



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EFFECTOS DEL REGULADOR EN RENORMALIZACIÓN DE
MODELOS TENSORIALES COLOREADOS DE RANGO 3 PARA
GRAVEDAD CUÁNTICA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

FÍSICO

PRESENTA:

VICTOR DENNIS MUÑOZ VITELLY

TUTOR:

DR. TIM ANDREAS KOSLOWSKI

Ciudad Universitaria, Cd. Mx.
2019





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Muñoz

Vitelly

Víctor Dennis

5564649930

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

310237716

2. Datos del tutor

Dr.

Tim Andreas

Koslowski

3. Datos del sinodal 1

Dr.

Wolfgang Peter

Bietenholz

4. Datos del sinodal 2

Dr.

Jerónimo Alonso

Cortez

Quezada

5. Datos del sinodal 3

Dr.

Yuri

Bonder

Grimberg

6. Datos del sinodal 4

Dr.

Mariano

Chernicoff

Minsberg

7. Datos del trabajo escrito

Efectos del regulador en renormalización de modelos tensoriales coloreados de rango 3 para gravedad cuántica

71 p, 2019

Resumen

En este trabajo se presentan a los Modelos Tensoriales Coloreados de rango 3 como Teorías Cuánticas de Campo con una Función de Partición que admite la interpretación geométrica de triangulaciones del espacio-tiempo y por tanto como un enfoque discreto para Gravedad Cuántica en 3 dimensiones, en el que se toma el límite al continuo con la Ecuación del Grupo de Renormalización Funcional. Se les aplica la ecuación de Wetterich, con la misma metodología que se desarrolló en [1] para tomar el límite al continuo, encontrar las funciones beta, puntos fijos en el flujo de renormalización y sus correspondientes exponentes críticos con el fin de encontrar un punto fijo consistente con el resultado analítico de estos, el límite de doble escalamiento. La ecuación de Wetterich hace una interpolación entre una Acción Desnuda S_{bare} y la Acción Efectiva Promedio Γ_N en un Espacio de Teorías (compuesto por todos los acoplamientos asociados a los operadores compatibles con la simetría) usando un regulador que apantalla modos IR. Deben hacerse truncaciones (proyecciones en el Espacio de Teorías) que tienen errores y dependencia del esquema. Es el objetivo de esta tesis implementar un regulador con forma exponencial para realizar sistemáticamente los cálculos relevantes (sumas espectrales) en Mathematica y así poder tomar truncaciones más grandes. Se analizan los efectos que tiene el regulador exponencial comparando con los resultados de [1] donde se usó un regulador tipo Litim como un estudio de la dependencia del esquema del Grupo de Renormalización.

Se logra obtener una truncación hasta orden $(T\bar{T})^4$ en los tensores como operadores (4 veces más grande que $(T\bar{T})^3$ en [1]). También se encuentra que dos esquemas de escalamiento para los acoplamientos adimensionales son compatibles hasta esta truncación. Como resultado los puntos fijos estables en la truncación a $(T\bar{T})^3$ siguen siendo estables hasta $(T\bar{T})^4$. Se desarrolla una nueva interpretación como puntos fijos con reducción dimensional a Modelos Matriciales Efectivos para Gravedad Cuántica en 2 dimensiones, por lo que será necesario buscar nuevas clases de universalidad estables en el futuro.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Estructura de la Tesis	3
2. Grupo de Renormalización y Gravedad Cuántica	5
2.1. Grupo Funcional de Renormalización	5
2.1.1. Perspectiva Wilsoniana	6
2.1.2. La ecuación de Wetterich	9
2.2. Gravedad Cuántica	12
2.2.1. Seguridad Asintótica	13
2.2.2. Gravedad Cuántica Discreta	14
2.2.3. Modelos Tensoriales Coloreados	16
3. Ecuación de Wetterich para Modelos Tensoriales	21
3.1. Consideraciones generales	23
3.2. Ejemplo: Truncación a orden 4	25
3.3. Implementación en Mathematica	30
3.3.1. Código implementado previamente	30
3.3.2. Código para sumas espectrales	33
4. Resultados	37
4.1. Truncación a orden 8	38

4.1.1. Escalamiento A	39
4.1.2. Escalamiento B	44
5. Conclusiones	51
5.1. Punto fijo con una dirección relevante	52
5.2. Punto fijo con dos direcciones relevantes	54
5.3. Interpretación física	55
A. Sumas Espectrales	59

Capítulo 1

Introducción

La Gravedad Cuántica es entendida como una serie de enfoques distintos que tienen por objetivo la búsqueda de un modelo matemático consistente que reproduzca los efectos de la Relatividad General y Campos Cuánticos como límites adecuados. La unificación de la teoría cuántica con la teoría gravitacional es uno de los problemas abiertos más importantes de la física moderna. Cabe cuestionarse si la interacción gravitacional en términos de la Relatividad General puede someterse a tal procedimiento de cuantización.

Uno de los principales problemas con el que una teoría candidata para Gravedad Cuántica tiene que lidiar es que la gravedad resulta ser no renormalizable de manera perturbativa. Esta es la razón por la que surge el escenario de Seguridad Asintótica que busca implementar métodos no perturbativos del Grupo de Renormalización (usualmente una ecuación exacta) para encontrar un punto fijo no trivial en el flujo de renormalización de la teoría, donde las observables físicas se encuentren libres de divergencias. No obstante, dichos métodos usualmente tienen parámetros libres que inducen dependencia del esquema (scheme-dependence). Estos parámetros deben fijarse como un esquema para obtener resultados numéricos y si se cambian, los resultados también cambian, por ejemplo una observable física podría presentar distintos valores según las reglas arbitrarias que se escojan. De esta manera también es necesario cuantificar esta dependencia del esquema ya que un resultado fidedigno debe ser independiente de estos parámetros.

Para esta tesis se opta por un enfoque discreto: los Modelos Tensoriales Coloreados, Teorías Cuánticas de Campo que se catalogan dentro del régimen de triangulaciones dinámicas euclidianas. El modelo consiste en una distribución de probabilidad para un tensor complejo aleatorio de rango 3 para los objetivos de esta tesis, con simetría $U(N) \otimes U(N) \otimes U(N)$ donde N es el tamaño del tensor. La Función de Partición de estos modelos admite una interpretación geométrica como una suma de triangulaciones del espacio-tiempo. Como un resultado analítico, estos modelos presentan una transición de fase a una teoría continua en un límite de doble escalamiento donde $N \rightarrow \infty$ y un solo acoplamiento $g \rightarrow g_c$. Esta transición de fase está caracterizada por un único exponente crítico que toma el valor de $\theta = 1$ en el caso de tensores de rango 3.

De manera análoga que en literatura para Modelos Tensoriales Coloreados complejos [1], reales [2] y sus precursores los Modelos Matriciales [3, 4]; se implementará la ecuación de Wetterich en su versión discreta

$$N\partial_N\Gamma_N = \text{Tr} \left(\frac{N\partial_N R}{R + \Gamma_N^{(2)}} \right).$$

Esta es una ecuación diferencial exacta del Grupo de Renormalización Funcional definida en un Espacio de Teorías para la Acción Efectiva Promedio Γ_N del modelo y regulada por un corte IR dado por R que actúa como un término de masa para apantallar grados de libertad en el IR. El Espacio de Teorías consiste en las constantes de acoplamiento del modelo como coordenadas, varían con la escala que en este caso discreto resulta ser N . Al aplicar esta herramienta se encontrarán funciones beta, puntos fijos en el flujo de renormalización y sus correspondientes exponentes críticos. Así al asegurar la independencia de N es posible tomar el límite al continuo.

En principio, el Espacio de Teorías es construido como un espacio de infinitas dimensiones, constituido por todos los operadores que sean consistentes con la simetría del modelo. Para poder realizar cálculos es necesario tomar truncaciones para la Acción Efectiva Promedio; es decir, proyecciones en este espacio a un número finito de operadores importantes. Los puntos fijos y exponentes críticos se estudian ampliando esta truncación hasta encontrar un comportamiento convergente.

El objetivo de esta tesis es implementar un regulador exponencial R que permita tomar truncaciones más grandes y realizar las sumas espectrales provenientes de la traza Tr de la ecuación de Wetterich en Mathematica, ya que la complejidad de los cálculos involucrados para truncaciones grandes resultan imposibles de hacer sin el uso de software por el gran cálculo que involucra. De esta forma, al aumentar la truncación pueden estudiarse los exponentes críticos y mejorar la precisión numérica de estos.

El problema a resolver es la ampliación de la truncación de la referencia [1] y estudiar la dependencia del esquema que inducen ciertos parámetros de la ecuación de Wetterich que son arbitrarios pero que es necesario fijarlos. La truncación de esta referencia es a orden $(\overline{TT})^3$ y contiene 14 acoplamientos, lo que conlleva a funciones beta como un sistema de 14 ecuaciones diferenciales. La ampliación de la truncación implica llegar al orden $(\overline{TT})^4$, la cuál tiene 57 acoplamientos y por tanto las funciones beta serán un sistema de 57 ecuaciones diferenciales. Aunado a ello para obtener una expresión explícita del lado derecho de la ecuación de Wetterich es necesaria una expansión en vértices, por lo que este lado se ve como una suma de trazas de productos de tensores. Usando argumentos de simetría y despreciando algunos términos resulta que deben obtenerse al rededor de 246 trazas de productos de tensores y esta es la motivación para usar Mathematica. Pensar en una truncación aún más grande como un siguiente paso, por ejemplo a $(\overline{TT})^5$ requeriría una combinatoria inmensa. El código desarrollado para esta tesis permite obtener todas estas trazas (bajo ciertas condiciones) como una suma de términos numéricos y acoplamientos dependientes de la escala que al tomar el límite $N \rightarrow \infty$ en ambos lados de la ecuación, determina la estructura de las funciones beta bajo la suposición de que estas tienen la forma de una expansión $1/N$ como se verá más adelante.

Sin embargo, tomar este límite no es sencillo ya que no conocemos cómo dependen los acoplamientos respecto a la escala N . La ecuación de Wetterich permite encontrar cotas como potencias N^{d_i} para cada acoplamiento i de los 57. Estas cotas se relacionan entre sí y entre valores numéricos como se verá más adelante. Este escalamiento es uno de los parámetros libres mencionados que para obtener resultados numéricos es necesario fijarlos y estos modifican la estructura de las funciones beta. De esta manera, las 246 trazas tienen que ser analizadas para establecer las cotas. El estudio de la dependencia del esquema de estos parámetros

se hace escogiendo dos escalamientos distintos. Una vez escogido un escalamiento, se hace el análisis para ver qué término contribuye a qué función beta y así el resultado se presenta como dos sistemas de 57 ecuaciones diferenciales, para los cuales deben obtenerse los puntos fijos, exponentes críticos y compararlos entre ellos para cuantificar la dependencia del esquema inducida.

Los puntos fijos en el flujo de renormalización se obtienen tratando a las funciones beta como un sistema de ecuaciones algebraicas igualadas a cero y los exponentes críticos como los eigenvalores de la matriz de estabilidad. Estos puntos fijos tienen una dependencia directa del esquema puesto que dependen de la forma del regulador incluido en las trazas que se usan para las funciones beta. Así, el estudio de esta dependencia se hace comparando los resultados para los exponentes críticos de la referencia [1] donde se usó un regulador tipo Litim con los de esta tesis donde se usa un regulador exponencial.

Por último, el estudio de la dependencia de la escala culmina analizando la dependencia que tienen los exponentes críticos respecto a la dimensión anómala η como un parámetro libre. Para esto se escogen 5 esquemas diferentes, la dimensión anómala depende de los puntos fijos así que se escogen 3 expresiones diferentes para esta. Los otros dos esquemas tienen que ver con la matriz de estabilidad, incluyendo o no las derivadas de η para obtener los eigenvalores como exponentes críticos. Estos esquemas se estudian cuando ya se han fijado el escalamiento de los acoplamientos y el regulador.

1.1. Estructura de la Tesis

El Capítulo 2 consistirá del marco teórico. Se presentará al Grupo de Renormalización Funcional como la herramienta que se utilizará, específicamente la ecuación de Wetterich como una ecuación exacta del flujo de renormalización que es construida a partir de la perspectiva de renormalización Wilsoniana. Además se hablará del panorama de la Gravedad Cuántica, en especial la motivación para usar herramientas no perturbativas que justifica el uso de la ecuación de Wetterich; se hablará del flujo de renormalización implementado en el contexto de Seguridad Asintótica. Por último se presentarán a los Modelos Tensoriales Coloreados como un modelo discreto de Gravedad Cuántica en el que puede recuperarse un límite al continuo, siendo estos el marco de trabajo para los siguientes capítulos.

El Capítulo 3 presentará la metodología de esta tesis. Se implementará la ecuación de Wetterich a estos modelos, se darán algunas consideraciones generales para entender la notación usada y el marco general de trabajo. Se harán como ejemplo los cálculos explícitos para una truncación pequeña a orden $(T\bar{T})^2$ con el fin de explicar la metodología y la justificación del uso de software. También se describirá el programa hecho en Mathematica que realiza desde las gráficas hasta las sumas espectrales que permiten obtener las trazas del lado derecho de la ecuación de Wetterich y así las funciones beta de los acoplamientos.

En el Capítulo 4 se obtendrán los resultados, es decir las funciones beta, puntos fijos y exponentes críticos para cuatro truncaciones de la Acción Efectiva Promedio. Se considerarán distintos esquemas para cuantificar cuánto dependen los resultados de parámetros y definiciones que en principio son libres. Un resultado legítimo debería ser independiente de estos parámetros.

En el Capítulo 5 se darán las conclusiones necesarias para los puntos fijos encontrados más un poco

de trabajo para el futuro, así como la interpretación física de los mismos.

En el Apéndice A se reportará la estructura de las sumas espectrales que aparecen en las funciones beta del Capítulo 4, así como sus valores numéricos usando dos tipos de reguladores. Así las funciones beta se presentan como un resultado más general para un regulador que satisface pertenecer a una determinada familia de funciones.

Capítulo 2

Grupo de Renormalización y Gravedad Cuántica

2.1. Grupo Funcional de Renormalización

Una Teoría Cuántica de Campos puede presentar divergencias, por lo que se necesita un regulador. El Grupo de Renormalización es una herramienta útil para deshacernos de ellas y obtener valores finitos para observables; y en nuestro caso obtener el límite al continuo. El Grupo de Renormalización no es un método arbitrario para quitar estos infinitos sino que es una herramienta de la física estadística con relevancia conceptual que trata con las fluctuaciones de sistemas, ya sean clásicos o cuánticos; y con la física de las escalas.

Los orígenes del Grupo de Renormalización nos obligan a remontarnos a la época de Lev Landau y sus aportaciones en fenómenos críticos [5, 6] y en Electrodinámica Cuántica tratando divergencias logarítmicas con acoplamientos dependientes de la escala [7, 8]. Particularmente en su trabajo con cristales y sus transiciones de fase debido a los cambios de simetría, a los cambios en la estructura cristalina del material. De manera histórica, el escenario para describir las transiciones de fase que la termodinámica proveía¹, entre otras muchas características, consistía en regiones para los valores de la capacidad térmica c_V y la compresibilidad isotérmica κ_T . Cuando estas variables son positivas se habla de una región estable, si son negativas se habla de en una región inestable y los estados con ese comportamiento no son realizables. Además c_V y κ_T también pueden tomar un valor infinito.

Para dar un ejemplo conciso, la capacidad calorífica C del ${}^4\text{He}$ (helio-4) en función de la temperatura T aumenta hasta un valor infinito. En esta temperatura crítica T_c es cuando se da la transición de fase al helio superfluido. Eso es justamente lo que dicen los valores infinitos para c_V y κ_T . En la vecindad de estos puntos se encuentra un estado de equilibrio metaestable y como las susceptibilidades del sistema son muy grandes, alguna perturbación como una fluctuación hará responder rápidamente al sistema hasta que sea estable y heterogéneo: justo una transición de fase [9]. Sin embargo, estos valores infinitos están caracterizados por

¹Fenómenos críticos asociados a transiciones de fase continuas.

una ley de potencias, no divergen arbitrariamente sino que siguen una relación de la forma

$$C \propto \frac{1}{|T - T_c|^\theta},$$

y llamamos a θ el exponente crítico. Podemos caracterizar las transiciones de fase si logramos obtener los exponentes críticos.

Landau se vio motivado a definir un parámetro de orden η y a expresar la energía libre de Gibbs molar como una serie de potencias en η . Esto significa que no se conocía cómo funcionaba el sistema de manera microscópica pero que por argumentos de orden y simetría, se podía saber cómo se manifestaba esta fenomenología en el mundo macroscópico [6]. Esta metodología permitió predecir exponentes críticos, algunos como resultados aproximados. A este razonamiento con el parámetro de orden se le conoce como teoría de Landau. Parafraseando a [6], unos años después, en 1944 Onsager logró encontrar propiedades termodinámicas de un modelo simple que presentaba una transición de fase entre paramagnetismo y ferromagnetismo, resolvió el Modelo de Ising en dos dimensiones [10, 11]. Este modelo representa los momentos dipolares de un arreglo de átomos y contiene variables discretas $+1$ ó -1 para la orientación de los espines, pueden ser paralelos o antiparalelos a sus vecinos. Pero los resultados de Onsager estaban en contradicción con las predicciones que se podían hacer con la teoría de Landau. Esto no significa que lo que Landau hizo fue incorrecto, de hecho el parámetro de orden trajo bastante claridad conceptual. Ahora entendemos que el trabajo de Landau funciona porque trabajaba con hamiltonianos efectivos. Es decir, no tenía una descripción microscópica de los fenómenos sino que trabajaba en una escala más grande describiendo el comportamiento colectivo de la fenomenología microscópica. Estos hamiltonianos son ahora conocidos como hamiltonianos efectivos de Landau-Ginzburg-Wilson.

