UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

El Grupo de Isometrías del Espacio Universal de Urysohn

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

Licenciatura de Matemáticas

PRESENTA:

Alejandro Mendoza Díaz de León

DIRECTORA DE TESIS:

Dra. Natalia Jonard Pérez

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2019

Agradecimientos

> Nunca he hecho nada 'útil'. Ningún descubrimiento mío ha hecho, ni es probable que hará, directa o indirectamente, para bien o mal, la menor diferencia a la amenidad del mundo.
>
> *G. H. Hardy*

Escrito en 1940, en plena Guerra Mundial, es entendible que Hardy se enorgulleciera de la "inutilidad" de sus teoremas: "La ciencia trabaja para el mal así como para el bien (y particularmente, por supuesto, en tiempos de guerra)." Al menos la abstracción de las matemáticas puras podría alejarlas de los asuntos bélicos de la humanidad, y si también se perdía su utilidad en prácticas más, digamos, nobles (como la medicina o la ingeniería), Hardy consideraba la pérdida negligible. Al final de esa guerra creo que pocos habrían estado totalmente en desacuerdo. Setenta años después inicié mi carrera como físico y solía compartir un sentimiento parecido: le tenía un cierto desdén a las aplicaciones matemáticas. Aunque más que por un miedo a su posible mal uso, surgía a partir de una visión de las matemáticas como arte –ya decía Oscar Wilde que "todo arte es completamente inútil." El marxista cultural en mí –llamémosle Aleksandr– me ha enajenado completamente de esa posición de espuria pureza, tanto en el arte como en la ciencia; aun así, heme aquí, completando una tesis sin alguna aplicación discernible. "¿Y eso qué aplicaciones tiene?," le preguntó un compañero al profesor de un curso de probabilidad avanzada que tomé hace unos años. Silencio. Un silencio espeso cual atole del día anterior que alentaba el paso del tiempo. Todos –incluyendo al profesor– veíamos al estudiante incrédulamente; era equivalente a un aristócrata en un salón victoriano preguntándole a los demás que para qué se molestaban con la poesía, al fin que no servía de nada: aparte de inculto, desalmado. A todos en ese salón nos quedaba más que claro que no estábamos ahí por la "utilidad" del material; estábamos ahí por nada más –pero nada menos– que apreciación estética. Amor al arte, pues. Así, años después, tras el fortalecimiento gradual pero constante de Aleksandr, justo cuando finalmente creía haber triunfado, llegó la topología. Las clases de Natalia Jonard resucitaron ese sentimiento que había tenido cuando pelé los ojos ante la pregunta de mi compañero: la pasión del arte por el arte (y digo esto consciente de la ironía de haber sido el único alumno en la clase de Natalia cuya presentación fue sobre

aplicaciones político-económicas). Por eso, y por guiarme y apoyarme todos estos meses de tesis –incluso cuando fulminaba contra la escritura indescifrable de Pestov–, gracias, Natalia. No me imagino disfrutar tanto hablar sobre subjuntivos, Rambo, piratas, y topología infinito-dimensional en la misma plática con nadie más. Y por tus enseñanzas, tanto de matemáticas como de arte, y tu amistad invaluable, Elie, gracias.

Es tradición agradecerle también a tu familia y continuaré la tradición, pero sólo porque en efecto sin ellos no creo haber podido completar mi carrera. Ha sido una travesía ardua y larga, como mi madre, mi padre y mi hermana podrán atestiguar mejor que nadie. Gracias a mi hermana, Laura, por ser mi mejor y más amada amiga, por entenderme incluso en mis silencios. A mi madre, Diana, por su apoyo incondicional, perseverancia infatigable, y por llevarme al bosque de Tlalpan durante horas decentes de la mañana durante las que mi cerebro apenas carbura. A mi padre, Rodrigo, por su apoyo perenne, sus consejos, pláticas, música, y mucho sushi. A mis tíos, Adolfo y Sonia, por su amor y apoyo silencioso, por sostenerme sin pedir crédito alguno. Y a mis abuelos, Claudia, Gloria y Sirahuén por tanto apapacho abuelozo. Los amo.

A mis amigos, dentro y fuera de la facultad, gracias. A ustedes también los amo. Y sí, sé que seguro no leerán nada de esto.

Wilde dijo que era una verdadera tristeza que hoy en día (o sea, hace casi siglo y medio) hubiera tan poca información inútil. He aquí mi granito de arena para alegrarlo un poco.

Índice general

Introducción

El 17 de agosto de 1924 muere ahogado en la costa de Bretaña el matemático soviético Pavel Urysohn, dejando incompleta la construcción de un espacio del que ahora es epónimo y a Hausdorff con la duda parcial: ¿Existe algún espacio universal entre los espacios métricos separables que también sea separable? Digo "parcial" ya que Hausdorff había trabajado por esos días en su propia construcción de dicho espacio; el resultado de Fréchet –que ℓ_∞ contiene una copia isométrica de todo espacio métrico separable– lo había dejado inconforme ya que ℓ_∞ no es separable. El interés en el espacio de Urysohn aparentaba haber perecido con su creador pero, tras casi cinco décadas de desdeño, Katětov revivió el interés en él con una nueva construcción. Dicha construcción sacó a relucir el hecho de que, aunque cada una de las dos propiedades definidoras del espacio de Urysohn –que es universal en la clase de espacios métricos separables y que es ultrahomogéneo– es interesante por sí sola, la combinación de ambas, como el chile y el elote, resulta en un objeto tremendamente más rico que la proverbial suma de sus partes. En particular, la construcción de Katětov permitió apreciar que lo fascinante del espacio de Urysohn, $\mathbb{U}$, no se restringía sólo al espacio sino a su grupo de isometrías, $\mathrm{Iso}(\mathbb{U})$, el cual resulta ser universal (de hecho, "versal", como se verá más adelante) entre los grupos polacos. Como es de esperarse dada la existencia de esta tesis, esto no es lo único interesante del grupo: nuestro resultado principal es que $\mathrm{Iso}(\mathbb{U})$ es un grupo extremadamente amenizable o, lo que es equivalente, que tiene la propiedad del punto fijo sobre compactos. De hecho demostramos un resultado más fuerte: que es un grupo de Lévy. A continuación aclaramos algunos de estos términos.

En no-tan-pocas palabras, un grupo es extremadamente amenizable si toda acción continua suya sobre un espacio compacto admite un punto fijo. Claramente los resultados que demuestran la amenizabilidad extrema de algún grupo particular tienen su lugar en la vasta tradición topológica de teoremas sobre puntos fijos. Importantemente, la propiedad que define a estos grupos posee una cierta universalidad (¡toda acción continua sobre cualquier compacto!) que le da una fuerza sobresaliente. Se conocen varios ejemplos (se recomiendan las colecciones reunidas en otros dos artículos de Pestov, en colaboración con Giordano, [8] y [9], y en otro de Kechris, Pestov y Todorcevic, [14]), la mayoría grupos de "dimensión" infinita. Las demostraciones en varios de estos casos tienden a recurrir al fenómeno de concentración de medida. Formalmente descubierto en los setentas por V. Milman en su estudio de espacios de Banach, el primer ejemplo de una familia de espacios que exhibiera dicho fenómeno fue descubierto décadas antes por P. Lévy (epónimo de los grupos y muchas otras cosas, aunque no de la compañía de ropa). Lévy demostró que la medida de las esferas unitarias de dimensión finita se concentraba alrededor del ecuador conforme la dimensión crecía. Es decir, en dimensiones altas la mayoría de la superficie de la esfera se encuentra alrededor de cualquiera de sus ecuadores. El matemático prominente Assaf Naor describió el fenómeno general como "una de las grandes ideas de análisis en nuestros tiempos" (traducido del inglés en [18]). Informalmente, la idea es que funciones Lipschitz que dependen de muchas variables son casi constantes (palabras de Naor). Es un fenómeno similar e íntimamente relacionado a otro fenómeno de espacios de dimensión infinita que también mencionamos en el presente escrito: el fenómeno de Ramsey-Dvoretzky-Milman (ver el Teorema 2.5.3).

Tanto la amenizabilidad extrema como estos dos fenómenos caen dentro del estudio de las dinámicas en espacios topológicos infinito-dimensionales; son propiedades de espacios enormes que exhiben comportamientos de un orden inesperado. El grupo de isometrías del espacio de Urysohn, al ser un grupo que contiene una copia isomorfa de todo grupo segundo-numerable –y que consecuentemente podríamos considerar algo grande–, es un ejemplo que junta a todos estos fenómenos, como demostramos en el presente trabajo. Esto es, además de exhibir ciertas propiedades topológicas de una fuerza considerable también exhibe fenómenos dinámicos extraordinarios, lo que vuelve a $\mathrm{Iso}(\mathbb{U})$ un objeto de gran interés.

Para poder estudiar a fondo las propiedades topológicas de este espacio necesitaremos una extensión de los espacios métricos llamados espacios uniformes. Comenzamos nuestro estudio con un desarrollo de la teoría de estos espacios, que resultan ser otra forma de ver a los espacios Tychonoff. Este nuevo lenguaje nos permitirá estudiar nociones como la continuidad uniforme sobre espacios sin métrica y nos da ciertas estructuras naturales para examinar grupos topológicos. Le seguiremos con un resumen de algunas nociones básicas sobre teoría de grupos que necesitaremos. Para no extendernos de más el enfoque de este trabajo exige obviar varios de estos resultados, aunque si el lector está interesado en los detalles se le recomienda consultar a [2] y [4].

A continuación hablaremos de las familias y los grupos de Lévy. Las familias de Lévy son colecciones de espacios con métricas y medidas que exhiben el fenómeno de concentración de medida. Esto es necesario para entender los grupos de Lévy, que son grupos que pueden ser "aproximados" por una familia de Lévy de subgrupos compactos, en el sentido de que la medida del grupo se "concentra" en estos subgrupos. Íntimamente relacionado a esta noción es la propiedad que más nos interesa: la amenizabilidad extrema. Concluimos el capítulo con una descripción de dicha propiedad, el fenómeno de Ramsey-Dvoretsky-Milman, la relación entre ambos, y uno de los resultados centrales de la tesis: que todo grupo de Lévy es extremadamente amenizable.

La segunda parte se dedica primero a un breve recordatorio sobre la construcción del espacio universal de Urysohn y de su grupo de isometrías. Se incluyen algunos resultados que requeriremos para su estudio. Al final demostramos que $\mathrm{Iso}(\mathbb{U})$ es un grupo de Lévy –cuya familia de Lévy consiste en subgrupos no sólo compactos sino finitos– y, por consiguiente, que es extremadamente amenizable. Concluimos con un par de resultados concomitantes a este hecho, como el hecho de que $\mathrm{Iso}(\mathbb{U})$ y el grupo de homeomorfismos del cubo de Hilbert no son isomorfos.

El trabajo de Vladimir Pestov fue indispensable para esta tesis, principalmente [20] y [21]. La mayoría de la teoría desarrollada previa al resultado principal salió del libro, [20], mientras que la demostración del resultado central se basa principalmente en el artículo, [21].

Nota filológica *(sálteselo a quien no le haga ruido la palabra "amenizable")*: Aunque la palabra "amenizable" no existe en la Oh-Todopoderosa RAE, tras varios debates optamos por españolizar (sí, ésa sí está) el término inglés "extremely amenable." La decisión requiere un poco de historia. El primer uso de un concepto relacionado fue por Von Neumann, aplicando el adjetivo alemán "meßbar" –que se traduce al español como "mensurable"– para referirse a una clase de grupos que prohíben descomposiciones paradójicas (por ejemplo, las rotaciones en $\mathbb{R}^3$ que llevan a la paradoja de Banach-Tarski). El matemático estadounidense Mahlon Day luego introdujo el término en inglés "amenable," que puede traducirse al español como "dócil," aparentemente como un juego de palabras (en inglés "mean" significa "promedio"). Por tanto, la primera propuesta fue traducirlo como "extremadamente dócil." Los sobretonos, digamos, inapropiados descartaron la propuesta. Dado que la idea es que estos grupos se comportan "bien," se propuso el cognado "ameno." Resultó empalagosamente optimista y, en general, no son grupos particularmente lindos o fáciles de estudiar (no pueden ser localmente compactos, por ejemplo). Además se mencionó que en francés se utiliza el término "moyennable" –o sea "promediable"– debido a la relación estrecha entre los grupos "promediables" (término también utilizado en español) y unas funciones que generalizan la noción probabilística del promedio. Dado que los grupos "extremadamente amenizables" tienen una propiedad muy fuerte de puntos fijos que los grupos promediables no (no los definiremos porque no influye sobre nuestro trabajo pero sí, los extremadamente amenizables son promediables), la idea de los promedios resulta algo superflua al definir la amenizabilidad extrema, por lo que la idea de que estos grupos son de cierta forma lindos o que pueden ser "amenos" parece más relevante. Ante tanta confusión y al ser todos los involucrados en el debate lingüistas descriptivos, acordamos en simplemente españolizar el término. Para no perder la potencialidad implícita tanto en el inglés como el alemán y el francés, en lugar de "extremadamente ameno" la primera propuesta fue traducirlo como "extremadamente amenable" que después fue cambiado a "extremadamente amenizable" para acercarlo un poco más al español: algo es "mensurable" porque se puede medir; otra cosa es "promediable" porque es posible promediarlo; así que diremos que nuestro grupo es "amenizable" porque se puede amenizar. Es decir, desde cierta óptica, estos son grupos que se portan poca madre.

Parte I

Preliminares

Capítulo 1

Uniformidades y Grupos

1.1. Notación

Empezaremos con algunas convenciones y notaciones que utilizaremos durante la tesis.

A menos que se especifique lo contrario, el término **vecindad** se referirá a una vecindad abierta. Asumiremos que todos los espacios topológicos en este trabajo son **Hausdorff (T_2)**. Dado un espacio topológico X y un subconjunto $A \subset X$, denotaremos por $\bar{A}$ a la **cerradura** de A y denotaremos por $\mathrm{Int}(A)$ al **interior** de A.

Dado un espacio métrico X, cuando no haya posibilidad de confusión, denotaremos por $\overline{X}$ a su **completación**. Dado un punto $x \in X$ y un número real $r > 0$, denotamos por $B(x, r)$ a la bola abierta con centro en x y radio r.

Ahora estableceremos la notación relacionada a grupos. Sea G un grupo y S un subconjunto de G. Denotaremos por $S^{-1} := \{s^{-1} \mid s \in S\}$ al conjunto de los elementos inversos de S. Si $g \in G$ es cualquier elemento, denotaremos por $gS := \{gs \mid s \in S\}$ a la traslación izquierda por g del conjunto S; el caso por la derecha es análogo. Decimos que G es **generado** por S (o que S **genera** a G) si todo elemento en G puede ser expresado como producto de elementos en $S \cup S^{-1}$. Escribiremos $\langle S \rangle$ para denotar al subgrupo generado por S (el grupo más chico que contiene a S). Si $G = \langle S \rangle$, definimos la **S-longitud** de un elemento $x \in G$ como el mínimo número de elementos de $S \cup S^{-1}$ que multiplicados dan x. Denotamos dicho número por $\ell_S(x)$. Si S no es generador, aun así podemos definir la S-longitud para cualquier elemento $x \in G$ simplemente declarando que $\ell_S(x) = \infty$ para cualquier x que no esté en $\langle S \rangle$.

Recordemos que dado un conjunto X podemos formar el **grupo libre** F_X con conjunto generador X; éste consiste en las palabras reducidas formadas por los caracteres $X \cup X^{-1}$ (eso es, palabras cuyas entradas que sean inversas consecutivas hayan sido omitidas) con la operación de grupo siendo la concatenación. Un grupo G es **libre** si es isomorfo al grupo libre generado por un subconjunto $S \subset G$.

Si tenemos dos grupos G y H, podemos formar su **producto libre** $G * H$ cuyos elementos son las palabras reducidas cuyos caracteres son los elementos de G y H. La reducción consiste en aplicar las reglas de las operaciones de grupos entre caracteres adyacentes del mismo grupo. Es decir, si $g_1 g_2 = g_3$ en G, entonces la palabra $g_1 g_2 h_1 h_2^{-1} h_2$ sería reducida a la palabra $g_3 h_1$. La operación de grupo en $G * H$ es la concatenación.

Un **grupo topológico** es un grupo G dotado de una topología en la cual la operación del grupo, $(g, h) \mapsto gh$, y la inversión, $g \mapsto g^{-1}$, son funciones continuas.

Por ejemplo, sea X un espacio métrico. Definimos a su **grupo de isometrías** como el conjunto

$$\mathrm{Iso}(X) := \{f : X \to X \mid f \text{ es isometría}\}$$

donde la operación de grupo es la composición de funciones. Le damos la **topología punto-abierta** (o de **convergencia puntual**), que es la topología generada por los conjuntos sub-básicos

$$M(x, U) := \{f \in \mathrm{Iso}(X) \mid f(x) \in U\}$$

donde x es cualquier punto en X y $U \subset X$ es un subconjunto abierto. Esto vuelve a $\mathrm{Iso}(X)$ en un grupo topológico.

Otra topología que usaremos para grupos de isometrías es la topología **compacto-abierta**. Ésta está generada por los conjuntos sub-básicos de la forma

$$M(K, V) := \{f \in \mathrm{Iso}(X) \mid f(K) \subset V\}$$

donde $K \subset X$ es compacto y $V \subset Y$ es abierto. Resulta que en el caso de un grupo de isometrías ambas topologías coinciden.

La siguiente observación no es difícil de comprobar.

Lema 1.1.1. *Sea X un espacio métrico. Si $D \subset \mathrm{Iso}(X)$ es denso, entonces $D^{-1} := \{f^{-1} \mid f \in D\}$ también lo es.*

Brevemente recordaremos la definición de una acción de grupo, aunque hablaremos más sobre el tema en la Sección 1.4.

Definición 1.1.2. *Sean X un conjunto y G un grupo. Una **acción** del grupo G sobre X es una asignación $\varphi : G \times X \to X$ que satisface:*

- *$\varphi(e, x) = x$ para toda $x \in X$.*
- *$\varphi(h, \varphi(g, x)) = \varphi(hg, x)$ para todo $g, h \in G$ y todo $x \in X$.*

Cuando no haya confusión sobre la acción utilizaremos la notación $g \cdot x$ o gx para denotar $\varphi(g, x)$.

1.2. Uniformidades

Los espacios uniformes fueron inicialmente propuestos y estudiados por André Weil –hermano de Simone Weil y uno de los miembros fundacionales del grupo Bourbaki– a finales de los treintas. Éstos serán una herramienta útil cuando queramos demostrar varios de los resultados principales en la tesis, en particular que todo grupo de Lévy es extremadamente amenizable (ambos de estos términos serán formalmente esclarecidos más adelante). Por el momento, empecemos por definir los espacios uniformes. La mayoría del material que sigue está basado en [2], complementado por [4] y [20].

Definición 1.2.1. *Una pareja* $(X,\mathcal{U})$ *es un* ***espacio uniforme*** *si* X *es un conjunto y* $\mathcal{U}$ *es una* ***estructura uniforme*** *(también llamada* ***uniformidad****) sobre* X*. Eso es,* $\mathcal{U}$ *es una colección de subconjuntos de* $X \times X$*, llamados* ***entornos de la diagonal****, que satisfacen las siguientes propiedades:*

a) $\mathcal{U}$ *es cerrado bajo intersecciones finitas y supraconjuntos (decimos que* B *es un* ***supraconjunto*** *de* A *si* $A \subset B$*).*

b) Todo elemento de $\mathcal{U}$ *contiene la* ***diagonal*** $\Delta := \{(x,x) \mid x \in X\}$*.*

c) $\mathcal{U}$ *es* ***simétrico*** *en el siguiente sentido: si* $V \in \mathcal{U}$*, entonces*

$$-V := \{(x,y) \mid (y,x) \in V\} \in \mathcal{U}.$$

d) Para cada entorno $V \in \mathcal{U}$ *existe otro entorno* $U \in \mathcal{U}$ *tal que*

$$U \circ U := \{(x,z) \mid \textit{existe } y \in X \textit{ tal que } (x,y),(y,z) \in U\} \subset V.$$

Si un entorno de la diagonal V es igual a su reflexión, $V = -V$, decimos que es **simétrico**.

Si una estructura uniforme $\mathcal{U}$ además satisface que la intersección de todos sus elementos es la diagonal, decimos que la estructura uniforme está **separada**. Asumiremos, así como R. Engelking en su libro, que todas las estructuras uniformes están separadas.

Si tenemos una estructura uniforme $\mathcal{U}$ sobre un conjunto X, dado cualquier entorno de la diagonal V y cualquier punto $x \in X$, podemos definir la V-vecindad (o V-bola) de (con centro en) x como

$$V[x] := \{y \in X \mid (x,y) \in V\}.$$

Para un subconjunto $A \subset X$, su V-vecindad es definida como

$$V[A] := \bigcup_{a \in A} V[a].$$

Nótese que por el inciso b) en la Definición 1.2.1, $x \in V[x]$ para cualquier $V \in \mathcal{U}$. Es fácil checar que la familia de V-vecindades en X satisfacen las propiedades de una base topológica, por lo que existe una única topología sobre X generada por V-vecindades. A esta topología le llamamos la **topología generada por o asociada a** $\mathcal{U}$. Si un conjunto X tiene una estructura uniforme $\mathcal{U}$ y una topología τ tales que τ coincide con la topología generada por $\mathcal{U}$, entonces decimos que la estructura uniforme $\mathcal{U}$ es **compatible**.

Ejemplo 1.2.1. Para cualquier conjunto X, la uniformidad trivial, $\mathcal{U} = \{\Delta\}$, genera la topología discreta.

Si tenemos una uniformidad $\mathcal{U}$, decimos que una familia $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ es una **base** para $\mathcal{U}$ si para todo entorno de la diagonal $V \in \mathcal{U}$ existe un elemento $W \in \mathcal{B}$ tal que $W \subset V$.

No es difícil ver que una familia $\mathcal{B}$ de subconjuntos de $X \times X$ es base de alguna uniformidad si y sólo si cumple las siguientes propiedades:

a) $\mathcal{B}$ es un **prefiltro**. Esto es, para cualesquiera dos elementos $A, B \in \mathcal{B}$ existe un tercer elemento $C \in \mathcal{B}$ tal que $C \subset A \cap B$.

b) Todo elemento de $\mathcal{B}$ contiene la diagonal como subconjunto.

c) Para cualquier $V \in \mathcal{B}$ existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $U \subset -V$.

d) Para cualquier $V \in \mathcal{B}$ existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $U \circ U \subset V$.

Ejemplo 1.2.2. Todo espacio métrico (X, d) tiene una estructura uniforme natural asociada; es la generada por la base que consiste de los conjuntos de la forma

$$\{(x, y) \in X \times X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

para todo $\varepsilon > 0$. Dicha estructura uniforme es compatible.

