



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

MODIFICACIÓN DE NASH
EN VARIEDADES TÓRICAS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

MATEMÁTICO

PRESENTA

DANIEL GREEN TRIPP

DIRECTOR DE TESIS:

DR. ANDRÉS DANIEL DUARTE



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2019



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno

Green

Tripp

Daniel

55 31 92 39 67

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Matemáticas

413018100

2. Datos del tutor

Dr

Andrés Daniel

Duarte

3. Datos del sinodal 1

Dr

Omar

Antolín

Camarena

4. Datos del sinodal 2

Dr

Jawad

Snoussi

5. Datos del sinodal 3

Dra

Adriana

Ortíz

Rodríguez

6. Datos del sinodal 4

Dra

Lucía

López de Medrano

Álvarez

II

7. Datos del trabajo escrito
Modificación de Nash en Variedades Tóricas
77 p
2019

Agradecimientos

Esta tesis tiene especial agradecimiento al Dr. José Antonio Seade Kuri, pues gracias al apoyo que recibí por parte del proyecto FORDECyT-265667 tuve la oportunidad de trabajar directamente con mi asesor en Zacatecas.

Agradezco también a mis sinodales y a todas las personas que me apoyaron durante la elaboración de esta tesis y en general en mi carrera. Entre ellos se encuentran: mi asesor, el Dr. Andrés Daniel Duarte; mis padres Carlos Green y Leonor Tripp; mis hermanos David y Gaby; mi segunda familia, los García Tripp; mi novia, Pamela Cárdenas; mis amigos, en especial Sebastián Corzo, Lorena Yunes, Niver González y Azucena Perales.

Índice general

Agradecimientos	III
Introducción	VII
1. Conceptos de Geometría Algebraica	1
1.1. Preliminares	1
1.1.1. Variedades algebraicas afines y proyectivas	1
1.1.2. Morfismos	4
1.2. Espacios tangente	6
1.2.1. Dimensión y puntos singulares	6
1.2.2. Equivalencias de espacio tangente	9
1.3. Grassmanniana como variedad proyectiva	17
1.3.1. Una variedad proyectiva particular	17
1.3.2. Morfismo de Plücker	19
1.4. Producto de variedades cuasi-proyectivas	23
2. Introducción a las Variedades Tóricas Afines	29
2.1. Toros algebraicos	29
2.2. Variedades tóricas afines	31
2.2.1. Puntos en una retícula	32
2.2.2. Ideales tóricos	35
2.2.3. Semigrupos afines	39
2.2.4. Equivalencia de definiciones	41
2.3. Puntos de una variedad tórica	43
2.4. Morfismos entre variedades tóricas	46
3. Modificación de Nash de Variedades Tóricas	51
3.1. Definición de modificación de Nash	51
3.2. Modificación de Nash de variedades tóricas	55
3.3. Algoritmo de Nash en variedades tóricas	58

4. Algoritmo en Curvas Tóricas	65
4.1. Curvas tóricas singulares	65
4.2. Algoritmo de Nash	67
4.3. Algoritmos de la división	70

Introducción

En geometría algebraica elemental se estudian los conjuntos formados por los ceros de polinomios, a los que llamamos variedades algebraicas. En algunas de estas variedades podemos encontrar puntos donde crece la dimensión del espacio tangente, definido como el núcleo de la matriz jacobiana de los polinomios que definen a la variedad. A estos puntos los conocemos como puntos singulares. Cabe mencionar que el conjunto de puntos singulares de una variedad es una subvariedad “pequeña” (su complemento es denso en la variedad). Surge entonces el problema de la resolución de singularidades. El problema, en palabras de J. Kollár [KLR], consiste esencialmente en encontrar, para cada variedad algebraica X con puntos singulares, una variedad algebraica Y que parametrice a X y que no tenga puntos singulares.

Muchos matemáticos reconocidos (entre ellos Zariski: [ZR1], [ZR2]) trataron de resolver este problema hasta que, en 1964, el matemático japonés Heisuke Hironaka dio una complicada demostración, para campos algebraicamente cerrados de característica cero, en su famoso artículo [HI1]. Sin embargo, las técnicas propuestas para resolver singularidades siguen siendo aún gran motivo de estudio. En particular, el ganador del Premio Nobel de Economía, John Forbes Nash Jr. propuso una técnica para atacarlo: la modificación de Nash.

Para cada variedad algebraica singular X , la modificación de Nash construye una variedad X_1 y un morfismo $v_1 : X_1 \rightarrow X$ de forma que la pre-imagen de cada punto singular de X es el conjunto de los límites de espacios tangentes de puntos no singulares en X que convergen a dicho punto. Esta construcción no nos asegura una resolución, pues la variedad X_1 podría tener puntos singulares. Sin embargo, podemos iterar este proceso y obtener

$$X_k \xrightarrow{v_k} \dots \xrightarrow{v_2} X_1 \xrightarrow{v_1} X .$$

La pregunta que surge es: ¿existe alguna k para la cual X_k sea no singular? Se han dado respuestas afirmativas a la pregunta de Nash para algunos casos y a algunas variantes de la misma en los artículos de Nobile, Rebassoo, Gonzalez-Sprinberg, Hironaka y Spivakovsky ([NBL, RBS, GS1, GS2, HI2, SPK]). En

esta tesis respondemos a esta pregunta para el caso particular de curvas tóricas afines.

Las variedades tóricas afines son variedades algebraicas muy particulares, pues éstas tienen una caracterización combinatoria que traduce muchas propiedades geométricas de la variedad a propiedades combinatorias. En específico, toda variedad tórica se puede describir como la variedad más pequeña que contiene a un conjunto de la forma $\{(t^{\gamma_1}, \dots, t^{\gamma_n}) \in \mathbb{C}^n \mid t \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})^d\}$, donde $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{Z}^d$ y $t^{\gamma_k} := \prod_{i=1}^d t_i^{\gamma_k, i}$. Un claro ejemplo de la utilidad de esta caracterización es que la dimensión de la variedad coincide con el rango de la retícula generada por $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$.

En el caso de variedades tóricas, la pregunta de Nash ha sido recientemente estudiada en [ATN, GT, GM, DRT]. Los avances logrados en estos artículos están basados en el hecho de que la modificación de Nash de variedades tóricas afines corresponde a un algoritmo combinatorio que depende sólo de los elementos del conjunto $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ asociado a la variedad ([GT, GM]). En esta tesis nosotros estudiamos dicho algoritmo en el caso de curvas tóricas. En este caso tenemos que $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ son enteros positivos y el algoritmo recién mencionado es bastante similar al algoritmo de Euclides (de hecho si $n = 2$ entonces es exactamente el algoritmo de Euclides).

Usando esto, demostramos que la modificación de Nash sí resuelve singularidades en curvas tóricas. Este resultado también es conocido (de hecho en general para curvas no necesariamente tóricas, [NBL]), sin embargo nuestra prueba es combinatoria y además estimamos el número de iteraciones para obtener una curva no singular de dos maneras. Vemos que, al igual que el algoritmo de Euclides, podemos contar las iteraciones separando en “algoritmos de la división” y damos cotas para esta forma de contar que depende de los dos elementos mínimos del conjunto $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$.

En el primer capítulo damos un repaso de conceptos básicos de geometría algebraica. También introducimos conceptos más específicos como espacios tangentes (junto con dimensión y puntos singulares), la variedad asociada a la Grassmanniana y el producto de variedades cuasi-proyectivas.

En el segundo capítulo damos una introducción a las variedades tóricas afines. Demostramos que hay distintas caracterizaciones para éstas: una en términos de puntos en una retícula; otra definida por cierta clase de ideales, a los que llamaremos ideales tóricos; y la última asociada a un semigrupo afín. Damos también una caracterización de los puntos de una variedad tórica y definimos los morfismos entre variedades tóricas.

En el tercer capítulo definimos formalmente la modificación de Nash. Estudiamos la modificación de Nash aplicada a variedades tóricas afines y damos

explícitamente el algoritmo que determina. Damos también un criterio de singularidad en términos del conjunto $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$.

Finalmente, en el cuarto capítulo damos una demostración combinatoria de la resolución de singularidades para curvas tóricas y nos centramos en contar el número de iteraciones necesarias para llegar a la resolución. Vemos que el número de iteraciones del algoritmo de Nash puede contarse de forma muy especial separándolo en algoritmos de la división y damos una cota efectiva para el número de algoritmos de la división necesarios.

El trabajo hecho en esta tesis fue inspiración para el artículo “Nash Modification on Toric Curves” (ver [DG]) escrito por Daniel Duarte (asesor de esta tesis) y Daniel Green Tripp (autor de esta tesis), en el cual se presentan los resultados originales contenidos en el cuarto capítulo y algunas propiedades que cumplen las curvas tóricas que no son ciertas en general para variedades tóricas de dimensión mayor a 1.

Capítulo 1

Conceptos de Geometría Algebraica

Este capítulo tiene como finalidad dar los conceptos de geometría algebraica que serán utilizados en los siguientes capítulos. En la primera sección daremos un repaso de los conceptos más básicos, mientras que en las otras secciones veremos con detalle conceptos más específicos, como son: espacio tangente, dimensión, morfismo de Plücker, morfismo de Segre y una topología para el producto de variedades cuasi-proyectivas.

1.1. Preliminares

En esta tesis daremos por hecho que el lector está familiarizado con los conceptos más básicos de geometría algebraica, por lo que esta sección será solo un breve repaso con la finalidad de dar a conocer la notación que usaremos en el resto de la tesis. Las demostraciones a los resultados se pueden consultar en [HLK, caps. 1, 2].

1.1.1. Variedades algebraicas afines y proyectivas

Sea \mathbb{K} un campo y $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ el anillo de polinomios en n variables con coeficientes en \mathbb{K} .

Definición 1.1.1. Una *variedad algebraica afín* es un subconjunto de \mathbb{K}^n de la forma

$$\mathbf{V}(T) := \{p \in \mathbb{K}^n \mid f(p) = 0 \text{ para toda } f \in T\},$$

donde $T \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Si $T = \{f_1, \dots, f_r\}$ entonces denotaremos $\mathbf{V}(f_1, \dots, f_r) := \mathbf{V}(T)$.

Observación 1.1.2. Notemos que $\mathbf{V}(T) = \mathbf{V}(\langle T \rangle)$, donde $\langle T \rangle$ denota al ideal generado por el conjunto T . Además, gracias al teorema de la base de Hilbert (ver [LNG, cap. IV, sec. 4, pág. 186, Theorem 4.1.]), tenemos que todo ideal de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ es finitamente generado, por lo que toda variedad algebraica es de la forma $\mathbf{V}(f_1, \dots, f_r)$, donde $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.

Aunque más adelante definiremos variedades algebraicas que no son afines, la mayor parte de nuestro estudio será sobre variedades algebraicas afines. Por esta razón y por comodidad las llamaremos simplemente *variedades algebraicas* o simplemente *variedades*.

Ejemplo 1.1.3. Un conjunto con sólo un punto $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ es una variedad algebraica, pues $\{(a_1, \dots, a_n)\} = \mathbf{V}(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$.

Ejemplo 1.1.4. La parábola es una variedad algebraica, dada por $\mathbf{V}(y - x^2)$.

Proposición 1.1.5. *Las variedades algebraicas son los cerrados de una topología para \mathbb{K}^n , a la cual llamaremos **topología de Zariski**.*

A menos que se especifique lo contrario, cuando hablemos de conjuntos abiertos y cerrados, así como de cerradura, nos referiremos a estos con la topología de Zariski (o a la inducida por ésta en el caso de subconjuntos).

A cada ideal de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ le hemos asociado un objeto geométrico: una variedad algebraica. Inversamente tenemos la siguiente definición.

Definición 1.1.6. Para cada subconjunto $X \subseteq \mathbb{K}^n$ definimos el ideal

$$\mathbf{I}(X) := \{f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \mid f(p) = 0 \text{ para todo } p \in X\}.$$

No todos los ideales de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ son de la forma $\mathbf{I}(X)$. Definimos entonces el **radical** de un ideal I como

$$\sqrt{I} := \{f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \mid f^k \in I \text{ para alguna } k \geq 1\}$$

y le llamaremos **radical** al un ideal I que cumpla $I = \sqrt{I}$.

Teorema 1.1.7 (Nullstellensatz). *Si \mathbb{K} es algebraicamente cerrado e I es un ideal de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ entonces $\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = \sqrt{I}$.*

El Nullstellensatz nos dice que \mathbf{V} e \mathbf{I} definen una biyección entre ideales radicales de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ y variedades algebraicas en \mathbb{K}^n .

Definición 1.1.8. Sea X un espacio topológico y $Y \subseteq X$.

- I) Se dice que X es *irreducible* si no existen subconjuntos cerrados propios $X_1, X_2 \subsetneq X$ tales que $X = X_1 \cup X_2$.
- II) Se dice que Y es irreducible si es irreducible como espacio topológico con la topología inducida de X .

Proposición 1.1.9. Sea V una variedad algebraica. Entonces V es irreducible si y sólo si $\mathbf{I}(V)$ es un ideal primo.

Dejando de lado un poco las variedades afines, estudiemos las variedades proyectivas. Tomemos la relación de equivalencia en $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ dada por $(a_0, \dots, a_n) \sim (b_0, \dots, b_n)$ si y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que $(a_0, \dots, a_n) = (\lambda b_0, \dots, \lambda b_n)$.

Definición 1.1.10. Definimos el *espacio proyectivo* como

$$\mathbb{P}^n := (\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}) / \sim .$$

A los elementos de \mathbb{P}^n los denotaremos por $[x_0 : \dots : x_n]$.

De la definición tenemos que $\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=0}^n \{[x_0 : \dots : x_n] \mid x_i \neq 0\}$.

Definición 1.1.11. Para cada $i \in \{0, \dots, n\}$ definimos la *carta afín*

$$\mathbb{A}_i^n := \{[x_0 : \dots : x_n] \mid x_i \neq 0\}.$$

Observación 1.1.12. Se tienen las biyecciones

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_i^n &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ [x_0 : \dots : x_n] &\longmapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right) \\ &\text{y} \\ \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{A}_i^n \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto [x_1 : \dots : x_i : 1 : x_{i+1} : \dots : x_n]. \end{aligned}$$

Definición 1.1.13. Un polinomio $f \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ se dice que es **homogéneo** de grado d ($d \geq 1$) si para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y todo $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ se tiene

$$f(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) = \lambda^d f(a_0, \dots, a_n).$$

Diremos que un polinomio es homogéneo de grado 0 si es constante.

Definición 1.1.14. Una **variedad algebraica proyectiva** es un conjunto

$$\mathbf{V}(f_1, \dots, f_r) := \{[a_0 : \dots : a_n] \in \mathbb{P}^n \mid f_1(a_0, \dots, a_n) = \dots = f_r(a_0, \dots, a_n) = 0\}$$

para algunos polinomios homogéneos $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$.

Es importante notar que $\mathbf{V}(f_1, \dots, f_r)$ está bien definido como subconjunto del espacio proyectivo gracias a que f_1, \dots, f_r son homogéneos.

Definición 1.1.15. Sea $V \subseteq \mathbb{P}^n$ una variedad proyectiva. Definimos para cada $i \in \{0, \dots, n\}$ la **carta afín** de V como $V \cap \mathbb{A}_i^n$.

Proposición 1.1.16. Las variedades proyectivas son los cerrados de una topología para \mathbb{P}^n , a la cual llamaremos **topología de Zariski** en \mathbb{P}^n .

1.1.2. Morfismos

Sea $V \subseteq \mathbb{K}^n$ una variedad algebraica.

Definición 1.1.17. Una **función polinomial** en V es una función $f : V \rightarrow \mathbb{K}$ tal que existe $F \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ con $F(p) = f(p)$ para todo $p \in V$.

Nótese si $f : V \rightarrow \mathbb{K}$ es una función polinomial puede existir más de un polinomio F tal que $F(p) = f(p)$ para todo $p \in V$. De hecho

$$F|_V = G|_V \iff (F - G)|_V = 0 \iff F - G \in \mathbf{I}(V).$$

Esto nos da una idea para la siguiente definición.

Definición 1.1.18. Definimos el **anillo de coordenadas** de V como

$$\mathbb{K}[V] := \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/\mathbf{I}(V).$$

Por la observación hecha antes podemos identificar el anillo de coordenadas como $\mathbb{K}[V] = \{f : V \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ es función polinomial}\}$.

Podemos notar que $\mathbb{K}[V]$ es finitamente generada como \mathbb{K} -álgebra (por las clases de las x_i 's, a las que llamaremos **funciones coordenadas**) y no tiene

elementos nilpotentes no nulos. De hecho, estas propiedades caracterizan por completo a los anillos de coordenadas.

Definamos ahora los morfismos entre variedades algebraicas. Sean $V \subseteq \mathbb{K}^n$ y $W \subseteq \mathbb{K}^s$ variedades y sean Id_V e Id_W las funciones identidades.

Definición 1.1.19. Una función $f : V \rightarrow W$ es un **morfismo polinomial** si $f = (f_1, \dots, f_s)$ para algunas $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{K}[V]$. Es un **isomorfismo** si además existe un morfismo polinomial $g : W \rightarrow V$ tal que $g \circ f = \text{Id}_V$ y $f \circ g = \text{Id}_W$.

Ejemplo 1.1.20. La función $f : \mathbf{V}(y - x^2) \rightarrow \mathbb{K}$ dada por $f(x, y) = x$ es un morfismo polinomial, pues $x \in \mathbb{K}[\mathbf{V}(y - x^2)]$ es una función coordenada. Además es isomorfismo pues $g : \mathbb{K} \rightarrow \mathbf{V}(y - x^2)$ dada por $g(x) = (x, x^2)$ cumple con $g \circ f = \text{Id}_{\mathbf{V}(y-x^2)}$ y $f \circ g = \text{Id}_{\mathbb{K}}$.

Definición 1.1.21. Sea $f : V \rightarrow W$ un morfismo polinomial. Definimos el morfismo de \mathbb{K} -álgebras $f^* : \mathbb{K}[W] \rightarrow \mathbb{K}[V]$ como $f^*(g) := g \circ f$.

Teorema 1.1.22. Un morfismo polinomial $f : V \rightarrow W$ es un isomorfismo si y sólo si $f^* : \mathbb{K}[W] \rightarrow \mathbb{K}[V]$ es un isomorfismo de \mathbb{K} -álgebras.

Los morfismos polinomiales no son suficientes para estudiar las relaciones entre las variedades algebraicas, por lo que definiremos además otro tipo de morfismos.

Definición 1.1.23. Sean $V \subseteq \mathbb{K}^n$ y $W \subseteq \mathbb{K}^m$ variedades irreducibles.

- Definimos el **campo de funciones** de V , denotado por $\mathbb{K}(V)$, como el campo de fracciones de $\mathbb{K}[V]$. A los elementos de $\mathbb{K}(V)$ les llamaremos **funciones racionales**.
- Un **morfismo racional** $f : V \dashrightarrow W$ es una m -tupla $f = (f_1, \dots, f_m)$ tal que $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{K}(V)$ y $f(p) \in W$ para toda $p \in \text{dom}(f)$, donde $\text{dom}(f)$ denota al dominio de definición de f .
- Diremos que un morfismo racional $f : V \dashrightarrow W$ es **dominante** si $f(\text{dom}(f))$ es denso en W .

Análogo al caso de morfismos polinomiales, por cada morfismo racional dominante $f : V \dashrightarrow W$ tenemos un morfismo de \mathbb{K} álgebras $f^* : \mathbb{K}(W) \rightarrow \mathbb{K}(V)$ dado por $f^*(g) := g \circ f$ para cada $g \in \mathbb{K}(W)$.

Definición 1.1.24. Sean $U_1 \subseteq V$ abierto en V y $U_2 \subseteq W$ abierto en W .

- Un **morfismo** $f : U_1 \rightarrow U_2$ es un morfismo racional $f : V \dashrightarrow W$ tal que $U_1 \subseteq \text{dom}(f)$ y $f(U_1) \subseteq U_2$.
- Un morfismo $f : U_1 \rightarrow U_2$ es un **isomorfismo** si existe un morfismo $g : U_2 \rightarrow U_1$ tal que $g \circ f = \text{Id}_{U_1}$ y $f \circ g = \text{Id}_{U_2}$.

Proposición 1.1.25. Sea $f : V \dashrightarrow W$ un morfismo racional. Son equivalentes:

1. f es dominante y $f^* : \mathbb{K}(W) \rightarrow \mathbb{K}(V)$ es un isomorfismo de \mathbb{K} -álgebras.
2. Existen U_1 abierto en V y U_2 abierto en W tales que $f : U_1 \rightarrow U_2$ es un isomorfismo.

Definición 1.1.26. Un morfismo racional $f : V \dashrightarrow W$ se dice que es un **morfismo biracional** si cumple alguna de las condiciones de la proposición 1.1.25.

1.2. Espacios tangente

En esta sección se definirán los conceptos de espacio tangente, dimensión y punto singular. Para esto, nos basaremos en [HLK, cap. 3]. Muchos resultados de esta sección son ciertos para campos arbitrarios, pero a partir de aquí sólo nos concentraremos en el caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (hágase notar que \mathbb{C} es un campo algebraicamente cerrado y de característica cero).

1.2.1. Dimensión y puntos singulares

Sea $V \subseteq \mathbb{C}^s$ una variedad afín irreducible con $\mathbf{I}(V) = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$. Definamos para cada $p \in V$

$$\text{Jac}_p(f_1, \dots, f_r) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) \right)_{ij}$$

con $1 \leq i \leq r$ y $1 \leq j \leq s$. Notemos que $\text{Jac}_p(f_1, \dots, f_r)$ induce una transformación lineal de \mathbb{C}^s en \mathbb{C}^r .

Definición 1.2.1. Definimos el **espacio tangente** a V en el punto p (trasladado al origen) como

$$T_p V := \mathbf{Ker}(\text{Jac}_p(f_1, \dots, f_r)).$$

Por definición $T_p V$ es un \mathbb{C} -subespacio vectorial de \mathbb{C}^s .

Observación 1.2.2. Definamos para cada $i = 1, \dots, r$ y cada $p \in V$

$$d_p(f_i) := \sum_{j=1}^s \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) x_j \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_s].$$

Notamos que $T_p V$ es también una variedad afín pues

$$T_p V = \bigcap_{i=1}^r V(d_p(f_i)).$$

Además, como $d_p(f_i)$ son lineales entonces el cociente

$$\mathbb{C}[x_1, \dots, x_s] / \langle d_p(f_1), \dots, d_p(f_r) \rangle$$

es isomorfo a algún $\mathbb{C}[x_{i_1}, \dots, x_{i_k}]$ para alguna $k \leq s$, eliminando una variable por cada ecuación lineal independiente de las demás. En consecuencia de lo anterior $\mathbf{I}(T_p V) = \langle d_p(f_1), \dots, d_p(f_r) \rangle$ y $T_p V$ es irreducible.

Definición 1.2.3. Definimos la **dimensión** de V como

$$\dim(V) := \min\{\dim_{\mathbb{C}}(T_p V) \mid p \in V\}.$$

Por definición $\dim(V) \leq \dim_{\mathbb{C}}(T_p V)$ para toda $p \in V$. De hecho, la siguiente proposición nos dice que los puntos en los cuales se da la igualdad son casi todos.

Proposición 1.2.4. Para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que el conjunto

$$S_n(V) := \{p \in V \mid \dim_{\mathbb{C}} T_p V \geq n\}$$

es cerrado en la topología de Zariski.

Demostración. Como $T_p V \subseteq \mathbb{C}^s$ entonces $\dim_{\mathbb{C}}(T_p V) \leq s$ para toda $p \in V$, de donde $S_n(V) = \emptyset$ si $n > s$. Supongamos entonces que $n \leq s$.

Recordemos que $T_p V = \mathbf{Ker}(\text{Jac}_p(f_1, \dots, f_r)) \subseteq \mathbb{C}^s$, por lo que

$$\dim_{\mathbb{C}} T_p V = s - \text{rango} \left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) \right)_{ij} \right).$$

Se sigue que

$$\dim_{\mathbb{C}} T_p V \geq n \Leftrightarrow \text{rango} \left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) \right)_{ij} \right) \leq s - n,$$

es decir, $p \in S_n(V)$ si y sólo si todos los menores de $(s - n + 1) \times (s - n + 1)$ se anulan. Dado que estos menores son polinomios tenemos que $S_n(V)$ es un cerrado. \square

Corolario 1.2.5. *El conjunto de puntos p tales que $\dim_{\mathbb{C}}(T_p V) = \dim(V)$ es un abierto denso en V .*

Demostración. Dado que V es irreducible, es suficiente probar que

$$U := \{p \in V \mid \dim_{\mathbb{C}}(T_p V) = \dim(V)\}$$

es abierto no vacío.

Sea $n = \dim(V)$. Entonces $U = V \setminus S_{n+1}(V)$ y por lo tanto U es un abierto. Luego, como por definición $\dim(V) = \min\{\dim_{\mathbb{C}}(T_p V) \mid p \in V\}$, entonces existe $p \in V$ tal que $\dim_{\mathbb{C}}(T_p V) = \dim(V)$, por lo que $p \in U$ y así $U \neq \emptyset$. \square

Definición 1.2.6. Sea V una variedad afín irreducible.

- I) Decimos que un punto $p \in V$ es **singular** si $\dim_{\mathbb{C}}(T_p V) > \dim(V)$ y diremos que es **no singular** si $\dim_{\mathbb{C}}(T_p V) = \dim(V)$. Al conjunto de puntos singulares lo denotamos $\text{Sing}(V)$. Este conjunto es cerrado pues $\text{Sing}(V) = S_{n+1}(V)$, siguiendo con la notación de la proposición 1.2.4 y siendo $n = \dim(V)$.
- II) Diremos que V es una variedad **singular** si $\text{Sing}(V) \neq \emptyset$. En caso contrario, diremos que V es una variedad **no singular**.

Ejemplo 1.2.7. Tomemos la variedad afín irreducible $C = \mathbf{V}(x^3 - y^2)$, llamada **cúspide**, y sea $p = (a, b) \in C$. Entonces

$$\begin{aligned} \text{Jac}_{(a,b)}(x^3 - y^2) &= \left(\frac{\partial(x^3 - y^2)}{\partial x}(a, b) \quad \frac{\partial(x^3 - y^2)}{\partial y}(a, b) \right) \\ &= ((3x^2)(a, b) \quad (-2y)(a, b)) = (3a^2 \quad -2b). \end{aligned}$$

Dado que $a = 0$ si y sólo si $b = 0$, entonces tenemos dos casos:

- I) Si $a = b = 0$ entonces $\text{Jac}_{(a,b)}(x^3 - y^2) = (3(0)^2 \quad -2(0)) = (0 \quad 0)$ y entonces $T_p C = \mathbf{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{C}^2$ por lo que $\dim_{\mathbb{C}}(T_p C) = 2$.
- II) Si $a \neq 0 \neq b$ entonces $\text{Jac}_{(a,b)}(x^3 - y^2) = (3a^2 \quad -2b)$ nos genera una recta. En específico $T_p C = \mathbf{Span}((2b, 3a^2))$, por lo que $\dim_{\mathbb{C}}(T_p C) = 1$.

Por lo tanto $\dim(C) = \min\{1, 2\} = 1$ y el único punto singular es $(0, 0) \in C$.

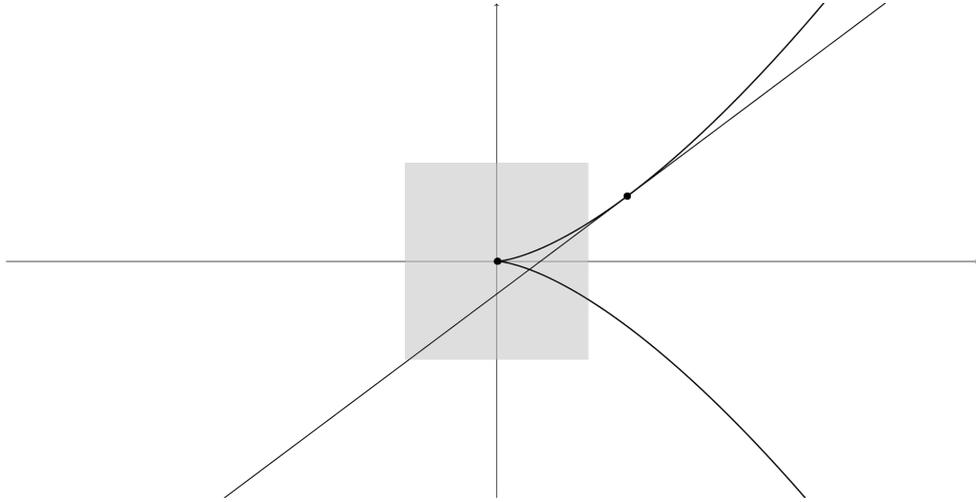


Figura 1.1: Cúspide, punto singular y punto no singular

1.2.2. Equivalencias de espacio tangente

En la sección anterior definimos al espacio tangente en función del ideal de la variedad y del espacio afín en que está contenida. En esta sección veremos una definición intrínseca de espacio tangente.

