



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**Análisis de aplicabilidad e  
implementación del algoritmo de  
optimización por enjambre de partículas  
en la inversión de datos de gradiometría  
gravimétrica**

**TESIS**

Que para obtener el título de

**Ingeniero Geofísico**

**P R E S E N T A**

Eduardo Tapia Romero

**DIRECTOR DE TESIS**

Dr. Mauricio Nava Flores



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2019



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*Esta tesis va dedicada a mis padres y a mi hermana. Gracias por toda su paciencia y apoyo.*



## *Agradecimientos*

A la Universidad Nacional Autónoma de México, mi alma mater, por darme todo lo necesario para formarme como profesional.

A la Facultad de Ingeniería por haberme dado todo lo necesario para formarme como ingeniero, así como la oportunidad de conocer extraños que se volvieron grandes amigos dentro de sus aulas.

Al Dr. Mauricio Nava, mi director de tesis, por siempre contestar mis preguntas, aun cuando las hacía en horas poco adecuadas y la paciencia de siempre explicarme lo que no entendía.

A mis sinodales por tomarse el tiempo de revisar mi tesis.

A PAPIME por la beca otorgada y a BellGeospace, por los datos con los que se trabajó para la elaboración de esta tesis.

## *Resumen*

Uno de los problemas más importantes con los que se enfrenta la geofísica es el de generar modelos geológicos congruentes tanto con la física como con la geología de la zona en la que se está trabajando, para ello la rama de geofísica conocida como inversión utiliza diversos métodos para realizar el ajuste de los datos levantados en campo a modelos geológicos representativos, sin embargo, con el desarrollo de la ciencia de la computación ha surgido una gran variedad de métodos de optimización que no se habían tomado en consideración para la inversión geofísica hasta hace poco tiempo, así que con el propósito de ampliar las opciones para realizar inversión geofísica se eligió el algoritmo de optimización por enjambre de partículas para resolver el problema inverso con datos de gradiometría gravimétrica de tensor completo.

En la zona Vinton de Louisiana se encuentra una estructura geológica que consiste en una capa de roca que sobreyace un domo salino la cual se ha estudiado desde los años 1900, ya que se han encontrado yacimientos de gas en la región, sin embargo, resulta sumamente complejo y caro perforar la capa de roca directamente, es por esto que surgió el interés por estudiar y caracterizar la capa de roca de la manera más precisa posible, para así poder recuperar el gas que se presupone existe debajo.

Dado el interés en el algoritmo de optimización por enjambre de partículas, se decidió invertir la capa de roca del domo Vinton, para ello fue necesario utilizar el levantamiento aéreo de gradiometría de tensor completo realizado por la empresa BellGeospace.Inc, el cual está conformado por los 6 componentes del tensor para la región de Vinton.

Para poder aplicar el método con los datos de gradiometría, fue necesario realizar diversas pruebas previas para poder utilizar los datos del levantamiento, la primera prueba realizada fue la optimización de una función estándar, una vez que el algoritmo logró optimizarla, el paso siguiente consistió en resolver un problema geofísico con anomalías gravimétricas convencionales generadas con modelos sintéticos, posteriormente se resolvió un problema de gradiometría gravimétrica generado por un modelo sintético, y finalmente, se invirtió la capa de roca, sin embargo para reducir la incertidumbre, se construyó un modelo 3D partiendo de el procesamiento de los datos de gradiometría, finalmente dejando el algoritmo depurar el modelo inicial para generar un modelo con el menor error de ajuste simultáneo entre los perfiles de datos observados y calculados para los 6 perfiles seleccionados.

## *Abstract*

One of the greatest drawbacks in geophysics is to being able to generate geological models that are compatible with the physical laws and the geology of the zone of interest, to tackle this problem, the branch of geophysics known as geophysical inversion, has a very diverse catalog of methods that can relate the field data to geologically representative models, nevertheless, as the computer science develops, there has been a great amount of numerical optimization methods that have been neglected by the geophysical inversion until recent times, so with the objective to broaden the scope of geophysical inversion methods we chose to implement the particle swarm optimization algorithm to solve the inverse problem of full tensor gravity gradiometry data.

At vinton, Louisiana there is a geological structure which consists of a caprock overlaying a salt dome which has been studied since the 1900s, since there have been found gas fields in the region, however, drilling the caprock directly is quite complicated and expensive, so there has been a lot of interest in studying and characterizing the caprock as precisely as possible in order to recover the gas underneath.

Given our interest in the particle swarm optimization algorithm, the decision to solve the vinton caprock was made, in order to do that we used the FTGG airborne data survey made by BellGeospace.inc, which consist of the 6 tensor components for the vinton region.

In order to apply the method to de FTGG data, there were several steps to take before using the survey data, the first step consisted in the optimization of a standard test function, once the algorithm was capable of optimizing the given function, the next step was to optimize a conventional gravity problem with an anomaly generated with synthetic bodies, following, the algorithm was used to solve a FTGG data set with another synthetic bodies, and lastly the algorithm was used to solve the Vinton caprock, in order to reduce the uncertainty in the results a 3D model was generated beforehand by processing the FTGG data, and allowed the PSO algorithm to debug the model in order to generate a model with the least simultaneous error between the 6 components for the selected profiles



# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>II</b>
<b>Resumen</b>	<b>IV</b>
<b>Abstract</b>	<b>IV</b>
<b>Índice general</b>	<b>V</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Objetivos . . . . .	2
1.2. Antecedentes de la zona de estudio . . . . .	2
1.2.1. Ubicación y rasgos geográficos . . . . .	2
1.2.2. Rasgos generales . . . . .	3
1.3. Metodología General . . . . .	5
<b>2. Marco Teórico</b>	<b>7</b>
2.1. Gravimetría . . . . .	7
2.1.1. Método gravimétrico . . . . .	7
2.1.2. Fuerza de atracción Gravitacional . . . . .	7
2.1.3. Potencial Gravitatorio . . . . .	9
2.1.4. Vector Gravitacional . . . . .	10
Tensor Gravimétrico . . . . .	10
Propiedades del tensor gravimétrico . . . . .	11
2.1.5. Atracción gravitacional para distribuciones de masa . . . . .	12
2.1.6. Modelos de atracción gravitacional para geometrías simples . . . . .	12
Atracción por un cilindro horizontal infinito de densidad Uniforme . . . . .	13
Atracción generada por un prisma rectangular . . . . .	14
2.1.7. Modelos de atracción gravitacional para geometrías complejas . . . . .	16
Ensamblajes de estructuras simples . . . . .	17
2.1.8. Procesamiento de datos . . . . .	18
Continuación Ascendente . . . . .	19
Deconvolución de Euler . . . . .	19

Interpretación de invariantes . . . . .	20
Función Detectora de Bordos . . . . .	20
2.2. Inversión Geofísica . . . . .	21
2.2.1. Problema Directo . . . . .	21
2.2.2. Problema Inverso . . . . .	22
2.2.3. Función de error . . . . .	23
2.3. Optimización por enjambre de partículas . . . . .	24
2.3.1. Bases del Algoritmo PSO . . . . .	24
2.3.2. Cálculo de las velocidades y posiciones . . . . .	25
2.3.3. Búsqueda del valor de interés . . . . .	25
<b>3. Información Geofísica</b>	<b>27</b>
3.1. Mallas del tensor gravimétrico medido en el domo Vinton . . . . .	27
3.1.1. Limpieza y corrección de datos . . . . .	27
3.2. Modelo de densidades de sedimentos del Golfo de México . . . . .	28
<b>4. Metodología</b>	<b>31</b>
4.1. Programación y prueba del algoritmo . . . . .	31
4.1.1. Transcripción y pruebas con funciones estándar . . . . .	31
4.1.2. Adaptación y pruebas con gravimetría . . . . .	33
Primer Anomalía sintética . . . . .	33
Cálculo de la anomalía sintética con cilindros . . . . .	33
Inclusión de ruido en la anomalía . . . . .	33
Inversión y análisis paramétrico con PSO . . . . .	34
Discusión del análisis paramétrico de la inversión de cilindros ideales	37
4.2. Prueba con gravimetría 2D . . . . .	37
Cálculo de la anomalía sintética de un cilindro . . . . .	37
4.2.1. Inversión con PSO . . . . .	38
4.3. Modelado e inversión tridimensional . . . . .	41
4.3.1. Modelo inicial . . . . .	41
4.3.2. Consideraciones particulares para la inversión . . . . .	45
<b>5. Resultados</b>	<b>49</b>
5.1. Resultados de inversión del caso gravimétrico para cilindros ideales . . . . .	49
5.1.1. Anomalías Invertidas y parámetros encontrados . . . . .	49
Anomalía sin ruido . . . . .	49
Curvas Invertidas . . . . .	49
Parámetros invertidos . . . . .	50
Anomalía con ruido . . . . .	51
Curvas invertidas . . . . .	51
Parámetros Invertidos . . . . .	52
5.1.2. Inversión de modelo 2D partiendo de un cilindro ideal . . . . .	52
5.2. Resultados de la inversión de la capa de roca del domo Vinton . . . . .	55

<b>6. Conclusiones y recomendaciones</b>	<b>61</b>
6.1. Conclusiones . . . . .	61
6.2. Recomendaciones para trabajos futuros . . . . .	62
<b>7. Bibliografía</b>	<b>63</b>



# Introducción

La geofísica cuenta con una diversa gama de métodos que le permiten obtener información útil para poder realizar inferencias sobre aquello que se encuentra en el subsuelo, sin embargo, cada método geofísico presenta fortalezas y debilidades que dependen de las características de la zona de estudio.

El método geofísico de interés en este trabajo de tesis es el gravimétrico, que nos permite delimitar cuerpos y estructuras en el subsuelo. El método se basa en medir contrastes de densidad, existe una gran diversidad de modelos que pueden reproducir los datos que encontramos en campo, es por esta razón que es importante tener diversos métodos para poder generar modelos que se ajusten de manera adecuada a la física y la geología.

La inversión geofísica es la rama de la geofísica que busca generar modelos geológicos a partir de las mediciones que se realizan en campo, y se cuenta con una gran cantidad de herramientas para hacerlo, algunos métodos se basan en buscar los parámetros de interés a través de métodos lineales, los cuales por su naturaleza tienen diversas limitantes, especialmente cuando el problema es multimodal, es por esto que recientemente se han comenzado a implementar distintos tipos de métodos de inversión conocidos como métodos heurísticos, los cuales han mostrado una gran capacidad para resolver problemas geofísicos.

En el año 2009, Sanyi Yuan y colaboradores realizaron pruebas sencillas para invertir datos geofísicos utilizando diversos métodos de optimización global como el recocido simulado, optimización por enjambre de partículas, optimización por colonia de hormigas y los comparó con los resultados obtenidos con los métodos lineales Yuan *et al.* (2009). En su trabajo concluyó que todos los métodos eran viables ya que todos tuvieron la capacidad de invertir los datos sísmicos y gravimétricos con los que trabajó. Pallero *et al.* (2015) utilizaron diversas familias del algoritmo de optimización por enjambre de partículas para invertir el basamento del desierto de Atacama donde demostró que el algoritmo era útil para inversión gravimétrica independientemente de la variante del algoritmo que se esté utilizando y en el 2018 Nava Flores (2018) realizó la inversión de la estructura de la capa de roca del domo Vinton

utilizando el algoritmo de recocido simulado con datos de gradiometría gravimétrica, obteniendo a un modelo consistente con los reportes estructurales de la región.

En esta tesis se utiliza el método de optimización por enjambre de partículas para invertir datos de gradiometría gravimétrica para generar un modelo tridimensional de densidades, presentando una alternativa más para la inversión de datos de gravimetría que se puede utilizar con tantos componentes se deseen del tensor gravimétrico.

## **1.1. Objetivos**

Este trabajo de tesis tiene los siguientes objetivos principales:

1. Formular una implementación del algoritmo PSO en el lenguaje FORTRAN 2008 de manera que se pueda utilizar para la inversión de datos geofísicos.
2. Realizar análisis paramétricos y de convergencia de la implementación con datos provenientes de modelos sintéticos.
3. Realizar la inversión de datos gravimétricos de la zona del domo salino Vinton en Lousiana con el algoritmo PSO.

## **1.2. Antecedentes de la zona de estudio**

### **1.2.1. Ubicación y rasgos geográficos**

El domo Vinton es una estructura geológica que se encuentra produciendo petróleo desde 1901, se encuentra ubicada en el suroeste de la estación Vinton , cerca de la frontera a Texas, de ahí su nombre.

En la figura 1.1 se muestra la zona del levantamiento la cual se encuentra delimitada por las latitudes  $30.07^\circ$  a  $30.23^\circ$  Norte y  $-93.66^\circ$  a  $-93.56^\circ$ , Oeste con un área de estudio aproximada de  $196.2\text{Km}^2$ , El domo Vinton es uno de los domos más prominentes a lo largo de la costa del Golfo de México, asimismo la depresión generada por el domo se encuentra ocupada por el lago llamado Gray Lake.(Harris, 1910)

## 1.2.2. Rasgos generales

El domo Vinton es de interés para la investigación ya que presenta una cima de roca que cambia de densidad gradualmente, conforme aumenta su profundidad, comenzando como caliza la cual gradualmente se convierte en yeso y finalmente anhidrita, el domo salino tiene una longitud aproximada de 1.28Km en dirección Norte- Sur, y 1.5km en dirección Este - Oeste y la parte mas somera se encuentra a una profundidad de aproximadamente 200m por debajo del nivel del mar, Thompson y Eichelberger (1928).

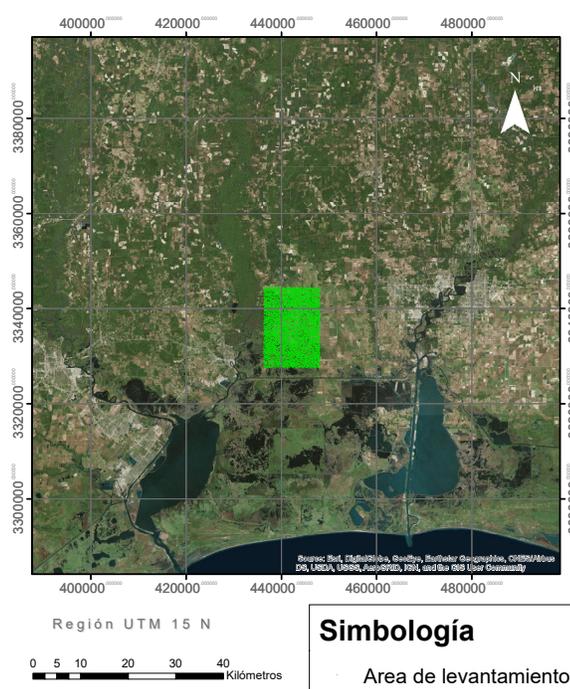
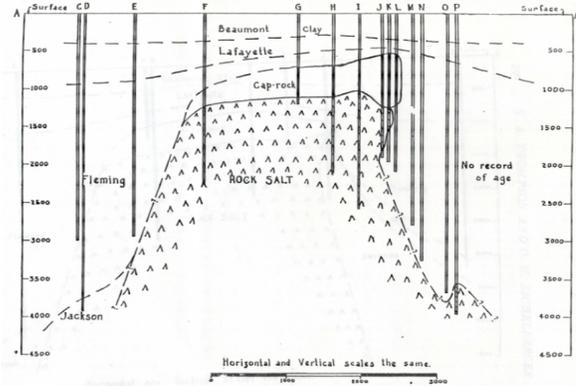
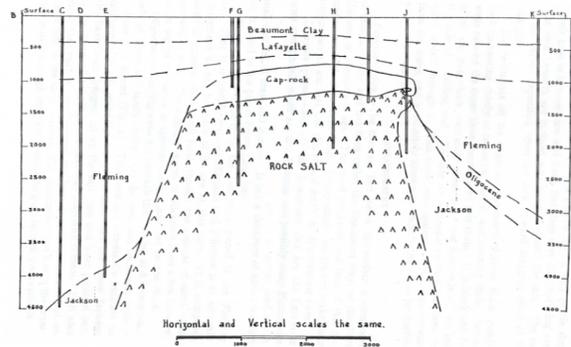


FIGURA 1.1: Mapa de la región con la zona del levantamiento sombreada

En las figuras, 1.2a y 1.2b podemos observar cortes N-S y E-W propuestos para la estructura del domo, donde podemos observar la geometría propuesta tanto para el domo como para el cuerpo de roca que se encuentra sobre el.



(A) Corte NS propuesto por(Thompson y Eichelberger, 1928)



(B) Corte EW propuesto por(Thompson y Eichelberger, 1928)

FIGURA 1.2: Secciones geológicas del domo Vinton propuestas por(Thompson y Eichelberger, 1928)

### 1.3. Metodología General

La metodología propuesta para lograr los objetivos previamente propuestos, está basada en la premisa de que cada objetivo depende del éxito del objetivo anterior, por lo que el primer paso será la programación de las librerías requeridas para la ejecución del algoritmo y se culminará con la obtención de un modelo de densidades significativo del cuerpo de interés de la zona de estudio.

De manera general, el primer paso a seguir, como se mencionó previamente, consiste en generar las librerías pertinentes en el lenguaje de FORTRAN 2008 para la ejecución del algoritmo y a continuación su validación mediante la optimización de funciones ya establecidas.

Una vez probado el funcionamiento del algoritmo con funciones preestablecidas, se generan los modelos sintéticos con los que se probará el algoritmo.

Ya que se cuenta con los modelos, se realiza la adaptación de las librerías para su uso con los datos de gravimetría, y utilizando el componente vertical de gravedad se procede a realizar un análisis paramétrico del algoritmo con el objetivo de observar la relación que tiene cada parámetro con el comportamiento de la curva de error a lo largo de la inversión. Ya teniendo una mejor comprensión de los parámetros y su influencia en el funcionamiento del algoritmo se procede con la inversión de datos tensoriales de los modelos sintéticos previamente calculados con y sin ruido aleatorio añadido.

Finalmente, se utilizarán los métodos de interpretación de anomalías para delimitar las propiedades geométricas del cuerpo, tales como geometría y profundidad, y a partir de ahí se generará un modelo inicial el cual se utilizará para la inversión.



# Marco Teórico

*“Because there is a law such as gravity, the universe can and will create itself from nothing. Spontaneous creation is the reason there is something rather than nothing, why the universe exists, why we exist.”*

*Stephen Hawking.*

En este trabajo se utiliza el algoritmo de optimización por enjambre de partículas (PSO por sus siglas en inglés) como un método de inversión de datos gravimétricos y se analiza su rendimiento y aplicabilidad en modelos multiparamétricos. Se plantea como hipótesis que el algoritmo PSO es una herramienta computacional que nos podría permitir realizar la inversión de una gran cantidad de parámetros en un tiempo considerablemente menor que los métodos convencionales.

## 2.1. Gravimetría

### 2.1.1. Método gravimétrico

El método gravimétrico o prospección gravimétrica, es un método geofísico que consiste en utilizar las variaciones del campo gravitacional para inferir mediante diversos métodos matemáticos, la posición y geometría de cuerpos y estructuras en el subsuelo siempre y cuando éstas presenten un contraste de densidad con el material circundante.

### 2.1.2. Fuerza de atracción Gravitacional

En su publicación *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, Newton (1726) describe lo siguiente para la segunda ley del movimiento: “El cambio de la cantidad de movimiento de un objeto es directamente proporcional a la fuerza que actúa sobre él y sucede en la misma

dirección". La ecuación que describe esta ley del movimiento es la siguiente:

$$F = ma \quad (2.1)$$

En donde podemos observar que si la masa es constante, la fuerza se puede describir como la aceleración  $a$  aplicada a una masa  $m$ .

En la tercera parte de su publicación, Newton escribe sobre la gravedad con su *Ley de gravitación universal*, en la cual nos dice que: "La magnitud de la fuerza de atracción entre 2 cuerpos es proporcional a la masa de cada uno y es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos". Si consideramos dos masas puntuales: una con masa  $m$  ubicada en el punto  $Q(x', y', z')$  y otra de masa  $m_0$  ubicada en el punto  $P(x, y, z)$ <sup>1</sup> como se presenta en la figura 2.1.

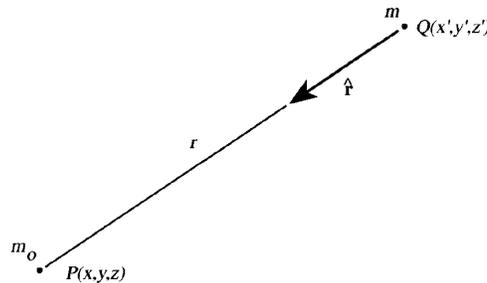


FIGURA 2.1: Masas  $m_0$  y  $m$  separadas una distancia  $r$ , tomada de Blakely (1996)

Esta ley se puede representar matemáticamente de la siguiente forma:

$$\overline{F} = -\gamma \frac{m_0 m}{r^2} \hat{r} \quad (2.2)$$

Donde  $r$  es la distancia del vector que une los puntos  $\overline{PQ}$  y  $\hat{r}$  su dirección.  $r$  se define de la siguiente manera:

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

y  $\gamma$  es la constante de gravitación universal cuyo valor es de  $\gamma = 6.674210 \cdot 10^{-11} m^3 K g^{-1} s^{-2}$ .

