



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

2-reyes, 3-reyes y 4-reyes en torneos bipartitos

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

David Medina Sotelo

TUTORA

Dra. María del Rocío Sánchez López



Ciudad de México

2019



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

-
1. Datos del alumno
Medina
Sotelo
David
5513935951
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
408038087
 2. Datos de la tutora
Dra
María del Rocío
Sánchez
López
 3. Datos de la sinodal 1
Dra
Hortensia
Galeana
Sánchez
 4. Datos de la sinodal 2
Mat
Laura
Pastrana
Ramírez
 5. Datos de la sinodal 3
Dra
Íngrid Chantal
Torres
Ramos
 6. Datos del sinodal 4
Mat
Gerardo Miguel
Tecpa
Galván
 7. Datos del trabajo escrito
2-reyes, 3-reyes y 4-reyes en torneos bipartitos
95 p.
2019

“Se puede llamar “bizantinismo” o “escolástica” a la tendencia degenerativa de tratar los problemas denominados teóricos, como si fueran en sí mismos independientes de toda práctica empírica... La igualdad de las realidades fácticas determina la identidad de pensamiento, y no al revés. Además de ello, se deduce que toda verdad, incluso si es universal y si se puede expresar también con una fórmula abstracta de tipo matemático, para el grupo de los teóricos, debe su eficacia en la expresión de los lenguajes de las situaciones concretas particulares; si no es así, se trata de una expresión bizantina y escolástica, idónea para el solaz de los rumiadores de frases.”

Antonio Gramsci.

Para Noemí, compañera y amor de mi vida

Agradecimientos

Todo trabajo lleva en sí, y forma parte de, los frutos del conocimiento alcanzado por la humanidad en sus prácticas sociales a través de la historia -siendo éstas, prácticas económicas, científicas, culturales, entre otras- hasta el momento de su realización. En este sentido, la presente tesis es un resultado histórico de la colectividad humana y no solo de un individuo ni de un grupo reducido, puesto que el individuo y la sociedad no existen ni se desarrollan el uno sin la otra, y viceversa.

Agradezco en primer lugar a todas las mujeres y a todos los hombres que han trabajado -y a los que aún trabajan- por construir un mundo mejor. Gracias a todos los trabajadores; por la mesa, el papel, la tinta, la computadora, la ropa, el techo, los libros, etc.

Dicho lo anterior, se dice todo, pero queda expresado en una forma tan general que solo vemos la forma exterior del presente trabajo y se pierde su individualidad; así que, aún bajo la certeza de no mencionar a muchos, para contextualizar el presente trabajo, daré agradecimientos específicos, esperando que se entienda que, por diversos parámetros, entre los cuales se encuentran el espacio de escritura, el tiempo transcurrido en mi formación tanto personal como académica, la realidad cambiante y en gran parte mi memoria, no me es posible agradecer particularmente a cada persona que lo merece.

Agradezco a mi tutora de tesis: María del Rocío Sánchez López. Agradezco a mis sinodales: Dra. Hortensia Galeana Sánchez; Mat. Laura Pastrana Ramírez; Dra. Ingrid Chantal Torres Ramos; Mat. Gerardo Miguel Tecpa Galván. Gracias a todos por su tiempo, por las revisiones y las correcciones, por su apoyo y sus consejos, tanto en lo académico y lo administrativo, como en lo personal.

Doy un agradecimiento especial a mi tutora, Dra. María del Rocío Sánchez López. Gracias por su tiempo, el apoyo académico y personal, por darme la oportunidad de acercarme a la docencia en la Facultad de Ciencias (sobre todo con la materia del presente trabajo), por el esfuerzo y por la belleza del tema que desarrollamos. Agradezco su ejemplo, sus enseñanzas, su arduo y continuo trabajo, sus consejos y sobre todo, gracias por no rendirse en cuanto a la posibilidad de realizar este proyecto, que es mi titulación.

También agradezco especialmente a la Dra. Ingrid Chantal Torres Ramos, por el apoyo y las enseñanzas durante el período en que fui su ayudante en la Facultad de Ciencias. Gracias por la oportunidad que tuvimos de impartir el curso de *Matemáticas I* para la carrera de Biología en el año 2014 (única vez que impartimos el curso), donde pude desarrollar, en un mismo curso, distintos temas que me gustan tanto.

Gracias a la educación pública, laica y gratuita. Gracias a los maestros, por acercar el conocimiento a los hijos de los trabajadores, por asumir la responsabilidad de guiar a los forjadores del futuro. Agradezco a la Universidad Nacional Autónoma de México, a las personas que integran esta institución, por la posibilidad que brinda para el desarrollo de los jóvenes, por ser tierra fértil para las mentes-semillas que mañana germinarán con una visión más clara, con buenas herramientas, para hacer un mundo mejor.

A partir de aquí, los agradecimientos son casi exclusivamente en el aspecto personal. Debo aclarar que, en lo siguiente, *el orden de los factores no altera el producto*; es decir, el orden en que doy las gracias no significa un orden de importancia, puesto que la naturaleza del “estar agradecido” no tiene, para mí, un aspecto cuantitativo sino cualitativo.

Gracias a la familia que de alguna manera me enseñó -con acciones, ejemplos o contraejemplos- de la vida. En particular a mis padres, Reyna Sotelo Cruz y Sinai Medina Martínez, por su apoyo, su esfuerzo, su amor y por enseñarme, en la práctica, la dinámica de los procesos y sus consecuencias, la estabilidad dinámica, la emergencia y el cambio, las continuidades y las rupturas a través del tiempo. A mis hermanos, Selene e Isai, compañeros de vida, que tanto me han enseñado durante estos años; gracias por su amor, por las pláticas, por el café, por las risas y por el apoyo en todo momento. A mis primos, gracias a Carlos por la compañía y las charlas cuando tanto las necesité.

Gracias a todos los compas, por impedirme la fragmentación y la inconciencia, la cual siempre está al acecho.

Con cariño agradezco a Noemí, compañera, amiga y amor de mi vida. Gracias por el tiempo y el espacio comunes, por las reflexiones, el desarrollo y la vitalidad que siempre me contagias; por las espirales -helicoides, mejor dicho- que no serán ya discontinuas. Gracias por el nuevo atardecer en lo alto, por el verde y el morado, por el idioma original; por todo tu apoyo, tu cariño y tu amor consciente. También agradezco mucho a Wili, por todo lo que hace, por su apoyo y su cariño con todos.

Agradezco a los amigos que son o que fueron; por estar ahí en el momento exacto. Gracias Vane, Yei, Raque, Lidia, Soco, Paty, Doris, Odeth, Áurea, Marina, Dafne, María, Jaque, Luisa, Diana, Coral, Anallely, Karen, Herlinda, Yanet, Anhely, Martha, Ranita, Flor, Mildred, Ame, Analú, Sarita, Maribel, Verónica, Paco, Toño, Gonza, Gianni, Ahui, Martín, Fran, Ángel, Dirzo, Lalo, Emanuel, Oscar Brauer, Darío, Rulbert, Jona, Felipe, Ignacio Castrejón, I.S.C. Fernando Beltrán Catalán, Alain, Alan, Naim, Alex, Fernando, Ernersto, Diego. Seguramente me faltan por escribir varios nombres que por ahora no vienen a la memoria, muchos rostros y amistades que recuerdo sin concretar el nombre, y otros tantos que por el paso del tiempo he olvidado. Sin embargo, así es la dialéctica de la mente, de lo consciente y lo inconsciente, sin que exista una separación estricta entre ambos, forman una unidad indisoluble en la realidad, sin llegar a ser idénticos.

De nuevo, doy gracias a todos y cada uno. Este trabajo es un resultado colectivo, concreción histórica de nuestra unidad.

Índice

Agradecimientos	5
Introducción	9
1 Preliminares	11
1.1 Gráficas	12
1.1.1 Resultados básicos de la teoría de gráficas	15
1.2 Digráficas	16
1.2.1 Resultados básicos de la teoría de digráficas	18
2 Torneos bipartitos con 2-reyes y 3-reyes	21
2.1 Torneos bipartitos con 2-reyes	22
2.2 Torneos bipartitos con 3-reyes	24
3 Torneos bipartitos con 4-reyes	69
Conclusiones	93
Bibliografía	95

Introducción

Las matemáticas, al igual que todo el conocimiento, han surgido de la práctica social ante la necesidad de conocer la realidad y transformarla. A pesar de que esta ciencia formal adquiere un desarrollo relativamente independiente de otras actividades, no por eso se desvincula totalmente de ellas, sino que los problemas que la práctica plantea siguen motivando el desarrollo de las matemáticas, así como estas últimas, en su relación con las demás ciencias, se aplican cada vez más en las diversas prácticas sociales. La teoría de gráficas es uno de estos casos, que en la actualidad tiene aplicaciones en los más diversos campos; tanto aplicados como teóricos. El presente trabajo es de teoría de digráficas, en el que se desarrollan resultados acerca del tema de k -reyes, partiendo del trabajo del sociólogo y matemático H. G. Landau.

Landau, estudiando poblaciones de pollos en cautiverio, lo cual se puede ver en el artículo [3], hizo varias observaciones acerca de la relación de dominación (la cual no es simétrica), que entre los pollos se da cuando un pollo picotea la cresta del otro. Estas relaciones pueden estudiarse mediante un modelo formal. Landau estableció un grado de dominación. Así, llamó **emperador** a un pollo v cuando domina directamente a todos los demás pollos del gallinero, y **rey** cuando los domina directamente o a través de otro pollo. Las preguntas que se hizo acerca de las poblaciones de pollos fueron diversas en cuanto a la relación de dominación. Por ejemplo, considerando un gallinero en el cual entre cada par de pollos hay una relación de dominación ¿Siempre existe un pollo rey? O ¿Bajo qué condiciones existen pollos rey? ¿Puede haber exactamente dos pollos reyes? ¿Cuáles son las condiciones necesarias y suficientes para que todos los pollos del gallinero sean reyes?

El problema de los pollos se puede plantear mediante digráficas, donde por cada pollo hay un vértice, y una flecha vw cada vez que un pollo “ v ” domine a un pollo “ w ”. Con esto, un vértice v es un **rey** siempre que la distancia dirigida desde v a cualquier otro vértice sea a lo más dos. El caso del pollo emperador se corresponde de esta manera con un vértice transmisor. Cuando consideramos el gallinero en el cual entre cada par de pollos se establece una relación de dominación, la digráfica que consideramos es un torneo.

En su estudio, Landau obtuvo los siguientes resultados acerca de los reyes en torneos:

1. Todo torneo tiene un rey.
2. Todo vértice dominado es dominado por un rey.
3. En un torneo no puede haber exactamente dos reyes.

El concepto de rey se puede generalizar, diciendo que un vértice v es un k -rey si la distancia dirigida de v hacia cualquier otro vértice es a lo más k . De esta manera surgen nuevas preguntas

INTRODUCCIÓN

acerca de los k -reyes en torneos y en torneos n -partitos. ¿Cuáles son las condiciones necesarias y suficientes para que un vértice sea un k -rey? ¿Qué condiciones se deben satisfacer para que todo vértice sea un k -rey?

El presente trabajo está basado totalmente en un artículo de Vojislav Petrovic [4]. Desarrollaremos la parte del artículo referente a los temas de reyes, 3-reyes y 4-reyes en torneos bipartitos, en algunos casos daremos demostraciones propias. Analizaremos con detalle los resultados dados y en base a ello obtendremos resultados nuevos. Daremos una caracterización mediante ciclos de torneos bipartitos en los cuales todos los vértices son 3-reyes y veremos algunas condiciones bajo las cuales existen torneos bipartitos donde una parte tiene al menos dos 3-reyes y la otra parte tiene a lo más un 3-rey.

El trabajo está dividido en 3 capítulos: Preliminares, Torneos bipartitos con 2-reyes y 3-reyes, Torneos bipartitos con 4-reyes. El capítulo 1, los preliminares, está dividido en dos secciones, una de teoría de gráficas y la otra de teoría de digráficas. En ellas vemos algunas definiciones y resultados básicos de la teoría que son necesarios para los planteamientos y resultados del trabajo.

El capítulo 2 caracteriza a los 2-reyes y 3-reyes en torneos bipartitos. En el teorema 2.2.2 damos condiciones necesarias y suficientes para la existencia de torneos bipartitos del tipo $(m, m; n, n)_3$, nosotros demostraremos este resultado usando solamente teoría de gráficas y digráficas, haciendo uso de una construcción y del teorema de Hall. El resultado anterior aparece en un artículo de Soltes [6], donde la demostración es inmediata usando matrices booleanas. Petrovic [4] enuncia este teorema, dando solo la referencia al artículo de Soltes [6] para la demostración, y lo ocupa para demostrar otros resultados.

En este capítulo también damos algunos resultados sobre torneos bipartitos con 3-reyes, los cuales abarcan casos no contemplados en el artículo de Petrovic [4].

El capítulo 3 da algunos resultados sobre 4-reyes en torneos bipartitos. Se ven los casos cuando el torneo bipartito en cuestión tiene o no tiene transmisores. También se dan las condiciones bajo las cuales existen torneos bipartitos del tipo $(m, p; n, q)_4$.

El estudio de la problemática anterior nos lleva a resultados teóricos que pueden ser aplicados en otras áreas de la práctica social, como lo son la computación, modelos de biología, comunicaciones, entre otros.

CAPÍTULO

1

Preliminares

Este capítulo está dividido en dos secciones, en las que daremos las definiciones básicas de la teoría, de las cuales haremos uso en el trabajo, y veremos algunos ejemplos.

La primera sección aborda el tema de gráficas, las nociones de gráfica, caminos, trayectorias, ciclos, distancias, vértices adyacentes, entre otras. Aquí definimos gráfica bipartita y apareamiento, para poder enunciar el teorema de Hall. La demostración del teorema de Hall no forma parte del trabajo, se puede consultar en el libro de Bondy [2].

En la segunda sección estableceremos los conceptos de digráfica, dominación, camino dirigido, trayectoria dirigida, ciclo dirigido y distancia dirigida. Daremos los conceptos básicos del trabajo, como lo son torneo bipartito y k -rey.

1.1 Gráficas

Una **gráfica** G es un par (V, A) , con V un conjunto finito no vacío, llamado **conjunto de vértices de G** , y A un conjunto de parejas no ordenadas de distintos elementos de V , llamado **conjunto de aristas de G** . Denotamos por $V(G)$ a V y $A(G)$ a A para hacer énfasis en que se trata del conjunto de vértices y aristas, respectivamente, de G . Los elementos de V son llamados **vértices** y los elementos de A son llamados **aristas** de la gráfica G . Dada una arista a de G , si $a = \{u, v\}$, entonces denotamos a a sencillamente como uv , llamamos a u y v **extremos de la arista a** y decimos que u y v son **adyacentes**, también decimos que a **incide** en u y en v . Podemos representar una gráfica en el plano dibujando un punto por cada vértice y representando cada arista mediante un segmento de recta entre los puntos correspondientes.

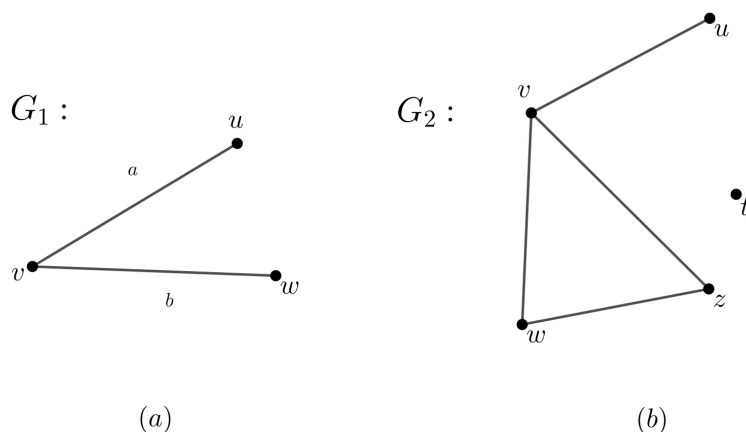


Figura 1.1: Representación de dos gráficas

En la figura 1.1 podemos ver la representación geométrica de las gráficas G_1 y G_2 , donde tenemos las igualdades $G_1 = (\{u, v, w\}, \{uv, vw\})$ y $G_2 = (\{t, u, v, w, z\}, \{uv, vw, vz, wz\})$. En la gráfica G_1 vemos que los vértices u y v son adyacentes, puesto que u y v son los extremos de la arista a , mientras que los vértices u y w no son adyacentes, puesto que no existe una arista que los tenga por extremos.

Consideremos una gráfica G . Dado S un subconjunto de $V(G)$, definimos el **conjunto de vecinos de S en G** (denotado por $N(S)$) como $\{x \in V(G) : xs \in A(G), \text{ para algún } s \in S\}$. Dado un vértice v , definimos el **conjunto de vecinos de v** como el conjunto de todos los vértices adyacentes a v , lo denotamos por $N(v)$. Llamamos **grado de v** a la cardinalidad de $N(v)$, denotado por $\delta(v)$. Para hacer énfasis en que estamos tomando los conceptos anteriores en la gráfica G usamos un subíndice; es decir, $N_G(S)$, $N_G(v)$ y $\delta_G(v)$, respectivamente.

En la gráfica G_2 de la figura 1.1 tenemos que $N(v) = \{u, w, z\}$ y $N(t) = \emptyset$; es decir, $\delta(v) = 3$ y $\delta(t) = 0$.

Dada una gráfica G y vértices u y v en $V(G)$, un **uv -camino** C en G es una sucesión finita de vértices (u_0, u_1, \dots, u_n) tales que $u_0 = u$, $u_n = v$ y $u_i u_{i+1} \in A(G)$ para todo entero i entre 0 y $n - 1$, llamamos a u y v **extremos** de C , denotamos por $A(C)$ al conjunto de las aristas $u_i u_{i+1}$. Definimos a la **longitud** del camino C como el número n . Si C no repite vértices, decimos que C

es una **uv -trayectoria**. Decimos que C es un **camino cerrado** si comienza y termina en el mismo vértice. Si C es un camino cerrado de longitud al menos 3 que no repite vértices, salvo el primero y el último, decimos que C es un **ciclo**. Si u_i y u_j son dos vértices de C con $i < j$, entonces el camino $(u_i, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, u_j)$ es llamado **subcamino de C** y es denotado por (u_i, C, u_j) . Decimos que la gráfica G es **conexa** si para cualesquiera vértices u y v en $V(G)$, existe una uv -trayectoria en G . De otra forma decimos que G es **inconexa**.

En la gráfica G_2 de la figura 1.1 podemos ver que (u, v, w) y (u, v, z, w) son dos uw -trayectorias distintas. Esta gráfica tiene un ciclo, a saber (v, w, z, v) . Vemos que la gráfica G_1 de la figura 1.1 es conexa, mientras que la gráfica G_2 de la figura 1.1 es inconexa, puesto que no existen trayectorias que contengan al vértice t .

Podemos definir varias gráficas relacionadas con una gráfica dada o definir ciertas operaciones entre gráficas que nos dan por resultado nuevas gráficas. A continuación damos las definiciones que necesitamos para nuestro trabajo.

Decimos que la gráfica H es una **subgráfica** de la gráfica G si $V(H) \subseteq V(G)$ y $A(H) \subseteq A(G)$. Dada una gráfica $G = (V, A)$ y un subconjunto de vértices W de $V(G)$, definimos la **subgráfica inducida (por vértices)** por W en G como la gráfica $\langle W \rangle_G$ cuyo conjunto de vértices es W y su conjunto de aristas es $\{xy \in A(G) : \{x, y\} \subseteq W\}$. Así mismo, dado $B \subseteq A(G)$, definimos la **subgráfica inducida (por aristas)** por B en G como la gráfica $\langle B \rangle_G$ cuyo conjunto de aristas es B y su conjunto de vértices es el conjunto de los extremos de las aristas en B .

Dada una gráfica $G = (V, A)$, un **conjunto independiente** B en G es un subconjunto de $V(G)$ tal que para cualesquiera dos vértices u y v en B , se tiene que $uv \notin A(G)$. Notemos que, por vacuidad, el conjunto vacío es independiente. Decimos que G es una **gráfica n -partita** si existe una partición de $V(G)$ en n conjuntos independientes; es decir, si $V(G)$ se puede escribir como la unión ajena de n conjuntos independientes. Cuando $n = 2$ decimos que G es **bipartita**.

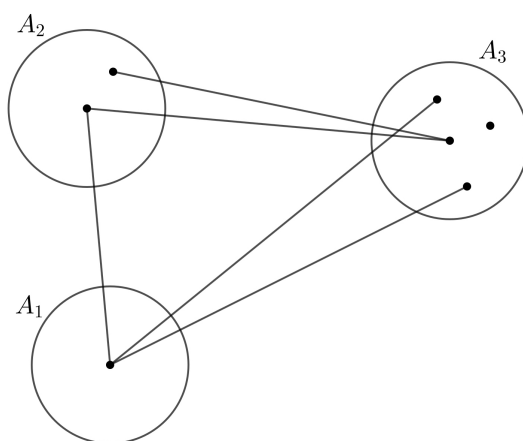


Figura 1.2: Ejemplo de una gráfica 3-partita

En la figura 1.2, vemos una gráfica 3-partita, ya que estamos mostrando una partición de los vértices en tres conjuntos independientes, esta partición es $\{A_1, A_2, A_3\}$. Mientras que en la figura 1.3, tenemos una gráfica bipartita, con partición $\{A, B\}$, ya que A y B son conjuntos independientes.

1. PRELIMINARES

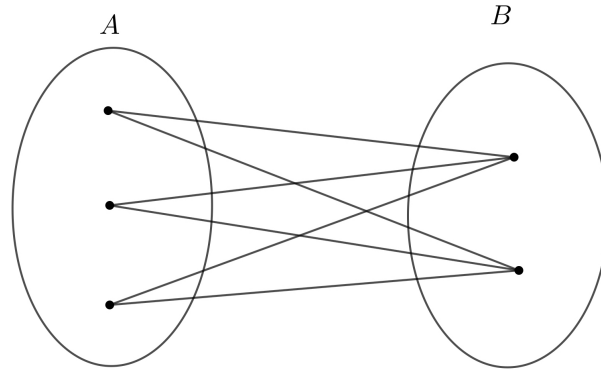


Figura 1.3: Ejemplo de una gráfica bipartita

Un **apareamiento** M de G es un conjunto de aristas tales que dos a dos no comparten vértices. Notemos que, por vacuidad, el conjunto vacío es un apareamiento. Decimos que M **satura** al vértice v , o que v es **M -saturado**, si alguna arista de M incide en v . Si M satura a cada vértice de G , M es un **apareamiento perfecto**. M es un **apareamiento máximo** si no existe otro apareamiento con más aristas que M . En la figura 1.4 vemos que $\{uz\}$ es un apareamiento de la gráfica G .

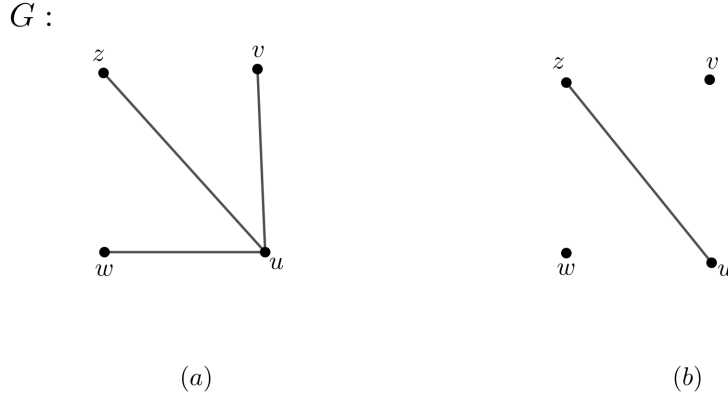
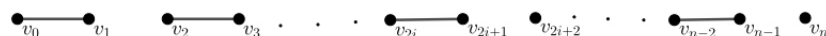


Figura 1.4: Ejemplo de un apareamiento: (b) representa un apareamiento de la gráfica G en (a)

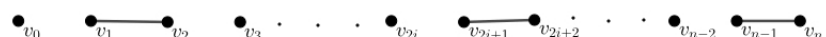
Si siguiendo con las definiciones anteriores, tenemos que una trayectoria $T = (v_0, \dots, v_n)$ en G es una **trayectoria M -alternante** si las aristas de T alternan aristas de M y del complemento de M ; es decir:

1. Si n es par:
 - $A(T) \cap M = \{v_{2i}v_{2i+1} : i \in \{0, 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\}\}$; o
 - $A(T) \cap M = \{v_{2i+1}v_{2i+2} : i \in \{0, 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2}; \rfloor - 1\}\}$
2. Si n es impar:
 - $A(T) \cap M = \{v_{2i}v_{2i+1} : i \in \{0, 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}\}$; o

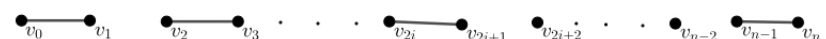
• $A(T) \cap M = \{v_{2i+1}v_{2i+2} : i \in \{0, 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\}\}$.



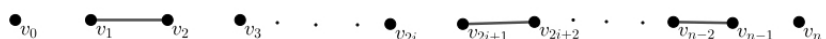
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 1.5: Representación de trayectorias M -alternantes. Longitud par: incisos (a) y (b); longitud impar: incisos (c) y (d)

En la figura 1.5 representamos los posibles casos para una trayectoria M -alternante, donde solo marcamos las aristas que pertenecen a M . Los incisos (a) y (b) corresponden al caso n par, mientras que los incisos (c) y (d) corresponden al caso n impar.

Decimos que la trayectoria $T = (v_0, \dots, v_n)$ es una **trayectoria M -aumentante** si T es una trayectoria M -alternante y los vértices extremos de T no son M -saturados. Observemos que si T es M -aumentante, entonces n es impar, puesto que la condición solo se cumple en el caso en que n es impar y $A(T) \cap M = \{v_{2i+1}v_{2i+2} : i \in \{0, 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\}\}$.

1.1.1 Resultados básicos de la teoría de gráficas

Teorema 1.1.1. *Sea G una gráfica. Si u y v son dos vértices distintos en $V(G)$, entonces todo uv -camino contiene al menos una uv -trayectoria.*

Demostración. Supongamos que existe al menos un uv -camino.

Sea $W = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ un uv -camino de longitud n ($v_0 = u$ y $v_n = v$). Veremos que W contiene una uv -trayectoria.

Procedamos por inducción sobre la longitud n del camino W .

1. PRELIMINARES

Base de inducción. Para $n = 1$ tenemos que $W = (u, v)$. Como $u \neq v$, por hipótesis, entonces W es una uv -trayectoria.

Hipótesis de inducción. Supongamos que para $n \leq k$, con $1 < k$, si W es un uv -camino de longitud n , entonces W contiene al menos una uv -trayectoria.

Paso inductivo. Sea $W = (v_0, v_1, \dots, v_{k+1})$ un uv -camino de longitud $k + 1$, con $1 < k$. Veamos que W contiene al menos una uv -trayectoria.

Caso 1. W no repite vértices.

Entonces W es una uv -trayectoria.

Caso 2. W repite vértices.

Sean $i_0 := \min \{i \in \{0, \dots, n\} : v_i = v_j, i \neq j\}$ y $i_1 := \max \{i \in \{0, \dots, n\} : v_i = v_{i_0}\}$. Observemos que en este caso i_0 y i_1 están bien definidos y $i_0 < i_1$.

Tenemos que el camino W_1 , con $W_1 = (v_0, W, v_{i_0}) \cup (v_{i_1}, W, v_{k+1})$, es un uv -camino de longitud $n_1 = k + 1 - (i_1 - i_0)$ tal que $W_1 \subseteq W$. Como $i_0 < i_1$, entonces $n_1 = k + 1 - (i_1 - i_0) < k + 1$; es decir, $n_1 \leq k$. Por hipótesis de inducción tenemos que W_1 contiene al menos una uv -trayectoria T . Como W_1 es un subcamino de W , entonces T es una uv -trayectoria contenida en W . Por lo que W contiene al menos una uv -trayectoria.

Por lo anterior concluimos que todo uv -camino contiene al menos una uv -trayectoria. ■

El siguiente teorema es un resultado sobre gráficas bipartitas que nos indica bajo qué condiciones existe un apareamiento que satura a alguna de las partes en la bipartición de los vértices de la gráfica. Este teorema será utilizado para la demostración del teorema 2.2.2.

Teorema 1.1.2. (Teorema de Hall [2]) Si G es una gráfica bipartita con partición (A, B) , entonces existe un apareamiento que satura todo vértice de A si y solo si para todo subconjunto de vértices S de A , se tiene que $|N(S)| \geq |S|$.

1.2 Digráficas

Una **digráfica** D es una pareja (V, F) , donde V es un conjunto finito y no vacío, llamado **conjunto de vértices de D** , y F es un conjunto de parejas ordenadas de elementos distintos de V , llamado **conjunto de flechas de D** . Denotamos por $V(D)$ a V y $F(D)$ a F para hacer énfasis en que se trata del conjunto de vértices y flechas, respectivamente, de D . Los elementos de V son llamados **vértices** y los elementos de F son llamados **flechas** de la digráfica D . Dada una flecha (u, v) en F , decimos que u **domina a** v , o que v es **dominado por** u , también usamos la notación $u \rightarrow v$, decimos que u y v son los **extremos de la flecha** (u, v) ; llamaremos **conjunto de vecinos exteriores** de u al conjunto de todos los vértices dominados por u y lo denotaremos por $O(u)$, siendo cada elemento de éste un **vecino exterior** de u ; así mismo, llamaremos **conjunto de vecinos interiores** de u al conjunto de todos los vértices que dominan a u y lo denotaremos por $I(u)$, cada elemento de $I(u)$ es un **vecino interior** de u . La cardinalidad de $O(u)$ es llamada **exgrado** de u , denotado por $\delta^+(u)$. Así mismo, la cardinalidad de $I(u)$ es llamada **ingrado** de u y lo denotamos por $\delta^-(u)$.

Si $I(u)$ es vacío, entonces decimos que u es un **transmisor**. Si $O(u) = \emptyset$, entonces decimos que u es un **receptor**. Podemos representar una digráfica D en el plano, dibujando un punto por cada vértice y una flecha que comienza en el punto u y termina en el punto v para representar la flecha (u, v) en $F(D)$. En la figura 1.6 (a) representamos la digráfica $D = (\{u, v, w\}, \{(u, v), (u, w), (v, w)\})$.

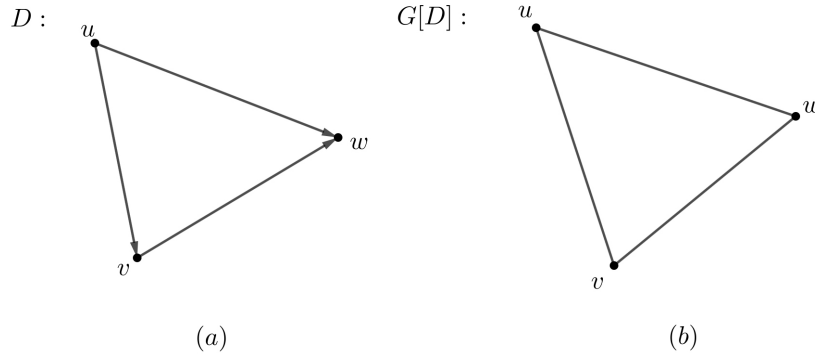


Figura 1.6: (a) Representación de una digráfica D ; (b) Gráfica subyacente de la digráfica D

Dados u y v vértices de una digráfica D , un **uv -camino dirigido** C en D es una sucesión finita de vértices (u_0, u_1, \dots, u_n) tales que $u_0 = u$, $u_n = v$ y $u_i u_{i+1} \in F$ para todo entero i entre 0 y $n - 1$. Definimos a la **longitud** del camino C como el número n , denotada por $l(C)$. Si C no repite vértices, decimos que C es una **uv -trayectoria dirigida**. C es un **camino dirigido cerrado** si comienza y termina en el mismo vértice. Si C es un camino dirigido cerrado de longitud mayor o igual que dos que no repite vértices, salvo el primero y el último, decimos que C es un **ciclo dirigido**. Si u_i y u_j son dos vértices de C , con $i < j$, el subcamino dirigido $(u_i, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, u_j)$ de C es denotado por (u_i, C, u_j) .

Dados dos vértices u y v , definimos la **distancia dirigida** de u a v en D , denotada por $d(u, v)$, como $\min \{l(C) : C \text{ es una } uv\text{-trayectoria dirigida en } D\}$. Si no existen uv -trayectorias dirigidas, decimos que la distancia dirigida de u a v es infinito; esto es, $d(u, v) = \infty$. También usamos la notación $d_D(u, v)$ cuando queremos hacer énfasis en que la distancia dirigida la estamos considerando en la digráfica D . Observemos de la definición anterior que la distancia dirigida no es simétrica.

Decimos que la digráfica E es una **subdigráfica** de la digráfica D si tenemos que $V(E) \subseteq V(D)$ y $F(E) \subseteq F(D)$. Dada una digráfica $D = (V, F)$ y un subconjunto de vértices W de $V(D)$, definimos la **subdigráfica inducida (por vértices)** por W en D como la digráfica $\langle W \rangle_G$ cuyo conjunto de vértices es W y su conjunto de flechas es $\{(x, y) \in F(D) : \{x, y\} \subseteq W\}$. Así mismo, dado $B \subseteq F(D)$, definimos la **subdigráfica inducida (por flechas)** por B en D como la gráfica $\langle B \rangle_G$ cuyo conjunto de flechas es B y su conjunto de vértices es el conjunto de los extremos de las flechas en B .

Dada una digráfica $D = (V(D), F(D))$, llamamos **gráfica subyacente** de D a la gráfica $G[D]$, cuyo conjunto de vértices es $V(G[D]) := V(D)$ y cuyo conjunto de aristas está definido como $A(G[D]) := \{\{u, v\} : (u, v) \in F(D)\}$. En la figura 1.6 tenemos las representaciones de la digráfica D y su gráfica subyacente $G[D]$.

Un **torneo** T es una digráfica tal que para cualesquiera dos vértices u y v , se tiene que (u, v) o (v, u) son flechas de T , pero no ambas simultáneamente. Dado un entero $n \geq 2$ y A_1, \dots, A_n

1. PRELIMINARES

conjuntos no vacíos ajenos dos a dos, un **torneo n -partito** $T(A_1, \dots, A_n)$ es una digráfica con conjunto de vértices $A_1 \cup \dots \cup A_n$, y tal que (u, v) es flecha de T si y solo si:

1. $u \in A_i$ y $v \in A_j$, con $i \neq j$;
2. (v, u) no es flecha.

Cuando $n = 2$, decimos que $T(A, B)$ es un **torneo bipartito**.

En particular, un torneo $T = (V(T), F(T))$ con n vértices se puede ver como un torneo n -partito, donde cada parte de la partición tiene un único elemento.