Sea V una variedad afín irreducible y sean

$$M_p := \{f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_s] \mid f(p) = 0\}$$

el ideal maximal correspondiente al punto $p \in V$ en $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_s]$ y

$$\bar{M}_p := M_p/\mathbf{I}(V) \subseteq \mathbb{C}[V]$$

el ideal maximal correspondiente al punto $p \in V$ en $\mathbb{C}[V]$. Sea

$$m_p := \{h \in \mathbb{C}(V) \mid \exists f, g \in \mathbb{C}[V] \text{ tal que } h = \frac{f}{g}, f(p) = 0 \text{ y } g(p) \neq 0\}$$

el ideal maximal del anillo local

$$\mathcal{O}_{V,p} := \{h \in \mathbb{C}(V) \mid \exists f, g \in \mathbb{C}[V] \text{ tal que } h = \frac{f}{g} \text{ y } g(p) \neq 0\}.$$

Teorema 1.2.8. *Se tienen isomorfismos de espacios vectoriales*

$$T_p V \cong (\bar{M}_p/\bar{M}_p^2)^\vee \cong (m_p/m_p^2)^\vee.$$

Demostraremos este teorema en dos partes.

Lema 1.2.9. *Se tiene el siguiente isomorfismo de espacios vectoriales:*

$$T_p V \cong (\bar{M}_p / \bar{M}_p^2)^\vee.$$

Demostración. Salvo traslaciones, podemos suponer que p es el origen, de forma que $M_p = \langle x_1, \dots, x_s \rangle$. Sea $(\mathbb{C}^s)^\vee$ el espacio dual del espacio vectorial \mathbb{C}^s . Recordemos que las funciones coordenadas $x_i : \mathbb{C}^s \rightarrow \mathbb{C}$ forman una base para $(\mathbb{C}^s)^\vee$.

Tenemos la transformación lineal

$$d_p : M_p \rightarrow (\mathbb{C}^s)^\vee$$

$$f \mapsto \sum_{j=1}^s \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) x_j,$$

la cual es suprayectiva pues $d_p(x_i) = x_i$ y $\{x_1, \dots, x_s\}$ es una base para $(\mathbb{C}^s)^\vee$. Esta transformación lineal seguida de la restricción $(\mathbb{C}^s)^\vee \rightarrow (T_p V)^\vee$, que es también suprayectiva, nos define una transformación lineal suprayectiva

$$D : M_p \rightarrow (T_p V)^\vee.$$

Afirmamos que $\mathbf{Ker}(D) = M_p^2 + \mathbf{I}(V)$. Para esto, sea $\mathbf{I}(V) = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$, por lo que $\mathbf{I}(T_p V) = \langle d_p(f_1), \dots, d_p(f_r) \rangle$ (por la observación 1.2.2), y sea $f \in M_p$. Entonces

$$d_p(f)|_{T_p V} = D(f) = 0 \iff d_p(f) \in \mathbf{I}(T_p V)$$

$$\iff$$

$$d_p(f) = \sum_{i=1}^r g_i d_p(f_i) \text{ para algunas } g_i \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_s],$$

pero como $d_p(f)$ es de grado 1, los monomios de las $g_i d_p(f_i)$'s de grado mayor a 1 se eliminan con otros. Podemos suponer entonces $g_i \in \mathbb{C}$ para todas las i . Por lo tanto

$$f \in \mathbf{Ker}(D) \iff d_p(f) = \sum_{i=1}^r a_i d_p(f_i) \text{ para algunas } a_i \in \mathbb{C}.$$

Como d_p es lineal, tenemos que $f \in \mathbf{Ker}(D)$ si y sólo si $d_p(f - \sum_{i=1}^r a_i f_i) = 0$, es decir, $f \in \mathbf{Ker}(D)$ si y sólo si $f - \sum_{i=1}^r a_i f_i \in \mathbf{Ker}(d_p)$ para algunas $a_i \in \mathbb{C}$.

Veamos que $\mathbf{Ker}(d_p) = M_p^2$. Recordemos que $p = (0, \dots, 0)$ y tomemos $g \in M_p$. Observamos que

$$\begin{aligned} g \in \mathbf{Ker}(d_p) &\iff \sum_{j=1}^s \frac{\partial g}{\partial x_j}(p)x_j = \sum_{j=1}^s \frac{\partial g}{\partial x_j}(0, \dots, 0)x_j = 0 \\ &\iff \\ &\frac{\partial g}{\partial x_j}(0, \dots, 0) = 0 \text{ para cada } j = 1, \dots, s \end{aligned}$$

y esto pasa si y sólo si cada monomio de g tiene grado al menos 2, es decir, $g \in M_p^2$. Por lo tanto

$$f \in \mathbf{Ker}(D) \iff f - \sum_{i=1}^r a_i f_i \in M_p^2 \text{ para algunas } a_i \in \mathbb{C}.$$

Sólo falta demostrar que $f - \sum_{i=1}^r a_i f_i \in M_p^2$ si y sólo si $f \in M_p^2 + \mathbf{I}(V)$.

La primera implicación se sigue directamente de que $f_1, \dots, f_r \in \mathbf{I}(V)$. Para probar la segunda implicación tomemos $f \in M_p^2 + \mathbf{I}(V)$, es decir,

$$f = g + \sum_{i=1}^r g_i f_i \text{ para algunas } g_i \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_s] \text{ y } g \in M_p^2.$$

Para cada $i = 1, \dots, r$ definimos $a_i := g_i(0, \dots, 0)$; en otras palabras, a_i es el término constante de g_i . Definimos también $h_i := g_i - a_i$. Entonces

$$f = g + \sum_{i=1}^r g_i f_i = g + \sum_{i=1}^r h_i f_i + \sum_{i=1}^r a_i f_i.$$

Nótese que como $\langle f_1, \dots, f_r \rangle = \mathbf{I}(V) \subseteq M_p = \langle x_1, \dots, x_s \rangle$, entonces las f_i 's tienen término constante igual a 0, al igual que las h_i 's. En consecuencia, $\sum_{i=1}^r h_i f_i$ no tiene término constante y cada monomio tiene grado al menos 2, por lo que $\sum_{i=1}^r h_i f_i \in M_p^2$. Así, tomando $h := g + \sum_{i=1}^r h_i f_i \in M_p^2$ tenemos que f es de la forma

$$f = h + \sum_{i=1}^r a_i f_i \text{ para algunas } a_i \in \mathbb{C}, h \in M_p^2.$$

Esta última igualdad nos da la implicación que queríamos. Hemos demostrado que $f \in \mathbf{Ker}(D)$ si y sólo si $f \in M_p^2 + \mathbf{I}(V)$, es decir, $\mathbf{Ker}(D) = M_p^2 + \mathbf{I}(V)$. Ahora, usando el tercer y el primer teorema de isomorfismo, respectivamente, tenemos que

$$\bar{M}_p / \bar{M}_p^2 \cong M_p / (M_p^2 + \mathbf{I}(V)) \cong (T_p V)^\vee.$$

□

Lema 1.2.10. *Se tiene el siguiente isomorfismo de espacios vectoriales:*

$$\bar{M}_p/\bar{M}_p^2 \cong m_p/m_p^2.$$

Demostración. De nuevo, supongamos que p es el origen. Podemos pensar a $\mathbb{C}[V]$ dentro de $\mathbb{C}(V)$ como

$$\mathbb{C}[V] = \{f \in \mathbb{C}(V) \mid \exists g \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_s] \text{ tal que } g(x) = f(x) \forall x \in V\}.$$

De esta manera, $\bar{M}_p = m_p \cap \mathbb{C}[V]$. Para cada $f \in m_p$ denotemos como \tilde{f} a la clase de f en m_p/m_p^2 . Tenemos entonces la transformación lineal

$$\begin{aligned} L : \bar{M}_p &\longrightarrow m_p/m_p^2 \\ f &\longmapsto \tilde{f}. \end{aligned}$$

Veamos que L es suprayectiva. Sea $f/g \in m_p$, de forma que $g(p) \neq 0$ y $f(p) = 0$. Sea $c = g(p)$. Entonces

$$(1/c)f - f/g = [(g-c)/cg]f \in m_p^2$$

ya que $(g-c)(p) = g(p) - c = 0$ y $(cg)(p) = g(p)^2 \neq 0$. Por lo tanto $L((1/c)f) = \tilde{f/g}$.

Por último, veamos que $\mathbf{Ker}(L) = \bar{M}_p^2$. De hecho, podemos notar que

$$\mathbf{Ker}(L) = \{f \in \bar{M}_p \mid f \in m_p^2\} = \bar{M}_p \cap m_p^2 = m_p \cap \mathbb{C}[V] \cap m_p^2 = m_p^2 \cap \mathbb{C}[V].$$

Debemos entonces demostrar que $\bar{M}_p^2 = m_p^2 \cap \mathbb{C}[V]$, pero como $\bar{M}_p = m_p \cap \mathbb{C}[V]$ la contención $\bar{M}_p^2 \subseteq m_p^2 \cap \mathbb{C}[V]$ es inmediata. Sólo falta demostrar la segunda contención. Para esto, tomemos

$$\sum_{i=1}^k h_i g_i / h'_i g'_i = F \in m_p^2 \cap \mathbb{C}[V],$$

con $h_i/h'_i, g_i/g'_i \in m_p$. En particular, $F \in \bar{M}_p$ pues para cada $i = 1, \dots, k$ tenemos $h_i(p) = g_i(p) = 0$ y $h'_i(p) \neq 0 \neq g'_i(p)$. Definimos

$$Q := \prod_{i=1}^k h'_i g'_i \text{ y para cada } i = 1, \dots, k \quad Q_i := Q/h'_i g'_i,$$

de forma que

$$QF = \sum_{i=1}^k Q_i h_i g_i \in \bar{M}_p^2.$$

Definamos $c := Q(p) = \prod_{i=1}^k h'_i(p)g'_i(p) \neq 0$. Entonces $Q - c \in \bar{M}_p$ por lo que $(Q - c)F \in \bar{M}_p^2$ y así

$$cF = QF - (Q - c)F \in \bar{M}_p^2.$$

En consecuencia $F \in \bar{M}_p^2$.

Hemos demostrado que $\mathbf{Ker}(L) = \bar{M}_p^2$, y usando el primer teorema de isomorfismo concluimos

$$\bar{M}_p/\bar{M}_p^2 \cong m_p/m_p^2.$$

□

Este teorema nos dio una caracterización del espacio tangente a una variedad en un punto en términos algebraicos. Gracias a esta caracterización, la siguiente proposición nos puede asegurar que el espacio tangente se preserva bajo equivalencias birracionales, es decir, depende tan sólo de una vecindad del punto. Esto implica también que el espacio tangente se preserva bajo isomorfismos.

Proposición 1.2.11. *Sean V y W dos variedades afines irreducibles y $p \in V$. Supongamos que existe un morfismo birracional $f : V \dashrightarrow W$ regular en p y sea $q := f(p)$. Entonces*

$$T_pV \cong T_qW.$$

Demostración. Dado que $f : V \dashrightarrow W$ es birracional, tenemos que

$$f^* : \mathbb{C}(W) \longrightarrow \mathbb{C}(V)$$

es un isomorfismo de \mathbb{C} -álgebras.

Notemos que gracias al teorema 1.2.8 basta con demostrar que

$$f^* : m_q \longrightarrow m_p$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales. Como ésta es restricción de un isomorfismo entonces es inyectiva. Sólo falta ver que está bien definida y que es suprayectiva, es decir, que $f^*(m_q) = m_p$.

Sea entonces $f^*(g/h) \in f^*(m_q)$. Sean $g_1/g_2 = f^*(g) = g \circ f$ y $h_1/h_2 = f^*(h) = h \circ f$, que son regulares en p al ser g y h polinomiales. Entonces $g_2(p) \neq 0 \neq h_2(p)$. Además, como $g/h \in m_q$ entonces $g(q) = g(f(p)) = 0$ y $h(q) = h(f(p)) \neq 0$, por lo que $g_1(p) = 0$ y $h_1(p) \neq 0$. Por lo tanto

$$f^*(g/h) = (g_1h_2)/(g_2h_1) \in m_p.$$

Así, $f^*(m_q) \subseteq m_p$.

Ahora sea $F \in m_p$. Como $f^* : \mathbb{C}(W) \rightarrow \mathbb{C}(V)$ es, en particular, suprayectiva entonces existe $g/h \in \mathbb{C}(W)$ tal que $f^*(g/h) = F$. Veamos que $g/h \in m_q$. Sean $g_1/g_2 = f^*(g) = g \circ f$ y $h_1/h_2 = f^*(h) = h \circ f$, que son regulares en p al ser g y h polinomiales. Entonces $g_2(p) \neq 0 \neq h_2(p)$. Además, como $(g_1h_2)/(g_2h_1) = f^*(g/h) = F \in m_q$ entonces $(g_2h_1)(p) = g_2(p)h_1(p) \neq 0$ y $(g_1h_2)(p) = g_1(p)h_2(p) = 0$. Dado que $g_2(p) \neq 0 \neq h_2(p)$ tenemos que $h_1(p) \neq 0$ y $g_1(p) = 0$, de donde

$$g(q) = g(f(p)) = g_1(p)/g_2(p) = 0 \text{ y } h(q) = h(f(p)) = h_1(p)/h_2(p) \neq 0.$$

Por lo tanto $g/h \in m_q$, demostrando así que $f^*(m_q) = m_p$ y que

$$f^* : m_q \rightarrow m_p$$

es en efecto un isomorfismo, el cual induce el isomorfismo

$$\overline{f^*} : m_q/m_q^2 \rightarrow m_p/m_p^2,$$

el cual a su vez induce el isomorfismo

$$\overline{f^*}^\vee : (m_p/m_p^2)^\vee \rightarrow (m_q/m_q^2)^\vee.$$

□

Corolario 1.2.12. Sean V y W son dos variedades afines irreducibles birracionalmente equivalentes. Entonces $\dim(V) = \dim(W)$.

Demostración. Sea $f : V \dashrightarrow W$ birracional. Entonces existen $A \subseteq V$ y $B \subseteq W$ abiertos de Zariski en V y en W , respectivamente, tales que $f : A \rightarrow B$ es isomorfismo. Como $\text{Sing}(V)$ y $\text{Sing}(W)$ son cerrados y f manda abiertos de A en abiertos de B (y por lo tanto abiertos en W) entonces

$$A \cap (V \setminus \text{Sing}(V)) \neq \emptyset$$

y

$$f(A \cap (V \setminus \text{Sing}(V))) \cap (W \setminus \text{Sing}(W)) \neq \emptyset,$$

por lo que existe $p \in V \setminus \text{Sing}(V)$ tal que $f(p) \in W \setminus \text{Sing}(W)$. Entonces, como $T_p V \cong T_{f(p)} W$ por la proposición anterior, tenemos que

$$\dim(V) = \dim_{\mathbb{C}}(T_p V) = \dim_{\mathbb{C}}(T_{f(p)} W) = \dim(W).$$

□

La proposición 1.2.11 nos puede dar incluso una base del espacio tangente en ciertos casos, como veremos a continuación.

Proposición 1.2.13. *Si $f : \mathbb{C}^d \dashrightarrow V \subseteq \mathbb{C}^n$ es un morfismo birracional, con $f = (f_1, \dots, f_n)$ y $f(p) = q$, entonces*

$$T_q V = \mathbf{Span} \left(\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(p) \right), \dots, \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_d}(p), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_d}(p) \right) \right).$$

Demostración. Sean $i : V \hookrightarrow \mathbb{C}^n$ la inclusión y $F = i \circ f : \mathbb{C}^d \dashrightarrow \mathbb{C}^n$. Tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^d & \xrightarrow{F} & \mathbb{C}^n \\ & \searrow f & \uparrow i \\ & & V \end{array}$$

el cual, gracias a la proposición 1.2.11, induce el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} (m_p/m_p^2)^\vee & \xrightarrow{F^*\vee} & (m_q/m_q^2)^\vee \\ & \searrow \cong & \uparrow i^*\vee \\ & & (\eta_q/\eta_q^2)^\vee \\ & \swarrow f^*\vee & \end{array}$$

donde m_p , m_q y η_q son los ideales maximales asociados a $p \in \mathbb{C}^d$, $q \in \mathbb{C}^n$ y $q \in V$ en las localizaciones respectivas, es decir,

$$m_p = \{g/h \in \mathbb{C}(x_1, \dots, x_d) \mid g(p) = 0, h(p) \neq 0\},$$

$$m_q = \{g/h \in \mathbb{C}(y_1, \dots, y_n) \mid g(q) = 0, h(q) \neq 0\} \text{ y}$$

$$\eta_q = \{g/h \in \mathbb{C}(V) \mid g(q) = 0, h(q) \neq 0\}.$$

Como $\{(x_1 - p_1) + m_p^2, \dots, (x_d - p_d) + m_p^2\}$ es base de m_p/m_p^2 y $\{(y_1 - q_1) + m_q^2, \dots, (y_n - q_n) + m_q^2\}$ es base de m_q/m_q^2 , siendo $p = (p_1, \dots, p_d)$ y $q = (q_1, \dots, q_n)$, entonces

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial(x_1 - p_1)} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial(x_d - p_d)} \Big|_p \right\} \\ &= \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_d} \Big|_p \right\} =: \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{y} \\ & \left\{ \frac{\partial}{\partial(y_1 - q_1)} \Big|_q, \dots, \frac{\partial}{\partial(y_n - q_n)} \Big|_q \right\} \\ & = \left\{ \frac{\partial}{\partial y_1} \Big|_q, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n} \Big|_q \right\} =: \gamma \end{aligned}$$

son bases de $(m_p/m_p^2)^\vee$ y $(m_q/m_q^2)^\vee$, respectivamente. Luego, como

$$\overline{F^*}^\vee \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \circ \overline{F^*} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \circ \overline{F^*} \left((y_i - q_i) + m_q^2 \right) \right] \frac{\partial}{\partial y_i} \Big|_q$$

entonces la matriz $[\overline{F^*}^\vee]_\beta^\gamma$ asociada a $\overline{F^*}^\vee$ en las bases β y γ está dada por

$$\begin{aligned} [\overline{F^*}^\vee]_\beta^\gamma &= \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \circ \overline{F^*} \left((y_i - q_i) + m_q^2 \right) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq d}} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \circ \left((f_i - q_i) + m_p^2 \right) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq d}} \\ &= \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) \right)_{i,j}. \end{aligned}$$

Finalmente, como $(m_p/m_p^2)^\vee \cong T_p \mathbb{C}^d = \mathbb{C}^d$, $(m_q/m_q^2)^\vee \cong T_q \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^n$ y $(\eta_q/\eta_q^2)^\vee \cong T_q V$ tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^d & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ & \searrow \cong & \uparrow \\ & & T_q V \end{array}$$

donde $T_q V \hookrightarrow \mathbb{C}^n$ es la inclusión y $\mathbb{C}^d \longrightarrow \mathbb{C}^n$ está dado por $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) \right)_{i,j}$, por lo que

$$\begin{aligned} T_q V &= \text{Im} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) \right)_{i,j} \\ &= \text{Span} \left(\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(p) \right), \dots, \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_d}(p), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_d}(p) \right) \right) \end{aligned}$$

como queríamos demostrar. \square

1.3. Grassmanniana como variedad proyectiva

Esta sección tiene como finalidad ver al conjunto de subespacios vectoriales de dimensión d en \mathbb{C}^n (llamado Grassmanniana) dentro de un espacio proyectivo de forma que éste sea una variedad proyectiva. Esto nos servirá más adelante para ver a los espacios tangente a una variedad afín como puntos en un espacio proyectivo. Para esta sección nos basaremos en el artículo [KLS].

Definición 1.3.1. Sean $d, n \in \mathbb{N}$ con $d \leq n$. Llamaremos **Grassmanniana de d -subespacios en \mathbb{C}^n** al conjunto de subespacios vectoriales d -dimensionales de \mathbb{C}^n y lo denotaremos como $\mathbf{G}(d, n)$. Es decir,

$$\mathbf{G}(d, n) := \{W \leq \mathbb{C}^n \mid \dim_{\mathbb{C}}(W) = d\}.$$

El objetivo de esta sección es dar una función biyectiva de $\mathbf{G}(d, n)$ a una variedad proyectiva. Enseguida definiremos esa variedad proyectiva.

1.3.1. Una variedad proyectiva particular

Sea

$$N := \binom{n}{d} - 1.$$

Denotemos por $[n]^d$ al conjunto $\{1, \dots, n\}^d$ y $j_1 \cdots j_d := (j_1, \dots, j_d)$ a sus elementos. Con esta notación escribimos las coordenadas de los puntos de \mathbb{P}^N como $x = [\cdots : x_{j_1 \cdots j_d} : \cdots]$ con $1 \leq j_1 < \cdots < j_d \leq n$ ordenadas con el orden lexicográfico.

Dado $x \in \mathbb{P}^N$, definimos la función

$$p_x : [n]^d \longrightarrow \mathbb{C}$$

como sigue:

- 1) $p_x(j_1 \cdots j_d) = 0$ si $j_\alpha = j_\beta$ para algunas $\alpha, \beta \in [n]$, $\alpha \neq \beta$.
- 2) $p_x(j_1 \cdots j_d) = x_{j_1 \cdots j_d}$ si $1 \leq j_1 < \cdots < j_d \leq n$.
- 3) Definimos el valor de p_x en una sucesión no necesariamente ordenada utilizando la siguiente regla: $p_x(j_1 \cdots j_d) = -p_x(j_1 \cdots j_{\beta-1} j_{\beta+1} j_\beta j_{\beta+2} \cdots j_d)$ para toda $\beta \in \{1, \dots, d-1\}$; es decir, cambiar dos elementos consecutivos de la sucesión equivale a cambiar de signo.

Entonces los valores que puede tomar p_x son cero o \pm el valor en alguna coordenada de x . Así, cada $x \in \mathbb{P}^N$ es de la forma

$$x = [\cdots : p_x(j_1 \cdots j_d) : \cdots]$$

con $1 \leq j_1 < \cdots < j_d \leq n$.

Ahora, para cada par de sucesiones $j_1 \cdots j_{d-1} \in [n]^{d-1}$ y $k_1 \cdots k_{d+1} \in [n]^{d+1}$, definimos la ecuación homogénea (de grado 2)

$$\sum_{\lambda=1}^{d+1} (-1)^\lambda p_x(j_1 \cdots j_{d-1} k_\lambda) p_x(k_1 \cdots \check{k}_\lambda \cdots k_{d+1}) = 0, \quad (1.1)$$

donde \check{k}_λ significa que eliminamos ese elemento de la sucesión. Sea $\mathbf{G} \subseteq \mathbb{P}^N$ la variedad proyectiva definida por estas ecuaciones.

Ejemplo 1.3.2. Para $d = 2$, $n = 4$, $j_1 = (1)$ y $k_1 k_2 k_3 = (2, 3, 4)$ y siendo $x_{12} = a$, $x_{13} = b$, $x_{14} = c$, $x_{23} = d$, $x_{24} = e$ y $x_{34} = f$ las coordenadas de \mathbb{P}^5 , la ecuación (1.1) es

$$-af + be - cd = 0.$$

El punto $x = [0 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1] \in \mathbb{P}^5$ cumple con esta ecuación.

Ya dijimos que las coordenadas de $x \in \mathbb{P}^N$ están dadas por los valores que toma la función p_x en las sucesiones $1 \leq j_1 < \cdots < j_d \leq n$. Más adelante necesitaremos la siguiente propiedad de los puntos de \mathbf{G} .

Lema 1.3.3. *Para cada $x \in \mathbf{G}$ existe una sucesión $1 \leq k_1 < \cdots < k_d \leq n$ tal que p_x depende de las sucesiones con un término distinto a ésta.*

Demostración. Sea $x = [\cdots : p_x(j_1 \cdots j_d) : \cdots] \in \mathbf{G}$. En particular $x \in \mathbb{P}^N$, por lo que existe $1 \leq k_1 < \cdots < k_d \leq n$ tal que $p_x(k_1 \cdots k_d) \neq 0$. Dado que estamos en un espacio proyectivo podemos suponer que $p_x(k_1 \cdots k_d) = 1$. Demostraremos que la función p_x está determinada por los valores que toma en las sucesiones de la forma $k_1 \cdots \check{k}_\lambda \cdots k_d j_\alpha$, es decir, que tienen un término distinto a la sucesión $k_1 \cdots k_d$.

Empecemos considerando una sucesión $j_1 \cdots j_d$ con exactamente $m \geq 1$ términos distintos a $k_1 \cdots k_d$ y sea j_β uno de esos m términos distintos. De la ecuación (1.1) correspondiente a las sucesiones $j_1 \cdots \check{j}_\beta \cdots j_d$ y $k_1 \cdots k_d j_\beta$ separamos el último sumando para obtener:

$$\sum_{\lambda=1}^d (-1)^\lambda p_x(j_1 \cdots \check{j}_\beta \cdots j_d k_\lambda) p_x(k_1 \cdots \check{k}_\lambda \cdots k_d j_\beta)$$

$$= (-1)^d p_x(j_1 \cdots \check{j}_\beta \cdots j_d j_\beta) p_x(k_1 \cdots k_d) = (-1)^d p_x(j_1 \cdots \check{j}_\beta \cdots j_d j_\beta).$$

Analicemos la suma de la izquierda de la igualdad. Si $k_\lambda \in \{j_1, \dots, j_d\}$ tenemos que $p_x(j_1 \cdots \check{j}_\beta \cdots j_d k_\lambda) = 0$. Si $k_\lambda \notin \{j_1, \dots, j_d\}$ tenemos que $j_1 \cdots \check{j}_\beta \cdots j_d k_\lambda$ es una sucesión con exactamente $m - 1$ términos distintos a $k_1 \cdots k_d$. Además $k_1 \cdots \check{k}_\lambda \cdots k_d j_\beta$ es una sucesión con exactamente un término distinto a $k_1 \cdots k_d$. De esta forma, acabamos de escribir a $p_x(j_1 \cdots \check{j}_\beta \cdots j_d j_\beta)$ a partir de sucesiones con exactamente $m - 1$ términos distintos a $k_1 \cdots k_d$ y de sucesiones con exactamente un término distinto a $k_1 \cdots k_d$.

Podemos hacer algo similar con cada sucesión con $m - 1$ términos distintos a $k_1 \cdots k_d$ y escribirlos a partir de valores de sucesiones con exactamente $m - 2$ términos distintos a $k_1 \cdots k_d$ y de sucesiones con exactamente un término distinto a $k_1 \cdots k_d$.

Iterando este procedimiento y haciendo las sustituciones correspondientes concluimos que p_x está totalmente determinado por los valores que toma en las sucesiones con exactamente un término distinto a $k_1 \cdots k_d$. \square

1.3.2. Morfismo de Plücker

Sea $W \in \mathbf{G}(d, n)$ y $p_1, \dots, p_d \in \mathbb{C}^n$ una base para W . Llamemos $p_i(j)$ a la j -ésima entrada de p_i y para cada $j_1 \cdots j_d \in [n]^d$ definamos $p(j_1 \cdots j_d)$ como el determinante de la matriz $(p_i(j_\beta))_{i, \beta \in [d]}$. Dado que $p_1, \dots, p_d \in \mathbb{C}^n$ es base de W , entonces existe un menor $d \times d$ de la matriz $(p_i(j))_{i, j}$ que no es cero, es decir, existe una sucesión $1 \leq j_1 < \cdots < j_d \leq n$ tal que $p(j_1 \cdots j_d) \neq 0$. Tenemos entonces un punto en \mathbb{P}^N dado por

$$x_W := [\cdots : p(j_1 \cdots j_d) : \cdots]$$

con $1 \leq j_1 < \cdots < j_d \leq n$.

Definición 1.3.4. A las coordenadas del punto x_W le llamaremos **coordenadas de Plücker** y a la función

$$F : \mathbf{G}(d, n) \longrightarrow \mathbb{P}^N$$

$$W \longmapsto x_W$$

le llamaremos el **morfismo de Plücker**.

Notamos que x_W no depende de la base elegida (es decir, F está bien definido), pues si $q_1, \dots, q_d \in \mathbb{C}^n$ es otra base para W entonces $q(j_1 \cdots j_d) = \det(Q)p(j_1 \cdots j_d)$ para cada sucesión $1 \leq j_1 < \cdots < j_d \leq n$, donde $Q \in M_{d \times d}(\mathbb{C})$ es la matriz de cambio de base.

Ejemplo 1.3.5. Sea $W = \text{Span}((1, 2, 3, 4), (i+1, i+2, i+3, i+4)) \in \mathbf{G}(2, 4)$. Entonces:

$$p(1, 2) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ i+1 & i+2 \end{pmatrix} = -i$$

$$p(1, 3) = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ i+1 & i+3 \end{pmatrix} = -2i$$

$$p(1, 4) = \det \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ i+1 & i+4 \end{pmatrix} = -3i$$

$$p(2, 3) = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ i+2 & i+3 \end{pmatrix} = -i$$

$$p(2, 4) = \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ i+2 & i+4 \end{pmatrix} = -2i$$

$$p(3, 4) = \det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ i+3 & i+4 \end{pmatrix} = -i,$$

por lo que

$$x_W = [-i : -2i : -3i : -i : -2i : -i] \in \mathbb{P}^5.$$

Observación 1.3.6. Es importante notar que si $W \in \mathbf{G}(d, n)$ y p_1, \dots, p_d es una base para W entonces $p(j_1 \cdots j_d)$ cumple 1), 2) y 3) de la definición de p_{x_W} , por lo que $p_{x_W}(j_1 \cdots j_d) = p(j_1 \cdots j_d)$ para cada $j_1 \cdots j_d \in [n]^d$. Esto justifica además la similitud de las notaciones p_x y p .

