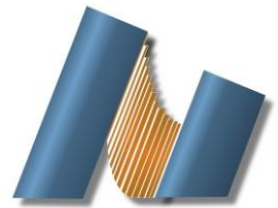




**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**CENTRO DE NANOCIENCIAS Y NANOTECNOLOGÍA**



**LICENCIATURA EN NANOTECNOLOGÍA**  
**EJE DE NANOESTRUCTURAS**

**ANÁLOGOS CLÁSICOS DE UN SISTEMA CUÁNTICO DE DOS NIVELES**

**TESIS**  
**QUE PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE:**  
**LICENCIADO EN NANOTECNOLOGÍA**

**PRESENTA:**  
**JORGE ALEJANDRO GUERRERO MARTÍNEZ**

**DIRECTOR DE TESIS**  
**DR. JESÚS ALBERTO MAYTORENA CÓRDOVA**

**ENSENADA, BAJA CALIFORNIA, ENERO 2019**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hago constar que el trabajo que presento es de mi autoría y que todas las ideas, citas textuales, datos, ilustraciones, gráficas, etc. sacados de cualquier obra o debidas al trabajo de terceros, han sido debidamente identificados y citados en el cuerpo del texto y en la bibliografía y acepto que en caso de no respetar lo anterior puedo ser sujeto de sanciones universitarias.

Afirmo que el material presentado no se encuentra protegido por derechos de autor y me hago responsable de cualquier reclamo relacionado con la violación de derechos de autor.

---

*Jorge Alejandro Guerrero  
Martínez*

# Resumen

En este trabajo, se estudia la teoría semiclásica de la interacción materia-luz y su descripción en términos de un sistema de osciladores armónicos clásicos acoplados. Primero, se abordan las transiciones de Landau-Zener y su analogía clásica. Después, se emplea un modelo de un átomo de dos niveles para estudiar el fenómeno de las oscilaciones de Rabi desde el enfoque semiclásico. Luego, se presenta una analogía clásica, en forma una modulación de los parámetros del sistema clásico. Finalmente, se amplía la descripción a un sistema de dos niveles asimétrico. Asimismo, se extiende la analogía para este caso y se discute brevemente el efecto de la violación de la simetría en el sistema clásico.

*Para mi familia: Jorge, Eloisa y Andrea.*

# Agradecimientos

En primer lugar, quisiera expresar mi enorme agradecimiento a mis padres, Jorge y Eloisa y a mi hermana, Andrea. Si no fuera por ellos, no me encontraría ahora en la situación privilegiada en la que estoy ahora. Son un ejemplo para mí y me enseñaron lo importante que es dar el máximo y persistir para lograr lo que uno desea.

A mi tutor, el Dr. Jesús Alberto Maytorena Córdova por los comentarios oportunos que han sido de gran ayuda durante este año. Sin embargo, estoy especialmente agradecido por ayudarme a reencontrarme con el gusto de aprender por la única motivación de aprender.

Agradezco a Eréndira, por apoyarme en todo momento. Por creer en mí, aún cuando yo no lo hacía. Por ayudarme a crecer e inspirarme a ser mejor cada día.

A los amigos que conocí en Ensenada por los buenos momentos y las jornadas de videojuegos. De todos aprendí algo y sé que lograrán lo que se propongan.

# Contenido

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Osciladores armónicos clásicos acoplados</b>	<b>3</b>
2.1. Motivación . . . . .	3
2.2. Perspectiva clásica del anticruce de niveles . . . . .	3
2.2.1. Ecuaciones de movimiento . . . . .	3
2.2.2. Cambio de base con eigenvalores y eigenvectores . . . . .	5
2.2.3. Modos normales . . . . .	6
2.2.4. Modulación de la constante de resorte . . . . .	7
2.2.5. Transición adiabática . . . . .	8
2.2.6. Transición diabática . . . . .	9
<b>3. Interacción materia-luz: sistema de dos niveles</b>	<b>12</b>
3.1. Tratamiento semiclásico . . . . .	12
3.1.1. Átomo de dos niveles: Hamiltoniano . . . . .	12
3.2. Modelo clásico de Rabi . . . . .	15
3.2.1. Consideraciones importantes y Hamiltoniano . . . . .	15
3.2.2. Transformación a un marco de referencia rotatorio y aproximación cuasi-resonante . . . . .	16
3.2.3. Solución de la ecuación de Schrödinger . . . . .	17
3.2.4. Oscilaciones de Rabi . . . . .	18
3.2.5. Momento dipolar inducido . . . . .	21
3.3. Esfera de Bloch . . . . .	21
3.3.1. Definición de la esfera de Bloch . . . . .	21
3.3.2. Oscilaciones de Rabi en la esfera de Bloch . . . . .	23
<b>4. Ecuaciones clásicas de Bloch</b>	<b>25</b>
4.1. Introducción . . . . .	25
4.2. Átomo mecánico . . . . .	25
4.2.1. Ecuaciones de movimiento . . . . .	25
4.2.2. Eigenvalores y eigenvectores . . . . .	27
4.2.3. Modos normales . . . . .	28
4.2.4. Envolvente lenta . . . . .	29

4.2.5.	Modulación paramétrica . . . . .	30
4.2.6.	Solución general . . . . .	31
4.3.	Esfera de Bloch Clásica . . . . .	32
4.3.1.	Definición de la esfera de Bloch . . . . .	32
4.3.2.	Oscilaciones de Rabi clásicas . . . . .	34
4.3.3.	Franjas de Ramsey clásicas . . . . .	35
4.3.4.	Experimento de Hahn clásico . . . . .	36
4.4.	Diferencias con el sistema de dos niveles . . . . .	37
<b>5.</b>	<b>Interacción materia-luz: sistema de dos niveles asimétrico</b>	<b>39</b>
5.1.	Transformación del Hamiltoniano a un marco de referencia rotatorio . . . . .	39
5.2.	Aproximación cuasi-resonante . . . . .	40
5.3.	Solución de la ecuación de Schrödinger . . . . .	41
5.4.	Momento dipolar inducido . . . . .	43
<b>6.</b>	<b>Sistema de dos niveles asimétrico: análogo clásico</b>	<b>46</b>
6.1.	Introducción . . . . .	46
6.2.	Átomo mecánico . . . . .	46
6.2.1.	Ecuaciones de movimiento . . . . .	46
6.2.2.	Eigenmodos . . . . .	47
6.2.3.	Envolvente lenta . . . . .	48
6.2.4.	Modulación paramétrica del acoplamiento . . . . .	48
6.2.5.	Solución general . . . . .	49
6.3.	Discusiones . . . . .	51
<b>7.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>53</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>55</b>
<b>A.</b>	<b>Obtención de la fórmula de Landau-Zener</b>	<b>59</b>
A.1.	Procedimiento . . . . .	59
A.2.	Sustento de la solución . . . . .	60
<b>B.</b>	<b>Identidad útil para transformaciones unitarias</b>	<b>62</b>
<b>C.</b>	<b>Obtención de la fórmula clásica de Rabi</b>	<b>63</b>
<b>D.</b>	<b>Solución general del análogo clásico de un sistema de dos niveles asimétrico</b>	<b>65</b>



# Capítulo 1

## Introducción

La analogía es un proceso muy importante para comprender algún fenómeno de la Naturaleza. Al analizar y comparar fenómenos distintos que se relacionan por algunas propiedades comunes, podemos lograr un entendimiento más completo de algún tema de interés [1].

En el siglo XX, el surgimiento de la mecánica cuántica llevó a una revolución científica y tecnológica sin precedentes [2]. Conocidas las aplicaciones de la mecánica cuántica y el enorme impacto científico y tecnológico que ha tenido su desarrollo, es fácil ver por qué es importante tener el mejor entendimiento posible sobre esta área del conocimiento. Sin embargo, la mecánica cuántica posee una gran cantidad de conceptos que son contraintuitivos y que contradicen la experiencia cotidiana. Por ello, los estudiantes suelen tener problemas para asimilar los temas, y los profesores suelen tener problemas para comunicar los conceptos de manera clara.

Por otro lado, la física clásica, que incluye a la mecánica clásica y la teoría electromagnética, se encuentra presente en muchas áreas de la vida cotidiana [1]. De hecho, la física clásica puede explicar una gran parte de los fenómenos que ocurren en la vida cotidiana. Por ello, resulta natural buscar conexiones entre los fenómenos cuánticos y clásicos. Además, las analogías pueden ayudar a comprender las diferencias entre la mecánica clásica y la mecánica cuántica.

En el pasado, se han encontrado analogías entre algunos conceptos clásicos y cuánticos. Por ejemplo, se han encontrado analogías para la precesión del espín en un campo magnético [3] y las interacciones espín-órbita de Rashba-Dresselhaus [4]. Esto es particularmente notable, ya que el espín del electrón es uno de los fenómenos cuánticos que no tiene análogo clásico [1, 2]. Otro caso interesante es el del entrelazamiento cuántico, pues se considera que tampoco posee ningún análogo clásico. Sin embargo, se ha encontrado una analogía limitada para el entrelazamiento entre distintas propiedades de una partícula [5].

En mecánica cuántica, los sistemas de dos niveles son de gran interés, ya que existen una gran cantidad de fenómenos que pueden tratarse como un problema de dos niveles. Algunos ejemplos de esto son las oscilaciones de Rabi [6], las transiciones de Landau-Zener [7], entre otros. En general, estos sistemas poseen el distintivo de que los niveles de energía forman una región de anticruce característica, cuando existe una perturbación que acopla los niveles [8].

Las analogías de estos sistemas, al igual que en el caso cuántico, comparten muchos

conceptos en común. Se han encontrado analogías clásicas para algunos temas como la transparencia autoinducida [9] y las transiciones diabáticas y adiabáticas [10, 11]

Anteriormente, se han descrito múltiples sistemas en distintos contextos que exhiben el comportamiento característico de un sistema cuántico de dos niveles. Por ejemplo, Spreeuw *et al.* utilizaron un arreglo de resonadores ópticos para reproducir las oscilaciones de Rabi y transiciones de Landau-Zener [12]. Más tarde, se encontró que los sistemas optomecánicos también pueden simular un sistema cuántico de dos niveles. Un ejemplo interesante consiste en una cavidad con dos modos, acoplada a una membrana dieléctrica que se desplaza [13]. Aquí, el acoplamiento produce la característica separación de niveles. Además, es posible acoplar y controlar los modos de oscilación de una nanopartícula de sílice que se encuentra bajo levitación óptica [14, 15].

En otro trabajo, se empleó un sistema micrométrico compuesto de resonadores acoplados a un par de detectores. Con este arreglo, se reproducen diferentes experimentos como el de Rabi, el de Ramsey y el del eco de Hahn [16]. Más tarde, este arreglo se utilizó para ampliar el experimento y observar oscilaciones de Stückelberg [17].

En este trabajo, se estudiará la teoría semiclásica de la interacción entre un campo eléctrico clásico y un sistema cuántico de dos niveles. Además, estudiaremos la relación entre este sistema y su descripción en términos de un sistema clásico de osciladores armónicos acoplados. Por ello, son de particular interés los trabajos de Frimmer y Novotny, ya que proveen una visión intuitiva de algunos fenómenos como las oscilaciones de Rabi y las franjas de Ramsey [18, 19]. Por último, se utilizarán los conceptos revisados durante este trabajo para ampliar la analogía al caso de un sistema cuántico de dos niveles sin simetría de inversión. Durante el desarrollo del tema, se cuidará la claridad en todos los pasos, con el objetivo de que este trabajo pueda ser de utilidad para un curso donde se introduzcan conceptos como las oscilaciones de Rabi, la esfera de Bloch, operaciones coherentes, entre otros.

# Capítulo 2

## Osciladores armónicos clásicos acoplados

### 2.1. Motivación

El cruce o anticruce de niveles es uno de los temas más interesantes en relación a un sistema cuántico de dos niveles. A grandes rasgos, el problema consiste en evaluar la interacción de un sistema físico de dos niveles con una perturbación. Dicha perturbación provoca una separación entre los niveles de energía, formando hipérbolas cuyas asíntotas son las líneas rectas que describen las energías no perturbadas [8]. Este problema puede ser entendido de manera intuitiva desde un punto de vista clásico, utilizando osciladores armónicos acoplados [18].

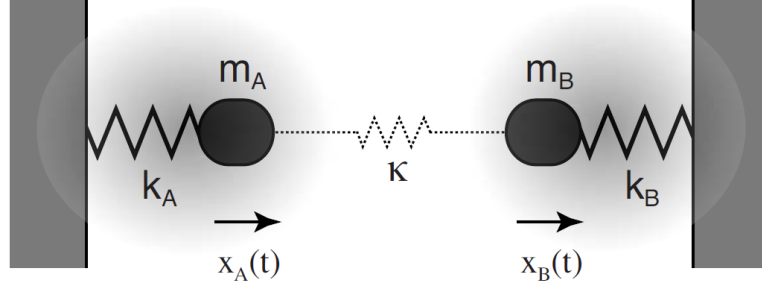
En este capítulo se utiliza un modelo de osciladores armónicos acoplados como analogía del régimen cuántico de acoplamiento fuerte. Además, se deriva la separación de frecuencias y se encuentran las condiciones para que se produzcan transiciones diabáticas y adiabáticas. La analogía entre osciladores armónicos clásicos y un sistema cuántico de dos niveles es particularmente importante, ya que existen una gran variedad de fenómenos cuánticos que pueden ser comprendidos en términos clásicos, como la transparencia autoinducida [20], los procesos no adiabáticos [10] o las oscilaciones de Rabi [6]. Entonces, el valor de las analogías radica en que son una herramienta para comprender los conceptos cuánticos en términos más sencillos.

### 2.2. Perspectiva clásica del anticruce de niveles

#### 2.2.1. Ecuaciones de movimiento

A lo largo de este capítulo, consideraremos el sistema de osciladores armónicos débilmente acoplados por un resorte con constante  $\kappa$ , como se muestra en la Figura 2.1. Además, consideramos que el movimiento está restringido a la línea que conecta a las dos masas, por lo que sólo existen dos grados de libertad, denotados por las coordenadas  $x_A$  y  $x_B$ , medidas desde

la posición de equilibrio. Para la masa  $A$ , la constante de resorte es  $k_A$  y para la masa  $B$ , la constante es  $k_B$  [18, 21].



**Figura 2.1** Sistema de osciladores armónicos acoplados con masas y constantes de resorte distintas [18].

Si movemos la masa  $A$ , hasta una distancia  $x_A$  de la posición de equilibrio, la fuerza sobre ella es  $-k_A x_A - \kappa(x_A - x_B)$ . Para la masa  $B$ , la fuerza sería  $-k_B x_B - \kappa(x_B - x_A)$ . Entonces las ecuaciones de movimiento del sistema se escriben [18, 21]

$$\begin{aligned} m_A \ddot{x}_A + k_A x_A + \kappa(x_A - x_B) &= 0, \\ m_B \ddot{x}_B + k_B x_B - \kappa(x_A - x_B) &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Si dividimos cada ecuación (2.1) entre la respectiva masa y definimos  $\omega_{A,B} \equiv \sqrt{(k_{A,B} + \kappa)/m_{A,B}}$  tenemos, en forma matricial:

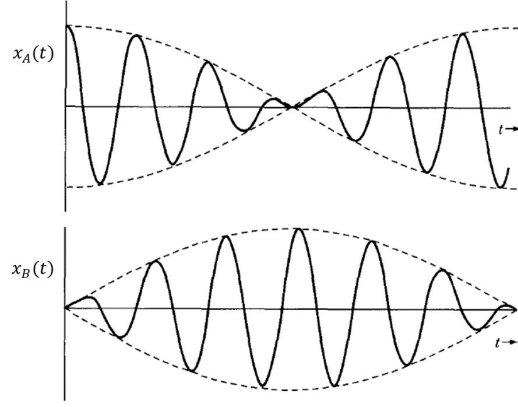
$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_A^2 & -\kappa/m_A \\ -\kappa/m_B & \omega_B^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

En la expresión anterior definimos

$$\mathbf{x} \equiv \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \end{pmatrix}; \mathbb{M} \equiv \begin{pmatrix} \omega_A^2 & -\kappa/m_A \\ -\kappa/m_B & \omega_B^2 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

El movimiento de estos sistemas puede ser complicado, pero siempre es posible describirlo en términos de **modos normales**. Estos modos oscilan de manera independiente con una frecuencia única y bien definida. Por cada oscilador armónico en el sistema, existe un modo normal, por lo que se puede describir el movimiento como una superposición de modos normales [21]. Entonces, nuestro objetivo es encontrar los modos normales para resolver el problema.

En general, un acoplamiento débil se traduce en un movimiento en el que las coordenadas  $x_A$  y  $x_B$  tienen una forma sinusoidal, con una amplitud que cambia lentamente. Esta situación se ilustra en la Figura 2.2. En este caso, mientras una amplitud incrementa lentamente, la otra disminuye, y viceversa. Entonces, la energía se transfiere de un oscilador a otro [21].



**Figura 2.2** Evolución de las coordenadas en caso de un acoplamiento débil. En ambos casos, las masas tienen una componente de alta frecuencia que oscila dentro de una envolvente lenta [21].

### 2.2.2. Cambio de base con eigenvalores y eigenvectores

Una manera eficiente de encontrar los modos normales de oscilación es tratando el problema como un problema de eigenvalores. En forma vectorial la expresión (2.2) se escribe  $\ddot{\mathbf{x}} + \mathbb{M}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Entonces, realizamos un cambio de base a las coordenadas normales  $\mathbf{y} = (x_+, x_-)^T$  por medio de la transformación  $\mathbf{x} = \mathbb{S}\mathbf{y}$ , donde  $\mathbb{S}$  es la matriz cuyas columnas son los eigenvectores  $\hat{\mathbf{s}}_1, \hat{\mathbf{s}}_2$  de  $\mathbb{M}$ . Reemplazando en la ecuación (2.2) resulta  $\mathbb{S}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbb{M}\mathbb{S}\mathbf{y} = \mathbf{0}$ . Finalmente multiplicamos por  $\mathbb{S}^{-1}$  por la izquierda para obtener  $\ddot{\mathbf{y}} + \mathbb{S}^{-1}\mathbb{M}\mathbb{S}\mathbf{y} = \mathbf{0}$ , pero  $\mathbb{S}^{-1}\mathbb{M}\mathbb{S} = \Lambda$ , donde  $\Lambda$  es la matriz diagonal cuyos elementos son los eigenvalores  $\lambda_{1,2}$  de  $\mathbb{M}$ . Entonces, obtenemos la ecuación  $\ddot{\mathbf{y}} + \Lambda\mathbf{y} = \mathbf{0}$  y habremos desacoplado el sistema de ecuaciones. Por otra parte, sabemos que este sistema sólo tiene soluciones no triviales si  $\det(\mathbb{M} - \lambda\mathbb{I}) = 0$ , donde  $\mathbb{I}$  es la matriz identidad. Esto nos da

$$\det(\mathbb{M} - \lambda\mathbb{I}) = (\omega_{\pm}^2 - \omega_A^2)(\omega_{\pm}^2 - \omega_B^2) - \kappa^2/m_A m_B = 0.$$

Definimos  $\Gamma \equiv \left(\sqrt{\frac{\kappa}{m_A}}\sqrt{\frac{\kappa}{m_B}}\right) / \sqrt{\omega_A\omega_B}$  y después de algo de álgebra obtenemos [18]

$$\lambda_{1,2} = \omega_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \left[ \omega_A^2 + \omega_B^2 \pm \sqrt{(\omega_A^2 - \omega_B^2)^2 + 4\Gamma^2\omega_A\omega_B} \right]. \quad (2.4)$$

Entonces, para cada eigenfrecuencia  $\omega_{\pm}$ , existe una ecuación de eigenvalores. Utilizamos este hecho para obtener los eigenvectores. Por ejemplo, para  $\omega_+$ , tenemos que  $\mathbb{M}\hat{\mathbf{s}}_1 = \omega_+^2\hat{\mathbf{s}}_1$ . Escribiendo  $\hat{\mathbf{s}}_1 = (x_A^+, x_B^+)^T$  nos da

$$\begin{aligned} (\omega_A^2 - \omega_+^2)x_A^+ - (\kappa/m_A)x_B^+ &= 0 \\ -(\kappa/m_B)x_A^+ + (\omega_B^2 - \omega_+^2)x_B^+ &= 0 \end{aligned}$$

De aquí, obtenemos que  $x_B^+ = (\kappa/m_B) x_A^+ / (\omega_B^2 - \omega_+^2) x_B^0$ . Escribiendo  $x_A^+ = \omega_B^2 - \omega_+^2$  y normalizando obtenemos

$$\hat{\mathbf{s}}_1 = \frac{1}{\sqrt{(\omega_B^2 - \omega_+^2)^2 + (\kappa/m_B)^2}} \begin{pmatrix} \omega_B^2 - \omega_+^2 \\ \kappa/m_B \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Aplicando la condición de ortonormalidad  $\hat{\mathbf{s}}_1 \cdot \hat{\mathbf{s}}_2 = 0$ , obtenemos

$$\hat{\mathbf{s}}_2 = \begin{pmatrix} x_B^+ \\ -x_A^+ \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{(\omega_B^2 - \omega_+^2)^2 + (\kappa/m_B)^2}} \begin{pmatrix} \kappa/m_B \\ -(\omega_B^2 - \omega_+^2) \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Ahora, definimos el ángulo  $\beta$  por la expresión

$$\tan \beta = \frac{\omega_B^2 - \omega_+^2}{\kappa/m_B} = -\frac{\omega_A^2 - \omega_-^2}{\kappa/m_A}. \quad (2.7)$$

La segunda igualdad en la ecuación anterior corresponde a los eigenvectores definidos en términos del eigenvalor  $\omega_-$ . La elección es indiferente. La definición del ángulo  $\beta$  es natural dado que los eigenvectores se encuentran normalizados. Con esta notación, la matriz de eigenvectores  $\mathbb{S}$  se escribe

$$\mathbb{S} = \begin{pmatrix} \sin \beta & \cos \beta \\ \cos \beta & -\sin \beta \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

### 2.2.3. Modos normales

Ahora que hemos encontrado la matriz de eigenvectores, podemos hacer la transformación a la base de modos normales  $(x_+, x_-)$ . Entonces, las coordenadas  $x_{A,B}$  toman la forma [18, 21]

$$\begin{aligned} x_A(t) &= x_+(t) \sin \beta + x_-(t) \cos \beta, \\ x_B(t) &= x_+(t) \cos \beta - x_-(t) \sin \beta. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Sustituyendo estas expresiones para  $x_A$  y  $x_B$  en (2.2) y multiplicando por la izquierda por  $\mathbb{S}^{-1}$  obtenemos [18]

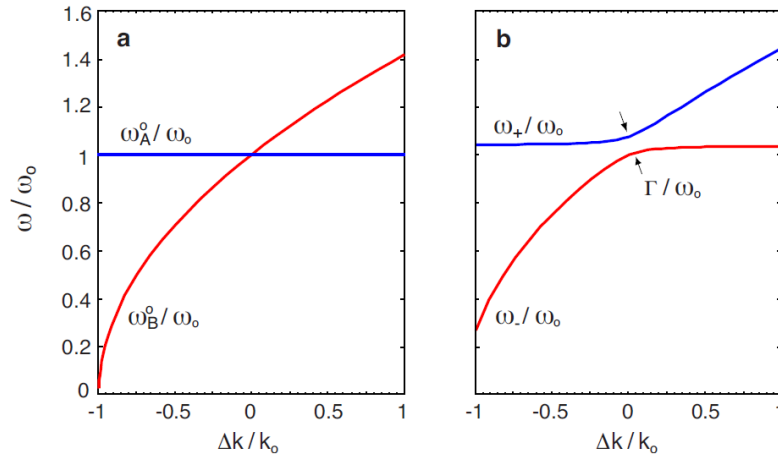
$$\begin{aligned} \ddot{x}_+(t) + \omega_+^2 x_+(t) &= 0, \\ \ddot{x}_-(t) + \omega_-^2 x_-(t) &= 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Estas dos expresiones representan a dos osciladores armónicos independientes. Cada coordenada  $x_{\pm}$  posee una frecuencia de oscilación única  $\omega_{\pm}$  y el movimiento será una superposición de la oscilaciones de estas coordenadas [21]. Más adelante, investigaremos el caso en que estas frecuencias se convierten en una función del tiempo.

