podemos normalizar $x_N = 1$ y obtenemos

$$x_i = \frac{\nu_i\nu_{i+1}\cdots\nu_{N-1}}{(\lambda_i-\lambda_N)(\lambda_{i+1}-\lambda_N)\cdots(\lambda_{N-1}-\lambda_N)}$$

para $i \in \{1, \ldots N-1\}$.

Así la matriz de cambio de coordenadas $S$ está definida por

$$S_{i,j} = \begin{cases} 1, & si\ i = j, \\ 0, & si\ i > j, \\ \prod_{k=i}^{j-1} \frac{\nu_k}{(\lambda_k-\lambda_j)}, & si\ i < j. \end{cases}$$

Por lo tanto, podemos poner la matriz $J^2 + \alpha J - L$ en su forma canónica de Jordan:

$$S(J^2 + \alpha J - L)S^{-1} = J^2 + \alpha J.$$

Lo que sugiere tomar

$$B = SJS^{-1},$$
$$B_0 = SLS^{-1},$$

y por lo tanto se satisface la condición (3.60).

De la definición de $B$, se sigue que $x^B = e^{Blogx} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B^n log^n x}{n!}$ es un polinomio matricial de grado $N-1$ el cual no se anula en $x=0$. Por lo tanto, para garantizar la integrabilidad del peso matricial $W$ en 0, supongamos como en el caso escalar, que $\alpha > -1$. La ecuación diferencial que satisface $W$ es entonces

$$(xW)''(x) + [(xI - 2B - (\alpha+1)W(x)]' + (-B + B_0)W(x) = W(x)(-B^* + B_0^*).$$

Si $B^2 + \alpha B$ es Hermitiana, tomando $A_0 = -B$, tenemos que $ad_B A_0 = \theta$ y la función matricial $\chi(x)$ es entonces Hermitiana. Desafortunadamente, los polinomios ortogonales matriciales con respecto a $W(x) = e^{-x}x^B x^{B^*}$, $B^2 + \alpha B$ Hermitiana, no satisfacen una ecuación diferencial de segundo orden como (3.2). La razón es que estos pesos matriciales no satisfacen las condiciones de frontera del Lema 3.2.4. De hecho, la función matricial $(A_2(x)W(x))' - A_1(x)W(x)$ no se anula en $x=0$. En particular esto implica que el primer momento de el peso matricial $W$ no satisface la condición (3.2) para $n=0$.

## 3.6. Ejemplos con $A_2 = (1+x)(1-x)I$

En el caso escalar, la función peso que va con un operador simétrico diferencial de segundo orden con $a_2(x) = 1 - x^2$ son salvo cambio de variable las funciones de peso de Jacobi $\omega(x) = (1+x)^\alpha(1-x)^\beta$, $\alpha, \beta > -1$. Entonces tomamos $\rho(x) = (1+x)^\alpha(1-x)^\beta$, $\alpha, \beta > -1$, $A_2(x) = (1+x)(1-x)I$, y como buscamos que el peso verifique $W(a) = I$, tomamos $a = 0$. Esto nos da para la función $c$ la expresión

$$c(x) = (\alpha+1)(1-x) - (\beta+1)(1+x);$$

y para la función matricial $F(x)$

$$F(x) = \frac{1}{2(1+x)(1-x)}(A_1(x) - [(\alpha+1)(1-x) - (\beta+1)(1+x)]I).$$

Tomando en cuenta que $A_1$ es un polinomio de grado a lo más 1, podemos escribir

$$F(x) = \frac{A}{(1+x)} + \frac{B}{(1-x)} \tag{3.61}$$

Por lo tanto estamos buscando soluciones de la ecuación diferencial

$$T'(x) = \left(\frac{A}{1+x} + \frac{B}{1-x}\right)T(x), \qquad T(0) = I. \tag{3.62}$$

Debido a la simetría entre 1 y $-1$, estudiaremos aquí únicamente el caso especial en que $B$ se anula . Para esta elección obtenemos

$$T(x) = (1+x)^{\alpha}(1-x)^{\beta}(1+x)^{A}(1+x)^{A^*},$$

donde $A$ es una matriz de $N \times N$.

Por el Teorema 3.3.1 tenemos que verificar cual es una elección conveniente para $A_0$ de tal manera que la función matricial

$$\chi(x) = T^{-1}(x)(A_2(x)F'(x) + A_2(x)F^2(x) + c(x)F(x) - A_0)T(x) \tag{3.63}$$

es Hermitiana para toda $x$. Tomando en cuenta nuestra elección previa, tenemos que encontrar aquellas matrices $A$ para las cuales exite $A_0$ tal que la función matricial

$$\chi(x) = \left[2(\alpha A + A^2)\frac{1}{1+x} - (A^2 + \alpha A + (\beta+1)A)\right] - (1+x)^{-A}A_0(1+x)^{A}$$

es Hermitiana, la cual se puede escribir como

$$\begin{aligned}\chi(x) &= \left[2(\alpha A + A^2)\frac{1}{1+x} - (A^2 + \alpha A + (\beta+1)A)\right] - e^{-\log(1+x)ad_A}(A_0)\\ &= 2(\alpha A + A^2)\frac{1}{1+x} - (A^2 + \alpha A + (\beta+1) + A_0) + \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n log^n(1+x)}{n!}ad_A^n(A_0).\end{aligned}$$

Para asegurar que $\chi(x)$ es Hermitiana queremos encontrar matrices $A$ y $B_0$ tales que

$$ad_A(B_0) = B_0 \tag{3.64}$$

y tal que $A_0 = -A(1+\alpha+\beta) - A^2 + B_0$.

Análogamente al ejemplo anterior, podemos reescribir $\chi(x)$ como

$$\chi(x) = \frac{2A^2 + 2\alpha A - B_0}{1+x}. \tag{3.65}$$

Entonces necesitamos satisfacer (3.64), así como la condición de que

$$2A^2 + 2\alpha A - B_0$$

sea Hermitiana. Análogamente al ejemplo anterior consideremos las matrices $J$ y $L$. Los valores propios para la matriz $2J^2 + 2\alpha J - L$ son $\mu_i = 2(N-i)((N-i)+\alpha)$, $i = 1, \ldots, N$.

La matriz de cambio de coordenadas es $S = (s_{i,j})_{i,j}$,

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, & si\ i = j, \\ 0, & si\ i > j, \\ \prod_{k=i}^{j-1} \frac{\nu_k}{(\mu_k - \mu_j)}, & si\ i < j. \end{cases}.$$

Entonces se cumple

$$S(2J^2 + \alpha 2J - L)S^{-1} = 2J^2 + 2\alpha J.$$

Lo que sugiere tomar

$$\begin{aligned} A &= SJS^{-1}, \\ B_0 &= SLS^{-1}, \end{aligned}$$

Por lo tanto se cumple que $ad_A(B_0) = SJLS^{-1} - SLJS^{-1} = L$, y concluimos que $\chi(x)$ es Hermitiana. Como $(1+x)^A$ no se anula, para garantizar la integrabilidad pediremos $\alpha, \beta > -1$.

La ecuación diferencial que verifica $W$ es

$$\begin{aligned} (xW)''(x) + &[(2A(1-x) + ((\alpha+1)(1-x) - (\beta+1)(1+x)I)W(x)]' \\ &+ (-A(1+\alpha+\beta) - A^2 + B_0)W(x) = W(x)(-A^*(1+\alpha+\beta) - (A^*)^2 + B_0^*). \end{aligned}$$

Consideremos el peso matricial

$$W_{a,4}(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \begin{pmatrix} x^2 + (x-1)^2 a^2 & a(x-1) \\ a(x-1) & 1 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Denotamos por $\{P_{n,a,4}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ a la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a $W_{a,4}(x)$. La ecuación diferencial de segundo orden que satisface $\{P_{n,a,4}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es

$$\begin{aligned} (1-x^2)P''_{n,a,4}(x) + P'_{n,a,4}(x) &\begin{pmatrix} -(\alpha+\beta+4)x + 2 - \alpha + \beta & 2a(1-x) \\ 0 & (\alpha+\beta+2)x - \alpha + \beta \end{pmatrix} \\ + P_{n,a,4}(x) &\begin{pmatrix} -(\alpha+\beta+2) & -(\alpha-\beta)a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ = &\begin{pmatrix} -n^2 - n(\alpha+\beta+3) - (\alpha+\beta+2) & 2an - (\alpha-\beta)a \\ 0 & -n^2 - n(\alpha+\beta+1) \end{pmatrix} P_{n,a,4}(x). \end{aligned}$$

La sucesión$\{P_{n,a,4}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ también satisface la siguiente ecuación de tipo Rodrigues

$$\begin{aligned} P_{n,a,4}(x) = &\left[ (1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n} \left( \begin{pmatrix} (1+x)^2 + a^2x^2 & ax \\ ax & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{a^2(x(\alpha-n)+n)}{n+\alpha+\beta+2} & \frac{a(nx+\alpha-\beta)}{n+\alpha+\beta+2} \\ -\frac{an(x+1)}{n+\beta+1} & 0 \end{pmatrix} \right) \right]^{(n)} \\ &\times \frac{1}{(1+x)^2} \begin{pmatrix} 1 & -ax \\ -ax & (1+x)^2 + a^2x^2 \end{pmatrix} (1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}, \end{aligned}$$

esto se prueba en [13].

## 3.7. Un método más general para generar ejemplos

En esta sección se prueba otro método para generar ejemplos. A diferencia del Teorema 3.3.1 este método nos permitirá generar ejemplos de pesos matriciales sin la restricción de que el coeficiente matricial $A_2$ sea diagonal. La idea básica en este método es que cuando $A_2$ es una matriz polinomial propia, las ecuaciones diferenciales de simetría son consecuencia de una buena factorización del peso matricial $W$, de la forma $W = \rho TT^*$, tal que $T$ satisface $T' = FT$ donde $F$ está relacionado con los coeficientes $A_2$, $A_1$ y $A_0$. La simetría del operador diferencial de segundo orden con respecto al peso matricial $W$ se deducirá del conjunto de operaciones diferenciales del Lema 3.2.4. El siguiente teorema exhibe un método para encontrar soluciones de las ecuaciones (3.11), (3.12) y (3.13).