Veamos ahora que el morfismo de Plücker nos da una biyección entre $\mathbf{G}(d, n)$ y \mathbf{G} . Probaremos esto por partes.

Lema 1.3.7. $F(\mathbf{G}(d, n)) \subseteq \mathbf{G}$.

Demostración. Sea $W \in \mathbf{G}(d, n)$. Demostremos que $x_W \in \mathbf{G}$, es decir, que x_W cumple con las ecuaciones (1.1). Sean $j_1 \cdots j_{d-1}$ y $k_1 \cdots k_{d+1}$ sucesiones. Usando la observación 1.3.6, tenemos que

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda=1}^{d+1} (-1)^\lambda p_{x_W}(j_1 \cdots j_{d-1} k_\lambda) p_{x_W}(k_1 \cdots \check{k}_\lambda \cdots k_{d+1}) \\ &= \sum_{\lambda=1}^{d+1} (-1)^\lambda \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots & \vdots \\ p_i(j_1) & \cdots & p_i(j_{d-1}) & p_i(k_\lambda) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cdots & \check{p}_1(k_\lambda) & \cdots \\ \vdots & & \\ \cdots & \check{p}_d(k_\lambda) & \cdots \end{vmatrix} \end{aligned}$$

y expandiendo el primer determinante a partir de la última columna obtenemos

$$= \sum_{\lambda=1}^{d+1} (-1)^\lambda \left[\sum_{i=1}^d (-1)^{d+i} \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ \check{p}_i(j_1) & \cdots & \check{p}_i(j_{d-1}) \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} p_i(k_\lambda) \right] \begin{vmatrix} \cdots & \check{p}_1(k_\lambda) & \cdots \\ \vdots \\ \cdots & \check{p}_d(k_\lambda) & \cdots \end{vmatrix}.$$

Reacomodando los términos y regresando al determinante de una matriz

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^d (-1)^{d+i} \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ \check{p}_i(j_1) & \cdots & \check{p}_i(j_{d-1}) \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} \left[\sum_{\lambda=1}^{d+1} (-1)^\lambda p_i(k_\lambda) \begin{vmatrix} \cdots & \check{p}_1(k_\lambda) & \cdots \\ \vdots \\ \cdots & \check{p}_d(k_\lambda) & \cdots \end{vmatrix} \right] \\ &= \sum_{i=1}^d (-1)^{d+i} \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ \check{p}_i(j_1) & \cdots & \check{p}_i(j_{d-1}) \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} (-1) \begin{vmatrix} \cdots & p_i(k_\lambda) & \cdots \\ \cdots & p_1(k_\lambda) & \cdots \\ \vdots \\ \cdots & p_d(k_\lambda) & \cdots \end{vmatrix} \end{aligned}$$

y como esta última matriz tiene un renglón repetido, finalmente tenemos

$$= \sum_{i=1}^d (-1)^{d+i} \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ \check{p}_i(j_1) & \cdots & \check{p}_i(j_{d-1}) \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} (0) = 0.$$

Entonces $x_W \in \mathbf{G}$, por lo que $F(\mathbf{G}(d, n)) \subseteq \mathbf{G}$. □

Lema 1.3.8. $F(\mathbf{G}(d, n)) = \mathbf{G}$.

Demostración. Sea $x = [\cdots : p_x(j_1 \cdots j_d) : \cdots] \in \mathbf{G}$ y sea $k_1 \cdots k_d \in [n]^d$ la sucesión dada en el lema 1.3.3 y de nuevo, sin pérdida de generalidad, $p_x(k_1 \cdots k_d) = 1$. Daremos un subespacio vectorial d -dimensional cuyas coordenadas de Plücker sean las coordenadas de x . Para esto, definamos para cada $i = 1, \dots, d$ y cada $j = 1, \dots, n$

$$p_i(j) := p_x(k_1 \cdots k_{i-1} j k_{i+1} \cdots k_d).$$

Por ejemplo, para $k_1 k_2 k_3 = (1, 2, 3) \in [5]^3$ tenemos

$$\begin{aligned} p_1(1) &= p_x(1, 2, 3) = x_{123}, \quad p_1(2) = p_x(2, 2, 3) = 0, \quad p_1(3) = p_x(3, 2, 3) = 0, \\ p_1(4) &= p_x(4, 2, 3) = -p_x(2, 4, 3) = -(-p_x(2, 3, 4)) = p_x(2, 3, 4) = x_{234} \text{ y} \end{aligned}$$

$$p_1(5) = p_x(5, 2, 3) = -p_x(2, 5, 3) = -(-p_x(2, 3, 5)) = p_x(2, 3, 5) = x_{235}.$$

Los d vectores $p_i := (p_i(1), \dots, p_i(n))$ (en el ejemplo anterior se tiene que $p_1 = (x_{123}, 0, 0, x_{234}, x_{235})$) son linealmente independientes puesto que la matriz $(p_i(k_\beta))_{i,\beta}$ es la matriz identidad (si $i \neq \beta$ entonces $p_i(k_\beta) = 0$ pues k_β aparece dos veces en la sucesión $k_1 \cdots k_{i-1} k_\beta k_{i+1} \cdots k_d$, mientras que $p_\beta(k_\beta) = p_x(k_1 \cdots k_d) = 1$). Definamos $W := \mathbf{Span}(p_1, \dots, p_d) \in \mathbf{G}(d, n)$.

Fijemos $\lambda \in [d]$. Sea $j_1 \cdots j_d$ una sucesión tal que $j_\beta = k_\beta$ si $\beta \neq \lambda$. Dado que la matriz $(p_i(k_\beta))_{i,\beta}$ es la matriz identidad, entonces la matriz $(p_i(j_\beta))_{i,\beta}$ coincide con la matriz identidad en todas las columnas excepto, posiblemente, en la λ -ésima, cuya entrada en el i -ésimo renglón es $p_i(j_\lambda)$. Entonces

$$\begin{aligned} p(j_1 \cdots j_d) &= \det((p_i(j_\beta))_{i,\beta}) = p_\lambda(j_\lambda) \\ &= p_x(k_1 \cdots k_{\lambda-1} j_\lambda k_{\lambda+1} \cdots k_d) = p_x(j_1 \cdots j_d). \end{aligned}$$

Además, como x_W también satisface las ecuaciones (1.1) (por el lema 1.3.7), entonces el lema 1.3.3 nos dice que $p_{x_W} = p$ está totalmente determinado por los valores que toma en las sucesiones con exactamente un término distinto a $k_1 \cdots k_d$ (nótese que $p(k_1 \cdots k_d) = \det((p_i(k_\beta))_{i,\beta}) = 1$, ya que $(p_i(k_\beta))_{i,\beta}$ es la matriz identidad). Como p y p_x son iguales en las sucesiones con exactamente un término distinto a $k_1 \cdots k_d$ entonces $p = p_x$, por lo que

$$x_W = [\cdots : p(j_1 \cdots j_d) : \cdots] = [\cdots : p_x(j_1 \cdots j_d) : \cdots] = x$$

y por lo tanto $F(\mathbf{G}(d, n)) = \mathbf{G}$. □

Por último:

Lema 1.3.9. *El morfismo de Plücker es inyectivo.*

Demostración. Sea $x \in \mathbf{G}$ y sea $W \in \mathbf{G}(d, n)$ como lo tomamos en el lema anterior.

Si $W' \in \mathbf{G}(d, n)$ es tal que $x_{W'} = x = x_W$, entonces podemos tomar $q_1, \dots, q_d \in W'$ una base para W' tal que $(q_i(k_\beta))_{i,\beta}$ sea la matriz identidad ($q(k_1 \cdots k_d) \neq 0$ pues $x_{W'} = x_W$, por lo que la matriz $(q_i(k_\beta))_{i,\beta}$ es invertible) y entonces $x_{W'} = x_W$ implica que $q(j_1 \cdots j_d) = p(j_1 \cdots j_d)$ para cada sucesión $1 \leq j_1 < \cdots < j_d \leq n$. Esto último también implica que $q(j_1 \cdots j_d) = p(j_1 \cdots j_d)$ para todo elemento de $[n]^d$, en particular para las sucesiones $j_1 \cdots j_d$ tales que $j_\beta = k_\beta$ si $\beta \neq \lambda$ y $j_\lambda = j$, con $\lambda = 1, \dots, d$ y $j = 1, \dots, n$; además, las matrices $(q_i(j_\beta))_{i,\beta}$ y $(p_i(j_\beta))_{i,\beta}$ coinciden con la matriz identidad en todas las columnas

excepto en la λ -ésima, cuya entrada en el i -ésimo renglón es $q_i(j_\lambda) = q_i(j)$ y $p_i(j_\lambda) = p_i(j)$, respectivamente. Por lo tanto

$$\begin{aligned} q_\lambda(j) &= \det((q_i(j_\beta))_{i,\beta}) = q(j_1 \cdots j_d) \\ &= p(j_1 \cdots j_d) = \det((p_i(j_\beta))_{i,\beta}) = p_\lambda(j). \end{aligned}$$

Por consiguiente, $p_i = (p_i(1), \dots, p_i(n)) = (q_i(1), \dots, q_i(n)) = q_i$ para cada $i = 1, \dots, d$, de donde $W = W'$. \square

Hemos demostrado entonces el siguiente teorema:

Teorema 1.3.10. *El morfismo de Plücker es una función biyectiva entre $\mathbf{G}(d, n)$ y la variedad proyectiva \mathbf{G} .*

Ahora podremos decir que $\mathbf{G}(d, n)$ es una variedad proyectiva, tomando la biyección dada por el morfismo de Plücker.

1.4. Producto de variedades cuasi-proyectivas

Más adelante trabajaremos con el producto cartesiano de variedades afines y proyectivas, por lo que tendremos que generalizar el concepto de variedad de forma que abarque las variedades afines y las variedades proyectivas. Además tendremos que ver al producto de estas variedades como otra variedad. Eso es lo que estudiaremos en esta sección, basándonos en [SHF, caps. 4 y 5].

Definición 1.4.1. Una *variedad cuasi-proyectiva* es un abierto de Zariski de una variedad proyectiva.

Por definición toda variedad proyectiva es una variedad cuasi-proyectiva. Para ver que una variedad afín es una variedad cuasi-proyectiva sólo es necesario recordar que si $V \subseteq \mathbb{C}^n$ es una variedad afín y $\widehat{V} \subseteq \mathbb{P}^n$ es su cerradura proyectiva entonces

$$V = \widehat{V} \cap \mathbb{A}_0^n.$$

Como \mathbb{A}_0^n es abierto en \mathbb{P}^n entonces V es abierto en \widehat{V} , por lo que V es una variedad cuasi-proyectiva. Además, cada abierto $\mathbb{C}^n \setminus V$ en \mathbb{C}^n también es abierto en \mathbb{P}^n ya que $\mathbb{P}^n \setminus \widehat{V}$ y \mathbb{A}_0^n son abiertos en \mathbb{P}^n y $\mathbb{C}^n \setminus V = (\mathbb{P}^n \setminus \widehat{V}) \cap \mathbb{A}_0^n$.

En general, a toda variedad cuasi-proyectiva la podemos escribir como $X \setminus Y$, donde X y Y son variedades proyectivas. Una subvariedad cuasi-proyectiva Y de una variedad cuasi-proyectiva X es un subconjunto que es en sí una variedad cuasi-proyectiva, o equivalentemente, $Y = Z \setminus Z'$ donde $Z, Z' \subseteq X$ son subconjuntos cerrados de X .

Definición 1.4.2. Sean X y Y dos variedades cuasi-proyectivas con cerraduras de Zariski \overline{X} y \overline{Y} , respectivamente.

- i) Un morfismo entre variedades cuasi-proyectivas $f : X \rightarrow Y$ es una función racional $f : \overline{X} \dashrightarrow \overline{Y}$ tal que $X \subseteq \text{dom}(f)$ y $f(\text{dom}(f)) \subseteq Y$.
- ii) Un morfismo entre variedades cuasi-proyectivas $f : X \rightarrow Y$ es un isomorfismo si existe un morfismo $g : Y \rightarrow X$ con $fg = \text{Id}_Y$ y $gf = \text{Id}_X$.

Ejemplo 1.4.3. El conjunto $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^n = \mathbb{C}^n \setminus \mathbf{V}(x_1 \cdots x_n)$ es un abierto en \mathbb{C}^n y $\mathbf{V}(x_1 y_1 - 1, \dots, x_n y_n - 1)$ es una variedad afín en \mathbb{C}^{2n} , por lo que ambos son variedades cuasi-proyectivas. Además, tenemos los morfismos

$$\begin{aligned} \pi : \mathbf{V}(x_1 y_1 - 1, \dots, x_n y_n - 1) &\longrightarrow (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n \\ (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) &\longmapsto (a_1, \dots, a_n) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \pi^{-1} : (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n &\longrightarrow \mathbf{V}(x_1 y_1 - 1, \dots, x_n y_n - 1) \\ (a_1, \dots, a_n) &\longmapsto (a_1, \dots, a_n, 1/a_1, \dots, 1/a_n) \end{aligned}$$

que son inversos el uno del otro. Entonces $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$ y $\mathbf{V}(x_1 y_1 - 1, \dots, x_n y_n - 1)$ son variedades cuasi-proyectivas isomorfas.

Ahora seguiremos con el estudio del producto de variedades cuasi-proyectivas. Sabemos que el producto de dos variedades afines es una variedad afín. Queremos que esta propiedad se preserve si vemos a las variedades afines como variedades cuasi-proyectivas. Lo que haremos entonces es dar una función inyectiva $\varphi : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \hookrightarrow \mathbb{P}^N$, donde $N = (n+1)(m+1) - 1$ y su imagen es una variedad proyectiva. Para definir esta función, diremos que las coordenadas homogéneas de \mathbb{P}^N son w_{ij} con $i = 0, \dots, n$ y $j = 0, \dots, m$ y las ordenamos con el orden lexicográfico de manera creciente.

Definición 1.4.4. A la función $\varphi : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{P}^N$ definida como

$$\varphi([u_0 : \cdots : u_n], [v_0 : \cdots : v_m]) := [u_0 v_0 : \cdots : u_i v_j : \cdots : u_n v_m]$$

le llamaremos el *morfismo de Segre*.

Esta función está bien definida pues si $u_k, v_l \neq 0$ entonces $u_k v_l \neq 0$ y si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ entonces

$$\begin{aligned} \varphi([\alpha u_0 : \cdots : \alpha u_n], [\beta v_0 : \cdots : \beta v_m]) &= [(\alpha\beta)u_0 v_0 : \cdots : (\alpha\beta)u_i v_j : \cdots : (\alpha\beta)u_n v_m] \\ &= [u_0 v_0 : \cdots : u_i v_j : \cdots : u_n v_m] = \varphi([u_0 : \cdots : u_n], [v_0 : \cdots : v_m]). \end{aligned}$$

Proposición 1.4.5. φ es inyectiva y su imagen es una variedad proyectiva.

Demostración. Probaremos primero que $\varphi(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m)$ es una variedad proyectiva. Sea entonces $W \subseteq \mathbb{P}^N$ la variedad proyectiva definida por las ecuaciones homogéneas (de grado 2)

$$w_{ij}w_{kl} - w_{il}w_{kj} = 0 \text{ con } 0 \leq i, k \leq n \text{ y } 0 \leq j, l \leq m.$$

Sean $[u_0 : \cdots : u_n] \in \mathbb{P}^n$ y $[v_0 : \cdots : v_m] \in \mathbb{P}^m$. Entonces

$$(u_i v_j)(u_k v_l) = u_i v_j u_k v_l = (u_i v_l)(u_k v_j),$$

por lo que

$$(u_i v_j)(u_k v_l) - (u_i v_l)(u_k v_j) = 0$$

y así $\varphi([u_0 : \cdots : u_n], [v_0 : \cdots : v_m]) \in W$. Por lo tanto $\varphi(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m) \subseteq W$.

Ahora sea $[w_{00} : \cdots : w_{ij} : \cdots : w_{nm}] \in W$. En particular $[w_{00} : \cdots : w_{ij} : \cdots : w_{nm}] \in \mathbb{P}^N$ por lo que existen $0 \leq k \leq n$ y $0 \leq l \leq m$ tales que $w_{kl} \neq 0$. Sin pérdida de generalidad $w_{kl} = 1$. Definimos para cada $0 \leq i \leq n$ y $0 \leq j \leq m$

$$u_i := w_{il} \text{ y } v_j := w_{kj}.$$

Nótese que $[u_0 : \cdots : u_n] \in \mathbb{P}^n$ y $[v_0 : \cdots : v_m] \in \mathbb{P}^m$ puesto que $u_k = v_l = w_{kl} = 1 \neq 0$. Además, como $[w_{00} : \cdots : w_{ij} : \cdots : w_{nm}] \in W$ entonces para cada $0 \leq i \leq n$ y $0 \leq j \leq m$ se tiene que

$$w_{ij} = w_{ij}w_{kl} = w_{il}w_{kj} = u_i v_j,$$

de donde

$$\varphi([u_0 : \cdots : u_n], [v_0 : \cdots : v_m]) = [w_{00} : \cdots : w_{ij} : \cdots : w_{nm}].$$

Esto termina de demostrar que $\varphi(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m) = W$.

Ahora mostramos que φ es inyectiva. Para esto, tomemos u_i y v_j definidos como arriba. Si $[u'_0 : \cdots : u'_n] \in \mathbb{P}^n$ y $[v'_0 : \cdots : v'_m] \in \mathbb{P}^m$ son tales que

$$\varphi([u'_0 : \cdots : u'_n], [v'_0 : \cdots : v'_m]) = [w_{00} : \cdots : w_{ij} : \cdots : w_{nm}]$$

entonces $u'_k v'_l = w_{kl} \neq 0$ por lo que $u'_k, v'_l \neq 0$. Sin pérdida de generalidad $u'_k = v'_l = 1$. Entonces para cada $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq m$ se tiene que

$$u'_i = u'_i v'_l = w_{il} = u_i \text{ y } v'_j = u'_k v'_j = w_{kj} = v_j$$

por lo que $[u'_0 : \cdots : u'_n] = [u_0 : \cdots : u_n]$ y $[v'_0 : \cdots : v'_m] = [v_0 : \cdots : v_m]$. Por lo tanto φ es inyectiva. \square

Ejemplo 1.4.6. Tomemos el morfismo de Segre

$$\varphi : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^3$$

$$([x : y], [u : v]) \longmapsto [xu : xv : yu : yv].$$

Siendo $w_{00} = a$, $w_{01} = b$, $w_{10} = c$ y $w_{11} = d$ las coordenadas de \mathbb{P}^3 , las ecuaciones que definen a W son

$$\begin{aligned} aa - aa = 0, \quad ab - ba = 0, \quad ac - ac = 0, \quad ad - bc = 0, \quad ba - ab = 0, \quad bb - bb = 0, \\ bc - ad = 0, \quad bd - bd = 0, \quad ca - ca = 0, \quad cb - da = 0, \quad cc - cc = 0, \quad cd - dc = 0, \\ da - cb = 0, \quad db - db = 0, \quad dc - cd = 0 \quad \text{y} \quad dd - dd = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \sim W = \{[a : b : c : d] \in \mathbb{P}^3 \mid ad - bc = 0\}.$$

Con el morfismo de Segre podemos ahora mostrar que el producto de variedades cuasi-proyectivas es una variedad cuasi-proyectiva. Para eso necesitamos el siguiente lema.

Lema 1.4.7. *Sea X un espacio topológico y $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una cubierta abierta de X . Entonces $Y \subseteq X$ es cerrado en X si y sólo si $Y \cap U_\alpha$ es cerrado en U_α para cada $\alpha \in \Lambda$.*

Demostración. Una implicación se sigue de la definición de topología relativa en U_α . Para la segunda implicación sean $T_\alpha \subseteq X$ cerrados tales que $Y \cap U_\alpha = T_\alpha \cap U_\alpha$, que existen pues $Y \cap U_\alpha$ es cerrado en U_α . Además, como U_α son abiertos en X entonces $Z_\alpha := X \setminus U_\alpha$ son cerrados en X . Para ver que Y es cerrado en X demostraremos que

$$Y = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} (Z_\alpha \cup T_\alpha).$$

Sea entonces $y \in Y$. Si $y \in U_\alpha$ entonces $y \in Y \cap U_\alpha = T_\alpha \cap U_\alpha \subseteq T_\alpha$. Si $y \notin U_\alpha$ entonces $y \in X \setminus U_\alpha = Z_\alpha$. Por lo tanto $y \in Z_\alpha \cup T_\alpha$ para toda $\alpha \in \Lambda$ y tenemos así la primera contención.

Luego, sea $y \in \bigcap_{\alpha \in \Lambda} (Z_\alpha \cup T_\alpha)$. Como $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ es una cubierta abierta de X entonces $y \in U_\beta$ para alguna $\beta \in \Lambda$, es decir, $y \notin Z_\beta$. Por otro lado, $y \in Z_\beta \cup T_\beta$, lo que implica que $y \in T_\beta$. Concluimos que $y \in T_\beta \cap U_\beta = Y \cap U_\beta \subseteq Y$. \square

Proposición 1.4.8. *La imagen del morfismo de Segre del producto de variedades cuasi-proyectivas es una variedad cuasi-proyectiva.*

Demostración. Primero notemos que es suficiente demostrar que el morfismo de Segre manda productos de variedades proyectivas en variedades proyectivas. En efecto, si $X_1 \setminus X_2$ y $Y_1 \setminus Y_2$ son variedades cuasi-proyectivas, con $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{P}^n$ y $Y_1, Y_2 \subseteq \mathbb{P}^m$ variedades proyectivas, entonces

$$(X_1 \setminus X_2) \times (Y_1 \setminus Y_2) = X_1 \times Y_1 \setminus ((X_1 \times Y_2) \cup (X_2 \times Y_1))$$

y así

$$\begin{aligned} \varphi((X_1 \setminus X_2) \times (Y_1 \setminus Y_2)) &= \varphi(X_1 \times Y_1 \setminus ((X_1 \times Y_2) \cup (X_2 \times Y_1))) \\ &= \varphi(X_1 \times Y_1) \setminus (\varphi(X_1 \times Y_2) \cup \varphi(X_2 \times Y_1)). \end{aligned}$$

De esta forma, si $\varphi(X_1 \times Y_1)$, $\varphi(X_1 \times Y_2)$ y $\varphi(X_2 \times Y_1)$ son variedades proyectivas entonces $\varphi((X_1 \setminus X_2) \times (Y_1 \setminus Y_2))$ es una variedad cuasi-proyectiva.

Antes de demostrar que la imagen de productos de variedades proyectivas son variedades proyectivas, notemos que $\varphi(\mathbb{A}_0^n \times \mathbb{A}_0^m) = W \cap \mathbb{A}_{00}^N$, donde W es de nuevo la imagen del morfismo de Segre. Esto pues $u_0, v_0 \neq 0$ si y sólo si $u_0 v_0 \neq 0$, es decir, $u = [u_0 : \cdots : u_n] \in \mathbb{A}_0^n$ y $v = [v_0 : \cdots : v_m] \in \mathbb{A}_0^m$ si y sólo si

$$\varphi(u, v) = [u_0 v_0 : \cdots : u_i v_j : \cdots : u_n v_m] \in \mathbb{A}_{00}^N.$$

Luego, tenemos el isomorfismo de variedades cuasi-proyectivas ($W \cap \mathbb{A}_{00}^N$ es abierto en la variedad proyectiva W)

$$\begin{aligned} \pi : W \cap \mathbb{A}_{00}^N &\longrightarrow \mathbb{C}^{n+m} \\ \varphi(u, v) &\longmapsto (u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m) \end{aligned}$$

con inversa

$$\begin{aligned} \pi^{-1} : \mathbb{C}^{n+m} &\longrightarrow W \cap \mathbb{A}_{00}^N \\ (u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m) &\longmapsto [u_0 v_0 : \cdots : u_i v_j : \cdots : u_n v_m] \end{aligned}$$

definiendo $u_0 = v_0 = 1$. Para demostrar que $\varphi(\mathbb{A}_k^n \times \mathbb{A}_l^m) = W \cap \mathbb{A}_{kl}^N \cong \mathbb{C}^{n+m}$ para $0 \leq k \leq n$ y $0 \leq l \leq m$ se procede de manera análoga. De esta forma tenemos que, salvo isomorfismo,

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m &\longrightarrow \mathbb{C}^{n+m} \\ ((u_1, \dots, u_n), (v_1, \dots, v_m)) &\longmapsto (u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m); \end{aligned}$$

es decir, el producto de variedades afines como variedades cuasi-proyectivas según el morfismo de Segre coincide (salvo isomorfismo) con el producto cartesiano de variedades afines, el cual sabemos que es variedad afín.

Por último, si $X \subseteq \mathbb{P}^n$ y $Y \subseteq \mathbb{P}^m$ son variedades proyectivas entonces $X \cap \mathbb{A}_i^n$ y $Y \cap \mathbb{A}_j^m$ son variedades afines. Por lo tanto para cada $0 \leq i \leq n$ y $0 \leq j \leq m$ tenemos que

$$\begin{aligned} \varphi(X \times Y) \cap (W \cap \mathbb{A}_{ij}^N) &= \varphi(X \times Y) \cap \varphi(\mathbb{A}_i^n \times \mathbb{A}_j^m) \\ &= \varphi((X \times Y) \cap (\mathbb{A}_i^n \times \mathbb{A}_j^m)) = \varphi((X \cap \mathbb{A}_i^n) \times (Y \cap \mathbb{A}_j^m)) \end{aligned}$$

es una variedad afín y gracias al lema 1.4.7 podemos concluir que

$$\varphi(X \times Y) = \bigcup_{i,j} (\varphi(X \times Y) \cap (W \cap \mathbb{A}_{ij}^N))$$

es una variedad proyectiva, como queríamos demostrar. □

Capítulo 2

Introducción a las Variedades Tóricas Afines

Este capítulo tiene como finalidad introducirnos en el mundo de las variedades tóricas afines, basándonos en [CLS, secs. 1.1, 1.3].

2.1. Toros algebraicos

En esta sección se verán algunas definiciones y proposiciones básicas acerca de toros algebraicos, pero como el propósito de esta tesis no es adentrarnos en el tema de grupos algebraicos, se dejarán las referencias hacia las demostraciones de los resultados dados en esta sección.

Definición 2.1.1. Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ definimos $(\mathbb{C}^*)^n := (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$. Éste tiene estructura de grupo dada por el producto por entradas y es isomorfo (ver ejemplo 1.4.3) a la variedad afín

$$\bigcap_{i=1}^n \mathbf{V}(x_i y_i - 1) \subseteq \mathbb{C}^{2n}.$$

Definición 2.1.2. Un **toro** T es una variedad afín isomorfa a $(\mathbb{C}^*)^n$ para alguna n , tal que hereda la estructura de grupo bajo el isomorfismo.

Definición 2.1.3. Dado un toro T , definimos un **caracter** de T como un morfismo $\chi : T \rightarrow \mathbb{C}^*$ que es también un homomorfismo de grupos.

Proposición 2.1.4. El conjunto M de todos los caracteres de $(\mathbb{C}^*)^n$ es un grupo isomorfo a \mathbb{Z}^n , definiendo para cada $m = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ el caracter $\chi^m(t_1, \dots, t_n) = t_1^{a_1} \cdots t_n^{a_n}$ y la operación dada por $\chi^{m_1} \cdot \chi^{m_2} := \chi^{m_1+m_2}$.

30CAPÍTULO 2. INTRODUCCIÓN A LAS VARIETADES TÓRICAS AFINES

En particular, una base para M es $\{\chi^{e_1}, \dots, \chi^{e_n}\}$, a la cual llamaremos base canónica, donde e_1, \dots, e_n denota la base canónica de \mathbb{Z}^n .

Demostración. Ver [HMP, sec. 16.2., Lemma A y Lemma B]. □

En general, si \mathbb{K} es un campo, dados $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ y $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{K}^n$ definiremos $t^\alpha := t_1^{a_1} \cdots t_n^{a_n}$. De igual forma, en $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, dado $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ definiremos el monomio $x^\alpha := x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$. Entonces, refiriéndonos la proposición 2.1.4, el caracter $\chi^m : (\mathbb{C}^*)^n \rightarrow \mathbb{C}^*$ se denota como $\chi^m(t) = t^m$.

Fijemos un isomorfismo $\varphi : (\mathbb{C}^*)^n \rightarrow T$ dado por la definición 2.1.2 y sean χ un caracter de T y χ' un caracter de $(\mathbb{C}^*)^n$. Entonces $\chi\varphi$ es un caracter de $(\mathbb{C}^*)^n$ y $\chi'\varphi^{-1}$ es un caracter de T . Dado que estas asociaciones abren el producto de caracteres, tenemos un isomorfismo entre el conjunto de caracteres de $(\mathbb{C}^*)^n$ y el de T . De esta forma, gracias a la proposición 2.1.4, veremos a los caracteres de T como χ^m con $m \in \mathbb{Z}^n$, y hablaremos del grupo de caracteres de T , $M = \{\chi^m \mid m \in \mathbb{Z}^n\}$.