## 2.2.4. Modulación de la constante de resorte

Para ilustrar el cruce de niveles de Landau-Zener [7], escribimos  $k_A = k_0$ ,  $k_B = k_0 + \Delta k$  y  $m_A = m_B = m_0$ . En la Figura 2.3a, se grafican las frecuencias de las dos masas sin acoplamiento. La frecuencia de la masa  $A$  es constante, mientras que la frecuencia del oscilador  $B$  varía desde cero a  $\sqrt{2k_0/m}$ . Además, las dos curvas se interceptan en la resonancia, cuando  $\Delta k = 0$ . Sin embargo, cuando introducimos el acoplamiento, las curvas ya no se interceptan, como se muestra en la Figura 2.3b. Cerca de la resonancia ( $\Delta k = 0$ ), existe una región de anticruce característica de los sistemas cuánticos de dos niveles. En nuestro sistema de osciladores la separación entre frecuencias es

$$\omega_+ - \omega_- = \sqrt{\frac{k_0 + 2\kappa}{m}} - \sqrt{\frac{k_0}{m}} = \sqrt{\frac{k_0}{m} \left(1 + \frac{2\kappa}{k_0}\right)} - \sqrt{\frac{k_0}{m}}.$$



**Figura 2.3** **a)** Eigenfrecuencias de dos osciladores desacoplados ( $\kappa = 0$ ) con constantes de resorte  $k_A = k_0$  y  $k_B = k_0 + \Delta k$ . **b)** Eigenfrecuencias de los osciladores con un acoplamiento  $\kappa = 0,08k_0$ . Se forma una región de anticruce que escala con la fuerza de acoplamiento [18].

En la sección 2.2.1, habíamos considerado que el acoplamiento es débil, entonces  $\kappa \ll k_0$ . Realizamos una aproximación por serie de Taylor en el primer radical y obtenemos [18]

$$\omega_+ - \omega_- = \frac{\kappa}{\sqrt{mk_0}} \approx \Gamma. \quad (2.11)$$

Entonces, la separación mínima entre los niveles escala con la fuerza de acoplamiento de las masas, de manera consistente con el caso cuántico [8, 18]. En este análisis, hemos ignorado el hecho de que, al modular el parámetro  $\Delta k$ , se convierte en función del tiempo. En las próximas secciones, se tomará en cuenta este punto y se considerará la velocidad en la variación.

### 2.2.5. Transición adiabática

En esta sección, se supondrá que  $\Delta k$  varía muy lentamente en comparación con la escala de tiempo determinada por las frecuencias  $\omega_{A,B}$ . Esto significa que, después de un tiempo  $\Delta t$ , el sistema permanece esencialmente constante [18]. Entonces, después de cada intervalo tiempo  $\Delta t$ , el movimiento de las dos masas es el de un sistema donde no existe una modulación, pero la frecuencia de oscilación está determinada por el valor instantáneo de  $k_B$ . Esto implica que, si inicialmente el oscilador  $A$  está activo y el oscilador  $B$  en reposo, la amplitud de las oscilaciones de  $A$  se reducirá lentamente, hasta llegar al estado de reposo. Mientras tanto, la amplitud del movimiento del oscilador  $B$  aumentará gradualmente. En la Figura 2.4a, se ilustra el comportamiento del sistema cuando  $\Delta k$  varía de  $-k_0$  a  $k_0$  lentamente.

A tiempo  $t = 0$ ,  $\Delta k = -k_0$ . Si únicamente el oscilador  $A$  está activo inicialmente, y comenzamos en el modo de oscilación con frecuencia  $\omega_+$ . Entonces, en la ecuación (2.7) vemos que  $\beta \sim -\pi/2$ , ya que la separación es demasiado grande, o sea  $\omega_A - \omega_- \gg \Gamma$ . Entonces, vemos que inicialmente sólo el modo  $x_+$  está activo. Si variamos  $\Delta k$  lentamente hasta  $k_0$ , entonces  $\omega_A - \omega_- \ll \Gamma$  y  $\beta \sim 0$ . Esto significa que permanecemos en el modo  $x_+$ , que ahora tiene una frecuencia  $\omega_+ \approx \omega_B$ . Por lo tanto, concluimos que la energía se ha transferido completamente al oscilador  $B$  (ver Figura 2.4a) [18]. Este fenómeno también se ha estudiado en un sistema de péndulos débilmente acoplados. Mientras se mantenía fija la longitud de uno de los péndulos, la longitud del otro varía lentamente y la energía se transfiere de un péndulo al otro [10].

En el caso cuántico, esta transición se conoce como *transición adiabática* [7, 18]. El teorema adiabático establece que cuando un sistema atraviesa la región de cruce evitado de manera lenta, entonces permanecerá en ese estado. Por ejemplo, si el sistema posee los estados  $\psi_1$  y  $\psi_2$  e inicialmente se encuentra en el estado  $\psi_1$ , después del cruce adiabático, permanecerá en el estado  $\psi_2$  [7]. Sin embargo, es preciso mencionar que los valores del estado  $\psi_2$  estarán determinados por el valor instantáneo del Hamiltoniano, que está determinado por la perturbación.

Como habíamos mencionado,  $\Delta k$  ahora es una función del tiempo, por lo que las frecuencias  $\omega_B$  y  $\omega_{\pm}$  también lo serán. Asumiendo que varían lentamente, proponemos una solución de la forma  $x_{\pm}(t) = x_{\pm}(t_0)e^{if(t)}$ , donde  $t_0$  es un tiempo inicial y  $f(t)$  debe variar lentamente, ya que estamos suponiendo que el proceso de modulación es adiabático. Sustituimos en las ecuaciones (2.10) y obtenemos

$$i\ddot{f}(t) - \dot{f}^2(t) + \omega_{\pm}^2 = 0.$$

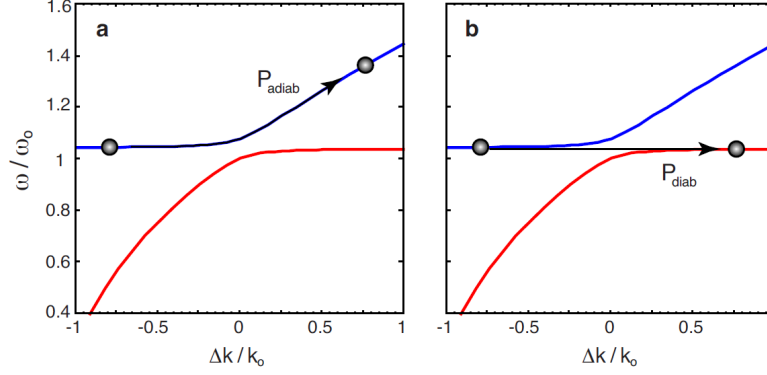
Debido a que  $f(t)$  varía lentamente, sus derivadas (razones de cambio) serán muy pequeñas, por lo que  $|i\dot{d}^2f/dt^2| \ll |df/dt|^2$ . Esto nos permite depreciar la segunda derivada para obtener  $f(t) \approx \int_{t_0}^t \omega_{\pm}(t') dt'$ . Entonces, la evolución adiabática de los modos normales está dada por



[18]

$$x_{\pm}(t) = x_{\pm}(t_0) \text{Re} \left\{ \exp \left[ i \int_{t_0}^t \omega_{\pm}(t') dt' \right] \right\}. \quad (2.12)$$

Observe que, en caso de que las frecuencias  $\omega_{\pm}$  no dependan del tiempo, recuperamos los resultados de la sección 2.2.3.



**Figura 2.4** Transiciones diabáticas y adiabáticas causadas por una modulación  $\Delta k$  que varía en el tiempo. **a)** En el caso adiabático, la evolución del sistema no se ve afectada por la modulación, y el sistema evoluciona a lo largo de los eigenmodos  $\omega_{\pm}$ . **b)** En el caso diabático, la evolución rápida de  $\Delta k$  da lugar a un cruce de niveles, una transición de un eigenmodo a otro [18].

## 2.2.6. Transición diabática

Ahora, consideraremos una evolución más rápida de la modulación. Si sólo se encuentra activo el oscilador  $A$  inicialmente, partimos de una frecuencia próxima a  $\omega_A$ . Después de atravesar la brecha, el oscilador  $A$  tendrá su misma frecuencia, pero el modo de oscilación cambiará de  $\omega_+$  a  $\omega_-$ , como se muestra en la Figura 2.4b. Esto se conoce como *cruce diabático* [18]. Si únicamente el oscilador  $A$  se encuentra activo inicialmente, tenemos que  $c_B(-\infty) = 0$ . Utilizamos el *ansatz*

$$\begin{aligned} x_A(t) &= x_0 c_A(t) e^{i\omega_A t}, \\ x_B(t) &= x_0 c_B(t) e^{i\omega_A t}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

donde  $x_0$  es una constante que asegura que  $|c_A|^2 + |c_B|^2 = 1$ . Nótese que en ambas expresiones aparece la frecuencia  $\omega_A$ , debido a las suposiciones que se hicieron. Sustituimos en la ecuación (2.1) para obtener

$$\begin{aligned} \ddot{c}_A + 2i\omega_A \dot{c}_A &= \frac{\kappa}{m_A} c_B \\ \ddot{c}_B + 2i\omega_A \dot{c}_B + [\omega_B^2(t) - \omega_A^2] c_B &= \frac{\kappa}{m_B} c_A. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Recordando que el acoplamiento es débil, podemos suponer que las amplitudes  $c_A$  y  $c_B$  varían muy lentamente en comparación con el término  $e^{i\omega_A t}$  [18, 21]. Entonces  $|\ddot{c}_{A,B}| \ll |i\omega_A \dot{c}_{A,B}|$ , lo cual nos permite despreciar las segundas derivadas. Por lo tanto, se puede reescribir el sistema anterior como

$$\begin{aligned} 2i\omega_A \dot{c}_A &= \frac{\kappa}{m_A} c_B, \\ 2i\omega_A \dot{c}_B + [\omega_B^2(t) - \omega_A^2] c_B &= \frac{\kappa}{m_B} c_A. \end{aligned} \quad (2.15)$$

En la primera ecuación, podemos derivar y obtener  $\dot{c}_B$ . Además, se obtiene  $c_B$  directamente al despejar. Sustituyendo estos resultados en la ecuación obtenemos [18]

$$\ddot{c}_A + i \left[ \frac{\omega_B^2(t) - \omega_A^2}{2\omega_A} \right] \dot{c}_A + \frac{\kappa/m_A m_B}{4\omega_A^2} c_A = 0. \quad (2.16)$$

En la región de interés, cerca de la brecha, tenemos que  $\omega_B(t) \approx \omega_A$ , lo cual implica que

$$\frac{\omega_B^2(t) - \omega_A^2}{2\omega_A} = \frac{1}{2\omega_A} (\omega_A + \omega_B) (\omega_B - \omega_A) \approx \omega_B - \omega_A.$$

Por lo mismo, tenemos que  $\Gamma \approx \kappa^2/m_A m_B \omega_A^2$ . Por último, consideramos que la diferencia entre las frecuencias de los osciladores escala de manera lineal con el tiempo, o sea  $\omega_B - \omega_A = \alpha t$ . Aquí,  $\alpha$  juega un papel similar a una aceleración angular. Sustituimos esto en la ecuación anterior y obtenemos [18]

$$\ddot{c}_A - i\alpha t \dot{c}_A + \Gamma^2 c_A/4 = 0. \quad (2.17)$$

En esta ecuación, pese a que no existe una solución analítica, nos interesa el comportamiento para tiempos largos. Utilizando una integral de contorno en el plano complejo (ver Apéndice A) encontramos que la solución para  $t \rightarrow \infty$  es

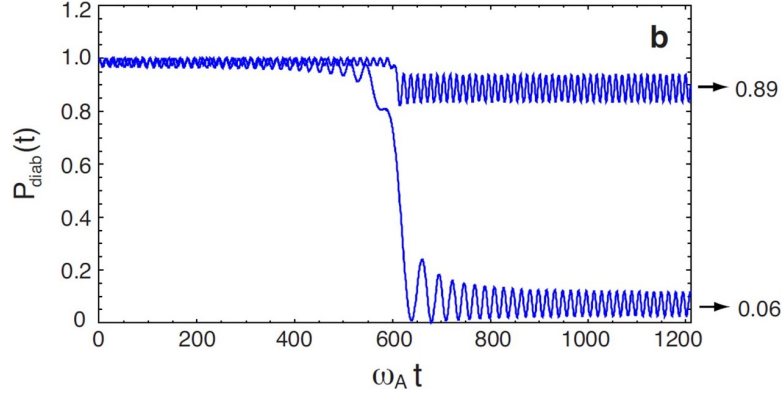
$$c_A(\infty) = e^{-\pi\Gamma^2/4\alpha}. \quad (2.18)$$

Por lo tanto, la probabilidad de un cruce diabático es

$$P_{diab} = |c_A(\infty)|^2 = e^{-\pi\Gamma^2/2\alpha} = e^{-\Gamma\tau}, \quad (2.19)$$

donde  $\tau \equiv \Gamma\pi/2\alpha$ . Esta ecuación es el análogo clásico de la fórmula de Landau-Zener, que establece la probabilidad de que un sistema salte de un estado a otro, sin sufrir un cambio de naturaleza [7]. Clásicamente, la fórmula define la probabilidad de que el oscilador  $A$  conserve su energía al cruzar la región de separación de manera diabática, como se ilustra en la Figura 2.4b. Esta transición, además, equivale a un cambio en el modo de oscilación del sistema de osciladores

acoplados. En otras palabras, la fórmula de Landau-Zener clásica indica la probabilidad de atravesar la región de cruce evitado, cambiando de un modo de vibración a otro. Por lo tanto, la probabilidad de transición adiabática es  $P_{adiab} = 1 - P_{diab}$  [7, 18]. En la Figura 2.5 se ejemplifica la analogía para dos velocidades distintas de separación de las frecuencias.



**Figura 2.5** Probabilidad de transición diabática para dos distintos valores de  $\alpha$ , usando  $\kappa = 0,08k_0$ . Cuando  $\alpha = 0,003\omega_A^2$ ,  $P_{diab} = 0,06$ . En cambio, cuando  $\alpha = 0,075\omega_A^2$ ,  $P_{diab} = 0,89$  [18].

En general, la probabilidad de transición diabática depende de la separación  $\omega_+ - \omega_- \approx \Gamma$  y el tiempo  $\tau \sim \Gamma/\alpha$  que dura la transición. Si  $\alpha$  es suficientemente grande, entonces  $\Gamma\tau \ll 1$  y la probabilidad de transición diabática es alta. En cambio, para tiempos donde  $\Gamma\tau \gg 1$ , la transición adiabática es mucho más probable. En resumen, es posible controlar en qué eigenmodo termina el sistema de osciladores, al controlar la velocidad a la que modulamos el parámetro  $\Delta k$  [18].

# Capítulo 3

## Interacción materia-luz: sistema de dos niveles

### 3.1. Tratamiento semiclásico

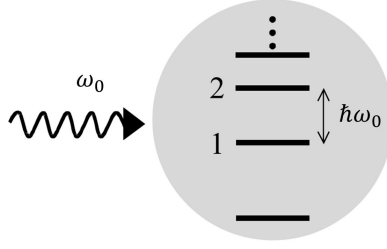
#### 3.1.1. Átomo de dos niveles: Hamiltoniano

La interacción entre la materia y la luz es uno de los temas más importantes en el desarrollo de la mecánica cuántica. En particular, uno de los problemas más importantes en la interacción materia-luz es el problema clásico de Rabi. Una forma común de abordar el fenómeno proviene de la aproximación por un átomo de dos niveles (ver Figura 3.1). En el modelo teórico que emplearemos, la materia se representa con un sistema cuántico de dos niveles, mientras que la luz tiene una naturaleza clásica. Este modelo es válido especialmente cuando la frecuencia  $\omega$  de la luz se encuentra cercana a la frecuencia  $\omega_0$  de una de las transiciones entre niveles en el átomo, lo cual implica [22, 23]

$$|\omega_0 - \omega| \ll \omega_0 \quad (3.1)$$

Para abordar el problema de Rabi, utilizaremos un átomo que posee un estado excitado  $|a\rangle = (1, 0)^T$ , y un estado base  $|b\rangle = (0, 1)^T$ , con energías  $E_a$  y  $E_b$ , y con  $E_a > E_b$ . Obsérvese que estos estados forman una base. Con esto, podemos expresar el estado del átomo como una combinación lineal de los estados  $|a\rangle$  y  $|b\rangle$ . En este modelo de interacción, cuando se absorbe o emite un cuanto de luz, con frecuencia  $\omega_0$ , el átomo salta entre los niveles cuantizados de energía, como se muestra en la Figura 3.1. La diferencia entre estos dos niveles de energía es  $E_a - E_b = \hbar\omega_0$ . Es preciso notar que existen otros niveles de energía en un átomo, y las transiciones ópticas entre éstos pueden ser posibles. Sin embargo, en esta aproximación sólo nos centraremos en la transición con energía  $\hbar\omega_0$  e ignoraremos las demás [22-24].

Los estados  $|a\rangle$  y  $|b\rangle$  son eigenestados del Hamiltoniano atómico sin interacción  $\hat{H}_0$  y



**Figura 3.1** Interacción resonante en un átomo de dos niveles.

obedecen las ecuaciones de eigenvalores

$$\begin{aligned}\hat{H}_0 |a\rangle &= E_a |a\rangle, \\ \hat{H}_0 |b\rangle &= E_b |b\rangle,\end{aligned}\tag{3.2}$$

Para encontrar la forma matricial del Hamiltoniano atómico, utilizamos la relación de completitud  $|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b| = \mathbb{I}$ . Además, usamos la relación de ortonormalidad  $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$ , donde  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker. Así, encontramos

$$\begin{aligned}\hat{H}_0 &= (|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|) H_0 (|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|) \\ &= E_a |a\rangle\langle a| + E_b |b\rangle\langle b| = \frac{1}{2} (E_a + E_b) \mathbb{I} + \frac{1}{2} (E_a - E_b) \hat{\sigma}_z,\end{aligned}\tag{3.3}$$

donde  $\hat{\sigma}_z$  es la matriz de Pauli. Definimos  $E_0 \equiv \frac{1}{2} (E_a + E_b)$  y tenemos:

$$\hat{H}_0 = E_0 \mathbb{I} + \frac{\hbar\omega_0}{2} \hat{\sigma}_z.\tag{3.4}$$

Por conveniencia, desplazaremos la escala de energía, de manera que el cero se encuentre a la mitad de la separación entre los dos niveles de energía, tal que  $E_a = +\hbar\omega_0/2$  y  $E_b = -\hbar\omega_0/2$  [24]. Para esto, hacemos la transformación

$$|\psi'(t)\rangle = \hat{\mathcal{U}}_E(t) |\psi(t)\rangle = e^{iE_0 t \mathbb{I}/\hbar} |\psi(t)\rangle,\tag{3.5}$$

donde  $\hat{\mathcal{U}}_E(t)$  es un operador unitario. Ahora, determinaremos cómo se transforma el Hamiltoniano (3.4) bajo la acción de algún operador unitario  $\hat{\mathcal{U}}$ . Asumimos que el estado transformado  $|\psi'(t)\rangle$  obedece una ecuación de Schrödinger de la forma  $i\hbar \frac{d}{dt} |\psi'(t)\rangle = \hat{H}' |\psi'(t)\rangle$ . Sustituimos (3.5) y después de reordenar términos, obtenemos

$$\begin{aligned}i\hbar \frac{d}{dt} \left( \hat{\mathcal{U}}(t) |\psi(t)\rangle \right) &= \left[ i\hbar \frac{d\hat{\mathcal{U}}(t)}{dt} + \hat{\mathcal{U}}(t) \left( i\hbar \frac{d}{dt} \right) \right] |\psi(t)\rangle \\ &= \left( i\hbar \frac{d\hat{\mathcal{U}}(t)}{dt} + \hat{\mathcal{U}}(t) \hat{H} \right) |\psi(t)\rangle = \hat{H}' \hat{\mathcal{U}}(t) |\psi(t)\rangle.\end{aligned}$$

Multiplicando por la derecha por  $\hat{\mathcal{U}}^{-1}(t)$  resulta:

$$\hat{H}' = i\hbar \frac{d\hat{\mathcal{U}}(t)}{dt} \hat{\mathcal{U}}^{-1}(t) + \hat{\mathcal{U}}(t) \hat{H} \hat{\mathcal{U}}^{-1}(t). \quad (3.6)$$

Finalmente, sustituimos las expresiones para  $H_0$  y  $\hat{\mathcal{U}}_E(t)$  que hemos definido anteriormente, por lo que el Hamiltoniano transformado se escribe como:

$$\hat{H}'_0 = i\hbar (iE_0 \mathbb{I}/\hbar) + \hat{H}_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2} \hat{\sigma}_z. \quad (3.7)$$

