

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**



**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**Análisis Geomecánico del Flujo de  
Gas en Yacimientos de Baja  
Permeabilidad**

**TESIS**

Que para obtener el título de  
**Ingeniero Petrolero**

**P R E S E N T A**

José Emilio Santamaría Díaz

**DIRECTOR DE TESIS**

Dr. Fernando Samaniego Verduzco



**Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2019**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## **Dedicatoria**

*A mis abuelos, Víctor Díaz Hernández y Gloria López Ovando, quienes me han dado todo el cariño y apoyo del mundo. A mi madre, Marina Díaz López, quien me supo guiar por el buen camino. A mi padre, Ulises Santamaría Andrés. A mi hermano Rafael, mis tías Rosa, Dalila, Lourdes y mi tío Víctor, quienes han sido parte importante del camino. A Alexa, quien ha estado para mí en las buenas y en las malas. A mis primas, Gloria y Marian. Y a todos aquellos que han sido parte de esta etapa de mi vida.*

## ***Agradecimientos***

*Le doy gracias a Dios por darme vida y serenidad para concluir esta parte del camino.*

*Al Dr. Fernando Samaniego Verduzco, por todo el apoyo brindado y sobre todo, su gran ejemplo y enseñanza.*

*Al Dr. Rodolfo Camacho Velázquez, por sus valiosas observaciones y enseñanzas.*

*A los miembros del jurado, la Dra. Paulina Gómora Figueroa, el Ing. Israel Castro Herrera y el Mat. Luis Alberto Vázquez Maison, por su paciencia y apoyo durante este proceso.*

*A la UNAM, por darme el privilegio de ser parte de ella.*

## ÍNDICE

<b>LISTA DE FIGURAS .....</b>	<b>iii</b>
<b>LISTA DE TABLAS .....</b>	<b>iii</b>
<b>RESUMEN .....</b>	<b>iv</b>
<b>CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>1</b>
<b>Capítulo 2. GEOMECÁNICA EN LOS YACIMIENTOS DE FLUIDOS.....</b>	<b>3</b>
<b>2.1 Introducción.....</b>	<b>3</b>
<b>2.2 Esfuerzo.....</b>	<b>3</b>
<b>2.3 Balance de momentum lineal.....</b>	<b>4</b>
<b>2.4 Deformación.....</b>	<b>5</b>
<b>2.5 Ley de Hooke generalizada.....</b>	<b>6</b>
<b>2.6 Módulos elásticos.....</b>	<b>8</b>
<b>2.7 Poroelasticidad.....</b>	<b>9</b>
<b>2.8 Teoría poroelástica de Biot.....</b>	<b>10</b>
<b>2.9 Concepto de esfuerzo efectivo.....</b>	<b>15</b>
<b>Capítulo 3. ACOPLAMIENTO ENTRE EL FLUJO DE GAS EN YACIMIENTOS Y LA DEFORMACIÓN GEOMECÁNICA.....</b>	<b>18</b>
<b>3.1 Introducción.....</b>	<b>18</b>
<b>3.2 Ecuaciones de Continuidad.....</b>	<b>18</b>
<b>3.3 Ecuaciones de Transporte.....</b>	<b>21</b>
<b>3.4 Ecuación de Difusión-Deformación.....</b>	<b>22</b>
<b>3.5 Ecuación de Desplazamiento del Sólido.....</b>	<b>23</b>
<b>Capítulo 4. APROXIMACIÓN ANALÍTICA DEL PROBLEMA GEOMECÁNICO DE FLUJO DE GAS EN MEDIOS POROSOS.....</b>	<b>26</b>
<b>4.1 Introducción.....</b>	<b>26</b>
<b>4.2 Desarrollo del modelo analítico.....</b>	<b>26</b>
<b>4.2.1 Ecuación de continuidad.....</b>	<b>26</b>
<b>4.2.2 Ecuación de difusión con propiedades del fluido y de la roca variables..</b>	<b>27</b>
<b>4.3 Aproximación de la solución.....</b>	<b>28</b>

<b>4.4 Segunda Aproximación Analítica.....</b>	<b>30</b>
<b>Capítulo 5. MODELO MATEMÁTICO-NUMÉRICO DE FLUJO DE GAS A TRAVÉS DE UN MEDIO POROSO DEFORMABLE.....</b>	<b>34</b>
<b>5.1 Introducción.....</b>	<b>34</b>
<b>5.2 Desarrollo de las ecuaciones.....</b>	<b>34</b>
<b>Capítulo 6. CONCLUSIONES.....</b>	<b>39</b>
<b>Apéndice A. Ecuaciones en Coordenadas Polares Cilíndricas.....</b>	<b>41</b>
<b>Apéndice B. Datos del Yacimiento.....</b>	<b>45</b>
<b>Apéndice C. Desarrollo de la Solución Analítica.....</b>	<b>48</b>
<b>NOMENCLATURA.....</b>	<b>51</b>
<b>REFERENCIAS .....</b>	<b>54</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 Ilustración de Esfuerzos Como Densidad de Fuerzas.....	3
Figura 2.2 Esfuerzos Actuando Sobre un Medio Continuo.....	4
Figura 2.3 Módulos Elásticos[5].....	9
Figura 2.4a Prueba con Camisa Cerrada[5].....	12
Figura 2.4b Prueba con Camisa Abierta[5].....	12
Figura 3.1 Volumen Elemental del Yacimiento.....	18
Figura 3.2 Arreglo del Medio Poroso.....	18
Figura 4.1 Volumen Elemental Representativo.....	26
Figura 4.2 Medio Poroso.....	26
Figura 5.1 Malla Radial.....	38
Figura 5.2 Malla Rectangular.....	38
Figura A.1 Esfuerzos Sobre un Elemento de Volumen Infinitesimal en Coordenadas Polares Cilíndricas.....	44
Figura B.1 Variación de la Permeabilidad para el núcleo D.....	46
Figura B.2 Variación de la Permeabilidad para el núcleo E.....	46
Figura B.3 Variación de la Permeabilidad para el núcleo F.....	47

## LISTA DE TABLAS

Tabla 4.1 Comparación de Resultados de las Soluciones Analíticas.....	33
Tabla B.1 Propiedades del Yacimiento[12].....	45

## **RESUMEN**

La interacción entre la Geomecánica y el Flujo de Fluidos en Yacimientos de baja permeabilidad puede tener un impacto en las operaciones de producción, así como en la recuperación final de hidrocarburos. Para estudiar adecuadamente este fenómeno, en el presente trabajo se desarrolla un modelo matemático que describa esta interacción, asimismo, se brinda una metodología general para resolver las ecuaciones del modelo, por medio del método de diferencias finitas. Adicionalmente se encuentra aproximaciones analíticas para casos particulares de la solución de este problema. Y finalmente se comparan los resultados de estas soluciones con la solución exacta.

## Capítulo 1. Introducción

Los yacimientos de gas de baja permeabilidad representan un reto a nivel técnico para la industria petrolera. Con la llegada del fracturamiento hidráulico, muchos de estos yacimientos han podido ser explotados; sin embargo, muchos de ellos presentan diversas dificultades para su explotación debido a la presencia de algunos fenómenos que suelen no considerarse de manera convencional. En estos yacimientos es común encontrar una disminución de la permeabilidad y la porosidad durante la vida productiva.

La problemática antes mencionada y la alteración de las propiedades de flujo de la roca, están íntimamente ligadas a la deformación mecánica de la roca, o mejor dicho, a la geomecánica. La geomecánica estudia el comportamiento mecánico de los materiales del subsuelo, en el caso de la industria petrolera, estudia desde los aspectos relacionados con la construcción de los pozos hasta el comportamiento dinámico de los yacimientos y su influencia en la deformación de las rocas o la reactivación de fallas.

Para poder explotar correctamente los yacimientos de baja permeabilidad, es necesario acoplar la geomecánica y el flujo de fluidos en rocas porosas, con el fin de modelar los fenómenos que intervienen en la producción de fluidos y posteriormente en la declinación de ésta. Durante la vida productiva de un yacimiento se modifica el estado de esfuerzos de las rocas, ya que conforme la presión de poro disminuye, el esfuerzo efectivo actuando sobre la formación aumenta, y como consecuencia ésta se puede deformar trayendo consigo una variación de la porosidad y la permeabilidad.

En esta tesis se hace un estudio de qué pasa cuando un yacimiento de baja permeabilidad, sensible a esfuerzos, experimenta una reducción en el índice de productividad debida a la deformación geomecánica, y como las propiedades de la roca; por ejemplo, la porosidad y la permeabilidad varían en función de la presión así como ocurre con las propiedades de los fluidos del yacimiento. Se comienza en el capítulo segundo con una revisión de la literatura concerniente a la teoría poroelástica lineal y tratando el problema desde el punto de vista de la mecánica del medio continuo para definir las ecuaciones fundamentales que modelan la deformación de una roca porosa cuando existe flujo dentro de sus poros.

Posteriormente, en el capítulo tercero, se utilizan los principios fundamentales del flujo en medios porosos y la deformación poroelástica para derivar el modelo matemático que describe el fenómeno antes citado y se muestra que es necesario un método numérico para resolver el problema planteado. Después en el capítulo cuarto se presentan dos aproximaciones analíticas para resolver las ecuaciones diferenciales que resultan del modelado matemático del yacimiento y se compara la validez de los resultados con un caso reportado en la literatura.

Por último en el capítulo 5 se explora el esquema de solución numérica necesario para resolver el problema de manera exacta sin importar si el yacimiento se produce en condiciones ideales o se estudia un escenario más complejo. Cabe señalar que el desarrollo del programa computacional para llevar a cabo esta labor queda como parte de un trabajo posterior a esta tesis y sólo se plantean las ecuaciones y relaciones adicionales que son necesarias para el correcto funcionamiento de un simulador numérico geomecánico.

Se muestra que bajo ciertas restricciones las aproximaciones analíticas funcionan en buena medida para los casos estudiados y que el estudio llevado a cabo es necesario para tener un eje de referencia cuando se analicen yacimientos de baja permeabilidad, ya que actualmente la industria petrolera está en una etapa de transición de yacimientos convencionales hacia los no convencionales.

## Capítulo 2. Geomecánica en los Yacimientos de Fluidos

### 2.1 Introducción

Históricamente los problemas de deformación de rocas saturadas de fluidos se han tratado de manera separada al de flujo de fluidos dentro de las mismas rocas porosas. Los trabajos de Terzaghi[11] y de Biot[5] han servido como base para el estudio de fenómenos acoplados de flujo y geomecánica. En este capítulo se presentan las bases físicas y matemáticas que modelan la teoría poroelástica de Biot. Para el estudio de la geomecánica es necesario basarse en las ecuaciones generales que describen el comportamiento mecánico de un medio continuo y por lo tanto es necesario introducir algunos conceptos de análisis tensorial en lo consecuente. Se especifica que se usarán letras negritas mayúsculas para denotar tensores de orden 2 o superior y letras negritas minúsculas para denotar vectores y los componentes de ambos.

### 2.2 Esfuerzo

El esfuerzo se define como la fuerza que se aplica sobre una unidad de área. La magnitud del esfuerzo, por lo tanto, depende del tamaño del área sobre la que actúa así como de la fuerza que se imprime sobre ésta. El esfuerzo puede cuantificarse de la siguiente manera:

$$\sigma = \frac{F}{A} \dots \dots \dots (2.1)$$

Donde F es la fuerza y A es el área sobre la cual es aplicada dicha fuerza. En la figura 2.1 se observa que el esfuerzo depende de la magnitud del área así como de su orientación, por lo que se definen también dos tipos de esfuerzo, el esfuerzo normal y el esfuerzo cortante. El primero se refiere al esfuerzo que es causado por una fuerza que se aplica en la dirección perpendicular a un área determinada y el segundo es aquel causado por una fuerza orientada en la dirección tangencial al área donde es aplicada dicha fuerza.

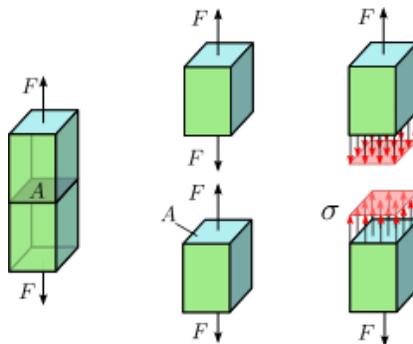


Figura 2.1 Ilustración de Esfuerzos Como Densidad de Fuerzas

En sentido estricto el esfuerzo es un tensor de orden 2 ya que cada componente de este se encuentra asociado a dos bases coordenadas o direcciones espaciales.

Matemáticamente es necesario representar al tensor de esfuerzos con una matriz como se muestra a continuación:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (2.2)$$

Cada componente del tensor está asociado a dos direcciones espaciales o bases coordenadas, esto quiere decir que el componente  $\sigma_{13}$  es el esfuerzo causado por una fuerza que actúa sobre la cara perpendicular al vector  $\hat{e}_1$  y que está orientada en la dirección del vector  $\hat{e}_3$ . Representado en coordenadas cartesianas el tensor de esfuerzos tiene una representación geométrica como la siguiente:

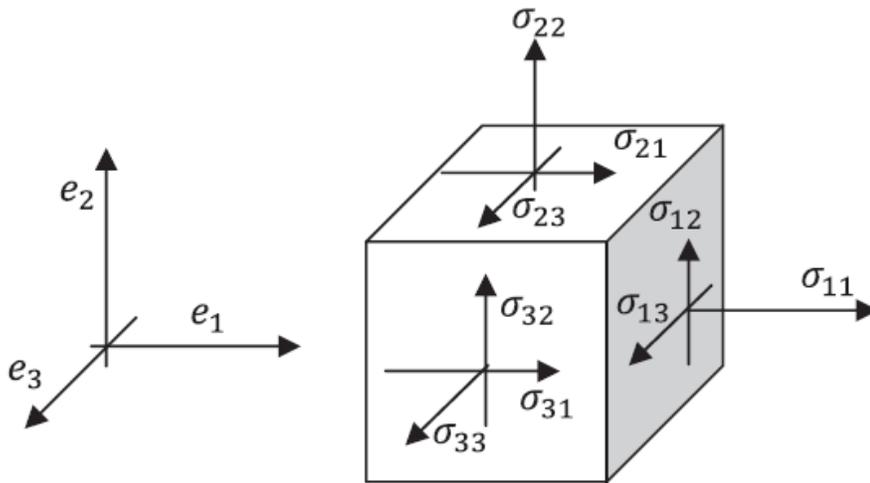


Figura 2.2 Esfuerzos Actuando Sobre un Medio Continuo

En la **figura 2.2** se aprecia el significado geométrico del tensor de esfuerzos. Los componentes cuya forma es  $\sigma_{ij}$  (tal que  $i = j$ ) representan a los esfuerzos normales, que son aquellos en los que la fuerza está orientada en la dirección perpendicular a la superficie sobre la que actúa. En cambio, los componentes donde  $i \neq j$ , representan a los esfuerzos tangenciales o cortantes, que son aquellos donde la fuerza está orientada en la dirección del vector paralelo a la superficie sobre la que actúan.

### 2.3 Balance de momentum lineal

Para poder estudiar el efecto de los esfuerzos sobre la configuración de un material es necesario hacer un balance de las fuerzas que actúan sobre dicho objeto. Para un medio en el cual se tiene definido un estado de esfuerzos, es decir un tensor de esfuerzos, es posible escribir la siguiente ecuación:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \vec{b} = \mathbf{0} \dots \dots \dots (2.3)$$

Esta ecuación significa que en el caso de un sólido estático como es el caso de un yacimiento poroelástico, la suma resultante de las fuerzas actuando en él es igual a cero. La ecuación 2.3 involucra la divergencia del tensor de esfuerzos y el término  $\vec{b}$  es el vector que representa la aceleración gravitacional actuando en el yacimiento. El operador divergencia actuando sobre un tensor de segundo orden en coordenadas cartesianas queda definido como:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} \hat{e}_j \dots \dots \dots (2.4)$$

Desarrollando la divergencia del tensor de esfuerzo y haciendo uso de la convención de la suma de Einstein para el caso particular del sistema cartesiano, la ecuación de equilibrio queda:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + \rho b_1 = 0 \dots \dots \dots (2.5)$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + \rho b_2 = 0 \dots \dots \dots (2.6)$$

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho b_3 = 0 \dots \dots \dots (2.7)$$

Este sistema de ecuaciones representa cada una de las componentes de la ecuación de equilibrio y es útil para describir como el estado de esfuerzos de un sólido se relaciona con la deformación que sufrirá éste.