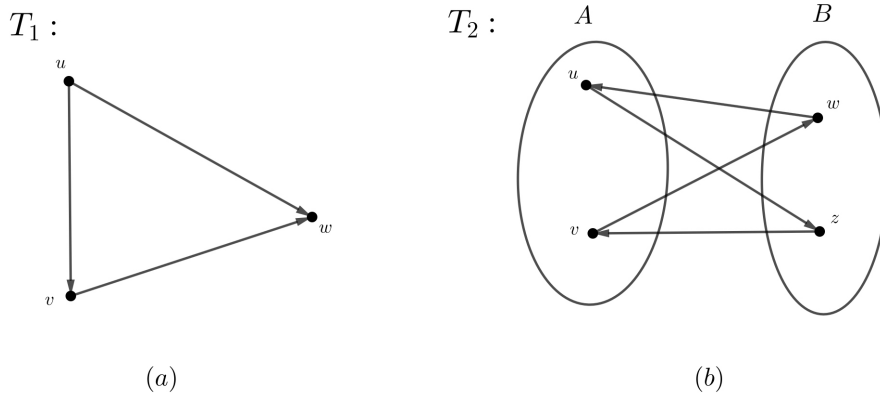


Figura 1.7: (a) Representación de un torneo T_1 ; (b) Representación de un torneo bipartito T_2 con partición (A, B)

En la figura 1.7 T_1 representa un torneo y T_2 representa un torneo bipartito, en la cual una partición es $\{\{u, v\}, \{w, z\}\}$.

Dada una digráfica $D = (V(D), F(D))$, decimos que un vértice v en $V(D)$ es un **k -rey** si y solo si $d(v, w) \leq k$ para todo vértice w de $V(D)$. Cuando $k = 2$, simplemente decimos que v es un **rey**. Observemos que todo k -rey es un r -rey para todo r mayor o igual a k .

Dados un torneo bipartito $T(A, B)$ y un entero k mayor o igual que 2, definimos $K_k(T(A, B))$ como el conjunto de k -reyes en $T(A, B)$. Así mismo, $K_k(A)$ y $K_k(B)$ son los conjuntos de k -reyes en A y en B , respectivamente; esto es, $K_k(A) := K_k(T(A, B)) \cap A$ y $K_k(B) := K_k(T(A, B)) \cap B$. Decimos que $T(A, B)$ es del **tipo $(m, p; n, q)_k$** si $|A| = m$, $|B| = n$, $|K_k(A)| = p$ y $|K_k(B)| = q$.

1.2.1 Resultados básicos de la teoría de digráficas

Teorema 1.2.1. *Sea D una digráfica. Si u y v son dos vértices distintos en $V(D)$, entonces todo uv -camino dirigido contiene al menos una uv -trayectoria dirigida.*

Demostración. Supongamos que existe al menos un uv -camino dirigido.

Sea $W = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ un uv -camino dirigido de longitud n ($v_0 = u$ y $v_n = v$). Veremos que W contiene una uv -trayectoria dirigida.

Procedamos por inducción sobre la longitud n del camino dirigido W .

Base de inducción. Para $n = 1$ tenemos que $W = (u, v)$. Como $u \neq v$ por hipótesis, entonces W es una uv -trayectoria dirigida.

Hipótesis de inducción. Supongamos que para $n \leq k$, con $1 < k$, si W es un uv -camino de longitud n , entonces W contiene al menos una uv -trayectoria dirigida.

Paso inductivo. Sea W un uv -camino dirigido de longitud $k + 1$, con $1 < k$. Veamos que W contiene al menos una uv -trayectoria dirigida.

Caso 1. W no repite vértices.

Entonces W es una uv -trayectoria dirigida.

Caso 2. W repite vértices.

Sean $i_0 := \min \{i \in \{0, \dots, n\} : v_i = v_j, i \neq j\}$ y $i_1 := \max \{i \in \{0, \dots, n\} : v_i = v_{i_0}\}$. Observemos que en este caso i_0 y i_1 están bien definidos y $i_0 < i_1$.

Tenemos que W_1 , con $W_1 = (v_0, W, v_{i_0}) \cup (v_{i_1}, W, v_{k+1})$, es un uv -camino dirigido de longitud $n_1 = k + 1 - (i_1 - i_0)$ tal que $W_1 \subseteq W$. Como $i_0 < i_1$, entonces $n_1 = k + 1 - (i_1 - i_0) < k + 1$; es decir, $n_1 \leq k$. Por hipótesis de inducción tenemos que W_1 contiene al menos una uv -trayectoria dirigida T . Dado que W_1 es un subcamino dirigido de W , entonces T es una uv -trayectoria dirigida contenida en W . Por lo que W contiene al menos una uv -trayectoria dirigida.

Por lo anterior concluimos que todo uv -camino dirigido contiene al menos una uv -trayectoria dirigida. ■

Lema 1.2.1. *Sea D una digráfica. Si E es una subdigráfica de D , entonces para cualesquiera vértices u y v de E se tiene que $d_D(u, v) \leq d_E(u, v)$ o $d_E(u, v) = \infty$.*

Demostración. Sean u y v dos vértices de E . Observemos que, por las definiciones de subdigráfica y de trayectoria dirigida, tenemos que toda uv -trayectoria dirigida en E es una uv -trayectoria dirigida en D . Tomaremos dos casos.

Caso 1. $d_E(u, v) = \infty$.

En este caso no hay nada que probar.

Caso 2. $d_E(u, v) = n$, para algún entero no negativo n .

En este caso existe una uv -trayectoria dirigida T de longitud n en E . Como toda uv -trayectoria dirigida en E es una uv -trayectoria dirigida en D , tenemos que T es una uv -trayectoria dirigida de longitud n en D . Así, $d_D(u, v) \leq n$, por la definición de distancia dirigida. Por lo tanto, tenemos que

1. PRELIMINARES

$$d_D(u, v) \leq d_E(u, v).$$

Por los casos (1) y (2), el lema 1.2.1 queda demostrado. ■

Torneos bipartitos con 2-reyes y 3-reyes

En este capítulo veremos algunos resultados sobre 2-reyes y 3-reyes en torneos bipartitos. La primera sección de este capítulo la dedicamos a explorar qué ocurre con un torneo bipartito $T(A, B)$, respecto a la cardinalidad de A y B y a su número de 2-reyes, de acuerdo al número de transmisores que tiene, agotando el caso en que tiene un único transmisor y también el tema de los 2-reyes. Damos algunos resultados que usaremos en demostraciones de la segunda sección.

En la segunda sección damos una caracterización de los 3-reyes en torneos bipartitos y vemos las condiciones de existencia para torneos del tipo $(m, m; n, n)_3$. Enunciamos el teorema 2.2.1, dando una demostración alternativa a la dada en el artículo de Petrovic. Este resultado será utilizado en la demostración del lema 3.0.4. Para el teorema 2.2.2 también escribimos una demostración diferente a la que se presenta en el artículo de Petrovic y Thomassen, elaborando una construcción y usando el teorema de Hall. Además, enunciamos una caracterización estructural de los torneos bipartitos del tipo $(m, m; n, n)_3$ usando ciclos dirigidos (teorema 2.2.4), caracterización que obtuvimos durante el desarrollo del presente trabajo, y establecemos condiciones bajo las cuales existen torneos bipartitos donde una parte tiene a lo más un 3-rey y la otra parte tiene al menos dos 3-reyes (teoremas 2.2.5 y 2.2.6).

2.1 Torneos bipartitos con 2-reyes

Antes de comenzar con los resultados de k -reyes, daremos unos lemas que, a pesar de ser sencillos, nos serán de utilidad para resultados posteriores.

Lema 2.1.1. *Sea $T(A, B)$ un torneo bipartito. Si $T(A, B)$ no tiene transmisores, entonces $|A| \geq 2$ y $|B| \geq 2$.*

Demostración. Procediendo por contradicción. Supongamos que $|A| = 1$ o $|B| = 1$. Si tenemos que $|A| = 1$ entonces $A = \{u\}$, por lo que u domina a cada vértice de B o existe un vértice w en B tal que w domina a u ; es decir, $(u, y) \in F(T(A, B))$ para todo y en B o $(w, u) \in F(T(A, B))$ para algún w en B , esto es, u es un transmisor o existe un transmisor w en B , lo cual es una contradicción, pues $T(A, B)$ no tiene transmisores (ver la figura 2.1). Análogamente, si $|B| = 1$, entonces $T(A, B)$ tendría transmisores. ■

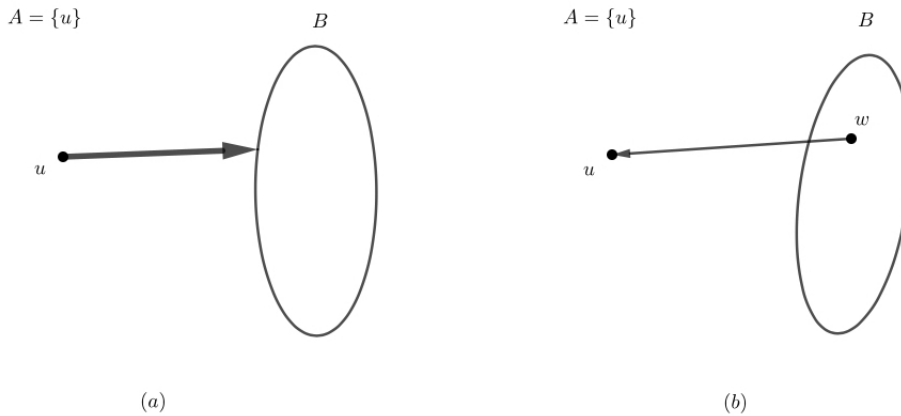


Figura 2.1: Representación del lema 2.1.1 en el caso $|A| = 1$. En este caso $T(A, B)$ tiene transmisores, ya que: (a) u domina a cada vértice de B o; (b) existe un vértice w en B tal que w domina a u

Lema 2.1.2. *Sea $T(A, B)$ un torneo bipartito. Si $T(A, B)$ tiene al menos dos transmisores, entonces $\max\{|A|, |B|\} \geq 2$.*

Demostración. Sean u y v dos vértices distintos en $V(T(A, B))$, tales que son transmisores en $T(A, B)$. Por definición de transmisor, tenemos que $I(u)$ y $I(v)$ son conjuntos vacíos, de lo cual se sigue que $(u, v) \notin F(T(A, B))$ y $(v, u) \notin F(T(A, B))$. De acuerdo a la definición de torneo bipartito, esto solo ocurre cuando u y v están en la misma parte en la partición. Sin perder generalidad, supongamos que u y v están en A . Entonces $2 \leq |A| \leq \max\{|A|, |B|\}$, con lo cual queda demostrado el lema. ■

Observemos que, por la demostración anterior, todos los transmisores de $T(A, B)$ están en la misma parte en la partición. Esto es, todos los transmisores están en A o todos los transmisores están en B . En caso de que no haya transmisores, la afirmación se cumple por vacuidad.

Teorema 2.1.1. *Todo torneo bipartito con al menos dos transmisores no tiene k -reyes.*

Demostración. Sea $T(A, B)$ un torneo bipartito con al menos dos transmisores. Sean u y v dos vértices distintos en $V(T(A, B))$, tales que son transmisores en $T(A, B)$.

Supongamos que existe un vértice w en $V(T(A, B))$ tal que w es un k_0 -rey en $T(A, B)$, para algún entero k_0 con $k_0 \geq 2$. Sabemos que u y v son vértices distintos, entonces w es distinto al menos a alguno de ellos, sin perder generalidad suponemos que w es distinto a v . Como v es transmisor, por definición $I(v) = \emptyset$. En particular no hay wv -caminos dirigidos; es decir, $d(w, v) = \infty$. Por otro lado, al ser w un k_0 -rey, tenemos $d(w, v) \leq k_0$, lo cual no es posible puesto que no hay wv -caminos dirigidos. Por lo tanto, no hay k -reyes en $T(A, B)$. ■

Lema 2.1.3. [4] *Sea $T(A, B)$ un torneo bipartito. Si v es un vértice de $T(A, B)$, entonces v es un 2-rey si y solo si v es el único transmisor en $T(A, B)$.*

Demostración. Sea v un 2-rey. Demostraremos que $O(v) = B$ y que para cada vértice x en $V(T(A, B)) \setminus \{v\}$ se tiene $I(x) \neq \emptyset$.

Sin perder generalidad podemos suponer que v está en A . Como v es un 2-rey entonces para todo vértice b en B se tiene $d(v, b) = 1$; esto es $O(v) = B$ y $I(b) \neq \emptyset$. Por otro lado, para todo vértice a en $A \setminus \{v\}$ se tiene $d(v, a) = 2$; esto es, existe un vértice b_a en B tal que (v, b_a, a) es una trayectoria dirigida de longitud dos, lo que implica que $I(a) \neq \emptyset$ (ver la figura 2.2). Así, $O(v) = B$ y para cada vértice x en $V(T(A, B)) \setminus \{v\}$ se tiene $I(x) \neq \emptyset$. Por lo tanto v es el único transmisor en $T(A, B)$.

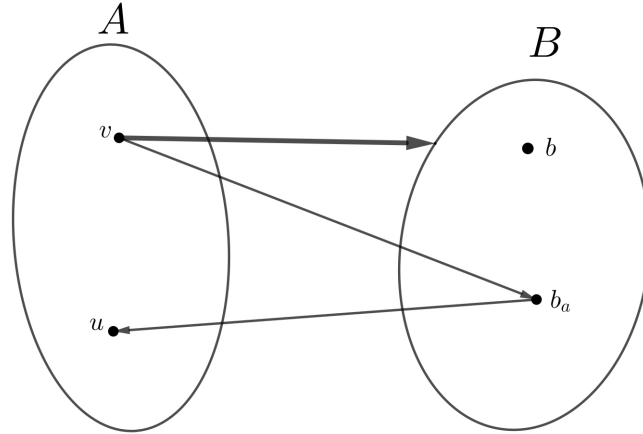


Figura 2.2: Representación de la necesidad del lema 2.1.3. El vértice v es un 2-rey, por lo que v domina a cada vértice de la parte B , lo que se representa en la figura mediante una flecha gruesa

Ahora supongamos que v es el único transmisor en $T(A, B)$ y sin perder generalidad supongamos que v está en A . Demostraremos que $d(v, x) \leq 2$ para todo vértice x en $V(T(A, B)) \setminus \{v\}$.

Como v es transmisor, $v \in A$ y $T(A, B)$ es bipartito, entonces $O(v) = B$; es decir, que para todo vértice u en B se tiene que $d(v, u) = 1$.

2. TORNEOS BIPARTITOS CON 2-REYES Y 3-REYES

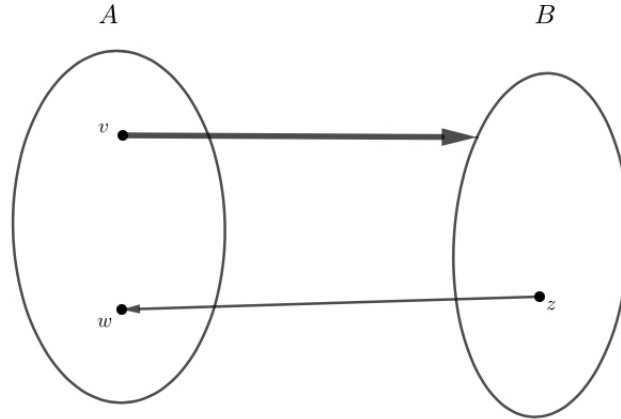


Figura 2.3: Representación de la suficiencia del lema 2.1.3. El vértice v es el único transmisor en $T(A, B)$ y está en A , por lo que v domina a cada vértice de la parte B , lo cual representamos en la figura mediante una flecha gruesa

Sea w un vértice en $A \setminus \{v\}$. Como v es el único transmisor, sabemos que $I(w) \neq \emptyset$, por lo que existe un vértice z en B tal que $(z, w) \in F(T(A, B))$; además v domina a cada vértice en B , en particular $(v, z) \in F(T(A, B))$. Con lo anterior tenemos que (v, z, w) es una trayectoria dirigida de longitud dos, entonces $d(v, w) = 2$ (ver la figura 2.3). Por lo tanto $v \in K_2(T(A, B))$. ■

Corolario 2.1.1. [4] *Un torneo bipartito contiene a lo más un 2-rey.*

Demostración. La demostración es inmediata del lema 2.1.3, ya que un vértice es un 2-rey si es el único transmisor.

Corolario 2.1.2. *Sea $T(A, B)$ un torneo bipartito con $|A| = m$ y $|B| = n$. Si $T(A, B)$ tiene un único transmisor en A , entonces $T(A, B)$ es del tipo $(m, 1; n, 0)_k$, para todo entero k con $k \geq 2$.*

Demostración. Sea $T(A, B)$ un torneo bipartito con exactamente un transmisor v , con v en A . Por el lema 2.1.3 sabemos que v es un 2-rey. Entonces v es un k -rey para todo entero k , con $k \geq 2$. Dado un vértice w en $V(T(A, B)) \setminus \{v\}$, tenemos $d(w, v) = \infty$, ya que v es transmisor (por definición, esto es: $I(v) = \emptyset$), por lo que w no puede ser r -rey para ningún entero r con $r \geq 2$. Así, $T(A, B)$ es un torneo bipartito del tipo $(m, 1; n, 0)_k$, para todo entero k con $k \geq 2$. ■

2.2 Torneos bipartitos con 3-reyes

Consideremos una digráfica D , S y T subconjuntos de vértices de D , u y v vértices de D . En adelante usaremos la siguiente notación:

1. Si u domina a v , lo escribiremos $u \rightarrow v$;
2. Si u domina a cada vértice de T , escribiremos $u \rightarrow T$;
3. Si cada vértice de S domina a v , escribiremos $S \rightarrow v$;

4. Si cada vértice de S domina a cada vértice de T , escribiremos $S \rightarrow T$.

Lema 2.2.1. [4] Sean $T(A, B)$ un torneo bipartito y v un vértice en A . El vértice v es un 3-rey si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $O(v) \not\subseteq O(x)$ para todo vértice x en $A \setminus \{v\}$;
2. B no contiene transmisores.

Demostración. Supongamos que v es un vértice en A tal que v es un 3-rey de T . Demostraremos que:

1. $O(v) \not\subseteq O(x)$ para todo vértice x en $A \setminus \{v\}$;
2. B no contiene transmisores.

Primero demostraremos que se cumple 1. Sea x un vértice en $A \setminus \{v\}$. Entonces $d(v, x) = 2$, por lo que existe una trayectoria dirigida de longitud dos de v hacia x , esto significa que existe un vértice t en B tal que $v \rightarrow t \rightarrow x$; es decir, $t \in O(v)$ y $t \in I(x)$ (ver la figura 2.4). Lo anterior nos dice que $O(v) \not\subseteq O(x)$, ya que $I(x) \cap O(v) = \emptyset$.

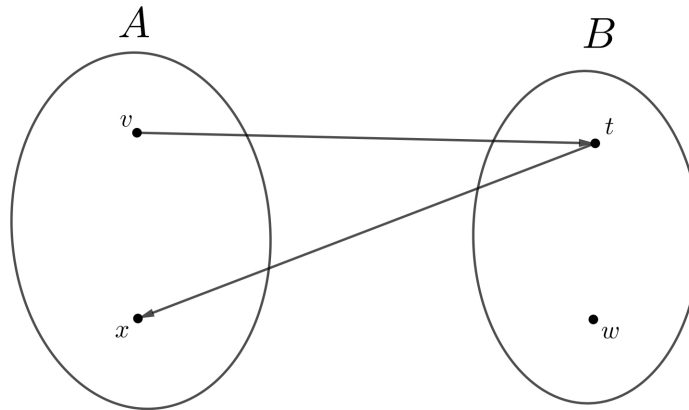


Figura 2.4: Representación de la necesidad del lema 2.2.1, en el caso $x \in A \setminus \{v\}$. Donde tenemos el vértice t , tal que $t \in O(v)$ y $t \notin O(x)$

Ahora demostraremos 2. Para todo vértice w de B , tenemos que $d(v, w) \leq 3$, por lo que se cumple que $I(w) \neq \emptyset$, puesto que hay una trayectoria dirigida de v hacia w de longitud a lo más tres (ver la figura 2.5), lo que implica que w no puede ser transmisor. Entonces B no contiene transmisores.

2. TORNEOS BIPARTITOS CON 2-REYES Y 3-REYES

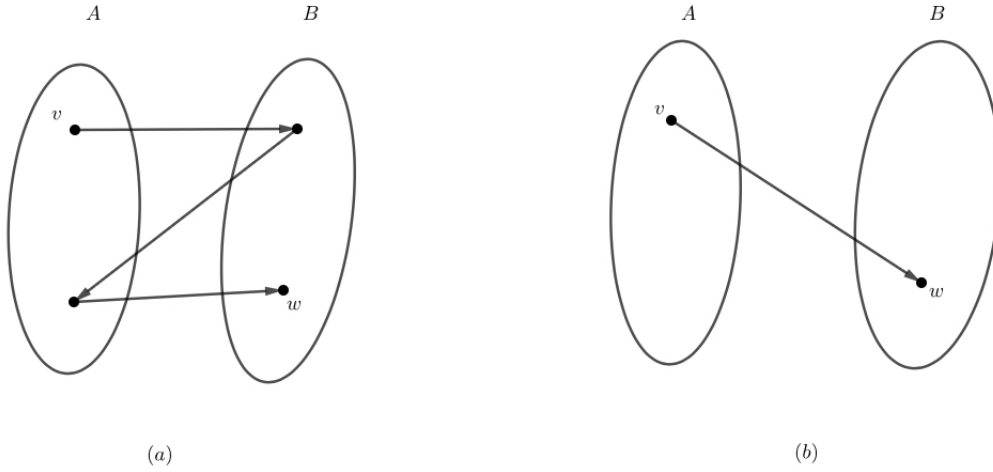


Figura 2.5: Si $d(v, w) \leq 3$, entonces (a) $d(v, w) = 3$ o; (b) $d(v, w) = 1$

Recíprocamente, supongamos que v es un vértice en A y cumple las condiciones (1) y (2) del lema 2.2.1. Veremos que v es un 3-rey; es decir, $d(v, x) \leq 3$ para cada vértice x en $V(T(A, B)) \setminus \{v\}$.

Dado un vértice u en $A \setminus \{v\}$, la condición $O(v) \not\subseteq O(u)$ significa que existe un vértice x en B tal que $x \in O(v)$ y $x \notin O(u)$; es decir, $v \rightarrow x$ y como $T(A, B)$ es un torneo bipartito, entonces $x \rightarrow u$; esto es $v \rightarrow x \rightarrow u$, lo que significa que $d(v, u) = 2$ (ver la figura 2.6).

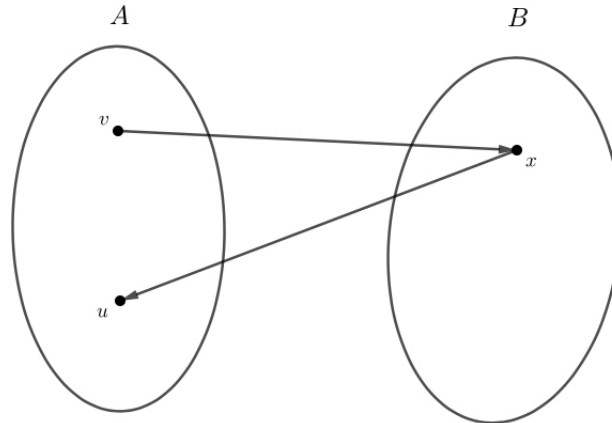


Figura 2.6: Representación de una parte de la suficiencia del lema 2.2.1: si v es un vértice en A que cumple las condiciones (1) y (2) del lema 2.2.1, y u es un vértice en $A \setminus \{v\}$. Observamos que $x \in O(v)$ y $x \notin O(u)$

Si w es un vértice de B , como B no tiene transmisores, en particular w no es un transmisor; es decir, existe un vértice t en A tal que $(t, w) \in F(T(A, B))$. Consideramos dos casos sobre v y w .

Caso 1. v domina a w .

En este caso tenemos que $d(v, w) = 1$ (ver la figura 2.7).

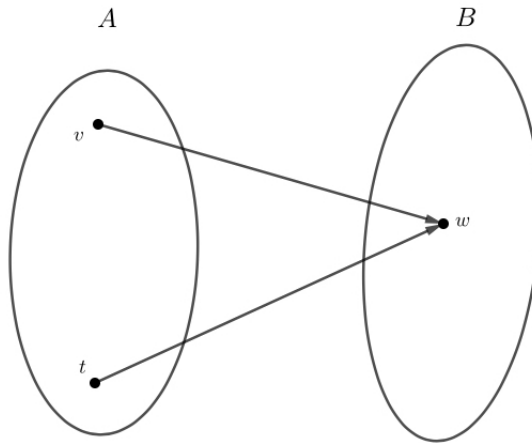


Figura 2.7: Representación de una parte de la suficiencia del lema 2.2.1: si v es un vértice en A que cumple las condiciones (1) y (2) del lema 2.2.1, y w es un vértice en B . Caso (1): v domina a w

Caso 2. v no domina a w .

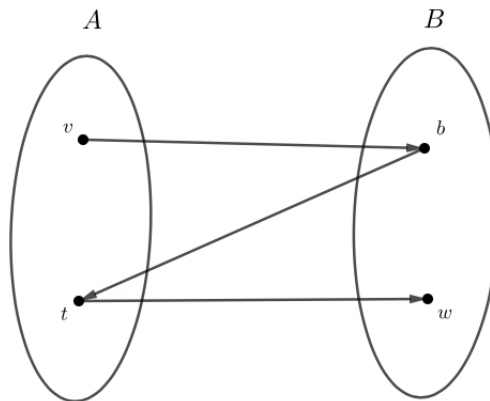


Figura 2.8: Representación de una parte de la suficiencia del lema 2.2.1: si v es un vértice en A que cumple las condiciones (1) y (2) del lema 2.2.1, y w es un vértice en B . Caso (2): v no domina a w

Tenemos que v no domina a w , entonces $t \neq v$, porque t domina a w . Como $t \in A \setminus \{v\}$, entonces $d(v, t) = 2$; es decir, existe un vértice b en B tal que (v, b, t) es una trayectoria dirigida de longitud dos. Así (v, b, t, w) es una vw -trayectoria dirigida de longitud tres, esto significa que $d(v, w) = 3$ (ver la figura 2.8). Por lo tanto v es un 3-rey. ■

2. TORNEOS BIPARTITOS CON 2-REYES Y 3-REYES

Teorema 2.2.1. Sea $T(A, B)$ un torneo bipartito sin transmisores. Si v es un vértice en A tal que $d(v, u) = 2$ para todo vértice u en $A \setminus \{v\}$, entonces v es un 3-rey.

Demostración. Observemos que $|A| \geq 2$ y $|B| \geq 2$, ya que $T(A, B)$ no tiene transmisores (lema 2.1.1).

Veamos que v es un 3-rey; es decir, que para todo vértice w en $V(T(A, B)) \setminus \{v\}$ tenemos que se cumple que $d(v, w) \leq 3$.

Sea w un vértice en $V(T(A, B)) \setminus \{v\}$. Si $w \in A \setminus \{v\}$, por hipótesis se tiene que $d(v, w) = 2 < 3$.

Ahora supongamos que $w \in B$.

Primero observemos que $O(v) \neq \emptyset$. Como $|A| \geq 2$, entonces $A \setminus \{v\} \neq \emptyset$, por lo que existe un vértice u en $A \setminus \{v\}$. Por hipótesis se tiene que $d(v, u) = 2$; es decir, existe (v, b, u) una vu -trayectoria dirigida de longitud dos, donde $b \in B$, por lo que $b \in O(v)$ (esto es, $O(v) \neq \emptyset$). Además, sabemos que $T(A, B)$ no tiene transmisores, en particular v no es un transmisor; es decir, $I(v) \neq \emptyset$. Por lo anterior, tenemos $B = O(v) \cup I(v)$, donde $O(v)$ y $I(v)$ son ajenos y no vacíos.

Si $w \in O(v)$ se tiene que $d(v, w) = 1$. Supongamos $w \in I(v)$. Como w no es transmisor y $w \rightarrow v$, entonces existe un vértice z en $A \setminus \{v\}$ tal que $z \rightarrow w$. Luego $z \in A \setminus \{v\}$, implica (por hipótesis) que existe (v, b', z) una z -trayectoria dirigida de longitud dos, donde $b' \in O(v)$ (esto es, $b' \neq w$). Por lo anterior, tenemos que (v, b', z, w) es un vw -camino dirigido de longitud 3; es decir, $d(v, w) \leq 3$ (ver la figura 2.9).

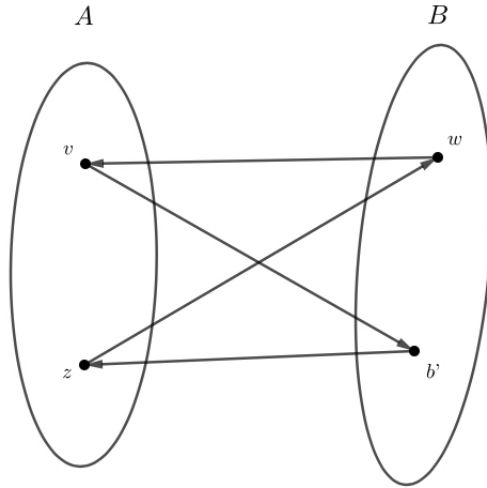


Figura 2.9: Si $w \in I(v)$, entonces $d(v, w) = 3$

Por lo tanto, $d(v, w) \leq 3$ para todo vértice w en $V(T(A, B)) \setminus \{v\}$; es decir, v es un 3-rey. ■

Teorema 2.2.2. [4] Sean n y m números enteros tales que $2 \leq n \leq m$. Entonces existe un torneo bipartito $T(A, B)$ con $|A| = m$, $|B| = n$ del tipo $(m, m; n, n)_3$ si y solo si $m \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

A continuación veremos un resultado que nos será de utilidad para la demostración del teorema 2.2.2.

Lema 2.2.2. Sea $T(A, B)$ un torneo bipartito. Si todos los vértices de A son 3-reyes, entonces tenemos que $|A| = |\{O(a) : a \in A\}|$.

Demostración. Sea $f : A \rightarrow \{O(a_i) \subseteq B : i \in \{0, \dots, m-1\}\}$, tal que $f(a_i) = O(a_i)$.

Veremos que f es biyectiva.

La suprayectividad de f se da inmediatamente por la definición de su contradominio.

Ahora veremos que f es inyectiva. Supongamos que $f(a_i) = f(a_j)$ para algunos enteros i y j entre 0 y $m-1$; esto es, $O(a_i) = O(a_j)$. Al ser a_i y a_j 3-reyes, el lema 2.2.1 nos dice que si $a_i \neq a_j$, entonces $O(a_i) \not\subseteq O(a_j)$ y $O(a_j) \not\subseteq O(a_i)$. De esta manera, $O(a_i) = O(a_j)$ nos da $a_i = a_j$ (pues a_i y a_j son 3-reyes); es decir, f es inyectiva.

Por lo tanto, hay tantos conjuntos de vecinos exteriores de vértices de A como la cardinalidad misma de A . Con lo que queda demostrado el lema 2.2.2. ■

Demostración del teorema 2.2.2. Para la necesidad del teorema, dados dos números enteros m y n con $2 \leq n \leq m \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ construiremos un torneo bipartito $T(A, B)$ con las características dadas; es decir, de la forma $(m, m; n, n)_3$.

Sean n y m números enteros tales que $2 \leq n \leq m \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

Tomemos dos conjuntos A y B con $A \cap B = \emptyset$, $A = \{a_0, \dots, a_{m-1}\}$ y $B = \{b_0, \dots, b_{n-1}\}$.

En la construcción que sigue tendremos que $A \cup B$ será el conjunto de vértices y para cada i entre 0 y $m-1$ daremos un conjunto $O(a_i)$ con $O(a_i) \subseteq B$, el cual será el conjunto de vecinos exteriores del respectivo a_i . Por el lema 2.2.2 se debe tener que $O(a_j) \neq O(a_k)$ si $j \neq k$.

Comenzaremos la construcción de los conjuntos de vecinos exteriores. Dado un entero i tal que $i \in \{0, \dots, m-1\}$, sean:

$$C_i := \{b_{(i+k) \bmod n} : k \in \{0, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\}\};$$

$$D_i := B \setminus C_i;$$

$$O_i := D_{(i+1) \bmod m}.$$

De la definición anterior observamos que para todo entero i entre 0 y $m-1$ tenemos $|C_i| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $|D_i| = n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ y $|O_i| = n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Como $2 \leq n$, se sigue inmediatamente que $1 \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, además sabemos que $n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, por lo que también se tiene $1 \leq n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; es decir, los C_i , D_i y O_i son no vacíos. Por construcción sabemos $C_i \neq C_j$ si $i \neq j$, entonces $D_i \neq D_j$ y $O_i \neq O_j$ cuando $i \neq j$. Por otro lado, los conjuntos $\{C_i\}_{i=0}^{n-1}$, $\{D_i\}_{i=0}^{n-1}$ y $\{O_i\}_{i=0}^{n-1}$ tienen la misma cantidad de elementos,

2. TORNEOS BIPARTITOS CON 2-REYES Y 3-REYES

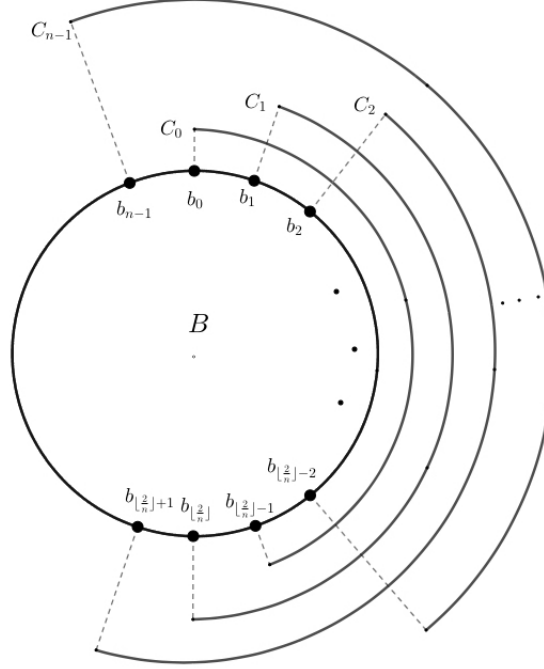


Figura 2.10: Representación de los conjuntos C_i

a saber n elementos con $n \geq 2$. De lo dicho hasta aquí se concluye que los conjuntos C_i , D_i y O_i existen y son no vacíos (ver la figura 2.10).