Tomando ahora como ejemplo el modelo de Ising ya que se ha mencionado: Onsager no resolvió este problema con el Grupo de Renormalización, sin embargo puede hacerse. Como es un sistema con espines podríamos intentar escribir un hamiltoniano como $H(t, h)$ dependiente de una temperatura reducida $t = (T - T_c)/T_c$ y una suma de interacciones a primeros vecinos de los dipolos con acoplamientos h . Este problema se resuelve trabajando en bloques, definimos un espín efectivo en cada bloque y hacemos una iteración a $H(t', h')$ y lo hacemos de nuevo, hasta que terminemos con un solo bloque [12]:

$$H(t, h) \rightarrow H(t', h') \rightarrow H(t'', h'') \rightarrow \dots \quad (2.1)$$

Esta es la perspectiva del Grupo de Renormalización de Leo P. Kadanoff de 1966 [13]. Lo que hacemos es reducir sistemáticamente los grados de libertad del sistema. La idea de grupo está en que estamos aplicando en cada iteración una transformación de escala, en general es un semigrupo ya que no siempre estas transformaciones resultan ser invertibles. Nuestro hamiltoniano hecho de interacciones de espines, se vuelve un hamiltoniano con interacciones de espines efectivos. Este procedimiento tuvo cierto éxito, sin embargo falló en ser consistente con las demás predicciones para otros modelos. Algo faltaba en la perspectiva de Kadanoff.

2.1.1. Perspectiva Wilsoniana

No fue hasta 1971 que Kenneth Wilson entiende la sutileza del problema [6], influenciado principalmente por sus trabajos como físico de partículas elementales en el campo de las interacciones fuertes subnucleares

y su acercamiento simultáneo a los fenómenos críticos; como se explica en la referencia histórica [8] a partir del esclarecimiento de cuatro artículos principales de Wilson, que Peskin considera fundamentales para el desarrollo conceptual del Grupo de Renormalización: [14, 15, 16, 17].

Así esta referencia da como primer paso el trabajo de Wilson en interacción pión-nucleón que presentaba divergencias ultravioletas (a momentos grandes). Su propuesta fue usar el formalismo Hamiltoniano² de la mecánica cuántica y un corte de momento para distinguir grados de libertad de momentos pequeños y grandes, eliminando posteriormente estos últimos grados de libertad. O sea, Wilson define una Teoría de Campo Cuántico como una familia uniparamétrica de teorías efectivas para grados de libertad en el IR. Como un siguiente paso Wilson se da a la tarea de estudiar la evolución con la escala k de una constante de acoplamiento $g(k)$ dada por la ecuación de Gell-Mann y Low (2.2) originada por su programa para aplicar el Grupo de Renormalización en forma funcional (reformulando así el programa de Dyson [18]) a la electrodinámica cuántica y la interacción débil, Wilson suponía que se podían encontrar ecuaciones de este tipo para la interacción fuerte:

$$\beta(g(k)) = \frac{dg(k)}{d \log k}, \quad (2.2)$$

y que se podían analizar como un sistema dinámico, pensando en puntos fijos como valores a los que la constante de acoplamiento fuera atraída (y por tanto donde el sistema fuera invariante de escala [8, 18]). Esto llevó a entender cómo formular un análisis de una Teoría Cuántica de Campo a partir del flujo del Grupo de Renormalización funcional. El último paso consiste en la introducción de una retícula con un parámetro de escalamiento que representa el espacio que resulta cuando los estados con momento grande se han eliminado. Esto representaba una conexión entre mecánica estadística en la retícula y Teoría Cuántica de Campos euclidiana en d dimensiones [8, 19] cuya aplicación llevó a la discusión del confinamiento de los quarks aunque no a una solución en el continuo.

Como se mencionó, la perspectiva de Kadanoff resulta aplicable a ciertos modelos, a esta clase de modelos en los que el hamiltoniano efectivo tiene la misma forma que el fundamental (hamiltonianos autosimilares)³ [6, 12]. Pero esto no siempre es cierto. La idea de Wilson es entonces (como Fisher explica en su artículo [6]) pensar en un espacio de parámetros de la teoría como un espacio de todos los hamiltonianos posibles y entender el grupo de renormalización como una serie de transformaciones de escala con un parámetro $b = \Lambda^{-1}$ (lattice, red o retícula) que quitan a las fluctuaciones de cierto rango y cambian al hamiltoniano. Sus motivaciones residían en el estudio de los fenómenos críticos en la materia, donde el espaciado atómico juega el papel de la escala natural del sistema y en las transformaciones en bloques de espín que realizó Kadanoff [18].

Podemos ver en la Figura 2.1 el espacio de hamiltonianos y una primera iteración hacia un hamiltoniano a una primera renormalización como se hizo en la ecuación (2.1). El proceso de renormalización creará una trayectoria, desde una hipersuperficie de hamiltonianos fundamentales, físicos o microscópicos hacia otra hipersuperficie con un hamiltoniano diferente, efectivo, renormalizado. Al aplicar suficientes veces esta transformación, la trayectoria terminará en un punto fijo con un hamiltoniano totalmente renormalizado.

²Basados en el triunfo de la Electrodinámica Cuántica, la comunidad científica se dispuso a usar Teoría Cuántica de Campos para las interacciones fuertes, trabajar con el lagrangiano para interacciones pión-nucleón y este esfuerzo infructífero fue abandonado hacia otros métodos [8].

³En el modelo de Ising, usando su metodología, Kadanoff ignora el surgimiento de nuevos acoplamientos debido a los bloques de espín (interacciones entre espines más allá de primeros vecinos y de largo alcance); Wilson los toma en cuenta [18].

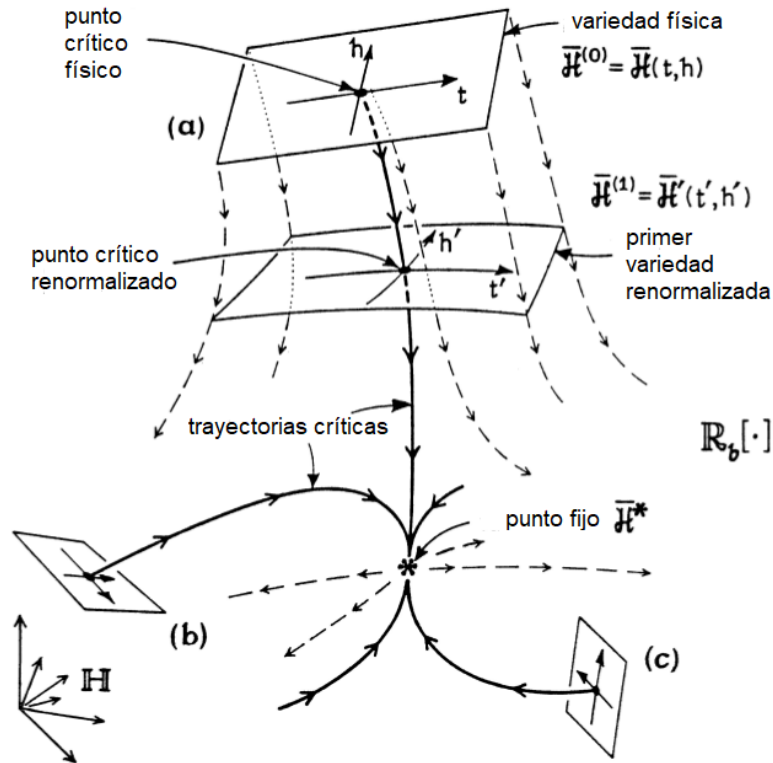


Figura 2.1: Espacio de hamiltonianos, imagen recuperada y editada de [6].

Además diferentes condiciones iniciales devendrán en distintas trayectorias, creando un flujo; el flujo del Grupo de Renormalización. Adicionalmente este razonamiento incluía el concepto de universalidad en el que varios sistemas físicos con una fenomenología microscópica diferente podrían ser caracterizados con los mismos exponentes críticos. Esto lo podemos ver en la Figura 2.1 como las hipersuperficies (a), (b) y (c) que terminan en el mismo punto fijo. A los diferentes modelos que exhiben el mismo comportamiento crítico se dice que pertenecen a la misma clase de universalidad.

Wilson también incluye un concepto de relevante e irrelevante, el proceso de renormalización trabajará con operadores que son relevantes dependiendo del comportamiento de los acoplamientos al rededor del punto fijo. Cada acoplamiento que define este espacio de parámetros en la Figura 2.1 puede tener distintos valores, diferentes configuraciones iniciales pero cerca de la región crítica hemos visto que pertenecen a la misma clase de universalidad. Así, estos operadores (perturbaciones) no son relevantes para la descripción del comportamiento crítico. Esto se traducirá más adelante a términos de direcciones relevantes o irrelevantes, asociados a los operadores que son importantes para la descripción y que definen el flujo de renormalización.

Además también se ha mostrado como las expansiones ϵ y $1/N$ van de la mano con el Grupo de Renormalización. Estas expansiones son una alternativa en ausencia de un parámetro pequeño donde se podría hacer una expansión perturbativa. Más adelante encontraremos este problema y tendremos que recurrir a la expansión $1/N$ para definir operadores relevantes, que en nuestro caso serán los que tengan el mayor peso estadístico. Regularmente la expansión $1/N$ es usada ya que cuando N es grande, algunos cálculos se simplifican en distintos modelos y la solución de teorías asociadas a grupos de simetría pueden

escribirse en términos de esta expansión [20].

2.1.2. La ecuación de Wetterich

La ecuación de Wetterich es una ecuación diferencial exacta del Grupo Funcional de Renormalización para la Acción Efectiva Promedio Γ_k [21]. En Teoría Cuántica de Campos usual, k es una escala que corresponde al momento (energía). Esta ecuación puede derivarse a partir de definir la Función de Partición $\mathcal{Z}[J]$ para un campo escalar φ en el marco de cuantización por integral funcional o integral de trayectoria

$$\mathcal{Z}[J] = \int_{\Lambda} \mathcal{D}\varphi e^{-S[\varphi] + \int J\varphi},$$

donde $J(x)$ es una fuente, $\mathcal{D}\varphi$ es una medida de probabilidad y se integra sobre un corte de momento Λ para regular en el UV. Esta funcional también conocida como la funcional generadora define a la teoría cuántica misma. Las derivadas variacionales de este objeto (respecto a J) permiten obtener las funciones de Green o funciones de n puntos de la teoría, por lo que es una descripción completa [22, 23, 24]. Como una alternativa a la integral funcional puede considerarse la cuantización canónica, donde los campos permean todo el espacio y son tratados como operadores, las partículas surgen a partir de excitaciones del campo y son los estados cuánticos. Esta otra alternativa tiene la ventaja de obtener más claridad conceptual e interpretativa, usualmente se calculan secciones de dispersión para interacciones que son cotejadas experimentalmente.

Por otro lado, la Acción Efectiva $\Gamma[\phi]$ en la alternativa de cuantización por integral de trayectoria es definida como la transformada modificada de Legendre dada por

$$\Gamma[\phi] = \sup_J \left\{ \int J\phi - \log \mathcal{Z}[J] \right\}.$$

La idea de renormalización de Kenneth Wilson se implementa al construir una acción Γ_k que interpole una Acción Desnuda S_{bare} con la Acción Efectiva Γ , con un parámetro de escala de momento k : $\Gamma_{k \rightarrow \Lambda} \simeq S_{bare}$, $\Gamma_{k \rightarrow 0} = \Gamma$ y así se define la Función de Partición regulada en IR como

$$\mathcal{Z}_k[J] = e^{W_k[J]} = \int_{\Lambda} \mathcal{D}\varphi e^{-S[\varphi] - \Delta S_k[\varphi] + \int J\varphi},$$

y usando su transformada modificada de Legendre se obtiene la Acción Efectiva Promedio Γ_k , con la cuál también es posible definir la Teoría Cuántica de Campo y es lo que se hará en los capítulos posteriores al proponer un ansatz para esta como una suma de operadores invariantes

$$\Gamma_k[\phi] = \sup_J \left\{ \int J\phi - W_k[J] \right\} - \Delta S_k[\phi],$$

donde ΔS_k es un regulador IR en D dimensiones (término de masa dependiente del momento) dado por

$$\Delta S_k[\varphi] = \frac{1}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \varphi(-p) R_k(p) \varphi(p)$$

Para derivar la ecuación de Wetterich no se necesita una expresión explícita para la función R_k , solo bastan 3 condiciones para asegurar la interpolación [22], [25]:

- Implementar la regularización, apantallar modos IR:

$$\lim_{p^2/k^2 \rightarrow 0} R_k(p) > 0.$$

- El regulador se va a cero en el límite $k \rightarrow 0$ y como consecuencia recuperamos en los límites a $W_{k \rightarrow 0}[J] = W[J]$ y $\Gamma_{k \rightarrow 0}[\phi] = \Gamma$:

$$\lim_{k^2/p^2 \rightarrow 0} R_k(p) = 0.$$

- Inducir que la integral funcional es dominada por el punto estacionario de la acción:

$$\lim_{k^2 \rightarrow \Lambda \rightarrow \infty} R_k(p) \rightarrow \infty.$$

Con todos estos elementos puede encontrarse que la Acción Efectiva Promedio Γ_k satisface una ecuación diferencial dada por la derivada logarítmica respecto al momento $k\partial_k$ y toma la forma

$$k\partial_k \Gamma_k = \frac{1}{2} \text{STr} \left(\frac{k\partial_k R_k}{\Gamma_k^{(2)} + R_k} \right), \quad (2.3)$$

donde STr denota la súper-traza y su definición depende del tipo de campo con el que se trabaje, en nuestro caso será una traza positiva usual como índices contraídos de productos de tensores.

Esta ecuación implementa la idea de Wilson justamente al comenzar haciendo la interpolación de la Acción Desnuda con la Acción Efectiva, apantallando los modos IR. Esto está completamente relacionado al espacio de hamiltonianos discutido para la Figura 2.1. Sin embargo ahora trabajamos en un Espacio de Teorías (este será el espacio de parámetros) o espacio de todas las acciones funcionales generado por todos los posibles operadores invariantes Inv_n del campo, compapibles con la simetría del modelo con que se trabaje. Aunque dicha simetría puede romperse con el regulador, involucrando una identidad de Ward y más operadores. Así construimos a la Acción Efectiva Promedio como un ansatz dado por una suma de estos operadores

$$\Gamma_k[\phi] = \sum_n g_n Inv_n[\phi]. \quad (2.4)$$

Gráficamente estamos trabajando en un espacio infinito-dimensional constituido por las constantes de acoplamiento de los operadores que dependen de la escala k . Podemos ver esto en la Figura 2.2 como la trayectoria que une a S_{bare} con Γ . Sin embargo no hay una única trayectoria, cada trayectoria es generada por un regulador y condiciones iniciales diferentes y de esta forma definen un flujo de renormalización.

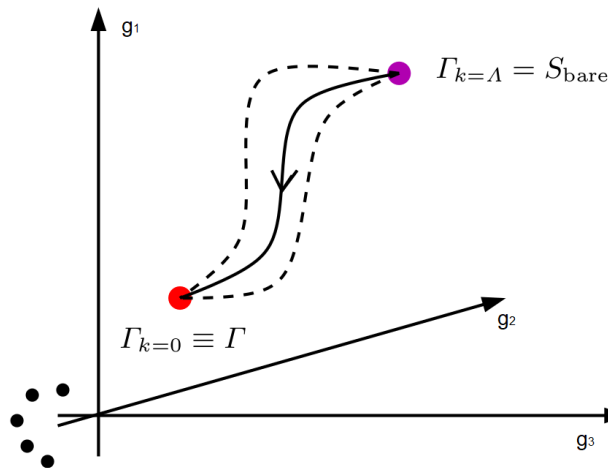


Figura 2.2: Flujo de renormalización de la Acción Efectiva Promedio, imagen recuperada y editada de [22].

El uso de la ecuación de Wetterich para esta tesis consistirá en trabajar con truncaciones de la misma forma que la ecuación (2.4) y acoplamientos adimensionales g_i

$$g_i = \tilde{g}_i k^{-d_i}$$

en terminos de \tilde{g}_i , los acoplamientos originales dependientes de la escala k . La ecuación de Wetterich permite encontrar las funciones beta del modelo como parciales logarítmicas de la escala $\beta_i := k \partial_k g_i$ (ecuación del Grupo de Renormalización de Callan-Symanzik o generalizada de Gell-Mann-Low [26]) como puede apreciarse en el lado izquierdo de la ecuación (2.3) aplicada a la ecuación (2.4). Estas formarán un sistema de ecuaciones diferenciales dependiente de los acoplamientos. Se encontrarán los puntos fijos g_{j^*} tales que $\beta_i|_{g_{j^*}} = 0$. Estos puntos fijos atraerán al flujo cuando $k \rightarrow \infty$ en el espacio fase del sistema de ecuaciones diferenciales, esto define una superficie crítica en el ultravioleta S_{UV} con dimensión Δ_{UV} como el número de direcciones atractivas o relevantes [26]. En el caso de los Modelos Tensoriales Coloreados estaremos buscando una dirección relevante ya que el resultado analítico consiste solo en un acoplamiento resulta relevante. Expandiendo la función beta al rededor del punto fijo permite determinar el valor de Δ_{UV}

$$\begin{aligned} \beta_i(g_j(k)) &= \beta_i(g_{j^*}) + \sum_j (g_j(k) - g_{j^*}) \frac{\partial \beta_i}{\partial g_j}(g_{j^*}) + \mathcal{O}((g_j(k) - g_{j^*})^2) \\ &\simeq \sum_j (g_j(k) - g_{j^*}) \frac{\partial \beta_i}{\partial g_j}(g_{j^*}), \end{aligned}$$

cuya solución general [26, 27] es

$$g_i(k) = g_{i^*} + \sum_I C_I V_i^I \left(\frac{k_0}{k} \right)^{\theta_I},$$

con C_I constantes de integración y k_0 una escala de referencia fija, y $Re(\theta)$ debe ser positiva para $g_i(k)$ se aproxime a g_{i^*} como se muestra en la ecuación de eigenvalores

$$\sum_j \frac{\partial \beta_i}{\partial g_j} V_j^I = -\theta_I V_i^I.$$

Esto nos da el valor de Δ_{UV} como el número de eigenvalores de la matriz de estabilidad o Hessiana, con parte real positiva. Si $Re(\theta_I) > 0$ lo llamamos dirección relevante, si $Re(\theta_I) < 0$ irrelevante. Para $Re(\theta_I) = 0$ las llamamos direcciones marginales, su descripción requiere tomar en cuenta términos más altos en la expansión al rededor del punto fijo. Como el flujo de renormalización se aproxima al punto fijo como $(k_0/k)^{\theta_I}$, llamamos a estos eigenvalores: los exponentes críticos.