En la aproximación dipolar, la interacción se describe por el llamado Hamiltoniano de interacción, dado por [23, 24]

$$\hat{H}_{int} = -\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}(t), \quad (3.8)$$

donde  $\mathbf{E}(t) \equiv \mathbf{E}_0 \cos \omega t$  es un campo eléctrico armónico clásico con amplitud  $\mathbf{E}_0$ . Además,  $\hat{\mathbf{d}} = e\hat{\mathbf{r}}$  es el operador de momento dipolar. En la base  $\{|a\rangle, |b\rangle\}$ , este operador se puede escribir como una matriz  $2 \times 2$ , cuyos elementos de matriz están dados por  $\mathbf{d}_{ij} = \langle i | \hat{\mathbf{d}} | j \rangle$ . En esta base, tenemos

$$\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{d}_{aa} |a\rangle\langle a| + \mathbf{d}_{ab} |a\rangle\langle b| + \mathbf{d}_{ba} |b\rangle\langle a| + \mathbf{d}_{bb} |b\rangle\langle b| = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_{aa} & \mathbf{d}_{ab} \\ \mathbf{d}_{ba} & \mathbf{d}_{bb} \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Sabemos que cualquier matriz  $2 \times 2$  puede expresarse como una combinación lineal de la matriz identidad y las matrices de Pauli, como  $\hat{M} = a_0 \mathbb{I} + \mathbf{a} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}$ , donde  $a_0 = \frac{1}{2} \text{Tr}(\hat{M})$ ,  $\mathbf{a} = \frac{1}{2} \text{Tr}(\hat{M} \hat{\boldsymbol{\sigma}}) = \frac{1}{2} (M_{12} + M_{21}) \hat{\mathbf{x}} + \frac{i}{2} (M_{12} - M_{21}) \hat{\mathbf{y}} + \frac{1}{2} (M_{11} - M_{22}) \hat{\mathbf{z}}$  y  $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\sigma}_x \hat{\mathbf{x}} + \hat{\sigma}_y \hat{\mathbf{y}} + \hat{\sigma}_z \hat{\mathbf{z}}$  es el vector de las matrices de Pauli. Entonces, el operador de momento dipolar se escribe:

$$\hat{\mathbf{d}} = \frac{1}{2} (\mathbf{d}_{aa} + \mathbf{d}_{bb}) \mathbb{I} + \frac{1}{2} (\mathbf{d}_{ab} + \mathbf{d}_{ba}) \hat{\sigma}_x + \frac{i}{2} (\mathbf{d}_{ab} - \mathbf{d}_{ba}) \hat{\sigma}_y + \frac{1}{2} (\mathbf{d}_{aa} - \mathbf{d}_{bb}) \hat{\sigma}_z. \quad (3.10)$$

Definiendo los operadores de subida y bajada,  $\hat{\sigma}_{\pm} = \frac{1}{2} (\hat{\sigma}_x \pm i\hat{\sigma}_y)$ <sup>1</sup>, tenemos

$$\hat{\mathbf{d}} = \frac{1}{2} (\mathbf{d}_{aa} + \mathbf{d}_{bb}) \mathbb{I} + \mathbf{d}_{ab} \hat{\sigma}_+ + \mathbf{d}_{ba} \hat{\sigma}_- + \frac{1}{2} (\mathbf{d}_{aa} - \mathbf{d}_{bb}) \hat{\sigma}_z. \quad (3.11)$$

Entonces, el Hamiltoniano de interacción (3.8) se escribe

$$\begin{aligned} \hat{H}_{int} = & -\frac{1}{2} (\mathbf{d}_{aa} + \mathbf{d}_{bb}) \cdot \mathbf{E}_0 \cos \omega t \mathbb{I} - \frac{1}{2} (\mathbf{d}_{aa} - \mathbf{d}_{bb}) \cdot \mathbf{E}_0 \cos \omega t \hat{\sigma}_z \\ & - (\mathbf{d}_{ab} \cdot \mathbf{E}_0 \hat{\sigma}_+ + \mathbf{d}_{ba} \cdot \mathbf{E}_0 \hat{\sigma}_-) \cos \omega t. \end{aligned} \quad (3.12)$$

---

<sup>1</sup>Los operadores de subida y bajada satisfacen las ecuaciones  $\hat{\sigma}_+ |a\rangle = \mathbf{0}$ ,  $\hat{\sigma}_+ |b\rangle = |a\rangle$ ,  $\hat{\sigma}_- |a\rangle = |b\rangle$  y  $\hat{\sigma}_- |b\rangle = \mathbf{0}$

Ahora, hacemos una transformación similar a aquélla realizada en (3.7), esta vez con  $\hat{\mathcal{U}}_{\mathbf{a}}(t) = \exp \left[ \frac{-i}{2\hbar} (\mathbf{d}_{aa} + \mathbf{d}_{bb}) \cdot \mathbf{E}_0 \mathbb{I} \int_0^t \cos \omega t' dt' \right] = \exp \left[ \frac{-i}{2\hbar\omega} (\mathbf{d}_{aa} + \mathbf{d}_{bb}) \cdot \mathbf{E}_0 \sin \omega t \mathbb{I} \right]$ . Entonces, la ecuación (3.7) para  $\hat{H}'_{int}$  queda

$$\begin{aligned} \hat{H}'_{int} &= i\hbar \left[ \frac{-i}{2\hbar\omega} (\mathbf{d}_{aa} + \mathbf{d}_{bb}) \cdot \mathbf{E}_0 \omega \cos \omega t \right] \mathbb{I} + \hat{H}_{int} \\ &= -\frac{1}{2} \mathbf{E}_0 \cdot (\mathbf{d}_{aa} - \mathbf{d}_{bb}) \cos \omega t \hat{\sigma}_z - \mathbf{E}_0 \cdot (\mathbf{d}_{ab} \hat{\sigma}_+ + \mathbf{d}_{ba} \hat{\sigma}_-) \cos \omega t. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Utilizando las ecuaciones (3.7) y (3.13), podemos escribir el Hamiltoniano del sistema de dos niveles con interacción como

$$\hat{H}' = \hat{H}'_0 + \hat{H}'_{int} = \frac{1}{2} [\hbar\omega_0 - \mathbf{E}_0 \cdot (\mathbf{d}_{aa} - \mathbf{d}_{bb})] \hat{\sigma}_z - \mathbf{E}_0 \cdot (\mathbf{d}_{ab} \hat{\sigma}_+ + \mathbf{d}_{ba} \hat{\sigma}_-) \cos \omega t. \quad (3.14)$$

## 3.2. Modelo clásico de Rabi

### 3.2.1. Consideraciones importantes y Hamiltoniano

En este capítulo, consideraremos que los estados  $|a\rangle$  y  $|b\rangle$  tienen una paridad definida, por lo que el sistema tiene simetría de inversión espacial. Como  $\hat{\mathbf{d}} = e\hat{\mathbf{r}}$  es un operador impar, tenemos que  $\mathbf{d}_{aa} = \mathbf{d}_{bb} = 0$ . Además, suponemos que los elementos no diagonales del operador de momento dipolar son reales, lo cual implica que  $\mathbf{d}_{ab} = \mathbf{d}_{ba}$  [22, 23].

Para simplificar la notación, sustituimos  $\hat{H}' \rightarrow \hat{H}$  y  $|\psi'(t)\rangle \rightarrow |\psi(t)\rangle$ , recordando que hemos desplazado la escala de energía con las transformaciones realizadas en las ecuaciones (3.7) y (3.13). Entonces, el Hamiltoniano del sistema se escribe [25]

$$\hat{H}(t) = \frac{\hbar\omega_0}{2} \hat{\sigma}_z + \hbar\Omega_R \cos \omega t \hat{\sigma}_x, \quad (3.15)$$

donde  $\Omega_R \equiv -\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{d}_{ab} / \hbar$  es la frecuencia de Rabi, que determina la fuerza de acoplamiento entre los dos estados atómicos y el campo eléctrico incidente [22, 25]. Más adelante, en el capítulo 5, estudiaremos el caso con violación de la simetría de inversión.

Para resolver el problema clásico de Rabi, existen dos maneras de proceder, utilizando transformaciones unitarias, de la forma  $\hat{\mathcal{U}}(\phi) \sim e^{i\phi\hat{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}}$ . En ambos casos, es necesario transformar la función de onda  $|\psi(t)\rangle$  a un sistema de referencia rotatorio. Sin embargo, la manera de abordar los siguientes pasos es distinta. En la primera, se realiza la aproximación cuasi-resonante

o aproximación de onda rotatoria<sup>2</sup> (RWA, por sus siglas en inglés) en la función de onda transformada. Luego, el problema consiste en encontrar la ecuación de Schrödinger que obedece la función de onda transformada,  $|\psi'(t)\rangle$  y resolverla, como hacen Frimmer y Novotny [24]. La segunda opción consiste en transformar el Hamiltoniano (3.15) a un marco de referencia rotatorio y llevar a cabo la RWA. Luego, se obtiene el operador de evolución y éste se aplica sobre la función de onda transformada a tiempo  $t = 0$ . En ambos casos, se obtiene la función de onda transformada, y basta con invertir la transformación usando  $\hat{U}^{-1}$  para obtener  $|\psi(t)\rangle$ . En adelante, utilizaremos el segundo método, por ser más directo.

### 3.2.2. Transformación a un marco de referencia rotatorio y aproximación cuasi-resonante

Cualquier sistema de dos niveles es formalmente equivalente a un sistema con espín ficticio  $\frac{1}{2}$ . Por ello, notamos que se puede ver el Hamiltoniano (3.15) como la interacción de un sistema con espín ficticio  $\frac{1}{2}$  con el campo magnético  $\mathbf{B}(t) = \hbar\Omega_R \cos \omega t \hat{\mathbf{x}} + \frac{\hbar\omega_0}{2} \hat{\mathbf{z}}$ , donde el primer término representa la interacción con un campo magnético uniforme y dependiente del tiempo [23, 25]. Más adelante aprovecharemos este hecho.

Buscamos una solución a la ecuación de Schrödinger en la forma de una superposición de los dos estados atómicos, es decir,  $|\psi(t)\rangle = c_a(t) |a\rangle + c_b(t) |b\rangle$ . Para simplificar el problema, nos trasladamos a un marco de referencia rotatorio, efectuando una rotación en sentido horario por un ángulo  $\phi = \omega t$  con la transformación unitaria

$$\hat{U}_z(\phi) = e^{i\phi \hat{\sigma}_z/2}. \quad (3.16)$$

Aplicando esta transformación a la función de onda, el estado  $|\psi'(t)\rangle = a(t) |a\rangle + b(t) |b\rangle = \hat{U}_z(\phi) |\psi(t)\rangle$  se escribe

$$\begin{aligned} a(t) &= c_a(t) e^{i\omega t/2}, \\ b(t) &= c_b(t) e^{-i\omega t/2}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Con la transformación (3.16), podremos separar el Hamiltoniano (3.15) en dos partes: una estática y una dependiente del tiempo que oscila a una frecuencia mayor. El Hamiltoniano

---

<sup>2</sup>La aproximación cuasi-resonante es más conocida como aproximación de onda rotatoria, aunque en este contexto es más apropiado el primer nombre, ya que estudiamos el sistema en el dominio cercano a la resonancia  $\omega_0 \approx \omega$ .



transformado, dado por la ecuación (3.6) se escribe

$$\hat{H}'(t) = e^{i\phi\hat{\sigma}_z/2} \left( \frac{\hbar\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z + \hbar\Omega_R \cos\omega t \hat{\sigma}_x \right) e^{-i\phi\hat{\sigma}_z/2} - \frac{\hbar\omega}{2}\hat{\sigma}_z. \quad (3.18)$$

Usando  $e^{i\theta\hat{\sigma}_i}\hat{\sigma}_j e^{-i\theta\hat{\sigma}_i} = \hat{\sigma}_i\delta_{ij} + (1 - \delta_{ij})(\cos 2\theta \hat{\sigma}_j - \sin 2\theta \sum_k \epsilon_{ijk}\hat{\sigma}_k)$ , donde  $\epsilon_{ijk}$  es el tensor de Levi-Civita (ver Apéndice B), resulta

$$\begin{aligned} \hat{H}'(t) &= \frac{\hbar}{2}(\omega_0 - \omega)\hat{\sigma}_z + \hbar\Omega_R \cos\omega t (\cos\omega t \hat{\sigma}_x - \sin\omega t \hat{\sigma}_y) \\ &= \frac{\hbar}{2}(\omega_0 - \omega)\hat{\sigma}_z + \frac{\hbar\Omega_R}{2}\hat{\sigma}_x + \frac{\hbar\Omega_R}{2}(\cos 2\omega t \hat{\sigma}_x - \sin 2\omega t \hat{\sigma}_y). \end{aligned} \quad (3.19)$$

En esta expresión, los primeros dos términos son estáticos, mientras que los dos últimos oscilan rápidamente. En la **aproximación cuasi-resonante**, estos dos últimos términos se desprecian debido a que sus efectos en tiempos largos se pierden y por lo tanto dan contribuciones despreciables a los promedios [23, 26]. Entonces, el Hamiltoniano del sistema se escribe

$$\hat{H}'(t) \approx \hat{H}'_{RWA} = \frac{\hbar}{2}(\omega_0 - \omega)\hat{\sigma}_z + \frac{\hbar\Omega_R}{2}\hat{\sigma}_x. \quad (3.20)$$

De manera alternativa, podemos notar que se puede reescribir la interacción en (3.15) en términos de los operadores de subida y bajada  $\hat{\sigma}_{\pm}$  como

$$\hat{H}_{int}(t) = \frac{\hbar\Omega_R}{2} (\hat{\sigma}_+ e^{-i\omega t} + \hat{\sigma}_- e^{i\omega t} + \hat{\sigma}_+ e^{i\omega t} + \hat{\sigma}_- e^{-i\omega t}).$$

En esta expresión, los primeros dos términos indican que el átomo se excita al absorber un fotón y decae al nivel inferior al emitir un fotón, respectivamente. Como la condición (3.1) implica que  $\omega \sim \omega_0$ , estos términos son resonantes y son mucho más importantes que los términos no resonantes [22, 25]. Por lo tanto, podemos conservar sólo los términos resonantes, y luego de aplicar la transformación  $\hat{\mathcal{U}} = e^{i\omega_0 t \hat{\sigma}_z/2}$  y después  $\hat{\mathcal{U}} = e^{-i(\omega_0 - \omega)\hat{\sigma}_z/2}$ , recuperamos el Hamiltoniano (3.20).

### 3.2.3. Solución de la ecuación de Schrödinger

Como habíamos mencionado en la sección 3.2.2, se puede escribir el Hamiltoniano (3.20) como el producto punto del operador de espín  $\frac{1}{2}\hat{\mathbf{S}} = \hbar\hat{\boldsymbol{\sigma}}/2$  con un campo vectorial  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega_R \hat{\mathbf{x}} + (\omega_0 - \omega)\hat{\mathbf{z}} = \Omega \hat{\mathbf{n}}$ , donde  $\Omega^2 = |\boldsymbol{\Omega}|^2 = (\omega_0 - \omega)^2 + \Omega_R^2$  es la frecuencia de Rabi generalizada,

incluyendo un desajuste dado por  $\delta \equiv \omega_0 - \omega$  [25, 26]. Entonces escribimos

$$\hat{H}' \approx \hat{H}'_{RWA} = \frac{\hbar\Omega}{2} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{n}}. \quad (3.21)$$

Ya que este Hamiltoniano no depende del tiempo, podemos obtener la función de onda al aplicar el operador de evolución en la función de onda a un tiempo  $t = 0$ . A partir de la expresión anterior, identificamos que el operador de evolución toma la forma [2]

$$\hat{S}'_{RWA}(t) = \exp\left(-i\frac{\hat{H}'_{RWA}t}{\hbar}\right) = \exp\left(-i\frac{\Omega t}{2} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{n}}\right). \quad (3.22)$$

Preparamos el estado  $|\psi'(t)\rangle = a(t)|a\rangle + b(t)|b\rangle$  a un tiempo  $t = 0$ , con las condiciones iniciales arbitrarias  $a(0) = a_0$  y  $b(0) = b_0$ . Entonces, el estado  $|\psi'(t)\rangle$  está dado por

$$\begin{aligned} |\psi'(t)\rangle &= \exp\left(-i\frac{\Omega t}{2} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{n}}\right) |\psi'(0)\rangle = \left[ \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \right] |\psi'(0)\rangle \\ &= \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} - i \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \begin{pmatrix} \delta/\Omega & \Omega_R/\Omega \\ \Omega_R/\Omega & -\delta/\Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

De la ecuación anterior se desprende que [24]

$$\begin{aligned} a(t) &= \left[ \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) - i\frac{\delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right] a_0 - i\frac{\Omega_R}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) b_0, \\ b(t) &= -i\frac{\Omega_R}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) a_0 + \left[ \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) + i\frac{\delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right] b_0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Finalmente, invertimos la transformación (3.16) y obtenemos la función de onda  $|\psi(t)\rangle = c_a|a\rangle + c_b|b\rangle = \hat{U}_z^{-1}(\phi)|\psi'(t)\rangle$ , dada por

$$\begin{aligned} c_a(t) &= e^{-i\omega t/2} \left\{ \left[ \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) - i\frac{\delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right] a_0 - i\frac{\Omega_R}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) b_0 \right\}, \\ c_b(t) &= e^{i\omega t/2} \left\{ -i\frac{\Omega_R}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) a_0 + \left[ \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) + i\frac{\delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right] b_0 \right\}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

### 3.2.4. Oscilaciones de Rabi

Con las soluciones obtenidas en la ecuación (3.24), podemos calcular la probabilidad de transición entre un estado y otro al tiempo  $t$ . Suponiendo que inicialmente, el átomo se encuentra en el estado excitado  $|a\rangle$ , tenemos que  $a_0 = 1, b_0 = 0$ . Entonces, a tiempo  $t$ , los

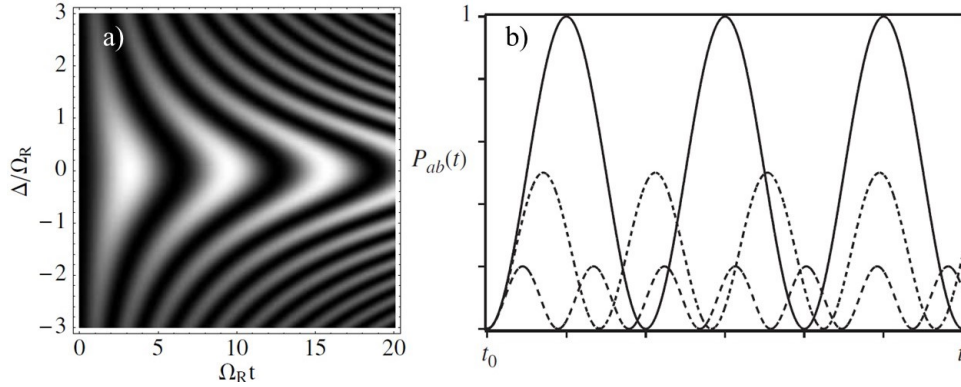
coeficientes  $c_a, c_b$  del estado  $|\psi(t)\rangle$  se escriben [26]

$$\begin{aligned} c_a(t) &= \left[ \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) - i\frac{\delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right] e^{-\frac{i\omega t}{2}}, \\ c_b(t) &= -i\frac{\Omega_R}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) e^{\frac{i\omega t}{2}} \end{aligned} \quad (3.25)$$

En esta ecuación, las cantidades  $|c_a(t)|^2$  y  $|c_b(t)|^2$  indican la probabilidad de que el átomo se encuentre en el estado excitado o en el estado base, a cualquier tiempo  $t$ , respectivamente. También, indican la probabilidad de transición de un estado a otro en la interacción cerca de la resonancia ( $\omega \sim \omega_0$ ). Entonces, la probabilidad de transición al estado base  $|b\rangle$  está dada por [2, 22, 26]

$$P_{a \rightarrow b}(t) = |\langle b|\psi(t)\rangle|^2 = |c_b(t)|^2 = \frac{\Omega_R^2}{\Omega^2} \sin^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right). \quad (3.26)$$

Esta expresión es conocida como *fórmula de Rabi* y fue derivada originalmente en el contexto de la resonancia magnética nuclear [6]. En el contexto de la interacción materia-luz, la fórmula de Rabi indica la probabilidad de transición al estado base [26].



**Figura 3.2** a) Oscilaciones de Rabi para distintos valores de  $\Delta$ . El color claro indica una mayor probabilidad [27]. b) Oscilaciones de Rabi para los valores de  $\delta = \Omega_R$  y  $\delta = 2\Omega_R$  [26].

La Figura 3.2a muestra la probabilidad de transición como función del tiempo para distintos valores de  $\delta$ . Se puede notar que para cada valor de  $\delta$  existe un máximo en la amplitud [27]. Además, en la Figura 3.2b, notamos que la probabilidad oscila a la frecuencia de Rabi generalizada  $\Omega$ , entre cero y un valor máximo, el cual está determinado por el desajuste  $\delta$ , que por la condición (3.1), debe ser pequeño [26]. En los otros dos casos, mostrados con líneas punteadas, la frecuencia aumenta pero el máximo de la probabilidad disminuye. En todos los casos, existe un máximo en la probabilidad cuando  $t = \pi/\Omega$ , dado por [22, 26]

$$P_{a \rightarrow b}^{m\acute{a}x} = \frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2 + \delta^2}. \quad (3.27)$$

La probabilidad de transición tiene una forma lorentziana y un ancho  $2\Omega_R$  a la mitad de la altura (FWHM). El ancho de la lorentziana depende entonces de  $\Omega_R$ , que a su vez depende de la intensidad del campo eléctrico aplicado. Por lo tanto, el ancho de la resonancia aumenta con la intensidad del campo eléctrico [2, 26].

La función de probabilidad posee una resonancia cuando  $\omega = \omega_0$ , como se observa en la figura 3.2b. Entonces,  $\Omega$  tiene su valor mínimo y la amplitud de la función de la probabilidad de transición tiene su máximo valor posible, igual a la unidad [2, 22-26]. Esto implica que podemos tener una inversión completa de la población, siempre que la duración de la interacción sea de  $\tau = \pi/\Omega$ , tiempo conocido como pulso- $\pi$ . Luego, si la interacción continúa, la población sigue oscilando a la frecuencia de Rabi [26].

En la práctica, las oscilaciones de Rabi se pueden observar experimentalmente. Por ejemplo, se pueden observar de manera indirecta al irradiar un láser de rubí en un cristal de rubí, como hicieron McCall y Hahn originalmente [20]. Para transiciones en el rango visible, comúnmente se requieren haces intensos. En muchos casos, estos láseres que se emplean son pulsados, por lo que la amplitud del campo eléctrico  $\mathbf{E}_0$  varía en el tiempo. Por ello, la frecuencia de Rabi  $\Omega_R$  también varía en el tiempo, y por lo tanto se define el **área de pulso** como [22]

$$\Theta = \left| \frac{d_{ab}}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(t) dt \right|. \quad (3.28)$$

El área del pulso es un parámetro adimensional que está determinado por la energía del pulso. En la fórmula de Rabi, hace las veces del término  $\Omega t$ . Un área de  $\pi$  es un pulso- $\pi$ .