Sea \mathcal{O} un subconjunto de $\mathcal{P}(B)$ con $\mathcal{O} \subseteq \{X \subseteq B : |X| = n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ y tal que:

1. $\{O_i : i \in \{0, \dots, n-1\}\} \subseteq \mathcal{O}$ y;
2. $|\mathcal{O}| = m$

Observemos que una elección de \mathcal{O} como la anterior es posible, ya que respecto a las cardinalidades de los conjuntos referidos tenemos que:

$$|\{O_i : i \in \{0, \dots, n-1\}\}| = n, |\{X \subseteq B : |X| = n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}| = \binom{n}{n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \text{ y } n \leq m \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

Puesto que $|A| = |\mathcal{O}| = m$, consideremos una función biyectiva $\phi : A \rightarrow \mathcal{O}$ tal que para todo subíndice i entre 0 y $n-1$ se cumple que $\phi(a_i) = O_i$.

Para cada elemento v de $A \cup B$, definimos los siguientes conjuntos:

1. Si v está en A , entonces $O(v) := \phi(v)$ y $I(v) := B \setminus O(v)$;
2. Si v está en B , entonces $I(v) := \{a \in A : v \in \phi(a)\}$, $O(v) := A \setminus I(v)$.

En particular, para un entero i entre 0 y $n - 1$ tenemos:

$$O(a_0) = \{b_0, b_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}, b_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2}, \dots, b_{n-1}\};$$

$$O(a_1) = \{b_0, b_1, b_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2}, b_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 3}, \dots, b_{n-1}\};$$

$$O(a_2) = \{b_0, b_1, b_2, b_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 3}, b_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 4}, \dots, b_{n-1}\};$$

\vdots

$$O(a_{n-1}) = \{b_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, b_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2}, \dots, b_{n-1}\};$$

$$I(a_0) = \{b_1, b_2, \dots, b_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\};$$

$$I(a_1) = \{b_2, b_3, \dots, b_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}\};$$

$$I(a_2) = \{b_3, b_4, \dots, b_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2}\};$$

\vdots

$$I(a_{n-1}) = \{b_0, b_1, \dots, b_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}\}.$$

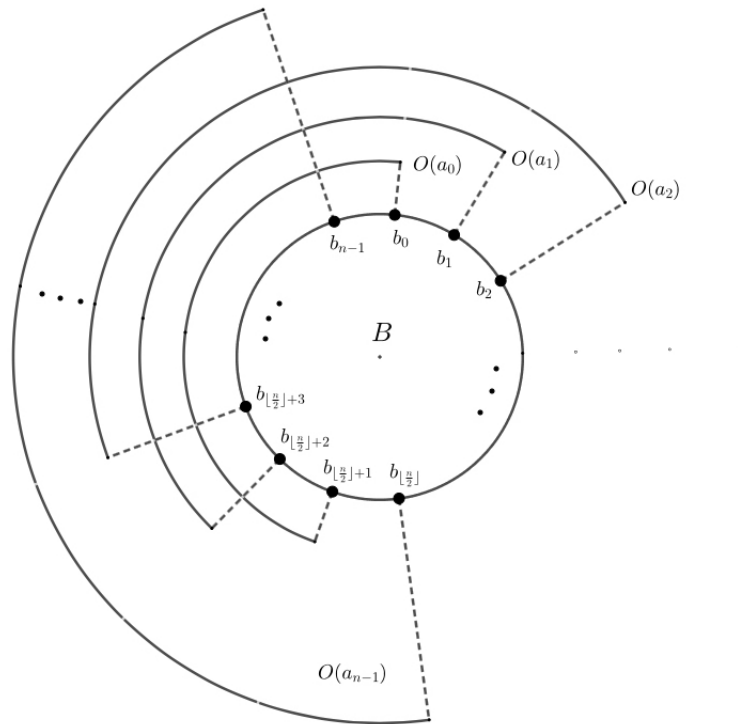


Figura 2.11: Representación de los conjuntos $O(a_i)$ para i entre 0 y $n - 1$

2. TORNEOS BIPARTITOS CON 2-REYES Y 3-REYES

Lo anterior lo podemos ver en la figura 2.11.

Observemos que, con esta definición, se cumple que $O(v) \cap I(v) = \emptyset$ y también se cumple que $O(v) \cup I(v) = B$ o $O(v) \cup I(v) = A$, si $v \in A$ o $v \in B$, respectivamente.

Afirmamos que, con lo anterior, el torneo bipartito $T_\phi(A, B)$ inducido por ϕ (por definición, $V(T_\phi(A, B)) := A \cup B$ y $F(T_\phi(A, B)) := \{(a, b) : b \in O(a)\} \cup \{(b, a) : b \in I(a)\}$) es un torneo bipartito del tipo $(m, m; n, n)_3$. Para demostrar esta afirmación usaremos el lema 2.2.1, esto es, demostraremos que ni A ni B tienen transmisores y que para cualesquiera u y v vértices distintos de $T_\phi(A, B)$ se tiene que:

1. $O(u) \not\subseteq O(v)$, si $\{u, v\} \subseteq A$;
2. $O(u) \not\subseteq O(v)$, si $\{u, v\} \subseteq B$.

Primero veamos que $T_\phi(A, B)$ es, en efecto, un torneo bipartito:

Sean v y w dos elementos distintos de A . Como $A \cap B = \emptyset$, $O(v) \subseteq B$ y $O(w) \subseteq B$, entonces tenemos que $v \notin O(w)$ y $w \notin O(v)$. Análogamente se tiene que $I(v) \subseteq B$ y $I(w) \subseteq B$, lo que implica que $v \notin I(w)$ y $w \notin I(v)$. Es decir, no hay flechas entre los elementos de A .

Sean v y w dos elementos distintos de B . Sabemos que $A \cap B = \emptyset$, $O(v) \subseteq A$ y $O(w) \subseteq A$, entonces $v \notin O(w)$ y $w \notin O(v)$. Análogamente $I(v) \subseteq A$ y $I(w) \subseteq A$, por lo que $v \notin I(w)$ y $w \notin I(v)$. Esto es, no hay flechas entre los elementos de B .

Sean a y b dos elementos de $V(T_\phi(A, B))$ tales que $a \in A$ y $b \in B$. Sabemos que se cumple que $B = O(a) \cup I(a)$ y que $O(a) \cap I(a) = \emptyset$, entonces se da alguno de los siguientes casos que no pueden ocurrir de forma simultánea:

Caso 1. $b \in O(a)$.

En este caso $a \in I(b)$, $a \notin O(b)$ por las definiciones de estos conjuntos. Así, $b \in O(a)$ implica que $(a, b) \in F(T_\phi(A, B))$, por definición de $F(T_\phi(A, B))$.

Caso 2. $b \notin O(a)$.

En este caso $b \in I(a)$, lo que implica que $a \in O(b)$, así que $a \notin I(b)$ por las definiciones de estos conjuntos. Entonces $(b, a) \in F(T_\phi(A, B))$, por definición de $F(T_\phi(A, B))$.

Por los casos (1) y (2) tenemos que entre cualesquiera elementos a de A y b de B hay una y solo una flecha.

Por lo anterior tenemos que $T_\phi(A, B)$ es un torneo bipartito.

Ahora, usando el lema 2.2.1 veremos que el torneo bipartito $T_\phi(A, B)$ es de la forma $(m, m; n, n)_3$.

Afirmación 1. A no tiene transmisores.

Sea a un vértice de A . Sabemos que $I(a) = B \setminus O(a)$ con $|O(a)| = n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ y $|B| = n$, por lo que $|I(a)| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \geq \lfloor \frac{2}{2} \rfloor = 1$, puesto que $n \geq 2$. Esto significa que todo vértice a de A tiene al menos un vecino interior; es decir, A no tiene transmisores.

Afirmación 2. B no tiene transmisores.

Sea b un vértice de B . Por la definición de B , sabemos que ocurre que $b = b_i$, para algún entero i tal que $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Además $b_i \notin C_{(i+1) \bmod n}$, de otra manera existe un entero k_0 entre 0 y $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ tal que $b_i = b_{(i+1+k_0) \bmod n}$; esto es, $i \equiv i+1+k_0$, lo que implica que $1+k_0 \equiv 0$, pero sabemos que $0 < 1 \leq 1+k_0 \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor < n$, lo cual contradice $1+k_0 \equiv 0$. Por lo tanto $b_i \in B \setminus C_{(i+1) \bmod n}$, pero $B \setminus C_{(i+1) \bmod n} = D_{(i+1) \bmod n} = O_i = O(a_i)$. Lo anterior significa que b_i es un vecino exterior de a_i , lo cual implica que b_i no puede ser un transmisor. Por lo tanto B no tiene transmisores.

Afirmación 3. Todo vértice de A es un 3-rey.

Sean v y w dos vértices distintos en A . Veamos que $O(v) \not\subseteq O(w)$ y $O(w) \not\subseteq O(v)$. Por definición, como ϕ es biyectiva, tenemos que $\phi(v) \neq \phi(w)$, y puesto que todas las imágenes bajo ϕ tienen la misma cardinalidad; es decir, $|\phi(v)| = |\phi(w)| = n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, entonces tenemos que $\phi(v) \not\subseteq \phi(w)$ y que $\phi(w) \not\subseteq \phi(v)$; es decir, $O(v) \not\subseteq O(w)$ y $O(w) \not\subseteq O(v)$.

Como B no tiene transmisores, por lo anterior y por el lema 2.2.1 tenemos que todo vértice de A es un 3-rey.

Afirmación 4. Todo vértice de B es un 3-rey.

Sean v y w dos vértices distintos de B . Veremos que $O(v) \not\subseteq O(w)$ y $O(w) \not\subseteq O(v)$.

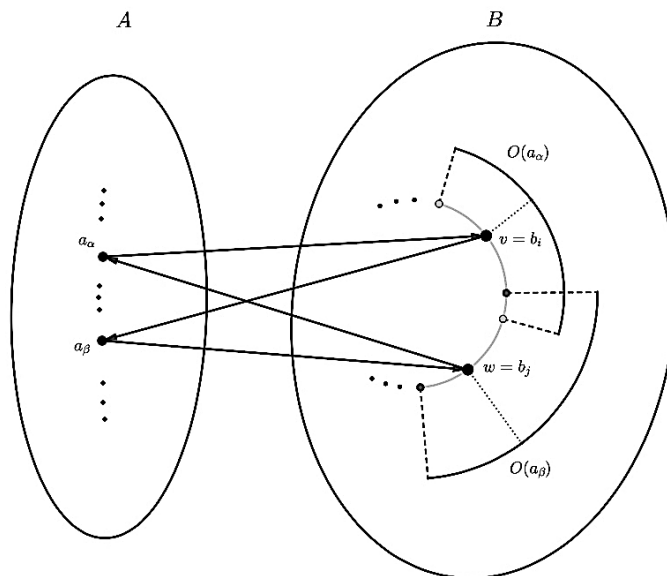


Figura 2.12: Representación de los vértices a_α y a_β que buscamos para la demostración de la afirmación (4) en la necesidad del teorema 2.2.2

2. TORNEOS BIPARTITOS CON 2-REYES Y 3-REYES

Sabemos, por definición de B , que $v = b_i$ y $w = b_j$ con $\{i, j\} \subseteq \{0, \dots, n-1\}$ y $j \neq i$. Supongamos que $i < j$. Veamos que hay dos vértices a_α y a_β en A tales que $a_\alpha \in O(w) \setminus O(v)$ y que $a_\beta \in O(v) \setminus O(w)$; es decir, $a_\alpha \in O(b_j) \setminus O(b_i)$ y $a_\beta \in O(b_i) \setminus O(b_j)$. Lo anterior equivale a decir que $b_j \in I(a_\alpha)$ y $b_i \in O(a_\alpha)$; $b_i \in I(a_\beta)$ y $b_j \in O(a_\beta)$. Esto es, se tiene un ciclo dirigido de la forma $(b_i, a_\beta, b_j, a_\alpha, b_i)$, como se puede ver en la figura 2.12.

Basándonos en los conjuntos de vecinos exteriores que dimos para los elementos de A , obtendremos subíndices α y β que cumplan lo anterior y tales que $\{\alpha, \beta\} \subseteq \{0, \dots, n-1\}$.

Sea $\mu := \min \{x \in \mathbb{N} : i < x \leq j, j - x \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\}$.

Como j cumple que $j - j = 0 \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ y $i < j \leq j$, entonces tenemos que $\{x \in \mathbb{N} : i < x \leq j, j - x \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\}$ es un conjunto no vacío, por lo que μ está bien definido.

Sean $\alpha := \mu - 1$ y $\beta := (\mu - 1 - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - l) \bmod n$, con $l \in \{0, 1\}$; donde tenemos que $l = 1$ si n es impar y $j - i > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ o tenemos que $l = 0$ para los demás casos.

Afirmamos que α y β , así definidos, cumplen que $b_j \in I(a_\alpha)$, $b_i \in O(a_\alpha)$, $b_i \in I(a_\beta)$ y $b_j \in O(a_\beta)$.

Antes de comenzar la demostración de nuestra afirmación, recordemos algunas definiciones y hagamos unas observaciones con base en ellas.

Sea t un entero entre 0 y $n-1$. Respecto a las cardinalidades de los conjuntos C_t , D_t y O_t , teníamos que, por las observaciones anteriores, se cumple: $|C_t| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; $|D_t| = n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, y $|O_t| = n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Además, por la definición de los vecinos exteriores e interiores de los vértices de A , se tienen las igualdades $O(a_t) = O_t = D_{t+1}$ y $I(a_t) = B \setminus O(a_t) = B \setminus O_t = B \setminus D_{t+1} = C_{t+1}$. Por lo que $|O(a_t)| = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ y $|I(a_t)| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; con $O(a_t)$ y $I(a_t)$ ajenos y $O(a_t) \cup I(a_t) = B$.

Veamos como son $I(a_\alpha)$ y $I(a_\beta)$. Sabemos que $I(a_\alpha) = C_{\alpha+1}$ y $I(a_\beta) = C_{\beta+1}$; es decir, $I(a_\alpha) = C_\mu$ y $I(a_\beta) = C_{\mu - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - l}$, por las definiciones de α y β . Por otro lado, por la definición de μ , tenemos:

$$C_\mu := \{b_{(\mu+k) \bmod n} : k \in \{0, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\}\};$$

$$C_{(\mu - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - l) \bmod n} := \{b_{(\mu - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - l + k) \bmod n} : k \in \{0, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\}\}$$

Pero sabemos que $\mu - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - l + k = (\mu - 1 - l) - ((\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1) - k)$, donde tenemos que $((\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1) - k) \in \{0, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\}$ debido a que $k \in \{0, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\}$. Esto significa que podemos reescribir a $C_{(\mu - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - l) \bmod n}$ como:

$$C_{(\mu - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - l) \bmod n} := \{b_{((\mu-1-l)-k') \bmod n} : k' \in \{0, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\}\}$$

En general tenemos las siguientes igualdades:

$$I(a_\alpha) = \{b_{(\mu+k) \bmod n} : k \in \{0, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\}\};$$

$$I(a_\beta) = \{b_{((\mu-1-l)-k) \bmod n} : k \in \{0, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\}\}.$$

Donde observamos que $I(a_\alpha)$ y $I(a_\beta)$ no tienen elementos en común (ver la figura 2.13).

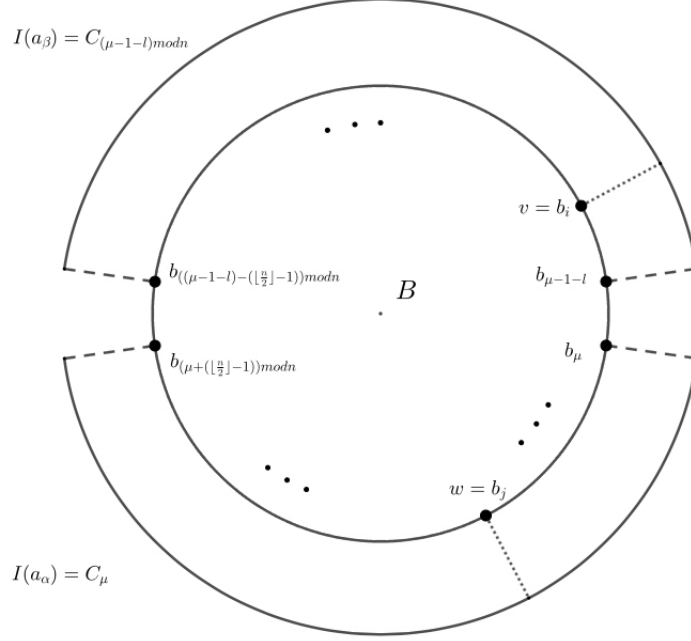


Figura 2.13: Representación de $I(a_\alpha)$ e $I(a_\beta)$. Recordemos que se cumplen: 1) $i < j$; 2) $\mu := \min \{x \in \mathbb{N} : i < x \leq j, j - x \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\}$ y; 3) se tiene que $l = 1$ si n es impar y $j - i > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ o se tiene que $l = 0$ para los demás casos

En efecto, supongamos que $I(a_\alpha) \cap I(a_\beta) \neq \emptyset$, esto significa que existen enteros k_1 y k_2 con $\{k_1, k_2\} \subseteq \{0, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\}$, tales que $b_{(\mu+k_1) \bmod n} = b_{((\mu-1-l)-k_2) \bmod n}$; es decir, que cumplen la congruencia $(\mu + k_1) \bmod n = ((\mu - 1 - l) - k_2) \bmod n$; esto es, $\mu + k_1 \equiv (\mu - 1 - l) - k_2$. Usando las propiedades de las operaciones en las congruencias (módulo n), obtenemos: $k_1 + k_2 \equiv -1 - l$, donde $(-1 - l) \in \{-1, -2\}$, puesto que $l \in \{0, 1\}$. Como $\{k_1, k_2\} \subseteq \{0, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\}$, se tiene que $0 \leq k_1 + k_2 \leq (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1) + (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1) = 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2 \leq n - 2 < n - 1$. Por lo tanto se tienen tres condiciones para k_1, k_2 y l , a saber:

1. $k_1 + k_2 \equiv -1 - l$;
2. $(-1 - l) \in \{-1, -2\}$ y;
3. $0 \leq k_1 + k_2 \leq 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2 \leq n - 2 < n - 1$.

Las tres condiciones se satisfacen simultáneamente solo en el caso $k_1 + k_2 = n - 2$ y $l = 1$, ya que no hay otro número $k_1 + k_2$ entre 0 y $n - 2$ (condición (3)) que sea congruente con -1 o con -2 módulo n (condiciones (1) y (2)). De acuerdo a la definición de l , $l = 1$ en particular cuando n es impar. Pero n impar implica que $k_1 + k_2 \leq 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2 = (n - 1) - 2 = n - 3 < n - 2$, lo cual contradice $k_1 + k_2 = n - 2$. Por lo tanto $I(a_\alpha) \cap I(a_\beta) = \emptyset$.

2. TORNEOS BIPARTITOS CON 2-REYES Y 3-REYES

Ahora veremos que $b_j \in I(a_\alpha)$ y $b_i \in O(a_\alpha)$; $b_i \in I(a_\beta)$ y $b_j \in O(a_\beta)$. Para ello consideraremos dos casos.

Caso 1. n es impar y $j - i > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Demostraremos que $O(b_j) \not\subseteq O(b_i)$ y $O(b_i) \not\subseteq O(b_j)$. En particular veremos que $a_\alpha \in O(b_j) \setminus O(b_i)$ y $a_\beta \in O(b_i) \setminus O(b_j)$; es decir, que α y β cumplen $b_j \in I(a_\alpha)$, $b_j \in O(a_\beta)$, $b_i \in I(a_\beta)$ y $b_i \in O(a_\alpha)$. Esto es, que se tiene el ciclo dirigido $(b_i, a_\beta, b_j, a_\alpha, b_i)$.

Como $j - i > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, y por la definición de μ sabemos que $j - \mu \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ y $i < \mu \leq j$, entonces $i < j - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ y $j - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \leq \mu$. De lo anterior obtenemos lo siguiente:

1. $j - (j - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$,
2. $i < j - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \leq j$,
3. $j - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \leq \mu$.

Así, $j - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \in \{x \in \mathbb{N} : i < x \leq j, j - x \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\}$ y por la elección de μ , obtenemos la igualdad $\mu = j - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ (observemos que esta igualdad es independiente de la paridad de n). Recordemos que en este caso tenemos $l = 1$, lo que nos da:

$$I(a_\alpha) = C_\mu = C_{j - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} = \{b_{j - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}, b_{j - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2}, \dots, b_{j-1}, b_j\};$$

$$\begin{aligned} I(a_\beta) &= C_{\mu - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - l} = C_{(j - 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) \bmod n} = \{b_{((\mu - 1 - l) - k) \bmod n} : k \in \{0, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\}\} \\ &= \{b_{(j - 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) \bmod n}, b_{(j - 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1) \bmod n}, \dots, b_{(j - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2) \bmod n}, b_{(j - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1) \bmod n}\}. \end{aligned}$$

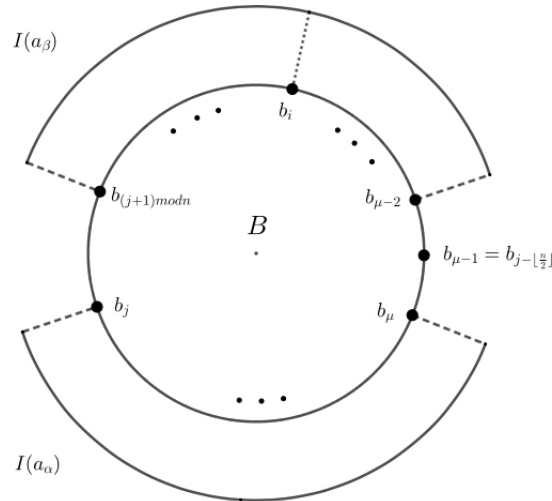


Figura 2.14: Representación de $I(a_\alpha)$ e $I(a_\beta)$ en el caso (1): n es impar y $j - i > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Aquí se tiene que $b_j = b_{\mu + (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1)}$

Lo anterior nos muestra que, en el caso considerado, los índices de los elementos de C_μ son de la forma $j - k$ con k entre 0 y $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$, mientras que los índices de los elementos de $C_{\mu - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - l}$ son de la forma $(j - k) \bmod n$ con k entre $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ y $2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; es decir, no se repiten índices. Entonces $I(a_\alpha) \cup I(a_\beta) \cup \{b_{j - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\} = \{b_0, \dots, b_{n-1}\} = B$, donde la unión es ajena (ver la figura 2.14). Además sabemos que $I(a_\alpha) \cup O(a_\alpha) = B = I(a_\beta) \cup O(a_\beta)$, de lo que se sigue que $I(a_\beta) \subseteq O(a_\alpha)$ y que $I(a_\alpha) \subseteq O(a_\beta)$. Lo que implica que $b_j \in I(a_\alpha)$ y $b_j \in O(a_\beta)$.

Por otro lado veremos que $b_i \in I(a_\beta)$ y $b_i \in O(a_\alpha)$. Teníamos $0 \leq i < j - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ por hipótesis, y estamos manejando enteros, en particular $0 \leq i \leq j - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$; es decir, tenemos que $i \in \{0, 1, \dots, j - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\}$, entonces $b_i \in I(a_\beta)$ puesto que $\{0, 1, \dots, j - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\} \subseteq \{(j - k) \bmod n : k \in \{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1, \dots, 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}\}$ y $I(a_\beta) = \{b_{(j-k) \bmod n} : k \in \{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1, \dots, 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}\}$. Además $I(a_\beta) \subseteq O(a_\alpha)$, entonces $b_i \in O(a_\alpha)$.

Como $b_j \in I(a_\alpha)$, $b_i \in O(a_\alpha)$, $b_i \in I(a_\beta)$ y $b_j \in O(a_\beta)$, entonces $a_\alpha \in O(b_j)$, $a_\alpha \in I(b_i)$, $a_\beta \in O(b_i)$ y $a_\beta \in I(b_j)$. Lo que implica que $a_\alpha \in O(b_j)$ y $a_\alpha \notin O(b_i)$; $a_\beta \in O(b_i)$ y $a_\beta \notin O(b_j)$. Por lo anterior tenemos que $O(b_j) \not\subseteq O(b_i)$ y $O(b_i) \not\subseteq O(b_j)$.

Caso 2. No se cumple simultáneamente que n sea impar y que $j - i > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Recuerde que en este caso definimos $l = 0$.

Demostraremos que $O(b_j) \not\subseteq O(b_i)$ y $O(b_i) \not\subseteq O(b_j)$; a saber, que α y β cumplen $b_j \in I(a_\alpha)$, $b_j \in O(a_\beta)$, $b_i \in I(a_\beta)$ y $b_i \in O(a_\alpha)$.

Se tiene $I(a_\alpha) \cap I(a_\beta) = \emptyset$, $I(a_\alpha) \cup I(a_\beta) \subseteq B$ y $I(a_\alpha) \cup O(a_\alpha) = B = I(a_\beta) \cup O(a_\beta)$; de lo que obtenemos $I(a_\beta) \subseteq O(a_\alpha)$ y $I(a_\alpha) \subseteq O(a_\beta)$. Entonces basta demostrar que $b_j \in I(a_\alpha)$ y $b_i \in I(a_\beta)$.

Veamos que $b_j \in I(a_\alpha)$. Como $\mu \leq j$ y $(j - \mu) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ (considerando la elección de μ), entonces $(j - \mu) \in \{0, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\}$, además $j = \mu + (j - \mu)$, de donde se tiene que $b_j \in I(a_\alpha) = \{b_{(\mu+k) \bmod n} : k \in \{0, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\}\}$.

Demostraremos que $b_i \in I(a_\beta)$. Como en este caso tenemos $l = 0$, se da la igualdad $I(a_\beta) = \{b_{((\mu-1-l)-k) \bmod n} : k \in \{0, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\}\} = \{b_{((\mu-1)-k) \bmod n} : k \in \{0, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\}\}$. Consideremos dos subcasos:

Subcaso 2.1. $j - i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Por definición tenemos $\mu = \min \{x \in \mathbb{N} : i < x \leq j, j - x \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\}$. Observemos que $j - i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ implica que $j - (i + 1) = j - i - 1 \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$. Por otro lado, sabemos que $i < i + 1 \leq j$; entonces $(i + 1) \in \{x \in \mathbb{N} : i < x \leq j, j - x \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\}$; así $\mu \leq (i + 1)$. Además $i < \mu$ implica que $(i + 1) \leq \mu$, por la elección de μ obtenemos la igualdad $\mu = i + 1$. Como $i = ((i + 1) - 1) - 0 = (\mu - 1) - 0$, tenemos $b_i = b_{((i+1)-1)-0} = b_{((\mu-1)-0) \bmod n}$; es decir, $b_i \in I(a_\beta) = \{b_{((\mu-1)-k) \bmod n} : k \in \{0, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\}\}$. En la figura 2.15 se ilustra este subcaso.

2. TORNEOS BIPARTITOS CON 2-REYES Y 3-REYES

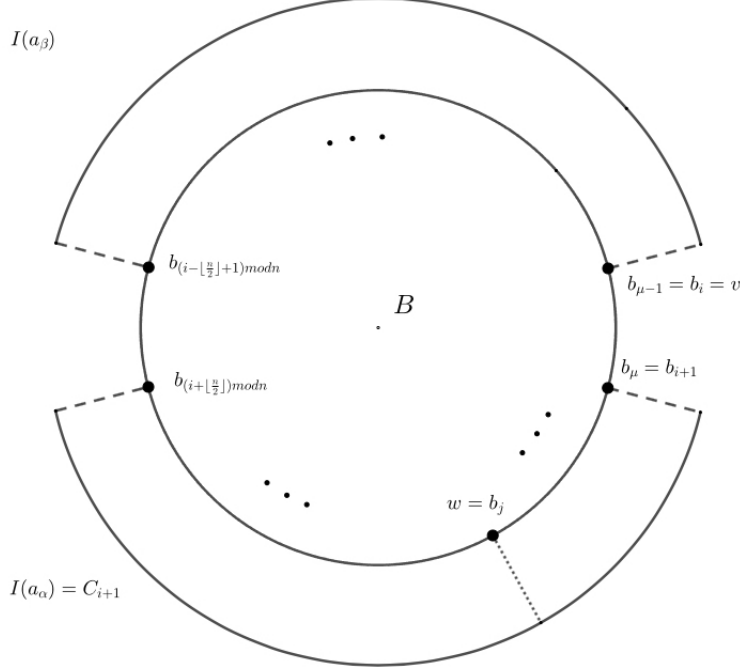


Figura 2.15: Representación de $I(a_\alpha)$ e $I(a_\beta)$ en el subcaso (2.1): $j - i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Aquí se tiene $b_\mu = b_{i+1}$

Subcaso 2.2. n es par.

En general se tiene:

1. $|I(a_\alpha)| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = |I(a_\beta)|$;
2. $I(a_\alpha) \cap I(a_\beta) = \emptyset$;
3. $I(a_\alpha) \cup I(a_\beta) \subseteq B$;
4. $I(a_\alpha) \cup O(a_\alpha) = B = I(a_\beta) \cup O(a_\beta)$.

Además, cuando n es par, ocurre $|I(a_\alpha)| = |I(a_\beta)| = |O(a_\alpha)| = |O(a_\beta)| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \frac{n}{2}$; por lo que en este subcaso se tienen las igualdades:

5. $I(a_\alpha) \cup I(a_\beta) = B$;
6. $I(a_\alpha) = O(a_\beta)$ y;
7. $I(a_\beta) = O(a_\alpha)$.

Veamos que b_i no está en $I(a_\alpha)$ (por lo que las igualdades (2) y (5) nos darán $b_i \in I(a_\beta)$). Podemos suponer $j - i > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, puesto que en el subcaso (2.1) vimos que $j - i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ implica que

$b_i \in I(a_\beta)$ sin importar la paridad de n .

La condición $j - i > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ implica que $\mu = j - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$, visto en la demostración del caso (1), donde se hacía énfasis en que la implicación era independiente de la paridad de n ; es decir, $I(a_\alpha) = C_\mu = C_{j - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} = \{b_{j - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}, b_{j - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2}, \dots, b_{j-1}, b_j\}$. Como $j - i > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, entonces en particular tenemos que $0 \leq i < j - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \leq j$. De lo anterior obtenemos que $b_i \notin I(a_\alpha) = O(a_\beta)$. Por lo que $b_i \in I(a_\beta)$.

Por lo tanto, en el caso (2) se tiene que $O(b_j) \not\subseteq O(b_i)$ y $O(b_i) \not\subseteq O(b_j)$.

En general, por los casos (1) y (2), para cualesquiera vértices distintos v y w en B se tiene $O(v) \not\subseteq O(w)$ y $O(w) \not\subseteq O(v)$. Además A no tiene transmisores, por lo que el lema 2.2.1 nos dice que todos los vértices de B son 3-reyes.

Entonces hemos demostrado que el torneo bipartito $T(A, B)$ así construido es del tipo $(m, m; n, n)_3$.

Ahora veamos que se cumple la suficiencia del teorema 2.2.2; es decir, dado un torneo bipartito $T(A, B)$ del tipo $(m, m; n, n)_3$, con $2 \leq n \leq m$, se tiene que $m \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. Para ello daremos una función inyectiva $P : A \rightarrow \{X \subseteq B : |X| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$.

Antes de dar la función hagamos unas observaciones generales acerca de los conjuntos de vecinos exteriores de los vértices de A .

Sea \mathcal{O} el conjunto cuyos elementos son los conjuntos de los vecinos exteriores de los vértices de A ; es decir, $\mathcal{O} = \{O(a) : a \in A\}$. Del lema 2.2.1 obtenemos inmediatamente que:

1. $\{\emptyset, B\} \cap \mathcal{O} = \emptyset$;
2. $O_1 \not\subseteq O_2$ y $O_2 \not\subseteq O_1$, para cualesquiera O_1 y O_2 elementos distintos de \mathcal{O} ;
3. $\bigcup \mathcal{O} = B$.

Como todos los vértices de T son 3-reyes, no hay transmisores. En particular tenemos que para todo vértice a de A , ocurre que $O(a) \neq B$; además $O(a) \neq \emptyset$, de lo contrario a no puede ser 3-rey (puesto que a sería receptor). Así obtenemos (1). Por otro lado, si $\bigcup \mathcal{O} \neq B$, tendríamos que hay un vértice b_0 en B tal que no es vecino exterior de ningún vértice de A , por definición de torneo bipartito tendríamos que b_0 es un transmisor en T , contradiciendo que A tiene 3-reyes, así obtenemos (3). La observación (2) es inmediata de la primera condición del lema 2.2.1.

Ahora podemos comenzar la demostración de la suficiencia de este teorema.

Sea $T(A, B)$ un torneo bipartito del tipo $(m, m; n, n)_3$, con $2 \leq n \leq m$. Veremos que $m \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

Sea $\vec{\mathcal{G}} := (\mathcal{V}, \mathcal{F})$ la digráfica con conjunto de vértices $\mathcal{V} := \mathcal{P}(B) \setminus \{\emptyset, B\}$ y conjunto de flechas $\mathcal{F} := \{(v, w) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V} : v \subseteq w, \text{ y } |w| - |v| = 1\}$ (ver la figura 2.16).

2. TORNEOS BIPARTITOS CON 2-REYES Y 3-REYES

$$\vec{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{F})$$

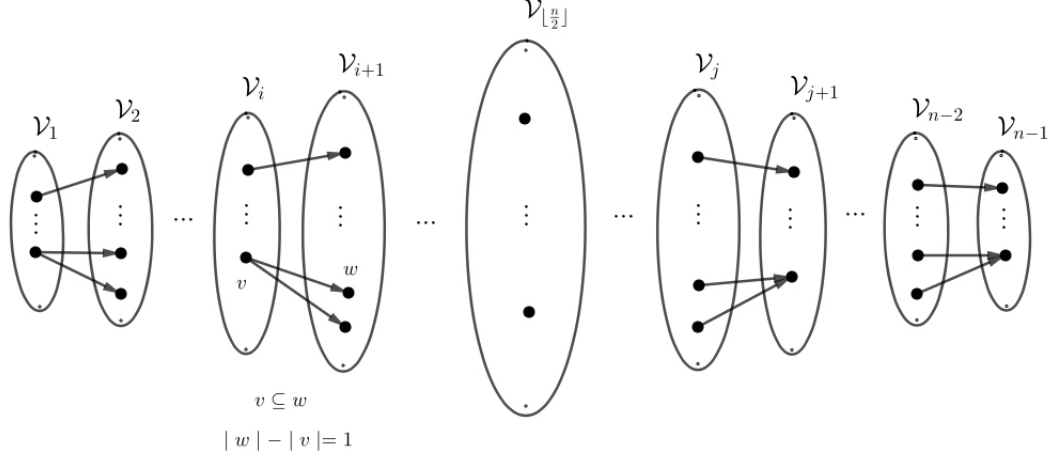


Figura 2.16: Representación de \vec{G} y los \mathcal{V}_i

Por las observaciones y definiciones anteriores, para cada vértice a de A , se tiene que $O(a) \in \mathcal{V}$, esto es $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{V}$. Además si $O(a_1)$ y $O(a_2)$ son dos conjuntos de vecinos exteriores de dos vértices distintos de A , no puede haber una trayectoria entre ellos en \vec{G} , puesto que de haberla, eso significaría que $O(a_1) \subseteq O(a_2)$ o $O(a_2) \subseteq O(a_1)$ (según la dirección de la trayectoria), contradiciendo la observación (2). Esto nos dice que $\langle \mathcal{O} \rangle_{\vec{G}}$ es inconexa; más aún $\langle \mathcal{O} \rangle_{\vec{G}}$ consiste de vértices aislados.