## 2.4 Deformación

La deformación se puede definir como el cambio en la posición relativa de las partículas que constituyen a un material. Se puede decir que si después de un desplazamiento experimentado por un cuerpo, sus partículas quedan acomodadas de tal manera que sus posiciones relativas no pueden obtenerse como resultado de una rotación o traslación, entonces el cuerpo está deformado.

Existen dos tipos de deformación asociados a los dos tipos de esfuerzo, la deformación volumétrica y la deformación angular. La deformación volumétrica es aquella sufrida por un cuerpo como resultado de esfuerzos normales actuando sobre éste y dicha deformación es vista como un aumento o reducción de volumen (o longitud) de dicho cuerpo. La deformación angular es causada por esfuerzos cortantes y es aquella en la cual un cuerpo cambia de forma sin alterar su longitud o volumen total. En el presente trabajo se consideraran dos cosas; los esfuerzos y deformaciones son positivos cuando hay compresión, y negativos para la expansión, las deformaciones que se mencionan son aquellas conocidas como deformaciones infinitesimales.

En el caso de un sólido elástico como el que se considera del cual está conformada la roca del yacimiento, la deformación es tan pequeña que se puede medir por incrementos infinitesimales, de ahí el término deformación infinitesimal. La deformación al igual que el esfuerzo es un tensor de orden 2 que de manera general puede representarse como:

$$\mathbf{E} = \text{sym} \nabla \vec{u} = \frac{1}{2} [\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T], \dots \dots \dots (2.8)$$

Donde  $\vec{u}$  es el vector de desplazamiento, entonces la deformación de manera general está definida como el gradiente de desplazamiento dentro de un medio continuo. Esto es, si en un sólido, no todas las partículas que lo conforman experimentan la misma cantidad de desplazamiento es porque se está deformando. En coordenadas cartesianas las componentes del tensor de deformación son expresadas como:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right), \dots \dots \dots (2.9)$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}, \dots \dots \dots (2.10)$$

Es importante mencionar que tanto el tensor de esfuerzo como el tensor de deformación infinitesimal son tensores simétricos. Esto es:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}; e_{ij} = e_{ji}, \dots \dots \dots (2.11)$$

Además es correcto puntualizar que esta notación sólo puede ser usada cuando manejamos los componentes físicos de estos tensores y que seguimos usando un sistema de coordenadas ortogonales. Asimismo, los componentes de los operadores diferenciales como la divergencia y el gradiente para tensores y vectores respectivamente no pueden ser generalizados de coordenadas cartesianas a coordenadas curvilíneas ortogonales generalizadas.

### 2.5 Ley de Hooke generalizada

La ley de Hooke describe la relación esfuerzo-deformación en un sólido elástico por medio de la siguiente ecuación.

$$\mathbf{T} = \mathbf{C}: \mathbf{E}, \dots \dots \dots (2.12)$$

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} e_{kl}, \dots \dots \dots (2.13)$$

Donde  $c_{ijkl}$  es un tensor de cuarto orden que representa las propiedades elásticas de un medio[2], sin embargo, si se considera que el yacimiento es un medio isótropo, este tensor es isótropo y por lo tanto admite una representación en términos de los productos tensoriales de los tensores delta de Kronecker:

$$c_{ijkl} = a\delta_{ij}\delta_{kl} + b\delta_{ik}\delta_{jl} + c\delta_{il}\delta_{jk}, \dots \dots \dots (2.14)$$

Donde  $\delta_{ij}$  es el tensor delta de Kronecker y está definido por la siguiente relación:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1; i = j \\ 0; i \neq j \end{cases}, \dots \dots \dots (2.15)$$

Y  $\delta_{ij}\delta_{kl}$  es el producto tensorial entre tensores delta de Kronecker. Se puede considerar al tensor delta de Kronecker análogo al tensor identidad y expresarse así:

$$\delta_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \dots \dots \dots (2.16)$$

Luego entonces, el producto tensorial entre tensores delta de Kronecker podría ser representado por medio de un arreglo hipermatricial. Es evidente que el tensor delta de Kronecker es simétrico. Después de efectuar la doble contracción entre tensores presente en la ecuación 2.12, y considerando que  $b = c = G$  y  $a = \lambda$ , se puede obtener una ecuación lineal que relacione al esfuerzo con la deformación como se muestra a continuación.

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}e_{kk} + 2Ge_{ij}, \dots \dots \dots (2.17)$$

De esta manera la ley de Hooke generalizada queda en coordenadas generales como:

$$\mathbf{T} = \lambda(\text{tr}\mathbf{E})\mathbf{I} + 2G\mathbf{E}, \dots \dots \dots (2.18)$$

Las constantes  $\lambda$  y  $G$  son conocidas como los parámetros de Lamé y el primero está relacionado con la deformación volumétrica, el segundo es el módulo de corte o de rigidez del material. El término  $e_{kk}$  es la deformación volumétrica que puede calcularse en primera instancia como la traza del tensor de deformación. Este término en coordenadas ortogonales generalizadas es también equivalente con la divergencia del vector de desplazamiento.

$$\varepsilon_{vol} = e_{kk} = \nabla \cdot \vec{u}, \dots \dots \dots (2.19)$$

De manera análoga se puede obtener la traza del tensor de esfuerzo denotada como  $(\text{tr}\mathbf{T})$  o en notación indicial  $\sigma_{kk}$  y así obtener la siguiente expresión.

$$\sigma_{kk} = (3\lambda + 2G)e_{kk}, \dots \dots \dots (2.20)$$

Si sustituimos la traza del tensor de deformación en la ecuación podemos igual tener una ecuación tensorial que describa la deformación en función del esfuerzo como se muestra a continuación:

$$e_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left[ \sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2G} \delta_{ij} \sigma_{kk} \right], \dots \dots \dots (2.21)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2\mu} \left[ \mathbf{T} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2G} (tr\mathbf{T})\mathbf{I} \right], \dots \dots \dots (2.22)$$

## 2.6 Módulos elásticos

La teoría de la elasticidad lineal considera que la deformación es linealmente proporcional al esfuerzo y que dado un proceso de deformación, éste puede ser revertido simplemente dejando de aplicar el esfuerzo que actúa en cierto material, esto es, que si una roca está siendo deformada por un esfuerzo, al dejar de aplicarlo ésta volverá a tener su forma y dimensiones originales. Si se considera el esfuerzo y la deformación en la dirección de  $x_1$ , existe una relación entre ambos dada por:

$$E = \frac{\sigma_{11}}{e_{11}}, \dots \dots \dots (2.23)$$

El número E se conoce como el módulo de Young y, relaciona la deformación longitudinal de un cuerpo al esfuerzo aplicado en la dirección de la deformación[5]. Otro parámetro elástico importante es el coeficiente de Poisson cuyo significado es la cantidad que se deforma un material en una dirección por unidad de deformación en la dirección perpendicular, esto es:

$$\nu = \left| \frac{e_{22}}{e_{11}} \right|, \dots \dots \dots (2.24)$$

Por otra parte, si se considera un estado de esfuerzos hidrostático, esto es que sólo hay esfuerzos normales y estos son los mismos en todas direcciones, podemos tener un tensor de esfuerzos del tipo.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sigma_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \sigma_p \end{bmatrix}, \dots \dots \dots (2.25)$$

La traza de este tensor en términos de 2.20 será:

$$3\sigma_p = (3\lambda + 2G)e_{kk}, \dots \dots \dots (2.26)$$

$$\frac{\sigma_p}{e_{kk}} = \left( \lambda + \frac{2}{3}G \right) = K, \dots \dots \dots (2.27)$$

El coeficiente k mide la relación entre el esfuerzo hidrostático y la deformación volumétrica y es conocido como el módulo de volumen del material, es importante recalcar que el inverso de k es precisamente la compresibilidad, en este caso de la roca. Estos módulos  $\lambda$ , G, E,  $\nu$  y K son las constantes elásticas[2][5] que sirven para describir los procesos de esfuerzo-deformación de los geomateriales, estas constantes estas relacionadas entre sí como se muestra en la figura 2.3.

$E = 3K(1 - 2\nu)$	$K = \lambda \frac{1 + \nu}{3\nu}$	$\frac{\lambda}{\lambda + G} = 2\nu$
$E = 2G(1 + \nu)$	$K = \frac{2}{3}G \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu}$	$\frac{G}{\lambda + G} = 1 - 2\nu$
$E = \frac{9KG}{3K + G}$	$K = \lambda + \frac{2}{3}G$	$\frac{\lambda + 2G}{\lambda + G} = 2(1 - \nu)$
$E = G \frac{3\lambda + 2G}{\lambda + G}$	$K = \frac{GE}{9G - 3E}$	$\frac{3\lambda + 2G}{\lambda + G} = 2(1 + \nu)$
$E = \frac{\lambda}{\nu}(1 + \nu)(1 - 2\nu)$	$\frac{\lambda}{G} = \frac{2\nu}{1 - 2\nu}$	$\frac{3\lambda + 4G}{\lambda + G} = 2(2 - \nu)$
$H = \lambda + 2G$	$H = K + \frac{4}{3}G$	$\nu = \frac{3K - 2G}{2(3K + G)}$
$H = E \frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$	$H = 2G \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu}$	$H = 3K \frac{1 - \nu}{1 + \nu}$

Figura 2.3 Módulos Elásticos [5]

## 2.7 Poroelasticidad

Las ecuaciones anteriores son válidas para un medio continuo en general y por medio de la ley de Hooke se modela el caso particular de un sólido elástico. Para continuar con el modelado de la deformación geomecánica acoplada al flujo de fluidos, es necesario presentar la teoría poroelástica de Biot. Con este enfoque se hace evidente que un yacimiento que consta de una parte sólida y otra de fluido sigue siendo un medio continuo e isótropo.

Una roca en general es un medio compuesto cuya respuesta elástica está fuertemente influenciada su porción no sólida. Precisamente es la parte de los poros la que juega un papel importante en el comportamiento mecánico de los yacimientos y una primera aproximación para su estudio es considerar un medio poroso cuyas partes se deforman independientemente una de la otra. Un ejemplo de este tipo de medio es el de una arena no consolidada saturada con agua. De manera simplificada si una muestra de este material se coloca en un contenedor, su deformación volumétrica debida a una presión externa estará dada por:

$$\varepsilon_{vol} = \frac{\sigma_p}{K_{eff}}, \dots \dots \dots (2.28)$$

Donde el término  $k_{eff}$  es el módulo de volumen de la mezcla. Por lo tanto la deformación total que sufre este material es la suma de la deformación de cada uno de sus componentes multiplicada por la porción que ocupa dicho componente en la mezcla.

$$\varepsilon_{vol} = \frac{V_s}{V_{tot}} \varepsilon_{vol,s} + \frac{V_f}{V_{tot}} \varepsilon_{vol,f}, \dots \dots \dots (2.29)$$

Donde los subíndices  $s$  y  $f$  son para denotar al sólido y al fluido y  $V_{tot}$  es el volumen total de la muestra de roca no consolidada. Si se tienen las siguientes relaciones:

$$\phi = \frac{V_f}{V_{tot}}, \dots \dots \dots (2.30)$$

$$\frac{V_s}{V_{tot}} = 1 - \phi, \dots \dots \dots (2.31)$$

Las deformaciones del sólido y el fluido,  $\varepsilon_{vol,s}$  y  $\varepsilon_{vol,f}$  respectivamente, están dadas por los módulos de volumen del sólido ( $K_S$ ) y del fluido ( $K_F$ ), quedando la ecuación 2.29 como:

$$\varepsilon_{vol} = (1 - \phi) \frac{\sigma_p}{K_S} + \phi \frac{\sigma_p}{K_F}, \dots \dots \dots (2.32)$$

### 2.8 Teoría poroelástica de Biot

Ahora se considerará un medio poroso, permeable e isótropo que consiste de dos componentes: una parte sólida y una parte fluida. El desplazamiento de la parte sólida se denota como  $\vec{u}_s$  mientras que el de la parte fluida es  $\vec{u}_f$ . Para un volumen elemental superpuesto al sólido, la deformación volumétrica está dada por la divergencia del vector de desplazamiento del sólido  $\vec{u}_s$ . Usando la ecuación 2.19 tenemos que la deformación volumétrica del sólido es:

$$\varepsilon_{vol} = \nabla \cdot \vec{u}_s, \dots \dots \dots (2.33)$$

Para la parte del fluido se definirá el parámetro  $\vartheta$ , el cual describe la deformación volumétrica del fluido relativa a la deformación del sólido:

$$\vartheta = \phi \nabla \cdot (\vec{u}_s - \vec{u}_f), \dots \dots \dots (2.34)$$

El tensor de esfuerzos representa el esfuerzo total externo sobre un elemento de volumen superpuesto al marco de la roca porosa. Este volumen elemental balancea estos esfuerzos en parte por medio de esfuerzos presentes en el marco de la roca y por otra parte por medio de la presión del fluido que contiene, la presión de poro  $p$ . El cambio en el contenido de masa del fluido dentro de este volumen de roca puede ser dividido en dos partes: el cambio en el volumen de los poros debido al cambio en los esfuerzos sobre la roca y/o en la presión de poro, y la compresión o expansión

del fluido conforme la presión de poro cambia. Esto significa que la deformación volumétrica del fluido puede ser expresada como:

$$\vartheta = -\phi \left( \frac{\Delta V_p}{V_p} + \frac{p}{K_f} \right), \dots \dots \dots (2.35)$$

Si tomamos la ecuación 2.17 y desarrollamos cada término podemos obtener un conjunto de ecuaciones como el que sigue:

$$\sigma_{11} = (\lambda + 2G)e_{11} + \lambda e_{22} + \lambda e_{33}, \dots \dots \dots (2.36)$$

$$\sigma_{22} = \lambda e_{11} + (\lambda + 2G)e_{22} + \lambda e_{33}, \dots \dots \dots (2.37)$$

$$\sigma_{33} = \lambda e_{11} + \lambda e_{22} + (\lambda + 2G)e_{33}, \dots \dots \dots (2.38)$$

$$\sigma_{12} = 2G e_{12}, \dots \dots \dots (2.39)$$

$$\sigma_{13} = 2G e_{13}, \dots \dots \dots (2.40)$$

$$\sigma_{23} = 2G e_{23}, \dots \dots \dots (2.41)$$

Es evidente que este conjunto de ecuaciones sólo describe una roca en la cual no hay poros llenos de fluido. En el caso de un material poroso saturado de fluidos se necesitan escribir términos extra a este conjunto de ecuaciones.

$$\sigma_{11} = \lambda \varepsilon_{vol} + 2G e_{11} - C \vartheta, \dots \dots \dots (2.42)$$

$$\sigma_{22} = \lambda \varepsilon_{vol} + 2G e_{22} - C \vartheta, \dots \dots \dots (2.43)$$

$$\sigma_{33} = \lambda \varepsilon_{vol} + 2G e_{33} - C \vartheta, \dots \dots \dots (2.44)$$

$$\sigma_{12} = 2G e_{12}, \dots \dots \dots (2.45)$$

$$\sigma_{13} = 2G e_{13}, \dots \dots \dots (2.46)$$

$$\sigma_{23} = 2G e_{23}, \dots \dots \dots (2.47)$$

$$p = C \varepsilon_{vol} - M \vartheta, \dots \dots \dots (2.48)$$

Escrito en notación indicial podemos expresar este conjunto de ecuaciones en la siguiente expresión:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{vol} \delta_{ij} + 2G e_{ij} - C \vartheta \delta_{ij}, \dots \dots \dots (2.49)$$