En el experimento de McCall y Hahn, se observó lo que se conoce como **transparencia autoinducida**. En teoría, cuando el área del pulso se aproxima a  $2\pi$ , los átomos del cristal sufren una excitación y terminan en su estado base al final del pulso. Esto implica que no hay una absorción neta de energía al final de la interacción. Sin embargo, la energía del pulso debe ser suficiente para producir una inversión de la población completa, o al menos lo más cercana posible [20]. Por este motivo, es complicado observar las oscilaciones de Rabi de manera experimental. Para potencias bajas, es posible que ocurran eventos de emisión espontánea que destruyan la coherencia de los estados, ya que el periodo de oscilación es mayor que la vida radiativa. Por lo tanto, se requieren potencias altas para acortar el periodo de las oscilaciones de Rabi, lo cual puede ser difícil de lograr en la práctica [20, 22, 26].

### 3.2.5. Momento dipolar inducido

Debido a la interacción del sistema de dos niveles con el campo eléctrico, se produce un momento dipolar entre ambos niveles. Este momento dipolar inducido está dado por el valor de expectación del operador de momento dipolar. Al igual que en la sección anterior, asumimos que comenzamos en el estado excitado, por lo que el estado del átomo de dos niveles tendrá la forma (3.25), o sea [28]

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(t) &= \langle \psi(t) | \hat{\mathbf{d}} | \psi(t) \rangle \\ &= \mathbf{d}_{ab} \frac{\Omega_R}{2\Omega} \left[ \frac{\delta}{\Omega} e^{i\omega t} - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\delta}{\Omega} \right) e^{i(\omega+\Omega)t} + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\delta}{\Omega} \right) e^{i(\omega-\Omega)t} \right] + c.c. \end{aligned} \quad (3.29)$$

donde hemos reordenado términos. Por lo tanto, vemos que el momento dipolar inducido oscila y posee tres contribuciones: una a frecuencia  $\omega$ , y dos más a frecuencias  $\omega \pm \Omega$ . En el caso de resonancia ( $\delta = 0$ ), el momento dipolar toma la forma [28]

$$\mathbf{d}(t) = \frac{1}{2} \mathbf{d}_{ab} [\cos(\omega_0 t - \Omega_R t) - \cos(\omega_0 t + \Omega_R t)] = \mathbf{d}_{ab} \sin \omega_0 t \sin \Omega_R t. \quad (3.30)$$

En este caso, tenemos únicamente dos contribuciones al momento dipolar, con frecuencias  $\omega_0 \pm \Omega$ . Estos resultados son característicos de la interacción materia-luz con simetría de inversión [26]. Más adelante, veremos qué ocurre en caso de rompimiento de la simetría de inversión.

## 3.3. Esfera de Bloch

### 3.3.1. Definición de la esfera de Bloch

La equivalencia matemática entre un sistema de dos niveles y un sistema con espín ficticio  $\frac{1}{2}$  es más que una mera coincidencia. Podemos asociar los estados del sistema de dos niveles con los del espín como  $|a\rangle \leftrightarrow |+\rangle$  y  $|b\rangle \leftrightarrow |-\rangle$  [25].

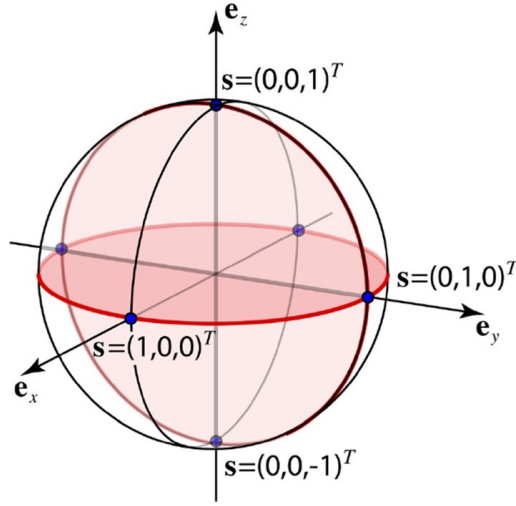
Es posible aprovechar esta equivalencia matemática para representar geoméricamente los estados de un sistema de dos niveles. Una representación de gran importancia es aquella desarrollada originalmente por Bloch en 1946 [29] como parte de sus investigaciones en resonancia magnética nuclear. Más tarde, en 1957, la representación de Bloch fue adaptada a sistemas de dos niveles por Feynman *et al.* [30]. El estado de un sistema de dos niveles se representa vectorialmente en el espacio real tridimensional por el **vector de Bloch** [22, 31].

El vector de Bloch define una esfera unitaria y su posición representa el estado de su-

perposición del sistema de dos niveles. Una manera de definir el vector de Bloch es a partir del eigenestado  $|\chi^+\rangle = (\cos(\theta/2), \sin(\theta/2)e^{i\phi})^T$  del operador  $\hat{\sigma} \cdot \hat{n}$ , donde  $\hat{n}$  es un vector unitario tridimensional en coordenadas esféricas y los ángulos  $\theta$  y  $\phi$  son los ángulos polar y azimutal, respectivamente [31]. Entonces, el vector de Bloch se puede escribir como  $\mathbf{s} \equiv \langle \hat{\sigma} \rangle = \langle \chi^+ | \hat{\sigma} | \chi^+ \rangle = \langle \psi'(t) | \hat{\sigma} | \psi'(t) \rangle$ . En coordenadas cartesianas, se escribe [22, 30]

$$\begin{aligned} s_x &= ab^* + a^*b = 2 \operatorname{Re} \{ ab^* \} = \sin \theta \cos \phi, \\ s_y &= i(ab^* - a^*b) = -2 \operatorname{Im} \{ ab^* \} = \sin \theta \sin \phi, \\ s_z &= aa^* - bb^* = |a|^2 - |b|^2 = \cos \theta, \end{aligned} \quad (3.31)$$

donde  $a$  y  $b$  son los coeficientes (3.23). En la Figura 3.3, se ilustran algunos puntos de interés en la esfera de Bloch.



**Figura 3.3** Representación de algunos puntos en la esfera de Bloch [19].

El vector de Bloch se encuentra en el polo Norte  $\mathbf{s} = (0, 0, 1)^T$  cuando  $a = 1$  y  $b = 0$ . En este estado, el átomo de dos niveles se encuentra en su estado excitado. En cambio, cuando el átomo se encuentra en el estado base, tenemos que  $a = 0$  y  $b = 1$ , por lo que el vector de Bloch se encuentra en el polo Sur. Por otro lado, todos los puntos que se encuentran en el ecuador corresponden a una superposición de poblaciones iguales  $|a(t)|^2 = |b(t)|^2 = 1/\sqrt{2}$ . La posición exacta del vector de Bloch depende de la fase relativa  $\phi$  entre los dos estados.

Para entender la evolución temporal del vector de Bloch, hacemos uso de la ecuación de Heisenberg  $\frac{d}{dt} \langle \hat{\sigma} \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{\sigma}, \hat{H}'] \rangle$ , con  $\hat{H}'$  dado por la expresión (3.20). Para la componente  $i$  tenemos

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{\sigma}_i \rangle = -i \frac{\Omega}{2} \langle [\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j n_j] \rangle = \epsilon_{ijk} \Omega n_j \langle \hat{\sigma}_k \rangle,$$

donde hemos hecho uso del convenio de la suma de Einstein y las relaciones de conmutación de

las matrices de Pauli. En forma vectorial, esta expresión queda

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{\sigma} \rangle = \boldsymbol{\Omega} \times \langle \hat{\sigma} \rangle . \quad (3.32)$$

Esta expresión es la ecuación clásica de precesión. Nos indica que el vector de Bloch precesa alrededor del vector  $\boldsymbol{\Omega}$  con velocidad angular  $\Omega$  en el marco de referencia rotatorio [31].

### 3.3.2. Oscilaciones de Rabi en la esfera de Bloch

En el modelo clásico de Rabi, los pulsos resonantes aplicados a un sistema de dos niveles se consideran **operaciones coherentes**, ya que mantienen el estado de superposición del sistema de dos niveles [22]. Si escogemos un vector de rotación  $\boldsymbol{\Omega}$  adecuado, en conjunto con una duración de pulso específica, podemos alcanzar cualquier punto en la esfera de Bloch [22, 31]. Esto significa que un pulso actúa como operador de rotación. Para ilustrar estas operaciones, escribimos las amplitudes (3.23) de manera explícita. Asumiendo que el sistema se encuentra originalmente en el estado excitado tenemos (con  $\delta = 0$ )

$$\begin{aligned} a(t) &= \cos\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right), \\ b(t) &= -i \sin\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right). \end{aligned} \quad (3.33)$$

En la representación de espines, cada operación en la esfera de Bloch tiene una expresión matricial. Por ejemplo, un pulso- $\pi$  ( $t = \pi/\Omega_R$ ) en resonancia produce una inversión de la población y el vector de Bloch se desplaza al polo Sur  $\mathbf{s} = (0, 0, 1)^T$ . Mientras tanto, en la representación de espines, equivale a la operación  $\hat{\sigma}_x |+\rangle = |-\rangle$ . Luego, un segundo pulso- $\pi$  regresará el sistema a su estado inicial. Entonces, para todo tiempo  $t$ , en las oscilaciones de Rabi el vector de Bloch oscila entre los polos de la esfera unitaria, con una frecuencia  $\nu = \Omega_R/2\pi$ , la frecuencia de Rabi [22]. Además, con ayuda de la ecuación (3.32) y la definición del vector  $\boldsymbol{\Omega}$  en la sección 3.2.3, podemos notar que el vector de Bloch describe estas oscilaciones girando alrededor del eje  $x$ , sobre el plano  $yz$ .

Entonces, se puede manipular el vector de Bloch a voluntad con una secuencia definida de pulsos coherentes de amplitud y duración determinadas [22]. La forma más fácil de alcanzar la superposición coherente es partir de alguno de los dos estados en el eje  $z$  y luego aplicar un pulso resonante para alcanzar el plano  $xy$ . Estas operaciones tienen una aplicación muy importante en el campo emergente de la computación cuántica [31].

Sin embargo, el control sobre el vector de Bloch ya no es completo si los pulsos no son

resonantes. Fuera de la resonancia, las ecuaciones (3.23) tienen la forma (3.25) sin la fase  $e^{\pm i\omega t/2}$ . En este caso, el vector de Bloch nunca puede alcanzar el polo Sur, ya que  $|b(t)|^2 \neq 1$  para todo tiempo  $t$  [26].



# Capítulo 4

## Ecuaciones clásicas de Bloch

### 4.1. Introducción

En el capítulo 3, estudiamos un sistema cuántico de dos niveles con simetría de inversión y su interacción con un campo eléctrico clásico. El desarrollo de esta teoría es el sustento de diversos fenómenos interesantes como las oscilaciones de Rabi [6, 23] o la transparencia auto-inducida [20]. Sin embargo, los conceptos involucrados en esta teoría, al igual que en cualquier teoría cuántica, suelen ser contraintuitivos. Por ello, se han investigado múltiples analogías entre la física clásica y la mecánica cuántica.

Más allá de la equivalencia matemática, las analogías conocidas entre ambas teorías pueden ayudar a entender de una manera más clara y profunda los fenómenos cuánticos y clásicos [1]. Con esta motivación, Frimner y Novotny [19] han presentado una interesante analogía entre el sistema semiclásico descrito en el capítulo anterior y un sistema clásico compuesto por un par de osciladores armónicos acoplados. En este capítulo se desarrollará dicha analogía y se discutirán los puntos en común y las diferencias con la teoría semiclásica presentada anteriormente. A partir de la segunda ley de Newton, se pueden realizar algunas aproximaciones razonables para obtener un par de ecuaciones diferenciales que son formalmente equivalentes a la ecuación de Schrödinger para el sistema de dos niveles discutido anteriormente.

### 4.2. Átomo mecánico

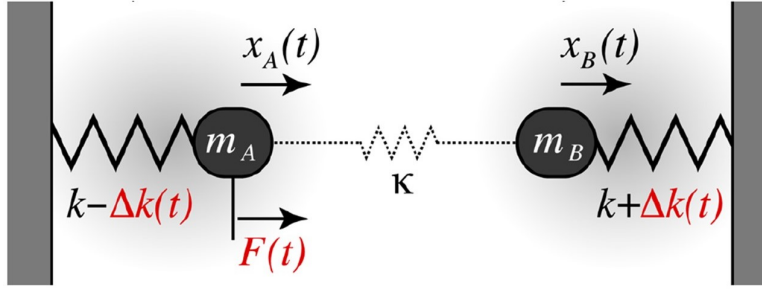
#### 4.2.1. Ecuaciones de movimiento

Comenzaremos reemplazando el átomo cuántico por un *átomo mecánico*, compuesto de dos osciladores armónicos acoplados por un resorte con constante  $\kappa$  y débilmente amortiguados, con una tasa  $\gamma$ , como se muestra en la Figura 4.1. Supondremos que las masas son iguales y que el acoplamiento es débil. Además, consideraremos que el movimiento está restringido a la línea que conecta a las dos masas, por lo que sólo existen dos grados de libertad, denotados por

las coordenadas  $x_A$  y  $x_B$ , medidas desde la posición de equilibrio [19, 21]. En este sistema, el oscilador A puede estar sujeto a una fuerza externa  $F(t)$ . Para la masa A, la constante de resorte es  $k_A = k - \Delta k(t)$ , donde la *modulación*  $\Delta k(t)$  es pequeña. Para la masa B, la constante de resorte es  $k_B = k + \Delta k(t)$  [19].

Si se desplaza la masa A de su posición de equilibrio por una cantidad  $x_A$ , la fuerza sobre ella es  $-[k_A - \Delta k(t)]x_A - \gamma\dot{x}_A - \kappa(x_A - x_B) + F(t)$ . Similarmente, la fuerza en la masa B es  $-[k + \Delta k(t)]x_B - \gamma\dot{x}_B - \kappa(x_B - x_A)$ . Entonces las ecuaciones de movimiento son [19, 21]

$$\begin{aligned} \ddot{x}_A + \gamma\dot{x}_A + \left[ \frac{k + \kappa}{m} - \frac{\Delta k(t)}{m} \right] x_A - \frac{\kappa}{m} x_B &= \frac{F(t)}{m}, \\ \ddot{x}_B + \gamma\dot{x}_B + \left[ \frac{k + \kappa}{m} + \frac{\Delta k(t)}{m} \right] x_B - \frac{\kappa}{m} x_A &= 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$



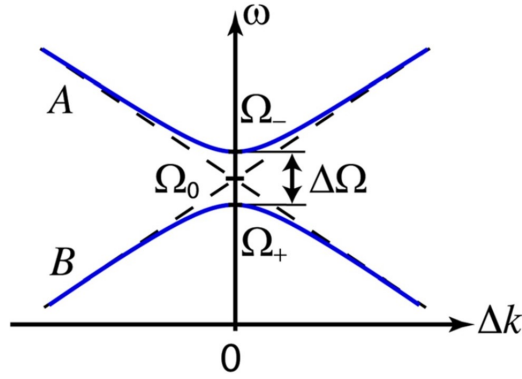
**Figura 4.1** Sistema de osciladores armónicos acoplados con un resorte de constante  $\kappa$  con masas  $m_A$  y  $m_B$  y constantes de resorte  $k_A = k - \Delta k(t)$  y  $k_B = k + \Delta k(t)$ . El oscilador A puede estar sujeto a una fuerza externa  $F(t)$  [19].

Para simplificar la notación, hacemos las definiciones siguientes: la frecuencia portadora,  $\Omega_0^2 \equiv (k + \kappa)/m$ , la frecuencia de la modulación  $\Omega_d^2 \equiv \Delta k/m$  y la frecuencia de acoplamiento  $\Omega_c^2 \equiv \kappa/m$ . En forma matricial, la expresión anterior tiene la forma

$$\left( \frac{d^2}{dt^2} + \gamma \frac{d}{dt} + \Omega_0^2 \right) \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\Omega_d^2 & -\Omega_c^2 \\ -\Omega_c^2 & \Omega_d^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

donde definimos:

$$\mathbf{x} \equiv \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \end{pmatrix}; \mathbb{M} \equiv \begin{pmatrix} -\Omega_d^2 & -\Omega_c^2 \\ -\Omega_c^2 & \Omega_d^2 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$



**Figura 4.2** Eigenfrecuencias  $\Omega_{\pm}$  de los osciladores acoplados como función de la modulación  $\Delta k$ . La separación en resonancia es proporcional a la fuerza de acoplamiento  $\kappa$  [19].

### 4.2.2. Eigenvalores y eigenvectores

Para encontrar los modos normales del sistema, nuevamente diagonalizaremos la matriz  $\Omega$ , de manera análoga a la sección 2.2.2. Para ello, hemos de considerar primero el caso de desajuste constante ( $\Delta k = \text{constante}$ ), y encontrar la matriz  $\mathbb{S}$  cuyas columnas son los eigenvectores  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$  de  $\mathbb{M}$ . Para encontrar las *eigenfrecuencias* del sistema de osciladores acoplados, debemos considerar también el término  $\Omega_0^2$ . Es decir, debemos encontrar los eigenvalores de la matriz  $\mathbb{A} = \mathbb{M} + \Omega_0^2 \mathbb{I}$ . Sin embargo, por simplicidad, basta con diagonalizar únicamente la matriz  $\mathbb{M}$ . Recordamos que la matriz  $\mathbb{A}$  sólo tiene eigenvectores no nulos si  $\det(\mathbb{A} - \Omega_{\pm} \mathbb{I}) = 0$ , donde  $\Omega_{\pm}$  son los eigenvalores del sistema. Llevando a cabo la operación obtenemos [19]

$$\Omega_{\pm} = \left( \Omega_0^2 \mp \sqrt{\Omega_d^4 + \Omega_c^4} \right)^{1/2}, \quad (4.4)$$

donde el término dentro del radical corresponde a los eigenvalores de  $\mathbb{M}$ . Si las graficamos las eigenfrecuencias  $\Omega_{\pm}$  como función de  $\Delta k(t)$ , podremos observar el comportamiento del sistema. En la figura 4.2 observamos que, cuando el acoplamiento es nulo,  $\Omega_c = 0$ , los osciladores son independientes y sus gráficas forman rectas que intersectan en la resonancia, cuando  $\Delta k = 0$ . Sin embargo, si existe un acoplamiento, las curvas no se intersectan y forman una separación característica [8, 19].

Recordando que habíamos considerado un acoplamiento débil, podemos asumir que  $\Omega_c \ll \Omega_0$ . En el caso de resonancia la separación entre las frecuencias es

$$\Delta\Omega = \Omega_- - \Omega_+ \approx \frac{\Omega_c^2}{\Omega_0}, \quad (4.5)$$

donde hemos realizado una aproximación por serie de Taylor en las eigenfrecuencias (4.4). Nótese que la separación es proporcional a la fuerza de acoplamiento  $\kappa$  [19].

Para obtener los eigenvectores, consideramos las dos ecuaciones de eigenvalores;  $\mathbb{M}\mathbf{s}_1 = -(\Omega_d^4 + \Omega_c^2)^{1/2} \mathbf{s}_1$ , y  $\mathbb{M}\mathbf{s}_2 = +(\Omega_d^4 + \Omega_c^2)^{1/2} \mathbf{s}_2$ . Sea  $\mathbf{s}_1 = (s_{11}, s_{21})^T$ , entonces tenemos el par de ecuaciones

$$\begin{aligned} -\Omega_d^2 s_{11} - \Omega_c^2 s_{21} &= -\sqrt{\Omega_d^4 + \Omega_c^4} s_{11}, \\ -\Omega_c^2 s_{11} + \Omega_d^2 s_{21} &= -\sqrt{\Omega_d^4 + \Omega_c^4} s_{21}. \end{aligned}$$

Despejando  $s_{21}$  de la segunda ecuación y luego de racionalizar y elegir  $s_{11} = 1$ , obtenemos  $\mathbf{s}_1$ . Después de hacer un procedimiento similar para el otro eigenvalor, obtenemos la matriz de eigenvectores

$$\mathbb{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -(\Omega_d/\Omega_c)^2 + \sqrt{1 + (\Omega_d/\Omega_c)^4} & -(\Omega_d/\Omega_c)^2 - \sqrt{1 + (\Omega_d/\Omega_c)^4} \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

### 4.2.3. Modos normales

Ahora, podemos encontrar los modos de oscilación simétrico y antisimétrico al diagonalizar y desacoplar el sistema de ecuaciones diferenciales. Por conveniencia, realizaremos la transformación

$$\mathbf{x} = \mathbb{U}^{-1}\mathbf{y} = (\mathbb{S}^{-1})^T \mathbf{y}, \quad (4.7)$$

donde  $\mathbb{U}$  es la matriz de transformación y  $\mathbf{y} \equiv (y_A, y_B)^T$  son los eigenmodos del sistema. Entonces, tenemos

$$\mathbb{U}\mathbb{M}\mathbf{x} = \mathbb{U}\mathbb{M}\mathbb{U}^{-1}\mathbf{y} = \mathbb{S}^T\mathbb{M}^T(\mathbb{S}^{-1})^T \mathbf{y},$$

pero  $\mathbb{S}^T\mathbb{M}^T(\mathbb{S}^{-1})^T = (\mathbb{S}^{-1}\mathbb{M}\mathbb{S})^T = \Lambda^T = \Lambda$ , donde  $\Lambda$  es la matriz de eigenvalores de  $\mathbb{M}$ . Aplicando la transformación (4.7) en la ecuación (4.1) y multiplicando por la izquierda por  $\mathbb{U}$  resulta [19]

$$\left( \frac{d^2}{dt^2} + \gamma \frac{d}{dt} + \Omega_0^2 \right) \begin{pmatrix} y_A \\ y_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sqrt{\Omega_d^4 + \Omega_c^4} & 0 \\ 0 & \sqrt{\Omega_d^4 + \Omega_c^4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_A \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t) \\ f(t) \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Como podemos notar, hemos obtenido un sistema de ecuaciones diferenciales para las coordenadas  $y_A$  y  $y_B$  en donde éstas son independientes. En particular, nos interesa la evolución de los eigenmodos  $x_+$  y  $x_-$  cerca del la resonancia ( $\Delta k = 0$ ). En este caso la matriz de transformación  $\mathbb{U}$ , se escribe [19]

$$\mathbb{U}(\Delta k \rightarrow 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Si aplicamos esta transformación, los eigenmodos toman la forma

$$\begin{aligned} x_+ &\equiv y_A(\Delta k \rightarrow 0) = x_A + x_B, \\ x_- &\equiv y_B(\Delta k \rightarrow 0) = x_A - x_B. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Por un lado, tenemos un modo de oscilación simétrico, denotado por  $x_+$ , con frecuencia  $\Omega_+(\Delta k = 0) = \sqrt{k/m}$ . En este modo de oscilación, ambas masas se desplazan en la misma dirección en cualquier instante dado; es decir, oscilan en fase. Además, se debe notar que en este modo, la frecuencia de oscilación es la frecuencia en ausencia de acoplamiento. Esto es debido a que el resorte que acopla cada una de las masas individuales no posee ningún efecto. Por otro lado, tenemos un modo antisimétrico, denotado por  $x_-$ , con frecuencia  $\Omega_-(\Delta k = 0) = \sqrt{(k + 2\kappa)/m}$ . En este modo, las masas se desplazan en direcciones contrarias (fuera de fase). La frecuencia en este caso es mayor, debido a que el sistema se encuentra bajo la acción del acoplamiento [19, 21].