Dado un número entero i entre 1 y $n - 1$ definamos $\mathcal{V}_i := \{v \in \mathcal{V} : |v| = i\}$ (ver la figura 2.16). De las definiciones anteriores y las propiedades de los números combinatorios observamos que:

1. \mathcal{V}_i tiene $\binom{n}{i}$ elementos;
2. \mathcal{V}_i es un conjunto independiente en \vec{G} , para cada i entre 1 y $n - 1$;
3. Dado un vértice v en \mathcal{V}_i , tenemos que:
 - (a) $\delta_{\vec{G}}^+(v) = n - i$, si $1 \leq i \leq (n - 2)$;
 - (b) $\delta_{\vec{G}}^-(v) = i$, si $2 \leq i \leq (n - 1)$;
 - (c) $\delta_{\vec{G}}^-(v) = 0$, si $v \in \mathcal{V}_1$;
 - (d) $\delta_{\vec{G}}^+(v) = 0$, si $v \in \mathcal{V}_{n-1}$.
4. Dado un número entero i entre 0 y $n - 1$, tenemos que:
 - (a) $\binom{n}{i} < \binom{n}{i+1}$, si $0 \leq i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$;
 - (b) $\binom{n}{i} > \binom{n}{i+1}$, si $\lceil \frac{n}{2} \rceil \leq i \leq n - 1$;

(c) $\binom{n}{i} = \binom{n}{i+1}$, si $i = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ y n es impar.

El primer punto de la observación es inmediato. Como \mathcal{V}_i son todos los subconjuntos de B de cardinalidad i y B tiene n elementos, $\binom{n}{i}$ nos da la cantidad de subconjuntos con i elementos de un conjunto con n elementos, por lo que $|\mathcal{V}_i| = \binom{n}{i}$.

\mathcal{V}_i es un conjunto independiente por construcción de \vec{G} y la definición de dicho conjunto.

Para demostrar el tercer punto de la observación tomemos un vértice v en \mathcal{V}_i . Si $|v| = n - 1$ ($v \in \mathcal{V}_{n-1}$), entonces v no tiene vecinos exteriores, por la construcción de \vec{G} y porque $B \notin \mathcal{V}$, con $\mathcal{V} = V(\vec{G})$. Si $1 \leq |v| < n - 1$, dado un vecino exterior w de v , w tiene cardinalidad $|v| + 1$; es decir, $w = v \cup \{b\}$ para algún elemento b de $B \setminus v$, esto es, v tiene tantos vecinos exteriores como elementos tiene $B \setminus v$, donde $|B \setminus v| = |B| - |v| = n - i$. Por otro lado, si v está en \mathcal{V}_1 , v no tiene vecinos interiores, por la construcción de \vec{G} y porque $\emptyset \notin \mathcal{V} = V(\vec{G})$. Si v tiene al menos dos elementos ($v \in \mathcal{V}_i$ con $n - 1 \geq i > 1$) y u es un vecino interior de v , sabemos por definición de \vec{G} que $|u| = |v| - 1$, esto significa que u es igual a $v \setminus \{b\}$ para algún elemento b de v , por lo que v tiene tantos vecinos interiores como su cardinalidad, a saber i .

El cuarto punto de la observación se obtiene de las propiedades de los números combinatorios. Por definición tenemos que $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$, de donde se tiene inmediatamente que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Además $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{(n-k)!}$.

En general tenemos que $\binom{n}{i+1} = \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)(n-i)}{(i+1)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!} \cdot \frac{n-i}{i+1}$; es decir, $\binom{n}{i+1} = \frac{n-i}{i+1} \binom{n}{i}$.

Si $0 \leq i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, se tiene que $n - i > n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \lceil \frac{n}{2} \rceil \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \geq i + 1$, donde la última desigualdad se cumple porque $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor > i$ y se trata de números enteros. De esto se obtiene $n - i > i + 1$, y finalmente $\frac{n-i}{i+1} > 1$, por lo que $\binom{n}{i} < \binom{n}{i+1}$.

Si $\lceil \frac{n}{2} \rceil \leq i \leq n - 1$, entonces $i + 1 > \lceil \frac{n}{2} \rceil \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = n - \lceil \frac{n}{2} \rceil \geq n - i$, de donde se obtiene $i + 1 > n - i$, lo que nos da $\frac{n-i}{i+1} < 1$, por lo tanto $\binom{n}{i+1} < \binom{n}{i}$.

Veremos que si n es impar e $i = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, entonces $\binom{n}{i} = \binom{n}{i+1}$. Como $\lceil \frac{n}{2} \rceil = n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ y $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ para todo k entre 0 y n , en particular $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \binom{n}{n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$. Por otro lado sabemos que cuando n es impar $\lceil \frac{n}{2} \rceil = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$. Por lo tanto $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}$; así, haciendo $i = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, concluimos $\binom{n}{i} = \binom{n}{i+1}$.

Sea G la grafica subyacente a \vec{G} , y para cada entero i con $1 \leq i < n - 1$, sea G_i la subgráfica de G inducida por $\mathcal{V}_i \cup \mathcal{V}_{i+1}$; es decir, $G_i := \langle \mathcal{V}_i \cup \mathcal{V}_{i+1} \rangle_G$ (ver la figura 2.17).

Afirmación. Sea i un entero tal que $1 \leq i < n - 1$. Entonces existen apareamientos \vec{M}_i o \overleftarrow{M}_i en G_i , tales que:

1. \vec{M}_i satura a cada vértice de \mathcal{V}_i si $i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$;
2. \overleftarrow{M}_i satura a cada vértice de \mathcal{V}_{i+1} si $i \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$;
3. existe M_i apareamiento perfecto solo si n es impar e $i = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

2. TORNEOS BIPARTITOS CON 2-REYES Y 3-REYES

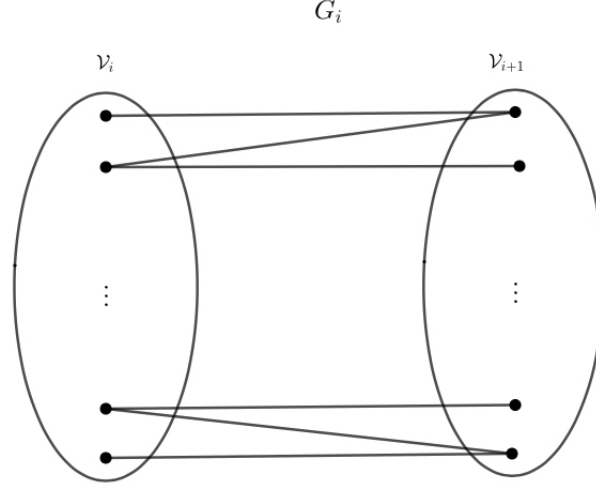


Figura 2.17: Representación de G_i

Como G_i es bipartita para toda i (por definiciones y observaciones anteriores), para demostrar la afirmación usaremos el teorema de Hall, el cual nos dice que dada una gráfica bipartita H , con bipartición (X, Y) , existe un apareamiento M que satura a cada vértice de X si y solo si, para cualquier subconjunto S de X , el conjunto de sus vecinos tiene al menos tantos elementos como S mismo.

Demostración de la afirmación. Sea i un número entero tal que $1 \leq i < n - 1$.

Caso 1. $i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Por el primer punto de la observación tenemos que $|\mathcal{V}_i| = \binom{n}{i}$, $|\mathcal{V}_{i+1}| = \binom{n}{i+1}$ y por el cuarto punto inciso (a) $|\mathcal{V}_i| < |\mathcal{V}_{i+1}|$. Sean S un subconjunto no vacío de \mathcal{V}_i y $G' := \langle S \cup N(S) \rangle_{G_i}$, donde $N(S) := N_{G_i}(S)$. Note que $N(S) \neq \emptyset$ por el punto (3) de la observación. Entonces G' es bipartita con bipartición $(S, N(S))$. Sabemos que

$$\sum_{v \in S} \delta_{G'}(v) = |A(G')| = \sum_{v \in N(S)} \delta_{G'}(v).$$

Por otro lado, por la definición de G' y por la observación (3) inciso (a), tenemos que

$$\sum_{v \in S} \delta_{G'}(v) = \sum_{v \in S} \delta_{G_i}(v) = \sum_{v \in S} \delta_{\overline{G}}^+(v) = \sum_{v \in S} (n - i) = |S| (n - i),$$

Además, como $N(S) \subseteq \mathcal{V}_{i+1}$ y G' es subgráfica de G_i , se tiene que

$$\sum_{v \in N(S)} \delta_{G'}(v) \leq \sum_{v \in N(S)} \delta_{G_i}(v) = \sum_{v \in N(S)} \delta_{\overline{G}}^-(v) = \sum_{v \in N(S)} (i + 1) = |N(S)| (i + 1),$$

donde la segunda igualdad se obtiene del punto (3) inciso (b) de la observación.

Puesto que

$$\sum_{v \in S} \delta_{G'}(v) = \sum_{v \in N(S)} \delta_{G'}(v), \sum_{v \in S} \delta_{G'}(v) = |S| (n - i) \text{ y } \sum_{v \in N(S)} \delta_{G'}(v) \leq |N(S)| (i + 1),$$

entonces $|S| (n - i) \leq |N(S)| (i + 1)$.

Supongamos que $|N(S)| < |S|$. Entonces

$$|S| (n - i) \leq |N(S)| (i + 1) < |S| (i + 1),$$

lo que implica que

$$|S| (n - i) - |S| (i + 1) < 0,$$

de donde se sigue

$$|S| (n - 2i - 1) < 0.$$

Puesto que $|S| > 0$, entonces tenemos que

$$(n - 2i - 1) < 0.$$

Despejando n se obtiene $n < 2i + 1$, además en este caso estamos considerando $i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, por lo que $n < 2i + 1 < 2 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \leq n + 1$, y como estamos manejando números enteros tenemos $n < 2i + 1 \leq n$; es decir, $n < n$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $|N(S)| \geq |S|$. Usando el teorema de Hall tenemos que existe un apareamiento \vec{M}_i en G_i que satura a cada vértice de \mathcal{V}_i (ver la figura 2.18).

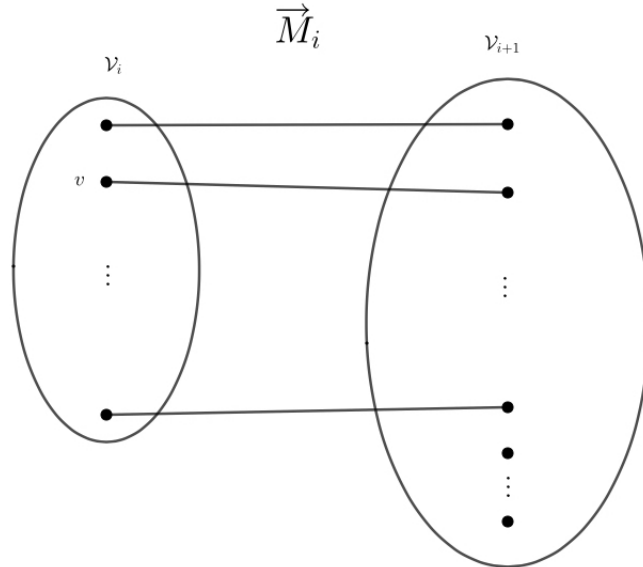


Figura 2.18: Representación de \vec{M}_i en el caso (1): $i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Para la demostración de este caso observamos que dado un vértice v en \mathcal{V}_i , tenemos que $\delta_G^+(v) = n - i$

2. TORNEOS BIPARTITOS CON 2-REYES Y 3-REYES

Caso 2. $i \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Para este caso procederemos de forma análoga al caso (1). También tenemos, por el primer punto de la observación, que $|\mathcal{V}_i| = \binom{n}{i}$, $|\mathcal{V}_{i+1}| = \binom{n}{i+1}$ y por el cuarto punto $|\mathcal{V}_i| > |\mathcal{V}_{i+1}|$. Sean S un subconjunto no vacío de \mathcal{V}_{i+1} y $G'' := \langle S \cup N(S) \rangle_{G_i}$, con $N(S) := N_{G_i}(S)$. Como G'' es bipartita con bipartición $(S, N(S))$, sabemos que

$$\sum_{v \in S} \delta_{G''}(v) = |A(G'')| = \sum_{v \in N(S)} \delta_{G''}(v).$$

Por otro lado, por la observación (3), tenemos que

$$\sum_{v \in S} \delta_{G''}(v) = \sum_{v \in S} \delta_{G_i}(v) = \sum_{v \in S} \delta_G^-(v) = \sum_{v \in S} (i+1) = |S| (i+1).$$

Además $N(S) \subseteq \mathcal{V}_i$ y la observación (3) implican

$$\sum_{v \in N(S)} \delta_{G''}(v) \leq \sum_{v \in N(S)} \delta_{G_i}(v) = \sum_{v \in N(S)} \delta_G^+(v) = \sum_{v \in N(S)} (n-i) = |N(S)| (n-i);$$

es decir,

$$|S| (i+1) \leq |N(S)| (n-i).$$

Ahora supongamos que $|N(S)| < |S|$. Entonces $|S| (i+1) \leq |N(S)| (n-i) < |S| (n-i)$, lo que implica $|S| (i+1) - |S| (n-i) < 0$, de donde se sigue $|S| (2i+1-n) < 0$, pero $|S| > 0$, así obtenemos $(2i+1-n) < 0$. Despejando n se obtiene $n > 2i+1$, además en este caso estamos considerando $i \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$, por lo que $n > 2i+1 \geq 2\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \geq n+1$, y como estamos trabajando con números enteros tenemos $n > 2i+1 \geq n+1$; es decir, $n > n+1$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $|N(S)| \geq |S|$. Usando el teorema de Hall tenemos que existe un apareamiento \overleftarrow{M}_i en G_i que satura a cada vértice de \mathcal{V}_{i+1} (ver la figura 2.19).

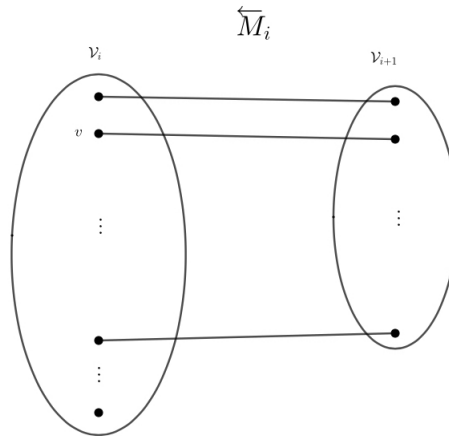


Figura 2.19: Representación de \overleftarrow{M}_i en el caso (2): $i \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Para la demostración de este caso observamos que dado un vértice v en \mathcal{V}_i , tenemos que $\delta_G^-(v) = i+1$

Antes de probar el caso (3) cabe resaltar que si n es par, habremos agotado todos los casos para todo entero i con $1 \leq i < n - 1$, puesto que $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Cuando n es impar, los casos (1) y (2) implican que solo falta ver qué ocurre con $G_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

Caso 3. n es impar e $i = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Recuerde que $|\mathcal{V}_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}| = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \binom{n}{n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} = |\mathcal{V}_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}|$ y $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Por lo tanto, si existe un apareamiento que satura todos los vértices de $\mathcal{V}_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ en $G_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, dicho apareamiento debe ser perfecto.

Sean S un subconjunto no vacío de $\mathcal{V}_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ y $G_0 := (S \cup N(S))_{G_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}$ con $N(S) := N_{G_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}(S)$. Como G_0 es bipartita con partición $(S, N(S))$, se tiene

$$\sum_{v \in S} \delta_{G_0}(v) = |A(G_0)| = \sum_{v \in N(S)} \delta_{G_0}(v).$$

De la observación (3) y de la definición de G_0 se sigue que

$$\sum_{v \in S} \delta_{G_0}(v) = \sum_{v \in S} \delta_{G_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}(v) = \sum_{v \in S} \delta_G^+(v) = \sum_{v \in S} (n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor) = |S| (n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor) = |S| (\lceil \frac{n}{2} \rceil).$$

Como $N(S) \subseteq \mathcal{V}_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$, la observación (3) implica que

$$\sum_{v \in N(S)} \delta_{G_0}(v) \leq \sum_{v \in N(S)} \delta_{G_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}}(v) = \sum_{v \in N(S)} \delta_G^-(v) = \sum_{v \in N(S)} (\lceil \frac{n}{2} \rceil) = |N(S)| (\lceil \frac{n}{2} \rceil).$$

Por lo anterior tenemos

$$|S| (\lceil \frac{n}{2} \rceil) = \sum_{v \in S} \delta_{G_0}(v) = |A(G_0)| = \sum_{v \in N(S)} \delta_{G_0}(v) \leq |N(S)| (\lceil \frac{n}{2} \rceil);$$

es decir,

$$|S| (\lceil \frac{n}{2} \rceil) \leq |N(S)| (\lceil \frac{n}{2} \rceil).$$

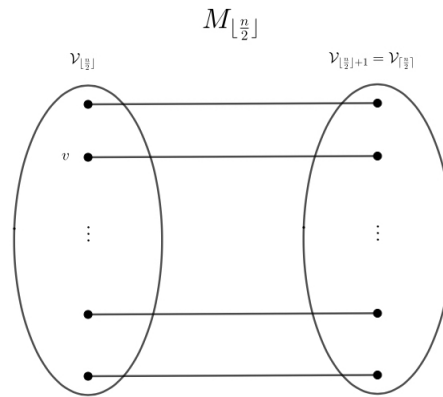


Figura 2.20: Representación de M_i en el caso (3): n impar e $i = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Para la demostración de este caso observamos que dado un vértice v en \mathcal{V}_i , tenemos que $\delta_G^+(v) = n - i = n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \lceil \frac{n}{2} \rceil = \delta_G^-(v)$

2. TORNEOS BIPARTITOS CON 2-REYES Y 3-REYES

Además, debido a que $n \geq 2$, se sigue que $\lceil \frac{n}{2} \rceil \geq 1$. Como $\lceil \frac{n}{2} \rceil > 0$, entonces $|S| \leq |N(S)|$.

El teorema de Hall nos dice que existe un apareamiento $M_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ en $G_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ que satura a cada vértice de $\mathcal{V}_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. Como $\mathcal{V}_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ y $\mathcal{V}_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ tienen la misma cantidad de elementos, $M_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ es de hecho un apareamiento perfecto (ver la figura 2.20).

Recordemos que $\mathcal{O} = \{O(a) : a \in A\}$ y $\mathcal{V} = \mathcal{P}(B) \setminus \{\emptyset, B\} = V(G)$. De la afirmación anterior tenemos que para cada elemento O de \mathcal{O} , existe una única trayectoria T_O en G de O al conjunto $\mathcal{V}_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ tal que todas sus aristas pertenecen a los apareamientos $\vec{M}_i, \overleftarrow{M}_j$ ó $M_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. Además estas trayectorias son ajenas por vértices entre sí.

Veamos cómo son las trayectorias T_O .

Sea O en \mathcal{O} . Entonces O está en \mathcal{V}_i para algún entero i entre 1 y $n - 1$. En el caso $i = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ no hay nada que probar, por lo que basta tomar los casos para $i \neq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Caso 1. $i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

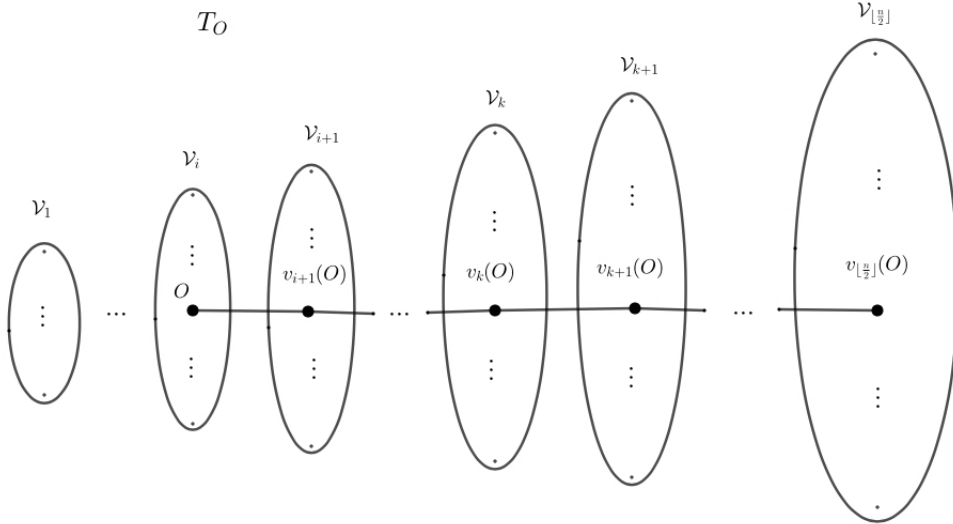


Figura 2.21: Representación de T_O en el caso (1): $i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Cada arista $(v_k(O), v_{k+1}(O))$ pertenece al apareamiento \vec{M}_k

Por la afirmación tenemos que para cada entero k entre i y $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$, \vec{M}_k asocia a cada elemento de \mathcal{V}_k un único elemento de \mathcal{V}_{k+1} y lo hace de forma inyectiva, por la definición de apareamiento. Así que la trayectoria que se busca es $(O, v_{i+1}(O), \dots, v_k(O), v_{k+1}(O), \dots, v_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(O))$, con k entre $i + 1$ y $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$, donde $v_{i+1}(O)$ es el único vértice de \mathcal{V}_{i+1} asociado a O mediante \vec{M}_i , y $v_{k+1}(O)$ es el único vértice de \mathcal{V}_{k+1} asociado a $v_k(O)$ mediante \vec{M}_k , así sucesivamente (ver la figura 2.21).

Caso 2. $i \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

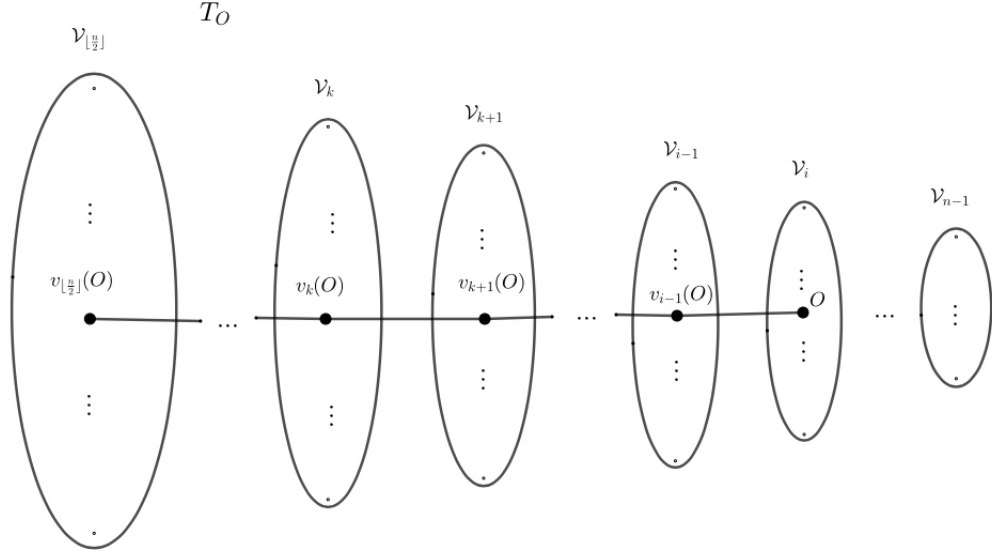


Figura 2.22: Representación de T_O en el caso (2): $i > \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Cada arista $(v_k(O), v_{k+1}(O))$ pertenece al apareamiento \overleftarrow{M}_k

Este caso es análogo al caso anterior. La trayectoria buscada es $(O, v_{i-1}(O), \dots, v_{k+1}(O), v_k(O), \dots, v_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}(O))$ si n es par y $(O, v_{i-1}(O), \dots, v_{k+1}(O), v_k(O), \dots, v_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}(O)) \cup (v_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}(O), v_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(O))$ si n es impar, con k entre $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ y $(i - 2)$, donde $v_{i-1}(O)$ es el único vértice de \mathcal{V}_{i-1} asociado a O mediante \overleftarrow{M}_{i-1} , $v_k(O)$ es el único vértice de \mathcal{V}_k asociado a $v_{k+1}(O)$ mediante \overleftarrow{M}_k , y en el caso n impar $v_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(O)$ es el único vértice de $\mathcal{V}_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ asociado a $v_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}(O)$ mediante $M_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. Observemos que si n es impar y $i = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ la trayectoria es simplemente $(v_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}(O), v_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(O))$, haciendo $v_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}(O) = O$. En la figura 2.22 podemos ver una representación del caso (2).

La unicidad de las trayectorias T_O se deduce de la unicidad de los $v_k(O)$ por la definición de apareamiento.

Las trayectorias T_O son ajenas dos a dos. Supongamos lo contrario. Sean O_1 y O_2 elementos de \mathcal{O} distintos tales que $V(T_{O_1}) \cap V(T_{O_2}) \neq \emptyset$. Como $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{V}$, existen enteros i y j entre 1 y $n - 1$ tales que $O_1 \in \mathcal{V}_i$ y $O_2 \in \mathcal{V}_j$. Tenemos los siguientes casos:

Caso 1. $i = j$.

Observemos que en este caso i no puede ser igual a $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ puesto que tendríamos $O_1 = O_2$. Entonces para este caso tomamos dos subcasos.

2. TORNEOS BIPARTITOS CON 2-REYES Y 3-REYES

Subcaso 1.1. $i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

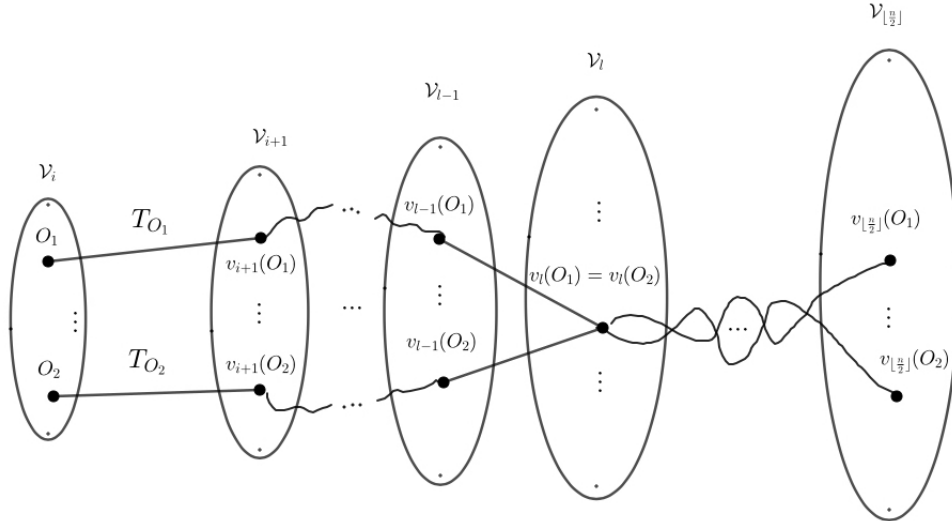


Figura 2.23: Representación de la suposición $V(T_{O_1}) \cap V(T_{O_2}) \neq \emptyset$ en el subcaso (1.1)

Como la intersección de $V(T_{O_1})$ y $V(T_{O_2})$ es no vacía, tomamos el menor entero l tal que $v_l(O_1) = v_l(O_2)$, y vemos que el apareamiento \vec{M}_{l-1} asigna el mismo elemento tanto a $v_{l-1}(O_1)$ como a $v_{l-1}(O_2)$, donde $v_{l-1}(O_1) \neq v_{l-1}(O_2)$ por la minimalidad de l , lo cual contradice la definición de apareamiento. La figura 2.23 ilustra este subcaso.

Subcaso 1.2. $i > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

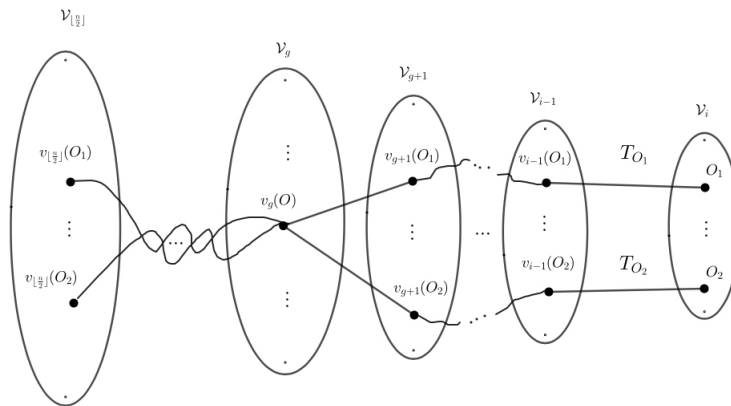


Figura 2.24: Representación de la suposición $V(T_{O_1}) \cap V(T_{O_2}) \neq \emptyset$ en el subcaso (1.2)

Tomando el mayor g tal que $v_g(O_1) = v_g(O_2)$, se tiene que el apareamiento \overleftarrow{M}_g asigna el mismo elemento tanto a $v_{g+1}(O_1)$ como a $v_{g+1}(O_2)$ si $g \neq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ o se tiene que el apareamiento $M_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ asigna el mismo elemento tanto a $v_{g+1}(O_1)$ como a $v_{g+1}(O_2)$ si $g = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, donde $v_{g+1}(O_1)$ y $v_{g+1}(O_2)$ son distintos debido a la maximalidad de g , lo cual contradice el hecho de que \overleftarrow{M}_g o $M_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, respectivamente, sean apareamientos (ver la figura 2.24).

Caso 2. $i \neq j$.

Sin perder generalidad, supongamos $i < j$. Observemos que si $O_1 \in V(T_{O_2})$ o $O_2 \in V(T_{O_1})$, por la definición de G tendríamos que $O_1 \subset O_2$ lo cual contradice al lema 2.2.1, dada la definición de \mathcal{O} . Por lo que podemos descartar este subcaso y suponer que $\{O_1, O_2\} \cap (V(T_{O_1}) \cap V(T_{O_2})) = \emptyset$. Tomaremos tres subcasos:

- 2.1. $j < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$;
- 2.2. $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor < i$ y;
- 2.3. $i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor < j$.

Estos subcasos agotan el caso (2), puesto que las desigualdades son estrictas. De darse alguna de las igualdades de i ó j con $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, por la definición de $T_{\mathcal{O}}$ tendríamos que T_{O_1} sería una O_1O_2 -trayectoria ó T_{O_2} sería una O_2O_1 -trayectoria, y esto nos lleva a $O_1 \subset O_2$, contradiciendo el lema 2.2.1. En efecto, supongamos que $i = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, esto implica que $V(T_{O_1}) = \{O_1\}$ por la definición de T_{O_1} , como $V(T_{O_1}) \cap V(T_{O_2}) \neq \emptyset$, tenemos $V(T_{O_1}) \cap V(T_{O_2}) = \{O_1\}$; es decir, $O_1 \in V(T_{O_2})$, situación descartada desde el planteamiento de este caso (2). Análogamente, si $j = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, tendríamos $V(T_{O_2}) = \{O_2\}$, y de ahí que $O_2 \in V(T_{O_1})$, contradiciendo las hipótesis de este caso.

Subcaso 2.1. $j < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

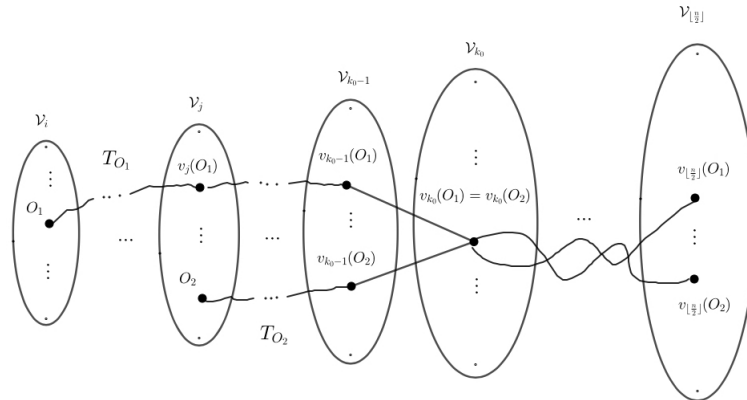


Figura 2.25: Representación de la suposición $V(T_{O_1}) \cap V(T_{O_2}) \neq \emptyset$ en el subcaso (2.1)

Sea k_0 el mínimo entero tal que $v_{k_0}(O_1) = v_{k_0}(O_2)$. Como $j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, tenemos que $j < k_0$, pues ya descartamos la igualdad antes de numerar los subcasos. Como $j < k_0$, entonces $v_{k_0-1}(O_1) \neq v_{k_0-1}(O_2)$ por la minimalidad de k_0 , y ocurre que $\overleftarrow{M}_{k_0-1}$ les asocia un mismo elemento

2. TORNEOS BIPARTITOS CON 2-REYES Y 3-REYES

a $v_{k_0-1}(O_1)$ y a $v_{k_0-1}(O_2)$, lo que es una contradicción. Este subcaso se ilustra en la figura 2.25.

Subcaso 2.2. $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor < i$.

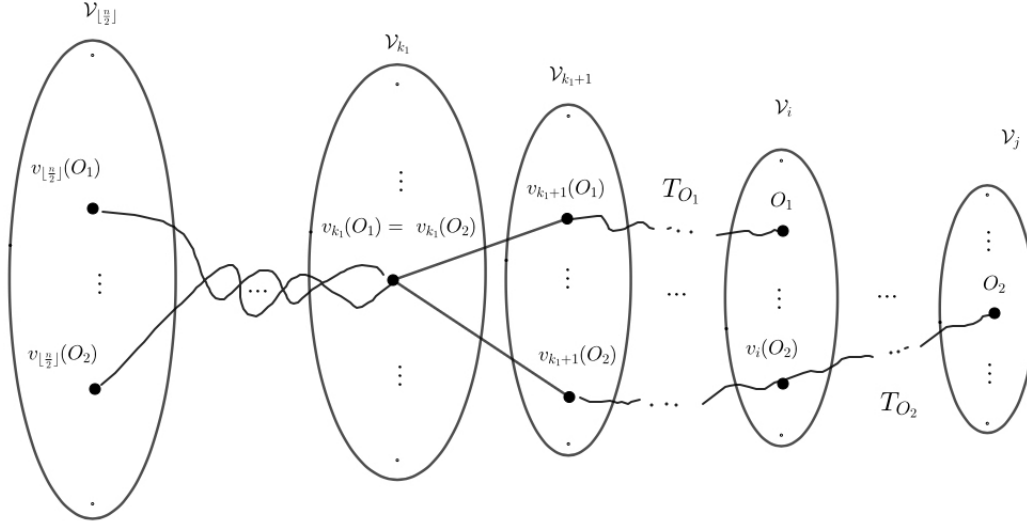


Figura 2.26: Representación de la suposición $V(T_{O_1}) \cap V(T_{O_2}) \neq \emptyset$ en el subcaso (2.2)

Procedamos de manera análoga al subcaso (2.1). Sea k_1 el máximo subíndice de los v_k en la intersección $T_{O_1} \cap T_{O_2}$, entonces $k_1 < i$ ya que $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor < i$. Tenemos que $v_{k_1+1}(O_1) \neq v_{k_1+1}(O_2)$ por la maximalidad de k_1 , y entonces \overleftarrow{M}_{k_1} está asociando a dos elementos distintos de \mathcal{V}_{k_1+1} el mismo elemento de \mathcal{V}_{k_1} , contradiciendo la definición de apareamiento (ver la figura 2.26).