Si reacomodamos nuestras variables y dividimos ambos lados entre  $m_0$ , podemos observar la atracción gravitacional por unidad de masa generada por el cuerpo  $m$  en la ubicación del

<sup>1</sup>Notación tomada de Blakely (1996)

cuerpo de masa  $m_0$ , la cual queda expresada de la siguiente manera:

$$\overline{F}(P) = m_0 \left( -\gamma \frac{m}{r^2} \hat{r} \right) \quad (2.3)$$

$$\overline{g}(P) = -\gamma \frac{m}{r^2} \hat{r} \quad (2.4)$$

Comparando nuestro resultado con la ecuación (2.1) podemos observar que la fuerza de atracción gravitacional se puede representar como una aceleración de magnitud  $-\gamma \frac{m}{r^2}$  por unidad de masa en un punto P (2.4)

### 2.1.3. Potencial Gravitatorio

La energía potencial de un objeto es proporcional al trabajo realizado por una fuerza externa para desplazarlo en dirección contraria al campo que actúa sobre el, de esta forma podemos definir la energía potencial de la siguiente forma:

$$E_p = -\overline{F} \cdot \overline{r} \quad (2.5)$$

Como podemos observar la energía potencial depende únicamente de la distancia paralela a la fuerza que actúa sobre el cuerpo.

Por otro lado, si lo que nos interesa es encontrar el cambio en en la energía potencial del cuerpo al cambiar de posición, la ecuación (2.5) se convierte en:

$$dE_p = -\overline{F} \cdot \overline{dr} \quad (2.6)$$

Si ahora consideramos un cuerpo de masa  $m$ , y denotamos el potencial por unidad de masa como  $U_G$ , podemos sustituir la ecuación (2.4), en (2.6) con lo cual podemos definir el cambio en la energía potencial de un cuerpo de la siguiente forma:

$$m \nabla U_g(P) = -m a_G dr \quad (2.7)$$

$$\nabla U_g(P) = -a_G dr \quad (2.8)$$

$$-\nabla U_g(P) = \gamma \frac{m}{r^2} \quad (2.9)$$

$$U_g(P) = \gamma \frac{m}{r} \quad (2.10)$$

De las ecuaciones (2.7) a (2.10) podemos observar lo siguiente:

1. El potencial gravitatorio tiene una relación directa con la aceleración gravitacional
2. El campo de fuerza gravitatoria se puede calcular mediante  $-\nabla U_G = a_G$ .

Finalmente al estudiar el campo gravitatorio consideramos que al estar distantes de nuestras fuentes, el potencial gravitacional es armónico y por lo tanto satisface la ecuación de Laplace (Blakely, 1996):

$$\nabla \cdot \bar{g} = \nabla \cdot \nabla U = \nabla^2 U = 0 \quad (2.11)$$

#### 2.1.4. Vector Gravitacional

En gran cantidad de situaciones, el campo gravitacional se suele simplificar como un campo de una sola dirección, sin embargo es bien sabido que en realidad es un fenómeno tridimensional, el cual obtenemos con el gradiente del potencial gravitatorio como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \bar{g}(P) &= \nabla U \\ &= \frac{\partial U}{\partial x_i} \hat{e}_i \end{aligned} \quad (2.12)$$

Podemos reescribir la ecuación (2.12) de manera vectorial la cual queda descrita en 3 componentes de la siguiente forma:

$$\bar{g}(P) = g_x \hat{i} + g_y \hat{j} + g_z \hat{k} \quad (2.13)$$

En donde cada componente del vector se describe de la siguiente forma:

$$g_x(P) = \frac{\partial U}{\partial x} = -\gamma \int \frac{(x - x_Q)\rho(Q)}{r^3} dv \quad (2.14)$$

$$g_y(P) = \frac{\partial U}{\partial y} = -\gamma \int \frac{(y - y_Q)\rho(Q)}{r^3} dv \quad (2.15)$$

$$g_z(P) = \frac{\partial U}{\partial z} = -\gamma \int \frac{(z - z_Q)\rho(Q)}{r^3} dv \quad (2.16)$$

$$(2.17)$$

#### Tensor Gravimétrico

El tensor gravimétrico se puede obtener mediante el producto diádico entre el gradiente y el vector gravitacional de la siguiente manera:

$$T_{ij} = \nabla \bar{g}(P) \quad (2.18)$$

$$= \frac{\partial g_i \hat{e}_i}{\partial x_j} \otimes \hat{e}_j \quad (2.19)$$

Donde la ecuación (2.19) representa de manera general todos los componentes del tensor gravitacional, si desarrollamos la expresión para cada componente del tensor obtenemos lo

siguiente:

$$T_{xx} = \frac{\partial g_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\gamma \int \left( \frac{3(x - x_Q)^2 - r^2}{r^5} \right) \rho(Q) dv \quad (2.20)$$

$$T_{xy} = \frac{\partial g_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = -\gamma \int \left( \frac{3(x - x_Q)(y - y_Q)}{r^5} \right) \rho(Q) dv \quad (2.21)$$

$$T_{xz} = \frac{\partial g_x}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = -\gamma \int \left( \frac{3(x - x_Q)(z - z_Q)}{r^5} \right) \rho(Q) dv \quad (2.22)$$

$$T_{yy} = \frac{\partial g_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\gamma \int \left( \frac{3(y - y_Q)^2 - r^2}{r^5} \right) \rho(Q) dv \quad (2.23)$$

$$T_{yz} = \frac{\partial g_y}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = -\gamma \int \left( \frac{3(y - y_Q)(z - z_Q)}{r^5} \right) \rho(Q) dv \quad (2.24)$$

$$T_{zz} = \frac{\partial g_z}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\gamma \int \left( \frac{3(z - z_Q)^2 - r^2}{r^5} \right) \rho(Q) dv \quad (2.25)$$

$$(2.26)$$

Si observamos detenidamente los componentes (2.20) a (2.25), podemos notar que el tensor gravimétrico es simétrico, es decir  $T_{ij} = T_{ji}$ , ya que como podemos recordar, para cualquier función derivable:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

### Propiedades del tensor gravimétrico

Como podemos observar en la ecuación (2.19), los componentes del tensor están fuertemente relacionados a las direcciones del sistema coordenado con el que se está trabajando, de tal manera que incluso podríamos decir que “*Los componentes de los tensores carecen de sentido sin un sistema de referencia*” (Dullemond y Peeters, 1991), sin embargo los fenómenos a los cuales nos referimos mediante el uso de tensores existen independientemente del sistema coordenado, lo cual se ve reflejado sus invariantes. De acuerdo a Pedersen y Rasmussen (1990), el tensor gravimétrico tiene tres invariantes:

$$I_0 = T_{xx} + T_{yy} + T_{zz} \quad (2.27)$$

$$I_1 = T_{xx}T_{yy} + T_{yy}T_{zz} + T_{xx}T_{zz} - (T_{xy}^2 + T_{yz}^2 + T_{xz}^2) \quad (2.28)$$

$$I_2 = T_{xx}(T_{yy}T_{zz} - T_{yz}^2) + T_{xy}(T_{yz}T_{xz} - T_{xy}T_{zz}) + T_{xz}(T_{xy}T_{yz} - T_{xz}T_{yy}) \quad (2.29)$$

De estos invariantes surge una propiedad particular del tensor gravimétrico, y esta es que el primer invariante  $I_0 = 0$ , recordando la ecuación(2.11) y sustituyendo en (2.27):

$$I_0 = T_{xx} + T_{yy} + T_{zz} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \nabla^2 U = 0$$

### 2.1.5. Atracción gravitacional para distribuciones de masa

Se considera una distribución de masa a cualquier conjunto de partículas en un volumen determinado, las cuales pueden tener o no variaciones espaciales de densidad.

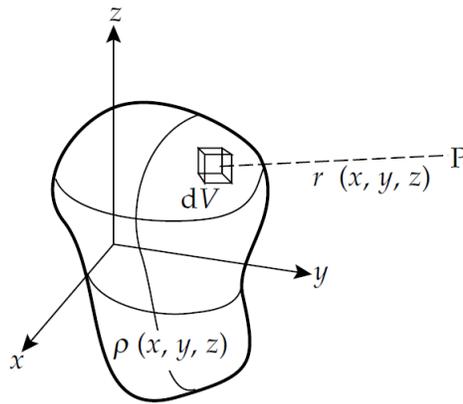


FIGURA 2.2: Cuerpo 3D subdividido en volúmenes considerablemente más pequeños, Tomado de Lowrie (2007)

Como el campo gravitacional sigue el principio de superposición, el efecto gravitacional de un conjunto de masas es igual a la suma de la atracción gravitacional de las masas individuales (Blakely, 1996); Es por esto que podemos describir el efecto de atracción gravitacional de una distribución de masa en un mismo punto, como la suma de los efectos de atracción de cada cuerpo con respecto al punto de observación.

Si subdividimos el volumen de interés en volúmenes mucho más pequeños  $dv$  como en la imagen 2.2, podemos calcular el potencial producido por el cuerpo en el punto P de la siguiente forma:

$$U(P) = \gamma \int_V \frac{dm}{r} = \gamma \int_V \frac{\rho(Q)}{r} dv \quad (2.30)$$

Donde el espacio de integración  $V$  es el volumen ocupado por la masa de interés,  $\rho(Q)$  es la distribución de densidades en el cuerpo,  $Q$  es el punto de integración y  $r$  es la distancia  $\overline{PQ}$ , cabe mencionar que siempre que el punto P se encuentre fuera y alejado del cuerpo que produce la atracción, es posible considerar que el efecto del cuerpo completo es equivalente a tener toda la masa del cuerpo concentrada en su centro de masa (Lowrie, 2007), es decir, la distancia  $r$  al final será la distancia  $\overline{PQ}$  cuando  $Q$  se encuentra en el centro de masa del cuerpo de interés.

### 2.1.6. Modelos de atracción gravitacional para geometrías simples

Teóricamente utilizando la ecuación (2.30) es posible calcular el efecto de atracción gravitacional de cualquier cuerpo con cualquier distribución de masa, sin embargo, en la práctica

tanto las distribuciones de densidad como la geometría de los cuerpos suelen ser sumamente complicadas es por ello que habitualmente se busca simplificar el cálculo al descomponer los cuerpos y estructuras reales, en distribuciones y geometrías más sencillas. A continuación se describirán las geometrías simples que se utilizarán a lo largo de este trabajo de Tesis.

### Atracción por un cilindro horizontal infinito de densidad Uniforme

Nuestro primer caso de interés es el efecto de atracción producido por un cilindro horizontal infinito, para ello se realizarán algunas simplificaciones que nos facilitarán el encontrar el modelo matemático correspondiente; dichas simplificaciones serán las siguientes:

1. La fuerza de atracción gravitacional de un cilindro infinitamente largo es inversamente proporcional a la distancia del punto de interés al cilindro.
2. Se considera que la distancia entre nuestro punto de prueba y el cilindro solo existe en el plano perpendicular al eje del cilindro
3. La densidad es constante para todo el volumen del cilindro
4. Un eje coordenado será paralelo al eje longitudinal del cilindro

Para cuestiones prácticas, el efecto de atracción gravitacional generado por cuerpos infinitos en alguna dirección, se puede tratar como si fuera generado por cuerpos bidimensionales (Blakely, 1996).

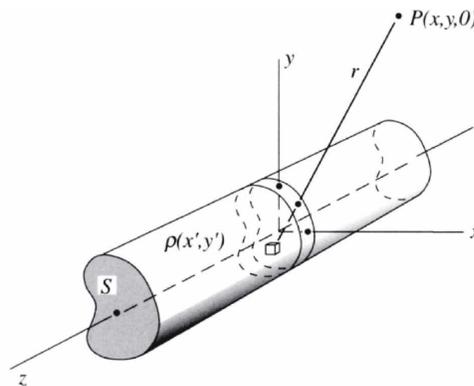


FIGURA 2.3: Ilustración de un cuerpo infinito horizontal con punto de observación en P, distancia r al cilindro, y densidad  $\rho(x', y')$ , Tomado de Blakely (1996)

Partiendo de nuestras premisas anteriores y utilizando la figura 2.3 como referencia, podemos simplificar la ecuación (2.30) de la siguiente forma:

$$U(P) = \gamma \int_S \frac{\rho(Q)}{r} ds' \quad (2.31)$$

$$U(P) = \gamma \rho \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{a}{r} da' d\theta' \quad (2.32)$$

$$U(P) = 2\pi\gamma\rho R^2 \log\left(\frac{1}{r}\right) \quad (2.33)$$

Donde  $ds'$  corresponde al área de sección transversal del cilindro, finalmente solo hace falta encontrar el negativo del gradiente a la ecuación (2.33) para encontrar el efecto generado por el cilindro:

$$g(P) = -\gamma \nabla 2\pi R^2 \log\left(\frac{1}{r}\right) \quad (2.34)$$

$$g_z(P) = \frac{-2\pi\gamma R^2 z}{r} \quad (2.35)$$

### Atracción generada por un prisma rectangular

El segundo cuerpo simple que nos resulta de interés es un cuerpo rectangular, para este caso haremos una simplificación principal que nos permitirá realizar los cálculos de una forma mucho más sencilla, y esta es que tomaremos como origen de nuestro sistema coordenado el punto de observación, como podemos observar a continuación.

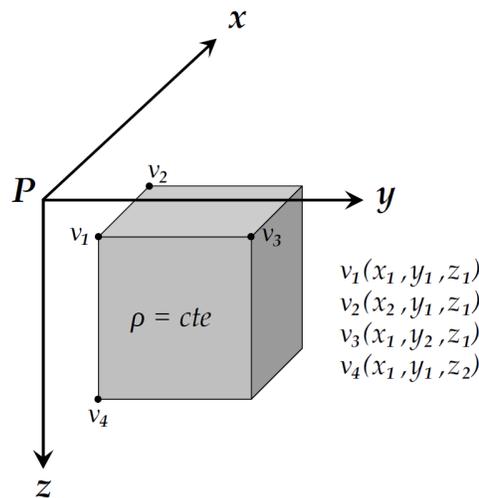


FIGURA 2.4: Cuerpo de Observación prismático con vértices en  $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$  y punto de observación en el origen, tomada de Nava Flores (2018)

Si sustituimos la geometría del prisma en la ecuación (2.30), encontramos que el potencial debido a un prisma se expresa de la siguiente manera:

$$U(P) = \gamma\rho \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{r} dx' dy' dz' \quad (2.36)$$

donde:  $r = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ , ya que dada nuestra suposición inicial  $P(x, y, z) = (0, 0, 0)$ .

En su artículo Nagy *et al.* (2000) describe la solución analítica de la ecuación (2.36), la cual es la siguiente:

$$U(P) = \gamma\rho \left\| \left\| \begin{aligned} & xy \ln(z+r) + yz \ln(x+r) + zx \ln(y+r) \\ & - \frac{x^2}{2} \tan^{-1} \left( \frac{yz}{xr} \right) - \frac{y^2}{2} \tan^{-1} \left( \frac{zx}{yr} \right) - \frac{z^2}{2} \tan^{-1} \left( \frac{xy}{zr} \right) \end{aligned} \right\| \right\|_{x_1, y_1, z_1}^{x_2, y_2, z_2} \quad (2.37)$$

Partiendo de la ecuación (2.36), (Plouff, 1976) presentó la solución para el componente vertical del vector de aceleración gravitacional  $\bar{g}_z$ , la cual se presenta a continuación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(P)}{\partial z} &= \bar{g}_z(P) = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \gamma\rho \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{r} dx' dy' dz' \right] \\ &= \gamma\rho \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{z}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} dx' dy' dz' \\ &= \gamma\rho \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 S \left[ z_k \tan^{-1} \left( \frac{x_i y_j}{z_k R_{ijk}} \right) - x_i \ln(R_{ijk} + y_j) - y_j \ln(R_{ijk} + x_i) \right] \end{aligned} \quad (2.38)$$

Donde:

$$\begin{aligned} R_{ijk} &= \sqrt{x_i^2 + y_j^2 + z_k^2} \\ S &= S_i S_j S_k \\ S_1 &= -1 \\ S_2 &= 1 \end{aligned}$$

Basándonos en la solución (2.38) podemos encontrar mediante permutación cíclica (Nagy *et al.*, 2000) los componentes  $g_x$  y  $g_y$ , dando como resultado:

$$g_x = \gamma\rho \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 S \left[ x_i \tan^{-1} \left( \frac{y_j z_k}{x_i R_{ijk}} \right) - y_j \ln(R_{ijk} + z_k) - z_k \ln(R_{ijk} + y_j) \right] \quad (2.39)$$

$$g_y = \gamma\rho \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 S \left[ y_j \tan^{-1} \left( \frac{x_i z_k}{y_j R_{ijk}} \right) - x_i \ln(R_{ijk} + z_k) - z_k \ln(R_{ijk} + x_i) \right] \quad (2.40)$$

Una vez obtenidos los componentes del vector de aceleración gravitacional (Nava Flores, 2018) y (Nagy *et al.*, 2000) presentan las siguientes soluciones para los componentes tensoriales:

$$T_{xx} = \frac{\partial g_x}{\partial x} = \gamma\rho \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 S \left[ \tan^{-1} \left( \frac{y_j z_k}{x_i R_{ijk}} \right) \right] \quad (2.41)$$

$$T_{xy} = \frac{\partial g_x}{\partial y} = -\gamma\rho \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 S [\ln (R_{ijk} + z_k)] \quad (2.42)$$

$$T_{xz} = \frac{\partial g_x}{\partial z} = -\gamma\rho \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 S [\ln (R_{ijk} + y_j)] \quad (2.43)$$

$$T_{yy} = \frac{\partial g_y}{\partial y} = \gamma\rho \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 S \left[ \tan^{-1} \left( \frac{x_i z_k}{y_j R_{ijk}} \right) \right] \quad (2.44)$$

$$T_{yz} = \frac{\partial g_y}{\partial z} = -\gamma\rho \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 S [\ln (R_{ijk} x_i)] \quad (2.45)$$

$$T_{zz} = \frac{\partial g_z}{\partial z} = \gamma\rho \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 S \left[ \tan^{-1} \left( \frac{x_i y_j}{z_k R_{ijk}} \right) \right] \quad (2.46)$$

### 2.1.7. Modelos de atracción gravitacional para geometrías complejas

Si prestamos atención a la ecuación de potencial (2.30) y a las ecuaciones para calcular los componentes tensoriales (2.20) a (2.25), podremos percatarnos de que tanto el potencial como los componentes tensoriales de la aceleración gravitacional dependen fuertemente de la forma del cuerpo que queremos modelar y de la distribución de densidades dentro del mismo, lo que nos puede generar una situación en la que la combinación tanto de la función de densidad como la integral volumétrica carezcan de solución analítica o bien, sea una solución sumamente compleja, ambas situaciones se presentan como poco convenientes es por esta razón que utilizaremos una metodología diferente para resolver el problema.

La metodología en cuestión consiste en simplificar la geometría de nuestro modelo utilizando cuerpos sencillos de resolver de manera que una geometría o distribución de masa que pueda resultar sumamente compleja de resolver analíticamente, se pueda convertir en un problema discreto y más simple utilizando geometrías ya conocidas. Aprovechando la propiedad de superposición del campo gravitacional de manera que se convierta el efecto de un cuerpo en un punto de observación, en el efecto de un conjunto de cuerpos más simples que produzcan la misma respuesta en el mismo punto.

## Ensamblajes de estructuras simples

La idea de generar estructuras complejas a partir de estructuras simples no es nueva y se utiliza en diversas disciplinas, basta con observar la evolución de las pantallas y como al aumentar la cantidad de estructuras simples que las conforman (píxeles), son capaces de representar cada vez con mayor nitidez la realidad.

En la geofísica, especialmente en el modelado esta idea se ha utilizado desde hace ya mucho tiempo, en su libro (Blakely, 1996) hace referencia a algunos de ellos, tales como Talwani y Ewing (1960), Plouff (1976) y otros, han propuesto diversas formas de descomponer estructuras complejas en estructuras más simples, como el descomponer los cuerpos en discos (Talwani y Ewing, 1960), o en prismas poligonales (Plouff, 1976). Finalmente Nagy *et al.* (2000), encontró las soluciones tanto para potencial gravitacional y las derivadas hasta el tercer orden para prismas rectangulares de densidad uniforme.

En esta tesis se busca resolver el problema utilizando un conjunto de prismas rectangulares que cumplen con la ecuación (2.38) para la atracción gravitacional vertical  $g_z$ , y las ecuaciones (2.20) a (2.25) para los componentes tensoriales.