En estas ecuaciones los términos  $\lambda$ ,  $G$ , son los parámetros de Lamé del medio poroso, mientras que  $C$  y  $M$  son parámetros elásticos adicionales para describir un medio compuesto de dos fases. Se puede observar que si  $\vartheta = 0$ , recuperamos la ecuación 2.17, en este caso tenemos que no existe movimiento de fluidos dentro de la roca porosa y  $\lambda$  entonces no es el parámetro de Lamé[5] para la roca porosa seca, sino el de un medio poroso saturado de fluido cuando éste no presenta movimiento alguno. Para entender el término  $M$  se puede considerar que la deformación

volumétrica del sólido es cero, esto es  $\varepsilon_{vol} = 0$  y entonces tomando en cuenta las ecuaciones 2.34 y 2.48 se obtiene:

$$p = M\phi \nabla \cdot \vec{u}_f, \dots \dots \dots (2.50)$$

Con esta ecuación se observa que  $M\phi$  es una medida de como aumenta la presión a medida que el contenido de fluido dentro de la roca aumenta, si la roca es completamente rígida entonces  $M\phi = K_f$ . Si se suman las ecuaciones de 2.42 a 2.44 se tiene una expresión para el esfuerzo promedio ( $\frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{T}$ ) como la siguiente:

$$\bar{\sigma} = K\varepsilon_{vol} - C\vartheta, \dots \dots \dots (2.51)$$

Donde  $K = \lambda + \frac{2}{3}G$  es el módulo de volumen de la roca porosa en condiciones sin drene de fluidos, es decir que el fluido que contiene la roca permanece inmóvil. Si se considera la situación en la que una muestra de roca porosa se encuentra dentro de una camisa cerrada y se le realiza una prueba donde es sometida a una presión hidrostática externa  $\sigma_p$  como se muestra en la figura 2.4.a. Y dejando que el fluido escape de la roca, de manera que la presión de poro se mantenga constante, y que por lo tanto el esfuerzo sea soportado completamente por el esqueleto de la roca y combinando las ecuaciones 2.51 y 2.48, tomando en cuenta que la presión del fluido es constante y no interactúa con el esfuerzo ni la deformación (despreciable), se llega a la siguiente expresión:

$$\frac{\sigma_p}{\varepsilon_{vol}} = K - \frac{C^2}{M} = K_{fr}, \dots \dots \dots (2.52)$$

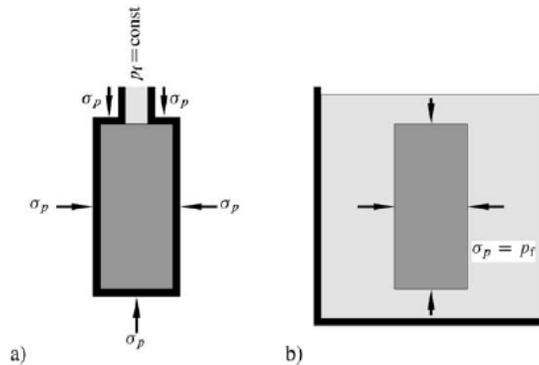


Figura 2.4 a) Prueba con Camisa Cerrada, b) Prueba con Camisa Abierta [5]

Dado que en el fluido no se transmiten los esfuerzos cortantes, el módulo de rigidez de una roca porosa saturada de fluidos es igual al módulo de rigidez de la parte sólida de la roca, esto es  $G_{fr} = G$ . Una prueba como la descrita anteriormente describe la competencia mecánica de la muestra de roca porosa, entonces el término  $K_{fr}$  es el módulo de volumen del marco de la roca. A continuación se analiza

una prueba sin camisa realizada a la roca como se muestra en la figura 2.4.b. Aquí la muestra de roca se encuentra sumergida en un fluido y se somete a una presión hidrostática externa de manera que la presión interna de los poros esté balanceada con el esfuerzo hidrostático, esto es  $\sigma_p = p$ . A diferencia del caso anterior en donde la presión es despreciable y la deformación volumétrica del fluido es igual a la del sólido, ahora se combinan las ecuaciones 2.51 y 2.48 con esta consideración. Para este caso la deformación volumétrica de la roca es uniforme, esto es que la deformación volumétrica total de la roca, del volumen poroso y de los granos de la roca son iguales, siendo la ecuación que describe este caso la siguiente:

$$\frac{\sigma_p}{\varepsilon_{vol}} = \frac{p}{\varepsilon_{vol}} = \frac{K_{fr}}{1 - \frac{C}{M}}, \dots \dots \dots (2.53)$$

$$\frac{\Delta V_{tot}}{V_{tot}} = \frac{\Delta V_p}{V_p} = \frac{\Delta V_s}{V_s}, \dots \dots \dots (2.54)$$

Teniendo en cuenta que  $\sigma_p = p = -K_s \left( \frac{\Delta V_s}{V_s} \right)$  donde  $K_s$  es el módulo de volumen de los granos de la roca. Siendo el comportamiento esfuerzo-deformación determinado por las propiedades elásticas de la roca sólida. Sustituyendo la anterior definición en la ecuación 2.54 y comparando la expresión resultante con la ecuación 2.53 se llega a las siguientes expresiones:

$$\frac{\Delta V_{tot}}{V_{tot}} = \frac{\Delta V_p}{V_p} = \frac{\Delta V_s}{V_s} = -\varepsilon_{vol} = -\frac{p}{K_s}, \dots \dots \dots (2.55)$$

$$K_s = \frac{K_{fr}}{1 - \frac{C}{M}}, \dots \dots \dots (2.56)$$

De las ecuaciones 2.35 y 2.55 se llega a

$$\vartheta = \phi \left( \frac{1}{K_s} - \frac{1}{K_f} \right) p, \dots \dots \dots (2.57)$$

Por otra parte combinando las ecuaciones 2.48 y 2.51 con el hecho de que  $p = \sigma_p$  da como resultado

$$\vartheta = \frac{C - K}{MK - C^2} p, \dots \dots \dots (2.58)$$

Combinando las ecuaciones 2.57 y 2.58 se llega a la relación

$$\phi \left( \frac{1}{K_s} - \frac{1}{K_f} \right) = \frac{C - K}{MK - C^2}, \dots \dots \dots (2.59)$$

Aunque las ecuaciones anteriores fueron derivadas de situaciones particulares como una prueba con una camisa cerrada y sin camisa, respectivamente, en una

roca porosa, estas son generalmente válidas para un medio poroso. Las ecuaciones 2.56, 2.59 combinadas con la ecuación 2.52 permiten expresar las constantes K, C y M en términos de los módulos elásticos de las partes que constituyen a la roca ( $K_s$  y  $K_f$ ), más la porosidad y el módulo del marco de la roca  $K_{fr}$ . Llegando a las siguientes expresiones[5]:

$$K = K_{fr} + \frac{K_f}{\phi} \frac{\left(1 - \frac{K_{fr}}{K_s}\right)^2}{1 + \frac{K_f}{\phi K_s} \left(1 - \phi - \frac{K_{fr}}{K_s}\right)}, \dots \dots \dots (2.60)$$

$$M = \frac{K_f}{\phi} \frac{1}{1 + \frac{K_f}{\phi K_s} \left(1 - \phi - \frac{K_{fr}}{K_s}\right)}, \dots \dots \dots (2.61)$$

$$C = \left(1 - \frac{K_{fr}}{K_s}\right) M = \frac{K_f}{\phi} \frac{1 - \frac{K_{fr}}{K_s}}{1 + \frac{K_f}{\phi K_s} \left(1 - \phi - \frac{K_{fr}}{K_s}\right)}, \dots \dots \dots (2.62)$$

La ecuación 2.60 en general se conoce como la ecuación de Biot-Grassmann y puede ser reescrita como

$$\frac{K}{K_s - K} = \frac{K_{fr}}{K_s - K_{fr}} + \frac{1}{\phi} \frac{K_f}{K_s - K_f}, \dots \dots \dots (2.63)$$

Las ecuaciones 2.60-2.62 no dan un significado para cada parámetro. Para obtener este significado físico es necesario considerar ciertos casos límites de manera que las ecuaciones se simplifiquen. El primer caso es de una roca dura[5] en la cual el marco sólido es incompresible comparado con el fluido. Como  $K_s \gg K_f$  se tiene el caso de un marco rígido definido por:

$$K_{fr}, G_{fr}, K_s \gg K_f, \dots \dots \dots (2.64)$$

Para porosidades que no son pequeñas ( $\phi \gg \left(\frac{K_f}{K_s^2}\right)(K_s - K_{fr})$ ) las ecuaciones 2.60-2.62 se reducen a

$$\text{marco rígido} \left\{ \begin{array}{l} K \approx K_{fr} \\ C \approx \frac{K_f}{\phi} \left(1 - \frac{K_{fr}}{K_s}\right), \dots \dots \dots (2.65) \\ M \approx \frac{K_f}{\phi} \end{array} \right.$$

En este caso limite, el módulo de volumen K es equivalente al módulo de volumen del marco de la roca y la constante M está dada por las propiedades del fluido. El siguiente caso es el opuesto y sucede cuando se tiene una roca débil[5] o un marco débil, para esto se considera

$$K_{fr}, G_{fr}, K_f \ll K_s, \dots \dots \dots (2.66)$$

Para porosidades tales que  $\phi \gg K_f/K_s$  las ecuaciones 2.60-2.62 se reducen a

$$\text{marco débil} \begin{cases} K \approx K_{fr} + \frac{K_f}{\phi} \\ C \approx M \approx \frac{K_f}{\phi} \end{cases}, \dots \dots \dots (2.67)$$

En este último caso el módulo de volumen  $K$  está influenciado no solo por la dureza de la roca, sino también por el módulo de volumen del fluido  $K_f$ , así mismo en el caso en el que  $K_{fr} \rightarrow 0$  (suspensión),  $K = C = M \approx K_f/\phi$  se tiene que las tres constantes están determinadas por las propiedades del fluido. Se debe hacer énfasis en que estos dos casos son sólo situaciones extremas que rara vez suceden, por lo que en general se deberán usar todas las ecuaciones con sus términos como aparecen en 2.60-2.62.

### 2.9 Concepto de esfuerzo efectivo

En la parte anterior se explicó el experimento cuando una muestra de roca es sometida a una prueba dentro de una camisa cerrada dentro de la cual se le aplica un esfuerzo hidrostático a la roca y se permite que el fluido que contiene escape, manteniendo así la presión de poro constante. En esta situación se tiene una prueba con drene, descrita por

$$\sigma_p = K_{fr} \varepsilon_{vol}, \dots \dots \dots (2.68)$$

Si por otro lado se realiza la misma prueba pero sin dejar que entre o salga fluido de la roca, se tiene entonces una prueba sin drene. En esta situación la compresión de la roca incluyendo su espacio poroso, debido al esfuerzo hidrostático, causará un aumento en la presión de poro del fluido mismo. Siendo así, la compresión de la roca y la presión de poro pueden ser obtenidas de las ecuaciones 2.48 y 2.51 teniendo en cuenta  $\vartheta = 0$ , dado que no existe desplazamiento relativo entre el fluido de los poros y los granos de la roca. Con esta consideración se tiene que la presión del fluido es:

$$p = C \varepsilon_{vol}, \dots \dots \dots (2.69)$$

Mientras que la relación esfuerzo-deformación queda como

$$\sigma_p = K \varepsilon_{vol}, \dots \dots \dots (2.70)$$

Usando las ecuaciones 2.68 y 2.52 se puede obtener

$$K = K_{fr} + \frac{C^2}{M} = K_{fr} + \frac{C}{M} \frac{p}{\varepsilon_{vol}}, \dots \dots \dots (2.71)$$

Sustituyendo la expresión anterior para K en (2.69) y acomodando los términos, se define

$$\sigma_p - \frac{C}{M}p = K_{fr}\varepsilon_{vol}, \dots \dots \dots (2.72)$$

Esta ecuación quiere decir que la deformación volumétrica de la roca es proporcional al esfuerzo efectivo definido como

$$\sigma_p^* = \sigma_p - \alpha p, \dots \dots \dots (2.73)$$

Con estas dos últimas ecuaciones se puede ver que la deformación de una roca porosa depende del esfuerzo efectivo y no del esfuerzo total y que el módulo de volumen de ésta  $K_{fr}$  es el mismo descrito por la ecuación 2.68. Físicamente esto quiere decir que el marco de la roca soporta la parte  $\sigma_p^*$  del esfuerzo total  $\sigma_p$  mientras que la parte restante  $\alpha p$  es soportada por el fluido. La otra parte de la presión de poro  $(1 - \alpha)p$  es contrarrestada por esfuerzos internos en la parte sólida de la roca.

Al término  $\alpha$  se le conoce como el coeficiente de Biot[5] y es definido como:

$$\alpha = \frac{C}{M} = 1 - \frac{K_{fr}}{K_s}, \dots \dots \dots (2.74)$$

Dado que  $K_{fr} < K_s$  en general, se tiene que teóricamente el valor máximo que el módulo de volumen del marco de la roca es  $(1 - \phi)K_s$  y su mínimo valor será por supuesto, cero. Siendo así entonces  $\alpha$  acotado al intervalo  $[\phi, 1]$ . Para rocas no consolidadas el coeficiente de Biot  $\alpha$  es aproximadamente 1. De manera general el esfuerzo efectivo se definirá entonces como

$$\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij} - \alpha p \delta_{ij}, \dots \dots \dots (2.75)$$

De esta ecuación es evidente que sólo el esfuerzo efectivo normal depende de la presión del fluido. Si se considera un caso en el que  $p=0$ , las ecuaciones 2.48 y 2.74 se llega a que  $\alpha = \vartheta/\varepsilon_{vol}$  y de (2.35) y (2.55) se obtiene

$$\alpha = \phi \frac{\Delta V_p/V_p}{\Delta V_{tot}/V_{tot}} = \frac{\Delta V_P}{\Delta V_{tot}}, \dots \dots \dots (2.76)$$

Esta expresión muestra que  $\alpha$  es una medida del cambio en el volumen poroso relativo al cambio en el volumen total de roca a presión de poro constante. Es de utilidad expresar las ecuaciones 2.60-2.62 usando  $\alpha$  de manera que se resuman a

$$\frac{1}{M} = \frac{\alpha}{C} = \frac{\alpha^2}{K - K_{fr}} = \frac{\phi}{K_f} + \frac{\alpha - \phi}{K_s}, \dots \dots \dots (2.77)$$

El concepto de esfuerzo efectivo fue introducido en mecánica de suelos por Terzaghi en 1923, por medio de estudios empíricos[5][11], los principios fundamentales en los que se basó son:

1.- al incrementar el esfuerzo hidrostático en una roca se produce el mismo cambio de volumen que si se redujera la presión interna de sus poros.

2.- la resistencia al corte depende sólo de la diferencia entre el esfuerzo normal aplicado a la roca y su presión de poro. Esto implica que el esfuerzo efectivo es el que determina, en vez del esfuerzo total, si la roca fallará o no debido a una carga externa.

Estas suposiciones dan como resultado una ley de esfuerzo efectivo similar a la descrita por la ecuación 2.73 con  $\alpha = 1$ . Para suelos esta es una suposición razonable y cercana a la realidad, sin embargo, para el estudio de las rocas, la desviación de  $\alpha$  con respecto a 1 debe tomarse en cuenta.

Las ecuaciones que gobiernan la Poroelasticidad son hasta cierto punto similares a las leyes de la elasticidad. Esto es útil ya que las soluciones específicas a los problemas de elasticidad pueden ser usadas para resolver los problemas concernientes a la Poroelasticidad[2][3][5]. Luego entonces, si sustituimos  $\vartheta$  de (2.48) en (2.49) se obtiene

$$\sigma_{ij} = \left( \lambda - \frac{C^2}{M} \right) \varepsilon_{vol} \delta_{ij} + 2G e_{ij} + \frac{C}{M} p \delta_{ij}, \dots \dots \dots (2.78)$$

Introduciendo la definición de  $\alpha$  dada por (2.74) y definiendo

$$\lambda_{fr} = \lambda - \frac{C^2}{M}, \dots \dots \dots (2.79)$$

Se llega a

$$\sigma_{ij} = \lambda_{fr} \varepsilon_{vol} \delta_{ij} + 2G e_{ij} + \alpha p \delta_{ij}, \dots \dots \dots (2.80)$$

$$\mathbf{T} = (\lambda_{fr} tr \mathbf{E} + \alpha p) \mathbf{I} + 2G \mathbf{E}, \dots \dots \dots (2.81)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^* + \alpha p \mathbf{I}, \dots \dots \dots (2.82)$$

Donde  $\mathbf{T}$  y  $\mathbf{T}^*$  son los tensores de esfuerzo y esfuerzo efectivo respectivamente, la ecuación 2.82 se puede acoplar perfectamente en 2.3 para modelar un medio poroso que se deforma mientras existe flujo a través del mismo.