Subcaso 2.3. $i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor < j$.

En este subcaso se tiene que $(V(T_{O_1}) \cap V(T_{O_2})) = \{v_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(O_1)\} = \{v_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(O_2)\}$ debido a que $i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor < j$ y por la definición de T_O . Entonces $T_{O_1} \cup \overleftarrow{T}_{O_2}$ es una O_1O_2 -trayectoria (donde \overleftarrow{T}_{O_2} es la trayectoria $T(O_2)$ tomada en sentido contrario), esto significa $O_1 \subset O_2$, que de nuevo contradice una de las propiedades necesarias de los 3-reyes (ver la figura 2.27).

Sea $\pi : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{V}_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, la función que asigna a cada elemento O de \mathcal{O} el único elemento de $\mathcal{V}_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ que está en la trayectoria T_O , donde T_O es tal como la definimos anteriormente. Es decir, $\pi : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{V}_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ tal que $\pi(O) = v_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(O)$. Por las propiedades de los T_O antes vistas (existencia, unicidad y que son trayectorias ajenas) tenemos que π está bien definida y es inyectiva. Además, por definición, se tiene que $\mathcal{V}_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \{X \subseteq B : |X| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$.

Sea $P : A \rightarrow \{X \subseteq B : |X| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$, tal que a cada vértice a de A le asigna el conjunto $\pi(O(a))$ en $\{X \subseteq B : |X| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$, donde $O(a)$ es el conjunto de vecinos exteriores del vértice a . Afirmamos que P así definida es una función inyectiva.

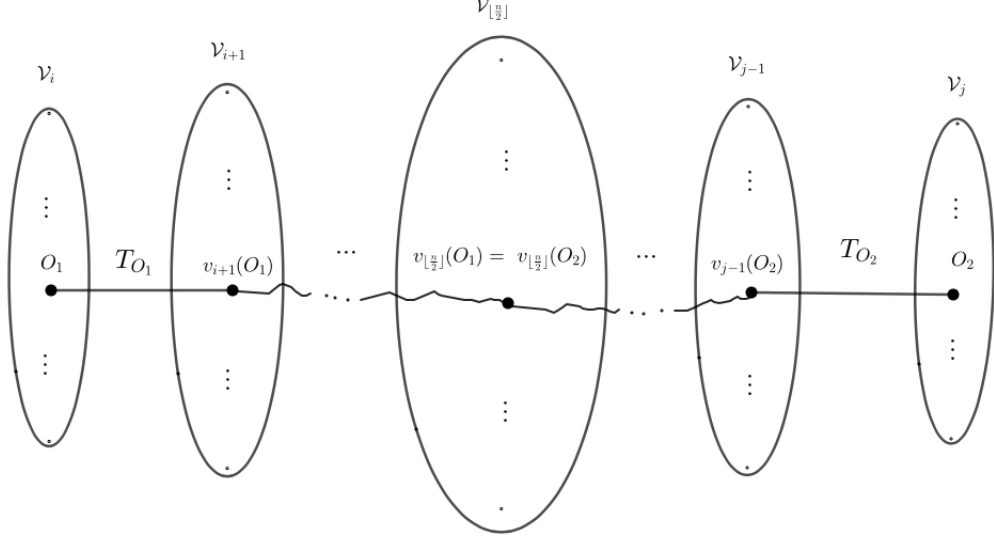


Figura 2.27: Representación de la suposición $V(T_{O_1}) \cap V(T_{O_2}) \neq \emptyset$ en el subcaso (2.3)

Veamos que P es función. Dado un vértice a de A , el conjunto de vecinos exteriores $O(a)$ es único, además por definición de \mathcal{O} se tiene $O(a) \in \mathcal{O}$, por lo que P es función, puesto que $Dom(\pi) = \mathcal{O}$.

P es inyectiva. Dados dos vértices distintos a_1 y a_2 de A , por el punto (2) del lema 2.2.1, tenemos en particular que $O(a_1) \neq O(a_2)$. Como π es inyectiva, entonces $\pi(O(a_1)) \neq \pi(O(a_2))$; es decir, $P(a_1) \neq P(a_2)$. Por lo que P es inyectiva.

Lo anterior nos lleva a $|A| \leq |\{X \subseteq B : |X| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}| = |\mathcal{V}_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}|$. Por otro lado teníamos $|A| = m$ y $|\mathcal{V}_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}| = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. De donde concluimos $m \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. ■

Observemos que para la conclusión en la necesidad del teorema 2.2.2 nos bastaba la inyectividad de π . Por otro lado, pedir que todo vértice sea un 3-rey implica que no hay transmisores. Así, dada la observación hecha al inicio en la demostración del teorema 2.2.1 (si $T(A, B)$ no tiene transmisores, entonces $|A| \geq 2$ y $|B| \geq 2$), podemos quitar $2 \leq n$ de las hipótesis iniciales y escribirlo dentro de la proposición de la siguiente manera:

Sean n y m enteros positivos tales que $n \leq m$. Entonces existe un torneo bipartito $T(A, B)$ con $|A| = m$, $|B| = n$ del tipo $(m, m; n, n)_3$ si y solo si $2 \leq n$ y $m \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

Teorema 2.2.3. [4] Sean m, n, p y q enteros tales que $m \geq p$, $n \geq q$ y $2 \leq q \leq p \leq \binom{q}{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor}$. Entonces existe un torneo bipartito $T(A, B)$ del tipo $(m, p; n, q)_3$.

Demostración. Como $2 \leq q \leq p \leq \binom{q}{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor}$, entonces por el teorema 2.2.2 existe un torneo bipartito $T(P, Q)$ de la forma $(p, p; q, q)_3$. Llamemos T_1 al torneo $T(P, Q)$ y F_1 a su conjunto de flechas.

2. TORNEOS BIPARTITOS CON 2-REYES Y 3-REYES

Definamos el torneo bipartito $T(A, B)$ con conjunto de flechas $F := F(T(A, B))$ como sigue:

1. $A := P \cup R$, con $P \cap R = \emptyset$ y $|R| = m - p$;
2. $B := Q \cup S$, con $Q \cap S = \emptyset$, $S \cap A = \emptyset$ y $|S| = n - q$;
3. $F := F_1 \cup \{(v, w) : v \in A, w \in S\} \cup \{(v, w) : v \in Q, w \in R\}$.

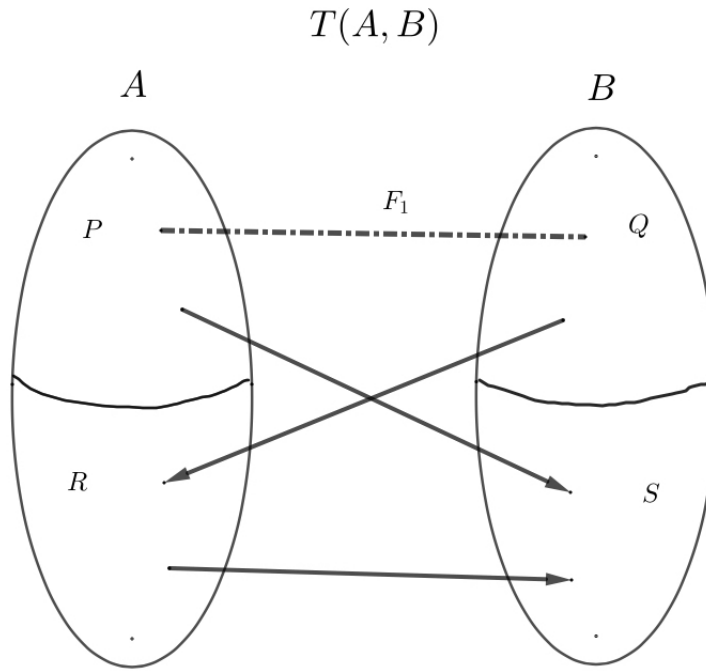


Figura 2.28: Representación de $T(A, B)$

Veamos que $T(A, B)$ es de la forma $(m, p; n, q)_3$. De hecho demostraremos que $K_3(T(A, B)) = P \cup Q$.

El tercer punto se puede reescribir en notación de conjuntos como $F = (F_1 \cup (A \times S) \cup (Q \times R)) = (F_1 \cup ((P \cup R) \times S) \cup (Q \times R)) = (F_1 \cup (P \times S) \cup (R \times S) \cup (Q \times R))$. Donde es claro que la unión es ajena, por la definición de P, Q, R y S . Además $(A \times A) \cap F = \emptyset$ y $(B \times B) \cap F = \emptyset$ puesto que $T(P, Q)$ es un torneo bipartito.

$T(A, B)$ está bien definido. Sean a un vértice de A y b un vértice de B , demostraremos que (a, b) ó (b, a) son flechas en F , pero no ambas simultáneamente; es decir, $\{(a, b), (b, a)\} \cap F \neq \emptyset$ y $\{(a, b), (b, a)\} \not\subseteq F$. Sabemos que $A = P \cup R$ y $B = Q \cup S$. Por la definición de F tenemos cuatro casos posibles:

1. $\{(a, b), (b, a)\} \cap F_1 \neq \emptyset$, si $a \in P$ y $b \in Q$;

2. $(a, b) \in F$, si $a \in P$ y $b \in S$;
3. $(a, b) \in F$, si $a \in R$ y $b \in S$;
4. $(b, a) \in F$, si $a \in R$ y $b \in Q$.

En el primer caso, como T_1 (así habíamos llamado a $T(P, Q)$) es un torneo bipartito, entre a y b hay una única flecha en alguna de las direcciones; es decir, $|\{(a, b), (b, a)\} \cap F_1| = 1$. Los demás casos no necesitan aclaración, por la definición de las flechas que se agregaron. Por estas propiedades vemos que $T(A, B)$ es un torneo bipartito bien definido y (A, B) es su bipartición. Llamaremos T a $T(A, B)$, usando la notación conveniente en cada caso.

Observemos que cada vértice de A domina a cada vértice de S ($A \rightarrow S$) y cada vértice de Q domina a cada vértice de R ($Q \rightarrow R$).

A continuación veamos que T es de la forma $(m, p; n, q)_3$. De hecho veremos que $K_3(T) = P \cup Q$.

Afirmación. Todos los vértices de P son 3-reyes en T .

Sean w un vértice de P y v un vértice de $V(T) \setminus \{w\}$.

Si v es un vértice de S , entonces $(w, v) \in F$ por construcción, lo que nos dice que $d_T(w, v) = 1$. Si v es un vértice de $(P \cup Q) \setminus \{w\}$, como T_1 es torneo bipartito de la forma $(p, p; q, q)_3$, tenemos que $d_{T_1}(w, v) \leq 3$. Además, puesto que T_1 es una subdígrafa inducida de T , se concluye que $d_T(w, v) \leq d_{T_1}(w, v) \leq 3$; es decir, $d_T(w, v) \leq 3$.

Por otro lado, si v está en R . Por ser w un 3-rey en T_1 , sabemos que $O_{T_1}(w) \neq \emptyset$ y $O_{T_1}(w) \subseteq Q$; es decir, existe un vértice u en Q tal que $(w, u) \in F_1$. Puesto que Q domina a R se tiene que $(u, v) \in F$, lo que implica que (w, u, v) es una wv -trayectoria en T . Así $d_T(w, v) = 2$.

Por lo tanto, si w es un vértice de P , tenemos $d_T(w, v) \leq 3$ para cualquier vértice v en $V(T) \setminus \{w\}$; es decir, todo vértice de P es un 3-rey.

Afirmación. Todos los vértices de Q son 3-reyes en T .

Sean w un vértice de Q y v un vértice de $V(T) \setminus \{w\}$, demostraremos que $d_T(w, v) \leq 3$.

Si v es un vértice de $(P \cup Q) \setminus \{w\}$, tendríamos $d_{T_1}(w, v) \leq 3$, puesto que todos los vértices de T_1 son 3-reyes en T_1 , y sabemos que $d_T(w, v) \leq d_{T_1}(w, v) \leq 3$; es decir, $d_T(w, v) \leq 3$. Cuando v es un vértice de R tenemos que $d_T(w, v) = 1$, pues por definición de F tenemos que todo vértice de Q domina a todo vértice de R .

Ahora bien, si v está en S , como $w \in Q$ y T_1 es torneo bipartito de la forma $(p, p; q, q)_3$, tenemos que $O_{T_1}(w) \neq \emptyset$; es decir, existe un vértice x en P tal que $(w, x) \in F_1$, lo que implica que $(w, x) \in F$, ya que T_1 es una subdígrafa de T . Además, para cualesquiera vértices a en A y s en S se tiene que $(a, s) \in F$, en particular $(x, v) \in F$; es decir, (w, x, v) es una trayectoria de longitud 2 en T , lo que implica que $d_T(w, v) = 2$. En general, si w es un vértice de Q , tenemos que $d_T(w, v) \leq 3$ para cualquier vértice v en $V(T) \setminus \{w\}$. Por lo que todo vértice de Q es un 3-rey.

2. TORNEOS BIPARTITOS CON 2-REYES Y 3-REYES

Hasta aquí hemos demostrado $(P \cup Q) \subseteq K_3(T)$. Veremos que $(R \cup S) \cap K_3(T) = \emptyset$.

Dado un vértice w en S , como $A \rightarrow S$, tenemos $O(w) = \emptyset$; es decir, w es un receptor, por lo que no puede ser un 3-rey. Por lo tanto $(S \cap K_3(T)) = \emptyset$. Por otro lado, de la definición de T sabemos que $R \rightarrow S$ y $Q \rightarrow R$, lo que equivale a decir que $O(w) = S$ para todo vértice w en R . Como $O(R) = S$ y $O(S) = \emptyset$, entonces no existen trayectorias dirigidas de R hacia P , por lo que $(R \cap K_3(T)) = \emptyset$. Lo anterior nos lleva a $(R \cup S) \cap K_3(T) = \emptyset$.

Los dos resultados anteriores, a saber $P \cup Q \subseteq K_3(T)$ y $(R \cup S) \cap K_3(T) = \emptyset$, implican que $P \cup Q = K_3(T)$. Por lo que T es de la forma $(m, p; n, q)_3$. ■

Con base en las demostraciones de los resultados anteriores, podemos ver que los torneos bipartitos donde cada uno de sus vértices es 3-rey, los podemos caracterizar a través de sus ciclos de longitud 4, lo cual nos lleva a establecer el siguiente resultado.

Teorema 2.2.4. *Sea $T(A, B)$ un torneo bipartito tal que $|A| = m$ y $|B| = n$. Entonces $T(A, B)$ es del tipo $(m, m; n, n)_3$ si y solo si, dados cualesquiera dos vértices distintos u y v , existe un ciclo dirigido γ de longitud cuatro tal que $\{u, v\} \subseteq V(\gamma)$.*

Demostración. Sea $T(A, B)$ un torneo bipartito, con $|A| = m$ y $|B| = n$. Supongamos que $T(A, B)$ es del tipo $(m, m; n, n)_3$.

Observemos que $|A| \geq 2$ y $|B| \geq 2$. En efecto, por definición de torneo bipartito tenemos que $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$. Así, tomando dos vértices a y b , con $a \in A$ y $b \in B$, como $T(A, B)$ es del tipo $(m, m; n, n)_3$, sabemos que $d(a, b) \leq 3$ y $d(b, a) \leq 3$. Tenemos dos casos mutuamente excluyentes: $a \rightarrow b$ o $b \rightarrow a$. Si $a \rightarrow b$, entonces $d(b, a) = 3$, por lo que existe (b, a_1, b_1, a) una ba -trayectoria dirigida de longitud tres, donde $a_1 \in A$, $b_1 \in B$, $a_1 \neq a$ y $b_1 \neq b$; es decir, $|A| \geq 2$ y $|B| \geq 2$. Análogamente, si $b \rightarrow a$, existe (a, b_1, a_1, b) una ab -trayectoria de longitud tres, con $a_1 \in A$, $b_1 \in B$, $a_1 \neq a$ y $b_1 \neq b$; esto es, $|A| \geq 2$ y $|B| \geq 2$. En cualquier caso $|A| \geq 2$ y $|B| \geq 2$.

Sean u y v dos vértices distintos de $T(A, B)$. Veamos que existe un ciclo γ dirigido de longitud cuatro tal que $\{u, v\} \subseteq V(\gamma)$.

Caso 1. $\{u, v\} \subseteq A$ o $\{u, v\} \subseteq B$.

Consideraremos $\{u, v\} \subseteq A$, el caso $\{u, v\} \subseteq B$ es análogo. Sabemos que $d(u, v) \leq 3$ y $d(v, u) \leq 3$, puesto que tanto u como v son 3-reyes. Como $\{u, v\} \subseteq A$, entonces $d(u, v) = 2$ y $d(v, u) = 2$. Sean $P_1 = (u, b_1, v)$ una uv -trayectoria dirigida de longitud dos y $P_2 = (v, b_2, u)$ una vu -trayectoria dirigida de longitud dos (note que $b_1 \neq b_2$, puesto que $u \rightarrow b_1$ y $b_2 \rightarrow u$). Entonces $\gamma = (u, b_1, v, b_2, u)$ es un ciclo dirigido de longitud cuatro tal que $\{u, v\} \subseteq V(\gamma)$. En la figura 2.29 podemos ver este caso.

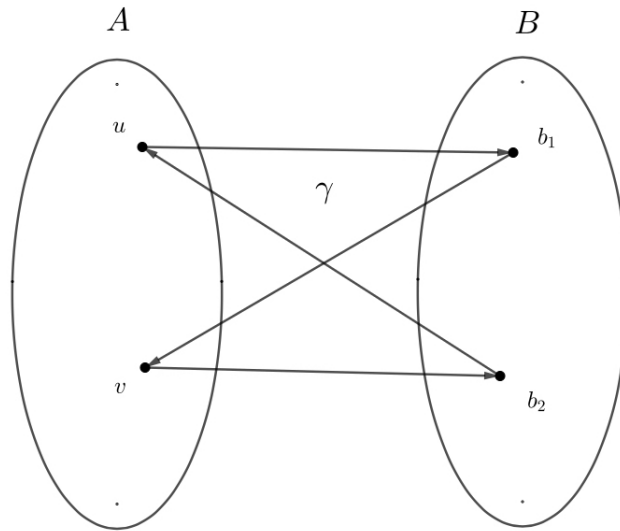


Figura 2.29: Representación del caso (1) tomando $\{u, v\} \subseteq A$

Caso 2. $\{u, v\} \cap A \neq \emptyset$ y $\{u, v\} \cap B \neq \emptyset$.

Sin perder generalidad, supongamos $u \in A$ y $v \in B$. Consideremos dos subcasos.

Subcaso 1. $u \rightarrow v$.

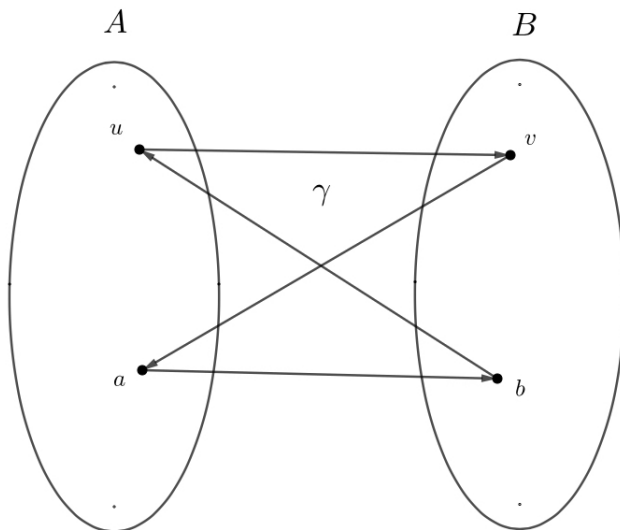


Figura 2.30: Representación del caso (2), subcaso (1), $u \rightarrow v$

2. TORNEOS BIPARTITOS CON 2-REYES Y 3-REYES

Esto significa que $d(v, u) \neq 1$, como v es un 3-rey, entonces $d(v, u) = 3$. Tomando una vu -trayectoria dirigida de longitud tres $P = (v, a, b, u)$, tenemos que $(u, v) \cup P$ es un ciclo dirigido de longitud cuatro, del cual u y v son vértices, lo que se ilustra en la figura 2.30.

Subcaso 2. $v \rightarrow u$.

Análogamente al subcaso (1), en este subcaso $d(u, v) = 3$. Si $P_1 = (u, b, a, v)$ es una uv -trayectoria dirigida de longitud tres, entonces $(v, u) \cup P_1$ es un ciclo dirigido de longitud cuatro, del cual u y v son vértices.

Por los casos anteriores, para cualesquiera dos vértices distintos en $V(T(A, B))$, existe un ciclo dirigido de longitud cuatro del cual u y v son vértices.

Ahora veremos la suficiencia del enunciado de este teorema.

Supongamos que para cualesquiera u y v vértices distintos $T(A, B)$ existe un ciclo dirigido de longitud cuatro del cual u y v son vértices. Veamos que $T(A, B)$ es del tipo $(m, m; n, n)_3$; es decir, todo vértice de $T(A, B)$ es un 3-rey.

Antes que nada, observemos que $|A| \geq 2$ y $|B| \geq 2$. En efecto, por definición de torneo bipartito tenemos que $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$. Así, tomando dos vértices a y b , con $a \in A$ y $b \in B$, como existe un ciclo dirigido $(a_1, b_1, a_2, b_2, a_1)$ del cual a y b son vértices, con $\{a_1, a_2\} \subseteq A$ y $\{b_1, b_2\} \subseteq B$, entonces $|A| \geq 2$ y $|B| \geq 2$, puesto que $a_1 \neq a_2$ y $b_1 \neq b_2$ (por definición de ciclo dirigido).

Sea v un vértice de $T(A, B)$. Veamos que v es un 3-rey.

Sea u un vértice en $V(T(A, B)) \setminus \{v\}$. Demostraremos que $d(v, u) \leq 3$. Tenemos los siguientes casos.

Caso 1. $\{u, v\} \subseteq A$ o $\{u, v\} \subseteq B$.

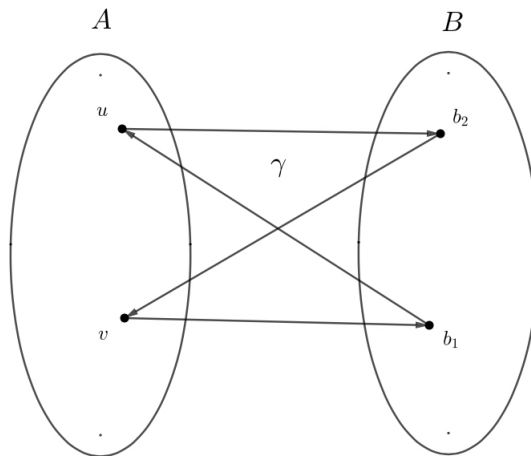


Figura 2.31: Representación del caso (1), tomando $\{u, v\} \subseteq A$

Sin perder generalidad, supongamos que $\{u, v\} \subseteq A$ (el caso $\{u, v\} \subseteq B$ es análogo). Sabemos que existe un ciclo dirigido de longitud cuatro (v, b_1, u, b_2, v) , con $\{u, v\} \subseteq A$ y $\{b_1, b_2\} \subseteq B$. Tenemos que (v, b_1, u) es una vu -trayectoria dirigida de longitud dos; es decir, $d(v, u) = 2 \leq 3$ (ver la figura 2.31).

Caso 2. Se cumple que $v \in A$ y $u \in B$ o se cumple que $u \in A$ y $v \in B$.

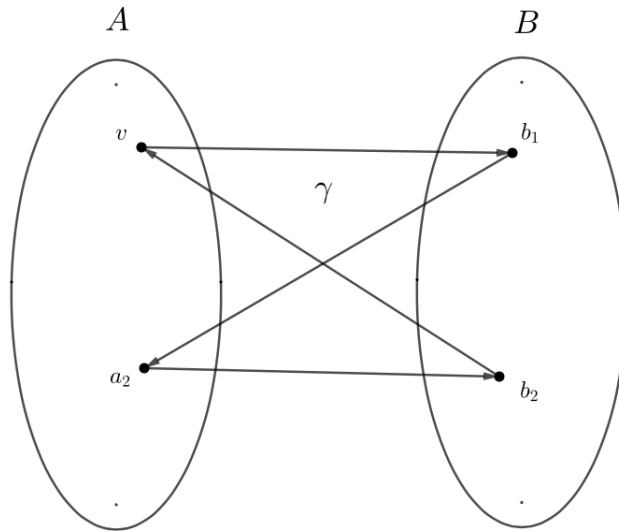


Figura 2.32: Representación del caso (2), tomando $v \in A$ y $u \in B$

Supongamos $v \in A$ y $u \in B$ (el caso $u \in A$ y $v \in B$, se resuelve de forma análoga). Sabemos que existe un ciclo dirigido de longitud cuatro (v, b_1, a_2, b_2, v) , con $\{v, a_2\} \subseteq A$ y $\{b_1, b_2\} \subseteq B$, tal que $u \in \{b_1, b_2\}$. Por definición de torneo bipartito, tenemos que $v \rightarrow u$ o $u \rightarrow v$. Si $v \rightarrow u$, entonces $d(v, u) = 1$ (y por lo tanto $u = b_1$). Si $u \rightarrow v$, como $u \in \{b_1, b_2\}$, entonces $u = b_2$; es decir, (v, b_1, a_2, u) es una vu -trayectoria dirigida de longitud tres (ver la figura 2.32). Por lo tanto $d(v, u) = 3$.

Por los casos (1) y (2) v es un 3-rey.

Así, $T(A, B)$ es del tipo $(m, m; n, n)_3$. ■

Observemos que el teorema 2.2.2 nos da condiciones necesarias y suficientes para la existencia de torneos bipartitos $T(A, B)$ del tipo $(m, m; n, n)_3$, estas condiciones relacionan las cardinalidades de las partes A y B . Por otro lado, el teorema 2.2.4 nos da una caracterización estructural de los torneos bipartitos $T(A, B)$ del tipo $(m, m; n, n)_3$.

Hasta aquí hemos visto que para cualesquiera enteros positivos m y n , existen torneos bipartitos $T(A, B)$, con $|A| = m$ y $|B| = n$, de los siguientes tipos:

- a. $(m, 1; n, 0)_k$, con $k \geq 2$;

2. TORNEOS BIPARTITOS CON 2-REYES Y 3-REYES

- b. $(m, 0; n, 1)_k$, con $k \geq 2$;
- c. $(m, 0; n, 0)_k$, con $k \geq 2$ y $\max\{|A|, |B|\} \geq 2$;
- d. $(m, p; n, q)_3$, con $m \geq p \geq 2$, $n \geq q \geq 2$ y $\max\{p, q\} \leq \binom{\min\{p, q\}}{\lfloor \frac{\min\{p, q\}}{2} \rfloor}$.

Podemos dar torneos bipartitos de los tipos (a) y (b) usando el corolario 2.1.2. Para el inciso (c), podemos utilizar el teorema 2.1.1, mientras que la condición $\max\{|A|, |B|\} \geq 2$ está dada por el lema 2.1.2. Si no se cumple la condición $\max\{|A|, |B|\} \geq 2$, esto significa $|A| = 1 = |B|$, y por el lema 2.1.1 sabemos que hay transmisores. Luego por el lema 2.1.2 no puede haber dos o más transmisores, lo que implica que hay un único transmisor, de ahí que, por el corolario 2.1.2, caemos en los casos (a) o (b) de la lista anterior, según en qué parte se encuentre el transmisor (si se encuentra en A estamos en el inciso (a), si se encuentra en B caemos en (b)).

La lista anterior no agota todos los casos para el tipo $(m, p; n, q)_3$ de torneos bipartitos según la cantidad y distribución de sus 3-reyes en las partes A y B . solo agota los casos $\{p, q\} = \{0, 1\}$ (incisos (a) y (b)), $\{p, q\} = \{0\}$ (inciso (c)) y $\{p, q\} \cap \{0, 1\} = \emptyset$ (inciso (d)). Nos falta considerar los siguientes casos:

- e. $(m, p; n, q)_3$ con $\{p, q\} = \{1\}$ y;
- f. $(m, p; n, q)_3$ con $|\{p, q\} \cap \{0, 1\}| = 1$ y $p \neq q$.

Si $T(A, B)$ tiene transmisores, entonces $T(A, B)$ es de alguno de los tipos (a), (b) o (c), según sea el caso, de acuerdo al teorema 2.1.1 o al corolario 2.1.2; es decir, si $T(A, B)$ tiene un único transmisor, el corolario 2.1.2 nos dice que es del tipo (a) o (b), si $T(A, B)$ tiene al menos dos transmisores, el teorema 2.1.1 nos dice que es del tipo (c). Por lo que, para los casos (e) y (f), $T(A, B)$ no tiene transmisores.

Si $\min\{|A|, |B|\} = 1$, por el lema 2.1.1 sabemos que $T(A, B)$ tiene transmisores, por lo que es de alguno de los tipos (a), (b) o (c).

En el resto de este capítulo veremos bajo qué condiciones existen torneos bipartitos $T(A, B)$ de los tipos (e) y (f). El siguiente lema será de utilidad para futuras demostraciones.

Lema 2.2.3. *Sea $T(A, B)$ un torneo bipartito sin transmisores con $2 = |A| \leq |B| = n$. Entonces:*

1. $T(A, B)$ es del tipo $(2, 2; n, q)_3$ con $q \in \{0, 1, 2\}$;
2. Si $q = 0$, entonces $n \geq 4$;
3. Si $q = 1$, entonces $n \geq 3$.

Demostración Supongamos que $A = \{u, v\}$. Primero veremos que u y v son 3-reyes. Después veremos qué ocurre con los vértices de B .

Afirmamos que $O(u) \cup O(v) = B$. En efecto, sabemos que $O(u) \subseteq B$ y $O(v) \subseteq B$, por lo que $O(u) \cup O(v) \subseteq B$. Por otro lado, dado un vértice w en B , como w no es un transmisor, entonces u domina a w o v domina a w ; es decir, $w \in O(u)$ o $w \in O(v)$, lo que implica que $w \in O(u) \cup O(v)$. Por lo tanto $B \subseteq O(u) \cup O(v)$. Por lo anterior tenemos que $O(u) \cup O(v) = B$.

Como $O(u) \cup O(v) = B$, podemos considerar a B como la unión ajena de tres conjuntos:

$$B = (O(u) \setminus O(v)) \cup (O(v) \setminus O(u)) \cup (O(u) \cap O(v)). \quad (2.1)$$

Afirmamos que $O(u) \setminus O(v)$ y $O(v) \setminus O(u)$ son no vacíos. Demostraremos que $O(u) \setminus O(v)$ es no vacío, la demostración para $O(v) \setminus O(u)$ es análoga. Como $T(A, B)$ no tiene transmisores, en particular v no es transmisor, por lo que existe un vértice w en B tal que w domina a v ($w \in I(v)$). Puesto que $B = O(u) \cup O(v)$ y $w \notin O(v)$, entonces $w \in O(u)$; es decir, $w \in O(u) \setminus O(v)$. Por lo tanto $O(u) \setminus O(v) \neq \emptyset$. Ya que u no es transmisor, la demostración de $O(v) \setminus O(u) \neq \emptyset$ es análoga.

De lo anterior, $O(u) \not\subseteq O(v)$ y $O(v) \not\subseteq O(u)$. Además, por hipótesis no hay transmisores en $T(A, B)$, en particular no hay transmisores en B . Por lo tanto, por el lema 2.2.1, tenemos que u y v son 3-reyes. De esta manera, $T(A, B)$ es del tipo $(2, 2; n, q)_3$.

Ahora veremos que $q \in \{0, 1, 2\}$.

Considerando la ecuación en 2.1, veamos cuántos 3-reyes puede tener cada conjunto de la unión ajena.

Afirmación. Tanto $O(u) \setminus O(v)$ como $O(v) \setminus O(u)$ tienen a lo más un 3-rey, respectivamente.

Demostraremos que $O(u) \setminus O(v)$ tiene a lo más un 3-rey. La demostración de que $O(v) \setminus O(u)$ tiene a lo más un 3-rey es análoga.

Sea x un vértice en $O(u) \setminus O(v)$, tenemos que $x \rightarrow v \rightarrow O(v)$; es decir, para todo vértice y en $O(v) \cup \{v\}$, se tiene $d(x, y) \leq 2 < 3$. Además, como $O(v) \setminus O(u) \subseteq O(v)$, $O(v) \setminus O(u) \neq \emptyset$ y todo vértice t en $O(v) \setminus O(u)$ domina a u , entonces $x \rightarrow v \rightarrow t \rightarrow u$ es una trayectoria dirigida de longitud tres. Por otro lado $x \in O(u) \setminus O(v)$, entonces $u \rightarrow x$, lo que implica que $d(x, u) = 3$. Lo anterior nos dice que para todo vértice z en $V(T(A, B)) \setminus (O(u) \setminus O(v))$, se tiene que $d(x, z) \leq 3$.

Consideremos dos casos sobre $|O(u) \setminus O(v)|$:

Caso 1. $|O(u) \setminus O(v)| = 1$.

En este caso, sea x_0 el único vértice en $O(u) \setminus O(v)$. Por lo visto anteriormente se concluye que x_0 es un 3-rey.

Caso 2. $|O(u) \setminus O(v)| > 1$.

Sean w y y dos vértices distintos en $O(u) \setminus O(v)$. Como u y v son los únicos vértices en A , por definición de $O(u) \setminus O(v)$ tenemos que $O(y) = \{v\} = O(w)$, por lo que no hay yw -trayectorias dirigidas de longitud dos ni wy -trayectorias dirigidas de longitud dos. Como $\{y, w\} \subseteq B$, entonces $d(y, w) \geq 4$ y $d(w, y) \geq 4$, esto implica que ni y ni w son 3-reyes. Por lo tanto, en este caso no hay 3-reyes en el conjunto $O(u) \setminus O(v)$.

Así, de los casos anteriores se concluye que $O(u) \setminus O(v)$ tiene a lo más un 3-rey.