Análogo a cómo se define la topología producto, se pueden definir uniformidades producto. Sea $(X_\alpha, \mathcal{U}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una familia de espacios uniformes. Sea $\mathcal{B}$ la colección de todos los entornos de la diagonal $\Delta \subset \left(\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha\right) \times \left(\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha\right)$ que son de la forma

$$\left\{ \{(x_\alpha, y_\alpha)\}_\alpha \in \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha \,\middle|\, (x_{\alpha_k}, y_{\alpha_k}) \in V_{\alpha_k} \text{ para algún } V_{\alpha_k} \in \mathcal{U}_{\alpha_k},\ k = 1, 2, \ldots, n \right\}.$$

Es decir, sólo un número finito de las coordenadas deben consistir de elementos de algún entorno de la diagonal del espacio correspondiente. Entonces $\mathcal{B}$ satisface las condiciones necesarias para ser base, por lo que genera una uniformidad. A esta estructura uniforme le llamamos la **uniformidad producto** y la denotamos como $\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{U}_\alpha$.

Observación 1.2.2. *La topología inducida por la uniformidad producto en el espacio uniforme* $\left(\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha, \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{U}_\alpha\right)$ *es compatible con la topología producto.*

Con todo y todo, resulta que los espacios uniformes no son mucho más que espacios topológicos Tychonoff, dado el siguiente resultado ([4, Teorema 8.1.20]).

Teorema 1.2.3. *Un espacio topológico admite una estructura uniforme separada y compatible si y sólo si es Tychonoff.*

La pregunta natural que debería seguirle a este resultado es: ¿para qué me tomaría la molestia de estudiar algo que ya conozco pero con otro nombre? La respuesta filosófica es que, en muchos sentidos, las matemáticas son el estudio de las mismas cosas bajo nombres distintos. La respuesta más concreta es que los espacios uniformes sirven como generalización de los espacios métricos, permitiéndonos extender varios resultados de estos últimos a los primeros, como la noción de continuidad uniforme, que veremos a continuación.

Definición 1.2.4. *Sea $f : X \to Y$ una función entre dos espacios uniformes, $(X, \mathcal{U})$ y $(Y, \mathcal{V})$. Decimos que f es **uniformemente continua** si para cualquier $V \in \mathcal{V}$ existe un entorno $U \in \mathcal{U}$ tal que $\big(f(x), f(y)\big) \in V$ para todo punto $(x, y) \in U$.*

Definición 1.2.5. *Diremos que una función biyectiva $f : X \to Y$ entre dos espacios uniformes es un **isomorfismo uniforme** si tanto f como su inversa son uniformemente continuas.*

La utilidad de los espacios uniformes resalta particularmente en el caso de grupos topológicos, donde tenemos tres estructuras uniformes útiles y naturales. Empecemos por conocerlas.

Sea G un grupo topológico. Denotemos por $\mathcal{N}$ a la familia de vecindades abiertas y simétricas ($A \subset G$ es **simétrico** si $A^{-1} = A$) de la identidad en G. Entonces, para cada $V \in \mathcal{N}$ definimos los siguientes conjuntos:

$$
\begin{aligned}
O_V^l &:= \{(g, h) \in G \times G \mid g^{-1}h \in V\} \\
O_V^r &:= \{(g, h) \in G \times G \mid gh^{-1} \in V\} \\
O_V &:= O_V^l \cap O_V^r.
\end{aligned}
$$

Nótese que cada uno de los conjuntos anteriores son entornos simétricos de la diagonal. Además, cada uno de ellos es abierto en $G \times G$ (por la continuidad de las operaciones de grupo). Podemos entonces generar tres estructuras uniformes a partir de estos conjuntos:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{V}_G^l &:= \{D \in \mathcal{D}_G \mid \text{existe } V \in \mathcal{N} \text{ tal que } O_V^l \subset D\} \\
\mathcal{V}_G^r &:= \{D \in \mathcal{D}_G \mid \text{existe } V \in \mathcal{N} \text{ tal que } O_V^r \subset D\} \\
\mathcal{V}_G &:= \{D \in \mathcal{D}_G \mid \text{existe } V \in \mathcal{N} \text{ tal que } O_V \subset D\}
\end{aligned}
$$

donde $\mathcal{D}_G$ son los subconjuntos simétricos de $G \times G$. No es difícil comprobar que las tres uniformidades anteriores son compatibles con la topología de G. Les llamaremos la

estructura uniforme izquierda, derecha, y bilateral del grupo G, respectivamente. Las familias

$$\mathcal{B}_G^l := \{O_V^l \mid V \in \mathcal{N}\}$$
$$\mathcal{B}_G^r := \{O_V^r \mid V \in \mathcal{N}\}$$

forman bases de $\mathcal{V}_G^l$ y $\mathcal{V}_G^r$, respectivamente.

Podemos entonces hablar de continuidad uniforme por un lado (o dos).

Definición 1.2.6. *Sea $f : G \to H$ una función entre grupos topológicos. Diremos que f es **uniformemente continua por la izquierda** si es uniformemente continua como función entre los siguientes espacios uniformes*

$$f : (G, \mathcal{V}_G^l) \to (H, \mathcal{V}_H^l).$$

La definición tiene clara analogía con el caso derecho. Si una función es uniformemente continua por ambos lados simplemente diremos que es uniformemente continua; en este caso coincide con la continuidad uniforme con respecto a la uniformidad bilateral, $\mathcal{V}_G$.

Ejemplo 1.2.3. Sean G y H grupos topológicos, y $f : G \to H$ un homomorfismo continuo. Entonces f es uniformemente continuo.

Hay casos en los que las tres uniformidades –izquierda, derecha, y bilateral– coinciden; por ejemplo, los espacios compactos. Pero antes del caso compacto, clasificaremos dichos casos con mayor generalidad, para lo que necesitaremos dos definiciones sencillas para grupos.

Definición 1.2.7. *Sea G un grupo y A un subconjunto de G. Diremos que A es **invariante** si para cualquier elemento $x \in G$ se cumple que $xAx^{-1} = A$.*

Observación 1.2.8. *Si G es un grupo abeliano, todo subconjunto es invariante.*

Definición 1.2.9. *Sea G un grupo topológico. Diremos que está **balanceado** si existe una base local del elemento neutro que consista de puros conjuntos invariantes.*

Por la observación anterior, es claro que los grupos topológicos abelianos están balanceados. La siguiente es una caracterización de grupos balanceados fácil de demostrar.

Lema 1.2.10. *Un grupo topológico G está balanceado si y sólo si para cualquier vecindad $U \subset G$ del neutro $e \in G$ existe otra vecindad V de e que satisfaga $xVx^{-1} \subset U$ para todo elemento $x \in G$.*

No es difícil comprobar que todo subconjunto compacto de un grupo topológico satisface la propiedad anterior. Por lo que concluimos lo siguiente:

Observación 1.2.11. *Todo grupo topológico compacto está balanceado.*

Resulta que los grupos balanceados son precisamente aquellos en los que las tres uniformidades anteriores coinciden.

Teorema 1.2.12. *Sea G un grupo topológico. Entonces las uniformidades izquierda, derecha, y bilateral coinciden si y sólo si G está balanceado.*

Demostración. Supongamos que las tres uniformidades coinciden. Recordando que $\mathcal{B}_G^l$ y $\mathcal{B}_G^r$ son bases de las uniformidades izquierda y derecha, respectivamente, se cumple que para todo $V \in \mathcal{N}$ existe otro elemento $U \in \mathcal{N}$ tal que

$$O_U^l \subset O_V^r.$$

Pero eso se traduce en que si $x, y \in G$ son tales que $x^{-1}y \in U$, entonces $xy^{-1} \in V$. Eso implica que $xU \subset Vx$ para cualquier $x \in G$, debido a la simetría de U y V. Pero multiplicando ambos lados por x^{-1} nos da precisamente la caracterización del Lema 1.2.10. Así que G está balanceado.

Ahora, supongamos que G está balanceado. Definimos las siguientes colecciones:

$$\begin{aligned}\gamma^l &:= \{O_V^l \mid V \in \mathcal{N} \text{ es invariante}\}\\ \gamma^r &:= \{O_V^r \mid V \in \mathcal{N} \text{ es invariante}\}.\end{aligned}$$

Veamos que son bases para $\mathcal{V}_G^l$ y $\mathcal{V}_G^r$, respectivamente. Haremos el caso izquierdo y el derecho se sigue análogamente. Sea $U \in \mathcal{V}_G^l$. Como $\mathcal{B}_G^l$ es base, existe $V' \in \mathcal{N}$ tal que $O_{V'}^l \subset U$. Como G está balanceado por hipótesis, existe un subconjunto invariante $V \subset V'$. Por lo que $O_{V\cap V^{-1}}^l \subset O_{V'}^l \subset U$, con $O_{V\cap V^{-1}}^l \in \gamma^l$.

Sabiendo que γ^l y γ^r son bases, nótese que para cada conjunto invariante $V \in \mathcal{N}$ tenemos que

$$\begin{aligned}(x,y) \in O_V^l &\iff x^{-1}y \in V\\ &\iff yx^{-1} \in xVx^{-1} = V\\ &\iff xy^{-1} \in -V = V\\ &\iff (x,y) \in O_V^r.\end{aligned}$$

Por lo que $\gamma^l = \gamma^r$, y entonces las uniformidades izquierda y derecha coinciden (y por tanto coinciden con la bilateral). □

Dada la Observación 1.2.11, obtenemos el corolario inmediato:

Corolario 1.2.13. *Las uniformidades izquierda, derecha, y bilateral coinciden en grupos compactos.*

De hecho todo espacio topológico compacto (no sólo grupo) tiene una única estructura uniforme compatible. La **uniformidad universal** sobre un espacio topológico X es definida como la estructura uniforme compatible más fina. Se le puede caracterizar como la uniformidad que vuelve a toda función continua con dominio en X una función uniformemente continua y, dado que toda función continua sobre un espacio compacto es uniformemente continua, la estructura uniforme de cualquier espacio compacto siempre resulta ser la universal. Como nuestro enfoque es en grupos topológicos omitiremos los detalles.

Nos servirá analizar en mayor detalle la estructura uniforme del grupo aditivo de los reales:

Ejemplo 1.2.4. Como $\mathbb{R}$ con la suma es un grupo topológico abeliano, está balanceado y por consguiente las tres uniformidades coinciden. Su estructura uniforme natural es entonces la usual para espacios métricos; es decir, la generada por la base conformada por los conjuntos de la forma

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - y| < \varepsilon\}$$

con $\varepsilon > 0$. La estructura se extiende fácilmente al caso de $\mathbb{R}^n$, dada la Observación 1.2.2, por lo que podemos hablar de la estructura uniforme sobre $\mathbb{R}^n$ sin ambigüedad y así extender la noción de continuidad uniforme a funciones con valores en $\mathbb{R}^n$.

Teniendo esto en mente, la continuidad uniforme en el caso de funciones con codominios euclidianos es más fácil de caracterizar:

Observación 1.2.14. *Sea G un grupo topológico y $f : G \to \mathbb{R}^n$ una función. Entonces f es uniformente continua por la izquierda si y sólo si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un entorno de la diagonal $V \in \mathcal{V}_G^l$ tal que $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$ para todo $(x, y) \in V$.*

Por la equivalencia topológica de las normas en $\mathbb{R}^n$, la norma específica que elijamos en el ejemplo de arriba es irrelevante. El caso por la derecha se sigue análogamente. Más aún, no es difícil comprobar la siguiente caracterización alternativa:

Lema 1.2.15. *Sea G un grupo topológico. Entonces una función $f : G \to \mathbb{R}^n$ es uniformemente continua por la izquierda si y sólo si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una vecindad V del neutro en G tal que*

$$\|f(xv) - f(x)\| < \varepsilon$$

para todo $v \in V$ y todo $x \in G$.

Podemos también extender un resultado básico de análisis:

Proposición 1.2.16. *Si G es un grupo topológico compacto y $f : G \to \mathbb{R}$ una función continua, entonces f es uniformemente continua.*

Demostración. Sea $f : G \to \mathbb{R}$ continua, con G un grupo topológico compacto. Dado que G está balanceado, basta demostrar que f es uniformemente continua por la izquierda.

Sea $\varepsilon > 0$ dado. Para cada $x \in G$ sea $U_x \subset G$ una vecindad de la identidad para la cual se satisfaga que

$$\big|f(xy) - f(x)\big| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $y \in U_x$. Dichas vecindades existen por la continuidad de f. Además elegimos para cada $x \in G$ una vecindad de la identidad V_x tal que $V_x^2 \subset U_x$. Por la compacidad de G existen puntos $x_1, \ldots, x_n$ tales que

$$G = \bigcup_{i=1}^{n} x_i V_{x_i}.$$

Entonces definimos

$$V := \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}.$$

Afirmamos que para todo $y \in V$ se cumple la desigualdad $\big|f(xy) - f(x)\big| < \varepsilon$ para todo $x \in G$; con el lema anterior (Lema 1.2.15) quedaría demostrada la contiuidad uniforme de f. Así que sea $x \in G$ un punto arbitrario, y $y \in V$. Como los $x_i V_{x_i}$ cubren a G, existe $i \leq n$ tal que $x \in x_i V_{x_i} \subset x_i U_{x_i}$. Por la elección de los U_x, tenemos que

$$\big|f(x) - f(x_i)\big| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Además, como $y \in V$, tenemos que $xy \in x_i V_{x_i} V \subset x_i V_{x_i}^2 \subset x_i U_{x_i}$. Por lo que $\big|f(xy) - f(x_i)\big| < \varepsilon/2$. Juntando todo obtenemos la desigualdad deseada:

$$\big|f(xy) - f(x)\big| \leq \big|f(xy) - f(x_i)\big| + \big|f(x_i) - f(x)\big| < \varepsilon.$$

□

Hablando de espacios compactos, ahora estamos listos para dar una familia de funciones uniformemente continuas que utilizaremos para uno de los resultados centrales de este trabajo.

Lema 1.2.17. *Sea G un grupo topológico que actúa sobre un espacio compacto X. Entonces para cada punto $\xi \in X$, la función*

$$\begin{aligned} \varphi_\xi :\ & G \to X \\ & g \mapsto g \cdot \xi \end{aligned}$$

es uniformemente continua por la derecha. Análogamente, la función

$$\begin{aligned} \phi_\xi :\ & G \to X \\ & g \mapsto g^{-1} \cdot \xi \end{aligned}$$

es uniformemente continua por la izquierda.

Demostración. Haremos sólo el primer caso ya que el segundo es análogo. Como X es compacto existe una única estructura uniforme compatible sobre X que denotaremos $\mathcal{U}$. Sea $V \in \mathcal{U}$ cualquier entorno. Debemos demostrar que existe un abierto $W \subset G$ tal que $\varphi_\xi(W) \times \varphi_\xi(W) \subset V$.

Por el inciso d) en la definición de las uniformidades (también conocida como la desigualdad triangular) existe un entorno $U \in \mathcal{U}$ tal que $U \circ U \subset V$. Si denotamos por σ a la acción de G, vemos que su continuidad nos asegura la existencia de una vecindad del neutro, $W_1 \subset G$, y una vecindad del punto ξ, $A \subset X$, tales que

$$\sigma\left(W_1 \times A\right) \subset (-U)[\xi].$$

En particular,

$$\sigma\big(W_1 \times \{\xi\}\big) \subset (-U)[\xi].$$

Eso es, para todo $g \in W_1$, tenemos que $\sigma(g,x) = g \cdot \xi \in (-U)[\xi]$. Análogamente, existe otra vecindad del neutro, $W_2 \subset G$ tal que $h \cdot \xi \in U[\xi]$ para todo $h \in W_2$. Definimos a $W := W_1 \cap W_2$. Como el neutro está contenido en W y cada W_i es abierto, W es una vecindad del neutro. Además, nótese que

$$\begin{aligned} g \cdot \xi \in U^{-1}[\xi] &\iff (g \cdot \xi, \xi) \in U \\ h \cdot \xi \in U[\xi] &\iff (\xi, h \cdot \xi) \in U. \end{aligned}$$

Por lo que deducimos que para cualesquiera $g, h \in W$,

$$(g \cdot \xi, h \cdot \xi) \in U \circ U \subset V.$$

Esto es,

$$\varphi_\xi(W) \times \varphi_\xi(W) \subset V.$$

□

1.3. Grupos Residualmente y Localmente Finitos

Una noción útil para nuestras construcciones es la de grupos residualmente finitos, una generalización de grupos finitos (y un caso especial de grupos en clases residuales; ver la discusión de clases residuales en [22, Sección 2.3]).

Definición 1.3.1. *Un grupo G es* ***residualmente finito*** *si para cada elemento $g \in G$ distinto de la identidad existe un subgrupo normal $N \trianglelefteq G$ tal que $g \notin N$ y que G/N es finito.*

Es claro que todo grupo finito es residualmente finito, pues simplemente tomamos a N como el subgrupo trivial.

Con [3, Teorema 2.3.1] obtenemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.3.1. Los grupos libres son residualmente finitos.

Damos unas equivalencias sencillas para grupos residualmente finitos:

Proposición 1.3.2. *Sea G un grupo. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1) G es residualmente finito.

2) La intersección de todos los subgrupos normales de G con índice finito es el grupo trivial.

3) Para todo subconjunto finito $V \subset G$ existe un subgrupo normal H de G con índice finito tal que la proyección canónica $G \to G/H$ restringida a V es inyectiva.

Demostración. La equivalencia entre 1) y 2) se puede encontrar en [22]. Se discute antes del resultado 2.3.3.

Que 3) implica 1) es casi inmediato, pues para cualquier elemento $g \in G$ distinto de la identidad definimos a $V := \{e, g\}$. Por hipótesis obtenemos un subgrupo $H \trianglelefteq G$ de índice finito tal que la proyección $G \to G/H$ restringida a V es inyectiva. Pero eso sólo ocurre si $g \notin H$, por lo que H es el subgrupo normal buscado.

Finalmente, para demostrar que 1) implica 3) para cada $v \in V$ tomamos el subgrupo normal H_v dado por la finitud residual de G. Si definimos a H como la intersección de todos los H_v obtenemos que es un subgrupo normal de índice finito (pues es la intersección finita de subgrupos de índice finito). Además, la restricción de la proyección $G \to G/H$ a V es claramente inyectiva. $\square$

El siguiente resultado conocido nos será útil ([11, Teorema 4.1]):

Proposición 1.3.3. *El producto libre de una familia de grupos residualmente finitos es residualmente finito.*

Otra noción útil es la de un grupo localmente finito (famosa gracias al problema de Burnside):

Definición 1.3.4. *Decimos que un grupo G es **localmente finito** si todo subgrupo de G finitamente generado es finito.*

Claramente todo grupo finito es localmente finito. Otros ejemplos incluyen el grupo universal de Hall y los grupos de Prüfer. En general es difícil clasificar dichos grupos pero el caso de los grupos numerables es sencillo.

Proposición 1.3.5. *Sea G un grupo numerable. Entonces G es localmente finito si y sólo si es la unión de una cadena creciente (por inclusión) de subgrupos finitos.*

Demostración. El caso en que G sea finito se sigue fácilmente de la demostración en el caso infinito. Así que sea $G = \{g_1, g_2, g_3, \dots\}$ una enumeración del grupo.

Si G es localmente finito, construimos los subgrupos $V_n := \langle g_1, g_2, \dots, g_n \rangle$, que por hipótesis son finitos. Claramente forman una cadena creciente y $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$.

Sea $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ con los H_n formando una cadena creciente de subgrupos finitos. Sean $x_1, x_2, \dots, x_k \in G$ elementos arbitrarios. Entonces existe una n_0 tal que $x_1, x_2, \dots, x_k \in H_{n_0}$. Eso implica que $\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle \leq H_{n_0}$, por lo que el subgrupo generado por $x_1, \dots, x_k$ es finito. Se sigue que G es localmente finito. $\square$

1.4. Acciones de Grupos

Aunque ya definimos lo que es una acción de grupos, reiteraremos la definición por claridad y mencionaremos algunas nociones relacionadas.

Definición 1.4.1. *Sean X un conjunto y G un grupo. Una* ***acción*** *del grupo G sobre X es una asignación $\varphi : G \times X \to X$ que satisface:*

- *$\varphi(e, x) = x$ para toda $x \in X$.*
- *$\varphi(h, \varphi(g, x)) = \varphi(hg, x)$ para todo $g, h \in G$ y todo $x \in X$.*

Cuando no haya confusión sobre la acción utilizaremos la notación $g \cdot x$ o gx para denotar $\varphi(g, x)$. A menos que se especifique lo contrario, si G es un grupo topológico asumiremos que todas las acciones son continuas.

Decimos que la acción es **libre** si todos los estabilizadores son triviales. Eso es, si para todo $x \in X$, el tener $gx = x$ implica que $g = e$.

Decimos que la acción es **fiel** si el que se cumpla la igualdad $gx = x$ para todo $x \in X$ implica que $g = e$.

Casi todas las acciones consideradas en este trabajo serán acciones por isometrías, por lo que la siguiente noción es útil.

Definición 1.4.2. *Sean X y Y dos espacios métricos. Si existe un encaje isométrico $X \hookrightarrow Y$ y un encaje de grupos $j : \mathrm{Iso}(X) \to \mathrm{Iso}(Y)$ tal que $j(f) \mid_X = f$ para toda $f \in \mathrm{Iso}(X)$, decimos que el encaje es un* ***g-encaje***. *Alternativamente, decimos que X está* ***g-encajado*** *en Y.*

Capítulo 2

Grupos de Lévy, RDM, y Amenizabilidad Extrema

2.1. Familias de Lévy

Para entender los grupos de Lévy antes necesitamos entender las familias de Lévy, por lo que definiremos un término que nos ahorrará un poco de espacio cuando hablemos de dichas familias.

Definición 2.1.1. *Llamaremos **espacio mm** (de "métrica y medida") a un triple* (X, d, μ) *que consiste de un conjunto* X*, una métrica* d *sobre dicho conjunto, y una medida probabilística de Borel* μ *sobre el espacio métrico* (X, d)*.*

Para simplificar notación, si tenemos un espacio métrico (X, d), un subconjunto $A \subset X$, y un $\varepsilon > 0$, denotaremos por A_ε a la ε-vecindad cerrada de A. Esto es, $A_\varepsilon := \{x \in X \mid d(x, A) \leq \varepsilon\}$. Ahora podemos introducir el objeto principal de esta sección.

Definición 2.1.2. *Decimos que una familia* $\mathcal{X} = (X_n, d_n, \mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de espacios mm es una **familia de Lévy** si para cada sucesión de conjuntos de Borel* $A_n \subset X_n$ *tal que*

$$\liminf_{n \to \infty} \mu_n(A_n) > 0$$

entonces para todo $\varepsilon > 0$ *se tiene que*

$$\lim_{n \to \infty} \mu_n \left((A_n)_\varepsilon \right) = 1.$$

En otras palabras, las familias de Lévy son las sucesiones de espacios mm que exhiben el fenómeno de **concentración de medida**. Dicho fenómeno se extiende a espacios uniformes, como puede verse en la siguiente definición.