Siguiendo el mismo procedimiento empleado para obtener (4.8), utilizamos (4.7), con  $\mathbb{U}^{-1}(\Delta k = 0)$  para transformar el sistema de ecuaciones (4.1). Multiplicamos por  $\mathbb{U}(\Delta k = 0)$  por la izquierda y obtenemos

$$\left( \frac{d^2}{dt^2} + \gamma \frac{d}{dt} + \Omega_0^2 \right) \begin{pmatrix} x_+ \\ x_- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\Omega_c^2 & -\Omega_d^2 \\ -\Omega_d^2 & \Omega_c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_+ \\ x_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t) \\ f(t) \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Comparando la expresión (4.11) con (4.2), puede observarse que los modos normales ahora se encuentran acoplados por la modulación. A partir de ahora, suponemos que  $f(t) = 0$  para investigar la dinámica del sistema sin forzamiento [19].

#### 4.2.4. Envoltente lenta

Tomando en cuenta que el acoplamiento débil se traduce en una transferencia de energía entre los osciladores, podemos proponer soluciones de la forma [21]

$$\begin{aligned} x_+ &= \text{Re} \{ c_a(t) e^{i\Omega_0 t} \} \\ x_- &= \text{Re} \{ c_b(t) e^{i\Omega_0 t} \} \end{aligned} \quad (4.12)$$

para la evolución de los eigenmodos. En esta expresión, los términos  $c_a(t)$  y  $c_b(t)$  son amplitudes complejas que varían lentamente, en comparación a la alta frecuencia  $\Omega_0$  con la que oscilan los

eigenmodos (4.12) [19]. Sustituyendo (4.12) en (4.11) se obtiene

$$\begin{aligned} [\ddot{c}_a + 2i\Omega_0\dot{c}_a - \Omega_0^2 c_a + \gamma\dot{c}_a + i\Omega_0\gamma c_a + \Omega_0^2 c_a - \Omega_c^2 c_a - \Omega_d^2 c_b] e^{i\Omega_0 t} &= 0, \\ [\ddot{c}_b + 2i\Omega_0\dot{c}_b - \Omega_0^2 c_b + \gamma\dot{c}_b + i\Omega_0\gamma c_b + \Omega_0^2 c_b - \Omega_d^2 c_a + \Omega_c^2 c_b] e^{i\Omega_0 t} &= 0. \end{aligned}$$

Como se había mencionado anteriormente, suponemos que las envolventes  $c_a$  y  $c_b$  varían lentamente, por lo que no cambian notoriamente en un periodo  $T = 2\pi/\Omega_0$ . Entonces asumimos que  $|\ddot{c}_a| \ll |\dot{c}_a|$  y  $|\ddot{c}_b| \ll |\dot{c}_b|$ . Esta suposición nos permite despreciar los términos que contienen las segundas derivadas. Además, tomamos en cuenta el hecho de que el amortiguamiento es débil, por lo que  $2i\Omega_0 + \gamma \approx 2i\Omega_0$  [19]. Tomado en cuenta estas consideraciones obtenemos

$$i \begin{pmatrix} \dot{c}_a \\ \dot{c}_b \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Delta\Omega - i\gamma & \omega_d \\ \omega_d & -\Delta\Omega - i\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_a \\ c_b \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

donde hemos definido la frecuencia de modulación re-escalada  $\omega_d \equiv \Omega_d^2/\Omega_0$  y hemos utilizado la ecuación (4.5) para simplificar la notación [19].

#### 4.2.5. Modulación paramétrica

Para entender cómo se comportaría el *átomo mecánico*, consideramos una modulación armónica de la forma [19]

$$\Delta k(t) = -2\Omega_0 m A \cos(\omega_m t), \quad (4.14)$$

donde  $A$  y  $\omega_m$  son la amplitud y la frecuencia de la modulación, respectivamente. De esta manera, tenemos que  $\omega_d = -A(e^{i\omega_m t} + e^{-i\omega_m t})$ . Sustituyendo esto en (4.13) se obtiene

$$i \begin{pmatrix} \dot{c}_a \\ \dot{c}_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta\Omega - i\gamma & -2A \cos \omega_m t \\ -2A \cos \omega_m t & -\Delta\Omega - i\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_a \\ c_b \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Nótese que esta ecuación es formalmente equivalente a la ecuación de Schrödinger para el Hamiltoniano (3.15) cuando el amortiguamiento es nulo. Este resultado es importante, puesto que establece la analogía entre un sistema cuántico y uno clásico. En este caso, la separación de energía entre niveles es  $\hbar\Delta\Omega$  y el acoplamiento  $\hbar\omega_d/2$ . Con esta notación, el Hamiltoniano tendría la forma  $\hbar\Delta\Omega\hat{\sigma}_z/2 + \hbar\omega_d\hat{\sigma}_x/2$ . De esta manera, el sistema de dos osciladores armónicos clásicos puede considerarse como un átomo mecánico, cuyo estado base o excitado corresponde a los eigenmodos simétrico o antisimétrico, respectivamente [19]. Además, el desajuste  $\Delta k$ , establece el acoplamiento entre los eigenmodos y en particular, la amplitud  $A$  representa la frecuencia de Rabi en el capítulo 3. De manera análoga, el acoplamiento entre niveles se produce

por la interacción entre el sistema de dos niveles y el campo eléctrico [19, 24].

#### 4.2.6. Solución general

Para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales (4.13), debemos trasladarnos a un marco de referencia rotatorio, como se hace en la sección 3.2.2. En esta ocasión, hacemos uso de la transformación [19, 24]

$$\begin{aligned} c_a(t) &= a(t) e^{-i\omega_m t/2}, \\ c_b(t) &= b(t) e^{i\omega_m t/2}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Esta transformación es equivalente a la transformación (3.16); esta vez con  $\hat{\mathcal{U}}_z(t) = e^{i\omega_m t \hat{\sigma}_z/2}$ . Con esto, nos trasladamos a un marco de referencia que oscila con la frecuencia de la modulación. Si sustituimos (4.16), junto con (4.14) en (4.13) se obtiene

$$\begin{aligned} i \left( \dot{a} - \frac{i}{2} \omega_m a \right) &= \frac{1}{2} (\Delta\Omega - i\gamma) a - \frac{A}{2} (e^{2i\omega_m t} + 1) b, \\ i \left( \dot{b} + \frac{i}{2} \omega_m b \right) &= -\frac{A}{2} (1 + e^{-2i\omega_m t}) a - \frac{1}{2} (\Delta\Omega + i\gamma) b. \end{aligned}$$

Como se observa en las expresiones anteriores, tenemos términos de la forma  $e^{\pm 2i\omega_m t}$  que oscilan rápidamente. Aplicamos la aproximación cuasi-resonante, y despreciamos estos términos, debido a que sus efectos se pierden en tiempos suficientemente largos [23, 26]. Después de reordenar términos obtenemos [19]

$$i \begin{pmatrix} \dot{a} \\ \dot{b} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \delta - i\gamma & -A \\ -A & -\delta - i\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad (4.17)$$

donde  $\delta \equiv \Delta\Omega - \omega_m$  es la diferencia entre la separación de los niveles y la modulación [19]. Obsérvese la semejanza entre la matriz en esta expresión y el Hamiltoniano (3.20). Si utilizamos las condiciones iniciales arbitrarias,  $a(0) = a_0$  y  $b(0) = b_0$ , obtenemos la solución general [19]

$$\begin{aligned} a(t) &= \left\{ \left[ \cos\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) - i \frac{\delta}{\Omega_R} \sin\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) \right] a_0 + i \frac{A}{\Omega_R} \sin\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) b_0 \right\} e^{-\gamma t/2}, \\ b(t) &= \left\{ i \frac{A}{\Omega_R} \sin\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) a_0 + \left[ \cos\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) + i \frac{\delta}{\Omega_R} \sin\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) \right] b_0 \right\} e^{-\gamma t/2}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

donde  $\Omega_R \equiv \sqrt{A^2 + \delta^2}$  es la frecuencia de Rabi generalizada. En el Apéndice C se encuentra el procedimiento detallado para obtener esta solución. Excepto por el factor de amortiguamiento  $e^{-\gamma t/2}$ , esta solución es idéntica a la solución (3.23).

Después de revertir las transformaciones (4.16), (4.12) y (4.10) encontramos la solución general al problema de un sistema de osciladores armónicos acoplados con una constante de resorte que varía de manera armónica. Sin embargo, esta solución se sustenta en la aproximación cuasi-resonante, que impone la condición de que la frecuencia de Rabi debe ser tal que  $\Omega_R \ll \omega_m$ . Esto es debido a que en la aproximación cuasi-resonante despreciamos términos que oscilan con frecuencias  $\pm 2\omega_m$ . El hecho de que la frecuencia de Rabi debe ser pequeña nos indica que  $\delta$  también debe ser suficientemente pequeña, lo cual implica que  $\Delta\Omega \sim \omega_m$ . Por otra parte, la amplitud de la modulación también debe ser tal que asegure que la frecuencia de Rabi no sea demasiado grande [19].

Por otro lado, la aproximación realizada en la sección 4.2.4 nos indica que la frecuencia de modulación debe cumplir que  $\omega_m \ll \Omega_0$  para que la envolvente tenga una variación lenta. Es decir, la frecuencia de oscilación natural de las masas (en ausencia de acoplamiento) debe ser mucho mayor que la de la modulación [19, 21].

## 4.3. Esfera de Bloch Clásica

### 4.3.1. Definición de la esfera de Bloch

En la sección 3.3, se introdujo el **vector de Bloch**, definido como el valor esperado del vector de las matrices de Pauli. Para el estudio de la analogía presentada en este capítulo, es pertinente escribir un vector de Bloch clásico, partiendo de la definición cuántica. Con esto, es posible estudiar cómo evoluciona nuestro sistema de osciladores armónicos clásicos y profundizar en la analogía con el sistema cuántico de dos niveles. El vector de Bloch clásico tiene las componentes cartesianas [19, 30]

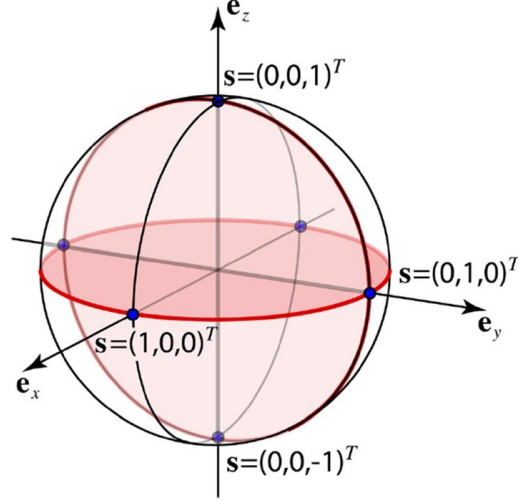
$$\begin{aligned} s_x &= ab^* + a^*b = 2 \operatorname{Re} \{ab^*\} , \\ s_y &= i(ab^* - a^*b) = -2 \operatorname{Im} \{ab^*\} , \\ s_z &= aa^* - bb^* = |a|^2 - |b|^2 . \end{aligned} \tag{4.19}$$

Para que nuestro sistema pueda representarse en la esfera de Bloch, debe estar normalizado, de forma que  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ , y en ausencia de amortiguamiento ( $\gamma = 0$ ), entonces el vector definido en las ecuaciones  $\mathbf{s} = (s_x, s_y, s_z)^T$  describe una esfera unitaria [19, 31].

Ahora, ilustraremos algunos puntos interesantes en la esfera de Bloch, mostrados en la Figura 4.3. El polo Norte  $\mathbf{s} = (0, 0, 1)^T$  corresponde al estado  $(a, b) = (1, 0)$ . En este estado únicamente el modo simétrico se encuentra activo. Por otra parte, en el estado  $(a, b) = (0, 1)$ ,



el vector de Bloch se encuentra en el polo Sur y solamente el modo antisimétrico se encuentra activo. Finalmente, todos los puntos en el ecuador corresponden a una superposición igual de los eigenmodos, pero con distinta fase. Por ejemplo, el punto  $\mathbf{s} = (1, 0, 0)^T$  corresponde al estado  $(a, b) = (1, 1)/\sqrt{2}$  [19].



**Figura 4.3** Representación de algunos puntos en la esfera de Bloch clásica, correspondientes a diferentes estados de superposición de los eigenmodos  $x_{\pm}$  [19].

Para investigar cómo evoluciona el vector de Bloch en el tiempo, calculamos su derivada. Para la componente  $s_x$ , tenemos

$$\begin{aligned}\dot{s}_x &= \dot{a}b^* + a\dot{b}^* + \dot{a}^*b + a^*\dot{b} \\ &= -\gamma s_x - \delta s_y,\end{aligned}$$

donde hemos hecho uso de la ecuación (4.17) y simplificado. Después de un procedimiento similar para las demás componentes, obtenemos [19]

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma & -\delta & 0 \\ \delta & -\gamma & A \\ 0 & -A & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

Podemos compactar el sistema de ecuaciones anterior escribiendo  $\mathbf{\Omega} \equiv (-A, 0, \delta)^T$ . Entonces, resulta la expresión

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{s} - \gamma \mathbf{s}. \quad (4.21)$$

Cuando el amortiguamiento es nulo, la ecuación  $\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{s}$  es la ecuación clásica que describe la precesión del vector de Bloch alrededor del vector  $\mathbf{\Omega}$ , con frecuencia angular  $\Omega_R$  [19, 23, 30]. Estos resultados definen las *ecuaciones de Bloch clásicas*. En resumen, el estado de nuestro sistema de osciladores armónicos acoplados está determinado por las amplitudes complejas  $a(t)$

y  $b(t)$  y cada estado en particular tiene una representación en la esfera de Bloch.

En principio, podemos escoger una amplitud  $A$  y un valor  $\delta$  tal que logremos trasladar el vector de Bloch de un punto cualquier a otro, en el tiempo adecuado, dado por las ecuaciones (4.18). Esta es la idea central del concepto de **control coherente** [19, 22, 26]. Como se discutió en la sección 3.3.2, se puede lograr el control coherente al manipular el un sistema por medio de una secuencia de pulsos resonantes, con una duración bien definida [22]. En el caso clásico presentado en este capítulo, el control coherente depende completamente de la modulación  $\Delta k$  en los resortes [19].

### 4.3.2. Oscilaciones de Rabi clásicas

En esta sección discutiremos cómo cambia el vector de Bloch cuando modulamos el parámetro  $\Delta k(t)$  en resonancia ( $\Delta\Omega = \omega_m$ ). En este caso la modulación tiene la forma  $\Delta k \propto A \cos(\Delta\Omega t)$ . Suponiendo que el vector de Bloch comience en el punto  $\mathbf{s} = (0, 0, 1)^T$ , entonces precesará alrededor del eje  $\mathbf{\Omega} = -A\hat{\mathbf{x}}$ . Las amplitudes complejas (4.18) tienen la forma [19]

$$\begin{aligned} a(t) &= \cos\left(\frac{At}{2}\right)e^{-\gamma t/2}, \\ b(t) &= i \sin\left(\frac{At}{2}\right)e^{-\gamma t/2}. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Por ahora, se ignorará el amortiguamiento, por lo que  $\gamma = 0$ . Después de un tiempo  $t = \pi/A$ , tendremos que  $a(\pi/A) = 0$  y  $b(\pi/A) = 1$ . Éste es el llamado pulso- $\pi$  [22]. Entonces, el vector de Bloch habrá rotado al polo Sur. De manera similar, para un tiempo de modulación de  $t = 2\pi/A$ , el sistema habrá vuelto a su estado original [19]. Entonces, la esfera de Bloch representa el estado del sistema considerando la población de los eigenmodos, dada por

$$\begin{aligned} |a(t)| &= \cos^2\left(\frac{At}{2}\right)e^{-\gamma t}, \\ |b(t)| &= \sin^2\left(\frac{At}{2}\right)e^{-\gamma t}. \end{aligned} \tag{4.23}$$

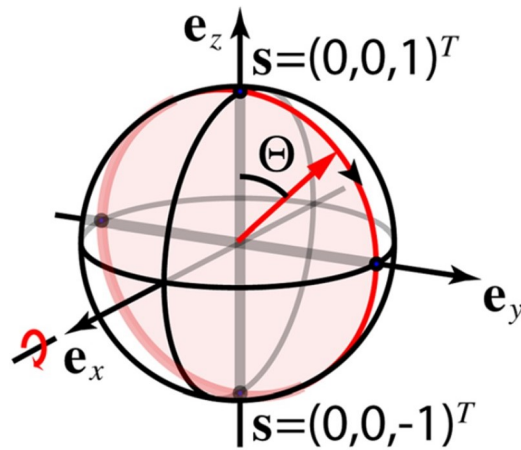
Entonces, cuando  $\gamma = 0$ , los modos oscilan entre el simétrico y el antisimétrico y el vector de Bloch lo hace entre el polo Norte y el polo Sur, como se observa en la Figura 4.4.

En este caso, la población se invierte con un periodo de  $T = 2\pi/A$  [19, 26]. Éste es el fenómeno que ocurre en las oscilaciones de Rabi en un sistema de dos niveles [22]. Sin embargo, el amortiguamiento lleva a caída de las poblaciones de ambos eigenmodos con el tiempo y la magnitud del vector de Bloch no se conserva [19]. Para una diferencia  $\delta \neq 0$ , las amplitudes

son

$$\begin{aligned} a(t) &= \left[ \cos\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) - i \frac{\delta}{\Omega_R} \sin\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) \right] e^{-\gamma t/2}, \\ b(t) &= i \frac{A}{\Omega_R} \sin\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) e^{-\gamma t/2}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Estas expresiones revelan que, en el caso de operaciones no resonantes, el vector de Bloch precesa alrededor de un eje  $\Omega$  que tiene una componente en el eje  $z$ , por lo que nunca alcanzará el polo Sur. Esto también se puede entender a partir de que  $|b(t)|^2 \neq 1$  para cualquier tiempo  $t$ , ya que  $\Omega_R \geq A$  [19].



**Figura 4.4** Oscilaciones de Rabi en la esfera de Bloch. El vector de Bloch rota alrededor del eje  $\Omega = -A\hat{x}$  [19].

### 4.3.3. Franjas de Ramsey clásicas

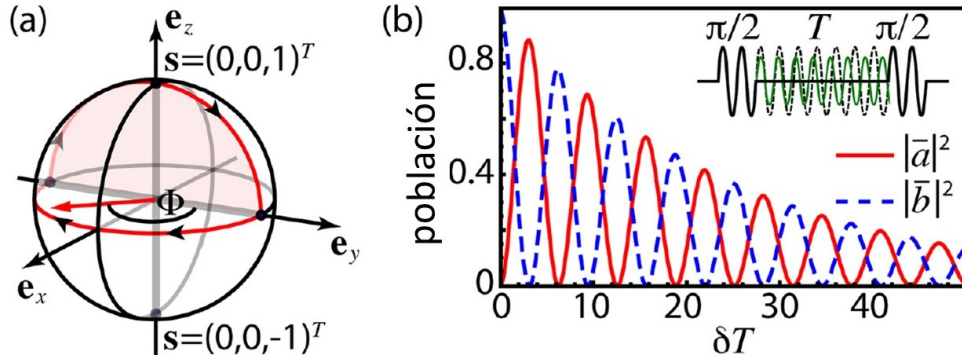
En la sección anterior, vimos que las modulaciones resonantes producen oscilaciones de Rabi en el sistema de osciladores acoplados. Ahora, veremos qué ocurre cuando escogemos un desajuste  $\delta \neq 0$  y despreciamos el amortiguamiento.

Una forma de visualizar el efecto del desajuste  $\delta$  es por medio del experimento de Ramsey. Comenzamos preparando el sistema en el estado correspondiente al polo Norte en la esfera de Bloch. Después de un pulso- $\pi/2$  resonante ( $\delta = 0$ ), el sistema se encontrará en el punto  $\mathbf{s} = (0, 1, 0)^T$ , como se puede ver utilizando las ecuaciones (4.19). Ahora esperamos un tiempo  $t$ , escogemos  $A = 0$ . Entonces, tenemos que  $\delta = \Delta\Omega$ , y las condiciones iniciales son  $(a_0, b_0) =$

$(1, i)/\sqrt{2}$ . Las ecuaciones (4.18) toman la forma

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \cos\left(\frac{\delta t}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\delta t}{2}\right) \right], \\ b(t) &= \frac{i}{\sqrt{2}} \left[ \cos\left(\frac{\delta t}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\delta t}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Entonces, podemos notar que el vector de Bloch se desplazará aunque no exista una modulación ( $A = 0$ ), ya que los eigenmodos adquieren una fase relativa, dada por la diferencia de frecuencia  $\Delta\Omega$  en los niveles [19]. Luego, esperamos un tiempo  $T$  y el vector de Bloch habrá rotado un ángulo  $\Phi = \delta T$  sobre el ecuador. Después, aplicamos un nuevo pulso- $\pi/2$ . El experimento de Ramsey consiste en medir la población de cada estado para cada tiempo de espera  $T$ . Si el tiempo de espera fue  $T = \pi/\delta$ , regresamos al polo Norte después del segundo pulso- $\pi/2$ . En la Figura 4.5a se puede observar la trayectoria del vector de Bloch para este caso. En general podemos notar en la ecuación (4.25) que cada tiempo  $t = n\pi/\delta$ , se produce una inversión en la población [19, 22]. Si medimos las poblaciones después del segundo pulso- $\pi/2$ , encontraremos las franjas características del experimento de Ramsey mostradas en la Figura 4.5b.

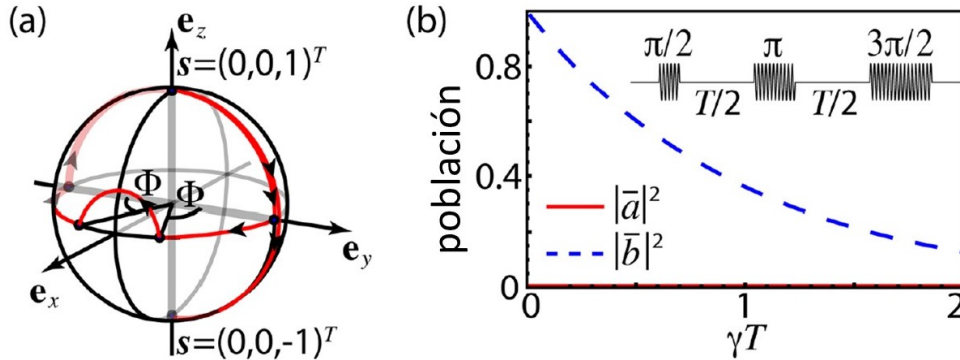


**Figura 4.5** a) Trayectoria del vector de Bloch en el experimento de Ramsey para un tiempo  $T = \pi/\delta$ . b) Patrón de franjas de Ramsey, formado cuando se mide la población de cada estado después de un tiempo  $T$  de evolución del vector de Bloch en el ecuador [19].