De manera análoga demostramos que $O(v) \setminus O(u)$ tiene a lo más un 3-rey, y lo tiene precisamente en el caso $|O(v) \setminus O(u)| = 1$.

2. TORNEOS BIPARTITOS CON 2-REYES Y 3-REYES

Por otro lado, $O(u) \cap O(v)$ puede ser o no ser vacío. Si $O(u) \cap O(v)$ es no vacío, vemos que sus elementos son receptores, puesto que no dominan a ningún vértice en A (recordemos que $A = \{u, v\}$). En cualquier caso, no hay 3-reyes en $(O(u) \cap O(v))$.

Hasta aquí hemos demostrado el punto (1) del lema 2.2.3. Ahora veamos los puntos (2) y (3).

Sean $B_1 = O(u) \setminus O(v)$, $B_2 = O(u) \cap O(v)$, $B_3 = O(v) \setminus O(u)$, $q_1 = |B_1|$, $q_2 = |B_2|$ y $q_3 = |B_3|$ (ver la figura 2.33). Sabemos que $q_1 \geq 1$ y $q_3 \geq 1$, así que, por lo dicho anteriormente tenemos tres casos:

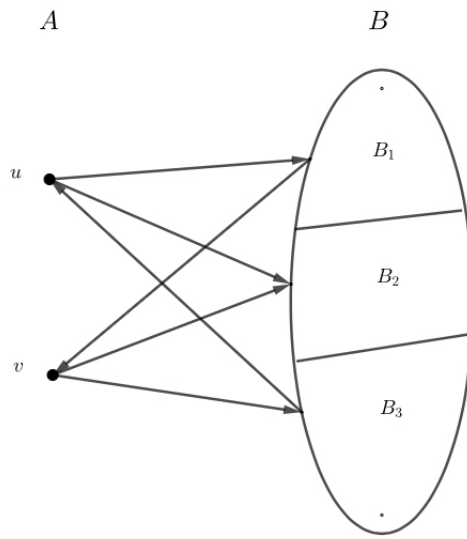


Figura 2.33: Representación de $T(A, B)$

Caso 1. $\{q_1, q_3\} = \{1\}$.

Como $q_1 = 1 = q_3$, se sigue del caso (1) de la afirmación que B_1 y B_3 , respectivamente, tienen exactamente un 3-rey. Mientras que los vértices en B_2 , de ser no vacío, nunca son 3-reyes. Entonces $T(A, B)$ es del tipo $(2, 2; n, 2)_3$.

Caso 2. $\{q_1, q_3\} \neq \{1\}$ y $1 \in \{q_1, q_3\}$.

En este caso, solo uno de los conjuntos B_1 o B_3 tiene un único vértice, el otro tiene al menos dos, por lo que B tiene al menos tres vértices. Como se vio en la afirmación, el vértice que es único en el conjunto correspondiente es un 3-rey, mientras que ninguno de los vértices del otro conjunto es 3-rey, así como tampoco lo son los vértices de B_2 . Por lo tanto, en este caso, $T(A, B)$ es del tipo $(2, 2; n, 1)_3$, con $n \geq 3$.

Caso 3. $\{q_1, q_3\} \cap \{1\} = \emptyset$.

En este caso, $q_1 \geq 2$ y $q_3 \geq 2$; es decir, tanto B_1 como B_3 tienen al menos dos vértices, por lo que no tienen 3-reyes. Lo anterior nos dice, además, que B tiene al menos cuatro vértices. Como

B_2 no tiene 3-reyes, entonces $T(A, B)$ es del tipo $(2, 2; n, 0)_3$, con $n \geq 4$.

Veamos que se cumple el inciso (2) del lema 2.2.3. Si $q = 0$, por la demostración de la afirmación tenemos que $q_1 \geq 2$ y $q_3 \geq 2$, lo que implica que $\{q_1, q_3\} \cap \{1\} = \emptyset$. Por el caso (3) anterior, tenemos que $n \geq 4$.

Veamos que se cumple el inciso (3) del lema 2.2.3. Si $q = 1$, por la demostración de la afirmación tenemos que se cumple $q_1 = 1$ o $q_3 = 1$, pero no ambas simultáneamente. Así, estamos en el caso $\{q_1, q_3\} \neq \{1\}$ y $1 \in \{q_1, q_3\}$. Por el caso (2) anterior, tenemos que $n \geq 3$.

Por lo tanto, quedan demostrados los puntos (2) y (3) del lema 2.2.3. ■

Con el resultado anterior hemos agotado los posibles tipos de torneos bipartitos $(m, p; n, q)_3$ cuando $\min\{m, n\}$ es a lo más 2. De ahora en adelante podemos tomar $m \geq 3$ y $n \geq 3$.

Los siguientes resultados de este capítulo son parte de un esfuerzo por completar los casos de torneos bipartitos con 3-reyes. Nos gustaría asegurar la validez o dar un contraejemplo para la suficiencia de los teoremas 2.2.5 y 2.2.6, lo que dejamos pendiente para otro trabajo.

Lema 2.2.4. *Si m y n son enteros tales que $m \geq 3$ y $n \geq 3$, entonces existen torneos bipartitos $T(A, B)$, con $|A| = m$ y $|B| = n$, del tipo $(m, 1; n, 1)_3$.*

Demostración. Sean A y B conjuntos ajenos tales que $|A| = m$ y $|B| = n$. Tomemos dos elementos, u en A y v en B . Definimos el torneo bipartito $T(A, B)$ de la siguiente forma:

$$V(T(A, B)) = A \cup B;$$

$$F(T(A, B)) = \{(u, v)\} \cup \{(v, x) : x \in A \setminus \{u\}\} \cup \{(x, y) : x \in A \setminus \{u\}, y \in B \setminus \{v\}\} \cup \{(y, u) : y \in B \setminus \{v\}\}.$$

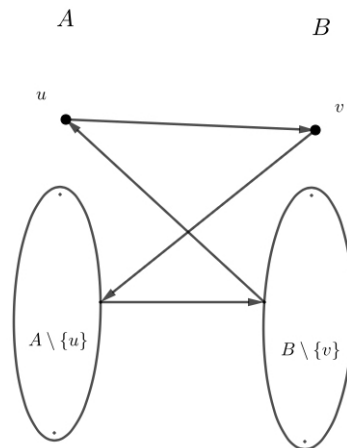


Figura 2.34: Representación de $T(A, B)$

2. TORNEOS BIPARTITOS CON 2-REYES Y 3-REYES

Observemos que $T(A, B)$ está bien definido; no hay flechas entre los elementos de A ; no hay flechas entre los elementos de B y dado a en A y b en B , entonces (a, b) está en $F(T(A, B))$ o (b, a) está en $F(T(A, B))$, pero no ambas simultáneamente (ver la figura 2.34).

Veremos que u y v son los únicos 3-reyes en $T(A, B)$. Para ello demostraremos que $T(A, B)$ no tiene transmisores y después usaremos el lema 2.2.1.

Afirmación. $T(A, B)$ no tiene transmisores.

Como $|A| \geq 3$ y $|B| \geq 3$, entonces $A \setminus \{u\}$ y $B \setminus \{v\}$ son no vacíos. Sea w un vértice en $V(T(A, B))$. Tomemos los siguientes casos:

Caso 1. $w = u$.

Como $B \setminus \{v\} \neq \emptyset$, por definición de $F(T(A, B))$ existe y en $B \setminus \{v\}$, tal que $y \rightarrow w$, por lo que $I(w) \neq \emptyset$; es decir, w no es transmisor.

Caso 2. $w = v$.

Por definición de $F(T(A, B))$, se tiene que $u \rightarrow w$, entonces w no es transmisor.

Caso 3. w está en $A \setminus \{u\}$.

Por definición de $F(T(A, B))$, tenemos que $v \rightarrow w$, por lo que w no es transmisor.

Caso 4. w está en $B \setminus \{v\}$.

Como $A \setminus \{u\}$ es no vacío, por definición de $F(T(A, B))$, existe x en $A \setminus \{u\}$ tal que $x \rightarrow w$, esto es, w no es transmisor.

Los casos anteriores agotan las posibilidades para w , por lo que concluimos que $T(A, B)$ no tiene transmisores.

Ya que $T(A, B)$ no tiene transmisores, para demostrar que un vértice z es 3-rey, por el lema 2.2.1, basta demostrar que su conjunto de vecinos exteriores no está contenido en el conjunto de vecinos exteriores de ningún otro vértice en la misma parte (A o B) que z . Recíprocamente, si queremos demostrar que z no es 3-rey, entonces basta demostrar que existe un vértice t distinto de z en la misma parte que z , tal que $O(z) \subseteq O(t)$.

Recordemos que $|A \setminus \{u\}| \geq 2$ y $|B \setminus \{v\}| \geq 2$, ya que $|A| \geq 3$ y $|B| \geq 3$.

Veamos que u es 3-rey. Sea x un vértice en $A \setminus \{u\}$. Tenemos que $v \rightarrow x$; es decir, $v \notin O(x)$. Por otro lado $u \rightarrow v$; esto es, $v \in O(u)$. Entonces $O(u) \not\subseteq O(x)$. El lema 2.2.1 implica que u es un 3-rey.

Demostraremos que v es 3-rey. Sea y en $A \setminus \{v\}$. Dado x en $A \setminus \{u\}$, por definición de $F(T(A, B))$ tenemos $v \rightarrow x$ y $x \rightarrow y$; esto es, $x \in O(v)$ y $x \notin O(y)$, por lo que $O(v) \not\subseteq O(y)$. Por lo tanto v es 3-rey, por el lema 2.2.1.

Ahora demostraremos que no hay 3-reyes en $A \setminus \{u\}$. Sea x en $A \setminus \{u\}$. Entonces $O(x) = B \setminus \{v\}$.

Como $|A \setminus \{u\}| \geq 2$, existe x_1 en $A \setminus \{u\}$, con $x_1 \neq x$. En particular $O(x) = B \setminus \{v\} = O(x_1)$. Por el lema 2.2.1, x no es 3-rey. Por lo tanto, no hay 3-reyes en $A \setminus \{u\}$.

Veamos que no hay 3-reyes en $B \setminus \{v\}$. Sea y en $B \setminus \{v\}$. Como $|B \setminus \{v\}| \geq 2$, existe y_1 en $B \setminus \{v\}$, con $y_1 \neq y$. Entonces, por definición de $F(T(A, B))$, tenemos $O(y) = \{u\} = O(y_1)$. Por el lema 2.2.1 y no es 3-rey; es decir, no hay 3-reyes en $B \setminus \{v\}$.

Por lo anterior, el torneo bipartito $T(A, B)$ es del tipo $(m, 1; n, 1)_3$. ■

Teorema 2.2.5. Sean m, n y q enteros tales que $m \geq 3, n \geq 3$ y $n \geq q \geq 2$. Si $q \leq \binom{m-3}{\lfloor \frac{m-3}{2} \rfloor} + 1$, entonces existe un torneo bipartito $T(A, B)$ con $|A| = m$ y $|B| = n$, del tipo $(m, 1; n, q)_3$.

Demostración. Supongamos que $q \leq \binom{m-3}{\lfloor \frac{m-3}{2} \rfloor} + 1$; es decir, $q - 1 \leq \binom{m-3}{\lfloor \frac{m-3}{2} \rfloor}$. Construiremos un torneo bipartito del tipo $(m, 1; n, q)_3$.

Sean $A := \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ y $B := \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ conjuntos ajenos. Definamos:

$$A_1 := \{x_1\};$$

$$A_2 := \{x_2, x_3\};$$

$$A_3 := \{x_i : 3 < i \leq q + 2\};$$

$$A_4 := \{x_i : q + 2 < i \leq m\};$$

$$B_1 := \{y_1\};$$

$$B_2 := \{y_2, \dots, y_q\};$$

$$B_3 := \{y_i : q < i \leq n\}.$$

Estos conjuntos son ajenos dos a dos, con $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ y $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$.

Como $m \geq 3$ y $q \geq 2$, tenemos que A_1, A_2, B_1 y B_2 son no vacíos. Mientras que los otros conjuntos pueden ser vacíos, o pueden no serlo, de acuerdo a los valores de m, n y q .

Observemos que:

1. $0 \leq |A_3| \leq q - 1$;
2. Si $A_4 \neq \emptyset$ tenemos $|A_3| = q - 1$;
3. Si $A_4 = \emptyset$, entonces $|A_3| = m - 3 \leq q - 1$;
4. Sabemos que $k \leq \binom{k}{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}$ para todo entero no negativo k .

En base a los puntos anteriores, tenemos lo siguiente:

Si estamos en el caso (2), como por (4) tenemos que $q - 1 \leq \binom{q-1}{\lfloor \frac{q-1}{2} \rfloor}$, entonces

$|A_3| = q - 1 \leq \binom{q-1}{\lfloor \frac{q-1}{2} \rfloor} = \binom{|A_3|}{\lfloor \frac{|A_3|}{2} \rfloor}$. Por otro lado, si estamos en el caso (3), como la hipótesis del teorema 2.2.5 nos dice que $q - 1 \leq \binom{m-3}{\lfloor \frac{m-3}{2} \rfloor}$, entonces se tiene

2. TORNEOS BIPARTITOS CON 2-REYES Y 3-REYES

$|A_3| = m - 3 \leq q - 1 \leq \binom{m-3}{\lfloor \frac{m-3}{2} \rfloor} = \binom{|A_3|}{\lfloor \frac{|A_3|}{2} \rfloor}$. En cualquiera de los casos $|A_3| \leq q - 1 \leq \binom{|A_3|}{\lfloor \frac{|A_3|}{2} \rfloor}$. Puesto que $|B_2| = q - 1$, entonces:

$$|A_3| \leq |B_2| \leq \binom{|A_3|}{\lfloor \frac{|A_3|}{2} \rfloor} \quad (2.2)$$

Veamos qué ocurre con A_3 y B_2 .

Si $|A_3| < 2$, tenemos que $|A_3| \in \{0, 1\}$. Como $\binom{0}{\lfloor \frac{0}{2} \rfloor} = \binom{0}{0} = 1 = \binom{1}{0} = \binom{1}{\lfloor \frac{1}{2} \rfloor}$ y $|B_2| \leq \binom{|A_3|}{\lfloor \frac{|A_3|}{2} \rfloor}$, entonces $|B_2| \leq 1$, además $B_2 \neq \emptyset$, por lo que $|B_2| = 1$; es decir, $B_2 = \{y_2\}$ y $q = 2$. Por otro lado, si $2 \leq |A_3|$, por el teorema 2.2.2, existe $T_1 := T(A_3, B_2)$ torneo bipartito del tipo $(|A_3|, |A_3|; |B_2|, |B_2|)_3$; es decir, del tipo $(|A_3|, |A_3|; q - 1, q - 1)_3$.

Utilizando lo anterior, definimos $T(A, B)$ como sigue:

$$V(T(A, B)) := A \cup B;$$

$$F(T(A, B)) := \{(u, v) : u \in A, v \in B_3\} \cup \{(v, u) : v \in B_1 \cup B_2, u \in A_4\} \cup \{(x_1, y_1)\} \cup \{(y_1, u) : u \in A_2 \cup A_3\} \cup \{(u, v) : u \in A_2, v \in B_2\} \cup \{(v, x_1) : v \in B_2\} \cup F_0.$$

Donde F_0 es igual a:

$$B_2 \times A_3 \text{ si } |A_3| < 2 \text{ o;}$$

$$F(T(A_3, B_2)) \text{ si } |A_3| \geq 2.$$

Podemos reescribir a F como:

$$F = (A \times B_3) \cup ((B_1 \cup B_2) \times A_4) \cup \{(x_1, y_1)\} \cup (\{y_1\} \times (A_2 \cup A_3)) \cup (A_2 \times B_2) \cup (B_2 \times \{x_1\}) \cup F_0.$$

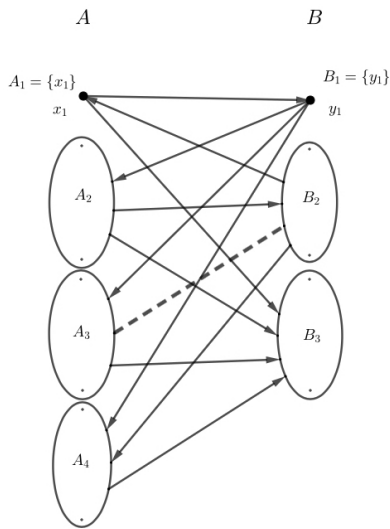


Figura 2.35: Representación de $T(A, B)$. La línea punteada representa a F_0

Donde vemos que, en efecto, $T(A, B)$ está bien definido; es decir, $T(A, B)$ es un torneo bipartito (ver la figura 2.35). Demostraremos que $T(A, B)$ es del tipo $(m, 1; n, q)_3$.

Observemos que $T(A, B)$ no tiene transmisores. Sea u un vértice en $V(T(A, B))$. Si u está en A , entonces $u = x_1$ o $u \in A \setminus \{x_1\}$. Como $B_2 \rightarrow x_1$ (con B_2 no vacío) y $y_1 \rightarrow A \setminus \{x_1\}$, en cualquier caso, u no es transmisor. Si u está en B , tenemos que $u = y_1$ o $u \in B \setminus \{y_1\}$. De la definición de $F(T(A, B))$ vemos que $x_1 \rightarrow y_1$ y $A_2 \rightarrow B \setminus \{y_1\}$ (con A_2 no vacío). Por lo que en estos casos u tampoco es transmisor. De lo anterior se concluye que $T(A, B)$ no tiene transmisores.

En lo siguiente, llamaremos T a $T(A, B)$ y T_1 a $T(A_3, B_2)$ cuando sea conveniente.

Afirmamos que x_1 es el único 3-rey en A . De la definición de $F(T(A, B))$ tenemos que $x_1 \rightarrow y_1$ y $y_1 \rightarrow A \setminus \{x_1\}$. Como $T(A, B)$ no tiene transmisores, por el teorema 2.2.1, x_1 es un 3-rey. Por otro lado, para todo vértice u en $A \setminus \{x_1\}$ sabemos que $O_T(u) \subseteq B \setminus \{y_1\}$, con $O_T(x_2) = B \setminus \{y_1\} = O_T(x_3)$ y $x_2 \neq x_3$. Lo anterior implica que para todo vértice u en $A \setminus \{x_1\}$ existe un vértice w en $A \setminus \{x_1, u\}$ tal que $O_T(u) \subseteq O_T(w)$, como $T(A, B)$ no tiene transmisores, por el lema 2.2.1 sabemos que u no es un 3-rey; es decir, no hay 3-reyes en $A \setminus \{x_1\}$. Por lo tanto x_1 es el único 3-rey en A .

Afirmamos que $K_3(T(A, B)) \cap B = B_1 \cup B_2$. Sabemos que $A \rightarrow B_3$, por lo que cada vértice de B_3 es un receptor. Esto implica que no hay 3-reyes en B_3 . Usaremos el lema 2.2.1 para ver que cada vértice en $B_1 \cup B_2$ es un 3-rey. Como $B_1 \rightarrow A_2$ (con $B_1 = \{y_1\}$ y $A_2 \neq \emptyset$) y $B_2 \rightarrow x_1$, para todo vértice v en $B_1 \cup B_2$ tenemos que $O_T(v) \neq \emptyset$. Puesto que $T(A, B)$ no tiene transmisores y para todo y en B_3 se tiene $O_T(y) = \emptyset$, basta demostrar que para cualesquiera vértices distintos v y w en $B_1 \cup B_2$ se tiene $O_T(v) \not\subseteq O_T(w)$ y $O_T(w) \not\subseteq O_T(v)$.

Sean v y w dos vértices distintos en $B_1 \cup B_2$. Tomaremos dos casos:

Caso 1. $\{v, w\} \subseteq B_2$.

Observemos que para todo vértice x en B_2 tenemos:

1. $O_T(x) = A_1 \cup A_3 \cup A_4$ si $|A_3| < 2$ o;
2. $O_T(x) = A_1 \cup O_{T_1}(x) \cup A_4$ si $|A_3| \geq 2$.

Donde $A_1 \neq \emptyset$, $O_{T_1}(x) \subseteq A_3$ y se tiene que A_1, A_3 y A_4 son ajenos dos a dos. Por lo visto anteriormente, sabemos que si $|A_3| < 2$ entonces $|B_2| = 1$, pero la hipótesis de este caso (1) nos dice que $|B_2| \geq 2$. Por lo tanto, $|A_3| \geq 2$ lo que implica que se tiene la conclusión del punto (2); es decir, $O_T(v) = O_{T_1}(v) \cup A_1 \cup A_4$ y $O_T(w) = O_{T_1}(w) \cup A_1 \cup A_4$, donde cada unión es ajena. Además $O_{T_1}(v) \not\subseteq O_{T_1}(w)$ y $O_{T_1}(w) \not\subseteq O_{T_1}(v)$, ya que v y w son 3-reyes en T_1 , por lo que $O_T(v) \not\subseteq O_T(w)$ y $O_T(w) \not\subseteq O_T(v)$.

Caso 2. $\{v, w\} \not\subseteq B_2$.

En este caso tenemos que $y_1 \in \{v, w\}$. Sin perder generalidad, supongamos que $v = y_1$ y $w \in B_2$. Por definición de las flechas de $T(A, B)$ sabemos que $y_1 \rightarrow A_2 \rightarrow B_2$ (donde $A_2 \neq \emptyset$) y $B_2 \rightarrow x_1 \rightarrow y_1$. Como $v = y_1$ y $w \in B_2$, lo anterior implica que $v \rightarrow A_2 \rightarrow w$ ($A_2 \neq \emptyset$) y $w \rightarrow x_1 \rightarrow v$; es decir, $O_T(v) \not\subseteq O_T(w)$ y $O_T(w) \not\subseteq O_T(v)$.

2. TORNEOS BIPARTITOS CON 2-REYES Y 3-REYES

Por los casos (1) y (2) tenemos que $O_T(v) \not\subseteq O_T(w)$ y $O_T(w) \not\subseteq O_T(v)$ para cualesquiera dos vértices distintos v y w en $B_1 \cup B_2$. Como cada vértice de B_3 es un receptor y no hay emisores en $T(A, B)$, por el lema 2.2.1, concluimos que $K_3(T(A, B)) \cap B = B_1 \cup B_2$.

Como $K_3(T(A, B)) \cap A = \{x_1\}$ y $K_3(T(A, B)) \cap B = B_1 \cup B_2$, con $|B_1 \cup B_2| = q$, entonces $T(A, B)$ es del tipo $(m, 1; n, q)_3$, como se quería. ■

Teorema 2.2.6. Sean m, n y q enteros tales que $m \geq 4, n \geq 3$ y $n \geq q \geq 2$. Si $q \leq \binom{m-4}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 2} + 1$, entonces existe un torneo bipartito $T(A, B)$ con $|A| = m$ y $|B| = n$, del tipo $(m, 0; n, q)_3$.

Demostración. Para esta demostración usaremos la construcción que dimos en la demostración del teorema 2.2.5 con algunas modificaciones.

Sea $m_1 = m - 1$. Como $m \geq 4$, entonces $m_1 \geq 3$. Además $m - 4 = m_1 - 3$ y $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 2 = \lfloor \frac{m-4}{2} \rfloor = \lfloor \frac{(m-1)-3}{2} \rfloor = \lfloor \frac{m_1-3}{2} \rfloor$. Vemos que m_1, n y q cumplen las hipótesis del teorema 2.2.5. Consideremos un torneo bipartito $T(A, B)$ del tipo $(m_1, 1; n, q)_3$ tal como lo construimos en la demostración del teorema 2.2.5 (con m_1 en lugar de m), el cual se ilustra a continuación, ver la figura 2.36.

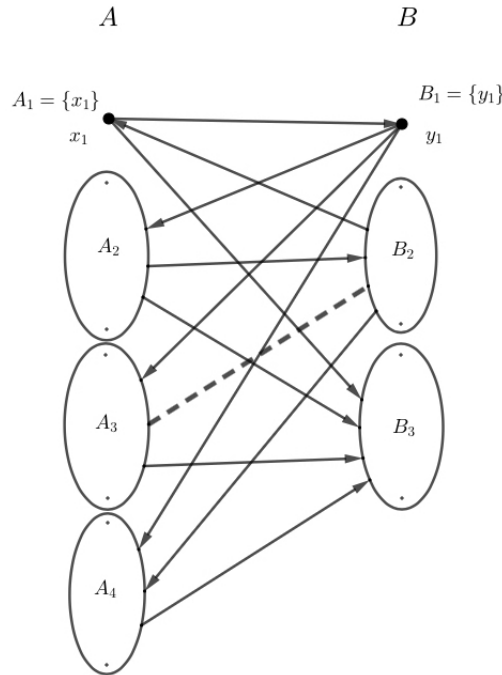


Figura 2.36: Representación de $T(A, B)$. La línea punteada representa a F_0 , el cual fue definido en la demostración del teorema 2.2.5

Sea $A' := A \cup \{x_0\}$, donde $x_0 \notin V(T(A, B))$. Definimos $T(A', B)$ como sigue:

$$V(T(A', B)) := V(T(A, B)) \cup \{x_0\} \text{ y ;}$$

$$F(T(A', B)) := F(T(A, B)) \cup \{(x_0, y) : y \in B_1 \cup B_3\} \cup \{(y, x_0) : y \in B_2\}.$$

Podemos ver la representación gráfica de $T(A', B)$ en la figura 2.37.

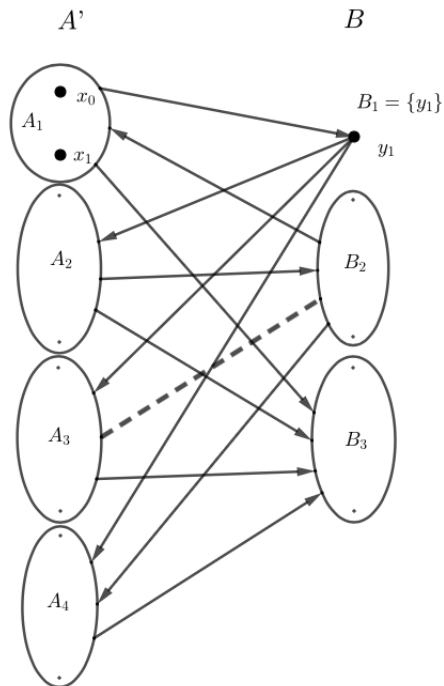


Figura 2.37: Representación de $T(A', B)$. La línea punteada representa a F_0 de $T(A, B)$

Vemos que $T(A', B)$ está bien definido, más aún, $O_{T(A', B)}(x_0) = O_{T(A', B)}(x_1)$, como lo podemos ver en la figura 2.37. Así, usando $\{x_0, x_1\}$ en lugar de $\{x_1\}$ en la demostración del teorema 2.2.5, se demuestra que $K_3(T(A', B)) \cap B = q$ y A' no tiene 3-reyes en $T(A', B)$; puesto que $O_{T(A', B)}(x_0) = O_{T(A', B)}(x_1)$ y x_1 es el único 3-rey en $T(A, B)$.

Por lo tanto, $T(A', B)$ es del tipo $(m, 0; n, q)_3$. ■

Torneos bipartitos con 4-reyes

En este capítulo veremos el problema de los 4-reyes en torneos bipartitos, siendo más interesantes los casos cuando no hay transmisores. El teorema 3.0.1 es referido por Petrovic [4] a su artículo conjunto con Thomassen [5], pero nosotros damos una demostración alternativa. El lema 3.0.2 es un resultado que se obtuvo durante el desarrollo de esta trabajo, en él damos una caracterización de los torneos bipartitos en tipos $(m, p; n, q)_4$ según su número de transmisores. Este resultado lo usamos en la demostración del teorema 3.0.4, el cual agota los casos de la existencia de torneos bipartitos del tipo $(m, p; n, q)_4$. Cabe mencionar que en el presente trabajo desarrollamos la demostración de dicho teorema dada en el artículo de Petrovic [4], escribiendo los casos que hacían falta para agotar las posibilidades, correspondientes a los incisos (d) y (e) del enunciado en nuestro trabajo.

3. TORNEOS BIPARTITOS CON 4-REYES

Teorema 3.0.1. [4] Sea $T(A, B)$ un torneo bipartito. Si $T(A, B)$ tiene a lo más un transmisor, entonces $T(A, B)$ tiene al menos un 4-rey.

Demostración. Cuando $T(A, B)$ tiene exactamente un transmisor v , el lema 2.1.3 implica que v es un 2-rey, en particular v es un 4-rey.

Suponamos que $T(A, B)$ no contiene transmisores.

Veremos que un vértice con exgrado máximo en el conjunto de la partición al que pertenece (en A o en B) es un 4-rey.

Definamos $M(A) := \{a \in A : |O(a)| = \max \{\delta^+(y) : y \in A\}\}$ y $M(B) := \{b \in B : |O(b)| = \max \{\delta^+(z) : z \in B\}\}$. Por definición de torneo bipartito tenemos que A y B son conjuntos finitos, por lo que $\{\delta^+(y) : y \in A\}$ y $\{\delta^+(z) : z \in B\}$ son conjuntos finitos de números enteros no negativos, por lo que estos últimos tienen elemento máximo. Así, $M(A) \neq \emptyset$ y $M(B) \neq \emptyset$.

Sea v un vértice de A tal que $v \in M(A)$. Veremos que v es un 4-rey.

Sea $w \in V(T) \setminus \{v\}$. Se demostrará que $d(v, w) \leq 4$.

Notemos que $O(v) \subseteq B$.

Caso 1. $w \in B$.

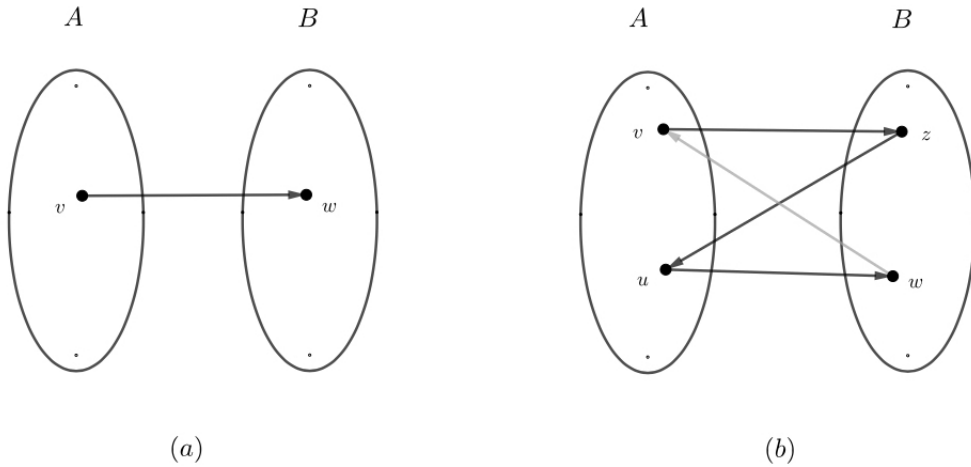


Figura 3.1: Representación del caso (1): (a) $w \in O(v)$; (b) $w \in B \setminus O(v)$

Si $w \in O(v)$ se tiene que $d(v, w) = 1$. Supongamos que $w \in B \setminus O(v)$, entonces, por definición de torneo bipartito, se tiene que $w \rightarrow v$ (ver figura fig:42). Como T no tiene transmisores, en particular w no es un transmisor, por lo que existe un vértice u en $A \setminus \{v\}$ tal que $u \rightarrow w$. Por elección de v tenemos que $|O(u)| \leq |O(v)|$ (ya que $u \in A$), con $O(u) \subseteq B$ y $O(v) \subseteq B$, donde las contenciones son

propias puesto que no hay transmisores en T . Sabemos que $w \in O(u) \setminus O(v)$, lo cual implica que $O(v) \setminus O(u) \neq \emptyset$ (porque $|O(u)| \leq |O(v)|$). Sea $z \in O(v) \setminus O(u)$, entonces $v \rightarrow z \rightarrow u \rightarrow w$; es decir, $d(v, w) = 3$.

Caso 2. $w \in A \setminus \{v\}$.

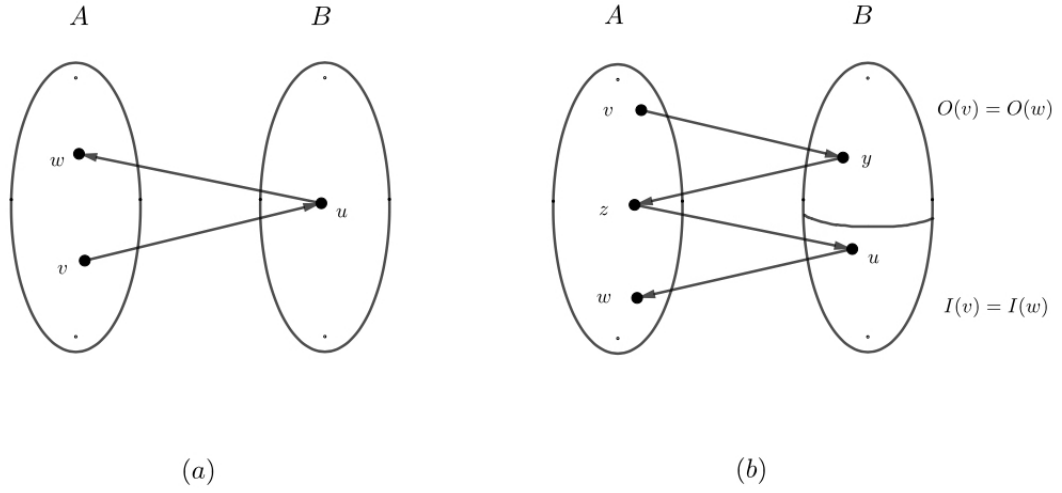


Figura 3.2: Representación del caso (2): (a) $O(v) \setminus O(w) \neq \emptyset$; (b) $O(v) \setminus O(w) = \emptyset$

Si $O(v) \setminus O(w) \neq \emptyset$, se tiene que existe $u \in B$ tal que $v \rightarrow u$ y $u \rightarrow w$; es decir, $v \rightarrow u \rightarrow w$ es una trayectoria de longitud mínima, por lo que $d(v, w) = 2$ (ver la figura 3.2 (a)). Supongamos que $O(v) \setminus O(w) = \emptyset$, como $|O(w)| \leq |O(v)|$ por elección de v (puesto que $w \in A$), se tiene que $O(w) = O(v)$. Sabemos que T no tiene transmisores, en particular ni v ni w son transmisores, por lo que $B \setminus O(v) \neq \emptyset$. Sea $u \in B \setminus O(v)$; es decir, $u \rightarrow v$. Como $O(w) = O(v)$, entonces también tenemos $u \rightarrow w$, pues $\{v, w\} \subset O(u)$. Como u tampoco es transmisor, existe $z \in A \setminus \{v, w\}$ tal que $z \rightarrow u$. Puesto que $|O(z)| \leq |O(v)|$ y además $u \in O(z) \setminus O(v)$, entonces existe $y \in O(v) \setminus O(z)$. Por lo tanto $v \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow u \rightarrow w$; es decir, $d(v, w) = 4$ (ver la figura 3.2 (b)).