## Capítulo 3. Acoplamiento entre el Flujo de Gas en Yacimientos y la Deformación Geomecánica

### 3.1 Introducción

En este capítulo se derivan las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento de gas a través de un medio poroso deformable. Para este desarrollo es necesario realizar un análisis del principio de conservación de masa dentro de un elemento de volumen infinitesimal dentro de un medio poroso móvil.

De manera tradicional en la ingeniería de yacimientos se ocupa la ecuación de difusión para describir el flujo de fluidos en medios porosos y se supone al medio sólido como incompresible. En la realidad esto rara vez ocurre ya que la roca de la formación tiene una compresibilidad que depende del material en sí y de los esfuerzos a los que está sometido el yacimiento. Por lo que la interacción que hay entre el flujo y la deformación en la roca debe tomarse seriamente en cuenta.

### 3.2 Ecuaciones de Continuidad

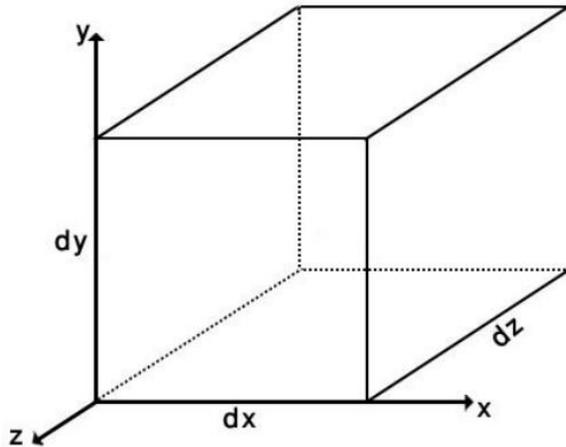


Figura 3.1 Volumen Elemental del Yacimiento

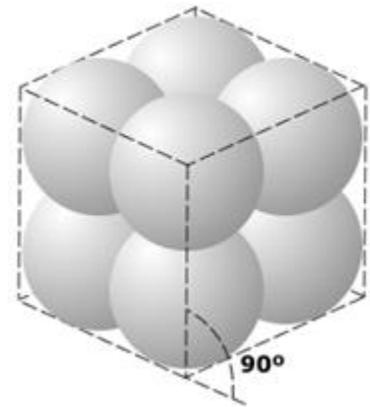


Figura 3.2 Arreglo del Medio Poroso

#### Parte del fluido

$$\Delta y \Delta z [(\rho \phi v_{gx})_{x+\Delta x} - (\rho \phi v_{gx})_x] + \Delta x \Delta z [(\rho \phi v_{gy})_{y+\Delta y} - (\rho \phi v_{gy})_y] + \Delta x \Delta y [(\rho \phi v_{gz})_{z+\Delta z} - (\rho \phi v_{gz})_z] = \frac{\Delta x \Delta y \Delta z [(\rho \phi)_t - (\rho \phi)_{t+\Delta t}]}{\Delta t}, \dots (3.1)$$

$$\frac{[(\rho\phi v_{gx})_{x+\Delta x} - (\rho\phi v_{gx})_x]}{\Delta x} + \frac{[(\rho\phi v_{gy})_{y+\Delta y} - (\rho\phi v_{gy})_y]}{\Delta y} + \frac{[(\rho\phi v_{gz})_{z+\Delta z} - (\rho\phi v_{gz})_z]}{\Delta z} = -\frac{[(\rho\phi)_{t+\Delta t} - (\rho\phi)_t]}{\Delta t}, \dots \dots \dots (3.2)$$

Tomando el límite de esta expresión cuando  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  y  $\Delta t$  tienden a cero, la ecuación 3.2 queda expresada como:

$$\frac{\partial(\rho\phi v_{gx})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\phi v_{gy})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho\phi v_{gz})}{\partial z} = -\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}, \dots \dots \dots (3.3)$$

Que en forma general describe a la siguiente ecuación:

$$\nabla \cdot (\rho\phi \vec{v}_g) = -\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}, \dots \dots \dots (3.4)$$

Para un yacimiento sensible a los esfuerzos geomecánicos es necesario hacer el balance de masa de la parte sólida de la matriz de la roca, ya que las partículas del sólido también se mueven.

**Parte del sólido**

$$\begin{aligned} &\Delta y \Delta z \{ [\rho_s(1-\phi)v_{sx}]_{x+\Delta x} - [\rho_s(1-\phi)v_{sx}]_x \} + \Delta x \Delta z \{ [\rho_s(1-\phi)v_{sy}]_{y+\Delta y} \\ &\quad - [\rho_s(1-\phi)v_{sy}]_y \} + \Delta x \Delta y \{ [\rho_s(1-\phi)v_{sz}]_{z+\Delta z} - [\rho_s(1-\phi)v_{sz}]_z \} \\ &= \Delta x \Delta y \Delta z \frac{ \{ [\rho_s(1-\phi)]_t - [\rho_s(1-\phi)]_{t+\Delta t} \} }{ \Delta t }, \dots \dots \dots (3.5) \end{aligned}$$

Reacomodando la expresión anterior sigue:

$$\begin{aligned} &\frac{ \{ [\rho_s(1-\phi)v_{sx}]_{x+\Delta x} - [\rho_s(1-\phi)v_{sx}]_x \} }{ \Delta x } + \frac{ \{ [\rho_s(1-\phi)v_{sy}]_{y+\Delta y} - [\rho_s(1-\phi)v_{sy}]_y \} }{ \Delta y } \\ &\quad + \frac{ \{ [\rho_s(1-\phi)v_{sz}]_{z+\Delta z} - [\rho_s(1-\phi)v_{sz}]_z \} }{ \Delta z } \\ &= -\frac{ \{ [\rho_s(1-\phi)]_{t+\Delta t} - [\rho_s(1-\phi)]_t \} }{ \Delta t }, \dots \dots \dots (3.6) \end{aligned}$$

Nuevamente tomando el límite cuando  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  y  $\Delta t$  tienden a cero, la ecuación 3.6 puede expresarse como:

$$\frac{\partial(\rho_s(1-\phi)v_{sx})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_s(1-\phi)v_{sy})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_s(1-\phi)v_{sz})}{\partial z} = -\frac{\partial(\rho_s(1-\phi))}{\partial t}, \dots \dots \dots (3.7)$$

O bien de manera general para todo sistema coordenado:

$$\nabla \cdot [\rho_s(1-\phi)\vec{v}_s] = -\frac{\partial(\rho_s(1-\phi))}{\partial t}, \dots \dots \dots (3.8)$$

Si la matriz de la roca se considera incompresible, la ecuación 3.7 queda:

$$\nabla \cdot [(1-\phi)\vec{v}_s] = -\frac{\partial((1-\phi))}{\partial t}, \dots \dots \dots (3.9)$$

Si desarrollamos término a término la ecuación (3.9) finalmente obtenemos:

$$\nabla \cdot \vec{v}_s = \frac{1}{(1-\phi)} \frac{D\phi}{Dt}, \dots \dots \dots (3.10)$$

Donde:

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{v}_s \cdot \nabla\phi, \dots \dots \dots (3.11)$$

Dado que:

$$\nabla \cdot \vec{v}_s = \dot{\varepsilon}_{vol}, \dots \dots \dots (3.12)$$

A partir de la ecuación (3.10) y resolviendo la ecuación diferencial[3], obtenemos:

$$\int_{\varepsilon_{vol}^n}^{\varepsilon_{vol}^{n+1}} d\varepsilon_{vol} = \int_{\phi^n}^{\phi^{n+1}} \frac{d\phi}{(1-\phi)}, \dots \dots \dots (3.13)$$

$$[\varepsilon_{vol}^{n+1} - \varepsilon_{vol}^n] = -\ln \frac{(1-\phi^{n+1})}{(1-\phi^n)}, \dots \dots \dots (3.14)$$

$$\phi^{n+1} = 1 - (1-\phi^n)e^{[\varepsilon_{vol}^{n+1}-\varepsilon_{vol}^n]}, \dots \dots \dots (3.15)$$

Nótese que el signo menos del lado derecho de la ecuación (3.14) se ha ido debido al uso de la convención geomecánica donde los esfuerzos y los desplazamientos son positivos para la compresión.

### 3.3 Ecuaciones de transporte

La ley de Darcy relaciona directamente la velocidad de un fluido en un medio poroso con el gradiente de presión que éste sufre dentro de un yacimiento. Para el caso en el que el medio poroso se deforma tenemos que tanto el fluido como el sólido son móviles, por lo que la velocidad adquirida por el fluido debido al gradiente de presión es en realidad la velocidad relativa entre la fase gaseosa y la fase sólida.

$$\bar{\mathbf{u}}_g = -\frac{\mathbf{K}}{\mu} \cdot \nabla p, \dots \dots \dots (3.16)$$

$$\phi(\bar{\mathbf{v}}_g - \bar{\mathbf{v}}_s) = -\frac{\mathbf{K}}{\mu} \cdot \nabla p, \dots \dots \dots (3.17)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_g = \phi(\bar{\mathbf{v}}_g - \bar{\mathbf{v}}_s), \dots \dots \dots (3.18)$$

De la ecuación 3.18 podemos observar que cuando la roca no se deforma y la velocidad del sólido es cero, la forma tradicional de la ecuación de Darcy se recupera.

La ecuación de Forchheimer[1] define el flujo de fluidos en medios porosos cuando estos se mueven con una velocidad alta, en este sentido tenemos que la relación entre la velocidad del gas y el gradiente de presión ya no es lineal y tenemos una contribución debido a las fuerzas viscosas y otra debido a los efectos inerciales que como consecuencia aumentan la caída de presión en el fluido.

$$-\nabla p = \frac{\mu}{k} \bar{\mathbf{u}}_g + \beta \rho |\bar{\mathbf{u}}_g| \bar{\mathbf{u}}_g, \dots \dots \dots (3.19)$$

$$-\nabla p = \frac{\mu}{k} \phi(\bar{\mathbf{v}}_g - \bar{\mathbf{v}}_s) + \beta \rho |\phi(\bar{\mathbf{v}}_g - \bar{\mathbf{v}}_s)| \phi(\bar{\mathbf{v}}_g - \bar{\mathbf{v}}_s), \dots \dots \dots (3.20)$$

$$-\nabla p = \frac{\mu}{k} \phi(\bar{\mathbf{v}}_g - \bar{\mathbf{v}}_s) \left\{ 1 + \beta \rho \frac{k}{\mu} |\phi(\bar{\mathbf{v}}_g - \bar{\mathbf{v}}_s)| \right\}, \dots \dots \dots (3.21)$$

En las ecuaciones 3.16 a 3.21 se tiene que la velocidad darciana  $\bar{\mathbf{u}}_g$  no es la velocidad real del gas, sino un promedio que se toma de ésta, como si el flujo se diera a través del área total de la cara de la roca y no como es en realidad, a través de su parte porosa.

$$\phi(\bar{\mathbf{v}}_g - \bar{\mathbf{v}}_s) = \frac{-\frac{k}{\mu} \nabla p}{\left\{ 1 + \beta \rho \frac{k}{\mu} |\phi(\bar{\mathbf{v}}_g - \bar{\mathbf{v}}_s)| \right\}}, \dots \dots \dots (3.22)$$

$$\phi(\bar{\mathbf{v}}_g - \bar{\mathbf{v}}_s) = -\delta \frac{k}{\mu} \nabla p, \dots \dots \dots (3.23)$$

donde:

$$\delta = \frac{1}{\left\{ 1 + \beta \rho \frac{k}{\mu} |\phi(\bar{\mathbf{v}}_g - \bar{\mathbf{v}}_s)| \right\}}, \dots \dots \dots (3.24)$$

Ecuación de estado de un gas real

$$\rho = \frac{M p}{RT z}, \dots \dots \dots (3.25)$$

Por último, de las ecuaciones 3.23 y 3.24 se observa que cuando la velocidad del gas relativa a la velocidad del sólido es suficientemente pequeña el coeficiente  $\delta$  tiende a 1 y la ecuación de flujo de alta velocidad se convierte de nuevo en la ecuación de Darcy para un medio poroso deformable, en caso de que la velocidad del sólido sea nula da como resultado que tengamos la forma tradicional de las ecuaciones de Darcy y Forchheimer.

### 3.4 Ecuación de Difusión-Deformación

La ecuación de difusión tradicional en la industria petrolera sólo contempla una interacción débil entre la Geomecánica y el flujo de fluidos en el medio poroso y esto se da a través del término de la compresibilidad total del sistema roca-fluido. En este estudio se analiza el comportamiento del flujo de gas en un medio poroso deformable y es necesario derivar una ecuación de difusión que acople la variación de la presión del fluido y la deformación de la roca. Como en el caso de la ecuación de difusión tradicional se hace uso de una ecuación de continuidad, una ecuación de transporte y una ecuación de estado para el fluido y el sólido para obtener una ecuación que describa este fenómeno físico.

Al combinar la ecuación 3.4, 3.10, 3.23 y 3.25 es posible obtener una ecuación de tipo difusión para este estudio.

$$\nabla \cdot (\rho \phi \vec{v}_g) = -\frac{\partial(\rho \phi)}{\partial t}, \dots \dots \dots (3.26)$$

$$\nabla \cdot \vec{v}_s = \frac{1}{(1-\phi)} \frac{D\phi}{Dt}, \dots \dots \dots (3.27)$$

$$\phi(\vec{v}_g - \vec{v}_s) = -\delta \frac{k}{\mu} \nabla p, \dots \dots \dots (3.28)$$

$$\nabla \cdot \left\{ \rho \left[ \phi \vec{v}_s - \delta \frac{k}{\mu} \nabla p \right] \right\} = -\frac{\partial(\rho \phi)}{\partial t}, \dots \dots \dots (3.29)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left[ \rho \delta \frac{k}{\mu} \nabla p \right] &= \nabla \cdot [\rho \phi \vec{v}_s] + \frac{\partial(\rho \phi)}{\partial t} \\ &= \rho \left\{ \phi \nabla \cdot \vec{v}_s + \vec{v}_s \cdot \nabla \phi + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\} + \phi \left\{ \vec{v}_s \cdot \nabla \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right\}, \dots \dots \dots (3.27) \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot \left[ \rho \delta \frac{k}{\mu} \nabla p \right] = \rho \left( \frac{D\phi}{Dt} + \phi \nabla \cdot \vec{v}_s \right) + \phi \frac{D\rho}{Dt}, \dots \dots \dots (3.28)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left[ \frac{p}{z} \delta \frac{k}{\mu} \nabla p \right] &= \frac{p}{z} \nabla \cdot \vec{v}_s + \phi \frac{\partial \left( \frac{p}{z} \right)}{\partial p} \frac{Dp}{Dt} \\ &= \frac{p}{z} \nabla \cdot \vec{v}_s + \phi c_g \frac{p}{z} \frac{Dp}{Dt}, \dots \dots \dots (3.29) \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot \left[ \delta \frac{k}{\mu B_g} \nabla p \right] = \frac{1}{B_g} \left[ \phi c_g \frac{Dp}{Dt} + \nabla \cdot \vec{v}_s \right], \dots \dots \dots (3.30)$$

Finalmente, la ecuación 3.30 expresada en coordenadas cilíndricas y tomando en cuenta la velocidad del sólido como positiva para la compresión queda:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \delta \frac{k}{\mu B_g} \frac{\partial p}{\partial r} \right] = \frac{1}{B_g} \left[ \phi c_g \left( \frac{\partial p}{\partial t} - v_s \frac{\partial p}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial (r v_s)}{\partial r} \right], \dots \dots \dots (3.31)$$

De la ecuación 3.31 se puede observar que, si la velocidad del sólido es nula, la ecuación de difusión-deformación[3] da como resultado la forma tradicional de la ecuación de difusión para gases reales.

### 3.5 Ecuación de desplazamiento del sólido

La ecuación de difusión-deformación[3] depende de dos variables por lo que necesitamos una segunda ecuación que relacione la velocidad del sólido y la presión del gas para poder encontrar una solución al problema. Como se vió en el capítulo anterior la deformación de una roca porosa está sujeta al principio de las ecuaciones de equilibrio de momentum lineal, en coordenadas cilíndricas[7] la ecuación de equilibrio toma la forma de:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + F_r = 0, \dots \dots \dots (3.32)$$

De esta ecuación se puede despreciar la fuerza de cuerpo y los esfuerzos de corte, ya que los últimos no interactúan con la presión del fluido.

