



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Resultados sobre la distancia en
gráficas

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemática

PRESENTA:

GABRIELA BENIGNO LÓPEZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. ILÁN ABRAHAM GOLDFEDER ORTIZ



Ciudad Universitaria, CD. MX., 2018



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

Agradecimientos	5
Introducción	7
1. Primeros conceptos	9
2. Estructura de las trayectorias mínimas	23
3. Algoritmos para las distancias	27
3.1. Búsqueda por anchura (BFS)	27
3.2. Algoritmo de Dijkstra	31
3.3. El algoritmo de Bellman-Ford-Moore	32
4. Desigualdades con respecto al diámetro	37
5. Diám. mín. en orientaciones de multigráficas	45
6. Orientaciones de diámetro mínimo	53
6.1. Generalizaciones de torneos	54
6.2. Digráficas extendidas	61
6.3. Producto cartesiano de gráficas	65
6.4. Gráficas con cuerdas	66
7. Reyes en digráficas	69
7.1. 2-reyes en torneos	70
7.2. Reyes en digráficas semicompletas multipartitas	71
7.3. Reyes en generalización de los torneos	81

8. (k, l)-núcleos	85
8.1. Núcleos	89
8.2. Cuasinúcleos	92
Bibliografía	95

Agradecimientos

Introducción

En 1736 la resolución del afamado problema de los puentes de Königsberg, que dio el matemático suizo Leonhard Euler, dio inicio al surgimiento de la teoría de las gráficas. Desde entonces dicha teoría, parte del área de las matemáticas discretas, se ha desarrollado tanto teóricamente como prácticamente.

El estudio de la teoría de gráficas se ha dividido en dos grandes ramas, por un lado tenemos las gráficas no dirigidas y en el otro a las gráficas dirigidas o digráficas. A pesar de los numerosos libros que compilan resultados clásicos y recientes de la teoría de gráficas, hasta hace unos años no existía uno que fuese exclusivo de resultados en digráficas. No fue sino hasta el año 2000 con la publicación del libro *Digraphs: Theory, Algorithms and Applications*, de los matemáticos Jørgen Bang-Jensen y Gregory Gutin, que tenemos un libro dedicado a los resultados, los algoritmos y las aplicaciones en digráficas.

En el año 2009 se publicó la segunda edición del libro que recopilaba nuevos resultados obtenidos, además de soluciones dadas a conjeturas que aparecían en la primera edición y nuevos métodos desarrollados. En esta edición nos basamos para el desarrollo de esta tesis, que ofrece una versión en español de la mayor parte del tercer capítulo, dedicado a la distancia en gráficas y digráficas, e incluimos resultados y pruebas adicionales.

Hemos estudiado la minimalización y maximalización de parámetros relacionados con la distancia en gráficas y gráficas dirigidas. Se presentan algoritmos para encontrar trayectorias mínimas desde un vértice hacia el resto de los vértices en gráficas dirigidas y gráficas dirigidas con pesos en las flechas, algoritmos como la búsqueda por anchura (BFS), el algoritmo de Dijkstra y el algoritmo de Bellman-Ford-Moore junto con algunos resultados derivados de estos.

Adicionalmente, mostramos cotas inferiores y superiores para el diámetro de digráficas fuertes y gráficas orientadas y describimos resultados sobre el

diámetro mínimo de orientaciones de multigráficas y gráficas dirigidas. También, analizamos resultados para torneos, torneos multipartitos, digráficas extendidas y productos cartesianos de gráficas así como de gráficas cordales.

Concluiremos con resultados sobre k -reyes, núcleos y cuasi-núcleos en digráficas.

Capítulo 1

Primeros conceptos

Definición 1.1 Una **gráfica dirigida** o **digráfica** D es una pareja ordenada $D = (V(D), F(D))$ que está formada por un conjunto no vacío $V(D)$, cuyos elementos son llamados **vértices** y un conjunto finito $F(D)$ de pares ordenados de vértices distintos llamados **flechas**. Cada elemento (u, v) en $F(D)$ lo representamos con una flecha $u \rightarrow v$, donde u es la **cola**, v es la **cabeza** de la flecha y decimos que v es **dominado por** u . La cabeza y la cola de una flecha son llamados **extremos**. Llamaremos **orden** al número de vértices en D . Por ejemplo en la figura 1.1 tenemos una digráfica de orden 6 con $V(D) = u, v, w, x, y, z$ y $A(D) = (u, v), (u, w), (w, u), (z, u), (x, z), (y, z)$.

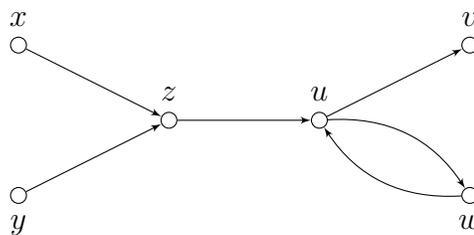


Figura 1.1: Una digráfica D de orden 6

Definimos una **pseudográfica dirigida** como una 4-tupla $D = (V(D), F(D), i, f)$, que consiste de dos conjuntos, $V(D)$ cuyos elementos serán llamados **vértices** y $F(D)$ con elementos llamados **flechas**, además de dos funciones i, f que llamaremos **función inicial** y **final** respectivamente, con $i: F(D) \rightarrow V(D)$, $f: F(D) \rightarrow V(D)$. Para toda flecha e , diremos que $i(e)$ es el **vértice inicial** y $f(e)$ el **vértice final** (véase figura 1.2).

Diremos que D es una **multigráfica dirigida** si D es una pseudográfica dirigida sin **lazos** (flechas cuyo vértice inicial y final son el mismo). A las flechas que tengan como extremos a los mismos vértices (es decir, el vértice inicial y el final coinciden respectivamente) les llamaremos **paralelas** y el símbolo $\mu_D(x, y)$ cuenta el número de flechas paralelas entre los vértices x y y , por ejemplo en la figura 1.2 en la multigráfica dirigida H' hay tres flechas paralelas entre u y w .

Por simplicidad, en lo que sigue tomaremos las pseudografías dirigidas como parejas ordenadas $(V(D), F(D))$.

Para X, Y conjuntos de vértices de una digráfica D , definimos

$$(X, Y)_D = \{(x, y) \in F(D) : x \in X, y \in Y\};$$

es decir, $(X, Y)_D$ es el conjunto de flechas con vértice inicial en X y vértice final en Y .

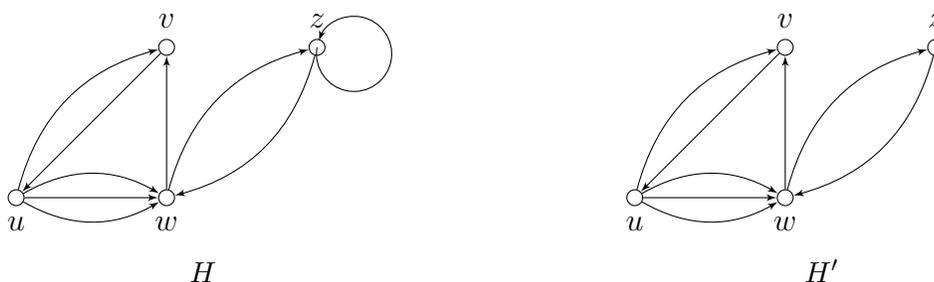
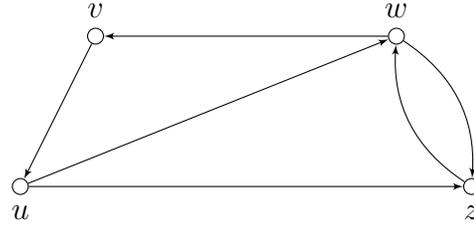


Figura 1.2: Una pseudográfica dirigida H y una multigráfica dirigida H' . En H podemos ver un lazo en el vértice z y en H' vemos que de u a w hay tres flechas paralelas, es decir, $\mu_D(x, y) = 3$.

Definición 1.2 Sean $D = (V(D), F(D))$ una digráfica y $v \in V(D)$, si $(v, u) \in F(D)$ decimos que $u \in V(D)$ es **ex vecino** de v y v es **in vecino** de u . Ahora definimos:

- La **ex vecindad** de v es el conjunto $N_D^+(v) = \{u \in V(D) : (v, u) \in F(D)\}$. La cardinalidad de $N_D^+(v)$ es el **ex grado** de v , que se denota por $d_D^+(v)$.
- La **in vecindad** de v es el conjunto $N_D^-(v) = \{u \in V(D) : (u, v) \in F(D)\}$. El cardinal de $N_D^-(v)$ es el **in grado** de v denotado como $d_D^-(v)$.

- El **grado** de u se define como $d_D(u) = d_D^+(u) + d_D^-(u)$.



D

Figura 1.3: En la digráfica D tenemos que $N_D^+(w) = \{v, z\}$ y $N_D^-(w) = \{z, u\}$, entonces el grado de w es $d_D(w) = 2 + 2 = 4$

Sea $D = (V(D), F(D))$ una digráfica. Para cada conjunto $W \subseteq V$ y para cada entero positivo p , se define la **p -ésima ex vecindad abierta** de W como:

$$N_D^{+p}(W) = N_D^+(N_D^{+(p-1)}(W)) \setminus \bigcup_{i=0}^{p-1} N_D^{+i}(W),$$

con $N_D^0(W) = W$ y $N_D^+(W) = \bigcup_{w \in W} N^+(w) \setminus W$.

De manera similar se define la **p -ésima in vecindad abierta** de W , N_D^{-p} , para cada entero positivo p . Ahora definimos la **p -ésima ex vecindad cerrada** de la siguiente manera:

$$N_D^{+p}[W] = \bigcup_{i=0}^p N_D^{+i}(W),$$

análogamente se define la **p -ésima in vecindad cerrada** de W . En lo que sigue omitiremos el subíndice D si es obvio a que digráfica pertenecen las ex vecindades (in vecindades).

En la digráfica D que aparece en la figura 1.4, calculemos $N_D^{+2}(W)$ con $W = \{v, x\} = N_D^0(W)$, para eso primero calculamos

$$\begin{aligned} N_D^{+1}(W) &= N_D^+(N_D^0(W)) \setminus \bigcup_{i=0}^0 N_D^{+i}(W) \\ &= N_D^+(N_D^0(W)) \setminus N_D^0(W) \\ &= \{x, w, y\} \setminus \{v, x\} \\ &= \{w, y\}, \end{aligned}$$

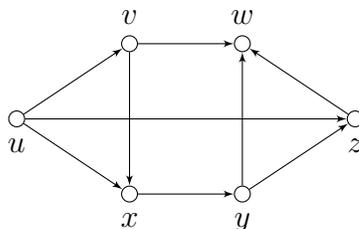


Figura 1.4: Una digráfica D con ejemplo de p -ésima ex vecindad

entonces

$$\begin{aligned}
 N_D^{+2}(W) &= N_D^+(N_D^1(W)) \setminus \bigcup_{i=0}^1 N_D^{+i}(W) \\
 &= N_D^+\{w, y\} \setminus N_D^0(W) \cup N_D^{+1}(W) \\
 &= \{z\} \setminus \{v, x, w, y\} \\
 &= \{z\},
 \end{aligned}$$

así la 2-ésima ex vecindad de (W) es $\{y\}$, mientras que la 2-ésima ex vecindad cerrada de (W) es el conjunto $\{v, w, x, y, z\}$.

El **ex grado mínimo** (resp. **in grado mínimo**) de D es $\delta^+(D) = \min\{d_D^+(x) : x \in V(D)\}$ (resp. $\delta^-(D) = \min\{d_D^-(x) : x \in V(D)\}$). El **semi grado mínimo** de D es $\delta^0(D) = \min\{\delta^+(D), \delta^-(D)\}$ (véase figura 1.5).

Similarmente, podemos definir el **ex grado máximo** (resp. **in grado máximo**) $\Delta^+(D)$ (resp. $\Delta^-(D)$) de D . El **semi grado máximo** de D , $\Delta^0(D) = \max\{\Delta^+(D), \Delta^-(D)\}$ (véase figura 1.5).

Decimos que D es una digráfica r -**regular** si $\delta^0(D) = \Delta^0(D) = r$.

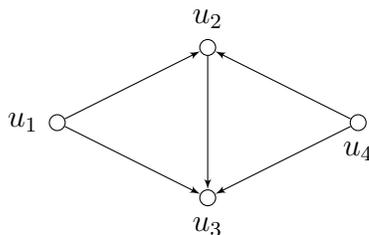


Figura 1.5: En la digráfica H tenemos que $d_D^+(u_1) = 2$, $d_D^+(u_2) = 1$, $d_D^+(u_3) = 0$, $d_D^+(u_4) = 2$, por tanto $\delta^+(H) = 1$ y $\Delta^+(D) = 2$. Además $d_D^-(u_1) = 0$, $d_D^-(u_2) = 2$, $d_D^-(u_3) = 3$ y $d_D^-(u_4) = 0$, entonces $\delta^-(H) = 0$ y $\Delta^-(H) = 3$, así $\delta^0 = 0$ y $\Delta^0 = 3$.

Sean $D = (V(D), F(D))$ una digráfica y $u, v \in V(D)$, un **camino** entre u y v es una sucesión de vértices de D , $C = x_0x_1 \cdots x_k$, tal que:

- $u = x_0$,
- $v = x_k$ y
- $(x_i, x_{i+1}) \in F(D)$ para todo $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$.

Llamaremos a C un (u, v) -**camino** y si existe tal camino diremos que v es **alcanzable** desde u . Notemos que un camino puede repetir vértices y flechas; es decir, pasar varias veces por una misma flecha o un mismo vértice. En caso de que un (u, v) -camino no repita flechas lo llamaremos **paseo** y si el (u, v) -camino no repite vértices decimos que es una (u, v) -**trayectoria**. Si un camino inicia y termina en el mismo vértice decimos que es un **camino cerrado**, en caso contrario diremos que es un **camino abierto**. Si C es un camino cerrado que no repite vértices (exceptuando el vértice de inicio y el final que son el mismo) diremos que es un **ciclo**. En la digráfica de la figura 1.6 se ejemplifican estos conceptos.

La **longitud** de un camino $C = x_0x_1 \cdots x_k$ es igual al número de elementos en la sucesión menos uno, se denota $\ell(C)$.

Sea $C = v_0v_1 \cdots v_k$ lo llamaremos **semicamino** de v_0 a v_k si $v_i \rightarrow v_{i+1}$ o $v_{i+1} \rightarrow v_i$ para todo $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ (véase figura 1.6). De manera similar a como se hizo con caminos se define **semicamino cerrado** como un semicamino que inicia y termina en el mismo vértice y en caso contrario diremos que es un **semicamino abierto**, **semiciclo** un semicamino cerrado que no repite vértices y **semitrayectoria** un semicamino que no repite vértices.

Definición 1.3 Definimos una **pseudográfica dirigida con pesos** como la 3-tupla $D = (V(D), F(D), c)$ una digráfica con una función de peso $c: F(D) \rightarrow \mathbb{R}$ (véase figura 1.7). Si $a \in F(D)$, $c(a)$ es llamado el **peso** (**costo**) de a . Para $B \subseteq F(D)$ definimos el peso de B como:

$$c(B) = \sum_{b \in B} c(b).$$

Notemos que una pseudográfica dirigida (sin peso) puede ser vista como una pseudográfica dirigida con pesos, suponiendo que el peso de cada flecha es igual a uno, por tanto los conceptos siguientes aplican a las dos por igual. También cabe aclarar que se puede definir de manera similar una pseudográfica con pesos por vértices (véase figura 1.7).

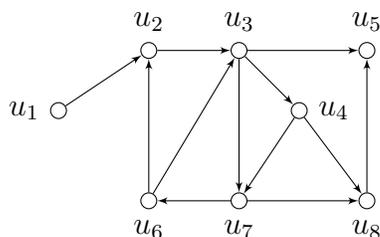


Figura 1.6: En la digráfica D , $u_1u_2u_3u_7u_6u_2u_3u_4u_8$ es un (u_1, u_8) -camino, $u_1u_2u_3u_7u_6u_3u_4u_8$ es un (u_1, u_8) -paseo, $u_1u_2u_3u_4u_8$ es una (u_1, u_8) -trayectoria, $u_2u_3u_7u_6u_2$ es un ciclo de longitud cuatro y $u_3u_5u_8$ es un (u_3, u_8) -semicamino

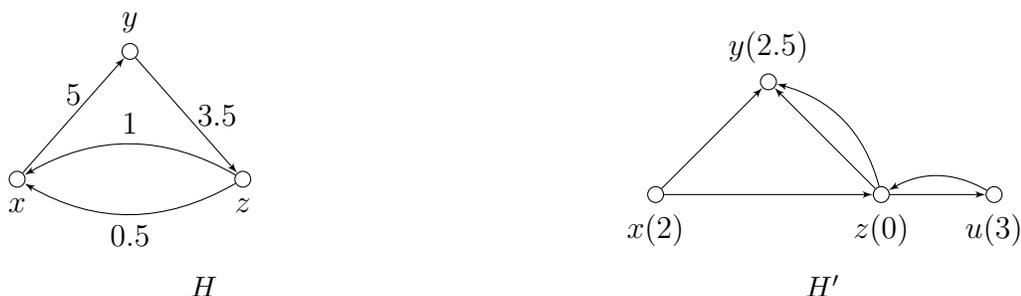


Figura 1.7: Una pseudográfica dirigida con peso (en flechas) H y una pseudográfica dirigida H' con peso en vértices, los cuales están señalados en los paréntesis

Sea D una digráfica y C un ciclo en D , denotaremos como $F(C)$ al conjunto de las flechas en C . Sea W un ciclo de D si $c(F(W))$ es negativo decimos que W es un **ciclo negativo** en D (véase figura 1.8).

Supongamos que D no tiene ciclos negativos, si x e y son vértices en D entonces la **distancia** de x a y , $\text{dist}(x, y)$, es la longitud mínima de los (x, y) -caminos, si es que y es alcanzable desde x , en caso contrario $\text{dist}(x, y) = \infty$.

$$\text{dist}(x, y) = \min\{\ell(T) : T \text{ es un } (x, y)\text{-camino}\}.$$

Observaciones 1

- Para cada $x \in V$, $\text{dist}(x, x) = 0$, pues el camino $T = (x)$ con $\ell(T) = 1 - 1 = 0$ es mínimo, porque D no tiene ciclos de peso negativo.

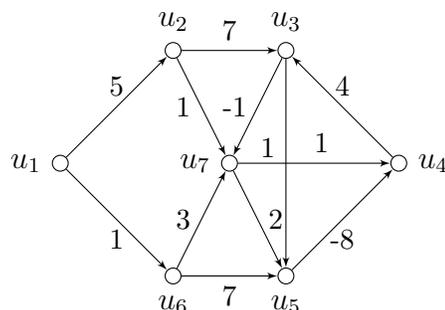


Figura 1.8: En esta figura tenemos una digráfica con peso D que contiene flechas de peso negativo, además $C = u_7u_5u_4u_3u_7$ es un ciclo con peso negativo

- La distancia satisface la desigualdad del triángulo; esto es, para $x, u, v \in V(D)$:

$$\text{dist}(u, v) \leq \text{dist}(u, x) + \text{dist}(x, v),$$

es fácil ver que esto se cumple tomando $T_1 = u_1u_2 \cdots u_k$, con $u_1 = u$ y $u_k = x$, y $T_2 = v_1v_2 \cdots v_j$, con $v_1 = x$ y $v_j = v$, los respectivos (u, x) y (x, v) -caminos que cumplen tener longitud mínima, hacemos $T = T_1 \cup T_2 = u_1u_2 \cdots u_{k-1}xv_2 \cdots v$ y entonces tenemos un (u, v) -camino, ahora por ser la distancia la mínima longitud de los (u, v) -caminos se sigue que la desigualdad se cumple.

La **distancia de un conjunto X a un conjunto Y** de vértices en la digráfica D es:

$$\text{dist}(X, Y) = \text{máx}\{\text{dist}(x, y) : x \in X, y \in Y\}.$$

El **diámetro** de D es $\text{diám}(D) = \text{dist}(V(D), V(D))$.

En la figura 1.9 tenemos $\text{dist}(u_4, u_5) = 1$ y $\text{dist}(u_5, u_4) = 2$, hagamos $X = \{u_2\}$ y $Y = \{u_1, u_3, u_4, u_5, u_6\}$; $\text{dist}(u_2, u_1) = 1$, $\text{dist}(u_2, u_3) = 4$, $\text{dist}(u_2, u_4) = 2$, $\text{dist}(u_2, u_5) = 3$ y $\text{dist}(u_2, u_6) = 5$, por lo tanto $\text{dist}(X, Y) = 5 = \text{diám}(D)$

El **ex radio** y el **in radio** de D se definen como sigue:

$$\text{rad}^+(D) = \text{mín}\{\text{dist}(x, V(D)) : x \in V(D)\}$$

y

$$\text{rad}^-(D) = \text{mín}\{\text{dist}(V(D), x) : x \in V(D)\}.$$

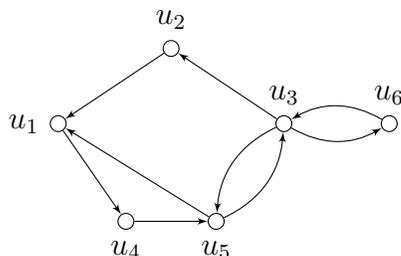


Figura 1.9: Digráfica D con ejemplo de diámetro

El **radio** de D es $\text{rad}(D) = \min\{(\text{dist}(x, V(D)) + \text{dist}(V(D), x))/2 : x \in V(D)\}$.

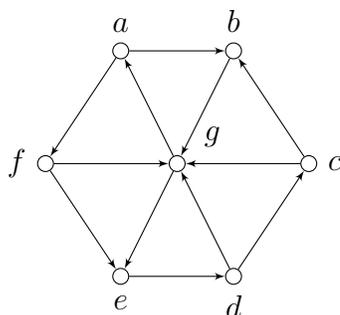


Figura 1.10: Una digráfica D con ejemplo de radio

Consideremos la digráfica D de la figura 1.10. Se tiene que $\text{dist}(a, V(D)) = \text{dist}(b, V(D)) = \text{dist}(c, V(D)) = \text{dist}(d, V(D)) = \text{dist}(f, V(D)) = \text{dist}(g, V(D)) = 3$. Más aún, tenemos $\text{dist}(V(D), c) = \text{dist}(V(D), f) = 4$, $\text{dist}(V(D), a) = \text{dist}(V(D), b) = \text{dist}(V(D), d) = 3$ y $\text{dist}(V(D), e) = \text{dist}(V(D), g) = 2$. Ahora veamos que $\text{rad}^+(D) = 3$, $\text{rad}^-(D) = 2$, $\text{rad}(D) = 2,5$ y $\text{diám}(D) = 4$.

Definición 1.4 Si D es una digráfica tal que para cualquier par de vértices distintos x, y en D existen un (x, y) -camino y un (y, x) -camino, diremos que D es una **digráfica fuertemente conexa** o simplemente decimos que es una **digráfica fuerte**. Llamamos **digráfica débilmente conexa** a una digráfica en la cual existen semicaminos desde cualesquiera dos vértices. La figura 1.11 muestra un ejemplo de una digráfica fuerte y una digráfica débilmente conexa.

Una digráfica H es una **subdigráfica** de una digráfica D si $V(H) \subseteq V(D)$, $A(H) \subseteq A(D)$. Si cada flecha en $F(D)$ con ambos vértices finales en



Figura 1.11: D_1 es una digráfica fuerte mientras que D_2 es una digráfica débilmente conexa

$V(H)$ también están en $F(H)$ entonces decimos que H es **inducida** por $X = V(H)$, escribimos $H = D\langle X \rangle$ y llamamos a H una **subdigráfica inducida** de D . Si H es una subdigráfica de D tal que $V(D) = V(H)$, decimos que H es una **subdigráfica generadora** de D (véase figura 1.12).

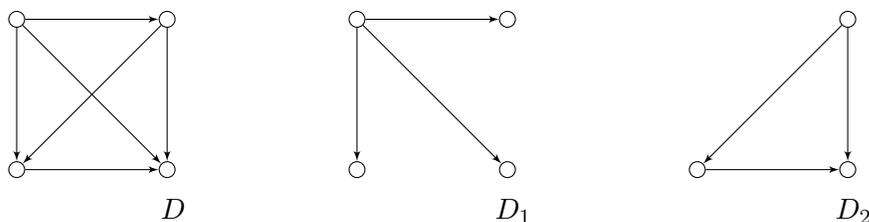


Figura 1.12: Una digráfica D con subdigráficas D_1 y D_2 ; D_1 es generadora pero no inducida, D_2 es inducida pero no generadora

Un conjunto S que satisface una propiedad P es un **conjunto máximo** (respectivamente **maximal**) con la propiedad P si no existe S^* que satisface la propiedad P y $|S^*| > |S|$ (respectivamente $S \subset S^*$).

Una **componente fuerte** de una digráfica D es una subdigráfica inducida maximal de D que tiene la propiedad de ser fuerte. Si D_1, D_2, \dots, D_t son las componentes fuertes de D , entonces $V(D) = V(D_1) \cup V(D_2) \cup \dots \cup V(D_t)$, más aún, $V(D_i) \cap V(D_j) = \emptyset$ para todo $i \neq j$, pues si no fuese así entonces para todo x, y distintos en $V(D_i) \cup V(D_j)$ existirían los (x, y) - y (y, x) -caminos contradiciendo así la propiedad de ser maximales. Llamamos a $V(D) = V(D_1) \cup V(D_2) \cup \dots \cup V(D_t)$ la **descomposición fuerte** de D (véase figura 1.13).

Sea G una subdigráfica de una multigráfica dirigida D . La **contracción** de G en D es una multigráfica dirigida D/G con $V(D/G) = \{g\} \cup (V(D) \setminus V(G))$ donde g es un vértice nuevo que no está en D , $\mu_{D/G}(x, y) = \mu_D(x, y)$

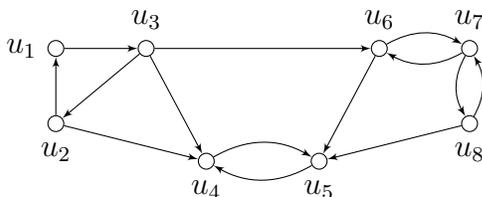
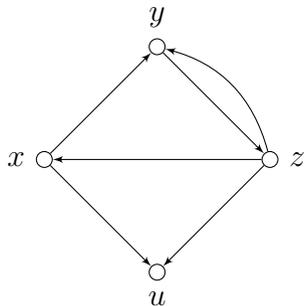


Figura 1.13: La digráfica D tiene componentes fuertes $\{u_1, u_2, u_3\}$, $\{u_4, u_5\}$ y $\{u_6, u_7, u_8\}$

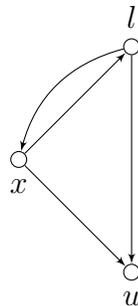
y para todos los vértices distintos $x, y \in V(D) \setminus V(G)$ tenemos que

$$\mu_{D/G}(x, g) = \sum_{v \in V(G)} \mu_D(x, v)$$

$$\mu_{D/G}(g, y) = \sum_{v \in V(G)} \mu_D(v, y).$$



H



$T = H \setminus L, L = H \langle \{y, z\} \rangle$

Figura 1.14: La contracción T de la digráfica L en H

La **digráfica de condensación** $SC(D)$ de D se obtiene de contraer componentes fuertes de D y eliminando cualquier flecha paralela obtenida en el proceso, es decir, si D_1, \dots, D_t son las componentes fuertes de D , entonces $V(SC(D)) = \{v_i : i \in [t]\}$ y $F(SC(D)) = \{(u_i, v_j) : (V(D_i), V(D_j))_D \neq \emptyset\}$. La subdigráfica inducida por los vértices de un ciclo en D es fuerte, pues al estar en el ciclo es claro que todos los vértices son alcanzables desde cualquier otro en el, entonces todo ciclo en D está contenido en una componente fuerte

de D , así en $SC(D)$ no hay ciclos (decimos que es **acíclica**), pues si los hubiese entonces en D habría un ciclo que no estaba en la misma componente fuerte. Sea D una digráfica y sea x_1, x_2, \dots, x_n un ordenamiento de los vértices, decimos que es un **ordenamiento acíclico** si para cada flecha $(x_i, x_j) \in D$ se tiene que $i < j$. En la figura 1.15 podemos observar que la digráfica $SC(D)$ es acíclica.