Para finalizar, la ecuación (2.3) puede descomponerse, absorbiendo todos los términos dependientes del campo en F y los independientes en P^{-1} con

$$\Gamma^{(2)} + R_k = P^{-1} + F,$$

de forma que, expandiendo como una serie de Taylor o en nuestro caso como hay dependencia del campo, en una expansión en vértices como

$$\frac{k \partial_k R_k}{\Gamma_k^{(2)} + R_k} = \frac{k \partial_k R_k}{1 + PF} P = k \partial_k R_k \sum_{n=0}^{\infty} (-PF)^n P.$$

Y de esta manera, la ecuación de Wetterich se expresa como

$$k \partial_k \Gamma_k = \frac{1}{2} \text{STr} \left(\frac{k \partial_k R_k}{\Gamma_k^{(2)} + R_k} \right) = \frac{1}{2} \text{STr} \left(k \partial_k R_k \sum_{n=0}^{\infty} (-PF)^n P \right).$$

2.2. Gravedad Cuántica

Cuando hablamos de Gravedad Cuántica no nos referimos a una teoría en particular sino a una serie de intentos o una serie de enfoques distintos que tienen por objetivo estudiar a la gravedad a un nivel microscópico y expresarla en el lenguaje usual de la Teoría Cuántica de Campos.

La unificación de la física cuántica con la Relatividad General como uno de los problemas abiertos más importantes de la física teórica basados en una perspectiva reduccionista; la comprensión fundamental del universo temprano y la evolución final de los agujeros negros, en general la mecánica estadística detrás de la termodinámica de agujeros negros; el problema del tiempo, que para mecánica cuántica es un elemento externo, absoluto mientras que para Relatividad General es un objeto dinámico, son algunas de las principales motivaciones para la búsqueda de una teoría de Gravedad Cuántica [26], [28].

La experiencia nos ha enseñado que a escalas pequeñas se necesita física distinta a la que conocemos del mundo clásico. Así como la interacción electromagnética pudo ser formulada en términos de la ahora conocida Electrodinámica Cuántica, cotejada experimentalmente; cabe cuestionarse si la interacción gravitacional en términos de la Relatividad General puede someterse a este procedimiento de cuantización. Diversos factores han impedido consolidar una teoría de Gravedad Cuántica y a falta de evidencia experimental, solo podemos comenzar a partir de unos cuantos principios que suponemos fundamentales, la teoría clásica e intentar aplicar los procesos de cuantización conocidos.

Algunos principios que pueden suponerse fundamentales para la cuantización de la Relatividad General son, según literatura [28], la independencia de fondo y relacionismo, es decir que la invariancia ante difeomorfismos se mantenga al nivel cuántico por lo cual no debe haber una estructura de fondo absoluta ni fija para cualquier objeto no dinámico: de tal forma que las cantidades físicas deben ser definidas con respecto a los objetos dinámicos con los que la teoría trata. Que sea covariante y trate al espacio y tiempo en igualdad de condiciones. Operacionalidad para que las cantidades que surjan en la formulación de la teoría tengan una clara interpretación física al dotar a las observables con un carácter operacional. Además de una naturaleza discreta del espacio-tiempo en la escala de Planck.

En lo que a esta tesis respecta, es de vital importancia y motivación conocer el hecho de que la gravedad es no renormalizable perturbativamente. Esto significa que aplicar teoría de perturbaciones a la acción de Einstein-Hilbert en d dimensiones (2.5) cuando se trata de cuantizar resulta en una falta de predictibilidad. A partir de esta acción; con g el determinante de la métrica, R el escalar de Ricci y Λ la constante cosmológica, pueden derivarse las ecuaciones de campo de Einstein usando un principio variacional

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi G} \int d^d x \sqrt{g} (-R + 2\Lambda). \quad (2.5)$$

Una Teoría Cuántica de Campos presenta divergencias al calcular secciones de dispersión, las cuales provienen de integrales en el espacio de momentos. Se dice que una teoría es no renormalizable cuando estas divergencias deben removerse usando una re-definición de un número infinito de parámetros físicos que deben determinarse experimentalmente [29]. En general el grado de divergencia superficial Δ_D indica si una teoría es renormalizable y está dado en d dimensiones por

$$\Delta = 4 - d - \sum_f n_f (s_f + 1),$$

con n_f el número de campos de tipo f y $s_f = 0, 1/2, 1$ para el tipo de campo involucrado (escalar, fermión, vector masivo, fotón o gravitón). Por ejemplo, el enfoque en el que se cuantiza directamente la Relatividad General resulta ser no renormalizable de manera perturbativa, puede justificarse a partir del análisis dimensional de la constante de Newton $[G] = [M]^{2-d}$, en dimensiones de masa $[M]$, que en 4 dimensiones no da cota a las dimensiones de integrales de lazos.

El problema de la no renormalizabilidad perturbativa puede solucionarse al incluir derivadas más altas de la curvatura en la acción de Einstein-Hilbert, sin embargo esto lleva a un problema mucho mayor con un propagador no unitario de forma

$$D \propto \frac{1}{k^4 + Ak^2} = \frac{1}{A} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 + A} \right),$$

donde el primer término puede ser interpretado como un gravitón sin masa y el segundo que rompe la unitariedad, un fantasma [30, 31].

2.2.1. Seguridad Asintótica

El programa de Seguridad Asintótica⁴ fue propuesto por Weinberg en 1979 [32] como consecuencia de la no renormalizabilidad perturbativa de la Relatividad General. Este programa busca aplicar métodos no perturbativos en renormalización para encontrar un punto fijo en el flujo de renormalización dentro del Espacio de Teorías, para energías $k \rightarrow \infty$, donde las cantidades físicas se encuentren libres de divergencias, además de otras herramientas alternativas [33].

Esto justifica la discusión anterior sobre el Grupo de Renormalización y particularmente, sobre la ecuación de Wetterich como una ecuación diferencial exacta y no perturbativa de donde puede obtenerse este flujo de renormalización. El flujo será atraído al punto fijo, como se ha visto en la sección 2.1.2. En el contexto de Seguridad Asintótica se espera que un conjunto finito de acoplamientos⁵ g_i se fijen en el límite UV. Esto es traducido a nuestra notación que la dimensión de la superficie crítica S_{UV} sea $\Delta_{UV} < \infty$.

Este programa se aplica regularmente a enfoques covariantes para la cuantización de la gravedad usando la integral funcional. Por ejemplo, la truncación de Einstein-Hilbert en d dimensiones espacio-temporales que resulta en Gravedad Cuántica de Einstein

$$\Gamma_k^{EH}[g_{\mu\nu}] = \frac{1}{16\pi G_k} \int d^d x \sqrt{g} (-R + 2\Lambda_k) \quad + \text{g. f.} \quad + \det(F.P.)$$

con los acoplamientos adimensionales $\lambda_k = k^{-2}\Lambda_k$, $g_k = k^{d-2}G_k$ (constante cosmológica y constante de Newton respectivamente) más un término por fijar la norma (gauge fixing) y un determinante de Faddeev-Popov. Resulta haber un punto fijo gaussiano ($\lambda^* = 0 = g^*$) y un punto fijo no trivial dado por $\lambda^* \neq 0$ y $g^* \neq 0$ [26, 34, 35]. Estos puntos fijos pueden visualizarse en el diagrama fase de la Figura 2.3.

Además se ha mostrado que este punto fijo sobrevive al ampliar la truncación en formas más

⁴Seguridad por ausencia de singularidades en los acoplamientos y asintótica por el límite a altas energías.

⁵Este conjunto finito se determina fenomenológicamente, si fuera infinito, estos parámetros permanecerían indeterminados cayendo así en un problema muy similar al de la no renormalizabilidad perturbativa [26]. La teoría está bien definida en Seguridad Asintótica, solo que se necesita un conjunto infinito de acoplamientos para predicciones en altas energías.

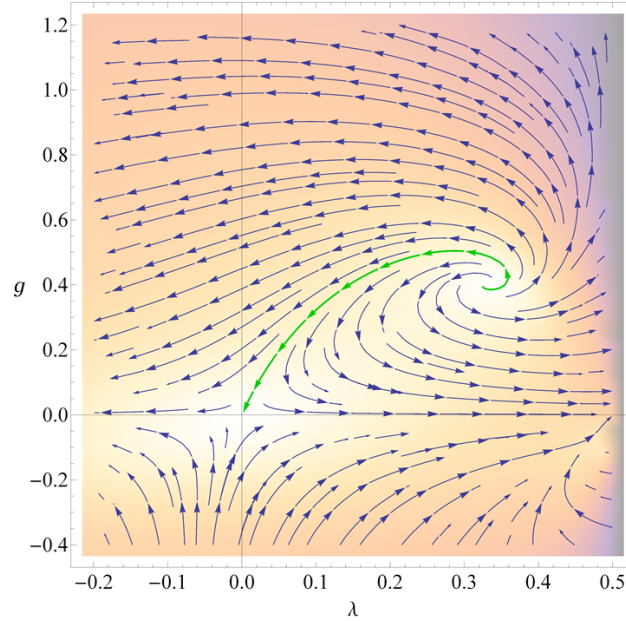


Figura 2.3: Diagrama fase para la truncación de Einstein-Hilbert con punto fijo Gaussiano y uno no trivial, compuesto por la constante de Newton g y la constante cosmológica λ adimensionales. La constante de Newton tiende a cero. Imagen obtenida de Wikipedia.

generales, lo cuál es una forma de poner a prueba este resultado de forma fehaciente [26]. Como en el caso de [36] donde se incluye una truncación con derivadas más altas (R^2) y determinantes de Faddeev-Popov, el caso de gravedad unimodular $f(r)$ [37], etc. Uno de los principales problemas en el escenario de Seguridad Asintótica cuando es aplicado a una medida $\mathcal{D}g$, es que se induce una identidad de Ward increíblemente difícil de resolver, cuando se hace la división de fondo $\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ [38], por lo que se propone pasar a una versión discreta para la gravedad y evitar ese problema.

2.2.2. Gravedad Cuántica Discreta

Uno de los procesos de cuantización covariante es la integral funcional o integral de trayectoria de Teorías Cuánticas de Campo; mencionada anteriormente para la derivación de la ecuación de Wetterich y a partir de la cuál se define una Función de Partición \mathcal{Z} como la integral sobre una medida de probabilidad de la exponencial de la acción de la teoría clásica más una fuente. Para el caso de Gravedad Cuántica se propone de la manera más general, una Función de Partición como la suma sobre las topologías de una integral sobre una medida de probabilidad en la métrica $g_{\mu\nu}$ y usamos la Acción de Einstein-Hilbert

$$\mathcal{Z} \sim \sum_{\text{topologías}} \int \frac{\mathcal{D}g_{\mu\nu}}{\text{Diff}(\mathcal{M})} e^{iS_{EH}}, \quad (2.6)$$

Se suma sobre todas las métricas de una variedad 4-dimensional \mathcal{M} divididas por el grupo de difeomorfismos $\text{Diff}(\mathcal{M})$ [26, 39]. Esta ecuación es de naturaleza complicada [26], no toda métrica euclidiana posee una sección lorentziana, lo cuál trae problemas al hacer una rotación de Wick⁶. La suma sobre topo-

⁶La rotación de Wick no es invariante ante difeomorfismos.

logías también trae problemas ya que en principio, no puede realizarse ya que las variedades 4-dimensionales no son clasificables [40]. Además del problema del factor conforme, la acción gravitacional euclidiana no está acotada por abajo [41]. De esta forma una propuesta para definir esta integral funcional es reemplazar esta Función de Partición por una versión hecha por discretizaciones aleatorias, es decir; sumamos sobre geometrías aleatorias concebidas por “pedazos de espacio-tiempo” para luego tomar el límite al continuo

$$\sum_{\text{topologías}} \int \mathcal{D}g \rightarrow \sum_{\substack{\text{discretizaciones} \\ \text{aleatorias}}}$$

Y esto es justamente lo que los Modelos Matriciales y Tensoriales hacen. Pero antes de definirlos, veamos una perspectiva clásica de la que podemos aprender mucho, el cálculo de Regge. En 1961 Tulio Regge formuló una versión discreta de la Relatividad General con el objetivo de resolver las ecuaciones de campo de Einstein de manera numérica para sistemas generales sin ‘muchas’ simetría [42]. La idea principal del cálculo de Regge reside en reconstruir variedades Riemannianas o el espacio-tiempo a partir de bloques de construcción “building blocks” pegando objetos conocidos como simples. Un simplex es simplemente un triángulo en $2D$, un tetraedro en $3D$ y sus generalizaciones a más dimensiones como un conjunto conexo en \mathbb{R}^D basado en D vectores independientes.

En la Figura 2.4 podemos ver cómo reconstruir una superficie a partir de triángulos pegándolos por las aristas. Además los vértices contienen información sobre la curvatura de la variedad. Los vértices definen un ángulo déficit como lo ilustra la figura. Si hacemos el transporte paralelo de un vector solo rotará cuando pasa por el vértice y el ángulo que rota es igual al ángulo déficit. Es importante utilizar simples pues los tamaños de sus aristas determinan exactamente su forma, los tamaños de las aristas son la variable fundamental de este tratamiento en contraste con la métrica que lo es para la teoría continua [42].

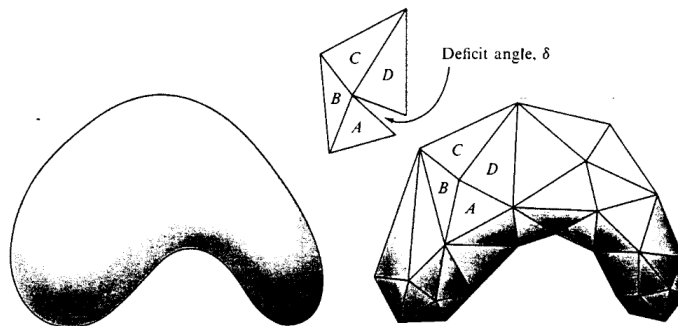


Figura 2.4: Superficie y triangulaciones, imagen de [42].

Aunque se ha dado una descripción cualitativa, el trabajo de Regge debe entenderse como una propuesta equivalente a la Relatividad General. Regge derivó una acción que al aplicarle el principio de acción estacionaria, se obtienen ecuaciones equivalentes a las ecuaciones de campo bajo un límite al continuo. Además se ha mostrado que existe un límite al continuo en donde la acción de Regge converge a la acción continua [42]. El límite al continuo se entiende como el límite en el que se recupera una teoría continua, una variedad continua.

De esta forma, el éxito del cálculo de Regge y su equivalencia con la Relatividad General serán un punto de partida hacia la Gravedad Cuántica. Tomando este enfoque discreto construiremos una teoría de

Gravedad Cuántica en dos y tres dimensiones. También hay que notar que desde la perspectiva clásica no se está aseverando que el espacio-tiempo sea discreto, en este sentido es solo una herramienta matemática. Pero cuando vayamos al caso cuántico hay dos interpretaciones de este enfoque discreto, ya sea también una simple herramienta matemática o en contra posición, estos bloques de construcción podrían tener una realidad física e interpretamos el límite al continuo como una condensación en el sentido en que el agua se condensa de gas a líquido: de una fase pre-geométrica a una fase geométrica como un mecanismo físico legítimo. Esta comparación con el agua es meramente ilustrativa ya que es una transición de primer orden y en esta tesis se trabaja con una de segundo orden.

La cuantización de la gravedad en forma discreta tiene dos implementaciones principales, el cálculo de Regge y las triangulaciones dinámicas, siendo esta última la clasificación en la que se basará esta tesis. En el cálculo de Regge la variable fundamental es el tamaño de las aristas de las triangulaciones y es tratado como una entidad dinámica, mientras que para triangulaciones dinámicas, este tamaño a se mantiene fijo y sirve como parámetro de regularización para tomar el límite al continuo cuando este parámetro tienda a cero. La propuesta es entonces utilizar simplices como bloques de construcción del espacio-tiempo y se reemplaza la Función de Partición (2.6) por una suma de variedades planas por pedazos

$$Z[g] \rightarrow \sum_{\Delta} \frac{1}{C_{\Delta}} e^{iS_{Regge}},$$

donde se realiza la suma sobre todas las formas de pegar inequivalentemente las triangulaciones Δ [26]; el espacio de todas estas formas de pegar los simplices será equivalente al espacio de todas las geometrías, C_{Δ} un factor de simetría y con la acción discreta conocida como acción de Regge que después de una rotación de Wick⁷ toma la forma

$$S_{Regge} = \kappa_{d-2} N_{d-2} - \kappa_d N_d,$$

con N_d el número de simplices de dimensión d que es proporcional al volumen total y κ_i funciones de la constante de gravitación y la constante cosmológica, $\kappa_d \propto \Lambda/G$ y $\kappa_{d-2} \propto 1/G$. Esta acción está compuesta por dos términos, el primero referente a simplices de dimensiones $d-2$ ya que es un término de curvatura⁸ y el término proporcional al volumen total. Así, el límite continuo se obtiene con $a \rightarrow 0$ y $N_d \rightarrow \infty$, tal que el volumen promedio del universo $\langle V \rangle \stackrel{!}{=} V_0$ permanece constante.