#### 4.3.4. Experimento de Hahn clásico

Ya que hemos establecido el efecto de los pulsos resonantes y los tiempos de esfera, es posible refinar el método anterior. Si comenzamos en el polo Sur  $\mathbf{s} = (0, 0, 1)^T$ , y aplicamos un pulso de  $\pi/2$ , alcanzamos el estado  $\mathbf{s} = (0, 1, 0)^T$ , al igual que en la sección anterior. Sin embargo, ahora esperamos un tiempo  $T/2$  para que el vector de Bloch evolucione a lo largo del ecuador. Luego, aplicamos un pulso resonante  $\pi$ , por lo que el vector de Bloch rotará un ángulo  $\pi$  alrededor del eje  $x$ , como se establece en la ecuación (4.21). Después de un tiempo adicional  $T/2$ , el vector de Bloch siempre alcanzará el punto  $\mathbf{s} = (0, -1, 0)^T$ . Luego de un pulso- $3\pi/2$

adicional, el vector de Bloch regresa al punto  $\mathbf{s} = (0, 0, 1)^T$ . La trayectoria del vector de Bloch se muestra en la Figura 4.6a. Sin embargo, esto sólo se cumple si no existe amortiguamiento [19].



**Figura 4.6** a) Trayectoria del vector de Bloch en el experimento de Hahn. b) Población del eigenmodo  $x_-$  después del experimento de Hahn. Además, se encuentran esquematizados los pulsos [19].

Cuando existe amortiguamiento, las amplitudes decaen con un factor  $e^{-\gamma t/2}$ . Si medimos el resultado del experimento de Hahn, encontraremos lo siguiente. La población del modo simétrico es cero, mientras que la población del modo antisimétrico es  $|b(T)|^2 = e^{-\gamma T}$ . En la Figura 4.6b se muestra una gráfica de la población del eigenmodo  $x_-$ . Entonces, si se modifica el tiempo se espera  $T$  y se mide la energía del eigenmodo  $x_-$ , se puede determinar el amortiguamiento. En el experimento de Hahn cuántico se puede eliminar la contribución de la relajación por decaimiento de la población y medir el amortiguamiento debido a la pérdida de coherencia [19].

## 4.4. Diferencias con el sistema de dos niveles

A lo largo de este capítulo, se ha establecido la analogía entre el sistema cuántico de dos niveles y el sistema de osciladores armónicos clásicos acoplados. Sin embargo, existe una importante diferencia. En el sistema clásico, el amortiguamiento causa la desaparición de ambos modos. En cambio, un sistema cuántico de dos niveles siempre cae al estado base como consecuencia del amortiguamiento [22]. En el modelo de Rabi, uno de los mecanismos de amortiguamiento es la emisión espontánea. En este mecanismo, los átomos tienden a caer al estado base y emiten el exceso de energía. El número de átomos en el estado excitado decae exponencialmente y el resultado final es que todos los átomos se encontrarán en el estado base [22].

El proceso de emisión espontánea está caracterizado por las constantes fenomenológicas  $T_1$  y  $T_2$ , introducidas por Bloch en su modelo de resonancia magnética nuclear, donde se relacionan a los procesos de relajación del espín [29]. En el contexto de la interacción materia-luz, la

constante  $T_1$ , llamada *relajación longitudinal*, está determinada por el decaimiento de la población. Por otra parte, la constante  $T_2$ , llamada *relajación transversal*, está relacionada al proceso de desfase. Cuando ocurren eventos que no alteran la población del estado excitado, pero sí la fase de la función de onda, y entonces se pierde la coherencia y por lo tanto se pierden las oscilaciones de Rabi [22, 26]. En ambos casos, se produce una caída en la población, mientras que en el sistema clásico se pierden los modos de oscilación. Por esto, la emisión espontánea es un fenómeno cuántico que no puede ser modelado en términos clásicos [19, 22].

# Capítulo 5

## Interacción materia-luz: sistema de dos niveles asimétrico

### 5.1. Transformación del Hamiltoniano a un marco de referencia rotatorio

En el capítulo 3, estudiamos la interacción entre un sistema cuántico de dos niveles y asumimos que existía simetría de inversión. Nuevamente, buscaremos una solución a la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo que se escriba como una superposición de los estados  $\{|a\rangle, |b\rangle\}$ . Es decir, escribiremos la función de onda como  $|\psi(t)\rangle = c_a(t)|a\rangle + c_b(t)|b\rangle$ . En este capítulo, haremos una suposición importante, que no existe la simetría de inversión. Esto implica que los estados  $\{|a\rangle, |b\rangle\}$  no tienen una paridad definida, por lo que podemos suponer que  $\mathbf{d}_{aa}, \mathbf{d}_{bb} \neq 0$ . Esto significaría que hay momentos dipolares permanentes asociados al estado base y al estado excitado [32]. En el capítulo 3, obtuvimos el Hamiltoniano para el sistema de dos niveles en interacción con un campo eléctrico clásico:

$$\hat{H}(t) = \frac{1}{2} [\hbar\omega_0 - \mathbf{E}_0 \cdot (\mathbf{d}_{aa} - \mathbf{d}_{bb}) \cos \omega t] \hat{\sigma}_z - \mathbf{E}_0 \cdot (\mathbf{d}_{ab} \hat{\sigma}_+ + \mathbf{d}_{ba} \hat{\sigma}_-) \cos \omega t. \quad (5.1)$$

Nuevamente, haremos una rotación alrededor del eje  $z$ , con una transformación unitaria definida como

$$\hat{U}_z(t) = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_0^t \frac{1}{2} [\hbar\omega_0 - \mathbf{E}_0 \cdot (\mathbf{d}_{aa} - \mathbf{d}_{bb}) \cos \omega t'] dt' \right\} = e^{i(\omega_0 t - \kappa \sin \omega t) \hat{\sigma}_z / 2}, \quad (5.2)$$

donde hemos definido el parámetro de violación de la simetría  $\kappa \equiv \mathbf{E}_0 \cdot (\mathbf{d}_{aa} - \mathbf{d}_{bb}) / \hbar\omega$  [32]. Siguiendo un procedimiento análogo a la sección 3.2.2, escribimos la función de onda transformada como  $|\psi'(t)\rangle = a(t)|a\rangle + b(t)|b\rangle$ . En términos de los coeficientes  $c_a, c_b$  tenemos

$$\begin{aligned} a(t) &= c_a(t) e^{i\theta/2}, \\ b(t) &= c_b(t) e^{-i\theta/2}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

donde hemos definido  $\theta(t) \equiv \omega_0 t - \kappa \sin \omega t$ . Ahora, evaluamos cómo se transforma el Hamiltoniano del sistema (5.1) bajo la acción de  $\hat{\mathcal{U}}_z(t)$ . Utilizando la ecuación 3.6, encontramos

$$\begin{aligned}\hat{H}'(t) &= -\frac{\hbar}{2}(\omega_0 - \kappa\omega \cos \omega t) \hat{\sigma}_z + e^{i\frac{\theta}{2}\hat{\sigma}_z} \hat{H}(t) e^{-i\frac{\theta}{2}\hat{\sigma}_z} \\ &= -(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{d}_{ab} e^{i\theta} \hat{\sigma}_+ + \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{d}_{ba} e^{-i\theta} \hat{\sigma}_-) \cos \omega t.\end{aligned}\quad (5.4)$$

Definimos la intensidad de campo eléctrico renormalizada como

$$\tilde{\mathbf{E}}(t) \equiv \mathbf{E}_0 e^{i\kappa \sin \omega t} = \mathbf{E}_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\kappa) e^{in\omega t}, \quad (5.5)$$

donde  $J_n(\kappa)$  son las funciones de Bessel del primer tipo y orden entero. Con esto, reescribimos el Hamiltoniano (5.4) como

$$\begin{aligned}\hat{H}'(t) &= -\left(\tilde{\mathbf{E}}^*(t) \cdot \mathbf{d}_{ab} e^{i\omega_0 t} \hat{\sigma}_+ + \tilde{\mathbf{E}}(t) \cdot \mathbf{d}_{ba} e^{-i\omega_0 t} \hat{\sigma}_-\right) \cos \omega t \\ &= -\mathbf{E}_0 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\kappa) (\mathbf{d}_{ab} e^{-in\omega t} e^{i\omega_0 t} \hat{\sigma}_+ + \mathbf{d}_{ba} e^{in\omega t} e^{-i\omega_0 t} \hat{\sigma}_-) \cos \omega t.\end{aligned}\quad (5.6)$$

Observamos en el Hamiltoniano que existen nuevas resonancias, cuando  $n\omega = \omega_0$ , con  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Esto es un efecto del rompimiento de la simetría de inversión, ya que el campo eléctrico se ha transformado en un oscilador armónico paramétrico [32]. Reescribimos la expresión anterior en términos de las funciones Bessel como

$$\begin{aligned}\hat{H}'(t) &= -\frac{1}{2} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{d}_{ab} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\kappa) (e^{-i(n-1)\omega t} + e^{-i(n+1)\omega t}) e^{i\omega_0 t} \hat{\sigma}_+ \\ &\quad -\frac{1}{2} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{d}_{ba} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\kappa) (e^{i(n+1)\omega t} + e^{i(n-1)\omega t}) e^{-i\omega_0 t} \hat{\sigma}_-.\end{aligned}\quad (5.7)$$

## 5.2. Aproximación cuasi-resonante

Ahora, asumiremos que la frecuencia  $\omega$  del campo eléctrico se encuentra cerca de la  $m$ -ésima resonancia  $\omega_0/m$ . Al estudiar el comportamiento con tiempos largos, la única contribución considerable vendrá de los términos  $n = m \pm 1$ . La aproximación cuasi-resonante nos permite



ignorar las contribuciones de armónicos distintos [22, 25, 28, 32]. Entonces queda

$$\begin{aligned}\hat{H}'(t) &\approx -\frac{1}{2}\mathbf{E}_0 \cdot (\mathbf{d}_{ab} e^{i\Delta t} \hat{\sigma}_+ + \mathbf{d}_{ba} e^{-i\Delta t} \hat{\sigma}_-) [J_{m+1}(\kappa) + J_{m-1}(\kappa)] \\ &= -\frac{1}{2}\mathbf{E}_0 \cdot (\mathbf{d}_{ab} e^{i\Delta t} \hat{\sigma}_+ + \mathbf{d}_{ba} e^{-i\Delta t} \hat{\sigma}_-) \left[ \frac{2mJ_m(\kappa)}{\kappa} \right],\end{aligned}\quad (5.8)$$

donde se ha definido  $\Delta \equiv \omega_0 - m\omega$  y además se han utilizado las propiedades de las funciones Bessel. Para que nuestra aproximación tenga validez, se deben cumplir dos condiciones. La primera es que

$$\left| \frac{\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{d}_{ab} m J_m(\kappa)}{\kappa} \right| \gtrsim |\hbar(\omega_0 - m\omega)|. \quad (5.9)$$

Esta condición implica que el acoplamiento en la  $m$ -ésima resonancia debe ser lo bastante fuerte como para que nos permita restringir el problema a un sistema de dos niveles. La segunda condición es

$$\left| \frac{\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{d}_{ab} n J_n(\kappa)}{\kappa} \right| \ll |\hbar(\omega_0 - n\omega)|, \quad (5.10)$$

donde  $n \neq m$ . Esta condición nos permite despreciar las interacciones fuera de la  $m$ -ésima resonancia, es decir, fuera de la aproximación cuasi-resonante [32].

Ahora, asumimos que los elementos no diagonales del operador de momento dipolar son reales, por lo que  $\mathbf{d}_{ab} = \mathbf{d}_{ba}$ . Definimos la frecuencia de Rabi como

$$\tilde{\Omega}_R \equiv \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{d}_{ab} \left( \frac{2mJ_m(\kappa)}{\hbar\kappa} \right) \quad (5.11)$$

en la vecindad de la  $m$ -ésima resonancia. Ahora, la frecuencia de Rabi ya no sólo es proporcional a la intensidad del campo eléctrico. De hecho, puede anularse si la intensidad del campo eléctrico es tal que  $\kappa$  sea una de las raíces de la función Bessel [32]. Con esto, podemos escribir una aproximación al Hamiltoniano con simetría de inversión rota como

$$\hat{H}'(t) \approx -\frac{\hbar\tilde{\Omega}_R}{2} (e^{i\Delta t} \hat{\sigma}_+ + e^{-i\Delta t} \hat{\sigma}_-). \quad (5.12)$$

### 5.3. Solución de la ecuación de Schrödinger

Para resolver la ecuación de Schrödinger de una manera más sencilla, efectuamos una nueva rotación alrededor del eje  $z$ , de forma que el Hamiltoniano (5.12) sea estático. Utilizamos

la transformación unitaria

$$\hat{\mathcal{U}}_z(t) = e^{-i\frac{\Delta t}{2}\hat{\sigma}_z}. \quad (5.13)$$

Entonces, la función de onda  $|\tilde{\psi}(t)\rangle$  se escribe  $|\tilde{\psi}(t)\rangle = \tilde{a}(t)|a\rangle + \tilde{b}(t)|b\rangle = \hat{\mathcal{U}}_z(t)|\psi'(t)\rangle$ . Explícitamente, tenemos:

$$\begin{aligned} \tilde{a}(t) &= e^{-i\frac{\Delta t}{2}}a(t), \\ \tilde{b}(t) &= e^{i\frac{\Delta t}{2}}b(t). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Después de la transformación, el Hamiltoniano (3.20) resulta

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= \frac{\hbar\Delta}{2}\hat{\sigma}_z + e^{-i\frac{\Delta t}{2}\hat{\sigma}_z}\hat{H}'(t)e^{i\frac{\Delta t}{2}\hat{\sigma}_z} \\ &= \frac{\hbar\Delta}{2}\hat{\sigma}_z - \frac{\hbar\tilde{\Omega}_R}{2}\hat{\sigma}_x. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Obsérvese que este Hamiltoniano es independiente del tiempo. Esto nos permite aplicar el operador de evolución asociado para obtener la función de onda para  $\tilde{H}$  [2]. Luego, simplemente invertimos la transformación y obtenemos la función de onda  $|\psi'(t)\rangle$ . De nueva cuenta, observamos que podemos interpretar el Hamiltoniano (5.15) como la interacción de un sistema con espín ficticio  $\frac{1}{2}$  con el campo vectorial  $\mathbf{\Omega} \equiv -\tilde{\Omega}_R\hat{\mathbf{x}} + \Delta\hat{\mathbf{z}} = \Omega\hat{\mathbf{n}}$ , donde  $\Omega = \sqrt{\tilde{\Omega}_R^2 + \Delta^2}$  es la frecuencia de Rabi modulada [25, 32]. Entonces, la ecuación (5.15) toma la forma compacta

$$\tilde{H}' = \frac{\hbar\Omega}{2}\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{n}}. \quad (5.16)$$

Entonces, el operador de evolución  $\hat{\mathcal{S}}(t) = e^{-i\hat{H}'t/\hbar}$  toma la forma simple [2]

$$\hat{\mathcal{S}}(t) = e^{-i\frac{\Omega t}{2}\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{n}}} = \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right)\mathbb{I} - i\sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right)\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\mathbf{n}}. \quad (5.17)$$

Utilizando condiciones iniciales arbitrarias, escribimos el estado  $|\psi(t)\rangle$  con la forma inicial  $|\tilde{\psi}(0)\rangle = (a_0, b_0)^T$ . Después de un tiempo  $t$  tiene la forma

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = \hat{\mathcal{S}}(t)|\tilde{\psi}(0)\rangle = \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right)\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} - i\sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right)\begin{pmatrix} \Delta/\Omega & -\tilde{\Omega}_R/\Omega \\ -\tilde{\Omega}_R/\Omega & -\Delta/\Omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}.$$

Invirtiendo la transformación (5.14) resulta

$$\begin{aligned} a(t) &= e^{i\frac{\Delta t}{2}} \left\{ \left[ \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) - i\frac{\Delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right] a_0 + i\frac{\tilde{\Omega}_R}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) b_0 \right\}, \\ b(t) &= e^{-i\frac{\Delta t}{2}} \left\{ i\frac{\tilde{\Omega}_R}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) a_0 + \left[ \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) + i\frac{\Delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right] b_0 \right\}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Finalmente, invertimos la transformación (5.2) y obtenemos [32]

$$\begin{aligned} c_a(t) &= e^{-i\frac{m\omega t}{2}} e^{i\frac{\kappa \sin \omega t}{2}} \left\{ \left[ \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) - i\frac{\Delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right] a_0 + i\frac{\tilde{\Omega}_R}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) b_0 \right\}, \\ c_b(t) &= e^{i\frac{m\omega t}{2}} e^{-i\frac{\kappa \sin \omega t}{2}} \left\{ i\frac{\tilde{\Omega}_R}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) a_0 + \left[ \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) + i\frac{\Delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right] b_0 \right\}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

En conjunto, estas ecuaciones son la solución aproximada a la ecuación de Schrödinger para un sistema de dos niveles sin simetría de inversión. La probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado base o en el estado excitado está dada por  $|c_b(t)|^2$  y  $|c_a(t)|^2$ , respectivamente. Asumiendo que el sistema se encuentra inicialmente en el estado excitado, entonces la probabilidad de transición está dada por

$$P_{a \rightarrow b}(t) = |\langle b | \psi(t) \rangle|^2 = \frac{\tilde{\Omega}_R^2}{\Omega^2} \sin^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right). \quad (5.20)$$

En esta ecuación, la amplitud de las oscilaciones de Rabi tiene un perfil lorentizano. Sin embargo, el ancho ahora también escala con el número  $m$ , además de la diferencia entre la frecuencia del campo eléctrico y la frecuencia de la transición entre niveles. De igual manera, la máxima amplitud se encuentra en las distintas resonancias, cuando  $\omega = \omega_0/m$  y entonces puede producirse una inversión completa de la población [26]. Físicamente, esto implica que existen nuevas frecuencias proporcionales a la frecuencia de transición del átomo de dos niveles [32].

## 5.4. Momento dipolar inducido

Como se vio en la sección 3.2.5, la interacción entre el campo eléctrico y el sistema de dos niveles causa la formación de un momento dipolar. Éste está definido como el valor de expectación del operador de momento dipolar [28, 32]. Para entender cómo el rompimiento de la simetría de inversión afecta la dispersión de la luz, nuevamente realizaremos este cálculo. Suponiendo que a  $t = 0$ , el sistema se encuentra en el estado excitado, entonces  $a_0 = 1$  y  $b_0 = 0$ . Para ello, necesitamos escribir el estado del sistema a tiempo  $t$ ,  $|\psi(t)\rangle = c_a(t)|a\rangle + c_b(t)|b\rangle$ ,

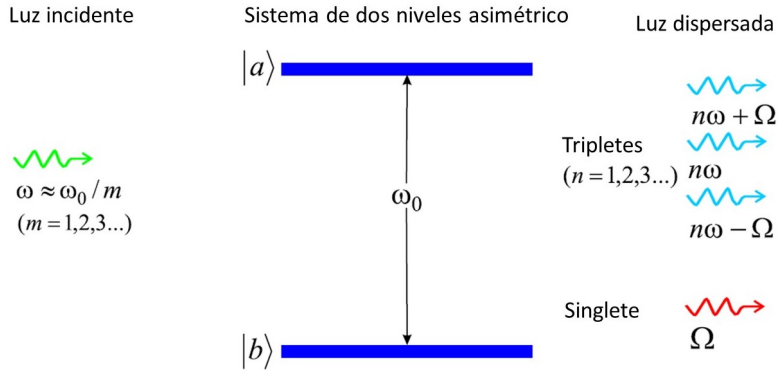
donde

$$\begin{aligned} c_a(t) &= e^{-im\omega t/2} \left[ \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) - i\frac{\Delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right] e^{i\kappa \sin \omega t/2}, \\ c_b(t) &= ie^{im\omega t/2} \frac{\tilde{\Omega}_R}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) e^{-i\kappa \sin \omega t/2}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Sustituyendo los coeficientes  $c_a(t)$  y  $c_b(t)$ , y luego de algo de álgebra, obtenemos [32]

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(t) &= \langle \psi(t) | \hat{\mathbf{d}} | \psi(t) \rangle = \mathbf{d}_{aa} - \frac{1}{2} (\mathbf{d}_{aa} - \mathbf{d}_{bb}) \frac{\tilde{\Omega}_R^2}{\Omega^2} (1 - \cos \Omega t) \\ &\quad - \mathbf{d}_{ab} \frac{\tilde{\Omega}_R}{2\Omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{m-n}(\kappa) \left[ \frac{\Delta}{\Omega} e^{in\omega t} - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\Delta}{\Omega} \right) e^{i(n\omega + \Omega)t} + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\Delta}{\Omega} \right) e^{i(n\omega - \Omega)t} + c.c. \right] \end{aligned} \quad (5.22)$$

para el momento dipolar inducido cerca de la  $m$ -ésima resonancia. Aquí, se hace notorio que existe un momento dipolar permanente, independientemente de las resonancias. Además, observamos que la radiación del dipolo para este sistema consiste en un espectro con un singlete a frecuencia  $\Omega$  y una serie de tripletes con frecuencias  $n\omega, n\omega \pm \Omega$ , como se muestra en la Figura 5.1 [32].



**Figura 5.1** Esquema de la dispersión de la luz en un sistema de dos niveles asimétrico, en la vecindad de la  $m$ -ésima resonancia [32].

Para ilustrar las oscilaciones del momento dipolar, nos centraremos en un caso particular interesante. Cuando la violación de la simetría de inversión es débil, tenemos que  $|\kappa| \ll 1$ . En tal caso, al efecto de la asimetría es mucho más notorio en la primera resonancia  $m = 1$ , cuando  $\omega \approx \omega_0$ . En el caso de un campo eléctrico resonante, entonces  $\Delta = 0$ ,  $\Omega = \tilde{\Omega}_R$  y el momento dipolar se reduce a la expresión

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(t) &= \frac{1}{2} (\mathbf{d}_{aa} + \mathbf{d}_{bb}) + \frac{1}{2} (\mathbf{d}_{aa} - \mathbf{d}_{bb}) \cos \tilde{\Omega}_R t \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathbf{d}_{ab} \left[ \cos(n\omega t + \tilde{\Omega}_R t) - \cos(n\omega t - \tilde{\Omega}_R t) \right]. \end{aligned} \quad (5.23)$$

En esta situación, la frecuencia de Rabi toma la forma  $\tilde{\Omega}_R = \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{d}_{ab} / \hbar$ . Usualmente, la frecuencia de Rabi es mucho más pequeña que la del campo eléctrico aplicado ( $\tilde{\Omega}_R \ll \omega_0$ ), por lo que tenemos tres contribuciones que oscilan en el momento dipolar. La primera proviene de la violación de la simetría y oscila a la frecuencia de Rabi. Además, tenemos los términos que oscilan a las frecuencias  $\omega_0 \pm \tilde{\Omega}_R$ , los cuales se encuentran cuando existe simetría de inversión [32].