Como se mencionó previamente, consideraremos que la estructura a modelar se puede aproximar mediante el efecto conjunto de un grupo de prismas de densidad uniforme, de manera que si estos son lo suficientemente pequeños tendrán la capacidad de modelar adecuadamente tanto la geometría como la distribución de densidad de nuestra estructura (Nava Flores, 2018). Comenzamos discretizando la estructura en un número finito de prismas  $N$ , para los cuales si nos basamos en el principio de superposición (Blakely, 1996), podemos decir que para cada punto, el efecto de atracción generado por los  $N$  prismas en el punto  $P$  se puede expresar de la siguiente forma:

$$g_i(P) = \sum_{j=1}^N g(\rho_j)_i^j \quad (2.47)$$

Donde  $g_i$  representa la respuesta gravimétrica total de todo el ensamble de prismas en cualquier dirección del vector de atracción gravitacional, y  $g_i^j$  corresponde a la contribución en la  $i$ -ésima dirección del  $j$ -ésimo prisma del ensamble en el punto  $P$ . Podemos ver una representación de esto en la figura 2.5

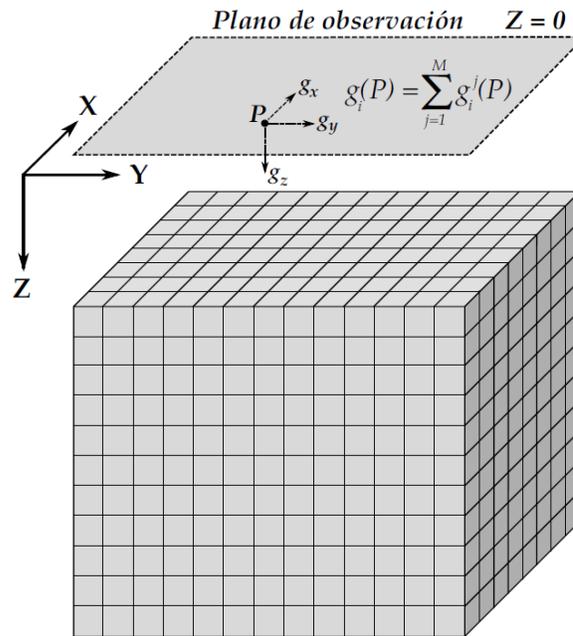


FIGURA 2.5: Medio discretizado en M prismas rectangulares y cálculo de su respuesta gravimétrica  $g_i$  en el punto de observación  $P$ , Tomada de Nava Flores (2018)

### 2.1.8. Procesamiento de datos

Una vez que se cuenta con los datos, es necesario realizar ciertos procesos que nos permitan retirar efectos que no nos interesan, resaltar los que sí o bien se puede obtener información mediante diversos procedimientos. Para los fines de esta tesis se eligieron aquellos que nos permitieron obtener información sobre la forma, y profundidad de las fuentes, de manera que el proceso de inversión se favorece en los resultados de estos procesos, los cuales se enlistan a continuación:

#### Procesos aplicados a mallas de componente vertical $G_z$

1. Continuación ascendente
2. Deconvolución de Euler

#### Procesos aplicados a mallas de gradiometría FTGG<sup>2</sup>

1. Deconvolución de Euler
2. Cálculo de invariantes
3. Función detectora de bordes

<sup>2</sup>Gradiometría de tensor completo gravimétrico por sus siglas en inglés

### Continuación Ascendente

La continuación ascendente es un operador que transforma el campo medido de manera que sea equivalente al que se hubiese medido en una superficie por encima de la que en realidad se tomaron los datos, esta operación funge como un filtro pasa bajas, de manera que atenúa el efecto de anomalías de onda corta lo que nos permite retirar efectos de fuentes superficiales y enfatiza el efecto de fuentes más profundas (Blakely, 1996), la expresión para la continuación ascendente es la siguiente:

$$U(x, y, z_0 - \Delta z) = \frac{\Delta z}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(x', y', z_0)}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + \Delta z^2]^{\frac{3}{2}}} dx' dy' \quad (2.48)$$

Donde:

- $z_0$  Es la superficie en la que se observó el campo U.
- $\Delta z$  Es la distancia entre la superficie  $z_0$  y la nueva superficie.
- $x, y$  Coordenadas X,Y del campo U observado en el plano  $z_0$ .
- $x', y'$  Coordenadas X,Y del campo U en el nuevo plano ( $z_0 + \Delta z$ ).

### Deconvolución de Euler

La deconvolución de Euler es un método que se utiliza para determinar profundidad y localización de cuerpos fuente para campos magnéticos y gravimétricos (Zhang *et al.*, 2000). El método tiene como fundamento la ecuación de homogeneidad de Euler:

$$\bar{r} \cdot \nabla f = n f \quad (2.49)$$

De manera que cualquier función que cumpla con la ecuación (2.49) es una ecuación homogénea con grado n de homogeneidad.

El potencial gravimétrico es un campo homogéneo, así como sus derivadas espaciales según (Blakely, 1996; Reid, 1995), por lo que podemos generar un sistema que cumpla con la ecuación (2.49), de la siguiente manera:

$$(x - x_0, y - y_0, z_0) \cdot \nabla g = n g \quad (2.50)$$

donde:

- $x_0, y_0, z_0$ : son las incógnitas correspondientes a las coordenadas de la fuente.
- $x, y$ : Son las coordenadas en las cuales se realizó la observación del campo gravimétrico sobre un plano  $z = 0$ .
- $g$ : corresponde al campo gravimétrico en el punto  $x, y$  producido por la fuente en el punto  $x_0, y_0, z_0$ .

Si desarrollamos el producto punto la ecuación queda representada de la siguiente forma:

$$(x - x_0) \frac{\partial g_z}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial g_z}{\partial y} + (z_0) \frac{\partial g_z}{\partial z} = -ng_z \quad (2.51)$$

De manera que para resolver este sistema requerimos conocer las derivadas espaciales de nuestro campo, al mismo tiempo contamos con 3 incógnitas por lo que es necesario generar un sistema con al menos 4 puntos de nuestra malla para que se pueda resolver satisfactoriamente el sistema. Al mismo tiempo se puede observar que el factor  $n$ , denominado índice estructural, tiene un papel importante y su valor depende del tipo de fuente que suponemos, existe. Nava Flores (2018) propone los siguientes valores para algunas estructuras, basándose en el trabajo de Stavrev y Reid (2006)

Índice	Geometría de la fuente
1	Cilindro
2	Esfera
0	Dique, contacto, falla

TABLA 2.1: índices estructurales para fuentes simples

### Interpretación de invariantes

Como recordaremos de la sección 2.1, los tensores cuentan con 3 invariantes, que como su nombre lo indica, permanecen constantes independientemente del sistema de referencia que se utilice. En su artículo Pedersen y Rasmussen (1990) proponen el cálculo de mallas de invariantes a partir de datos FTGG ya que de esta manera se tiene un conjunto de datos que utiliza toda la información contenida en los 6 componentes del tensor, y dadas las propiedades de los invariantes se obtiene una anomalía que es completamente independiente de los ejes de referencia, posteriormente Murphy y Brewster (2007) propusieron el utilizar los invariantes 1 y 2 para obtener de manera cuantitativa propiedades geológicas recalando que:

1. El invariante  $I_1$  Se puede utilizar para determinar estratigrafía regional y para identificar contrastes de densidad dominantes.
2. El invariante  $I_2$  tiene mayor importancia en relación a objetivos 3D, ya que nos permite visualizar la geometría más superficial de bloques de falla, cuerpos salinos y cuerpos ígneos intrusivos de forma directa partiendo de los datos FTGG

### Función Detectora de Bordes

La función detectora de bordes se basa en el cálculo e interpretación de los valores característicos del tensor de curvatura de gradientes gravimétricos (CGGT) y fue propuesta por Oruç

(2011). Su expresión es la siguiente:

$$\lambda = \frac{1}{2} \left[ T_{xx} + T_{yy} \pm \sqrt{(T_{xx} - T_{yy})^2 + 4(T_{xy})^2} \right] \quad (2.52)$$

Sin embargo, Zhou *et al.* (2013) demostraron que esta formulación se ve afectada fuertemente por los contrastes de densidad dentro de los datos, de manera que se tiene que utilizar el valor de raíz positivo para delimitar fuentes de contraste positivo, y el valor negativo de la raíz para delimitar cuerpos de contraste negativo. Esto resulta poco conveniente por lo que propusieron una modificación que resuelve dicho problema, formulando así una función que nos permite encontrar bordes con una alta precisión independientemente del contraste que presente la densidad del cuerpo que origina la anomalía:

$$FDB = \frac{1}{2} \left[ T_{xx}g_z + T_{yy}g_z + \sqrt{(T_{xx}g_z - T_{yy}g_z)^2 + 4(T_{xy}g_z)^2} \right] \quad (2.53)$$

## 2.2. Inversión Geofísica

“La teoría de inversión es un conjunto organizado de técnicas matemáticas que permiten reducir información para obtener conocimiento sobre el mundo físico, basándonos en inferencias tomadas de las observaciones.” Menke (2012)

Sin embargo los fenómenos físicos que se estudian en la geofísica varían así como la instrumentación utilizada para medirlos y las propiedades que podemos obtener a partir de cada uno. El proceso de convertir los datos observados a las posibles distribuciones de las propiedades en el interior de la tierra uniendo la teoría de inversión con el conocimiento geológico se le conoce como **Inversión Geofísica**. Esta rama de la Geofísica nos permite utilizar la información obtenida en campo para poder realizar inferencias sobre el interior de la tierra.

### 2.2.1. Problema Directo

El problema directo se puede definir como el proceso de predecir los resultados de las mediciones, con base en un modelo matemático y un conjunto específico de condiciones relevantes para el problema en cuestión Menke (2012).

La resolución del problema directo consiste en utilizar información *a-priori*<sup>3</sup> para generar un modelo hipotético de las propiedades y/o estructuras en el subsuelo, comenzando con la descripción matemática del fenómeno físico que se pretende reproducir y a continuación mediante diversas operaciones encontrar cual sería el comportamiento esperado de dicho fenómeno si nuestro modelo hipotético fuese real.

---

<sup>3</sup>Información previamente conocida de la zona de donde se obtuvieron los datos

Podemos presentar el problema directo partiendo de una serie de Taylor, la cual tiene la forma siguiente:

$$f(x) = f(a) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!} (x - a)^n \quad (2.54)$$

Si sustituimos la ecuación (2.47) en la ecuación (2.54), obtenemos lo siguiente:

$$g(\rho) = g(\rho^0) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^n(\rho^0)}{n!} (\rho - \rho^0)^n. \quad (2.55)$$

De manera que si expandimos la serie de Taylor únicamente a sus primeros 2 elementos, la función resultante es la siguiente:

$$g_i(\rho) = g_i(\rho^0) + \sum_{j=1}^N \frac{\partial g_i(\rho)}{\partial \rho_j} (\rho - \rho^0). \quad (2.56)$$

Finalmente, podemos sustituir la suma por un producto matricial, dando como resultado:

$$g_i = g_i^0 + G_{ij} \cdot (m_j - m_j^0) \quad (2.57)$$

De aquí en adelante a la matriz G la llamaremos *Matriz de sensitividades* o *Kernel de inversión*, y como podemos observar se encuentra construido por las derivadas parciales respecto a cada parámetro para cada punto de observación por lo que indica que tan sensible es nuestro modelo al efecto o variación de cada uno de los parámetros que lo componen. La forma en la que se construye el *kernel* es la siguiente:

$$G_{ij} = \frac{\partial f(x_i)}{\partial m_j} \quad \text{para } i = 1..n \quad \text{y } j = 1..m. \quad (2.58)$$

Finalmente si nosotros consideramos que nuestro vector  $\rho^0 = 0$ , la función (2.56) quedará expresada como:

$$g_i = G_{ij} \cdot m_j, \quad (2.59)$$

o de manera general:

$$d_i = G_{ij} \cdot m_j. \quad (2.60)$$

Para cualquier conjunto de datos  $d$ .

### 2.2.2. Problema Inverso

A diferencia del modelo directo, el modelo inverso se vale del uso de diversos métodos numéricos para determinar parámetros que puedan modelar los datos obtenidos en campo. Por lo que para el poder realizar una inversión adecuada, es necesario generar un modelo adecuado para que represente lo mejor posible la realidad.

En el modelo inverso la información con la que se va a trabajar es principalmente el modelo matemático del fenómeno o *Kernel* y los datos observados en campo, por lo tanto es necesario modificar la ecuación (2.60) de la siguiente manera:

Comenzamos con la ecuación del modelo directo, pero despejamos el vector de los parámetros  $m$ :

$$\begin{aligned}
 d &= Gm \\
 G^t d &= G^t Gm \\
 (G^t G)^{-1} G^t d &= (G^t G)^{-1} G^t Gm \\
 (G^t G)^{-1} G^t d &= m.
 \end{aligned} \tag{2.61}$$

Como podemos observar en la ecuación (2.61) resolver el problema inverso representa una gran cantidad de operaciones matriciales, entre las cuales viene incluido el invertir una matriz lo cual tiene un muy alto costo computacional. Aunado a esto cabe mencionar que la resolución de dicha ecuación no siempre nos devuelve parámetros realistas ya que la gran mayoría de problemas suelen estar mal condicionados, por lo tanto es necesario evaluar el resultado de la inversión con la geología.

### 2.2.3. Función de error

Como se puede observar en las secciones anteriores, independientemente del método que se seleccione para resolver las ecuaciones, es muy común encontrar una gran cantidad de soluciones para un mismo problema. Por ello es necesario evaluar la calidad de las soluciones que se encuentran para así determinar cuales son las más apropiadas. Para ello es necesario definir una forma en la cual se evalúe cada solución y con este objetivo es que se acude a las funciones de error, también conocidas como errores de predicción, El error para cada observación está dado por:

$$e_i = d_i^{obs} - d_i^{modelo}. \tag{2.62}$$

Una vez calculado todo el vector de error utilizando la ecuación (2.62) procedemos a calcular la magnitud o norma del vector  $e$ :

$$\|e\| = \sum_{i=1}^N e_i^2 = e^t e. \tag{2.63}$$

La norma del vector de error nos permite determinar la calidad de nuestra solución, es por esto que mientras menor sea este valor, podemos decir que nuestra solución es mejor. Sin embargo existen diversas formas de calcular la norma y la que se elige para la resolución del problema depende completamente del criterio de quien realiza la inversión.

La forma general para calcular la norma " $L_n$ " es la siguiente:

$$L_n = \|e\|_n = \left[ \sum_i |e_i|^n \right]^{\frac{1}{n}}. \quad (2.64)$$

El orden de la norma que se suele utilizar en geofísica es  $L_2$ , sin embargo Al-Chalabi (1992) propone que se modifique la norma según la distribución de los datos.

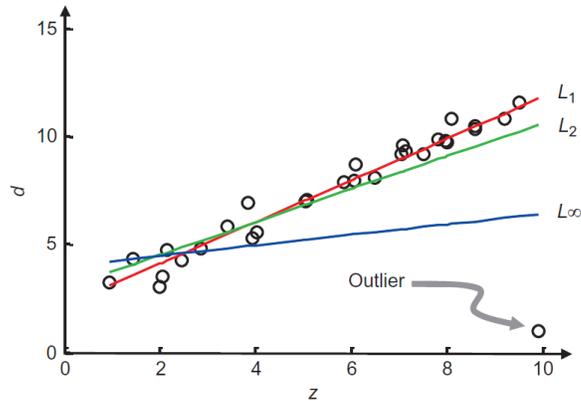


FIGURA 2.6: Ajustes lineales para pares  $(z, d)$  con error medido con normas  $L_1$ ,  $L_2$  y  $L_\infty$ , Tomado de Menke (2012)

## 2.3. Optimización por enjambre de partículas

El algoritmo de PSO fué propuesto por primera vez en 1995 por Eberhart y Kennedy, quienes propusieron un método de optimización numérico el cual "descubren" tras realizar simulaciones simplificadas de modelos sociales (Eberhart y Kennedy, 1995). En el cual detallan la evolución del algoritmo desde su planteamiento como una herramienta para realizar modelos sociales hasta su culminación como un método de optimización numérica.

Se inspiraron en trabajos de otros científicos de la época como el de Reynolds (1987) y el de Heppner y Grenander (1990) quienes en su momento realizaron algoritmos de simulación del comportamiento de diversos organismos.

### 2.3.1. Bases del Algoritmo PSO

El algoritmo de optimización por enjambre de partículas busca dentro de un espacio n-Dimensional delimitado una combinación de  $n$  parámetros tales que al ser evaluados en la función que se busca optimizar, cumplan con un criterio de búsqueda ya establecido.

Esto se hace mediante la creación de partículas las cuales son modelos que se generan de manera aleatoria y se van modificando siguiendo ciertos criterios en cada iteración con el

objetivo de realizar una búsqueda adecuada en el dominio ya definido y así encontrar un modelo óptimo.

### 2.3.2. Cálculo de las velocidades y posiciones

El movimiento de las partículas pretende ser aleatorio, sin embargo también se quiere que todas las partículas se muevan en la dirección con el mejor valor de ajuste global previo, y al mismo tiempo se les dota de la capacidad de recordar su mejor posición, lo que les permite buscar en ambas direcciones. Para eso es necesario que para cada iteración se calcule un vector de velocidad ponderado en función de dichas posiciones y esto lo haremos según la proposición de Eberhart y Kennedy (1995).

Sean  $x_i$  y  $v_i$  el vector de posición y velocidad para la partícula  $i$  respectivamente, podemos determinar el vector velocidad para cada tiempo de la siguiente forma:

$$v_i^{t+1} = \omega v_i^t + \alpha \epsilon_1 [g^* - x_i^t] + \beta \epsilon_2 [x_i^{*(t)} - x_i^t]. \quad (2.65)$$

Donde  $\omega$  es un peso de inercia que se le da a cada partícula para que las velocidades se mantengan en valores aceptables a lo largo de la ejecución,  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$  son dos vectores aleatorios que pueden tomar valores entre 0 y 1, los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  son pesos que indican a cada partícula qué importancia darle la dirección hacia el óptimo global ( $\alpha$ ) y la dirección hacia el óptimo local ( $\beta$ ),  $g^*$  el valor de mejor ajuste global conocido en el instante  $t$ ,  $x_i^{(t)}$  es la posición actual de la partícula e  $x_i^{*(t)}$  es la mejor posición previamente encontrada por la misma partícula.

Es de suma importancia que al iniciar la ejecución, las partículas sean esparcidas de forma homogénea a lo largo del dominio que nos interesa, ya que de tener una función con máximos o mínimos locales es probable que el algoritmo quede inmerso en uno de ellos. Una vez creadas las partículas se considera que la velocidad inicial<sup>4</sup> de las partículas en  $t = 0$  es de  $v_i = 0$ , y se calculan las posiciones de cada partícula de la siguiente manera:

$$x_i^{t+1} = x_i^t + \omega v_i^{t+1}. \quad (2.66)$$

### 2.3.3. Búsqueda del valor de interés

Para cada iteración se analizará el valor de de cada partícula siguiendo el criterio que hayamos propuesto en la ejecución, por lo tanto podemos decir que el mejor valor global para

---

<sup>4</sup>Consideraremos ésta velocidad inicial para nuestro problema en particular, la velocidad puede ser la que se sea más conveniente según el problema a resolver

cada iteración se puede describir como:

$$g^* \approx \min \{f(x_i)\} \forall i = [1, \dots, n], \quad (2.67)$$

donde:  $g^*$  es el valor de mejor ajuste global,  $x_i$  la posición de la partícula  $i$  y  $n$  es el número total de partículas utilizadas.

Finalmente se calcularán tanto las velocidades como la posición de cada partícula, en cada iteración para al final poder encontrar el valor de mejor ajuste dentro del dominio de interés.

# Información Geofísica

## 3.1. Mallas del tensor gravimétrico medido en el domo Vinton

El conjunto de datos que se utilizó para presentar la aplicación del trabajo desarrollado en tesis está conformado por 6 mallas que corresponden a los distintos elementos del tensor gravimétrico. Las mallas fueron levantadas por la empresa Bell Geospace Inc. en la zona de Vinton en el estado de Louisiana, EUA en el mes de julio del año 2008.

A continuación se muestran las características generales del levantamiento:

Latitud:	30.07°N a 30.23°N
Longitud:	93.66°W a 93.53° W
Líneas de vuelo	53
Líneas de amarre	17
Altitud de vuelo	53 113[m]
Kilometros lineales:	1087.5
Superficie cubierta:	196.2[ $km^2$ ]

### 3.1.1. Limpieza y corrección de datos

Los datos proporcionados por la empresa Bell Geospace Inc. incluyen un preprocesamiento que, de acuerdo a Selman (2010), consiste en lo siguiente:

- Edición de datos erróneos así como de datos de baja calidad.
- Nivelado o micronivelado de línea según el caso.
- Filtrado y obtención de residuales.
- Mallado y creación de mapas.
- Corrección topográfica.