**Teorema 3.7.1.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}$ un conjunto abierto y $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$ dos veces diferenciable, tal que $\rho(x) \neq 0$, para todo $x \in \Omega$. Supongamos $A_2$, $F$, $R$ y $T \in \mathbb{C}^{N\times N}(\Omega)$ dos veces diferenciables que satisfacen*

$$T'(x) = \left(F(x) + \frac{R(x)}{2}\right) T(x), \text{ con } T(x_0) \text{ invertible para cierto } x_0 \in \Omega,$$

$$\text{y } A_2 W = W A_2^*, \qquad RW = WR^* \tag{3.66}$$
$$\text{donde } W = \rho TT^*.$$

*Entonces para*

$$A_1 = A_2 F + F A_2 + A_2 R + A_2' + \frac{\rho'}{\rho} A_2, \tag{3.67}$$

*tenemos*

1. *La función matricial $W$ satisface la ecuación diferencial de primer orden*

$$2(A_2 W)' = A_1 W + W A_1^*.$$

2. *Para una función matricial dada $A_0(x)$, la ecuación diferencial de segundo orden*

$$(A_2 W)'' - (A_1 W)' + A_0 W = W A_0^*$$

*se cumple si y sólo si la función matricial*

$$\chi = T^{-1} \left(-F A_2 F - F' A_2 - F A_2' - \frac{\rho'}{\rho} F A_2 - F A_2 R + A_0\right) T$$

*es Hermitiana para todo punto de $\Omega$.*

La idea de la demostración de este teorema es parecida a la de (3.3.1), aunque los cálculos son un poco más pesados pues recordemos que $A_2$ es una función matricial no necesariamente diagonal. El siguiente lema facilitará la demostración del teorema.

**Lema 3.7.2.** *Sean $A_2$, $F$, $R$ y $T$ como en el Teorema 3.7.1. Denotamos $X = TT^*$. Entonces para*

$$A = A_2F + FA_2 + A_2R + A_2', \tag{3.68}$$

*tenemos*

$$2(A_2X)' = AX + XA^*, \tag{3.69}$$

$$AX - XA^* = 2FXA_2^* - 2A_2XF^*, \tag{3.70}$$

$$A_2'X - X(A_2^*)' = FXA_2^* + ZF^* + RXA_2^* - A_2FX - A_2XF^* - A_2RX. \tag{3.71}$$

*Demostración.* De la ecuación diferencial de primer orden que satisface $T$ se sigue

$$X' = FX + XF^* + RX. \tag{3.72}$$

A partir de (3.72), (3.66) y la definición de $A$ se sigue que

$$\begin{aligned}2(A_2X)' &= (A_2X)' + (XA_2^*)' \\ &= A_2'X + A_2FX + A_2XF^* + A_2RX + X(A_2^*)' + FXA_2 * + XF^*A_2^* + RXA_2^* \\ &= AX + XA^*,\end{aligned}$$

lo cual es (3.69).

Aplicando (3.66), (3.68) y (3.72) se obtiene

$$\begin{aligned}AX - XA^* &= [AX - (A_2X)'] - [XA^* - (XA_2^*)'] \\ &= [FA_2X - A_2XF^*] - [XA_2^*F^* - FXA_2^*] \\ &= 2FXA_2^* - 2A_2XF^*,\end{aligned}$$

esto es (3.70). Por último de (3.66) y (3.72) se sigue que

$$\begin{aligned}A_2'X - X(A_2^*)' &= [(A_2X)' - A_2X'] - [(XA_2^*)' - X'A_2^*] \\ &= FXA_2^* + XF^*A_2^* + RXFA_2^* - A_2FX - A_2XF^* - A_2RX.\end{aligned}$$

□

*Demostración del Teorema 3.7.1.* Usando (3.69) del lema anterior obtenemos

$$\begin{aligned}2(A_2W)' = 2\rho A_2'X + 2\rho' A_2X + 2\rho A_2X' &= 2\rho(A_2X)' + 2\rho' A_2X \\ &= \rho(AX + XA^*) + 2\rho' A_2X \\ &= A_1W + WA_1^*,\end{aligned}$$

esto es la primera parte del teorema.

Ahora probaremos la segunda parte. Consideremos la tercera ecuación de simetría (3.13). Restando el doble de la ecuación (3.13) a la derivada de (3.12) se obtiene

$$(WA_1^* - A_1W)' = 2(WA_0^* - A_0W). \tag{3.73}$$

Para calcular $(WA_1^* - A_1W)'$, reescribiremos $A_1$ en términos de $A$ como $A_1 = A + \frac{\rho'}{\rho}A_2$.

Entonces para $X = W/\rho$, las relaciones (3.66) y (3.70) implican que

$$WA_1^* - A_1W = WA^* - AW = 2A_2WF^* - 2FWA_2^*.$$

Entonces reescribimos la ecuación (3.73):

$$(A_2WF^* - FWA_2^*)' = WA_0^* - A_0W.$$

Derivando del lado izquierdo y aplicando la segunda ecuación de simetría tenemos

$$\frac{1}{2}A_1WF^* + \frac{1}{2}WA_1^*F^* + A_2W(F^*)' - \frac{1}{2}FA_1W - \frac{1}{2}FWA_1^* - F'A_2W = WA_0^* - A_0W.$$

Ahora sustituyendo la ecuación matricial (3.67) y simplificando tenemos

$$\begin{aligned}
&\left[-\frac{1}{2}FA_2F - \frac{1}{2}F^2A_2 - F'A_2 - \frac{1}{2}FA_2' - \frac{1}{2}F\frac{\rho'}{\rho}A_2\right]W \\
&+ W\left[\frac{1}{2}F^*A_2^*F^* + \frac{1}{2}A_2^*(F^*)^2 + A_2^*(F^*)' + \frac{1}{2}(A_2^*)'F^* + \frac{1}{2}\frac{\rho'}{\rho}A_2^*F^*\right] \\
&+ \left[\frac{1}{2}A_2RWF^* + \frac{1}{2}WR^*A_2^*F^* - \frac{1}{2}FA_2RW - \frac{1}{2}FWR^*A_2^*\right] \\
&+ \left[\frac{1}{2}A_2FWF^* - \frac{1}{2}FWF^*A_2^*\right] \\
&+ \left[\frac{1}{2}A_2'WF^* + \frac{1}{2}\frac{\rho'}{\rho}A_2WF^* - \frac{1}{2}FW(A_2^*)' - \frac{1}{2}\frac{\rho'}{\rho}FWA_2^*\right] \\
&= WA_0^* - A_0W.
\end{aligned}$$

Se usa (3.71) para expresar $A_2'W$ y $W(A_2^*)'$ en la fórmula anterior y después de un cálculo directo obtenemos

$$\begin{aligned}
&\left[-FA_2F - F'A_2 - FA_2' - \frac{\rho'}{\rho}FA_2 - FA_2R\right]W \\
&+ W[F^*A_2^*F^* + A_2^*(F^*)' + (A_2^*)'F^* + \frac{\rho'}{\rho}A_2^*F^* + R^*A_2^*F^*] \\
&= WA_0^* - A_0W.
\end{aligned}$$

Se observa que $T(x)$ es invertible para cualquier $x \in \Omega$ ya que es solución de la ecuación diferencial de primer orden y satisface que para cierto $x_0 \in \Omega$, $T(x_0)$ es no singular. Tomando $W = \rho TT^*$ se concluye la demostración. $\square$

En [10] se produce un ejemplo de peso matricial con una estructura distinta a los que hemos tratado hasta ahora, en donde solo aparece uno de los pesos escalares clásicos. En este nuevo ejemplo aparecen los pesos de Hermite y Laguerre en el peso matricial. Por simplicidad se enuncia el ejemplo para tamaño $2 \times 2$.

*Ejemplo* 3.7.3. Sea $T$ la función definida por

$$T(x) = \begin{pmatrix} e^{-x^2/2} & \nu e^{-x/2} x_+^{1+\alpha} \\ 0 & e^{-x/2} x_+^{\alpha} \end{pmatrix},$$

$$\text{y el peso matricial } W(x) = TT^* = \begin{pmatrix} e^{-x^2} + |\nu|^2 x_+^{2+2\alpha} e^{-x} & \nu x_+^{1+2\alpha} e^{-x} \\ \bar{\nu} x_+^{1+2\alpha} e^{-x} & x_+^{2\alpha} e^{-x} \end{pmatrix}$$

$$\text{donde } x_+^{\alpha} = \begin{cases} x^{\alpha}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Si los coeficientes estan definidos por:

$$A_2(x) = \begin{pmatrix} 1 & \nu x(2x-1) \\ 0 & 2x \end{pmatrix}, \qquad A_1(x) = \begin{pmatrix} -2x & 2\nu t(3+2\alpha \\ 0 - 2x + 4\alpha + 2 & \end{pmatrix},$$

$$\text{y } A_0(x) = \begin{pmatrix} -2 & \nu(4\alpha+2) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces el operador diferencial $D^2 A_2 + D^1 A_1 + D^0 A_0$ es simétrico con respecto al peso matricial $W$.

### 3.7.1. Ejemplo peso matricial $e^{-x^2} e^{Lx} e^{L^* x}$

Consideremos el peso matricial

$$W(x) = e^{-x^2} e^{Lx} e^{L^* x},$$

donde L está definido como en (3.31).

Como ya vimos en la sección anterior, este peso matricial tiene un operador diferencial de segundo orden dado por

$$\mathcal{D}_{2,1} = D^2 + D^1(2L - 2xI) + D^0(L^2 - 2J), \tag{3.74}$$

donde

$$J = \sum_{i=1}^{N} (N-i)\epsilon_{i,i}.$$

Utilizaremos el Teorema 3.7.1 para encontrar otro operador diferencial simétrico de segundo orden $\mathcal{D}_{2,2}$ para $W$, donde los números $\nu_1, \ldots, \nu_{N-2}$ están definidos convenientemente por $\nu_{N-1}$. Las restricciones sobre los números $\nu_i$, $i = 1, \ldots N-1$, son necesarias para garantizar la existencia del nuevo operador diferencial de segundo orden simétrico con coeficiente principal propio. La idea de este método es encontrar una buena factorización para el peso matricial $W$, para este fin utilizaremos la matriz casi-Hermitiana $Z$ definida por

$$Z = -\sum_{i=1}^{N-1} \frac{2i(N-i)}{(2N-1-2i)\bar{\nu}_i} \varepsilon_{i,i+1} + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{2i(N-i)}{(2N-1-2i)\nu_i} \varepsilon_{i+1,i}.$$

**Teorema 3.7.4.** *Sea* $W = e^{-x^2} e^{Lx} e^{L^* x}$ *peso matricial tal que el módulo de las entradas* $|\nu_i|$, $i = 1, \ldots, N-2$, *de la matriz* $L$ *están definidos a partir de* $|\nu_{N-1}|$ *por las ecuaciones*

$$(N-i-1)|\nu_i|^2|\nu_{N-1}|^2 - 2i(N-i)|\nu_{N-1}|^2 + 2(N-1)|\nu_i|^2 = 0. \tag{3.75}$$

*Consideremos la matrices* $J$ *y* $Z$ *definidas anteriormente. Entonces el operador diferencial de segundo orden*

$$l_{2,2} = D^2 A_2 + D^1 A_1 + D^0 A_0$$

*donde*

$$\begin{aligned} A_2 &= J - Lx, \\ A_1 &= (L+Z)J + J(L+Z) - L - [L^2 - 2J + 2(N-1)I]x, \\ A_0 &= \frac{2(N-1)}{|\nu_{N-1}|^2} \left[ \sum_{i=1}^{N} 2(N-i)\epsilon_{i,i} - \sum_{i=1}^{N-2} \nu_i \nu_{i+1} \epsilon_{i,i+2} \right], \end{aligned}$$

*es simétrico con respecto a* $W$.