Asimismo los esfuerzos normales en la dirección radial y en la dirección  $\theta$  se expresan de la misma manera como una suma del esfuerzo efectivo en la dirección deseada y la presión del fluido.

$$\sigma_{rr}^* = \sigma_{rr} - \alpha p, \dots \dots \dots (3.33)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^* = \sigma_{\theta\theta} - \alpha p, \dots \dots \dots (3.34)$$

$$\sigma_{zz}^* = \sigma_{zz} - \alpha p, \dots \dots \dots (3.35)$$

Dada la generalidad de la Ley de Hooke[5], los esfuerzos están definidos por:

$$\sigma_{rr}^* = (\lambda + 2G)\varepsilon_{rr} + \lambda\varepsilon_{\theta\theta} + \lambda\varepsilon_{zz}, \dots \dots \dots (3.36)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^* = \lambda \varepsilon_{rr} + (\lambda + 2G) \varepsilon_{\theta\theta} + \lambda \varepsilon_{zz}, \dots \dots \dots (3.37)$$

$$\sigma_{zz}^* = \lambda \varepsilon_{rr} + \lambda \varepsilon_{\theta\theta} + (\lambda + 2G) \varepsilon_{zz}, \dots \dots \dots (3.38)$$

Donde:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \dots \dots \dots (3.39)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \dots \dots \dots (3.40)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \dots \dots \dots (3.41)$$

Son los componentes de la diagonal principal del tensor de deformación infinitesimal en coordenadas polares cilíndricas. En este caso es posible despreciar las deformaciones angulares, ya que la presión sólo interactúa con los esfuerzos normales. Teniendo esto en cuenta la ecuación 3.32 queda:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \dots \dots \dots (3.42)$$

$$\frac{\partial(\sigma_{rr}^* + \alpha p)}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr}^* - \sigma_{\theta\theta}^*}{r} = 0, \dots \dots \dots (3.43)$$

$$\frac{\partial \left[ (\lambda + 2G) \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda \frac{u}{r} \right]}{\partial r} + \alpha \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{(\lambda + 2G) \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda \frac{u}{r} - \left[ \lambda \frac{\partial u}{\partial r} + (\lambda + 2G) \frac{u}{r} \right]}{r} = 0, \dots \dots (3.44)$$

$$(\lambda + 2G) \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \lambda \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) + \alpha \frac{\partial p}{\partial r} + 2G \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) = 0, \dots \dots \dots (3.45)$$

$$(\lambda + 2G) \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right] + \alpha \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \dots \dots \dots (3.46)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial [ru]}{\partial r} \right) + \frac{\alpha}{(\lambda + 2G)} \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \dots \dots \dots (3.47)$$

Derivando la ecuación 3.47 respecto de t obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial [rv_s]}{\partial r} \right) + \frac{\alpha}{(\lambda + 2G)} \frac{\partial^2 p}{\partial r \partial t} = 0, \dots \dots \dots (3.48)$$

Esta ecuación junto con la ecuación (3.31) describe el flujo de gas a alta velocidad en un medio poroso deformable, ambas forman un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas cuya solución debe obtenerse por medio de un método numérico.

Sistema de ecuaciones diferenciales acopladas[3]

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \delta \frac{k}{\mu B_g} \frac{\partial p}{\partial r} \right] = \frac{1}{B_g} \left[ \varphi c_g \left( \frac{\partial p}{\partial t} - v_s \frac{\partial p}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial (r v_s)}{\partial r} \right], \dots \dots \dots (3.49)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial [r v_s]}{\partial r} \right) + \frac{\alpha}{(\lambda + 2G)} \frac{\partial^2 p}{\partial r \partial t} = 0, \dots \dots \dots (3.50)$$

# Capítulo 4. Aproximación Analítica del Problema Geomecánico de Flujo de Gas en Medios Porosos

## 4.1 Introducción

En esta sección se deriva una solución analítica para el problema de flujo de gas acoplada a la deformación de la roca. Para hacer esto es necesario desacoplar la ecuación 3.49 de la ecuación 3.50. Finalmente, se comparan los resultados obtenidos por el modelo analítico con aquellos dados por Chin, Raghavan y Thomas para el mismo caso planteado en su artículo Fully Coupled Geomechanics and Fluid-Flow Analysis of Wells With Stress-Dependent Permeability[3].

## 4.2 Desarrollo del modelo analítico

Dado que en un pozo de gas es común encontrar gastos altos[8], podemos considerar que la velocidad del gas  $\vec{v}_g$  es mucho mayor que la velocidad del sólido  $\vec{v}_s$  consiguiendo así que la ecuación modificada de Darcy sea:

$$\phi \vec{v}_g = -\frac{k}{\mu} \nabla p \dots \dots \dots (4.1)$$

Cuando  $\vec{v}_g \gg \vec{v}_s$

### 4.2.1 Ecuación de continuidad

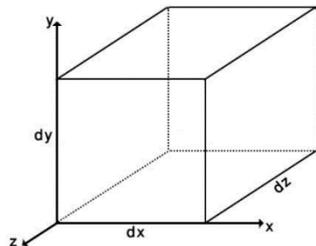


Figura 4.1 Volumen Elemental Representativo

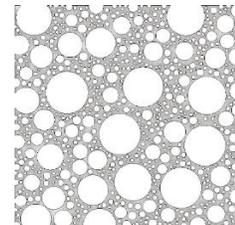


Figura 4.2 Medio Poroso

En la figura 4.1 se considera un medio isotrópico en donde la componente vertical del flujo es despreciable[8],[9], siendo así variable el espesor de dicho volumen infinitesimal (h), luego entonces el balance de masa en este elemento es

$$\begin{aligned} \Delta t \Delta y \{ (h \rho u_{gx})_{x+\Delta x} - (h \rho u_{gx})_x \} + \Delta t \Delta x \{ (h \rho u_{gy})_{y+\Delta y} - (h \rho u_{gy})_y \} \\ = -\Delta x \Delta y \{ (h \rho \phi)_{t+\Delta t} - (h \rho \phi)_t \} \dots \dots \dots (4.2) \end{aligned}$$

Reacomodando la expresión anterior y tomando el límite cuando  $\Delta t, \Delta x, \Delta y$  tienden a cero

$$\lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta t \rightarrow 0} \frac{(h\rho u_{gx})_{x+\Delta x} - h\rho u_{gx})_x}{\Delta x} + \frac{(h\rho u_{gy})_{y+\Delta y} - (h\rho u_{gy})_y}{\Delta y} = - \frac{(h\phi\rho)_{t+\Delta t} - (h\phi\rho)_t}{\Delta t} \dots \dots \dots (4.3)$$

$$\frac{\partial(h\rho u_{gx})}{\partial x} + \frac{\partial(h\rho u_{gy})}{\partial y} = - \frac{\partial(h\phi\rho)}{\partial t} \dots \dots \dots (4.4)$$

La ecuación 4.4 en general involucra la divergencia en 2 dimensiones[8][9]. Así esta expresión queda:

$$\nabla \cdot (h\rho \vec{u}_g) = - \frac{\partial(h\rho\phi)}{\partial t} \dots \dots \dots (4.5)$$

#### 4.2.2 Ecuación de difusión con propiedades del fluido y de la roca variables

Usando el análisis anterior es posible desacoplar la ecuación 3.49 de la ecuación 3.50 y así tener una sola ecuación que describa el flujo acoplado a la deformación de la roca. Al combinar la ecuación 4.1 y la ecuación (4.5) obtenemos una ecuación tipo difusión como se muestra a continuación:

$$\nabla \cdot \left( h\rho \frac{k}{\mu} \nabla p \right) = \frac{\partial(h\rho\phi)}{\partial t} \dots \dots \dots (4.6)$$

Esta ecuación es fundamentalmente no lineal, por lo que para poder encontrar una solución es necesario definir una función de pseudopresión análoga a la que se usa usualmente en la industria petrolera[6].

$$p_p = 2 \int_{p_b}^p \frac{p}{\mu z} dp \dots \dots \dots (4.7)$$

Para este caso la función de pseudopresión[8][9] se define como:

$$m(p) = \int_{p_m}^p \frac{\rho k}{(1-\phi)\mu} dp \dots \dots \dots (4.8)$$

Asimismo queda definido que el sólido del que se compone la formación es incompresible y por lo tanto la compactación que sufre el yacimiento es producto de la compresibilidad de los poros de la roca, luego entonces es conveniente tener la siguiente relación[8][9], para la parte sólida del medio poroso

$$h_i(1 - \phi_i) = h(1 - \phi) \dots \dots \dots (4.9)$$

De esta ecuación es evidente que el volumen sólido de la formación es constante[5][8][9] y que esto puede usarse para calcular la porosidad a una presión deseada si conocemos el espesor del intervalo productor a ciertas condiciones.

Sustituyendo el valor de h por el indicado en la ecuación 4.9 obtenemos:

$$\nabla \cdot \left[ \frac{h_i}{(1-\phi)} \frac{(1-\phi_i)\rho k}{\mu} \nabla p \right] = \frac{\partial(h\rho\phi)}{\partial t} = \frac{\partial(h\rho\phi)}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} \dots \dots \dots (4.10)$$

Y aplicando la regla de la cadena para la diferenciación.

$$\nabla \cdot \left[ \frac{h_i}{(1-\phi)} \frac{(1-\phi_i)\rho k}{\mu} \nabla p \right] = h\rho\phi \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} + \frac{1}{h\phi} \frac{\partial(h\phi)}{\partial p} \right] \frac{\partial p}{\partial t} \dots \dots \dots (4.11)$$

Si definimos la compresibilidad del volumen poroso de la formación como:

$$c_f = \frac{1}{h\phi} \left( \frac{\partial(h\phi)}{\partial p} \right)_T \dots \dots \dots (4.12)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones 4.12 y 4.9, y multiplicando por el inverso de  $h_i(1-\phi_i)$ , la ecuación 4.11 queda:

$$\nabla \cdot \left[ \frac{\rho k}{(1-\phi)\mu} \nabla p \right] = \frac{\phi\rho c_t}{(1-\phi)} \frac{\partial p}{\partial t} \dots \dots \dots (4.13)$$

De la ecuación 4.8 es evidente que:

$$\frac{\partial m(p)}{\partial t} = \frac{\rho k}{(1-\phi)\mu} \frac{\partial p}{\partial t} \dots \dots \dots (4.14)$$

$$\frac{\partial m(p)}{\partial y} = \frac{\rho k}{(1-\phi)\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \dots \dots \dots (4.15)$$

Quedando la ecuación 4.13 expresada como

$$\nabla \cdot \nabla m(p) = \frac{\phi\mu c_t}{k} \frac{\partial m(p)}{\partial t} \dots \dots \dots (4.16)$$

En un sistema de coordenadas arbitrario la ecuación es:

$$\nabla^2 m(p) = \frac{\phi\mu c_t}{k} \frac{\partial m(p)}{\partial t} \dots \dots \dots (4.17)$$

**4.3 Aproximación de la solución**

Esta ecuación tiene la misma forma que la ecuación de difusión para un líquido ligeramente compresible sin embargo no es lineal ya que las propiedades de la roca y del fluido dependen fuertemente de la presión, una consideración aceptable es tomar estas propiedades medidas a una presión promedio como constantes y entonces la ecuación 4.17 tiene una familia de soluciones conocida[4] que aproxima

en buen grado a la solución exacta del problema geomecánico. En la dirección radial esta ecuación queda expresada de la siguiente forma

$$\frac{\partial^2 m(p)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial m(p)}{\partial r} = \frac{\phi \mu c_t}{k} \frac{\partial m(p)}{\partial t} \dots \dots \dots (4.18)$$

Para esta ecuación con sus respectivas condiciones de frontera e iniciales en el estado transitorio existe la solución línea fuente, la cual es derivada a continuación.

Usando la transformada de Boltzman[4]:

$$s = \frac{\phi \mu c_t r^2}{4kt} \dots \dots \dots (4.19)$$

$$\frac{\partial s}{\partial r} = \frac{\phi \mu c_t r}{2kt} \dots \dots \dots (4.20)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{\phi \mu c_t r^2}{4kt^2} \dots \dots \dots (4.21)$$

Haciendo el cambio de variable junto con las condiciones de frontera e iniciales del problema es posible obtener la misma solución línea fuente que se usa para la ecuación de difusión de un líquido ligeramente compresible. La solución quedando

$$m(p_{wf}) = m(p_i) - \frac{q\rho}{4\pi h(1-\phi)} E_i\left(\frac{\phi \mu c_t r^2}{4kt}\right) \dots \dots \dots (4.22)$$

Cuando se tiene que el argumento de la integral exponencial es muy pequeño, es decir  $s \ll 1$ , ésta se puede aproximar como:

$$E_i(s) \approx -\ln s - 0.5772 \dots \dots \dots (4.23)$$

Donde  $\ln \gamma = 0.5772$ . Con estas relaciones y teniendo en cuenta que cuando el argumento de la integral exponencial es muy pequeño significa que se está evaluando la presión en el radio del pozo, la ecuación queda

$$m(p_{wf}) = m(p_i) - \frac{q\rho}{4\pi h(1-\phi)} \ln\left(\frac{4kt}{\gamma \phi \mu c_t r_w^2}\right) \dots \dots \dots (4.24)$$

tomando en cuenta que

$$B_g = \frac{\rho_s}{\rho} \dots \dots \dots (4.25)$$

$$\frac{q}{B_g} = Q_g \dots \dots \dots (4.26)$$

$$m'(p) = \frac{(1-\phi_i)\mu_i}{(k_i\rho_i)} m(p) \dots \dots \dots (4.27)$$

La ecuación 4.24 puede ser escrita de la siguiente manera[4][10]

$$m'(p_{wf}) = m'(p_i) - 162.6 \frac{Q_g B_{gi} \mu_{gi}}{k_i h_i} \left[ \log \left( \frac{kt}{\phi \mu c_t r_w^2} \right) - 3.23 \right] \dots \dots \dots (4.28)$$

Esta ecuación tiene una forma similar a la solución línea fuente que se tiene para la ecuación de difusión de gas y de líquido. Con la consideración que por medio de la pseudopresión definida anteriormente se puede estimar la presión junto con la variación de la permeabilidad y la porosidad, además de las propiedades del gas real.

Para poder analizar un problema donde la permeabilidad de un yacimiento varía en función de la presión y del esfuerzo efectivo, es necesario tener otras ecuaciones que en conjunto estimen la pseudopresión definida por la ecuación 4.8, entonces es necesario contar con expresiones para calcular la permeabilidad[3], la porosidad y el espesor del yacimiento (h) conforme varíe la presión[5], estas ecuaciones son

$$k = k_0 \left\{ \frac{\ln[1 + (\sigma^+ / \sigma^*)]}{\ln[1 + (\sigma^+ / \sigma_0^*)]} \right\}^m \dots \dots \dots (4.29)$$

Donde  $\sigma^+$  y m son parámetros asociados a la roca en estudio[3],  $\sigma^*$  es el esfuerzo efectivo como se definió en el capítulo 2[3][5] y  $k_0$  y  $\sigma_0^*$  son la permeabilidad y el esfuerzo efectivo a condiciones iniciales o en el tiempo anterior[3].

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{\alpha}{\lambda_{fr} + 2G} \Delta p \dots \dots \dots (4.30)$$

Donde

$$\Delta p = p - p_i \dots \dots \dots (4.31)$$

Es evidente que, ya que  $p_i$  es la presión inicial del yacimiento, el término  $\Delta h$  será negativo para cuando se compacte el yacimiento[5]. Las ecuaciones 4.8, 4.9, 4.29 y 4.30 en conjunto con la ecuación 4.28 nos permiten calcular las caídas de presión en un yacimiento poroelástico de manera aproximada, la variación de la permeabilidad y porosidad de la roca, así como la compactación que hay a determinada presión. El desarrollo de la ecuación 4.30 y los valores que toman los parámetros de la roca en la ecuación 4.29 se presentan en el apéndice B.

Del artículo de Chin, Raghavan y Thomas (Fully Coupled Geomechanics and Fluid-Flow Analysis of Wells With Stress-Dependent Permeability)[3][12] se tomaron los datos para un yacimiento de gas en arenas compactas para analizar la solución obtenida anteriormente y se compararon con los resultados del artículo, cabe mencionar que los resultados últimos fueron obtenidos por medio de una simulación numérica con un enfoque totalmente implícito y acoplado las ecuaciones 3.49 y 2.3 en tres dimensiones.