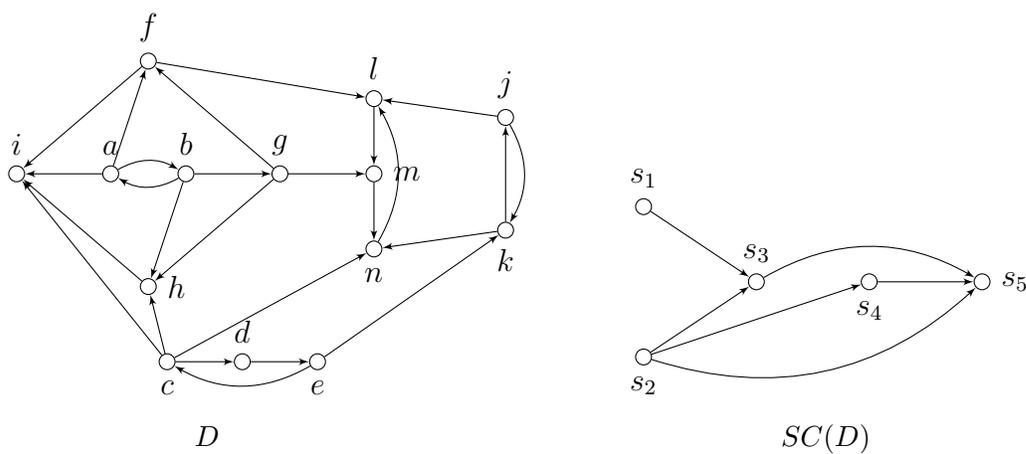


Figura 1.15: Una digráfica D y su digráfica de condensación $SC(D)$. Los vértices s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 son obtenidos al contraer los conjuntos $\{a, b\}$, $\{c, d, e\}$, $\{f, g, h, i\}$, $\{j, k\}$ y $\{l, m, n\}$ los cuales corresponden a las componentes fuertes de D . La digráfica D tiene dos componentes iniciales fuertes D_1, D_2 con $V(D_1) = \{a, b\}$ y $V(D_2) = \{c, d, e\}$. Tiene una componente terminal D_5 con vértices $V(D_5) = \{l, m, n\}$ y dos componentes intermedios D_3, D_4 con vértices $V(D_3) = \{f, g, h, i\}$ y $V(D_4) = \{j, k\}$.

Sea D una digráfica decimos que u es una **fuentes** si $d^-(u) = 0$ y decimos que es un **pozo** si $d^+(u) = 0$. En la figura 1.15 en la digráfica $SC(D)$ los vértices s_1 y s_2 son una fuente y el vértice s_5 es un pozo.

Proposición 1.0.1. *Toda digráfica acíclica tiene una fuente y un pozo.*

Demostración. Sea D una digráfica supongamos que todos los vértices en D tienen ex grado positivo, tomemos $u_1 \in V(D)$ como su ex grado es positivo entonces existe u_2 tal que $u_1 \rightarrow u_2$, como $d_D^+(u_2) > 0$ entonces u_2 domina a algún u_3 . Continuando de esta manera, obtenemos un camino de la forma u_1, u_2, \dots, u_k y como $V(D)$ es un conjunto finito entonces existe $k > 2$ tal

que $u_k = u_i$ para algún $i < k$, si tomamos u_i, u_{i+1}, \dots, u_k obtendremos un ciclo lo cual contradice que D sea acíclica. Así, existe al menos un vértice con ex grado cero y de manera similar llegaremos a que D tiene un vértice de in grado cero; es decir, toda digráfica acíclica tiene un pozo y una fuente. \square

Proposición 1.0.2. *Sea D una digráfica acíclica con exactamente una fuente x y un pozo y en D . Entonces para todo vértice $v \in V(D)$ existe una (x, v) -trayectoria y una (v, y) -trayectoria en D .*

Demostración. Primero observemos que toda subdigráfica de una digráfica acíclica es acíclica. Esto ocurre pues si existiera un ciclo en la subdigráfica entonces este estaría contenido en la digráfica contradiciendo que sea acíclica. Ahora veamos que D es debilmente conexa, supongamos que no, entonces cada componente debilmente conexa es una subdigráfica acíclica y por el teorema anterior, cada una de estas componentes tiene un pozo y una fuente lo que contradice que D tenga exactamente una fuente y un pozo. Así D es debilmente conexa, tomemos $v \in V(D)$ cualquiera y una trayectoria maximal que inicie en v , $T = x_1 \cdots x_k$, con $x_0 = v$, tenemos que x_k es un pozo pues de lo contrario existe u tal que $x_k \rightarrow u$ y así tenemos la trayectoria Tu que contradice que T sea maximal, por lo tanto x_k es un pozo y como x es único, entonces $x_k = x$.

Sea T' una trayectoria maximal $T' = y_0 y_1 \cdots y_k$, con $y_k = v$, que va de y_0 a v , de manera similar podemos ver que y_0 es una fuente (en caso contrario T' no sería maximal), y como la fuente es única concluimos que $y_0 = x$ \square

Proposición 1.0.3. *Toda digráfica acíclica tiene un ordenamiento acíclico de sus vértices.*

Demostración. Se dará una demostración constructiva describiendo el procedimiento que genera un ordenamiento acíclico de los vértices de una digráfica acíclica. Como primer paso tomamos un vértice v con in grado cero, estos existen por la proposición 1.0.1.

Fijemos $x_1 = v$ y eliminemos x_1 de D . En el i -ésimo paso encontramos un vértice w de la digráfica acíclica que queda con in grado cero, $w = x_i$ y eliminamos x_i . El procedimiento tiene $|V(D)|$ pasos.

Ahora por contradicción supongamos que $(x_i, x_j) \in F(D)$ pero $i > j$, como x_i fue elegido antes, entonces x_j no era de in grado cero en el j -ésimo paso del procedimiento que es una contradicción, por tanto se cumple la proposición. \square

Entonces se tiene que toda digráfica de condensación tiene un orden acíclico y un vértice de in grado (ex grado) cero. La componente fuerte de D correspondiente al vértice de $SC(D)$ de in grado (ex grado) cero es la **componente inicial (terminal) fuerte** de D .

Definición 1.5 Una digráfica D es un **bosque** si no tiene semiciclos. Un bosque que es débilmente conexo es un **árbol**. Una digráfica T es un **ex árbol (in árbol)** si T es un árbol con solo un vértice s de in grado (ex grado) cero. El vértice s es llamado la **raíz** de T . Si un ex árbol (in árbol) T es una subdigráfica generadora de D , T es llamada una **ex ramificación (in ramificación)** y utilizaremos $B_s^+(B_s^-)$ para denotar una ex ramificación (in ramificación) con raíz en s . En la figura 1.16 las flechas oscuras en D muestran un ex árbol, mientras que las de H nos muestran un in árbol.

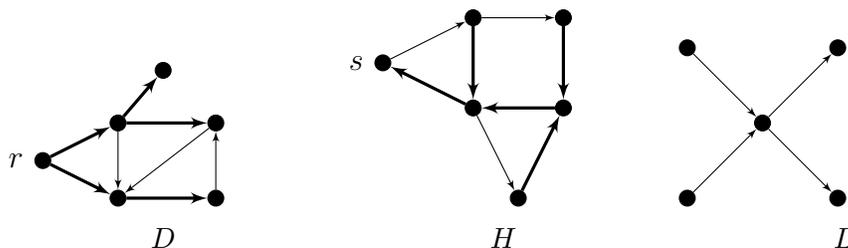


Figura 1.16: La digráfica D tiene una ex ramificación con raíz r ; H contiene una in ramificación con raíz en s ; L posee una ex ramificación o una in ramificación

Observaciones 2

- Si D es una digráfica entonces $\text{rad}^+(D) < \infty$ si y solo si D es fuerte.
- Si D es una digráfica tal que para todo $u \in V(D)$ se cumple que $d^+(u) > 0$ entonces D tiene un ciclo. Si todo vértice tiene ex grado mayor que cero entonces podemos formar un camino, como los vértices de la digráfica son un número finito en algún momento se repetirá alguno formando así un ciclo.
- Si para D una digráfica conexa existe un único $v \in V(D)$ tal que $d^-(v) = 0$ entonces cualquier otro vértice en D es alcanzable desde v . Veamos que la afirmación es verdadera, sea r el único vértice de in grado cero, tomemos $S = \{u: u \in V(D) \text{ y } u \text{ es alcanzable desde } r\}$, si $S = V(D)$ se cumple lo dicho, si no entonces para todo $u \in V(D) \setminus S$ se

tiene que todos tienen ex grado positivo y por la observación anterior existiría un ciclo, lo que nos lleva a una contradicción.

Proposición 1.0.4. *Dada una digráfica conexa D , esta contiene una ex ramificación (in ramificación) si y solo si tiene una única componente inicial (terminal) fuerte.*

Demostración. Supongamos por contradicción que D contiene al menos dos componentes iniciales fuertes y una ex ramificación T , observemos que la raíz r de T esta en alguna componente inicial fuerte de D . Sea x algún otro vértice en otra componente inicial fuerte de D . Como r es una raíz de T existe un (r, x) -camino en T por tanto existe en D , que contradice que x y r estaban en componentes iniciales fuertes distintas.

Ahora supongamos que D contiene solo una componente inicial fuerte D_1 y r es un vértice arbitrario en D_1 , veamos que D tiene una ex ramificación con raíz en r . En $SC(D)$ el vértice x que corresponde a D_1 es el único vértice de in grado cero y para cualquier otro vértice y en $SC(D)$ existe un (x, y) -camino, así cada vértice es alcanzable desde x . Por tanto todo vértice es alcanzable desde r . Ahora construiremos un árbol T como sigue, el primer paso consiste de r . En el paso $i \geq 2$, para cada vértice y que añadimos a T en el paso anterior, agregamos a T un vértice z , tal que $y \rightarrow z$ y $z \in V(D)$, junto con la flecha (y, z) . Pararemos cuando no haya vértices que puedan ser agregados a T . Como cada vértice de D es alcanzable desde r , T es generador y r es el único vértice de in grado cero en T , por tanto T es una ex ramificación. \square

Proposición 1.0.5. *Una digráfica con peso D tiene un ex radio finito si y solo si D tiene una única componente inicial fuerte.*

Demostración. Si tenemos una digráfica con dos o más componentes iniciales fuertes entonces no existen caminos entre dichas componentes por lo tanto el ex radio es infinito por definición, si D tiene solo una componente inicial fuerte, por la proposición anterior entonces D contiene una ex ramificación y así $\text{rad}^+(D) < \infty$. \square

Así tenemos que toda digráfica con peso D tiene ex radio finito si y solo si D tiene una única componente terminal fuerte.

Capítulo 2

Estructura de las trayectorias mínimas

Para esta sección asumiremos que $D = (V(D), F(D), c)$ es una digráfica con peso con ciclos no negativos. Una (x, y) -trayectoria mínima es una (x, y) -trayectoria cuya longitud es la más pequeña. Si $x, y \in V(D)$ entonces xQy es un camino tal que Q es un camino con la propiedad de que el primer vértice en Q es dominado por x y el último vértice en Q domina a y .

En la figura 2.1 tenemos las siguientes trayectorias de v_2 a v_1 : v_2v_1 , $v_2v_3v_4v_1$ y $v_2v_3v_5v_6v_4v_1$, la de menor longitud es la primera, entonces esa es la trayectoria mínima de v_2 a v_1 . Si tenemos la trayectoria $Q = v_3v_5v_6$, entonces $v_2Qv_4 = v_2v_3v_5v_6v_4$.

Proposición 2.0.1. Sean D una digráfica y x, y un par de vértices distintos en D . Si D tiene un (x, y) -camino W , entonces D contiene una (x, y) -trayectoria P tal que $F(P) \subseteq F(W)$. Si D tiene un (x, x) -camino cerrado,

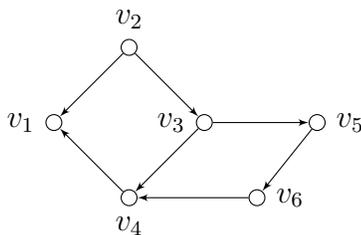


Figura 2.1: D

entonces D contiene un ciclo C que pasa por x tal que $F(C) \subseteq F(W)$.

Demostración. Consideremos un camino P de x a y de longitud mínima entre todos los (x, y) -caminos cuyas flechas pertenecen a $F(W)$. Demostraremos que P es una trayectoria. Sea $P = x_1x_2 \cdots x_k$, donde $x_1 = x$ y $x_k = y$. Si $x_i = x_j$ para algún $1 \leq i < j \leq k$, entonces el camino $P[x_1, x_i]P[x_{j+1}, x_k]$ es más pequeño que P , que es una contradicción. Así todos los vértices de P son distintos, por tanto P es una trayectoria con $F(P) \subseteq F(W)$.

Sea $W = z_1z_2 \cdots z_k$ un camino de $x = z_1$ a sí mismo ($x = z_k$). Como D no contiene lazos $z_{k-1} \neq z_k$. Sea $y_1y_2 \cdots y_t$ un camino mínimo de $y_1 = z_1$ a $y_t = z_{k-1}$. Antes demostramos que $y_1y_2 \cdots y_t$ es una trayectoria, entonces $y_1y_2 \cdots y_t y_1$ es un ciclo que contiene a $x = y_1$. \square

Proposición 2.0.2. *Si $P = x_1x_2 \cdots x_k$ es una (x_1, x_k) -trayectoria mínima en D , entonces $P[x_i, x_j]$ es una (x_i, x_j) -trayectoria mínima para todo $1 \leq i \leq j \leq k$.*

Demostración. Supongamos que x_iQx_j es una (x_i, x_j) -trayectoria cuya longitud es menor que la de $P[x_i, x_j]$. Entonces el peso del camino $W = P[x_1, x_i]QP[x_j, x_k]$ es menor que la longitud de P . Pero por la proposición anterior y como D no tiene ciclos de negativos, W contiene una (x_i, x_j) -trayectoria R cuya longitud es al menos la de W y así es menor que la de P , que es una contradicción. \square

Sea s un vértice fijo en D tal que $\text{dist}(s, V) < \infty$. Consideramos las subdigráficas generadoras de D , cada una de las cuales contiene una trayectoria mínima de s a cada otro vértice en D . El siguiente teorema mostrará que dada cualquier subdigráfica D' de D , podemos construir una ex ramificación de D con raíz en s , la cual contiene una (s, u) -trayectoria mínima para cada $u \in V(D) \setminus \{s\}$.

Teorema 2.0.3. *Sean D' y s como se describió previamente. Existe una ex ramificación B_s^+ tal que, para cada $u \in V(D)$, la única (s, u) -trayectoria en B_s^+ es una (s, u) -trayectoria mínima en D .*

Demostración. Se dará una demostración mostrando como construir B_s^+ de cualquier colección de trayectorias mínimas de s al resto de los vértices, $\{P_v : v \in V(D) - s\}$.

Tomemos un vértice arbitrario en D distinto de s , $u \in V(D) \setminus \{s\}$. Sea inicialmente $B_s^+ := P_u$, por la proposición 2.0.2 para cada $x \in V(B_s^+)$, la

única (s, x) -trayectoria en B_s^+ es mínima en D . Si $V(B_s^+) = V(D)$ entonces el teorema se cumple y terminamos, entonces supongamos que existe $w \notin V(B_s^+)$. Sea z el último vértice en P_w el cual pertenece a B_s^+ . Definimos H como sigue:

$$V(H) := V(B_s^+) \cup V(P_w[z, w]), \quad F(H) := F(B_s^+) \cup F(P_w[z, w]).$$

Afirmamos que para cada vértice x en $P_w[z, w]$, la única (s, x) -trayectoria en H es una (s, x) -trayectoria mínima en D . Por la proposición anterior $P_w[s, z]$ es una (s, z) -trayectoria mínima en D . Como $z \in V(B_s^+)$, la única (s, z) -trayectoria Q en H tiene la misma longitud que $P_w[s, z]$. Más aún la longitud de la trayectoria $QP_w[z, x]$ es igual a la longitud de la trayectoria $P_w[s, x]$. Ahora observemos que $QP[z, x]$ es la única (s, x) -trayectoria en H . Hacemos $B_s^+ := H$ y de manera análoga incluimos todos los vértices de D y así preservamos la propiedad que queríamos de B_s^+ . \square

Capítulo 3

Algoritmos para encontrar distancias en digráficas

En esta sección se describirán algoritmos para encontrar distancias en digráficas y digráficas con peso. La mayoría de los algoritmos que se presentan son para encontrar distancias desde un vértice fijo de una digráfica al resto de los vértices.

3.1. Búsqueda por anchura (BFS)

Este algoritmo nos permite encontrar de manera rápida¹ las distancias de un vértice a los demás en una digráfica $D = (V(D), F(D))$, basándose en la siguiente idea. Comenzando en un vértice s , se visita cada uno de los vértices dominados por este, fijamos $\text{dist}'(s, x) = 1$ y $s = \text{pred}(x)$, s el predecesor de x . Ahora visitamos todos los vértices y que aún no han sido visitados y que son dominados por vértices x que están a distancia uno de s . Hacemos $\text{dist}'(s, y) = 2$ y $x = \text{pred}(y)$. Continuamos de esta manera hasta que hayamos cubierto todos los vértices que son alcanzables desde s . Para el resto de los vértices z que no son alcanzables desde s , decimos que $\text{dist}'(s, z) = \infty$. Al final del algoritmo, $\text{pred}(u) = \text{nulo}$ significa que $u = s$ o u no es alcanzable desde s . La validez del algoritmo se debe a que $\text{dist}'(s, x) = \text{dist}(s, x)$ para todo $x \in V(D)$.

¹Para los lectores interesados, el algoritmo BFS permite encontrar el radio, ex radio, in radio y diámetro de una digráfica en tiempo $O(n^2 + nm)$.

BFS

Entrada: Una digráfica $D = (V(D), F(D))$ y un vértice $x \in V(D)$.

Salida: $\text{dist}'(s, v)$ y $\text{pred}(v)$ para todo $v \in V(D)$.

1. Para cada vértice $x \in V(D)$ hacemos $\text{dist}'(s, v) \leftarrow \infty$ y $\text{pred}(v) \leftarrow$ **nulo**.
2. Hacemos $\text{dist}'(s, s) = 0$. Creamos una cola Q que consista únicamente de s .
3. Mientras que Q sea no vacío hacemos lo siguiente. Eliminamos de Q el vértice u que es la cabeza de la cola y consideramos los vértices que pertenecen a la ex vecindad de u en D uno por uno. Si para un ex vecino v de u , $\text{dist}'(s, v) = \infty$, entonces hacemos $\text{dist}'(s, v) \leftarrow \text{dist}'(s, u) + 1$, $\text{pred}(v) = u$, y ponemos a v al final de Q .

Para probar la validez de BFS, es suficiente probar que $\text{dist}(s, x) = \text{dist}'(s, x)$ para todo vértice $x \in V(D)$. Por el paso 2 y 3 del algoritmo, $\text{dist}(s, x) \leq \text{dist}'(s, x)$. Sea $v_1 v_2 \cdots v_k$ una (s, x) -trayectoria donde $v_1 = s$, $v_k = x$ y $v_i = \text{pred}(v_{i+1})$ para todo $i \in [k - 1]$, probaremos por inducción que la igualdad se cumple. Si $\text{dist}(s, x) = 0$, entonces $x = s$ y el resultado se sigue. Supongamos que $\text{dist}(s, x) = k > 0$ y consideramos una (s, x) -trayectoria mínima P . Sea y el predecesor de x , por hipótesis de inducción, $\text{dist}'(s, y) = \text{dist}(s, y) = k - 1$. Como y domina a x , por el algoritmo $\text{dist}'(s, x) \leq \text{dist}(s, y) + 1 = k$. Combinando $\text{dist}'(s, x) \leq \text{dist}(s, y)$ y $\text{dist}(s, x) \leq \text{dist}'(s, y)$, tenemos la igualdad que queríamos.

Proposición 3.1.1. Sean $D = (V(D), F(D))$ una digráfica y U el conjunto de vértices alcanzables desde s . Entonces (U, B) , donde $B = \{(\text{pred}(u), u) : u \in U \setminus \{s\}\}$ es una ex ramificación en $D(U)$ con raíz en s .

Demostración. Para ver que B es una ex ramificación en $D(U)$ debemos ver que sea un árbol generador con un único vértice con in grado cero. Por como esta descrito el algoritmo podemos asegurar que no hay ciclos en $D(U)$ y B contiene a todos los vértices de $D(U)$ por tanto es un árbol generador. En el conjunto B todos los vértices tienen predecesores a excepción del vértice s , por tanto todos tienen in grado distinto de cero menos s , que es el único con in grado cero. \square

Llamaremos a la ex ramificación descrita un **árbol BFS** de $D(U)$ con raíz s o simplemente **árbol BFS desde s** .

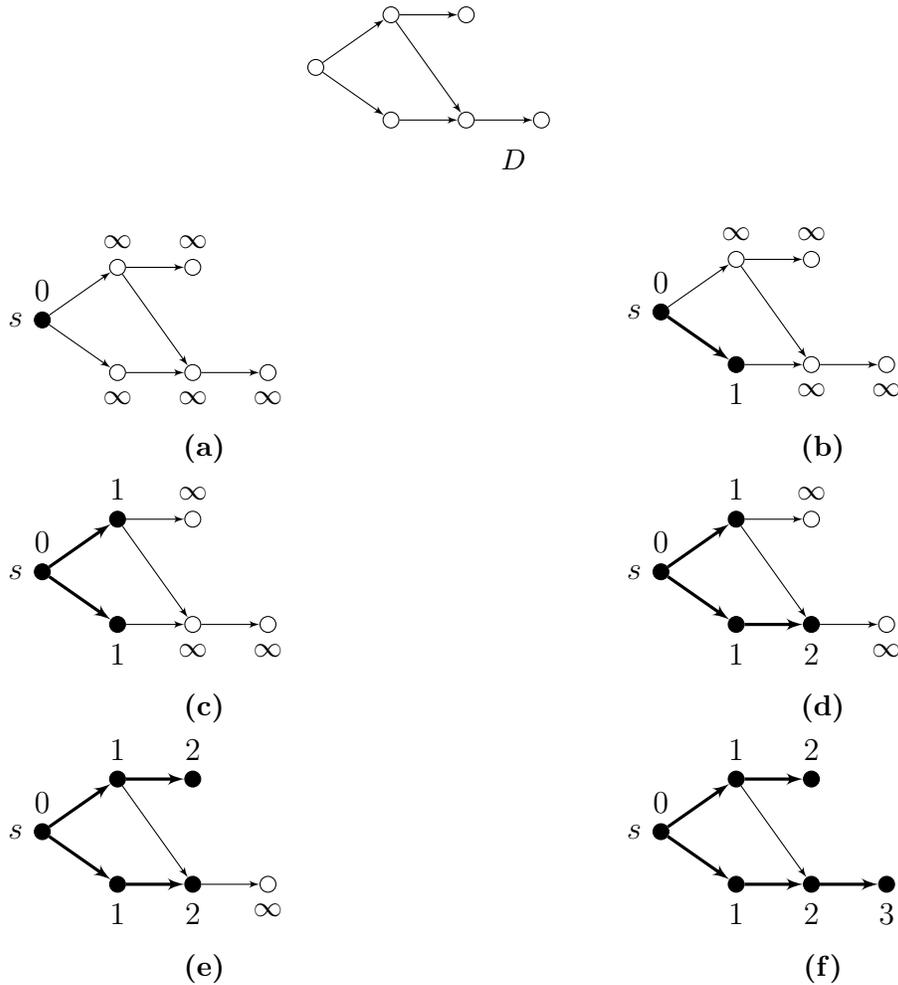


Figura 3.1: Ejecución del algoritmo BFS. En la figura (a) fijamos $\text{dist}'(s, s) = 0$ y la distancia de s a los demás vértices como ∞ , de la figura (b) a la (f) se cambia este valor por el que se asigna con el algoritmo; es decir, los números que se ven en los vértices son las respectivas distancias desde s .

Proposición 3.1.2. *Sea $\text{dist}(s, V) < \infty$. Para todo entero no negativo $p \leq \text{dist}(s, V)$, tenemos que $N^{+p}(s) = \{u \in V(D) : \text{dist}(s, u) = p\}$.*

Demostración. Por inducción sobre p . Si $p = 0$, por definición $N_D^0(s) = \{s\} = \{u \in V(D) : \text{dist}(s, u) = 0\}$, supongamos para todo $0 < k \leq \text{dist}(s, V)$ menor que p , para p tenemos que $N^{+p}(s) = N^+(N^{+p-1}(s)) \setminus \bigcup_{i=0}^{p-1} N^{+i}(s)$ para los vértices que pertenecen a $N^{+p-1}(s)$, por hipótesis de inducción son los vértices que están a distancia $p - 1$ de s y están a distancia uno de la ex vecindad p -ésima de s , y estamos quitando todos los vértices que están a distancia menor que p , por tanto $N^{+p}(s) = \{u \in V(D) : \text{dist}(s, u) = p\}$. \square

Dada una multigráfica dirigida $D = (V(D), F(D))$ y un vértice s llamamos a los conjuntos

$$N^0(s), N^+(s), N^{+2}(s), N^{+3}(s), \dots,$$

los **clases de distancia desde s** (véase figura 3.2). Por la proposición anterior $N^{+i}(s)$ consiste de aquellos vértices que están a distancia i de s .

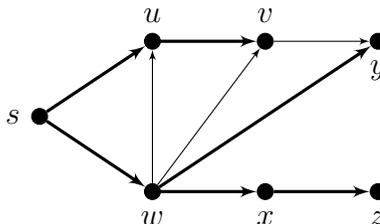


Figura 3.2: Una digráfica D con un árbol BFS indicado con las flechas oscuras. Las clases de distancia desde s son $N^0(s) = \{s\}$, $N^+(s) = \{u, w\}$, $N^{+2}(s) = \{v, x, y\}$ y $N^{+3}(s) = \{z\}$.

Como resultado de todo lo anterior podemos concluir el siguiente teorema.

Teorema 3.1.3. *Cuando aplicamos el algoritmo BFS a una multigráfica dirigida D y un vértice s en D determinamos un árbol BFS desde s , T , más aún las clases de distancia desde s en D son las mismas clases desde s en T .*

Como vimos en la proposición 3.1.1 el algoritmo nos ayuda a encontrar un árbol BFS desde un vértice s , en una multigráfica dirigida no habría diferencia en el algoritmo, pues cuando eliminamos un vértice en el algoritmo quitamos las flechas repetidas que tenemos, lo cual no afectaría al proceso de este.

3.2. Algoritmo de Dijkstra

Sea $D = (V(D), F(D), c)$ una digráfica con peso y tal que las flechas en D tienen pesos no negativos, el algoritmo de Dijkstra ² [11], nos ayuda a encontrar las distancias de un vértice fijo s al resto de los vértices en D . Durante el algoritmo los vértices de D son divididos en dos conjuntos P y Q . Además δ_v es asignado a cada vértice. Inicialmente todos los vértices están en Q , en el proceso del algoritmo, los vértices que son alcanzables desde s se mueven de Q a P . Mientras un vértice v esta en Q el correspondiente parámetro δ_v es una cota superior para $\text{dist}(s, v)$, cuando v es movido a P tenemos que $\text{dist}(s, v) = \delta_v$. La descripción formal se da a continuación.

Algoritmo de Dijkstra

Entrada: Una digráfica $D = (V(D), F(D), c)$, tal que $c(a) \geq 0$ para todo $a \in F(D)$, y un vértice $s \in V(D)$.

Salida: El parámetro δ_v para cada $v \in V(D)$ tal que $\delta_v = \text{dist}(s, v)$.

1. Hacemos $P = \emptyset$, $Q = V(D)$ y $\delta_v \leftarrow \infty$ para cada $v \in V(D) \setminus \{s\}$
2. Mientras que Q sea no vacío hacemos lo siguiente.
 - Encuentra un vértice $v \in Q$ tal que $\delta_v = \min\{\delta_u : u \in Q\}$
 - Asignamos $Q \leftarrow Q \setminus \{v\}$, $P \leftarrow P \cup \{v\}$
 - $\delta_u = \min\{\delta_u, \delta_v + c(v, u)\}$ para cada $u \in Q \cap N^+(v)$

Para ver que el algoritmo de Dijkstra es correcto es suficiente demostrar que la siguiente proposición es cierta, pues en cada paso del algoritmo generamos P una subdigráfica de D .