A continuación se enuncia un lema que será de apoyo en la demostración del teorema .

**Lema 3.7.5.** *Bajo la condición (3.75), las matrices* $L$, $Z$, $J$ *y* $A_0$ *satisfacen*

1. $ad_L^1(ZJ + JZ) = L^2 + 4J - 2(N-1)I$.

2. $ad_L(A_0) = \frac{-4(N-1)}{|\nu_{N-1}|^2} L$.

3. *Las matrices* $LJL + LJZ + LZJ - L^2 - A_0$ *y* $2(LJ + ZJ) - ad_L(A_0)$ *son Hermitianas.*

4. $ad_L^1(J) = -L$.

*Demostración.* Es directo verificar que las ecuaciones (3.75) son equivalentes a

$$-2(i+1)(N-i-1)|\nu_i|^2 + 2i(N-i)|\nu_{i+1}|^2 = |\nu_i|^2|\nu_{i+1}|^2, \; 1 \le i \le N-2. \tag{3.76}$$

De las definiciones de $Z$ y $J$ se sigue directamente

$$ZJ + JZ = -\sum_{i=1}^{N-1} \frac{2i(N-i)}{\bar{\nu}_i} \varepsilon_{i,i+1} + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{2i(N-i)}{\nu_i} \varepsilon_{i+1,i}.$$

Tomando en cuenta la definición de $A$, tenemos

$$ad_L(ZJ + JZ) = \sum_{i=1}^{N-1} 2(N - 2i + 1)\varepsilon_{i,i} + \sum_{i=1}^{N-2} z_{i,i+2}\varepsilon_{i,i+2},$$

donde

$$\begin{aligned}z_{i,i+2} &= \nu_i \frac{-2(i+1)(N-i-1)}{\bar{\nu}_{i+1}} + \nu_{i+1}\frac{2i(N-i)}{\bar{\nu}_i} \\ &= \frac{-2(i+1)(N-i-1)|\nu_i|^2 + 2i(N-i)|\nu_{i+1}|^2}{\overline{\nu_i\nu_{i+1}}} = \nu_i\nu_{i+1},\end{aligned}$$

donde la última igualdad se sigue de (3.76). En consecuencia $ad_L(ZJ+JZ) = L^2 + 4J - 2(N-1)I$.

Las estructuras de las matrices $A_0$ y $L$ implican que $ad_L(A_0)$ tiene entradas nulas fuera de las diagonales $(i,i+1)$, $i = 1,\dots,N-1$, y $(i,i+3)$, $i = 1,\dots N-3$. A continución se calculan estas dos diagonales

$$(ad_L A_0)_{i,i+1} = \nu_i(A_0)_{i+1,i+1} - \nu_i(A_0)_{i,i} = \frac{-4(N-1)}{|\nu_{N-1}|^2}\nu_i,$$

$$(ad_L A_0)_{i,i+3} = \nu_i(A_0)_{i+1,i+3} - \nu_{i+2}(A_0)_{i,i+2} = 0.$$

Por lo tanto se cumple el inciso 2.

$LJL + LJZ + LZJ - L^2 - A_0$ y $2(LJ+ZJ) - ad_L^1(A_0)$ son Hermitianas. Primero consideremos $LJL + LJZ + LZJ - L^2 - A_0$. La estructura de las matrices $L$, $J$ y $Z$ implican que $LJ + LJZ + LZJ - L^2$ tiene entradas nulas fuera de las diagonales $(i,i)$, $i = 1,\dots,N$, y $(i,i+2)$, $i = 1,\dots,N-2$. A continuación verificamos la estructura de estas dos diagonales.

$$(LJL + LJZ + LZJ - L^2)_{i,i} = 2i(N-i),$$

de esto y la definición de $A_0$ se sigue que las entradas de la diagonal $(i,i)$ de la matriz $LJL + LJZ + LZJ - L^2 - A_0$ son reales.

$$\begin{aligned}(LJL + LJZ + LZJ - L^2)_{i,i+2} = &(N-i-2)\nu_i\nu_{i+1} \\ &- 2(i+1)(N-i-1)\frac{\nu_i}{\bar{\nu}_{i+1}}.\end{aligned}$$

Usando (3.75) para $i+1$, tenemos

$$\begin{aligned}&(LJL + LJZ + LZJ - L^2)_{i,i+2} \\ &\qquad = (N-i-2)\nu_i\nu_{i+1} - 2(i+1)(N-i-1)\frac{|\nu_i|^2}{\overline{\nu_i\nu_{i+1}}} \\ &\qquad = \frac{|\nu_i|^2[|\nu_{i+1}|^2(N-i-2) - 2(i+1)(N-i-1)]}{\overline{\nu_i\nu_{i+1}}} \\ &\qquad = -\frac{2(N-1)}{|\nu_{N-1}|^2}\nu_i\nu_{i+1}.\end{aligned}$$

Tomando en cuenta la definición de $A_0$, se obtiene

$$(LJL + LJZ + LZJ - L^2)_{i,i+2} = (A_0)_{i,i+2},$$

esto implica que la diagonal $(i, i+3)$ es nula. Por lo tanto $LJL + LJZ + LZJ - L^2 - A_0$ es una matriz diagonal con entradas reales, en consecuencia Hermitiana.

Ahora verifiquemos $2(LJ+ZJ) - ad_L^1(A_0)$ es Hermitiana. Por el inciso anterior de este Lema tenemos

$$2(LJ + ZJ) - ad_L^1(A_0) = 2(LJ + ZJ) - \frac{4(N-1)}{|\nu_{N-1}|^2}L.$$

Por otro lado todas entradas de la matriz $LJ - ZJ$ afuera de las diagonales $(i, i-1)$ y $(i, i+1)$ son nulas. Se procede análogamente a la matriz anterior.

Por último veamos que $ad_L^1 J$ se anula afuera de la diagonal $(i, i+1)$, además las entradas de esta diagonal están dadas por

$$ad_L(J)_{i,i+1} = (LJ)_{i,i+1} - (JL)_{i,i+1} = (N-i-1)\nu_i - (N-i)\nu_i = -\nu_i,$$

esto significa que $ad_L^1 J = -L$. □

*Demostración del Teorema 3.7.4 .* La simetría del operador diferencial de segundo orden con respecto al peso matricial $W$ será consecuencia del Lema 3.2.4 y del Teorema 3.7.1. Las condiciones de frontera para $W$ se verifican directamente. En los siguientes pasos se verifican las ecuaciones de simetría.

*Primera ecuación de simetría:* Observemos que la ecuación $A_2W = WA_2^*$ es equivalente a que $e^{-Ax}A_2e^{Ax}$ sea Hermitiana. Para esto utilizaremos la fórmula del Lema 3.4.2, mediante un cálculo directo se tiene

$$e^{-Lx}A_2e^{Lx} = e^{-Lx}(J - Lx)e^{Lx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} ad_L^n(J) - Lx = J, \tag{3.77}$$

y como $J$ es diagonal, se concluye que es Hemitiana.

*Segunda ecuación de simetría:* Observemos que $T$ satisface la ecuación diferencial

$$T' = FT,$$

donde

$$F = L + e^{Lx}Ze^{-Lx}. \tag{3.78}$$

De acuerdo a la primera parte del Teorema 3.7.1, la ecuación diferencial $2(A_2W)' = WA_1^* + A_1W$ es consecuencia de probar que

$$A_1 = A_2F + FA_2 + A_2' - 2xA_2.$$

Denotemos

$$S(x) = A_2F + FA_2 + A_2' - 2xA_2.$$

Utilizando la definición de $A_2$, la expresión (3.78) para $F$ y (3.77), podemos reescribir $S(x)$ de la siguiente manera

$$S(x) = LJ + JL - L - 2(L^2 + J)x + 2Lx^2 + e^{Lx}(ZJ + JZ)e^{-Lx}$$
$$= LJ + JL - L - 2(L^2 + J)t + 2Lx^2 + \sum_{n=0}^{\infty} ad_L^n(ZJ + JZ)\frac{x^n}{n!}.$$

Por el primer inciso del Lema 3.7.5 y como $ad_L(J) = -L$, se sigue que $ad_L^2(ZJ + JZ) = -4L$, lo que implica que $ad_L^n(ZJ + JZ) = 0,\ n \geq 3$. Entonces

$$S(x) = (LJ + JL) - L + (ZJ + JZ) - 2[L^2 + J + ad_L^n(ZJ + JZ)/2]x$$
$$= (L + Z)J + J(L + Z) - L - [L^2 - 2J + 2(N - 1)I]x = A_1(x).$$

*Tercera ecuación de simetría:* De acuerdo a la segunda parte del Teorema 3.7.1, esta ecuación es equivalente a probar que la función matricial

$$\chi(x) = T^{-1}(x)\left(-F(t)A_2(t)F(t) - F'(t)A_2(x) - F(x)A_2'(x) + 2xFA_2(x) + A_0\right)T(x)$$

es Hermitiana. Como $T(x) = e^{Lx}e^{Zx}$ y $e^{Zx}$ es unitaria, tenemos que la condición previa es equivalente a probar que

$$\hat{\chi}(t) = e^{-Lx}\left(-F(x)A_2(t)F(x) - F'(x)A_2(x) - F(x)A_2'(x) + 2xFA_2(x) + A_0\right)e^{Lx}$$

es Hermitiana.

A partir las definiciones de $A_2$, $F$ y la expresión (3.77), podemos escribir

$$e^{-Lx}(FA_2F)e^{Lx} = LJL + LJZ + ZJL + ZJZ,$$
$$e^{-Lx}(F'A_2)e^{Lx} = LZJ - ZLJ,$$
$$e^{-Lx}[F(A_2' - 2xA_2)]e^{Lx} = -L^2 - ZL - 2LJx - 2ZJx.$$

Como resultado para la función $\hat{\chi}$ tenemos la siguiente expresión

$$\hat{\chi}(x) = -\left[LJL - ZJL + LJZ + ZJZ + LZJ - ZLJ - L^2 - ZL\right]$$
$$+ 2[LJ + ZJ]x + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}ad_L^n(A_0).$$

De la segunda parte del Lema 3.7.5 se sigue que $ad_L^n(A_0) = 0,\ n \geq 2.$. Entonces

$$\hat{\chi}(x) = -\left[LJL - ZJL + LJZ + ZJZ + LZJ - ZLJ - L^2 - ZL - A_0\right]$$
$$+ 2\left[LJ + ZJ - \frac{ad_L^1(A_0)}{2}\right]x.$$

Aplicando la cuarta parte del Lema 3.7.5, tenemos

$$\hat{\chi}(x) = -\left[LJL + LJZ + ZJZ + LZJ - L^2 - A_0\right]$$
$$+ 2\left[LJ + ZJ - \frac{ad_L^1(A_0)}{2}\right]x.$$

Como $J$ es Hermitiana y $Z$ es anti-Hermitiana, se tiene que $ZJZ$ es Hermitiana, por lo tanto para probar que $\hat{\chi}$ es Hermitiana basta probar que las matrices

$$LJL + LJZ + LZJ - L^2 - A_0, \qquad 2(LJ + ZJ) - ad_L^1(A_0)$$

son Hermitianas. Pero esto el tercer inciso del Lema 3.7.5. □

### 3.7.2. Ejemplo peso matricial $x^\alpha e^{-x} e^{Ax} x^B x^{B^*} e^{A^* x}$

Este ejemplo es de tamaño $2 \times 2$. Consideremos el peso matricial $W$ de la forma

$$W(x) = x^\alpha e^{-x} T(x) T^*(x), \tag{3.79}$$

donde $T(x) = e^{Ax} x^J = e^{Ax} e^{J \log x}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{C}.$$

Para $N = 2$, el operador diferencial

$$l_{2,1} = D^2 xI + D^1 \begin{pmatrix} \alpha + 3 - x & 2xa \\ 0 & \alpha + 1 - x \end{pmatrix} + D^0 \begin{pmatrix} -1 & (1+\alpha)a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es simétrico con respecto al peso matricial (3.79). Esto es el caso particular N=2 del Teorema 1 en [16].