#### 4.4 Segunda Aproximación Analítica

La solución descrita anteriormente ajusta en buena medida la solución para los casos donde la roca es menos sensitiva a esfuerzos. Partiendo del hecho que la porosidad y el espesor de la formación permanecen prácticamente constantes durante el depresionamiento, se puede definir otra función de pseudopresión y considerando que no hay deformación horizontal, es decir en la dirección radial y tangencial, se puede llegar a definir otra ecuación diferencial similar a la ecuación de difusión. Definiendo la nueva pseudopresión[10] como:

$$\psi = \int_{p_b}^p \frac{\rho k}{\mu} dp, \dots \dots \dots (4.32)$$

Si consideramos en las ecuaciones 3.36 a 3.38 que las componentes  $\varepsilon_{\theta\theta}$  y  $\varepsilon_{rr}$  son despreciables se obtiene fácilmente

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}^*}{(\lambda + 2G)}, \dots \dots \dots (4.33)$$

teniendo en cuenta que

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{T} - \alpha p \mathbf{I}, \dots \dots \dots (4.34)$$

$$\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij} - \alpha p \delta_{ij}, \dots \dots \dots (4.35)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz} - \alpha p}{(\lambda + 2G)}, \dots \dots \dots (4.36)$$

Si consideramos a la componente de la velocidad del sólido en la dirección vertical como la simple derivada temporal del desplazamiento ( $w$ ), y que el esfuerzo total en la dirección vertical ( $\sigma_{zz}$ , esfuerzo de sobrecarga) como constante[5], se llega a

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = - \frac{\alpha}{(\lambda + 2G)} \frac{\partial p}{\partial t}, \dots \dots \dots (4.37)$$

Si la deformación en la dirección radial y tangencial es despreciable, entonces la deformación volumétrica se expresa como

$$\varepsilon_{vol} = \nabla \cdot \mathbf{v}_s \approx \frac{\partial v_z}{\partial z}, \dots \dots \dots (4.38)$$

de la ecuación 3.28

$$\nabla \cdot \left[ \rho \delta \frac{k}{\mu} \nabla p \right] = \rho \left( \frac{D\phi}{Dt} + \phi \nabla \cdot \vec{v}_s \right) + \phi \frac{D\rho}{Dt}, \dots \dots \dots (4.39)$$

$$\nabla \cdot \left[ \rho \delta \frac{k}{\mu} \nabla p \right] = \rho \left( \nabla \cdot \vec{v}_s + \phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{Dp}{Dt} \right) \dots \dots \dots (4.40)$$

$$\nabla \cdot \left[ \rho \delta \frac{k}{\mu} \nabla p \right] = \rho \left( -\nabla \cdot \vec{v}_s + \phi c \frac{Dp}{Dt} \right) \dots \dots \dots (4.41)$$

Teniendo en cuenta la convención geomecánica (desplazamiento positivo para la compresión)[5], que  $\frac{Dp}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t}$  y que  $\nabla \cdot \vec{v}_s = \frac{\partial v_z}{\partial z}$ , la ecuación 4.41 queda entonces como

$$\nabla \cdot \left[ \rho \delta \frac{k}{\mu} \nabla p \right] = \rho \left( \frac{\alpha}{\lambda + 2G} \frac{\partial p}{\partial t} + \phi c \frac{\partial p}{\partial t} \right) \dots \dots \dots (4.42)$$

usando la ecuación 4.32 en 4.42 se obtiene:

$$\nabla^2 \psi = \left( \frac{\alpha}{\lambda + 2G} + \phi c \right) \frac{\mu}{k} \frac{\partial \psi}{\partial t} \dots \dots \dots (4.43)$$

En coordenadas radiales la ecuación 4.43 puede ser expresada como

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\mu \phi}{k} \frac{\partial \psi}{\partial t} \dots \dots \dots (4.44)$$

Definiendo  $\psi_a$  como la pseudopresión ajustada con unidades de presión [psi] y el coeficiente  $\phi$  análogo a la compresibilidad del medio[1] con unidades [1/psi] de la siguiente manera

$$\psi_a = \frac{\mu_i}{\rho_i k_i} \int_{p_b}^p \frac{\rho k}{\mu} dp \dots \dots \dots (4.45)$$

$$\phi = \left( \frac{\alpha}{\lambda + 2G} + \phi c \right) \dots \dots \dots (4.46)$$

Como se observa, la ecuación 4.44 es una ecuación de difusión y si se considera que el coeficiente presente en ésta, puede ser tomado como un promedio y constante[6], esta ecuación tendrá una solución similar a la presentada anteriormente, a continuación se muestran la solución en unidades de Darcy y en unidades inglesas de campo[4][10], respectivamente.

$$\psi_{awf} = \psi_{ai} - \frac{Q_g \mu_i B_{gi}}{4\pi k_i h} \ln \left( \frac{4kt}{\gamma \phi \mu r_w^2} \right) \dots \dots \dots (4.47)$$

$$\psi_{awf} = \psi_{ai} - 162.6 \frac{Q_g \mu_i B_{gi}}{k_i h} \left[ \log \left( \frac{kt}{\phi \mu r_w^2} \right) - 3.23 \right] \dots \dots \dots (4.48)$$

Las soluciones derivadas anteriormente pueden brindar una aproximación de cómo se comporta un yacimiento poroelástico bajo condiciones ideales de explotación, y tomando en cuenta que la roca sólo experimenta deformación en la dirección vertical, además se considera que la porosidad permanece constante y que la velocidad de la roca es despreciable comparada con la velocidad del gas. Los resultados de estas soluciones se comparan con los dados por Chin y colaboradores (2000) en la tabla 4.1.

	Reducción IP [%]	Reducción IP [%]	Reducción IP [%]						
K [md]	Raghavan	Solución 1	Solución 2	q [RBPD]	Núcleo	tp [días]	% error 1	% error 2	
0.75	5.4	4.54	4.8	1147	D	173	15.93	11.11	
0.1	15.62	21.36	13.98	1147	D	34	36.75	10.50	
0.1	17.66	23.18	16.88	1147	D	583	31.26	4.42	
0.1	11.63	12.86	10.5	574	D	173	10.58	9.72	
0.1	18.98	26.6	21.37	1721	D	173	40.15	12.59	
0.1	16.54	19.99	18.77	1147	D	173	20.86	13.48	
0.186	12.56	14.09	12	1147	D	173	12.18	4.46	
0.1	24.4	36.78	25.79	1147	E	173	50.74	5.70	
4.14	7.08	11.55	15.38	1147	F	173	63.14	117.23	

Tabla 4.1 Comparación de Resultados de las Soluciones Analíticas

En la tabla 4.1 se observa que la solución analítica se comporta aceptablemente bien para el caso del núcleo D, que resulta ser el menos sensible a esfuerzos, así mismo los resultados se acercan más a la solución exacta si se tiene una mayor permeabilidad en el yacimiento y el gasto de producción es menor. En el apéndice B se muestra el comportamiento de los tipos de roca para mostrar la sensibilidad al cambio de esfuerzos de cada núcleo. Con estos resultados se hace evidente que el problema que se plantea (ecuaciones 3.49 y 3.50) es no lineal y para resolverlo de manera exacta se debe emplear un método numérico[3]. Esto se abordará en el capítulo 5 y se mostrará el esquema de solución; sin embargo, el desarrollo total del programa y los resultados están fuera del alcance de esta tesis.

## Capítulo 5. Modelo Matemático-Numérico de Flujo de Gas a través de un Medio Poroso Deformable

### 5.1 Introducción

En el capítulo anterior se compararon los resultados obtenidos por una aproximación analítica para el problema de flujo acoplado a geomecánica y se encontró que para los casos donde la roca es más sensible a los esfuerzos, en general, esta aproximación no es válida. Para el análisis de la distribución de presión y el cambio de las propiedades de flujo de la roca es necesario resolver el sistema de ecuaciones diferenciales descrito. En esta sección entonces se presenta una metodología para resolver este sistema por medio del método de diferencias finitas y se definirán las ecuaciones necesarias para ensamblar un simulador numérico acoplando geomecánica y flujo de fluidos en un yacimiento poroelástico isotérmico, los resultados y el desarrollo total del programa van más allá de los alcances de esta tesis.

### 5.2 Desarrollo de las ecuaciones

El sistema de ecuaciones está planteado en coordenadas radiales, ya que se asume que el flujo dentro del yacimiento estudiado tiene esta geometría, sin embargo el planteamiento de las ecuaciones en diferencias finitas se vuelve complicado para este sistema coordinado por lo que se usa una transformación como la siguiente:

$$u = \ln \frac{r}{r_w} = \ln r_D \dots \dots \dots (5.1)$$

$$\frac{\partial r_D}{\partial r} = \frac{1}{r_w} \dots \dots \dots (5.2)$$

Aplicando la regla de la cadena

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial y}{\partial r_D} \frac{\partial r_D}{\partial r} = \frac{1}{r_w} \frac{\partial y}{\partial r_D}, \dots \dots \dots (5.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r_D} = \frac{1}{r_D}, \dots \dots \dots (5.4)$$

$$\frac{\partial y}{\partial r_D} = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial r_D} = \frac{1}{e^u} \frac{\partial y}{\partial u}, \dots \dots \dots (5.5)$$

Con esta transformación las ecuaciones 3.49 y 3.50 quedan expresadas de la siguiente manera

$$\frac{\partial}{\partial u} \left[ \delta \frac{k}{\mu B_g} \frac{\partial p}{\partial u} \right] = \frac{1}{B_g} \left[ \phi c_g \left( r_w^2 e^{2u} \frac{\partial p}{\partial t} - r_w e^u v_s \frac{\partial p}{\partial u} \right) - r_w e^u \left( \frac{\partial v_s}{\partial u} + v_s \right) \right], \dots \dots \dots (5.6)$$

$$\frac{\partial^2 v_s}{\partial u^2} - v_s + \frac{r_w e^{u\alpha}}{(\lambda + 2G)} \frac{\partial^2 p}{\partial u \partial t} = 0, \dots \dots \dots (5.7)$$

Teniendo el sistema de ecuaciones 5.6 y 5.7 es necesario pasar estas a su forma discreta por medio de diferencias finitas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta u} \left[ \left( \frac{\delta k}{\mu B_g} \right)_{i+\frac{1}{2}}^{t+1} \frac{(p_{i+1}^{t+1} - p_i^{t+1})}{\Delta u} - \left( \frac{\delta k}{\mu B_g} \right)_{i-\frac{1}{2}}^{t+1} \right] \\ = \frac{1}{B_{g_i}^{t+1}} \left[ (\phi c_g)_i^{t+1} \left( r_w^2 e^{2ui} \frac{(p_i^{t+1} - p_i^t)}{\Delta t} - r_w e^{ui} v_{si}^{t+1} \frac{(p_{i+1}^{t+1} - p_{i-1}^{t+1})}{2\Delta u} \right) \right. \\ \left. - r_w e^{ui} \left( \frac{(v_{si+1}^{t+1} - v_{si-1}^{t+1})}{2\Delta u} \right) + v_{si}^{t+1} \right], \dots \dots \dots (5.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{[v_{si-1}^{t+1} - 2v_{si}^{t+1} + v_{si+1}^{t+1}]}{\Delta u^2} - v_{si}^{t+1} + \frac{r_w e^{ui\alpha}}{(\lambda + 2G)} \frac{1}{2\Delta u \Delta t} [(p_{i+1}^{t+1} - p_{i-1}^{t+1}) - (p_{i+1}^t - p_{i-1}^t)] \\ = 0, \dots \dots \dots (5.9) \end{aligned}$$

Dado que la ecuación 5.6 y su forma discreta (5.8) tienen coeficientes que dependen de la solución, es necesario adoptar el método de Newton-Raphson para linealizar este sistema de ecuaciones y resolverlo, a continuación se muestra el desarrollo

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta u} \left[ \left( \frac{\delta k}{\mu B_g} \right)_{i+\frac{1}{2}}^{t+1} \frac{(p_{i+1}^{t+1} - p_i^{t+1})}{\Delta u} - \left( \frac{\delta k}{\mu B_g} \right)_{i-\frac{1}{2}}^{t+1} \right] \\ - \frac{1}{B_{g_i}^{t+1}} \left[ (\phi c_g)_i^{t+1} \left( r_w^2 e^{2ui} \frac{(p_i^{t+1} - p_i^t)}{\Delta t} - r_w e^{ui} v_{si}^{t+1} \frac{(p_{i+1}^{t+1} - p_{i-1}^{t+1})}{2\Delta u} \right) \right. \\ \left. - r_w e^{ui} \left( \frac{(v_{si+1}^{t+1} - v_{si-1}^{t+1})}{2\Delta u} \right) + v_{si}^{t+1} \right] = f_i, \dots \dots \dots (5.10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{[v_{si-1}^{t+1} - 2v_{si}^{t+1} + v_{si+1}^{t+1}]}{\Delta u^2} - v_{si}^{t+1} + \frac{r_w e^{ui\alpha}}{(\lambda + 2G)} \frac{1}{2\Delta u \Delta t} [(p_{i+1}^{t+1} - p_{i-1}^{t+1}) - (p_{i+1}^t - p_{i-1}^t)] \\ = g_i, \dots \dots \dots (5.11) \end{aligned}$$

Donde  $f$  y  $g$  son llamadas funciones de residuos evaluadas a un nivel de iteración  $k$ . Para linealizar el sistema es necesario derivar las funciones de residuos respecto a las variables primarias que son  $p$  y  $v_s$  ubicadas en cada nodo y evaluadas en el tiempo  $t+1$ .



$$w_j = \begin{bmatrix} \Delta p_j^{t+1k+1} \\ \Delta v_{s_j}^{t+1k+1} \end{bmatrix}, \dots \dots \dots (5.18)$$

$$d_j = \begin{bmatrix} -f_j^k \\ -g_j^k \end{bmatrix}, \dots \dots \dots (5.19)$$

Para  $i=j=1:n$

Es evidente que para resolver este sistema es necesario acoplar las condiciones iniciales y de frontera, las cuales se encuentran en los nodos  $i=j=1$  y  $j=i=n$ , para esto las condiciones de frontera deben ser expresadas en términos de la coordenada  $u$  y discretizadas en diferencias finitas para poder cerrar el sistema de ecuaciones. A continuación se presentan estas condiciones iniciales y de frontera.

Para la deformación del sólido las condiciones iniciales y de frontera:

$$v_s(r = r_w, u = 0, t) = 0, \dots \dots \dots (5.20)$$

$$v_s(r = r_e, u = \ln r_e/r_w, t) = 0, \dots \dots \dots (5.21)$$

$$v_s(r, u, t = 0) = 0, \dots \dots \dots (5.22)$$

Para la ecuación de difusión-deformación las condiciones de frontera son:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)_{u=0} = -\frac{q\mu}{2\pi\delta kh}, \dots \dots \dots (5.23)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)_{u=\ln r_e/r_w} = 0, \dots \dots \dots (5.24)$$

$$p(r, u, t = 0) = p_{inicial}, \dots \dots \dots (5.25)$$

En este desarrollo se usa una malla con nodos centrados y se transforma una malla radial en una del tipo rectangular con nodos equidistantes.