2.2.3. Modelos Tensoriales Coloreados

Como antecedente de los Modelos Tensoriales Coloreados se puede hablar de los Modelos Matriciales. En la sección anterior se vio que era necesario usar simplices para el caso del cálculo de Regge ya que la variable fundamental era el tamaño de los lados. En el caso de los Modelos Matriciales se usarán poligonizaciones, ya que en este caso se usa la topología de la poligonización. Consideremos matrices aleatorias hermitianas de $N \times N$, los Modelos Matriciales son distribuciones de probabilidad para estas matrices que proporcionan una medida $\mathcal{D}\phi_{ij}$ para la Función de Partición

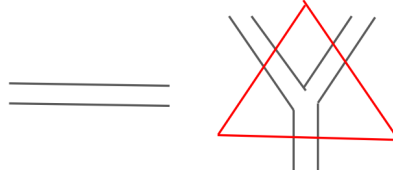
$$\mathcal{Z} \sim \sum_{\text{topologías}} \int \mathcal{D}g e^{-S_{EH}} \rightarrow \int \mathcal{D}\phi_{ij} e^{-S_{matriz}}$$

⁷Al tomar la rotación de Wick en esta acción discreta, se pasa de sumar variedades pseudo-Riemannianas a Riemannianas.

⁸Proviene de simplices de co-dimensión 2 ya que la curvatura se calcula de la curvatura gaussiana de subvariedades 2-dimensionales.

Estos modelos permiten dar una interpretación geométrica: Las contracciones de los índices representan poligonizaciones, ya que la Función de Partición genera gráficas conectadas que son duales a poligonizaciones de una variedad plana por pedazos; por ejemplo

$$S_{matriz} = \frac{1}{2}Tr(\phi^2) + \frac{g}{\sqrt{N}}Tr(\phi^3) = \frac{1}{2}\phi_{ij}\phi_{ji} + \frac{g}{\sqrt{N}}\phi_{ij}\phi_{jk}\phi_{ki}$$



El primer término es un propagador que conecta con dos índices i y j a las matrices. El segundo término es una contracción de 3 campos matriciales que es dual a una superficie orientable, en este caso un triángulo (símplice).

Algunos resultados analíticos de Modelos Matriciales son la existencia de una teoría de Gravedad Cuántica en límite de doble escalamiento $N \rightarrow \infty$ y $g \rightarrow g_c$, el tamaño de la matriz se toma a infinito, lo cual es equivalente a tomar el tamaño a de la poligonización como cero y un solo acoplamiento tiende a su valor crítico; con un único exponente crítico $\theta = \frac{4}{5}$. A esto se le conoce como el límite de doble escalamiento. Además también se encuentran puntos fijos multicríticos con más de una dirección relevante.

Al usar la ecuación de Wetterich como en [3] y [4], el tamaño de la matriz N brinda la noción de escala para la ecuación diferencial, en el caso de [3] se usa una Acción Efectiva Promedio hecha de operadores invariantes de trazas únicas, por ejemplo con

$$\Gamma_N = Z \text{Tr}(\phi\phi^T) + g_4 \text{Tr}((\phi\phi^T)^2) + g_6 \text{Tr}((\phi\phi^T)^3) + g_8 \text{Tr}((\phi\phi^T)^4), \quad (2.7)$$

que representa cuadrangulaciones. Se encuentra un punto fijo compatible con el límite de doble escalamiento obtenido por métodos analíticos, sin embargo el valor es aproximadamente $\theta_1 \approx 1$ lo cuál difiere con el resultado analítico mencionado anteriormente. Aplicar la ecuación de Wetterich usando la expansión en vértices induce nuevos operadores como multi-trazas. Es esta la motivación para la referencia [4] donde se usa el espacio completo de operadores multi-traza, lo que ya no es una truncación.

Por ejemplo podríamos tomar una truncación de la Acción Efectiva Promedio usada en esta referencia [4] como

$$\begin{aligned} \Gamma_N = & Z \text{Tr}(\phi\phi^T) + g_4 \text{Tr}((\phi\phi^T)^2) + g_{2,2} \text{Tr}(\phi\phi^T)^2 + g_6 \text{Tr}((\phi\phi^T)^3) \\ & + g_{2,4} \text{Tr}(\phi\phi^T) \text{Tr}((\phi\phi^T)^2) + g_{2,2,2} \text{Tr}(\phi\phi^T)^3 + g_8 \text{Tr}((\phi\phi^T)^4) + g_{2,6} \text{Tr}(\phi\phi^T) \text{Tr}((\phi\phi^T)^3) \\ & + g_{4,4} \text{Tr}((\phi\phi^T)^2)^2 + g_{2,2,4} \text{Tr}(\phi\phi^T)^2 \text{Tr}((\phi\phi^T)^2) + g_{2,2,2,2} \text{Tr}(\phi\phi^T)^4, \end{aligned} \quad (2.8)$$

esta expresión nos será de utilidad más adelante. En esta referencia se encuentra el punto fijo con una dirección relevante compatible con el límite de doble escalamiento pero en este caso $\theta_1 \approx 1$. Así el análisis se hace con los puntos fijos multicríticos donde se encuentra $\theta_1 \approx 0.8$ con un error del 1% comparado con el resultado analítico $\theta = 4/5$.

La historia de éxito de los Modelos Matriciales para Gravedad Cuántica en 2 dimensiones no pudo generalizarse a más dimensiones usando tensores debido a la falta de una expansión $1/N$ (expansión que se

hace en la ausencia de un parámetro perturbativo [20]) que permitiera conocer qué tipo de operadores eran importantes y así tenían el mayor peso estadístico. Esta expansión desarrollada por Gurau [45, 46, 47, 48] permitió definir los Modelos Coloreados, donde los índices en un tensor se distinguen por colores diferentes.

Los $D + 1$ Modelos Coloreados se definen como una medida gaussiana polinomialmente perturbada compleja (o de Grassmann) [48] que nos permite definir la integral funcional:

$$\mathcal{DT}e^{-S[\mathcal{T}]} = \Pi_i d\mu_{C^i}(\mathcal{T}^i)e^{-S} = \Pi_i d\mu_{C^i}(\mathcal{T}^i)e^{-\lambda \sum_{n_i \in X^i} K_{n_1 \dots n_d} \Pi_{i=0}^D \mathcal{T}_{n_i}^i}$$

con $\mathcal{T}^i : X^i \rightarrow \mathbb{C}$, $D + 1$ campos tensoriales aleatorios complejos (de Grassmann); C^i $D + 1$ covarianzas y $K, \bar{K} : X^0 \times \dots \times X^D \rightarrow \mathbb{C}$ dos kernels de los vértices. Por otro lado las gráficas coloreadas asociadas a estos modelos se definen en [48] como una gráfica $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ con \mathcal{V} un conjunto de vértices bipartitos⁹ los cuáles identificamos con dos colores diferentes blanco y negro, \mathcal{E} el conjunto de aristas que se particiona en $D + 1$ subconjuntos asociados al color de la arista además de ser regular en el sentido de que todas las aristas inciden en un vértice dado con distintos colores (en nuestro caso serán rojo, verde, azul y morado).

Puede obtenerse la amplitud de una gráfica de Feynman asociada a un invariante tensorial y resulta que las gráficas melónicas tienen el mayor peso estadístico en la expansión $1/N$ y corresponden a topología esférica. Veamos que esto es una generalización apropiada en el caso matricial donde el género (genus) $h = 0$, correspondiente a topología esférica y un sector de gráficas planares, juega el papel importante como se muestra en la amplitud de la gráfica

$$A(\mathcal{G})_M = (\lambda \bar{\lambda})^p N^{\mathcal{V} - \mathcal{E} + \mathcal{F}} = (\lambda \bar{\lambda})^p N^{2 - 2h},$$

cada arista conecta un vértice λ con un vértice $\bar{\lambda}$ y p es el número de parejas de vértices y \mathcal{F} el número de caras de la gráfica. Análogamente para el caso tensorial, la amplitud está dada por

$$A(\mathcal{G})_T = (\lambda \bar{\lambda})^p N^{|\mathcal{F}_{\mathcal{G}}| - p \frac{D(D-1)}{2}} = (\lambda \bar{\lambda})^p N^{D - \frac{2}{(D+1)!} \omega(\mathcal{G})},$$

con $\omega(\mathcal{G})$ el grado de convergencia de la gráfica y $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$ el número de caras del 2-complejo asociado a la gráfica, también conocido como "jacket" [48]. El mayor peso estadístico está dado por el grado $\omega(\mathcal{G}) = 0$, lo que implica que la gráfica \mathcal{G} es dual a una esfera S^D [48].

Subsecuentemente se demostró que los Modelos Tensoriales podían integrar todos los tensores \mathcal{T}^i excepto uno, dejando en su lugar un modelo tensorial con un único tensor sin colorear \mathcal{T} [1]. Los índices de este tensor de rango D se distinguen por colores y cada uno tiene una simetría, en nuestro caso una simetría $U(N) \otimes \dots \otimes U(N)$. Las interacciones de este modelo son descritas por invariantes tensoriales que son duales a D gráficas coloreadas con D colores y bipartitas (caso del tensor complejo). Se definen las gráficas de Feynman como gráficas coloreadas con $D + 1$ colores al agregar un color cero (morado en nuestro caso).

Para el trabajo posterior son de vital importancia las gráficas de tipo melónicas cíclicas para tensores de rango 3, las cuales son representadas por

$$T_{i_1 j_1 k_1} \bar{T}_{i_1 j_1 k_2} T_{i_2 j_2 k_2} \bar{T}_{i_2 j_2 k_3} \dots T_{i_n j_n k_n} \bar{T}_{i_n j_n k_1},$$

este tipo de interacciones triangulan la superficie de la esfera 2-dimensional en 3 dimensiones y además si las interacciones contienen sub-melones, es decir parejas de tensores con la forma $T_{abc} \bar{T}_{dbc}$ ó $T_{abc} \bar{T}_{adc}$ ó $T_{abc} \bar{T}_{abd}$ también triangulan la 3-esfera [1]. Por otro lado, también pueden usarse operadores desconectados, los cuáles en el caso melónico corresponden a triangulaciones de esferas desconectadas.

⁹Los vértices se dividen en dos conjuntos disjuntos e independientes $\mathcal{V} = V \cup \bar{V}$ de tal forma que cada arista une un vértice en V con un vértice en \bar{V} .

La interpretación geométrica de los tensores de rango 3 consiste en asociar a cada tensor T un triángulo con orientación positiva mientras que a los tensores \bar{T} triángulos con orientación negativa. La orientación es consecuencia de la invariancia ante el grupo de simetría $U(N) \otimes U(N) \otimes U(N)$, así un tensor puede verse como la gráfica de Feynman de la Figura 2.5 donde cada índice coloreado del tensor está asociado a una cara del tetraedro. Así es como un tensor invariante se relaciona con una discretización aleatoria.

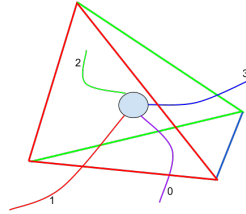


Figura 2.5: Tetraedro asociado a un vértice o tensor invariante con 3+1 colores.

La contracción de un índice de color i es representada geoméricamente por la unión de dos caras del tetraedro [1] como se muestra en la Figura 2.6, y en general simplicies.

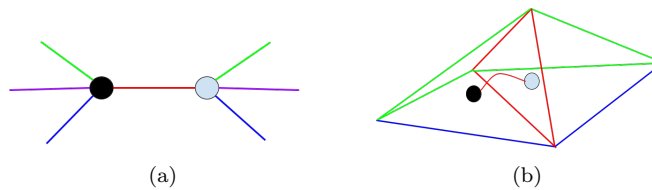


Figura 2.6: Gráfica de Feynman (a) como simplicies pegados (b).

Las gráficas con D colores a triangulaciones de frontera de $D - 1$ dimensiones mientras que las gráficas con $D + 1$ colores representan el espacio D -dimensional triangulado. Podemos tomar como ejemplo un melónico cíclico de orden 4 dado por la contracción $T_{abc}\bar{T}_{ade}T_{fde}\bar{T}_{fbc}$ que se muestra en las Figuras 2.7 y 2.8 asociadas a una triangulación de frontera de la 3-esfera [49].

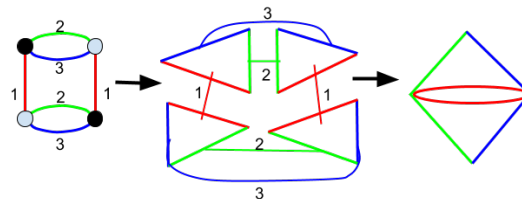


Figura 2.7: Pegado de cuatro triángulos representado por el invariante melónico cíclico.

Mientras que cuando se agrega el color 0 podemos ver la representación como el pegado de las caras de cuatro tetraedros con los índices que están contraídos. Además se tienen 4 caras libres asociadas a los índices libres de color 0 en la Figura 2.8.

Al contraer los índices del color 0 se obtiene la gráfica de Feynman que se asocia al espacio D dimensional. Podemos tomar por ejemplo dos melónicos cíclicos y obtener el espacio de la Figura 2.9, una cuadrangulación.

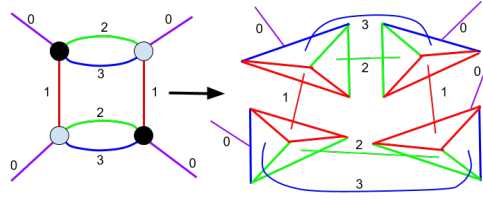


Figura 2.8: Pegado de cuatro tetraedros representado por el invariante melónico cíclico.

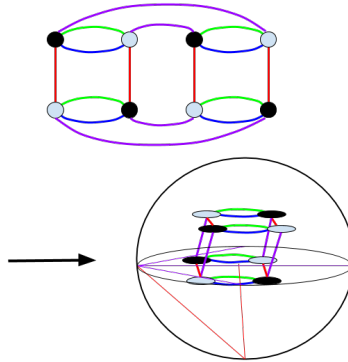


Figura 2.9: Contracción de índice de color 0 y su espacio asociado.

Por último, estos modelos presentan una transición de fase al continuo cuando se toma un límite de doble escalamiento; en el cuál el tamaño del tensor se toma $N \rightarrow \infty$ mientras que un acoplamiento también tiende a su valor crítico $g \rightarrow g_c$. Este límite está caracterizado por un único exponente crítico que toma el valor, en el caso de tensores de rango D , de $\theta = D - 2$ ($\theta = 1$ para tensores de rango 3 como en nuestro caso) [1, 50].

Capítulo 3

Ecuación de Wetterich para Modelos Tensoriales

Tomando en consideración [1] y siguiendo la metodología usual, como en [22, 25] puede derivarse la ecuación de Wetterich para el caso de Modelos Tensoriales Coloreados. En el marco de cuantización por integral de trayectoria se define la Función de Partición \mathcal{Z} para los Modelos Tensoriales Coloreados; con un campo tensorial \mathcal{T} , su complejo conjugado $\bar{\mathcal{T}}$ y simetría $U(N) \otimes U(N) \otimes U(N)$; como la medida de Grassmann dada anteriormente

$$\mathcal{Z}[J, \bar{J}] = \int \mathcal{D}\mathcal{T} e^{-S[\mathcal{T}] + J \cdot \mathcal{T} + \bar{J} \cdot \bar{\mathcal{T}}},$$

con J y \bar{J} una fuente y su complejo conjugado respectivamente (fuente grassmanniana), el producto punto como la contracción total de los índices $J \cdot \mathcal{T} + \bar{J} \cdot \bar{\mathcal{T}} = J_{abc} \mathcal{T}_{abc} + \bar{J}_{def} \bar{\mathcal{T}}_{def}$. La Acción Efectiva Γ estará definida por la transformada modificada de Legendre

$$\Gamma[T, \bar{T}] = \sup_J \{ J \cdot T + \bar{J} \cdot \bar{T} - \log \mathcal{Z}[J, \bar{J}] \},$$

donde T y \bar{T} denotan los valores de expectación de los campos tensoriales:

$$T = \langle \mathcal{T} \rangle, \quad \bar{T} = \langle \bar{\mathcal{T}} \rangle.$$

Para implementar la perspectiva de Wilson sobre Grupo de Renormalización tratada anteriormente, se introduce un regulador ΔS_N con el objetivo de hacer la interpolación entre la Acción Desnuda y la Acción Efectiva. En este punto se asume que el tamaño del tensor N es quien juega el papel de escala de renormalización al realizar esta interpolación. De esta forma se define la Función de Partición regulada en infrarrojo

$$\mathcal{Z}_N[J, \bar{J}] = \int \mathcal{D}\mathcal{T} e^{-S[\mathcal{T}] + J \cdot \mathcal{T} + \bar{J} \cdot \bar{\mathcal{T}} - \Delta S_N[\mathcal{T}, \bar{\mathcal{T}}]},$$

y la Acción Efectiva Promedio definida como

$$\Gamma_N[T, \bar{T}] = \sup_J \{ J \cdot T + \bar{J} \cdot \bar{T} - \log \mathcal{Z}_N[J, \bar{J}] \} - \Delta S_N[T, \bar{T}].$$