El siguiente objetivo es encontrar otro operador diferencial de segundo orden $\mathcal{D}_{2,2}$ para el peso matricial (3.79). El método a seguir es análogo al del Teorema 3.7.1. Dicho método consiste en encontrar una factorización para $W$ de la forma

$$W = x^\alpha e^{-x} R(x) R^*(x),$$

donde el factor $R$ satisface la ecuación diferencial de primero orden $R' = FR$, tal que

1. El coeficiente diferencial $F$ está relacionado con $A_2$ y $A_1$ por la ecuación

$$A_1 = A_2 F + F A_2 + C, \tag{3.80}$$

   donde $C(x) = (x^\alpha e^{-x} A_2(x))' / x^\alpha e^{-x}$ y

2. la función matricial

$$R^{-1}(F A_2 F + F' A_2 + FC - A_0) R \tag{3.81}$$

   es Hermitiana.

Estas condiciones garantizarán que el peso matricial $W$ satisfaga la segunda y tercera ecuaciones de simetría, respectivamente. Primero encontraremos el coeficiente principal $A_2$, de tal manera que verifique $A_2W = WA_2^*$. La relación

$$AJ - JA = -A \tag{3.82}$$

sugiere un cadidato natural para $A_2$. De hecho, $A_2W = WA_2^*$ es equivalente a que $x^{-\frac{1}{2}J}e^{-Ax}A_2e^{Ax}x^{\frac{1}{2}J}$ sea Hermitiana. Así pues, tomando $A_2(x) = x(J - Ax)$, y mediante una aplicación de Lema 3.4.2 se tiene

$$\begin{aligned} x^{-\frac{1}{2}J}e^{-Ax}(x(J-Ax))e^{Ax}x^{\frac{1}{2}J} &= x^{-\frac{1}{2}J}\left(\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n!}ad_A^n J - Ax^2\right)x^{\frac{1}{2}J} \\ &= x\dot{x}^{-\frac{1}{2}J}Jx^{\frac{1}{2}J} = xJ, \end{aligned}$$

luego como $xJ$ es Hermitiana se cumple la primera ecuación de simetría. Ahora que tenemos un candidato para $A_2$, necesitamos elegir una factorización para el peso matricial $W(x) = x^\alpha e^{-x}R(x)R^*(x)$. Se considera una matriz unitaria $U(x)$, y se escribe

$$R(x) = e^{Ax}x^{\frac{1}{2}J}U(x).$$

La matrix $U(x)$ se describirá con detalle más adelante. De la definición de $R(x)$ se sigue que el coeficiente $F$ de la ecuación diferencial de primer orden $R'(x) = F(x)R(x)$ es

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}J + A\right) + e^{Ax}x^{\frac{1}{2}J}G(x)x^{-\frac{1}{2}J}e^{-Ax},$$

con $G(x) = U'(x)U(x)^{-1}$. Ya que $U(x)$ es unitaria, entonces $G(x)$ es anti-Hermitiana, i.e. $G^* = -G$. Tomando en cuenta esto elegimos que la matriz $G(x)$ tenga la siguiente estructura:

$$G(x) = \begin{pmatrix} 0 & g_{1,2} \\ -\bar{g}_{1,2} & 0 \end{pmatrix},$$

donde la función compleja $g_{1,2}$, $i = 1, \ldots, N-1$, será elegida de tal forma que la ecuación (3.80) implique que $A_1$ es un polinomio de grado 1. De las definiciones de $F$, $A_2$ y $A_1$, se sigue que

$$\begin{aligned} A_1 &= ((1+\alpha)I + J)J - x(J + (\alpha+2)A) + x^2(A - A^2) \\ &\quad + xe^{Ax}x^{\frac{1}{2}J}(JG(x) + G(x)J)x^{-\frac{1}{2}J}e^{-Ax}, \\ &= ((1+\alpha)I + J)J - x(J + (\alpha+2)A) + x^2(A) \\ &\quad + xe^{Ax}x^{\frac{1}{2}J}(JG(x) + G(x)J)x^{-\frac{1}{2}J}e^{-Ax}, \end{aligned} \tag{3.83}$$

procedemos a calcular el lado derecho de esta ecuación. De las definiciones de $G(x)$ y $J$ se sigue

$$JG(x) + G(x)J = \begin{pmatrix} 0 & g_{1,2} \\ -\bar{g}_{1,2} & 0 \end{pmatrix},$$

luego por un cálculo directo se tiene que

$$\begin{aligned}
M(x) &= x^{\frac{1}{2}J}(G(x)J + JG(x))x^{-\frac{1}{2}J} \\
&= x^{\frac{1}{2}J}(G(x))x^{-\frac{1}{2}J} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & x^{\frac{1}{2}}g_{1,2} \\ -x^{-\frac{1}{2}}\bar{g}_{1,2} & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Tomando en cuenta la definición de $A$ se tiene

$$ad_A M = \begin{pmatrix} -x^{-1/2}a\bar{g}_{1,2}(x) & 0 \\ 0 & x^{-1/2}a\bar{g}_{1,2}(x) \end{pmatrix}.$$

Para que $A_1$ sea un polinomio matricial de grado 1 es necesario

$$g_{1,2}(x) = y_{1,2}x^{-\frac{1}{2}},$$

donde $y_{1,2} \in \mathbb{C}$.

Podemos escribir $M(x) = \frac{1}{x}Y - Y^*$, donde

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\bar{y}_{1,2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo esta expresión en (3.83) se tiene

$$\begin{aligned}
A_1 &= ((1+\alpha)I + J)J + Y - x(J + (\alpha+2)A + Y^* - ad_A Y) \\
&\quad + x^2(A + \frac{1}{2}ad_A^2 Y) + \sum_{n\geq 3}\frac{x^n}{n!}(ad_A^n Y - ad_A^{n-1}Y^*).
\end{aligned} \tag{3.84}$$

De esto se sigue que $A_1$ es un polinomio matricial de grado 1 si y solo si

$$\frac{1}{2}ad_A^2 Y + A = 0, \tag{3.85}$$

donde

$$ad_A^2 Y = \begin{pmatrix} 0 & 2a^2\bar{y}_{1,2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

en consecuencia se tiene

$$\bar{y}_{1,2} = -\frac{1}{a}.$$

Definida así la matriz $Y$ es directo verificar :

$$ad_A^n Y = 0 \ y \ ad_A^{n-1}Y^* = 0, \ n \geq 3.$$

Por lo tanto podemos reescribir (3.84)

$$\begin{aligned} A_1(x) &= (2+\alpha)J + Y - x(J + (\alpha+2)A + Y^* - ad_A Y) \\ &= (2+\alpha)J + Y - x((\alpha+2)A + Y^* + YA). \end{aligned}$$

Por último buscaremos una matriz $A_0$ que satisfaga la tercera condición de simetría. De acuerdo a (3.81), probaremos que existe una matriz $A_0$ tal que la ecuación

$$R^{-1}(x)(F(x)A_2(x)F(x) + F'(x)A_2(x) + F(x)(x^\alpha e^{-x} A_2(x))' x^{-\alpha} e^t - A_0)R(x)$$

es Hermitiana. Como $R(x) = e^{Ax} x^{\frac{1}{2}J} U(x)$ y $U(x)$ es una matriz unitaria, es equivalente a probar que

$$\chi(x) = x^{-\frac{1}{2}J} e^{-Ax}(F(x)A_2(x)F(x) + F'(x)A_2(x) + F(x)(x^\alpha e^{-x} A_2(x))' x^{-\alpha} e^x - A_0) e^{Ax} x^{\frac{1}{2}J} \tag{3.86}$$

siempre es Hermitiana.

Para expresar (3.86) de manera más conveniente se usan las siguientes fórmulas

$$\begin{aligned} &x^{-\frac{1}{2}J} e^{-Ax}(A_2) e^{Ax} x^{\frac{1}{2}J} = x \cdot x^{-\frac{1}{2}J} J x^{\frac{1}{2}J} = xJ, \\ &x^{-\frac{1}{2}J} e^{-Ax}(A_2') e^{Ax} x^{\frac{1}{2}J} = J - x^{-\frac{1}{2}} A, \\ &x^{-\frac{1}{2}J} A x^{\frac{1}{2}J} = x^{-\frac{1}{2}} A, \end{aligned}$$

$$G(x) = x^{-\frac{1}{2}} G \quad y \quad G'(x) = -\frac{1}{2x} G(x), \tag{3.87}$$

donde abusando de la notación, $G$ es una matriz anti-Hermitiana independiente de $x$ cuyas únicas entradas no nulas son $(1,2)$ y $(2,1)$ y están dadas por $-\frac{1}{a}x^{-1/2}$ y $\frac{1}{\bar{a}}\bar{x}^{-1/2}$, respectivamente. De las definiciones de $F$ y $A_2$ y mediante un cálculo directo se tiene

$$\begin{aligned} x^{-\frac{1}{2}J} e^{-Ax}(F(x)A_2(x)F(x)) e^{Ax} x^{\frac{1}{2}J} =& \frac{1}{4x} J + \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} A + xG(x)JG(x) \\ &+ x^{\frac{1}{2}} G(x) A + \frac{1}{2}(JG(x) + G(x)J), \\ x^{-\frac{1}{2}J} e^{-Ax}(F'(x)A_2(x)) e^{Ax} x^{\frac{1}{2}J} =& -\frac{1}{2x} J + t^{\frac{1}{2}} AG(x)J - \frac{1}{2} G(x)J \\ &- \frac{1}{2} G(x)J + \frac{1}{2} JG(x)J, \\ x^{-\frac{1}{2}J} e^{-Ax}(F(x)(x^\alpha e^{-x} A_2(x))' x^{-\alpha} e^x) e^{Ax} x^{\frac{1}{2}J} =& \frac{\alpha+1}{2x} J - x^{-\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}A) - \frac{1}{2} J \\ &- x^{\frac{1}{2}} G(x)A + (\alpha+1)G(x)J - xG(x)J. \end{aligned}$$