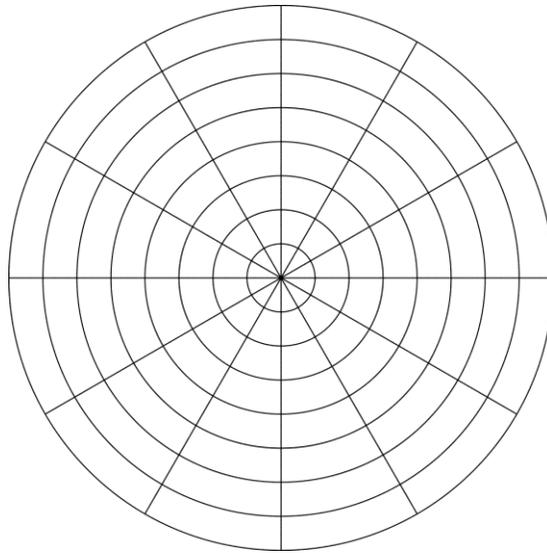


Figura 5.1 Malla Radial

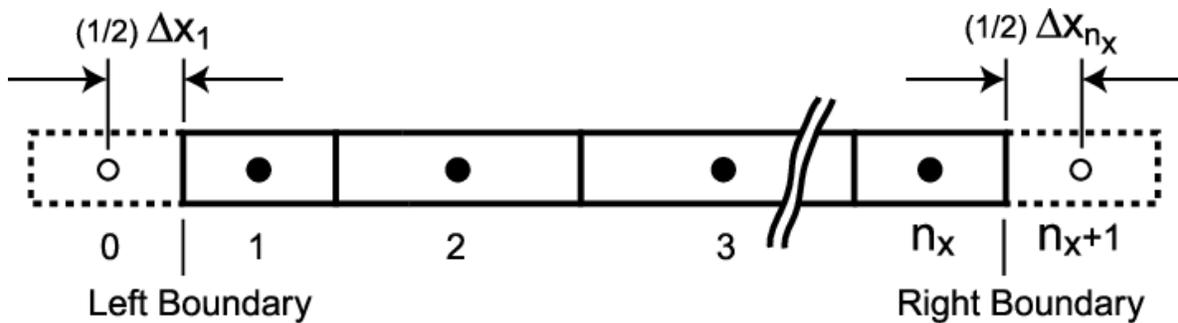


Figura 5.2 Malla Rectangular

El acoplamiento de las condiciones de frontera para cerrar el sistema se presenta en el apéndice 3, así como el método de solución para un sistema tridiagonal en bloques (algoritmo de Thomas modificado). La solución de la ecuaciones 5.6 y 5.7 con las condiciones de frontera e iniciales por medio del método de Newton implica la programación de un algoritmo iterativo para resolver el sistema, lo cual queda fuera del alcance de esta tesis.

## Capítulo 6. Conclusiones

En el capítulo cuarto se presentaron dos soluciones analíticas para el análisis de la deformación geomecánica ligada a la producción de gas en un yacimiento poroelástico. A pesar de dar buenos resultados para ciertos casos, estas soluciones están limitadas para ciertos casos ideales y sólo pueden reproducir ciertos fenómenos durante el periodo de flujo variable o transitorio. Por esto se vuelve necesario el uso de algún método numérico para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales de manera exacta para las tres direcciones espaciales.

En el capítulo quinto se mostró el esquema numérico necesario para resolver este sistema de ecuaciones diferenciales por medio del método de diferencias finitas, sin embargo, sólo se considera la deformación y el flujo en la dirección radial. Un aspecto que debe mejorarse en un trabajo posterior es desarrollar estas ecuaciones en diferencias finitas para las tres direcciones espaciales tanto en coordenadas cartesianas como en polares cilíndricas.

Las soluciones analíticas derivadas anteriormente además de considerar un caso ideal en donde sólo hay deformación vertical no reproducen el fenómeno de la subsidencia y compactación del yacimiento y por lo tanto se debe explorar más adelante una posible solución analítica que tome en cuenta esto. Sin embargo ambas soluciones dieron un grado de exactitud aceptable, siendo el mínimo error con respecto a la solución exacta de 4.42%. El error máximo es de 117.23% para el caso en el que se estudia la roca más sensible a esfuerzos, demostrando que cuando un yacimiento experimenta una deformación más grande, las propiedades de flujo tienen una variación mayor que representa una no linealidad en el modelo matemático y que debido a esto alguna solución analítica como las presentadas anteriormente no es correcta para predecir la reducción del índice de productividad.

Debido a lo antes mencionado se presentan de manera global los aspectos que deben mejorarse del presente trabajo, así como los puntos positivos de esta tesis, los cuales se mencionan a continuación:

- 1.- Se debe explorar una solución analítica más fuerte considerando que el modelo es no lineal
- 2.- Esta solución más fuerte debe ser desarrollada por medio de algún método capaz de resolver ecuaciones diferenciales no lineales y de ser posible debe resolverse todo el modelo en las tres direcciones espaciales, de manera que se considere la subsidencia y la compactación del yacimiento.
- 3.- Es necesario resolver el sistema de ecuaciones de forma numérica y así obtener la solución exacta, comparar los resultados con las soluciones analíticas y finalmente determinar los casos en los que son totalmente válidas y en cuáles no.

4.- Es conveniente explorar con la solución aproximada de manera analítica, alguna posible solución para todo el conjunto de ecuaciones diferenciales del problema, ya que el modelo matemático en sí involucra 4 ecuaciones diferenciales.

5.- De acuerdo a los casos comparados en esta tesis, las soluciones analíticas brindan resultados confiables para rocas en donde únicamente cambie la porosidad y pueden ser útiles para analizar el flujo transitorio de gas en yacimientos con permeabilidad variable.

6.- Se debe considerar el posible uso de estas soluciones en el análisis de pruebas de presión o de potencial, sin embargo para esto es necesario lo mencionado en el inciso 3.

7.- Es plenamente recomendable extender este modelo para el estudio de flujo multifásico en medios porosos deformables, así como la inclusión de algún modelo constitutivo diferente para la roca, como es el caso de rocas que se deforman en un régimen plástico o que pueden ser viscoelásticas.

## Apéndice A. Ecuaciones en Coordenadas Polares Cilíndricas

En este apartado se presentan las ecuaciones de balance de momentum lineal y de continuidad, así como el tensor de deformación en coordenadas polares cilíndricas, el tensor de esfuerzos en este sistema coordenado se muestra como una forma simplificada idéntico en forma a su análogo en coordenadas cartesianas, el desarrollo a detalle de estas expresiones requiere ya sea el empleo de conceptos más profundos de Análisis Tensorial como lo son el concepto de métrica, de los símbolos de Christoffel y la derivada covariante[7] o en su caso de complicadas relaciones geométricas tan sólo para deducir las ecuaciones de balance en la dirección radial[2], por lo tanto estos se dejan como referencia al lector[7].

### Ecuación de balance de momentum lineal

$$\nabla \cdot \mathbf{T}^T + \rho \vec{b} = \rho \frac{D\vec{v}}{Dt}, \dots \dots \dots (A.1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\sigma_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + F_r = 0, \dots \dots \dots (A.2)$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + F_\theta, \dots \dots \dots (A.3)$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + F_z, \dots \dots \dots (A.4)$$

donde

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{0}, \dots \dots \dots (A.5)$$

$$\mathbf{T}^T = \mathbf{T}, \dots \dots \dots (A.6)$$

### Ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot (\rho \phi \vec{v}) + \frac{\partial(\rho \phi)}{\partial t} = 0, \dots \dots \dots (A.7)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r[\rho \phi v_r])}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho \phi v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho \phi v_z)}{\partial z} = \frac{\partial(\rho \phi)}{\partial t}, \dots \dots \dots (A.8)$$

donde

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{bmatrix}, \dots \dots \dots (A.9)$$

Sea el gradiente del vector de desplazamiento  $\vec{u} = u\hat{e}_r + v\hat{e}_\theta + w\hat{e}_z$

**Tensor de deformación en coordenadas polares cilíndricas**

$$\nabla \vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{\partial w}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} - v \right) & \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + u \right) & \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}, \dots \dots \dots (A.10)$$

Y el tensor de deformación **E** definido como

$$\mathbf{E} = \text{sym } \nabla \vec{u} = \frac{1}{2} (\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T), \dots \dots \dots (A.11)$$

Siendo  $\nabla \vec{u}^T$  la matriz transpuesta de A.10, es evidente que

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) & \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + u \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}, \dots \dots \dots (A.12)$$

donde

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}, \dots \dots \dots (A.13)$$

**Tensor de esfuerzo efectivo en coordenadas polares cilíndricas**

El tensor de esfuerzo efectivo en coordenadas polares cilíndricas es simplemente

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{T} - \alpha p \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{rz} & \sigma_{\theta z} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} - \alpha p \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \dots \dots \dots (A.14)$$

de la Ley de Hooke

$$\mathbf{T}^* = \lambda(\text{tr} \mathbf{E}) \mathbf{I} + 2G \mathbf{E}, \dots \dots \dots (A.15)$$

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \sigma_{rr} - \alpha p & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} - \alpha p & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{rz} & \sigma_{\theta z} & \sigma_{zz} - \alpha p \end{bmatrix} \\
& = \lambda \nabla \cdot \vec{u} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
& + 2G \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) & \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + u \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}, \dots (A.16)
\end{aligned}$$

De la ecuación A.16 se comprueba la relación 4.36

$$\sigma_{zz} - \alpha p = (\lambda + 2G) \frac{\partial w}{\partial z}, \dots (A.17)$$

Siendo

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + u \right) = 0, \dots (A.18)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + u \right) + \frac{\partial w}{\partial z} = \text{tr} \mathbf{E} = \epsilon_{vol} = \epsilon_{rr} + \epsilon_{\theta\theta} + \epsilon_{zz}, \dots (A.19)$$

Es evidente que de A.17 se obtiene

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = - \frac{\alpha}{(\lambda + 2G)} \frac{\partial p}{\partial t}, \dots (A.20)$$

### Convención de la suma de Einstein

$$\vec{u} = u\hat{e}_r + v\hat{e}_\theta + w\hat{e}_z = u^j \hat{e}_j = u^1 \hat{e}_1 + u^2 \hat{e}_2 + u^3 \hat{e}_3, \dots (A.21)$$

### La derivada material en coordenadas polares cilíndricas

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \phi, \dots (4.22)$$

con

$$\phi = \phi(\vec{x}(t), t), \dots (A.23)$$

es

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial \phi}{\partial r} + v_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial \phi}{\partial z}, \dots (A.24)$$

donde

## Gradiente de una función escalar en coordenadas polares cilíndricas

$$\nabla\phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{bmatrix}, \dots\dots\dots (A.25)$$

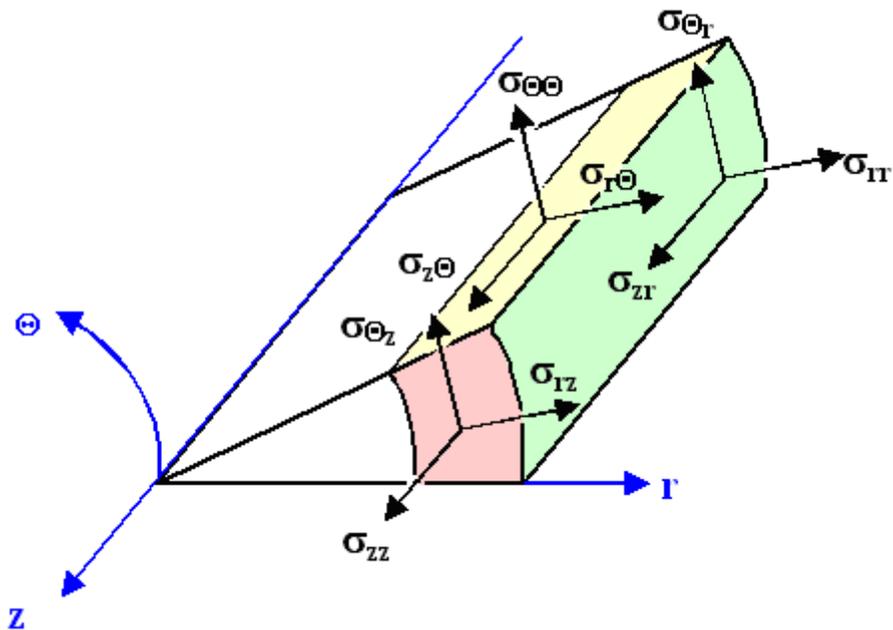


Figura A.1 Esfuerzos Sobre un Elemento de Volumen Infinitesimal en Coordenadas Polares Cilíndricas

## Apéndice B. Datos del Yacimiento

En este apartado se brindan los datos del yacimiento para poder evaluar la solución, además se presenta de manera gráfica la variación de la permeabilidad para cada tipo de roca. Se verá que el núcleo menos sensible a esfuerzos es el tipo D, pasando por un comportamiento intermedio en el núcleo E, hasta llegar al núcleo F que es el más sensible a esfuerzos y por lo tanto el que presenta una desviación más grande cuando es analizado con la solución analítica.

A continuación se muestran los datos del yacimiento estudiado, los cuales son tomados del trabajo de Chin y colaboradores (2000)[3].

$r_e$	3000 ft	T	800 R	$c_t$	$1.4321 \times 10^{-4} \text{psi}^{-1}$
$r_w$	0.25 ft	$\rho_g$	$0.208 \text{ g/cm}^3$	$\varphi$	$5.8929 \times 10^{-6} \text{psi}^{-1}$
h	100	$\rho_s$	$2 \text{ g/cm}^3$	$\sigma_{zz}$	8000 psi
$\phi$	0.04	G	$2.1 \times 10^6 \text{ psi}$	m	3.267, 0.595, 3.337, para núcleos D, E, F respectivamente
$k_i$	0.04, 0.1, 0.186, 0.75, 4.14 md	K	$2.8 \times 10^6 \text{ psi}$	$\sigma^+$	809700000, 4450, 51938 psi, para núcleos D, E, F respectivamente
$p_i$	7500 psi	$c_g$	$14.286 \times 10^{-5} \text{psi}^{-1}$	$z_i$	1.0705
$\mu$	0.015 cp	$\lambda$	$1.4 \times 10^6 \text{ psi}$		
$B_{gi}$	0.00322 RB/STB	$\alpha$	1		

Tabla B.1 Propiedades del Yacimiento [12]

A continuación se muestran las gráficas de cada núcleo y la disminución de su permeabilidad en función del esfuerzo efectivo