En este caso el regulador será un término de masa cuadrático dependiente de los índices y tomará

la forma completamente libre dada por

$$\Delta S_N[T, \bar{T}] = T_{abc} R_{abcdef} \bar{T}_{def} = T_{abc} \tau(a, b, c) \delta_{ad} \delta_{be} \delta_{cf} \bar{T}_{def},$$

con τ una función arbitraria de los índices y se llama a R el regulador. Para asegurar la interpolación se requieren los límites como se vio en la sección anterior:

$$\begin{aligned} \lim_{a/N, b/N, c/N \rightarrow 0} R_{abcdef} &> 0, \\ \lim_{N/a, N/b, N/c \rightarrow 0} R_{abcdef} &= 0, \\ \lim_{N \rightarrow \Lambda \rightarrow \infty} R_{abcdef} &\rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Así se puede calcular la derivada

$$\begin{aligned} N \partial_N \log \mathcal{Z}[J, \bar{J}] &= -N \partial_N R_{abcdef} \langle \mathcal{T}_{abc} \bar{T}_{def} \rangle \\ &= -(N \partial_N R_{abcdef}) W_{Ndefabc}^{(2)} - N \partial_N \Delta S_N[T] \\ &= -\text{Tr} \left((N \partial_N R) W_N^{(2)} \right) - N \partial_N \Delta S_N[T], \end{aligned}$$

donde en el penúltimo paso se utilizó la relación de los valores de expectación en términos de los valores de expectación conectados

$$\langle \mathcal{T}_{abc} \bar{T}_{def} \rangle = \langle \mathcal{T}_{abc} \bar{T}_{def} \rangle_c + \langle \mathcal{T}_{abc} \rangle \langle \bar{T}_{def} \rangle = W_{Nabcdef}^{(2)} + T_{abc} \bar{T}_{def},$$

junto con la propiedad de los índices de $W^{(2)}$ que permite expresar el producto como la traza en el último paso

$$W_{abcdef}^{(2)} = \frac{\delta}{\delta J_{abc}} \frac{\delta}{\delta \bar{J}_{def}} W_N = \frac{\delta}{\delta \bar{J}_{def}} \frac{\delta}{\delta J_{abc}} W_N = W_{defabc}^{(2)}.$$

De esta manera se puede obtener la derivada de la Acción Efectiva Promedio como

$$N \partial_N \Gamma_N = -N \partial_N \log \mathcal{Z}[J] - N \partial_N \Delta S_N[T] = \text{Tr} \left((N \partial_N R) W_N^{(2)} \right),$$

y por último se nota la relación

$$W^{(2)} = \frac{1}{\Gamma_N^{(2)} + R},$$

que permite expresar esta ecuación como la ecuación de Wetterich dada en el Capítulo 1 y con la traza ya definida. Además puede aplicarse el mismo razonamiento de ese capítulo de manera que se puede expresar la ecuación como una expansión en vértices. Por lo tanto la ecuación de Wetterich para el caso de Modelos Tensoriales Coloreados toma la forma

$$N \partial_N \Gamma_N = \text{Tr} \left(\frac{N \partial_N R}{\Gamma_N^{(2)} + R} \right) = \text{Tr} \left((N \partial_N R) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (PF)^n P \right). \quad (3.1)$$

3.1. Consideraciones generales

En el trabajo posterior se dará un ansatz para la Acción Efectiva Promedio como una truncación compuesta por una suma de operadores invariantes¹ (op-inv) $\mathcal{O}'_{i,j}$ con sus respectivos acoplamientos $g'_{i,j}$

$$\Gamma_N = Z\mathcal{K} + \sum_{op-inv} \tilde{g}'_{i,j} \mathcal{O}'_{i,j}, \quad (3.2)$$

con el fin de definir el Espacio de Teorías usando toda la combinatoria de los tensores y \mathcal{K} será un término cinético mientras que los operadores invariantes corresponderán a operadores melónicos. Respecto al término cinético se usará la (única) forma cuadrática $T_{abc}\bar{T}_{abc}$, que tiene la representación gráfica



Los operadores que se usarán consistirán de toda la combinatoria permitida para aristas de tres colores que conecten 4, 6 y 8 tensores, sean o no del tipo melónico. En la notación aquí usada, de manera análoga que en la referencia [1], los acoplamientos asociados a cada operador invariante toman la forma

$$\tilde{g}'_{i,j}{}^{k,\dots}$$

donde i representa el número de tensores en el respectivo operador asociado, j representa el número de componentes conectadas en la gráfica asociada, k representa el número de sub-melones en la gráfica, es decir, parejas de tensores con la forma $T_{abc}\bar{T}_{abc}$ ó $T_{abc}\bar{T}_{adc}$ ó $T_{abc}\bar{T}_{abd}$; estas parejas están en forma gráfica consisten de dos tensores conectados solo con dos colores. Por último, la tilde o virgulilla sobre el acoplamiento significa que tiene dependencia de las dimensiones de Z y N . De manera que es conveniente definir los acoplamientos adimensionales dados por

$$g'_{i,j} = \tilde{g}'_{i,j} Z^{-i/2} N^{-d'_{i,j}}, \quad (3.3)$$

se incluye Z en la adimensionalización ya que es un parámetro libre con el que siempre se puede hacer una transformación $T \rightarrow Z^{i/2}T$ que resta la normalización del campo. Esto es porque en una Teoría de campo Cuántico con interacciones, la dimensión canónica del modelo D_0 recibe correcciones por parte del Grupo de Renormalización; estas correcciones reciben el nombre de la dimensión anómala η y así la dimensión completa D se vuelve

$$D = D_0 + \eta. \quad (3.4)$$

Los acoplamientos adimensionales permiten obtener valores numéricos para los puntos fijos. La potencia a la que se eleva Z en la expresión anterior surge de la inspección a la expansión en vértices de la ecuación (3.1), mientras que la potencia $d'_{i,j}$ puede ser acotada y en la mayoría de los casos obtenida exactamente al realizar las sumas espectrales imponiendo que las funciones beta adimensionales tengan una expansión $1/N$, como las amplitudes de los Modelos Tensoriales Coloreados. Por otro lado, la parcial del acoplamiento Z asociado al término cinético definirá la dimensión anómala η

$$N\partial_N Z := -\eta Z,$$

mientras que las funciones beta adimensionales estarán definidas como las parciales logarítmicas sobre la escala de los acoplamientos adimensionales

¹Esta truncación consiste en tomar un conjunto finito de operadores invariantes, ya que el Espacio de Teorías puede contener infinitos operadores congruentes con la simetría del modelo. En nuestro caso la simetría $U(N) \otimes U(N) \otimes U(N)$ de invariantes tensoriales origina triangulaciones orientables.

$$\beta'_{i,j} := N \partial_N g'_{i,j}.$$

De esta forma, el lado izquierdo de la ecuación de Wetterich (3.1), usando la expresión de la Acción Efectiva Promedio (3.2) y suponiendo que solo los acoplamientos tienen dependencia de la escala N , se ve como (sumando sobre todos los operadores invariantes op-inv usados en la truncación)

$$N \partial_N \Gamma_N = -\eta Z \mathcal{K} + \sum_{op-inv} \left(\beta'_{i,j} - \frac{i}{2} \eta g'_{i,j} + d'_{i,j} g'_{i,j} \right) Z^{i/2} N^{d'_{i,j}} \mathcal{O}'_{i,j} \quad (3.5)$$

El lado derecho de la ecuación de Wetterich contiene trazas que por su complejidad deberán ser evaluadas en Mathematica. Estas definen las dimensiones respecto a la escala N que deberán tener los acoplamientos de la ecuación (3.3) para obtener como resultado las funciones beta con la forma

$$\beta'_{i,j} = \beta'_{i,j,0}(g_{k,l}, \dots) + \frac{1}{N} \beta_{i,j,1}(g_{k,l}, \dots) + O\left(\frac{1}{N^2}\right). \quad (3.6)$$

Sin embargo, se despreciarán términos de orden mayor o igual a $1/N$ pues el interés reside en el límite al continuo cuando N es grande ($N \rightarrow \infty$). Respecto al escalamiento, se usarán dos esquemas. Inspeccionando los dos lados de la ecuación de Wetterich se obtienen cotas pero no soluciones únicas. El escalamiento A consistirá de la cota menor de dichos escalamientos mientras que para el escalamiento B se usará la ecuación

$$d'_{i,j} = 3 - \frac{1}{2}(3p + F)$$

con p el número de tensores o vértices y F el número de caras de la gráfica, esto es el número de caminos posibles para recorrer la gráfica y partiendo de un vértice, regresar al mismo siguiendo las aristas de dos colores distintos. Para implementar la ecuación de Wetterich y desarrollar las sumas espectrales debe darse explícitamente la forma del regulador R implicado en la ecuación. Para esto se utilizará un regulador exponencial de la forma

$$R_{ijklmn} = \frac{3ZN}{i+j+k} e^{-\frac{i+j+k}{3N}} \delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn}, \quad (3.7)$$

que debido a la complejidad de las estructuras en las sumas espectrales, se tomarán las series de Taylor al rededor del cero, con $x = (i+j+k)/N$ para los objetos

$$\begin{aligned} reg(x) &= Z(1-\eta+x) \frac{e^{-x}}{x} \frac{1}{Z^2} \frac{1}{\left(\frac{e^{-x}}{x} + 1\right)^2} \approx \frac{1}{Z}(1-\eta+x) \left(x - x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{7x^4}{6} - \frac{x^5}{8} - \frac{33x^6}{40} + \frac{307x^7}{720} \right), \\ p(x) &= \frac{1}{Z} \frac{1}{\frac{e^{-x}}{x} + 1} \approx \frac{1}{Z} \left(x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} \right), \end{aligned}$$

cuya derivación es explícita en la sección 3.2 donde se da el ejemplo con una truncación a orden 4 y donde $reg(x) = \dot{R}(x)p^2(x)$ y $p(x)$ es el propagador que absorbe la segunda derivada variacional del término cinético en la igualdad $R + \Gamma^{(2)} = P^{-1} + F$. Así también como un regulador tipo Litim con una función escalón de Heaviside ϑ

$$R_{ijklmn} = Z \left(\frac{N}{i+j+k} - 1 \right) \vartheta(N-i-j-k) \delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn}, \quad (3.8)$$

y usando en su forma completa

$$\begin{aligned} reg(x) &= \frac{1}{Z} (\eta x^2 + (1-\eta)x) \vartheta(1-x), \\ p(x) &= \frac{1}{Z} (1 + (x-1) \vartheta(1-x)). \end{aligned}$$

La forma del tensor, para poder realizar las sumas espectrales y obtener resultados numéricos, además de acotar los índices involucrados hasta N , estará dada por

$$T_{ijk} = \vartheta(N-i)\vartheta(N-j)\vartheta(N-k). \quad (3.9)$$

Con todos estos elementos pueden encontrarse las funciones beta del modelo como un sistema de ecuaciones. Con el fin de distinguir tentativamente puntos fijos inducidos por la truncación [1] se utilizarán dos esquemas para definir los puntos fijos θ y θ' utilizando el Hessiano o matriz de estabilidad:

$$\theta_I = -eig \left(\frac{\partial \beta_i}{\partial g_j} \right) \Big|_{g_{k^*}}, \quad (3.10)$$

$$\theta'_I = -eig \left(\frac{\partial}{\partial g_j} \beta_i |_{\eta^*=cte} \right) \Big|_{g_{k^*}}. \quad (3.11)$$

debido a que la dimensión anómala depende de los acoplamientos $\eta = \eta(g_j)$ como se verá más adelante en la sección 3.2, esto toma en cuenta cómo varía el resultado cuando las parciales de la dimensión anómala respecto a los acoplamientos están o no involucradas en los exponentes críticos. Al final de la sección 3.2 se dará la segunda prescripción de esquema.

3.2. Ejemplo: Truncación a orden 4

En esta sección se mostrarán los cálculos explícitos para este marco de trabajo, utilizamos la truncación de la Acción Efectiva Promedio hasta un orden máximo de 4 en diagramas melónicos, con un término cinético de orden 2 por su respectivo acoplamiento Z y cuatro términos de orden 4 que incluyen toda la combinatoria posible para hacer las contracciones

$$\Gamma_N = Z T_{abc} \bar{T}_{abc} + \tilde{g}_{4,1}^{2,1} T_{abc} \bar{T}_{dbc} T_{def} \bar{T}_{aef} + \tilde{g}_{4,1}^{2,2} T_{abc} \bar{T}_{adc} T_{edf} \bar{T}_{ebf} + \tilde{g}_{4,1}^{2,3} T_{abc} \bar{T}_{abd} T_{efd} \bar{T}_{efc} + \tilde{g}_{4,2}^2 T_{abc} \bar{T}_{abc} T_{def} \bar{T}_{def}.$$

Esta ecuación tiene la representación en gráficas coloreadas, con los tensores representados por círculos blancos y los tensores complejos conjugados con círculos negros

$$\Gamma_N = Z \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{4,1}^{2,1} \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{4,1}^{2,2} \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{4,1}^{2,3} \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{4,2}^2 \text{ (diagrama)}.$$

Para el lado izquierdo de la ecuación de Wetterich notemos que solo tenemos la derivada logarítmica respecto a la escala de la Acción Efectiva Promedio

$$-\eta Z N^3 \text{ (diagrama)} + N \partial_N \tilde{g}_{4,1}^{2,1} N^6 \text{ (diagrama)} + N \partial_N \tilde{g}_{4,1}^{2,2} N^6 \text{ (diagrama)} + N \partial_N \tilde{g}_{4,1}^{2,3} N^6 \text{ (diagrama)} + N \partial_N \tilde{g}_{4,2}^2 N^6 \text{ (diagrama)},$$

donde los factores de N provienen de la suma de los índices de los tensores con la forma de la ecuación (3.9), así las gráficas en esta ecuación son meramente con fin representativo para tomar en cuenta de qué tipo de gráfica provenía cada término. Si se utilizan los acoplamientos adimensionales, obtenemos

$$\begin{aligned} & -\eta Z N^3 \text{ (diagrama)} + (\beta_{4,1}^{2,1} - 2\eta g_{4,1}^{2,1} + d_{4,1}^{2,1} g_{4,1}^{2,1}) N^{6+d_{4,1}^2} Z^2 \text{ (diagrama)} + (\beta_{4,1}^{2,2} - 2\eta g_{4,1}^{2,2} + d_{4,1}^{2,2} g_{4,1}^{2,2}) N^{6+d_{4,1}^2} Z^2 \text{ (diagrama)} \\ & + (\beta_{4,1}^{2,3} - 2\eta g_{4,1}^{2,3} + d_{4,1}^{2,3} g_{4,1}^{2,3}) N^{6+d_{4,1}^2} Z^2 \text{ (diagrama)} + (\beta_{4,2}^2 - 2\eta g_{4,2}^2 + d_{4,2}^2 g_{4,2}^2) N^{6+d_{4,2}^2} Z^2 \text{ (diagrama)}, \end{aligned}$$

De la ecuación (3.1), para el lado derecho de la ecuación de Wetterich, solo se necesita obtener P y F . Primero se obtiene la segunda derivada variacional de la Acción Efectiva Promedio como

$$\begin{aligned} \Gamma_{Nijklmn}^{(2)} &= Z\delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + 2\tilde{g}_{4,1}^{2,1}(T_{lbc}\bar{T}_{ibc}\delta_{jm}\delta_{kn} + T_{amn}\bar{T}_{ajk}\delta_{il}) + 2\tilde{g}_{4,1}^{2,2}(T_{amc}\bar{T}_{ajc}\delta_{il}\delta_{kn} + T_{lbn}\bar{T}_{ibk}\delta_{jm}) \\ &+ 2\tilde{g}_{4,1}^{2,3}(T_{abn}\bar{T}_{abk}\delta_{il}\delta_{jm} + T_{lmc}\bar{T}_{ijc}\delta_{kn}) + 2\tilde{g}_{4,2}^2(T_{abc}\bar{T}_{abc}\delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + T_{lmn}\bar{T}_{ijk}). \end{aligned}$$

Estas derivadas variacionales pueden encontrarse haciendo el álgebra necesaria sobre la expresión para Γ_N , sin embargo tomando en cuenta que también tiene una expresión en términos de diagramas, las derivadas variacionales pueden hacerse sobre los diagramas realizando toda la combinatoria necesaria en que se puedan eliminar un círculo blanco, un círculo negro y realizando las contracciones de los índices de los respectivos colores. Esto ya está tomado en cuenta en el programa de Mathematica y se explica en la sección posterior 3.3 exhibiendo así la necesidad de utilizar software ya que una truncación más alta como la que se tomará, tendrá 57 términos dando por resultado una derivada variacional con una cantidad inmensa de términos.

La expresión para F como los términos dependientes de T del Hessiano de la Acción Efectiva Promedio queda como

$$\begin{aligned} F_{ijklmn} &= 2\tilde{g}_{4,1}^{2,1}(T_{lbc}\bar{T}_{ibc}\delta_{jm}\delta_{kn} + T_{amn}\bar{T}_{ajk}\delta_{il}) + 2\tilde{g}_{4,1}^{2,2}(T_{amc}\bar{T}_{ajc}\delta_{il}\delta_{kn} + T_{lbn}\bar{T}_{ibk}\delta_{jm}) \\ &+ 2\tilde{g}_{4,1}^{2,3}(T_{abn}\bar{T}_{abk}\delta_{il}\delta_{jm} + T_{lmc}\bar{T}_{ijc}\delta_{kn}) + 2\tilde{g}_{4,2}^2(T_{abc}\bar{T}_{abc}\delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + T_{lmn}\bar{T}_{ijk}). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Sumando el término independiente de T en $\Gamma_N^{(2)}$ al regulador exponencial (3.7) e invirtiendo, se obtienen las expresiones de

$$P_{ijklmn} = \frac{1}{Z} \frac{\delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn}}{\frac{3N}{i+j+k}e^{-\frac{i+j+k}{3N}} + 1} = p(i, j, k)\delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn}, \quad (3.13)$$

$$N\partial_N R_{ijklmn} = Z \left(1 + (1 - \eta) \frac{3N}{i+j+k} \right) e^{-\frac{i+j+k}{3N}} \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} = \dot{\tau}(i, j, k)\delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn}. \quad (3.14)$$

A partir de las ecuaciones (3.12), (3.13) y (3.14) podemos definir $reg(i, j, k)$, $p(i, j, k)$ y F , de esta manera solo falta sumar sobre los índices de las trazas para las sumas espectrales. Además estas estructuras se pueden simplificar aún más. Notemos que usando la ecuación (3.9) para la forma del tensor, F y los productos F^2 , F^3 solo contienen

- Índices internos.- Los cuáles, usando (3.9) cuentan como $\vartheta(N - s)$ y al realizar la sumas, contarán como un factor de N .
- Deltas de Kronecker.- Las cuáles restringen la estructura de índices reduciendo el número de índices sobre los que hay que sumar.