De los 196  $Km^2$  cubiertos por el levantamiento se seleccionó como área de interés para el modelo la que contiene la capa de roca del domo vinton, esta sub malla tiene un área de 21.85 $[Km^2]$  y se encuentra limitada por las siguientes coordenadas:

	Coordenada mínima	Coordenada Máxima
X[UTM]	440250	446000
Y[UTM]	3332500	3336300

En la figura 3.1, se muestran las mallas de los componentes tensoriales limitados por las coordenadas de la tabla anterior, las cuales se extrajeron de las mallas proporcionadas por BellGeospace Inc. después de haberles aplicado una continuación ascendente de 150[m] con el objetivo de remover el efecto de fuentes someras que producen anomalías de alta frecuencia:

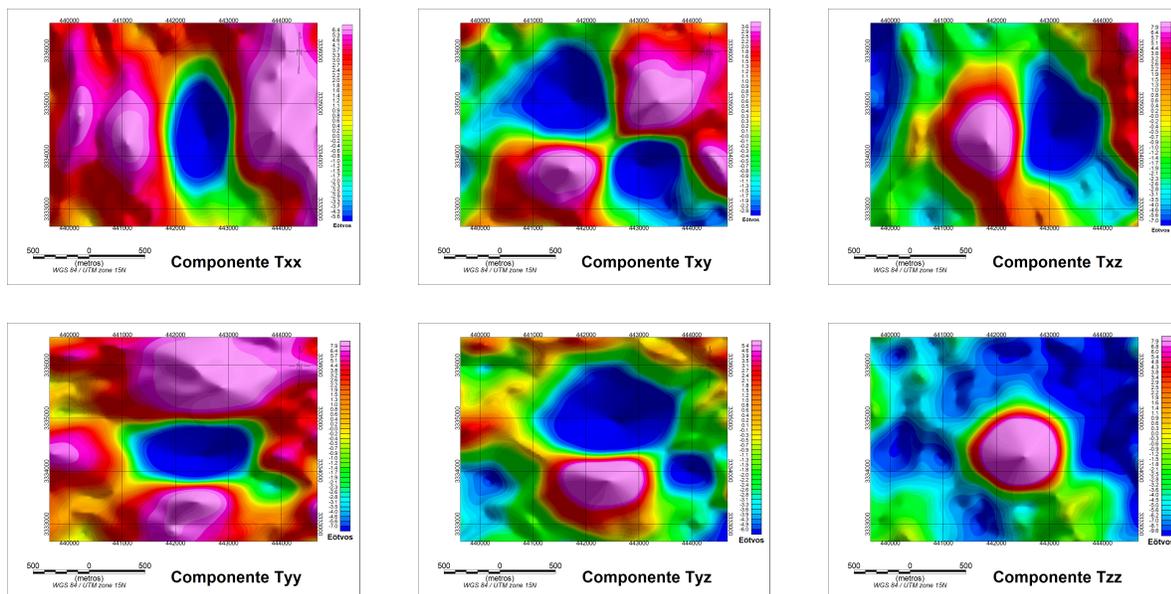


FIGURA 3.1: Componentes tensoriales del area seleccionada del levantamiento del Domo Vinton

### 3.2. Modelo de densidades de sedimentos del Golfo de México

Las densidades con las que se trabajó están basadas en los trabajos de Hudec y Jackson (2007) así como en el de Nelson y Fairchild (1989), quienes describen y modelan la compactación de sedimento en la región norte del Golfo de México.

Como se mencionó en el capítulo 1, la estructura de roca o “Caprock” está compuesta por capas de caliza, yeso y anhidrita en sucesión (?), materiales que tienen una densidad promedio de  $2750 \left[ \frac{kg}{m^3} \right]$ , así mismo la densidad del medio, se estima a partir del modelo propuesto por Hudec y Jackson (2007) y Nelson y Fairchild (1989), cuya expresión es la siguiente:

$$\rho(z) = 1400.0 + 172.0 * z^{0.21} \quad (3.1)$$

Donde  $\rho$  es la densidad de los sedimentos en  $\left[ \frac{kg}{m^3} \right]$  a la profundidad  $z$  en  $[m]$ .

A continuación, en la figura 3.2 podemos observar el comportamiento de la curva de densidades.

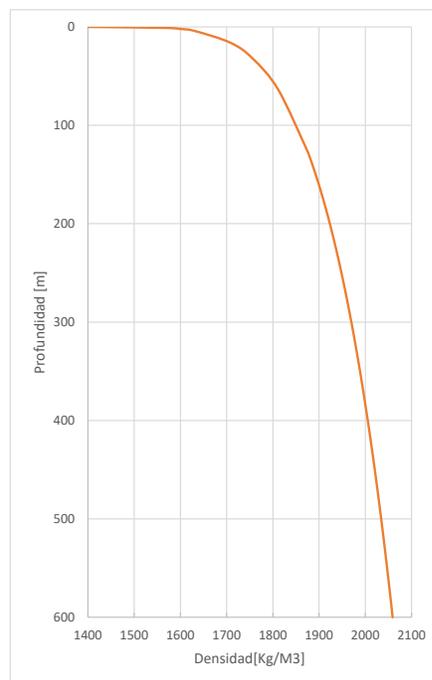


FIGURA 3.2: Curva de profundidad contra densidad del golfo de México, basada en Nelson y Fairchild (1989)



# Metodología

## 4.1. Programación y prueba del algoritmo

Al inicio del trabajo sólo se contaba con la información de los diversos artículos que plantean el algoritmo PSO, Eberhart y Kennedy (1995), Eberhart y Shi (2000), Trelea (2003a), Reynolds (1987), Yang (2014), así como aquellos que proponen aplicaciones muy sencillas de los mismos en Geofísica, en especial aplicaciones en inversión de parámetros mediante datos gravimétricos tales como Pallero *et al.* (2015), Yuan *et al.* (2009), Song *et al.* (2012), Santos (2010) y una versión simplificada del algoritmo para MATLAB en el libro (Yang, 2014, Capítulo 7), fue de esta implementación que se partió para programar el algoritmo en Fortran y posteriormente adaptarlo a la inversión de parámetros gravimétricos.

### 4.1.1. Transcripción y pruebas con funciones estándar

Primero se realizó una copia del algoritmo de PSO tal y como se encuentra en el libro de (Yang, 2014, Capítulo 7), y se probó su funcionamiento utilizando la función de Michaelwiz con  $m = 10$  en el dominio  $x = [0 : 4]$  y  $y = [0 : 4]$ :

$$f(x, y) = - \left\{ \text{sen}(x) \left[ \text{sen} \left( \frac{x^2}{\pi} \right) \right]^{2m} + \text{sen}(y) \left[ \text{sen} \left( \frac{2y^2}{\pi} \right) \right]^{2m} \right\}. \quad (4.1)$$

Se realizaron 50 ejecuciones para cada combinación de tamaños de población inicial así como iteraciones, de las cuales se promediaron los resultados que se presentan en la tabla:

Parametros	Función (4.1)	
	Tiempo(s)	Error( %)
Pob=100, Iter=50	0.0303	1.6594
Pob=100, Iter=100	0.0447	1.0129
Pob=100, Iter=150	0.0619	0.5249
Pob=100, Iter=200	0.0844	0.3940
Pob=200, Iter=50	0.0341	0.9503
Pob=200, Iter=100	0.0484	0.4622
Pob=200, Iter=150	0.0744	0.2549
Pob=200, Iter=200	0.0894	0.1835

TABLA 4.1: Tiempos de ejecución y error porcentual obtenidos del uso del algoritmo PSO con la función (4.1).

En la tabla 4.1 es posible observar que el tiempo de ejecución se ve mayormente afectado por el número de iteraciones que se realice y en menor medida por variaciones en el número de pobladores<sup>1</sup>

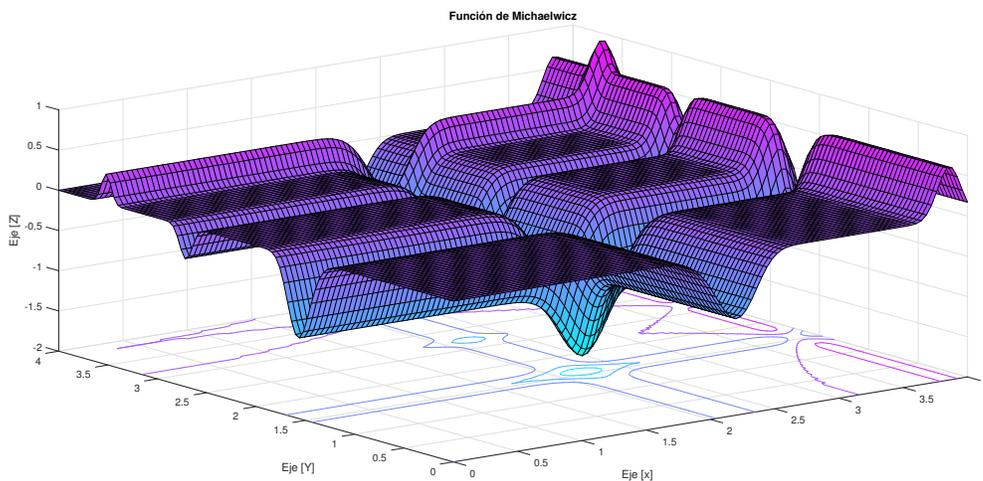


FIGURA 4.1: Superficie de la ecuación (4.1)

<sup>1</sup>Considerando que se realizaron cambios relativamente pequeños en el tamaño de las poblaciones.

### 4.1.2. Adaptación y pruebas con gravimetría

Una vez realizadas las pruebas de funcionamiento del algoritmo con la superficie (4.1), se procedió a adaptar el algoritmo de manera tal que nos permitiese realizar la inversión de parámetros de datos gravimétricos según el problema a resolver.

#### Primer Anomalía sintética

**Cálculo de la anomalía sintética con cilindros** La primera prueba que se realizó del algoritmo PSO para invertir parámetros gravimétricos fue un problema similar al presentado en el artículo de Yuan *et al.* (2009), para generar la anomalía sintética se consideraron 3 cilindros horizontales paralelos al eje  $y$  enterrados a lo largo de un perfil de 500 metros, con los siguientes parámetros:

	Cilindro 1	Cilindro 2	Cilindro 3
Densidad $\rho(kg/m^3)$	1500	1000	-1000
Radio $r(m)$	10	20	5
Profundidad $z(m)$	11	22.5	6
Posición $x(m)$	125	300	425

TABLA 4.2: Parámetros de la anomalía

Una vez seleccionados los parámetros de los cilindros, se utilizó el modelo del efecto gravimétrico de un cilindro horizontal infinito (2.35).

Podemos observar la anomalía generada a partir de los parámetros del cuadro 4.2 en la figura 4.2a

**Inclusión de ruido en la anomalía** Partiendo de la anomalía sintética ideal, se agregó ruido pseudo-aleatorio uniforme a lo largo de toda la señal con un intervalo de amplitudes de  $\pm 0.01$ , dando como resultado la anomalía de la figura 4.2b:

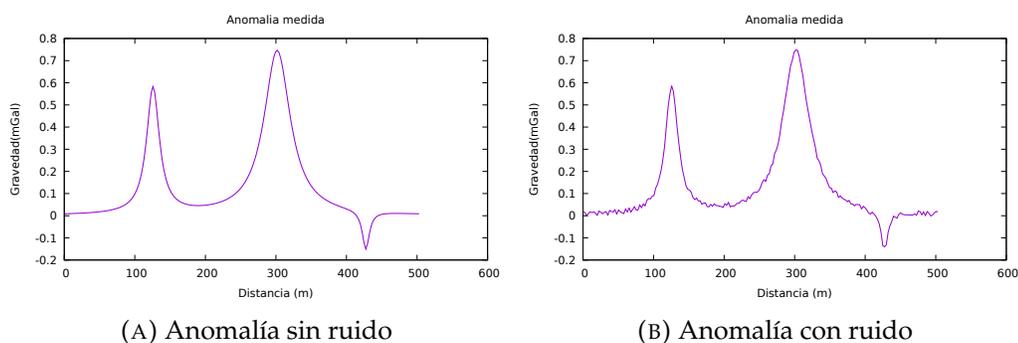


FIGURA 4.2: Anomalías gravimétrica de 3 cilindros ideales en un perfil de 500m

### Inversión y análisis paramétrico con PSO

Una vez generadas las anomalías sintéticas se procedió a realizar la inversión con el método de PSO y su análisis paramétrico.

El análisis paramétrico se llevó a cabo realizando la inversión de los perfiles de cilindros utilizando diversos valores para las tres variables de aprendizaje de las partículas:  $\omega$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  de la ecuación (2.65), en todos los casos se realizaron 15000 iteraciones con poblaciones de 2000 partículas, Para cada caso se mantuvieron fijos los parámetros a excepción del parámetro para el que se estaba realizando el análisis.

Finalmente el cálculo del error se realizó utilizando la norma  $L_2$  partiendo de la ecuación (2.64), los parámetros con los que se trabajó fueron los siguientes:

1. Para el primer conjunto de pruebas se dejó fijo el parámetro  $\beta = 0.1$ ,  $\omega = 0.9$  y el parámetro  $\alpha$  tomó los valores de: 0.9, 0.93, 0.95, 0.97, 0.99
2. Para el segundo conjunto de pruebas,  $\omega = 0.9$ ,  $\alpha = 0.95$  y  $\beta$  tomó los siguientes valores: 0.1, 0.2, 0.07, 0.15
3. Para el tercer conjunto  $\alpha = 0.95$ ,  $\beta = 0.1$  y  $\omega$  tuvo los siguientes valores: 0.3, 0.5, 0.7, 0.9

Todas las configuraciones se utilizaron para invertir las anomalías, y el algoritmo PSO fue capaz de encontrar los parámetros para todos los casos con la señal sin ruido y en el caso con ruido invirtió los parámetros en 7 de los 13 casos, sin embargo la velocidad con la que el algoritmo convergió al resultado cambió considerablemente con las Variaciones en los parámetros  $\omega$ ,  $\alpha$  y  $\beta$ . A continuación se presentan las figuras en las que es posible observar el patrón de reducción del error  $L_2$  para cada caso.

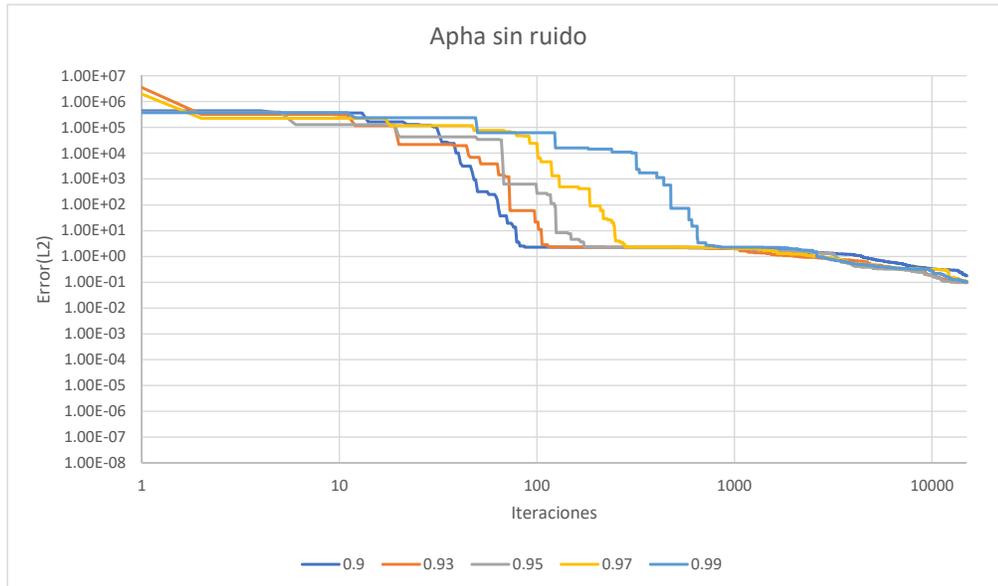
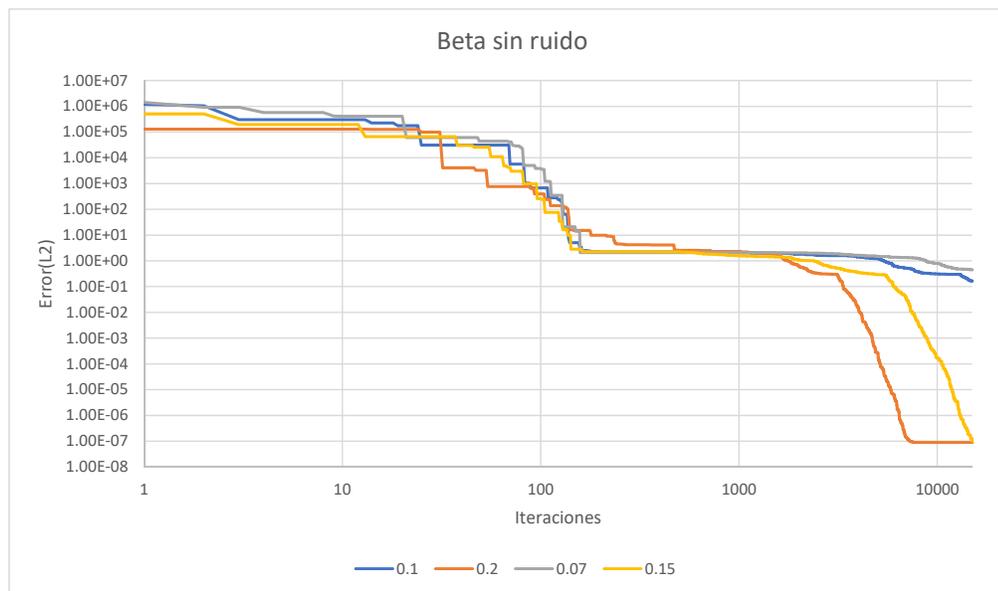
(A) Variación del error según los valores del parámetro  $\alpha$ (B) Variación del error según los valores del parámetro  $\beta$ 

FIGURA 4.3: Curvas de convergencia para las anomalías sin ruido

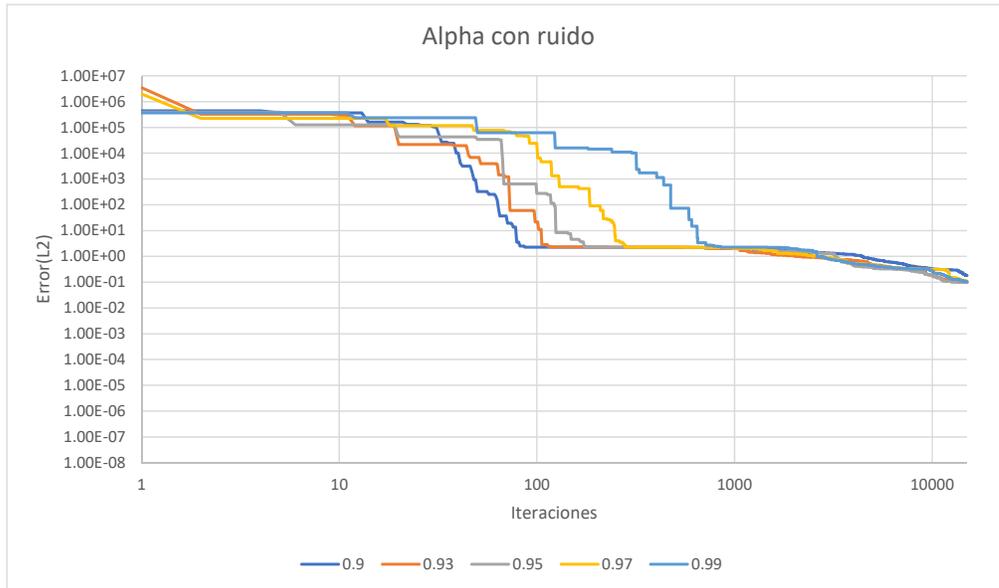
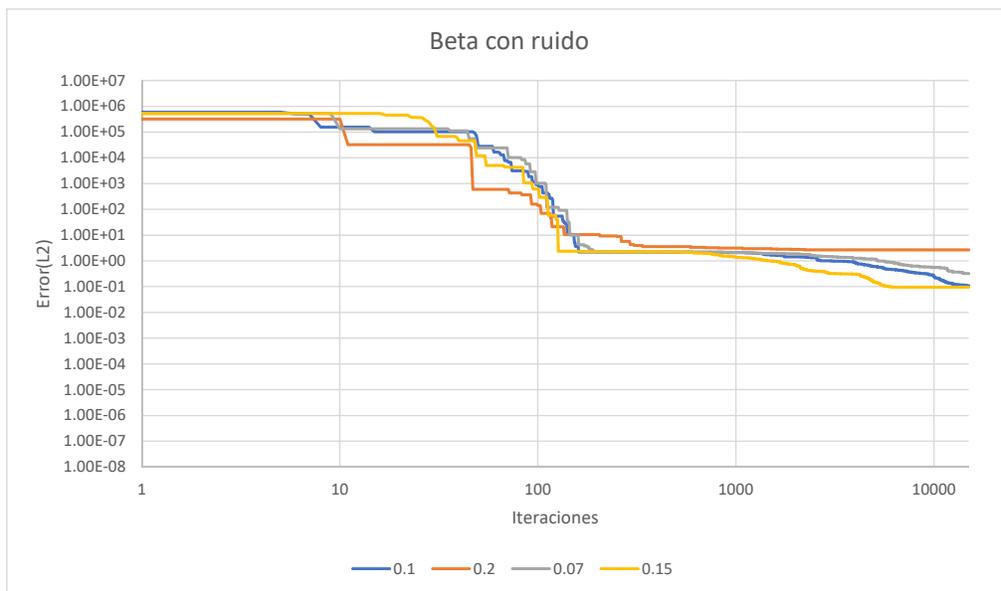
(A) Variación del error según los valores del parámetro  $\alpha$ (B) Variación del error según los valores del parámetro  $\beta$ 

FIGURA 4.4: Curvas de convergencia para las anomalías con ruido

## Discusión del análisis paramétrico de la inversión de cilindros ideales

Partiendo de de las figuras anteriores, especialmente 4.3b es posible observar que el valor de  $\beta$  tiene un gran peso en la calidad de la solución que se encuentre, mientras que en la figura 4.3a podemos observar que  $\alpha$  y  $\omega$  se ven involucradas en mayor medida en la velocidad de convergencia. Este análisis es de importancia ya que en las ejecuciones posteriores ésta información nos permitirá elegir los parámetros teniendo una mejor noción de su funcionamiento en el comportamiento del algoritmo.