Proposición 2.1.5.

- (a) Sean T_1 y T_2 toros y sea $\Phi : T_1 \rightarrow T_2$ un morfismo que es un homomorfismo de grupos. Entonces $\Phi(T_1)$ es un toro y es cerrado en T_2 .
- (b) Sea T un toro y $H \subseteq T$ una subvariedad irreducible de T que es un subgrupo. Entonces H es un toro.

Demostración. Ver [HMP, cap. 16.]. □

Proposición 2.1.6. Supongamos que un toro $T \cong (\mathbb{C}^*)^n$ actúa linealmente en W , siendo W un \mathbb{C} -espacio vectorial de dimensión finita. Definimos para cada $m \in \mathbb{Z}^n$ el subespacio $W_m = \{w \in W \mid t \cdot w = \chi^m(t)w \ \forall t \in T\}$. Entonces

$$W = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}^n} W_m.$$

Demostración. Ver [SPG, Theorem 3.2.3.]. □

2.2. Variedades tóricas afines

En esta sección nos familiarizaremos con los objetos de estudio de esta tesis: las variedades tóricas afines. Veremos las distintas formas en que podemos definir las, dándonos así herramientas para trabajar sobre ellas. En particular, tendremos una forma combinatoria de estudiarlas, la cual nos interesará más adelante.

Definición 2.2.1. Una *variedad tórica afín* es una variedad afín irreducible V que contiene un toro $T \cong (\mathbb{C}^*)^n$ como abierto de Zariski tal que la acción de T sobre sí mismo se extiende a una acción algebraica de T en V (acción algebraica se refiere a una acción $T \times V \rightarrow V$ dada por un morfismo).

Ejemplo 2.2.2. $(\mathbb{C}^*)^n$ es una variedad afín irreducible que se tiene a sí mismo como abierto de Zariski, y la acción sobre sí mismo no necesita extenderse.

Ejemplo 2.2.3. \mathbb{C}^n es una variedad afín irreducible que tiene a $(\mathbb{C}^*)^n = \mathbb{C}^n \setminus \mathbf{V}(x_1 \cdots x_n)$ como abierto de Zariski, donde la acción de $(\mathbb{C}^*)^n$ sobre sí mismo es el producto por entradas y se extiende trivialmente a \mathbb{C}^n como

$$(\mathbb{C}^*)^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$$

$$(t_1, \dots, t_n) \cdot (x_1, \dots, x_n) \mapsto (t_1 x_1, \dots, t_n x_n).$$

Ejemplo 2.2.4. La cúspide $C = \mathbf{V}(x^3 - y^2) \subseteq \mathbb{C}^2$ es irreducible puesto que el polinomio $x^3 - y^2 \in \mathbb{C}[x, y]$ es irreducible. Tomemos el abierto $T := C \setminus \{(0, 0)\}$ y el morfismo

$$\mathbb{C}^* \rightarrow T$$

$$t \mapsto (t^2, t^3).$$

Este morfismo está bien definido pues $(t^2)^3 - (t^3)^2 = t^6 - t^6 = 0$ y $t \neq 0$, por lo que $(t^2, t^3) \in T$. Además, este morfismo y el morfismo

$$T \rightarrow \mathbb{C}^*$$

$$(a, b) \mapsto b/a$$

son inversos uno del otro. De esta forma tenemos un isomorfismo $\mathbb{C}^* \cong T$ de donde T obtiene una estructura de grupo definida por

$$T \times T \rightarrow \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^* \rightarrow T$$

$$(a, b) \cdot (c, d) \mapsto (b/a) \cdot (d/c) \mapsto (bd)/(ac) \mapsto ((bd)^2/(ac)^2, (bd)^3/(ac)^3)$$

$$= ((ac)^3/(ac)^2, (bd)^3/(bd)^2) = (ac, bd),$$

que es exactamente el producto por entradas (después veremos que ésta es siempre la operación del toro de una variedad tórica afín). La acción se extiende a todo C como el producto por entradas.

Ejemplo 2.2.5. La variedad afín $C' = \mathbf{V}(xy - z) \subseteq \mathbb{C}^3$ es irreducible pues el polinomio $xy - z \in \mathbb{C}[x, y, z]$ es irreducible. Tomemos el abierto $T' := C' \cap (\mathbb{C}^*)^3$ y el morfismo

$$\begin{aligned} (\mathbb{C}^*)^2 &\longrightarrow T' \\ (t_1, t_2) &\longmapsto (t_1, t_2, t_1 t_2). \end{aligned}$$

Este morfismo está bien definido pues $(t_1)(t_2) - t_1 t_2 = 0$ y $t_1, t_2 \neq 0$, por lo que $(t_1, t_2, t_1 t_2) \in T'$. Además, este morfismo y el morfismo

$$\begin{aligned} T' &\longrightarrow (\mathbb{C}^*)^2 \\ (a, b, c) &\longmapsto (a, b) \end{aligned}$$

son inversos uno del otro. De esta forma tenemos un isomorfismo $(\mathbb{C}^*)^2 \cong T'$ de donde T' obtiene una estructura de grupo definida por

$$T' \times T' \longrightarrow \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^* \longrightarrow T'$$

$$(a, b, ab) \cdot (d, e, de) \longmapsto (a, b) \cdot (d, e) \longmapsto (ad, be) \longmapsto (ad, be, (ab)(de)),$$

que es exactamente el producto por entradas. La acción se extiende a todo C' como el producto por entradas.

Como en este trabajo hablaremos sólo de variedades tóricas afines, de ahora en adelante las llamaremos simplemente *variedades tóricas*.

2.2.1. Puntos en una retícula

Antes dijimos que nos interesará tener una caracterización de las variedades tóricas en términos combinatorios. Esta caracterización empezará en esta subsección, viendo que a un número finito de puntos en \mathbb{Z}^n se le puede asociar una variedad tórica (más adelante demostraremos que todas las variedades tóricas pueden definirse de esta manera). Para esto, recordaremos algunas definiciones de grupos que usaremos de ahora en adelante.

Definición 2.2.6. Sea $(G, *)$ un grupo abeliano y $A \subseteq G$ no vacío. Denotando a \mathbb{N} como el conjunto de enteros no negativos:

(a) Se define el **subgrupo generado por** A como

$$\mathbb{Z}A := \{a_1^{n_1} * a_2^{n_2} * \cdots * a_k^{n_k} \mid k \in \mathbb{Z}^+, a_i \in A, n_i \in \mathbb{Z}\}.$$

(b) Se define el **semigrupo generado por** A como

$$\mathbb{N}A := \{a_1^{n_1} * a_2^{n_2} * \cdots * a_k^{n_k} \mid k \in \mathbb{Z}^+, a_i \in A, n_i \in \mathbb{N}\}.$$

En el caso en que $A = \{a\}$, se denotarán $\mathbb{Z}a := \mathbb{Z}A$ y $\mathbb{N}a := \mathbb{N}A$.

Definición 2.2.7. Una **retícula** es un grupo abeliano libre de rango finito. Por ejemplo, un toro T tiene asociada una retícula de caracteres M .

Dado $(\mathbb{C}^*)^n$ con retícula de caracteres M , consideramos un subconjunto finito $\mathcal{A} = \{\chi^{m_1}, \dots, \chi^{m_s}\} \subseteq M$. Definimos el morfismo monomial:

$$\Phi_{\mathcal{A}} : (\mathbb{C}^*)^n \longrightarrow \mathbb{C}^s \quad (2.1)$$

dado por

$$\Phi_{\mathcal{A}}(t) = (\chi^{m_1}(t), \dots, \chi^{m_s}(t)).$$

Definición 2.2.8. Se define la variedad afín $Y_{\mathcal{A}}$ como la cerradura de Zariski de $\Phi_{\mathcal{A}}((\mathbb{C}^*)^n)$.

Ahora tenemos las definiciones suficientes para ver el resultado del que hablamos al inicio de la subsección, el cual será la base para las otras caracterizaciones de las variedades tóricas.

Proposición 2.2.9. $Y_{\mathcal{A}}$ es una variedad tórica cuyo toro tiene retícula de caracteres isomorfa a $\mathbb{Z}\mathcal{A}$.

Demostración. Como $\chi^m(t) \neq 0$ para toda $t \in (\mathbb{C}^*)^n$, entonces podemos ver el morfismo $\Phi_{\mathcal{A}}$ como

$$\Phi_{\mathcal{A}} : (\mathbb{C}^*)^n \longrightarrow (\mathbb{C}^*)^s.$$

Se tiene que $\Phi_{\mathcal{A}}$ es homomorfismo de grupos al ser monomial, por lo que el inciso (a) de la proposición 2.1.5 nos dice que $T := \Phi_{\mathcal{A}}((\mathbb{C}^*)^n)$ es un toro y es cerrado en $(\mathbb{C}^*)^s$. Entonces existe $B \subseteq \mathbb{C}^s$ cerrado tal que $T = (\mathbb{C}^*)^s \cap B$ y dado que $T \subseteq B$ y $Y_{\mathcal{A}}$ es la cerradura de T se tiene que $Y_{\mathcal{A}} \subseteq B$. Así, $(\mathbb{C}^*)^s \cap Y_{\mathcal{A}} \subseteq (\mathbb{C}^*)^s \cap B = T$, pero $T \subseteq (\mathbb{C}^*)^s$ y $T \subseteq Y_{\mathcal{A}}$, de lo que concluimos que $T = (\mathbb{C}^*)^s \cap Y_{\mathcal{A}}$. De esta forma, como $(\mathbb{C}^*)^s$ es abierto, T es abierto en $Y_{\mathcal{A}}$.

Además, como T es un toro, entonces T es irreducible (por ser isomorfo a $(\mathbb{C}^*)^m$ para alguna $m \in \mathbb{Z}^+$); pero $Y_{\mathcal{A}}$ es su cerradura, por lo que $Y_{\mathcal{A}}$ es irreducible.

Luego, como $T \subseteq (\mathbb{C}^*)^s$, un elemento $t \in T$ actúa en \mathbb{C}^s multiplicando por entradas. Afirmamos que esa acción lleva variedades en variedades.

En efecto, si $V = \mathbf{V}(f_1, \dots, f_r)$, sean $\widehat{f}_i = \sum (a_{i,\alpha} t^{-\alpha}) x^\alpha$, donde $f_i = \sum a_{i,\alpha} x^\alpha$. Entonces $t \cdot V = \mathbf{V}(\widehat{f}_1, \dots, \widehat{f}_r)$, y se sigue que la acción de T en \mathbb{C}^s lleva variedades en variedades.

Puesto que $T = t \cdot T \subseteq t \cdot Y_{\mathcal{A}}$, tenemos que $t \cdot Y_{\mathcal{A}}$ es una variedad que contiene a T y de ahí que $Y_{\mathcal{A}} \subseteq t \cdot Y_{\mathcal{A}}$, pues $Y_{\mathcal{A}}$ es la cerradura de T . Haciendo el mismo procedimiento con $t^{-1} \in T$ tenemos que $Y_{\mathcal{A}} \subseteq t^{-1} \cdot Y_{\mathcal{A}}$, de donde $t \cdot Y_{\mathcal{A}} \subseteq Y_{\mathcal{A}}$ y así $t \cdot Y_{\mathcal{A}} = Y_{\mathcal{A}}$. Por lo tanto, la acción de T en sí mismo induce una acción en $Y_{\mathcal{A}}$.

Hemos demostrado entonces que $Y_{\mathcal{A}}$ es una variedad tórica, cuyo toro es T . Falta demostrar que su retícula de caracteres es isomorfa a $\mathbb{Z}_{\mathcal{A}}$.

Para esto, sean M' y M_0 las retículas de caracteres de T y de $(\mathbb{C}^*)^s$, respectivamente. Llamemos $\widehat{\Phi}$ al morfismo suprayectivo $\widehat{\Phi}_{\mathcal{A}} : (\mathbb{C}^*)^n \rightarrow T$. Entonces tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^*)^n & \xrightarrow{\widehat{\Phi}_{\mathcal{A}}} & (\mathbb{C}^*)^s \\ & \searrow \Phi & \uparrow i \\ & & T \end{array},$$

que nos induce el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} M & \xleftarrow{\widehat{\Phi}_{\mathcal{A}}} & M_0 \\ & \searrow \widehat{\Phi} & \downarrow \widehat{i} \\ & & M' \end{array}$$

donde, dados $\chi, \chi' \in M_0$ y $\chi'' \in M'$, se definen

$$\widehat{\Phi}_{\mathcal{A}}(\chi) = \chi \circ \Phi_{\mathcal{A}}, \quad \widehat{i}(\chi') = \chi' \circ i, \quad \widehat{\Phi}(\chi'') = \chi'' \circ \Phi.$$

Veamos que, en efecto, $\widehat{\Phi}$ es inyectiva e \widehat{i} es suprayectiva.

Sean $\chi_1, \chi_2 \in M'$ tales que $\widehat{\Phi}(\chi_1) = \widehat{\Phi}(\chi_2)$, es decir, $\chi_1 \circ \Phi = \chi_2 \circ \Phi$. Como Φ es suprayectivo se sigue que $\chi_1 = \chi_2$, y así $\widehat{\Phi}$ es inyectiva.

Ahora, sea $\chi \in M'$. Como \mathbb{C}^* es un \mathbb{Z} -módulo divisible entonces \mathbb{C}^* es inyectivo (ver [LNG, cap. XX, sec. 4, pág. 784, Lemma 4.2.]), y se tiene el

siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{C}^* & \\ & \uparrow \chi & \swarrow \exists \chi' \\ 0 & \longrightarrow T & \xrightarrow{i} (\mathbb{C}^*)^s \end{array}$$

De ahí que $\widehat{i}(\chi') = \chi$, demostrando la suprayectividad de \widehat{i} .

Volviendo a la demostración de que la retícula de caracteres de $Y_{\mathcal{A}}$ es isomorfa a $\mathbb{Z}_{\mathcal{A}}$, como \widehat{i} es suprayectiva tenemos que $\widehat{\Phi}(M') = \widehat{\Phi}_{\mathcal{A}}(M_0)$. Recordemos que $M_0 \cong \mathbb{Z}^s$. Sea $\{\chi^{e_1}, \dots, \chi^{e_s}\}$ la base canónica. Se sigue que $\widehat{\Phi}_{\mathcal{A}}(\chi^{e_i}) = \chi^{e_i} \circ \Phi_{\mathcal{A}} = \chi^{m_i}$ (la última igualdad se da pues $\chi^{e_i}(t_1, \dots, t_s) = t_i$) por lo que $\widehat{\Phi}_{\mathcal{A}}(M_0) = \mathbb{Z}_{\mathcal{A}}$, de donde $\widehat{\Phi}(M') = \mathbb{Z}_{\mathcal{A}}$. Por último, ya que $\widehat{\Phi}$ es inyectiva, tenemos que $M' \cong \mathbb{Z}_{\mathcal{A}}$. \square

Ejemplo 2.2.10. Sea $M = \{\chi^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$ la retícula de caracteres de \mathbb{C}^* . Tomemos $\mathcal{A} = \{\chi^2, \chi^3\} \subseteq M$. Entonces $\Phi_{\mathcal{A}} : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^2$ está dada por

$$\Phi_{\mathcal{A}}(t) = (t^2, t^3).$$

Recordando el ejemplo 2.2.4 notamos que la imagen de $\Phi_{\mathcal{A}}$ es $T = C \setminus \{(0, 0)\}$, donde $C = \mathbf{V}(x^3 - y^2)$, de donde $Y_{\mathcal{A}} = C$. Además, su toro es $Y_{\mathcal{A}} \cap (\mathbb{C}^*)^2 = C \cap (\mathbb{C}^*)^2 = C \setminus \{(0, 0)\} = T \cong \mathbb{C}^*$, como se vio en la demostración de la proposición 2.2.9, y su retícula de caracteres es isomorfa a $\mathbb{Z}_{\mathcal{A}} = \mathbb{Z}\{\chi^2, \chi^3\} \cong \mathbb{Z}\{2, 3\} = \mathbb{Z} \cong \{\chi^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$.

De esta forma, tenemos que la cúspide es la variedad tórica asociada a los puntos $\{2, 3\} \subseteq \mathbb{Z}$.

2.2.2. Ideales tóricos

En la subsección anterior dimos una caracterización de algunas variedades tóricas en términos de un número finito de puntos en una retícula. En esta subsección veremos una caracterización en términos de un tipo de ideales llamados tóricos. Veremos además que estas dos caracterizaciones son equivalentes.

Definición 2.2.11. Sea $L \subseteq \mathbb{Z}^s$ una subretícula.

- (a) A un ideal de la forma $I_L = \langle x^\alpha - x^\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{N}^s, \alpha - \beta \in L \rangle$ se le llama **ideal de retícula**.
- (b) A un ideal de retícula que es primo se le llama **ideal tórico**.

36CAPÍTULO 2. INTRODUCCIÓN A LAS VARIEDADES TÓRICAS AFINES

Vimos que dado $\mathcal{A} = \{\chi^{m_1}, \dots, \chi^{m_s}\} \subseteq M$ tenemos el morfismo $\Phi_{\mathcal{A}} : (\mathbb{C}^*)^n \rightarrow \mathbb{C}^s$ definido en (2.1) y, tomando los isomorfismos $\mathbb{Z}^s \cong M_0$ y $\mathbb{Z}^n \cong M$ de la proposición 2.1.4, tenemos el morfismo

$$\widehat{\Phi}_{\mathcal{A}} : \mathbb{Z}^s \longrightarrow \mathbb{Z}^n$$

$$e_i \longmapsto m_i$$

Sea $L = \mathbf{Ker}(\widehat{\Phi}_{\mathcal{A}})$, es decir, los elementos $l = (l_1, \dots, l_s) \in \mathbb{Z}^s$ tales que $\sum_{i=1}^s l_i m_i = 0$, y así $\chi^{\sum_{i=1}^s l_i m_i}(t) = t^{\sum_{i=1}^s l_i m_i} = 1$ para todo $t \in (\mathbb{C}^*)^n$. Para $l = (l_1, \dots, l_s) \in L$ definimos:

$$l_+ := \sum_{l_i > 0} l_i e_i \quad \text{y} \quad l_- := - \sum_{l_i < 0} l_i e_i$$

Notemos que $l_+, l_- \in \mathbb{N}^s$ y que $l_+ - l_- = l$.

Proposición 2.2.12. *Dados $\mathcal{A} \subseteq M$ y $L \subseteq \mathbb{Z}^s$ como arriba, se tiene*

$$\mathbf{I}(Y_{\mathcal{A}}) = \langle x^{l_+} - x^{l_-} \mid l \in L \rangle = \langle x^{\alpha} - x^{\beta} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{N}^s, \alpha - \beta \in L \rangle.$$

Demostración. Llamemos $I_L = \langle x^{l_+} - x^{l_-} \mid l \in L \rangle$. Primero probemos la segunda igualdad.

La primera contención está dada por $l_+, l_- \in \mathbb{N}^s$ y $l_+ - l_- = l \in L$. Para la otra contención tomemos $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^s$ tal que $\alpha - \beta \in L$, por lo que $x^{(\alpha-\beta)_+} - x^{(\alpha-\beta)_-} \in I_L$, y así

$$x^{\alpha} - x^{\beta} = \left(\prod_{\alpha_i > \beta_i} x_i^{\beta_i} \right) \left(\prod_{\alpha_i \leq \beta_i} x_i^{\alpha_i} \right) (x^{(\alpha-\beta)_+} - x^{(\alpha-\beta)_-}) \in I_L.$$

Se tiene entonces la igualdad $I_L = \langle x^{\alpha} - x^{\beta} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{N}^s, \alpha - \beta \in L \rangle$.

Ahora, para la igualdad $\mathbf{I}(Y_{\mathcal{A}}) = I_L$, demostremos primero $I_L \subseteq \mathbf{I}(Y_{\mathcal{A}})$. Sea entonces $p \in \Phi_{\mathcal{A}}((\mathbb{C}^*)^n)$, por lo que existe $t \in (\mathbb{C}^*)^n$ tal que $p = (t^{m_1}, \dots, t^{m_s})$. Ahora bien, dada $l \in L$ notemos que

$$p^l = t^{\sum_{i=1}^s l_i m_i} = t^0 = 1 \text{ para toda } l \in L.$$

Entonces $p^{l_+ - l_-} = 1$, de donde $p^{l_+} - p^{l_-} = 0$ y tenemos que p anula a todo polinomio en I_L , es decir, $p \in \mathbf{V}(I_L)$. Así, $\Phi_{\mathcal{A}}((\mathbb{C}^*)^n) \subseteq \mathbf{V}(I_L)$ y entonces $Y_{\mathcal{A}} \subseteq \mathbf{V}(I_L)$, por ser $Y_{\mathcal{A}}$ la cerradura de $\Phi_{\mathcal{A}}((\mathbb{C}^*)^n)$. Entonces $I_L \subseteq \mathbf{I}(\mathbf{V}(I_L)) \subseteq \mathbf{I}(Y_{\mathcal{A}})$ y se tiene la contención deseada.

Para completar la igualdad, tomemos el orden lexicográfico para los monomios en $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_s]$ y supongamos que $I_L \subsetneq \mathbf{I}(Y_{\mathcal{A}})$. Podemos elegir entonces una $f \in \mathbf{I}(Y_{\mathcal{A}}) \setminus I_L$ con término líder mínimo $x^\alpha = \prod_{i=1}^s x_i^{\alpha_i}$. Como $f(t^{m_1}, \dots, t^{m_s}) = 0$ para todo $t \in (\mathbb{C}^*)^n$, en particular el monomio x^α debe anularse, por lo que f debe tener un monomio $x^\beta = \prod_{i=1}^s x_i^{\beta_i} < x^\alpha$ tal que para todo $t \in (\mathbb{C}^*)^n$ (y de ahí que también para todo $t \in \mathbb{C}^n$):

$$\prod_{i=1}^s (t^{m_i})^{\alpha_i} = \prod_{i=1}^s t^{(m_i \alpha_i)} = \prod_{i=1}^s t^{(m_i \beta_i)} = \prod_{i=1}^s (t^{m_i})^{\beta_i}.$$

Entonces:

$$\sum_{i=1}^s \alpha_i m_i = \sum_{i=1}^s \beta_i m_i \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^s (\alpha_i - \beta_i) m_i = 0.$$

De ahí que $\alpha - \beta \in L$ y $x^\alpha - x^\beta \in \langle x^\alpha - x^\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{N}^s, \alpha - \beta \in L \rangle = I_L$, por lo que $f - x^\alpha + x^\beta \in \mathbf{I}(Y_{\mathcal{A}}) \setminus I_L$, pero éste tiene término líder menor que f lo cual es una contradicción a la minimalidad del término líder de f . Concluimos que $\mathbf{I}(Y_{\mathcal{A}}) = I_L$. \square

Observación 2.2.13. Para cualquier subconjunto finito $\mathcal{A} \subseteq M$, las proposiciones 2.2.9 y 2.2.12 nos dicen que $\mathbf{I}(Y_{\mathcal{A}})$ es un ideal tórico.

Proposición 2.2.14. Un ideal $I \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_s]$ es tórico si y sólo si es primo y generado por binomios de la forma $x^\alpha - x^\beta$.

Demostración. La primera implicación es por definición de ideal tórico.

Para la segunda implicación supongamos que I es un ideal primo generado por binomios de la forma $x^\alpha - x^\beta$.

Primero mostraremos que $\mathbf{V}(I) \cap (\mathbb{C}^*)^s$ es un subgrupo de $(\mathbb{C}^*)^s$. Notemos que $(1, \dots, 1) \in \mathbf{V}(I) \cap (\mathbb{C}^*)^s$ por lo que $\mathbf{V}(I) \cap (\mathbb{C}^*)^s \neq \emptyset$. Ahora, dados $t = (t_1, \dots, t_s), t' = (t'_1, \dots, t'_s) \in \mathbf{V}(I) \cap (\mathbb{C}^*)^s$ se tiene que:

- I) $t_i, t'_i \neq 0$ para todo $i \in \{1, \dots, s\}$, de donde $t_i (t'_i)^{-1} \neq 0$ para todo $i \in \{1, \dots, s\}$, es decir, $t(t'^{-1}) \in (\mathbb{C}^*)^s$,
- II) $t^\alpha - t^\beta = (t')^\alpha - (t')^\beta = 0$ para todo $x^\alpha - x^\beta \in I$, y como $t_i, t'_i \neq 0$ para todo $i \in \{1, \dots, s\}$, se tiene que $t^{\alpha-\beta} = (t')^{\alpha-\beta} = 1$, por lo que $1 = t^{\alpha-\beta} (t')^{\beta-\alpha} = (t(t'^{-1}))^{\alpha-\beta}$, y así, $(t(t'^{-1}))^\alpha - (t(t'^{-1}))^\beta = 0$, es decir, $(t(t'^{-1})) \in \mathbf{V}(I)$.

Por lo tanto $(t(t'^{-1})) \in \mathbf{V}(I) \cap (\mathbb{C}^*)^s$ y entonces tenemos que $\mathbf{V}(I) \cap (\mathbb{C}^*)^s$ es subgrupo de $(\mathbb{C}^*)^s$. Luego, como $\mathbf{V}(I) \subseteq \mathbb{C}^s$ es irreducible, se sigue que $\mathbf{V}(I) \cap$

$(\mathbb{C}^*)^s$ es irreducible en $(\mathbb{C}^*)^s$ y entonces, por la proposición 2.1.5, tenemos que $\mathbf{V}(I) \cap (\mathbb{C}^*)^s$ es un toro.

Como las proyecciones $\pi_i : (\mathbf{V}(I) \cap (\mathbb{C}^*)^s) \rightarrow \mathbb{C}^*$ son morfismos que también son homomorfismos de grupos, se tiene por definición que éstas son caracteres de $\mathbf{V}(I) \cap (\mathbb{C}^*)^s$, y entonces existe $\mathcal{A} = \{\chi^{m_1}, \dots, \chi^{m_s}\}$ tal que $\pi_i = \chi^{m_i}$ para toda $i \in \{1, \dots, s\}$. Notamos que $\Phi_{\mathcal{A}}(t) = t$ para todo $t \in \mathbf{V}(I) \cap (\mathbb{C}^*)^s$, y de ahí que $Y_{\mathcal{A}} = \overline{\Phi_{\mathcal{A}}(\mathbf{V}(I) \cap (\mathbb{C}^*)^s)} = \overline{\mathbf{V}(I) \cap (\mathbb{C}^*)^s}$, pero como $\mathbf{V}(I) \cap (\mathbb{C}^*)^s$ es abierto no vacío en $\mathbf{V}(I)$ y $\mathbf{V}(I)$ es irreducible (por ser I primo), entonces $\mathbf{V}(I) \cap (\mathbb{C}^*)^s$ es denso en $\mathbf{V}(I)$, y concluimos que $Y_{\mathcal{A}} = \overline{\mathbf{V}(I) \cap (\mathbb{C}^*)^s} = \mathbf{V}(I)$. Por último, como I es primo, tenemos por el Nullstellensatz que $I = \mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = \mathbf{I}(Y_{\mathcal{A}})$. Así, por la observación 2.2.13, se tiene que I es ideal tórico. \square

Observación 2.2.15. La demostración de la proposición 2.2.14 nos dio una equivalencia más importante: un ideal es tórico si y sólo si es de la forma $\mathbf{I}(Y_{\mathcal{A}})$ para algún subconjunto finito $\mathcal{A} \subseteq M$, con M la retícula de caracteres de $(\mathbb{C}^*)^n$.

Ejemplo 2.2.16. Sea $\mathbb{Z}(3, -2) \subseteq \mathbb{Z}^2$ la subretícula generada por $(3, -2)$ y tomemos $I = \langle x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} - x^{\beta_1} y^{\beta_2} \mid (\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{N}^2, (\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2) \in \mathbb{Z}(3, -2) \rangle$. Veamos que $I = \langle x^3 - y^2 \rangle$.

Una contención está dada pues $x^3 - y^2 = x^3 y^0 - x^0 y^2$ y $(3, 0), (0, 2) \in \mathbb{N}^2, (3, 0) - (0, 2) = (3, -2) \in \mathbb{Z}(3, -2)$.

Para ver que $I \subseteq \langle x^3 - y^2 \rangle$, tomemos $(t_1, t_2) \in \mathbf{V}(\langle x^3 - y^2 \rangle) = \mathbf{V}(x^3 - y^2)$ y demostremos que $(t_1, t_2) \in \mathbf{V}(I)$, es decir, si $(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{N}^2, (\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2) \in \mathbb{Z}(3, -2)$ entonces

$$t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2} - t_1^{\beta_1} t_2^{\beta_2} = 0.$$

Sea $k \in \mathbb{Z}$ tal que $(\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2) = (3k, -2k)$. Si $(t_1, t_2) = (0, 0)$ entonces se satisface trivialmente la ecuación de arriba. En caso de que $(t_1, t_2) \neq (0, 0)$ tenemos que $t_1^3 - t_2^2 = 0$, pues $(t_1, t_2) \in \mathbf{V}(x^3 - y^2)$, de donde

$$1 = 1^k = t_1^{3k} / t_2^{2k} = t_1^{3k} t_2^{-2k} = t_1^{\alpha_1 - \beta_1} t_2^{\alpha_2 - \beta_2} = t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2} t_1^{-\beta_1} t_2^{-\beta_2} = t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2} / t_1^{\beta_1} t_2^{\beta_2}$$

y la ecuación se satisface. Entonces $\mathbf{V}(x^3 - y^2) \subseteq \mathbf{V}(I)$ y dado que $\langle x^3 - y^2 \rangle$ es primo, tenemos por Nullstellensatz que

$$I \subseteq \mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) \subseteq \mathbf{I}(\mathbf{V}(x^3 - y^2)) = \sqrt{\langle x^3 - y^2 \rangle} = \langle x^3 - y^2 \rangle.$$

Por lo tanto, I es tórico y su variedad tórica asociada es $\mathbf{V}(x^3 - y^2)$, es decir, la cúspide.