Proposición 3.2.1. *En cualquier momento de la ejecución del algoritmo, se tiene que*

- (a) *Para cada $v \in P$, $\delta_v = \text{dist}(s, v)$.*
- (b) *Para cada $u \in Q$, δ_u es la distancia desde s a u en la subdigráfica de D inducida por $P \cup \{u\}$.*

Demostración. La proposición se demostrará por inducción sobre el tamaño del conjunto P . Cuando $P = \emptyset$, $\delta_s = \text{dist}(s, s) = 0$ y las estimaciones $\delta_u = \infty$. $u \in V(D) \setminus \{s\}$ también son correctas.

²La complejidad del algoritmo de Dijkstra es $O(n^2)$. El algoritmo de Dijkstra determina las distancias de s al resto de los vértices en un tiempo $O(n \log n + m)$.

Supongamos que $P = P_0$ y $Q = Q_0$ son tales que las condiciones (a) y (b) se cumplen. Si $Q_0 = \emptyset$, terminamos. En caso contrario, sea v el siguiente vértice escogido en el algoritmo. Como la parte (b) se sigue de la parte (a) y de la manera en que se actualiza δ_u en el algoritmo, es suficiente probar solo la parte (a). Supongamos que (a) no se cumple para $P = P_0 \cup \{v\}$. Esto significa que $\delta_v > \text{dist}(s, v)$. Sea W una (s, v) -trayectoria mínima en D . Como $\delta_v > \text{dist}(s, v)$, W debe de contener al menos un vértice de $Q = Q_0 \setminus \{v\}$. Sea u el primer vértice en W que no esta en P_0 con respecto al orden inducido por el algoritmo de Dijkstra al construir P . Claramente $u \neq v$. Por la proposición 2.0.2 y el hecho de que $u \in W$, tenemos que $\text{dist}(s, u) \leq \text{dist}(s, v)$. Más aún, como la proposición se cumple para P_0 y Q_0 entonces por la parte (b), en la subdigráfica inducida por $P_0 \cup \{u\}$ $\delta_u = \text{dist}(s, u)$. Esto implica que $\delta_u = \text{dist}(s, u) \leq \text{dist}(s, v) < \delta_v$. En particular $\delta_u < \delta_v$ lo cual contradice la elección de v en el algoritmo. \square

3.3. El algoritmo de Bellman-Ford-Moore

Este algoritmo se origina de los documentos [5] de Bellman, [14] de Ford y [46] de Moore. Sea $D = (V(D), F(D), c)$ una digráfica con peso, posiblemente con flechas de peso negativo, pero sin ciclos negativos. El siguiente algoritmo³ puede ser utilizado para encontrar las distancias de un vértice fijo $s \in V(D)$ al resto de los vértices en D .

En lo que sigue entenderemos por peso de una trayectoria, a la suma de cada uno los pesos de las flechas que conforman dicha trayectoria. Sea $\delta(v, m)$ el peso de una (s, v) -trayectoria mínima que tiene a lo más m flechas. Claramente $\delta(s, 0) = 0$ y $\delta(v, 0) = \infty$ para todo $v \in V(D) \setminus \{s\}$. Sea $v \in V(D)$, probaremos que para todo $m \geq 0$,

$$\delta(v, m + 1) = \min\{\delta(v, m), \min\{\delta(u, m) + c(u, v) : u \in N^{-1}(v)\}\}. \quad (3.1)$$

Probaremos (3.1) por inducción sobre m . Para $m = 0$, es claro que la igualdad se cumple. Para $m \geq 1$, supongamos que existe una (s, v) -trayectoria mínima P con no más de $m + 1$ flechas. Si P tiene a lo más m flechas, su longitud es $\delta(v, m)$, si no es así, entonces P contiene $m + 1$ flechas, por la

³Cuando el algoritmo de Bellman-Ford-Moore es aplicado a una digráfica D con peso sin ciclos negativos y un vértice fijo $s \in V(D)$, este calcula las distancias desde s a los demás vértices en tiempo $O(nm)$.

proposición 2.0.2, P contiene una (s, u) -trayectoria mínima con m flechas y tal que $(u, v) \in F(D)$ para algún $u \in N^{-1}(v)$, por tanto la igualdad se cumple en estos casos. Si toda (s, v) -trayectoria mínima tiene más de $m + 1$ flechas, entonces no existen ex vecinos u de v tal que $\delta(u, m) < \infty$. Más aún (3.1) implica correctamente que $\delta(v, m + 1) = \infty$.

Como no existen trayectorias con más de $n - 1$ flechas, $\delta(v, n - 1) = \text{dist}(s, v)$ para cada $u \in V(D) \setminus \{v\}$. Así usando (3.1) para $m = 0, 1, 2, \dots, n - 2$, obtenemos las distancias desde s a los vértices de D . Esto da como resultado el siguiente algoritmo.

El algoritmo de Bellman-Ford-Moore

Entrada: Una digráfica con peso $D = (V(D), F(D), c)$ sin ciclos negativos, y un vértice fijo $s \in V(D)$.

Salida: El parámetro δ_v para cada $v \in V(D)$ tal que $\delta_v = \text{dist}(s, v)$ para todo $v \in V(D)$.

1. Hacemos $\delta_s = 0$ y $\delta_v = \infty$ para todo $v \in V(D) \setminus \{s\}$.
2. Para $i = 1$ hasta $n - 1$: para cada $(v, u) \in F(D)$ actualizamos el parámetro δ_u haciendo $\delta_u \leftarrow \min\{\delta_u, \delta_v + c(v, u)\}$.

Confirmar si D tiene o no un ciclo negativo puede ser logrado como sigue. Asumamos que D es fuerte (en caso contrario consideraremos las componentes fuertes de D una por una). Agregaremos el siguiente paso adicional al algoritmo anterior:

4. Para cada flecha $(v, u) \in F(D)$ hacer: si $\delta_u > \delta_v + c(v, u)$ entonces regresar el mensaje “la digráfica contiene un ciclo negativo”.

Teorema 3.3.1. *Una digráfica fuerte con peso D tiene un ciclo negativo si y solo si el paso 3 regresa su mensaje.*

Demostración. Supongamos que D no tienen ciclos negativos. Por la descripción del paso 2 y la proposición 2.0.2, $\delta_u \leq \delta_v + c(v, u)$ para cada flecha $(v, u) \in F(D)$. Por tanto el mensaje no será regresado.

Supongamos que D tiene un ciclo negativo $Z = v_1v_2 \cdots v_kv_1$. Supongamos para llegar a una contradicción que el paso 3 del algoritmo de Bellman-Ford-Moore no regresa el mensaje. Entonces, en particular, $\delta_{v_i} \leq \delta_{v_{i-1}} + c(v_{i-1}, v_i)$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, donde $v_0 = v_k$. Por tanto,

$$\sum_{i=1}^k \delta_{v_i} \leq \sum_{i=1}^k \delta_{v_{i-1}} + \sum_{i=1}^k c(v_{i-1}, v_i).$$

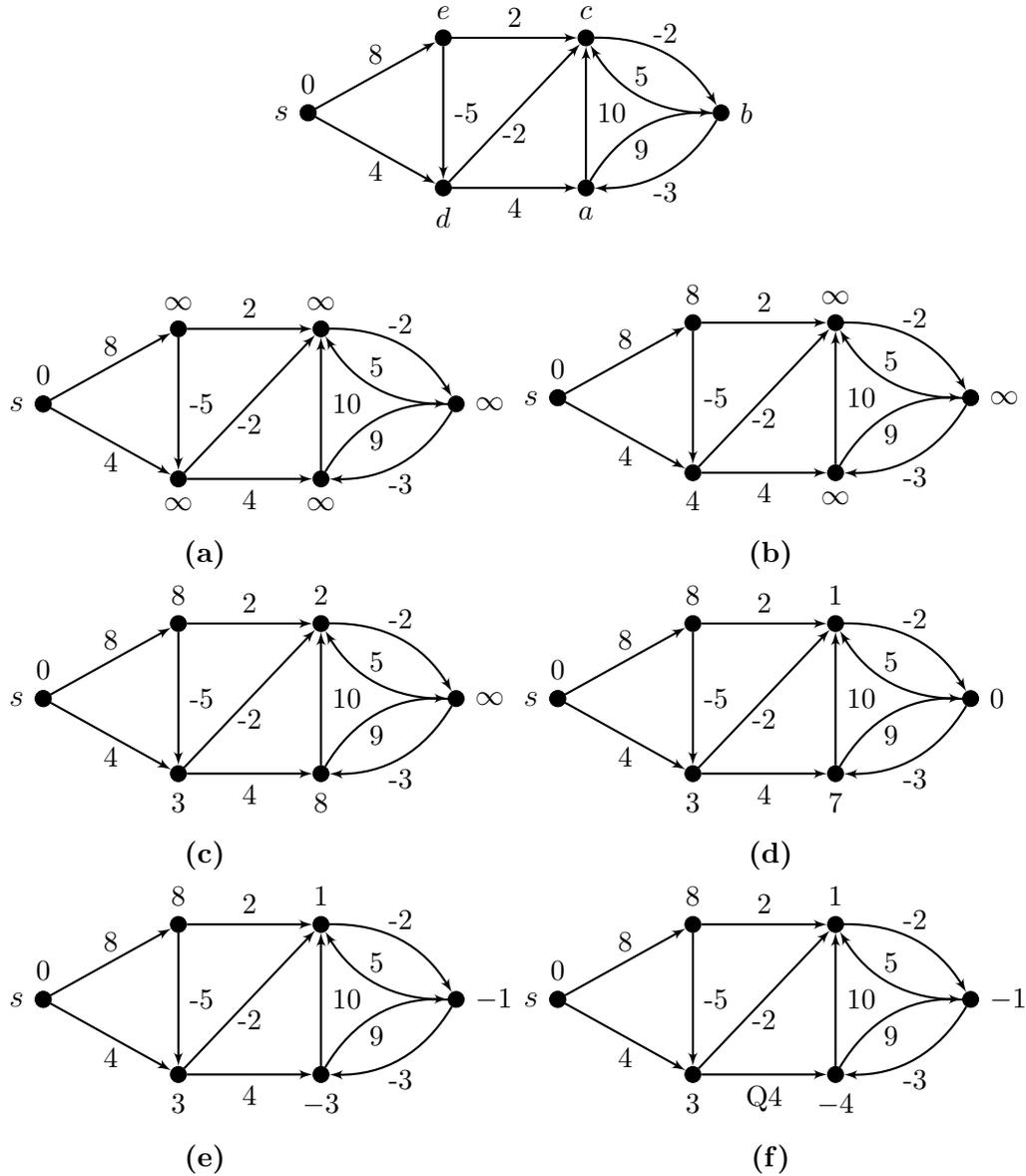


Figura 3.4: Ejecución del algoritmo de Bellman-Ford-Moore. Las etiquetas de los vértices y los pesos de las flechas son dados en la primer digráfica. Los valores del parámetro δ son dados junto a los vértices de las digráficas de (a)-(f). En el bucle interno del segundo paso del algoritmo las flechas son consideradas en el orden lexicográfico: $ab, ac, ba, bc, cb, da, dc, ec, ed, sd, se$. (a) La situación después del primer paso del algoritmo. (b)-(f) La situación después de cada una de las cinco ejecuciones sucesivas del bucle interno en el segundo paso del algoritmo.

Como las primeras dos sumas en la última desigualdad son iguales, obtenemos que $0 \leq \sum_{i=1}^k c(v_{i-1}, v_i) = c(Z)$, una contradicción. \square

Capítulo 4

Desigualdades con respecto al diámetro

Para una red representando un cierto sistema del mundo real, es deseable tener un diámetro pequeño ya que aumenta la confiabilidad del sistema. Sin embargo, las redes que representan sistemas del mundo real normalmente no tienen muchas flechas para evitar muchos costos de producción. Los objetivos de minimizar el diámetro y el tamaño de una digráfica se contradicen. Por lo tanto, es importante para un diseñador saber que clase de compensación puede ser lograda. Las desigualdades en esta sección dan una visión dentro de este problema.

Proposición 4.0.1. *Para una digráfica fuerte $D = (V(D), F(D))$ tenemos $\text{rad}(D) \leq \text{diám}(D) \leq 2\text{rad}(D)$.*

Demostración. Por las definiciones de radio y diámetro tenemos que $\text{rad}(D) = \min\{(\text{dist}(x, V) + \text{dist}(V, x))/2 : x \in V(D)\}$ y $\text{diám}(D) = \text{dist}(V, V)$, por tanto

$$\text{rad}(D) \leq \frac{\text{dist}(x, v) + \text{dist}(V, x)}{2} \leq \frac{\text{dist}((V, V) + \text{dist}(V, V))}{2} = \text{diám}(D).$$

Sean $x \in V(D)$ tal que $(\text{dist}(x, V(D)) + \text{dist}(V(D), x))/2 = \text{rad}(D)$, y y, z vértices de D tal que $\text{dist}(y, z) = \text{diám}(D)$. Tenemos que $\text{dist}(y, z) \leq \text{dist}(y, x) + \text{dist}(x, z) \leq 2\text{rad}(D)$, por tanto $\text{diám}(D) \leq 2\text{rad}(D)$. \square

La siguiente cota sobre el orden de una digráfica fuerte es importante en ciertas aplicaciones. Es conocida como la cota de Moore. Si una digráfica cumple la igualdad en la cota es llamada digráfica de Moore.

Proposición 4.0.2. Sean n, Δ y d el orden, el máximo ex grado y el diámetro de una digráfica fuerte D , respectivamente. Entonces $n \leq 1 + \Delta + \Delta^2 + \dots + \Delta^d$.

Demostración. Sean $v \in V(D)$ y n_i el número de vértices a distancia i del vértice v , veamos por inducción sobre i , que para todo $0 \leq i \leq k$ se tiene que $n_i \leq \Delta^i$, para $i = 0$ es claro que los vértices que están a distancia cero de v son cero y $\Delta^0 = 1$, supongamos que para $i = k$ la desigualdad es verdadera, demostremos la desigualdad para $i = k + 1$, para los vértices que están a distancia k de v tenemos que $n_k \leq \Delta^k$ por tanto $n_{k+1} \leq \Delta^k \Delta = \Delta^{k+1}$. Entonces $n = \sum_{i=0}^d n_i \leq \sum_{i=0}^d \Delta^i$. \square

Sabiendo que $\Delta^{d+1} - 1 = (\Delta - 1)(\Delta^d + \Delta^{d-1} + \dots + \Delta^2 + \Delta + 1)$ podemos reescribir la cota de Moore como $n \leq \frac{\Delta^{d+1} - 1}{\Delta - 1}$.

Proposición 4.0.3. Sean n, Δ y d el orden, el ex grado máximo y el diámetro de una digráfica fuerte D , respectivamente. Si $\Delta > 1$ y $d > 1$ entonces $d \geq \lceil \log_{\Delta}(n(\Delta - 1) + 1) \rceil$.

Esta proposición se obtiene despejando d de la desigualdad,

$$\begin{aligned} n &\leq \frac{\Delta^{d+1} - 1}{\Delta - 1} \\ n(\Delta - 1) &\leq \Delta^{d+1} - 1 \\ n(\Delta - 1) + 1 &\leq \Delta^{d+1} \\ \log_{\Delta}(n(\Delta - 1) + 1) &\leq \log_{\Delta} \Delta^{d+1} = d + 1 \\ \text{por lo tanto, } \lceil \log_{\Delta}(n(\Delta - 1) + 1) \rceil &\leq d. \end{aligned}$$

Los casos para $d = 2, 3$ han recibido consideraciones especiales Para $\Delta = 2$, Miller y Fris [44] demostraron que no existe una digráfica 2-regular de diámetro $d \geq 3$ y orden $n = \Delta + \Delta^2 + \dots + \Delta^d$, $\Delta = 3$ ha sido estudiado por Baskoro, Miller, Plesmík y Znám [4].

Los siguientes dos teoremas resuelven los problemas de establecer cotas superiores e inferiores para el diámetro de digráficas fuertes. El teorema 4.0.4 fue demostrado por Goldberg [20] y el teorema 4.0.5 fue dado por Ghouila-Houri [18].

Teorema 4.0.4. Sean D una digráfica fuerte de orden n y tamaño m , $m \geq n + 1$, y $g(n, m) = \lceil \frac{2n-2}{m-n+1} \rceil$. Entonces $\text{diám}(D) \geq g(n, m)$. Esta cota es justa.

Teorema 4.0.5. *Sea D una digráfica fuerte de orden n y tamaño m . Entonces $\text{diám}(D) \leq n - 1$, si $n \leq m \leq (n^2 + n - 2)/2$ y en caso contrario tenemos que*

$$\text{diám}(D) \leq \left\lfloor n + \frac{1}{2} - \sqrt{2m - n^2 - n + \frac{17}{4}} \right\rfloor.$$

Definición 4.1 Una digráfica D es **euleriana** si contiene un paseo cerrado (un camino cerrado que no repite flechas) que contiene todas las flechas de D . Este paseo cerrado se conoce como **paseo euleriano**. Una digráfica D es **conexa** si su gráfica subyacente, $UG(D)$ es conexa (como la definición de gráfica subyacente requiere varios conceptos previos, pedimos al lector que lea esta en el capítulo 5).

En la figura 4.1 vemos una digráfica euleriana, con un paseo euleriano: $v_1v_3v_5v_2v_4v_1v_2v_3v_4v_5v_1$.

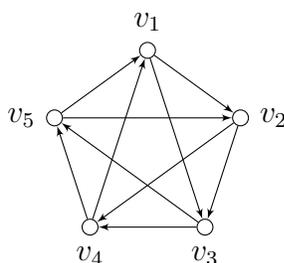


Figura 4.1: Ejemplo de digráfica euleriana

Teorema 4.0.6 (Teorema de Euler). *Una digráfica D es euleriana si y solo si D es conexa y $d^+(x) = d^-(x)$ para todo vértice $x \in V(D)$.*

Demostración. Supongamos que D es una digráfica conexa y el in grado y ex grado de todos los vértices en D es igual, se dará una demostración por construcción. Sea T inicialmente vacío y asumiremos que D tiene al menos dos vértices. Escogemos un vértice x arbitrario en D . Como D es conexa, existe un vértice $y \in N^+(x)$. Agregamos x a T al igual que la flecha de x a y . Como $d^+(y) = d^-(y)$, existe una flecha (y, z) en D con cola y . Añadimos y y (y, z) a T . Procedemos similarmente: después de que una flecha (u, v) es incluida en T , agregamos v a T junto a la una flecha a que no este en T cuya cola sea v . Debido a la condición de que $d^+(w) = d^-(w)$ para todo vértice w ,

el anterior proceso puede terminar solamente si la última flecha agregada a T es una flecha cuya cabeza es el vértice x y las flechas de D con cola x ya están en T . Si todas las flechas de D ya están en T , terminamos. Supongamos que no, como D es conexa, esto significa que T contiene un vértice p que es cola de una flecha (p, q) que no está en T . Cambiamos cíclicamente los vértices y flechas en T tal que T empiece y termine en p . Agregamos la flecha (p, q) a T y aplicamos el proceso anterior. Esto termina cuando lo último que agregamos es la flecha cuya cola es p y todas las flechas que inician con p ya están en T . Nuevamente o terminamos (todas las flechas ya están en T) o podemos encontrar un nuevo vértice para reiniciar el proceso. Como $V(D)$ es finito, después de varios pasos todas las flechas de D estarán incluidas en T . \square

Corolario 4.0.7. Sean D una multigráfica dirigida euleriana y $\emptyset \neq W \subset V(D)$. Entonces $d^+(W) = d^-(W)$.

Demostración. Observamos que

$$\sum_{w \in W} d^+(w) = |(W, W)| + d^+(W), \quad \sum_{w \in W} d^-(w) = |(W, W)| + d^-(W).$$

Por el teorema 4.0.5, $\sum_{w \in W} d^+(w) = \sum_{w \in W} d^-(w)$. Con las igualdades anteriores podemos concluir el corolario. \square

Ahora consideremos una cota superior más refinada en el diámetro de una digráfica euleriana obtenida por Soares [58].

Teorema 4.0.8. Sean $D = (V(D), F(D))$ una digráfica euleriana de orden n , diámetro d y mínimo in grado r , y

$$f(n, r, t) = \text{máx}\{2, t + 3\left(\frac{n-t}{r+1} - 1\right)\},$$

donde $t = d \pmod{3}$. Entonces $d \leq f(n, r, t)$.

Demostración. Supongamos que $d \geq 3$. Sean $u, w \in V(D)$ tales que $\text{dist}(u, w) = d$ y $V_i = N^{+i}(u)$ para $i = 0, 1, \dots, d$. Claramente V_0, V_1, \dots, V_d es una partición de V . Consideremos tres conjuntos consecutivos V_{j-1}, V_j, V_{j+1} de la partición. Recordemos que (X, Y) denota el conjunto de flechas con cola en X y cabeza en Y . Por la definición de partición tenemos que

$$(V_j, V) = (V_j, V_j) \cup (V_j, V_{j+1}) \cup (V_j, W). \quad (4.1)$$

donde $[W] = V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_{j-1}$. Por el corolario 4.0.7, $|(V_j, W)| \leq |(V \setminus W, W)| = |(W, V \setminus W)|$. Por definición de la partición $(W, V \setminus W) = (V_{j-1}, V_j)$. Como el mínimo ex grado de D es r , tenemos $|(V, V) \geq r|V_j|$. También tenemos que

$$|(V_j, V_j)| \leq |V_j|(|V_j| - 1), |(V_j, V_{j+1})| \leq |V_j||V_{j+1}|, |(V_{j-1}, V_j)| \leq |V_{j-1}||V_j|.$$

Por tanto, se sigue de (4.1) que

$$r|V_j| \leq |V_j|(|V_j| - 1) + |V_j||V_{j+1}| + |V_{j-1}||V_j|.$$

Así,

$$|V_{j-1}| + |V_j| + |V_{j+1}| \geq r + 1. \quad (4.2)$$

Como $d^+(v) \geq r$ y $d^-(w) \geq r$, tenemos $|V_0| + |V_1| \geq r + 1$ y $|V_{d-1}| + |V_d| = r + 1$. Uniendo estas dos ecuaciones a la desigualdad (4.2) para $j = 3, 6, \dots, 3\lfloor (d-3)/3 \rfloor$ y a la desigualdad $|V_j| \geq 1$ para los $t = d \bmod 3$ conjuntos V_j restantes, así obtenemos

$$n = \sum_{j=0}^d |V_j| \geq (r + 1) \left(\frac{d-t}{3} + 1 \right) + t,$$

lo cual implica la desigualdad deseada. \square

Soares [58] demostró que la cota del teorema 4.0.8 es justa, construyendo una digráfica fuerte r -regular D de orden n con diámetro $\lfloor f(n, r, t) \rfloor$ para todos los enteros n y r tal que $n - 1 > r \geq 2$.

Para una digráfica orientada fuerte D , una cota superior obvia para el diámetro es $\text{diám}(D) \leq lp(UG(D))$, donde $lp(G)$ denotan la longitud de una trayectoria máxima en una gráfica G . Esta cota es justa debido a resultados de Gutin [22]. Una demostración más corta fue dada por Bondy [7].

Teorema 4.0.9. *Sea G una gráfica conexa sin puentes. Entonces*

$$\text{máx}\{\text{diám}(D) : D \in S(G)\} = lp(G),$$

donde $S(G)$ es el conjunto de orientaciones fuertes de G .

Demostración. Para toda orientación fuerte G_0 de G obviamente tenemos $\text{diám}(G_0) \leq lp(G)$. Por tanto, para demostrar este teorema es suficiente construir alguna orientación G_1 de G con la propiedad $\text{diám}(G_1) = lp(G)$.

Sea $P = x_1x_2 \cdots x_k$ una trayectoria máxima de G , y asociamos cada vértice x_i con una etiqueta $r(x_i) = i$. Como G no tiene puentes, la arista $x_{k-1}x_k$ no es un puente. En consecuencia, existe $(\{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}\}, x_k)$ -trayectoria¹ R_1 la cual es diferente de la trayectoria (x_{k-1}, x_k) . Sea x_i el vértice inicial de R_1 . Definimos $r(v) = i$ para todos los vértices $v \in V(R_1) \setminus \{x_k\}$. Como $x_{i-1}x_i$ no es un puente existe una $(\{x_1, x_2, \dots, x_{i-1}\}, \{x_i, x_{i+1}, \dots, x_k\} \cup V(R_1))$ -trayectoria, la cual es diferente de la (x_{i-1}, x_i) -trayectoria. Si x_j es el vértice inicial de R_2 (observemos que $j \leq i$), entonces definimos $r(v) = j$ para todos los vértices $v \in R_2$ excepto por el terminal. Análogamente podemos construir trayectorias R_3, R_4, \dots y definir la etiqueta $r(\cdot)$ de los vértices de R_3, R_4, \dots hasta obtener una trayectoria R_s con vértice inicial x_1 y conjunto $r(v) = 1$ para todos los vértices en R_s excepto el final.

Ahora podemos orientar la trayectoria P desde x_1 hasta x_k (obtuvimos la trayectoria dirigida Q), y cada una de las trayectorias R_i (para $i = 1, 2, \dots, s$) desde su vértice final teniendo una etiqueta mayor a la de sus otros vértices finales (hemos derivado la trayectoria Q_i). Es fácil ver que la gráfica orientada inducida por las flechas de las trayectorias $\cup_{i=1}^s Q_i \cup V(Q)$ es fuerte.

Definimos $X = V(G) \setminus (\cup_{i=1}^s V(R_i) \cup V(P))$ y supongamos que $X \neq \emptyset$ (si $X = \emptyset$ entonces esta orientación es la que buscamos). Como G no tiene puentes existe algún vértice $v \in X$ y un par de trayectorias desde v a vértices en $V(G) \setminus X$ sin vértices comunes a parte de v . Combinamos estas dos trayectorias en una (trayectoria S_1). Ahora orientamos la última trayectoria desde su vértice final teniendo la etiqueta más grande al vértice que tiene la etiqueta más pequeña. Si las etiquetas de los vértices finales coinciden entonces la orientación es arbitraria. Todas las demás etiquetas de los otros vértices de la trayectoria son los mismos que la del vértice terminal de esa trayectoria.

Si $X \setminus V(S_1) \neq \emptyset$ continuamos la construcción de trayectorias S_2, S_3, \dots pasando sobre el resto de los vértices de X hasta que $\cup_{i=1}^t V(S_i) = X$, donde las orientaciones y etiquetas son escogidos de la misma manera. Finalmente orientamos cada vértice no orientado de uv , de u a v si $r(u) \geq r(v)$ y de v a u en el otro caso.

Sea D la gráfica orientada obtenida. La digráfica D es fuerte por como fue construida y ya que todas las flechas (u, w) de D , excepto las que están en P fueron orientadas tal que $r(u) \geq r(w)$ entonces ninguna trayectoria de x_1 a x_k tiene longitud menor a $k - 1$. Por lo tanto $\text{diám}(D) = k - 1$. \square

¹Una trayectoria que va de algún vértice en $\{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}\}$ a x_k .

Terminaremos esta sección con la siguiente conjetura de Shen [57].

Conjetura 4.0.10. *Sea D una digráfica fuerte de orden n , cuello g (la longitud de un ciclo mínimo en D) y un mínimo ex grado de al menos r . Entonces $\text{diám}(D) \leq n - (r - 1)(g - 1) - 1$.*

Shen [57] demostró que la cota de la conjetura 4.0.10 no puede reducirse. La conjetura es trivial para $r = 1$ o $g = 2$. Shen [57] probó la conjetura para $r = 2$.

Capítulo 5

Diámetro mínimo en orientaciones de multigráficas

Definición 5.1 Una **gráfica no dirigida** (o una **gráfica**) $G = (V(G), A(G))$ consiste de un conjunto finito no vacío $V(G)$ de elementos llamados **vértices** y un conjunto finito $A(G)$ de pares no ordenados de vértices distintos llamados **aristas**, los llamaremos **conjunto de vértices** y **conjunto de aristas** respectivamente. En otras palabras la arista $\{x, y\}$ es un subconjunto de dos elementos de $V(G)$, en lo que sigue denotaremos la arista $\{x, y\}$ como xy . Si $xy \in A(G)$ decimos que x e y son adyacentes. Notemos que en la definición de gráfica no aceptamos lazos (una arista que consiste del mismo vértice) o aristas paralelas (múltiples aristas con los mismos vértices finales). El **complemento** \bar{G} de una gráfica G , es la gráfica con conjunto de vértices $V(G)$ en la cual dos vértices son adyacentes si y solo si estos no son adyacentes en G (véase figura 5.1).