Definición 2.1.3. *Decimos que una red* (μ_α) *de medidas probabilísticas de Borel sobre un espacio uniforme* $(X,\mathcal{U})$ *tiene la* ***propiedad de concentración de Lévy****, o que se* ***concentra****, si para cada familia de conjuntos de Borel* $A_\alpha \subset X$ *tal que*

$$\liminf_{\alpha} \mu_\alpha(A_\alpha) > 0$$

se tiene que para todo $V \in \mathcal{U}$*,*

$$\lim_{\alpha} \mu_\alpha \big(V[A_\alpha]\big) = 1.$$

Resulta que es suficiente que el límite inferior sea mayor a una cota positiva fija –por ejemplo, mayor o igual a 1/2:

Proposición 2.1.4. *Una familia* $\mathcal{X} = (X_n, d_n, \mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de espacios mm es una familia de Lévy si y sólo si para cada sucesión de conjuntos de Borel,* $A_n \subset X_n$*, tal que*

$$\liminf_{n\to\infty} \mu_n(A_n) \geq \frac{1}{2}$$

entonces para todo $\varepsilon > 0$ *se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n \big((A_n)_\varepsilon\big) = 1.$$

Demostración. La ida claramente es trivial. Para el regreso sea $A_n \subset X_n$ una sucesión de conjuntos de Borel tal que

$$\liminf_{n\to\infty} \mu_n(A_n) \geq r > 0.$$

Si $r \geq 1/2$, no hay más que hacer, así que supondremos que $r < 1/2$ y sin pérdida de generalidad podemos suponer que $1/2 > \mu(A_n) \geq r$ para toda n. Ahora, supongamos por el contrario que el enunciado fuera falso. Entonces existiría un $\varepsilon > 0$ tal que $\lim \mu_n \big((A_n)_\varepsilon\big) \neq 1$. Es decir, tendríamos que $\limsup \mu_n \big((A_n)_\varepsilon\big) \leq 1 - \delta$ para algún $\delta > 0$. Nótese que por la monotonicidad de la medida esto sigue siendo cierto para cualquier otro $\varepsilon' > 0$ más chico que ε, en particular si tomamos $\varepsilon' = \varepsilon/2$. Definimos entonces a $B_n := X_n \setminus (A_n)_{\varepsilon/2}$, de tal forma que $A_n \subset X_n \setminus (B_n)_{\varepsilon/2}$.

Ahora, si se cumpliera que $\liminf \mu_n(B_n) \geq 1/2$, por hipótesis se seguiría que

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n (B_n)_{\varepsilon/2} = 1.$$

Pero eso generaría la siguiente contradicción:

$$\begin{aligned} r &\leq \mu_n(A_n) \\ &\leq 1 - \mu_n\Big((B_n)_{\varepsilon/2}\Big) \to 0. \end{aligned}$$

Esto implica que $\liminf \mu_n(B_n) < 1/2$ y, tomando el complemento, podemos concluir que $\mu_n\Big((A_n)_{\varepsilon/2}\Big) > 1/2$ para una cantidad infinita de $n \in \mathbb{N}$. Una vez más supondremos que la desigualdad anterior se cumple para todos los conjuntos de la sucesión. Entonces por hipótesis, para cualquier $\eta > 0$ se cumple que $\mu_n\left((A_n)_{\varepsilon/2}\right)_\eta \to 1$.

Antes de proseguir, notamos el siguiente resultado general: para cualesquiera $r_1, r_2 > 0$ y cualquier subconjunto S de un espacio métrico,

$$(S_{r_1})_{r_2} \subset S_{r_1+r_2}.$$

Para ver esto, sea $\epsilon > 0$ dado y sea $x \in (S_{r_1})_{r_2}$ un punto arbitrario. Por definición, $d(x, S_{r_1}) \leq r_2$, por lo que existe $y \in S_{r_1}$ que cumple $d(x,y) < r_2 + \epsilon/2$. Para cada $y \in S_{r_1}$ existe $s_y \in S$ tal que $d(y, s_y) < r_1 + \epsilon/2$. Por la desigualdad del triángulo,

$$d\left(x, s_y\right) \leq d(x,y) + d\left(y, s_y\right) < r_1 + r_2 + \epsilon.$$

Eso es, dado cualquier punto $x \in (S_{r_1})_{r_2}$ y cualquier $\epsilon > 0$, podemos encontrar un punto $s \in S$ tal que $d(x,s) < r_1 + r_2 + \epsilon$. Concluimos que $x \in S_{r_1+r_2}$.

Dado que $\mu_n\left((A_n)_{\varepsilon/2}\right)_\eta \to 1$, si elegimos $\eta = \varepsilon/2$ y aplicamos el resultado anterior entonces existe N tal que para toda $n \geq N$,

$$\begin{aligned}\mu_n\left((A_n)_\varepsilon\right) &= \mu_n\left((A_n)_{\varepsilon/2+\varepsilon/2}\right)\\ &\geq \mu_n\left((A_n)_{\varepsilon/2}\right)_{\varepsilon/2}\\ &> 1 - \frac{\delta}{2}.\end{aligned}$$

Pero por hipótesis $\limsup \mu_n\left((A_n)_\varepsilon\right) \leq 1 - \delta$, lo que generaría una contradicción. Concluimos que no existe la ε inicial, demostrando la equivalencia que queríamos.

□

Si (X, d, μ) es un espacio mm, por el resultado previo tiene sentido definir la **función de concentración de medida** de X, $\alpha_X : [0,\infty) \to [0,\infty)$ como

$$\alpha_X(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } \varepsilon = 0 \\ 1 - \inf\{\mu(B_\varepsilon) \mid B \subset X, \mu(B) \geq \frac{1}{2}\} & \text{si } \varepsilon > 0\ . \end{cases}$$

Así obtenemos la siguiente caracterización de familias de Lévy.

Proposición 2.1.5. *Una familia $\mathcal{X} = (X_n, d_n, \mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de espacios mm es una familia de Lévy si y sólo si α_{X_n} converge puntualmente a cero sobre $(0,\infty)$.*

Utilizaremos esta función para subclasificar las familias de Lévy: diremos que una familia de Lévy $\mathcal{X} = (X_n, d_n, \mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es **normal** si existen constantes $C_1, C_2 > 0$ tales que

$$\alpha_{X_n}(\varepsilon) \leq C_1 e^{-C_2\varepsilon^2 n}.$$

Ejemplo 2.1.1. La familia de esferas unitarias (S^n, d_n, μ_n) con distancia geodésica y medida de Lebesgue normalizada son una familia de Lévy normal. Ver [15, Teorema 2.3].

El ejemplo anterior fue descubierto por Paul Lévy (de donde sale el nombre de familias de Lévy) y en 1971 Vitali Milman (hijo de David Milman, medio epónimo del famoso teorema de Krein-Milman) utilizó este resultado para dar una nueva demostración del teorema de Dvoretzky.

Resulta que se conoce una cota útil para la función de concentración de productos de espacios de diámetro finito:

Ejemplo 2.1.2. Sean (X_i, d_i, μ_i) para $i = 1, 2, \ldots, n$ espacios mm, cada uno con diámetro finito a_i. Al espacio producto $X = \prod_{i=1}^n X_i$ le damos la medida producto $\bigotimes_{i=1}^n \mu_i$ y la **distancia de Hamming**, definida como la suma de las distancias de las coordenadas:

$$d(x, y) := \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i).$$

Entonces la función de concentración satisface la siguente desigualdad:

$$\alpha_X(\varepsilon) \leq 2e^{-\varepsilon^2/8\sum_{i=1}^n a_i^2}.$$

Una demostración de lo anterior se puede encontrar en [15, Teorema 4.2], donde se utilizan métodos de martingalas.

Resulta que el fenómeno de concentración de medida se preserva bajo pushforwards (si $f : X \to Y$ es una función y X tiene una medida μ, el **pushforward** de μ por f, denotado por $f_*(\mu)$, es la medida sobre Y definida como $f_*(\mu)(A) := \mu\left(f^{-1}(A)\right)$ para todo $A \subset Y$ cuya preimagen bajo f sea μ-medible):

Lema 2.1.6. *Sea $f : (X, \mathcal{U}_X) \to (Y, \mathcal{U}_Y)$ una función uniformemente continua entre dos espacios uniformes, y sea (μ_α) una red de medidas de Borel sobre X. Si (μ_α) se concentra, entonces la red de medidas en Y obtenida con el pushforward de f, $\left(f_*(\mu_\alpha)\right)$, también lo hace.*

Demostración. Sea $B_\alpha \subset Y$ una familia de conjuntos tal que

$$\liminf_\alpha \left(f_*(\mu_\alpha)\right)(B_\alpha) = \liminf_\alpha \mu_\alpha \Big(f^{-1}(B_\alpha)\Big) > 0.$$

Tenemos que mostrar que para cualquier $U \in \mathcal{U}_Y$ se cumple que

$$\lim_\alpha \mu_\alpha \Big(f^{-1}\left(U[B_\alpha]\right)\Big) = 1.$$

Ahora, como f es uniformemente continua existe un entorno $V \in \mathcal{U}_X$ tal que $(f \times f)(V) \subset U$. Por hipótesis tenemos que

$$\lim_\alpha \mu_\alpha \left(V\left[f^{-1}(B_\alpha)\right]\right) = 1.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} V\left[f^{-1}(B_\alpha)\right] &= \bigcup_{a \in f^{-1}(B_\alpha)} \{x \in X \mid (a, x) \in V\} \\ &\subset \bigcup_{a \in f^{-1}(B_\alpha)} \Big\{x \in X \,\Big|\, \big(f(a), f(x)\big) \in U\Big\} \\ &\subset \bigcup_{b \in B_\alpha} \Big\{x \in X \,\Big|\, \big(b, f(x)\big) \in U\Big\} \\ &= \big\{x \in X \,|\, f(x) \in U[B_\alpha]\big\} \\ &= f^{-1}\left(U[B_\alpha]\right). \end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_\alpha \mu_\alpha \left(V\left[f^{-1}(B_\alpha)\right]\right) \\ &\leq \lim_\alpha \mu_\alpha \Big(f^{-1}\left(U[B_\alpha]\right)\Big) \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

La última desigualdad se da porque las μ_α son medidas probabilísticas. Concluimos con la igualdad deseada.

$\square$

2.2. Grupos de Lévy

Primero necesitaremos algunas nociones de medida.

Definición 2.2.1. *Sea X un espacio topológico con una medida de Borel μ. Diremos que μ es una **medida de Radon** si satisface las siguientes tres condiciones:*

- *Todo subconjunto compacto de X tiene μ-medida finita.*
- *μ es **exteriormente regular** sobre conjuntos de Borel. Es decir que para todo subconjunto de Borel E tenemos que*

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) \mid E \subset U, U \, abierto\}.$$

- *μ es **interiormente regular** sobre abiertos. Esto es, para todo U abierto tenemos que*

$$\mu(U) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset U, K \, compacto\}.$$

La definición anterior simplifica la siguiente.

Definición 2.2.2. *Sea G un grupo topológico localmente compacto. Una **medida de Haar izquierda** μ sobre G es una medida de Radon (no idénticamente cero) invariante bajo traslaciones izquierdas. Es decir, para todo subconjunto de Borel $E \subset G$ y todo elemento $g \in G$ se cumple que $\mu(gE) = \mu(E)$. Análogamente, una medida de Haar **derecha** es invariante bajo traslaciones derechas.*

La lectora atenta habrá notado que la compacidad local no fue requerida en la definición anterior. Su inclusión en la definición se debe al siguiente resultado conocido:

Teorema 2.2.3. *Todo grupo localmente compacto admite una medida de Haar izquierda. Además, ésta es única salvo multiplicación por una constante positiva.*

La demostración del teorema anterior se puede encontrar en [6] (la existencia es el Teorema 2.10 y la unicidad el Teorema 2.20). Por lo que para cualquier grupo compacto G podemos hablar de su medida de Haar normalizada (eso es, tal que $\mu(G) = 1$, pues los grupos compactos tienen medida de Haar finita), ya que ésta existe y es única. Con esto ya podemos hablar de grupos de Lévy.

Definición 2.2.4. *Un grupo topológico G es un **grupo de Lévy** si existe una familia (G_α) de subgrupos compactos de G, dirigidos por inclusión, tal que su unión es densa en G, y tal que las medidas de Haar normalizadas en G_α se concentran con respecto a la estructura uniforme izquierda (o derecha) de G.*

Ejemplo 2.2.1. Sea G un grupo métrico compacto, con d una métrica invariante sobre G. Entonces el grupo $L^1(I; G)$ que consiste de las clases de equivalencia de funciones de Borel $I \to G$, equipado con la métrica d_1 definida por

$$d_1(f, g) := \int_0^1 d\left(f(x), g(x)\right) \mathrm{d}x$$

es un grupo de Lévy.

La demostración se puede consultar en [7, Teorema 1.3].

Antes de proseguir a la amenizabilidad extrema, primero introduciremos el fenómeno de Ramsey-Milman-Dvoretzky. Para esto necesitaremos definir la oscilación estable sobre conjuntos finitos, ya que es lo que caracteriza al fenómeno RDM.

2.3. Oscilación Estable Sobre Conjuntos Finitos

Definición 2.3.1. *Sea G un grupo que actúa sobre un conjunto X y sea $(Y, \mathcal{U}_Y)$ un espacio uniforme. Diremos que una función $f : X \to Y$ es **oscilatoriamente estable sobre subconjuntos finitos** (abreviado como **OEF**) si para cualquier subconjunto finito $F \subset X$ y cualquier entorno $V \in \mathcal{U}_Y$ existe un elemento $g \in G$ tal que*

$$f(gF) \times f(gF) \subset V.$$

Si X es un conjunto, (Y, d_Y) un espacio métrico con la uniformidad compatible, y $f : X \to Y$ cualquier función, definimos la **oscilación** de f sobre un subconjunto $A \subset X$ como

$$\operatorname{osc}(f \mid A) := \sup \Big\{ d_Y \big(f(x), f(y) \big) \mid x, y \in A \Big\}.$$

La utilidad de esta definición se ve en la siguiente proposición.

Proposición 2.3.2. *Sea G un grupo actuando sobre un conjunto X y (Y, d_Y) un espacio métrico con la uniformidad compatible. Entonces una función $f : X \to Y$ es OEF si y sólo si para todo subconjunto finito $F \subset X$ y todo $\varepsilon > 0$ existe una transformación $g \in G$ tal que*

$$\operatorname{osc}(f \mid gF) < \varepsilon.$$

Dicho informalmente, f es OEF si es casi constante sobre cualquier subconjunto finito adecuadamente trasladado, lo que liga al fenómeno RDM y la concentración de medida.

Ejemplo 2.3.1. Si tomamos $G = \mathbb{R}$ actuando sobre sí mismo por traslaciones, tenemos que la función $f(x) = e^{-x}$ es OEF.

2.4. El Fenómeno Ramsey-Dvoretzky-Milman

El fenómeno que le da nombre a esta sección dice a grandes rasgos que toda función suficientemente bien portada en estructuras suficientemente grandes se comporta casi como una constante. Esto significa que, bajo ciertas condiciones relativamente laxas, en lugar de que espacios más grandes den lugar a fenoménos más caóticos, emerge un cierto orden inesperado.

Definición 2.4.1. *Sea G un grupo que actúa sobre un espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$ mediante isomorfismos uniformes. Entonces a la pareja (G,X) le llamamos un G-**espacio uniforme**.*

Definición 2.4.2. *Decimos que un G-espacio uniforme X tiene la propiedad de **Ramsey-Dvoretzky-Milman** (abreviado como $X \in RDM$) si toda función $f : X \to \mathbb{R}$ acotada y uniformemente continua es OEF.*

Por la Observación 1.2.2, la definición anterior es equivalente a lo siguiente.

Observación 2.4.3. *Un G-espacio uniforme X tiene la propiedad RDM si y sólo si para cualquier $n \in \mathbb{N}$ toda función $f : X \to \mathbb{R}^n$ acotada y uniformemente continua es OEF.*

El caso más común que trataremos es en el que X sea un espacio métrico y G un grupo que actúe por isometrías.

Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme. Denotamos por $\mathcal{U}^*$ a la uniformidad más chica que preserva la continuidad uniforme de toda función $f : X \to \mathbb{R}^n$ acotada y uniformemente continua. Le llamamos la **réplica totalmente acotada de** $\mathcal{U}$. No es difícil ver que los entornos de la diagonal de la forma

$$U(f,\varepsilon) := \Big\{(x,y) \in X \times X \,\Big|\, \big\|f(x) - f(y)\big\| < \varepsilon\Big\}$$

donde $f : X \to \mathbb{R}^n$ es uniformemente continua y acotada, n es cualquier natural, y $\varepsilon > 0$, forman una base para $\mathcal{U}^*$. Esta nueva estructura uniforme nos da otra clasificación del fenómeno RDM inmediata.

Proposición 2.4.4. *Un G-espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$ tiene la propiedad RDM si y sólo si para cualquier subconjunto finito $F \subset X$ y cualquier entorno $V \in \mathcal{U}^*$, existe una transformación $g \in G$ tal que gF sea V-chico. Es decir, tal que $gF \times gF \subset V$.*

Demostración. Supongamos que $X \in RDM$. Sea $V \in \mathcal{U}^*$ cualquier entorno y $F \subset X$ finito. Como los conjuntos de arriba son base de $\mathcal{U}^*$, existe un entorno de la forma $U(f,\varepsilon)$ con $f : X \to \mathbb{R}^n$ uniformemente continua y acotada y un $\varepsilon > 0$ tal que $U(f,\varepsilon) \subset V$. Por hipótesis existe una transformación $g \in G$ tal que $\big\|f(x) - f(y)\big\| < \varepsilon$ para toda $x, y \in gF$. Pero por la definición de los $U(f,\varepsilon)$, tenemos que $gF \times gF \subset U(f,\varepsilon) \subset V$, como queríamos.

Ahora supongamos que se cumple la propiedad del enunciado. Sean $f : X \to \mathbb{R}^n$ uniformemente continua y acotada y $F \subset X$ finito. Dado cualquier $\varepsilon > 0$, formamos el entorno de la diagonal $U(f,\varepsilon) \in \mathcal{U}^*$. Por hipótesis, existe $g \in G$ tal que $gF \times gF \subset U(f,\varepsilon)$. Pero esto ocurre exactamente cuando $\operatorname{osc}\big(f \mid gF\big) < \varepsilon$. $\square$

Hay otra base para la réplica uniformemente acotada que nos servirá para dar otra equivalencia del fenómeno RMD.

Proposición 2.4.5. *Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme. Una base de la réplica $\mathcal{U}^*$ está dada por cubiertas de la forma $\bigcup_{A\in\gamma} V[A]\times V[A]$, donde γ es cualquier cubierta finita de X y $V\in\mathcal{U}$.*

Demostración. Lo primero es verificar que los conjuntos de la forma

$$\bigcup_{A\in\gamma} V[A]\times V[A]$$

pertenecen a $\mathcal{U}^*$. Sean, entonces, γ y V dados como arriba. Elegimos una seudométrica uniformemente continua y acotada d sobre X tal que $d(x,y)<1$ implique que $(x,y)\in V$ ([4, Teorema 8.1.11] nos asegura su existencia). Para cada $A\in\gamma$ denotemos por $d_A : X\to\mathbb{R}$ a la distancia de un punto al conjunto A. Nótese que es una función uniformemente continua y acotada. Construimos una función $f : X\to\mathbb{R}^{|\gamma|}$ donde la A-ésima coordenada está dada por la función d_A. Al ser f uniformemente continua, vemos que el conjunto $\{(x,y)\in X\times X \mid \left\|f(x)-f(y)\right\|<1\}$ es un elemento de $\mathcal{U}^*$ y está contenido en $\bigcup_{A\in\gamma} V[A]\times V[A]$ (si usamos la norma del supremo se ve inmediatamente). Concluimos que este último conjunto es miembro de $\mathcal{U}^*$, así que tiene sentido tratar de comprobar que sirve de base.

Para demostrar que es base, sea $W\in\mathcal{U}^*$ arbitrario. Existe un entorno de la forma $U(f,\varepsilon)$ con $f : X\to\mathbb{R}^n$ uniformemente continua y acotada tal que $U(f,\varepsilon)\subset W$. Como $f(X)\subset\mathbb{R}^n$ está acotada, podemos dividirlo en una partición finita compuesta de segmentos con diámetro menor o igual a $\varepsilon/3$. Sea γ la colección de las preimágenes bajo f de cada uno de esos segmentos. Si $V := U(f,\varepsilon/3)\in\mathcal{U}^*\subset\mathcal{U}$, entonces tenemos que $\bigcup_{A\in\gamma} V[A]\times V[A]\subset W$. Para ver esto, si $(x,y)\in V[A]\times V[A]$ para algún $A\in\gamma$, existen $a_1,a_2\in A$ tales que $\left\|f(x)-f(a_1)\right\|<\varepsilon/3$ y $\left\|f(y)-f(a_2)\right\|<\varepsilon/3$. Por la definición de la partición, tenemos que $\left\|f(a_2)-f(a_1)\right\|\le\varepsilon/3$. Juntando las desigualdades obtenemos que $(x,y)\in U(f,\varepsilon)\subset W$. Concluimos que en efecto es base. $\square$

Un corolario inmediato nos da la siguiente equivalencia.

Proposición 2.4.6. *Un G-espacio uniforme X tiene la propiedad RDM si y sólo si para cualquier subconjunto finito $F\subset X$, cualquier cubierta finita γ de X, y cualquier entorno $V\in\mathcal{U}$ existe una transformación $g\in G$ tal que $gF\times gF\subset V[A]$ para algún $A\in\gamma$.*

El siguiente teorema nos provee un ejemplo de un espacio que tiene la propiedad RDM. La demostración de este ejemplo nos permitirá, *mutatis mutandis*, demostrar que $\mathrm{Iso}(\mathbb{U})$ también tiene la propiedad RDM.

Teorema 2.4.7. *El $U(\ell_2)$-espacio S^∞ (la esfera unitaria en ℓ_2) tiene la propiedad de RDM.*

Demostración. Demostraremos que el espacio cumple la propiedad de la proposición anterior. Así que sean $F\subset S^\infty$ finito, γ una cubierta finita de S^∞, y $\varepsilon>0$. Denotaremos $n:=|F|$ y $m:=|\gamma|$. Elegimos $N\in\mathbb{N}$ suficientemente grande como para que

- $N\ge n$.

- Si $A \subset S^N$ cumple que $\mu_N(A) \geq 1/m$, entonces se tiene que $\mu_N(A_\varepsilon) > 1 - 1/n$.

El segundo inciso se da por el Ejemplo 2.1.1, pues (S^n, d_n, μ_n) es una familia de Lévy.

Entonces elegimos una N-esfera, $S^N \subset S^\infty$ tal que $F \subset S^N$ (se puede porque $N \geq n = |F|$). Recordemos que el grupo de isometrías de S^N es isomorfo al grupo unitario $U(N)$. Además, podemos encajar $U(N)$ en el grupo unitario para todo el espacio, $U(\ell_2)$, de la siguiente forma: elegimos una base ortonormal $\{v_1, v_2, v_3, \dots\}$ de ℓ_2 de tal forma que la esfera S^N que elegimos sea generada por los primeros $N+1$ elementos de la base. Entonces el encaje natural es

$$\begin{aligned} U(N) &\hookrightarrow U(\ell_2) \\ u &\mapsto \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & \mathrm{Id} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Equipando a $U(N)$ con la topología compacto-abierta con respecto a su acción sobre S^N, obtenemos que $U(N)$ es compacto y actúa continuamente por isometrías sobre S^N.