## 4.2. Prueba con gravimetría 2D

Hasta este punto, se realizaron inversiones utilizando el PSO para encontrar los 4 parámetros de 3 cilindros los cuales evaluamos directamente en una función que nos modela de manera ideal el efecto de cada cilindro, sin embargo este método nos presenta un problema ya que en la exploración geofísica, no suele haber cuerpos con geometrías bien delimitadas, así como tampoco se tienen modelos matemáticos precisos para cada geometría posible. Es por esto que es necesario utilizar una metodología diferente cuando se realiza la inversión de cuerpos subterráneos, la metodología que utilizaremos aquí, será el de discretizar el medio mediante un ensamble de prismas tridimensional y ya contando con el ensamble, encontrar la distribución de masa que pueda replicar los datos sintéticos utilizando el algoritmo de optimización.

### Cálculo de la anomalía sintética de un cilindro

Para probar el algoritmo de inversión con cuerpos en medios bidimensionales se calcularon las 6 componentes tensoriales de un cilindro horizontal infinito con las características mostradas en la tabla 4.3.

Parámetros	Cilindro
Densidad $\rho(kg/m^3)$	500
Radio $r(m)$	250
Profundidad $z(m)$	300
Posición $x(Km)$	1
Longitud del Levantamiento (Km)	2

TABLA 4.3: Parámetros del cilindro

Al igual que en la sección anterior, se utilizó el modelo de un cilindro horizontal infinito (2.35) para el cálculo, considerando una variación espacial de  $\delta x = 40m$ , podemos observar los componentes<sup>2</sup> de anomalía calculada con los parámetros del cuadro 4.3 en la figura 4.5.

<sup>2</sup>No se muestran los componentes en dirección Y debido a que todos son cero

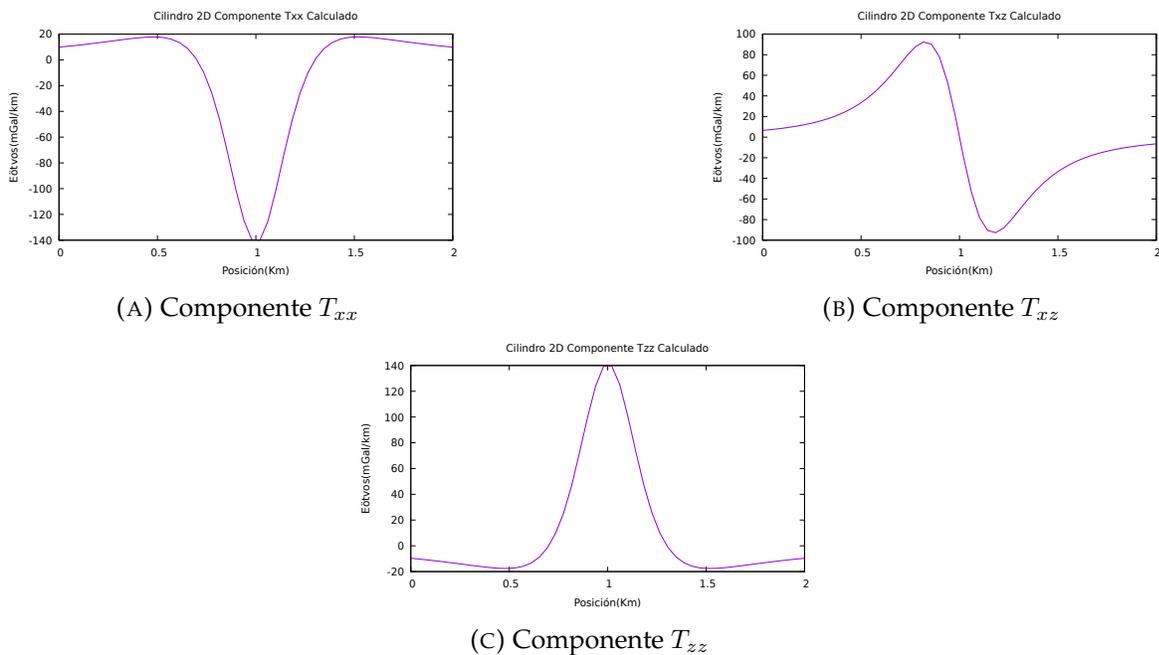


FIGURA 4.5: Componentes tensoriales del cilindro

#### 4.2.1. Inversión con PSO

Para poder realizar la inversión con esta nueva metodología fue necesario tomar nuevas consideraciones, ya que a diferencia del método anterior, no se utilizó la ecuación ideal del cilindro, sino que se delimitó un volumen fijo y se subdividió en pequeños prismas para los cuales la labor del PSO fue el de encontrar las densidades correspondientes, el método para generar el volumen para la distribución de masa fue el siguiente:

1. Se delimitaron las dimensiones del volumen de prueba, para éste caso las longitudes fueron las siguientes:
  - a) Largo = 1km, que es la misma longitud que nuestro conjunto de datos
  - b) Ancho = 2m
  - c) Profundidad = 125m
2. Se eligió el muestreo espacial con el que se subdividiría el volumen
  - a) Largo = 40m
  - b) Profundidad = 13m

Lo que nos resulta en una malla equiespaciada con 50 prismas horizontales por 50 verticales lo que nos da un total de 2500 prismas cuyo volumen es de  $5 * 5 * 200m$ , para los cuales es necesario que el PSO determine las densidades.

Al igual que para la anomalía con 3 cilindros, se realizó un análisis paramétrico con el objetivo de ver de qué manera influían los parámetros en la inversión, así como el de encontrar la mejor inversión posible, para éste problema se realizaron 3 conjuntos distintos de pruebas en los que se modificó un parámetro en particular mientras los demás se mantenían fijos, de nueva cuenta se utilizó la ecuación (2.65) para calcular las posiciones, los valores para los parámetros con los que se comenzó la prueba fueron los siguientes:

Parámetros	valor
$\alpha$	1.75
$\beta$	1.95
$\omega$	0.75
Poblacion	200
Iteraciones	20000
Dominio de búsqueda	0 a 1000 $Kgm^{-3}$

TABLA 4.4: Parámetros de Inversión

Partiendo de los parámetros presentados en cuadro 4.4 se realizó un total de 34 pruebas con distintos valores para  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\omega$ , variando cada uno mientras se mantenía fijo el resto, en la tabla 4.5 se muestra que valores se eligió para cada uno de estos 3 parámetros para cada ejecución.

	$\alpha$	$\beta$	$\omega$
Valor inicial	1	1	0.1
Valor final	2.6	2.6	0.85
Longitud del paso	0.2	0.2	0.05

TABLA 4.5: Espacio paramétrico

Como podemos observar en las figuras 4.6, el parámetro  $\omega$  es el que tiene mayor peso en la calidad de la solución, mientras que el parámetro  $\alpha$  afecta tanto la calidad de la solución como la velocidad de convergencia del algoritmo, finalmente el parámetro  $\beta$  afecta principalmente la velocidad de convergencia. Cabe destacar que en realidad no todas las combinaciones permitieron realizar una inversión exitosa; Sin embargo los que lograron invertir, lo hicieron de forma adecuada dadas las condiciones y necesidades de la ejecución.

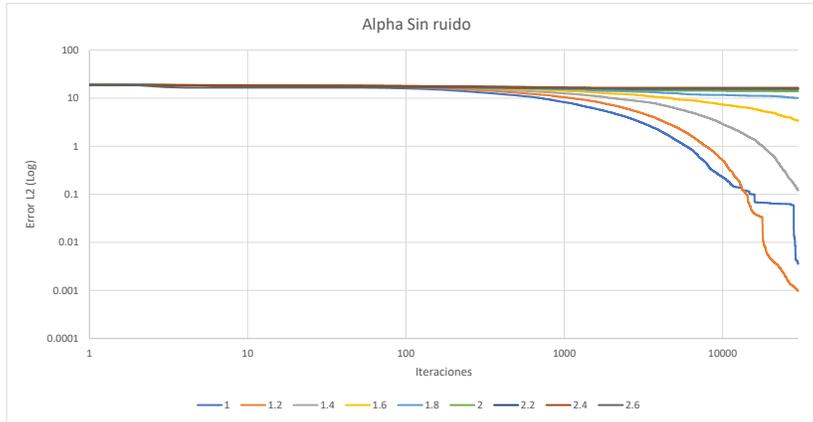
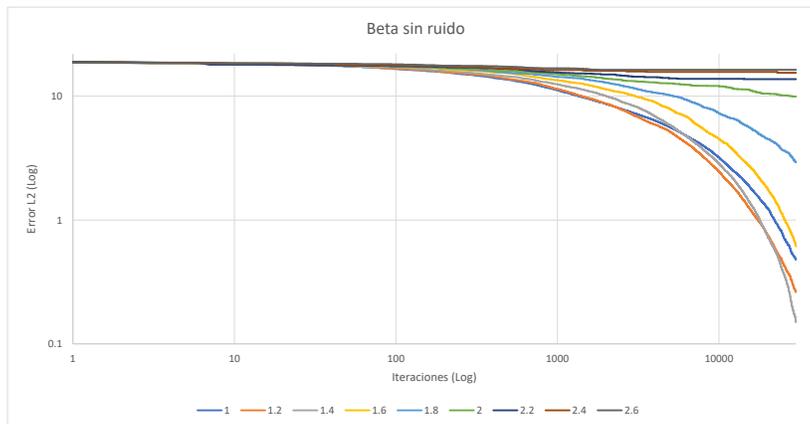
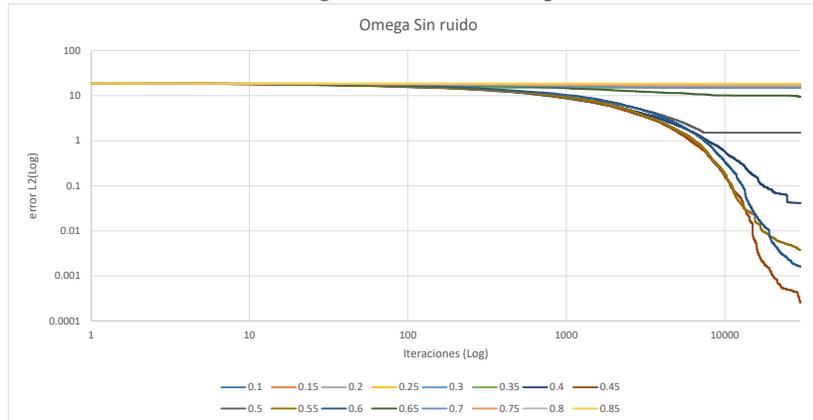
(A) Variación del error según los valores del parámetro  $\alpha$ (B) Variación del error según los valores del parámetro  $\beta$ (C) Variación del error según los valores del parámetro  $\omega$ 

FIGURA 4.6: Análisis paramétrico de la inversión 2D con PSO

## 4.3. Modelado e inversión tridimensional

### 4.3.1. Modelo inicial

Con el objetivo de reducir lo más posible la no unicidad en la solución del algoritmo, se propuso una estructura para el domo sobre la cual el algoritmo debe iterar, para ello se utilizaron 3 procesos distintos con el objetivo de delimitar la extensión, geometría y profundidad de la capa de roca.

Para delimitar el cuerpo se utilizó la función detectora de bordes para datos gradiométricos (Pedersen y Rasmussen, 1990) (2.53), la cual tiene un valor de cero o muy cercano en los bordes del cuerpo. De su aplicación se obtuvo la malla 4.7 y de la malla se interpretó el borde presentado en la figura 4.8.

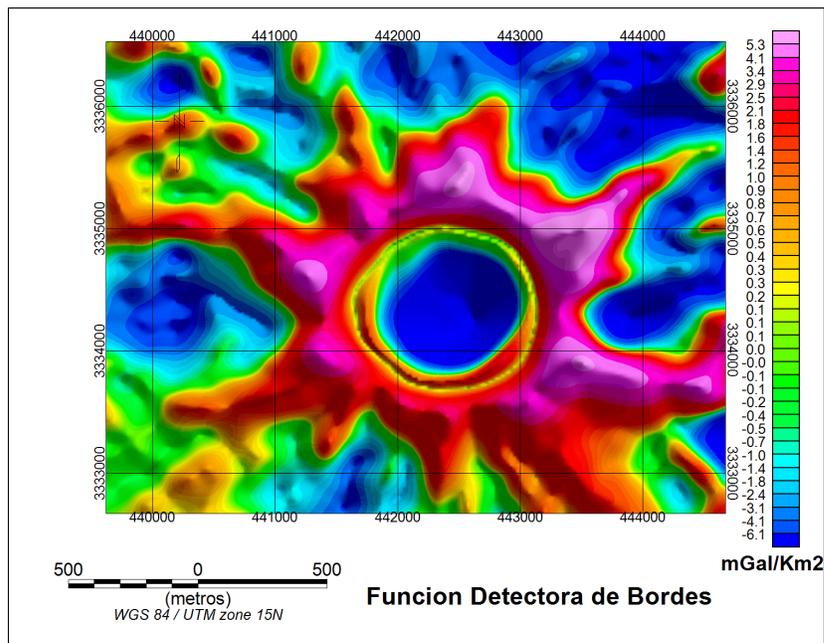


FIGURA 4.7: Malla de la función detectora de bordes

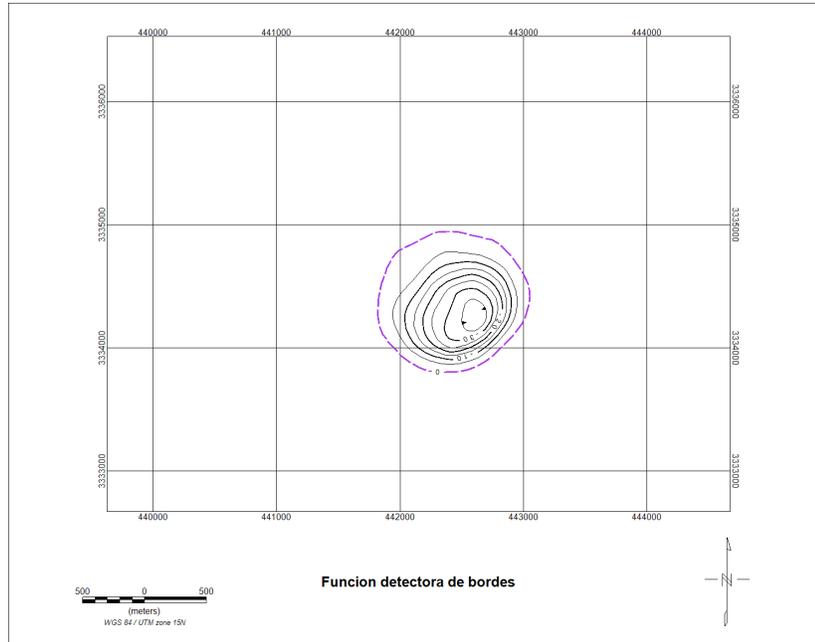


FIGURA 4.8: Borde estimado partiendo de la FDB

El paso siguiente consiste en determinar la profundidad del cuerpo utilizando la deconvolución de Euler (2.49), la cual se realizó utilizando un tamaño de ventana  $V_n = 10$  y un índice estructural de  $n = 1$ , el cual corresponde a contactos geológicos (Reid, 1995).

Las profundidades que se estimaron a partir de la deconvolución, son congruentes con los resultados previos de ? y Coker (2006) quienes describen a la capa de roca como un cuerpo que asemeja una pirámide achatada hacia el sureste, y su rango de profundidades aproximado va desde los 150[m] hasta los 400[m], se pueden observar los resultados de la deconvolución en la figura 4.9

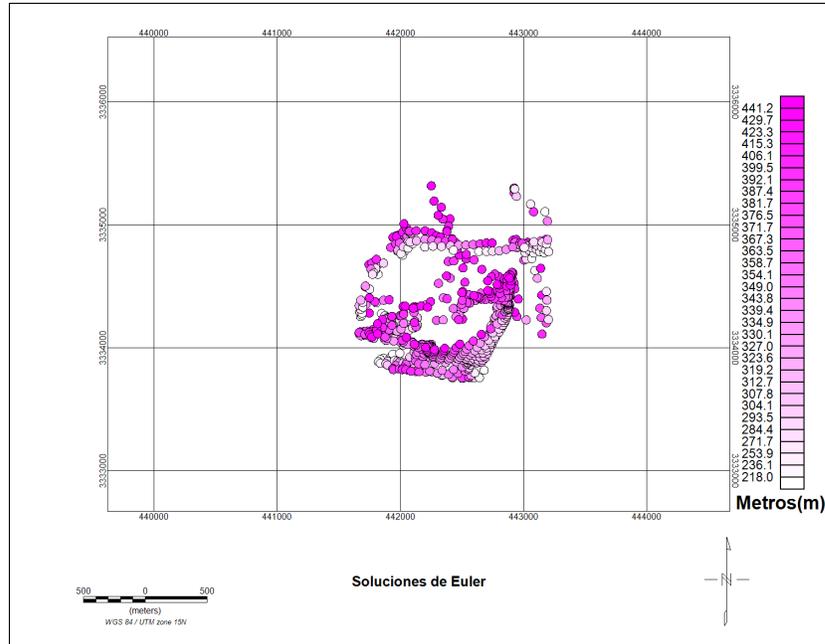


FIGURA 4.9: Soluciones de la deconvolución de Euler 3D

Ya que se tiene la extensión del cuerpo delimitada, se prosiguió a estimar la geometría de su superficie, para ello se utilizó el segundo invariante de acuerdo a Murphy y Brewster (2007), el cual nos permite delimitar la geometría de la cima de la estructura que genera las anomalías. Se ajustaron los valores del invariante para representar las profundidades estimadas con la deconvolución de Euler, y se utilizaron únicamente los valores dentro del borde previamente estimado, obteniendo como resultado la superficie que se presenta en la figura 4.10.

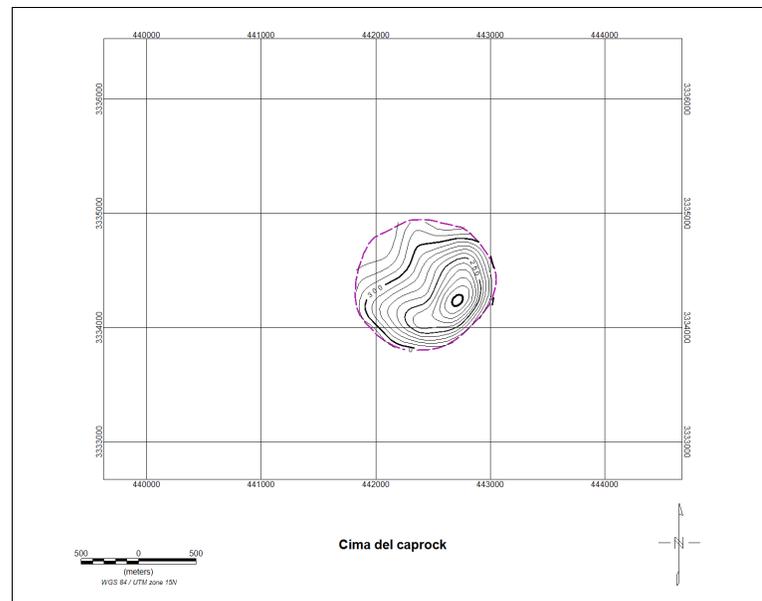


FIGURA 4.10: Cima estimada para el caprock

Una vez obtenida la geometría de la cima, se prosiguió con la construcción de un modelo 3D discretizado en prismas cuya profundidad promedio alcanza los 600[m], con una densidad uniforme de  $2300 \frac{kg}{m^3}$ , y la densidad del medio circundante se asignó mediante la curva de compactación (3.1) presentada por Hudec y Jackson (2007); Nelson y Fairchild (1989). El modelo inicial se puede observar en la figura 4.11.