Figura 5.1: Una gráfica G y su complemento \bar{G}

Cuando permitimos aristas paralelas y lazo, decimos que es una **pseudográfica**; una pseudográfica sin lazos es una **multigráfica** (véase figura 5.2). Para un par de vértices u, v en una pseudográfica G , $\mu_G(u, v)$ denota el número de aristas entre u y v . En particular, $\mu_G(u, u)$ es el número de lazos de u .

Una multigráfica G es **completa** si cada par de vértices distintos en G son adyacentes. Denotamos la gráfica completa de n vértices como K_n , su complemento $\overline{K_n}$ no tiene aristas.

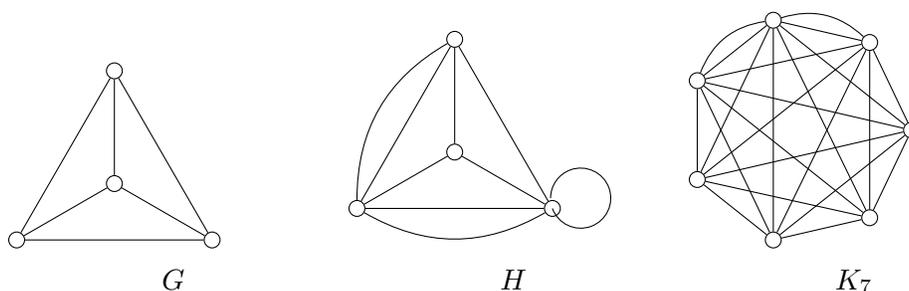


Figura 5.2: En la figura tenemos una gráfica G que es una gráfica completa con cuatro vértices K_4 , una pseudográfica H y una multigráfica completa K_7

Las nociones de caminos, trayectorias, paseos y ciclos en pseudografías no dirigidas son análogas a las de pseudografías dirigidas. Una xy -trayectoria en una pseudográfica no dirigida es una trayectoria cuyos vértices finales son x e y . Una pseudográfica no dirigida G es **conexa** si para cada dos vértices en $V(G)$ existe una trayectoria que los une. Sea H una pseudográfica, decimos que una arista e es un **punto** si al quitarla de la H , esta se vuelve no conexa (véase figura 5.3).

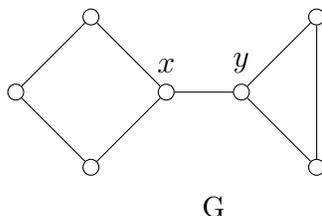


Figura 5.3: La gráfica G es una gráfica conexa y la arista xy es un puente

Una multigráfica H es **p -partita** si existe una partición V_1, V_2, \dots, V_p

de $V(H)$ en p **conjuntos de la partición** o **partes** (es decir, $V(H) = V_1 \cup \dots \cup V_p$, $V_i \cap V_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$) tal que cada arista de H tiene sus vértices finales en diferentes partes. El caso especial de una gráfica p -partita es cuando $p = 2$ entonces es llamada **gráfica bipartita** (véase figura 5.4). Una multigráfica H es **completa p -partita** si para cada par de vértices $x \in V_i$, $y \in V_j$ (con $i \neq j$), una arista xy esta en H . Una gráfica completa con n vértices es claramente una gráfica n -partita para la cual cada parte es un conjunto unitario. Denotamos la gráfica completa p -partita con partes de cardinalidades n_1, n_2, \dots, n_p por K_{n_1, n_2, \dots, n_p} . Gráficas completas p -partitas para $p \geq 2$ son también llamadas **gráficas completas multipartitas**, en la figura 5.4 se muestra una gráfica 3-partita.

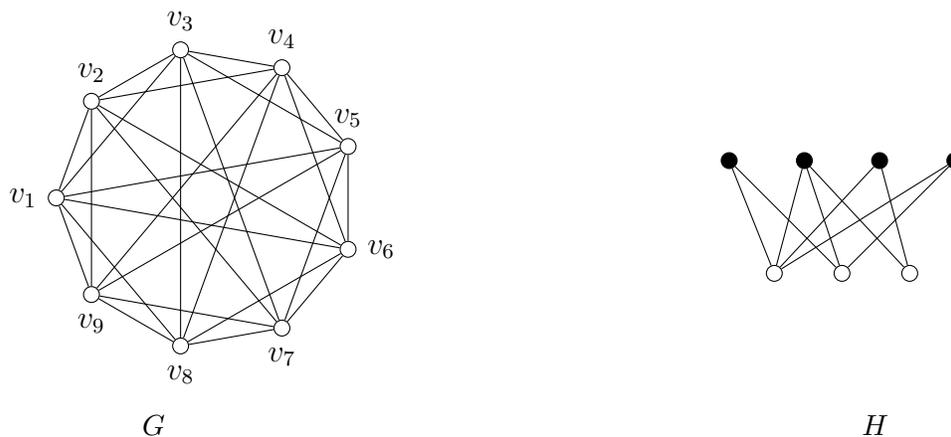


Figura 5.4: G es una gráfica 3-partita completa $K_{3,3,3}$ con partes $V_1 = \{v_1, v_4, v_7\}$, $V_2 = \{v_2, v_5, v_8\}$ y $V_3 = \{v_3, v_6, v_9\}$. Por otro lado, H es una gráfica bipartita, una de las partes está conformada por los vértices negros y la otra con los blancos.

Para una pseudográfica G , una pseudográfica dirigida D es llamada una **biorientación** de G si D se obtiene al reemplazar cada arista $\{x, y\}$ de G por (x, y) o (y, x) o por el par (x, y) y (y, x) (excepto por el lazo xx el cual es reemplazado por un lazo (dirigido) en x). Notemos que diferentes copias de la arista xy en G pueden ser reemplazadas por diferentes flechas en D . Así si $\mu_G(x, y) = 3$, entonces podemos reemplazar una arista xy por la flecha (x, y) , otra por la flecha (y, x) y la tercera por el par de flechas (x, y) y (y, x) . La **biorientación completa** de una gráfica no orientada $G = (V(G), A(G))$ es una biorientación D (denotada \overleftrightarrow{G}) de G tal que $(x, y) \in F(D)$ implica

que $(y, x) \in F(D)$. La biorientación completa de una gráfica completa es una **digráfica completa** (denotada por $\overleftrightarrow{K_n}$). Una **orientación** de una gráfica G es una biorientación de G la cual es una gráfica orientada; es decir, una digráfica sin 2-ciclos y sin lazos.

La **gráfica subyacente** $UG(D)$ de una digráfica D es la única gráfica G tal que D es una biorientación de G . La **multigráfica subyacente** $UMG(D)$ de una multigráfica dirigida D es una multigráfica obtenida de D al reemplazar cada flecha (x, y) con una arista $\{x, y\}$. Por ejemplo si una digráfica H con vértices u, v tiene flechas $(u, v), (v, u)$ entonces $UG(H)$ tiene una arista y $UMG(H)$ tiene dos aristas paralelas.

Para una multigráfica sin puentes G , $\text{diám}_{\min}(G)$ denota el mínimo diámetro de una orientación de G . Definimos un **torneo bipartito** BT_s , con conjuntos de partición U, W , cada uno con cardinalidad s , como sigue. Sean $U = \{u_1, u_2, \dots, u_s\}$ y $W = \{w_1, w_2, \dots, w_s\}$. El vértice u_i domina solamente vértices $w_i, w_{i+1}, \dots, w_{i_{[s/2]-1}}$ (los subíndices están tomados módulo s) para todo $i \in [s]$, las flechas restantes van del conjunto W a U (véase figura 5.5).

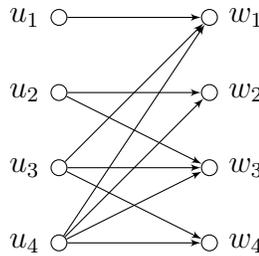


Figura 5.5: Torneo bipartito BT_s con conjuntos de partición $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ y $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$, las flechas restantes van del conjunto W a U

Lema 5.0.1. *Sea $s \geq 2$. El diámetro $\text{diám}(BT_s)$ es igual a tres. En particular, $\text{dist}(U, U) = \text{dist}(W, W) = 2$.*

Demostración. Claramente, basta con probar que $\text{dist}(U, U) = \text{dist}(W, W) = 2$. Esto se sigue del hecho de que para cada $i \neq j$, tenemos $N^+(u_i) - N^+(u_j) \neq \emptyset$ y por lo tanto existe un vértice $w \in W$ tal que $u_i \rightarrow w \rightarrow u_j$. \square

Para el siguiente teorema tomaremos un nuevo parámetro definido por Chvátal y Thomassen [10], el cual llamaremos **radio fuerte** de una digráfica fuertemente conexa $D = (V(D), F(D))$, $srad(D)$, es igual a

$$\min\{\max\{\text{dist}(v, V), \text{dist}(V, v)\} : v \in V(D)\}.$$

Teorema 5.0.2. [10] *Toda multigráfica conexa sin puentes $G = (V(G), A(G))$ admite una orientación de radio fuerte a lo más $(\text{rad}(G))^2 + \text{rad}(G)$.*

Demostración. Mostraremos un resultado ligeramente más general. Sean $u \in V(G)$ arbitrario y $\text{dist}_G(u, V) = r$, entonces hay una orientación L de G en la cual $\text{dist}_L(u, V) \leq r^2 + r$ y $\text{dist}_L(V, u) \leq r^2 + r$.

Como G no tiene puentes, cada arista uv está contenida en algún ciclo no dirigido, hagamos que $k(v)$ denote la longitud de un ciclo mínimo que pase por uv . Para cada $v \in N(u)$, $k(v) \leq 2r + 1$. Tomemos las clases de distancia de u y v , $N^0(u), N^+(u), \dots, N^{+p}(u)$ y $N^0(v), N^+(v), \dots, N^{+q}(v)$, para p y q tenemos que $p \leq \text{dist}(u, V)$ por definición, $q \leq \text{dist}(u, V)$ pues v está en alguna clase de distancia de u , tomemos un (u, v) -camino T que no pase por uv , entonces $l(T) \leq p + q \leq \text{dist}(u, V) + \text{dist}(u, V) = 2 \text{dist}(u, V)$, ahora tomamos el ciclo C que se forma al unir T y la arista uv , así $l(C) \leq 2 \text{dist}(u, V) + 1$. Por lo tanto la afirmación $k(v) \leq 2r + 1$ es verdadera.

Afirmamos que existe una subdigráfica H de G y una orientación D de H con las siguientes propiedades:

- (a) $N_G(u) \subseteq V(H)$.
- (b) Para cada $v \in N(u)$, D tiene un ciclo C_v de longitud $k(v)$ que contiene a (u, v) o a (v, u) .
- (c) D es la unión de los ciclos C_v .

Observemos que por esta afirmación y $k(v) \leq 2r + 1$:

$$\max\{\text{dist}_D(u, V(D)), \text{dist}_D(V(D), u)\} \leq 2r. \quad (5.1)$$

Demostraremos lo anterior construyendo H y D paso por paso. Sean uv una arista en G y Z_v un ciclo no dirigido de longitud $k(v)$ que pase por uv . Orientamos Z_v arbitrariamente como un ciclo dirigido y que C_v denote el ciclo obtenido de esta manera. Sea $H := Z_v$, $D := C_v$. Esto completa el primer paso. Para el paso i (con $i \geq 2$), escogemos una arista uw de

la cual $w \notin V(H)$ y un ciclo no dirigido $Z = w_1w_2 \cdots w_kw_1$ en G tal que $w_1 = u, w_2 = w$ y $k = k(w)$. Si ningún vértice de $Z_w \setminus \{u\}$ pertenece a H , entonces adjuntamos el ciclo dirigido $C_w = w_1w_2 \cdots w_kw_1$ a D y el ciclo Z a H . Ir al siguiente paso. En caso contrario, existe un vértice w_i (con $2 \leq i \leq k$) tal que $w_i \in V(H)$ y por lo tanto $w_i \in V(D)$. Supongamos que w_i tiene el último subíndice con esta propiedad. Como $w_i \in V(D)$, hay algún vecino v de u tal que $w_i \in C_v$. Sea $C_v = v_1v_2 \cdots v_tv_1$ (recordemos que C_v es un ciclo dirigido), donde $u = v_1$, $v \in \{v_2, v_t\}$ y $w_i = v_j$ para algún j . Considerando lo contrario de D , si fuese necesario, debemos asumir, sin ninguna pérdida de generalidad, que $v = v_2$. Ahora podemos considerar dos casos.

Caso 1: $w_k \neq v$. En este caso, definamos el ciclo dirigido $C_w = uw_2w_3 \cdots w_i[v_{j+1}, u]$ y observemos que C_w tiene longitud $k(w)$. En efecto, si C_w tiene más de $k(w)$ flechas, la trayectoria $C_w[w_i, u]$ sería más larga que la trayectoria $P_2 = w_iw_{i+1} \cdots w_ku$. En este caso, el camino $Z_v[u, v_j]P_2[w_{i+1}, u]$ que contiene a uv será de longitud menor que $k(v)$; lo que es una contradicción. Sea $Z_w := UG(C_w)$. Agreguemos C_w a D y Z_w a H . Ir al siguiente paso.

Caso 2: $w_k = v$. En este caso, definimos el ciclo C_w como sigue: $C_w = C_v[u, v_j]w_{i-1}w_{i-2} \cdots w_2u$ y observemos que C_w tiene longitud $k(w)$ (la demostración de este hecho es similar a la dada en el caso 1). Sea $Z_w := UG(C_w)$. Agregamos C_w a D y Z_w a H . Ir al siguiente paso.

Como $V(G)$ es un conjunto finito y al menos añadimos un nuevo vértice a H en cada paso, este proceso terminará con la subgráfica deseada H y su orientación D . Así, la afirmación está demostrada.

Consideremos la multigráfica dirigida D . En G , contraemos todos los vértices de D en un nuevo vértice u^* (la operación de contracción de multigráficas no dirigidas es similar a la de multigráficas dirigidas) y llamamos la multigráfica resultante G^* . Notemos que G^* no tiene puentes y que por la propiedad (a) de la afirmación anterior, obtenemos $\text{dist}_{G^*}(u^*, V(G^*)) \leq r - 1$. Por la hipótesis de inducción, existe una orientación L^* de G^* tal que

$$\text{dist}_{L^*}(u^*, V(L^*)) \leq r^2 - r \quad \text{y} \quad \text{dist}_{L^*}(V(L^*), u) \leq r^2 - r. \quad (5.2)$$

Consideremos una orientación L de G obtenida al combinar L^* con D y orientando el resto de las aristas en G arbitrariamente. Por (5.1) y (5.2), tenemos:

$$\text{dist}_L(u, V(L)) \leq r^2 + r \quad \text{y} \quad \text{dist}_L(V(L), u) \leq r^2 + r.$$

□

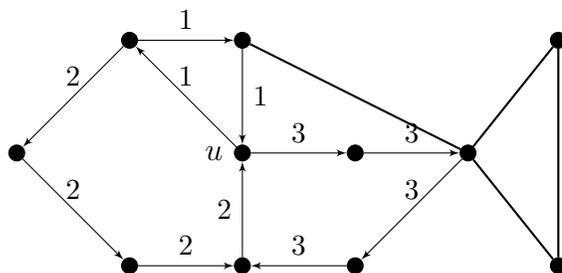


Figura 5.6: Construyendo la orientación D de H en la demostración del teorema 5.0.2. Los enteros en las flechas indican el número del paso en el proceso de obtener D .

En [10] se demuestra que la cota del teorema 5.0.2 es justa. El teorema 5.0.2 implica lo siguiente.

Corolario 5.0.3. *Para toda multigráfica conexa sin puentes G de radio r , $\text{diám}_{\text{mín}}(G) \leq 2r^2 + 2r$.*

Plesník [50] generalizó el teorema 5.0.2 y el corolario 5.0.3 a orientaciones de multigráficas con peso.

Teorema 5.0.4. *Sea G una multigráfica conexa sin puentes en la cual toda arista tiene peso entre 1 y W . Si el radio de G es r , entonces G admite una orientación de radio fuerte a lo más $r^2 + rW$ y un diámetro a lo más $2r^2 + 2rW$.*

Plesník [50] demostró que la cota del teorema anterior respecto a radio fuerte es justa.

Capítulo 6

Orientaciones de diámetros mínimos de algunas gráficas y digráficas

Recordemos que una **orientación** de una digráfica D es una gráfica orientada H obtenida de D al eliminar una flecha cada 2-ciclos de D . Para una digráfica fuerte D sin puentes, $UG(D)$, dejaremos que $\text{diám}_{\min}(D)$ denote el diámetro mínimo de una orientación de D . Con el siguiente resultado, la suposición de que $UG(D)$ no tiene puentes implica que $\text{diám}_{\min}(D) \leq \infty$, si $UG(D)$ tiene un puente, ninguna orientación de D es fuerte.

Una **gráfica mixta** $M = (V(M), F(M), A(M))$ contiene flechas (pares ordenados de vértices en $F(M)$) y aristas (pares no ordenados de vértices en $A(M)$) (véase figura 6.1). No aceptamos lazos y flechas paralelas, pero M puede contener aristas y arcos con el mismo vértice final. Por simplicidad tanto flechas como aristas serán llamadas **aristas**. Así una flecha es vista como una arista orientada.

Teorema 6.0.1. *Sea e una arista no orientada en una gráfica mixta fuerte M . La arista e puede ser reemplazada por una flecha (con los mismos vértices finales) tal que la gráfica mixta resultante M' es fuerte si y solo si e no es un puente.*

Demostración. Si e es un puente, entonces claramente no existe orientación de e que haga la gráfica mixta fuerte. Supongamos que e no es un puente. Sea $M' = M - e$. Si M' es fuerte, entonces cualquier orientación de e conduce a una gráfica mixta fuerte, entonces supongamos que M' no es fuerte. Como

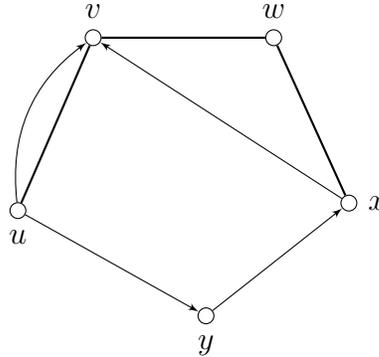


Figura 6.1: Gráfica mixta

e no es puente, M' es conexa. Sean L_1, L_2, \dots, L_k las componentes fuertes de M' . Como M es fuerte, existe una única componente inicial fuerte, digamos L_1 , y una única componente terminal, digamos L_k . Sea u (v) el vértice extremo de e que pertenece a L_1 (L_k). Por la conexidad fuerte de L_1, L_2, \dots, L_k y la proposición 1.0.2 (aplicada a la digráfica de la componente fuerte $\overleftrightarrow{M'}$), $M' + (v, u)$ es fuerte. \square

Corolario 6.0.2. *Una digráfica fuerte D tiene una orientación fuerte si y solo si $UG(D)$ no tiene puentes*

Demostración. Como podemos transformar una digráfica en una gráfica mixta al reemplazar cada 2-ciclos con una arista no dirigida, este corolario es solo una reformulación del teorema 6.0.1. \square

Varios autores consideran el parámetro $\rho(D) := \text{diám}_{\text{mín}}(D) - \text{diám}(D)$. Resulta que, para muchas gráficas dirigidas y no dirigidas, $\rho(G) = 0, 1$ o 2 . En esta sección discutiremos resultados en orientación de diámetro mínimo de algunas familias especiales de gráficas dirigidas y no dirigidas G para las cuales $\rho(G)$ es (muy) pequeño.

6.1. Generalizaciones de torneos

Definición 6.1

- Recordemos que la biorientación completa de una gráfica completa es una digráfica completa. Una digráfica es una **digráfica semicompleta** si es una biorientación de una gráfica completa y un **torneo** es una orientación de una gráfica completa. La notación de las digráficas semicompletas y sus subclases especiales, los torneos, pueden ser extendido de varias maneras. Una biorientación de una gráfica p -partita completa (multipartita) es una **digráfica p -partita semicompleta**. Un **torneo multipartito** es una orientación de una gráfica multipartita completa. Una digráfica 2-partita semicompleta es también llamada **digráfica bipartita semicompleta**. Un **torneo bipartito** es una digráfica bipartita semicompleta sin 2-ciclos.
- Una digráfica D es **transitiva** si, para cada par de flechas (x, y) y (y, z) en D con $x \neq z$, la flecha (x, z) también esta en D . Una digráfica D es **cuasitransitiva** si, para cada tripleta de vértices distintos x, y, z tal que (x, y) y (y, z) son flechas de D , existe al menos una de las flechas entre x y z .
- Una (x_1, x_n) -trayectoria, $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ es **minimal** si para cada (x_1, x_n) -trayectoria Q , $V(P) = V(Q)$ o Q tiene un vértice que no está en $V(P)$.



Figura 6.2: K_4 y una digráfica semicompleta de orden cuatro



Figura 6.3: Una gráfica 3-partita G y una biorientación de G



Figura 6.4: La gráfica completa 3-partita $K_{2,1,2}$ y una digráfica semicompleta 3-partita D

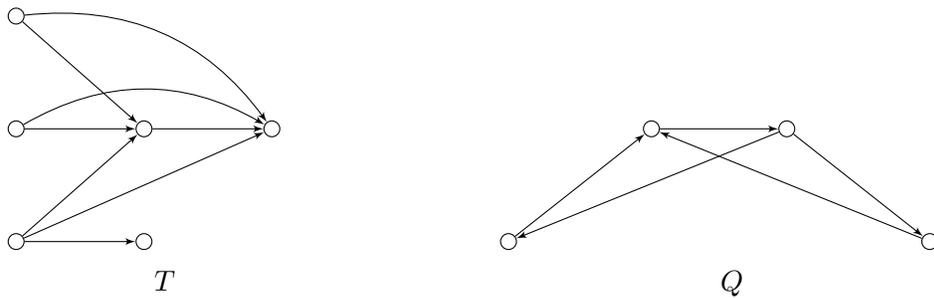


Figura 6.5: Una digráfica transitiva T y una digráfica cuasitransitiva Q

Observemos que, por el corolario 6.0.2, una digráfica fuerte k -partita semicompleta D , $k \geq 2$, tiene una orientación fuerte si D es una digráfica bipartita semicompleta con un conjunto de partición que consiste de un solo vértice. Esto justifica la consideración de las siguientes dos clases de digráficas. Sea \mathcal{D}_0 el conjunto de digráficas fuertes cuasitransitivas de orden $n \geq 3$. Sea \mathcal{D}_1 el conjunto de digráficas bipartitas semicompletas con al menos dos vértices en cada conjunto de la partición. Para digráficas de las clases $\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_1$ la siguiente cota en el diámetro mínimo de una orientación fue dado por Gutin y Yeo [27].

Proposición 6.1.1. *Sea D una digráfica cuasi-transitiva. Supongamos que $P = x_1x_2 \cdots x_k$ es una (x_1, x_k) -trayectoria minimal. Entonces la subdigráfica inducida por $V(P)$ es una digráfica semicompleta y $x_j \rightarrow x_i$ para todo $2 \leq i+1 < j \leq k$, excepto cuando $k = 4$, en cuyo caso la flecha entre x_1 y x_k no existe.*

Demostración. Los casos para $k = 2, 3, 4, 5$ son fáciles de verificar. Como ejemplo, consideremos el caso $k = 5$ (véase figura 6.6). Si x_i y x_j son adyacentes y $2 \leq i+1 < j \leq 5$, entonces $x_j \rightarrow x_i$ pues P es minimal. Como D es

cuasi-transitiva, x_i y x_{i+2} son adyacentes para $i = 1, 2, 3$. Esto y la minimalidad de P implican que $x_3 \rightarrow x_1$, $x_4 \rightarrow x_2$ y $x_5 \rightarrow x_3$. De estas flechas y la minimalidad de P concluimos $x_5 \rightarrow x_1$. Ahora las flechas (x_4, x_5) y (x_5, x_1) implican que $x_4 \rightarrow x_1$. Similarmente $x_5 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2$ implican $x_5 \rightarrow x_2$. En el caso $k = 4$ como $x_1 \rightarrow x_2$, $x_2 \rightarrow x_3$ y P es minimal entonces $x_3 \rightarrow x_1$, de manera similar $x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4$ implica que $x_4 \rightarrow x_2$ y como podemos observar en la figura 6.6 no existe la flecha de x_4 a x_1 .



Figura 6.6: La digráfica D' para el caso $k = 4$ y la digráfica D muestra el caso para $k = 5$

La demostración del caso $k \geq 6$ es por inducción sobre k con el caso $k = 5$ como la base. Por inducción, $D\langle\{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}\}\rangle$ y $D\langle\{x_2, x_3, \dots, x_k\}\rangle$ son digráficas semicompletas y $x_j \rightarrow x_i$ para todo $1 < j - i \leq k - 2$. Por lo tanto x_3 domina a x_1 y x_k domina a x_3 y la minimalidad de P implica que x_k domina a x_1 . \square

Teorema 6.1.2. Si $D \in \mathcal{D}_i$ para $i \in \{0, 1\}$, entonces

$$\text{diám}_{\min}(D) \leq \max\{3 + 2i, \text{diám}(D)\}.$$

Demostración. Recordemos que \mathcal{D}_0 es el conjunto de digráficas fuertes cuasitransitivas de orden $n \geq 3$ y \mathcal{D}_1 el conjunto de digráficas bipartitas semicompletas con al menos dos vértices en cada conjunto de la partición.

Supongamos que este teorema es falso y que D es un contraejemplo al teorema con los menos 2-ciclos posibles. Sean $D \in \mathcal{D}_i$ para $i \in \{0, 1\}$ y $\gamma = 3 + 2i$. Sea xyx un 2-ciclo en D . Claramente, el diámetro de D incrementa al menos uno cuando eliminamos una de las flechas (x, y) o (y, x) de D . Por lo tanto existen vértices $s_{xy}, t_{xy}, s_{yx}, t_{yx}$ en D , tal que $\text{dist}_{D-(x,y)}(s_{xy}, t_{xy}) > \max\{\gamma, \text{diám}(D)\}$ y $\text{dist}_{D-(y,x)}(s_{yx}, t_{yx}) > \max\{\gamma, \text{diám}(D)\}$. Sea $P = p_0 p_1 \cdots p_l$ una (s_{xy}, t_{xy}) -trayectoria en D de longitud mínima (notemos que $l \leq \text{diám}(D)$) y sea $Q = q_0 q_1 \cdots q_m$ una (s_{yx}, t_{yx}) -trayectoria de longitud mínima en D (notemos que $m \leq \text{diám}(D)$). Sea ρ y η definidos tal que $(x, y) = (p_\rho, p_{\rho+1})$ y

$(y, x) = (q_\eta, q_{\eta+1})$. Ahora consideramos los siguientes casos, los cuales agotan todas las posibilidades:

Caso 1: $\rho + 1 < l$, $\eta + 1 < m$ y $D \in \mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_1$. Primero mostraremos que $p_{\rho+2}$ y $q_{\eta+2}$ son adyacentes. Esto es claramente cierto si D es bipartita semicompleta pues estos dos vértices pertenecen a diferentes conjuntos de la partición de D . Si D es cuasitransitiva, entonces p_ρ y $p_{\rho+2}$ son adyacentes. Por lo tanto, $p_{\rho+2} \rightarrow p_\rho$ por la minimalidad de l . Sin embargo, esto implica que $p_{\rho+2}$ y $q_{\eta+2}$ son adyacentes, como $p_{\rho+2} \rightarrow (p_\rho = q_{\eta+1}) \rightarrow q_{\eta+2}$. Si $p_{\rho+2} \rightarrow q_{\eta+2}$, ya que $q_\eta = p_{\rho+1}$ entonces $q_0 q_1 \cdots q_\eta p_{\rho+2} q_{\eta+2} \cdots q_m$ es una (q_0, q_m) -trayectoria de longitud $m \leq \text{diám}(D)$ en $D - (y, x)$, una contradicción. El caso donde $q_{\eta+2} \rightarrow p_{\rho+2}$ puede ser considerado análogo.