Se pueden obtener los términos a un vértice, inspeccionando la estructura tensorial de F para ver a qué término corresponde al lado izquierdo de la ecuación de Wetterich y omitiendo los términos que no van a contribuir por las dimensiones de N . Resulta que los siguientes 4 términos solo son contribuciones a η como puede verse en la estructura de F

$$\begin{aligned}
Tr(\dot{R}PF_{4,2}^2 P) &= reg(a_1, a_2, a_3) F_{4,2a_1a_2a_3a_1a_2a_3}^2 \\
&= reg(a_1, a_2, a_3) * 2\tilde{g}_{4,2}^2 (T_{abc}\bar{T}_{abc}\delta_{a_1a_1}\delta_{a_2a_2}\delta_{a_3a_3} + T_{a_1a_2a_3}\bar{T}_{a_1a_2a_3}) \\
&= 2\tilde{g}_{4,2}^2 reg(a_1, a_2, a_3)(N^3 + 1) \\
&= 2\tilde{g}_{4,2}^2 \sum_{a_1}^N \sum_{a_2}^N \sum_{a_3}^N reg(a_1, a_2, a_3)(N^3 + 1) \\
&\approx 2\tilde{g}_{4,2}^2 (0.34485 - 0.22829\eta) \frac{N^6}{Z}, \\
Tr(\dot{R}PF_{4,1}^{2,1} P) &= reg(a_1, a_2, a_3) F_{4,1a_1a_2a_3a_1a_2a_3}^{2,1} \\
&= reg(a_1, a_2, a_3) * 2\tilde{g}_{4,1}^{2,1} (T_{a_1bc}\bar{T}_{a_1bc}\delta_{a_2a_2}\delta_{a_3a_3} + T_{aa_2a_3}\bar{T}_{aa_2a_3}\delta_{a_1a_1}) \\
&= 2\tilde{g}_{4,1}^{2,1} reg(a_1, a_2, a_3)(\vartheta(N - a_1)N^2 + \vartheta(N - a_2)\vartheta(N - a_3)N) \\
&\approx 2\tilde{g}_{4,1}^{2,1} (0.34485 - 0.22829\eta) \frac{N^5}{Z}.
\end{aligned}$$

Además por simetría bajo el intercambio de colores, también tenemos este mismo resultado anterior para las trazas que involucran a $F_{4,1}^{2,2}$ y $F_{4,1}^{2,3}$:

$$\begin{aligned}
Tr(\dot{R}PF_{4,1}^{2,2} P) &= reg(a_1, a_2, a_3) F_{4,1a_1a_2a_3a_1a_2a_3}^{2,2} \\
&= reg(a_1, a_2, a_3) * 2\tilde{g}_{4,1}^{2,2} (T_{aa_2c}\bar{T}_{aa_2c}\delta_{a_1a_1}\delta_{a_3a_3} + T_{a_1ba_3}\bar{T}_{a_1ba_3}\delta_{a_2a_2}) \\
&\approx 2\tilde{g}_{4,1}^{2,2} (0.34485 - 0.22829\eta) \frac{N^5}{Z}, \\
Tr(\dot{R}PF_{4,1}^{2,3} P) &= reg(a_1, a_2, a_3) F_{4,1a_1a_2a_3a_1a_2a_3}^{2,3} \\
&= reg(a_1, a_2, a_3) * 2\tilde{g}_{4,1}^{2,3} (T_{aba_3}\bar{T}_{aba_3}\delta_{a_1a_1}\delta_{a_2a_2} + T_{a_1a_2c}\bar{T}_{a_1a_2c}\delta_{a_3a_3}) \\
&\approx 2\tilde{g}_{4,1}^{2,3} (0.34485 - 0.22829\eta) \frac{N^5}{Z},
\end{aligned}$$

Para los términos a dos vértices hay que desarrollar el producto F^2 , esto también es una de las necesidades que se tienen para implementar en el programa. Este producto nos dará una estructura tensorial que también corresponderán a gráficas coloreadas y nos indicarán a qué término corresponderán en el lado izquierdo, por ejemplo

$$\begin{aligned}
F_{4,1a_1a_2a_3b_1b_2b_3}^{2,1} F_{4,1b_1b_2b_3a_1a_2a_3}^{2,1} &= 4(\tilde{g}_{4,1}^{2,1})^2 (T_{b_1bc}\bar{T}_{a_1bc}T_{a_1ef}\bar{T}_{b_1ef}\delta_{a_2b_2}\delta_{a_3b_3} \\
&+ T_{a_1bc}\bar{T}_{a_1bc}T_{da_2a_3}\bar{T}_{da_2a_3}\delta_{a_1b_1}\delta_{a_2b_2}\delta_{a_3b_3} + T_{aa_2a_3}\bar{T}_{aa_2a_3}T_{a_1ef}\bar{T}_{a_1ef}\delta_{a_1b_1}\delta_{a_2b_2}\delta_{a_3b_3} \\
&+ T_{ab_2b_3}\bar{T}_{aa_2a_3}T_{da_2a_3}\bar{T}_{db_2b_3}\delta_{a_1b_1}).
\end{aligned}$$

Inspeccionando estos cuatro términos podemos ver que el primero y cuarto contribuirán a $\beta_{4,1}^{2,1}$ mientras que el segundo y tercero a $\beta_{4,2}^2$. Sin embargo resulta que solo el primer término contribuye, ya que por sus dimensionalidades al tomar $N \rightarrow \infty$ los demás términos se anulan. Así, realizando la traza del primer y único término que contribuye a $\beta_{4,1}^{2,1}$:

$$\begin{aligned}
Tr(\dot{R}PF_{4,1}^{2,1} PF_{4,1}^{2,1} P) &= 4(\tilde{g}_{4,1}^{2,1})^2 reg(a_1, a_2, a_3) p(b_1, b_2, b_3) T_{b_1bc}\bar{T}_{a_1bc}T_{a_1ef}\bar{T}_{b_1ef}\delta_{a_2b_2}\delta_{a_3b_3} \\
&= 4(\tilde{g}_{4,1}^{2,1})^2 \sum_{a_1}^N \sum_{a_2}^N \sum_{a_3}^N \sum_{b_1}^N reg(a_1, a_2, a_3) p(b_1, a_2, a_3) \\
&\approx 4(\tilde{g}_{4,1}^{2,1})^2 (0.15424 - 0.10044) \frac{N^4}{Z^2}.
\end{aligned}$$

Por simetría bajo el intercambio de colores, los términos análogos a este que contribuirán a $\beta_{4,1}^{2,2}$ y $\beta_{4,1}^{2,3}$ serán respectivamente

$$\text{Tr}(\dot{R}PF_{4,1}^{2,2}PF_{4,1}^{2,2}P) \approx 4(\tilde{g}_{4,1}^{2,2})^2(0.15424 - 0.10044)\frac{N^4}{Z^2},$$

$$\text{Tr}(\dot{R}PF_{4,1}^{2,3}PF_{4,1}^{2,3}P) \approx 4(\tilde{g}_{4,1}^{2,3})^2(0.15424 - 0.10044)\frac{N^4}{Z^2}.$$

El siguiente producto que podemos desarrollar es, considerando la simetría bajo el intercambio de colores

$$\begin{aligned} F_{4,1a_1a_2a_3b_1b_2b_3}^{2,1}F_{4,1b_1b_2b_3a_1a_2a_3}^{2,2} &= F_{4,1a_1a_2a_3b_1b_2b_3}^{2,2}F_{4,1b_1b_2b_3a_1a_2a_3}^{2,1} \\ &= 4\tilde{g}_{4,1}^{2,1}\tilde{g}_{4,1}^{2,2}(T_{a_1bc}\bar{T}_{a_1bc}T_{da_2f}\bar{T}_{da_2f}\delta_{a_1b_1}\delta_{a_2b_2}\delta_{a_3b_3} + T_{b_1bc}\bar{T}_{a_1bc}T_{a_1ea_3}\bar{T}_{b_1ea_3}\delta_{a_2b_2}\delta_{a_3b_3} \\ &\quad + T_{ab_2a_3}\bar{T}_{aa_2a_3}T_{da_2f}\bar{T}_{db_2f}\delta_{a_1b_1}\delta_{a_3b_3} + T_{aa_2b_3}\bar{T}_{aa_2a_3}T_{a_1ea_3}\bar{T}_{a_1eb_3}\delta_{a_1b_1}\delta_{a_2b_2}). \end{aligned}$$

Estos cuatro términos corresponden a contribuciones para $\beta_{4,2}^{2,2}$, $\beta_{4,1}^{2,1}$, $\beta_{4,1}^{2,2}$ y $\beta_{4,1}^{2,3}$ en ese orden respectivo. Sin embargo, por el mismo razonamiento de la dimensionalidad de los términos resultará que solo el primero contribuirá y los demás se anularán. De esta manera podemos realizar la suma espectral

$$\begin{aligned} 2\text{Tr}(\dot{R}PF_{4,1}^{2,1}PF_{4,1}^{2,2}P) &= 8\tilde{g}_{4,1}^{2,1}\tilde{g}_{4,1}^{2,2}\text{reg}(a_1, a_2, a_3)p(b_1, b_2, b_3)T_{a_1bc}\bar{T}_{a_1bc}T_{da_2f}\bar{T}_{da_2f}\delta_{a_1b_1}\delta_{a_2b_2}\delta_{a_3b_3} \\ &= 8\tilde{g}_{4,1}^{2,1}\tilde{g}_{4,1}^{2,2}\sum_{a_1}^N\sum_{a_2}^N\sum_{a_3}^N\text{reg}(a_1, a_2, a_3)p(a_1, a_2, a_3)N^4 \\ &= 8\tilde{g}_{4,1}^{2,1}\tilde{g}_{4,1}^{2,2}(0.15669 - 0.10125\eta)\frac{N^7}{Z^2}. \end{aligned}$$

Análogamente, por la simetría bajo intercambio de colores obtenemos la contribuciones para $\beta_{4,2}^{2,2}$. De todo esto aprendemos que para realizar las sumas espectrales solo es necesario contar los índices internos y las deltas de Kronecker involucradas y por tanto

$$2\text{Tr}(\dot{R}PF_{4,1}^{2,1}PF_{4,1}^{2,3}P) = 8\tilde{g}_{4,1}^{2,1}\tilde{g}_{4,1}^{2,3}(0.15669 - 0.10125\eta)\frac{N^7}{Z^2},$$

$$2\text{Tr}(\dot{R}PF_{4,1}^{2,2}PF_{4,1}^{2,3}P) = 8\tilde{g}_{4,1}^{2,2}\tilde{g}_{4,1}^{2,3}(0.15669 - 0.10125\eta)\frac{N^7}{Z^2}.$$

Los siguientes productos que hay que desarrollar son

$$\begin{aligned} F_{4,2a_1a_2a_3b_1b_2b_3}^2F_{4,2b_1b_2b_3a_1a_2a_3}^2 &= 4(\tilde{g}_{4,2}^2)^2(T_{abc}\bar{T}_{abc}T_{def}\bar{T}_{def}\delta_{a_1b_1}\delta_{a_2b_2}\delta_{a_3b_3} \\ &\quad + T_{a_1a_2a_3}\bar{T}_{a_1a_2a_3}T_{def}\bar{T}_{def}\delta_{a_1b_1}\delta_{a_2b_2}\delta_{a_3b_3} + T_{abc}T_{abc}T_{a_1a_2a_3}\bar{T}_{a_1a_2a_3}\delta_{a_1b_1}\delta_{a_2b_2}\delta_{a_3b_3} \\ &\quad + T_{b_1b_2b_3}\bar{T}_{a_1a_2a_3}T_{a_1a_2a_3}T_{b_1b_2b_3}). \end{aligned}$$

Todos estos términos contribuyen a $\beta_{4,2}^{2,2}$, sin embargo el primero es el de orden más alto en N y el único que contribuye; así que

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\dot{R}PF_{4,2}^2PF_{4,2}^2P) &= 4(\tilde{g}_{4,2}^2)^2\text{reg}(a_1, a_2, a_3)p(b_1, b_2, b_3)T_{abc}\bar{T}_{abc}T_{def}\bar{T}_{def}\delta_{a_1b_1}\delta_{a_2b_2}\delta_{a_3b_3} \\ &= 4(\tilde{g}_{4,2}^2)^2\sum_{a_1}^N\sum_{a_2}^N\sum_{a_3}^N\text{reg}(a_1, a_2, a_3)p(a_1, a_2, a_3)N^6 \\ &\approx 4(\tilde{g}_{4,2}^2)^2(0.15669 - 0.10125\eta)\frac{N^9}{Z^2}. \end{aligned}$$

Por último, desarrollamos el producto

$$\begin{aligned}
F_{4,2a_1a_2a_3b_1b_2b_3}^{2,1} F_{4,2b_1b_2b_3a_1a_2a_3}^2 &= 4\tilde{g}_{4,1}^{2,1}\tilde{g}_{4,2}^2 (T_{a_1bc}\bar{T}_{a_1bc}T_{def}\bar{T}_{def}\delta_{a_1b_1}\delta_{a_2b_2}\delta_{a_3b_3} \\
&+ T_{b_1bc}\bar{T}_{a_1bc}T_{a_1a_2a_3}\bar{T}_{b_1a_2a_3}\delta_{a_2b_2}\delta_{a_3b_3} + T_{aa_2a_3}\bar{T}_{aa_2a_3}T_{def}\bar{T}_{def}\delta_{a_1b_1}\delta_{a_2b_2}\delta_{a_3b_3} \\
&+ T_{aa_2b_3}\bar{T}_{aa_2a_3}T_{a_1a_2a_3}\bar{T}_{a_1a_2b_3}\delta_{a_1b_1}\delta_{a_2b_2}).
\end{aligned}$$

Donde el primer y tercer término contribuyen a $\beta_{4,2}^2$ mientras que el segundo a $\beta_{4,1}^{2,1}$ y el cuarto a $\beta_{4,1}^{2,3}$. Sin embargo solo el primer es el único que no se anula, por lo que

$$\begin{aligned}
2\text{Tr}\left(\dot{R}PF_{4,1}^{2,1}PF_{4,2}^2P\right) &= 8\tilde{g}_{4,1}^{2,1}\tilde{g}_{4,2}^2 \text{reg}(a_1, a_2, a_3)p(b_1, b_2, b_3)T_{a_1bc}\bar{T}_{a_1bc}T_{def}\bar{T}_{def}\delta_{a_1b_1}\delta_{a_2b_2}\delta_{a_3b_3} \\
&= 8\tilde{g}_{4,1}^{2,1}\tilde{g}_{4,2}^2 \sum_{a_1}^N \sum_{a_2}^N \sum_{a_3}^N \text{reg}(a_1, a_2, a_3)p(a_1, a_2, a_3)N^5 \\
&\approx 8\tilde{g}_{4,1}^{2,1}\tilde{g}_{4,2}^2 (0.15669 - 0.10125\eta) \frac{N^8}{Z^2}.
\end{aligned}$$

Análogamente los demás términos y últimos, por simetría bajo intercambio de colores serán

$$\begin{aligned}
2\text{Tr}\left(\dot{R}PF_{4,1}^{2,2}PF_{4,2}^2P\right) &\approx 8\tilde{g}_{4,1}^{2,2}\tilde{g}_{4,2}^2 (0.15669 - 0.10125\eta) \frac{N^8}{Z^2}, \\
2\text{Tr}\left(\dot{R}PF_{4,1}^{2,3}PF_{4,2}^2P\right) &\approx 8\tilde{g}_{4,1}^{2,3}\tilde{g}_{4,2}^2 (0.15669 - 0.10125\eta) \frac{N^8}{Z^2}.
\end{aligned}$$

Y estas son todas las trazas que contribuyen a las funciones beta definidas en una truncación a orden cuatro. Utilizando el programa podemos realizar estas mismas sumas espectrales habiendo definido primero los diagramas en la Acción Efectiva Promedio. Nótese que todas las trazas están en función de los acoplamientos con dimensión, introducir los acoplamientos adimensionales suman factores dimensionales $d'_{i,j}$ a los factores de N . Analizando ambos lados de las ecuaciones, el izquierdo mencionado al principio de esta sección y el derecho consistente de todas estas trazas, establece cotas para estas dimensiones. En este caso las cotas están dadas por $d_{4,1}^{2,i} \leq -2$ y $d_{4,2}^2 \leq -3$. Siendo la igualdad la que se escoge para tener dependencia directa de los acoplamientos en la dimensión anómala y poder variar los parámetros como prueba de la dependencia del esquema. De esta forma, en el programa obtenemos el lado derecho de la ecuación de Wetterich, solo con los términos que son relevantes y que no se anulan al tomar $N \rightarrow \infty$, nuevamente tomando los diagramas con fin representativo como

$$\begin{aligned}
\text{Tr}\left(\frac{N\partial_N R}{\Gamma_N^{(2)} + R}\right) &= -2ZN^3(0.34485 - 0.22829\eta)(g_{4,1}^{2,1} + g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3} + g_{4,2}^2) \text{Diagram 1} \\
&+ 4Z^2N^4(0.15424 - 0.10044\eta) \left((g_{4,1}^{2,1})^2 \text{Diagram 2} + (g_{4,1}^{2,2})^2 \text{Diagram 3} + (g_{4,1}^{2,3})^2 \text{Diagram 4} \right) \\
&+ 8Z^2N^3(0.15669 - 0.10125\eta)(g_{4,1}^{2,1}(g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3}) + g_{4,1}^{2,2}g_{4,1}^{2,3} + g_{4,2}^2(g_{4,1}^{2,1} + g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3} + \frac{g_{4,2}^2}{2})) \text{Diagram 5}.
\end{aligned}$$