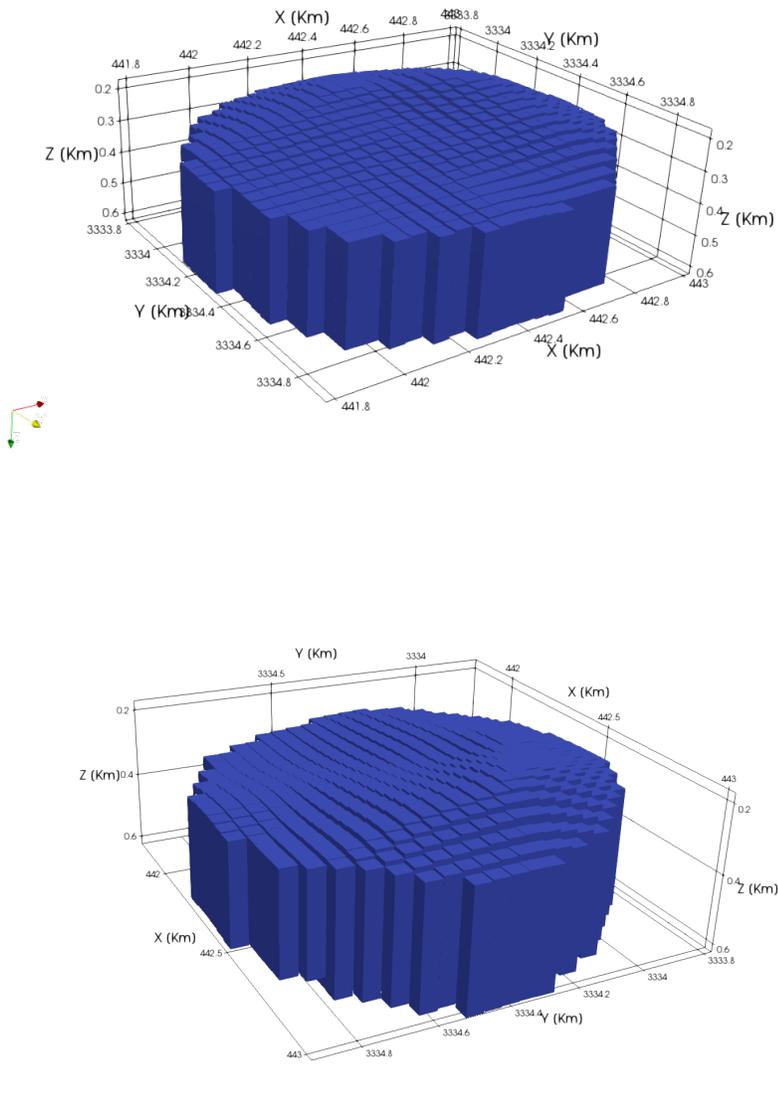


FIGURA 4.11: Modelo inicial del Caprock

El modelo tridimensional mostrado en la figura 4.11, se generó con las siguientes características:

Dimensiones	Discretización	Rango de densidades	$\frac{kg}{m^3}$
Dirección N-S :1150[m] Dirección E-W :1250[m] Profundidad :400[m]	23 Prismas 25 Prismas 8 Prismas	1900 a 2700	

TABLA 4.6: Discretización del modelo

El modelo consiste en 2418 prismas de densidad uniforme y sus aristas tienen una longitud de 50[m]x50[m]x50[m] y son paralelas a las direcciones N-S,E-W,Z respectivamente.

Una vez generado el modelo, los efectos gravitacionales se calcularon sumando el efecto individual de cada prisma del ensamble en cada uno de los puntos de interés, siguiendo las ecuaciones (2.41) a (2.46) de Nagy *et al.* (2000), obteniendo las mallas de la figura 4.15

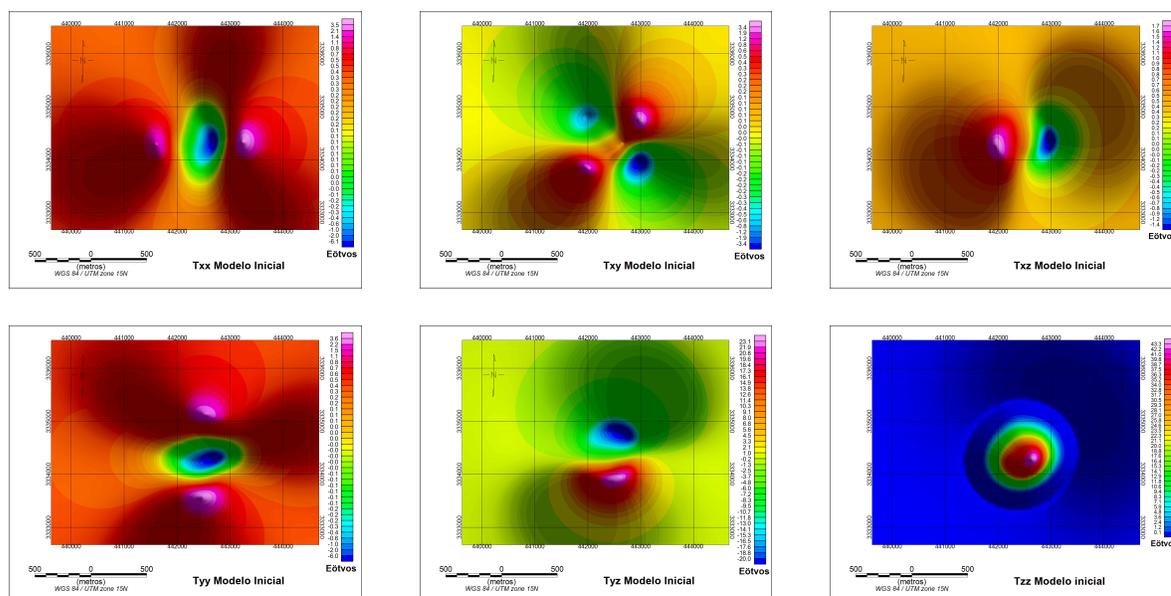


FIGURA 4.12: Componentes tensoriales del modelo 3D inicial, figura(4.11)

### 4.3.2. Consideraciones particulares para la inversión

Para realizar la inversión de la estructura del caprock del domo Vinton con el algoritmo de optimización por enjambre de partículas fue necesario reducir nuestra densidad de datos, ya que inicialmente para la región seleccionada se tienen aproximadamente 18193 datos, siendo necesario calcular el efecto gravimétrico de los 2418 prismas para cada uno de dichos puntos en cada uno de los 6 componentes tensoriales lo que requeriría un tiempo aproximado de 4 días para cada prueba, y como ya se mostró en las secciones anteriores, es necesario realizar

un numero considerable de pruebas para encontrar la combinación óptima de parámetros para lograr la convergencia.

Es por esta razón que se optó por reducir el problema de manera que se utilizaron 6 líneas para la inversión en lugar de la malla completa, lo cual logró reducir el tiempo de computo de 4 días, a 8 horas por prueba. La localización de cada línea se puede observar en la figura 4.13

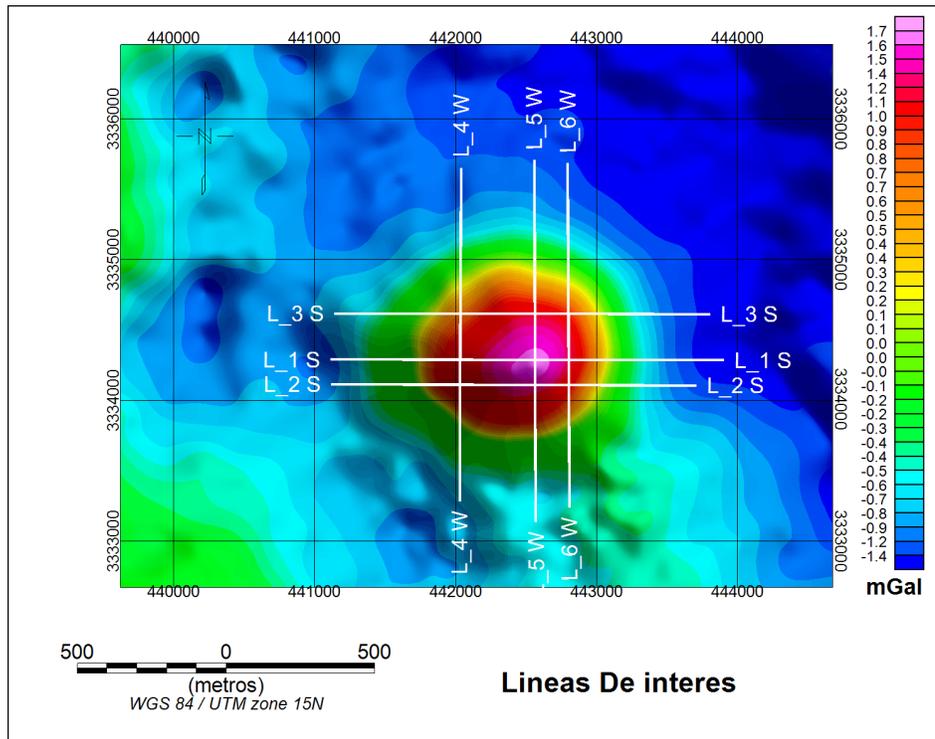
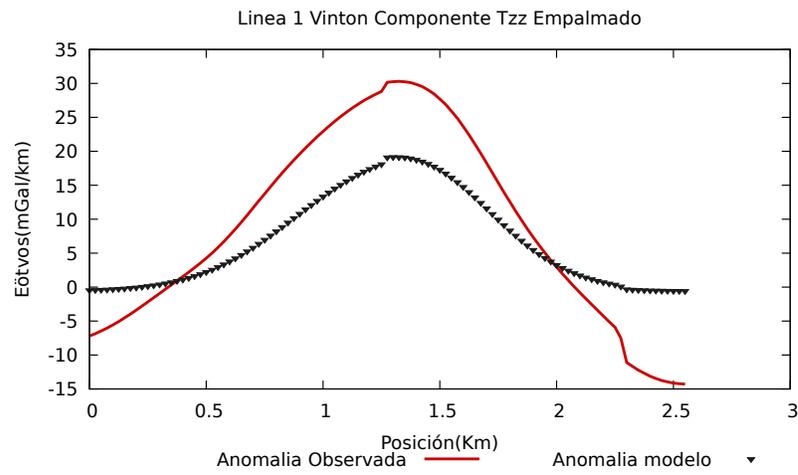
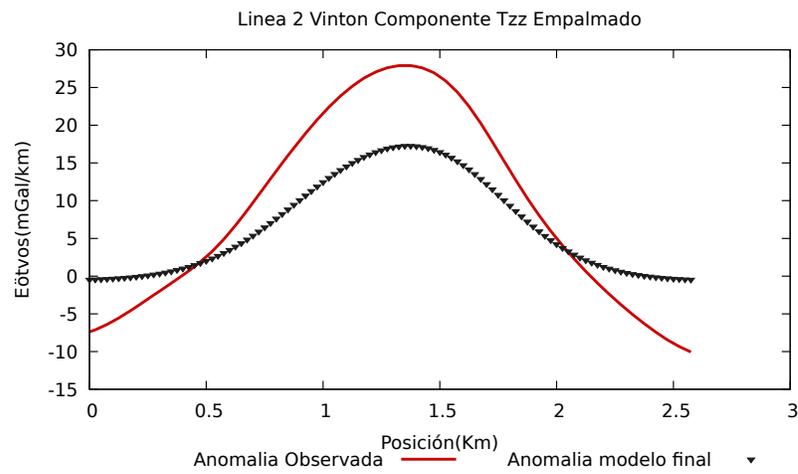


FIGURA 4.13: Mapa con las líneas de interés para realizar la inversión

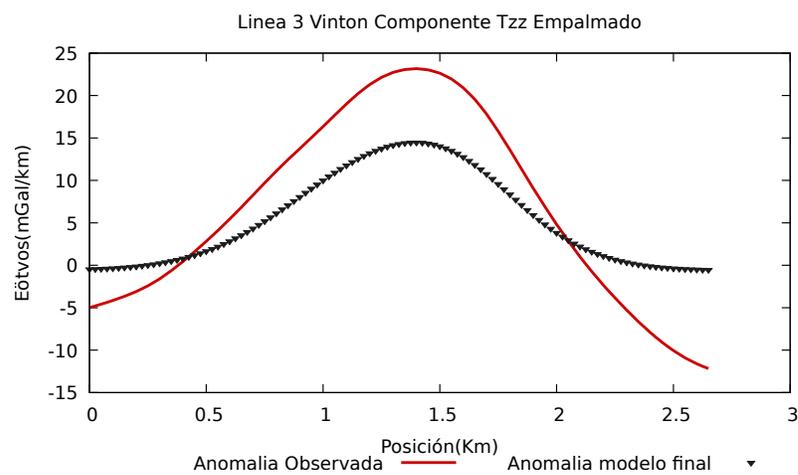
Ya que se tienen localizadas las líneas de interés, se calculó el efecto del modelo inicial sobre las mismas. A continuación se presentará el componente  $T_{zz}$  de cada una:



(A) Linea 1

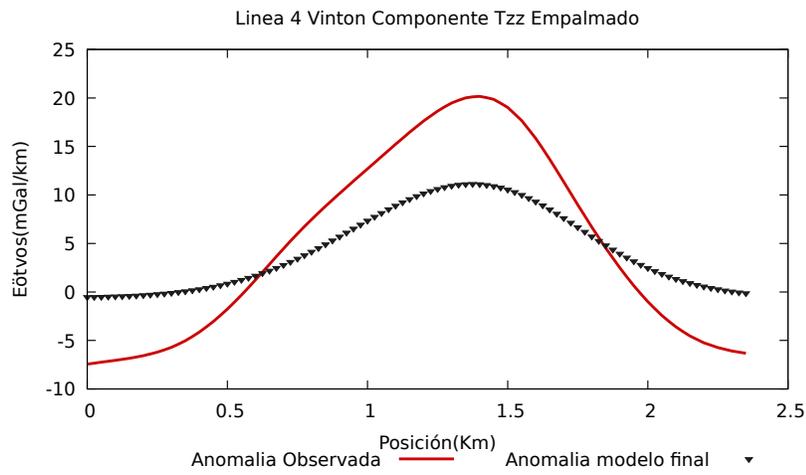


(B) Linea 2

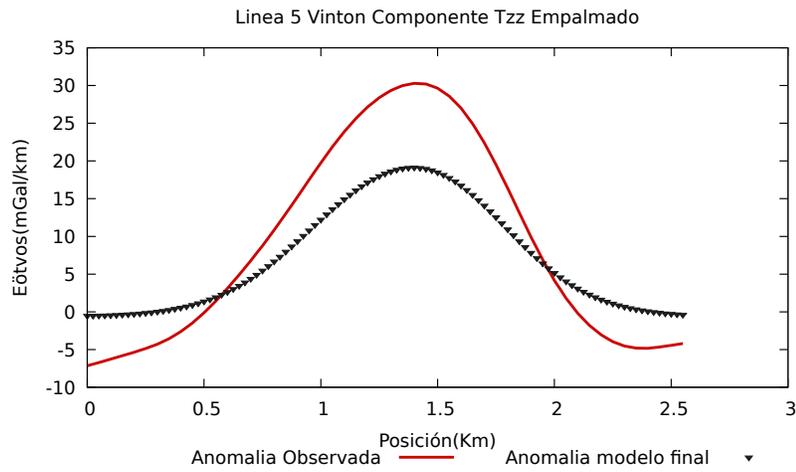


(C) Linea 3

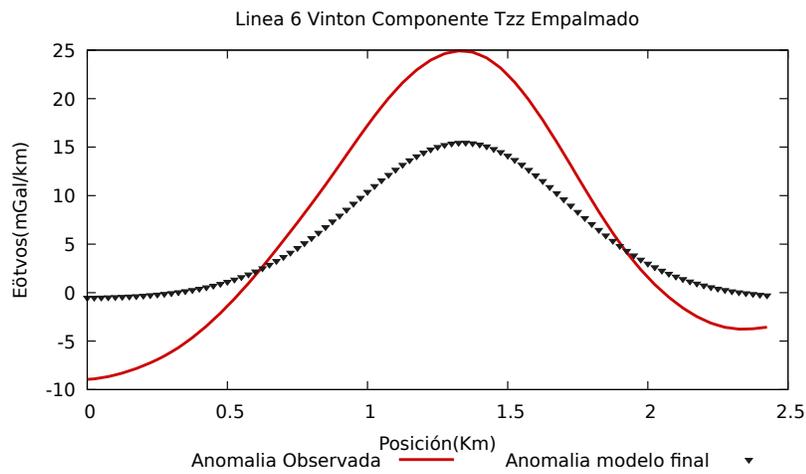
FIGURA 4.14: Componente  $T_{zz}$  de las líneas 1 a 3, con orientación E-W



(A) Linea 4



(B) Linea 5



(C) Linea 6

FIGURA 4.15: Componente  $T_{zz}$  de las líneas 4 a 6, con orientación N-S

# Resultados

## 5.1. Resultados de inversión del caso gravimétrico para cilindros ideales

El haber podido replicar los resultados de (Yuan *et al.*, 2009), es de gran importancia para el progreso de este trabajo ya que nos demuestra que es posible utilizar el algoritmo de PSO para lograr la inversión de anomalías gravimétricas, siempre y cuando se realice una adaptación adecuada según las necesidades del problema así como la selección adecuada de los modelos matemáticos correspondientes para cada situación.

### 5.1.1. Anomalías Invertidas y parámetros encontrados

#### Anomalía sin ruido

**Curvas Invertidas** La inversión de los parámetros de los cilindros con la anomalía correspondiente nos generó una curva muy cercana a la de los datos originales, con un error<sup>1</sup>  $L_2 = 1.316 \times 10^{-6}$  un error aceptable para considerar que la curva generada con nuestro modelo invertido resulta una buena aproximación. En la figura 5.1 se muestran tanto la curva original y la invertida sobrepuestas.

Como podemos observar en las figuras 5.2, la inversión de la curva partiendo de datos sin ruido aleatorio fue bastante exitosa, lo que nos da pie para realizar otro tipo de inversiones con un mayor nivel de complejidad con el método de PSO.

---

<sup>1</sup>Se presenta el resultado de la mejor inversión, sin embargo cabe mencionar que se logró realizar otras 10 con resultados similares

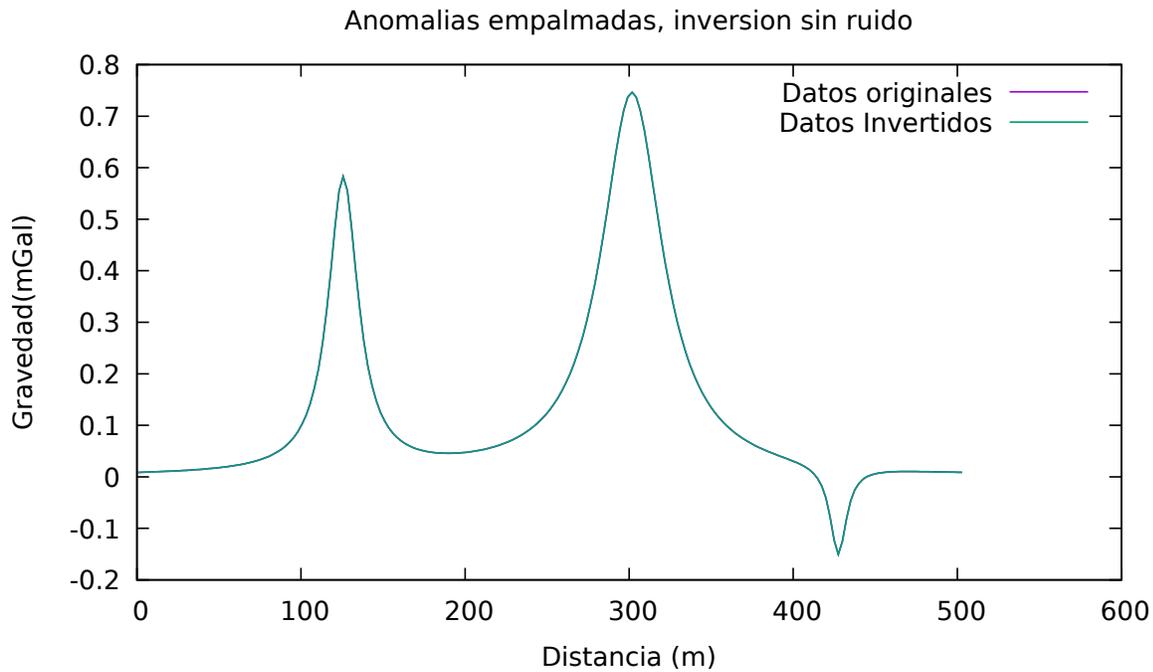


FIGURA 5.1: Anomalías Original y resultados de la inversión de los parámetros de 3 cilindros ideales sin ruido

**Parámetros invertidos** Como recordaremos, siempre que realizamos una inversión, aquello que buscamos obtener son los parámetros que resultan del proceso de inversión. A continuación se presenta una tabla con los parámetros invertidos, así como su error porcentual respecto a los originales presentados en la tabla 4.2.

	Valor Original	Valor invertido	Error Porcentual (%)
Densidad $\rho(kg/m^3)$	1500	1361.4921	9.27
Radio $r^2(m)$	10	11.0786	10.78
Profundidad $z(m)$	11	11.0640	0.058
Posición $x(m)$	125	125.7275	0.58
Densidad $\rho(kg/m^3)$	1000	1177.6025	17.761
Radio $r^2(m)$	20	34.1563	70.78
Profundidad $z(m)$	22.5	22.6309	0.58
Posición $x(m)$	300	301.1563	0.58
Densidad $\rho(kg/m^3)$	-1000	-1020.6250	2.06
Radio $r^2(m)$	5	2.4631	50.76
Profundidad $z(m)$	6	6.0349	0.58
Posición $x(m)$	425	427.47354	0.58

TABLA 5.1: Parámetros de la anomalía

Como podemos observar en la tabla 5.1, el PSO logró invertir con un error considerablemente bajo la mayoría de los parámetros, teniendo problemas principalmente al invertir el radio

y profundidad de las anomalías, lo cual es aceptable ya que el rango de búsqueda que se empleó fue sumamente amplio con el objetivo de asemejarse a los procesos de inversión con datos reales.