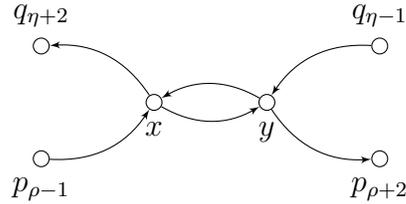


Figura 6.7: Caso 1

Caso 2: $\rho > 0$, $\eta > 0$ y $D \in \mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_1$. Este caso puede ser transformado en el caso 1 al considerar el inverso de D .

Caso 3: $\rho = 0$, $\eta + 1 = m$ y $D \in \mathcal{D}_0$. Primero mostraremos que $l + m \geq 3$. Supongamos que $l = m = 1$; es decir, $x = p_0 = q_1$, $y = p_1 = q_0$. Sea $z_0 z_1 \cdots z_k$ una (x, y) -trayectoria mínima en $D - (y, x)$. Por la elección de x, y , tenemos $k \geq 4$. Por la proposición 6.1.1, $z_k \rightarrow z_1$ y $z_2 \rightarrow z_0$. Por lo tanto, $z_k z_1 z_2 z_0$ es una (x, y) -trayectoria en $D - (x, y)$ de longitud tres, una contradicción con la elección de x . Así, asumiremos, sin pérdida de generalidad, que $l \geq 2$.

Sea $R = r_0 r_1 \cdots r_t$ una trayectoria mínima de q_0 a p_l en D . La trayectoria R puede ser elegida tal que esta no contiene a (y, x) . En efecto, si $y = r_j$, $x = r_{j+1}$ para algún j , entonces $r_0 r_1 \cdots r_j p_2 p_3 \cdots p_l$ no es más larga que R (pues $p_1 p_2 \cdots p_l$ es una (p_1, p_l) -trayectoria mínima en D). Entonces, asumiremos que R no contiene a (y, x) . Asumiremos que R tampoco contiene a (x, y) .

Por la proposición 6.1.1, obtenemos inmediatamente que $p_l \rightarrow p_0$ si $l \neq 3$ y $p_l \rightarrow p_1$ si $l = 3$. Si $l = 3$, entonces tenemos $p_3 \rightarrow p_1$ y $p_0 \rightarrow p_1$. Entonces, por la minimalidad de l , $p_3 \rightarrow p_0$. Por lo tanto, hemos demostrado que $p_l \rightarrow p_0$ para todo $l \geq 2$.

Tenemos $t > 2$, en caso contrario $r_0 r_1 \cdots r_t p_0$ podría ser una trayectoria de q_0 a q_m de longitud $t + 1 \leq 3$ en $D - (y, x)$. Como $p_l \rightarrow p_0$ y $r_{t-1} \rightarrow r_t = p_l$, concluimos que r_{t-1} y p_0 son adyacentes. Si $r_{t-1} \rightarrow p_0$, entonces $r_0 r_1 \cdots r_{t-1} p_0$ es una trayectoria de q_0 a q_m de longitud $t \leq \text{diám}(D)$ en $D - (y, x)$, una contradicción. Si $p_0 \rightarrow r_{t-1}$, entonces $p_0 r_{t-1} p_l$ es una trayectoria de longitud 2 desde p_0 a p_l en $D - (y, x)$, una contradicción.

Caso 4: $\eta = 0$, $\rho + 1 = l$ y $D \in \mathcal{D}_0$. Este caso puede ser transformado en el caso 3 al considerar el inverso de D .

Caso 5: $\rho = 0$, $\eta + 1 = m$ y $D \in \mathcal{D}_1$. Supongamos que $l = m = 1$. Sea $z_0 z_1 \cdots z_k$ una (y, x) -trayectoria mínima en $D - (y, x)$. Por la elección de x , y $k \geq 6$. Por la minimalidad de $k, z_3 \rightarrow z_0$ (z_0 y z_3 pertenecen a diferentes partes de D) y $z_k \rightarrow z_2$ (z_k y z_2 pertenecen a diferentes conjuntos de la partición de D). Por lo tanto, $z_k z_2 z_3 z_0$ es una (x, y) -trayectoria en $D - (x, y)$, una contradicción. Así, podemos asumir, sin ninguna pérdida de generalidad, que $m \geq 2$.

Sea $R = r_0 r_1 \cdots r_t$ una trayectoria mínima de q_0 a p_l en D . Al igual que en el caso 3, asumiremos que R contiene a (x, y) o contiene a (y, x) . Supongamos que $t = 0$, implicando que $q_0 = p_1$ y $l, m \geq 2$. Supongamos que $l \geq 3$. Si p_0 y p_l pertenecen a diferentes conjuntos de la partición de D entonces por la minimalidad de l y la suposición de que D es bipartita semicompleta, $p_l \rightarrow p_0$, lo cual es imposible pues $p_l p_0$ es una (q_0, q_m) -trayectoria de longitud uno en $D - (y, x)$, una contradicción. Si p_0 y p_l pertenecen al mismo conjunto de la partición de D , entonces $p_l \rightarrow p_1$ (por la minimalidad de l) y $p_l p_1 p_2 p_3 p_0$ es una (q_0, q_m) -trayectoria de longitud cuatro en $D - (y, x)$, una contradicción. Así, $l = 2$. Análogamente, podemos probar que $m = 2$. Como $D - (x, y)$ tiene una (p_0, p_2) -trayectoria y $p_2 = q_0 \rightarrow q_1 = p_1$, existe una (p_0, p_1) -trayectoria $S = s_0 s_1 \cdots s_a$ en $D - (x, y)$. Supongamos que S tiene longitud mínima y observemos que $a \geq 5$, pues $s_0 s_1 \cdots s_a p_l$ es una (p_0, p_l) -trayectoria en $D - (x, y)$. Además, $s_3 \rightarrow s_0$ pues s_3 y s_0 están en diferentes conjuntos de la partición de D y S es de longitud mínima. Observemos que si $p_2 \rightarrow s_3$, entonces $p_2 s_3 s_0$ es una (q_0, q_m) -trayectoria en $D - (y, x)$ de longitud dos, y si $s_3 \rightarrow p_2$, entonces $s_0 s_1 s_2 s_3 p_2$ es una (p_0, p_l) -trayectoria en $D - (x, y)$ de longitud cuatro. En ambos casos obtenemos una contradicción. Por lo tanto, $t > 0$.

Supongamos que $l \leq t \leq 2$. Claramente r_0 y r_l están en diferentes conjuntos de la partición, entonces podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que r_0 y p_0 son adyacentes (el caso donde r_1 y p_0 son adyacentes puede ser considerado análogamente). Claramente p_0 domina a r_0 por la minimalidad

de m . Sin embargo, $p_0 r_0 \cdots r_t$ es una (p_0, p_l) -trayectoria en $D - (x, y)$ de longitud $t + 1 \leq 3$, una contradicción. Por lo tanto, $t \geq 3$.

Claramente r_1 y r_2 pertenecen a conjuntos diferentes de la partición, así podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que r_1 y p_0 son adyacentes (el caso cuando r_2 y p_0 son adyacentes es considerado análogamente). Claramente p_0 domina a r_1 por la minimalidad de m . Sin embargo, la trayectoria $p_0 r_1 \cdots r_t$ en $D - (x, y)$ es de longitud $t \leq \text{diám}(D)$.

Caso 6: $\eta = 0$, $\rho + 1 = l$ y $D \in \mathcal{D}_1$. Este caso puede ser transformado en el caso 5 al considerar el inverso de D . \square

La cota superior de este teorema es justa como uno puede ver con los siguientes ejemplos. Sea T_k , $k \geq 3$, un torneo (transitivo) con vértices x_1, x_2, \dots, x_k y flechas (x_i, x_j) para cada $1 \leq i < j \leq k$. Sea y un vértice que no este en T_k , el cual domina a todos los vértices en T_k excepto x_k y es dominado por todos los vértices de T_k excepto x_1 . La digráfica semicompleta resultante D_{k+1} tiene diámetro dos. Sin embargo, la eliminación de cualquier flecha de D_{k+1} entre y y el conjunto $\{x_2, x_3, \dots, x_{k-1}\}$ deja una digráfica con diámetro tres. En efecto, si eliminamos (y, x_i) , $2 \leq i \leq k - 1$, entonces una (x_k, x_i) -trayectoria mínima se convierte en una de longitud tres.

Sea H una digráfica bipartita semicompleta fuerte (véase figura 6.8) con los siguientes conjuntos de partición, V_1 y V_2 y conjunto de flechas A : $V_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$, $V_2 = \{y_1, y_2, y_3\}$ y

$$A = \{(x_1, y_1), (y_1, x_1), (x_1, y_2), (y_3, x_1), (x_2, y_2), \\ (y_2, x_2), (y_3, x_2), (y_1, x_3), (x_3, y_3), (x_3, y_2)\}.$$

Sea $H' = H - (x_1, y_1)$ y $H'' = H - (y_1, x_1)$. Es fácil verificar que $\text{diám}(H) = 4$, en particular $\text{dist}(y_2, y_3) = 4$, $\text{diám}(H') = \text{diám}(H'') = 5$ y una (x_1, y_3) -trayectoria mínima en H' es una (y_2, x_1) -trayectoria mínima en H'' de longitud 5.

La digráfica H puede ser usada para generar una infinidad de digráficas bipartitas semicompletas con la propiedad de arriba: reemplazar, digamos, x_3 por un conjunto de vértices independientes (es decir, no hay flechas entre ellos).

El teorema anterior inspiró la siguiente conjetura por Gutin, Koh, Tay y Yeo [24].

Conjetura 6.1.3. *Existe una constante absoluta c tal que para toda digráfica multipartita completa fuerte D , tenemos $\text{diám}_{\min}(D) \leq \text{diám}(D) + c$.*

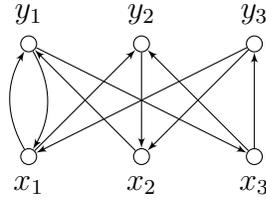


Figura 6.8: Digráfica H

Una digráfica D es **localmente semicompleta** si tanto $D\langle N^+(x) \rangle$ como $D\langle N^-(x) \rangle$ son digráficas semicompletas para cada vértice $x \in V(D)$ (véase figura 6.9). El siguiente teorema es un análogo del teorema 6.1.2 y fue también demostrado por Gutin y Yeo [27].

Teorema 6.1.4. *Si D es una digráfica localmente semicompleta fuerte de orden $n \geq 3$, entonces*

$$\text{diám}_{\min}(D) \leq \max\{5, \text{diám}(D) + 1\}.$$

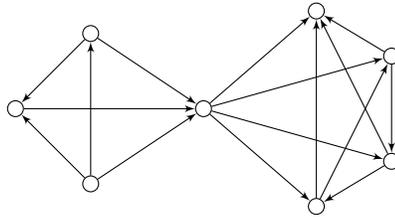


Figura 6.9: Una digráfica localmente semicompleta

6.2. Digráficas extendidas

Sea s_i un conjunto de vértices independiente (es decir, sin flechas entre ellos) con $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, definimos la (s_1, s_2, \dots, s_n) -**extensión** (o solo **extensión**) $D(s_1, s_2, \dots, s_n)$ de una digráfica D con vértices etiquetados, digamos, $1, 2, \dots, n$ se obtiene de D al reemplazar cada vértice i por un conjunto s_i ; formalmente,

$$V(D(s_1, s_2, \dots, s_n)) = \{(p_i, i) : 1 \leq p_i \leq s_i, i \in [n]\}$$

y $(p, i) \rightarrow (q, j)$ con $p \neq q$ en $D(s_1, s_2, \dots, s_n)$ si y solo si $i \rightarrow j$ en D , en la figura 6.10 podemos observar la extensión de una gráfica G .



Figura 6.10: Una digráfica G y su extensión con conjuntos $s_1 = \{1, 2\}$ y $s_2 = \{1, 2, 3\}$

Observemos que la digráfica p -partita es una extensión de K_p . El primer resultado en este tema de esta subsección es de Šoltés [59].

Teorema 6.2.1. *Si $n_1 \geq n_2 \geq 2$, entonces $\rho(K_{n_1, n_2}) = 1$ para $n_1 \leq \binom{n_2}{\lfloor n_2/2 \rfloor}$ y $\rho(K_{n_1, n_2}) = 2$, en otro caso.*

Los valores exactos de $\rho(K_{n_1, n_2, \dots, n_k})$ son desconocidos, pero el siguiente resultado obtenido independientemente por Plesník [50] y Gutin [23] da una cota superior justa para $f(n_1, \dots, n_k) = \text{diám}_{\text{mín}}(K_{n_1, n_2, \dots, n_k})$.

Teorema 6.2.2. *Para cada $k \geq 3$ y todos los enteros positivos n_1, \dots, n_k , tenemos $2 \leq f(n_1, \dots, n_k) \leq 3$.*

Demostración. Obviamente $f(n_1, \dots, n_k) \geq 2$.

Si k es impar, sea $R(n_1, n_2, \dots, n_k)$ representa un torneo multipartito con partes V_1, \dots, V_k de cardinalidades n_1, \dots, n_k respectivamente tales que $V_i \rightarrow V_j$ si y solo si $j - i \equiv 1, 2, \dots, \lfloor k/2 \rfloor \pmod{k}$. Si k es par, entonces $R(n_1, n_2, \dots, n_{k-1})$, es determinado como sigue: $R(n_1, n_2, \dots, n_k) - V_k \cong R(n_1, n_2, \dots, n_{k-1})$, $V_k \rightarrow V_i$ ($i = 1, 3, 5, \dots, k-1$), $V_j \rightarrow V_k$ (con $j = 2, 4, 6, \dots, k-2$). Probaremos que $\text{diám}(R(n_1, n_2, \dots, n_k)) \leq 3$ para todo $k \geq 3$.

Caso 1: k es impar, $k \geq 3$. Es suficiente demostrar que $\text{dist}(V_1, V_i) \leq 3$ para todo $i \in [k]$. Si $1 \leq j \leq \lfloor k/2 \rfloor + 1$, entonces $V_1 \rightarrow V_j$ por la definición. Si $\lfloor k/2 \rfloor + 1 < j \leq k$, entonces $V_{\lfloor k/2 \rfloor + 1} \rightarrow V_{\lfloor k/2 \rfloor + 2} \rightarrow V_1$, tenemos que $\text{dist}(V_1, V_1) \leq 3$.

Caso 2: k es par, $k \geq 4$. Ya que $R(n_1, n_2, \dots, n_k) - V_k \cong R(n_1, n_2, \dots, n_{k-1})$, tenemos $\text{dist}(V_i, V_j) \leq 3$ para todo $1 \leq i, j \leq k-1$. Más aún, $V_k \rightarrow V_i \rightarrow V_{i+1}$ para $i = 1, 3, 4, \dots, k-3$ y $V_k \rightarrow V_{k-1}$. Por lo tanto $\text{dist}(V_k, V_t) \leq 2$ para $t \in [k-1]$. Análogamente, $V_i \rightarrow V_{i+1} \rightarrow V_k$ para $i = 1, 3, 5, \dots, k-3$ y $V_{k-1} \rightarrow V_1 \rightarrow V_2 \rightarrow V_k$. Por lo tanto, $\text{dist}(V_t, V_k) \leq 3$ para $t \in [k-1]$. Finalmente, $V_k \rightarrow V_1 \rightarrow V_2 \rightarrow V_k$. Por lo tanto, $\text{dist}(V_k, V_k) \leq 3$. \square

El siguiente resultado, el principal de esta subsección fue obtenido por Gutin, Koh, Tay y Yeo [24].

Teorema 6.2.3. *Sea H una digráfica fuerte de orden $n \geq 3$ y $D = H(s_1, s_2, \dots, s_n)$ con $s_i \geq 2$, $1 \leq i \leq n$. Entonces $\text{diám}(H) \leq \text{diám}_{\min}(D) \leq \text{diám}(H) + 2$.*

Notemos que el teorema anterior es una generalización de un resultado análogo para extensión de gráficas obtenido por Koh y Tay [38, 60].

La condición $n \geq 3$ es importante pues como podemos observar del teorema 6.2.1 $\text{diám}(K_2) = 1$ pero para $s \geq 3$ $\text{diám}_{\min}(K_{s,2}) = 4$. Claramente, $\text{diám}(H) \leq \text{diám}(D')$ para cada orientación D' de D . Para demostrar la parte más difícil de la desigualdad en el teorema 6.2.3, usaremos el siguiente lema.

Lema 6.2.4. *Sea t_i, s_i enteros tales que $2 \leq t_i \leq s_i$ para $1 \leq i \leq n$ y sea H una digráfica fuerte con conjunto de vértices $[n]$, con $n \geq 3$. Si la digráfica $D' = H(t_1, t_2, \dots, t_n)$ admite una orientación F' en la que cada vértice $V = (p, i)$, donde i pertenece a un ciclo de longitud dos en H , está en un ciclo C_v de longitud no mayor a m , entonces $D = H(s_1, s_2, \dots, s_n)$ tiene una orientación F con diámetro a lo más $\max\{m, \text{diám}(F')\}$.*

Demostración. Dada una orientación F' de D' , definimos una orientación F de D como sigue. Tenemos $(p, i) \rightarrow (q, j)$ en F si y solo si una de las siguientes condiciones se cumple:

1. $p < t_i, q < t_j$ y $(p, i) \rightarrow (q, j)$ en F' .
2. $p < t_i, q \geq t_j$ y $(p, i) \rightarrow (t_j, j)$ en F' .
3. $p \geq t_i, q < t_j$ y $(t_i, i) \rightarrow (q, j)$ en F' .
4. $p \geq t_i, q \geq t_j$ y $(t_i, i) \rightarrow (t_j, j)$ en F' .

Sean $u = (p, i)$ y $v = (q, j)$ un par de vértices distintos en F . Si $i \neq j$, entonces es claro que $\text{dist}_F(u, v) \leq \text{diám}(F')$ (podemos usar modificaciones obvias de las correspondientes trayectorias en F'). Tenemos el mismo resultado si $i = j$ pero $p < t_i$ o $q < t_j$. Supongamos que $i = j$, $p \geq t_i$ y $q \geq t_j$. Si i pertenece a un ciclo en H de longitud dos, entonces usando el ciclo C_u concluimos que $\text{dist}_F(u, v) \leq m$. Si i no pertenece a un ciclo de longitud dos en H , entonces u, v dominan y son dominados por los mismos vértices y como $\text{dist}_F((1, i), (2, i)) \leq \text{diám}(F)$, tenemos $\text{dist}((p, i), (q, i)) \leq \text{diám}(F)$. \square

Demostración del teorema 6.2.3. Probaremos que existe una orientación D' de D tal que $\text{diám}(D') \leq \text{diám}(H) + 2$. Si $\text{diám}(H) = 1$ entonces D es un torneo multipartito y así por el teorema 6.2.2 se sigue que $\text{diám}(H) = 1 < 2 \leq \text{diám}_{\min}(D) \leq \text{diám}(H) + 2 = 3$. Por consiguiente asumiremos que $\text{diám}(H) \geq 2$.

Definimos una orientación F' de $H(t_1, t_2, \dots, t_n)$, donde cada $t_i = 2$, como sigue:

$$(1, i) \rightarrow (1, j) \rightarrow (2, i) \rightarrow (2, j) \rightarrow (1, i) \quad \text{si y solo si } i < j. \quad (6.1)$$

Sean $u = (p, i)$ y $v = (q, j)$ un par de vértices distintos en F' . Mostraremos que $\text{dist}_{F'}(u, v) \leq \text{diám}(H) + 2$. Supongamos que $ik_1k_2 \cdots k_sj$ es una trayectoria de longitud $s + 1 = \text{dist}_H(i, j)$ en H . Entonces la trayectoria $Q = (p, i)(k_1^*, k_1)(k_2^*, k_2) \cdots (k_s^*, k_s)(j^*, j)$, donde $x^* = 1$ o 2 , es de longitud $\text{dist}_H(i, j)$ en F' . Si $j^* = q$, entonces la última desigualdad se sigue. En caso contrario; es decir, $j^* \neq q$, la trayectoria $Q(3 - k_s^*, k_s)(q, j)$ es de longitud $\text{dist}_H(i, j) + 2$ en F' . Así, $\text{dist}_{F'}(u, v) \leq \text{diám}(H) + 2$. Por lo tanto, $\text{diám}(F') \leq \text{diám}(H)$. Por 6.1, cada vértice (p, i) de F' , tal que i se encuentra en un ciclo en H de longitud dos, perteneciendo a un ciclo de longitud cuatro. Ahora este teorema se sigue del lema 6.2.4. \square

Terminamos esta subsección con la siguiente conjetura [24]. Es desconocido si la conjetura es válida incluso para gráficas no dirigidas [38]. La conjetura es correcta para $H = \overleftrightarrow{T}$ donde T es un árbol, y algunas otras clases de digráficas.

Conjetura 6.2.5. Sean H una digráfica fuerte de orden $n \geq 3$ y $D = H(s_1, s_2, \dots, s_n)$ con $s_i \geq 2$, $i \in [n]$ de diámetro al menos tres. Entonces $\text{diám}_{\min}(D) \leq \text{diám}(H) + 1$.

6.3. Producto cartesiano de gráficas

El **producto cartesiano** de una familia de gráficas no dirigidas G_1, G_2, \dots, G_n , denotado por $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ o $\prod_{i=1}^n G_i$, donde $n \geq 2$, es la gráfica G con $V(G) = V(G_1) \times V(G_2) \times \dots \times V(G_n) = \{(w_1, w_2, \dots, w_n) : w_i \in V(G_i), i \in [n]\}$ y un par de vértices (u_1, u_2, \dots, u_n) y (w_1, w_2, \dots, w_n) de G son adyacentes si y solo si existe un $r \in [n]$ tal que $(u_r, w_r) \in E(G_r)$ y $u_i = w_i$ para toda $i \in [n] \setminus \{r\}$ (véase figura 6.11). Sean P_n (C_n, K_n) la trayectoria (ciclo, gráfica completa, no dirigida) de orden n y T_n nombrado árbol de orden n . Roberts y Xu [53, 54, 55, 56], Koh y Tan [30] evaluaron la cantidad $\rho(P_k, P_s)$. (Hay que señalar que Robert y Xu [53, 54, 55, 56] consideraron funciones objetivas además de ρ para orientaciones de productos Cartesianos de trayectorias no dirigidas). Koh y Tan [35] probaron que la mayoría de estos resultados pueden ser extendidos como sigue.

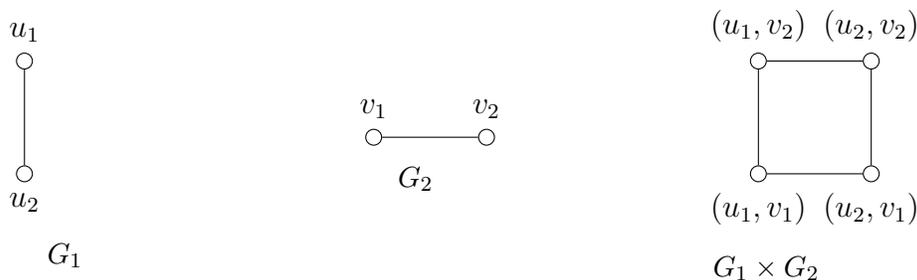


Figura 6.11: El producto cartesiano de dos gráficas

Teorema 6.3.1. *Para $n \geq 2$, $k_1 \geq 3$, $k_2 \geq 6$ y $(K_1, k_2) \neq (3, 6)$, tenemos que $\rho(P_{k_1} \times P_{k_2} \times \dots \times P_{k_n}) = 0$.*

Esto, en particular, generaliza el resultado principal de McCanna [43] en n -cubos; es decir, las gráficas $\prod_{i=1}^n P_2$. Koh y Tay [34] obtuvieron valores de $q(r, k) = \rho(C_{2r} \times P_k)$ para $r, k \geq 2$: $q(r, k) = 0$ si $K \geq 4$, $q(r, k) = 2$ si $k = 2$ y r es par $q(r, k) = 1$ en los casos restantes.

Ellos también evaluaron $\rho(K_m \times P_k)$, $\rho(K_m \times C_{2r+1})$ y $\rho(K_m \times K_n)$ [36], $\rho(K_m \times C_{2r})$ [37] y $\rho(T_m \times T_n)$ [39]. König, Krumme y Lazard estudiaron el producto Cartesiano de ciclos. Ellos demostraron el siguiente resultado.

Teorema 6.3.2. *Sean p, q enteros con $p, q \geq 6$. Si al menos uno de esos dos enteros es par, entonces $\rho(C_p \times C_q) = 0$. Si ambos p y q son impares, entonces $\rho(C_p \times C_q) = 1$.*

König, Krumme y Lazard [40] evaluaron $\rho(C_p \times C_q)$ en la mayoría de los casos cuando el mínimo de p y q es más pequeño que 6. Ellos también extendieron la parte de $\rho(C_p \times C_q) = 0$ del teorema 6.3.2 a el producto Cartesiano de tres o más ciclos. Algunos de los resultados anteriores fueron entendidos por Koh y Tay [35], donde el siguiente teorema fue demostrado.

Teorema 6.3.3. *Para $m \geq 2$, $r \geq 0$, $k_1 \geq 3, k_2 \geq 6$ y $(k_1, k_2) \neq (3, 6)$, tenemos que $\rho(\prod_{i=1}^m P_{k_i} \times \prod_{i=1}^r C_{n_i}) = 0$.*

6.4. Gráficas con cuerdas

Una gráfica no dirigida G es una **gráfica con cuerdas** si cada uno de los ciclos C de G de longitud al menos 4 tienen una cuerda; es decir, una arista que conecta dos vértices de C que no son vecinos en C . Fomin, Matamala y Rapaport [13] demostraron lo siguiente.

Teorema 6.4.1. *Toda gráfica con cuerdas G sin puentes tiene una orientación de diámetro a lo más $2 \text{ diám}(G) + 1$.*

Podemos obtener mejores cotas de $\text{diám}_{\min}(G)$ para familias particulares de gráficas con cuerdas. Una gráfica G con $V(G) = \{v_i : i \in [n]\}$ es llamada una **gráfica de intervalos** si existe un conjunto $\{J_i : i \in [n]\}$ de intervalos en la recta real tal que (v_i, v_j) es una arista si y solo si $J_i \cap J_j \neq \emptyset$. Si el conjunto correspondientes de intervalos $\{J_i : i \in [n]\}$ puede elegirse tal que ningún intervalo está contenido en otro, entonces G se llama **gráfica de intervalos propia**. La clase de gráficas de intervalos es de gran importancia para la teoría de gráficas y sus aplicaciones. Es sencillo ver que cada gráfica de intervalos es una gráfica con cuerdas, en la figura 6.12 podemos ver a G una gráfica con cuerdas y H una gráfica de intervalos.

Mejorando los resultados de Fomin, Matamala, Prisner y Papaport [12], Huang y Ye [28] probaron lo siguiente:

Teorema 6.4.2. *Para toda gráfica conexa con intervalos y sin puentes G , se tiene que $\text{diám}_{\min}(G) \leq \lceil \frac{3}{2} \text{diám}(G) \rceil + 1$. Si G es una gráfica de intervalos propia 2-conexa, entonces $\text{diám}_{\min}(G) \leq \lceil \frac{5}{4} \text{diám}(G) \rceil + k$, donde $k = 0$ si $\text{diám}(G) \leq 3$ y $k = 1$, en otro caso.*

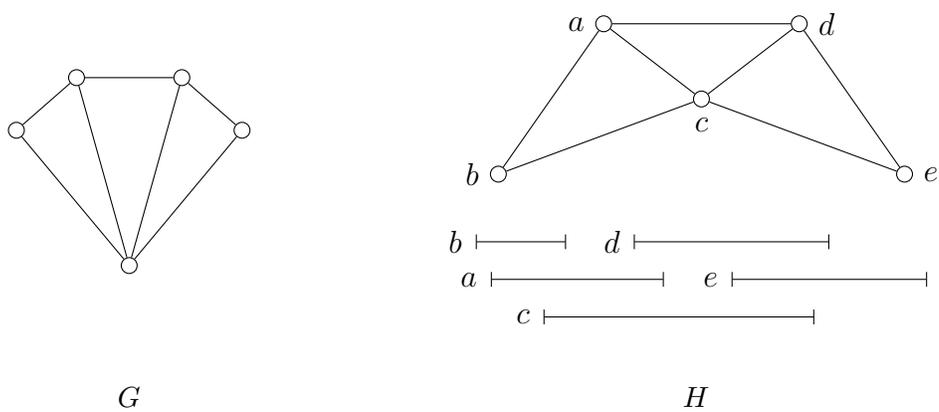


Figura 6.12: Una gráfica con cuerdas G y una gráfica de intervalos H

Capítulo 7

Reyes en digráficas

Sea D una digráfica y r , un entero positivo. Un vértice $w \in V(D)$ es llamado un r -rey si $\text{dist}(w, x) \leq r$ para cada vértice x en $V(D)$. Especialmente, un 2-rey en D es llamado un rey en D . Mientras que un vértice es un 2-siervo si $\text{dist}(V(D), x) \leq 2$ (véase figura 7.1).