Ahora, por el principio del palomar, existe un elemento $A \in \gamma$ para el que $\mu_N(A \cap S^N) \geq 1/m$. Por la elección de N, tenemos que

$$\mu_N\left(A_\varepsilon \cap S^N\right) > 1 - \frac{1}{n}.$$

Para cada $\xi \in F$ definimos su función evaluación sobre $U(N)$:

$$\begin{aligned} \varphi_\xi : U(N) &\to S^N \\ u &\mapsto u \cdot \xi. \end{aligned}$$

Si ν es la medida normalizada de Haar sobre $U(N)$, obtenemos una medida probabilística de Borel sobre S^N invariante bajo rotaciones al tomar el pushforward $\left(\varphi_\xi\right)_* \nu$. La unicidad de la medida de Lebesgue normalizada nos dice que coinciden las dos medidas: $\left(\varphi_\xi\right)_* \nu = \mu_N$. Por lo que

$$\nu\left(\varphi_\xi^{-1}\left(A_\varepsilon\right)\right) = \mu_N(A_\varepsilon) > 1 - \frac{1}{n}.$$

Por consiguiente,

$$\nu\left(U(N) \setminus \varphi_\xi^{-1}\left(A_\varepsilon\right)\right) < 1/n.$$

Así,

$$
\begin{aligned}
\nu\left(\bigcup_{\xi\in F} U(N)\setminus\varphi_\xi^{-1}(A_\varepsilon)\right) &\leq \sum_{\xi\in F}\nu\left(U(N)\setminus\varphi_\xi^{-1}(A_\varepsilon)\right)\\
&< \frac{|F|}{n}\\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Concluimos que

$$\bigcup_{\xi\in F} U(N)\setminus\varphi_\xi^{-1}(A_\varepsilon)\neq U(N).$$

Por las leyes de De Morgan esto equivale a decir que

$$\bigcap_{\xi\in F}\varphi_\xi^{-1}(A_\varepsilon)\neq\emptyset.$$

Además, para cualquier transformación $u\in\bigcap_{\xi\in F}\varphi_\xi^{-1}(A_\varepsilon)$ tenemos que $uF\subset A_\varepsilon$. Como $u\in U(\ell_2)$ por el encaje, tenemos el resultado deseado. □

Repasando la demostración anterior, vemos que queda demostrado un resultado más general.

Teorema 2.4.8. *Sea G un grupo topológico que actúa por isometrías sobre un espacio métrico (X,d). Supongamos que existe una familia (G_α) de subgrupos compactos de G dirigidos por inclusión y un punto $\xi\in X$ tales que*

a) La unión de las órbitas $G_\alpha\cdot\xi$ es densa en X.

b) Las órbitas $G_\alpha\cdot\xi$ forman una familia de Lévy con respecto a las restricciones de la métrica d y las medidas de Haar en cada G_α.

Entonces el G-espacio X tiene la propiedad de RDM.

Al final del trabajo utilizaremos este teorema para demostrar que el espacio de Urysohn tiene la propiedad de RDM (Teorema 5.2.9).

2.5. Grupos Extremadamente Amenizables

Una de las propiedades más atractivas de los grupos de Lévy es la amenizabilidad extrema. Aunque ya la mencionamos antes, la repetimos aquí por claridad.

Definición 2.5.1. *Un grupo topológico G es* ***extremadamente amenizable*** *si toda acción continua de G sobre un espacio compacto tiene un punto fijo. Alternativamente, decimos que G tiene la* ***propiedad del punto fijo sobre compactos****.*

Los artículos por Giordano y Pestov, [8] y [9], y el de Kechris, Pestov y Todorcevic, [14], recopilan varios ejemplos de grupos extremadamente amenizables.

Observación 2.5.2. *Un resultado de W. Veech ([24, Teorema 2.2.1]) nos dice que ningún grupo extremadamente amenizable –en particular, ningún grupo de Lévy– puede ser localmente compacto.*

Un resultado que está fuera del enfoque de esta tesis (pero que está rete bonito) relaciona el fenómeno RDM y la amenizabilidad extrema ([19, Teorema 5.7]).

Teorema 2.5.3. *Un grupo topológico G es extremadamente amenizable si y sólo si G con su estructura uniforme izquierda tiene la propiedad de RDM.*

El siguiente teorema fue originalmente descubierto por Gromov y Milman en [10] y es uno de los resultados principales del presente trabajo:

Teorema 2.5.4. *Todo grupo de Lévy es extremadamente amenizable.*

Demostración. Sea X un G-espacio compacto arbitrario. Tenemos que encontrar un punto $p \in X$ tal que $g \cdot p = p$ para todo $g \in G$.

Sea (G_α, μ_α) la familia de Lévy de subgrupos compactos y sus medidas de Haar que aproximan a G. Elegimos un punto arbitrario $x_0 \in X$ para definir la función $\varphi : G \to X$ dada por $\varphi(g) = g \cdot x_0$. Recordando el Lema 2.1.6 y el Lema 1.2.17, vemos que la red de medidas $(\nu_\alpha) = \big(\varphi_*(\mu_\alpha)\big)$ se concentra. Además, al ser el pushforward de medidas de probabilidad, las ν_α son medidas de probabilidad sobre X.

Ahora, si $P(X)$ es el espacio de medidas de probabilidad sobre X y le damos la topología ω^*, resulta ser un espacio compacto y por consiguiente $(\nu_\alpha) \subset P(X)$ tiene un punto de acumulación, $\nu \in P(X)$. Nótese que ν es invariante por la izquierda, ya que dado $\varepsilon > 0$, como ν es punto de acumulación existe un α_0 tal que $|\nu(E) - \nu_{\alpha_0}| < \varepsilon/2$ para todo conjunto de Borel $E \subset X$. Por la invariancia izquierda de los ν_α, tenemos que para todo $g \in G$, $\nu_{\alpha_0}(gE) = \nu_{\alpha_0}(E)$. La desigualdad del triángulo nos da lo siguiente:

$$\begin{aligned} \big|\nu(gE) - \nu(E)\big| &\leq \big|\nu(gE) - \nu_{\alpha_0}(gE)\big| + \big|\nu_{\alpha_0}(E) - \nu(E)\big| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Así concluimos que $\nu(gE) = \nu(E)$ para cualquier conjunto de Borel $E \subset X$ y toda transformación $g \in G$.

Ahora, sea $A \subset X$ cualquier conjunto tal que $\nu(A) > 0$. Entonces cualquier vecindad U de A tiene medida completa: $\nu(U) = 1$. Pues para cualquier $\delta > 0$ existe α_1 tal que

$$\nu(A) - \frac{\delta}{2} < \nu_\alpha(A) = \nu_\alpha(A_\alpha)$$

para toda $\alpha \geq \alpha_1$, donde $A_\alpha := X_\alpha \cap A$, y X_α es la G_α-órbita de x_0. En particular, si tomamos $\delta = \nu(A)$, obtenemos que $\nu_\alpha(A) > \delta/2$ para toda $\alpha \geq \alpha_1$. Por lo que $\liminf_\alpha \nu_\alpha(A_\alpha) > 0$. Como (ν_α) se concentra, tenemos que $\lim_\alpha \nu_\alpha(U) = 1$, y como ν es punto de acumulación, $\nu(U) = 1$. La única medida que se comporta así es la de Dirac. Por lo que el soporte de ν es un único punto. Además, la invariancia izquierda de ν nos dice que ese punto es el punto fijo que buscábamos. $\square$

Parte II

El Espacio de Urysohn y sus Isometrías

Capítulo 3

El Espacio Universal de Urysohn

En este capítulo daremos un breve recordatorio de la construcción del espacio universal de Urysohn y demostraremos algunas propiedades que nos serán de utilidad más adelante. Dado que nuestra prioridad es estudiar el grupo de isometrías de este espacio, obviaremos algunos resultados de la construcción.

Definición 3.0.1. *El **espacio métrico universal de Urysohn,** $\mathbb{U}$, es un espacio métrico **polaco** (esto es, completamente metrizable y separable) que satisface otras dos propiedades:*

- *Es **ultrahomogéneo** (u ω-**homogéneo**); es decir, toda isometría entre cualesquiera dos subespacios métricos finitos de $\mathbb{U}$ puede ser extendida a una isometría sobre todo $\mathbb{U}$.*
- *Es **universal** entre los espacios métricos separables; en otras palabras, todo espacio métrico separable se encaja isométricamente en $\mathbb{U}$.*

Podemos hablar de "el" espacio de Urysohn dado un resultado que establece su existencia y unicidad (ver el Teorema 3.2.12). Diremos que un espacio es **de Urysohn** si es un espacio métrico polaco que cumple ambas propiedades anteriores –no se confunda con la propiedad de separación en espacios topológicos. La segunda propiedad por sí misma no es tan extraordinaria: desde 1910, Fréchet demostró que el espacio ℓ_∞ era universal entre los espacios métricos separables (ver [5]). Aunque Fréchet claramente no lo escribió en estos términos (en el artículo estaba interesado en su concepto de dimensión), esto fue de los primeros pasos en el estudio de espacios universales. Uno de los ejemplos más famosos es el del teorema de Banach-Mazur, que establece la universalidad de $C[0,1]$, el espacio de funciones reales continuas sobre el intervalo, entre los espacios de Banach. No obstante, uno de los problemas del ejemplo de Fréchet –Hausdorff se quejó de esto en sus apuntes de 1924, aunque sin mencionar a Fréchet– es que ℓ_∞ en sí no es separable. Urysohn y Pavel Alexandroff le habían enviado una carta a Hausdorff el 3 de agosto de 1924 informándole que Urysohn había logrado la construcción de un espacio completo y separable que era universal entre todos los espacios separables. Hausdorff intentó construir dicho espacio por sí solo, aunque nunca publicó su construcción. Ya desde entonces tanto Urysohn como Hausdorff habían notado y demostrado (aunque un poco incompletamente) la ultrahomogeneidad del espacio. También hay ejemplos de espacios ultrahomogéneos conocidos –$\mathbb{R}^n$, por ejemplo. Lo que vuelve al espacio de Urysohn verdaderamente interesante y único (estricta y poéticamente hablando) es la combinación de ambas propiedades. El 11 de agosto de 1924 Hausdorff envió una carta a Urysohn y Alexandroff con un esquema de su propia construcción y pidiendo detalles de la construcción de Urysohn. Nunca recibió respuesta: Urysohn murió ahogado en la costa de Bretaña, en Francia, seis días después. Más de medio siglo después de la muerte de Urysohn, Katětov presentó una construcción más general del espacio en el Simposio Topológico en Praga de 1968, usando lo que ahora conocemos como funciones de Katětov. La construcción que utilizaremos en este trabajo está basada en ésa. Para aquellos interesados en las otras construcciones (en especial la de Hausdorff) pueden consultar el trabajo de Hušek [13].

3.1. Funciones de Katětov

Antes de construir el espacio de Urysohn empezaremos por analizar las funciones de Katětov –al fin y al cabo, no es sorprendente que unas funciones denominadas "de Katětov" figuren prominentemente en la construcción del espacio de Urysohn que Katětov propuso. Empezamos con su definición.

Definición 3.1.1. *Sea (X, d) un espacio métrico. Una función $f : X \to \mathbb{R}$ es* ***de Katětov*** *si satisface las siguientes desigualdades para cualquier par de puntos $x, y \in X$:*

$$|f(x) - f(y)| \leq d(x, y) \leq f(x) + f(y).$$

Ejemplo 3.1.1. Sea (X, d) un espacio métrico y $x_0 \in X$ un punto fijo. Entonces la función $d_{x_0} : X \to \mathbb{R}$ dada por $d_{x_0}(x) := d(x, x_0)$ es de Katětov.

Denotaremos por $E(X)$ al conjunto de funciones de Katětov sobre X. La "E" viene de "extensión" por la siguiente razón: podemos identificar las funciones de Katětov con las extensiones por un punto del espacio X. Esto es, $f : X \to \mathbb{R}$ es de Katětov si y sólo si el espacio métrico $X \cup \{z\}$ con la distancia al punto z definida por $d(x, z) = f(x)$ es una extensión por un punto del espacio métrico X.

Como nota histórica, la identificación geométrica anterior y las desigualdades en la definición ya eran conocidas antes del trabajo de Katětov (de hecho, la construcción de Urysohn depende fuertemente del uso de dichas desigualdades). Lo innovador de Katětov fue definir una distancia entre dichas funciones: para cualesquiera dos funciones de Katětov,

$f, g \in E(X)$, definimos su distancia como

$$\widehat{d}(f,g) := \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|.$$

La primera observación (que no demostraremos) es que

Observación 3.1.2. *El espacio métrico* $\left(E(X), \widehat{d}\right)$ *es completo.*

Otra observación es que $E(X)$ contiene una copia isométrica del espacio original:

Proposición 3.1.3. *El encaje de Kuratowski,* $j : X \to E(X)$ *definido como* $j(x) = d_x$*, es un encaje isométrico.*

Como, a grandes rasgos, el espacio de Urysohn debe ser suficientemente grande como para contener todos los espacios métricos (separables), este resultado suena prometedor: podemos repetir el proceso una y otra vez, cada vez agrandando el espacio. Idealmente, el proceso recursivo podría darnos algo suficientemente grande y además sería completo. La intuición resultará casi correcta salvo por un detalle: si X es infinito, $E(X)$ no necesariamente resulta separable.

Ejemplo 3.1.2. Si a $X = \mathbb{N}$ le damos la métrica discreta, $E(X)$ no es separable.

Otro contraejemplo más famoso y general es el siguiente, cuya demostración se puede encontrar en [16].

Ejemplo 3.1.3. Si X es polaco y no tiene la propiedad de Heine-Borel, entonces $E(X)$ no es separable.

Para corregir esto nos fijaremos en un subespacio de $E(X)$ que sí mantendrá la separabilidad. Primero necesitaremos un par de conceptos.

Definición 3.1.4. *Sea* X *un espacio métrico,* $S \subset X$ *cualquier subconjunto, y* $f \in E(S)$ *una función de Katětov definida sobre* S*. Entonces definimos a su* ***extensión de Katětov*** $\widehat{f} : X \to \mathbb{R}$ *como*

$$\widehat{f}(x) := \inf_{s \in S} \{f(s) + d(x,s)\}.$$

Observación 3.1.5. *Reteniendo las definiciones de arriba, resulta que la extensión de Katětov es otra función de Katětov pero sobre todo el espacio:* $\widehat{f} \in E(X)$*.*

Definición 3.1.6. *Sea* $f \in E(X)$ *una función de Katětov, y* $S \subset X$*. Decimos que* S *es* ***soporte*** *de* f *si para todo* $x \in X$ *tenemos que*

$$f(x) = \inf_{s \in S} \{f(s) + d(x,s)\}.$$

Es decir, un subconjunto $S \subset X$ es soporte de una función de Katětov $f \in E(X)$ si f es la extensión de Katětov de su restricción a S: $f = \widehat{f\mid_S}$. Es claro que X siempre es soporte de cualquier función de Katětov y que todo supraconjunto de un soporte sigue siendo soporte. Además, si $f, g \in E(X)$ tienen un soporte común $S \subset X$ (esto es, S es soporte de f y de g), podemos calcular su distancia fijándonos sólo en el soporte:

$$\widehat{d}(f,g) = \sup_{s\in S} |f(s) - g(s)|.$$

Ya tenemos las herramientas para definir el subespacio de $E(X)$ que nos será útil. Definimos

$$E(X,\omega) := \{f \in E(X) \mid f \text{ tiene soporte finito}\}.$$

Nótese que $\{x_0\}$ es soporte de d_{x_0}, por lo que el encaje de Kuratowski nos permite encajar a X isométricamente no sólo en $E(X)$, sino en $E(X,\omega)$.

Además, la extensión de Katětov como mapeo, $f \mapsto \widehat{f}$, sirve como encaje isométrico entre espacios de funciones de Katětov:

Observación 3.1.7. *Sea $Y \subset X$. Entonces la extensión de Katětov $f \mapsto \widehat{f}$ es un encaje isométrico $E(Y) \hookrightarrow E(X)$. Más aún, si $S \subset Y$ es soporte de f, sigue siendo soporte de la extensión $\widehat{f}$. Por lo que también es encaje isométrico entre las funciones de Katětov con soporte finito, $E(Y,\omega) \hookrightarrow E(X,\omega)$.*

Demostración. Esto se sigue de la observación que nota que la distancia entre dos funciones de Katětov puede ser calculada tomando el supremo sobre un soporte común. Primero veamos que si $S \subset Y$ es soporte de $f \in E(Y)$, entonces también es soporte de $\widehat{f} \in E(X)$. Por definición del soporte,

$$f(y) = \inf_{s\in S}\{f(s) + d(s,y)\}$$

para toda $y \in Y$. Por lo que para todo $x \in X$,

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(x) &:= \inf_{y\in Y}\{f(y) + d(x,y)\} \\
&= \inf_{y\in Y}\{\inf_{s\in S}\{f(s) + d(s,y)\} + d(x,y)\} \\
&= \inf_{y\in Y}\{\inf_{s\in S}\{f(s) + d(s,y) + d(x,y)\}\} \\
&\geq \inf_{y\in Y}\{\inf_{s\in S}\{f(s) + d(s,x)\}\} \\
&= \inf_{s\in S}\{f(s) + d(s,x)\}.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$
\begin{aligned}
\inf_{s\in S}\{f(s)+d(s,x)\} &= \inf_{s\in S}\{\widehat{f}(s)+d(s,x)\}\\
&\leq \widehat{f}(x).
\end{aligned}
$$

La última desigualdad se da porque $S \subset Y$. Combinando ambas desigualdades concluimos que S es soporte de $\widehat{f}$. En particular, si $f, g \in E(Y)$, Y es soporte tanto de $\widehat{f} \in E(X)$ como de $\widehat{g}$, por lo que

$$
\begin{aligned}
\widehat{d}\left(\widehat{f},\widehat{g}\right) &= \sup_{x\in X}|\widehat{f}(x)-\widehat{g}(x)|\\
&= \sup_{y\in Y}|\widehat{f}(y)-\widehat{g}(y)|\\
&= \sup_{y\in Y}|f(y)-g(y)|\\
&= \widehat{d}(f,g).
\end{aligned}
$$

Así que $f \mapsto \widehat{f}$ en efecto es un encaje isométrico.

□

La importancia de este subespacio y los encajes isométricos anteriores se verá más claramente con el siguiente resultado:

Proposición 3.1.8. *Sea X un espacio métrico separable. Entonces $E(X,\omega)$ también es separable.*

Demostración. Por hipótesis tenemos que existe un subconjunto numerable y denso $D \subset X$. Definimos

$$\mathcal{F} := \{A \subset D \mid |A| < \infty\}.$$

Entonces $\mathcal{F}$ es una familia numerable de subconjuntos. Para cada $A \in \mathcal{F}$ tenemos que $E(A)$, al ser un subespacio de $\mathbb{R}^{|A|}$ con la norma del supremo, es separable. Elegimos un subconjunto denso y numerable $D_A \subset E(A)$ para cada $A \in \mathcal{F}$ y definimos

$$D'_A := \{\widehat{f} \in E(X,\omega) \mid f \in D_A\}.$$

Finalmente, sea

$$\mathcal{D} := \bigcup_{A\in\mathcal{F}} D'_A.$$

Al ser la unión numerable de conjuntos numerables, $\mathcal{D}$ en sí es un subconjunto numerable de $E(X,\omega)$. Afirmamos que además es denso.

Sea $f \in E(X,\omega)$ cualquier función y $\varepsilon > 0$. Sea $B = \{b_1,\ldots,b_n\}$ el soporte finito de f. Para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$ existe un $a_i \in D$ tal que $d(a_i,b_i) < \varepsilon/3$ por la densidad de D.

Definimos $A := \{a_i \mid 1 \leq i \leq n\} \in \mathcal{F}$. Nótese que $f\mid_A \in E(A)$, por lo que, como D_A es denso en $E(A)$, existe una función $g \in D_A$ tal que

$$\widehat{d}\big(f\mid_A, g\big) < \varepsilon/3.$$

La extensión de Katětov de g a todo X, $\widehat{g}$, está en $D'_A \subset \mathcal{D}$ por definición. Afirmamos que $\widehat{d}(f, \widehat{g}) < \varepsilon$. Con esto quedaría demostrada la proposición.

Notemos que $S := A \cup B$ es soporte común (y finito) de f y $\widehat{g}$, por lo que

$$\widehat{d}(f, \widehat{g}) = \max_{s \in S} |f(s) - \widehat{g}(s)|.$$

Hay dos casos a considerar.

<u>**Caso 1**</u>: Si $s \in A$, entonces $f(s) = \big(f\mid_A\big)(s)$ y $\widehat{g}(s) = g(s)$, por lo que

$$|f(s) - \widehat{g}(s)| = |\big(f\mid_A\big)(s) - g(s)| \leq \widehat{d}\big(f\mid_A, g\big) < \varepsilon/3 < \varepsilon.$$

<u>**Caso 2**</u>: Si $s \in B$, tenemos que $s = b_i$ para algún $i \leq n$. En ese caso,

$$\begin{aligned}
|f(s) - \widehat{g}(s)| &= |f(b_i) - \widehat{g}(b_i)| \\
&\leq |f(b_i) - f(a_i)| + |f(a_i) - \widehat{g}(a_i)| + |\widehat{g}(a_i) - \widehat{g}(b_i)| \\
&\leq d\,(b_i, a_i) + d\big(f\mid_A, g\big) + d\,(a_i, b_i) \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

La penúltima desigualdad se da porque tanto f como $\widehat{g}$ son de Katětov. En cualquier caso obtenemos la desigualdad que buscábamos.

$\square$

Con este resultado obtenemos, en resumen, que si empezamos con un espacio métrico separable, X, podemos encajarlo en otro espacio métrico separable más grande, $E(X, \omega)$. Así que podemos crecer nuestro espacio inicial sin perder la separabilidad, un paso en la dirección correcta.

Observación 3.1.9. *El encaje de Kuratowski, $X \hookrightarrow E(X, \omega)$ es tal que toda isometría en X se extiende de forma única a una isometría de $E(X, \omega)$.*

Demostración. Sea $\varphi \in \mathrm{Iso}(X)$. Entonces el pushforward, $\widetilde{\varphi} : E(X, \omega) \to E(X, \omega)$ dado por $\widetilde{\varphi}(f) := \varphi_*(f)$ es una isometría: sean $f, g \in E(X, \omega)$ y calculemos la distancia entre sus imágenes bajo $\widetilde{\varphi}$,

$$\begin{aligned}
\widehat{d}\left(\widetilde{\varphi}(f),\widetilde{\varphi}(g)\right) &= \sup_{x\in X}\left|\widetilde{\varphi}(f)(x)-\widetilde{\varphi}(g)(x)\right| \\
&= \sup_{x\in X}\left|f\left(\varphi^{-1}(x)\right)-g\left(\varphi^{-1}(x)\right)\right| \\
&= \sup_{x\in X}\left|f(x)-g(x)\right| \\
&= \widehat{d}\,(f,g)\,.
\end{aligned}$$

La penúltima igualdad se da por la biyectividad de $\varphi^{-1}: X \to X$.