Usando nuevamente (3.87), se obtiene una expresión para la función matricial $\chi(x)$:

$$\begin{aligned} \chi(x) = & \frac{1}{x}\left[\frac{1}{4} J(J + 2\alpha I)\right] + \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} [JG + (2\alpha+1)GJ + JGJ] \\ &+ GJG + AGJ \\ &- \frac{1}{2} J - x^{\frac{1}{2}} GJ - x^{-\frac{1}{2}J} e^{-Ax}(A_0) e^{Ax} x^{\frac{1}{2}J}. \end{aligned}$$

Por lo tanto se define la matriz $A_0$ como se sigue:

$$A_0 = \begin{pmatrix} A_{0,1,1} & A_{0,1,2} \\ 0 & A_{0,2,2} \end{pmatrix} = V_1 + V_2,$$

donde

$$V_1 = \begin{pmatrix} A_{0,1,1} & 0 \\ 0 & A_{0,2,2} \end{pmatrix},$$

y $V_2 = A_0 - V_1$. Entonces obtenemos

$$x^{-\frac{1}{2}J} A_0 x^{\frac{1}{2}J} = V_1 + x^{-\frac{1}{2}} V_2$$

y

$$-x \cdot x^{-\frac{1}{2}J} A_0 x^{\frac{1}{2}J} = -x^{\frac{1}{2}} V_3,$$

donde

$$V_3 = \begin{pmatrix} 0 & a(A_{0,2,2} - A_{0,1,1}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tomando esto en cuenta, así como el hecho de que $\frac{1}{4}J(J + 2\alpha I)$, $GJG$ y $-\frac{1}{2}J$ son Hermitianas, en orden de probar que la expresión (3.86)) es Hermitiana, basta pedir que las matrices

$$\frac{1}{2}[JG + (2\alpha + 1)GJ + JGJ] - V_2, \tag{3.88}$$

$$-GJ - V_3 \tag{3.89}$$

y

$$AGJ \tag{3.90}$$

sean Hermitianas y

$$ad_A^2 = 0.$$

La condición (3.88) nos permite definir la entrada $(1,2)$ de la matriz $A_0$ por

$$A_{0,1,2} = (\alpha + 1) g_{1,2} = -\frac{(\alpha + 1)}{\bar{a}}.$$

La condición (3.89) nos da una relación para $A_{0,1,1}$

$$A_{0,1,1} = A_{0,2,2} - \frac{g_{1,2}}{a},$$

haciendo $A_{0,2,2} = 0$ se tiene que

$$A_{0,1,1} = \frac{1}{|a|^2}.$$

Así obtenemos la siguiente expresión:

$$A_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{|a|^2} & -\frac{(\alpha+1)}{\bar{a}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Observación* 3.7.6. En [16] se prueba un resultado análogo al anterior para $N \geq 2$, bajo la condición adicional (3.91).

*Teorema* 3.7.7. *Sea $W_{\alpha,\nu_1,\ldots\nu_{N-2}}$ peso matricial, donde el módulo de las entradas $|\nu_i|$, $i = 1,\ldots,N-2$, de la matriz $A$ definida por $\nu_{N-1}$ por*

$$i(N-i)|\nu_{N-1}|^2 = (N-1)|\nu_i|^2 + (N-i-1)|\nu_i|^2|\nu_{N-1}|^2. \tag{3.91}$$

*Consideremos las matrices $A$ y $J$ definidas al inicio de la sección, y $Y$, $X(t)$ y $F(t)$ definida por*

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \frac{N-1}{\nu_1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2(N-2)}{\nu_2} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{N-1}{\nu_{N-1}} & 0 \end{pmatrix},$$

$$Z(t) = \begin{pmatrix} 0 & z_{1,2} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -\bar{z}_{1,2} & 0 & z_{2,3} & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{z}_{2,3} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & z_{N,N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\bar{z}_{N,N-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}J + A\right) + e^{Ax}x^{\frac{1}{2}J}Z(x)x^{-\frac{1}{2}J}e^{-Ax},$$

*donde $z_{i,i+1} = -\frac{i(N-i)}{(2N-2i-1)\bar{\nu}_i}$, $i = 1,\ldots,N-1$. Por último se define los coeficientes del operador diferencia $A_2$, $A_1$ y $A_0$ por*

$$\begin{aligned} A_2(x) &= x(J - Ax), \\ A_1(x) &= ((1+\alpha)I + J)J + Y - t(J + (\alpha+2)A + Y^* - ad_A Y), \\ A_0 &= \frac{N-1}{|\nu_{N-1}|^2}[J - (\alpha I + J)A]. \end{aligned}$$

*Entonces el operador diferencial de segundo orden*

$$\ell_{2,2} = D^2 A_2 + D^1 A_1 + D^0 A_0$$

*es simétrico con respecto a $W$. Además $W$ se puede factorizar como $W(x) = x^\alpha e^{-x} R(x)R^*(x)$, $\alpha > -1$, donde $R(x) = e^{Ax}x^{\frac{1}{2}J}e^{2xZ(x)}$ satisface $R'(x) = F(x)R(x)$.*

# Capítulo 4

# Nuevos fenómenos en el caso matricial

El estudio de los polinomios ortogonales matriciales es relativamente nuevo, sin embargo ya se cuenta con una teoría bastante amplia. Surgen fenómenos muy interesantes, que no figuraban en el caso escalar. En las siguientes dos secciones presentamos algunos de estos fenómenos especiales .

## 4.1. El álgebra de los operadores diferenciales

Consideremos el álgebra de operadores $\mathcal{D}(W)$ caracterizada por tener como funciones propias a una familia de polinomios ortogonales $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ con respecto a $W$:

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}(W) = \{\mathcal{D} = \sum_{i=0}^{k} D^i A_i(x) : \mathcal{D}(P_n(t)) = \Gamma_n(\mathcal{D}) P_n,\ n \geq 0\}$$

donde $\Gamma_n(\mathcal{D})$ no depende de $x$.

El producto en $\boldsymbol{\mathcal{D}}(W)$ es la composición de operadores de la manera usual, que es no conmutativa. Si $\mathcal{D}_r$, $\mathcal{D}_s \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(W)$ son de orden $r$ y s respectivamente, el operador $\mathcal{D}_r\mathcal{D}_s$ es de orden menor o igual que $r+s$, pero no necesariamente $r+s$, ya que el coeficiente principal de ambos operadores puede ser singular. $\boldsymbol{\mathcal{D}}(W)$ es un espacio vectorial complejo y un álgebra bajo composición, la cual es asociativa y distributiva con respecto al campo en que estemos trabajando.

Los operadores en $\boldsymbol{\mathcal{D}}(W)$ no necesariamente deben ser simétricos con respecto a $W$. Sin embargo, para todo operador no simétrico $\mathcal{D} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(W)$, podemos asociarle su operador adjunto $\mathcal{D}^* \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(W)$ de tal manera que $\mathcal{D} + \mathcal{D}^*$ es simétrico con respecto a $W$. Todas las propiedades anteriores en general se cumplen para cualquier álgebra de operadores asociados a cualquier peso matricial. Como consecuencia, cada operador $\mathcal{D} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(W)$, podemos escribirlo de manera única de la forma $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 + i\mathcal{D}_2$ para ciertos operadores simétricos $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$.

Como el coeficiente principal de $P_n(x)$ es una matriz no singular, podemos ver que cada coeficiente $A_i(x),\ i = 1, \ldots, N$, de un operador diferencial $\mathcal{D} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(W)$ es de grado a lo más $i$.

Consideremos el mapeo entre los operadores diferenciales y sus respectivos valores propios:

$$\Gamma_n : \mathcal{D}(W) \to \mathcal{E}(W) \subset \mathbb{C}^{2\times 2},\ n = 0, 1, \ldots, \tag{4.1}$$

donde $\mathcal{E}(W)$ es el álgebra de valores propios.

**Proposición 4.1.1.** *El mapeo definido por (4.1) es inyectivo.*

*Demostración.* Si $\Gamma_n(\ \mathcal{D}) = 0$, $n \geq 0$ entonces $\mathcal{D} = 0$. Por lo tanto el mapeo $\Gamma_n$ es inyectivo. □

**Proposición 4.1.2.** *El mapeo (4.1) es un isomorfismo.*

*Demostración.* Por la proposición anterior se tiene que es inyectivo y de la definición del mapeo $\Gamma_n$ se sigue directamente que es biyectivo.

Es directo probar que para $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2 \in \mathcal{D}(W)$, se tiene $\Gamma_n(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = \Gamma_n(\mathcal{D}_1)\Gamma_n(\mathcal{D}_2)$. □

Es importante notar que el álgebra $\boldsymbol{\mathcal{D}}(W)$ es independiente de la elección de la familia de polinomios ortogonales matriciales. Los valores propios los podemos intercambiar por conjugación topológica (dependiente del índice $n$). En el caso escalar, las familias clásicas de polinomios ortogonales estan intrínsecamente relacionados con un álgebra conmutativa de operadores diferenciales de dimensión generados por un sólo elemento, el operador diferencial de $2^o$ orden En contraste con el caso escalar, en cada uno los ejemplos de esta sección nos encontraremos con un álgebra no conmutativa con varios generadores. Por simplicidad, los ejemplos están restringidos al caso de las matrices de $2 \times 2$ con entradas reales.

### 4.1.1. Primer ejemplo

Consideraremos uno de los ejemplos más sencillos de polinomios ortogonales matriciales no triviales, aquel que viene dado por un peso matricial de la forma

$$W(x) = e^{-x^2} e^{Ax} e^{A^* x}, \quad donde \quad A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

La sucesión de polinomios ortogonales matriciales que plantearemos en este caso es la sucesión $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ definida por (3.43).

El espacio vectorial de los operadores diferenciales de orden dos (módulo los de orden menor) que tienen como funciones propias a la sucesión $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ es de dimensión cuatro.

Una base para este espacio puede estar conformada por los operadores diferenciales a izquierda que se enuncian en las siguientes ecuaciones de valores propios.