Comparando los lados izquierdo y derecho de la ecuación de Wetterich, se obtienen las funciones beta como el sistema de 5 ecuaciones dado por

$$\begin{aligned}
\eta &= 2(g_{4,1}^{2,1} + g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3} + g_{4,2}^2)(0.34485 - 0.22829\eta), \\
\beta_{4,1}^{2,i} &= (2 + 2\eta)g_{4,1}^{2,i} \frac{Z^2}{N^2} + 4(g_{4,1}^{2,i})^2(0.15424 - 0.10044\eta),
\end{aligned}$$

$$\beta_{4,2}^2 = (3 + 2\eta)g_{4,2}^2 + 8(g_{4,1}^{2,1}(g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3}) + g_{4,1}^{2,2}g_{4,1}^{2,3} + g_{4,2}^2(g_{4,1}^{2,1} + g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3} + \frac{g_{4,2}^2}{2}))(0.15669 - 0.10125\eta).$$

Dadas las funciones beta como este sistema de ecuaciones, encontramos a los puntos fijos g_* como aquellos que satisfacen que estas funciones son cero. Los exponentes críticos θ como los eigenvalores con signo negativo de la hessiana de las funciones beta como se indica en las ecuaciones (3.10) y (3.11) para ambos esquemas. El segundo esquema a considerar para distinguir tentativamente si los puntos fijos son inducidos por la truncación, consiste en la forma de la dimensión anómala, esta puede ponerse en términos de los acoplamientos como

$$\eta_{comp} = \frac{2a(g_{4,2}^2 + g_{4,1}^{2,1} + g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3})}{1 - 2b(g_{4,2}^2 + g_{4,1}^{2,1} + g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3})},$$

con $S_1 = a + b\eta$ la suma espectral (a y b números reales), de manera análoga a la expresión que se obtuvo en el desarrollo anterior. El esquema completo será tomando esta expresión completa para η , el esquema semi-perturbativo será la aproximación

$$\eta_{s-p} = 2a(g_{4,2}^2 + g_{4,1}^{2,1} + g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3}),$$

y por último, el esquema perturbativo será mantener el término cinético constante y por tanto su derivada será cero

$$\eta_{pert} = 0.$$

Este ejemplo muestra la necesidad de implementar los cálculos en Mathematica en la sección 3.3. Para llegar a la truncación a orden $(T\bar{T})^4$, desde la representación en gráficas coloreadas de la Acción Efectiva Promedio que constara de 57 invariantes tensoriales con sus respectivos acoplamientos, las derivadas variaciones que en total serán al rededor de 803 términos factorizables con las constantes de acoplamiento a 57, el producto de tensores y la traza de productos de tensores con funciones. Además de esto tenemos una expansión en vértices, que cortando hasta $n = 4$ (ya que una n mayor dará operadores invariantes no incluidos en la truncación) dan un total de 10,755,500 trazas. Por argumentos de simetría, despreciando términos y omitiendo operadores invariantes no incluidos en la truncación resultan en una reducción total a 246 trazas que hay que obtener, cada una incluyendo de 4 a 256 términos que deberán ser analizados respecto a su escalamiento para cotejar si son añadidos a las funciones beta después del límite $N \rightarrow \infty$. Una truncación a orden $(T\bar{T})^4$ es imposible de hacer sin el uso de software.

3.3. Implementación en Mathematica

El código en Mathematica puede encontrarse aquí y consiste de dos partes que se explicarán a continuación en las siguientes dos subsecciones.

3.3.1. Código implementado previamente

Esta parte del programa se desarrolló de manera previa al proyecto de tesis. Permite definir los operadores de la Acción Efectiva Promedio, así como su representación gráfica, la segunda derivada variacional, los

productos tensoriales involucrados y las contracciones de los índices necesarios para obtener las trazas. Esto se hace construyendo funciones que no están implementadas en la paquetería de Mathematica originalmente. Por otro lado, no implementa la estructura del regulador más que en los tadpoles ($n=1$ en la expansión en vértices). Se definen los operadores, tomando por ejemplo

$$T_{abc}\bar{T}_{dbc}T_{def}\bar{T}_{aef}, \quad (3.15)$$

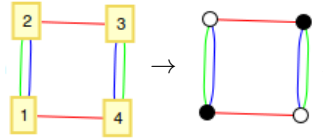
como la estructura para definir su gráfica asociada, donde los tensores representarán vértices y las contracciones de los índices se representan con aristas de 3 colores distintos que los unen

$$Inv[\{\{\{4,0\},\{2,0\},\{2,0\}\},\{\{3,0\},\{1,0\},\{1,0\}\},\{\{2,0\},\{4,0\},\{4,0\}\},\{\{1,0\},\{3,0\},\{3,0\}\}\}], \quad (3.16)$$

donde la primer entrada consistente de la triada $\{\{4,0\},\{2,0\},\{2,0\}\}$ está asociada al vértice 1 de la gráfica y se lee como conecta el vértice 1 con el vértice 4 usando color rojo (color 1), el vértice 1 con el vértice 2 usando color verde (color 2) y el vértice 1 con el vértice 2 usando color azul (color 3); el mismo razonamiento se aplica a cada entrada. Así cada triada representa a un vértice y sus conexiones con los demás.² Para graficar la estructura (3.16), se define la función `ShowMonomial[Inv[]]`, que traduce (3.16) a una estructura reconocida por la función predeterminada de Mathematica `GraphPlot[]`, así la estructura toma la forma

$$\{\{1 \rightarrow 4, \{1,0\}\}, \{1 \rightarrow 2, \{2,0\}\}, \{1 \rightarrow 2, \{3,0\}\}, \{2 \rightarrow 3, \{1,0\}\}, \{3 \rightarrow 4, \{2,0\}\}, \{3 \rightarrow 4, \{3,0\}\}\},$$

se define entonces la función `ShowInvariant[]` en base a `GraphPlot[]` y al aplicarla se obtiene la gráfica respectiva



Dentro de `ShowInvariant[]` se impone la restricción de que los vértices impares sean representados por un círculo negro (correspondientes al tensor conjugado) y los pares con uno blanco (correspondientes al tensor). La segunda derivada variacional del término tomado como ejemplo en la ecuación (3.15), esta está dada por

$$\frac{\delta^2}{\delta T_{ijk}\delta \bar{T}_{lmn}} T_{abc}\bar{T}_{dbc}T_{def}\bar{T}_{aef} = 2(T_{lbc}\bar{T}_{ibc}\delta_{jm}\delta_{kn} + T_{amn}\bar{T}_{ajk}\delta_{il}), \quad (3.17)$$

Algebraicamente, esta operación toma a un tensor T y un tensor conjugado \bar{T} y los sustituye por tres deltas de Kronecker con los índices del tensor que se deriva y el tensor respecto al cuál se deriva. Esto produce una estructura tensorial con 6 índices. Gráficamente esta operación consiste en tomar toda la combinatoria al eliminar un vértice blanco y un vértice negro. Las aristas de la gráfica que quedan después de este proceso de eliminación son de dos tipos, la arista puede aún estar conectada a otro vértice o la arista queda desconectada de los vértices. En el primer caso esto es un índice no contraído en la estructura tensorial y en el segundo esto es representado por una delta de Kronecker. Esta es la manera para definir la función `Vary[]`; aplicada a un objeto como la definición de la ecuación (3.16). Por conveniencia, en vez de dejar las aristas libres, las unimos a vértices cuadrados blancos (white) o negros (black) (según el tensor original). Aplicar `Vary[]` a un objeto como (3.16) entonces devuelve una estructura de la forma

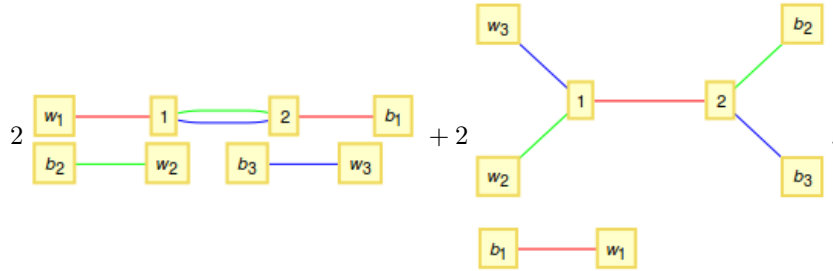
²Dentro de las triadas tenemos parejas de números, la primer entrada nos dice el número de vértice mientras que la segunda es para incluir una dependencia no simétrica de los índices en trabajos posteriores.

$$2Op[\{\{1, 0\}, \{b, 0\}, \{b, 0\}\}, \{\{w, 0\}, \{2, 0\}, \{2, 0\}\}, \{\{b, 0\}, \{1, 0\}, \{1, 0\}\}, \{\{2, 0\}, \{w, 0\}, \{w, 0\}\}] \\ + 2Op[\{\{b, 0\}, \{1, 0\}, \{1, 0\}\}, \{\{2, 0\}, \{w, 0\}, \{w, 0\}\}, \{\{1, 0\}, \{b, 0\}, \{b, 0\}\}, \{\{w, 0\}, \{2, 0\}, \{2, 0\}\}],$$

que también se traduce a una estructura compatible con `GraphPlot[]` usando `OperatorToGraph[]` y al aplicarla a la expresión anterior, se obtiene

$$2\{\{w_1 \rightarrow 1, \{1, 0\}\}, \{w_2 \rightarrow b_2, \{2, 0\}\}, \{w_3 \rightarrow b_3, \{3, 0\}\}, \{1 \rightarrow 2, \{2, 0\}\}, \{1 \rightarrow 2, \{3, 0\}\}, \{2 \rightarrow b_1, \{1, 0\}\}\} \\ + 2\{\{w_1 \rightarrow b_1, \{1, 0\}\}, \{w_2 \rightarrow 1, \{2, 0\}\}, \{w_3 \rightarrow 1, \{3, 0\}\}, \{1 \rightarrow 2, \{1, 0\}\}, \{2 \rightarrow b_2, \{2, 0\}\}, \{2 \rightarrow b_3, \{3, 0\}\}\}$$

que ya tiene el formato para usar `GraphPlot[]`, entonces se define `ShowP[]` usando esta función predeterminada y gráficamente, después de aplicarla se ve como



De esta manera es como se realizan las derivadas variacionales y la expresión del ejemplo (3.17) toma la forma gráfica

$$2(T_{lbc}\bar{T}_{ibc}\delta_{jm}\delta_{kn} + T_{amn}\bar{T}_{ajk}\delta_{il}) = 2 \left(\begin{array}{c} \text{[Diagram 1]} \\ + \\ \text{[Diagram 2]} \end{array} \right). \quad (3.18)$$

es importante notar que los índices del tensor en esta forma gráfica están representados por las aristas que conectan los cuadrados con los círculos; y que además, este tensor contiene índices internos que están totalmente contraídos, estos están representados por las aristas que conectan círculo con círculo. Por último, se define el producto de tensores con la función `OpertorProductAll[]` para contracciones de la forma

$$F_{ijklmn}\delta_{lo}\delta_{mp}\delta_{nr}F_{opqrst} = F_{ijklmn}F_{lmnrst}.$$

Estas contracciones aparecen en la expansión en vértices dada por la ecuación (3.1). La metodología usada es clara, consiste en unir las aristas involucradas (de las dos gráficas) en los tres índices (de cada tensor) que están representados por cuadrados (índices no contraídos), esto para el caso de las aristas que conecten un cuadrado con un círculo. Para el caso de las aristas que conectan cuadrados y son deltas de Kronecker, simplemente se eliminan.³ Por otro lado, se define la función `OperatorTraceAll[]` para obtener la forma gráfica final de un tensor que ha sido contraído con el patrón de la traza

$$F_{ijkijk},$$

que también es aplicable al tensor resultado del producto tensorial anteriormente definido; esto es útil para obtener las trazas a cualquier orden de la expansión en vértices. Después de obtener la traza respectiva a un operador o producto de operadores, el resultado será expresado como un valor numérico multiplicado por la gráfica de la que provino, para lo cuál se usará la función `CloseGraphWithPRdP[]`. En esta sección del código

³Nótese que esto hace perder la información sobre las deltas de Kronecker involucradas que más adelante será necesaria para realizar las trazas al reducir el número de índices que hay que sumar.

también se implementan las trazas de los tadpoles, por simplicidad y porque requirió ciertas modificaciones, se explicará esta función en el código para las sumas espectrales.

3.3.2. Código para sumas espectrales

Esta sección del programa fue desarrollada para esta tesis con el objetivo de obtener las sumas espectrales involucradas en las trazas de las expansiones en vértices. Para describir el funcionamiento del código, se puede obtener más claridad del lado derecho de la expresión (3.1) si se considera que los tensores \dot{R} y P son de la forma (como se muestra en las ecuaciones para los reguladores (3.7) y (3.8))

$$\dot{R}_{ijklmn} = \dot{\tau}(i, j, k)\delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn}, \quad P_{ijklmn} = p(i, j, k)\delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn}$$

Con $\dot{\tau}(i, j, k)$ y $p(i, j, k)$ funciones solo de los índices. De esta manera en la expansión en vértices, el primer término lo interpretamos como un término en el vacío. Los demás términos serán términos a vértices según el valor al que corresponda y simplificando toman la sencilla expresión (utilizando las consideraciones anteriores, en especial por las deltas de Kronecker):

$$\begin{aligned} Tr(\dot{R}PFP) &= p^2(a_1, a_2, a_3)\dot{\tau}(a_1, a_2, a_3)F_{a_1a_2a_3a_1a_2a_3} = reg(a_1, a_2, a_3)F_{a_1a_2a_3a_1a_2a_3} \\ Tr(\dot{R}(PF)^2P) &= reg(a_1, a_2, a_3)p(b_1, b_2, b_3)F_{a_1a_2a_3b_1b_2b_3}F_{b_1b_2b_3a_1a_2a_3} \\ Tr(\dot{R}(PF)^3P) &= reg(a_1, a_2, a_3)p(b_1, b_2, b_3)p(c_1, c_2, c_3)F_{a_1a_2a_3b_1b_2b_3}F_{b_1b_2b_3c_1c_2c_3}F_{c_1c_2c_3a_1a_2a_3} \\ Tr(\dot{R}(PF)^4P) &= reg(a_1, a_2, a_3)p(b_1, b_2, b_3)p(c_1, c_2, c_3)p(d_1, d_2, d_3)F_{a_1a_2a_3b_1b_2b_3}F_{b_1b_2b_3c_1c_2c_3}F_{c_1c_2c_3d_1d_2d_3} \\ &\quad \times F_{d_1d_2d_3a_1a_2a_3} \end{aligned}$$

donde se muestra la estructura de los tadpoles o sumas a un vértice, dos vértices, tres vértices y cuatro vértices respectivamente. Se realiza la suma sobre todos los índices involucrados. Dentro de los siguientes cálculos se utilizará la forma del tensor con funciones escalón (3.9) que permite acotar las sumas de índices hasta N .

Ahora bien, la traza involucrada con los tadpoles es sencilla. Solo hay que sumar sobre 3 índices (a_1 , a_2 y a_3) la función $reg(a_1, a_2, a_3)$ y la traza $F_{a_1a_2a_3a_1a_2a_3}$, pero esta última está compuesta, usando la forma del tensor de la ecuación (3.9); por restricciones de la función escalón ϑ . El tipo de índices que tiene F consiste de a_1 , a_2 y a_3 además de índices internos. Esto puede apreciarse en el ejemplo que se tomó con anterioridad de la ecuación (3.17). También contiene deltas de Kronecker de la forma $\delta_{a_i a_i} = 1$ pero estas serán importantes para los demás ordenes en la expansión en vértices. Así, para obtener los tadpoles la estructura general es

$$Tr(\dot{R}PFP) = N^{\alpha(F)} \sum_{a_1, a_2, a_3}^{N, N, N} reg(a_1, a_2, a_3)$$

donde $\alpha(F)$ es el número de índices internos del tensor F . Como en la representación gráfica, los índices internos están representados por las aristas que conectan círculos con círculos, definimos la función `N00[]` para contar las aristas que se conectan de esta forma, que en nuestra notación conectan el vértice i con el vértice j (número entero a número entero). Se usa así la función predeterminada `EdgeCount[]`. La función para obtener la traza completa está dada por `RHS[]`, que es simplemente este factor de N asociado a los índices internos, por la suma de $reg(a_1, a_2, a_3)$ y de manera representativa, la traza de la gráfica de la que provenía cada término.

Para las sumas espectrales a dos-vértices se usa la misma metodología, solo que ahora hay 4 casos distintos. Ahora debe sumarse sobre 6 índices aunque en el producto tensorial

$$F_{a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 b_3} F_{b_1 b_2 b_3 a_1 a_2 a_3}.$$

Además de encontrar el factor de N^α correspondiente al número de índices internos de los dos tensores, se encuentran deltas de Kronecker que relacionan a los índices a_i con b_i . De esta forma, la traza contiene cuatro casos dependiendo del número de deltas de Kronecker β que relacionen a los índices a_i con b_i

$$Tr(\dot{R}(PF)^2 P) = N^{\alpha(F^2)} \sum_{a_1, a_2, a_3}^{N, N, N} reg(a_1, a_2, a_3) \times \begin{cases} p(a_1, a_2, a_3) & \text{si } \beta = 3 \\ \sum_{b_1}^N p(b_1, a_2, a_3) & \text{si } \beta = 2 \\ \sum_{b_1, b_2}^{N, N} p(b_1, b_2, a_3) & \text{si } \beta = 1 \\ \sum_{b_1, b_2, b_3}^{N, N, N} p(b_1, b_2, b_3) & \text{si } \beta = 0 \end{cases}.$$

Es por esta razón que se define la función N1[] para contar los índices internos de dos operadores y cumplir con la utilidad del factor α , mientras que para el parámetro β contamos las deltas de Kronecker en los operadores con la función N2[], que ya toma en cuenta cuando hay deltas de Kronecker repetidas. Así definimos la función VertexSumAll[] utilizando la función predeterminada If[] con los cuatro casos mencionados y determinados por β , por el factor N^α y su correspondiente gráfica.