Por los casos (1) y (2) tenemos que v es un 4-rey. ■

Recordemos las definiciones de $M(A)$ y $M(B)$ que dimos en la demostración del teorema anterior, ya que serán usadas en resultados posteriores.

Lema 3.0.1. [4] Sea $T(A, B)$ un torneo bipartito sin transmisores. Si x es un vértice en $M(A)$, entonces $I(x) \subseteq K_4(T)$.

Demostración. Sea $y \in I(x)$. Demostraremos que $d(y, v) \leq 4$ para todo vértice $v \in V(T) \setminus \{y\}$.

Por la demostración del teorema 3.0.1 sabemos que $x \in K_4(T)$, puesto que x es un vértice de ex-grado máximo en A . Lo anterior implica que, para todo vértice w en $B \setminus \{y\}$ existe una xw -trayectoria P_w de longitud a lo más 3, por lo que $(y, x) \cup P_w$ es un yw -camino de longitud a lo más 4. Por lo

3. TORNEOS BIPARTITOS CON 4-REYES

tanto, para todo vértice b en B se tiene que $d(y, b) \leq 4$.

Ahora veremos que para todo vértice a en A se tiene que $d(y, a) \leq 4$.

Sea v un vértice en A . Si $v \in O(y)$, se tiene $d(y, v) = 1$. Supongamos que $v \in A \setminus O(y)$; es decir, $v \rightarrow y$, por ser T un torneo bipartito. Como $y \in O(v) \setminus O(x)$ y $|O(x)| \geq |O(v)|$ (por elección de x), entonces existe un vértice z en $O(x) \setminus O(v)$. Así, (y, x, z, v) es un yv -camino dirigido, de lo cual se deduce que $d(y, v) \leq 3$ (ver la figura 3.3). Así, para todo vértice a en A se tiene que $d(y, a) \leq 4$.

Por lo anterior, $y \in K_4(T)$.

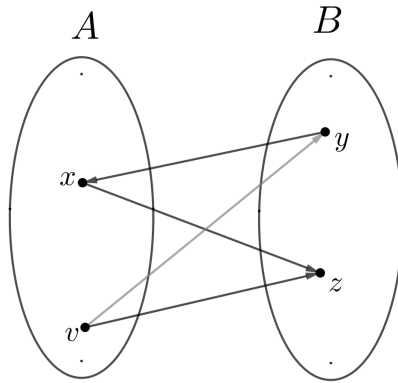


Figura 3.3: Representación del lema 3.0.1, tomando $v \in A \setminus O(y)$

Por lo tanto $I(x) \subseteq K_4(T)$. ■

Teorema 3.0.2. [4] Sea $T(A, B)$ un torneo bipartito sin transmisores. Entonces $|A \cap K_4(T)| \geq 2$ y $|B \cap K_4(T)| \geq 2$.

Demostración. Si T no tiene transmisores, entonces $|A| \geq 2$ y $|B| \geq 2$ (lema 2.1.1).

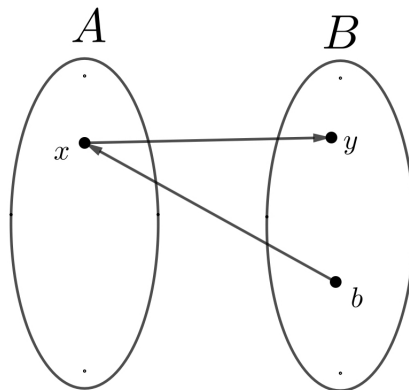


Figura 3.4: Representación del Teorema 3.0.2. $|B \cap K_4(T)| \geq 2$

Sean x y y vértices tales que x pertenece a $M(A)$ y y pertenece a $M(B)$. Por la demostración del teorema 3.0.1 sabemos que $\{x, y\} \subseteq K_4(T)$. Sin perder generalidad supongamos que $x \rightarrow y$. Como

x no es transmisor, existe $b \in B \setminus \{y\}$ tal que $b \rightarrow x$ (ver la figura 3.4). Por el lema 3.0.1 sabemos que $b \in K_4(T)$. Entonces $|B \cap K_4(T)| \geq 2$.

Si existiera un vértice $w \in A \setminus \{x\}$ tal que $|O(w)| = |O(x)|$ o $w \rightarrow y$, por la demostración del teorema 3.0.1 o por el lema 3.0.1 respectivamente, tenemos que $w \in K_4(T)$; es decir, $|A \cap K_4(T)| \geq 2$ ($k_4(A) \geq 2$), como podemos ver en la figura 3.5 (a). Supongamos que $y \rightarrow (A \setminus \{x\})$ y $|O(w)| < |O(x)|$ para todo $w \in A \setminus \{x\}$.

Sean $u \in I(x)$ un vértice tal que $|O(u)| = \max \{\delta^+(z) : z \in I(x)\}$ y $v \in I(u)$. Note que $I(u) \neq \emptyset$ porque u no es un transmisor, además $v \neq x$ ya que $u \rightarrow x$ y $v \rightarrow u$, con $\{x, v\} \subseteq A$ (ver la figura 3.5 (b)). Así tenemos la siguiente afirmación:

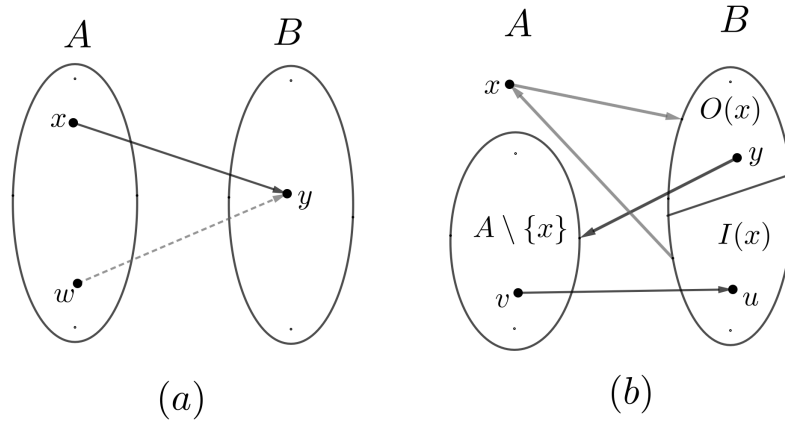


Figura 3.5: Representación del Teorema 3.0.2. (a) existe un vértice $w \in A \setminus \{x\}$ tal que $w \rightarrow y$; (b) elección de u y v cuando $y \rightarrow (A \setminus \{x\})$ y $|O(w)| < |O(x)|$ para todo $w \in A \setminus \{x\}$

Afirmación. v es un 4-rey.

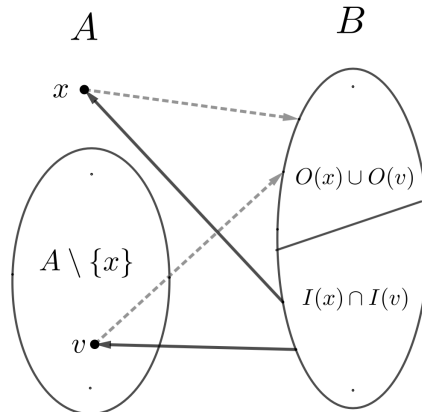


Figura 3.6: Representación general de la afirmación en el Teorema 3.0.2

Veremos que $d(v, w) \leq 4$, para todo vértice $w \in V(T) \setminus \{v\}$. Por el lema 3.0.1 sabemos que u

3. TORNEOS BIPARTITOS CON 4-REYES

es un 4-rey, ya que $u \in I(x)$. Como $u \in B$ tenemos que para todo a en A se cumple $d(u, a) \leq 3$, entonces $d(v, a) \leq 4$ puesto que $v \rightarrow u$. Ahora, sea $w \in B$, veremos que $d(v, w) \leq 4$.

Notemos que $B = (O(x) \cup O(v)) \cup (B \setminus (O(x) \cup O(v)))$, donde $O(x) \cup O(v)$ y $B \setminus (O(x) \cup O(v))$ son conjuntos ajenos. Además $B \setminus (O(x) \cup O(v)) = I(x) \cap I(v)$ por las definiciones de los conjuntos O e I (ver figura 3.6). De lo anterior, consideremos dos casos sobre w .

Caso 1. $w \in O(x) \cup O(v)$.

Si $w \in O(v)$, entonces $d(v, w) = 1$. Si $w \in O(x)$, como $v \rightarrow u$, $u \rightarrow x$ y $x \rightarrow O(x)$, tenemos un vw -camino dirigido de longitud 3; es decir, $d(v, w) \leq 3$ (figura 3.7).

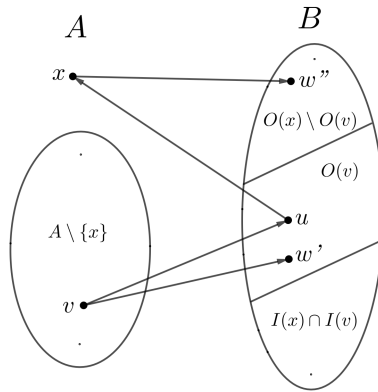


Figura 3.7: Representación del caso (1) de la afirmación en el Teorema 3.0.2. Donde w' y w'' son las posibilidades para w

Caso 2. $w \in I(x) \cap I(v)$.

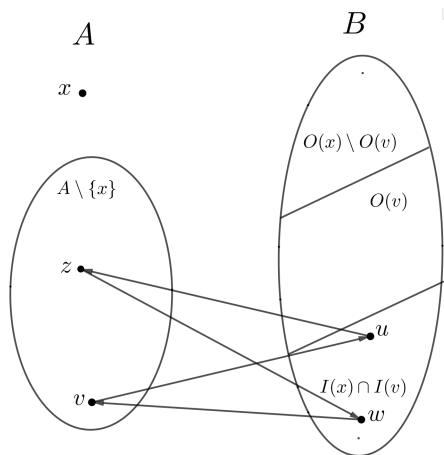


Figura 3.8: Representación del caso (2) de la afirmación en el Teorema 3.0.2

Como $v \rightarrow u$ y $w \rightarrow v$, tenemos que $w \neq u$, con $\{u, w\} \subseteq I(x)$. Puesto que $|O(u)| = \max \{\delta^+(z) : z \in I(x)\}$, entonces $|O(u)| \geq |O(w)|$. Por otro lado $v \rightarrow u$ y $w \rightarrow v$ implica

que $v \in O(w) \setminus O(u)$. Así, dado que $|O(u)| \geq |O(w)|$ y $v \in O(w) \setminus O(u)$, se deduce que existe z en el conjunto $O(u) \setminus O(w)$. Ya que $z \in O(u)$ y $z \in I(w)$, se tiene $v \rightarrow u \rightarrow z \rightarrow w$; es decir, $d(v, w) \leq 3$ (ver la figura 3.8). Por lo tanto $d(v, B) \leq 3$.

De los casos (1) y (2), se concluye que $v \in A \cap K_4(T)$.

De lo anterior se tiene $v \neq x$, $\{x, v\} \subseteq A$ y $\{x, v\} \subseteq K_4(T)$; es decir, $\{x, v\} \subseteq A \cap K_4(T)$, con $v \neq x$. Por lo tanto $|A \cap K_4(T)| \geq 2$. ■

El siguiente teorema, dado por Petrovic en [4], nos da condiciones para la existencia de torneos bipartitos $T(A, B)$ del tipo $(m, p; n, q)_4$.

Teorema 3.0.3. [4] *Dados enteros m, n, p y q tales que $m \geq n > 0$, $m \geq p \geq 0$ y $n \geq q \geq 0$, entonces existe un torneo bipartito $T(A, B)$ del tipo $(m, p; n, q)_4$, excepto en los siguientes casos:*

- (a) $(m, 1; n, q)_4$, $n \geq q > 0$;
- (b) $(m, p; n, 1)_4$, $m \geq p > 0$;
- (c) $(1, 0; 1, 0)_4$;

Observemos que el enunciado del teorema 3.0.3 no está completo, ya que falta por excluir dos casos aparte de los casos presentados en los incisos (a), (b) y (c). Nosotros completaremos el enunciado, el cual presentamos como el teorema 3.0.4. Pero antes de demostrar dicho resultado necesitamos el siguiente lema.

Lema 3.0.2. *Sea $T(A, B)$ un torneo bipartito con $|A| = m$, $|B| = n$ y $m \geq n > 0$. Entonces $T(A, B)$ es de algunos de los siguientes tipos:*

1. $(m, 1; n, 0)_4$, si $T(A, B)$ tiene un único transmisor en A ;
2. $(m, 0; n, 1)_4$, si $T(A, B)$ tiene un único transmisor en B ;
3. $(m, 0; n, 0)_4$, si $T(A, B)$ tiene al menos dos transmisores;
4. $(m, p; n, q)_4$ para ciertos enteros p y q , con $m \geq p \geq 2$ y $n \geq q \geq 2$, si $T(A, B)$ no tiene transmisores.

Demostración. Sea $T(A, B)$ un torneo bipartito con $|A| = m$, $|B| = n$ y $m \geq n > 0$. Tenemos dos casos:

Caso 1. $T(A, B)$ tiene transmisores.

Sabemos que no puede ocurrir que haya transmisores de $T(A, B)$ en A y en B simultáneamente, ya que cada transmisor tiene ingrado cero.

Sea v un transmisor de $T(A, B)$.

3. TORNEOS BIPARTITOS CON 4-REYES

Subcaso 1. $v \in A$.

Entonces $v \rightarrow B$ implica que $I(v) = \emptyset$, por lo que no hay wv -trayectorias dirigidas para cada $w \in V(T) \setminus \{v\}$. Esto nos dice que no hay 4-reyes de $T(A, B)$ en el conjunto $V(T) \setminus \{v\}$. En particular $B \cap K_4(T) = \emptyset$. Por lo anterior tenemos que $T(A, B)$ es de la forma $(m, p; n, 0)_4$.

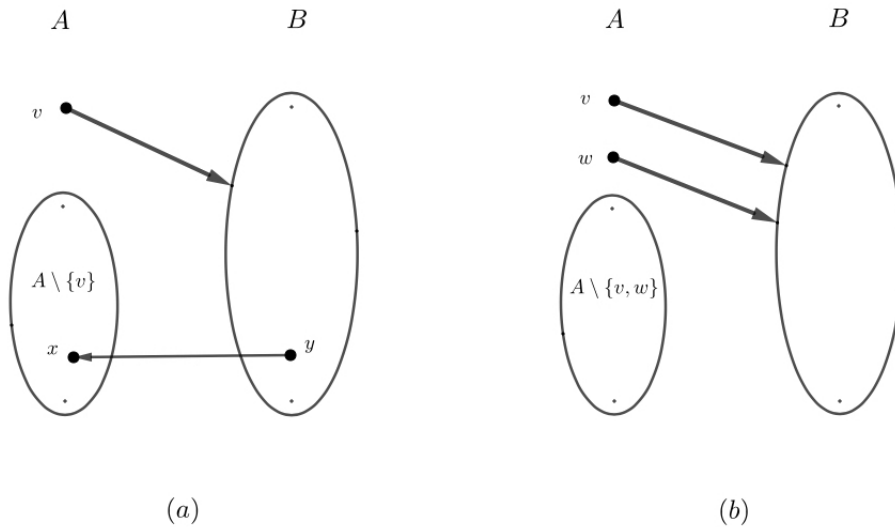


Figura 3.9: Representación del subcaso (1) del Lema 3.0.2: (a) v es el único transmisor; (b) v y w son transmisores con $v \neq w$

Si v es el único transmisor de $T(A, B)$, el lema 2.1.3 implica que v es un 2-rey, por lo que v es un 4-rey (figura 3.9 (a)). Así, v es el único 4-rey de $T(A, B)$; es decir, $T(A, B)$ es de la forma $(m, 1; n, 0)_4$. Con esto queda demostrado el punto (1) del lema 3.0.2.

Si v no es el único transmisor en $T(A, B)$. Entonces consideremos w otro transmisor en $T(A, B)$ tal que $w \neq v$. Como en el conjunto $V(T) \setminus \{v\}$ no hay 4-reyes, de manera análoga se demuestra que no hay 4-reyes en $V(T) \setminus \{w\}$ (figura 3.9 (b)). Por lo tanto $T(A, B)$ no tiene 4-reyes; es decir, $T(A, B)$ es de la forma $(m, 0; n, 0)_4$, con $m \geq 2$ (ya que $\{v, w\} \subseteq A$ y $w \neq v$).

Subcaso 2. $v \in B$.

Análogamente al subcaso (1), tenemos que $T(A, B)$ es del tipo $(m, 0; n, q)_4$. Donde $q = 1$ si v es el único transmisor o $q = 0$ si hay otro transmisor (lo cual implica que $m \geq n \geq 2$).

Así queda demostrado el punto (2) del lema 3.0.2, mientras que la combinación del subcaso (1) y el subcaso (2), cuando hay al menos dos transmisores en A o en B , respectivamente, nos demuestra el punto (3) del lema 3.0.2.

Caso 2. Si $T(A, B)$ no tiene transmisores.

Por el teorema 3.0.2 tenemos que $p \geq 2$ y $q \geq 2$, por lo que en este caso $T(A, B)$ es del tipo

$(m, p; n, q)_4$ con $m \geq p \geq 2$ y $n \geq q \geq 2$. Por lo tanto queda demostrado el punto (4) del lema 3.0.2.

Note que el lema 3.0.2 agota todas las posibilidades de existencia para torneos del tipo $(m, p; n, q)_4$ de un torneo bipartito dado $T(A, B)$. Así, cualquier torneo bipartito $T(A, B)$ es de alguno de los tipos señalados por el lema 3.0.2. Por lo anterior, queda demostrado el lema 3.0.2. ■

Teorema 3.0.4. *Dados enteros m, n, p y q tales que $m \geq n > 0$, $m \geq p \geq 0$ y $n \geq q \geq 0$, entonces existe un torneo bipartito $T(A, B)$ del tipo $(m, p; n, q)_4$, excepto en los siguientes casos:*

- (a) $(m, 1; n, q)_4$, $n \geq q > 0$;
- (b) $(m, p; n, 1)_4$, $m \geq p > 0$;
- (c) $(1, 0; 1, 0)_4$;
- (d) $(m, p; n, 0)_4$, $m \geq p \geq 2$;
- (e) $(m, 0; n, q)_4$, $m \geq n \geq q \geq 2$.

Demostración. Veremos que efectivamente en los casos enumerados en el teorema 3.0.4 no se pueden tener torneos bipartitos del tipo dado. Después demostraremos que en los casos restantes existen torneos bipartitos que cumplen las condiciones.

Veamos qué es lo que ocurre en general en un torneo bipartito.

Sea $T(A, B)$ un torneo bipartito, con $|A| = m$, $|B| = n$ y $m \geq n > 0$. Sabemos que $T(A, B)$ es de la forma $(m, p; n, q)_4$ para ciertos enteros p y q tales que $m \geq p \geq 0$ y $n \geq q \geq 0$. Tenemos dos casos:

Caso 1. $T(A, B)$ tiene transmisores.

Por el lema 3.0.2, sabemos que en este caso $\{p, q\} \subseteq \{0, 1\}$. Con esto inmediatamente quedan descartados los incisos (d) y (e). Si $T(A, B)$ tiene un único transmisor, los puntos (1) y (2) del lema 3.0.2 implican que $\{p, q\} = \{0, 1\}$, mientras que para (a) y (b) se tiene que $0 \notin \{p, q\}$, y para (c) se tiene que $1 \notin \{p, q\}$, por lo que un torneo bipartito con un único transmisor no puede ser de ninguno de los tipos (a), (b) ni (c). Por otro lado, si $T(A, B)$ tiene al menos dos transmisores (donde tendríamos $m \geq 2$ o $m \geq n \geq 2$), el punto 3 del lema 3.0.2 implica que $\{p, q\} = \{0\}$ y $m \geq 2$, por lo que quedan descartados los incisos (a), (b) y (c).

Por lo tanto en el caso (1) quedan descartados los tipos (a), (b), (c), (d) y (e).

Caso 2. $T(A, B)$ no tiene transmisores.

Por el punto (4) del lema 3.0.2, sabemos que en este caso $\{p, q\} \cap \{0, 1\} = \emptyset$. Por otro lado en los incisos (a) y (b) se tiene que $1 \in \{p, q\}$, mientras que en (c), (d) y (e) se tiene $0 \in \{p, q\}$. Entonces no hay torneos bipartitos sin transmisores de ninguno de los tipos (a), (b), (c), (d) ni (e).

Por los casos (1) y (2) se concluye que no hay torneos bipartitos de ninguno de los tipos:

- (a) $(m, 1; n, q)_4$, $n \geq q > 0$;
- (b) $(m, p; n, 1)_4$, $m \geq p > 0$;

3. TORNEOS BIPARTITOS CON 4-REYES

(c) $(1, 0; 1, 0)_4$;

(d) $(m, p; n, 0)_4$, $m \geq p \geq 2$; ni

(e) $(m, 0; n, q)_4$, $m \geq n \geq q \geq 2$.

Ahora veamos que para los demás casos, en efecto, existen torneos bipartitos de los tipos correspondientes.

Sean m, n, p y q enteros tales que $m \geq n > 0$, $m \geq p \geq 0$ y $n \geq q \geq 0$.

Tomemos dos casos:

Caso 1. $\{m, n\} \cap \{1\} \neq \emptyset$.

En este caso $m = 1$ o $n = 1$. Si $m = 1$, como $m \geq n > 0$, tenemos $n = 1$, por lo que en el caso (1) siempre tenemos que $n = 1$. Además $n \geq q \geq 0$ y $n = 1$ implican que $q \in \{0, 1\}$. Veamos que existe un torneo bipartito del tipo $(m, p; 1, q)_4$ con $q \in \{0, 1\}$, exceptuando aquellos enumerados en este teorema.

Subcaso 1. $q = 0$.

Demostraremos que existen torneos del tipo $(m, p; 1, 0)_4$ a excepción de los numerados en el teorema 3.0.4. Como $q = 0$, la exclusión de los tipos (a), (b) y (e) no impone restricciones ni a m ni a p . Por otro lado, para excluir los tipos (c) y (d) consideramos dos subcasos.

Subcaso 1.1. $m = 1$.

Consideramos $(1, p; 1, 0)_4$, donde $1 = m \geq p \geq 0$; es decir, $p \in \{0, 1\}$. El inciso (c) implica que $p \neq 0$. Entonces $p = 1$.

Veamos que existen torneos bipartitos $T(A, B)$ del tipo $(1, 1; 1, 0)_4$.

Sean $A = \{v\}$ y $B = \{w\}$ con $v \neq w$. Sea $T(A, B)$ tal que $V(T) := A \cup B$ y $F(T) := \{(v, w)\}$. Entonces $T(A, B)$ es un torneo bipartito del tipo $(1, 1; 1, 0)_4$, como podemos ver en la figura 3.10.



Figura 3.10: Construcción de $T(A, B)$ en el caso(1), subcaso (1.1) del Teorema 3.0.4

Subcaso 1.2. $m \geq 2$.

Por el inciso (d) tenemos que $p \in \{0, 1\}$. Entonces, en este subcaso daremos torneos bipartitos de los tipos $(m, 0; 1, 0)_4$ y $(m, 1; 1, 0)_4$.

Subcaso 1.2.1. Existen torneos bipartitos del tipo $(m, 0; 1, 0)_4$.

Sean A y B conjuntos tales que $A \cap B = \emptyset$, $|A| = m \geq 2$ y $|B| = n = 1$. Sea $T(A, B)$ tal que $V(T(A, B)) = A \cup B$ y $F(T(A, B)) = \{(v, w) : v \in A \text{ y } w \in B\}$ (ver la figura 3.11 (a)).

En efecto, $T(A, B)$ es un torneo bipartito, además todo vértice de A es transmisor, por el punto (3) del lema 3.0.2 se tiene que $T(A, B)$ es del tipo $(m, 0; 1, 0)_4$.

Subcaso 1.2.2. Existen torneos bipartitos del tipo $(m, 1; 1, 0)_4$.

Sean A y B conjuntos tales que $A \cap B = \emptyset$, $|A| = m \geq 2$ y $|B| = n = 1$. Sea v un vértice en A , definimos el torneo bipartito $T(A, B)$ tal que $V(T(A, B)) = A \cup B$ y $F(T(A, B)) = \{(v, w) : w \in B\} \cup \{(w, u) : u \in A \setminus \{v\} \text{ y } w \in B\}$ (ver la figura 3.11 (b)).

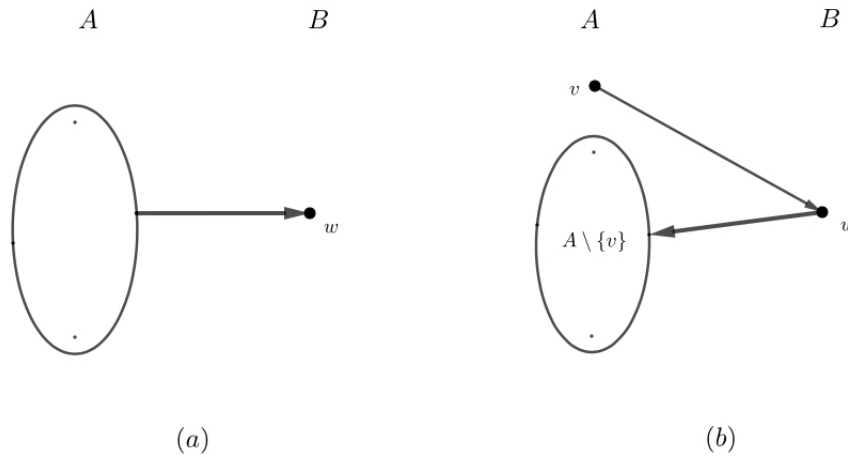


Figura 3.11: Construcción de $T(A, B)$ en el caso(1), subcaso (1.2) del Teorema 3.0.4: (a) Subcaso (1.2.1) $A \rightarrow B$; (b) Subcaso (1.2.2) $v \rightarrow w$ y $w \rightarrow A \setminus \{v\}$

Tal como está definido $T(A, B)$ es un torneo bipartito. Como v domina a B se tiene que v es transmisor, además dado cualquier vértice $u \in A \setminus \{v\}$ se tiene que $B \rightarrow u$, por lo que v es el único transmisor de $T(A, B)$ y está en A , por lo que el punto 1 del lema 3.0.2 implica que $T(A, B)$ es del tipo $(m, 1; 1, 0)_4$.

Subcaso 2. $q = 1$.

Demostraremos que existen torneos del tipo $(m, p; 1, 1)_4$ a excepción de los numerados en este teorema. Por el inciso (b) se tiene que p no puede ser estrictamente mayor que cero, por lo que $p = 0$, puesto que $p \geq 0$. Entonces veremos que existen torneos bipartitos del tipo $(m, 0; 1, 1)_4$.

3. TORNEOS BIPARTITOS CON 4-REYES

Sean A y B conjuntos tales que $A \cap B = \emptyset$, $|A| = m \geq 2$ y $|B| = n = 1$. Definimos $T(A, B)$ como $V(T(A, B)) = A \cup B$ y $F(T(A, B)) = \{(w, v) : v \in A \text{ y } w \in B\}$, donde w es el único elemento de B (ver la figura 3.12).

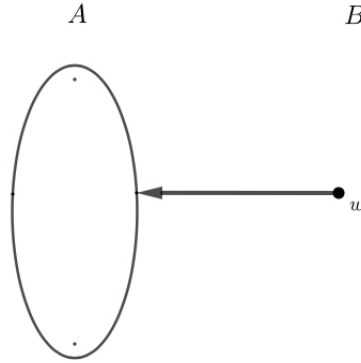


Figura 3.12: Construcción de $T(A, B)$ en el caso (1), subcaso (2) del Teorema 3.0.4

Por la definición dada, $T(A, B)$ es un torneo bipartito. Además $B = \{w\}$ y $w \rightarrow A$, por lo que w es el único transmisor de $T(A, B)$ y está en B , así, el punto (2) del lema 3.0.2 implica que $T(A, B)$ es del tipo $(m, 0; 1, 1)_4$.

Caso 2. $\{m, n\} \cap \{1\} = \emptyset$.

En este caso se tiene que $m \geq n \geq 2$, entonces el inciso (c) queda excluido desde las hipótesis de este caso.

Tenemos dos subcasos:

Subcaso 1. $\{p, q\} \cap \{0, 1\} \neq \emptyset$.

Veamos qué condiciones le imponen a este subcaso las exclusiones de los tipos (a), (b), (d) y (e). Si $p = 1$, entonces por el inciso (a) se tiene que $q = 0$. Análogamente si $q = 1$ (por el inciso (b)) tenemos que $p = 0$. Si $p = 0$, entonces la exclusión del tipo (e) implica que $q \in \{0, 1\}$ y, análogamente por el inciso (d), si $q = 0$ entonces $p \in \{0, 1\}$. Así, tenemos los tipos $(m, 1; n, 0)_4$, $(m, 0; n, 1)_4$ y $(m, 0; n, 0)_4$.

Subcaso 1.1. Existe un torneo bipartito del tipo $(m, 1; n, 0)_4$.

Daremos un torneo bipartito del tipo indicado.

Sean A y B conjuntos tales que $A \cap B = \emptyset$, $|A| = m \geq 2$ y $|B| = n \geq 2$. Sea $v \in A$. Definimos $T(A, B)$ como $V(T(A, B)) = A \cup B$ y $F(T(A, B)) = \{(v, w) : w \in B\} \cup \{(w, u) : w \in B \text{ y } u \in A \setminus \{v\}\}$.

Por las definiciones de $V(T(A, B))$ y $F(T(A, B))$ se tiene que $T(A, B)$ es un torneo bipartito. Como $v \rightarrow B$ y $B \rightarrow A \setminus \{v\}$, entonces v es el único transmisor de $T(A, B)$ y está en A . Con lo

anterior, el punto (1) del lema 3.0.2 implica que $T(A, B)$ es del tipo $(m, 1; n, 0)_4$.

Subcaso 1.2. Existe un torneo bipartito del tipo $(m, 0; n, 1)_4$.

Daremos un torneo bipartito del tipo indicado.

Sean A y B conjuntos tales que $A \cap B = \emptyset$, $|A| = m \geq 2$ y $|B| = n \geq 2$. Sea $w \in B$. Definimos $T(A, B)$ como $V(T(A, B)) = A \cup B$ y $F(T(A, B)) = \{(w, v) : v \in A\} \cup \{(v, z) : v \in A \text{ y } z \in B \setminus \{w\}\}$.

Por las definiciones de $V(T(A, B))$ y $F(T(A, B))$ se tiene que $T(A, B)$ es un torneo bipartito. Además $w \rightarrow A$ y $A \rightarrow B \setminus \{w\}$ implican que w es el único transmisor de $T(A, B)$ y está en B . Con lo anterior, el punto (2) del lema 3.0.2 implica que $T(A, B)$ es del tipo $(m, 0; n, 1)_4$.

Subcaso 1.3. Existe un torneo bipartito del tipo $(m, 0; n, 0)_4$.

Daremos un torneo bipartito del tipo indicado.

Sean A y B conjuntos tales que $A \cap B = \emptyset$, $|A| = m \geq 2$ y $|B| = n \geq 2$. Definimos $T(A, B)$ como $V(T(A, B)) = A \cup B$ y $F(T(A, B)) = \{(v, w) : v \in A \text{ y } w \in B\}$.

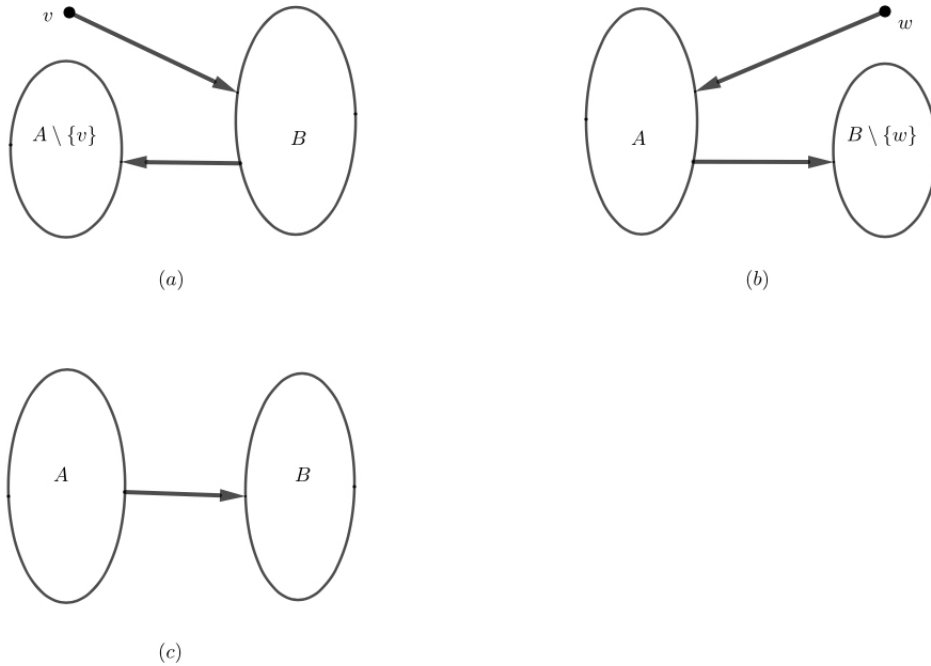


Figura 3.13: Construcción de $T(A, B)$ en el caso (2), subcaso (1) del Teorema 3.0.4: (a) Subcaso (1.1); (b) Subcaso (1.2); (c) Subcaso (1.3)

Por las definiciones de $V(T(A, B))$ y $F(T(A, B))$ se tiene que $T(A, B)$ es un torneo bipartito. Como $A \rightarrow B$, entonces todo vértice de A es un transmisor de $T(A, B)$. Sabemos que $|A| \geq 2$. Lo anterior nos dice que $T(A, B)$ es un torneo con al menos dos transmisores, por lo que el punto (3)

3. TORNEOS BIPARTITOS CON 4-REYES

del lema 3.0.2 implica que $T(A, B)$ es de la forma $(m, 0; n, 0)_4$.

Subcaso 2. $\{p, q\} \cap \{0, 1\} = \emptyset$.

En este subcaso se tiene que $p \geq 2$ y $q \geq 2$.

Veamos que existen torneos bipartitos del tipo $(m, p; n, q)_4$.

Subcaso 2.1. $p \geq q \geq 2$.