2.2.3. Semigrupos afines

Ahora daremos la última caracterización que veremos: variedades tóricas a partir de semigrupos afines. Esta caracterización terminará de darnos las herramientas combinatorias que necesitamos. Veremos la relación que tienen los semigrupos afines con el anillo de coordenadas de una variedad tórica y a partir de esta relación es como asociaremos esta estructura algebraica con la variedad.

Definición 2.2.17. Un *semigrupo afín* es un semigrupo conmutativo \mathbf{S} de la forma $\mathbb{N}\mathcal{A}$ para algún subconjunto finito $\mathcal{A} \subseteq M$, donde M es la retícula de caracteres de algún toro $(\mathbb{C}^*)^n$.

Definición 2.2.18. Dado un semigrupo afín $\mathbf{S} \subseteq M$, el *álgebra de semigrupo* $\mathbb{C}[\mathbf{S}]$ es el \mathbb{C} -espacio vectorial

$$\mathbb{C}[\mathbf{S}] = \left\{ \sum_{\chi^m \in \mathbf{S}} c_m \chi^m \mid c_m \in \mathbb{C} \text{ y } c_m = 0 \text{ para casi todo } \chi^m \in \mathbf{S} \right\}$$

con base \mathbf{S} y con un producto inducido por la operación de \mathbf{S} que lo convierte en una \mathbb{C} -álgebra.

Para demostrar la proposición que nos interesa acerca de los semigrupos afines usaremos el siguiente lema.

Lema 2.2.19. *Sea $V \subseteq \mathbb{C}^n$ una variedad afín y $f_1, f_2, \dots, f_s \in \mathbb{C}[V]$. Se tienen los morfismos (entre variedades y entre anillos de coordenadas, respectivamente)*

$$\Phi : V \longrightarrow \mathbb{C}^s \quad \text{y} \quad \Phi^* : \mathbb{C}[x_1, \dots, x_s] \longrightarrow \mathbb{C}[V],$$

dados por $\Phi(p) = (f_1(p), \dots, f_s(p))$ y $\Phi^*(x_i) = f_i$. Si llamamos Y a la cerradura de Zariski de $\Phi(V)$, entonces se tiene que $\mathbf{I}(Y) = \mathbf{Ker}(\Phi^*)$.

Demostración. Sea $f \in \mathbf{I}(\Phi(V))$ y sea $p \in V$. Entonces $\Phi^*(f)(p) = f \circ \Phi(p) = f(\Phi(p)) = 0$, pues $\Phi(p) \in \Phi(V)$ y $f \in \mathbf{I}(\Phi(V))$. Así, $f \in \mathbf{Ker}(\Phi^*)$, de donde $\mathbf{I}(\Phi(V)) \subseteq \mathbf{Ker}(\Phi^*)$.

Luego, si $f \in \mathbf{Ker}(\Phi^*)$ y $(a_1, \dots, a_s) \in \Phi(V)$, entonces existe $p \in V$ tal que $(a_1, \dots, a_s) = \Phi(p)$ y $f(a_1, \dots, a_s) = f(\Phi(p)) = f \circ \Phi(p) = \Phi^*(f)(p) = 0$. Así, $f \in \mathbf{I}(\Phi(V))$, de donde $\mathbf{Ker}(\Phi^*) = \mathbf{I}(\Phi(V))$.

Por último, $\mathbf{V}(\mathbf{I}(\Phi(V))) = \overline{\Phi(V)} = Y$, por lo que $\mathbf{I}(\Phi(V)) = \mathbf{I}(\mathbf{V}(\mathbf{I}(\Phi(V)))) = \mathbf{I}(Y)$. \square

Definición 2.2.20. Dada una \mathbb{C} -álgebra reducida finitamente generada B , denotamos como $\mathbf{Specm}(B)$ a la variedad afín correspondiente.

Proposición 2.2.21. Sea $\mathbf{S} = \mathbb{N}\mathcal{A} \subseteq M$ un semigrupo afín. Entonces:

(a) $\mathbb{C}[\mathbf{S}]$ es un dominio entero y es finitamente generado como \mathbb{C} -álgebra.

(b) $\mathbf{Specm}(\mathbb{C}[\mathbf{S}])$ es una variedad tórica cuyo toro tiene retícula de caracteres isomorfa a $\mathbb{Z}\mathbf{S}$. Más aún, $\mathbf{Specm}(\mathbb{C}[\mathbf{S}]) \cong Y_{\mathcal{A}}$.

Demostración. Para ver que es finitamente generado notemos que si $\mathcal{A} = \{\chi^{m_1}, \dots, \chi^{m_s}\} \subseteq M$ entonces $\chi^m \in \mathbf{S}$ si y sólo si $\chi^m = \chi^{\sum_{i=1}^s n_i m_i}$ para algunas $n_i \in \mathbb{N}$, con lo que tenemos que $\mathbb{C}[\mathbf{S}] = \mathbb{C}[\chi^{m_1}, \dots, \chi^{m_s}]$ siendo el segundo finitamente generado como \mathbb{C} -álgebra.

Además, si tomamos $\mathcal{A}' = \{\chi^{e_1}, \dots, \chi^{e_n}, \chi^{-e_1}, \dots, \chi^{-e_n}\} \subseteq M$, siendo $\{\chi^{e_1}, \dots, \chi^{e_n}\}$ la base canónica de M , tenemos que $\mathbb{N}\mathcal{A}' = M$. Así, M es un semigrupo afín y, haciendo $\chi^{e_i} = t_i$, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[M] &= \left\{ \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_m \chi^m \mid c_m \in \mathbb{C}, c_m = 0 \text{ para casi todo } m \in \mathbb{Z}^n \right\} \\ &= \mathbb{C}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}]. \end{aligned}$$

Entonces $\mathbb{C}[M]$ es un dominio entero y, ya que $\mathbb{C}[\mathbf{S}] \subseteq \mathbb{C}[M]$, se tiene que $\mathbb{C}[\mathbf{S}]$ es también un dominio entero.

Podemos observar que

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[(\mathbb{C}^*)^n] &\cong \mathbb{C}[\mathbf{V}(x_i y_i - 1 \mid i = 1, \dots, n)] \\ &\cong \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n] / \langle x_i y_i - 1 \mid i = 1, \dots, n \rangle \cong \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}] \cong \mathbb{C}[M]. \end{aligned}$$

Para demostrar el inciso (b), si tomamos $\pi : \mathbb{C}[x_1, \dots, x_s] \longrightarrow \mathbb{C}[M]$ ($\cong \mathbb{C}[(\mathbb{C}^*)^n]$) dado por $\pi(x_i) = \chi^{m_i}$ y extendiendo como morfismo de \mathbb{C} -álgebras, podemos notar que $\pi = (\Phi_{\mathcal{A}})^*$ (ver (2.1) para recordar la definición de $\Phi_{\mathcal{A}}$), y por el lema 2.2.19 tenemos que $\mathbf{Ker}(\pi) = \mathbf{I}(Y_{\mathcal{A}})$. Así,

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[Y_{\mathcal{A}}] &= \mathbb{C}[x_1, \dots, x_s] / \mathbf{I}(Y_{\mathcal{A}}) = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_s] / \mathbf{Ker}(\pi) \\ &\cong \pi(\mathbb{C}[x_1, \dots, x_s]) = \mathbb{C}[\chi^{m_1}, \dots, \chi^{m_s}] = \mathbb{C}[\mathbf{S}] \end{aligned}$$

de donde $\mathbf{Specm}(\mathbb{C}[\mathbf{S}]) \cong Y_{\mathcal{A}}$. □

Observación 2.2.22. La parte (b) de la proposición anterior nos dice que una variedad afín es de la forma $\mathbf{Specm}(\mathbb{C}[\mathbf{S}])$ para algún semigrupo afín \mathbf{S} si y sólo si es de la forma $Y_{\mathcal{A}}$ para algún subconjunto finito $\mathcal{A} \subseteq M$. Uniéndolo con la observación 2.2.15, tenemos que una variedad afín es de la forma $\mathbf{Specm}(\mathbb{C}[\mathbf{S}])$ para algún semigrupo afín \mathbf{S} si y sólo si su ideal es tórico.

Ejemplo 2.2.23. Sea M la retícula de caracteres de \mathbb{C}^* . Sea $\mathbf{S} = \mathbb{N}\{\chi^2, \chi^3\} \subseteq M$, de forma que $\mathbb{C}[\mathbf{S}] = \mathbb{C}[\chi^2, \chi^3]$.

Por la proposición 2.2.21 tenemos que

$$\mathrm{Specm}(\mathbb{C}[\mathbf{S}]) \cong Y_{\{\chi^2, \chi^3\}} = \mathbf{V}(x^3 - y^2).$$

2.2.4. Equivalencia de definiciones

En las subsecciones anteriores dimos tres distintas caracterizaciones para algunas variedades tóricas, y vimos que éstas eran equivalentes. En esta subsección veremos que las caracterizaciones anteriores no son exclusivas para algunas variedades tóricas, sino para todas.

Recordemos que cada χ^m es una función $\chi^m : T \rightarrow \mathbb{C}$, por lo que a cada $f \in \mathbb{C}[M] = \{\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_m \chi^m \mid c_m \in \mathbb{C}, c_m = 0 \text{ para casi todo } m \in \mathbb{Z}^n\}$ podemos verlo como una función $f : T \rightarrow \mathbb{C}$. Definimos entonces una acción de T en $\mathbb{C}[M]$ dada por $t \cdot f(p) = f(t \cdot p)$ para todo $p \in T$.

El siguiente lema lo usaremos en la demostración del teorema más importante de la sección (teorema 2.2.25).

Lema 2.2.24. *Sea $A \subseteq \mathbb{C}[M]$ un subespacio vectorial estable bajo la acción de T . Entonces:*

$$A = \bigoplus_{\chi^m \in A} \mathbb{C} \cdot \chi^m.$$

Demostración. Sea $A' = \bigoplus_{\chi^m \in A} \mathbb{C} \cdot \chi^m$. Nótese que $A' \subseteq A$ por ser A un subespacio vectorial. Solo falta demostrar la otra contención.

Sea entonces $f \in A$, $f \neq 0$. En particular, $f \in \mathbb{C}[M]$, por lo que

$$f = \sum_{m \in \mathcal{B}} c_m \chi^m$$

donde $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{Z}^n$ es finito y $c_m \neq 0$ para todo $m \in \mathcal{B}$. Sea $B = \mathbf{Span}(\chi^m \mid m \in \mathcal{B})$, teniendo así que $f \in A \cap B$. Además, $A \cap B$ es de dimensión finita pues B lo es.

Como $t \cdot \chi^m(p) = \chi^m(t \cdot p) = \chi^m(t) \chi^m(p)$ para toda $p \in T$, se tiene que $t \cdot \chi^m = \chi^m(t) \chi^m \in B$ para toda $m \in \mathcal{B}$, con lo que concluimos que B es estable bajo la acción de T (y por lo tanto también $A \cap B$ puesto que A lo es). La proposición 2.1.6 nos dice entonces que

$$A \cap B = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}^n} W_m$$

donde $W_m = \{g \in A \cap B \mid t \cdot g = \chi^m(t)g \text{ para toda } t \in T\}$.

Veamos que podemos reescribir a $A \cap B$ como la suma directa de los W_m donde $\chi^m \in A \cap B$.

Sea $m_0 \in \mathbb{Z}^n$ tal que $W_{m_0} \neq 0$, y sea $g \in W_{m_0}$, $g \neq 0$. En particular, $g \in \mathbb{C}[M]$, de donde existe $\beta \subseteq \mathbb{Z}^n$ finito y $a_m \in \mathbb{C}^*$, $m \in \beta$, tales que $g = \sum_{m \in \beta} a_m \chi^m$. Por un lado, tenemos que:

$$t \cdot g = t \cdot \left(\sum_{m \in \beta} a_m \chi^m \right) = \sum_{m \in \beta} a_m (t \cdot \chi^m) = \sum_{m \in \beta} a_m (\chi^m(t) \chi^m) = \sum_{m \in \beta} (a_m \chi^m(t)) \chi^m.$$

Por otro lado, como $g \in W_{m_0}$:

$$t \cdot g = \chi^{m_0}(t)g = \chi^{m_0}(t) \left(\sum_{m \in \beta} a_m \chi^m \right) = \sum_{m \in \beta} (a_m \chi^{m_0}(t)) \chi^m,$$

pero los χ^m son linealmente independientes (por ser base de $\mathbb{C}[M]$), por lo que $a_m \chi^{m_0}(t) = a_m \chi^m(t)$ para toda $t \in T$ y toda $m \in \beta$, es decir, $\chi^{m_0} = \chi^m$ para toda $m \in \beta$. De esta forma, $\beta = \{m_0\}$ y entonces $g \in \mathbf{Span}(\chi^{m_0})$, de donde $\chi^{m_0} \in \mathbf{Span}(g) \subseteq W_{m_0}$. Entonces $\chi^{m_0} \in W_{m_0}$, y tenemos la igualdad $W_{m_0} = \mathbf{Span}(\chi^{m_0}) = \mathbb{C} \cdot \chi^{m_0}$. En consecuencia, podemos reescribir

$$A \cap B = \bigoplus_{\chi^m \in A \cap B} \mathbb{C} \cdot \chi^m,$$

pero teníamos a f escrito de forma única como combinación lineal de elementos de M , por lo que $\mathcal{B} \subseteq A \cap B \subseteq A$, demostrando así que $f \in A'$. \square

Teorema 2.2.25. *Sea V una variedad afín. Las siguientes son equivalentes:*

- (a) V es una variedad tórica.
- (b) $V = Y_{\mathcal{A}}$ para algún $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{Z}^n$ finito, para algún $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
- (c) $V = \mathbf{V}(I)$ para algún ideal tórico I .
- (d) $V = \mathbf{Specm}(\mathbb{C}[\mathbf{S}])$ para algún semigrupo afín \mathbf{S} .

Demostración. Las equivalencias (b) \Leftrightarrow (c) y (c) \Leftrightarrow (d) son lo que nos dicen las observaciones 2.2.15 y 2.2.22, respectivamente. La implicación (d) \Rightarrow (a) nos lo da la proposición 2.2.21 inciso (b).

Solo falta demostrar la implicación (a) \Rightarrow (d). Sea V una variedad tórica con toro $T \cong (\mathbb{C}^*)^n$ cuya retícula de caracteres es $M \cong \mathbb{Z}^n$.

Como ya vimos, el anillo de coordenadas de T es $\mathbb{C}[M]$, y entonces la inclusión $i : T \hookrightarrow V$ nos induce un morfismo entre anillos de coordenadas (la restricción) $i^* : \mathbb{C}[V] \rightarrow \mathbb{C}[M]$, que es inyectivo pues T es denso en V . Podemos pensar entonces a $\mathbb{C}[V]$ como una subálgebra de $\mathbb{C}[M]$.

Recordemos que la acción de T sobre V está dada por un morfismo, de forma que la asignación $p \mapsto f(t \cdot p)$ es también un morfismo. Se sigue que $\mathbb{C}[V] \subseteq \mathbb{C}[M]$ es un subespacio estable bajo la acción de T . Por el lema 2.2.24 tenemos que

$$\mathbb{C}[V] = \bigoplus_{\chi^m \in \mathbb{C}[V]} \mathbb{C} \cdot \chi^m.$$

Entonces, definiendo $\mathbf{S} = \mathbb{C}[V] \cap M$, vemos que $\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[\mathbf{S}]$.

\mathbf{S} es en efecto un semigrupo afín pues $\mathbf{S} \subseteq M$ y existen $f_1, \dots, f_k \in \mathbb{C}[V]$ tales que $\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[f_1, \dots, f_k]$, pues $\mathbb{C}[V]$ es finitamente generado. Escribiendo a las f_i como combinación lineal de las $\chi^m \in \mathbb{C}[V]$, se puede encontrar un número finito de ellos que generan a \mathbf{S} . \square

2.3. Puntos de una variedad tórica

Recordemos que el Nullstellensatz nos da una biyección entre puntos en una variedad afín y los ideales maximales de su anillo de coordenadas. En el caso de variedades tóricas tenemos un caso especial, ya que le hemos asignado otra estructura algebraica: un semigrupo afín. Veremos que esto nos dará información acerca de la variedad tórica; en específico, nos dará información acerca de los puntos fijos de la acción del toro.

Proposición 2.3.1. *Sea $V = \text{Specm}(\mathbb{C}[\mathbf{S}])$ la variedad tórica del semigrupo afín \mathbf{S} . Entonces hay una correspondencia biyectiva entre los siguientes:*

- (a) Puntos $p \in V$,
- (b) Ideales maximales $\mathfrak{M} \subset \mathbb{C}[\mathbf{S}]$ y
- (c) Homomorfismos de semigrupos $\mathbf{S} \rightarrow \mathbb{C}$, considerando a \mathbb{C} como semigrupo con el producto.

Demostración. La correspondencia entre (a) y (b) es un resultado básico de geometría algebraica. Para la correspondencia entre (a) y (c), consideremos las funciones

$$F : V \rightarrow \{\text{Homomorfismos de semigrupos } \mathbf{S} \rightarrow \mathbb{C}\}$$

$$G : \{\text{Homomorfismos de semigrupos } \mathbf{S} \longrightarrow \mathbb{C}\} \longrightarrow V$$

dadas por $F(p) : \mathbf{S} \longrightarrow \mathbb{C}$, $F(p)(\chi^m) = \chi^m(p)$ y $G(\gamma) = (\gamma(\chi^{m_1}), \dots, \gamma(\chi^{m_s}))$, siendo $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_s\}$ tal que $\mathbf{S} = \text{NM}_{\mathcal{A}}$.

Es fácil ver que $F(p)$ es en efecto un homomorfismo de semigrupos. Para ver que $G(\gamma) \in V$, basta ver (por la proposición 2.2.12) que anula a los polinomios de la forma $x^\alpha - x^\beta$ con $\alpha = (a_1, \dots, a_s)$ y $\beta = (b_1, \dots, b_s)$ tales que

$$\sum_{i=1}^s a_i m_i = \sum_{i=1}^s b_i m_i.$$

Vemos entonces que, como γ es homomorfismo de semigrupos,

$$G(\gamma)^\alpha = \prod_{i=1}^s (\gamma(\chi^{m_i}))^{a_i} = \gamma(\chi^{\sum_{i=1}^s a_i m_i}) = \gamma(\chi^{\sum_{i=1}^s b_i m_i}) = \prod_{i=1}^s (\gamma(\chi^{m_i}))^{b_i} = G(\gamma)^\beta.$$

Así, ambas funciones están bien definidas. Veamos que son inversas una de la otra. Sean entonces $\gamma : \mathbf{S} \longrightarrow \mathbb{C}$ un homomorfismo de semigrupos y $p \in V$.

$$GF(p) = G(F(p)) = (F(p)(\chi^{m_1}), \dots, F(p)(\chi^{m_s})) = (\chi^{m_1}(p), \dots, \chi^{m_s}(p)) = p$$

donde la última igualdad se da gracias a que $\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[\chi^{m_1}, \dots, \chi^{m_s}]$, es decir, las χ^{m_i} son las funciones coordenadas.

Luego, si $\chi^m \in \mathbf{S}$ entonces existen $c_i \in \mathbb{N}$ tales que $\chi^m = \chi^{\sum_{i=1}^s c_i m_i}$. Entonces

$$\begin{aligned} FG(\gamma)(\chi^m) &= F(\gamma(\chi^{m_1}), \dots, \gamma(\chi^{m_s}))(\chi^m) = \chi^m(\gamma(\chi^{m_1}), \dots, \gamma(\chi^{m_s})) \\ &= \chi^{\sum_{i=1}^s c_i m_i}(\gamma(\chi^{m_1}), \dots, \gamma(\chi^{m_s})) = \prod_{i=1}^s [\chi^{m_i}(\gamma(\chi^{m_1}), \dots, \gamma(\chi^{m_s}))]^{c_i} \\ &= \prod_{i=1}^s \gamma(\chi^{m_i})^{c_i} = \gamma(\chi^{\sum_{i=1}^s c_i m_i}) = \gamma(\chi^m) \end{aligned}$$

de donde $FG(\gamma) = \gamma$. Por lo tanto, F y G nos dan la correspondencia buscada. \square

Definición 2.3.2. Un semigrupo afín \mathbf{S} es *puntuado* si $\mathbf{S} \cap (\mathbf{S}^{-1}) = \{\chi^0\}$.

Proposición 2.3.3. Sea $V = \text{Specm}(\mathbb{C}[\mathbf{S}]) = Y_{\mathcal{A}}$ una variedad tórica. Entonces:

- (a) La acción del toro tiene un punto fijo si y sólo si \mathbf{S} es puntuado. En este caso, el único punto fijo está dado por el homomorfismo de semigrupo $\mathbf{S} \rightarrow \mathbb{C}$ definido como

$$\chi^m \mapsto \begin{cases} 1 & m = 0 \\ 0 & m \neq 0 \end{cases}.$$

- (b) Si $\mathcal{A} \subseteq \mathbf{S} \setminus \{0\}$, la acción del toro tiene un punto fijo si y sólo si $0 \in Y_{\mathcal{A}}$. En este caso, el único punto fijo es 0.

Demostración. Sea $p \in V$ y $F(p) : \mathbf{S} \rightarrow \mathbb{C}$ su homomorfismo de semigrupos asociado por la proposición 2.3.1. Tenemos que p es punto fijo si y sólo si $p = t \cdot p$ para todo $t \in T$, si y sólo si $F(p) = F(t \cdot p)$ para todo $t \in T$, es decir, $F(p)(\chi^m) = F(t \cdot p)(\chi^m) = \chi^m(t \cdot p) = \chi^m(t) \cdot \chi^m(p) = \chi^m(t)F(p)(\chi^m)$ para todo $\chi^m \in \mathbf{S}$ y para todo $t \in T$.

Notamos que la ecuación $F(p)(\chi^m) = \chi^m(t)F(p)(\chi^m)$ tiene solución cuando $m = 0$, ya que $F(p)(\chi^0) = 1$ por ser $F(p)$ homomorfismo de semigrupos. En el caso en que $m \neq 0$, debe tenerse $F(p)(\chi^m) = 0$, pues de lo contrario, podemos encontrar $t \in T$ tal que $\chi^m(t) \neq 1$ y de esta forma la ecuación no tendría solución.

Tenemos entonces que p es punto fijo si y sólo si su homomorfismo de semigrupos está dado por

$$\chi^m \mapsto \begin{cases} 1 & m = 0 \\ 0 & m \neq 0 \end{cases}.$$

Esto nos da la unicidad del punto fijo, si hay alguno. Para la existencia veamos que $F(p)$ definido como arriba es un homomorfismo de semigrupos si y sólo si \mathbf{S} es puntuado.

Esto es fácil de ver, pues si \mathbf{S} no fuera puntuado, existe $\chi^m \in (\mathbf{S} \cap \mathbf{S}^{-1}) \setminus \{\chi^0\}$, de donde $1 = F(p)(\chi^0) = F(p)(\chi^m \cdot \chi^{-m}) = F(p)(\chi^m) \cdot F(p)(\chi^{-m}) = 0 \cdot 0 = 0$. Por otra parte, si \mathbf{S} es puntuado, tenemos que $F(p)(\chi^m) \cdot F(p)(\chi^{m'}) = 1$ si y sólo si m y m' son ambos cero, y como no hay inversos, m y m' son cero si y sólo si $m + m' = 0$, que es equivalente a decir que $F(p)(\chi^m \cdot \chi^{m'}) = 1$, es decir, $F(p)$ es un homomorfismo de semigrupos.

Para probar el inciso (b), primero supongamos que $p \in V$ es fijo, de donde $F(p)$ es el morfismo que vimos arriba. Por la demostración de la proposición 2.3.1 tenemos que $p = GF(p) = (F(p)(\chi^{m_1}), \dots, F(p)(\chi^{m_s})) = 0$, puesto que $\chi^{m_i} \in M_{\mathcal{A}} \subseteq \mathbf{S} \setminus \{0\}$ y $F(p)(\chi^m) = 0$ si $m \neq 0$. Así, $0 \in Y_{\mathcal{A}}$, y es éste el punto fijo.

Por último, $0 \in \mathbb{C}^s$ es fijo por la acción de $(\mathbb{C}^*)^s$, por lo que también es fijo por la acción de $Y_{\mathcal{A}} \cap (\mathbb{C}^*)^s$ (que es el toro de $Y_{\mathcal{A}}$, como vimos en la proposición 2.2.9) en $Y_{\mathcal{A}}$, ya que la acción es la misma pero restringida (como vimos también en la proposición 2.2.9). \square

2.4. Morfismos entre variedades tóricas

Dadas dos variedades tóricas nos interesa estudiar los morfismos entre ellas que nos preserven de cierta forma las características que nos interesan acerca de las variedades tóricas. En particular, queremos que la imagen del primer toro esté contenida en el segundo toro de forma que la estructura de grupo y la acción se preserven.

Definición 2.4.1. Sean \mathbf{S}_1 y \mathbf{S}_2 semigrupos afines con variedades tóricas $V_1 = \mathbf{Specm}(\mathbb{C}[\mathbf{S}_1])$ y $V_2 = \mathbf{Specm}(\mathbb{C}[\mathbf{S}_2])$. Un morfismo $\phi : V_1 \rightarrow V_2$ es **tórico** si el homomorfismo de anillos de coordenadas $\phi^* : \mathbb{C}[\mathbf{S}_2] \rightarrow \mathbb{C}[\mathbf{S}_1]$ es inducido por un homomorfismo de semigrupos $\hat{\phi} : \mathbf{S}_2 \rightarrow \mathbf{S}_1$.

Enseguida queremos describir los morfismos tóricos en términos únicamente de los toros y no de los semigrupos afines asociados a las variedades tóricas, de forma que los requisitos que pedimos al inicio de la sección se cumplan.

Para esto, necesitamos el siguiente resultado sobre extensiones de homomorfismos de semigrupos. Para una versión más general se puede consultar [WNR, cap. IV, sec. 20, Theorem 20.4.].

Lema 2.4.2. Sean \mathbf{S}_1 y \mathbf{S}_2 dos semigrupos afines, con $M_1 = \mathbb{Z}\mathbf{S}_1$ y $M_2 = \mathbb{Z}\mathbf{S}_2$. Si $\gamma : \mathbf{S}_2 \rightarrow \mathbf{S}_1$ es un homomorfismo de semigrupos, éste se extiende de forma única a un homomorfismo de grupos $\delta : M_2 \rightarrow M_1$.

Demostración. Como $M_2 = \mathbb{Z}\mathbf{S}_2 = \mathbb{N}(\mathbf{S}_2 \cup \mathbf{S}_2^{-1})$, todo elemento $\chi^m \in M_2$ se ve de la forma $\chi^m = \chi^{m_1} \cdot \chi^{-m_2}$ con $\chi^{m_1}, \chi^{m_2} \in \mathbf{S}_2$. Definimos entonces $\delta : M_2 \rightarrow M_1$ como $\delta(\chi^{m_1} \cdot \chi^{-m_2}) = \gamma(\chi^{m_1}) \cdot (\gamma(\chi^{m_2}))^{-1}$.