Falta verificar la unicidad de la extensión. Sea $\widetilde{\varphi}_2$ cualquier otra extensión de φ. Al ver a $E(X)$ como las extensiones por un punto y por tanto a $\widetilde{\varphi}_2$ como isometría sobre este espacio, tenemos que para toda $f \in E(X)$ y todo $x \in X$,

$$d\left(\widetilde{\varphi}_2(f),\widetilde{\varphi}_2(x)\right) = d\,(f,x)\,.$$

Pero calculando las distancias eso implica que $\widetilde{\varphi}_2(f)\left(\widetilde{\varphi}_2(x)\right) = f(x)$. Al ser $\widetilde{\varphi}_2(x)$ extensión de φ, tenemos que $\widetilde{\varphi}_2(x) = \varphi(x)$, por lo que toda $\widetilde{\varphi}_2(x)$ tiene que cumplir la igualdad

$$\widetilde{\varphi}_2\,(f)\,(x) = f\left(\varphi^{-1}(x)\right).$$

Eso es, vemos que $\widetilde{\varphi}_2(f) = \widetilde{\varphi}(f)$, confirmando la unicidad. □

3.2. Construcción del Espacio

Aunque el espacio de Urysohn se define por su universalidad y ultrahomogeneidad, hay otra caracterización del espacio que utilizaremos en la construcción. Dicha caracterización se basa en la siguiente propiedad.

Definición 3.2.1. *Decimos que un espaco métrico X es **finitamente inyectivo** si para cualquier espacio métrico finito, B, cualquier subconjunto $A \subset B$, y cualquier encaje isométrico $\varphi : A \to X$, existe un encaje isométrico $\Phi : B \to X$ que extiende a φ.*

Resulta que cualesquiera dos espacios polacos finitamente inyectivos son isométricos. La demostración de este resultado utiliza el método de back-and-forth, una herramienta crucial en el estudio del espacio de Urysohn, por lo que sí daremos la demostración.

Proposición 3.2.2. *Sean X y Y dos espacios polacos finitamente inyectivos. Entonces son isométricos.*

Demostración. Sean $\{x_0, x_1, \dots\}$ y $\{y_0, y_1, \dots\}$ densos en X y Y, respectivamente. Recursivamente construiremos una sucesión de subconjuntos finitos de X, $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$, y encajes isométricos $\varphi_i : A_i \to Y$ tales que

a) $A_i \subset A_{i+1}$

b) $\varphi_{i+1} |_{A_i} = \varphi_i$

c) $x_k \in A_{2k}$ para todo k ("forth")

d) $y_k \in \varphi_{2k+1}(A_{2k+1})$ para todo k ("back") .

Como caso base, definimos $A_0 := \{x_0\}$ y $\varphi_0(x_0) := y_0$. Supongamos, entonces, que ya tenemos A_i y φ_i para todos los $i < n$ para algún n. Queremos definir A_n y φ_n, para lo que hay dos posibles casos.

El primer caso es que n sea par: $n = 2k$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Entonces definimos

$$A_n := A_{n-1} \cup \{x_k\}.$$

Así se cumplen los incisos a) y c). Ahora, como $\varphi_{n-1} : A_{n-1} \to Y$ es un encaje isométrico, A_n es finito, y $A_{n-1} \subset A_n$, la inyectividad finita de Y nos da un encaje isométrico $\varphi_n : A_n \to Y$ que extiende a φ_{n-1}, lo que cumple el inciso b). El inciso d) no aplica porque n es par, así que terminamos este caso.

El segundo caso es que n sea impar: $n = 2k+1$. Por hipótesis tenemos que $\varphi_{n-1} : A_{n-1} \to \varphi_{n-1}(A_{n-1})$ es una isometría. Por lo que su inversa nos da un encaje isométrico

$$\varphi_{n-1}^{-1} : \varphi_{n-1}(A_{n-1}) \hookrightarrow X.$$

Usamos la inyectividad finita de X para obtener un encaje isométrico

$$\psi_n : \varphi_{n-1}(A_{n-1}) \cup \{y_k\} \to X$$

que extienda a φ_{n-1}^{-1}. Definimos entonces

$$A_n := A_{n-1} \cup \{\psi_n(y_k)\}.$$

Nótese que

$$A_n = \psi_n\left(\varphi_{n-1}(A_{n-1}) \cup \{y_k\}\right).$$

Por lo que podemos definir

$$\begin{aligned} \varphi_n : A_n &\to Y \\ x &\mapsto \psi_n^{-1}(x). \end{aligned}$$

Así, vemos que para cualquier $a \in A_{n-1}$ se cumple que

$$\begin{aligned}\varphi_n(a) &= \psi_n^{-1}(a) \\ &= \psi_n^{-1}\left(\varphi_{n-1}^{-1}\left(\varphi_n(a)\right)\right) \\ &= \psi_n^{-1}\left(\psi_n\left(\varphi_n(a)\right)\right) \\ &= \varphi_{n-1}(a).\end{aligned}$$

Por lo que se cumple el inciso b). Los incisos a) y d) son evidentes.

Así obtenemos la sucesión de conjuntos y encajes isométricos deseados. Para terminar, definimos

$$A := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$$

y

$$\begin{aligned}\varphi_\infty : A &\to Y \\ a &\mapsto \varphi_n(a)\end{aligned}$$

donde la n es suficientemente grande para que $a \in A_n$. Como cada φ_n es un encaje isométrico que extiende al encaje anterior, φ_∞ está bien definido y es un encaje isométrico. Además, como A contiene todos los x_i, A es denso en X. El inciso d) nos dice que todos los y_i están contenidos en la imagen de φ_∞, por lo que $\varphi_\infty(A)$ es denso en Y. Como Y es polaco y en particular completo, existe un único encaje isométrico $\Phi : X \to Y$ que extiende a φ_∞. Como X es completo, $\Phi(X)$ también lo es. Esto significa que $\Phi(X) \subset Y$ es cerrado y como $\varphi_\infty(A) \subset \Phi(X)$, la densidad del primer subconjunto combinado con que el segundo es cerrado nos da que $\Phi(X) = Y$. Es decir, Φ es una isometría entre X y Y.

□

Necesitamos otras dos propiedades, una de las cuales resulta ser equivalente a la inyectividad finita.

Definición 3.2.3. *Sea X un espacio métrico. Diremos que X tiene la* ***propiedad de extensión aproximada*** *si para cualquier subconjunto finito $A \subset X$, cualquier función de Katětov $f \in E(A)$, y cualquier $\varepsilon > 0$ existe un punto $x \in X$ tal que*

$$|f(a) - d(x,a)| \leq \varepsilon$$

para todo $a \in A$.

Diremos que X tiene la ***propiedad de extensión*** *si podemos tomar $\varepsilon = 0$ en lo anterior. O lo que es lo mismo, si existe un punto $x \in X$ tal que $f(a) = d(x,a)$ para todo $a \in A$.*

Identificando las funciones de Katětov con las extensiones por un punto se puede demostrar el siguiente resultado:

Proposición 3.2.4. *Un espacio métrico es finitamente inyectivo si y sólo si tiene la propiedad de extensión.*

Usaremos esta equivalencia para demostrar lo siguiente.

Proposición 3.2.5. *Sea X un espacio métrico polaco. Entonces X es de Urysohn si y sólo si es finitamente inyectivo.*

Demostración. Supongamos que X es de Urysohn. Sea B finito, $A \subset B$, y $f : A \to X$ un encaje isométrico. Debemos encontrar una extensión de f a todo B que preserve distancias.

Como X es universal existe un encaje isométrico $\varphi : B \to X$ (que en principio no tiene nada que ver con f). Esto nos da dos subespacios finitos de X, $\varphi(A)$ y $f(A)$, que, al ser ambos isométricos a A, son isométricos entre sí. Por ser X ultrahomogéneo, existe una isometría global $\psi : X \to X$ que extiende a la isometría de $\varphi(A)$ a $f(A)$. Componiendo ψ con φ obtenemos un encaje isométrico $\psi \circ \varphi : B \hookrightarrow X$ que extiende a f.

Ahora supongamos que X es finitamente inyectivo. Primero demostraremos que X es universal.

Sea Y un espacio métrico separable. Entonces existe un subconjunto denso $\{y_0, y_1, \dots\} \subset Y$. Elegimos un punto arbitrario $x_0 \in X$. Definimos un encaje isométrico $\varphi_0 : \{y_0\} \to X$ si declaramos que $\varphi_0(y_0) = x_0$. Por la inyectividad finita de X obtenemos un encaje isométrico $\varphi_1 : \{y_0, y_1\} \to X$ que extiende a φ_0. Siguiéndonos recursivamente obtenemos una sucesión de encajes isométricos

$$\varphi_n : \{y_0, \dots, y_n\} \to X$$

tales que cada φ_{n+1} es extensión de φ_n. Esto nos induce un encaje isométrico

$$\varphi_\infty : \{y_0, y_1, \dots\} \to X.$$

Por la completitud de X podemos extender φ a un encaje isométrico $\Phi : Y \to X$. Así queda demostrada la universalidad.

Para la ultrahomogeneidad usaremos un argumento back-and-forth. Sean $A, B \subset X$ dos subespacios finitos y $\varphi : A \to B$ un encaje isométrico. Hay que encontrar una isometría global que extienda este encaje.

Para empezar, sea $\{x_1, x_2, \dots\}$ un subconjunto denso en X. Construiremos una sucesión de conjuntos A_i y encajes isométricos $\varphi_i : A_i \to X$ tales que

a) $A_0 = A$ y $\varphi_0 = \varphi$

b) $A_i \subset A_{i+1}$

c) $\varphi_{i+1} |_{A_i} = \varphi_i$

d) $x_k \in A_{2k}$ para todo k

e) $x_k \in \varphi_{2k+1}(A_{2k+1})$ para todo k.

Suponiendo que ya tenemos los A_i y φ_i para todo $i \leq n$, queda analizar dos casos, como en el back-and-forth anterior.

Si $n = 2k$ es par, la propiedad de extensión de X (Proposición 3.2.4) nos asegura la existencia de un punto $z \in X$ tal que

$$d(z, a) = d\left(\varphi_n^{-1}(x_k), a\right) = d\left(x_k, \varphi_n(a)\right)$$

para todo $a \in A_n$ (la primera igualdad se debe a que $d_{\varphi_n^{-1}(x_k)}$ es de Katětov sobre A_n y la segunda a que φ_n preserva distancias). Definimos $A_{n+1} := A_n \cup \{z\}$ y $\varphi_{n+1}(z) := x_{2n+1}$. Un argumento análogo funciona si n es impar.

Teniendo la sucesión deseada, definimos $A := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ y sea $\varphi_\infty : A \to X$ el encaje isométrico inducido por los φ_n. Por la completitud de X obtenemos una extensión única de φ_∞ que resulta ser una isometría en X por contener a todos los x_k en su imagen. $\square$

El resultado anterior combinado con la unicidad de los espacios polacos finitamente inyectivos (Proposición 3.2.2) nos da la unicidad del espacio de Urysohn.

Proposición 3.2.6. *El espacio universal de Urysohn –en caso de existir– es único (salvo isometrías).*

El siguiente lema es sencillo de demostrar.

Lema 3.2.7. *Si X tiene la propiedad de extensión aproximada, entonces su compleción también la tiene.*

Tal vez resulte intuitivo que un espacio completo con la propiedad de extensión aproximada en realidad tiene la propiedad de extensión. Formalizamos el resultado a continuación.

Proposición 3.2.8. *Sea X un espacio métrico completo con la propiedad de extensión aproximada. Entonces X tiene la propiedad de extensión.*

Demostración. Sea $A = \{a_1, \ldots, a_m\} \subset X$ finito, y $f \in E(A)$ de Katětov. Construiremos una sucesión $(z_n) \in X^{\mathbb{N}}$ tal que

a) $|f(a) - d(z_n, a)| \leq 2^{-n}$ para todo $a \in A$

b) $d(z_n, z_{n+1}) \leq 2^{-(n-1)}$.

Para el caso base, como X tiene la propiedad de extensión aproximada, existe un punto $z_0 \in X$ tal que

$$|f(a) - d(a, z_0)| \leq 1$$

para todo $a \in A$.

Supongamos que tenemos $z_0, \ldots, z_n$ que cumplen con las propiedades a) y b). Definimos la función $d_f : A \cup \{z_n\} \to \mathbb{R}$ por

$$d_f(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ d\left(f, z_n\right) & \text{si } x = z_n \end{cases}$$

donde la distancia de f a z_n se calcula en $E(\{z_1, \ldots, z_n\})$ y es menor a 2^{-n} por definición de z_n. Entonces d_f es una función de Katětov sobre $A \cup \{z_n\}$ y como X tiene la propiedad de extensión aproximada, existe un punto $z_{n+1} \in X$ tal que para todo $x \in A \cup \{z_n\}$ satisface que

$$|d_f(x) - d(z_{n+1}, x)| \leq 2^{-(n+1)}.$$

Cuando $x \in A$ obtenemos la desigualdad del inciso a). Cuando $x = z_n$, la desigualdad del triángulo nos da que

$$\begin{aligned} d\left(z_{n+1}, z_n\right) &\leq 2^{-(n+1)} + d_f(z_n) \\ &\leq 2^{-(n+1)} + 2^{-n} \\ &< 2^{n-1}. \end{aligned}$$

Por lo que cumplimos el paso recursivo.

La condición b) nos dice que (z_n) es una sucesión de Cauchy y por consiguiente converge a algún punto $z \in X$, ya que X es completo. Pero entonces para cualquier $a \in A$ y cualquier $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\begin{aligned} |f(a) - d(z, a)| &\leq |f(a) - d(a, z_n)| + |d(a, z_n) - d(z, z_n)| \\ &\leq 2^{-n} + d(z_n, z). \end{aligned}$$

Como el lado derecho converge a cero, concluimos que

$$f(a) = d(z, a)$$

para todo $a \in A$. Esto es justo lo que queríamos. □

Juntando todos estos resultados, podemos concluir lo siguiente:

Proposición 3.2.9. *Si un espacio métrico es finitamente inyectivo, entonces su compleción también es finitamente inyectivo.*

Demostración. Sea X un espacio métrico finitamente inyectivo. Por la Proposición 3.2.4, eso implica que X tiene la propiedad de extensión. En particular, tiene la propiedad de extensión aproximada. Por el Lema 3.2.7, la compleción de X, denotada $\overline{X}$, también tiene la propiedad de extensión aproximada. Al ser $\overline{X}$ completo, la proposición anterior nos asegura que $\overline{X}$ tiene la propiedad de extensión. Pero el mismo Lema 3.2.7 nos dice que $\overline{X}$ es finitamente inyectivo. □

Con esto en mente, construiremos el espacio de Urysohn a partir de una cadena recursiva de espacios de funciones de Katětov. Empezaremos con cualquier espacio métrico separable X, definiendo $X_0 := X$ como caso base. Recursivamente definimos

$$X_{n+1} := E\left(X_n, \omega\right).$$

Entonces, como los espacios de funciones de Katětov con soporte finito preservan la separabilidad (Proposición 3.1.8), tenemos que cada X_i es separable. Además, el encaje de Kuratowski nos permite encajarlos isométricamente de manera recursiva: $X_i \hookrightarrow X_{i+1}$. Por lo que podemos definir

$$X_\infty := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i.$$

Proposición 3.2.10. *X_∞ tiene la propiedad de extensión.*

Demostración. Sea $A \subset X_\infty$ finito, $f \in E(A)$. Entonces existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $A \subset X_m$ por ser A finito. Entonces la extensión de Katětov de f también es un punto en X_∞:

$$\widehat{f} \in E\left(X_m, \omega\right) = X_{m+1} \subset X_\infty.$$

Así que para todo $a \in A$ tenemos que

$$d\left(a, \widehat{f}\right) = f(a)$$

por lo que $\widehat{f}$ es el punto que realiza a f. □

Así que, por el Lema 3.2.4, esto implica que X_∞ es finitamente inyectivo. Además, al ser la unión numerable de espacios separables, X_∞ es separable.

Proposición 3.2.11. *Definimos a $\mathbb{U} := \overline{X_\infty}$. Entonces $\mathbb{U}$ es el espacio universal de Urysohn.*

Demostración. Por la observación anterior y la definición del espacio, $\mathbb{U}$ es completo y separable. Ya que X_∞ es finitamente inyectivo, la Proposición 3.2.9 nos dice que su compleción, $\mathbb{U}$, también es finitamente inyectivo. Entonces $\mathbb{U}$ es un espacio métrico completo y separable que también es finitamente inyectivo. La Proposición 3.2.5 nos asegura que este espacio es, en efecto, el espacio universal de Urysohn. □

Si combinamos la proposición anterior con la unicidad del espacio de Urysohn, obtenemos el resultado principal de esta sección:

Teorema 3.2.12. *El espacio universal de Urysohn existe y es único (salvo isometrías).*

V. Uspenskij utilizó uno de los criterios de Toruńczyk para demostrar que $\mathbb{U}$ es homeomorfo a un espacio de Hilbert (ver [23]). Pero aunque la topología de $\mathbb{U}$ se entiende bien, su geometría sigue siendo elusiva; todavía no se encuentra una realización geométrica del espacio.

Como curiosidad, hay una conexión entre $\mathbb{U}$ y curvas de Peano: por el teorema de Banach-Mazur sabemos que es posible encajar $\mathbb{U}$ isométricamente en $C[0,1]$ y resulta que cualquier encaje así necesariamente involucra curvas de Peano. La lectora interesada puede consultar [12].

Para aquellos interesados en aplicaciones físicas, existe un espacio (de hecho, un espacio-tiempo) análogo al de Urysohn que es ultrahomogéneo y universal entre k-espacio-tiempos. Estos son espacio-tiempos donde la "métrica" es el tiempo propio entre dos eventos –el máximo tiempo transcurrido entre los eventos desde cualquier marco de referencia. Por lo que la desigualdad del triángulo resulta invertida: $\tau(a,b) \geq \tau(a,c) + \tau(c,b)$. Los resultados se pueden encontrar en [1].

Terminaremos la sección con un resultado sencillo que nos facilitará algunas demostraciones más adelante (en particular, nos permitirá usar el Lema 5.2.3).

Observación 3.2.13. $\mathbb{U}$ *no tiene puntos aislados.*

Demostración. Si $\mathbb{U}$ tuviera algún punto aislado x_0, tal que para algún $\varepsilon > 0$ tuviéramos $B_\varepsilon(x_0) = \{x_0\}$, podríamos encajar el espacio métrico consistente de dos puntos a distancia $\varepsilon/2$ entre sí mandando uno de los puntos a x_0 y extendiendo ese encaje isométrico al otro punto. Pero eso nos contradiría que x_0 fuera aislado. □

3.3. Compactos y Urysohn

Podemos extender la definición de ultrahomogeneidad, u ω-homogeneidad, a subconjuntos compactos (no sólo finitos).

Definición 3.3.1. *Diremos que un espacio métrico, X, es* ***compacto-homogéneo*** *si toda isometría $\varphi : K_1 \to K_2$ entre dos subespacios compactos, $K_1, K_2 \subset X$, puede ser extendida a una isometría global.*

Siguiendo pasos muy similares a los de la construcción anterior del espacio de Urysohn y aprovechando su ultrahomogeneidad se puede demostrar lo siguiente:

Proposición 3.3.2. *El espacio de Urysohn es compacto-homogéneo.*

Como consecuencia, obtenemos la siguiente afirmación:

Proposición 3.3.3. *Todo encaje isométrico de un espacio compacto en $\mathbb{U}$ es un g-encaje (Definición 1.4.2).*

3.4. Conjuntos de Unicidad

Una curiosidad geométrica del espacio de Urysohn es que toda isometría del espacio es determinada completamente por su acción sobre cualquier esfera. A continuación formalizaremos este fenómeno.

Definición 3.4.1. *Sea $A \subset \mathbb{U}$. Diremos que es un* ***conjunto de unicidad*** *si para cualesquiera dos puntos $x, y \in \mathbb{U}$, si*

$$d(x,a) = d(y,a)$$

para todo punto $a \in A$, entonces $x = y$.

Es claro que $\mathbb{U}$ es un conjunto de unicidad ya que d es métrica, y que cualquier supraconjunto de un conjunto de unicidad también es conjunto de unicidad. Menos claro es un resultado originalmente descubierto por Mati Rubin:

Proposición 3.4.2. *(Rubin) Las esferas no vacías son conjuntos de unicidad.*

Demostración. Sea $x_0 \in \mathbb{U}$ un punto arbitrario y $r > 0$ el radio de la esfera $S(x_0, r)$ con centro en x_0. Demostraremos que para cualquier par de puntos distintos, $x \neq y$, existe un punto $z \in S(x_0, r)$ tal que $d(x,z) \neq d(y,z)$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $d(x,x_0) \geq d(y,x_0)$.

Dado $\varepsilon > 0$ definimos la función $g_\varepsilon : \{x_0, x, y\} \to \mathbb{R}$ como

$$\begin{aligned} g_\varepsilon(x_0) &:= r \\ g_\varepsilon(x) &:= r + d(x,x_0) \\ g_\varepsilon(y) &:= r + d(y,x_0) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Es fácil checar que si ε es suficientemente chico –en particular, pidiendo que $\varepsilon < \min\{d(y,x_0), d(x,y), 2r\}$ y, si $d(x,x_0) \neq d(y,x_0)$, que $\varepsilon < |d(x,x_0) - d(y,x_0)|$–, entonces g_ε es de Katětov. Por lo que si eligimos un ε adecuado, existe un punto $z \in \mathbb{U}$ tal que

$$\begin{aligned} d(z,x_0) &= g_\varepsilon(x_0) = r \\ d(z,x) &= g_\varepsilon(x) = r + d(x,x_0) \\ d(z,y) &= g_\varepsilon(y) = r + d(y,x_0) - \varepsilon. \end{aligned}$$

La primera ecuación nos dice que $z \in S(x_0, r)$. En el caso en que $d(x,x_0) = d(y,x_0)$ tenemos que $g_\varepsilon(x) \neq g_\varepsilon(y)$. Si $d(x,x_0) \neq d(y,x_0)$, entonces, como $\varepsilon < |d(x,x_0) - d(y,x_0)|$, tenemos $\varepsilon \neq d(y,x_0) - d(x,x_0)$, y por lo tanto $g_\varepsilon(x) \neq g_\varepsilon(y)$. En cualquier caso, se cumple que $d(z,x) \neq d(z,y)$, como se deseaba.