Por su tamaño, los puntos cuánticos son un sistema apto para observar el efecto de la asimetría. En los puntos cuánticos el estado base  $|b\rangle$  corresponde a la ausencia de portadores de carga libres. Además, el estado excitado  $|a\rangle$  representa el estado con electrones en la banda de conducción y huecos en la banda de valencia. En particular, los arreglos de puntos cuánticos de nitruros del grupo III pueden ser útiles para la emisión en el rango de los THz [32]. Un ejemplo de la utilidad de estos arreglos se encuentra en los láseres de cascada cuántica [33]. Por otro lado, el efecto de la violación de la simetría podría observarse también en los nanotubos de carbono quirales, ya que la quiralidad rompe la simetría de inversión cuando no existe un centro de inversión [34].

# Capítulo 6

## Sistema de dos niveles asimétrico: análogo clásico

### 6.1. Introducción

En el capítulo 4 discutimos la analogía entre un sistema cuántico de dos niveles con simetría de inversión y un sistema de osciladores armónicos clásicos acoplados. Luego, en el capítulo 5 discutimos cómo el rompimiento de la simetría de inversión introducía nuevas resonancias en la frecuencia de Rabi y la aparición de una serie infinita de tripletes. En este capítulo, extenderemos la analogía de Frimmer y Novotny [19] al caso del rompimiento de la simetría de inversión. Para ello, se incluirá un acoplamiento variable en las ecuaciones (4.1), tal que se mantenga la validez de la aproximación por una envolvente lenta. Luego, con base en los procedimientos realizados en los capítulos anteriores, se encontrará una solución general al problema, análoga a las ecuaciones (5.18).

### 6.2. Átomo mecánico

#### 6.2.1. Ecuaciones de movimiento

Comenzaremos proponiendo un modelo de un *átomo mecánico*, compuesto de dos osciladores armónicos acoplados por un resorte y débilmente amortiguados, con una tasa  $\gamma$  (ver Figura 4.1). Supondremos que las masas son iguales y que el acoplamiento es débil. En este sistema, el oscilador A puede ser dirigido por una fuerza externa  $F(t)$ . Para la masa A, la constante de resorte es  $k_A = k - \Delta k(t)$ , donde la *modulación*  $\Delta k(t)$  es pequeña. Para la masa B, la constante de resorte es  $k_B = k + \Delta k(t)$  [19]. Finalmente, proponemos un acoplamiento modulado de la forma  $\kappa(t) = \kappa_0 + \delta\kappa(t)$ , donde  $\kappa(t) \ll k$ . Entonces, las ecuaciones de movimiento

toman la forma [19, 21]

$$\begin{aligned} \ddot{x}_A + \gamma \dot{x}_A + \left[ \frac{k - \Delta k(t)}{m} \right] x_A + \left[ \frac{\kappa_0 + \delta \kappa(t)}{m} \right] (x_A - x_B) &= \frac{F(t)}{m} \\ \ddot{x}_B + \gamma \dot{x}_B + \left[ \frac{k + \Delta k(t)}{m} \right] x_B + \left[ \frac{\kappa_0 + \delta \kappa(t)}{m} \right] (x_B - x_A) &= 0 \end{aligned} \quad (6.1)$$

Para simplificar la notación, redefinimos la frecuencia portadora como  $\Omega_0^2 \equiv (k + \kappa_0)/m$ , la frecuencia de modulación de resorte  $\Omega_d^2 = \Delta k(t)/m$  y la frecuencia del acoplamiento modulada  $\Omega_c^2 \equiv (\kappa_0 + \delta \kappa(t))/m$ . En forma matricial, las ecuaciones de movimiento toman la forma [19]

$$\left( \frac{d^2}{dt^2} + \gamma \frac{d}{dt} + \Omega_0^2 \right) \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\Omega_d^2 & -\Omega_c^2 \\ -\Omega_c^2 & \Omega_d^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \end{pmatrix}, \quad (6.2)$$

donde definimos

$$\mathbf{x} \equiv \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \end{pmatrix}; \mathbb{M} \equiv \begin{pmatrix} -\Omega_d^2 & -\Omega_c^2 \\ -\Omega_c^2 & \Omega_d^2 \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

### 6.2.2. Eigenmodos

Nuevamente, nos centraremos en encontrar soluciones en forma de una superposición de los modos normales de oscilación. Para ello, consideramos el caso de modulaciones constantes ( $\delta \kappa, \Delta k = \text{constante}$ ). Podemos encontrar los eigenmodos utilizando la transformación

$$\mathbf{x} = \mathbb{U}^{-1} \mathbf{y} = (\mathbb{S}^{-1})^T \mathbf{y}, \quad (6.4)$$

donde  $U$  es la matriz de transformación definida por la matriz de eigenvectores (4.6). De nueva cuenta, los eigenvalores tienen la forma [19]

$$\Omega_{\pm} = \left( \Omega_0^2 \mp \sqrt{\Omega_d^4 + \Omega_c^4} \right)^{1/2}, \quad (6.5)$$

Asumiendo que  $\Omega_c \ll \Omega_0$ , podemos hacer una aproximación por serie de Taylor en los eigenvalores  $\Omega_{\pm}$  y la separación entre niveles toma la forma

$$\Delta \Omega(t) \approx \frac{\Omega_c^2}{\Omega_0} = \frac{[\kappa_0 + \delta \kappa(t)]/m}{\sqrt{(k + \kappa_0)/m}}. \quad (6.6)$$

En esta ocasión, notamos que la separación de niveles depende explícitamente del tiempo. Ahora, transformamos a la base de eigenmodos  $(x_+, x_-)$ , restringiendo el dominio a los valores cercano a las dos resonancias  $\Delta k, \delta \kappa \rightarrow 0$ . Empleamos la matriz  $\mathbb{U}$  definida en la sección 4.2.3

para el caso de resonancia. Repetimos el procedimiento y obtenemos

$$\left( \frac{d^2}{dt^2} + \gamma \frac{d}{dt} + \Omega_0^2 \right) \begin{pmatrix} x_+ \\ x_- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\Omega_c^2 & -\Omega_d^2 \\ -\Omega_d^2 & \Omega_c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_+ \\ x_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.7)$$

En esta expresión, hemos asumido que  $F(t) = 0$  debido a que nos interesa la dinámica del sistema sin ningún forzamiento.

### 6.2.3. Envolvente lenta

Como se discutió anteriormente, un acoplamiento débil nos permite proponer soluciones de la forma

$$\begin{aligned} x_+ &= \text{Re} \{ c_a(t) e^{i\Omega_0 t} \}, \\ x_- &= \text{Re} \{ c_b(t) e^{i\Omega_0 t} \}, \end{aligned} \quad (6.8)$$

donde  $c_a$  y  $c_b$  son las amplitudes complejas que varían lentamente [19, 21]. En contraste, los eigenmodos  $x_+$  y  $x_-$  oscilan rápidamente a la frecuencia  $\Omega_0$ . Sustituimos (6.8) en (6.7) y despreciamos los términos que contienen las segundas derivadas. Además, ya que consideramos un amortiguamiento débil, suponemos que  $2i\Omega_0 + \gamma \approx 2i\Omega_0$ . Entonces obtenemos

$$\begin{pmatrix} \dot{c}_a \\ \dot{c}_b \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Delta\Omega(t) - i\gamma & \omega_d \\ \omega_d & -\Delta\Omega(t) - i\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_a \\ c_b \end{pmatrix}, \quad (6.9)$$

donde hemos definido la frecuencia de modulación de resorte re-escalada  $\omega_d = \Omega_d^2/\Omega_0$ .

### 6.2.4. Modulación paramétrica del acoplamiento

Ahora, estudiaremos cómo se comporta el átomo mecánico cuando variamos la constante de resorte y el acoplamiento. Proponemos las modulaciones armónicas

$$\begin{aligned} \Delta k(t) &= -2mA\Omega_0 \cos \omega_m t, \\ \delta \kappa(t) &= -2mB\Omega_0 \cos \omega_m t, \end{aligned} \quad (6.10)$$

donde  $\omega_m$  es la frecuencia de la modulación. De esta manera, tenemos que  $\omega_d = -2A \cos \omega_m t$  y  $\omega_\kappa \equiv -2B \cos \omega_m t$ . Sustituyendo las modulaciones en (6.9) obtenemos

$$i \begin{pmatrix} \dot{c}_a \\ \dot{c}_b \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \omega_0 - 2B \cos \omega_m t - i\gamma & -2A \cos \omega_m t \\ -2A \cos \omega_m t & -\omega_0 + 2B \cos \omega_m t - i\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_a \\ c_b \end{pmatrix}, \quad (6.11)$$



donde  $\omega_0 \equiv \kappa_0/m\Omega_0$  es la frecuencia de acoplamiento en resonancia re-escalada. Notamos que, en ausencia de amortiguamiento, esta ecuación se asemeja a la ecuación de Schrödinger para la interacción materia-luz sin simetría de inversión. La matriz en esta expresión equivale al Hamiltoniano (5.1) [32]. Ahora, tenemos una separación de niveles de  $\hbar\omega_0$  y una interacción con el campo eléctrico dada por los términos que oscilan. Aquí, la modulación de la constante de resorte  $k$  es análoga al acoplamiento entre los dos niveles debida a la interacción [19]. Además, la modulación del acoplamiento de los osciladores armónicos introduce el rompimiento de la simetría de inversión.

### 6.2.5. Solución general

Para resolver las ecuaciones (6.11), reescribimos las amplitudes  $c_a(t)$  y  $c_b(t)$  como [32]

$$\begin{aligned} c_a(t) &= a(t) e^{-\frac{i}{2}(\omega_0 t - \kappa_K \sin \omega_m t)}, \\ c_b(t) &= b(t) e^{\frac{i}{2}(\omega_0 t - \kappa_K \sin \omega_m t)}, \end{aligned} \quad (6.12)$$

donde  $\kappa_K \equiv 2B/\omega_m$  es el nuevo parámetro de violación de la simetría [32]. Esta transformación es equivalente a la transformación de la función de onda (5.2). Sustituyendo  $c_a(t)$  en la ecuación (6.11) y reordenando términos obtenemos

$$i\dot{a}(t) = -\frac{i\gamma}{2}a(t) - A \cos(\omega_m t) e^{i\omega_0 t} e^{-i\kappa_K \sin \omega_m t} b(t).$$

Luego, pasamos la función  $\cos \omega_m t$  a su forma de exponenciales complejas y reescribimos la expresión anterior en términos de las funciones Bessel del primer tipo,  $J_n(\kappa_k)$  para obtener

$$\begin{aligned} i\dot{a}(t) &= -\frac{i\gamma}{2}a(t) - \frac{A}{2}e^{i\omega_0 t} (e^{i\omega_m t} + e^{-i\omega_m t}) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\kappa_K) e^{-in\omega_m t} b(t) \\ &= -\frac{i\gamma}{2}a(t) - \frac{A}{2}e^{i\omega_0 t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\kappa_K) (e^{-i(n+1)\omega_m t} + e^{-i(n-1)\omega_m t}) b(t). \end{aligned} \quad (6.13)$$

Ahora, suponemos los términos que se encuentran en la suma oscilan rápidamente, excepto cuando la frecuencia  $\omega_m$  de la modulación se encuentra cerca de la  $m$ -ésima resonancia  $m\omega_m = \omega_0$ . Al estudiar el comportamiento con tiempos largos, la única contribución considerable vendrá de los términos  $n = m \pm 1$ . Utilizando la aproximación cuasi-resonante, ignoramos los demás

términos para obtener [22, 25, 28, 32]

$$\begin{aligned} i\dot{a}(t) &= -\frac{i\gamma}{2}a(t) - \frac{A}{2}e^{i\Delta t} [J_{m+1}(\kappa_K) + J_{m-1}(\kappa_K)]b(t) \\ &= -\frac{i\gamma}{2}a(t) - \frac{A}{2}e^{i\Delta t} \left[ \frac{2mJ_m(\kappa_K)}{\kappa_K} \right] b(t), \end{aligned} \quad (6.14)$$

donde  $\Delta \equiv \omega_0 - m\omega_m$ . Aquí, podemos definir la frecuencia de Rabi como

$$\Omega_{R,m} \equiv \frac{2mAJ_m(\kappa_K)}{\kappa_K}. \quad (6.15)$$

Realizamos el mismo procedimiento para la otra ecuación diferencial y obtenemos

$$i \begin{pmatrix} \dot{a} \\ \dot{b} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i\gamma & -\Omega_{R,m} e^{i\Delta t} \\ -\Omega_{R,m} e^{-i\Delta t} & -i\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \quad (6.16)$$

Nótese el parecido con el Hamiltoniano (5.12). Es importante hacer notar que la nueva frecuencia de Rabi tiene distintos valores, dependiendo de la amplitud de la modulación del acoplamiento entre los resortes. Además, puede anularse si la amplitud  $B$  es tal que coincida con una de las raíces de la función Bessel [32]. Derivamos la primera ecuación del sistema anterior respecto al tiempo y obtenemos

$$\ddot{a} = -\frac{\gamma}{2}\dot{a} + \frac{i\Omega_{R,m}}{2} (i\Delta b + \dot{b}) e^{i\Delta t}.$$

Despejamos  $b(t)$  de la primera ecuación y  $\dot{b}(t)$  de la segunda en (6.16). Sustituimos en la expresión anterior y obtenemos

$$\ddot{a} - (i\Delta - \gamma)\dot{a} + \frac{1}{4} (\Omega_{R,m}^2 + \gamma^2 - 2i\Delta\gamma) a = 0 \quad (6.17)$$

Para resolver esta ecuación diferencial, utilizamos el *ansatz*  $a(t) = \alpha e^{i\tilde{\omega}t}$ . Luego, utilizamos la ecuación (6.16) para obtener  $b(t)$ . Finalmente, utilizamos las condiciones iniciales arbitrarias  $a(0) = a_0$  y  $b(0) = b_0$  y obtenemos la solución general (ver Apéndice D para más detalles) [32]

$$\begin{aligned} a(t) &= e^{i\frac{\Delta t}{2}} \left\{ \left[ \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) - i\frac{\Delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right] a_0 + i\frac{\Omega_{R,m}}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) b_0 \right\} e^{-\gamma t/2}, \\ b(t) &= e^{-i\frac{\Delta t}{2}} \left\{ i\frac{\Omega_{R,m}}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) a_0 + \left[ \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) + i\frac{\Delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right] b_0 \right\} e^{-\gamma t/2}, \end{aligned} \quad (6.18)$$

donde  $\Omega \equiv \Omega_{R,m}^2 + \Delta^2$  es la frecuencia de Rabi generalizada. Despreciando el factor de amortiguamiento, esta solución es idéntica a la solución (5.18) y es el principal resultado de este trabajo.

### 6.3. Discusiones

Después de revertir las transformaciones (6.12) y (6.8), las ecuaciones (6.18) conforman la solución general aproximada al sistema de osciladores armónicos acoplados con una modulación armónica en las constantes de acoplamiento y de resorte. Para ilustrar físicamente el comportamiento del sistema, consideraremos dos casos interesantes.

En particular, cuando no existe violación de la simetría sólo ocurre una resonancia, cuando  $m = 1$  y  $\omega_m = \omega_0$ . En este caso, tenemos que  $\Delta = 0$  y la frecuencia de Rabi generalizada es  $\Omega = \Omega_{R,m}$  [32]. En este caso, recuperamos el resultado de la sección 4.2.6 y podemos observar las oscilaciones de Rabi en el átomo mecánico, y representar estos resultados en la esfera de Bloch [19].

La solución general (6.18) revela además, que hay nuevas resonancias  $\omega_m = \omega_0/m$  en las que el modo de oscilación exhibe el comportamiento de las oscilaciones de Rabi. Ilustraremos este hecho escribiendo las amplitudes de los eigenmodos como

$$\begin{aligned} a(t) &= \cos\left(\frac{\Omega_{R,m}t}{2}\right), \\ b(t) &= i \sin\left(\frac{\Omega_{R,m}t}{2}\right), \end{aligned} \tag{6.19}$$

donde hemos considerado que el sistema se encuentra inicialmente en el eigenmodo  $x_+$ . Estas expresiones implican que el átomo mecánico oscila entre el modo simétrico y el antisimétrico, transfiriendo energía completamente de un modo al otro.

Por otro lado, para un desajuste  $\delta \neq 0$ , si el sistema se encuentra inicialmente en el modo simétrico tenemos

$$\begin{aligned} a(t) &= e^{i\frac{\Delta t}{2}} \left[ \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) - i\frac{\Delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right], \\ b(t) &= ie^{-i\frac{\Delta t}{2}} \frac{\Omega_{R,m}}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right). \end{aligned} \tag{6.20}$$

Entonces, la población del eigenmodo  $x_-$  está dada por

$$|b(t)|^2 = \frac{\Omega_{R,m}^2}{\Omega^2} \sin^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right). \tag{6.21}$$

Esta expresión nos indica que no podemos tener un modo de oscilación completamente antisimétrico, ya que  $|b(t)|^2 \leq 1$  para todo tiempo  $t$ . De manera análoga al caso del un sistema cuántico de dos niveles asimétrico, podemos notar que el ancho de la lorentizana  $\Omega_{R,m}^2/\Omega^2$  escala

con el número  $m$ , además de la diferencia. Por otro lado, obtenemos un máximo en la amplitud cuando  $\omega_m = \omega_0/m$  y entonces podemos tener una transferencia completa de energía entre los modos de oscilación.

Finalmente, concluimos que la analogía clásica de las oscilaciones de Rabi se puede extender al caso de un sistema de dos niveles asimétrico. En el sistema de osciladores acoplados, el rompimiento de la simetría de inversión está dado por una modulación pequeña de la constante de acoplamiento  $\kappa$ . Sin embargo, es importante señalar que la solución obtenida depende completamente de la validez de la aproximación en la que asumimos que la envolvente evoluciona lentamente. Esto implica que la velocidad de cambio de las amplitudes  $c_a$  y  $c_b$  debe ser suficientemente baja para que no sea apreciable en la escala de tiempo de la frecuencia  $\Omega_0$  [19]. Esto impone un límite en la magnitud de la frecuencia de Rabi generalizada, o sea  $\Omega \ll \Omega_0$ .

# Capítulo 7

## Conclusiones

A lo largo de este trabajo, estudiamos un sistema de osciladores armónicos acoplados y las condiciones en que estos sistemas pueden considerarse como análogos de los conceptos cuánticos. Comenzamos encontrando un análogo para la fórmula de Landau-Zener. Encontramos que el sistema de osciladores puede atravesar la brecha de manera adiabática, permaneciendo en el mismo modo y transfiriendo energía de una masa a la otra. Además, encontramos que se puede realizar un cruce diabático de niveles, y el sistema cambia de modo de oscilación, pero la masa que oscila inicialmente conserva su energía.

Después, estudiamos la interacción materia-luz por medio de un sistema cuántico de dos niveles simétrico. Utilizando operadores de rotación, simplificamos el problema y encontramos la fórmula de Rabi. Además, se introdujo el concepto de la esfera de Bloch y se describieron las oscilaciones de Rabi en ella.

Luego, encontramos un análogo clásico para el sistema de dos niveles simétrico. Al modular la constante de resorte  $k$  de los osciladores, se pueden reproducir fenómenos cuánticos como las oscilaciones de Rabi, las franjas de Ramsey y el experimento de Hahn. Dichos fenómenos se pueden representar en la esfera de Bloch clásica. Sin embargo, la analogía está limitada, ya que el amortiguamiento no puede reproducir el fenómeno cuántico del amortiguamiento debido a la emisión espontánea.

Después, se extendió el estudio de la interacción materia-luz al caso asimétrico. Se encontró que la violación de la simetría introduce nuevas resonancias para las oscilaciones de Rabi.

Finalmente, con todo el marco teórico como base, extendimos la analogía para la interacción materia-luz al caso de un sistema de dos niveles asimétrico. Al modular la constante de acoplamiento  $\kappa$  y la constante de resorte  $k$ , podemos reproducir el efecto de la asimetría, ya que se introdujeron nuevas resonancias.

En los capítulos anteriores, estuvieron presentes muchos conceptos relacionados como procesos diabáticos y adiabáticos, oscilaciones de Rabi, transparencia autoinducida, eco de Hahn, entre otros. Estos conceptos comparten una curiosa conexión matemática con un sistema de osciladores armónicos acoplados. Es posible aprovechar esta conexión para establecer una

analogía que ayude a comprender estos conceptos y otros relacionados de manera intuitiva. Por esto, se concluye que las analogías son una herramienta muy útil para asimilar ciertos conceptos en términos de otros más sencillos, sin perder de vista las limitaciones de la analogía.

# Bibliografía

- [1] Daniela Dragoman y Mircea Dragoman. *Quantum-Classical Analogies*. New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004, pág. 344. ISBN: 9783642057663. DOI: 10.1007/978-3-662-09647-5.
- [2] Luis De la Peña. *Introducción a la Mécanica Cuántica*. 3.<sup>a</sup> ed. Ciudad de México: Fondo de Cultura Económica, 2006. ISBN: 978-607-16-18795-2.
- [3] Alberto G. Rojo y Anthony M. Bloch. “The rolling sphere, the quantum spin, and a simple view of the Landau-Zener problem”. En: *Am. J. Phys.* 78.10 (2010), págs. 1014-1022. ISSN: 0002-9505. DOI: 10.1119/1.3456565. URL: <http://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.3456565>.
- [4] Harjeet Kaur, Sudhir R. Jain y Sham S. Malik. “Mechanical analogues of spin Hamiltonians and dynamics”. En: *Phys. Lett. A* 378.4 (2014), págs. 388-392. ISSN: 03759601. DOI: 10.1016/j.physleta.2013.11.046.
- [5] Robert J.C. Spreeuw. “A Classical Analogy of Entanglement”. En: *Found. Phys.* 28.3 (1998), págs. 361-374. ISSN: 00159018. DOI: 10.1023/A:1018703709245.
- [6] Isidor Isaac Rabi. “Space Quantization in a Gyration Magnetic Field”. En: *Phys. Rev.* 51.8 (1937), págs. 652-654. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.51.652>. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.51.652>.
- [7] C. Zener. “Non-Adiabatic Crossing of Energy Levels”. En: *Proc. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci.* 137.833 (1932), págs. 696-702. ISSN: 1364-5021. DOI: 10.1098/rspa.1932.0165. arXiv: rspa.1932.0165 [10.1098]. URL: <http://rspa.royalsocietypublishing.org/cgi/doi/10.1098/rspa.1932.0165>.
- [8] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu y Frank Laloe. *Quantum Mechanics - Vol. 1*. Francia: Wiley-VCH, 1992, pág. 891. ISBN: 0-471-16432-1.
- [9] C. L. Garrido Alzar, M A G Martinez y P Nussenzveig. “Classical analog of electromagnetically induced transparency”. En: *Am. J. Phys.* 70.1 (2002), págs. 37-41. ISSN: 0002-9505. DOI: 10.1119/1.1412644. URL: <http://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.1412644>.
- [10] Humphrey J. Maris y Quan Xiong. “Adiabatic and nonadiabatic processes in classical and quantum mechanics”. En: *Am. J. Phys.* 56.12 (1988), págs. 1114-1117. ISSN: 0002-9505. DOI: 10.1119/1.15734. URL: <http://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.15734>.