Para ver que está bien definida, sea $\chi^m \in M_2$ y sean $\chi^{m_1}, \chi^{m_2}, \chi^{n_1}, \chi^{n_2} \in \mathbf{S}_2$ tales que $\chi^m = \chi^{m_1} \cdot \chi^{-m_2} = \chi^{n_1} \cdot \chi^{-n_2}$. Entonces, por ser M_2 grupo abeliano, se tiene que $\chi^{m_1} \cdot \chi^{n_2} = \chi^{n_1} \cdot \chi^{m_2}$, por lo que

$$\gamma(\chi^{m_1}) \cdot \gamma(\chi^{n_2}) = \gamma(\chi^{m_1} \cdot \chi^{n_2}) = \gamma(\chi^{n_1} \cdot \chi^{m_2}) = \gamma(\chi^{n_1}) \cdot \gamma(\chi^{m_2}) \in M_1,$$

y así,

$$\delta(\chi^{m_1} \cdot \chi^{-m_2}) = \gamma(\chi^{m_1}) \cdot (\gamma(\chi^{m_2}))^{-1} = \gamma(\chi^{n_1}) \cdot (\gamma(\chi^{n_2}))^{-1} = \delta(\chi^{n_1} \cdot \chi^{-n_2}).$$

Además, es homomorfismo de grupos pues

$$\begin{aligned} \delta((\chi^{m_1} \cdot \chi^{-m_2}) \cdot (\chi^{n_1} \cdot \chi^{-n_2})) &= \delta(\chi^{m_1+n_1} \cdot \chi^{-(m_2+n_2)}) = \gamma(\chi^{m_1+n_1}) \cdot (\gamma(\chi^{m_2+n_2}))^{-1} \\ &= (\gamma(\chi^{m_1}) \cdot (\gamma(\chi^{m_2}))^{-1}) \cdot (\gamma(\chi^{n_1}) \cdot (\gamma(\chi^{n_2}))^{-1}) = \delta(\chi^{m_1} \cdot \chi^{-m_2}) \cdot \delta(\chi^{n_1} \cdot \chi^{-n_2}). \end{aligned}$$

Por último, este homomorfismo de grupos es el único que extiende a γ , pues si $\delta' : M_2 \rightarrow M_1$ es una extensión de γ , tenemos que

$$\delta'(\chi^{m_1} \cdot \chi^{-m_2}) = \delta'(\chi^{m_1}) \cdot (\delta'(\chi^{m_2}))^{-1} = \gamma(\chi^{m_1}) \cdot (\gamma(\chi^{m_2}))^{-1} = \delta(\chi^{m_1} \cdot \chi^{-m_2})$$

para toda $\chi^{m_1} \cdot \chi^{-m_2} \in M_2$, es decir, $\delta' = \delta$. \square

Proposición 2.4.3. *Sean T_1 y T_2 los toros de las variedades tóricas V_1 y V_2 , respectivamente. Entonces:*

- (a) *Un morfismo $\phi : V_1 \rightarrow V_2$ es tórico si y sólo si $\phi(T_1) \subseteq T_2$ y $\phi|_{T_1} : T_1 \rightarrow T_2$ es un homomorfismo de grupos.*
- (b) *Un morfismo tórico $\phi : V_1 \rightarrow V_2$ es **equivariante**, es decir,*

$$\phi(t \cdot p) = \phi(t) \cdot \phi(p) \text{ para todo } t \in T_1 \text{ y } p \in V_1.$$

Demostración. Sean \mathbf{S}_i los semigrupos de V_i respectivamente, y $M_i = \mathbb{Z}\mathbf{S}_i$ sus retículas de caracteres, $i = 1, 2$, según la proposición 2.2.21.

Si ϕ^* es inducido por un homomorfismo de semigrupos $\widehat{\phi} : \mathbf{S}_2 \rightarrow \mathbf{S}_1$, por el lema 2.4.2, éste se extiende a un homomorfismo de grupos $\widehat{\phi} : M_2 \rightarrow M_1$, de donde tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{S}_2 & \xrightarrow{\widehat{\phi}} & \mathbf{S}_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_2 & \xrightarrow{\widehat{\phi}} & M_1 \end{array},$$

que extendiéndolo a un diagrama de \mathbb{C} -álgebras, nos da

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[\mathbf{S}_2] & \xrightarrow{\phi^*} & \mathbb{C}[\mathbf{S}_1] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}[M_2] & \xrightarrow{\phi^*} & \mathbb{C}[M_1] \end{array}.$$

Sean $\mathcal{A}_1 = \{\chi^{m_1}, \dots, \chi^{m_s}\} \subseteq M_1$ y $\mathcal{A}_2 = \{\chi^{n_1}, \dots, \chi^{n_r}\} \subseteq M_2$ tales que $\mathbf{S}_i = \mathbb{N}\mathcal{A}_i$ y $V_i = Y_{\mathcal{A}_i}$. Entonces $\mathbb{C}[\mathbf{S}_1] = \mathbb{C}[\chi^{m_1}, \dots, \chi^{m_s}]$, $\mathbb{C}[\mathbf{S}_2] = \mathbb{C}[\chi^{n_1}, \dots, \chi^{n_r}]$, $\mathbb{C}[M_1] = \mathbb{C}[\chi^{\pm m_1}, \dots, \chi^{\pm m_s}]$ y $\mathbb{C}[M_2] = \mathbb{C}[\chi^{\pm n_1}, \dots, \chi^{\pm n_r}]$.

48CAPÍTULO 2. INTRODUCCIÓN A LAS VARIEDADES TÓRICAS AFINES

Sea $T'_1 \subseteq \mathbb{C}^{2s}$ la variedad asociada a $\mathbb{C}[M_1]$. Consideremos el isomorfismo $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_s]/\mathbf{I}(T'_1) \cong \mathbb{C}[M_1]$ dado por $x_i \mapsto \chi^{m_i}$, $y_i \mapsto \chi^{-m_i}$. En particular, $x_i y_i - 1 \in \mathbf{I}(T'_1)$, por lo que cada punto de T'_1 es de la forma $(t_1, \dots, t_s, t_1^{-1}, \dots, t_s^{-1})$. Notemos que la imagen de la proyección $(t_1, \dots, t_s, t_1^{-1}, \dots, t_s^{-1}) \mapsto (t_1, \dots, t_s)$ es T_1 . Así, la inclusión $\mathbb{C}[\mathbf{S}_1] \hookrightarrow \mathbb{C}[M_1]$ induce un morfismo $T_1 \hookrightarrow V_1$. Análogamente, la inclusión $\mathbb{C}[\mathbf{S}_2] \hookrightarrow \mathbb{C}[M_2]$ induce el morfismo $T_2 \hookrightarrow V_2$.

Por lo anterior, el diagrama de arriba nos induce el diagrama

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\phi} & V_2 \\ \uparrow & & \uparrow \\ T_1 & \xrightarrow{\phi|_{T_1}} & T_2 \end{array},$$

el cual nos da la contención $\phi(T_1) \subseteq T_2$.

Para ver que $\phi|_{T_1}$ es, en efecto, un homomorfismo de grupos, podemos ver que $\widehat{\phi} : \mathbf{S}_2 \rightarrow \mathbf{S}_1$ está dada por $\widehat{\phi}(\chi^{n_i}) = \chi^{\sum_{j=1}^s a_{i,j} m_j} \in \mathbf{S}_1$ para algunas $a_{i,j} \in \mathbb{N}$. Sean $a_i = (a_{i,1}, \dots, a_{i,s})$, $i = 1, \dots, r$. Entonces ϕ (y en particular $\phi|_{T_1}$) está dada por

$$\begin{aligned} \phi(x_1, \dots, x_s) &= (\widehat{\phi}(\chi^{n_1})(x_1, \dots, x_s), \dots, \widehat{\phi}(\chi^{n_r})(x_1, \dots, x_s)) \\ &= (\chi^{\sum_{j=1}^s a_{1,j} m_j}(x_1, \dots, x_s), \dots, \chi^{\sum_{j=1}^s a_{r,j} m_j}(x_1, \dots, x_s)) = (x^{a_1}, \dots, x^{a_r}). \end{aligned}$$

Como está determinada por monomios, se tiene que $\phi|_{T_1}$ es un homomorfismo de grupos.

Inversamente, si ϕ cumple las condiciones, entonces se tiene de nuevo un diagrama

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\phi} & V_2 \\ \uparrow & & \uparrow \\ T_1 & \xrightarrow{\phi|_{T_1}} & T_2 \end{array}$$

que nos induce el diagrama de \mathbb{C} -álgebras

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[\mathbf{S}_2] & \xrightarrow{\phi^*} & \mathbb{C}[\mathbf{S}_1] \\ \downarrow i_2 & & \downarrow i_1 \\ \mathbb{C}[M_2] & \xrightarrow{(\phi|_{T_1})^*} & \mathbb{C}[M_1] \end{array},$$

donde $(\phi|_{T_1})^*(\chi^{n_i}) = \chi^{n_i} \circ \phi|_{T_1}$ para cada $n_i \in \mathcal{A}_2$, pero tanto χ^{n_i} como $\phi|_{T_1}$ son morfismos que son también homomorfismos de grupos, por lo que

la composición también lo es; es decir $(\phi|_{T_1})^*(\chi^{n_i}) : T_1 \longrightarrow \mathbb{C}^* \in M_1$. Digamos $(\phi|_{T_1})^*(\chi^{n_i}) = \chi^{k_i} \in M_1$. Como el diagrama de arriba conmuta, y tenemos que $\chi^{n_i} \in \mathbf{S}_2$ para cada $n_i \in \mathcal{A}_2$, tenemos que $\chi^{k_i} = (\phi|_{T_1})^*(\chi^{n_i}) = (\phi|_{T_1})^* \circ i_2(\chi^{n_i}) = i_1 \circ \phi^*(\chi^{n_i})$, de donde $i_1(\phi^*(\chi^{n_i})) = \chi^{k_i}$ nos implica que $\chi^{k_i} \in \mathbb{C}[\mathbf{S}_1]$, pero al ser un carácter, tenemos que $\chi^{k_i} \in \mathbf{S}_1$.

Así, $\widehat{\phi} := \phi^*|_{\mathbf{S}_2} : \mathbf{S}_2 \longrightarrow \mathbf{S}_1$ está bien definida, y es homomorfismo de grupos pues $\widehat{\phi}(\chi^n \cdot \chi^m)(t) = \widehat{\phi}(\chi^{n+m})(t) = \chi^{n+m} \circ \phi|_{T_1}(t) = \chi^{n+m}(\phi|_{T_1}(t)) = \chi^n(\phi|_{T_1}(t)) \cdot \chi^m(\phi|_{T_1}(t)) = \chi^n \circ \phi|_{T_1}(t) \cdot \chi^m \circ \phi|_{T_1}(t) = \widehat{\phi}(\chi^n)(t) \cdot \widehat{\phi}(\chi^m)(t)$, de modo que $\widehat{\phi}(\chi^n \cdot \chi^m) = \widehat{\phi}(\chi^n) \cdot \widehat{\phi}(\chi^m)$.

Para el inciso (b), supongamos que $\phi : V_1 \longrightarrow V_2$ es tórico. Entonces, usando el inciso (a), sabemos que $\phi|_{T_1} : T_1 \longrightarrow T_2$ es un homomorfismo de grupos, de donde se tiene el diagrama conmutativo de grupos

$$\begin{array}{ccc} T_1 \times T_1 & \longrightarrow & T_1 \\ \phi|_{T_1} \times \phi|_{T_1} \downarrow & & \downarrow \phi|_{T_1} \\ T_2 \times T_2 & \longrightarrow & T_2 \end{array}$$

donde las flechas horizontales son la acción del toro en sí mismo.

Llamemos $I_x = \mathbf{I}(V_1) \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_s]$ y sea $I_y \subseteq \mathbb{C}[y_1, \dots, y_s]$ el ideal generado por los mismos polinomios que I_x pero en las variables y_1, \dots, y_s , de forma que $\mathbf{V}(I_x, I_y) = V_1 \times V_1 \subseteq \mathbb{C}^{2s}$. Como $\overline{T_1} = V_1$, tenemos que $\mathbf{I}(T_1) = \mathbf{I}(V_1) = I_x$. Entonces $\mathbf{I}(T_1 \times T_1) = \langle I_x, I_y \rangle = \mathbf{I}(V_1 \times V_1)$, de donde concluimos que $\overline{T_1 \times T_1} = V_1 \times V_1$ y que $T_1 \times T_1$ es denso en $T_1 \times V_1$.

Por lo tanto, $\phi|_{T_1} \times \phi|_{T_1} : T_1 \times T_1 \longrightarrow T_2 \times V_2$ determina de forma unívoca a $\phi|_{T_1} \times \phi : T_1 \times V_1 \longrightarrow T_2 \times V_2$, de forma que se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} T_1 \times V_1 & \longrightarrow & V_1 \\ \phi|_{T_1} \times \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ T_2 \times V_2 & \longrightarrow & V_2 \end{array},$$

donde las flechas horizontales son la acción del toro en la variedad, es decir, $\phi(t \cdot p) = \phi(t) \cdot \phi(p)$ para toda $t \in T_1$ y toda $p \in V_1$. \square

Capítulo 3

Modificación de Nash de Variedades Tóricas

En este capítulo definiremos la modificación de Nash. Para esto utilizaremos los conceptos que vimos a detalle en el capítulo 1.

Enseguida aplicaremos la modificación de Nash a las variedades tóricas afines y veremos que en este caso la iteración de la modificación de Nash se vuelve un algoritmo combinatorio que depende de los generadores del semigrupo asociado a la variedad.

3.1. Definición de modificación de Nash

Sea $X \subseteq \mathbb{C}^n$ una variedad afín irreducible de dimensión d . Recordemos que $X \setminus \text{Sing}(X) = \{p \in X \mid \dim_{\mathbb{C}} T_p X = \dim X = d\}$. Viendo a los espacios tangente como puntos de la Grassmanniana $\mathbf{G}(d, n)$ podemos entonces definir la función

$$\begin{aligned} G : X \setminus \text{Sing}(X) &\longrightarrow \mathbf{G}(d, n) \\ p &\longmapsto T_p X. \end{aligned}$$

A esta función le llamaremos **función de Gauss**. Sea $\text{gr}(G)$ la gráfica de G . Tenemos entonces que

$$\text{gr}(G) \subseteq X \times \mathbf{G}(d, n).$$

Denotamos como X^* a la cerradura de Zariski de $\text{gr}(G)$ en $X \times \mathbf{G}(d, n)$ (como variedad cuasi-proyectiva según los teoremas 1.3.10 y 1.4.8) y sea

$$v : X^* \longrightarrow X$$

la restricción a X^* de la proyección $\pi : X \times \mathbf{G}(d, n) \longrightarrow X$.

Definición 3.1.1. A la pareja (X^*, v) la llamaremos la **modificación de Nash** de la variedad X .

Ejemplo 3.1.2. Tomemos nuestro ejemplo base: la cúspide $X = \mathbf{V}(x^3 - y^2)$. En el ejemplo 1.2.7 vimos que para un punto $(x, y) \in X \setminus \{(0, 0)\}$ su espacio tangente es $T_{(x,y)}X = \mathbf{Span}((2y, 3x^2))$ que corresponde al punto del espacio proyectivo $[2y : 3x^2] = [2yx : 3x^3] = [2yx : 3y^2] = [2x : 3y] \in \mathbb{P}^1$. Enseguida calculamos la modificación de Nash de X y damos ecuaciones explícitas en cartas afines. Sean $U_0 := X \times \mathbb{A}_0^1$ y $U_1 := X \times \mathbb{A}_1^1$ las cartas afines de $X \times \mathbb{P}^1$.

Usando que $X^* = \overline{\{(x, y), [2x : 3y] \mid x^3 - y^2 = 0, x \neq 0 \neq y\}}$ y que U_0 es abierto, tenemos que

$$\begin{aligned} X^* \cap U_0 &= \overline{\{(x, y), [2x : 3y] \mid x^3 - y^2 = 0, x \neq 0 \neq y\}} \cap U_0 \\ &= \overline{\{(x, y, (3/2)(y/x)) \mid x^3 - y^2 = 0, x \neq 0 \neq y\}}. \end{aligned}$$

Haciendo un cambio de coordenadas tenemos que

$$\begin{aligned} X^* \cap U_0 &\cong \overline{\{(x, y, y/x) \mid x^3 - y^2 = 0, x \neq 0 \neq y\}} \\ &= \overline{\{(x, y, u) \mid x^3 - y^2 = 0, ux = y, x \neq 0 \neq y\}} \\ &\cong \overline{\{(x, u) \mid x^3 - (ux)^2 = 0, x \neq 0\}} \\ &= \overline{\{(x, u) \mid x - u^2 = 0, x \neq 0\}} \\ &= \mathbf{V}(x - u^2) \setminus \{(0, 0)\} \\ &= \mathbf{V}(x - u^2). \end{aligned}$$

Un cálculo análogo muestra que

$$X^* \cap U_1 \cong \mathbf{V}(u^3y - 1).$$

Ejemplo 3.1.3. Sea $X = \mathbf{V}(x^3 + x^2 - y^2) \subseteq \mathbb{C}^2$ (llamada **curva nodal**). Esta variedad tiene un punto singular: el $(0, 0)$. En este ejemplo vamos a calcular explícitamente algunos elementos de la preimagen de $(0, 0)$ bajo v .

En el caso en que $(a, b) \neq (0, 0)$ podemos ver que $T_{(a,b)}X = \mathbf{Ker}(3a^2 + 2a, -2b) = \mathbf{V}((3a^2 + 2a)x - 2by)$ es una recta, por lo que la función de Gauss está dada por $G(a, b) = \mathbf{Span}((2b, 3a^2 + 2a)) \sim [2b : 3a^2 + 2a] \in \mathbb{P}^1$.

La modificación de Nash es entonces

$$X^* = \overline{\{(x, y), [2y : 3x^2 + 2x] \mid x^3 + x^2 = y^2, (x, y) \neq (0, 0)\}} \subseteq X \times \mathbb{P}^1$$

junto con el morfismo

$$v : X^* \longrightarrow X$$

$$((x, y), [z : w]) \mapsto (x, y).$$

Al tomar la cerradura, en particular estamos agregando límites de sucesiones $(p_n, T_{p_n}X)$ donde $\{p_n\} \subseteq X \setminus \{(0, 0)\}$ es cualquier sucesión que converge a $(0, 0)$. Enseguida calculamos algunos de estos límites de manera explícita. Tomemos para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ el punto $p_n := (1/n, \sqrt{1/n^2 + 1/n^3}) \in X \setminus \{(0, 0)\}$. Esta sucesión converge a $(0, 0)$, y la sucesión de espacios tangente es

$$\begin{aligned} T_{p_n}X &= \left[2\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}} : \frac{3}{n^2} + \frac{2}{n} \right] = \left[n \left(2\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}} \right) : n \left(\frac{3}{n^2} + \frac{2}{n} \right) \right] \\ &= \left[2\sqrt{1 + \frac{1}{n}} : \frac{3}{n} + 2 \right] \longrightarrow [2 : 2] = [1 : 1]. \end{aligned}$$

Si tomamos ahora la sucesión $\{p_n = (1/n, -\sqrt{1/n^2 + 1/n^3})\} \subseteq X \setminus \{(0, 0)\}$ vemos que $T_{p_n}X \longrightarrow [-1 : 1]$.

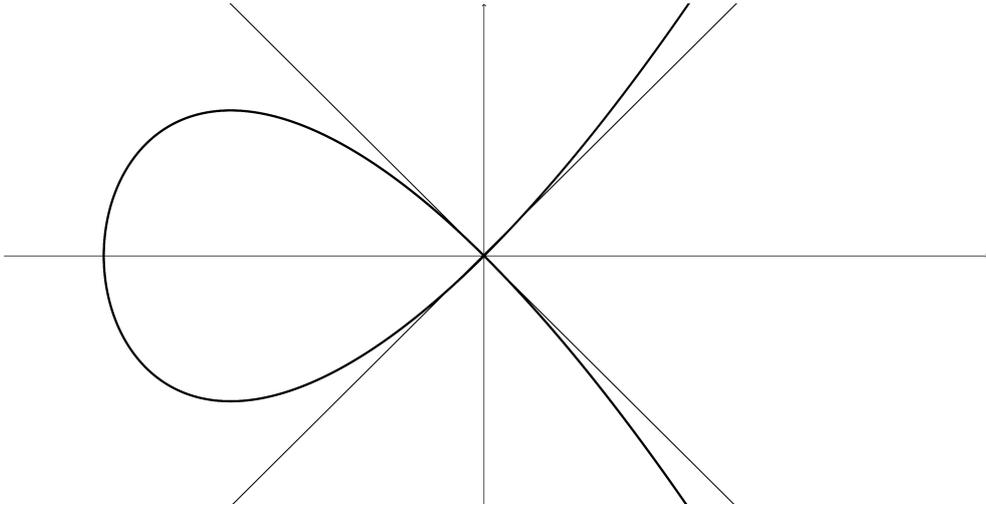


Figura 3.1: Curva nodal y límites de espacios tangentes

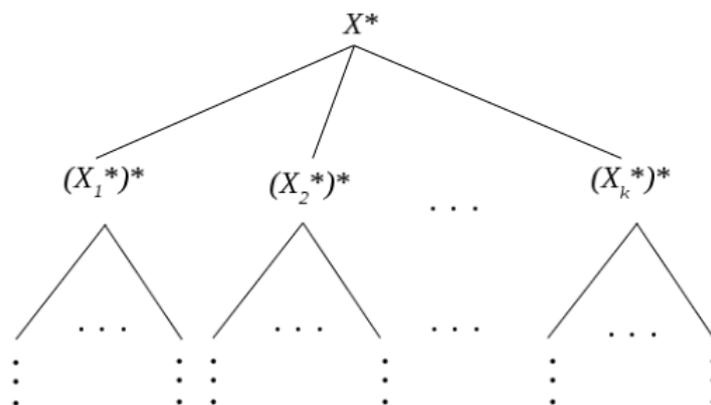
Observación 3.1.4. Los límites que calculamos en el ejemplo anterior son de hecho todos los límites posibles. Esto es consecuencia de un resultado general: el conjunto de límites de espacios tangentes a una curva en un punto coincide con su cono tangente en dicho punto (ver [FSH, sec. 8.2.] y [CLO, sec. 9.7., Theorem 6]). En este ejemplo el cono tangente a X en $(0, 0)$ está dado por $\mathbf{V}(x^2 - y^2)$.

Por otro lado, la cerradura de Zariski de $\text{gr}(G)$ coincide con la cerradura en la topología usual en el espacio proyectivo (ver [MFD, Theorem 2.33]). Por lo tanto, en el ejemplo anterior $v^{-1}(0, 0)$ contiene exactamente los dos límites que calculamos en el ejemplo.

Los ejemplos anteriores ilustran las siguientes propiedades:

1. La modificación de Nash separa puntos singulares en función de los límites de espacios tangentes (ver el ejemplo 3.1.3).
2. Si X es una variedad afín con singularidades, podría pasar que X^* no tenga singularidades (ver el ejemplo 3.1.2).

En caso de que X^* también tuviera singularidades, podríamos aplicar nuevamente la modificación de Nash a cada carta afín y así sucesivamente. Esto daría lugar a un árbol donde cada vértice corresponde a una carta afín de la modificación de Nash:



Surgen entonces las siguientes preguntas (ver [NBL], [SMP]):

1. Dada una variedad afín irreducible singular, ¿la iteración finita de este proceso llega al punto de tener todas las cartas afines no singulares?
2. Si ese es el caso, ¿cuántas iteraciones habrá que hacer?

En la introducción dimos un recuento de los resultados conocidos respecto estas preguntas. En el último capítulo de esta tesis exploraremos estas preguntas en el caso de curvas tóricas. Para eso, en la siguiente sección estudiaremos el caso general de la modificación de Nash de variedades tóricas.

3.2. Modificación de Nash de variedades tóricas

En esta sección estudiaremos la modificación de Nash de variedades tóricas y mostraremos que dicha construcción puede describirse en términos de los generadores del semigrupo asociado a la variedad.

Sea $\mathcal{A} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\} \subseteq \mathbb{Z}^d$ un conjunto finito y consideremos el morfismo monomial asociado (ver (2.1))

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{A}} : (\mathbb{C}^*)^d &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ t &\longmapsto (t^{\gamma_1}, \dots, t^{\gamma_n}) \end{aligned}$$

(notar que estamos identificando la retícula de caracteres con \mathbb{Z}^d). Como vimos en el capítulo anterior, el toro de la variedad tórica asociada al conjunto \mathcal{A} tiene retícula de caracteres isomorfa a $\mathbb{Z}\mathcal{A}$ (ver la proposición 2.2.9). Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\mathbb{Z}\mathcal{A} = \mathbb{Z}^d$.

Lema 3.2.1. *Sea $\mathcal{A} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\} \subseteq \mathbb{Z}^d$ tal que $\mathbb{Z}\mathcal{A} = \mathbb{Z}^d$. Entonces $\dim Y_{\mathcal{A}} = d$.*

Demostración. Sea $T \subseteq Y_{\mathcal{A}}$ el toro de la variedad tórica $Y_{\mathcal{A}}$. Como T tiene retícula de caracteres isomorfa a $\mathbb{Z}\mathcal{A} = \mathbb{Z}^d$, entonces $T \cong (\mathbb{C}^*)^d$. Además, las inclusiones $T \hookrightarrow Y_{\mathcal{A}}$ y $(\mathbb{C}^*)^d \hookrightarrow \mathbb{C}^d$ son birracionales, por lo que (ver corolario 1.2.12)

$$\dim Y_{\mathcal{A}} = \dim T = \dim(\mathbb{C}^*)^d = \dim \mathbb{C}^d = d.$$

□

En el ejemplo 3.1.2 calculamos la modificación de Nash de la cúspide (que es una variedad tórica). En ese ejemplo podemos observar dos cosas:

- Las entradas de $T_p X$ para $p \neq (0, 0)$ son monomios.
- $X^* \cap U_0$ y $X^* \cap U_1$ son ambas variedades tóricas (pues están definidas por ideales tóricos).

Veremos que esto es cierto en general en el caso tórico.

Primero notemos que $(\mathbb{C}^*)^d$ es no singular, por lo que $T \subseteq Y_{\mathcal{A}} \setminus \text{Sing}(Y_{\mathcal{A}})$ y como T es denso en $Y_{\mathcal{A}}$ entonces T es denso en $Y_{\mathcal{A}} \setminus \text{Sing}(Y_{\mathcal{A}})$. Esto último, junto con el hecho de que la función de Gauss es una función continua, nos da como resultado que

$$X^* = \overline{\text{gr}(G)} = \overline{\text{gr}(G|_T)},$$

es decir, basta con tomar la función de Gauss restringida al toro para poder calcular la modificación de Nash. Esto nos ayuda mucho con los cálculos, pues sabemos que

$$T = \Phi_{\mathcal{A}}((\mathbb{C}^*)^d) = \{(t^{\gamma_1}, \dots, t^{\gamma_n}) \mid t \in (\mathbb{C}^*)^d\}.$$

Luego, como $\Phi_{\mathcal{A}}(t) = (t^{\gamma_1}, \dots, t^{\gamma_n})$, entonces (ver proposición 1.2.13)

$$\begin{aligned} T_{\Phi_{\mathcal{A}}(t)}Y_{\mathcal{A}} &= \mathbf{Span} \left(\left(\frac{\partial t^{\gamma_1}}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial t^{\gamma_n}}{\partial t_1} \right), \dots, \left(\frac{\partial t^{\gamma_1}}{\partial t_d}, \dots, \frac{\partial t^{\gamma_n}}{\partial t_d} \right) \right) \\ &= \mathbf{Span} \left(\left(\gamma_{1,1} \frac{t^{\gamma_1}}{t_1}, \dots, \gamma_{n,1} \frac{t^{\gamma_n}}{t_1} \right), \dots, \left(\gamma_{1,d} \frac{t^{\gamma_1}}{t_d}, \dots, \gamma_{n,d} \frac{t^{\gamma_n}}{t_d} \right) \right). \end{aligned}$$

Para cada $1 \leq i \leq d$ y $1 \leq j \leq n$ denotemos $p_i(j) := \gamma_{j,i} \frac{t^{\gamma_j}}{t_i}$, de forma que si $p_i := (p_i(1), \dots, p_i(n))$ entonces $T_{\Phi_{\mathcal{A}}(t)}Y_{\mathcal{A}} = \mathbf{Span}(p_1, \dots, p_d)$. Por lo tanto, el punto correspondiente a $T_{\Phi_{\mathcal{A}}(t)}Y_{\mathcal{A}}$ bajo el morfismo de Plücker es

$$[\dots : w_J : \dots] \in \mathbb{P}^N,$$

donde $J = j_1 \cdots j_d$ con $1 \leq j_1 < \cdots < j_d \leq n$ y $w_J = \det(p_i(j_\beta))_{i,\beta}$.