$\square$

Se siguen una serie de corolarios, el primero resulta evidente:

Corolario 3.4.3. *Todo subconjunto de* $\mathbb{U}$ *con interior no vacío es un conjunto de unicidad.*

Corolario 3.4.4. *La única isometría sobre* $\mathbb{U}$ *cuyo conjunto de puntos fijos tiene interior no vacío es la identidad.*

Demostración. Sea $f \in \mathrm{Iso}(\mathbb{U})$ una isometría cuyo conjunto de puntos fijos tiene interior no vacío. Entonces dicho conjunto es conjunto de unicidad. Sea $x \in \mathbb{U}$ cualquier punto. Entonces para cualquier punto fijo z de f tenemos que

$$\begin{aligned} d(x,z) &= d(f(x), f(z)) && \text{Ya que } f \text{ es una isometría.} \\ &= d(f(x), z) && \text{Ya que } z \text{ es un punto fijo.} \end{aligned}$$

Por lo que concluimos que $x = f(x)$. Como x es arbitrario, f es la identidad. □

Corolario 3.4.5. *Si dos isometrías sobre* $\mathbb{U}$ *coinciden en un subconjunto con interior no vacío, entonces son idénticas.*

Demostración. Sean $f, g \in \mathrm{Iso}(\mathbb{U})$ tales que $f(a) = g(a)$ para todo $a \in A$, donde $A \subset \mathbb{U}$ tiene interior no vacío. Sea $x \in \mathbb{U}$ un punto arbitrario. Entonces para todo $a \in A$ se tiene

$$\begin{aligned} d\left(f(x), f(a)\right) &= d(x,a) \\ &= d\left(g(x), g(a)\right) \\ &= d\left(g(x), f(a)\right). \end{aligned}$$

Como $\mathrm{int}(A) \neq \emptyset$ y f es una isometría, entonces $\mathrm{int}(f(A)) \neq \emptyset$. Concluimos que, al ser $f(A)$ conjunto de unicidad, $f(x) = g(x)$. Como x es arbitrario, $f = g$.

□

Capítulo 4

El Grupo de Isometrías de Urysohn

Otro de los aspectos del espacio de Urysohn que lo vuelven atractivo como objeto de estudio es su grupo de isometrías. Utilizando las herramientas de la construcción de Katětov podemos demostrar que es un grupo topológico universal entre los grupos segundo-numerables. Esto es, que para cualquier grupo segundo-numerable G, existe un encaje topológico $G \hookrightarrow \mathrm{Iso}(\mathbb{U})$ que también es un monomorfismo de grupos. Otro grupo universal entre los grupos segundo-numerables es el grupo de homeomorfismos del cubo de Hilbert. Más adelante utilizaremos la amenizabilidad extrema de $\mathrm{Iso}(\mathbb{U})$ para demostrar que estos dos espacios no son homeomorfos (Corolario 5.2.8). El hecho de que no exista un único grupo que sea universal entre los grupos segundo numerables ha motivado a algunos matemáticos a llamarles grupos "versales" (por ejemplo, Melleray [16]). Seguiremos esta convención.

4.1. Construcción del Grupo

Como $\mathbb{U}$ es polaco, $\mathrm{Iso}(\mathbb{U})$ también lo es; en particular, $\mathrm{Iso}(\mathbb{U})$ es segundo-numerable. Podemos utilizar la construcción de Katětov del espacio de Urysohn para demostrar la "versalidad" de $\mathrm{Iso}(\mathbb{U})$ en la clase de grupos segundo-numerables. Recordemos que para la construcción de $\mathbb{U}$ empezamos con cualquier espacio métrico separable, X, y construimos una cadena de espacios construyendo las funciones de Katětov con soporte finito del espacio anterior. En particular, podemos construir $\mathbb{U}$ empezando con cualquier grupo topológico segundo-numerable, G. Así, si tenemos la sucesión de espacios en la construcción de Urysohn:

$$
\begin{aligned}
X_0 &= G \\
X_1 &= E(X_0, \omega) \\
&\vdots \\
X_{n+1} &= E(X_n, \omega).
\end{aligned}
$$

Entonces formamos una cadena de encajes isométricos:

$$X_0 \hookrightarrow X_1 \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n \hookrightarrow \mathbb{U}\,. \tag{4.1}$$

Queremos construir una cadena similar:

$$G := X_0 \hookrightarrow \operatorname{Iso}(X_0) \hookrightarrow \operatorname{Iso}(X_1) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \operatorname{Iso}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n\right) \hookrightarrow \operatorname{Iso}(\mathbb{U}) \tag{4.2}$$

donde cada flecha representa un encaje topológico que también sea monomorfismo de grupos. Así, siguiendo la cadena, obtendríamos el encaje deseado de G en $\operatorname{Iso}(\mathbb{U})$.

Antes que nada, recordemos que todo grupo segundo-numerable admite una métrica compatible invariante por la izquierda (el famoso teorema de Birkhoff-Kakutani, cuya demostración se puede encontrar en [2, Teorema 3.3.12]). A menos que se especifique lo contrario, ésta es la métrica que utilizaremos, denotada simplemente por d. Con esto, empecemos por construir el primer paso en la cadena.

Proposición 4.1.1. *Si G es un grupo segundo-numerable, existe un encaje $\Phi : G \to \operatorname{Iso}(G)$ que también es monomorfismo de grupos.*

Demostración. Para cada elemento $g \in G$ denotamos por L_g a la traslación izquierda por g. Si definimos $\Phi(g) := L_g$, la invariancia izquierda de d nos da que L_g es una isometría. Φ es monomorfismo de grupos, pues si para todo $g, h, x \in G$ se cumple que

$$L_{gh}(x) = (gh)x = g(hx) = L_g\left(L_h(x)\right).$$

Por lo que $L_{gh} = L_g \circ L_h$. Además, si $g \in G$ es tal que L_g es la identidad en G, tendríamos que $g \cdot x = x$ para todo $x \in G$. Por la unicidad de la identidad, $g = e$, confirmando que Φ es monomorfismo de grupos.

Recordemos que el grupo de isometrías de un espacio separable es primero-numerable, por lo que podemos usar sucesiones para checar que tanto Φ como su inversa son continuas. Si $g_n \to g$, para todo $x \in G$ tenemos que

$$L_{g_n}(x) = g_n \cdot x \to g \cdot x = L_g(x)$$

por la continuidad de la operación de grupo. Es decir que $\Phi(g_n) = L_{g_n}$ converge puntualmente a $\Phi(g) = L_g$, por lo que Φ es continua. Como $\Phi^{-1}(g) = L_{g^{-1}}$ para toda $g \in G$, el mismo argumento demuestra que Φ^{-1} es continua. $\square$

Recordando que las isometrías de X se extienden de manera única a isometrías de $E(X, \omega)$ (Observación 3.1.9), observamos que esa extensión resulta ser continua:

Teorema 4.1.2. *Sea X un espacio métrico separable. Entonces el morfismo de extensión* $\mathrm{Iso}(X) \to \mathrm{Iso}\big(E(X,\omega)\big)$*, dado por $\varphi \mapsto \widetilde{\varphi}$, es continuo.*

Demostración. Primero veremos que si $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ es soporte de $f \in E(X, \omega)$, entonces $\varphi(S)$ es soporte de $\widetilde{\varphi}(f)$, lo que, de paso, establecerá que $\widetilde{\varphi}$ está bien definida. Por la definición de soporte (3.1.6), para todo punto $x \in X$ tenemos que

$$f(x) = \min_{1 \leq i \leq n} \{f(x_i) + d(x, x_i)\}.$$

Por lo que para todo $x \in X$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}\,(f)\,(x) &= f\left(\varphi^{-1}(x)\right) \\
&= \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ f(x_i) + d\left(\varphi^{-1}(x), x_i\right) \right\} \\
&= \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ f(x_i) + d\left(x, \varphi(x_i)\right) \right\} && \text{por ser } \varphi \text{ isometría} \\
&= \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \widetilde{\varphi}\,(f)\,\left(\varphi(x_i)\right) + d\left(x, \varphi(x_i)\right) \right\}.
\end{aligned}$$

Concluimos que $\varphi(S)$ es soporte de $\widetilde{\varphi}(f)$.

El morfismo de extensión en efecto es morfismo de grupos ya que para toda $f \in E(X, \omega)$ y cualquier $\varphi, \vartheta \in \mathrm{Iso}(X)$ tenemos que para todo $x \in X$,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi \circ \vartheta}(f)(x) &= f\left((\varphi \circ \vartheta)^{-1} x\right) \\
&= f\left(\vartheta^{-1}\left(\varphi^{-1}(x)\right)\right) \\
&= \widetilde{\varphi}\left(f \circ \vartheta^{-1}\right)(x) \\
&= \widetilde{\varphi}\left(\widetilde{\vartheta}(f)\right)(x).
\end{aligned}$$

Esto es, $\widetilde{\varphi \circ \vartheta}(f) = \widetilde{\varphi}\left(\widetilde{\vartheta}(f)\right)$, por lo que $\widetilde{\varphi \circ \vartheta} = \widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\vartheta}$.

Ahora comprobemos que sea continuo. Tanto X como $E(X, \omega)$ son separables, así que sus grupos de isometrías son primero-numerables y basta con demostrar continuidad secuencial. Entonces sea $\varphi \in \mathrm{Iso}(X)$ cualquier isometría y $(\varphi_n) \in \mathrm{Iso}(X)^{\mathbb{N}}$ una sucesión que converja a φ en $\mathrm{Iso}(X)$. Sea $\varepsilon > 0$ dado y sea $f \in E(X, \omega)$ cualquier función.

Existe un soporte finito de f, $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ y la convergencia puntual de las isometrías nos asegura la existencia de un natural $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d\left(\varphi(s_i), \varphi_n(s_i)\right) < \varepsilon$$

para todo $1 \leq i \leq m$ y todo $n \geq N$. Ahora, por la observación anterior, es claro que

$$A_n := \varphi_n(S) \cup \varphi(S)$$

es soporte común de $\widetilde{\varphi_n}(f)$ y $\widetilde{\varphi}(f)$. Recordemos que si dos funciones de Katětov, f_1 y f_2, tienen un soporte común, B, entonces su distancia (en $E(X)$) se puede calcular sólo fijándonos en el soporte:

$$\widehat{d}(f_1, f_2) = \sup_{b \in B} |f_1(b) - f_2(b)|.$$

Con esto en mente, sea $n \geq N$ y calculemos la distancia entre $\widetilde{\varphi_n}(f)$ y $\varphi(f)$. Si $a \in A_n$ es cualquier punto del soporte mutuo, hay dos casos que considerar.

El primer caso es si $a \in \varphi_n(S)$, que implicaría que $a = \varphi_n(x_i)$ para algún $i = 1, \ldots, m$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\left|\widetilde{\varphi_n}(f)(a) - \widetilde{\varphi}(f)(a)\right| &= \left|f(x_i) - f\left(\varphi^{-1}\left(\varphi_n(x_i)\right)\right)\right| & \\
&\leq d\left(x_i, \varphi^{-1}\left(\varphi_n(x_i)\right)\right) & \text{Ya que } f \text{ es de Katětov.} \\
&= d\left(\varphi(x_i), \varphi_n(x_i)\right) & \text{Ya que } \varphi \text{ es isometría.} \\
&< \varepsilon. &
\end{aligned}$$

El segundo caso, que $a \in \varphi(S)$, se sigue análogamente. De cualquier forma,

$$\left|\widetilde{\varphi_n}(f)(a) - \widetilde{\varphi}(f)(a)\right| < \varepsilon$$

para cada $a \in A_n$. Concluimos que, para todo $n \geq N$,

$$\begin{aligned}
d\left(\widetilde{\varphi_n}(f), \widetilde{\varphi}(f)\right) &= \max_{a \in A_n} \left|\widetilde{\varphi_n}(f)(a) - \widetilde{\varphi}(f)(a)\right| \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Por lo que por definición $\widetilde{\varphi_n}(f)$ converge a $\widetilde{\varphi}(f)$. Como la f es arbitraria, tenemos que $\widetilde{\varphi_n}$ converge a $\widetilde{\varphi}$, como queríamos.

□

Con este último resultado y el siguiente lema tendremos la mayoría de la cadena en la ecuación 4.2.

Lema 4.1.3. *Sea Y un espacio métrico y $X \subset Y$ un subconjunto separable tal que para toda isometría $\varphi \in \mathrm{Iso}(X)$ existe una isometría $\widehat{\varphi} \in \mathrm{Iso}(Y)$ que la extiende. Si la asignación $\gamma : \mathrm{Iso}(X) \to \mathrm{Iso}(Y)$ dada por $\gamma(\varphi) = \widehat{\varphi}$ es continua y un homomorfismo de grupos, entonces resulta ser un encaje y un monomorfismo de grupos.*

Demostración. Primero veamos que es un monomorfismo. Sea $\varphi \in \ker(\gamma)$. Entonces su extensión es la identidad en Y; eso es $\widehat{\varphi} = 1_Y$. En particular, para todo $x \in X$, tenemos que

$$\varphi(x) = \widehat{\varphi}(x) = 1_Y(x) = x$$

por lo que $\varphi = 1_X$. Así que γ es monomorfismo.

Para ver que es encaje topológico, denotemos por $H := \gamma\left(\mathrm{Iso}(X)\right)$ a su imagen. Tenemos que demostrar que la inversa es continua. Como $\mathrm{Iso}(X)$ es primero-numerable podemos usar continuidad secuencial, así que si $\widehat{\varphi} \in H$ es una sucesión de isometrías que convergen a $\widehat{\varphi} \in H$ tenemos que demostrar que $\varphi_n \to \varphi$. Esto es que para todo $x \in X$, $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$. Como son extensiones tenemos que, por hipótesis,

$$\varphi_n(x) = \widehat{\varphi_n}(x) \to \widehat{\varphi}(x) = \varphi(x)$$

como queríamos. □

Como consecuencia podemos afirmar que cada uno de los eslabones en la cadena, salvo los últimos dos, son encajes topológicos y monomorfismos de grupos. Empezaremos por construir el último eslabón.

Recordemos que para toda isometría φ de un espacio métrico X existe una única isometría $\widehat{\varphi}$ sobre la compleción de X, denotada $\overline{X}$, que extiende a φ. Resulta que esta asignación es continua y un monomorfismo de grupos.

Proposición 4.1.4. *La asignación $\Lambda : \mathrm{Iso}(X) \to \mathrm{Iso}(\overline{X})$ dada por $\Lambda(\varphi) = \widehat{\varphi}$ es un monomorfismo de grupos continuo.*

Demostración. Que Λ es inyectiva se sigue de la continuidad de las isometrías, por lo que basta checar continuidad en conjuntos subbásicos. Así, sea $\varphi \in \mathrm{Iso}(X)$ y tomemos una vecindad subbásica $M(x, U)$ de $\Lambda(\varphi) = \widehat{\varphi}$. Es decir, x es un punto en la compleción $\overline{X}$, y $U \subset \overline{X}$ es un conjunto abierto tal que $\widehat{\varphi}(x) \in U$. Queremos encontrar una vecindad de φ en $\mathrm{Iso}(X)$ cuya imagen bajo Λ sea subconjunto de $M(x, U)$.

Existe un $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon\left(\widehat{\varphi}(x)\right) \subset U$. Elegimos un punto $z \in X$ tal que

$$d(x, z) < \varepsilon/3.$$

Entonces, al ser $\widehat{\varphi}$ extensión de φ obtenemos una vecindad de φ:

$$\varphi \in M\left(z, B_{\varepsilon/3}\left(\varphi(z)\right)\right) \subset \mathrm{Iso}(X).$$

Afirmamos que ésta será la vecindad buscada.

Sea $\psi \in M\left(z, B_{\varepsilon/3}\left(\varphi(z)\right)\right)$. Entonces,

$$\begin{aligned} d\left(\widehat{\psi}(x), \widehat{\varphi}(x)\right) &\leq d\left(\widehat{\psi}(x), \widehat{\psi}(z)\right) + d\left(\widehat{\psi}(z), \widehat{\varphi}(z)\right) + d\left(\widehat{\varphi}(z), \widehat{\varphi}(x)\right) \\ &= d(x,z) + d\left(\psi(z), \varphi(z)\right) + d(z,x) \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3. \end{aligned}$$

Por lo que concluimos que $\Lambda(\psi) = \widehat{\psi} \in M(x, U)$ y que Λ en efecto es continua.

Por último, como para todo $x \in X$ y todo par de isometrías $\varphi, \psi \in \mathrm{Iso}(X)$ se cumple que $\widehat{\varphi \circ \psi}(x) = \widehat{\varphi} \circ \widehat{\psi}(x)$, la unicidad de la extensión nos permite concluir que $\widehat{\varphi \circ \psi} = \widehat{\varphi} \circ \widehat{\psi}$, por lo que Λ es un homomorfismo de grupos. □

Para demostrar el penúltimo eslabón –que es el único que nos falta– en la cadena 4.2 recordemos la definición de los X_n, y denotemos a su unión por

$$X_\omega := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$$

Denotaremos a los encajes del Teorema 4.1.2 por

$$\gamma_n : \mathrm{Iso}\left(X_{n-1}\right) \to \mathrm{Iso}\left(X_n\right),$$

entonces esta familia de encajes nos induce una función

$$\gamma_\omega : \mathrm{Iso}\left(G\right) \to \mathrm{Iso}\left(X_\omega\right)$$

definida por

$$\gamma_\omega\left(\varphi\right)(x) = \varphi_n(x)$$

donde n es suficientemente grande para que $x \in X_n$, y φ_n es definida como

$$\varphi_n := \gamma_n \circ \gamma_{n-1} \circ \cdots \circ \gamma_1(\varphi).$$

Como cada γ_n es continua y homomorfismo de grupos, la asignación $\varphi \mapsto \varphi_n$ resulta ser continua y homomorfismo de grupos, por lo que γ_ω hereda la continuidad y es homomorfismo de grupos. El Lema 4.1.3 implica que γ_ω es un encaje y un monomorfismo de grupos, lo cual completa la cadena 4.2. Finalmente podemos afirmar el teorema central de esta sección:

Teorema 4.1.5. $\mathrm{Iso}(\mathbb{U})$ *es un grupo versal en la clase de los grupos segundo-numerables.*

Concluiremos la sección con un comentario sobre la topología de $\mathrm{Iso}(\mathbb{U})$ y un lema técnico.

Utilizando un teorema de Toruńczyk y Dobrowolski, Melleray ([17]) demostró el siguiente resultado:

Teorema 4.1.6. Iso($\mathbb{U}$) *es homeomorfo a* ℓ_2.

Por lo que observamos que la topología de Iso($\mathbb{U}$) está bien entendida. De hecho, dado el resultado de Uspenskij en [23], tenemos que $\mathbb{U}$ y Iso($\mathbb{U}$), al ambos ser homeomorfos a ℓ_2, son homeomorfos entre sí (lo que quizá no sea muy sorprendente dada la similitud entre las construcción en ambos espacios). En particular podemos afirmar lo siguiente:

Corolario 4.1.7. Iso($\mathbb{U}$) *no tiene puntos aislados.*

Este último resultado nos permitirá utilizar el Lema 5.2.3 más adelante. Concluimos la sección con el siguiente resultado técnico:

Lema 4.1.8. *Toda acción fiel de un grupo numerable G que actúa sobre $\mathbb{U}$ por isometrías es libre sobre un subconjunto denso (y G_δ) de puntos en $\mathbb{U}$.*

Demostración. Sea $G = \{g_1, g_2, g_3, \dots\}$ una enumeración del grupo, con $g_1 = e$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $E_n := \{x \in \mathbb{U} \mid g_n \cdot x = x\}$, los puntos fijos de g_n. Recordando que la única isometría cuyos puntos fijos tienen interior no vacío es la identidad (Corolario 3.4.4), tenemos que $\mathrm{int}(E_n) = \emptyset$ para todo $n \geq 2$, pues la acción por isometrías es fiel. Además, es claro que cada E_n es cerrado.

Definimos el subconjunto

$$A := \bigcap_{n=2}^{\infty} E_n^c.$$

Entonces A es G_δ. Nótese que cada E_n^c es denso, pues como $\mathrm{int}(E_n) = \emptyset$, entonces $\overline{\mathbb{U} \setminus E_n} = \mathrm{int}(E_n)^c = \mathbb{U}$. Como $\mathbb{U}$ es un espacio métrico completo, el Teorema de Baire nos dice que A también es denso. Más aún, G actúa libremente sobre A ya que si $g_n a = a$ para algún $a \in A$ y $g_n \in G$, tendríamos que $a \in E_n \cap A$. Por construcción, la única posibilidad es que $n = 1$; eso es, que $g_n = e$. $\square$

Parte III

Iso($\mathbb{U}$) como Grupo de Lévy

Capítulo 5

Iso($\mathbb{U}$) es un Grupo de Lévy

Antes de demostrar que Iso($\mathbb{U}$) es un grupo de Lévy necesitamos una serie de lemas técnicos. La mayoría de éstos fueron sacados de [20].

5.1. Lemario de Seudométricas en Grupos

Lema 5.1.1. *Sea G un grupo con una seudométrica d invariante por la izquierda. Sea $V \subset G$ un subconjunto finito que genere a G y que contenga la identidad. Entonces existe una seudométrica ρ que cumple lo siguiente:*

a) Es máxima entre todas las seudométricas invariantes por la izquierda en G cuya restricción a V está superiormente acotada por d; es decir, si $\widetilde{\rho}$ es una seudométrica invariante por la izquierda tal que $\widetilde{\rho}(u,v) \leq d(u,v)$ para todo $u,v \in V$, entonces para todo $g,h \in G$ tenemos que $\widetilde{\rho}(g,h) \leq \rho(g,h)$.

b) Coincide con d en V.

Si además la restricción de d a V es métrica, entonces

c) ρ es una métrica sobre todo G.

d) Para todo $\varepsilon > 0$ existe un número natural N tal que $\ell_V(x) > N$ para cualquier elemento $x \in G$ implica que $\rho(e,x) \geq \varepsilon$.

Demostración. Construimos la gráfica de Cayley $\Gamma := (G, V^{-1}V)$, que es la gráfica cuyos vértices son elementos de G y cuyas aristas son parejas $(x,y) \in G \times G$ tales que $x^{-1}y \in V^{-1}V$. En otras palabras, dos vértices son adyacentes si existe un elemento de $V^{-1}V$ que al multiplicarlo por el elemento correspondiente a uno de los vértices nos da el otro. Además, a cada arista (x,y) le asignaremos un peso con valor

$$d(x^{-1}y, e) = d(x,y).$$

Si ρ es la seudométrica de trayectorias en Γ, también funciona como seudométrica sobre G: simplemente ignoramos la estructura de gráfica en Γ. Nótese que ρ es invariante por la izquierda, ya que dados $x, y, z \in G$ podemos observar que hay una biyección entre las trayectorias de x a y y las trayectorias de zx a zy: si hay una trayectoria $x = a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n = y$ de x a y (esto implica que $a_i^{-1} a_{i+1} \in V^{-1}V$ para cada $i = 0, 1, \ldots, n-1$), entonces $zx = za_0, za_1, za_2, \ldots, za_{n-1}, za_n = zy$ es una trayectoria de zx a zy; por otro lado, si $zx = b_0, b_1, \ldots, b_m = zy$ es una trayectoria de zx a zy, entonces $x = z^{-1}b_0, z^{-1}b_1, \ldots, z^{-1}b_m = y$ es una trayectoria de x a y. Así que toda trayectoria de zx a zy se puede ver como la traslación por z de una trayectoria de x a y, y como consecuencia

$$\begin{aligned} \rho(zx, zy) &\leq \sum_{i=0}^{n-1} d(za_i, za_{i+1}) && \text{por definición de } \rho \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} d(a_i, a_{i+1}) && \text{por la invariancia izquierda de } d. \end{aligned}$$

Tomando el ínfimo sobre toda las trayectorias de x a y obtenemos que

$$\rho(zx, zy) \leq \rho(x, y).$$

Un argumento análogo nos da la otra desigualdad, por lo que concluimos que

$$\rho(zx, zy) = \rho(x, y)$$

y como z es arbitrario, obtenemos la invariancia izquierda de ρ.