Por el Teorema 3.4.3 se tiene que

$$P_n''(x) + P_n'(x)\begin{pmatrix} -2x & 2a \\ 0 & -2x \end{pmatrix} + P_n(x)\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2n-2 & 0 \\ 0 & -2n \end{pmatrix} P_n(x), \tag{4.2}$$

por otro lado por el Teorema 3.7.4 se obtiene

$$P_n''(x)\begin{pmatrix} -\frac{a^2}{4} & \frac{a^3x}{4} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + P_n'(x)\begin{pmatrix} 0 & \frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} & \frac{a^2x}{2} \end{pmatrix} + P_n(x)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2n+2}{2} \end{pmatrix} P_n(x). \tag{4.3}$$

La base para el espacio se completa con los siguientes dos operadores:

$$\begin{aligned} &P_n''(x)\begin{pmatrix} -\frac{a^2x}{2} & \frac{a^3x^2}{2} \\ -\frac{a}{2} & \frac{a^2x}{2} \end{pmatrix} + P_n'(x)\begin{pmatrix} -(a^2+1) & a(a^2+2)x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + P_n(x)\begin{pmatrix} 0 & \frac{a^2+2}{a} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{(a^2n+2)(a^2n+a^2+2)}{2a} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P_n(x), \end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned} &P_n''(x)\begin{pmatrix} -\frac{a^3x}{4} & \frac{a^2(a^2x^2-1)}{4} \\ -\frac{a^2}{4} & \frac{a^3x}{4} \end{pmatrix} + P_n'(x)\begin{pmatrix} -\frac{a^3}{2} & a^2(a^2+2)\frac{x}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + P_n(x)\begin{pmatrix} 0 & \frac{a^2+2}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{(a^2n+2)(a^2n+a^2+2)}{4} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} P_n(x). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Denotaremos a estos operadores $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$ y $\mathcal{D}_4$ para futuras referencias. La elección de otra base puede ser más conveniente para distintos propósitos.

El espacio vectorial de los operadores diferenciales con coeficientes matriciales de orden cuatro, con $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ como funciones propias, tiene dimensión cuatro. A continuación damos una base explícita para este espacio.

$$\begin{aligned} &P_n''''(x)\begin{pmatrix} -x & ax^2 \\ -\frac{1}{a} & x \end{pmatrix} + P_n'''(x)\begin{pmatrix} \frac{2(a^2x^2-2a^2-1}{a^2} & -\frac{-2t(a^2x^2-2a^2-2}{a} \\ \frac{2x}{a} & -\frac{2(ax-1)(ax+1)}{a^2} \end{pmatrix} \\ &+ P_n''(x)\begin{pmatrix} \frac{2(2a^2+1)x}{a^2} & -\frac{4a^2x^2+4a^2x^2-3a^2-2}{a^3} \\ \frac{1}{a} & -\frac{(a^2+2)x}{a^2} \end{pmatrix} + P_n'(x)\begin{pmatrix} \frac{4(a^2+1)}{a^2} & -\frac{4(a^2+1)(a^2+2)x}{a^3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2n(a^2n+2)(a^2n+a^2+2)}{a^3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P_n(x), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&P_n''''(x)\begin{pmatrix} 0 & -\frac{a^2x}{2} \\ 0 & -\frac{a}{2} \end{pmatrix} + P_n'''(x)\begin{pmatrix} ax & a^2x^2-2a^2-1 \\ 1 & ax \end{pmatrix} \\
&+ P_n''(x)\begin{pmatrix} -\frac{4a^2x^2+a^4-4a^2-4}{2a} & \frac{(a^4+8a^2+4)x}{2} \\ -2x & 0 \end{pmatrix} + P_n'(x)\begin{pmatrix} -\frac{2(a^2+2)x}{a} & a^2+2 \\ -a^2 & a(a^2+2)x \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2n(a^2n+2) & 0 \\ 0 & a(a^2+2)n \end{pmatrix} P_n(x),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&P_n''''(x)\begin{pmatrix} 0 & -\frac{a^2}{8} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + P_n'''(x)\begin{pmatrix} -\frac{a}{4} & -\frac{a^2x}{4} \\ 0 & \frac{a}{4} \end{pmatrix} \\
&+ P_n''(x)\begin{pmatrix} -\frac{a(a^2-2)}{4} & \frac{a^2(ax-1)(ax+1)}{4} \\ -\frac{a^2+2}{4} & \frac{a(a^2-2)x}{4} \end{pmatrix} + P_n'(x)\begin{pmatrix} -\frac{a(a^2+1)}{2} & \frac{a^2(a^2-2)x}{2} \\ x & 0 \end{pmatrix} \\
&+ P_n(x)\begin{pmatrix} 0 & \frac{a^2+2}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{(a^2n+2)(a^2n+a^2+2)}{4} \\ n & 0 \end{pmatrix} P_n(x),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&P_n''''(x)\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} + P_n'''(x)\begin{pmatrix} -x & a \\ 0 & -x \end{pmatrix} \\
&+ P_n''(x)\begin{pmatrix} -\frac{4x^2+a^2-4}{4} & -\frac{a(a^2+8)x}{4} \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} + P_n'(x)\begin{pmatrix} x & -\frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} & -\frac{(a^2+2)x}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} n^2 & 0 \\ 0 & \frac{n(2n-a^2-4)}{2} \end{pmatrix} P_n(x).
\end{aligned}
$$

En [6] se conjetura que esta álgebra no conmutativa está generada por los operadores $I$, $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_4$. Una de las relaciones álgebraicas que se tienen es:

$$[\mathcal{D}_1, [\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_4]] = 4\mathcal{D}_4.$$

Mediante resultados computacionales se obtiene la siguiente tabla que exhibe la dimensión del espacio de los operadores diferenciales $D_k$ de orden $k$, tales que satisfacen $P_nD_k = \Lambda_nP_n$.

| *Orden* | k=0 | k=1 | k=2 | k=3 | k=4 | k=5 | k=6 | k=7 | k=8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Dimensión* | 1 | 0 | 4 | 0 | 4 | 0 | 4 | 0 | 4 |

### 4.1.2. Segundo ejemplo

En este ejemplo consideraremos la sucesión de polinomios ortogonales matriciales $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ que satisfacen una ecuación de recurrencia a tres términos de la forma (2.7) con

$$B_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ n \geq 1$$

y

$$A_n = \frac{1}{4}I,\ n \geq 1.$$

Se verifica en [3] que la matriz de ortogonalidad es

$$W(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}, \qquad -1 < x < 1.$$

Ahora consideremos los polinomios de Chebyshev de segunda clase $U_n(x)$, los cuales satisfacen la siguiente relación de recurrencia a tres términos.

$$U_{n+1}(x) + U_{n-1}(x) = 2xU_n(x), \qquad \textit{con } U_{-1}(x) = 0 \textit{ y } U_0(x) = 1.$$

Por inducción se prueba que la sucesión de polinomios ortogonales matriciales se puede escribir en términos de los polinomios de Chebyshev de segunda clase, de hecho esta relación esta dada por

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} U_n(x) & -U_{n-1}(x) \\ -U_{n-1}(x) & U_n(x) \end{pmatrix}.$$

Estos polinomios satisfacen la siguiente ecuación diferencial de orden cero

$$P_n(x)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} P_n(x),$$

además de la trivial (multiplicación por la identidad). Con esto tenemos que el espacio vectorial es de dimensión dos.

Para orden uno tenemos

$$P_n'(x)\begin{pmatrix} -1 & x \\ -x & 1 \end{pmatrix} + P_n(x)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & n+1 \\ -n & 0 \end{pmatrix} P_n(x)$$

y

$$P_n'(x)\begin{pmatrix} -x & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix} + P_n(x)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(n+1) & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} P_n(x).$$

Se conjetura en [6] que la dimensión del espacio de operadores diferenciales de orden $k$ con la propiedad de que nuestros polinomios mónicos $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ son funciones propias comunes es dos, para todo $k$ entero.

También en [6] se concluye que el álgebra completa de valores propios está generada por

$$I, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad y \begin{pmatrix} -(n+1) & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}.$$

Este ejemplo es interesante pues es el primero que admite operadores diferenciales de orden uno, cosa que es imposible en el caso escalar. Además para cualquier orden entero encontraremos operadores diferenciales con $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ como funciones propias comunes.

### 4.1.3. Tercer ejemplo

Consideremos el peso matricial

$$W(x) = e^{-x^2-2x} \begin{pmatrix} e^{4x} + x^2 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}.$$

Este peso matricial no es de la forma de los anteriores, es decir no es un peso escalar clásico multiplicado por un polinomio matricial. Podríamos pensar que el álgebra de operadores es más complicada que en los ejemplos anteriores. Sin embargo el álgebra de operadores para este peso matricial es un álgebra conmutativa generada por un único generador.

Para los polinomios matriciales mónicos $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ se tiene

$$P_n''(x) + P_n'(x) \begin{pmatrix} 2(1-x) & 2(1-2x) \\ 0 & -2(1+x) \end{pmatrix} + P_n(x) \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2n & 4n-2 \\ 0 & 2n+2 \end{pmatrix} P_n(x). \tag{4.6}$$

La siguiente tabla que exhibe la dimensión del espacio de los operadores diferenciales $D_k$ de orden $k$, tales que satisfacen $P_n D_k = \Lambda_n P_n$.

| *Orden* | k=0 | k=1 | k=2 | k=3 | k=4 | k=5 | k=6 | k=7 | k=8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Dimensión* | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

Se conjetura en [6] que el operador (4.6) y la identidad generan el álgebra completa.

### 4.1.4. Cuarto ejemplo

Consideremos el peso matricial de la forma

$$W(x) = x^{\alpha} e^{-x} T(x) T^*(x), \tag{4.7}$$

donde $T(x) = e^{Ax} x^B = e^{Ax} e^{B \log x}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ y \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La familia de polinomios ortogonales matriciales que utilizaremos es la familia de polinomios ortogonales matriciales $\{P_{n,\alpha,a}\}_{n=0}^{\infty}$ definida por la fórmula de Rodrigues:

$$P_{0,\alpha,a} = \begin{pmatrix} 1 & -a(1+\alpha) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$P_{n,\alpha,a}(x) = \Phi_{n,\alpha,a}\left[t^{\alpha+n}e^{-x}(R_a(x)+X_{n,a})\right]^{(n)} R_a^{-1}(x)x^{-\alpha}e^{x}, \quad n \geq 1,$$

donde

$$R_a(x) = \begin{pmatrix} x(1+|a|^2x) & ax \\ \bar{a}x & 1 \end{pmatrix}, \qquad \Phi_{n,\alpha,a} = \begin{pmatrix} 1 & -a(1+\alpha) \\ 0 & 1/\gamma_{n,a} \end{pmatrix},$$
$$X_{n,a} = \begin{pmatrix} 0 & -an \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y $\gamma_{n,a} = 1 + n|a|^2$.

Esto se puede probar como en [13].

Recordemos los operadores diferenciales $\mathcal{D}_{2,1}$, $\mathcal{D}_{2,2}$ del Ejemplo 3.7.2, en ([6]) se afirma que de hecho son una base para $\boldsymbol{\mathcal{D}}(W)$ de orden 2.

$$\mathcal{D}_{2,1} = D^2xI + D^1\begin{pmatrix} \alpha+2-x & ax \\ 0 & \alpha+1-x \end{pmatrix} + D^0\begin{pmatrix} -1 & (1+\alpha)a \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{D}_{2,2} = D^2\begin{pmatrix} x & -ax^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + D^1\begin{pmatrix} \alpha+2 & \frac{1}{\bar{a}}(1+|a|^2(\alpha+2))x \\ \frac{1}{a} & -x \end{pmatrix} + D^0\begin{pmatrix} -\frac{1}{|a|^2} & -\frac{1+\alpha}{\bar{a}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sus respectivos valores propios son

$$\Gamma_{2,1} = \begin{pmatrix} -n-1 & 0 \\ 0 & -n \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_{2,2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{|a|^2} & 0 \\ 0 & -n \end{pmatrix}.$$

Existen dos operadores diferenciales simétricos linealmente independientes de tercer orden. Este es un fenómeno que no ocurre en el caso escalar. De hecho, este es el primer ejemplo de un peso matricial que no se reduce a pesos escalares siendo un operador diferencial de orden impar.