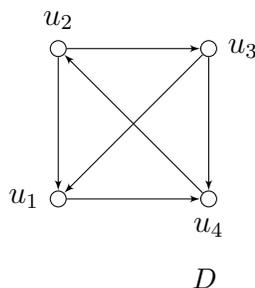


Figura 7.1: Una digráfica D con tres reyes $\{u_2, u_3, u_4\}$ y un siervo u_1 , notemos que u_2 y u_4 pueden ser considerados siervos o reyes

Denotaremos como $K_r(D)$ el conjunto de todos los r -reyes en D . Por definición todo r -rey en D es también un $(r + 1)$ -rey en D ; es decir, $K_r(D) \subseteq K_{r+1}(D)$.

En esta sección, estudiaremos r -reyes en torneos, en digráficas semicompletas multipartitas y en otras generalizaciones de torneos. Haremos énfasis en digráficas semicompletas multipartitas con 4-reyes. La noción de un 2-rey y algunos resultados en 2-reyes en torneos serán generalizados en la siguiente sección.

7.1. 2-reyes en torneos

Estudiando el dominio en ciertas sociedades animales, el sociólogo matemático Landau observó que todo torneo tenía un 2-rey. De hecho, en todo torneo T , cada vértice x de máximo ex grado es un 2-rey. En efecto, para un vértice $y \in T$, $y \neq x$, $x \rightarrow y$ o existe un ex vecino de x el cual es un in vecino de y . En ambos casos, $\text{dist}(x, y) \leq 2$. Observemos que si un torneo T tiene un vértice de in grado cero, este vértice es el único r -rey en T para todo entero positivo r . Moon [45] demostró lo siguiente.

Teorema 7.1.1. *Todo torneo sin vértices de in grado cero tiene al menos tres 2-reyes.*

Demostración. Primero veamos que todo torneo tiene un 2-rey. Sea T un torneo y $u \in V(T)$ con ex grado máximo, supongamos que T no tiene 2-reyes, como u no es un 2-rey entonces existe un $v \in V(T)$ tal que $\text{dist}(u, v) \geq 3$, así todos los ex vecinos de u son ex vecinos de v , pues en caso contrario la distancia de u a v sería uno. Entonces $d^+(v) \geq d^+(u) + 1$, que contradice la elección de u , por lo tanto T tiene al menos un 2-rey.

Supongamos que T tiene exactamente un 2-rey, u , tomemos $w \in N^-(u)$ con ex grado máximo en $N^-(u)$. Existe $v \in V(T)$ tal que está a distancia mayor a dos de w . Todos los ex vecinos de w son ex vecinos de v , entonces $v \rightarrow u$ y $v \rightarrow w$ por lo tanto $d^+(v) \geq d^+(w) + 1$, contradicción a la elección de w . Por lo tanto T tiene al menos dos 2-reyes.

Por último supongamos que T tiene solamente dos 2-reyes, u y w , tomemos $y \in N^-(w)$ con ex grado máximo, existe $v \in V(T)$ tal que $\text{dist}(y, v) \geq 3$ todos los ex vecinos de y son ex vecinos de v , $v \rightarrow u$ si no v estaría a distancia dos de y , además $v \rightarrow y$ por tanto $d^+(v) \geq d^+(y) + 2$, que contradice la elección de y . Por lo tanto podemos concluir que todo torneo T tiene al menos tres 2-reyes. \square

Los siguientes ejemplos muestran que la cota de Moon en el número de 2-reyes es justa. Sea T_n un torneo con conjunto de vértices $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ y conjunto de flechas $A = X \cup Y \cup \{(x_{n-2}, x_n)\}$, donde $X = \{(x_i, x_{i+1}) : i \in [n-1]\}$ y $Y = \{(x_j, x_i) : 1 \leq i < j-1 \leq n-1, (j, i) \neq (n, n-2)\}$. Es fácil verificar que, para $n \geq 5$, x_{n-3} , x_{n-2} y x_{n-1} son los únicos 2-reyes en T_n . Véase la figura 7.2

Como el inverso de un torneo es un torneo, los dos resultados anteriores pueden ser reformulados para 2-siervos. Los conceptos de 2-reyes y 2-siervos

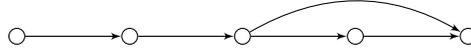


Figura 7.2: Un ejemplo de un torneo con exactamente tres 2-reyes. Las flechas que no son mostradas están orientadas de derecha a izquierda.

en torneos fueron extremadamente investigados por matemáticos y científicos políticos (los últimos han estudiado las llamadas preferencias mayoritarias).

7.2. Reyes en digráficas semicompletas multipartitas

No resulta difícil ver que la proposición 1.0.5 implica que un torneo multipartito T tiene un ex radio finito si y solo si T contiene a lo más un vértice de in grado cero. Más aún, la siguiente afirmación se cumple. Si un torneo tiene ex radio finito, el ex radio es a lo más cuatro; es decir, todo torneo multipartito con a lo más un vértice de in grado cero contiene un 4-rey. Este resultado fue demostrado independientemente por Gutin [21] y por Petrović y Thomassen [49]. Esta cota es justa y existe una infinidad de torneos p -partitos sin 3-reyes para toda $p \geq 2$ [21]. En efecto, torneos bipartitos $\vec{C}_4[\overline{K}_q, \overline{K}_q, \overline{K}_q, \overline{K}_q]$ para $q \geq 2$ no tienen 3-reyes ($\text{dist}(u, v) = 4$ para vértices distintos u, v de la misma \overline{K}_q). Es claro que todo torneo multipartito, cuyo componente inicial fuerte es algún $\vec{C}_4[\overline{K}_q, \overline{K}_q, \overline{K}_q, \overline{K}_q]$ ($q \geq 2$), tampoco tiene 3-reyes.

Así, los 4-reyes son de particular interés en torneos multipartitos. En una serie de artículos (por ejemplo, Gutin [23], Koh y Tan [31, 32, 33], Petrović [48] y la investigación de Reid [51]) se estudia el número mínimo de 4-reyes en torneos multipartitos que no contienen vértices de in grado cero. (Si un torneo multipartito contiene exactamente un vértice de in grado cero entonces este contiene exactamente un 4-rey, así este caso es trivial).

Teorema 7.2.1. *Sea T un torneo k -partito sin vértices de in grado cero. Si $k = 2$, T contiene al menos cuatro 4-reyes; contiene exactamente cuatro 4-reyes si su componente inicial fuerte consiste de un ciclo de longitud cuatro. Si $k \geq 3$, T contiene al menos tres 4-reyes; tiene exactamente tres 4-reyes si su componente inicial fuerte consiste de un ciclo de longitud tres.*

Demostración. Sea T un torneo sin vértices de in grado cero con partes U y W , sea $u \in V(T)$ con ex grado máximo, supongamos que está en U y

dividamos W en los conjuntos $N^+(u)$ y $N^-(u)$. Tenemos que $N^{+3}(u) \subseteq N^-(u)$, si fuesen el mismo conjunto entonces todo W estaría a distancia menor a cuatro de u . Veamos en U el conjunto $U \setminus N^{+2}[u]$, si existe un x en este conjunto que no esté a distancia menor que o igual a cuatro, entonces x domina a todos los ex vecinos de u y además domina a los $w \in N^{+3}(u)$, por tanto $d^+(x) \geq d^+(u)$, lo que contradice la elección de u , ahora si en $N^-(u)$ hay algún vértice y que está a distancia mayor a cuatro entonces y domina a $N^{+2}(u)$, como ningún vértice tiene in grado cero entonces existe algún $v \in U \setminus N^{+2}[u]$ que domina a y , v domina a la ex vecindad de u , si no y estaría a distancia tres de u , por tanto, $d^+(v) \geq d^+(u) + 1$, contradicción. Por lo tanto todos los vértices están a distancia menor o igual a cuatro de u ; es decir u es un 4-rey. Si aplicamos el mismo procedimiento a $v \in W$ con ex grado máximo y así u y v son 4-reyes.

Tomemos a u y a sus ex vecindades $N^+(u)$, $N^{+2}(u)$, $N^{+3}(u)$ y $N^{+4}(u)$. Sea $x \in N^{+3}$ con ex grado máximo, sabemos que x está en W entonces $x \rightarrow u$, si no entonces x sería ex vecino de u , así los vértices que pertenecen a $N^+(u)$, $N^{+2}(u)$, $N^{+3}(u)$ están a distancia menor a cuatro de x , supongamos que x no es un 4-rey, entonces existe un $y \in N^{+4}(u)$ no está a distancia cuatro de x , entonces $y \rightarrow x$, además y domina a todos los vértices en $N^+(u)$, si no entonces y estaría en $N^{+2}(u)$, así $d^+(u) \leq d^+(y) + 1$, que es una contradicción a la elección de u , así x es un 4-rey. Si hacemos un procedimiento análogo con las ex vecindades de v tendremos otro 4-rey. Por lo tanto T tiene al menos cuatro 4-reyes. \square

Este teorema puede ser considerado como una caracterización de torneos bipartitos (p -partitos, $p \geq 3$) con exactamente k 4-reyes para $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ (con $k \in \{1, 2, 3\}$). El siguiente teorema de Gutin y Yeo [26] va más allá con respecto a ambos números exactos de 4-reyes y la clases de digráficas bajo consideración.

Teorema 7.2.2. *Sea $D = (V(D), F(D))$ una digráfica semicompleta multipartita y sea k el número de 4-reyes en D . Entonces*

- $k = 1$ si y solo si D tiene exactamente un vértice de in grado cero.
- $k = 2, 3$ o 4 si y solo si la componente inicial fuerte de D tiene k vértices.
- $k = 5$ si y solo si la componente inicial fuerte Q de D tiene cinco vértices o Q contiene a lo más seis vértices y posee una trayectoria

$P = p_0p_1p_2p_3p_4$ tal que $\text{dist}(p_0, p_4) = 4$ y $(V \setminus V(P), \{p_1, p_2, p_3, p_4\}) = \emptyset$.

Para la demostración de este teorema primero veremos los siguientes lemas y el siguiente teorema.

Lema 7.2.3. *Sea $\{x\}, W_0, W_1, \dots, W_s$ conjuntos ajenos de vértices en una digráfica D . Sean $\text{dist}(x, W_0) = t$ y $W_{i+1} \subseteq N^+(W_i)$ para todo $i = 0, 1, \dots, s-1$. Entonces $\text{dist}(x, W_s) \leq t + s$.*

Demostración. Es suficiente demostrar que $\text{dist}(x, w) \leq t + s$ para todo $w \in W_s$. Claramente, existe $w_{s-1} \in W_{s-1}$ tal que $w_{s-1} \rightarrow w_s$. Análogamente, existen w_0, w_1, \dots, w_{s-2} tal que $w_0 \rightarrow w_1 \rightarrow \dots \rightarrow w_{s-1} \rightarrow w_s$. Por lo tanto, existe una (w_0, w_s) -trayectoria de longitud a lo más s . Entonces, $\text{dist}(w_0, w_s) \leq s$. Por lo tanto, $\text{dist}(x, w_s) \leq \text{dist}(x, w_0) + \text{dist}(w_0, w_s) \leq t + s$. \square

Lema 7.2.4. *Si $P = p_0p_1 \dots p_l$ es una trayectoria mínima desde p_0 a p_l en una digráfica semicompleta multipartita D , y $l \geq 3$, entonces existe una (p_l, p_0) -trayectoria de longitud a lo más 4 en $D\langle V(P) \rangle$.*

Demostración. Como $l \geq 3$ y P es una trayectoria mínima tenemos $(\{p_0, p_1\}, p_l) = \emptyset$. Si $p_l \rightarrow p_0$, hemos terminado, así que asumimos que p_l y p_0 pertenecen a el mismo conjunto de la partición de D . Esto implica que $p_l \rightarrow p_1$. Análogamente, $(p_0, \{p_2, p_3\}) = \emptyset$, lo cual implica que $p_l p_1 p_2 p_3 p_0$ o $p_l p_1 p_2 p_0$ es una (p_l, p_0) -trayectoria de longitud a lo más 4 en $D\langle V(P) \rangle$. \square

Teorema 7.2.5. *Si $D = (V(D), F(D))$ es una digráfica fuerte semicompleta, con al menos seis vértices, entonces hay al menos cinco 4-reyes en D . Más aún, si contiene exactamente cinco 4-reyes en D , entonces existe un trayectoria $P = p_0p_1p_2p_3p_4$, tal que $\text{dist}(p_0, p_4) = 4$, y $(V \setminus V(P), \{p_1, p_2, p_3, p_4\}) = \emptyset$.*

Demostración. Sean X el conjunto de los 4-reyes en D y $Y = V(D) \setminus X$. Claramente nuestro teorema es cierto si $Y = \emptyset$, entonces supongamos que Y es no vacío; sea $w \in Y$ arbitrario. Ahora definimos W_i como sigue: $W_i = \{v \in V(D) : \text{dist}(w, v) = i\}$, para todo $i = 0, 1, \dots, m$, donde $m = \text{dist}(w, V(D))$. Como $w \in Y$, $m \geq 5$. Por la definición de los conjuntos W_i podemos observar que para todo $2 \leq i \leq m$

$$(W_0 \cup w_1 \cup \dots \cup W_{i-2}, W_i) = \emptyset. \quad (7.1)$$

Demostraremos las siguientes afirmaciones:

Afirmación A: **Para todo** $z \in W_i$, **con** $i \geq 3$, **tenemos** $\text{dist}(z, W_0 \cup W_1 \cup \dots \cup W_i) \leq 4$.

Como una trayectoria mínima desde w a z es de longitud al menos tres, por el lema 7.2.4, $\text{dist}(z, w) \leq 4$. Sean $q \in W_1 \cup \dots \cup W_i \setminus \{z\}$ y $r_0 r_1 \dots r_j$ una (r_w, q) -trayectoria mínima en D . Si $1 \leq j \leq 3$, entonces, por 7.1 y el hecho de que r_0 o r_1 es adyacente a z (pues D es multipartita semi-completa), concluimos que z domina a al menos alguno de los vértices r_0, r_1 . Entonces, $z r_0 r_1 \dots r_j$ o $z r_1 \dots r_j$ es una (z, q) -trayectoria en D de longitud al menos cuatro. Si $j \geq 4$ entonces, como z domina al menos a alguno de los vértices r_{j-3}, r_{j-2} (por 7.1), $z r_{j-2} r_{j-1} r_j$ o $z r_{j-2} r_{j-1} r_j$ es una (z, q) -trayectoria en D de longitud a lo más cuatro.

Afirmación B: **Si** $y \in Y \cap W_i$, $0 \leq i \leq m - 1$, **entonces (i) o (ii) se cumple:**

- i Para todo $z \in W_{i+1}$ existe una (w, z) -trayectoria en $D \setminus \{y\}$.
- ii $\text{dist}(y, W_{i+1}) \leq 3$.

Supongamos que no se cumplen (i) ni (ii). Esto implica que existen vértices z_1 y z_2 en W_{i+1} tales que no existe una (w, z_1) -trayectoria en $D \setminus \{y\}$ y no hay una (y, z_2) -trayectoria de longitud a lo más tres en D . Sean $P = p_0 p_1 \dots p_{i+1}$ una trayectoria mínima de w a z_1 en D y $R = (r_0, r_1, \dots, r_{i+1})$ una trayectoria mínima de w a z_2 en D . Claramente $(y = p_i) \rightarrow z_1$ y $y \rightarrow z_2$, lo cual implica que $z_1 \neq z_2$. Si z_1 y z_2 pertenecen a la misma parte, entonces r_i es adyacente a z_1 . Si $r_i \rightarrow z_1$, entonces $r_0 r_1 \dots r_i z$ es una (w, z_1) -trayectoria en $D \setminus \{y\}$, una contradicción. Si $z_1 \rightarrow r_i$ entonces $y z_1 r_i z_2$ es una (y, z_2) -trayectoria de longitud tres en D , una contradicción. Por lo tanto z_1 y z_2 pertenecen a distintas partes. Si $z_1 \rightarrow z_2$, entonces $y z_1 z_2$ es una (y, z_2) -trayectoria de longitud dos en D y si $z_2 \rightarrow z_1$, entonces $r_0 r_1 \dots r_{i+1} z_1$ es una (w, z_1) -trayectoria en $D \setminus \{y\}$, una contradicción.

Ahora demostraremos el teorema por inducción. Si $|V(D)| = 6$ entonces todos los vértices de D son cuatro reyes o existe una trayectoria $p_0 p_1 p_2 p_3 p_4 p_5$ en D , tal que $\text{dist}(p_0, p_5) = 5$. En ambos casos el teorema se cumple. En efecto, en el segundo caso, observemos que $p_0 \in Y$ y, así, $\{p_3, p_4, p_5\} \subseteq X$, por la afirmación A. Claramente $\{p_1, p_2\} \subseteq X$ pues $p_0 \in N^+(\{p_2, p_3\})$.

Supongamos que $|V(D)| \geq 7$ y que el teorema se cumple para todas las digráficas fuertes semicompletas multipartitas (con al menos seis vértices). Ahora consideramos los siguientes dos casos.

Caso 1. Existe un vértice $y \in Y \cap W_i$, $0 \leq i \leq m - 1$, tal que (i) de la afirmación B se cumple.

Primero mostremos que, para todo $q \in V(D) \setminus \{y\}$, existe una (w, q) -trayectoria en $V(D) \setminus \{y\}$. Sean $q \in W_j$ arbitrario y $P = p_0 p_1 \cdots p_j$ una trayectoria mínima de w a q en D . Si $j \leq i$ entonces claramente $y \notin V(P)$, así terminamos. Si $j \geq i + 1$ entonces (como (i) se cumple) existe una (w, p_{i+1}) -trayectoria en $V(D) \setminus \{y\}$, que junto con $p_{i+2} \cdots p_j$ forman una (w, p_j) -trayectoria en $V(D) \setminus \{y\}$.

Sean $u \in W_m$ arbitrario y $R = r_0 r_1 \cdots r_l$ una trayectoria mínima desde w a u en $V(D) \setminus \{y\}$. Claramente $l \geq m \geq 5$. Así, por el lema 7.2.4, concluimos que $D\langle V(R) \rangle$ es fuerte.

Sea Q_1, Q_2, \dots, Q_s (con $s \geq 1$) un ordenamiento acíclico de componentes fuertes de $V(D) \setminus \{y\}$. Como $\text{dist}_{V(D) \setminus \{y\}}(w, V(D) \setminus \{y\}) < \infty$, el vértice w pertenece a la componente inicial de $V(D) \setminus \{y\}$. Ya que $D\langle V(R) \rangle$ es fuerte, esta componente tiene más de un vértice. Como $V(D) \setminus \{y\}$ es semicompleta multipartita, podemos concluir que Q_1 es la única componente inicial fuerte de $V(D) \setminus \{y\}$. Ya que $V(R) \subseteq V(Q_1)$, Q_1 tiene al menos seis vértices.

Sean q un 4-rey en Q_1 , y $r \in V(D) \setminus \{q\}$ arbitrario. Si $r \in Q_1$ entonces claramente existe una (q, r) -trayectoria de longitud a lo más 4 en D . Si $r \in Q_t$, $t \geq 2$, entonces $q \rightarrow r$ o existe algún vértice $u \in Q_1$ tal que $q \rightarrow u \rightarrow r$. Esto implica que existe la (q, r) -trayectoria de longitud a lo más dos en D . Supongamos que $r = y$ y $\text{dist}(q, y) > 4$. Se sigue de los argumentos anteriores que $\text{dist}(q, V(D) \setminus \{y\}) \leq 4$. Por lo tanto, $\text{dist}(q, y) = 5$. Sea $W_i^{(q)} = \{v \in V(D) : \text{dist}(q, v) = i\}$, $i = 0, 1, \dots, 5$. Como $W_5^{(q)} = y$, por la afirmación A, y es un 4-rey, una contradicción. Por lo tanto todo 4-rey en $D\langle Q_1 \rangle$ es también un 4-rey en D .

Usando la hipótesis de inducción para $D\langle Q_1 \rangle$, obtenemos que hay al menos cinco 4-reyes en D . Si en D hay exactamente cinco 4-reyes, entonces existen precisamente con 4-reyes en $D\langle Q_1 \rangle$ y, por lo tanto, existe una trayectoria $P = p_0 p_1 p_2 p_3 p_4$ en $D\langle Q_1 \rangle$, la cual es una posible trayectoria mínima de P_0 a p_4 en $D\langle Q_1 \rangle$ y $(V(Q_1 \setminus V(P)), \{p_1, p_2, p_3, p_4\}) = \emptyset$ y así terminamos, por tanto asumimos que hay una flecha (y, p_k) , donde $1 \leq k \leq 4$. Mostraremos que y es otro 4-rey en D y, por lo tanto, obtenemos una contradicción a nuestra suposición de la existencia de la flecha (y, p_k) . Si $V(D) \setminus \{y\}$ no es fuerte, como

$\text{dist}(p_k, V(d) \setminus (V(Q_1) \cup \{y\})) \leq 2$ tenemos que $\text{dist}(y, V(D) \setminus V(Q_1)) \leq 3$. Sea $x \in V(Q_1) \setminus V(P)$. Si $k < 4$, entonces $p_k \rightarrow x$ o $p_{k+1} \rightarrow x$ (o ambos). Por lo tanto, $\text{dist}(y, x) \leq 3$. Sea $k = 4$. Si x y p_4 son adyacentes, entonces $y \rightarrow p_4 \rightarrow x$. Si x y p_4 no son adyacentes, entonces $y \rightarrow p_4 \rightarrow p_1 \rightarrow x$ o $y \rightarrow p_4 \rightarrow p_2 \rightarrow x$ (o ambos). Por lo tanto $\text{dist}(y, x) \leq 3$.

Para demostrar que y es un 4-rey, es suficiente demostrar que $\text{dist}(y, p_j) \leq 4$ para todo $j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Para $j > k$, $\text{dist}(y, p_j) \leq 4$. Para $0 \leq j < k < 4$, p_j es dominado por p_k o p_{k+1} ; así, $\text{dist}(y, p_j) \leq 3$. Sea $k = 4$. Si $p_4 \rightarrow p_0$, entonces $\text{dist}(y, \{p_0, p_1, p_2, p_4\}) \leq 4$. Como p_4 domina a p_1 o p_2 (o ambos), $\text{dist}(y, \{p_1, p_2, p_3, p_4\}) \leq 4$. Ya que Q_1 es fuerte y $|V(Q_1)| \geq 6$, existe una flecha (v, p_0) en D , donde $v \in V(Q_1) \setminus V(P)$. Como p_4 y p_0 no son adyacentes, $p_4 \rightarrow v$. Así, $\text{dist}(y, p_0) \leq 2$.

Caso 2. Para todo $i = 0, 1, \dots, m-1$ y todo $y \in Y \cap W_i$, (ii) de afirmación B se cumple.

Por la afirmación A, tenemos que $W_m \subseteq X$. Con la afirmación A y (ii) de la afirmación B, obtenemos que $W_{m-1} \subseteq X$. Por la afirmación A, $\text{dist}(W_{m-2}, W_0 \cup W_1 \cup \dots \cup W_{m-2}) \leq 4$. De (ii) en la afirmación B, $\text{dist}(W_{m-2}, W_{m-1}) \leq 3$. Ya que $W_m \subseteq N^+(W_{m-1})$, por el lema 7.2.3, $\text{dist}(W_{m-2}, W_m) \leq 4$. Así, $W_{m-2} \subseteq X$.

Si $|X| \geq 6$, terminamos. Por lo tanto, supongamos que $|X| \leq 5$. Sin embargo, esto implica que al menos uno de los conjuntos W_{m-2}, W_{m-1}, W_m es un conjunto unitario.

Sea $P = p_0 p_1 \dots p_m$ una trayectoria de w a un vértice $p_m \in W_n$. Claramente p_{m-3} tiene una trayectoria de longitud tres a todo vértice en W_m , ya que $|W_{m-2}| = 1$ o $|W_m| = 1$. Como en lo anterior concluimos por (ii) de la afirmación B y el lema 7.2.3, que p_{m-3} tiene una trayectoria de longitud a lo más tres a todo vértice de W_{m-2} y una trayectoria de longitud a lo más cuatro a todo vértice de W_{m-1} . Por la afirmación A, $\text{dist}(p_{m-3}, W_0 \cup W_1 \cup \dots \cup W_{m-3}) \leq 4$, por lo tanto, $p_{m-3} \in X$.

Por lo tanto, al menos dos de los conjuntos W_{m-1}, W_{m-1} y W_m son unitarios. Al igual que antes observamos que p_{m-4} tiene una trayectoria de longitud tres a cada vértice de W_{m-1} y una trayectoria de longitud cuatro a todo vértice de W_m . Más aún tiene una trayectoria de longitud a lo más tres a todo vértice de W_{m-3} y una trayectoria de longitud a lo más cuatro a cada vértice de W_{m-2} (por (ii) en la afirmación B y el lema 7.2.3). Debido a la afirmación A, $\text{dist}(p_{m-4}, W_0 \cup W_1 \cup \dots \cup W_{m-4}) \leq 4$. Por lo tanto $p_{m-4} \in X$.

Por consiguiente $X = \{p_{m-4}, p_{m-3}, p_{m-2}, p_{m-1}, p_m\}$ (como supusimos que $|X| \leq 5$), y $W_m = \{p_m\}$, $W_{m-1} = \{p_{m-1}\}$ y $W_{m-2} = \{p_{m-2}\}$. Ahora es

suficiente probar que $V \setminus X, \{p_{m-3}, p_{m-2}, p_{m-1}, p_m\} = \emptyset$. Supongamos que esto no es verdad. Entonces, existe un vértice $q \in V(D) \setminus X$ el cual domina a un vértice en el conjunto $\{p_{m-3}, p_{m-2}, p_{m-1}, p_m\}$. Claramente existen solo las siguientes tres posibilidades: (a) $q \in W_{m-3} \setminus \{p_{m-3}\}$ y $q \rightarrow p_{m-2}$; (b) $q \in W_{m-3} \setminus \{p_{m-3}\}$ y $q \rightarrow p_{m-3}$; (c) $q \in W_{m-4} \setminus \{p_{m-4}\}$ y $q \rightarrow p_{m-3}$. En todos estos casos, $W_0 \cup W_1 \cup \dots \cup W_{m-3} \subseteq N^+(\{p_{m-1}, p_m\})$, y $\text{dist}(q, \{p_{m-1}, p_m\}) \leq 3$. Así por el lema 7.2.3, $\text{dist}(q, W_0 \cup W_1 \cup \dots \cup W_{m-3}) \leq 4$. Observemos que $\text{dist}(q, p_{m-2}) \leq 2$. Entonces, q es un 4-rey, una contradicción. \square

Demostración del teorema 7.2.2. Este teorema es una implicación del teorema anterior. Supongamos que $|V(D)| \geq 2$ (el caso de $|V(D)| = 1$ es trivial). Observemos que si la componente inicial fuerte Q de D tiene a lo más cinco vértices, entonces todo vértice en Q es un 4-rey y, claramente, no hay otro vértice en D que sea un 4-rey. Si $|V(D)| \geq 6$, entonces los 4-reyes de Q son 4-reyes en D y no hay ningún otro vértice en D que sea un 4-rey. \square

Hemos visto que un vértice de máximo ex grado en un torneo es un 2-rey. Es un poco más difícil demostrar que un vértice de máximo ex grado en un torneo bipartito es un 4-rey. Con 4-reyes en torneos k -partitos para $k \geq 3$, la situación es más complicada como veremos en el siguiente teorema de Goddard, Kubicki, Oellermann y Tian [19].