### Anomalía con ruido

**Curvas invertidas** La inversión de parámetros utilizando los datos de los cilindros con ruido aleatorio resultó en una curva con una tendencia muy cercana a la que se genera con datos sin ruido, el error que presenta  $L_2 = 9.527 \times 10^{-2}$  es mayor, sin embargo es aceptable.

A continuación se presentan tanto las curvas original con ruido como la la curva invertida sobrepuestas 5.2

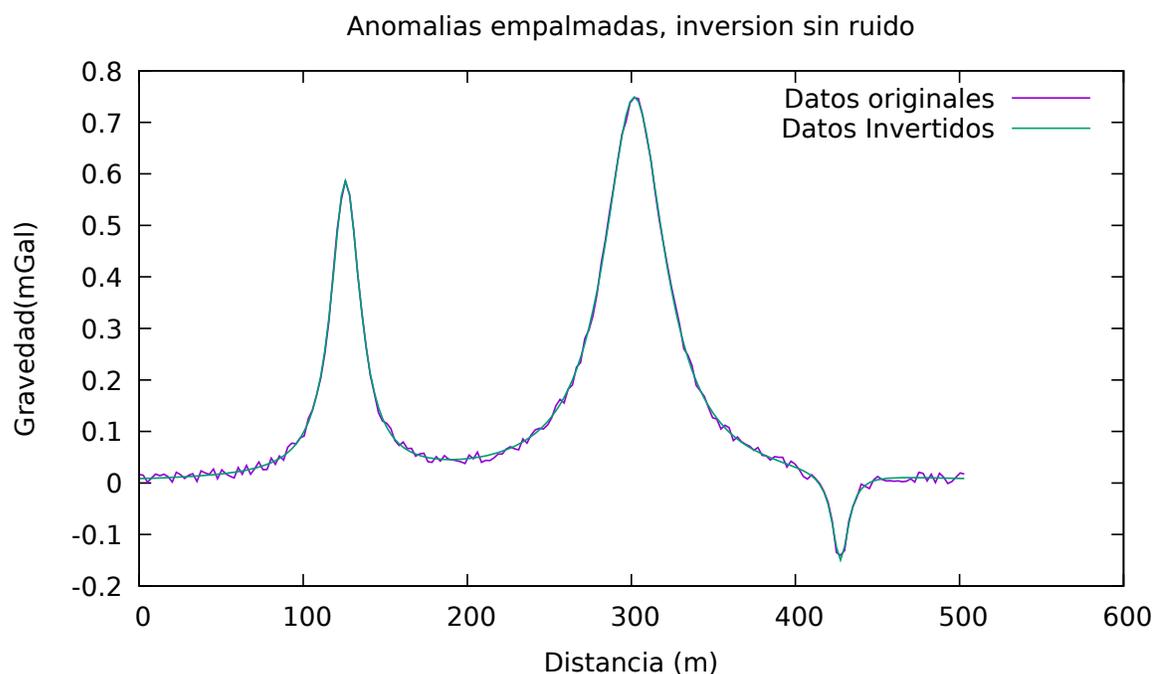


FIGURA 5.2: Anomalías Original y resultados de la inversión de los parámetros de 3 cilindros ideales

**Parámetros Invertidos** Al igual que con los datos sin ruido, se invirtió Densidad, profundidad, radio y posición de los 3 cilindros, los resultados de la inversión se muestran a continuación:

	Valor Original	Valor invertido	Error Porcentual (%)
Densidad $\rho(kg/m^3)$	1500	1337.4278	10.83
Radio $r^2(m)$	10	11.2367	12.36
Profundidad $z(m)$	11	10.9535	0.422
Posición $x(m)$	125	125.7851	0.628
Densidad $\rho(kg/m^3)$	1000	1027.1514	2.71
Radio $r^2(m)$	20	39.2042	96.02
Profundidad $z(m)$	22.5	22.5697	0.31
Posición $x(m)$	300	301.8281	0.609
Densidad $\rho(kg/m^3)$	-1000	-904.4724	9.55
Radio $r^2(m)$	5	2.7689	44.62
Profundidad $z(m)$	6	6.033	0.56
Posición $x(m)$	425	427.3964	0.56

TABLA 5.2: Parámetros de la anomalía

En la tabla 5.2 nos muestra que el método es capaz de realizar la inversión aun en presencia de ruido, se siguen presentando los mismos problemas que en la tabla 5.1 que corresponden principalmente a la inversión de la profundidad y del radio, siendo consecuencia del dominio de búsqueda.

### 5.1.2. Inversión de modelo 2D partiendo de un cilindro ideal

La inversión de un modelo 2D para la anomalía del cilindro sin ruido generó una curva que ajustó los datos originales con un error  $L_2 = 1.136 \times 10^{-5}$ , Para la inversión se utilizó el algoritmo de PSO con los siguientes parámetros iniciales:

Parámetros	valores
$\alpha$	1.75
$\beta$	1.95
$\omega$	0.5
Iteraciones	20,000
Población inicial	200

TABLA 5.3: Parámetros iniciales de la inversión de un cilindro con PSO

Con los parámetros de ejecución mostrados en la tabla 5.3, se muestra a continuación un resumen de la ejecución:

	Valores
Parámetros invertidos	2500
Puntos de observación	50
Modelos evaluados totales	4,000,000
Tiempo empleado en el cálculo	17min,43s

TABLA 5.4: Resumen de la inversión

Finalmente se muestran las 3 componentes tensoriales correspondientes a la inversión yuxtapuestas al componente original del cilindro en la figura 5.4, así como el modelo generado por el algoritmo en la figura 5.3:

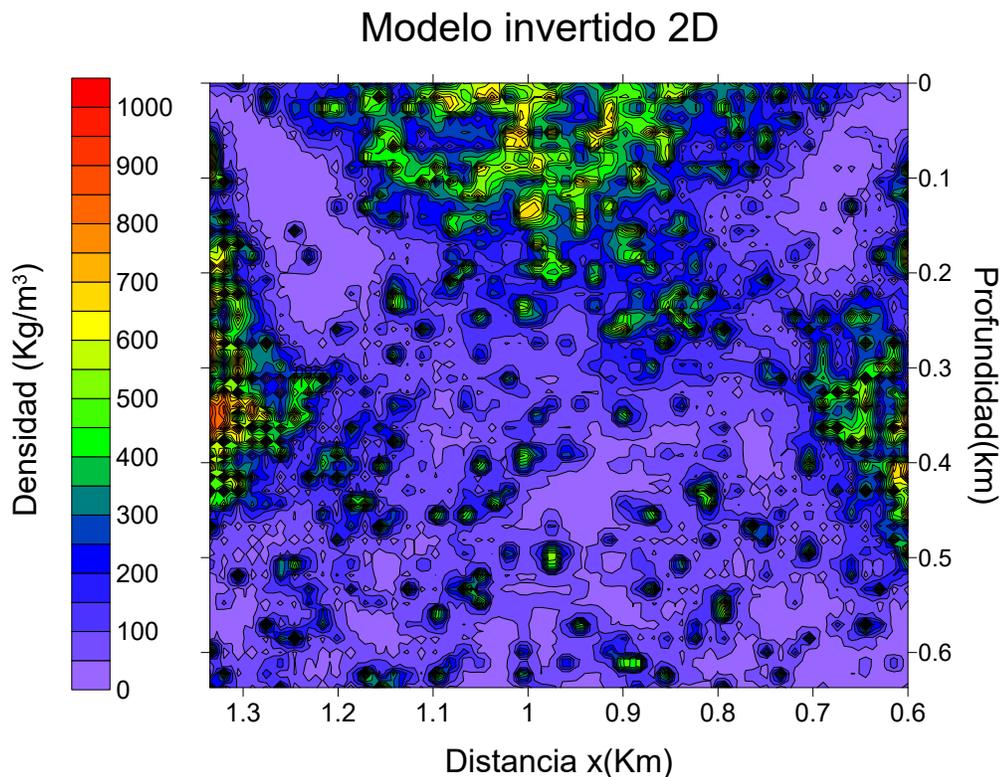
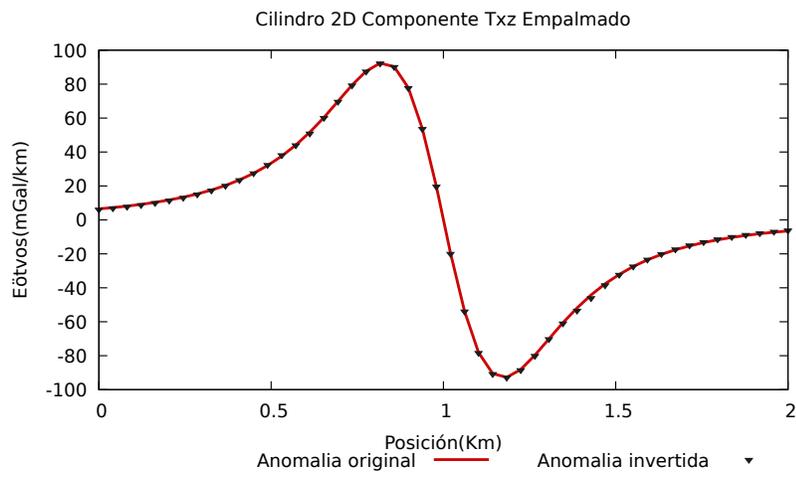
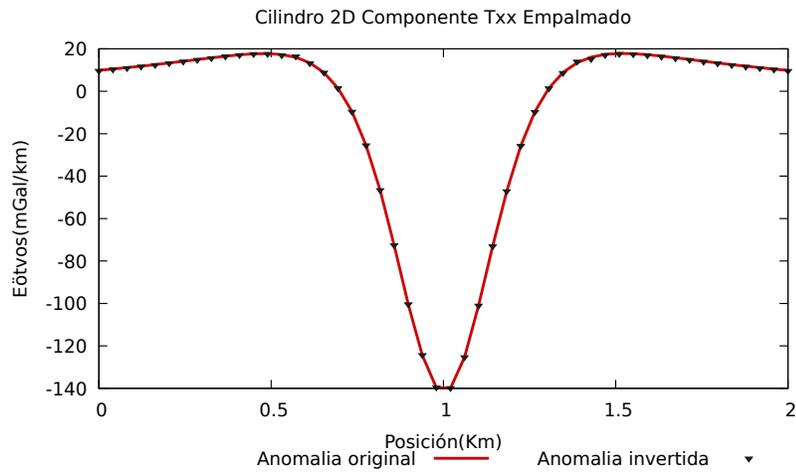
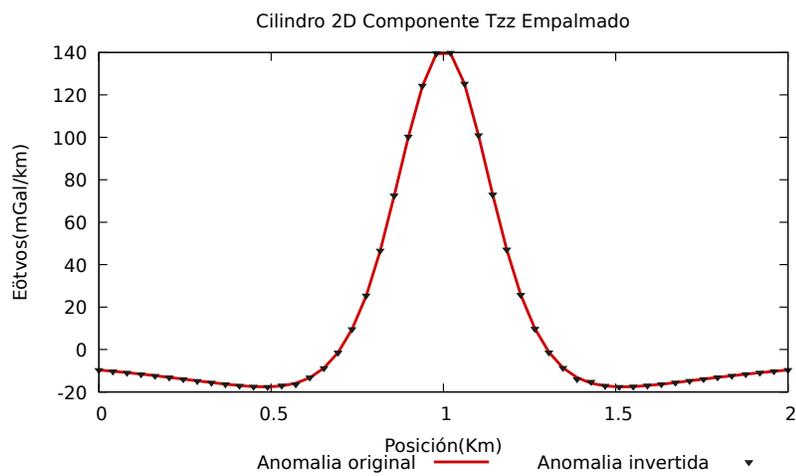


FIGURA 5.3: Modelo 2D invertido

Como se puede observar en las figuras 5.3 y 5.4, el algoritmo fue capaz de reconstruir las anomalías e incluso en el modelo el rango de densidades se encuentra muy cercano a 500, que es la densidad de nuestro modelo inicial. Sin embargo es claro que es necesario restringir el volumen en el que se trabajará para tener un resultado mas completo y confiable.



(A) línea 2



(B) línea 3

FIGURA 5.4: Perfiles invertidos del cilindro 2D

## 5.2. Resultados de la inversión de la capa de roca del domo Vinton

Al igual que con los problemas previos, se realizaron inversiones con diversas combinaciones de parámetros para encontrar la combinación óptima de los mismos para la resolución del problema, los parámetros que le dieron solución a la inversión se presentan en la tabla 5.5. El error obtenido para esta inversión fue de  $L_2 = 3.325 \times 10^{-3}$

Parámetros	valores
$\alpha$	2.2555
$\beta$	2.1144
$\omega$	0.5492
Iteraciones	60,000
Población inicial	200

TABLA 5.5: Parámetros iniciales de la inversión del Caprock con PSO

Para esta combinación de parámetros y nuestro modelo inicial, las características de la inversión se presentan en el cuadro 5.6:

	Valores
Parámetros invertidos	2418
Puntos de observación	610
Modelos evaluados totales	12,000,000
Tiempo empleado en el cálculo	8H,13Min

TABLA 5.6: Resumen de la inversión

En las figuras 5.7 podemos observar el modelo resultante para el caprock después de la inversión con PSO, asimismo podemos observar los componentes  $T_{zz}$  invertidos para cada perfil en las figuras 5.8 y 5.9.

El modelo presentado se eligió como adecuado ya que presentó un error considerablemente bajo, y ajustó de manera adecuada a la mayoría de los perfiles. Del mismo modo, el modelo presentado en la figura 5.7 presenta similitud al presentado por Qin *et al.* (2016), Wang *et al.* (2017), pero de mayor resolución, y también al presentado por Nava Flores (2018).

Cabe destacar que pese a la relativamente baja resolución del modelo, se observa que hay una línea de material de baja densidad que pasa por la zona alta del domo en dirección NW-SE, la cual parece ser congruente con los reportes estructurales de Coker (2006).

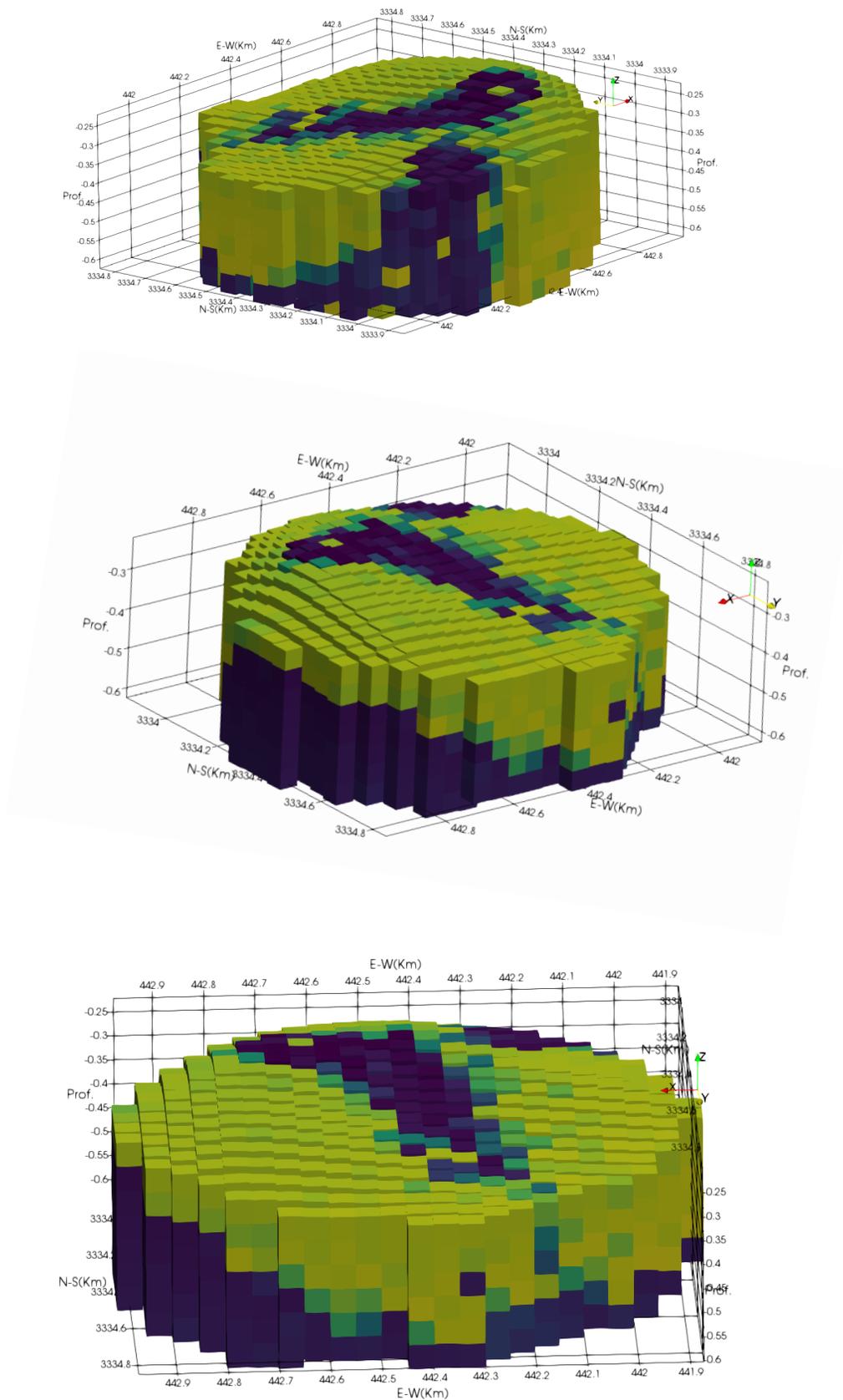


FIGURA 5.5: Modelo invertido del caprock del domo Vinton, los prismas de color oscuro representan las regiones que el algoritmo invirtió como sedimento

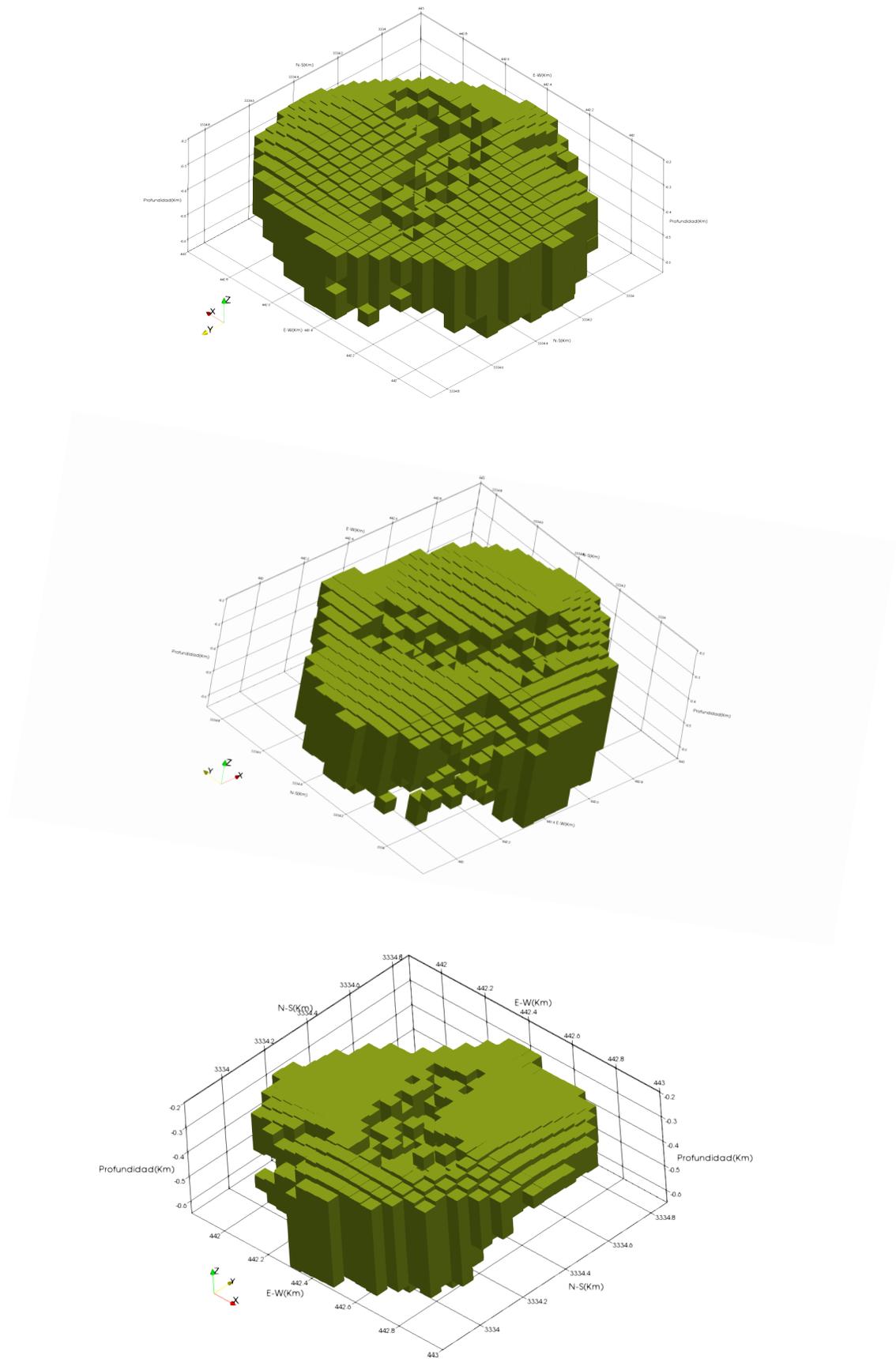


FIGURA 5.6: Modelo invertido del caprock del domo Vinton, únicamente se muestran las regiones de densidad alta, interpretadas como caliza