Una base para los operadores de orden tres en $\mathcal{D}(W)$ esta dada por el operador

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}_{3,1} = D^3 & \begin{pmatrix} -|a|^2x^2 & ax^2(1+|a|^2x) \\ -\bar{a}x & |a|^2x^2 \end{pmatrix} \\
+ D^2 & \begin{pmatrix} -x(2+|a|^2(\alpha+5)) & ax(2\alpha+4+x(1+|a|^2(\alpha+5))) \\ -\bar{a}(\alpha+2) & x(2+|a|^2(\alpha+2)) \end{pmatrix} \\
+ D^1 & \begin{pmatrix} x-2(\alpha+2)(1+|a|^2) & \frac{|a|^2(\alpha+1)(\alpha+2)+x(1+2|a|^2(1+|a|^2(\alpha+2)))}{\bar{a}} \\ -\frac{1}{a} & 2\alpha+2-x \end{pmatrix} \\
+ D^0 & \begin{pmatrix} 1+\alpha & -\frac{1}{\bar{1}}(1+\alpha)(|a|^2\alpha-1) \\ \frac{1}{a} & -(1+\alpha) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}_{3,2} = D^3 & \begin{pmatrix} |a|^2x^2 & ax^2(1+|a|^2x) \\ \bar{a}x & -|a|^2x^2 \end{pmatrix} \\
+ D^2 & \begin{pmatrix} |a|^2x(\alpha+5)) & -ax(-2\alpha-4+x(3+|a|^2(\alpha+5))) \\ \bar{a}(\alpha+2) & -|a|^2x(\alpha+2) \end{pmatrix} \\
+ D^1 & \begin{pmatrix} x+2(\alpha+2)|a|^2 & \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)-x\left(\frac{1}{\bar{a}}+2a(2+|a|^2)(\alpha+2)\right) \\ -\frac{1}{a} & -x \end{pmatrix} \\
+ D^0 & \begin{pmatrix} 1+\alpha & -\frac{1}{\bar{a}}(1+\alpha)(1+|a|^2(\alpha+2)) \\ \frac{1}{a} & -(1+\alpha) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Sus respectivos valores propios estan dados por

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{n,3,1} &= \frac{1}{|a|^2}\begin{pmatrix} 0 & a(1+\alpha+n)\gamma_{n,\alpha}\gamma_{n+1,\alpha} \\ \bar{a} & 0 \end{pmatrix}, \\
\Gamma_{n,3,2} &= \frac{1}{|a|^2}\begin{pmatrix} 0 & -a(1+\alpha+n)\gamma_{n,\alpha}\gamma_{n+1,\alpha} \\ \bar{a} & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

El operador $\mathcal{D}_{3,1}$ es simétrico y por lo tanto satisface las condiciones de tercer orden de simetría con sus correspondientes condiciones de frontera. El operador $\mathcal{D}_{3,2}$ no es simétrico pero es anti- simétrico, por lo que $i\mathcal{D}_{3,2}$ es simétrico. A continuación se introduce una base distinta para los operadores diferenciales de orden 2

$$
\begin{aligned}
L_1 &= \mathcal{D}_{2,1} - \frac{1}{|a|^2}I, \\
L_2 &= 2\mathcal{D}_{2,2} - \mathcal{D}_{2,1} - \frac{1}{|a|^2}I
\end{aligned},
$$

mientras que denotames al operador diferencial de orden tres como $L_3 = \mathcal{D}_{3,1}$. Utilizando métodos computacionales en [16] se conjetura que $\{I, L_1, L_3\}$ es un generador del álgebra $\boldsymbol{\mathcal{D}}(W)$ completa, excepto para ciertos $\alpha = 1 + \frac{1}{|a|^2}$ y $\alpha = -2 + \frac{1}{|a|^2}$. En estos casos $\{I, L_1, L_2, L_3\}$ es generador del álgebra $\mathcal{D}(W)$ completa.

La siguiente tabla que exhibe la dimensión del espacio de los operadores diferenciales $D_k$ de orden $k$, tales que satisfacen $P_n D_k = \Lambda_n P_n$.

| *Orden* | k=0 | k=1 | k=2 | k=3 | k=4 | k=5 | k=6 | k=7 | k=8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Dimensión* | 1 | 0 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

## 4.2. Operadores diferenciales de segundo orden con distintas familias de polinomios ortogonales como funciones propias

En esta sección presentamos otro fenómeno de interés en el caso matricial. Encontraremos ejemplos de familias de polinomios ortogonales matriciales mónicos, cada una de estas familias es ortogonal con respecto a pesos distintos, cuyos elementos son funciones propias de un operador diferencial común.

Consideremos todos los operadores diferenciales

$$D = \sum_{i=0}^{k} \partial^i F_i(x), \quad \partial = \frac{d}{dx}, \; k \geq 0. \tag{4.8}$$

donde $F_i(x), \; i = 0, \ldots, k$ son matrices polinomiales de $\deg(F_i) \leq i$, tal que $P_n D = \Gamma_n P_n, \; n \geq 0$.

Para un operador diferencial $D$ de la forma (4.8) se define el conjunto de pesos matriciales

$$\Upsilon(D) = \{W : D \textit{ es simétrico con respecto a } W\},$$

donde la simetría de $D$ está definida por la ecuación

$$\int (PD)\, dW Q^* = \int P \, dW (QD)^*.$$

Notemos que si $\Upsilon(D) \neq \emptyset$, entonces es un cono convexo. Es decir, si $W_1$, $W_2 \in \Upsilon(D)$ y $\gamma, \zeta \geq 0$ con una de ellas no nula, entonces $\gamma W_1 + \xi W_2 \in \Upsilon(D)$. Mostraremos un ejemplo de un operador diferencial de segundo orden para el cual existen dos pesos matriciales $W_1$ y $W_2$, $W_1 \neq \alpha W_2$ para cualquier $\alpha \geq 0$, de tal manera que $D$ es simétrico con respecto a cualquiera de los pesos matriciales $\gamma W_1 + \xi W_2$, $\gamma, \zeta \geq 0$. Esto significa, que los correspondientes polinomios matriciales mónicos $(P_{n,\zeta/\gamma})_n$ ortogonales con respecto a $\gamma W_1 + \zeta W_2$ son funciones propias de $D$,

$$P_{n,\zeta/\gamma} D = \Gamma_n P_{n,\zeta/\gamma}, \qquad n = 0, 1, \ldots, \; \gamma > 0, \; \zeta \geq 0,$$

donde $D$ y $\Gamma_n$ no dependen de $\gamma, \zeta$.

Presentaremos un método para generar ejemplos. La idea es un peso matricial que tiene varios operadores diferenciales simétricos asociados. Y entonces sumamos un distribución de Dirac $\delta_{x_0}Q(x_0)$ a $W$, donde el número real $x_0$ y la masa $Q(x_0)$ se elegirán convenientemente.

El Teorema 4.2.3 nos dará condiciones para la simetría de un operador diferencial $D_k$ con respecto a los pesos matriciales $W$ y $W+\delta_{x_0}Q(x_0)$. Para esto primero enunciamos el siguiente lema.

**Lema 4.2.1.** *Sea $W$ peso matricial, las siguientes condiciones son equivalentes.*

- *El operador $D_k$ es simétrico con respecto a $W$.*
- *Para $n \geq l$, las siguientes $k+1$ ecuaciones de momentos se cumplen:*

$$\sum_{i=0}^{k-l} \binom{k-i}{l} (n-l)_{k-l-i} B_n^{k-i} = (-1)^l (B_n^l)^*, \quad l = 0, \dots, k, \tag{4.9}$$

*donde*

$$B_n^l = \sum_{i=0}^{l} F_{l-i}^l \mu_{n-i}, \quad l = 0, \dots, k.$$

*Observación* 4.2.2. La ventaja de las ecuaciones de momentos (4.9) es que son equivalentes a la simetría del operador $\mathcal{D}_k$ sin ninguna condición adicional. Es decir no pide continuidad o alguna condición en la frontera como se pedía en el Teorema 3.2.3. Resultaría complicado entontrar el operador $W$ a partir de estas ecuaciones de momentos, sin embargo para la caracterización en cuestión serán útiles.

La prueba de este Lema se encuentra en [16].

**Teorema 4.2.3.** *Sea $D_k$ un operador diferencial de orden $k$ y $W$ un peso matricial. Supongamos que asociado al punto $x_0 \in \mathbb{R}$, existe una matriz Hermitiana semidefinida positiva $Q(x_0)$ que satisface*

$$\begin{aligned} F_j(x_0)Q(x_0) = 0, \quad j = 1, \dots, k, \\ F_0 Q(x_0) = Q(x_0) F_0^*. \end{aligned} \tag{4.10}$$

*Entonces el operador $D_k$ es simétrico con respecto a $W$ si y sólo si es simétrico con respecto a $\widetilde{W} = W + \delta_{t_0}Q(x_0)$.*

*Demostración.* Calculamos los momentos del peso $\widetilde{W}$ :

$$\mu_n = \int x^n d\widetilde{W}(x) = \mu_n + \int x^n \delta_{x_0}(x) Q(x_0)\, dt = \mu_n + x_0^n Q(x_0), \quad n = 0, 1, \dots \tag{4.11}$$

Aplicando el Lema 4.2.1 y la expresión (4.11) se obtiene las siguientes $k+1$ ecuaciones de momentos para $\widetilde{W}$

$$\sum_{i=0}^{k-l} \binom{k-i}{l} (n-l)_{k-l-i} \widetilde{B}_n^{k-i} = (-1)^l (\widetilde{B}_n^l)^*, \quad l = 0, \ldots, k,$$

donde

$$\widetilde{B}_n^l = \sum_{i=0}^{l} F_{l-i}^l \widetilde{\mu}_{n-i} = B_n^l + x_0^{n-1} F_l(t_0) Q(x_0), \quad l = 0, \ldots k.$$

Utilizando la primera condición (4.10) se obtiene para $l = 1, \ldots, k$

$$\widetilde{B}_n^l = B_n^l. \tag{4.12}$$

Como consecuencia para $l = 1, \ldots, k$ las ecuaciones (4.9) son las mismas para $W$ y $\widetilde{W}$.