Lema 3.2.2. *Sea γ_J la matriz con entradas $\gamma_{j,i}$ para $1 \leq i \leq d$ y $j \in J$. Entonces*

$$w_J = \det(\gamma_J) \frac{t^{\sum_{j \in J} \gamma_j}}{t_1 \cdots t_d}.$$

Demostración. Lo demostraremos por inducción sobre d . Para $d = 1$ el resultado es claro. Supongamos entonces que el resultado se cumple para d y sean $\mathcal{A} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\} \subseteq \mathbb{Z}^{d+1}$ y $t \in (\mathbb{C}^*)^{d+1}$, donde $\mathbb{Z}_{\mathcal{A}} = \mathbb{Z}^{d+1}$. Sin pérdida de generalidad, sea $J = 1 \cdots (d+1)$. Queremos demostrar que

$$\det \left(\gamma_{\beta,i} \frac{t^{\gamma_\beta}}{t_i} \right)_{i,\beta} = \det(\gamma_J) \frac{t^{\sum_{\beta=1}^{d+1} \gamma_\beta}}{t_1 \cdots t_{d+1}}.$$

Para esto, vamos a expandir el determinante de la izquierda a partir de la última columna, de manera que lo que nos queda es

$$\det \left(\gamma_{\beta,i} \frac{t^{\gamma_\beta}}{t_i} \right)_{i,\beta} = \sum_{j=1}^{d+1} (-1)^{d+1+j} \gamma_{d+1,j} \frac{t^{\gamma_{d+1}}}{t_j} \det \left(\gamma_{\beta,i} \frac{t^{\gamma_\beta}}{t_i} \right)_{i \neq j, 1 \leq \beta \leq d}.$$

Para cada $1 \leq j \leq d+1$ y cada $1 \leq \beta \leq n$ definamos

$${}_j t := (t_1, \dots, \check{t}_j, \dots, t_{d+1}) \text{ y}$$

$${}_j\gamma_\beta := (\gamma_{\beta,1}, \dots, \check{\gamma}_{\beta,j}, \dots, \gamma_{\beta,d+1}).$$

De esta forma

$$\begin{aligned} \det \left(\gamma_{\beta,i} \frac{t^{\gamma_\beta}}{t_i} \right)_{i \neq j, 1 \leq \beta \leq d} &= \det \left({}_j\gamma_{\beta,i} t_j^{\gamma_{\beta,j}} \frac{j t^{\gamma_\beta}}{t_i} \right)_{i \neq j, 1 \leq \beta \leq d} \\ &= t_j^{\gamma_{1,j}} \dots t_j^{\gamma_{d,j}} \det \left({}_j\gamma_{\beta,i} \frac{j t^{\gamma_\beta}}{t_i} \right)_{i \neq j, 1 \leq \beta \leq d} = t_j^{\sum_{\beta=1}^d \gamma_{\beta,j}} \det \left({}_j\gamma_{\beta,i} \frac{j t^{\gamma_\beta}}{t_i} \right)_{i \neq j, 1 \leq \beta \leq d}. \end{aligned}$$

Luego, usando la hipótesis de inducción tenemos que

$$\begin{aligned} t_j^{\sum_{\beta=1}^d \gamma_{\beta,j}} \det \left({}_j\gamma_{\beta,i} \frac{j t^{\gamma_\beta}}{t_i} \right)_{i \neq j, 1 \leq \beta \leq d} &= t_j^{\sum_{\beta=1}^d \gamma_{\beta,j}} \det({}_j\gamma_{1\dots d}) \frac{j t^{\sum_{\beta=1}^d \gamma_\beta}}{t_1 \dots \check{t}_j \dots t_{d+1}} \\ &= t_j^{\sum_{\beta=1}^d \gamma_{\beta,j}} \det({}_j\gamma_{1\dots d}) \frac{j t^{\sum_{\beta=1}^d \gamma_\beta} \cdot t_j}{t_1 \dots t_{d+1}} = \det({}_j\gamma_{1\dots d}) \frac{t^{\sum_{\beta=1}^d \gamma_\beta} \cdot t_j}{t_1 \dots t_{d+1}}. \end{aligned}$$

Finalmente, sustituyendo obtenemos que

$$\begin{aligned} \det \left(\gamma_{\beta,i} \frac{t^{\gamma_\beta}}{t_i} \right)_{i,\beta} &= \sum_{j=1}^{d+1} (-1)^{d+1+j} \gamma_{d+1,j} \frac{t^{\gamma_{d+1,j}}}{t_j} \left[\det({}_j\gamma_{1\dots d}) \frac{t^{\sum_{\beta=1}^d \gamma_\beta} \cdot t_j}{t_1 \dots t_{d+1}} \right] \\ &= \sum_{j=1}^{d+1} \left[(-1)^{d+1+j} \det({}_j\gamma_{1\dots d}) \gamma_{d+1,j} \frac{t^{\sum_{\beta=1}^{d+1} \gamma_\beta}}{t_1 \dots t_{d+1}} \right] \\ &= \left[\sum_{j=1}^{d+1} (-1)^{d+1+j} \det({}_j\gamma_{1\dots d}) \gamma_{d+1,j} \right] \frac{t^{\sum_{\beta=1}^{d+1} \gamma_\beta}}{t_1 \dots t_{d+1}} \\ &= \det(\gamma_J) \frac{t^{\sum_{\beta=1}^{d+1} \gamma_\beta}}{t_1 \dots t_{d+1}}, \end{aligned}$$

como queríamos demostrar. \square

Proposición 3.2.3. *Las cartas afines de la modificación de Nash de $Y_{\mathcal{A}}$ son también variedades tóricas.*

Demostración. Por el lema anterior tenemos que la modificación de Nash de $Y_{\mathcal{A}}$ es

$$\begin{aligned} Y_{\mathcal{A}}^* &= \overline{\text{gr}(G|_T)} = \overline{\{(\Phi_{\mathcal{A}}(t), T_{\Phi_{\mathcal{A}}(t)} Y_{\mathcal{A}}) \mid t \in (\mathbb{C}^*)^d\}} \\ &= \overline{\{(t^{\gamma_1}, \dots, t^{\gamma_n}), [\dots : \det(\gamma_J) \frac{t^{\sum_{j \in J} \gamma_j}}{t_1 \dots t_d} : \dots]\} \mid t \in (\mathbb{C}^*)^d\}}. \end{aligned}$$

Notemos que $t^{\sum_{j \in J} \gamma_j} / t_1 \cdots t_d$ no es cero, por lo que $w_J = 0$ si y sólo si $\det(\gamma_J) = 0$. Sea entonces J_0 tal que $\det(\gamma_{J_0}) \neq 0$ y llamemos $U_{J_0} := Y_{\mathcal{A}} \times \mathbb{A}_{J_0}$, donde \mathbb{A}_{J_0} es la carta afín de \mathbb{P}^N donde la entrada w_{J_0} es distinta de cero. Así tenemos la carta afín

$$\begin{aligned} Y_{\mathcal{A}}^* \cap U_{J_0} &= \overline{\{((t^{\gamma_1}, \dots, t^{\gamma_n}), [\cdots : \det(\gamma_J) \frac{t^{\sum_{j \in J} \gamma_j}}{t_1 \cdots t_d} : \cdots]) \mid t \in (\mathbb{C}^*)^d \cap U_{J_0}\}} \\ &= \overline{\{((t^{\gamma_1}, \dots, t^{\gamma_n}), \dots, \frac{\det(\gamma_J)}{\det(\gamma_{J_0})} \frac{t^{\sum_{j \in J} \gamma_j}}{t^{\sum_{i \in J_0} \gamma_i}}, \dots) \mid t \in (\mathbb{C}^*)^d\}} \\ &= \overline{\{(t^{\gamma_1}, \dots, t^{\gamma_n}, \dots, \frac{\det(\gamma_J)}{\det(\gamma_{J_0})} t^{\sum_{j \in J} \gamma_j - \sum_{i \in J_0} \gamma_i}, \dots) \mid t \in (\mathbb{C}^*)^d\}} \end{aligned}$$

y entonces, bajo un cambio de coordenadas, eliminando las coordenadas donde $\det(\gamma_J) = 0$ y llamando $\Delta_J^{J_0} := \sum_{j \in J} \gamma_j - \sum_{i \in J_0} \gamma_i$, tenemos que

$$Y_{\mathcal{A}}^* \cap U_{J_0} \cong \overline{\{(t^{\gamma_1}, \dots, t^{\gamma_n}, \dots, t^{\Delta_J^{J_0}}, \dots) \mid t \in (\mathbb{C}^*)^d, \det(\gamma_J) \neq 0, J \neq J_0\}}.$$

Definiendo $\mathcal{A}'_{J_0} := \mathcal{A} \cup \{\Delta_J^{J_0} \mid \det(\gamma_J) \neq 0, J \neq J_0\} \subseteq \mathbb{Z}^d$ tenemos por definición

$$Y_{\mathcal{A}}^* \cap U_{J_0} \cong Y_{\mathcal{A}'_{J_0}},$$

es decir, las cartas afines de $Y_{\mathcal{A}}^*$ son también variedades tóricas afines. \square

3.3. Algoritmo de Nash en variedades tóricas

En la sección anterior vimos que cada carta afín de la modificación de Nash de una variedad tórica es también una variedad tórica, pero aún más, encontramos los puntos en la retícula que le corresponden. En esta sección encontraremos un conjunto de puntos más eficaz que nos genere la carta afín y veremos en qué se traduce el hecho que la carta afín sea no singular.

Teníamos que $Y_{\mathcal{A}}^* \cap U_{J_0} = Y_{\mathcal{A}'_{J_0}}$. Recordemos que el semigrupo asociado a $Y_{\mathcal{A}'_{J_0}}$ es $\mathbb{N}\mathcal{A}'_{J_0}$. Nuestra meta ahora es encontrar un conjunto finito $\mathcal{A}_{J_0} \subseteq \mathbb{Z}^d$ pequeño tal que $\mathbb{N}\mathcal{A}'_{J_0} = \mathbb{N}\mathcal{A}_{J_0}$ y de esta forma $Y_{\mathcal{A}'_{J_0}} \cong Y_{\mathcal{A}_{J_0}}$. Para esto definimos

$$\mathcal{A}_{J_0} := \{\gamma_i\}_{i \in J_0} \cup \{\Delta_J^{J_0} \mid \#(J \setminus J_0) = 1, \det(\gamma_J) \neq 0\}. \quad (3.1)$$

Lema 3.3.1. *Sea $A \in M_n(K)$, siendo K un campo. Si $\det(A) \neq 0$ entonces existe una biyección $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ tal que $A_{i, f(i)} \neq 0$ para cada $i = 1, \dots, n$.*

Demostración. Recordemos que llamando $S_n := \{f : \{1, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, n\} \mid f \text{ es biyectiva}\}$ entonces

$$\det(A) = \sum_{f \in S_n} \operatorname{sgn}(f) \prod_{i=1}^n A_{i,f(i)},$$

donde $\operatorname{sgn}(f)$ es el signo de f visto como permutación. Así, como $\det(A) \neq 0$ entonces existe algún $f \in S_n$ tal que $\operatorname{sgn}(f) \prod_{i=1}^n A_{i,f(i)} \neq 0$, de donde $A_{i,f(i)} \neq 0$ para cada $i = 1, \dots, n$. □

Ahora podemos demostrar el siguiente resultado.

Proposición 3.3.2. *Siendo \mathcal{A}'_{J_0} y \mathcal{A}_{J_0} como antes se tiene que*

$$\mathbb{N}\mathcal{A}_{J_0} = \mathbb{N}\mathcal{A}'_{J_0}.$$

Demostración. La primera contención se tiene pues $\mathcal{A}_{J_0} \subseteq \mathcal{A}'_{J_0}$. Para la segunda contención, sea J tal que $\det(\gamma_J) \neq 0$. Demostraremos que $\Delta_J^{J_0} \in \mathbb{N}\mathcal{A}_{J_0}$.

Como $\det(\gamma_J) \neq 0 \neq \det(\gamma_{J_0})$ entonces $\{\gamma_j\}_{j \in J}$ y $\{\gamma_i\}_{i \in J_0}$ son base para \mathbb{Q}^d como \mathbb{Q} -espacio vectorial. Sea A la transpuesta de la matriz de cambio de base, de forma que para cada $j \in J$

$$\gamma_j = \sum_{i \in J_0} A_{j,i} \gamma_i.$$

Dado que la matriz de cambio de base es invertible tenemos que $\det(A) \neq 0$ y por el lema 3.3.1 tenemos que existe una función biyectiva $f : J \longrightarrow J_0$ tal que $A_{j,f(j)} \neq 0$ para cada $j \in J$. Esto quiere decir que para cada $j \in J$ se tiene que $\gamma_j \notin \mathbf{Span}(\gamma_i \mid i \in J_0, i \neq f(j))$, por lo que $\{\gamma_i \mid i \in J_0, i \neq f(j)\} \cup \{\gamma_j\}$ es un conjunto linealmente independiente y en consecuencia, si para cada $j \in J$ llamamos $J_j := \{j\} \cup J_0 \setminus \{f(j)\}$, tenemos que $\det(\gamma_{J_j}) \neq 0$ y $\#(J_j \setminus J_0) = 1$. Además, como f es biyectiva,

$$\begin{aligned} \Delta_J^{J_0} &= \sum_{j \in J} \gamma_j - \sum_{i \in J_0} \gamma_i = \sum_{j \in J} (\gamma_j - \gamma_{f(j)}) = \sum_{j \in J} \left(\sum_{k \in J_j} \gamma_k - \sum_{i \in J_0} \gamma_i \right) \\ &= \sum_{j \in J} \Delta_{J_j}^{J_0} \in \mathbb{N}\mathcal{A}_{J_0}. \end{aligned}$$

60CAPÍTULO 3. MODIFICACIÓN DE NASH DE VARIETADES TÓRICAS

Esto demuestra que $\{\Delta_J^{J_0} \mid \det(\gamma_J) \neq 0\} \subseteq \mathbb{N}\mathcal{A}_{J_0}$. Sólo falta demostrar que $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}\mathcal{A}_{J_0}$. Si $i \in J_0$ entonces $\gamma_i \in \mathcal{A}_{J_0}$. Sea entonces $\gamma_j \in \mathcal{A}$ tal que $j \notin J_0$. Como $\{\gamma_i\}_{i \in J_0}$ es base para \mathbb{Q}^d entonces existe $\{a_i\}_{i \in J_0} \subseteq \mathbb{Q}$ tal que

$$\gamma_j = \sum_{i \in J_0} a_i \gamma_i.$$

Dado que $\gamma_j \neq (0, \dots, 0)$ (si $(0, \dots, 0) \in \mathcal{A}$ tomamos $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ pues $\mathbb{N}\mathcal{A} = \mathbb{N}\mathcal{A}'$) entonces existe $i \in J_0$ tal que $a_i \neq 0$ y así, definiendo $J_j := \{j\} \cup J_0 \setminus \{i\}$, tenemos que $\Delta_{J_j}^{J_0}, \gamma_i \in \mathcal{A}_{J_0}$ por lo que

$$\gamma_j = \gamma_j - \gamma_i + \gamma_i = \Delta_{J_j}^{J_0} + \gamma_i \in \mathbb{N}\mathcal{A}_{J_0}.$$

□

Gracias a la proposición anterior tenemos que para cada J_0 con $\det(\gamma_{J_0}) \neq 0$

$$Y_{\mathcal{A}}^* \cap U_{J_0} \cong Y_{\mathcal{A}_{J_0}}.$$

Ejemplo 3.3.3. Recordemos que en el ejemplo 2.2.10 vimos que si $\mathcal{A} = \{2, 3\} \subseteq \mathbb{Z}$ entonces $Y_{\mathcal{A}}$ es la cúspide. Notemos que $\mathbb{Z}\{2, 3\} = \mathbb{Z}$. Como en este caso $d = 1$, sólo tenemos dos sucesiones: $J_1 = (2)$ y $J_2 = (3)$. Tenemos entonces los conjuntos

$$\mathcal{A}_2 = \{2\} \cup \{3 - 2\} = \{2, 1\}$$

y

$$\mathcal{A}_3 = \{3\} \cup \{2 - 3\} = \{3, -1\}$$

los cuales inducen los morfismos

$$\Phi_{\mathcal{A}_2} : \mathbb{C}^* \longrightarrow (\mathbb{C}^*)^2$$

$$t \longrightarrow (t^2, t)$$

y

$$\Phi_{\mathcal{A}_3} : \mathbb{C}^* \longrightarrow (\mathbb{C}^*)^2$$

$$t \longrightarrow (t^3, t^{-1})$$

respectivamente. Es fácil ver que $Y_{\mathcal{A}_2} = \overline{\Phi_{\mathcal{A}_2}(\mathbb{C}^*)} = \{(t^2, t) \mid t \in \mathbb{C}\} = \mathbf{V}(x - y^2)$ y $Y_{\mathcal{A}_3} = \overline{\Phi_{\mathcal{A}_3}(\mathbb{C}^*)} = \Phi_{\mathcal{A}_3}(\mathbb{C}^*) = \{(t^3, t^{-1}) \mid t \in \mathbb{C}^*\} = \mathbf{V}(y^3x - 1)$. Un cálculo directo muestra que estas cartas afines no tienen singularidades.

En el ejemplo anterior vimos que $Y_{\mathcal{A}_2}$ y $Y_{\mathcal{A}_3}$ son no singulares a través de las ecuaciones que las definen. Quisieramos tener una manera de saber si una variedad tórica es singular o no a partir del conjunto \mathcal{A} .

Proposición 3.3.4. *Sea $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{Z}^d$ finito tal que $\mathbb{Z}\mathcal{A} = \mathbb{Z}^d$. Si existen d elementos en \mathcal{A} que generan a $\mathbb{N}\mathcal{A}$ entonces $Y_{\mathcal{A}}$ es no singular.*

Demostración. Sean $\gamma_1, \dots, \gamma_d \in \mathcal{A}$ los d elementos que generan a $\mathbb{N}\mathcal{A}$, de forma que $\mathbb{N}\{\gamma_1, \dots, \gamma_d\} = \mathbb{N}\mathcal{A}$. Como $\mathbb{Z}\mathcal{A} = \mathbb{Z}^d$ entonces $\mathbb{Z}\{\gamma_1, \dots, \gamma_d\} = \mathbb{Z}^d$. En particular, el morfismo

$$\begin{aligned} \widehat{\Phi}_{\{\gamma_1, \dots, \gamma_d\}} : \mathbb{Z}^d &\longrightarrow \mathbb{Z}^d \\ e_i &\longmapsto \gamma_i \end{aligned}$$

es un isomorfismo, de donde $L = \mathbf{Ker}(\widehat{\Phi}_{\{\gamma_1, \dots, \gamma_d\}}) = \{0\}$. Por lo tanto (ver la proposición 2.2.12)

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(Y_{\{\gamma_1, \dots, \gamma_d\}}) &= \langle x^\alpha - x^\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{N}^s, \alpha - \beta \in L \rangle \\ &= \langle x^\alpha - x^\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{N}^s, \alpha - \beta = 0 \rangle \\ &= \langle x^\alpha - x^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}^s \rangle = \{0\}, \end{aligned}$$

y entonces $Y_{\{\gamma_1, \dots, \gamma_d\}} = \mathbb{C}^d$, y como $\mathbb{N}\{\gamma_1, \dots, \gamma_d\} = \mathbb{N}\mathcal{A}$ tenemos que $Y_{\mathcal{A}} \cong \mathbb{C}^d$. Así, $Y_{\mathcal{A}}$ es no singular. \square

Definición 3.3.5. Sea $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{Z}^d$ finito. Definimos $\text{Conv}(\mathcal{A})$ como el conjunto convexo más pequeño en \mathbb{R}^n que contiene a \mathcal{A} . De hecho,

$$\text{Conv}(\mathcal{A}) = \left\{ \sum_{\gamma \in \mathcal{A}} a_\gamma \gamma \mid 0 \leq a_\gamma \leq 1 \text{ para toda } \gamma \in \mathcal{A} \text{ y } \sum_{\gamma \in \mathcal{A}} a_\gamma = 1 \right\}.$$

Observación 3.3.6. Si a la proposición 3.3.4 le agregamos la hipótesis general $0 \notin \text{Conv}(\mathcal{A})$ entonces el regreso también es verdadero: si $Y_{\mathcal{A}}$ es no singular entonces existen d elementos en \mathcal{A} que generan a $\mathbb{N}\mathcal{A}$. Para ver una demostración de este resultado véase [GM, Remark 2.16.].

La proposición 3.3.4, junto con la última observación, nos da un criterio de singularidad para algunas cartas afines en función de los generadores del semi-grupo asociado. El siguiente resultado nos dice que de hecho la modificación de Nash está cubierta exactamente por esas cartas afines. La demostración de este resultado requiere herramientas más sofisticadas respecto a las que hemos visto hasta ahora, por lo que solo dejamos la referencia al artículo que contiene la demostración.

Proposición 3.3.7. Sea $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{Z}^d$ finito tal que $\mathbb{Z}\mathcal{A} = \mathbb{Z}^d$ y $0 \notin \text{Conv}(\mathcal{A})$. Entonces

$$Y_{\mathcal{A}}^* = \bigcup_{\substack{\det(\gamma_J) \neq 0 \\ 0 \notin \text{Conv}(\mathcal{A}_J)}} U_J \cap Y_{\mathcal{A}}^*.$$

Demostración. Ver [GM, Claim 4.6.]. □

Observación 3.3.8. La propiedad $0 \notin \text{Conv}(\mathcal{A}_J)$ no depende de los generadores del semigrupo $\mathbb{N}\mathcal{A}_J$ que elijamos, pues si $\mathbb{N}\mathcal{A} = \mathbb{N}\mathcal{A}'$ entonces $\mathbb{R}_{>0}\mathcal{A} = \mathbb{R}_{>0}\mathcal{A}'$, donde

$$\mathbb{R}_{>0}\mathcal{A} := \left\{ \sum_{\gamma \in \Gamma} r_{\gamma} \gamma \mid \Gamma \subseteq \mathcal{A}, \Gamma \neq \emptyset \text{ y } r_{\gamma} \in \mathbb{R}_{>0} \text{ para toda } \gamma \in \Gamma \right\}.$$

De ahí es fácil probar que

$$0 \notin \text{Conv}(\mathcal{A}) \iff 0 \notin \mathbb{R}_{>0}\mathcal{A} \iff 0 \notin \mathbb{R}_{>0}\mathcal{A}' \iff 0 \notin \text{Conv}(\mathcal{A}').$$

La utilidad de la proposición 3.3.7 se hará mucho más clara en el próximo capítulo.

Ejemplo 3.3.9. En el ejemplo 3.3.3 vimos que las cartas afines de la modificación de Nash de la cúspide están dadas por los conjuntos $\mathcal{A}_2 = \{2, 1\}$ y $\mathcal{A}_3 = \{3, -1\}$. La proposición 3.3.7 nos dice que nos basta con tomar la carta respectiva a $\mathcal{A}_2 = \{2, 1\}$, pues $0 \notin \text{Conv}(\mathcal{A}_2) = [1, 2] \subseteq \mathbb{R}$ y $0 \in \text{Conv}(\mathcal{A}_3) = [-1, 3] \subseteq \mathbb{R}$. Luego, la proposición 3.3.4 nos dice que $Y_{\mathcal{A}_2}$ es no singular pues $\{1\} \subseteq \mathcal{A}_2$ genera a $\mathbb{N}\mathcal{A}_2 = \mathbb{N}$.

Con todo lo anterior la pregunta de Nash se convierte en el caso tórico en el siguiente algoritmo combinatorio:

1. Tomemos la variedad tórica $Y_{\mathcal{A}}$ con $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{Z}^d$ tal que $0 \notin \text{Conv}(\mathcal{A})$ y $\mathbb{Z}\mathcal{A} = \mathbb{Z}^d$.
2. A partir de esos generadores tomemos las sucesiones $J \in [n]^d$ (donde $n = \#(\mathcal{A})$) tales que $\det(\gamma_J) \neq 0$ y formamos \mathcal{A}_J como se definió en (3.1).
3. De las sucesiones que habíamos tomado consideremos las sucesiones $J \in [n]^d$ tales que $0 \notin \text{Conv}(\mathcal{A}_J)$. Si para cada una de estas J existen d elementos que generen a $\mathbb{N}\mathcal{A}_J$ entonces el algoritmo termina: cada carta es no singular. Si existe J tal que no suceda esto regresamos al paso 1 con $Y_{\mathcal{A}_J}$.

Ejemplo 3.3.10. Tomemos la superficie $V = \mathbf{V}(xz - y^2) \subseteq \mathbb{C}^3$. Como $xz - y^2$ es irreducible entonces V es irreducible y tiene el abierto denso

$$\mathbf{V}(xz - y^2) \setminus (\mathbf{V}(x) \cup \mathbf{V}(z)) = \{(t, ts, ts^2) \in \mathbb{C}^3 \mid t, s \in \mathbb{C}^*\} = \Phi_{\mathcal{A}}((\mathbb{C}^*)^2),$$

donde

$$\Phi_{\mathcal{A}} : (\mathbb{C}^*)^2 \longrightarrow \mathbb{C}^3$$

está determinado por $\mathcal{A} = \{(1, 0), (1, 1), (1, 2)\} \subseteq \mathbb{Z}^2$. Entonces $V = Y_{\mathcal{A}}$ con $\mathbb{Z}\mathcal{A} = \mathbb{Z}^2$ y $(0, 0) \notin \text{Conv}(\mathcal{A})$.

Los elementos de $J \in [3]^2$ tales que $\det(\gamma_J) \neq 0$ son $(1, 2)$, $(1, 3)$ y $(2, 3)$, pues

$$\det(\gamma_{(1,2)}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0,$$

$$\det(\gamma_{(1,3)}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \neq 0,$$

$$\det(\gamma_{(2,3)}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

Calculemos $\mathcal{A}_{(1,2)}$, $\mathcal{A}_{(1,3)}$ y $\mathcal{A}_{(2,3)}$:

$$\mathcal{A}_{(1,2)} = \{(1, 0), (1, 1)\} \cup \{(0, 2), (0, 1)\},$$

$$\mathcal{A}_{(1,3)} = \{(1, 0), (1, 2)\} \cup \{(0, 1), (0, -1)\},$$

$$\mathcal{A}_{(2,3)} = \{(1, 1), (1, 2)\} \cup \{(0, -1), (0, -2)\}.$$

Notemos que $0 \notin \text{Conv}(\mathcal{A}_{(1,2)})$, $0 \notin \text{Conv}(\mathcal{A}_{(2,3)})$ y $0 \in \text{Conv}(\mathcal{A}_{(1,3)})$. Además, $(1, 0), (0, 1) \in \mathcal{A}_{(1,2)}$ son tales que generan a $\mathbb{N}\mathcal{A}_{(1,2)} = \mathbb{N}^2$ por lo que $Y_{\mathcal{A}_{(1,2)}}$ es no singular. Similarmente con $(1, 2), (0, -1) \in \mathcal{A}_{(2,3)}$ tenemos que $Y_{\mathcal{A}_{(2,3)}}$ es no singular. Por lo tanto el algoritmo en este caso tomó sólo un paso.

Capítulo 4

Algoritmo en Curvas Tóricas

En este último capítulo demostraremos que el algoritmo mencionado en el capítulo anterior en el caso de curvas tóricas (variedades tóricas de dimensión 1) da lugar a una curva tórica no singular. Este resultado se sabe que es cierto en general: la iteración de la modificación de Nash de una curva singular da lugar a una curva no singular ([NBL, Corollary 1]). Sin embargo, la demostración que daremos es una demostración combinatoria para el caso tórico.

Además, analizaremos el número de pasos necesarios en el algoritmo para obtener esta curva no singular de dos maneras: primero estimando la cantidad exacta de iteraciones del algoritmo y luego contando por “paquetes” (esto se explicará más adelante).

4.1. Curvas tóricas singulares

En el capítulo anterior empezamos a pedir la condición $0 \notin \text{Conv}(\mathcal{A})$ para tener nuestro criterio de singularidad. Veamos que, en el caso de curvas, esta condición no restringe el conjunto de curvas sobre las que estamos trabajando; es decir, toda curva tórica singular $Y_{\mathcal{A}}$ nos cumplirá que $0 \notin \text{Conv}(\mathcal{A})$. Primero demostraremos algunos lemas.

Para los primeros dos lemas $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \mathbb{Z}^d$ es tal que $\mathbb{Z}\mathcal{A} = \mathbb{Z}^d$, es decir, estos lemas se cumplen para variedades tóricas en general, no sólo para curvas.

Lema 4.1.1. *Si $p \in \text{Sing}(Y_{\mathcal{A}})$ entonces $t \cdot p \in \text{Sing}(Y_{\mathcal{A}})$ para toda $t \in T$, donde T es el toro de $Y_{\mathcal{A}}$.*

Demostración. Sea $t \in T$. En la demostración de la proposición 2.2.9 vimos

que

$$\begin{aligned} t : Y_{\mathcal{A}} &\longrightarrow Y_{\mathcal{A}} \\ x &\longmapsto t \cdot x \end{aligned}$$

es un isomorfismo. Luego, por el corolario 1.2.12, $\dim_{\mathbb{C}}(T_p Y_{\mathcal{A}}) = \dim_{\mathbb{C}}(T_{t \cdot p} Y_{\mathcal{A}})$ y así $p \in \text{Sing}(Y_{\mathcal{A}})$ implica que $t \cdot p \in \text{Sing}(Y_{\mathcal{A}})$ para toda $t \in T$. \square

Lema 4.1.2. *Si $0 \in \text{Conv}(\mathcal{A})$ entonces $(0, \dots, 0) \notin Y_{\mathcal{A}}$.*

Demostración. Dado que $0 \in \text{Conv}(\mathcal{A})$, existen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0, 1]$ tales que $\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i = 0$. De hecho, como $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{Z}^d$ entonces, sin pérdida de generalidad, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ y, multiplicando por un factor común, tenemos que existen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{N}$ tales que $\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i = 0$. De ahí que $\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{Ker}(\widehat{\Phi}_{\mathcal{A}})$ ($\widehat{\Phi}_{\mathcal{A}}$ se definió en la subsección 2.2.2). Entonces (ver proposición 2.2.12)

$$x^\lambda - 1 = x^\lambda - x^{(0, \dots, 0)} \in \langle x^\alpha - x^\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \alpha - \beta \in \mathbf{Ker}(\widehat{\Phi}_{\mathcal{A}}) \rangle = \mathbf{I}(Y_{\mathcal{A}});$$

pero $(0, \dots, 0)$ no cumple la ecuación $x^\lambda - 1 = 0$, por lo que $(0, \dots, 0) \notin \mathbf{V}(\mathbf{I}(Y_{\mathcal{A}})) = Y_{\mathcal{A}}$. \square

Ahora, sea $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \mathbb{Z}$ tal que $\mathbb{Z}\mathcal{A} = \mathbb{Z}$, es decir, $Y_{\mathcal{A}}$ es una curva tórica.