Teorema 7.2.6. *Sea T un torneo fuerte 3-partito de orden $n \geq 8$. Si v es un vértice de máximo ex grado en T , entonces $\text{dist}(v, V(T)) \leq \lceil n/2 \rceil$ y esta cota es justa.*

Demostración. Supongamos que u es un vértice cuya distancia desde v es un máximo. Sea $P = v_0 v_1 \dots v_l$ con $v_0 = v$ y $v_l = u$, una trayectoria mínima de v a u en T . Mostraremos que $l \leq \lceil n/2 \rceil$. Observemos que v_i no es adyacente a v_j , donde $j > i + 1$ para $0 \leq i < l - 1$; en caso contrario, T contiene una (v, u) -trayectoria mínima menor a P . Supongamos que X, Y y Z son las partes de T , y supongamos que $v_0 \in X$. Sea Y' y Z' los conjuntos de vértices de Y y Z , respectivamente, que son adyacentes desde v_0 pero que no contienen a v_1 (véase la figura 7.3). Entonces $d^+(v) = d^+(v_0) = |Y'| + |Z'| + 1$. Más aún, para $i \geq 3$ $v_i \in Z$ y v_i es adyacente a todos los vértices de Y' , o $v_i \in Z$ y v_i es adyacente a todos los vértices de Z' o $v_i \in X$ y v_i es adyacente a todos los vértices de $Y' \cup Z'$. Si $l \leq 4$, entonces el teorema se sigue. Supongamos entonces que $l \geq 5$. Entonces $v_i \notin X$ para $i \geq 3$. Para ver esto, supongamos que $v_i \in X$, donde $i \geq 3$ con i tan pequeño como

sea posible. Si $i < l$, entonces v_i es adyacente a v_{i+1} , v_1 y a cada vértice en $Y' \cup Z'$. Así, en cualquier caso $d^+(v_i) > d^+(v)$, lo cual no es posible. Entonces $v_i \in Y$ o $v_i \in Z$ para $i \geq 3$. Por lo tanto, $v_l \in Y$ o $v_l \in Z$, dicho lo anterior. Por tanto $v_{l-1} \in Z$. Observemos que todo vértice de $Y' \cup Z'$ y cada vértice de P excepto v_{l-2} y v_{l-1} es adyacente de al menos algún vértice entre v_{l-1} o v_l . Más aún, $v = v_0$ es adyacente a ambos v_{l-1} y v_l . Por tanto,

$$d^+(v_{l-1}) + d^+(v_l) \geq l + |Y'| + |Z'|.$$

Pero

$$2(|Y'| + |Z'| + 1) = 2d^+(v) \geq d^+(v_{l-1}) + d^+(v_l),$$

así que $|Y'| + |Z'| + 2 \geq l$. Como $n \geq |Y'| + |Z'| + l + 1$ se sigue que $n + 1 \geq 2l$ o equivalentemente $l \leq \lceil n/2 \rceil$.

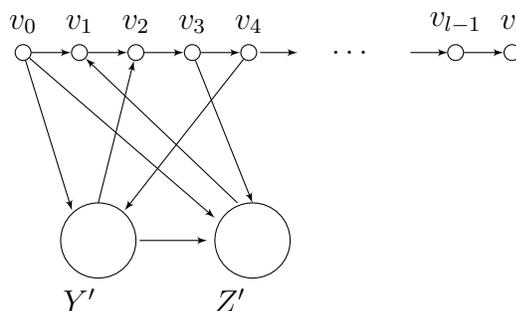


Figura 7.3

Mostraremos que para cada entero $p \geq 8$, existe un torneo fuertemente conexo 3-partito T que contiene un vértice de ex grado máximo y cuya distancia al resto de los vértices en T es $\lceil n/2 \rceil$. Sea $l = \lceil n/2 \rceil$ y suponemos que V es un conjunto de n vértices que contiene los vértices $v_0, v_1, v_2, \dots, v_l$. Partimos los vértices de $V \setminus \{v_0, v_1, \dots, v_l\}$ en dos conjuntos no vacíos Y' y Z' tales que $|Y'| = \lfloor n/4 \rfloor$. Definimos $X = \{v_0\}$, $Y = Y' \cup \{v_i : i \text{ es impar y } 1 \leq i \leq l\}$ y $Z = Z' \cup \{v_i : i \text{ es par y } 1 \leq i \leq l\}$. Sea T el torneo 3-partito que tiene partes

X , Y y Z , con conjunto de flechas:

$$\begin{aligned}
& \{(v_0, u) : u \in Y' \cup Z' \cup \{v_1\}\} \\
& \cup \{(v_i, v_0) : 2 \leq i \leq l\} \\
& \cup \{(v_i, v_{i+1}) : 1 \leq i \leq l-1\} \\
& \cup \{(y', v_2) : y' \in Y'\} \\
& \cup \{(z', v_1) : z' \in Z'\} \\
& \cup \{(y', z') : y' \in Y', z' \in Z'\} \\
& \cup \{(v_i, z') : i \text{ es impar y } 3 \leq i \leq l \text{ y } z' \in Z'\} \\
& \cup \{(v_i, y') : i \text{ es par, } 4 \leq i \leq l \text{ e } y' \in Y'\} \\
& \cup \{(v_i, v_j) : i \text{ es impar, } 3 \leq i \leq l \text{ y } j \text{ es par, } j \leq i-3\} \\
& \cup \{(v_i, v_j) : i \text{ es par, } 4 \leq i \leq l \text{ y } j \text{ es impar, } j \leq i-3\},
\end{aligned}$$

véase la figura 7.3. Entonces T es fuertemente conexa y v_0 es un vértice de ex grado máximo en T , que está a distancia $\lceil n/2 \rceil$ de los demás vértices de D . \square

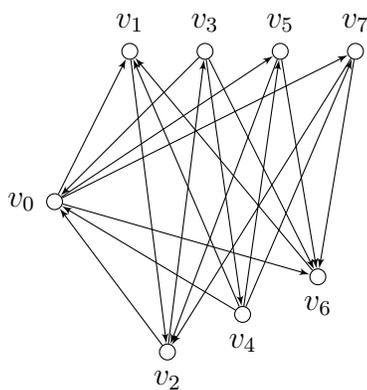


Figura 7.4: Un torneo fuerte 3-partito T de orden $n = 8$, con v_0 un vértice de ex grado máximo tal que $\text{dist}(v_0, V(T)) = \text{dist}(v_0, v_4) = 4 = \lceil n/2 \rceil$

En el resto de esta sección demostraremos el siguiente teorema usando un argumento adaptado de [26].

Teorema 7.2.7. *Toda digráfica semicompleta multipartita con a lo más un vértice de in grado cero tiene un 4-rey.*

Para la demostración necesitamos los siguientes lemas:

Lema 7.2.8. *Sea D una digráfica semicompleta multipartita y sea Q un componente inicial fuerte de D . Si Q contiene al menos dos vértices, entonces D tiene solamente un componente inicial fuerte. Todo vértice en Q , el cual sea 4-reyes en Q , es un 4-rey en D .*

Demostración. Supongamos que $|V(Q)| \geq 2$, pero D tiene otro componente inicial fuerte Q' . Como Q contiene vértices adyacentes, existe una flecha entre Q y Q' , una contradicción.

Sean x un 4-rey en Q y $y \in V(D) \setminus V(Q)$ arbitrario. Si x e y son adyacentes, entonces claramente $x \rightarrow y$. Supongamos que x e y no son adyacentes. Como Q es fuerte, este contiene un vértice z dominado por x . Claramente, $x \rightarrow z \rightarrow y$. Por lo tanto $\text{dist}(x, y) \leq 2$ y x es un 4-rey en D . \square

Lema 7.2.9. *Sean D una digráfica fuerte semicompleta multipartita y w un vértice en D . Para $i \geq 3$, si $N^{+i}(w) \neq \emptyset$, entonces $\text{dist}(N^{+i}(w), N^{+i}[w]) \leq 4$.*

Demostración. Sea $z \in N^{+i}(w)$ arbitrario. Como una trayectoria de w a z es de longitud $i \geq 3$, por el lema 7.2.4, $\text{dist}(z, w) \leq 4$. Sean $q \in N^{+i}[w] \setminus \{w, z\}$ y $r_0 r_1 \cdots r_j$ una (w, q) -trayectoria mínima en D . Si $1 \leq j \leq 3$, como z domina al menos uno de los vértices r_0, r_1 , entonces $z r_0 r_1 \cdots r_j$ o $z r_1 \cdots r_j$ es una (z, q) -trayectoria en D de longitud a lo más cuatro. Si $j \geq 4$, como z domina a lo más uno de los vértices r_{j-3}, r_{j-2} , entonces $z r_{j-3} r_{j-2} r_{j-1} r_j$ o $z r_{j-2} r_{j-1} r_j$ es una (z, q) -trayectoria en D de longitud a lo más cuatro. \square

Demostración del teorema 7.2.7. Sea D una digráfica semicompleta multipartita con a lo más un vértice de in grado cero. Si D tiene un vértice x de in grado cero, entonces claramente x es un 2-rey¹ en D . Así, suponemos que D no tiene vértices de in grado cero. Entonces, toda componente inicial Q de D tiene al menos dos vértices. Por el lema 7.2.8, Q es único y todo 4-rey en Q es un 4-rey en D . Solo queda demostrar que Q tiene un 4-rey. Si cada vértice en Q es un 4-rey, entonces ya terminamos. En caso contrario, sea w un vértice en Q el cual no es un 4-rey de Q . Entonces, $r = \text{dist}(w, V(Q)) \geq 5$. Por el

¹Es claro que x domina a todos los vértices que están en una parte distinta, además para todo u en la misma parte que x existe un z en una parte distinta que lo domina, así $x \rightarrow z \rightarrow u$, por tanto x es un 2-rey.

lema 7.2.9, $\text{dist}_Q(N_Q^{+i}(w), N_Q^{+r}[w]) \leq 4$; es decir, todo vértice en $N_Q^{+r}(w)$ es un 4-rey en Q (pues $N_Q^{+r}[w] = V(Q)$). \square

7.3. Reyes en generalización de los torneos

Bang-Jensen y Huang [3] consideraron reyes en digráficas cuasitransitivas. El teorema 7.3.3 muestra el resultado principal de [3], en este usaremos una modificación de nuestra definición de extensiones como sigue: Sea D una digráfica con n vértices y sean S_1, S_2, \dots, S_n distintas digráficas. La digráfica $D[S_1, S_2, \dots, S_n]$ es la digráfica obtenida de D al reemplazar el i -ésimo vértice de D por la digráfica S_i de tal manera que para toda flecha $i \rightarrow j$ en D , $D[S_1, \dots, S_n]$ contiene todas las posibles flechas desde $V(S_i)$ a $V(S_j)$.

Teorema 7.3.1. *Sea D una digráfica. Entonces D es una digráfica cuasi-transitiva si y solo si lo siguiente se cumple:*

- 1 *Si D no es fuerte, entonces existe un número natural $q \geq 2$, una digráfica transitiva Q con q vértices y digráficas cuasitransitivas W_1, W_2, \dots, W_q tales que $D = Q[W_1, W_2, \dots, W_q]$.*
- 2 *Si D es fuerte, entonces existe un número natural $q \geq 2$, una digráfica fuerte semicompleta Q con q vértices y digráficas cuasitransitivas W_1, W_2, \dots, W_q , donde cada W_i es unitario o una digráfica no fuerte cuasitransitiva, tal que $D = Q[W_1, W_2, \dots, W_q]$. Más aún, si Q tiene un ciclo de longitud dos inducido por vértices v_i y v_j , entonces la correspondientes digráficas W_i y W_j son triviales, es decir, cada una de ellas tiene solo un vértice.*

Lema 7.3.2. *Sea $D = Q[W_1, W_2, \dots, W_q]$ una digráfica fuerte cuasitransitiva. Para todo $i = 1, 2, \dots, q$, $\text{dist}(x, y) \leq 3$ para cada par de vértices $x, y \in W_i$. Más aún, si W_i es no trivial, entonces existe $x, y \in W_i$ tal que $\text{dist}(x, y) = 3$.*

Teorema 7.3.3. *Sea D una digráfica cuasi-transitiva. Entonces tenemos*

- (1) *D tiene un 3-rey si y solo si este tiene ex radio finito.*
- (2) *Si D tiene un 3-rey, entonces lo siguiente se cumple:*
 - (a) *Todo vértice en D de máximo ex grado es un 3-rey.*

- (b) Si D no tiene vértices de in grado cero, entonces D tiene al menos dos 3-reyes.
- (c) Si el único componente inicial fuerte de D contiene al menos tres vértices, entonces D tiene al menos tres 3-reyes.

Demostración. Primero demostremos (1). Supongamos que D tiene un ex radio finito, entonces por teorema 1.0.5 tenemos que D tiene una única componente inicial fuerte D_1 , tomemos $x \in D_1$ con ex radio máximo y supongamos que no es un 3-rey, por tanto existe $y \in V(D)$ tal que $\text{dist}(x, y) \geq 4$, tomemos una xy -trayectoria mínima $v_0v_1 \cdots v_p$, con $v_0 = x$ y $v_p = y$, y consideremos los siguientes casos. Si y no está en la componente inicial, sea v_i el primer vértice de la trayectoria que no está en la componente inicial, entonces $v_{i-1} \rightarrow v_i \rightarrow v_i + i$ y así $v_{i+1} \rightarrow v_{i-1}$, en caso contrario habría una trayectoria de longitud menor, por tanto v_{i+1} pertenece a la componente inicial, lo cual es una contradicción. Si y pertenece a la componente inicial. Por el teorema 6.1.1 sabemos que $y \rightarrow x$ y ya que D es una digráfica cuasitransitiva entonces y domina a la ex vecindad de x , de lo contrario existiría una trayectoria de menor longitud, por lo tanto $d^+(y) \geq d^+(x) + 1$ lo cual contradice la elección de x . Así concluimos que x es un 3-rey.

Una condición necesaria para la existencia de un k -rey, en una digráfica D es que D tenga un vértice el cual pueda alcanzar a todos los demás vértices por una trayectoria. Esto es equivalente a decir que D debe de tener una ex ramificación. Recordemos que por el teorema 1.0.4 tenemos que si una digráfica contiene una ex ramificación entonces esta tiene una única componente fuerte. Por tanto supongamos que D tiene un 3-rey x , entonces x está en una única componente inicial y por el teorema 1.0.5 D tiene un ex radio finito. Por tanto (1) se cumple.

Para demostrar el inciso (a) de (2), tomemos x en D de ex grado máximo por el teorema 7.3.1 x debe pertenecer a la componente inicial fuerte de D y así asumimos que D es fuerte. Por el teorema 7.3.1 y el lema 7.3.2 $\text{dist}(x, y) = 3$ para todo no vecino de x . Supongamos ahora que algún in vecino y de x no puede ser alcanzado desde x por una trayectoria de longitud dos. Entonces y domina a toda la ex vecindad de x y a x , contradiciendo la elección de x . Por lo tanto x es un 3-rey.

Por último veamos la demostración de los incisos (b) y (c). Supongamos primero que D es fuerte. Entonces por el teorema 7.3.1, Q no tiene vértices de in grado cero y así tiene al menos dos 2-reyes y si Q no es solo un 2-ciclo, entonces este tiene al menos tres 2-reyes. La afirmación se sigue del lema 7.3.2

Si D no es fuerte, entonces la componente inicial (la cual debe de ser única ya que D tiene un 3-rey) es no trivial (pues D no tiene vértices de in grado cero), así por el resultado anterior podemos encontrar los deseados reyes. \square

En las siguientes familias de digráficas cuasitransitivas, toda digráfica tiene un 3-rey pero no un 2-rey: $\vec{C}_3[\overline{K}_{k_1}, \overline{K}_{k_2}, \overline{K}_{k_3}]$ para todo $k_1, k_2, k_3 \geq 2$.

En [49], Petrović y Thomassen obtuvieron lo siguiente.

Teorema 7.3.4. *Sea G una gráfica no dirigida cuyo complemento es la unión ajena de gráficas completas, trayectorias y ciclos. Entonces toda orientación de G con a lo más un vértice de in grado cero tiene un 6-rey.*

Demostración. Sean G una gráfica como se describe en el teorema y V_1, V_2, \dots, V_k los conjuntos de vértices de las gráficas completas, trayectorias y ciclos que están en el complemento de G . Sea D una orientación de G con a lo más un vértice de in grado cero y $v_i \in V_i$ un vértice de ex grado máximo entre los vértices que están en V_i . La subdigráfica generada por v_1, v_2, \dots, v_k es un torneo en D y por lo tanto tiene un 2-rey, digamos v_1 . Afirmamos que v_1 es un 6-rey en D .

Sea u cualquier vértice en D , digamos $u \in V_i$. Describiremos una trayectoria dirigida desde v_1 a u de longitud a lo más seis.

Primero D tiene una trayectoria dirigida P de longitud a lo más dos de v_1 a v_i . Si D tiene también una trayectoria de longitud a lo más dos desde v_i a u , si es que u es ex vecino de v_i o si hay una trayectoria de longitud dos de v_i a u , entonces terminamos. De otra manera u y v_i son dominados y dominan a los mismos vértices (porque el ex grado de u no es mayor al de v_i). Si $i \geq 2$, entonces el predecesor x de v_i en P domina a u . Reemplazando la flecha (x, v_i) de P por (x, u) resulta en una trayectoria de longitud a lo más dos desde v_1 a u .

Así, supongamos que $i = 1$ y que D no tiene una trayectoria dirigida de longitud de a lo más dos desde v_1 a u . Si v_1 y u no tienen in grado cero, entonces existe un vértice z que domina a u (y a v_1 pues si no u estaría a distancia dos de v_1), digamos que $z \in V_j$, $j \geq 2$. Si D tiene una trayectoria de longitud a lo más seis desde v_1 a u terminamos; de lo contrario por el caso anterior (donde $i \geq 2$) concluimos que T tiene una trayectoria mínima Q de longitud a lo más cuatro desde v_1 a z . Si Q tiene longitud a lo más tres, entonces agregamos la flecha (z, u) a Q . Si Q tiene longitud 4, entonces la minimalidad de Q implica que un predecesor y de z en Q domina a v_1 . Pero entonces y también domina a u (porque v_1 y u son dominados por los

mismos vértices), reemplazando la flecha (y, z) de Q por (y, u) resulta en una trayectoria de longitud cuatro desde v_1 a u . Si alguno entre v_1 y u tienen in grado cero, notemos que no puede ser u pues su ex grado no es mayor al de v_1 y solo aceptamos un vértice de in grado cero. Así v_1 tiene in grado cero, por tanto existe z que domina a u si $z \in V_1$, entonces como este no tiene in grado cero entonces es dominado por otro vértice digamos $y \in V_j$ y similar a lo anterior podemos encontrar una trayectoria de longitud a lo más cuatro de y a u y así una de longitud a lo más cinco desde v_1 a u . \square

Capítulo 8

(k, l) -núcleos

El concepto de (k, l) -núcleos en digráficas fue introducido por Kwaśnik en [41, 42]. Este concepto generaliza varias nociones de conjuntos independientes de vértices tales como un núcleo y un cuasi-núcleo. En esta sección, discutiremos sobre (k, l) -núcleos y sus casos especiales, núcleos y cuasinúcleos. La noción de un (k, l) -núcleo ha tenido varias aplicaciones, especialmente los $(2, 1)$ -núcleos.

Sean k y l enteros con $k \geq 2$, $l \geq 1$, y $D = (V(D), F(D))$ una digráfica. Un conjunto $J \subseteq V$ es un (k, l) -**núcleo** de D si

- (a) para todo par x, y de vértices distintos en J tenemos que $\text{dist}(x, y) \geq k$,
- (b) para cada $z \in V(D) \setminus J$, entonces existe $x \in J$ tal que $\text{dist}(z, x) \leq l$.

Un **núcleo** es un $(2, 1)$ -núcleo y un **cuasinúcleo** es un $(2, 2)$ -núcleo (véase figura 8.1). Galeana Sánchez y Li [16] demostraron algunos resultados que relacionan (k, l) -núcleos en una digráfica D con aquellos de su digráfica de líneas, algunos de estos resultados los mostraremos más adelante.

Para una pseudodigrapha dirigida $D = (V(D), F(D))$, la **digrapha de líneas** $Q = L(D)$ tiene conjunto de vértices $V(Q) = F(D)$ y conjunto de flechas

$$F(Q) = \{(a, b) : a, b \in V(Q), \text{ la cabeza de } a \text{ coincide con la cola de } b \}.$$

Una pseudodigrapha dirigida H es una **digrapha de líneas** si existe una pseudodigrapha D tal que $H = L(D)$ (véase figura 8.2).

Un **seminúcleo** S de D es un conjunto independiente de vértices tal que, para todo $z \in (V(D) \setminus S)$ para el cual existe una flecha (S, z) , entonces

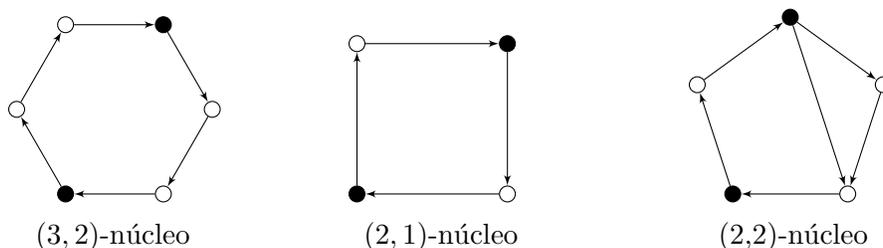


Figura 8.1: Los correspondientes (k, l) -núcleos están formados por los vértices negros

también existe una flecha (z, S) . El concepto de seminúcleos es similar al de núcleos y es muy útil para encontrar núcleos en digráficas, donde toda subdigráfica inducida de una digráfica D tiene un seminúcleo distinto del vacío entonces D también contiene un núcleo.

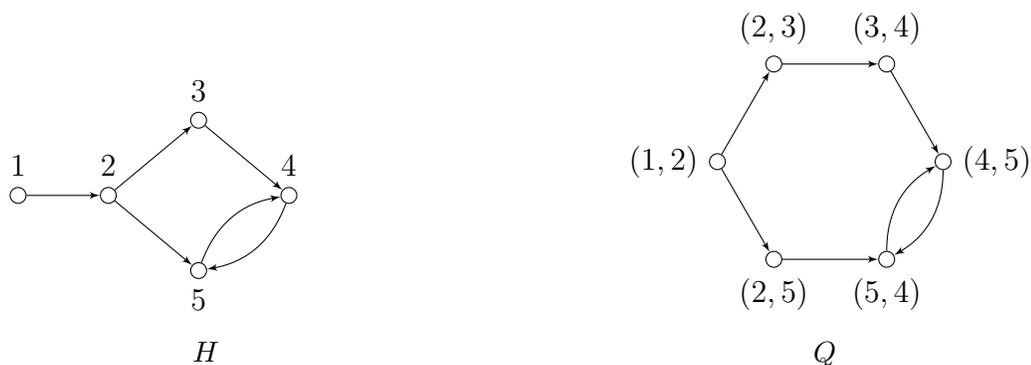


Figura 8.2: Una digráfica H y su digráfica de líneas $Q = L(H)$

Sea $D = (V(D), F(D))$ una digráfica. Denotamos por $\mathcal{P}(X)$ al conjunto de todos los subconjuntos del conjunto X y $f: \mathcal{P}(V(D)) \rightarrow \mathcal{P}(F(D))$ denota la función que se define como sigue: para cada $Z \subseteq V(D)$, $f(Z) = \{(u, x) \in F(D) : x \in Z\}$. También usaremos $\bar{f}: \mathcal{P}(F(D)) \rightarrow \mathcal{P}(V(D))$ para denotar la función que se define como sigue: para cada $A \subseteq F(D)$; $\bar{f}(A) = \{x \in V(D) : (u, x) \in A\}$.

Teorema 8.0.1. *Si D es una digráfica tal que todo vértice tiene in grado al menos uno, entonces D tiene un seminúcleo si y solo si $L(D)$ tiene un seminúcleo.*

Demostración. Si D tiene un seminúcleo S , entonces $f(S)_L$ es un seminúcleo de $L(D)$. Primero veamos que $f(S)_L$ es independiente, supongamos que no, entonces existen $a, b \in f(S)_L$ tal que $a \rightarrow b$, como $a \in f(S)_L$ entonces existe $u \in V(D)$ tal que $(u, a) \in F(D)$ y además $(a, b) \in F(D)$, entonces $a, b \in S$ lo cual contradice que S sea un conjunto independiente. Tomemos ahora $b \in (V(L(D)) \setminus f(S)_L)$ tal que existe $a \in f(S)_L$ y $((u, a), (a, b)) \in (L(D))$ con $u \in V(D)$, entonces existe z tal que $(b, z) \in F(D)$ con $z \in S$, por tanto en $f(S)_L$ existe un $c \in S$ tal que $(b, c) \in F(L(D))$ y así concluimos que $f(S)_L$ es un seminúcleo de $L(D)$.

El inverso, si $L(D)$ tiene un seminúcleo A , entonces probaremos que $\bar{f}(A)$ es un seminúcleo de D . Primero demostraremos que $\bar{f}(A)$ es independiente en D . Por contradicción, si $\bar{f}(A)$ no es independiente, entonces existen dos vértices $x, y \in \bar{f}(A)$ tal que $(x, y) \in F(D)$. Como $x \in \bar{f}(A)$, entonces existe un vértice $u \in V(D)$ tal que $(u, x) \in F(D)$. Como $((u, x), (x, y))$ es una $A(x, y)$ -flecha en $L(D)$ y A es un seminúcleo de $L(D)$, entonces debe de existir una flecha $(y, v) \in F(D)$ tal que $(y, v) \in A$ y $((x, y), (y, v)) \in A(L(D))$. Ya que $y \in \bar{f}(A)$, existe $t \in V(D)$ tal que $(t, y) \in A$. Entonces tenemos $\{(t, y), (y, v)\} \subseteq A$ con $((t, y), (y, v)) \in F(L(D))$, lo cual contradice la independencia de A . Concluimos que $\bar{f}(A)$ es independiente.

Ahora, sea $y \in V(D)$ tal que existe una $\bar{f}(A)y$ flecha; existe $x \in \bar{f}(A)$ con $(x, y) \in F(D)$. Ya que $x \in \bar{f}(A)$, entonces hay una flecha $(z, x) \in A$. Así $((z, x), (x, y))$ es una flecha que va de A a (x, y) en $L(D)$. Como A es un seminúcleo de $L(D)$, entonces existe una flecha $(x, y)A$ en $L(D)$. Hagamos que esa flecha sea $((x, y), (y, u))$ así $(y, u) \in A$ y entonces $u \in \bar{f}(A)$. Hemos demostrado que hay una flecha $y\bar{f}(A)$ en D . Por lo tanto $\bar{f}(A)$ es un seminúcleo de D . \square

Teorema 8.0.2. *Sea una digráfica con $\delta^-(D) \geq 1$. Entonces el número de (k, l) -núcleos en $L(D)$ es menor o igual al número de (k, l) -núcleos en D .*

Demostración. Primero demostraremos que si \bar{K} es un $(k, 1)$ -núcleo de $L(D)$, entonces $\bar{f}(\bar{K})$ es un $(k, 1)$ -núcleo de D . Sea \bar{K} un $(k, 1)$ -núcleo de $L(D)$. (a) Si $x \neq x'$, $\{x, x'\} \subseteq \bar{f}(\bar{K})$, entonces $\text{dist}_D(x, x') \geq k$. Por contradicción, supongamos que $\text{dist}_D(x, x') = n < k$. Tomemos $\alpha = (x = x_0, x_1, \dots, x_n = x')$, una trayectoria mínima de x a x' contenida en D . Como $x \in \bar{f}(\bar{K})$, entonces existe $u \in V(D)$ tal que $(u, x) \in \bar{K}$. Denotemos por $a_i = (x_{i-1}, x_i) \in F(D)$, $1 \leq i \leq n$, y consideremos las siguientes dos posibilidades:

Si $a_n = (x_{n-1}, x_n) \in \bar{K}$, consideremos que $((u, x), a_1, a_2, \dots, a_n)$ es una trayectoria dirigida desde (u, x) hasta a_n contenida en $L(D)$ de longitud

$n < k$ con $\{(u, x), a_n\} \subseteq \overline{K}$; esto contradice la parte (a) de la definición de un (k, l) -núcleo, pues \overline{K} es un $(k, 1)$ -núcleo en $L(D)$.