Ahora, si restringimos ρ a V vemos que está acotada superiormente por d, pues si $u, v \in V$ son dos elementos en V, entonces $u^{-1}v \in V^{-1}V$, por lo que están conectados por una arista y por definición de ρ tenemos la desigualdad

$$\rho(u, v) \leq d(u, v).$$

Sea η cualquier otra seudométrica invariante por la izquierda sobre G cuya restricción a V esté acotada superiormente por d. Si $a, b \in G$ son dos vértices adyacentes, entonces existen elementos $u, v \in V$ tales que $a^{-1}b = u^{-1}v$. Por lo que

$$\begin{aligned} \eta(a, b) &= \eta(a^{-1}b, e) \\ &= \eta(u^{-1}v, e) \\ &= \eta(u, v) \\ &\leq d(u, v) \\ &= d(u^{-1}v, e) \\ &= d(a^{-1}b, e) \\ &= d(a, b). \end{aligned}$$

Consecuentemente, para cualquier trayectoria $x = a_0, a_1, \ldots, a_n = y$ entre dos elementos $x, y \in G$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
\eta(x,y) &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \eta(a_i, a_{i+1}) && \text{por la desigualdad del triángulo} \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} d(a_i, a_{i+1}) && \text{por la observación anterior.}
\end{aligned}
$$

Si tomamos el ínfimo sobre todas las trayectorias podemos concluir que $\eta(x,y) \leq \rho(x,y)$ y que ρ es máxima entre todas la seudométricas invariantes por la izquierda cuya restricción a V está acotada superiormente por d, lo que cumple el inciso a). En particular, $\rho \geq d$ y coinciden en V, así que se cumple el inciso b).

Observemos que si además la restricción de d a V es métrica, entonces todos los pesos en las aristas entre vértices distintos en Γ son estrictamente positivos, lo que resultaría en ρ siendo métrica y nos daría el inciso c).

Para el último inciso, sea $\varepsilon > 0$ dado. Notando que

$$\delta := \min\{d(u,v) \mid u \neq v \in V\} > 0$$

es el peso mínimo de cualquier arista, tenemos que para cualquier $x \in G$ la definición de ρ nos permite concluir que

$$
\begin{aligned}
\rho(x,e) &\geq \delta \cdot \ell_{V^{-1}V}(x) \\
&\geq \frac{\delta}{2} \cdot \ell_V(x).
\end{aligned}
$$

Por lo que si la V-longitud de x es suficientemente grande, obtenemos la desigualdad deseada: $\rho(x,e) \geq \varepsilon$. $\square$

El siguiente lema es similar al que acabamos de demostrar sólo que no le pediremos nada a V (no tendrá que ser conjunto generador) pero le pediremos a d que esté acotada por 1.

Lema 5.1.2. *Sea G un grupo con una seudométrica d invariante por la izquierda y acotada por 1, y sea V un subconjunto finito de G. Entonces existe una seudométrica ρ que cumple lo siguiente:*

a) Es máxima entre todas las seudométricas invariantes por la izquierda en G acotadas por 1 y cuya restricción a V está superiormente acotada por d.

b) Coincide con d sobre V.

Si además la restricción de d a V es métrica, entonces

c) ρ es métrica en todo G.

Demostración. Sea Ψ el conjunto de seudométricas sobre G invariantes por la izquierda, acotadas por 1, y cuyas restricciones a V son acotadas superiormente por d. Definimos entonces a ρ como

$$\rho(x,y) := \sup_{\eta\in\Psi} \eta(x,y).$$

Queda claro que $\rho \in \Psi$ es el elemento máximo y que su restricción a V coincide con d, por lo que se cumplen los incisos a) y b).

Si ahora suponemos que la restricción de d a V es métrica, definimos a η como la métrica discreta en G que toma valores $\{0,\delta\}$, donde $\delta := \text{mín}\{d(u,v) \mid u \neq v \in V\} > 0$ es definido como en el lema anterior (y es positivo por ser $d\,|_V$ métrica). Como claramente η es invariante por la izquierda, podemos aplicar el lema anterior (Lema 5.1.1) tomando como grupo a $\langle V\rangle$, subconjunto a $V \cup V^{-1} \cup \{e\}$, y métrica a η para obtener una métrica η_1 sobre $\langle V\rangle$ de tal forma que las restricciones a $V \cup V^{-1} \cup \{e\}$ de η y η_1 coinciden.

Definimos otra seudométrica ξ sobre G como

$$\xi(x,y) := \begin{cases} \text{mín}\{1, \eta_1(x,y)\} & \text{si } x^{-1}y \in \langle V\rangle \\ 1 & \text{si } x^{-1}y \notin \langle V\rangle \ . \end{cases}$$

Como, por la elección de δ, la restricción de η_1 a V está superiormente acotada por d, tenemos que $\xi \in \Psi$ y por tanto $\xi \leq \rho$. Esto implica que si $x, y \in G$ son dos elementos para los que $\rho(x,y) = 0$, entonces $\xi(x,y) = 0$, por lo que $x^{-1}y \in \langle V\rangle$ y $\eta_1(x,y) = 0$. Pero esto sólo pasa si $x = y$, pues η_1 es métrica sobre $\langle V\rangle$. Concluimos que ρ en efecto es una métrica, como deseábamos. □

Lema 5.1.3. *Sea G un grupo, H un subgrupo normal, y ρ una seudométrica invariante por la izquierda. Entonces la función $\bar{\rho}$ dada por*

$$\begin{aligned} \bar{\rho}\,(xH, yH) &:= \inf_{h_1,h_2\in H} \rho\,(xh_1, yh_2) \\ &= \inf_{h_1,h_2\in H} \rho\,(h_1x, h_2y) \\ &= \inf_{h\in H} \rho\,(hx, y) \end{aligned}$$

es una seudométrica invariante por la izquierda sobre G/H. Además, es la seudométrica máxima tal que la proyección canónica $G \to G/H$ es 1-Lipschitz.

Demostración. Lo primero es comprobar que las igualdades escritas realmente sean válidas. Como H es normal, tenemos que para cualquier elemento $x \in G$, $xHx^{-1} = H$ y como para cualquier $h_1 \in H$ se da la igualdad $xh_1 = (xh_1x^{-1})x$, entonces obtenemos la igualdad conjuntista $xH = (xHx^{-1})x = Hx$, y por ende se da la primera igualdad. Además, por la invariancia izquierda de ρ, tenemos que

$$\rho(h_1x, h_2y) = \rho(h_2^{-1}h_1x, y)$$

y como $H^{-1}H = H$ como conjuntos, obtenemos la segunda igualdad.

Falta checar que sea seudométrica invariante por la izquierda. La invariancia izquierda claramente la hereda de ρ, al igual que la simetría. Si $xH = yH$, claramente $\bar{\rho}(xH, yH) = 0$ pues podemos tomar $h = x^{-1}y$ en la última igualdad. Sólo falta demostrar que cumple la desigualdad del triángulo: para todo $h' \in H$ y todo $x, y, z \in G$ tenemos

$$\begin{aligned}
\bar{\rho}(xH, yH) &= \inf_{h\in H} \rho(hx, y) \\
&\leq \inf_{h\in H} \big(\rho(hx, h'z) + \rho(h'z, y)\big) \\
&= \inf_{h\in H} \big(\rho(hx, h'z)\big) + \rho(h'z, y) \\
&= \inf_{h\in H} \left(\rho\left((h')^{-1}hx, z\right)\right) + \rho(h'z, y) \\
&= \bar{\rho}(xH, zH) + \rho(h'z, y).
\end{aligned}$$

Como la desigualdad se vale para cualquier $h' \in H$, obtenemos la desigualdad deseada al tomar el ínfimo sobre h'.

Falta ver la maximalidad. Sea d cualquier seudométrca sobre G/H tal que la proyección $G \to G/H$ sea 1-Lipschitz. Entonces para cualesquiera $x, y \in G$ y $h_1, h_2 \in H$ tenemos

$$d(xH, yH) \leq \rho(xh_1, yh_2).$$

Si tomamos el ínfimo sobre h_1 y h_2, obtenemos que

$$d(xH, yH) \leq \bar{\rho}(xH, yH).$$

□

Lema 5.1.4. *Sea G un grupo residualmente finito con una seudométrica d invariante por la izquierda y acotada por 1. Sea $V \subset G$ un subconjunto finito tal que la restricción de d a V sea métrica. Sea ρ la métrica máxima asegurada por el Lema 5.1.2. Entonces existe un subgrupo normal $H \trianglelefteq G$ con índice finito tal que la restricción de la proyección $G \to G/H$ a V es un encaje isométrico con respecto a las métricas ρ y $\bar{\rho}$ (veremos que $\bar{\rho}$ en efecto resulta ser métrica).*

Demostración. Como antes, sea $\delta > 0$ la distancia mínima entre elementos distintos de V y sea N un entero par que satisfaga la desigualdad $(N-2)\delta \geq 1$. Si $S \subset G$ es el conjunto de elementos en G con V-longitud menor o igual a N, S resulta ser un subconjunto finito.

Como G es residualmente finito, la última caracterización en la Proposición 1.3.2 nos asegura la existencia de un subgrupo normal $H \trianglelefteq G$ de índice finito tal que $S \cap H = \{e\}$.

Veremos ahora que el ínfimo en la definición de $\bar{\rho}$ para elementos de V se alcanza en la identidad. Es decir, veremos que para cualquier par de elementos $u, v \in V$ se cumple que $\bar{\rho}(uH, vH) = \rho(u, v)$.

Tomemos, entonces, cualquier elemento $h \in H$ distinto del neutro. Hay dos casos que analizar. El primer caso es cuando $v^{-1}hu \notin \langle V\rangle$. Recordando la seudométrica ξ definida en el Lema 5.1.2, tenemos que $\xi(hu, v) = 1$. Como $\rho \geq \xi$ por la maximalidad de ρ, tenemos que $\rho(hu, v) = 1$.

El segundo caso es cuando $v^{-1}hu \in \langle V\rangle$. En este caso, por la elección de H, se tiene que $\ell_V(v^{-1}hu) \geq N - 2$. Consecuentemente,

$$\rho(hu, v) \geq \delta \cdot (N - 2) \geq 1$$

por la elección de N.

En cualquier caso, para todo $u, v \in V$ y todo $h \in H \setminus \{e\}$, tenemos que $\rho(hu, v) = 1$. Como $\rho \leq 1$, eso implica que para todo $u, v \in V$ se cumple que

$$\bar{\rho}(uH, vH) = \rho(u, v).$$

Dicho de otra forma, la restricción a V de la proyección $\pi : G \to G/H$ preserva distancias. Nótese que todavía no podemos asegurar que es encaje isométrico pues falta confirmar que $\bar{\rho}$ es métrica.

Afirmamos que $\bar{\rho}$ es la máxima seudométrica invariante por la izquierda en G/H, acotada por 1, y tal que $\pi\mid_V : V \to G/H$ preserva distancias. Si η fuera cualquier otra seudométrica así, entonces $\eta \circ \pi$ sería una seudométrica invariante por la izquierda sobre G acotada por 1 y cuya restricción a V coincide con d. La maximalidad de ρ entonces nos asegura que $\eta \circ \pi \leq \rho$. Así que para cualesquiera $x, y \in G$ y $h_1, h_2 \in H$ tenemos que

$$\begin{aligned} \eta(xH, yH) &= \eta \circ \pi(xh_1, yh_2) \\ &\leq \rho(xh_1, yh_2). \end{aligned}$$

De esta manera, si tomamos el ínfimo sobre h_1 y h_2 obtenemos $\eta(xH, yH) \leq \bar{\rho}(xH, yH)$, lo que nos asegura la maximalidad de $\bar{\rho}$.

Por último, falta checar que $\bar{\rho}$ es métrica. Si aplicamos el Lema 5.1.2 al grupo G/H con la seudométrica $\bar{\rho}$ y subconjunto $\pi(V)$, obtenemos la seudométrica maximal $\widetilde{\rho}$ entre todas las seudométricas invariantes por la izquierda, acotadas por 1, y cuya restricción a $\pi(V)$ coincide con $\bar{\rho}$. Como $\pi\mid_V : V \to G/H$ preserva distancias cuando equipamos a G/H con $\bar{\rho}$, y como $d\mid_V$ es métrica por hipótesis, entonces $\bar{\rho}\mid_{\pi(V)}$ resulta ser métrica. El mismo Lema 5.1.2 nos asegura que entonces $\widetilde{\rho}$ es métrica. Pero la maximalidad de $\bar{\rho}$ implica que $\widetilde{\rho} = \bar{\rho}$, por lo que $\bar{\rho}$ en efecto resulta ser métrica. $\square$

5.2. Iso($\mathbb{U}$) es un Grupo de Lévy

Para demostrar que Iso($\mathbb{U}$) es un grupo de Lévy necesitaremos el siguiente lema para construir los subgrupos en la familia de Lévy que aproxima a Iso($\mathbb{U}$).

Lema 5.2.1. *Sea $X \subset \mathbb{U}$ un subconjunto finito y G un grupo finito que actúa libremente por isometrías sobre X, y sean $f \in \mathrm{Iso}(\mathbb{U})$ y $\varepsilon > 0$ dados. Entonces existe un grupo finito $\widetilde{G}$, un elemento $\widetilde{f} \in \widetilde{G}$, y un espacio métrico finito Y tales que:*

a) $\widetilde{G}$ *contiene una copia isomorfa de G como subgrupo*

b) $X \subset Y \subset \mathbb{U}$

c) $\widetilde{G}$ *actúa libremente por isometrías sobre Y extendiendo la acción de G sobre X, tal que para todo elemento $x \in X$ se cumple que*

$$d(\widetilde{f}x, fx) < \varepsilon.$$

Demostración. Podemos asumir que $f(X) \cap X = \emptyset$, pues si no reemplazamos a f por otra isometría f' que sí cumpla esto y tal que $d(fx, f'x) < \varepsilon$. Veremos que $\widetilde{f}$ coincidirá en X con f', por lo que se mantendrá la desigualdad deseada. También renormalizaremos la distancia en $\mathbb{U}$ para que el diámetro de $X \cup f(X)$ sea menor que 1.

Como X es finito, en particular es compacto. De la Proposición 3.3.3 se sigue que la acción de G sobre X puede extenderse a una acción sobre todo $\mathbb{U}$.

Elegimos un punto $\xi \in \mathbb{U}$ que esté a distancia uno de todo $x \in X \cup f(X)$; es decir, $d(\xi, x) = 1$. Dicho punto existe porque podemos construir el espacio $X \cup f(X)$ con la distancia heredada de $\mathbb{U}$ y le agregamos un punto ξ que esté a distancia uno de todos los demás puntos. Al ser un espacio métrico finito, utilizando la propiedad de extensión de $\mathbb{U}$ lo podemos se encajar isométricamente en $\mathbb{U}$ de tal forma que los puntos $X \cup f(X)$ coincidan con su posición original.

Sea $\Theta := X/G$ el conjunto de G-órbitas de X. Para cada órbita $\theta \in \Theta$ elegimos un punto representante $x_\theta \in \theta$ y una isometría $f_\theta \in \mathrm{Iso}(\mathbb{U})$ tal que

$$f_\theta(\xi) = x_\theta.$$

Sea $n = |\Theta|$ y sea F_n el grupo libre de n generadores. Para facilitar notación, denotaremos a cada uno de esos generadores como f_θ, con los índices recorriendo Θ. También denotaremos por f al generador del grupo $\mathbb{Z}$ y construimos el grupo

$$F := \mathbb{Z} * G * F_n.$$

Al ser F un producto libre de grupos residualmente finitos, la Proposición 1.3.3 nos asegura que F es residualmente finito. Definiendo la acción de los generadores de F sobre $\mathbb{U}$ mediante la identificación natural sugerida por la notación –o sea, $f \cdot x := f(x)$, $f_\theta \cdot x := f_\theta(x)$, y $g \cdot x := gx$ dada por la acción de G sobre $\mathbb{U}$–, podemos extenderla a una acción de todo F sobre $\mathbb{U}$.

Tomemos el siguiente subconjunto finito de F:

$$V := \{g \circ f_\theta \mid g \in G, \theta \in \Theta\} \cup \{f \circ g \circ f_\theta \mid g \in G, \theta \in \Theta\}.$$

Definimos la siguiente seudométrica:

$$d_\xi(g,h) := \text{mín}\Big\{1,\ d\big(g(\xi), h(\xi)\big)\Big\}.$$

Nótese que es invariante por la izquierda bajo la acción de F (pues F actúa por isometrías sobre $\mathbb{U}$) y está acotada por 1.

Observación 5.2.2. *El conjunto V equipado con la seudométrica d_ξ es un espacio métrico.*

Para ver esto basta checar que si la distancia entre dos elementos de V es 0 entonces deben ser iguales. Tomemos el caso en el que ambos elementos fueran de la primera forma; eso es, sean $g \circ f_\theta$, $h \circ f_\phi \in V$ tales que

$$d_\xi\big(g \circ f_\theta, h \circ f_\phi\big) = 0.$$

Por la definición de d_ξ, esto implica que

$$\begin{aligned}
&d\big(g \circ f_\theta(\xi), h \circ f_\phi(\xi)\big) = 0\\
\Longrightarrow\ & g \circ f_\theta(\xi) = h \circ f_\phi(\xi)\\
\Longrightarrow\ & g(x_\theta) = h(x_\phi)\\
\Longrightarrow\ & x_\theta = (g^{-1} \circ h)(x_\phi).
\end{aligned}$$

Esto nos dice que x_θ está en la G-órbita de x_ϕ. Como sólo elegimos un representante por órbita, esto sólo puede pasar si $\theta = \phi$, y por ende $f_\theta = f_\phi$. Entonces, regresando a la ecuación anterior, tenemos que

$$(g^{-1} \circ h)(x_\theta) = x_\theta.$$

Pero eso nos dice que x_θ es punto fijo de $g^{-1} \circ h \in G$. Como G actúa libremente sobre X, esto implica que $g^{-1} \circ h$ es la identidad, o que $g = h$. Concluimos que $g \circ f_\theta = h \circ f_\phi$.

Si tenemos dos elementos de la forma $f \circ g \circ f_\theta$ y $f \circ h \circ f_\phi$ cuya d_ξ-distancia es nula, obtenemos

$$f \circ g \circ f_\theta(\xi) = f \circ h \circ f_\phi(\xi).$$

Al multiplicar ambos lados por la inversa de f regresamos al caso anterior y podemos volver a concluir la igualdad de ambos términos.

El último caso sería si obtuviéramos que

$$\begin{aligned} & d_\xi(f \circ g \circ f_\theta, h \circ f_\phi) = 0 \\ \implies & f \circ g \circ f_\theta(\xi) = h \circ f_\phi(\xi). \end{aligned}$$

Pero nótese que el lado derecho es un elemento en la G-órbita de x_ϕ; en particular, es un elemento en X. Sin embargo, el lado izquierdo es un elemento en $f(X)$ y dado que estos conjuntos son disjuntos por suposición inicial, este caso no puede ocurrir.

Concluimos que en todos los casos si la d_ξ-distancia entre dos elementos de V es 0 entonces los elementos son iguales. Por consiguiente (V, d_ξ) es un espacio métrico.

Concluida la observación, analicemos la evaluación en ξ:

$$\mathrm{ev} : F \to X \cup f(X).$$

Veamos que restringida a V es una isometría:

$$\mathrm{ev}\,|_V \colon V \to X \cup f(X).$$

Es fácil checar que, prácticamente por definición de d_ξ y el hecho de que el diámetro de $X \cup f(X)$ es menor que 1, la evaluación preserva distancias. Además es una función suprayectiva: para cualquier punto $x \in X$, como las órbitas forman una partición de X, existe una órbita $\theta \in \Theta$ tal que $x \in \theta$. Esto significa que existe un elemento $g \in G$ tal que $x = gx_\theta$, por lo que $\mathrm{ev}(g \circ f_\theta) = x$. Para un punto en $f(X)$ la misma lógica nos da que $\mathrm{ev}(f \circ g \circ f_\theta) = f(x)$.

Ahora, tomemos el conjunto

$$V_1 := \{g \circ f_\theta \mid g \in G, \theta \in \Theta\},$$

si dejamos que G actúe sobre V_1 mediante composición por la izquierda, entonces

$$\mathrm{ev}\,|_{V_1} \colon V_1 \to X$$

es un isomorfismo de G-espacios. Durante el transcurso de esta demostración ya se vio que $\mathrm{ev}\,|_V$ es inyectiva, así que la restricción a V_1 también lo es. También vimos que es suprayectiva, por lo que sólo falta ver que conmute con la acción de G. Pero esto es sencillo, pues para cualquier $h \in G$, tenemos que

$$\mathrm{ev}\left(h(g \circ f_\theta)\right) = \mathrm{ev}(h \circ g \circ f_\theta) = (h \circ g \circ f_\theta)(\xi) = h\left(\mathrm{ev}(g \circ f_\theta)\right).$$

Como $d_\xi\,|_V$ es una métrica, se cumplen las condiciones del Lema 5.1.2 y por consiguiente existe una métrica ρ sobre F invariante por la izquierda, acotada por 1, y cuya restricción a V coincide con d_ξ. Dado que F es el producto libre de tres grupos residualmente finitos, F también es residualmente finito (Lema 1.3.3). Así que se cumplen las condiciones del

Lema 5.1.4 y consecuentemente existe un subgrupo normal $H \trianglelefteq F$ de índice finito y una métrica $\bar{\rho}$ sobre F/H tal que la restricción a V de la proyección canónica

$$\pi\mid_V : V \to F/H$$

es un encaje isométrico. Además podemos elegir a H de tal forma que $H \cap G = \{e\}$, con lo que $\pi\mid_G$ resulta ser un monomorfismo.

Definimos al grupo $\widetilde{G} := F/H$ y notamos que actúa sobre sí mismo bajo traslaciones izquierdas. La invariancia izquierda de $\bar{\rho}$ nos permite ver a esta acción como una acción libre por isometrías sobre el espacio métrico $Y := (F/H, \bar{\rho})$.