Lema 4.1.3. *Si $Y_{\mathcal{A}}$ es singular entonces $\text{Sing}(Y_{\mathcal{A}}) = \{(0, \dots, 0)\}$.*

Demostración. Supongamos que $p = (p_1, \dots, p_n) \in \text{Sing}(Y_{\mathcal{A}}) \setminus \{(0, \dots, 0)\}$. Sea $p_i \neq 0$, por lo que $\{t_i^{a_i} p_i \mid t_i \in \mathbb{C}^*\} = \mathbb{C}^*$, y así $\{t \cdot p \mid t \in T\}$ es un conjunto infinito. Luego, el lema 4.1.1 nos dice que $\{t \cdot p \mid t \in T\} \subseteq \text{Sing}(Y_{\mathcal{A}})$ y en consecuencia $\text{Sing}(Y_{\mathcal{A}})$ también es un conjunto infinito, lo cual es una contradicción pues toda subvariedad propia de una curva irreducible es una unión finita de puntos. Tenemos entonces que $\text{Sing}(Y_{\mathcal{A}}) = \{(0, \dots, 0)\}$. \square

Proposición 4.1.4. *Si $0 \in \text{Conv}(\mathcal{A})$ entonces $Y_{\mathcal{A}}$ es no singular.*

Demostración. Si $0 \in \text{Conv}(\mathcal{A})$ el lema 4.1.2 nos dice que $(0, \dots, 0) \notin Y_{\mathcal{A}}$, pero como $\text{Sing}(Y_{\mathcal{A}}) \subseteq Y_{\mathcal{A}}$, tenemos en particular que $\text{Sing}(Y_{\mathcal{A}}) \neq \{(0, \dots, 0)\}$. El lema 4.1.3 nos dice entonces que $Y_{\mathcal{A}}$ es no singular. \square

Como nuestro objeto de estudio son las curvas tóricas singulares, esta proposición nos permite usar la condición $0 \notin \text{Conv}(\mathcal{A})$.

4.2. Algoritmo de Nash

Recordemos que, gracias al lema 3.2.1, toda curva tórica puede ser expresada como $Y_{\mathcal{A}}$ con $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{Z}$ tal que $\mathbb{Z}\mathcal{A} = \mathbb{Z}$. Notemos que, denotando por $\text{mcd}(\mathcal{A})$ al máximo común divisor de los elementos de \mathcal{A} , la condición $\mathbb{Z}\mathcal{A} = \mathbb{Z}$ es equivalente a pedir que $\text{mcd}(\mathcal{A}) = 1$. Además la condición $0 \notin \text{Conv}(\mathcal{A})$ es equivalente a pedir que, sin pérdida de generalidad, $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (pueden ser todos negativos o todos positivos, pero si $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ entonces $Y_{\mathcal{A}} \cong Y_{(-\mathcal{A})}$).

Para ver explícitamente el algoritmo de la modificación de Nash en curvas tóricas primero hagamos las siguientes observaciones:

Observación 4.2.1. Sea $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \mathbb{Z}$ tal que $\text{mcd}(\mathcal{A}) = 1$, $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $a_1 < \dots < a_n$. Entonces las cartas afines de $Y_{\mathcal{A}}^*$ son las $Y_{\mathcal{A}_i}$ donde $\mathcal{A}_i = \{a_i\} \cup \{a_j - a_i \mid j \neq i\}$ (ver sección 3.3) para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Por lo tanto $0 \notin \text{Conv}(\mathcal{A}_i)$ si y sólo si $\mathcal{A}_i \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$ si y sólo si $i = 1$. En consecuencia, la proposición 3.3.7 nos dice que

$$Y_{\mathcal{A}}^* = Y_{\mathcal{A}}^* \cap U_1 \cong Y_{\mathcal{A}_1}.$$

Observación 4.2.2. Si $a_i = qa_1$ para alguna $q \in \mathbb{N}$ e $i \neq 1$ entonces $\mathbb{N}\mathcal{A} = \mathbb{N}(\mathcal{A} \setminus \{a_i\})$, por lo que $Y_{\mathcal{A}} \cong Y_{(\mathcal{A} \setminus \{a_i\})}$.

A partir de aquí $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \mathbb{Z}$ denotará un conjunto tal que:

$$0 < a_1 < \dots < a_n, \text{mcd}(\mathcal{A}) = 1, a_j \notin \mathbb{N}a_1 \text{ si } j \neq 1. \quad (*)$$

Observación 4.2.3. Supongamos que $\text{mcd}(\mathcal{A}) = 1$. La proposición 3.3.4 (para el caso de curvas) nos dice que $Y_{\mathcal{A}}$ es no singular si y sólo si existe un elemento que genere a $\mathbb{N}\mathcal{A}$, pero esto pasa si y sólo si este elemento es 1; es decir, $Y_{\mathcal{A}}$ es no singular si y sólo si $1 \in \mathcal{A}$.

Las observaciones 4.2.1, 4.2.2 y 4.2.3 nos dan el siguiente algoritmo:

1. Tomemos $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que satisfaga (*).
2. Consideremos $\mathcal{A}_1 = \{a_1\} \cup \{a_i - a_1 \mid 2 \leq i \leq n\}$ y definamos $\mathcal{A}' := \{\text{mín}(\mathcal{A}_1)\} \cup (\mathcal{A}_1 \setminus \mathbb{N}\text{mín}(\mathcal{A}_1))$ (dicho de otra forma, eliminamos los múltiplos del elemento mínimo). Si $1 \in \mathcal{A}'$ entonces hemos terminado. Si $1 \notin \mathcal{A}'$ regresamos al paso uno con \mathcal{A}' .

Definición 4.2.4. Para cada $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\text{mcd}(\mathcal{A}) = 1$ definimos

$$\mathcal{V}(\mathcal{A}) := \text{mín}\{a_i \mid \text{mcd}(a_1, \dots, a_i) = 1\}.$$

Proposición 4.2.5. Sea $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$ que satisface (*). Si $1 \notin \mathcal{A}$ entonces $0 < \mathcal{V}(\mathcal{A}') \leq \mathcal{V}(\mathcal{A}) - 2$.

Demostración. Como $1 \notin \mathcal{A}$ entonces $\#(\mathcal{A}) \geq 2$. Si $a_2 = a_1 + 1$ entonces $\text{mcd}(a_1, a_2) = 1$ y $1 = a_2 - a_1 \in \mathcal{A}'$, por lo que $\mathcal{V}(\mathcal{A}) = a_2 = a_1 + 1 \geq 2 + 1 = 2 + a_2 - a_1 = 2 + \mathcal{V}(\mathcal{A}')$ y así $\mathcal{V}(\mathcal{A}') \leq \mathcal{V}(\mathcal{A}) - 2$.

Supongamos que $a_2 \geq a_1 + 2$. Sea $\mathcal{A}' = \{b_1, \dots, b_m\}$ con $b_1 < \dots < b_m$ y sea $a_k = \mathcal{V}(\mathcal{A})$.

- **Caso 1:** Si $a_1 < a_k - a_1$, sea $b_l = \max\{b_i \mid b_i \leq a_k - a_1\}$. Notemos que $\{b_1, \dots, b_l\} = (\{a_1, a_2 - a_1, \dots, a_k - a_1\} \setminus \mathbb{N}b_1) \cup \{b_1\}$, por lo que

$$\text{mcd}(b_1, \dots, b_l) = \text{mcd}(a_1, a_2 - a_1, \dots, a_k - a_1) = \text{mcd}(a_1, \dots, a_k) = 1.$$

En consecuencia $\mathcal{V}(\mathcal{A}') \leq b_l \leq a_k - a_1 \leq a_k - 2 = \mathcal{V}(\mathcal{A}) - 2$.

- **Caso 2:** Si $a_1 > a_k - a_1$, sea $b_l = \max\{b_i \mid b_i \leq a_1\}$. Notemos ahora que $(\{a_1, a_2 - a_1, \dots, a_k - a_1\} \setminus \mathbb{N}b_1) \cup \{b_1\} \subseteq \{b_1, \dots, b_l\}$, por lo que

$$1 \leq \text{mcd}(b_1, \dots, b_l) \leq \text{mcd}(a_1, a_2 - a_1, \dots, a_k - a_1) = \text{mcd}(a_1, \dots, a_k) = 1,$$

por lo que $\text{mcd}(b_1, \dots, b_l) = 1$. En consecuencia $\mathcal{V}(\mathcal{A}') \leq b_l \leq a_1 \leq a_2 - 2 \leq a_k - 2 = \mathcal{V}(\mathcal{A}) - 2$.

Además, como $a_1 < a_i$ para toda $i \in \{2, \dots, n\}$, entonces $\mathcal{A}' \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$, por lo que $0 < \mathcal{V}(\mathcal{A}')$. \square

Con este resultado podemos demostrar que la iteración de la modificación de Nash elimina las singularidades. Para esto, denotemos $\mathcal{A}^1 := \mathcal{A}'$ y para cada $k > 1$ denotemos $\mathcal{A}^k := (\mathcal{A}^{k-1})'$.

Corolario 4.2.6. La iteración finita de la modificación de Nash en una curva tórica singular da lugar a una curva no singular.

Demostración. Consideremos una curva tórica singular $Y_{\mathcal{A}}$, donde $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{Z}$ satisface (*) y $1 \notin \mathcal{A}$ (por ser $Y_{\mathcal{A}}$ singular). Por el resultado 4.2.5 tenemos que $\mathcal{V}(\mathcal{A}) \geq \mathcal{V}(\mathcal{A}') + 2 > 0$.

Al iterar el algoritmo de Nash obtenemos una sucesión $\mathcal{V}(\mathcal{A}) \geq \mathcal{V}(\mathcal{A}') + 2 \geq \dots \geq \mathcal{V}(\mathcal{A}^k) + 2k \geq \dots > 0$. Esta sucesión no puede seguir infinitamente, pues de lo contrario se tendría $\mathcal{V}(\mathcal{A}) \geq \mathcal{V}(\mathcal{A}^{\lfloor \frac{\mathcal{V}(\mathcal{A})}{2} \rfloor + 1}) + 2(\lfloor \frac{\mathcal{V}(\mathcal{A})}{2} \rfloor + 1) > \mathcal{V}(\mathcal{A})$.

Por consiguiente, existe $k \in \mathbb{N}$ para el cual $\mathcal{V}(\mathcal{A}^k) \geq \mathcal{V}(\mathcal{A}^{k+1}) + 2$ no se cumple y, usando de nuevo la proposición 4.2.5, tenemos que $1 \in \mathcal{A}^k$, por lo que $Y_{\mathcal{A}^{(k)}}$ es no singular. \square

Observación 4.2.7. La demostración anterior nos dio también una cota para el número de veces que debemos iterar la modificación de Nash en una curva tórica singular para llegar a una curva no singular: a lo más hay que iterar

$$\lfloor \frac{\mathcal{V}(\mathcal{A})}{2} \rfloor$$

veces. La mala noticia es que esta cota no siempre es buena, como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.2.8. Sea $\mathcal{A} = \{10^{10}, 2 \cdot 10^{10} + 1\}$. Entonces $\mathcal{A}' = \{10^{10}, 10^{10} + 1\}$ y $\mathcal{A}'' = \{1\}$. En este caso se necesitaron dos pasos para llegar de $Y_{\mathcal{A}}$ a una curva no singular, pero $\lfloor \frac{\mathcal{V}(\mathcal{A})}{2} \rfloor = 10^{10}$, lo cual es mucho más grande.

En general, contar el número de iteraciones de la modificación de Nash es complicado. Tomemos el caso más sencillo: $n = 2$. Sea $\mathcal{A} = \{a, b\}$ con $1 < a < b$ y $\text{mcd}(a, b) = 1$.

Como $a < b$ y $\text{mcd}(a, b) = 1$ entonces existen $q_1, r_1 > 0$ con $r_1 < a$ y $b = aq_1 + r_1$. Entonces para cualquier $k < q_1$ tenemos que $a < b - ak$ y $\mathcal{A}^k = \{a, b - ak\}$. Así, $\mathcal{A}^{q_1} = \{a, b - aq_1\} = \{r_1, a\}$, y tenemos que $r_1 < a$. En este momento hacemos el mismo proceso que antes: existen $q_2, r_2 > 0$ con $r_2 < r_1$ y $a = r_1q_2 + r_2$, con lo que $\mathcal{A}^{q_1+q_2} = \{r_2, r_1\}$. Este proceso se hace hasta que se llegue a $\mathcal{A}^{q_1+q_2+\dots+q_\alpha} = \{1\}$. Podemos notar que este algoritmo es exactamente el algoritmo de Euclides:

$$\begin{aligned} b &= aq_1 + r_1 \\ a &= r_1q_2 + r_2 \\ r_1 &= r_2q_3 + r_3 \\ &\vdots \\ r_{\alpha-2} &= r_{\alpha-1}q_\alpha + 1 \end{aligned}$$

En este caso el número de iteraciones es $q_1 + q_2 + \dots + q_\alpha$. Acotar este número en función de a y b no es tan sencillo y se vuelve muy complicado en el caso general (si $n > 2$ el algoritmo también es parecido al algoritmo de Euclides) pues no hay control sobre los cocientes (las q_i 's). Acotar α (el número de algoritmos de la división en el algoritmo de Euclides), en cambio, es una tarea más sencilla. Esto lo haremos en la siguiente sección.

4.3. Algoritmos de la división

Sigamos analizando el caso $n = 2$ para luego pasar al caso general. En la sección anterior dijimos que en este caso el algoritmo de Nash (dividido en algoritmos de la división) es el algoritmo de Euclides, en el cual se conoce una cota para el número de algoritmos de la división que toma (como se verá en la proposición 4.3.2). Es natural que al hablar del algoritmo de Euclides aparezca la siguiente definición.

Definición 4.3.1. Definimos la *sucesión de Fibonacci* como

$$F_1 := 1, F_2 := 2 \text{ y } F_{m+2} := F_{m+1} + F_m \text{ para cada } m \geq 1.$$

El siguiente resultado es bastante conocido. Aunque existen muchas demostraciones, aquí lo demostraremos por inducción.

Proposición 4.3.2. Sean $a, b \in \mathbb{N}$ con $1 < a < b$. Si el algoritmo de Euclides para a y b toma m algoritmos de la división entonces $a \geq F_{m+1}$ y $b \geq F_{m+2}$.

Demostración. Por inducción sobre m . El caso $m = 1$ es claro, pues por hipótesis tenemos que $a \geq 2 = F_{1+1}$ y $b \geq a + 1 \geq 2 + 1 = 3 = F_{1+2}$.

Supongamos que el enunciado es cierto para m y que el algoritmo de Euclides con a y b toma $m + 1$ algoritmos de la división. Tomemos el primer algoritmo de la división:

$$b = aq + r.$$

Como $r, a \in \mathbb{N}$ cumplen con que $r < a$ y el algoritmo de Euclides con r y a toma m algoritmos de la división entonces $r \geq F_{m+1}$ y $a \geq F_{m+2}$. Luego, como $q \geq 1$ entonces $b = aq + r \geq a + r \geq F_{m+2} + F_{m+1} = F_{m+3}$. Por lo tanto $a \geq F_{m+2}$ y $b \geq F_{m+3}$, como queríamos demostrar. \square

Corolario 4.3.3. Sean $a, b \in \mathbb{N}$ con $1 < a < b$. Si $a < F_{m+1}$ o $b < F_{m+2}$ entonces el algoritmo de Euclides para a y b toma menos de m algoritmos de la división.

Esto se traduce a que si $Y_{\mathcal{A}}$ es una curva tórica con $\mathcal{A} = \{a, b\} \subseteq \mathbb{Z}$ tal que $1 < a < b$, $\text{mcd}(a, b) = 1$ y $a < F_{m+1}$ o $b < F_{m+2}$ entonces se necesita hacer el algoritmo de la división menos de m veces para llegar a una curva no singular. Lo impresionante de este resultado es que vale no sólo para cuando $\#(\mathcal{A}) = 2$, sino en general para $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \mathbb{Z}$ que cumpla (*) y $1 < a_1$, como veremos más adelante.

Sea $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$ que satisfaga (*) y $1 < a_1$. Haciendo algoritmo de la división con a_1 y a_2 obtenemos $q, r > 0$ tales que $r < a_1$ y $a_2 = a_1q + r$.

Podemos notar que entonces $\min(\mathcal{A}^k) = a_1$ si $k < q$ y $\min(\mathcal{A}^q) = r$. Además $\mathcal{A}^q = (\{a_1, a_3 - a_1q, \dots, a_n - a_1q\} \setminus \mathbb{N}r) \cup \{r\}$ y $\mathcal{A}^k = \{a_1, a_2 - a_1k, \dots, a_n - a_1k\}$. Así, podemos apreciar un cambio significativo en \mathcal{A}^k hasta que $k = q$. Luego pasará lo mismo con r y el mínimo de $\mathcal{A}^q \setminus \{r\}$. Vemos entonces que el algoritmo de la modificación de Nash en curvas tóricas puede separarse en “algoritmos de la división”.

Ejemplo 4.3.4. Sea $\mathcal{A} = \{20, 165, 172\}$. El primer algoritmo de la división es $165 = 20 \cdot 8 + 5$. Entonces $\mathcal{A}^8 = \{20, 165 - 20 \cdot 8, 172 - 20 \cdot 8\} = \{5, 12, 20\}$.

El segundo algoritmo de la división es $12 = 5 \cdot 2 + 2$, por lo que $\mathcal{A}^{10} = \{2, 5\}$ (nótese que en este caso se eliminó el elemento $20 - 5 \cdot 2 = 10$ pues es múltiplo de $2 = \min\{2, 5, 10\}$).

El tercer y último algoritmo de la división es $5 = 2 \cdot 2 + 1$, por lo que $\mathcal{A}^{12} = \{1\}$.

En este caso tomó 12 iteraciones de la modificación de Nash, pero solo 3 algoritmos de la división.

Definición 4.3.5. Para cada $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \mathbb{Z}$ que satisface (*) y $1 < a_1$, definamos $\delta(\mathcal{A})$ como el número de algoritmos de la división en el proceso de la iteración de la modificación de Nash de $Y_{\mathcal{A}}$ para llegar a una curva no singular.

Observación 4.3.6. $\delta(\mathcal{A})$ es finito, pues es menor o igual al número de iteraciones del algoritmo de Nash. En otras palabras,

$$\delta(\mathcal{A}) \leq \lfloor \frac{\mathcal{V}(\mathcal{A})}{2} \rfloor.$$

Habíamos dicho que el corolario 4.3.3 podía extenderse al caso general. Es el momento de demostrar esto. Nótese la similitud de la siguiente demostración con la demostración de la proposición 4.3.2.

Teorema 4.3.7. Sea $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \mathbb{Z}$ que cumpla (*) y $1 < a_1$. Entonces $a_1 \geq F_{\delta(\mathcal{A})+1}$ y $a_2 \geq F_{\delta(\mathcal{A})+2}$.

Demostración. Por inducción sobre $\delta(\mathcal{A})$. El caso $\delta(\mathcal{A}) = 1$ es claro, pues por hipótesis tenemos que $a_1 \geq 2 = F_{1+1}$ y $a_2 \geq a_1 + 1 \geq 2 + 1 = 3 = F_{1+2}$.

Supongamos que el enunciado es cierto para m y que $\delta(\mathcal{A}) = m + 1$. Hacemos el algoritmo de la división con a_1 y a_2 para obtener $a_2 = a_1q + r$, con $0 < r < a_1$. Entonces $\delta(\mathcal{A}^q) = m$ y $\min(\mathcal{A}^q) = r$. Por hipótesis de inducción $r \geq F_{m+1}$. Veamos que $a_1 \geq F_{m+2}$.

- **Caso 1:** Si $a_1 \notin \mathcal{A}^q$ quiere decir que $a_1 \in \mathbb{N}r \setminus \{r\}$. Como $a_1 > 0$ entonces $a_1 \geq 2r \geq 2F_{m+1} > F_{m+2}$.

- **Caso 2:** Si $a_1 \in \mathcal{A}^q$, como $a_1 > r$ entonces $a_1 \geq \min(\mathcal{A}^q \setminus \{r\})$. Luego, por hipótesis de inducción tenemos que $\min(\mathcal{A}^q \setminus \{r\}) \geq F_{m+2}$ y en consecuencia $a_1 \geq F_{m+2}$.

Así, $r \geq F_{m+1}$ y $a_1 \geq F_{m+2}$. Por último, como $q \geq 1$ entonces $a_2 = a_1q + r \geq a_1 + r \geq F_{m+2} + F_{m+1} = F_{m+3}$. Por lo tanto $a_1 \geq F_{m+2} = F_{\delta(\mathcal{A})+1}$ y $a_2 \geq F_{m+3} = F_{\delta(\mathcal{A})+2}$, como queríamos demostrar. \square

Similarmente que con el corolario 4.3.3 tenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.3.8. *Sea $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \mathbb{Z}$ que cumpla (*) y $1 < a_1$. Si $a_1 < F_{m+1}$ o $a_2 < F_{m+2}$ entonces $\delta(\mathcal{A}) < m$.*

Hemos encontrado una buena cota para el número de algoritmos de la división necesarios para llevar $Y_{\mathcal{A}}$ a una curva no singular. Sin embargo, para números grandes la tarea de encontrar el mínimo m tal que $a_1 < F_{m+1}$ o $a_2 < F_{m+2}$ se puede volver un poco complicada. Ahora encontraremos otra cota más sencilla de encontrar: en términos del número de dígitos de a_1 y de a_2 . Para esto necesitaremos el siguiente lema ([GRS]).

Lema 4.3.9. *Sea $k \geq 1$. Si $m \geq 5k$ entonces F_{m+1} tiene al menos $k + 1$ dígitos.*

Demostración. Primero veamos el caso $k = 1$. Tenemos $m \geq 5$, por lo que $F_{m+1} \geq F_6 = 13$ y de ahí que F_{m+1} tiene al menos 2 dígitos.

Sea $i > 1$. Notemos que $F_{i+5} = F_{i+4} + F_{i+3} = 2F_{i+3} + F_{i+2} = 3F_{i+2} + 2F_{i+1} = 5F_{i+1} + 3F_i = 8F_i + 5F_{i-1} > 8F_i + 4F_{i-1} > 8F_i + 2F_i = 10F_i$. De esta forma, si $k > 1$ entonces $F_{5k} > 10F_{5(k-1)} > \dots > 10^{k-1} \cdot F_5 = 8 \cdot 10^{k-1}$.

Por último, como $m \geq 5k$ entonces $F_{m+1} \geq F_{5k+1} = F_{5k} + F_{5k-1} > F_{5k} + \frac{1}{2}F_{5k} > 8 \cdot 10^{k-1} + 4 \cdot 10^{k-1} = 12 \cdot 10^{k-1} > 10^k$, por lo que F_{m+1} tiene al menos $k + 1$ dígitos. \square

Ahora sea $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \mathbb{Z}$ que cumpla (*) y $1 < a_1$

Corolario 4.3.10. *Si a_1 y a_2 tienen k_1 y k_2 dígitos, respectivamente, entonces $\delta(\mathcal{A}) < \min\{5k_1, 5k_2 - 1\}$.*

Demostración. Sea $m := \delta(\mathcal{A})$ y supongamos que $m \geq 5k_1$. Por la proposición 4.3.7 tenemos que $a_1 \geq F_{m+1}$ y por el lema 4.3.9 tenemos que F_{m+1} tiene al menos $k_1 + 1$ dígitos. Por consecuente a_1 tiene al menos $k_1 + 1$ dígitos. Esto demuestra que si a_1 tiene k_1 dígitos entonces $\delta(\mathcal{A}) < 5k_1$.

Luego, si suponemos que $m \geq 5k_2 - 1$ entonces $m + 1 \geq 5k_2$. La proposición 4.3.7 y el lema 4.3.9 implican que a_2 tiene al menos $k_2 + 1$ dígitos. Esto demuestra que si a_2 tiene k_2 dígitos entonces $\delta(\mathcal{A}) < 5k_2 - 1$. \square

Esta cota es muy eficiente ya que es fácil encontrar el número de dígitos de un número y la función ($a \mapsto$ número de dígitos de a) crece muy despacio (de forma logarítmica con base 10). Además, esta cota depende sólo de a_1 y a_2 . De hecho, en particular, la cota puede depender sólo de a_1 (si a_1 tiene k dígitos entonces $\delta(\mathcal{A}) < 5k$).

Bibliografía

- [ATN] A. Atanasov, C. Lopez, A. Perry, N. Proudfoot, M. Thaddeus; *Resolving toric varieties with Nash blow-ups*, Experimental Math. **20** (2011), no. 3, pp. 288-303.
- [CLO] D. Cox, J. Little, D. O’Shea; *Ideals, Varieties, and Algorithms*, Fourth Edition, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, (2015).
- [CLS] D. Cox, J. Little y H. Schenck; *Toric Varieties*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 124, American Mathematical Society, Providence, RI, (2010).
- [DRT] D. Duarte; *Nash modification on toric surfaces*, Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Serie A Matemáticas, DOI 10.1007/s13398-012-0104-4, (2012).
- [DG] D. Duarte, D. Green Tripp; *Nash modification on toric curves*, arXiv: 1808.05688. Aceptado para su publicación en Singularities, Algebraic Geometry, Commutative Algebra, and Related Topics, G.-M. Greuel et al. (eds.), Springer Nature Switzerland AG2018 (volumen dedicado a Antonio Campillo).
- [FSH] G. Fischer; traducción de L. Kay, *Plane Algebraic Curves*, American Mathematical Society, EUA, (2001).
- [GS1] G. Gonzalez-Sprinberg; *Éventails en dimension 2 et transformé de Nash*, Publ. de l’É.N.S., Paris (1977), pp. 1-68.
- [GS2] G. Gonzalez-Sprinberg; *Résolution de Nash des points doubles rationnels*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **32**, 2 (1982), pp. 111-178.
- [GT] P. D. González, B. Teissier; *Toric Geometry and the Semple-Nash modification*, Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas

- y Naturales, Serie A Matemáticas, DOI 10.1007/s13398-012-0096-0, (2012).
- [GM] D. Grigoriev, P. Milman; *Nash desingularization for binomial varieties as Euclidean division, a priori termination bound, polynomial complexity in dim 2*, Adv. Math. 231 (2012), no. 6, pp. 3389-3428.
- [GRS] H. Grossman; *On the Number of Divisions in Finding a G.C.D.*, The American Mathematical Monthly, vol. 31, no. 9, (Nov., 1924), p. 443.
- [HI1] H. Hironaka; *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero I, II*, Ann. of Math. (2) 79 (1964), pp. 109-203; idib. (2) 79 (1964), pp. 205-326.
- [HI2] H. Hironaka; *On Nash blowing-up*, Arithmetic and Geometry II, Progr. Math., vol 36, Birkhauser Boston, Mass., (1983), pp. 103-111.
- [HLK] K. Hulek; *Elementary Algebraic Geometry*, Student Mathematical Library, vol. 20, American Mathematical Society, (2003).
- [HMP] J. Humphreys; *Linear Algebraic Groups*, Graduate Texts in Math. 21, Springer, New York, (1975).
- [KLS] S. L. Kleiman, D. Laksov; *Schubert Calculus*, The American Mathematical Monthly, vol. 79, no. 10, (Dec., 1972), pp. 1061-1082.
- [KLR] J. Kollár; *Lectures on Resolution of Singularities*, Annals of Mathematics Studies, Number 166, Princeton University Press, (2007).
- [LNG] S. Lang; *Algebra*, Third Edition, Graduate Texts in Math. 211, Springer, New York, (2002).
- [MFD] D. Mumford; *Algebraic Geometry I: Complex Projective Varieties*, Corrected 2nd printing, Springer, New York-Berlin-Heidelberg, (1981).
- [NBL] A. Nobile; *Some properties of the Nash blowing-up*, Pacific Journal of Mathematics, **60**, (1975), pp. 297-305.
- [RBS] V. Rebassoo; *Desingularization properties of the Nash blowing-up process*, Thesis, University of Washington (1977).
- [SMP] J. G. Semple; *Some investigations in the geometry of curve and surface elements*, Proc. London Math. Soc. (3) **4** (1954), pp. 24-49.

- [SHF] I. R. Shafarevich; *Basic Algebraic Geometry 1*, Third Edition, Springer, (2013).
- [SPK] M. Spivakovsky; *Sandwiched singularities and desingularization of surfaces by normalized Nash transformations*, Ann. of Math. (2) **131** (1990), no. 3, pp. 411-491.
- [SPG] T. A. Springer; *Linear Algebraic Groups*, Second Edition, Progress in Math. 9, Birkäuser Verlag, Basel Boston Berlin, (1998).
- [WNR] S. Warner; *Modern Algebra*, Dover Publications, New York, (1990).
- [ZR1] O. Zariski; *The reduction of the singularities of an algebraic surface*, Ann. of Math., 2, **40** (3) (1939), pp. 639-689.
- [ZR2] O. Zariski; *Reduction of the singularities of algebraic three dimensional varieties*, Ann. of Math., 2, **45** (3) (1944), pp. 472-542.