- [11] B. W. Shore y col. “Simple mechanical analogs of rapid adiabatic passage in atomic physics”. En: *Am. J. Phys.* 77.12 (2009), págs. 1183-1194. ISSN: 0002-9505. DOI: 10.1119/1.3231688. URL: <http://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.3231688>.
- [12] R. J. C. Spreeuw y col. “Classical realization of a strongly driven two-level system”. En: *Phys. Rev. Lett.* 65.21 (1990), págs. 2642-2645. ISSN: 0031-9007. DOI: 10.1103/PhysRevLett.65.2642.
- [13] Georg Heinrich, J. G. E. Harris y Florian Marquardt. “Photon shuttle: Landau-Zener-Stückelberg dynamics in an optomechanical system”. En: *Phys. Rev. A* 81.1 (2010), pág. 011801. ISSN: 1050-2947. DOI: 10.1103/PhysRevA.81.011801. arXiv: 0909.2164. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.81.011801>.
- [14] Martin Frimmer, Jan Gieseler y Lukas Novotny. “Cooling Mechanical Oscillators by Coherent Control”. En: *Phys. Rev. Lett.* 117.16 (2016), pág. 163601. ISSN: 0031-9007. DOI: 10.1103/PhysRevLett.117.163601. arXiv: 1608.00998. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.117.163601>.
- [15] Martin Frimmer y col. “Levitated nanoparticle as a classical two-level atom [Invited]”. En: *J. Opt. Soc. Am. B* 34.6 (2017), pág. C52. ISSN: 0740-3224. DOI: 10.1364/JOSAB.34.000C52. arXiv: 1704.02289. URL: <http://arxiv.org/abs/1704.02289><http://dx.doi.org/10.1364/JOSAB.34.000C52><https://www.osapublishing.org/abstract.cfm?URI=josab-34-6-C52>.
- [16] T. Faust y col. “Coherent control of a classical nanomechanical two-level system”. En: *Nat. Phys.* 9.8 (2013), págs. 485-488. ISSN: 1745-2473. DOI: 10.1038/nphys2666.
- [17] Maximilian J. Seitner y col. “Classical Stückelberg interferometry of a nanomechanical two-mode system”. En: *Phys. Rev. B* 94.24 (2016), pág. 245406. ISSN: 2469-9950. DOI: 10.1103/PhysRevB.94.245406. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.94.245406>.
- [18] Lukas Novotny. “Strong coupling, energy splitting, and level crossings: A classical perspective”. En: *Am. J. Phys.* 78.11 (2010), págs. 1199-1202. ISSN: 0002-9505. DOI: 10.1119/1.3471177.
- [19] Martin Frimmer y Lukas Novotny. “The classical Bloch equations”. En: *Am. J. Phys.* 82.10 (2014), págs. 947-954. ISSN: 0002-9505. DOI: 10.1119/1.4878621. arXiv: 1410.0710. URL: <http://arxiv.org/abs/1410.0710><http://dx.doi.org/10.1119/1.4878621><http://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.4878621>.
- [20] S. L. McCall y E. L. Hahn. “Self-Induced Transparency”. En: *Phys. Rev.* 183.2 (1969), págs. 457-485. DOI: 10.1103/PhysRev.183.457.



- [21] Stephen T. Thornton y Jerry B. Marion. *Classical Dynamics of Particles and Systems*. 5.<sup>a</sup> ed. Estados Unidos, 2004, pág. 660. ISBN: 0-534-40896-6.
- [22] Mark Fox. *Quantum Optics: An Introduction*. Cambridge: Oxford University Press, 2006, pág. 400. ISBN: 9780198566724.
- [23] Leslie Allen y Joseph H. Eberly. *Optical Resonance and Two-level Atoms*. United States: John Wiley y Sons Inc., 1975, pág. 250. ISBN: 0-471-02327-2.
- [24] Martin Frimmer y Lukas Novotny. “Light-Matter Interactions : A Coupled Oscillator Description”. En: *Nano-Optics Princ. Enabling Basic Res. Appl.* Ed. por Baldassare Di Bartolo, John Collins y Luciano Silvestri. Springer, Dordrecht, 2017. Cap. 1, págs. 3-14. ISBN: 978-94-024-0848-5. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-94-024-0850-8\\_1](https://doi.org/10.1007/978-94-024-0850-8_1).
- [25] Claude Cohen-Tannoudji, Jacques Dupont-Roc y Gilbert Grynberg. *Atom-Photon Interactions: Basic Processes and Applications*. Alemania: Wiley-VCH Verlag GmbH & Co., 2004, pág. 656. ISBN: 978-0-471-29336-1.
- [26] Gilbert Grynberg, Alain Aspect y Claude Fabre. *Introduction to Quantum Optics: From the Semi-classical Approach to Quantized Light*. New York: Cambridge University Press, 2010, pág. 696. ISBN: 9780521551120.
- [27] Alexey V. Kavokin y col. *Microcavities*. Estados Unidos: Oxford University Press, 2006, págs. 1-24. ISBN: 978-0-19-922894-2.
- [28] Marlan O. Scully y M. Suhail Zubairy. *Quantum Optics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997, pág. 630. ISBN: 0 521 43458 0.
- [29] F. Bloch. “Nuclear Induction”. En: *Phys. Rev.* 70.7-8 (1946), págs. 460-474. ISSN: 0031-899X. DOI: 10.1103/PhysRev.70.460. arXiv: 1011.1669v3. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.70.460>.
- [30] Richard P. Feynman, Frank L. Vernon y Robert W. Hellwarth. “Geometrical Representation of the Schrödinger Equation for Solving Maser Problems”. En: *J. Appl. Phys.* 28.1 (1957), págs. 49-52. ISSN: 0021-8979. DOI: 10.1063/1.1722572.
- [31] Supriyo Bandyopadhyay y Marc Cahay. *Introduction to Spintronics*. Boca Ratón: CRC Press LLC, 2008, pág. 526. ISBN: 978-1-4200-0474-8.
- [32] O. V. Kibis y col. “Matter Coupling to Strong Electromagnetic Fields in Two-Level Quantum Systems with Broken Inversion Symmetry”. En: *Phys. Rev. Lett.* 102.2 (2009), págs. 1-4. DOI: 10.1103/PhysRevLett.102.023601.
- [33] Benjamin S. Williams. “Terahertz quantum-cascade lasers”. En: *Nat. Photonics* 1.9 (2007), págs. 517-525. ISSN: 1749-4885. DOI: 10.1038/nphoton.2007.166. arXiv: 1301.1258.

- [34] O.V Kibis. “Electronic phenomena in chiral carbon nanotubes in the presence of a magnetic field”. En: *Phys. E Low-dimensional Syst. Nanostructures* 12.1-4 (2002), págs. 741-744. DOI: 10.1016/S1386-9477(01)00466-0.

# Apéndice A

## Obtención de la fórmula de Landau-Zener

### A.1. Procedimiento

Comenzamos con ecuación diferencial ordinaria (2.17)

$$i\alpha \frac{\dot{c}_A}{c_A} = \frac{\Gamma^2}{4t} + \frac{\ddot{c}_A}{c_A t}, \quad (\text{A.1})$$

donde hemos reordenado términos. En el lado izquierdo de esta expresión, notamos que  $\dot{c}_A/c_A = d \ln c_A/dt$ . Como nos interesa el comportamiento en tiempos largos, integramos y obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} \ln c_A dt = \frac{1}{i\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t} \left( \frac{\Gamma^2}{4} + \frac{\ddot{c}_A}{c_A} \right) dt \equiv \frac{\mathcal{I}_t}{i\alpha}. \quad (\text{A.2})$$

Para encontrar la solución a esta ecuación, consideremos la función compleja

$$f(z) = \frac{1}{z} \left( \frac{\Gamma^2}{4} + \frac{\ddot{c}_A}{c_A} \right) \quad (\text{A.3})$$

y supongamos que es analítica en todo el plano complejo, excepto en el polo  $z = 0$ . Integramos la función a lo largo del contorno cerrado  $\mathcal{C}$  mostrado en la Figura A.1.

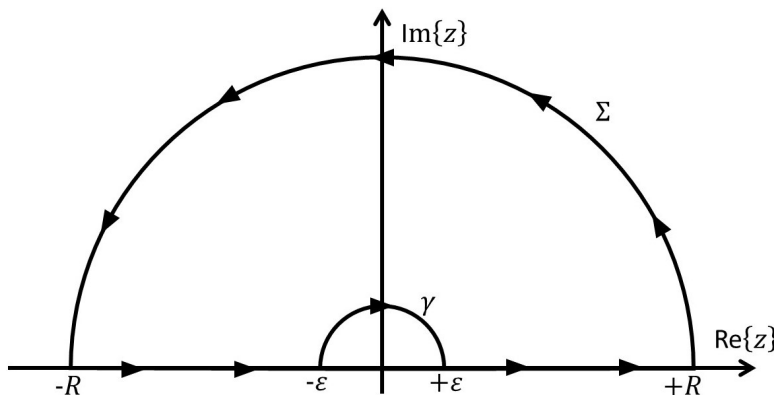


Figura A.1 Contorno de integración.

Por el teorema del residuo, tenemos que  $\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = 0$ , ya que el contorno no encierra al polo en  $z = 0$ . En los límites cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  y  $R \rightarrow \infty$ , la integral a lo largo de  $\mathcal{C}$  es

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{-R}^{-\varepsilon} f(z) dz - \int_{\gamma} f(z) dz + \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{\varepsilon}^R f(z) dz + \int_{\Sigma} f(z) dz = 0. \quad (\text{A.4})$$

Por el lema de Jordan, cuando  $R \rightarrow \infty$ , la integral sobre  $\Sigma$  se anula. Entonces, tenemos que

$$\mathcal{I}_t = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \left( \int_{-R}^{-\varepsilon} f(z) dz + \int_{\varepsilon}^R f(z) dz \right) = \int_{\gamma} f(z) dz. \quad (\text{A.5})$$

Reemplazamos  $z$  por su representación polar y obtenemos, para la integral a lo largo del contorno  $\gamma$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\pi}^0 \frac{1}{\varepsilon e^{i\theta}} \left( \frac{\Gamma^2}{4} + \frac{\ddot{c}_A}{c_A} \right) i\varepsilon e^{i\theta} d\theta \approx -i \frac{\pi \Gamma^2}{4}. \quad (\text{A.6})$$

Ésta es la solución de la ecuación (A.2). Para obtener esto, hemos despreciado la contribución del término que contiene la segunda derivada, ya que decae muy rápidamente y se puede despreciar en tiempos muy largos. En la siguiente sección, se derivará una prueba intuitiva de la veracidad de esta afirmación. Retornando a la ecuación (A.2), tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} \ln c_A(t) dt = \ln |c_A(\infty)| = -\frac{\pi \Gamma^2}{4\alpha} \quad (\text{A.7})$$

ya que  $c_A(-\infty) = 1$ . Resolviendo para  $c_A$ , obtenemos la formula de Landau-Zener

$$c_A(\infty) = e^{-\frac{\pi \Gamma^2}{4\alpha}}. \quad (\text{A.8})$$

## A.2. Sustento de la solución

Como se mencionó anteriormente, la validez de esta solución radica en la afirmación de que  $\ddot{c}_A/c_A$  decae rápidamente. En la ecuación (A.1), podemos despreciar la segunda derivada, ya que su magnitud es despreciable, como se había mencionado en la sección 2.2.6. Entonces, la ecuación (A.1) se reduce a

$$\frac{\dot{c}_A}{c_A} = \frac{-i\Gamma^2}{4\alpha t} \quad (\text{A.9})$$

cuya solución es

$$c_A(t) = |t|^{-i\Gamma^2/4\alpha} \quad (\text{A.10})$$

Entonces, calculando la segunda derivada, obtenemos que

$$\frac{\ddot{c}_A}{c_A} = \frac{i\Gamma^2}{4\alpha} \left( \frac{i\Gamma^2}{4\alpha} + 1 \right) \frac{c_A(t)}{t^2} \sim \frac{1}{t^2}, \quad (\text{A.11})$$

lo cual implica que  $\ddot{c}_A/c_A \rightarrow 0$  en tiempos largos, que son de interés para la transición diabática.

# Apéndice B

## Identidad útil para transformaciones unitarias

En las transformaciones unitarias, suelen aparecer términos del tipo  $e^{i\theta\hat{\sigma}_i}\hat{\sigma}_je^{-i\theta\hat{\sigma}_i}$ . Si  $i = j$ , entonces  $e^{i\theta\hat{\sigma}_j}\hat{\sigma}_je^{-i\theta\hat{\sigma}_j} = \hat{\sigma}_j$ , por la identidad de Baker-Campbell-Hausdorff. En cambio, si  $i \neq j$ , podemos encontrar una identidad muy útil. Para encontrarla, comenzamos usando  $e^{\pm i\theta\hat{\sigma}_i} = \cos\theta\mathbb{I} \pm i\sin\theta\hat{\sigma}_i$ . Entonces tenemos

$$\begin{aligned} e^{i\theta\hat{\sigma}_i}\hat{\sigma}_je^{-i\theta\hat{\sigma}_i} &= (\cos\theta\mathbb{I} + i\sin\theta\hat{\sigma}_i)\hat{\sigma}_j(\cos\theta\mathbb{I} - i\sin\theta\hat{\sigma}_i) \\ &= \cos^2\theta\hat{\sigma}_j + i\sin\theta\cos\theta[\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j] + \sin^2\theta\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_j\hat{\sigma}_i. \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Usando la relación de conmutación y la identidad  $\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_j = \delta_{ij}\mathbb{I} + i\epsilon_{ijk}\hat{\sigma}_k$  obtenemos

$$e^{i\theta\hat{\sigma}_i}\hat{\sigma}_je^{-i\theta\hat{\sigma}_i} = (1 - 2\sin^2\theta)\hat{\sigma}_j - \sin 2\theta\epsilon_{ijk}\hat{\sigma}_k \quad (\text{B.2})$$

cuando  $i \neq j$ . Generalizando a los dos casos para los índices  $i, j$  obtenemos

$$e^{i\theta\hat{\sigma}_i}\hat{\sigma}_je^{-i\theta\hat{\sigma}_i} = \hat{\sigma}_j\delta_{ij} + (1 - \delta_{ij})(\cos 2\theta\hat{\sigma}_j - \sin 2\theta\epsilon_{ijk}\hat{\sigma}_k). \quad (\text{B.3})$$

En los capítulos 3 y 5, estos términos aparecen cuando hacemos transformaciones unitarias, como rotaciones alrededor del eje  $z$ . Para mostrar la utilidad de esta identidad, consideraremos dos ejemplos. En primer lugar, si  $i = z$  y  $j = x$ , entonces

$$e^{i\theta\hat{\sigma}_z}\hat{\sigma}_xe^{-i\theta\hat{\sigma}_z} = \cos 2\theta\hat{\sigma}_x - \sin 2\theta\hat{\sigma}_y. \quad (\text{B.4})$$

Por otro lado, si  $i = z$  y  $j = y$ , entonces

$$e^{i\theta\hat{\sigma}_z}\hat{\sigma}_ye^{-i\theta\hat{\sigma}_z} = \cos 2\theta\hat{\sigma}_y + \sin 2\theta\hat{\sigma}_x. \quad (\text{B.5})$$

# Apéndice C

## Obtención de la fórmula clásica de Rabi

El objetivo es resolver el sistema de ecuaciones diferenciales acopladas (4.17)

$$\begin{pmatrix} \dot{a} \\ \dot{b} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i\delta - \gamma & iA \\ iA & i\delta - \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \quad (\text{C.1})$$

Esta ecuación tiene la forma vectorial  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbb{M}\mathbf{x} - \frac{\gamma}{2}\mathbb{I}\mathbf{x}$ , donde

$$\mathbb{M} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i\delta & iA \\ iA & i\delta \end{pmatrix}; \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}. \quad (\text{C.2})$$

Si realizamos una transformación a la base definida por los eigenvectores de  $M$ , podemos desacoplar las ecuaciones. Escribimos  $\mathbf{x} = \mathbb{S}\mathbf{y}$ , donde  $\mathbb{S}$  es la matriz cuyas columnas son los de eigenvectores  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$  de  $\mathbb{M}$ . Reemplazando esto en (C.1), obtenemos  $\mathbb{S}\dot{\mathbf{y}} = \mathbb{M}\mathbb{S}\mathbf{s} - \gamma\mathbb{S}\mathbf{y}/2$ . Después de multiplicar por la izquierda por  $\mathbb{S}^{-1}$ , vemos que las coordenadas  $\mathbf{y} = (y_A, y_B)^T$  obedecen el sistema de ecuaciones diferenciales  $\dot{\mathbf{y}} = (\Lambda - \gamma\mathbb{I}/2)\mathbf{y}$ . Este sistema de ecuaciones es mucho más fácil de resolver.

El sistema sólo tiene soluciones no triviales si  $\det(\mathbb{M} - \lambda\mathbb{I}) = 0$ . Expandiendo el determinante obtenemos los eigenvalores

$$\lambda = \pm i \frac{\Omega_R}{2}, \quad (\text{C.3})$$

donde  $\Omega_R = A^2 + \delta^2$  es la frecuencia de Rabi generalizada. Para el eigenvalor  $\lambda_1 = +i\Omega_R/2$ , tenemos la ecuación de eigenvalores  $M\mathbf{s}_1 = \lambda_1\mathbf{s}_1$ . Escribiendo  $\mathbf{s}_1 = (s_{11}, s_{21})^T$  en la ecuación de eigenvalores obtenemos el primer eigenvector. Luego, realizamos un procedimiento igual para el otro eigenvector y obtenemos

$$\mathbb{S} = \begin{pmatrix} A & A \\ \Omega_R + \delta & -\Omega_R + \delta \end{pmatrix}. \quad (\text{C.4})$$

Luego, realizamos la transformación  $\mathbf{x} = \mathbb{S}\mathbf{y}$  y obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \left( i\frac{\Omega_R}{2} - \frac{\gamma}{2} \right) y_1, \\ \dot{y}_2 &= \left( -i\frac{\Omega_R}{2} - \frac{\gamma}{2} \right) y_2. \end{aligned} \tag{C.5}$$

Las soluciones a este sistema de ecuaciones son  $y_{1,2} = c_{1,2}e^{\pm\frac{i\Omega_R t}{2}}e^{-\frac{\gamma t}{2}}$ . Entonces la solución general de las ecuaciones (C.1) es

$$\mathbf{x} = \mathbb{S}\mathbf{y} = \begin{pmatrix} A c_1 e^{i\Omega_R t/2} + A c_2 e^{-i\Omega_R t/2} \\ (\Omega_R + \delta) c_1 e^{i\Omega_R t/2} + (-\Omega_R + \delta) c_2 e^{-i\Omega_R t/2} \end{pmatrix} e^{-\gamma t/2}. \tag{C.6}$$

Luego de aplicar las condiciones iniciales arbitrarias  $a(0) = a_0$  y  $b(0) = b_0$  y algo de álgebra, encontramos las constantes  $c_1$  y  $c_2$ . Así obtenemos la solución general

$$\begin{aligned} a(t) &= \left\{ \left[ \cos\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) - i\frac{\delta}{\Omega_R} \sin\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) \right] a_0 + i\frac{A}{\Omega_R} \sin\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) b_0 \right\} e^{-\gamma t/2}, \\ b(t) &= \left\{ i\frac{A}{\Omega_R} \sin\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) a_0 + \left[ \cos\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) + i\frac{\delta}{\Omega_R} \sin\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) \right] b_0 \right\} e^{-\gamma t/2}. \end{aligned} \tag{C.7}$$



# Apéndice D

## Solución general del análogo clásico de un sistema de dos niveles asimétrico

Tenemos que resolver la ecuación diferencial

$$\ddot{a} - (i\Delta - \gamma)\dot{a} + \frac{1}{4}(\Omega_R^2 + \gamma^2 - 2i\Delta\gamma)a = 0. \quad (\text{D.1})$$

Proponemos una solución de la forma  $a(t) = \alpha e^{i\tilde{\omega}t}$ . Insertando esto en (D.1) obtenemos

$$\tilde{\omega}^2 + (i\Delta - \gamma)i - \frac{1}{4}(\Omega_R^2 + \gamma^2 - 2i\Delta\gamma) = 0, \quad (\text{D.2})$$

cuya solución está dada por la fórmula general

$$\tilde{\omega} = \frac{1}{2} \left[ i\gamma + \Delta \pm (\Delta^2 + \Omega_R^2)^{1/2} \right]. \quad (\text{D.3})$$

Definimos la frecuencia de Rabi generalizada como  $\Omega^2 = \Omega_R^2 + \Delta^2$  y sustituimos en el *ansatz* para obtener la solución general

$$a(t) = [\alpha_1 e^{i(\Delta+\Omega)t/2} + \alpha_2 e^{i(\Delta-\Omega)t/2}] e^{-\gamma t/2} \quad (\text{D.4})$$

De la ecuación (6.16) tenemos que  $b(t) = -\frac{2i}{\Omega_R} (\dot{a} + \frac{\gamma}{2}a) e^{-i\Delta t}$ . Reemplazando  $a(t)$  obtenido previamente resulta

$$b(t) = \frac{1}{\Omega_R} [(\Delta + \Omega)\alpha_1 e^{-i(\Delta-\Omega)t/2} + (\Delta - \Omega)\alpha_2 e^{-i(\Delta+\Omega)t/2}] e^{-\gamma t/2}. \quad (\text{D.5})$$

Aplicando las condiciones iniciales arbitrarias  $a(0) = a_0$  y  $b(0) = b_0$ , podemos determinar las constantes  $\alpha_{1,2}$ . Entonces, se obtiene, luego de algo de álgebra

$$\begin{aligned} a(t) &= e^{i\frac{\Delta t}{2}} \left\{ \left[ \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) - i\frac{\Delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right] a_0 + i\frac{\Omega_R}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) b_0 \right\} e^{-\gamma t/2}, \\ b(t) &= e^{-i\frac{\Delta t}{2}} \left\{ i\frac{\Omega_R}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) a_0 + \left[ \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) + i\frac{\Delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right] b_0 \right\} e^{-\gamma t/2}. \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$