Si $a_n = (x_{n-1}, x_n) \notin \overline{K}$, entonces se sigue de la parte (b) de la definición de (k, l) -núcleo, que existe $(x_n, z) \in \overline{K}$ tal que $((x_{n-1}, x_n), (x_n, z)) \in F(L(D))$ (ya que \overline{K} es un $(k, 1)$ -núcleo de $L(D)$). Por otro lado, $x' = x_n \in \overline{f}(\overline{K})$, así existe $v \in V(D)$ con $(v, x_n) \in \overline{K}$ y entonces $((v, x_n), (x_n, z)) \in A(L(D))$ con $\{(v, x_n), (x_n, z)\} \subseteq \overline{K}$, contradiciendo la parte (a) de la definición de (k, l) -núcleo, pues \overline{K} es un $(k, 1)$ -núcleo de $L(D)$, $k \geq 2$.

(b) Si $y \in V(D) \setminus \overline{f}(\overline{K})$, entonces existe $x \in \overline{f}(\overline{K})$ tal que $(y, x) \in F(D)$. Como $y \in V(D)$, se sigue de la hipótesis del teorema 8.0.1 que existe $u \in V(D)$ con $(u, y) \in F(D)$. Ahora $y \in V(D) \setminus \overline{f}(\overline{K})$ implica que $(u, y) \in V(L(D)) \setminus \overline{K}$; se sigue de la parte (b) de la definición de (k, l) -núcleo que existe $(y, x) \in \overline{K}$ tal que $((u, y), (y, x)) \in F(L(D))$ (pues \overline{K} es un $(k, 1)$ -núcleo de $L(D)$). Como $(y, x) \in \overline{K}$ tenemos que $x \in \overline{f}(\overline{K})$ y así (b) está demostrado.

Sea \mathcal{K}_1 el conjunto de todos los $(k, 1)$ -núcleos de $L(D)$ \mathcal{K} el conjunto de todos los $(k, 1)$ -núcleos de D . Probaremos que $\overline{f}' : \mathcal{K}_1 \rightarrow \mathcal{K}$; donde \overline{f}' es la restricción a \mathcal{K}_1 es una función inyectiva.

(c) Si $\overline{K}_1, \overline{K}_2 \in \mathcal{K}_1$, $\overline{K}_1 \neq \overline{K}_2$, entonces $\overline{f}'(\overline{K}_1) \neq \overline{f}'(\overline{K}_2)$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\overline{K}_1 \setminus \overline{K}_2 \neq \emptyset$ y tomemos $(u, v) \in \overline{K}_1 \setminus \overline{K}_2$. Por como se definió la función claramente $v \in \overline{f}'(\overline{K}_1)$ y mostraremos que $v \notin \overline{f}'(\overline{K}_2)$. Por contradicción, supongamos $v \in \overline{f}'(\overline{K}_2)$; por tanto existe $(z, v) \in \overline{K}_2$. Ya que $(u, v) \notin \overline{K}_2$ se sigue de la parte (b) de la definición de (k, l) -núcleos que existe $(v, y) \in \overline{K}_2$. Por lo tanto $((z, v), (v, y)) \in F(L(D))$ con $\{(z, v), (v, y)\} \in \overline{K}_2$ contradiciendo la parte (b) de la definición de (k, l) -núcleos, pues \overline{K}_2 es un $(k, 1)$ -núcleo de $L(D)$. Concluimos que $v \notin \overline{f}'(\overline{K}_2)$, y así $\overline{f}'(\overline{K}_1) \neq \overline{f}'(\overline{K}_2)$ y \overline{f}' es inyectiva. \square

La hipótesis de que cada vértice tiene in grado al menos uno no puede ser omitida en el teorema 8.0.2 para $k \geq 3$. Observemos la figura 8.3, tenemos la digráfica D con $V(D) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ y $F(D) = \{(u_1, u_2), (u_2, u_3), (u_4, u_5), (u_5, u_6)\}$. Aquí D no tiene $(k, 1)$ -núcleo pero $L(D)$ tiene un $(k, 1)$ -núcleo para cualquier $k \geq 3$, con $J = \{(u_2, u_3), (u_5, u_6)\}$; además $\text{dist}((u_2, u_3), (u_5, u_6)) = \text{dist}((u_5, u_6), (u_2, u_3)) = \infty$ y para (u_1, u_2) , (u_4, u_5) tenemos $\text{dist}((u_1, u_2), (u_2, u_3)) = \text{dist}((u_4, u_5), (u_5, u_6)) = 1$.

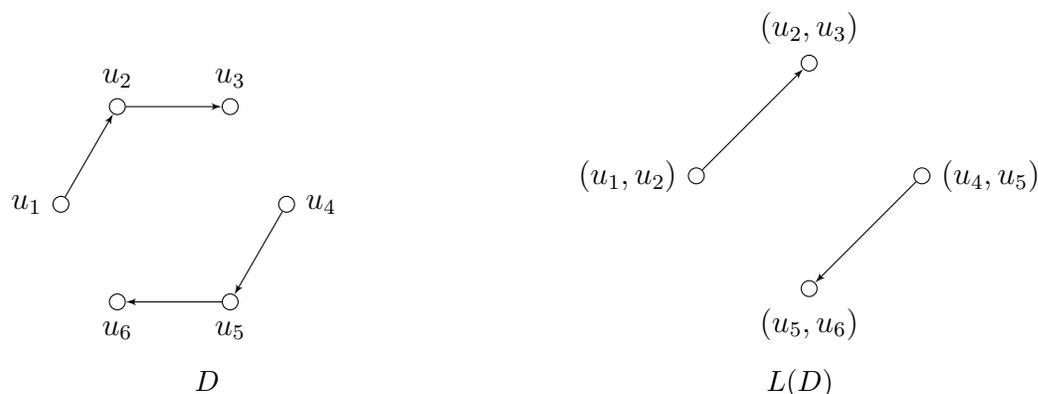


Figura 8.3: Una digráfica D y su digráfica de líneas $Q = L(D)$

8.1. Núcleos

Comenzamos con una definición equivalente a un núcleo. Un conjunto K de vértices en una digráfica $D = (V(D), F(D))$ es un **núcleo** si K es independiente y la primer in vecindad cerrada de K , $N^-[K]$, es equivalente a $V(D)$. Esta noción fue introducida por von Neumann en [47]; se han encontrado varias aplicaciones para los núcleos, por ejemplo en teoría de juegos (un núcleo representa un conjunto de posiciones ganadoras), en lógica y al enlazar coloración de aristas en gráficas. Varias condiciones suficientes para la existencia de un núcleo han sido demostradas. Muchas de estas condiciones pueden ser trivialmente extendidas a digráficas **núcleo perfectas**; es decir, digráficas para las cuales toda subdigráfica inducida tiene un núcleo (véase figura 8.4). La noción de digráficas núcleo perfectas permite simplificar ciertas demostraciones (debido a la posibilidad de usar inducción) y es bastante útil para aplicaciones.

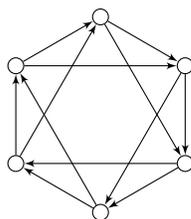


Figura 8.4: Una digráfica núcleo perfecta

Claramente, toda digráfica simétrica; es decir, digráficas en la cual todas sus flechas pertenecen a 2-ciclos, es núcleo perfecta (cada conjunto maximal independiente es un núcleo). Fue demostrado por von Neumann y Morgenstern [47] que cada digráfica acíclica es núcleo perfecta. Richardson [52] generalizó este resultado como sigue:

Teorema 8.1.1. *Toda digráfica sin ciclos impares es núcleo perfecta.*

La demostración del teorema 8.1.1, que se presenta aquí, es una adaptación de la dada por Berge y Duchet [6]. Una digráfica la cual no es núcleo perfecta es llamada **núcleo imperfecta**. Decimos que una digráfica D es **núcleo perfecta crítica** si D es núcleo-imperfecta, pero toda subdigráfica inducida propia de D es núcleo perfecta.

Teorema 8.1.2. *Una digráfica fuertemente conexa es bipartita si y solo si no tiene ciclos de longitud impar.*

Demostración. Si D es bipartita, entonces es fácil ver que D no puede tener ciclos de longitud impar. Para demostrarlo es suficiente suponer que D no tiene ciclos impares. Fijemos un vértice arbitrario $x \in D$. Afirmamos que para todo $y \in V(D) \setminus \{x\}$ y toda elección de una (x, y) -trayectoria P y una (y, x) -trayectoria Q , la longitud de P y Q son iguales módulo dos. Supongamos que este no es el caso para alguna elección de y , P y Q . Entonces elegimos y , P y Q tales que la paridad de la longitud de P y Q difieren y $|V(P)| + |V(Q)|$ es mínimo entre todas estas parejas de (x, y) - y (y, x) -trayectorias cuya longitud difiere en paridad. Si $V(P) \cap V(Q) = \{x, y\}$, entonces PQ es un ciclo impar, contradiciendo la suposición que hicimos en un principio. Por lo tanto existe un vértice $z \notin \{x, y\}$ en $V(P) \cap V(Q)$. Sea z el primer vértice de este tipo que encontramos cuando atravesamos Q desde y a x . Entonces $P[z, y]Q[y_Q^+, z]$ es un ciclo y es de longitud par por nuestra suposición. Pero ahora es fácil ver que la paridad de las trayectorias $P[x, z]$ y $Q[z, x]$ son diferentes y tenemos una contradicción a la elección de y , P y Q . Esto demuestra la afirmación, en particular, se sigue que para todo $y \in V(D) \setminus \{x\}$, las longitudes de todas las trayectorias de x a y tienen la misma paridad. Ahora sea $U = \{y: \text{la longitud de toda } (x, y)\text{-trayectoria es par}\}$ y $U' = \{y: \text{la longitud de toda } (x, y)\text{-trayectoria es impar}\}$. Esta es una bipartición de $V(D)$ además U y U' no contienen dos vértices que estén unidos por una flecha, ya que esto implicaría que algún vértice tiene trayectorias de dos diferentes paridades desde x . \square

Lema 8.1.3. *Toda digráfica núcleo perfecta crítica es fuerte.*

Demostración. Supongamos lo contrario y sea $D = (V(D), F(D))$ una digráfica no fuerte núcleo-imperfecta. Sea T una componente terminal fuerte de D y sea S_1 un núcleo de T . Como D no tiene núcleo, el conjunto $M = V(D) \setminus N^-[S_1]$ es no vacío. Por lo tanto el hecho de que D es núcleo imperfecta crític implica que $D\langle M \rangle$ tiene un núcleo S_2 . El conjunto $S_1 \cup S_2$ es independiente ya que ninguna flecha va de S_1 a S_2 (por la definición de componente terminal fuerte) y ninguna flecha va de S_2 a S_1 (por la definición de M). Claramente, $N^-[S_1 \cup S_2] = V(D)$. Por lo tanto, $S_1 \cup S_2$ es un núcleo de D , una contradicción. \square

Demostración del teorema 8.1.1. Por contradicción supongamos que D es una digráfica núcleo imperfecta sin ciclos impares y sea D' una subdigráfica núcleo imperfecta crítica de D . Por el lema 8.1.3, D' es fuerte. Como D' es fuerte y no tiene ciclos impares, por el teorema 8.1.2, D' es bipartita. Sea K un conjunto de partición en D' . Como D' es fuerte, K es un núcleo de D' , una contradicción. \square

Este teorema ha sido fortalecido en diversos documentos. Las condiciones (a) y (b) del siguiente teorema se deben a Duchet (veáse [6] de Berge y [17] de Galeana-Sánchez y Neumann-Lara, respectivamente). Galeana-Sánchez demostró que para cada $k \geq 2$, existen digráficas no núcleo perfectas para cada ciclo impar con al menos k cuerdas [15].

Teorema 8.1.4. *Una digráfica D es núcleo perfecta si al menos una de las siguientes condiciones se cumple:*

- (a) *Todo ciclo impar tiene flechas que pertenecen a 2-ciclos;*
- (b) *Todo ciclo impar tiene dos cuerdas cuyas cabezas son vértices consecutivos del ciclo.*

Hubo varios intentos de reforzar el teorema 8.1.1 de Richardson. En particular, Duchet [8] conjeturo que toda digráfica D , la cual no es un ciclo impar y no tiene un núcleo, contiene una flecha e tal que $D - e$ tampoco contiene un núcleo. Apartsin, Ferapontova y Gurvich [1] encontraron un contraejemplo a esta conjetura. Ellos demostraron que la digráfica circulante $C_{43}(1, 7, 8)$ no tiene núcleo, pero después de eliminar cualquier flecha en esta digráfica un núcleo aparecerá. Aclaremos que para un entero $n \geq 2$ y un conjunto

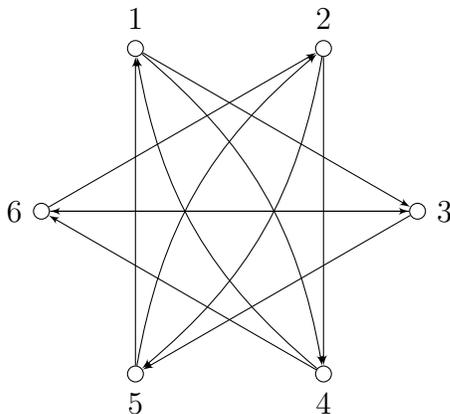


Figura 8.5: Digráfica circulante $C_6(2, 3)$

$S \subseteq \{1, 2, \dots, n-1\}$, la **digráfica circulante** $C_n(S)$ es definida como sigue:
 $V(C_n(S)) = \{1, 2, \dots, n\}$ y

$$F(C_n(S)) = \{(i, i + j(\text{mod}n)) : 1 \leq i \leq n, j \in S\}.$$

En la figura 8.5 podemos observar una digráfica circulante con $n = 6$

Observemos que por la simetría de $C_{43}(1, 7, 8)$ solo se necesita demostrar que $C_{43}(1, 7, 8)$ - $(1, 8)$ y $C_{43}(1, 7, 8)$ - $(1, 9)$ tienen núcleos. Notemos que $C_{43}(1, 7, 8)$ es el único contraejemplo a la conjetura de Duchet, Gurvich (comunicación privada, diciembre 1999) sospechó que existe una familia infinita de tales digráficas circulantes. También fue demostrado en [1] que $C_n(1, 7, 8)$ tiene un núcleo si y solo si $n \equiv 0(\text{mod}29)$. El siguiente problema parece bastante natural:

Problema 8.1.5. *Caracterizar digráficas circulantes las cuales tienen núcleos.*

8.2. Cuasinúcleos

Comenzamos con una definición equivalente a un cuasinúcleo. Un conjunto Q de vértices en una digráfica $D = (V(D), F(D))$ es un **cuasinúcleo** si Q es independiente y la segunda in vecindad cerrada de Q , $N^{-2}[Q]$, es igual a $V(D)$. Los dos resultados en 2-reyes (más precisamente, 2-siervos) en torneos mencionados al inicio de la sección 7, han sido extendidos a cuasi-núcleos en

digráficas arbitrarias como sigue. El primer teorema es de Chvátal y Lovász [9]. La demostración corta expuesta aquí fue dada por S. Thomassé [7].

Teorema 8.2.1. *Toda digráfica D tiene un cuasinúcleo.*

Demostración. Sea $V = V(D)$. Consideramos un ordenamiento x_1, \dots, x_n de V y dos subdigráficas generadoras de D , $D_1 = (V, F_1(D_1))$ y $D_2 = (V, F_2(D_2))$, donde $F_1(D_1) = \{x_i x_j : x_i x_j \in F(D), i < j\}$ y $F_2(D_2) = \{x_i x_j : (x_i, x_j) \in F(D), j < i\}$. Por el teorema 8.1.1, D_1 tiene un núcleo K' y $D_2[K']$ tiene un núcleo K'' . Observemos que K'' es un cuasinúcleo de D . \square

El segundo teorema es de Jacob y Meyniel [29].

Teorema 8.2.2. *Si una digráfica $D = (V(D), F(D))$ no tiene núcleo, entonces D contiene al menos tres cuasinúcleos distintos.*

Demostración. Por el teorema 8.2.1, D tiene un cuasinúcleo Q_1 . Como D no tiene núcleo, tenemos $V(D) \neq N^-[Q_1]$. Sea Q_2 un cuasinúcleo de $D \setminus N^-[Q_1]$. Demostraremos que $Q'_2 = Q_2 \cup (Q_1 \setminus N^-(Q_2))$ es un cuasinúcleo de D . Es directo ver que Q'_2 es independiente y

$$V = (V \setminus N^-[Q_1]) \cup N^-[Q_1 \cap N^-(Q_2)] \cup N^-[Q_1 \setminus N^-(Q_2)].$$

Por la definición de Q_2 , todo vértice de $V \setminus N^-[Q_1]$ es el vértice inicial de una trayectoria de longitud a lo más dos, que termina en Q_2 . Como $N^-[Q_1 \cap N^-(Q_2)] \subseteq N^{-2}[Q_2]$, todo vértice de $N^-[Q_1 \cap N^-(Q_2)]$ es el vértice inicial de una trayectoria de longitud a lo más dos que termina en Q_2 . Ya que $N^-[Q_1 \setminus N^-(Q_2)] \subseteq N^-[Q_1]$, un vértice de $N^-[Q_1 \setminus N^-(Q_2)]$ pertenece a Q_1 o es la cola de una flecha cuya cabeza esta en $Q_1 \setminus N^-(Q_2)$. Por lo tanto, Q_2 es un cuasinúcleo de D .

Observemos que $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$ y $Q_2 \neq \emptyset$. Así, $Q'_2 \neq Q_1$.

Como Q'_2 no es un núcleo de D , tenemos $V \neq N^-[Q'_2]$. Sea Q_3 un cuasinúcleo de $D \setminus N^-[Q'_2]$ y sea $Q'_3 = Q_3 \cup (Q'_2 \setminus N^-(Q_3))$. Como antes podemos demostrar que Q'_3 es un cuasinúcleo de D y $Q'_3 \neq Q_1$. Observemos que $Q_3 \subseteq V \setminus N^-[Q'_2]$ y $Q_1 \subseteq N^-[Q'_2]$. Por tanto, $Q_1 \cap Q_3 = \emptyset$. Por este hecho y ya que Q_3 no es vacío, concluimos que $Q'_3 \neq Q_1$. \square

Gutin, Koh, Tan y Yeo [25] caracterizaron digráficas con exactamente uno y dos cuasinúcleos, y así proporcionaron condiciones necesarias y suficientes para que una digráfica tenga al menos tres cuasinúcleos. En particular, ellos probaron lo siguiente:

Teorema 8.2.3. *Para toda digráfica fuerte de orden al menos tres, si no es un 4-ciclo, entonces tiene al menos tres cuasinúcleos distintos.*

Bibliografía

- [1] Apartsin A.; Ferapontova E.; Gurvich V. A circular graph counterexample to the Duchet kernel conjecture. *Discrete Math.*, (1998), 178:229-231.
- [2] Bang-Jensen, J.; Gutin, G. Z. *Digraphs: Theory, Algorithms and Applications, 2nd Edition*. Springer-Verlag, London, 2009.
- [3] Bang-Jensen, J.; Huang, J. Kings in quasi-transitive digraphs. *Discrete Math.* **185(1-3)** (1998), 19–27.
- [4] Baskoro E. T.; Miller M.; Plesník J.; Znárn S. Digraphs of degree 3 and order close to the Moore bound. *J. Graph Theory.*, (1995), 20:339–349.
- [5] Bellman R. E. On a routing problem. *Quart. Appl. Math.*, (1958), 16:87–90.
- [6] Berge, C.; Duchet, P. Recent problems and results about kernels in directed graphs. *Discrete Math.* **86(1-3)** (1990), 27–31.
- [7] Bondy J. A. Short proofs of classical theorems. *J. Graph Theory*, **44(3)**(2003), 159–165.
- [8] Boros E.; Gurvich V. A corrected version of the Duchet kernel conjecture. *Discrete Math.*, (1998), 179(1-3):231-233.
- [9] Chvátal V.; Lovász L. Every directed graph has a semi-kernel. *Lect. Notes Math.*, (1974), 411:175.
- [10] Chvátal V.; Thomassen C. Distances in orientations of graphs. *J. Combin. Theory Ser. B*, **24(1)** (1978), 61–75.
- [11] Dijkstra E. W. A note on two problems in connection with graphs. *Numer. Math.*, (1959), 1:269-271.

-
- [12] Fomin F. V.; Matamala M.; Prisner E.; Rapaport I. AT-free graphs: linear bounds for the oriented diameter. *Discrete Appl. Math.*, **141** (2004), 135–148.
- [13] Fomin F. V.; Matamala M.; Rapaport I. Complexity of approximating the oriented diameter of chordal graphs. *J. Graph Theory*, **45** (2004), 255–269.
- [14] Ford Jr. L. R. Network flow theory, Technical Report P-923, The Rand Corp., 1956.
- [15] Galeana-Sánchez, H. A counterexample to a conjecture of Meyniel on kernel-perfect graphs. *Discrete Math.*, **41** (1982), 105–107.
- [16] Galeana-Sánchez, H.; X. Li. Semikernels and (k,l) -kernels in digraphs. *STAM J. Discrete Math.* **11(2)** (1998), 340–346.
- [17] Galeana-Sánchez, H.; Neumann-Lara V. On kernels and semikernels of digraphs. *Discrete Math.*, **48** (1984), 67–76.
- [18] Ghouila-Houri A. Diametre maximal d'un graphe fortement connexe. *C.R. Acad. Sci. Paris*, (1960), 250:254–256.
- [19] Goddard, W. D.; Kubicki, G.; Oellermann, O. R.; Tian, S. L. On multipartite tournament. *J Combin. Theory Ser. B* **52(2)** (1991), 284–300.
- [20] Goldberg M. K. The diameter of a strongly connected graph. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, (1966), 170:767–769.
- [21] Gutin, G. The radio of n partite tournaments. *Mat. Zametki*, **40(3)** (1986), 414–417,430.
- [22] Gutin, G. Minimizing and maximizing the diameter in orientations of graphs. *Graphs Combin.*, **10(3)** (1994), 225–230.
- [23] Gutin, G. m -sources in complete multipartite digraphs. *Vestsī Acad. Navuk BSSR Ser.Fiz.-Mat. Navuk* **5** (1989), 101–106, 128.
- [24] Gutin, G.; Koh K. M.; Tay E. G.; Yeo A. Almost minimum diameter orientations of semicomplete multipartite and extended digraphs. *Graphs Combin.*, **18(3)** (2002), 499–506.

-
- [25] Gutin, G.; Koh K. M.; Tay E. G.; Yeo A. On the number of quasi-kernels in digraphs. *J. Graph Theory*, **46(1)** (2004), 48–56.
- [26] Gutin, G.; Yeo, A. Kings in semicomplete multipartite digraphs. *J. Graph Theory*. **33** (2000), 177–183.
- [27] Gutin, G.; Yeo, A. Orientations of digraphs almost preserving diameter. *Discrete Appl Math.*, **121(1-3)** (2002), 129–138.
- [28] Huang J.; Ye D. Sharp Bounds for the Oriented Diameters of Interval Graphs and 2-Connected Proper Interval Graphs. In *Computational Science- ICCS 2007, 7th International Conference, Beijing, China, Proceedings, Part III, volume 4489 of Lect. Notes Comput. Sci.*, Springer 2007, 353–361.
- [29] Jacob H; Meyniel H. About quasi-kernels in digraph. *Discrete Math.*, **154(1-3)**:279-280, (1996).
- [30] Koh, K. M.; Tan, B. P. The diameters of a graph and its orientations, Technical report, Department of Mathematics, National University of Singapore, 1992.
- [31] Koh, K. M.; Tan, B. P. Kings in multipartite tournaments. *Discrete Math.* **147** (1995), 171–183.
- [32] Koh, K. M.; Tan, B. P. Number of 4-kings in bipartite tournaments with no 3-kings. *Discrete Math.* **154(1-3)** (1996), 281–287.
- [33] Koh, K. M.; Tan, B. P. The number of kings in a multipartite tournament. *Discrete Math.* **167/168** (1997), 411–418.
- [34] Koh, K. M.; Tay, E. G. On optimal orientations of Cartesian products of even cycles and paths. *Networks*, **30(1)** (1997), 1–7.
- [35] Koh, K. M.; Tay, E. G. Optimal orientations of products of paths and cycles. *Discrete Appl. Math.* **78(1-3)** (1997), 163–174.
- [36] Koh, K. M.; Tay, E. G. On optimal orientations of Cartesian products of graphs (I). *Discrete Math.* **190** (1998), 115–136.

-
- [37] Koh, K. M.; Tay, E. G. On optimal orientations of Cartesian products of graphs (II): complete graphs and even cycles. *Discrete Math.*, **211** (2000), 75–102.
- [38] Koh, K. M.; Tay, E. G. On optimal orientations of G vertex-multiplications. *Discrete Math.*, **219** (2000), 153–171.
- [39] Koh, K. M.; Tay, E. G. On optimal orientations of Cartesian products of trees. *Graphs Combin.*, **17** (2001), 78–97.
- [40] Köning J. C.; Krumme D. W.; Lazard E. Diameter preserving orientation of the torus. *Networks*, **32** (1998), 1–11.
- [41] Kwaśnik, M. The generalization of Richardson theorem, *Discussiones Math.* **IV** (1981), 11–14.
- [42] Kwaśnik, M. On (k, l) -kernels of exclusive disjunction, Cartesian sum and normal product of two directed graphs. *Discussiones Math.* **V** (1982), 29–34.
- [43] McCanna J. E. Orientations of the n -cube with minimum diameter. *Discrete Math.*, **68(2-3)** (1988), 309–310.
- [44] Miller M.; Fris I. Maximum order digraphs for diameter 2 or degree 2. *In Pullman Volume of Graphs and Matrices*, volume 139 of *Lect. Notes Pure Appl. Math.*, New York, (1992), 269–278.
- [45] Moon, J. W. Solution to problem 463. *Math. Mag.*, **9** (1966), 297–301.
- [46] Moore E. F. The shortest path through a maze. *In Proc. Int Symp. on the Theory of Switching*, Harward University Press, (1959), 285–292.
- [47] Neumann, J. von.; Morgenstern, O. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, Princeton, NJ, (1944).
- [48] Petrović, V. Kings in bipartite tournaments. *Discrete Math.* **173(1-3)** (1997), 187–196.
- [49] Petrović, V.; Thomassen, C. Kings in k -partite tournaments. *Discrete Math.* **98(3)** (1991), 237–238.

-
- [50] Plesník J. Remarks on diameters of orientations of graphs. *Acta Math. Univ. Comenian.*, **46/47** (1985), 225–236.
- [51] Reid, K. B. *Tournaments: scores, kings, generalizations and special topics*. Congr. Numer., **115** (1996), 171–211. Surveys in graph theory (San Francisco, 1995.)
- [52] Richardson, M. Solution of irreflexive relations. *Ann. Math.*, **58** (1953), 573–580.
- [53] Roberts F. S.; Xu Y. On the optimal strongly connected orientations of city street graphs I: Large grids. *SIAM J. Discrete Math.*, **1** (1988), 199–222.
- [54] Roberts F. S.; Xu Y. On the optimal strongly connected orientations of city street graphs II: Two east-west avenues streets. *Networks*, **19** (1989), 221–233.
- [55] Roberts F. S.; Xu Y. On the optimal strongly connected orientations of city street graphs III: Three east-west avenues or north-south streets. *Networks*, **22** (1992), 109–143.
- [56] Roberts F. S.; Xu Y. On the optimal strongly connected orientations of city street graphs IV: Four east-west avenues or north-south streets. *Discrete Appl. Math.*, **49** (1994), 331–356.
- [57] Shen J. On the girth of digraphs. *Discrete Math.*, **211(1-3)** (2000), 167–181.
- [58] Soares J. Maximum diameter of regular digraphs. *J. Graph Theory*, (1992), 16(5):437–450.
- [59] Šoltés L. Orientations of graphs minimizing the radius or the diameter. *Math. Slovaca*, (1986), **36(3)**:289–296.
- [60] Tay E. G. Optimal orientations of graphs, PhD thesis, National University of Singapore, Department of Mathematics, (1999).