Observémos que para $l = 0$ tenemos la expresión

$$\widetilde{B}_n^0 = B_n^0 + x_0^n F_0 Q(x_0) \tag{4.13}$$

Las ecuaciones de momentos (4.9) para $\widetilde{W}$ son

$$\sum_{i=0}^{k-1} (n)_{k-i} \widetilde{B}_n^{k-i} + B_n^0 + x_0^n F_0 Q(x_0) = (\widetilde{B}_n^0)^*,$$

usando la expresiones (4.13) y (4.12) se obtiene

$$\sum_{i=0}^{k-1} (n)_{k-i} B_n^{k-i} + B_n^0 + x_0^n F_0 Q(x_0) = (B_n^0)^* + x_0 Q(x_0) F_0^*,$$

por último aplicando la segunda condición en (4.10) se obtiene

$$\sum_{i=0}^{k-1} (n)_{k-i} B_n^{k-i} + B_n^0 = (B_n^0)^*.$$

Por lo tanto las ecuaciones de momentos (4.9) para $\widetilde{W}$ y $W$ son las mismas. □

*Observación* 4.2.4. En el caso escalar, el Teorema anterior implica que $Q = 0$ o que existe un cero común para todos los coeficientes del operador diferencial.

Para un peso matricial $W$, las condiciones (4.10) significan que sumando una distribución de Dirac a $W$ las oportunidades de que $W$ y $W + \delta_{x_0} Q(x_0)$ compartan un operador diferencial de orden $k$ aumentan con el número de operadores diferenciales simétricos de orden $k$ linealmente independientes.

Una vez que generamos $W$, $D_k$, $x_0$ y $Q(x_0)$ que satisface las condiciones (4.10), podemos producir no sólo un único peso matricial para el cual $D_k$ es simétrico, sino que podemos producir un cono convexo de pesos matriciales de dimensión dos para el cual $D_k$ es simétrico.

Si el Teorema 4.2.3 se cumple para $W+\delta_{x_0}Q(x_0)$, entonces automáticamente se cumple para $\gamma W+\psi\delta_{x_0}Q(x_0)$, donde $\gamma > 0$ y $\psi \geq 0$. Todos los pesos matriciales que se presentarán en el siguiente ejemplo difieren en una delta de Dirac.

A un operador diferencial $D$ (fijo) de la forma (4.8), podemos asociarle otro conjunto de pesos matriciales:

$$\Phi(D) = \{W : P_n^W D = \Gamma_n P_n^W, n \geq 0\},$$

donde $\{P_n^W\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de polinomios ortogonales con coeficientes matriciales mónicos con respecto a $W$. Notemos que $\Upsilon(D) \subset \Phi(D)$ y si $\Phi(D) \neq \emptyset$ entonces es un cono, i.e. dado $W \in \Phi(D)$ entonces $\alpha W \in \Phi(D)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Generalmente $\Upsilon(D) \neq \Phi(D)$, como muestra el siguiente ejemplo. Sea $D$ un operador diferencial simétrico con respecto al peso matricial $W$. Como consecuencia los elementos de la sucesión de polinomios ortogonales matriciales mónicos $\{P_n^W\}_{n\in\mathbb{N}}$ con respecto a $W$ son funciones propias para el operador $D$. Es claro que el operador $iD$ no es simétrico con respecto a $W$, pero los polinomios ortogonales mónicos $\{P_n^W\}_{n\in\mathbb{N}}$ son funciones propias para el operador $iD$.

### 4.2.1. Ejemplo

Consideremos el peso matrical

$$W_a(x) = e^{-x^2}e^{Ax}e^{-Ax} = e^{-x^2}\begin{pmatrix} 1+a^2x^2 & ax \\ ax & 1 \end{pmatrix} \quad x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}. \tag{4.14}$$

Este peso matricial ya apareció en los Ejemplos 3.4.1 y 4.1.1.

Buscaremos una expresión para el espacio lineal de operadores diferenciales simétricos de orden a lo más dos con respecto a $W_a$. Para hacer esto resolvemos las ecuaciones de simetría (4.10) para $k = 2$. Estas son

$$\begin{aligned} A_2W &= WA_2^* \\ 2(A_2W)' &= WA_1^* + A_1W \\ (A_2W)'' - (A_1W)' + A_0W &= WA_0^*. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Obtenemos una expresión para el espacio lineal de los operadores diferenciales simétricos de orden dos con respecto al peso matricial $W_a$. Entonces para un número real fijo $x_0$, verificaremos las ecuaciones (4.10). En este caso, encontramos que el siguiente operador diferencial

$$D_{a,x_0} = \partial^2 F_2(x) + \partial^1 F_1(x) + \partial^0 F_0, \tag{4.16}$$

$$F_2(x) = \begin{pmatrix} -\xi^{\mp}_{a,x_0} + ax_0 - ax & -1 - (a^2x_0)x + a^2x^2 \\ -1 & -\xi^{\mp}_{a,x_0} - ax \end{pmatrix},$$
$$F_1(x) = \begin{pmatrix} -2a + 2\xi^{\mp}_{a,x_0}x & -2x_0 - 2a\xi^{\mp}_{a,x_0} + 2(2+a^2)x \\ 2x_0 & 2(\xi^{\mp}_{a,x_0} - ax_0)x \end{pmatrix},$$
$$F_0 = \begin{pmatrix} \xi^{\mp}_{a,x_0} + 2\frac{x_0}{a} & 2\frac{2+a^2}{a^2} \\ \frac{4}{a^2} & -\xi^{\mp}_{a,x_0} - 2\frac{x_0}{a} \end{pmatrix},$$

y la matriz Hemitiana semi-definida positiva $Q(x_0)$

$$Q(x_0) = Q(a,x_0)\begin{pmatrix} (\xi^{\pm}_{a,x_0})^2 & \xi^{\pm}_{a,x_0} \\ \xi^{\pm}_{a,x_0} & 1 \end{pmatrix},$$
$$\xi^{\pm}_{a,x_0} = \frac{ax_0 \pm \sqrt{4+a^2x^2}}{2},$$

satisfacen las restricciones (4.10).

Este operador diferencial se obtiene como combinación lineal de los operadores diferencial introducidos en el Ejemplo 4.1.1, de la siguiente manera

$$D_{a,x_0} = \left(-\xi^{\mp}_{a,x_0} + \tfrac{2x_0}{a}\right) I - \xi^{\mp}_{a,t_0} D_1 - \frac{4x_0}{a} D_2 + \frac{4}{a^2} D_4,$$

donde $D_1$, $D_2$, y $D_4$ son los operadores diferenciales asociados a las ecuaciones (4.2), (4.3) y (4.5), respectivamente.

Notemos que $\xi^{+}_{a,x_0}\xi^{-}_{a,x_0} = -1$. Usando esta igualdad es directo verificar que los coeficientes de $D_{a,x_0}$, evalualados en $x_0$ satisfacen las restricciones (4.10). Ya que $D_{a,x_0}$ lo tomamos simétrico con respecto con respecto al peso matricial (4.14), por el Teorema 4.2.3 concluimos que $D_{a,x_0}$ es simétrico con respecto a cualquiera de los siguientes pesos matriciales:

$$W_{a,x_0,\gamma,\xi}(x) = \gamma W_a(x) + \xi\delta(x_0)Q(a,x_0), \;\; \gamma > 0, \;\; \xi \geq 0. \tag{4.17}$$

En [15] se prueba que nuestro método contiene a todos los pesos matriciales en el cono convexo $\Upsilon(D_{a,x_0}) = \{\gamma W_a(x) + \xi\delta_{x_0}(x)Q(a,x_0);\; \gamma > 0,\; \xi \geq 0\}$.

# Bibliografía


[1] R. Beals, R. Wong. *Special functions,* Cambridge University Press, New York, 2010.

[2] R.G. Bartle. *The elements of integration and Lebesgue measure,* Wiley Classics, 1995.

[3] J. M. Berezans'ki. *Expansions in Eigenfunctions of Selfadjoint Operators,* American Mathematical Society, Vol. 17, Rhode Island, 1968.

[4] S. Bochner. *Uber Sturm-Liouvillesche Polynomsysteme,* Math. Zeitschrift, Vol. 29, (1929), págs. 730–736.

[5] M. J. Cantero, L. Moral y L. Velázquez. *Matrix orthogonal polynomials whose derivatives are also orthogonal,* Journal of Approximation Theory, Vol. 146, (2007), págs. 174–211.

[6] M. M, Castro y F. A. Grünbaum. *The algebra of differential operators associated to a family of matrix-valued orthogonal polynomials: Five instructive examples,* International Mathematics Research Notices, Vol. 2006, (2006), págs. 1-33.

[7] T. S. Chihara. *An Introduction to Orthogonal Polynomials,* Gordon and Breach, New York, 1978.

[8] A. J. Durán.*On orthogonal polynomials with respect to positive definite matrix of measures.* Can. J. Math., Vol. 47, (1995), págs. 88-112.

[9] A. J. Durán. *Matrix Inner Product Having a Matrix Symmetric Second Order Differential Operator,* Rocky Mountain J. Math. 27, number 2, (1997), págs. 585-600.

[10] A. J. Durán. *A method to find weight matrices having symmetric second order differential operators with matrix leading coefficient,* Constr. Approx. Vol. 29, (2009), págs. 181–205.

[11] A. J. Durán. *Rodrigues's Formulas for Orthogonal Matrix Polynomials Satisfying Higher-Order Differential Equations.* Experiment. Math. Vol. 20, (2011), págs 15-24.

[12] A. J. Durán y F. A. Grünbaum. *Orthogonal matrix polynomials satisfying second-order differential equations,* International Mathematics Research Notices, Vol. 2004 (10), (2004), págs. 461–484.

[13] A. J. Durán y F. A. Grünbaum. *Structural Formulas for Orthogonal Matrix Polynomials Satisfying Second-Order Differential Equations, I.* Constr Approx, Vol. 22, (2005), págs. 255-271.

[14] A. J. Durán y F. A. Grünbaum. *A characterization for a class of weight matrices with orthogonal matrix polynomials satisfying second-order differential equations.* Int. Math. Res. Not., Vol. 23, (2005), págs. 1371–1390.

[15] A. J. Durán y M. Domínguez de la Iglesia. *Second-Order Differential Operators Having Several Families of Orthogonal Matrix Polynomials as Eigenfunctions.* International Mathematics Research Notices, Vol. 2008, (2008), págs 1-24.

[16] A. J. Durán y M. Domínguez de la Iglesia. *Some examples of orthogonal matrix polynomials satisfying odd order differential equations.* Journal of Approximation Theory. Vol. 150, (2008), págs. 153–174.

[17] A. J. Durán y P. López-Rodríguez. *Structural Formulas for Orthogonal Matrix Polynomials Satisfying Second-Order Differential Equations, II.* Constr Approx., Vol. 26, (2007), págs. 29-47.

[18] A. J. Durán y W. Van Assche. *Orthogonal matrix polynomials and higher order recurrence relations,* Linear Algebra and Applications. Number 219, (1995), 261-280.

[19] L. Miranian. *Matrix-valued orthogonal polynomials on the real line: some extensions of the classical theory,* J. Phys. A: Math. Gen. 38, (2005), págs. 5731–5749.