La composición

$$\pi \circ \left(\mathrm{ev}\mid_V\right)^{-1} : X \cup f(X) \to Y$$

es un encaje isométrico ya que $\mathrm{ev}\mid_V : V \to X \cup f(X)$ es una isometría, y por tanto su inversa también. Al componerla con la función $\pi\mid_V$, que también preserva distancias, nos da un encaje isométrico.

Ahora, si definimos a $\widetilde{f}$ como la clase de f en F/H, es claro que $\widetilde{f}\mid_X = f\mid_X$, identificando cada $x \in X$ y $f(x)$ con su imagen en $Y = F/H$ bajo el encaje anterior.

Concluimos que $\pi\mid_G : G \to \widetilde{G}$ es un monomorfismo, con lo que $G \leq \widetilde{G}$ y además X se encaja en Y como G-espacio. Como además $X \cup f(X)$ se encaja en Y, y Y en turno se encaja en $\mathbb{U}$, el encaje $X \cup f(X) \hookrightarrow Y$ puede verse como un g-encaje. $\square$

Armados con este resultado y la serie de lemas técnicos anteriores ya casi estamos listos para demostrar nuestro resultado principal. Demostraremos un teorema de Vershik que, además de ser útil, contiene en su demostración las técnicas y la estructura que utilizaremos para demostrar que Iso($\mathbb{U}$) es un grupo de Lévy. Durante la demostración recurriremos al siguiente lema:

Lema 5.2.3. *Sea X un espacio topológico T_1 y sea D un subconjunto denso en X. Entonces X no tiene puntos aislados si y sólo si para cualquier subconjunto finito $F \subset D$ se tiene que $D \setminus F$ sigue siendo denso.*

Teorema 5.2.4. Iso($\mathbb{U}$) *contiene un subgrupo numerable localmente finito y denso.*

Demostración. Construiremos el subgrupo buscado recursivamente. Como Iso($\mathbb{U}$) es segundo numerable, tomemos un subconjunto $F = \{f_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ denso y numerable en Iso($\mathbb{U}$). Sea $x_1 \in \mathbb{U}$ un punto arbitrario fijo.

Como paso inicial definimos a G_0 como el grupo trivial, $X_0 := \{x_1\}$, y dejamos que G_0 actúe por isometrías sobre $\mathbb{U}$ de la manera evidente. Notemos que la restricción de dicha acción a la G_0-órbita de X_0 es libre.

Supongamos que para un $n \in \mathbb{N}$ hemos elegido un grupo finito G_n, una acción por isometrías σ_n de G_n sobre $\mathbb{U}$, y una colección de puntos $X_n = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2^n}\}$ tales que la restricción de la acción σ_n a la G_n-órbita de X_n es trivialmente libre.

Utilizamos el Lema 5.2.1 para elegir un grupo finito G_{n+1} que contiene a (una copia isomorfa de) G_n, un elemento $\widetilde{f_n} \in G_{n+1}$, y una acción por isometrías σ_{n+1} de G_{n+1} sobre $\mathbb{U}$ tal que

$$\sigma_{n+1}(g)x_j = \sigma_n(g)x_j$$

para todo $g \in G_n$, y todo $x_j \in X_n$. Nótese que si definimos $x_{2^n+j} := \sigma_{n+1}(\widetilde{f_n})x_j$ para cada $j = 1, 2, 3, \ldots, 2^n$, tenemos que dichos puntos son distintos de cualquier x_i con $i \leq 2^n$ (pues recordemos que $\widetilde{f_n}(X_n) \cap X_n = \emptyset$). Definimos $X_{n+1} := \{x_1, \ldots, x_{2^{n+1}}\}$. Entonces la restricción de σ_{n+1} a la G_{n+1}-órbita de X_{n+1} es una acción libre y además

$$d\left(f_n(x_j), \widetilde{f_n}(x_j)\right) < 2^{-n}.$$

Así concluimos la recursión. Ahora veremos que el conjunto $X := \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ es denso en $\mathbb{U}$. Primero observemos que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ fijo, el conjunto $\{f_i(x_n) \mid i \geq n\}$ es denso en $\mathbb{U}$. Para esto, sea $y \in \mathbb{U}$ cualquier punto y $\varepsilon > 0$. Recordando que F es denso en Iso($\mathbb{U}$) con la topología punto-abierta, por el Lema 5.2.3 y el Corolario 4.1.7 tenemos que el conjunto $\{f_i \in F \mid i \geq n\}$ también lo es, por lo que existe $f_k \in F$ con $k \geq n$ tal que $f_k \in M\left(x_n, B_\varepsilon(y)\right)$; equivalentemente, $f_k(x_n) \in B_\varepsilon(y)$. Como el conjunto $\{\widetilde{f_i}(x_n) \mid i \geq n\}$ está a distancia menor que 2^{-n} de $\{f_i(x_n) \mid i \geq n\}$, tenemos que $\bigcup_{n=0}^{\infty}\{\widetilde{f_i}(x_n) \mid i \geq n\}$ es denso en $\mathbb{U}$. Como X contiene a este último conjunto, X es denso.

Por la Proposición 1.3.5, el grupo $G := \bigcup_{n=0}^{\infty} G_n$ resulta localmente finito. Además, por la compatibilidad entre las acciones σ_n, G actúa sobre X de manera natural:

$$g \cdot x_i = \sigma_n(g)x_i$$

donde n es cualquier natural suficientemente grande (en particular, que $2^n > i$ y que $g \in G_n$ para que la acción esté definida). Más aún, cada $g \in G$ actúa como un encaje isométrico $X \hookrightarrow \mathbb{U}$. En efecto, dados $x_i, x_j \in X$, si $n \in \mathbb{N}$ es tal que $2^n > \text{máx}\{i, j\}$ y $g \in G_n$, tenemos que

$$\begin{aligned} d\left(gx_i, gx_j\right) &= d\left(\sigma_n(g)x_i, \sigma_n(g)x_j\right) \\ &= d(x_i, x_j) \end{aligned}$$

pues $\sigma_n(g)$ es isometría. Así, al ser X denso, existe una única isometría que extiende la acción de g sobre X a todo $\mathbb{U}$. Además, para cualesquiera dos elementos $g, h \in G$ tenemos que

$$\begin{aligned} (gh)x_i &= \sigma_n(gh)x_i \\ &= \sigma_n(g)\left(\sigma_n(h)x_i\right) \\ &= g\left(h(x_i)\right) \end{aligned}$$

para n suficientemente grande. Por lo que podemos concluir que G actúa por isometrías sobre $\mathbb{U}$.

Por último demostraremos que G es denso. Basta considerar vecindades de la forma

$$\{f \in \mathrm{Iso}(\mathbb{U}) \mid d\left(f(x_i), g(x_i)\right) < \varepsilon, i = 1, 2, \ldots, n\} = \bigcap_{i=1}^{n} M\left(x_i, B_\varepsilon\left(g(x_i)\right)\right)$$

donde $x_i \in X$, $g \in \mathrm{Iso}(\mathbb{U})$, $n \in \mathbb{N}$, y $\varepsilon > 0$.

Como cualquier cola de F (o sea, F salvo los primeros n términos, para cualquier $n \in \mathbb{N}$) es densa (Lema 5.2.3 y Corolario 4.1.7), existe $f_m \in F$ con m suficientemente grande para que $n \leq 2^{m-1}$ y $2^{-m} < \varepsilon/2$ tal que

$$d\left(f_m(x_i), g(x_i)\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Además, por la elección de m se cumple que

$$d\left(\widetilde{f_m}(x_i), f_m(x_i)\right) < 2^{-m} < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Por la desigualdad del triángulo concluimos que

$$d\left(\widetilde{f_m}(x_i), g(x_i)\right) < \varepsilon$$

para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Recordando que $\widetilde{f_m} \in G_m \leq G$, obtenemos un elemento de G en la vecindad básica dada.

$\square$

Antes de proseguir al resultado principal de este trabajo necesitamos un último resultado auxiliar. Tomemos un espacio métrico finito (X, d), y un conjunto finito, Z. Entonces al espacio de funciones X^Z le proporcionamos la medida de conteo normalizada y la métrica de Hamming normalizada:

$$d_1(f, g) := \frac{1}{|Z|} \sum_{z \in Z} d\left(f(z), g(z)\right)$$

para todo $f, g \in X^Z$. Sea $n = |Z|$ y denotemos por a al diámetro de X. Entonces, con la métrica d_1 de arriba, tenemos que cada factor de X en el espacio X^n tiene diámetro a/n, pues cualquier función punto en un factor de X representa una función que es constante en todas las coordenadas salvo una. Por lo que, para cualesquiera dos funciones, f y g, la distancia d_1 entre ellas sólo depende de una coordenada (ya que en todas las demás f y g valen lo mismo). Así, si $X_k := \{x_1\} \times \{x_2\} \times \cdots \times \{x_{k-1}\} \times X \times \{x_{k+1}\} \times \cdots \times \{x_n\}$ es el k-ésimo factor de X^n, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\text{diám}\,(X_k) &= \sup_{f,g\in X_k} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d\big(f(i),g(i)\big) \\
&= \frac{1}{n}\max_{x,y\in X} d\,(x,y) && \text{pues } f(i)=g(i) \text{ para todo } i\neq k \\
&= \frac{a}{n}.
\end{aligned}
$$

Sustituyendo este resultado en el Ejemplo 2.1.2, obtenemos que la función de concentración para X^n satisface la siguiente desigualdad:

$$\alpha_{X^n}(\varepsilon) \leq 2e^{-n\varepsilon^2/8a^2}. \tag{5.1}$$

Además, nótese que con esta métrica podemos encajar X en X^n de forma isométrica mandando cada punto a la función constante correspondiente. Si además tenemos un grupo finito G que actúa sobre X por isometrías, la acción se extiende naturalmente a una acción por isometrías de G^n sobre X^n. Más aún, si la acción de G es libre, también lo es la de G^n. Con esto en mente, el momento que todos hemos estado esperando:

Teorema 5.2.5. *El grupo de isometrías de Urysohn es un grupo de Lévy. Más aún, los grupos en la familia de Lévy correspondiente pueden ser elegidos de tal forma que sean finitos.*

Demostración. Como ya habíamos dicho, la estructura de la demostración será similar a la del teorema de Vershik (Teorema 5.2.4). Construiremos la familia de Lévy recursivamente. Empezaremos por definir $G_1 := \{e\}$ al grupo trivial y $X_1 := \{x_1\}$, donde $x_1 \in \mathbb{U}$ es un punto arbitrario fijo.

Para $n \in \mathbb{N}$ asumamos que tenemos un grupo finito G_n, una acción σ_n de G_n sobre $\mathbb{U}$ por isometrías, y un subconjunto finito $X_n \subset \mathbb{U}$ que es G_n-invariante. Supongamos, además, que la acción σ_n restringida a X_n es libre.

Para el paso recursivo, sea a_n el diámetro de X_n. Entonces elegimos un número $m_n \in \mathbb{N}$ tal que

$$m_n \geq 8a_n^2 n.$$

Por la discusión anterior al teorema presente sabemos que si a $\widetilde{X}_n := X_n^{m_n}$ le damos la métrica de Hamming normalizada entonces existe un encaje isométrico $X_n \hookrightarrow \widetilde{X}_n$, el cual podemos extender a un encaje isométrico $\widetilde{X}_n \hookrightarrow \mathbb{U}$ gracias a la ultrahomogeneidad de $\mathbb{U}$.

Además, el grupo $\widetilde{G}_n := G_n^{m_n}$ actúa libremente sobre $\widetilde{X}_n$ por isometrías. Recordando que todo encaje de un compacto en $\mathbb{U}$ es un g-encaje (Proposición 1.4.2), existe una acción global $\widetilde{\sigma_n}$ de $\widetilde{G}_n$ sobre $\mathbb{U}$ que extiende a la acción de $\widetilde{G}_n$ sobre $\widetilde{X}_n$.

Construiremos G_{n+1} y σ_{n+1} como en la demostración anterior, sólo que empezando con $\widetilde{G}_n$ y $\widetilde{X}_n$ en lugar de G_n y $\{x_1, x_2, \ldots, x_{2^n}\}$. Es decir, utilizamos el Lema 5.2.1 para obtener un grupo finito G_{n+1} que contiene una copia isomorfa de $\widetilde{G}_n$, un elemento $\widetilde{f_n} \in G_{n+1}$, y una acción por isometrías σ_{n+1} de G_{n+1} sobre $\mathbb{U}$ tales que:

a) $\sigma_n(g)x = \sigma_{n+1}(g)x$ para todo $g \in \widetilde{G}_n$ y todo $x \in \widetilde{X}_n$

b) $\widetilde{f_n}\left(\widetilde{X}_n\right) \cap \widetilde{X}_n = \emptyset$

c) $d_{\mathbb{U}}\left(f_n(x), \widetilde{f_n}(x)\right) < 2^{-n}$ para todo $x \in \widetilde{X}_n$

d) La restricción de σ_{n+1} a $X_{n+1} := G_{n+1} \cdot \widetilde{X}_n$ es una acción libre.

Así se cumple el paso recursivo, pues obtuvimos un grupo finito G_{n+1} que actúa por isometrías sobre $\mathbb{U}$ y actúa libremente sobre un conjunto G_{n+1}-invariante finito X_{n+1}.

Como en el teorema anterior, definimos

$$G := \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{G}_n \leq \mathrm{Iso}(\mathbb{U}).$$

Por el mismo argumento que en el Teorema 5.2.4 tenemos que G es denso y localmente finito. Falta demostrar que la sucesión $(\widetilde{G}_n)$ forma una familia de Lévy con respecto a la estructura uniforme de Iso($\mathbb{U}$).

A cada grupo $\widetilde{G}_n = G_n^{m_n}$ le daremos la métrica de Hamming heredada de la métrica discreta en G_n. Así, sea V_ε la ε-vecindad de la identidad en $\widetilde{G}_n$. Entonces para todo punto $g \in V_\varepsilon$ y todo $x \in \widetilde{X}_n = X_n^{m_n}$ se tiene que

$$d_1\left(g \cdot x, x\right) < \varepsilon \cdot a_n$$

donde a_n es el diámetro de X_n. Esto se ve claramente si $\varepsilon \geq 1$. Si $(k-1)/m_n \leq \varepsilon < k/m_n$ para alguna $k \leq m_n$, esto implica que g difiere de la identidad en a lo más $k-1$ coordenadas. Por lo que x y $g \cdot x$ difieren a lo más en $k-1$ coordenadas. Como en cada una de esas coordenadas no pueden diferir más que el diámetro de X, obtenemos la desigualdad anterior. Por lo que si $g \in V_{\varepsilon/a_n}$, tendríamos que para todo $x \in \widetilde{X}_n$

$$d_1\left(g \cdot x, x\right) < \varepsilon.$$

Tomamos una vecindad básica de la identidad en Iso($\mathbb{U}$):

$$V[x_1, \ldots, x_r; \varepsilon] := \bigcap_{i=1}^{r} M\left(x_i, B_\varepsilon\left(x_i\right)\right).$$

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que los x_i son puntos en $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, ya que este último conjunto es denso en $\mathbb{U}$. En particular, existe $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande como para que $x_1, \ldots, x_r \in X_k$, ya que los X_k forman una cadena por inclusión. Denotemos por μ_n a la medida de Haar del grupo $\widetilde{G}_n$. Entonces, para toda $n \geq k$, si $A_n \subset \widetilde{G}_n$ ocupa al menos la mitad del espacio (es decir, si $\mu_n\left(A_n\right) \geq 1/2$), obtenemos que

$$\mu_n\left(V_{\varepsilon/a_n}\cdot A_n\right)\geq 1-2e^{-m_n\varepsilon^2/8a_n^2}$$

al aplicar la ecuación 5.1. Como $V_{\varepsilon/a_n}\cdot A_n\subset V[x_1,\ldots,x_r;\varepsilon]\cdot A_n$, se da que

$$\begin{aligned}\mu_n\left(\widetilde{G}_n\cap V[x_1,\ldots,x_r;\varepsilon]\cdot A_n\right)&\geq \mu_n\left(V_{\varepsilon/a_n}\cdot A_n\right)\\&\geq 1-2e^{-m_n\varepsilon^2/8a_n^2}\\&\geq 1-2e^{-n\varepsilon^2}\end{aligned}$$

pues elegimos $m_n\geq 8a_n^2 n$. Consecuentemente,

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n\left(\widetilde{G}_n\cap V[x_1,\ldots,x_r;\varepsilon]\cdot A_n\right)=1.$$

Concluimos que los $(\widetilde{G}_n)$ en efecto forman una familia de Lévy.

□

Aplicando el Teorema 2.5.4 obtenemos el resultado central de este trabajo:

Teorema 5.2.6. *El grupo de isometrías de Urysohn es un grupo de Lévy.*

Aunque probablemente no sea la manera más sencilla o directa de demostrarlo, el siguiente corolario ahora se sigue fácilmente de la Observación 2.5.2 (aunque también del Teorema 4.1.6).

Corolario 5.2.7. Iso($\mathbb{U}$) *no es localmente compacto.*

Como ya habíamos mencionado, el que Iso($\mathbb{U}$) sea extremadamente amenizable implica que no es isomorfo (como grupo topológico) al grupo de homeomorfismos del cubo de Hilbert, y esto a pesar de que ambos son grupos versales en la clase de grupos segundo numerables.

Corolario 5.2.8. *El grupo de isometrías de Urysohn no es isomorfo como grupo topológico al grupo de homeomorfismos del cubo de Hilbert.*

Demostración. Nótese que el grupo de homeomorfismos del cubo de Hilbert $\mathcal{H}(Q)$, actúa libremente sobre un espacio compacto: el cubo de Hilbert Q. Esto significa que $\mathcal{H}(Q)$ no es extremadamente amenizable, a diferencia de Iso($\mathbb{U}$). □

Finalmente, podemos usar que Iso($\mathbb{U}$) es de Lévy para concluir que el espacio de Urysohn tiene la propiedad RDM.

Teorema 5.2.9. *El espacio universal de Urysohn, como* Iso($\mathbb{U}$)*-espacio, tiene la propiedad de Ramsey-Dvoretzky-Milman.*

Demostración. Veremos que $\mathbb{U}$ satisface las condiciones del Teorema 2.4.8. Tomamos a la familia de los $\widetilde{G}_n$ en la demostración de que Iso($\mathbb{U}$) es grupo de Lévy (Teorema 5.2.5) y cualquier punto arbitrario fijo $\xi \in \mathbb{U}$. Entonces, como $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{G}_n$ es denso en Iso($\mathbb{U}$), la unión de las órbitas $\widetilde{G}_n \cdot \xi$ es densa en $\mathbb{U}$. Además, como la función $g \mapsto g \cdot \xi$ es uniformemente continua (Lema 1.2.17) y la concentración de medida se preserva bajo pushforwards (Lema 2.1.6), tenemos que $(\widetilde{G}_n \cdot \xi)$ forma una familia de Lévy. Así que se cumplen las condiciones del teorema y concluimos que el Iso($\mathbb{U}$)-espacio $\mathbb{U}$ tiene la propiedad de RDM. $\square$

Como prometido, Iso($\mathbb{U}$) junta varias propiedades sorprendentes usualmente presentes sólo en espacios infinito-dimensionales: es extremadamente amenizable, exhibe el fenómeno de concentración de medida en grupos de Lévy y el fenómeno de Ramsey-Dvoretzky-Milman. Además es versal entre los grupos segundo-numerables pero distinto de $\mathcal{H}(Q)$. Es un objeto extraordinario y si nadie lo usa para nada más que matemáticas puras, Wilde y Hardy sonreirán.

Bibliografía

[1] A. G. Aksoy and Z. Glassman and O. Kosheleva and V. Kreinovich, *From Urysohn's universal metric space to a universal spacetime*, Mathematical Structures and Modeling, Vol. 28, no. 2 (2013), 28-34.

[2] A. Arhangel'skii and M. Tkachenko, *Topological Groups and Related Structures, An Introduction to Topological Algebra*, Atlantic Press, 2008.

[3] T. Ceccherini-Silberstein and M. Coornaert, *Cellular Automata and Groups*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010.

[4] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[5] M. Fréchet, *Les dimensions d'un ensemble abstrait*, Math. Ann. 68 (1910), 145-168.

[6] G. B. Folland, *A Course in Abstract Harmonic Analysis*, CRC Press, 1995.

[7] E. Glasner, *On minimal actions of Polish groups*, Topology and its Applications 85 (1998), 119-125.

[8] T. Giordano and V. Pestov, *Some extremely amenable groups*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002), 273-278.

[9] T. Giordano and V. Pestov, *Some extremely amenable groups related to operator algebras and ergodic theory*, Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu, vol. 6, no.2 (2007), 279-315.

[10] M. Gromov and V. D. Milman, *A topological application of the isoperimetric inequality*, American Journal of Mathematics, Vol. 105, No. 4 (1983), 843-854.

[11] K. W. Gruenberg, *Residual properties of infinite soluble groups*, Proc. London Math. Soc., Vol. s3-7, no. 1 (1955), 29-62.

[12] M. R. Holmes, *The universal separable metric space of Urysohn and isometric embeddings thereof in Banach spaces*, Fundamenta Mathematicae, Vol. 140, no. 3 (1991-1992), 199-223.

[13] M. Hušek, *Urysohn universal space, its development and Hausdorff's approach*, Topology and its Applications, Vol. 155, no. 14 (2008), 1493-1501.

[14] A.S. Kechris, V.G. Pestov and S. Todorcevic, *Fraïssé limits, Ramsey theory, and topological dynamics of automorphism groups*, Geometric And Functional Analysis, Vol. 15 (2015), 106-189.

[15] M. Ledoux, *The Concentration of Measure Phenomenon*, Math. Surveys and Monographs, Vol. 89, Amer. Math. Soc., 2001.

[16] J. Melleray, *Some geometric and dynamical properties of the Urysohn space*, Topology and its Applications, Vol. 155, no. 14 (2008), 1531-1560.

[17] J. Melleray, *Topology of the isometry group of the Urysohn space*, Fundamenta Mathematicae, vol. 207, no. 3 (2010), 273–287.

[18] A. Naor, *Concentration of measure*, Notes from Naor's 2008 Fall Princeton topics course, https://web.math.princeton.edu/ naor/, accedido 10 agosto 2018.

[19] V. Pestov, *Ramsey-Milman phenomenon, Urysohn metric spaces, and extremely amenable groups*, Israel Journal of Mathematics 127 (2002), 317-357.

[20] V. Pestov, *Dynamics of Infinite-dimensional Groups: the Ramsey-Dvoretzky-Milman Phenomenon*, University Lecture Series 40, American Mathematical Society, 2006.

[21] V. Pestov, *The isometry group of the Urysohn space as a Lévy group*, Topology and its Applications 154 (2007), 2173-2184.

[22] D. J. S. Robinson, *A Course in the Theory of Groups*, Graduate Texts in Mathematics 80, Springer-Verlag, New York, 1996.

[23] V. Uspenskij, *The Urysohn universal metric space is homeomorphic to a Hilbert space*, Topology and its Applications, Vol. 139, no. 1-3 (2004), 145-149.

[24] W. A. Veech, *Topological Dynamics*, Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 83, no. 5 (1997), 775-830.