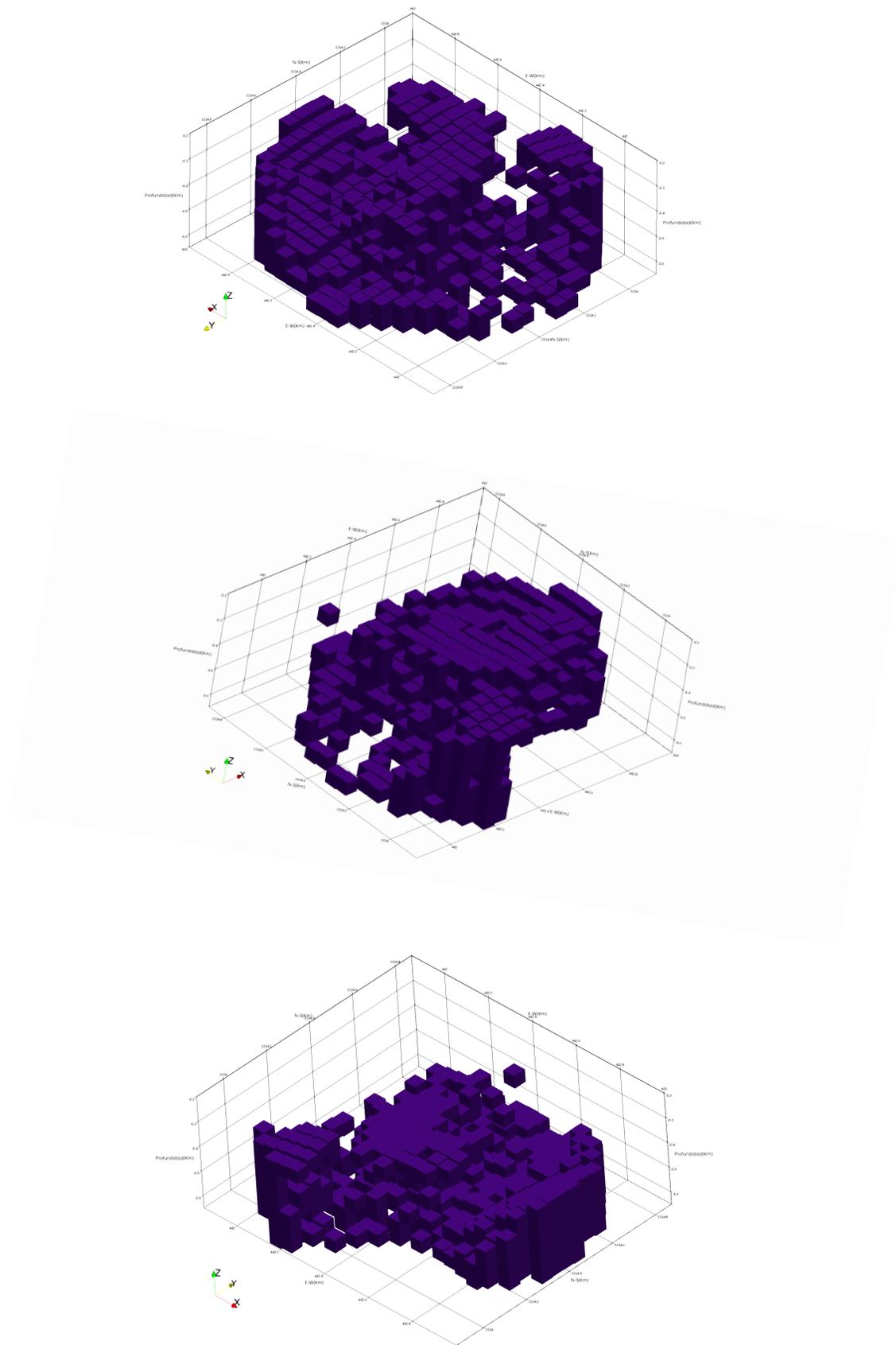
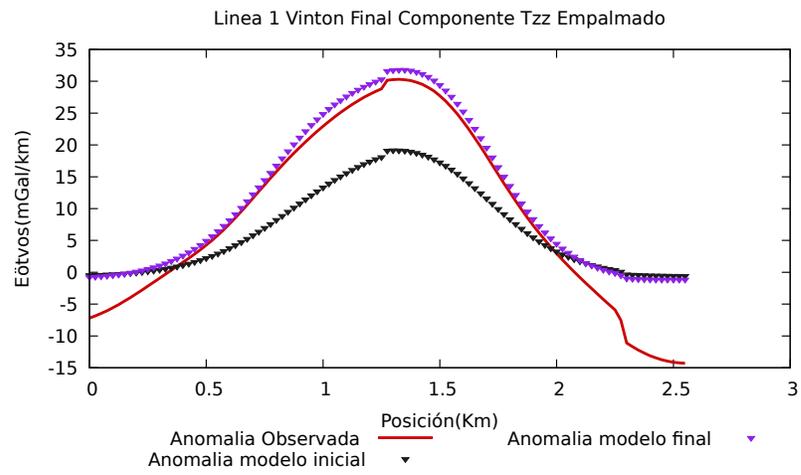
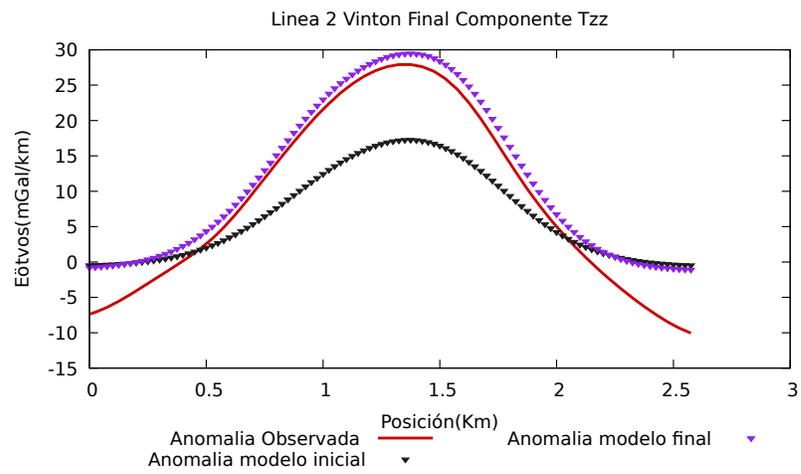


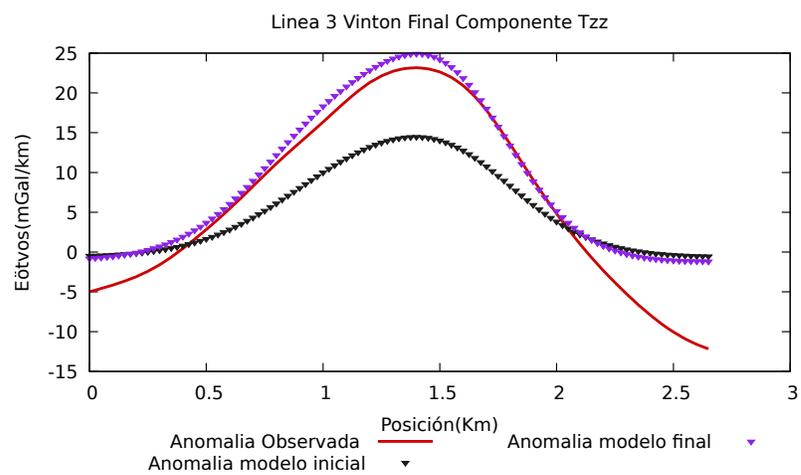
FIGURA 5.7: Modelo invertido del caprock del domo Vinton, únicamente se muestran las regiones de densidad baja, interpretadas como sedimento.



(A) línea 1

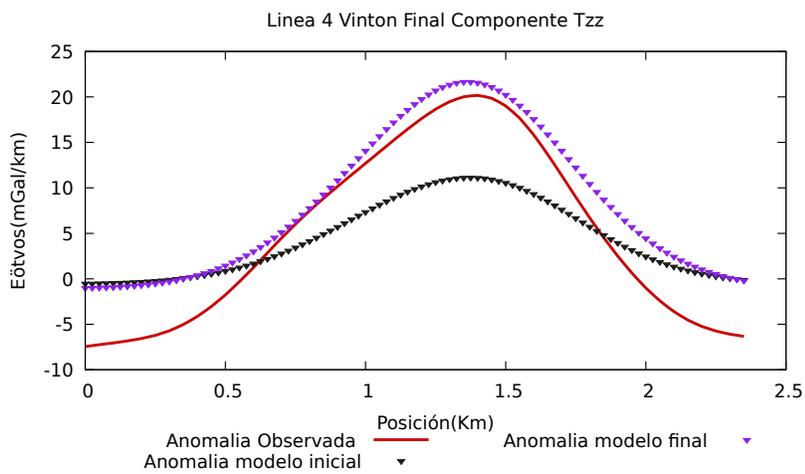


(B) línea 2

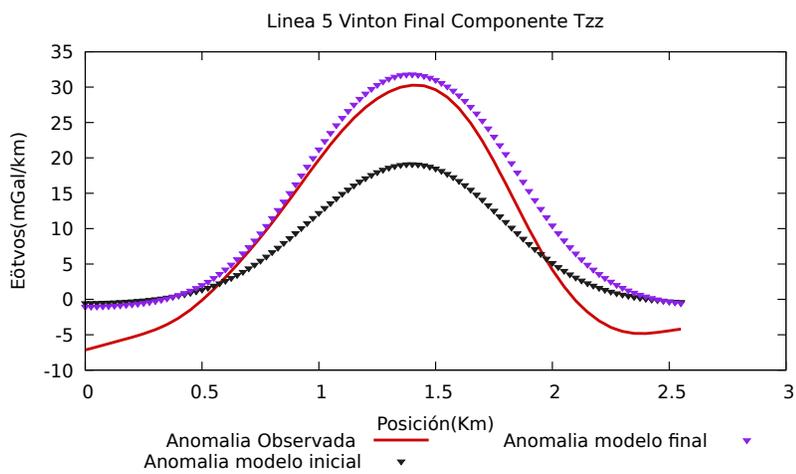


(C) línea 3

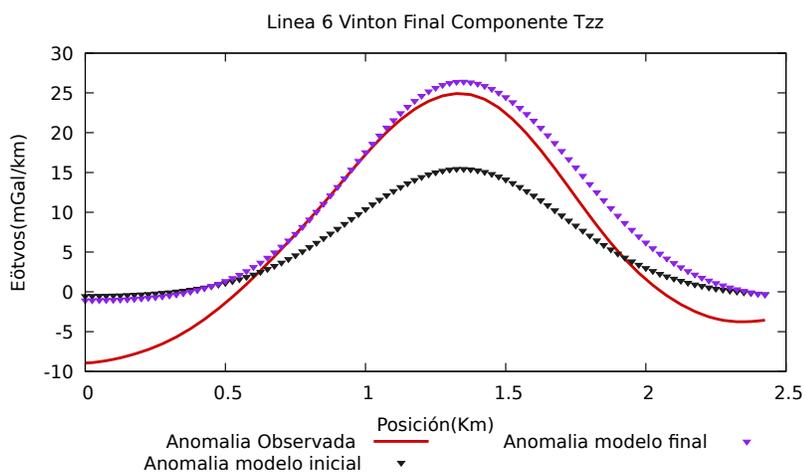
FIGURA 5.8: Perfiles E-W invertidos Domo Vinton



(A) línea 4



(B) línea 5



(C) línea 6

FIGURA 5.9: Perfiles N-S invertidos Domo Vinton

# Conclusiones y recomendaciones

En este último capítulo se presentan las conclusiones derivadas del trabajo de tesis, así como recomendaciones para trabajos futuros con este mismo algoritmo.

## 6.1. Conclusiones

La implementación del algoritmo PSO que se generó fue capaz de adaptarse a problemas de inversión gravimétrica convencional y tensorial independientemente de la formulación del problema directo, sin embargo la forma en la que se implementó requiere una gran cantidad de productos matriciales, lo que tiene un alto costo computacional y se traduce en tiempos de ejecución largos.

El método de inversión de optimización por enjambre de partículas en su versión más sencilla, encontró de forma rápida el óptimo en la primer prueba, en la segunda pese a que las curvas convergieron los parámetros encontrados variaron respecto a los originales, sin embargo las variaciones entre parámetros son congruentes con el modelo directo propuesto, asimismo se pudo observar que la selección de parámetros de ejecución es de gran importancia para la convergencia, para el tercer caso podemos observar que el algoritmo se ve fuertemente afectado por la no unicidad ya que aún cuando el algoritmo pudo resolver múltiples veces las curvas generadas por el modelo sintético, generó modelos que resuelven el problema pero que geológicamente carecen de sentido. Esto nos muestra que hay que tener cuidado al utilizar el algoritmo ya que dada su naturaleza pseudo-aleatoria, resulta sencillo que se vea afectado por la no unicidad, de manera que es necesario acotar el espacio de soluciones para lograr modelos geologicamente representativos.

Al tomar en consideración los resultados de las primeras pruebas, el acotar la inversión a un volumen restringido y que el algoritmo depurara el modelo resultó ser un método mucho más fructífero, ya que no solo logró resolver los perfiles con los que se estaba trabajando, sino que el modelo final es congruente con la geología estructural de la zona, y es comparable con resultados de otros trabajos en los que se buscaba modelar el mismo caprock, tales como el de Nava Flores (2018), Qin *et al.* (2016), y el de Wang *et al.* (2017).

## 6.2. Recomendaciones para trabajos futuros

Dado que el problema más grande que se presentó fueron los tiempos de cómputo para las pruebas, la recomendación más importante que se realiza a partir de este trabajo de tesis es el de buscar la manera de generar una implementación optimizada del algoritmo utilizando librerías de optimización de cómputo como BLAS. Una segunda opción es la paralelización del algoritmo, ya que por sus características, el PSO puede ser paralelizado con una muy alta eficiencia. Además, como la mayoría de las operaciones son multiplicaciones de matrices, el uso de una unidad especializada en operaciones matriciales, como un procesador gráfico podría ser muy recomendable, ambas opciones podrían reducir considerablemente los tiempos de cómputo y así permitir que se utilice una mayor densidad de datos con modelos mucho más resolutivos en el mismo tiempo.

Otro punto a considerar es que existe una muy amplia variedad de algoritmos derivados del PSO, por lo que sería interesante explorar otras variantes del PSO para trabajos de inversión ya que podrían tener fortalezas que el PSO convencional no tiene.

# Bibliografía

- Al-Chalabi, M. (1992). When least-squares squares least. *Geophysical prospecting*, 40(3):359–378.
- Blakely, R. J. (1996). *Potential theory in gravity and magnetic applications*. Cambridge University Press.
- Chang, J.-F., Roddick, J. F., Pan, J.-S., y Chu, S. (2005). A parallel particle swarm optimization algorithm with communication strategies.
- Coker, M. O. (2006). *Aquitanian (Lower Miocene) Depositional Systems: Vinton Dome, Onshore, Gulf of Mexico, Southwest Louisiana*. Tesis doctoral, University of Houston.
- Dullemond, K. y Peeters, K. (1991). Introduction to tensor calculus. *Kees Dullemond and Kasper Peeters*.
- Eberhart, R. y Kennedy, J. (1995). A new optimizer using particle swarm theory. En *Micro Machine and Human Science, 1995. MHS'95., Proceedings of the Sixth International Symposium on*, pp. 39–43. IEEE.
- Eberhart, R. C. y Shi, Y. (2000). Comparing inertia weights and constriction factors in particle swarm optimization. En *Evolutionary Computation, 2000. Proceedings of the 2000 Congress on*, volumen 1, pp. 84–88. IEEE.
- Harris, G. D. (1910). *Oil and gas in Louisiana: with a brief summary of their occurrence in adjacent states*, volumen 429. Government Printing Office.
- Heppner, F. y Grenander, U. (1990). A stochastic nonlinear model for coordinated bird flocks. *The ubiquity of chaos*, pp. 233–238.
- Hudec, M. R. y Jackson, M. P. (2007). Terra infirma: Understanding salt tectonics. *Earth-Science Reviews*, 82(1-2):1–28.
- Lowrie, W. (2007). *Fundamentals of geophysics*. Cambridge university press.
- Menke, W. (2012). *Geophysical data analysis: discrete inverse theory: MATLAB edition*, volumen 45. Academic press.

- Murphy, C. A. y Brewster, J. (2007). Target delineation using full tensor gravity gradiometry data. *ASEG extended abstracts*, 2007(1):1–3.
- Nagy, D., Papp, G., y Benedek, J. (2000). The gravitational potential and its derivatives for the prism. *Journal of Geodesy*, 74(7-8):552–560.
- Nava Flores, M. (2018). *Aplicación del modelado gravimétrico 3D al estudio de plays subsalinos*. Tesis doctoral, Universidad Nacional Autónoma de México.
- Nelson, T. H. y Fairchild, L. (1989). Emplacement and evolution of salt sills in the northern gulf of Mexico.
- Newton, I. (1726). *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Apud. Guil. & Joh. Innys.
- of Encyclopaedia Britannica, T. E. (2018). Potential energy.
- Oruç, B. (2011). Edge detection and depth estimation using a tilt angle map from gravity gradient data of the Kozaklı-central Anatolia region, Turkey. *Pure and Applied Geophysics*, 168(10):1769–1780.
- Pallero, J., Fernández-Martínez, J. L., Bonvalot, S., y Fudym, O. (2015). Gravity inversion and uncertainty assessment of basement relief via particle swarm optimization. *Journal of Applied Geophysics*, 116:180–191.
- Pedersen, L. B. y Rasmussen, T. M. (1990). The gradient tensor of potential field anomalies: Some implications on data collection and data processing of maps. *Geophysics*, 55(12):1558–1566.
- Plouff, D. (1976). Gravity and magnetic fields of polygonal prisms and application to magnetic terrain corrections. *Geophysics*, 41(4):727–741.
- Qin, P., Huang, D., Yuan, Y., Geng, M., y Liu, J. (2016). Integrated gravity and gravity gradient 3d inversion using the non-linear conjugate gradient. *Journal of Applied Geophysics*, 126:52–73.
- Reid, A. (1995). Euler deconvolution: past, present and future. *A review. Abstract Society of Exploration Geophysicists*.
- Reynolds, C. W. (1987). Flocks, herds and schools: A distributed behavioral model. *ACM SIGGRAPH computer graphics*, 21(4):25–34.
- Santos, F. A. M. (2010). Inversion of self-potential of idealized bodies' anomalies using particle swarm optimization. *Computers & Geosciences*, 36(9):1185–1190.
- Selman, D. (2010). Processing and acquisition of air-ftg data. final report. Technical report, Bell Geospace Incorporated.
- Sen, M. K. y Stoffa, P. L. (2013). *Global optimization methods in geophysical inversion*. Cambridge University Press.
- Song, X., Tang, L., Lv, X., Fang, H., y Gu, H. (2012). Application of particle swarm optimization to interpret Rayleigh wave dispersion curves. *Journal of Applied Geophysics*, 84:1–13.

- Stavrev, P. y Reid, A. (2006). Degrees of homogeneity of potential fields and structural indices of euler deconvolution. *Geophysics*, 72(1):L1–L12.
- Talwani, M. y Ewing, M. (1960). Rapid computation of gravitational attraction of three-dimensional bodies of arbitrary shape. *Geophysics*, 25(1):203–225.
- Thompson, S. y Eichelberger, O. (1928). Vinton salt dome, calcasieu parish, louisiana. *AAPG Bulletin*, 12(4):385–394.
- Trelea, I. C. (2003a). The particle swarm optimization algorithm: convergence analysis and parameter selection. *Information processing letters*, 85(6):317–325.
- Trelea, I. C. (2003b). The particle swarm optimization algorithm: convergence analysis and parameter selection. *Information processing letters*, 85(6):317–325.
- Wang, T.-H., Huang, D.-N., Ma, G.-Q., Meng, Z.-H., y Li, Y. (2017). Improved preconditioned conjugate gradient algorithm and application in 3d inversion of gravity-gradiometry data. *Applied Geophysics*, 14(2):301–313.
- Yang, X.-S. (2014). *Nature-inspired optimization algorithms*. Elsevier.
- Yuan, S., Wang, S., y Tian, N. (2009). Swarm intelligence optimization and its application in geophysical data inversion. *Applied Geophysics*, 6(2):166–174.
- Zhang, C., Mushayandebvu, M. F., Reid, A. B., Fairhead, J. D., y Odegard, M. E. (2000). Euler deconvolution of gravity tensor gradient data. *Geophysics*, 65(2):512–520.
- Zhou, W., Du, X., y Li, J. (2013). The limitation of curvature gravity gradient tensor for edge detection and a method for overcoming it. *Journal of Applied Geophysics*, 98:237–242.