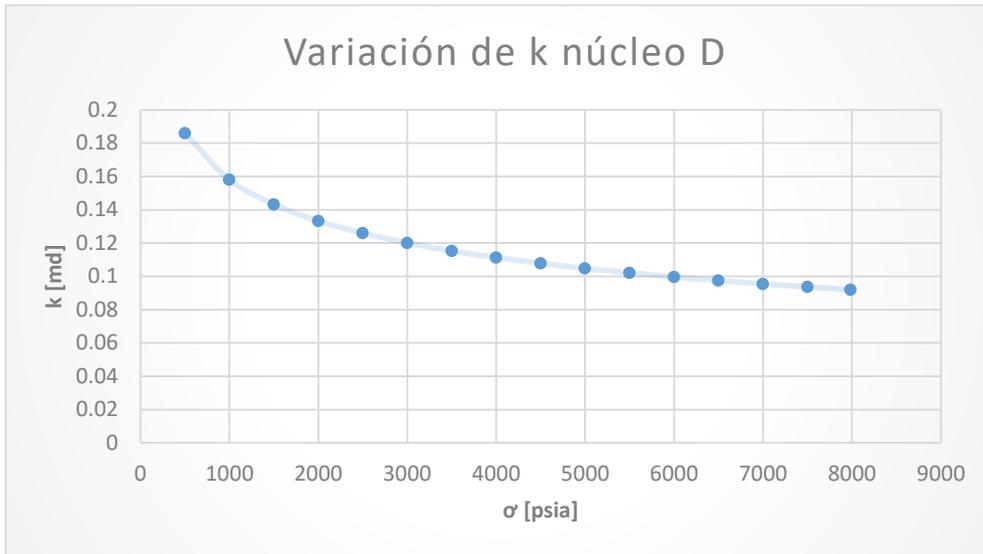


Figura B.1 Variación de la permeabilidad para el núcleo D

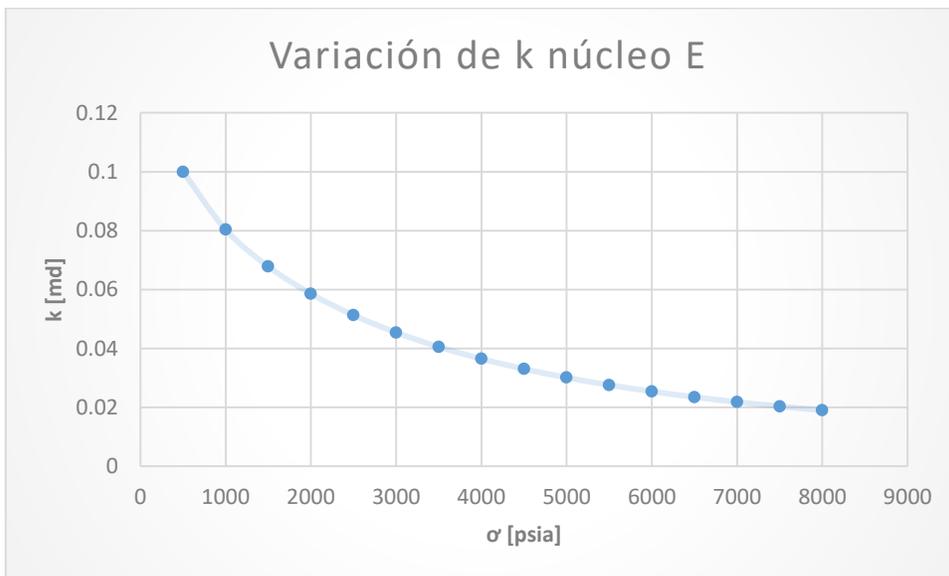


Figura B.2 Variación de la permeabilidad para el núcleo E

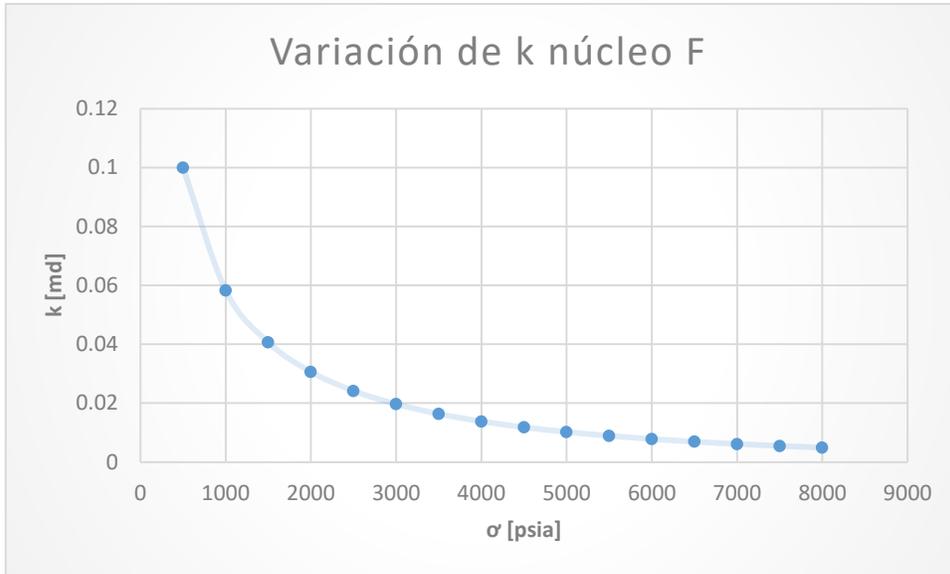


Figura B.3 Variación de la permeabilidad para el núcleo F

En las gráficas anteriores se muestra que en el caso del núcleo D, hay una menor reducción de la permeabilidad y por lo tanto del índice de productividad, mientras que el núcleo F presenta la mayor variación y por lo tanto se espera que las soluciones analíticas no sean válidas para este tipo de roca. Para evaluar la reducción del índice de productividad se hace uso de las siguientes expresiones[3][10].

$$J = \frac{Q}{\Delta p} = \frac{Q}{p_i - p_{wf}}, \dots \dots \dots (B.1)$$

Para la reducción del IP

$$\%ReducciónIP = \left(1 - \frac{J_{ss}}{J_{si}}\right) \times 100\%, \dots \dots \dots (B.2)$$

Donde  $J_{ss}$  es el índice de productividad cuando la roca es sensible a esfuerzos y  $J_{si}$  es el índice de productividad cuando la roca no es sensible a estos[3].

Entonces

$$\%ReducciónIP = \left(1 - \frac{\frac{Q}{\Delta p_{ss}}}{\frac{Q}{\Delta p_{si}}}\right) \times 100\% = \left(1 - \frac{\Delta p_{si}}{\Delta p_{ss}}\right) \times 100\%, \dots \dots \dots (B.3)$$

Donde  $\Delta p_{si} = p_i - p_{wf}$  y  $\Delta p_{ss} = p_i - p_{wf}^*$ , siendo  $p_{wf}^*$  la presión en el fondo del pozo calculada por la solución analítica derivada en esta tesis.

## Apéndice C. Desarrollo de la Solución Analítica

En este último apéndice se presenta a detalle cómo obtener la solución analítica de la ecuación diferencial 4.44 y debido a que esta comparte una solución similar con 4.18, se hace evidente que el procedimiento es análogo para obtener la otra solución.

$$\nabla \cdot \left[ \rho \delta \frac{k}{\mu} \nabla p \right] = \rho \left( \phi c \frac{Dp}{Dt} - \nabla \cdot \vec{v}_s \right), \dots \dots \dots (C.1)$$

Esta ecuación toma en cuenta la convención geomecánica que considera positiva la compactación y negativa la expansión, es por esto que la divergencia de la velocidad del sólido está multiplicada por un signo negativo[5], tomando en cuenta las relaciones del capítulo cuarto  $\left( \frac{Dp}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t} \text{ y } \nabla \cdot \vec{v}_s = \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)$  se obtiene

$$\nabla^2 \psi = \left( \frac{\alpha}{\lambda + 2G} + \phi c \right) \frac{\mu}{k} \frac{\partial \psi}{\partial t}, \dots \dots \dots (C.2)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\mu \phi}{k} \frac{\partial \psi}{\partial t}, \dots \dots \dots (C.3)$$

donde

$$\psi = \int_{p_b}^p \frac{\rho k}{\mu} dp, \dots \dots \dots (C.4)$$

### Condiciones de frontera y al tiempo inicial

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\rho q}{2\pi h}, \dots \dots \dots (C.5)$$

$$\psi(r \rightarrow \infty, t) = \psi_i, \dots \dots \dots (C.6)$$

$$\psi(r, t = 0) = \psi_i, \dots \dots \dots (C.7)$$

Como se puede apreciar, estas condiciones de frontera e iniciales corresponden a un yacimiento infinito[4][10], es decir, cuando el yacimiento se encuentra produciendo en régimen transitorio.

### Cambio de variable

$$s = \frac{\phi \mu r^2}{4kt}, \dots \dots \dots (C.8)$$

$$\frac{\partial s}{\partial r} = \frac{\phi \mu r}{2kt}, \dots \dots \dots (C.9)$$

$$\frac{\partial s}{\partial r} = - \frac{\phi \mu r^2}{4kt}, \dots \dots \dots (C.10)$$

Reordenando la ecuación C.3

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = \frac{\mu \varphi}{k} \frac{\partial \psi}{\partial t}, \dots \dots \dots (C.11)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{ds} \left\{ r \frac{d\psi}{ds} \frac{\partial s}{\partial r} \right\} \frac{\partial s}{\partial r} = \frac{\mu \varphi}{k} \frac{d\psi}{ds} \frac{\partial s}{\partial t}, \dots \dots \dots (C.12)$$

$$\frac{d\psi}{ds} = y, \dots \dots \dots (C.13)$$

De la expresión C.12 es fácil ver que

$$\frac{d}{ds} \left[ s \frac{d\psi}{ds} \right] = -s \frac{d\psi}{ds}, \dots \dots \dots (C.14)$$

$$s \frac{dy}{ds} + y = -sy, \dots \dots \dots (C.15)$$

cuya solución es

$$\ln y = -s - \ln s + C_1, \dots \dots \dots (C.16)$$

$$y = C_2 \frac{e^{-s}}{s}, \dots \dots \dots (C.17)$$

de la ecuación C.5 es evidente que (dado que  $s \rightarrow 0, r \rightarrow 0$ )

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{d\psi}{ds} = \frac{\rho q}{4\pi h}, \dots \dots \dots (C.18)$$

De esta expresión se obtiene el valor de la constante  $C_2$  asumiendo que el límite existe

$$C_2 = \frac{\rho q}{4\pi h}, \dots \dots \dots (C.19)$$

Tomando en cuenta que

$$B = \frac{\rho_s}{\rho}, \dots \dots \dots (C.20)$$

$$Q = \frac{q}{B}, \dots \dots \dots (C.21)$$

$$y = \frac{d\psi}{ds} = \frac{\rho q}{4\pi h} \frac{e^{-s}}{s} = \frac{\rho_s Q}{4\pi h} \frac{e^{-s}}{s}, \dots \dots \dots (C.22)$$

Dado que  $s \rightarrow 0, t = 0$

$$\int_{\psi_i}^{\psi} d\psi = \frac{\rho_s Q}{4\pi h} \int_{\infty}^s \frac{e^{-s}}{s} ds, \dots \dots \dots (C.23)$$

o bien

$$\psi = \psi_i - \frac{\rho_s Q}{4\pi h} \int_s^{\infty} \frac{e^{-s}}{s} ds, \dots \dots \dots (C.24)$$

Es claro que cuando  $s < 0.01$

$$\int_s^{\infty} \frac{e^{-s}}{s} ds = E_i(s) \approx -\ln s - 0.5772, \dots \dots \dots (C.25)$$

Luego entonces, podemos expresar C.24 como

$$\psi = \psi_i - \frac{\rho_s Q}{4\pi h} \ln\left(\frac{4kt}{\gamma\phi\mu r_w^2}\right), \dots \dots \dots (C.26)$$

Siendo

$$\gamma = e^{0.5772}, \dots \dots \dots (C.27)$$

Adicionalmente

$$\psi_a = \frac{\mu_i}{\rho_i k_i} \int_{p_b}^p \frac{\rho k}{\mu} dp = \frac{\mu_i}{\rho_i k_i} \psi, \dots \dots \dots (C.28)$$

$$\psi_{awf} = \psi_{ai} - \frac{Q\mu_i B_i}{4\pi k_i h} \ln\left(\frac{4kt}{\gamma\phi\mu r_w^2}\right), \dots \dots \dots (C.29)$$

Que en unidades inglesas de campo es

$$\psi_{awf} = \psi_{ai} - 162.6 \frac{Q_g \mu_{gi} B_{gi}}{k_{gi} h} \left[ \log\left(\frac{kt}{\phi\mu r_w^2}\right) - 3.23 \right], \dots \dots \dots (C.30)$$

Teniendo en cuenta que se analiza el flujo transitorio de gas y que el gasto a condiciones de superficie es constante[6][10]. Con la expresión C.28 se hace ver que la pseudopresión ajustada tendrá unidades de presión [psi]. Así mismo se hace una comparación de  $\phi[1]$  con el coeficiente usual de compactación usado en la Teoría de Biot[5], a este coeficiente por lo tanto se le puede llamar coeficiente de compactación[1] y sus unidades son [1/psi].

## Nomenclatura

a cte. arbitraria

A área,  $ft^2$

b cte. Arbitraria

B factor de volumen del fluido,  $\frac{RB}{STB}$

$\vec{b}$  fuerza de cuerpo,  $lb_{fuerza}$

c cte. Arbitraria

C módulo elástico,  $psi$

e número de Euler

**E** tensor de deformación, adimensional

E módulo de Young,  $psi$

f función de residuos de la ecuación de difusión-deformación

F fuerza,  $lb_{fuerza}$

g función de residuos de la ecuación de movimiento del sólido

G modulo de rigidez,  $psi$

h espesor,  $ft$

**I** tensor identidad

J índice de productividad,  $\frac{RB}{psi}$

**K** tensor de permeabilidad,  $md$

K módulo de volumen de la roca,  $psi$

k permeabilidad escalar,  $md$

m constante de correlación

M módulo elástico,  $psi$

m(p) pseudopresión (solucion1),  $\frac{lb_m/ft^3 psi md}{cp}$

p presión,  $psi$

q gasto a condiciones de yacimiento,  $\frac{RB}{día}$

Q gasto a condiciones de superficie,  $\frac{STB}{\text{día}}$

s variable de la transformada de Boltzman, adimensional

t tiempo, *horas*

u desplazamiento en la dirección radial y variable espacial en el capítulo 5, *ft*

$\vec{u}$  vector de desplazamiento, *ft*

v desplazamiento en la dirección angular y velocidad en caso de tener un índice, *ft/s*

V volumen,  $ft^3$

$\vec{v}$  vector velocidad, *ft/s*

w desplazamiento en la dirección vertical, *ft*

$\vec{x}$  vector de posición, *ft*

y variable arbitraria

z dirección vertical, *ft*

### **Letras griegas**

$\alpha$  Coeficiente de Biot, adimensional

$\beta$  coeficiente de turbulencia

$\gamma$  constante de Euler

$\delta$  coeficiente de flujo de alta velocidad

$\delta_{ij}$  tensor delta de Kronecker

$\phi$  porosidad, adimensional

$\varphi$  coeficiente de pseudocompactación,  $psi^{-1}$

$\sigma$  esfuerzo, *psi*

$\vartheta$  deformación del fluido, adimensional

$\lambda$  constante de Lamé, *psi*

$\rho$  densidad,  $\frac{lb_m}{ft^3}$

$\psi$  pseudopresión (para la solución 2),  $\frac{lb_m/ft^3 psi md}{cp}$

$\pi$  número pi

$\mu$  viscosidad,  $cp$

### **Subíndices**

$a$  ajustado

$b$  valor de referencia

$i, j$  índices libres asociados a las direcciones espaciales

$i+1$  localización de los nodos

$f$  fluido

$g$  gas

$o$  valor de referencia

$r$  dirección radial

$s$  sólido, valor a condición de superficie en el caso de fluidos

$\theta$  dirección angular

$x$  dirección de "x",  $L$

$y$  dirección de "y",  $L$

$z$  dirección vertical,  $L$

### **Superíndices**

$i, j$  direcciones espaciales

$k+1$  nivel de iteración

$t+1$  nivel de tiempo

$+$ , coeficiente de correlación

$*$ , para denotar esfuerzo efectivo

$'$  valor ajustado

### **Operadores**

$\nabla$  operador Nabla,  $\frac{1}{L}$

$\Delta$  delta, (diferencia)

$\frac{D}{Dt}$  derivada material,  $\frac{1}{t}$

$() \cdot ()$  producto punto

## REFERENCIAS

1. Bear, J. y Cheng, A. H.-D. 2010. *Modeling Groundwater Flow and Contaminant Transport*. Dordrecht: Springer.
2. Chandrasekharaiah, D. S. y Debnath, L. 1994. *Continuum Mechanics*. Boston, Massachusetts: Academic Press.
3. Chin, L. Y., Raghavan, R. y Thomas, L. K. 2000. Fully Coupled Geomechanics and Fluid-Flow Analysis of Wells With Stress-Dependent Permeability. *SPE* **5** (01): 32-45. SPE-58968. <https://doi.org/10.2118/58968-PA>.
4. Dake, L. P. 1978. *Fundamentals of Reservoir Engineering*. Amsterdam: Elsevier.
5. Fjaer, E. 2008. *Petroleum Related Rock Mechanics*, second edition. Amsterdam: Elsevier.
6. Lee, J. y Wattenbarger, R. A. 1996. *Gas Reservoir Engineering*, SPE Textbook Series, Vol. 5. Richardson, Texas: SPE.
7. Narasimhan, M. N. L. 1993. *Principles of Continuum Mechanics*. New York: John Wiley & Sons.
8. Raghavan, R., Scorer, J. D. T. y Miller, F. G. 1972. An Investigation by Numerical Methods of the Effect of Pressure Dependent Rock and Fluid Properties on Well Flow Tests. *SPE J.* **12** (03): 267-275. SPE-2617-PA. <https://doi.org/10.2118/2617-PA>.
9. Samaniego V., F., Brigham, W. E. y Miller, F. G. 1977. An Investigation of Transient Flow of Reservoir Fluids Considering Pressure Dependent Rock and Fluid Properties. *SPE J.* **17** (02): 141-150. SPE-5593-PA. <https://doi.org/10.2118/5593-PA>.
10. Tarek A. y McKinney, P. D. 2005. *Advanced Reservoir Engineering*. Amsterdam: Elsevier/Gulf Professional Publishing.
11. Terzaghi, K. 1943. *Theoretical Soil Mechanics*. New York: John Wiley & Sons.
12. Vairogs, J. y Rhoades, V. W. 1973. Pressure Transient Tests in Formations Having Stress-Sensitive Permeability. *J Pet Technol* **25** (08): 965-970. SPE-4050-PA. <https://doi.org/10.2118/4050-PA>.