Sean $A = \{v_1, \dots, v_m\}$, $B = \{w_1, \dots, w_n\}$, con $A \cap B = \emptyset$. Definamos los siguientes conjuntos:

$$A_1 := \{v_1, \dots, v_{q-1}\};$$

$$A_2 := \{v_q, \dots, v_p\};$$

$$A_3 := \{v_{p+1}, \dots, v_m\};$$

$$B_1 := \{w_1, \dots, w_{q-1}\};$$

$$B_2 := \{w_q\};$$

$$B_3 := \{w_{q+1}, \dots, w_n\}.$$

Observemos que los conjuntos anteriores son ajenos dos a dos y que se tienen las igualdades $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ y $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$, donde A_1, A_2, B_1 y B_2 son no vacíos y ($A_3 = \emptyset$ o $B_3 = \emptyset$ cuando $p = m$ o $q = n$, respectivamente). Ahora definamos el torneo bipartito $T(A, B)$ como sigue:

$$V(T) := A \cup B;$$

$$F(T) := \{(v_i, w_i) : i \in \{1, \dots, q-1\}\} \cup \{(v, w) : v \in A \text{ y } w \in B_3\} \cup \{(v, w_q) : v \in A_2\} \cup \{(w_i, v_j) : w_i \in B_1 \text{ y } j \neq i\} \cup \{(w_q, v) : v \in A_1 \cup A_3\}.$$

Usando algunos productos cartesianos, $F(T)$ se puede reescribir como

$$F(T) = \{(v_i, w_i) : i \in \{1, \dots, q-1\}\} \cup (A \times B_3) \cup (A_2 \times B_2) \cup ((B_1 \times A) \setminus \{(w_i, v_i) : i \in \{1, \dots, q-1\}\}) \cup (B_2 \times (A_1 \cup A_3)).$$

Con la definición anterior vemos que $T(A, B)$ es un torneo bipartito con bipartición (A, B) , como podemos observar en la figura 3.14, donde dado un vértice u en $V(T)$, se tiene:

1. Si $u \in A_1$ y $u = v_i$, entonces $O(u) = B_3 \cup \{w_i\}$ e $I(u) = (B_1 \setminus \{w_i\}) \cup B_2$.
2. Si $u \in A_2$, entonces $O(u) = B_2 \cup B_3$ e $I(u) = B_1$.
3. Si $u \in A_3$, entonces $O(u) = B_3$ e $I(u) = B_1 \cup B_2$.
4. Si $u \in B_1$ y $u = w_i$, entonces $O(u) = A \setminus \{v_i\}$ e $I(u) = \{v_i\}$.
5. Si $u \in B_2$ ($u = w_q$), entonces $O(u) = A_1 \cup A_3$ e $I(u) = A_2$.

6. Si $u \in B_3$, entonces $O(u) = \emptyset$ e $I(u) = A$.

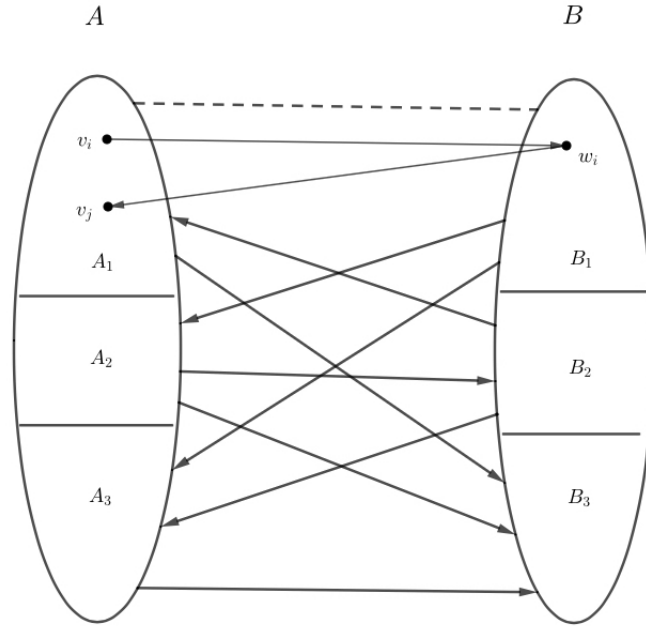


Figura 3.14: Construcción de $T(A, B)$ en el caso (2), subcaso (2)

De los seis puntos anteriores observamos que $T(A, B)$ no tiene transmisores, puesto que todos los conjuntos A_1, A_2, B_1 y B_2 son no vacíos y esto implica que los $I(u)$ son no vacíos.

Afirmamos que $T(A, B)$ es del tipo $(m, p; n, q)_4$. Demostraremos que $K_4(T(A, B)) \cap A = A_1 \cup A_2$ y $K_4(T(A, B)) \cap B = B_1 \cup B_2$.

Usaremos los teoremas anteriores para demostrar que tanto los vértices de $A_1 \cup A_2$ como los vértices de $B_1 \cup B_2$ son 4-reyes. Después veremos que no hay más 4-reyes.

Veamos que los vértices de $A_1 \cup A_2$ son 4-reyes. Note que los vértices de $A_1 \cup A_2$ son de exgrado máximo en A , puesto que todo vértice en $A_1 \cup A_2$ tiene exgrado $|B_3| + 1$ y todo vértice en A_3 tiene exgrado $|B_3|$. Dado un vértice v en $A_1 \cup A_2$, como $T(A, B)$ no tiene transmisores y v es de exgrado máximo en A , la demostración del teorema 3.0.1 implica que v es un 4-rey; es decir, $A_1 \cup A_2 \subseteq K_4(T(A, B))$.

Ahora mostraremos que los vértices de $B_1 \cup B_2$ son 4-reyes. Primero veamos que w_q es un 4-rey. Como $\{w_q\} \subseteq I(A_1)$ (por el punto (1)) y todo elemento de A_1 es de exgrado máximo en A , entonces por el lema 3.0.1 se tiene que $\{w_q\}$ es un 4-rey; es decir, $B_2 \subseteq K_4(T(A, B))$. Por otro lado, por (2), como $B_1 = I(A_2)$, $T(A, B)$ no tiene transmisores y puesto que todos los vértices de A_2 son de exgrado máximo en A , el lema 3.0.1 implica que todos los vértices de B_1 son 4-reyes. Por lo tanto $B_1 \cup B_2 \subseteq K_4(T(A, B))$.

3. TORNEOS BIPARTITOS CON 4-REYES

Veamos que los vértices de $A_3 \cup B_3$ no son 4-reyes; es decir, $(A_3 \cup B_3) \cap K_4(T(A, B)) = \emptyset$.

Los vértices de B_3 no son 4-reyes. Como $\bigcup_{x \in B_3} O(x) = \emptyset$, por el punto (6), entonces

$$B_3 \cap K_4(T(A, B)) = \emptyset.$$

Los vértices de A_3 no son 4-reyes. Por el punto (3) sabemos que $\bigcup_{x \in A_3} O(x) = B_3$ y, por el punto (6), $O(B_3) = \emptyset$, entonces $A_3 \cap K_4(T(A, B)) = \emptyset$.

Por lo anterior se tiene que $K_4(T(A, B)) \cap A = A_1 \cup A_2$ y $K_4(T(A, B)) \cap B = B_1 \cup B_2$, con $|(A_1 \cup A_2)| = (q - 1) + (p - (q - 1)) = p$ y $|(B_1 \cup B_2)| = (q - 1) + 1 = q$. Por lo tanto el torneo bipartito $T(A, B)$, así construido, es del tipo $(m, p; n, q)_4$.

Subcaso 2.2. $q \geq p \geq 2$.

La demostración de este subcaso es análoga a la demostración del subcaso anterior. Observemos que la hipótesis $m \geq n$ no es usada en la demostración del subcaso anterior. Así, las hipótesis que realmente se utilizan son:

1. $m \geq p$;
2. $n \geq q$;
3. $p \geq q \geq 2$.

Construiremos un torneo bipartito del tipo del tipo $(m, p; n, q)_4$.

En este subcaso tenemos $m \geq p, n \geq q$ y $q \geq p \geq 2$. Renombremos m, n, p y q como n', m', q' y p' , respectivamente.

Así, tenemos :

- (a) $m' \geq p'$;
- (b) $n' \geq q'$;
- (c) $p' \geq q' \geq 2$.

Por el subcaso anterior, por la observación y por (a), (b) y (c), sabemos que existe un torneo bipartito $T(A, B)$ del tipo $(m', p'; n', q')_4$. Por lo que $T(B, A)$ es un torneo bipartito del tipo $(n', q'; m', p')_4$; es decir, $T(B, A)$ es un torneo bipartito del tipo $(m, p; n, q)_4$.

En los casos (1) y (2) hemos agotado todas las posibilidades para los tipos de torneos bipartitos excluyendo los casos enunciados en el teorema 3.0.4. Así, este teorema queda demostrado. ■

Lema 3.0.3. [4] Sean $T(A, B)$ un torneo bipartito y $x \in K_4(T(A, B)) \cap A$. Si existe $y \in A$ tal que $d(x, y) = 4$, entonces $y \in K_4(T(A, B)) \cap A$.

Demostración. Observemos que $d(x, y) = 4$ implica que $O(x) \subseteq O(y)$ (ver la figura 3.15). De otra forma existiría v en $O(x) \setminus O(y)$; esto es, $x \rightarrow v \rightarrow y$, lo que implica que $d(x, y) = 2$, contradiciendo $d(x, y) = 4$.

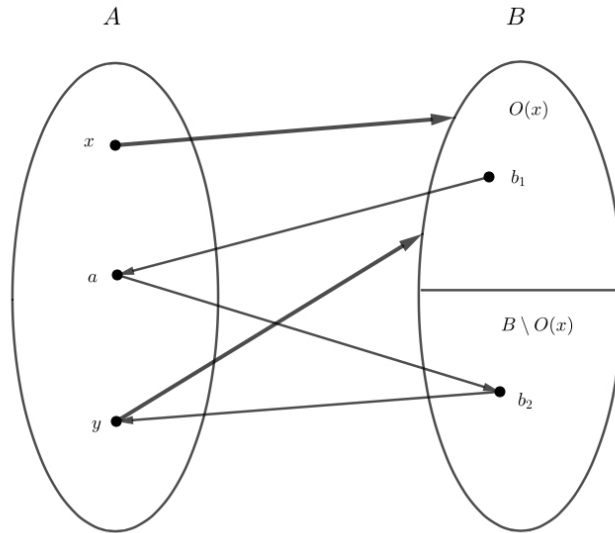


Figura 3.15: En la figura: (x, b_1, a, b_2, y) es una trayectoria de longitud mínima, por lo que $O(x) \subseteq O(y)$

Demostraremos que y es un 4-rey. Sea $z \in V(T(A, B)) \setminus \{y\}$. Veamos que $d(y, z) \leq 4$.

Caso 1. $z \in V(T(A, B)) \setminus \{x, y\}$.

Como x es un 4-rey, sabemos que $d(x, z) \leq 4$. Sea $P = (x, u, \dots, z)$ una xz -trayectoria dirigida de longitud mínima. Entonces $u \in O(x)$ y $O(x) \subseteq O(y)$ implica que $y \rightarrow u$, por lo que $(y, u) \cup (u, P, z)$ es un yz -camino dirigido de longitud a lo más $d(x, z) \leq 4$; es decir, $d(y, z) \leq 4$ (ver la figura 3.16).

Caso 2. $z = x$.

Sabemos que $O(x) \subseteq O(y)$. Así tenemos dos subcasos (ver la figura 3.17).

Subcaso 1. $O(y) \setminus O(x) \neq \emptyset$.

En este subcaso existe $w \in O(y) \setminus O(x)$; esto es, $y \rightarrow w$ y $w \rightarrow x$, por lo que $y \rightarrow w \rightarrow x$ es una yx -trayectoria dirigida de longitud dos; es decir, $d(y, x) = 2$.

Subcaso 2. $O(y) \setminus O(x) = \emptyset$.

En este subcaso se tiene que $O(x) = O(y)$ y $I(x) = I(y)$. Sea w un vértice en $I(x)$, entonces $w \in B$, por lo que $w \in V(T(A, B)) \setminus \{x, y\}$. Por el caso (1) sabemos que $d(y, w) \leq 4$, lo que implica que $d(y, w) = 1$ o $d(y, w) = 3$, ya que $y \in A$ y $w \in B$. Como $w \in I(x)$ y $I(x) = I(y)$, entonces $d(y, w) = 3$. Si P es una yw -trayectoria dirigida de longitud tres, entonces $P \cup (w, x)$ es un yx -camino dirigido de longitud cuatro, lo que implica que $d(y, x) = 4$.

3. TORNEOS BIPARTITOS CON 4-REYES

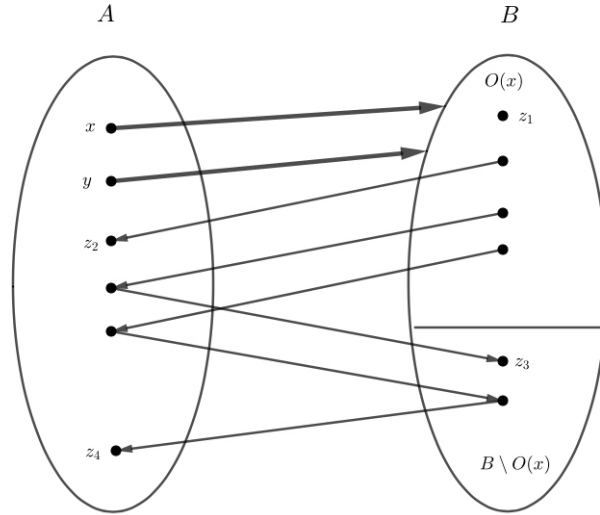


Figura 3.16: Lema 3.0.3, caso (1). En la figura: z_i , con $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, representan las posibilidades de z , donde $d(x, z_i) = i$

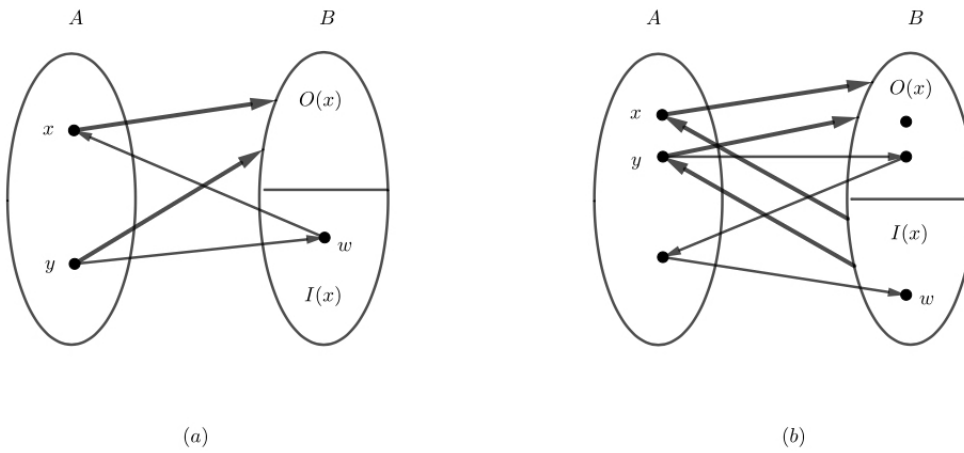


Figura 3.17: Lema 3.0.3, caso (2). (a) Subcaso (1): $O(y) \setminus O(x) \neq \emptyset$; (b) Subcaso (2): $O(y) \setminus O(x) = \emptyset$

Por los casos (1) y (2) tenemos que $d(y, z) \leq 4$ para todo vértice z en $V(T(A, B)) \setminus \{y\}$. Por lo tanto $y \in K_4(T(A, B)) \cap A$. ■

Corolario 3.0.1. [4] Sean $T(A, B)$ un torneo bipartito y x en $K_4(T(A, B)) \cap A$. Si y es un vértice en el conjunto $A \setminus (K_4(T(A, B)) \cap A)$, entonces $d(x, y) = 2$.

Demostración. Como x es un 4-rey, sabemos que $d(x, y) \leq 4$. Además $\{x, y\} \subseteq A$, con $x \neq y$ ya que x es 4-rey y y no lo es por elección, por lo que $d(x, y) = 2$ o $d(x, y) = 4$. Si $d(x, y) = 4$, el lema 3.0.3 implica que y es un 4-rey, pero $y \in A \setminus (K_4(T(A, B)) \cap A)$, lo que es una contradicción. Por lo

tanto, $d(x, y) = 2$. ■

Lema 3.0.4. [4] Sea $T(A, B)$ un torneo bipartito con $K_4(T(A, B)) \neq \emptyset$. Entonces, para cada vértice x en $V(T(A, B)) \setminus K_4(T(A, B))$ existe un vértice y en $K_4(T(A, B))$ tal que $d(x, y) > 4$ o tal que $d(x, y) = \infty$.

Demostración. Si $V(T(A, B)) \setminus K_4(T(A, B)) = \emptyset$, este lema se cumple por vacuidad.

Supongamos que $V(T(A, B)) \setminus K_4(T(A, B)) \neq \emptyset$.

Sea x un vértice en $V(T(A, B)) \setminus K_4(T(A, B))$. Si x es un receptor, entonces para todo vértice y en $V(T(A, B)) \setminus \{x\}$ se tiene que $d(x, y) = \infty$. En particular, como $K_4(T(A, B)) \neq \emptyset$ y $x \notin K_4(T(A, B))$, existe un vértice y_0 en $K_4(T(A, B))$ tal que $d(x, y_0) = \infty$.

Ahora supongamos que x no es un receptor. Consideremos los siguientes casos.

Caso 1. $T(A, B)$ tiene transmisores.

Como $K_4(T(A, B)) \neq \emptyset$, estamos en los puntos (1) o (2) del lema 3.0.2; es decir, tenemos un único transmisor v en $V(T(A, B))$ (de hecho v es el único 4-rey). Por la demostración de los puntos (1) y (2) del lema 3.0.2 tenemos que no hay wv -trayectorias dirigidas para ningún vértice w en $V(T(A, B)) \setminus \{v\}$; en particular, no hay xv -trayectorias dirigidas, puesto que $x \in V(T(A, B)) \setminus \{v\}$.

Caso 2. $T(A, B)$ no tiene transmisores.

Supongamos que existe un vértice v en $V(T(A, B)) \setminus K_4(T(A, B))$ tal que $d(v, y) \leq 4$ para todo vértice y en $K_4(T(A, B))$. Sin perder generalidad, supongamos $v \in A$. Así, $A \setminus K_4(T(A, B)) \neq \emptyset$.

Veremos que v es un 4-rey, lo cual es una contradicción.

Subcaso 1. No todos los vértices en $K_4(T(A, B)) \cap B$ dominan a v .

En este caso existe un vértice w en $K_4(T(A, B)) \cap B$ tal que $v \rightarrow w$. Notemos lo siguiente:

1. Para todo vértice a en A se tiene que $d(w, a) \leq 3$, ya que w es un 4-rey.
2. Para todo vértice b en $B \setminus (K_4(T(A, B)) \cap B)$ ocurre que $d(w, b) = 2$, por el corolario 3.0.1.
3. Para todo vértice t en $K_4(T(A, B)) \cap B$ tenemos que $d(v, t) \leq 4$, por la suposición para este caso.

Entonces para todo vértice a en A se tiene que $d(v, a) \leq 4$ y para todo vértice b en B ocurre que $d(v, b) \leq 4$; es decir, $v \in K_4(T(A, B))$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto este subcaso no es posible con las hipótesis dadas.

Subcaso 2. Para todo vértice z en $K_4(T(A, B)) \cap B$ se tiene que z domina a v .

Demostraremos que para todo vértice u en $V(T(A, B))$ tenemos que $d(v, u) \leq 4$. Como para todo vértice y en $K_4(T(A, B))$ se tiene que $d(v, y) \leq 4$, por la suposición de este caso, solo resta

3. TORNEOS BIPARTITOS CON 4-REYES

ver que para todo vértice a en $A \setminus K_4(T(A, B))$ tenemos $d(v, a) \leq 4$ y que para todo vértice b en $B \setminus K_4(T(A, B))$ tenemos $d(v, b) \leq 4$.

Observemos que para todo vértice r en $K_4(T(A, B))$ se tiene que $d(v, r) \leq 4$, por la suposición inicial del caso (2), y todo vértice en $K_4(T(A, B)) \cap B$ domina a v . Esto implica que para todo vértice b en $K_4(T(A, B)) \cap B$ se cumple que $d(v, b) = 3$.

Veamos que para todo vértice a en $A \setminus K_4(T(A, B))$ ocurre que $d(v, a) \leq 4$.

Sea α un vértice en $A \setminus K_4(T(A, B))$. Veremos que $(v, \alpha) \leq 4$.

Sea w un vértice en $M(B)$ (es decir, $|O(w)| = \max\{\delta^+(y) : y \in B\}$). Entonces se cumple lo siguiente:

1. w es un 4-rey,
2. $I(w) \subseteq K_4(T(A, B))$,
3. $A \setminus K_4(T(A, B)) \subseteq O(w)$ y
4. $w \rightarrow v$.

El punto (1) se deduce de la demostración del teorema 3.0.1, por la elección de w . Así mismo, el punto (2) también se obtiene de la elección de w , usando el lema 3.0.1. Como $O(w) = A \setminus I(w)$, por complementos en A y por el punto (2), obtenemos el punto (3). Además, el punto (1) y la suposición de este subcaso (todo vértice de $K_4(T(A, B)) \cap B$ domina a v), implican al punto (4).

Como para todo vértice r en $K_4(T(A, B)) \cap B$ se tiene que $d(v, r) = 3$ y $w \in K_4(T(A, B)) \cap B$, entonces tenemos que $d(v, w) = 3$. Por otro lado, el punto (3) nos dice que w domina a todo vértice de $A \setminus K_4(T(A, B))$, lo que implica que w domina a α . Así, tenemos $d(v, w) = 3$ y $w \rightarrow \alpha$, por lo que $d(v, \alpha) \leq 4$ (ver la figura 3.18).

Hasta aquí tenemos que para todo vértice a en A ocurre que $d(v, a) \leq 4$ y para todo vértice b en $K_4(T(A, B)) \cap B$ se tiene que $d(v, b) \leq 4$. Ahora veamos que para todo vértice β en $B \setminus K_4(T(A, B))$ se cumple que $d(v, \beta) \leq 4$. Tomemos dos subcasos.

Subcaso 2.1. $B \setminus K_4(T(A, B)) = \emptyset$.

Como todo vértice de $K_4(T(A, B)) \cap B$ domina a v y $B \setminus K_4(T(A, B)) = \emptyset$, entonces v es un receptor, lo que contradice la suposición inicial del caso (2), a saber que $d(v, y) \leq 4$ para todo vértice y en $K_4(T(A, B))$. Por lo que este subcaso no puede ocurrir.

Subcaso 2.2. $B \setminus (K_4(T(A, B)) \cap B) \neq \emptyset$.

Recordemos que estamos demostrando que para todo vértice β en $B \setminus K_4(T(A, B))$ se cumple que $d(v, \beta) \leq 4$. Procediendo por contradicción, supongamos que existe un vértice z en $B \setminus K_4(T(A, B))$ tal que $d(v, z) \geq 5$ (esto implica que $z \rightarrow v$). Veremos que z es un 4-rey, lo cual contradice que $z \notin K_4(T(A, B))$.

Afirmación. z es un 4-rey; es decir, para todo vértice u en $V(T(A, B))$ se cumple que $d(z, u) \leq 4$.

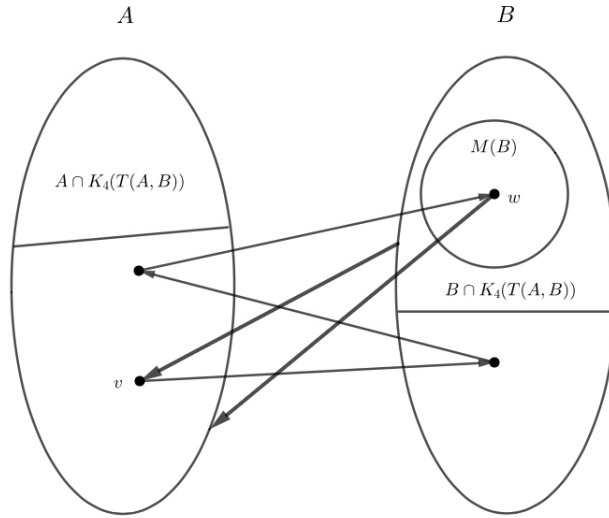


Figura 3.18: Lema 3.0.4, caso (2), subcaso (2): $K_4(T(A, B)) \cap B \rightarrow v$. En la figura $w \in M(B)$, $w \in K_4(T(A, B)) \cap B$ y $w \rightarrow A \setminus K_4(T(A, B))$

Sea u un vértice en $V(T(A, B))$.

Caso a. $u \in A$.

Sabemos que $d(v, u) \leq 4$ para todo vértice u en A (por la primera parte de la demostración del subcaso (2)). Notemos que dado un vértice u_0 en A , tenemos que $d(v, u_0) = 2$ o $d(v, u_0) = 4$. Tomemos dos subcasos.

Subcaso a.1. $d(v, t) = 2$ para todo vértice t en $A \setminus \{v\}$.

En este subcaso, como $T(A, B)$ no tiene transmisores, entonces v es un 3-rey (por el teorema 2.2.1), en particular z es 4-rey, porque $z \rightarrow v$.

Subcaso a.2. Existe un vértice t_0 en A tal que $d(v, t_0) \neq 2$.

En este subcaso tenemos que $d(v, t_0) = 4$. Sea (v, b_1, a_1, b_2, t_0) una vt_0 -trayectoria dirigida de longitud mínima, donde $a_1 \in A$ y $\{b_1, b_2\} \subseteq B$, ya que $v \in A$. Como $d(v, z) \geq 5$, entonces $z \rightarrow a_1$, lo cual implica que $d(z, t_0) \leq 3$, puesto que (z, a_1, b_2, t_0) es un zt_0 -camino dirigido de longitud tres. Así, dado cualquier vértice t en A tal que $d(v, t) = 4$, tenemos que $d(z, t) \leq 3$.

Por otro lado, si existe un vértice t en A tal que $d(v, t) = 2$, tenemos que $d(z, t) \leq 3$, ya que $z \rightarrow v$.

Por lo tanto, $d(z, u) \leq 3 < 4$ para todo vértice u en A .

Caso b. $u \in B$.

Subcaso b.1 $u \in K_4(T(A, B)) \cap B$.

3. TORNEOS BIPARTITOS CON 4-REYES

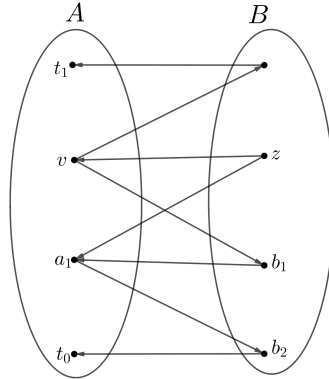


Figura 3.19: Afirmación en el lema 3.0.4, subcaso (a.2): $u \in A$. Los casos de u están representados por a_1, t_1 o t_0

Recordemos que como $d(v, K_4(T(A, B))) \leq 4$, por la suposición inicial del caso (2), y todo vértice de $K_4(T(A, B)) \cap B$ domina a v , entonces para todo vértice b en $K_4(T(A, B)) \cap B$ se sigue que $d(v, b) = 3$. Como $z \rightarrow v$ y $d(v, u) = 3$, entonces $d(z, u) \leq 4$.

Subcaso b.2 $u \in B \setminus K_4(T(A, B))$.

Sea a un vértice en $M(A)$ (es decir, $|O(a)| = \max\{\delta^+(y) : y \in A\}$). Recuerde que, por la demostración del teorema 3.0.1, a es un 4-rey. Entonces, por la elección de a tenemos:

1. $a \rightarrow u$.
2. $d(z, a) \leq 3$.

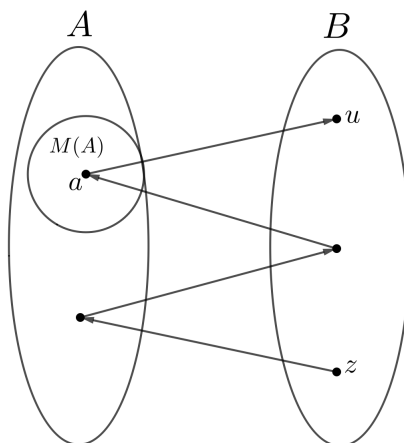


Figura 3.20: Afirmación en el lema 3.0.4, subcaso (b.2): $u \in B \setminus K_4(T(A, B))$

Si el punto (1) no se cumpliera, tendríamos $u \rightarrow a$, por el lema 3.0.1, esto implicaría que u es un 4-rey, contradiciendo que $u \in B \setminus K_4(T(A, B))$. Entonces el punto (1) se cumple. Por otro lado, el

punto (2) se cumple debido a que $a \in A$ y por lo demostrado en el caso (a). Así, los puntos (1) y (2) implican que $d(z, u) \leq 4$.

Por lo tanto $d(z, u) \leq 4$ para todo vértice u en B , por los subcasos (b.1) y (b.2).

Por lo anterior concluimos que z es un 4-rey, terminando así la demostración de la afirmación.

Al cumplirse la afirmación se contradice la elección de z . Entonces $d(v, u) \leq 3 < 4$ para todo vértice $u \in B \setminus K_4(T(A, B))$.

Por los subcasos (2.1) y (2.2) de la demostración general tenemos que, en el caso (2) de la demostración general, v es un 4-rey, contradiciendo que $v \in V(T(A, B)) \setminus K_4(T(A, B))$.

De los casos generales (1) y (2) se concluye que si $K_4(T(A, B)) \neq \emptyset$, entonces para cada vértice x en $V(T(A, B)) \setminus K_4(T(A, B))$ existe un vértice y en $K_4(T(A, B))$ tal que $d(x, y) > 4$. ■

Recordemos que, dado un torneo bipartito $T(A, B)$, definimos $M(A) := \{a \in A : |O(a)| = \max \{\delta^+(y) : y \in A\}\}$ y $M(B) := \{b \in B : |O(b)| = \max \{\delta^+(z) : z \in B\}\}$ (definición dada en la demostración del teorema 3.0.1), donde teníamos que $M(A) \neq \emptyset$ y $M(B) \neq \emptyset$.

Dadas las definiciones anteriores, tenemos el siguiente resultado.

Lema 3.0.5. [4] Sea $T(A, B)$ un torneo bipartito sin transmisores tal que $M(A) \neq A$ y $M(B) \neq B$. Entonces: existen vértices v y w , con $v \in M(A)$ y $w \in B \setminus M(B)$, tales que $v \rightarrow w$, o; existen vértices $z \in M(B)$ y $u \in A \setminus M(A)$, tales que $z \rightarrow u$.

Demostración. Sabemos que $M(A) \subseteq A$, $M(B) \subseteq B$, $M(A) \neq \emptyset$ y $M(B) \neq \emptyset$. Como $M(A) \neq A$ y $M(B) \neq B$, tenemos que $A \setminus M(A) \neq \emptyset$ y $B \setminus M(B) \neq \emptyset$.

Para la demostración de este lema procederemos por contradicción. Supongamos que este lema es falso; es decir, que todo vértice de $B \setminus M(B)$ domina a todo vértice de $M(A)$ y que todo vértice de $A \setminus M(A)$ domina a todo vértice de $M(B)$.

Observemos que, bajo la suposición anterior, se tiene que $O(a) \subseteq M(B)$ para cada vértice a en $M(A)$ y $O(b) \subseteq M(A)$ para cada vértice b en $M(B)$.

Sean u y v vértices de $T(A, B)$ tales que $u \in M(A)$ y $v \in A \setminus M(A)$.

Afirmamos que no hay uv -trayectorias dirigidas. En efecto, supongamos que existe una uv -trayectoria dirigida $(u, b_1, a_1, \dots, a_{n-1}, b_n, v)$. Como $u \in M(A)$, entonces $b_1 \in M(B)$ por la observación, y en general, por recursión, $b_i \in M(B)$ para todo i en $\{1, \dots, n\}$ y $a_j \in M(A)$ para todo j en $\{1, \dots, n-1\}$. Tenemos que $b_n \in M(B)$ y $b_n \rightarrow v$, lo que implica que $v \in M(A)$, lo que es una contradicción puesto que $v \in A \setminus M(A)$. Por lo tanto no existen uv -trayectorias dirigidas, con lo que se demuestra la afirmación. En tal caso $d(u, v) = \infty$, lo cual no es posible pues $u \in K_4(T(A, B))$ por la demostración del teorema 3.0.1 (ya que $u \in M(A)$). ■

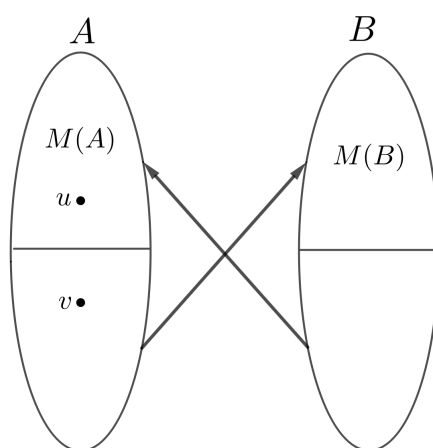


Figura 3.21: Suposición del Lema 3.0.5: $B \setminus M(B) \rightarrow M(A)$ y $A \setminus M(A) \rightarrow M(B)$. Esto nos lleva a una contradicción

Conclusiones

En este trabajo estudiamos los 2-reyes, 3-reyes y 4-reyes en torneos bipartitos, para ello nos basamos en el artículo de Petrovic [4]. El trabajo consistió en desarrollar a detalle las demostraciones de los resultados del artículo mencionado hasta los resultados de 4-reyes, completando cuando fuera necesario y dando algunas demostraciones diferentes a las presentadas en el artículo en el cual nos basamos, como los casos de los teoremas 2.2.1 y 2.2.2, así como obteniendo algunos resultados nuevos, como son la caracterización mediante ciclos dirigidos que damos de los torneos del tipo $(m, m; n, n)_3$ en el teorema 2.2.4 y la caracterización dada en el lema 3.0.2 de los tipos de torneos bipartitos $(m, p; n, q)_4$ de acuerdo a la cantidad de transmisores que tienen. También obtuvimos resultados parciales encaminados a completar el tema de 3-reyes en torneos bipartitos (teoremas 2.2.5 y 2.2.6), dejando para otro trabajo el complemento de este tema.

Bibliografía

- [1] B. Bollobás, *Combinatorics: Set Systems, Hypergraphs, Families of Vectors, and Combinatorial Probability*, Cambridge University Press, 1986, pp. 177.
- [2] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph theory with applications*, Elsevier Science Publishing Co., Inc., 1976, pp. 270. 11, 16
- [3] H. G. Landau, On dominance relations and the structure of animal societies III: the conditions for a score structure, *Bull. Math. Biophys.* 15 (1953) 143-148. 9
- [4] V. Petrovic, Kings in bipartite tournaments, *Discrete Mathematics*, 173 (1997) 187-196. 10, 23, 24, 25, 29, 51, 69, 70, 71, 72, 75, 84, 86, 87, 91, 93
- [5] V. Petrovic and Thomassen, Kings in k-partite tournaments, *Discrete Mathematics*, 98 (1991) 237-238. 69
- [6] L. Soltes, Orientations of graphs minimizing the radius or the diameter, *Math. Slovaca* 36 (1986) 289-296. 10