Para el caso de las sumas espectrales a 3-vértices, una función condicional es difícil de aplicar pues la combinatoria es bastante alta, por lo que se recurre a otra metodología. El factor α , por su simplicidad aún es incluido, sin embargo por las deltas de Kronecker contenidas en el producto tensorial, reemplazamos los índices para que contentan estas deltas de Kronecker, es decir

$$Tr(\dot{R}(PF)^3 P) \rightarrow N^{\alpha(F^3)} \sum_{a_1, a_2, a_3}^{N, N, N} \sum_{b_1, b_2, b_3}^{N, N, N} \sum_{c_1, c_2, c_3}^{N, N, N} reg(a_1, a_2, a_3) p(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3) p(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3)$$

donde

$$\tilde{b}_i = \tilde{b}_i(a_i, b_i), \quad \tilde{c}_i = \tilde{c}_i(a_i, b_i, c_i)$$

son funciones de los índices. Ahora estas incluyen las deltas de Kronecker, las cuales estarán en función del número de aristas que conectan cuadrados con cuadrados (las deltas de Kronecker originales que relacionan a los índices unos con otros). Haciendo la descomposición $F^3 = F_1 F_2 F_3$ se define la función N0i[] que cuenta las deltas de Kronecker de color i de cada operador⁴. También se define la función NV3i[] que cuenta las deltas de Kronecker de color i en los tres operadores.

Para la función \tilde{b}_i hay dos casos, que sea el índice b_i o que sea a_i . El primer caso se satisface si no hay deltas de Kronecker, i.e. si $NV3i[F_1, F_2, F_3]=0$ ó si hay una delta de Kronecker pero solo en el operador F_3 i.e. $NV3i[F_1, F_2, F_3]=1$ y $N0i[F_3]$ (δ_{a_i, c_i}), para el segundo caso, que el índice sea a_i ; se tienen las opciones restantes. Esto es, que haya 2 o 3 deltas de Kronecker en los tres operadores o que haya una delta de Kronecker en todos los operadores y que esta resida en F_1 (δ_{a_i, b_i}). De esta manera la función \tilde{b}_i está definida como

$$\tilde{b}_i = b_i(\delta_{NV3i,0} + \delta_{NV3i,1} \delta_{N0i(F_3),1}) + a_i(\delta_{NV3i,2} + \delta_{NV3i,3} + \delta_{NV3i,1} \delta_{N0i(F_1),1})$$

Para la función \tilde{c}_i hay tres casos, c_i , b_i y a_i . Esta función será c_i cuando no haya deltas de Kronecker

⁴Es importante notar que a partir de orden 3 en la expansión en vértices, es necesario diferenciar el orden de los operadores ya que su producto no es conmutativo.

i.e. $NV3i[F_1, F_2, F_3]=0$ o cuando haya una y esté en el operador F_1 , $NV3i=1$ y $N0i[F_1]$ (δ_{a_i, b_i}); será b_i cuando haya una delta de Kronecker y se encuentre en el operador F_2 (δ_{b_i, c_i}) y será a_i cuando haya 3 o 2 deltas de Kronecker ó una delta de Kronecker y se encuentre en el operador F_3 (δ_{a_i, c_i}), por lo que la función se expresa como

$$\tilde{c}_i = c_i(\delta_{NV3i,0} + \delta_{NV3i,1}\delta_{N0i(F_1),1}) + b_i\delta_{NV3i,1}\delta_{N0i(F_2),1} + a_i(\delta_{NV3i,2} + \delta_{NV3i,3} + \delta_{NV3i,1}\delta_{N0i(F_3),1})$$

Análogamente, para las sumas espectrales a 4-vértices se sigue el mismo razonamiento:

$$Tr(\dot{R}(PF)^4P) \rightarrow N^{\alpha(F^4)} \sum_{a_1, a_2, a_3}^{N, N, N} \sum_{b_1, b_2, b_3}^{N, N, N} \sum_{c_1, c_2, c_3}^{N, N, N} \sum_{d_1, d_2, d_3}^{N, N, N} reg(a_1, a_2, a_3)p(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3)p(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3)p(\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \tilde{d}_3)$$

Se define la función $NV4i[]$ que cuenta las aristas que conectan cuadrados (deltas de Kronecker) del color i de los cuatro operadores $F^4 = F_1F_2F_3F_4$ con las funciones de los índices:

$$\tilde{b}_i = \tilde{b}_i(a_i, b_i), \quad \tilde{c}_i = \tilde{c}_i(a_i, b_i, c_i), \quad \tilde{d}_i = \tilde{d}_i(a_i, b_i, c_i, d_i).$$

La función \tilde{b}_i solo puede ser a_i o b_i . Si hay una delta en el primer operador, i.e. $N0i[F_1]=1$ (lo cuál significa que hay δ_{a_i, b_i}) entonces obtenemos el índice a_i , de lo contrario, en ausencia de esta delta $N0i[F_1]=0$, hay dos casos; que se forme esta delta de Kronecker a partir de las otras, para lo cuál $NV4i=3$ o que no se forme, i.e. $NV4i \neq 3$, así la función se expresa como

$$\tilde{b}_i = a_i\delta_{N0i(F_1),1} + (b_i + (a_i - b_i)\delta_{NV4i,3})\delta_{N0i(F_1),0}.$$

Para la función \tilde{c}_i usamos recursividad de forma que hay tres casos, que la función sea c_i , \tilde{b}_i o a_i . Ahora el razonamiento es: la función es \tilde{b}_i y no c_i cuando hay una delta de Kronecker en el operador 2 i.e. $N0i[F_2]=1$ (hay δ_{b_i, c_i}) y así esta condición ya incluye todos los casos de la función \tilde{b}_i excepto para cuando solo hay una delta que relacione a_i con c_i i.e. cuando no hay delta en el operador F_2 pero sí la hay en F_3 y F_4 . Así la función se expresa como

$$\tilde{c}_i = c_i + (\tilde{b}_i - c_i)\delta_{N0i(F_2),1} + (a_i - c_i)\delta_{N0i(F_2),0}\delta_{N0i(F_3),1}\delta_{N0i(F_4),1}.$$

Finalmente, la función \tilde{d}_i será \tilde{c}_i cuando haya una delta de Kronecker en el operador F_3 , $N0i[F_3]=1$ (hay δ_{c_i, d_i}) que ya incluye todos los casos de \tilde{c}_i ; será a_i cuando no exista esta delta, i.e. $N0i[F_3]=0$ pero sí en el operador F_4 , $N0i[F_4]=1$ (hay δ_{a_i, d_i}); en los casos sobrantes será d_i . Esta función se expresa como

$$\tilde{d}_i = d_i + (\tilde{c}_i - d_i)\delta_{N0i(F_3),1} + (a_i - d_i)\delta_{N0i(F_3),0}\delta_{N0i(F_4),1}.$$

Capítulo 4

Resultados

En esta sección se utilizarán cuatro truncaciones para la Acción Efectiva Promedio de los Modelos Tensoriales Coloreados, la primera a orden $(T\bar{T})^2$, la segunda, una ampliación hasta orden $(T\bar{T})^3$ sin el melónico triple $g_{6,3}^3$. La tercera a orden a orden $(T\bar{T})^3$ completo y la cuarta a orden $(T\bar{T})^4$. Los términos contenidos en estas truncaciones serán operadores melónicos y no melónicos (usando toda la combinatoria posible) para un tensor complejo con sus respectivos acoplamientos $g_{i,j}$ utilizando la notación mencionada en la sección anterior. Se usará la misma truncación para orden $(T\bar{T})^3$ que en la referencia [1].

Se obtendrán las funciones beta, puntos fijos y exponentes críticos usando la metodología establecida en el capítulo anterior, para un regulador exponencial y uno tipo Litim en todos los casos, estas se reportarán en términos de los acoplamientos $g_{i,j}$ y la sumas espectrales $S_{i,j}$ dadas en el Apéndice A y que toman la forma

$$S_{i,j} = a_{i,j} + \eta b_{i,j},$$

donde $a_{i,j}$ y $b_{i,j}$ son números reales. Se utilizaran los dos esquemas A y B mencionados para el escalamiento de los acoplamientos, los cuales modificarán las funciones beta y por tanto los puntos fijos y exponentes críticos. Este escalamiento está presente en las funciones beta y puede cotejarse en ellas como el primer término lineal que contiene su mismo acoplamiento. Además también se usarán los tres esquemas: completo, semi-perturbativo y perturbativo, para los puntos fijos y exponentes críticos. Se reportarán en tablas independientes los exponentes críticos en los esquemas θ_I y θ'_I .

Las funciones beta entendidas como un sistema de 57 ecuaciones para la truncación completa a $(T\bar{T})^4$ no se reportarán completas, sino que se escogerá una función beta representante ya que estas también son invariantes ante la permutación de colores. El sistema completo puede obtenerse al permutar los colores involucrados.

4.1. Truncación a orden 8

La truncación a orden $(T\bar{T})^4$ para la Acción Efectiva Promedio está dada por toda la combinatoria posible para generar gráficas bipartitas coloreadas desde un tensor y su conjugado hasta cuatro tensores con cuatro conjugados

$$\begin{aligned}
\Gamma_N = & Z \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{4,1}^{2,1} \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{4,1}^{2,2} \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{4,1}^{2,3} \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{4,2}^2 \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{6,1}^{3,1} \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{6,1}^{3,2} \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{6,1}^{3,3} \text{ (diagrama)} \\
& + \tilde{g}_{6,1}^{2,1} \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{6,1}^{2,2} \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{6,1}^{2,3} \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{6,1}^0 \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{6,3}^3 \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{6,2}^{3,1} \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{6,2}^{3,2} \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{6,2}^{3,3} \text{ (diagrama)} \\
& + \tilde{g}_{8,1}^{4,1} \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{8,1}^{4,2} \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{8,1}^{4,3} \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{8,1}^{3,1,1} \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{8,1}^{3,1,2} \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{8,1}^{3,2,1} \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{8,1}^{3,2,2} \text{ (diagrama)} \\
& + \tilde{g}_{8,1}^{3,3,1} \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{8,1}^{3,3,2} \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{8,1}^{1,1} \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{8,1}^{1,2} \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{8,1}^{1,3} \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{8,1}^3 \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{8,2}^1 \text{ (diagrama)} \\
& + \tilde{g}_{8,1}^{2,1,1} \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{8,1}^{2,1,2} \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{8,1}^{2,1,3} \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{8,1}^{2,2,1} \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{8,1}^{2,2,2} \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{8,1}^{2,2,3} \text{ (diagrama)} \\
& + \tilde{g}_{8,1}^{2,3,1} \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{8,1}^{2,3,2} \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{8,1}^{2,3,3} \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{8,1}^{0,1} \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{8,1}^{0,2} \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{8,1}^{0,3} \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{8,1}^{0,4} \text{ (diagrama)} \\
& + \tilde{g}_{8,2}^{4,1} \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{8,2}^{4,2} \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{8,2}^{4,3} \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{8,2}^{3,1} \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{8,2}^{3,2} \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{8,2}^{3,3} \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{8,2}^{4,1,1} \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{8,2}^{4,1,2} \text{ (diagrama)} \\
& + \tilde{g}_{8,2}^{4,1,3} \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{8,2}^{4,2,1} \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{8,2}^{4,2,2} \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{8,2}^{4,2,3} \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{8,3}^{4,1} \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{8,3}^{4,2} \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{8,3}^{4,3} \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{8,4}^4 \text{ (diagrama)}.
\end{aligned}$$

Aplicando la ecuación de Wetterich (3.1) a la expresión anterior, puede obtenerse el lado izquierdo como se muestra en (3.5) lo que permite definir las funciones beta $\beta'_{i,j}$ con sus respectivos escalamientos $d'_{i,j}$ sin determinar. Para el lado derecho de la ecuación de Wetterich tendremos una expansión en vértices, esta se corta hasta $n = 4$ ya que términos superiores darán invariantes tensoriales de orden $(T\bar{T})^5$ o mayores. Para $n \leq 4$ también tendremos invariantes tensoriales de orden mayor que la truncación. Todos estos términos se omiten. De esta forma, tomando la segunda derivada variacional de Γ_N llamamos $F_{4,i}$, $F_{6,i}$ y $F_{8,i}$ a la suma de términos provenientes de los invariantes $(T\bar{T})^2$, $(T\bar{T})^3$ y $(T\bar{T})^4$ respectivamente.

Así los únicos términos que deben obtenerse son toda la combinatoria que contribuirá a estos ordenes. Para $n = 1$ tendremos los tadpoles $\text{Tr}(F_{4,i})$, $\text{Tr}(F_{6,i})$ y $\text{Tr}(F_{8,i})$. Para $n = 2$ se tienen $\text{Tr}(F_{4,i}F_{4,j})$, $\text{Tr}(F_{4,i}F_{6,j})$, $\text{Tr}(F_{6,i}F_{6,j})$ y $\text{Tr}(F_{4,i}F_{8,j})$ y la estructura de estas trazas conmutan en F . Para $n = 3$ tendremos $\text{Tr}(F_{4,i}F_{4,j}F_{4,k})$ y $\text{Tr}(F_{4,i}F_{4,j}F_{6,k})$, esta última estructura no conmuta en F (solamente en el intercambio del primer con el segundo término), por lo que debe hacerse toda la combinatoria. Por último, para $n = 4$ solo deben obtenerse los términos $\text{Tr}(F_{4,i}F_{4,j}F_{4,k}F_{4,l})$ que tiene la simetría de intercambio del primer con el cuarto término en F y el segundo con el tercer término en F . Tomando toda esta combinatoria y aludiendo a la simetría de colores deben obtenerse en total 247 trazas que pueden realizarse en Mathematica.

Después de obtener las trazas debe realizarse el análisis dimensional, imponiendo la condición (3.6) conlleva a acotar los escalamientos $d'_{i,j}$ entre ellos y relaciones numéricas. De esta manera se escogen dos esquemas de escalamiento A y B que corresponden a las cotas inferiores y superiores respectivamente. Una vez establecidos los escalamientos, pueden obtenerse las funciones beta. De nuevo cabe mencionar que los escalamientos pueden cotejarse en las funciones beta como el factor numérico asociado al primer término lineal de cada función.

4.1.1. Escalamiento A

En este esquema de escalamiento las funciones beta toman la forma del sistema de ecuaciones diferenciales dado por

$$\eta = 2S_1(g_{4,1}^{2,1} + g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3} + g_{4,2}^2),$$

$$\beta_{4,1}^{2,1} = (2\eta + 2)g_{4,1}^{2,1} - S_1(3g_{6,1}^{3,1} + g_{6,2}^{3,1}) + 4S_{2,1}(g_{4,1}^{2,1})^2,$$

$$\begin{aligned} \beta_{4,2}^2 &= (2\eta + 3)g_{4,2}^2 - 2S_1(g_{6,2}^{3,1} + g_{6,2}^{3,2} + g_{6,2}^{3,3}) - 3S_{1,3}g_{6,3}^3 \\ &+ 4S_{2,0}((g_{4,2}^2)^2 + 2g_{4,2}^2(g_{4,1}^{2,1} + g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3}) + 2g_{4,1}^{2,1}g_{4,1}^{2,2} + 2g_{4,1}^{2,1}g_{4,1}^{2,3} + 2g_{4,1}^{2,2}g_{4,1}^{2,3}), \end{aligned}$$

$$\beta_{6,1}^{3,1} = (3\eta + 4)g_{6,1}^{3,1} - S_1(4g_{8,1}^{4,1} + g_{8,2}^{4,1}) + 12S_{2,1}g_{4,1}^{2,1}g_{6,1}^{3,1} - 8S_{3,1}(g_{4,1}^{2,1})^3,$$

$$\begin{aligned} \beta_{6,1}^{2,1} &= (3\eta + 5)g_{6,1}^{2,1} - S_1(g_{8,2}^{3,1} + g_{8,1}^3 + 2g_{8,1}^{3,1,1} + 2g_{8,1}^{3,1,2} + 2g_{8,1}^{2,2,2} + 2g_{8,1}^{2,3,1} + g_{8,1}^{2,3,3} + g_{8,1}^{2,2,3}) \\ &+ 4S_{2,1}g_{6,1}^{2,1}(g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3}) + 12S_{2,1}(g_{4,1}^{2,2}g_{6,1}^{3,3} + g_{4,1}^{2,3}g_{6,1}^{3,2}) - 16(S_{3,6} + 2S_{3,7})g_{4,1}^{2,1}g_{4,1}^{2,2}g_{4,1}^{2,3} \\ &- 8(2S_{3,4} + S_{3,8})((g_{4,1}^{2,2})^2g_{4,1}^{2,3} + g_{4,1}^{2,2}(g_{4,1}^{2,3})^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_{6,2}^{3,1} &= (3\eta + 5)g_{6,2}^{3,1} - S_1(3g_{8,2}^{4,1} + 2g_{8,3}^{4,1} + 4g_{8,3}^{4,1,1} + 2g_{8,2}^{4,2,2} + 2g_{8,2}^{4,2,3}) + 12S_{2,0}g_{6,1}^{3,1}(g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3} + g_{4,2}^2) \\ &+ 4(S_{2,0} + 2S_{2,1})g_{6,2}^{3,1}g_{4,1}^{2,1} + 4S_{2,0}g_{6,2}^{3,1}(g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3} + g_{4,2}^2) - 8(2S_{3,5} + S_{3,9})(g_{4,2}^2)^2(g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_{6,3}^3 &= (3\eta + 6)g_{6,3}^3 - 2S_1(g_{8,3}^{4,1} + g_{8,3}^{4,2} + g_{8,3}^{4,3} + 2g_{8,4}^4) + 12S_{2,0}g_{6,3}^3(g_{4,1}^{2,1} + g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3} + g_{4,2}^2) \\ &+ 8S_{2,0}g_{4,2}^2(g_{6,2}^{3,1} + g_{6,2}^{3,2} + g_{6,2}^{3,3}) + 8S_{2,0}(g_{4,1}^{2,1}(g_{6,2}^{3,2} + g_{6,2}^{3,3}) + g_{4,1}^{2,2}(g_{6,2}^{3,1} + g_{6,2}^{3,3}) + g_{4,1}^{2,3}(g_{6,2}^{3,1} + g_{6,2}^{3,2})) \\ &- 8S_{3,2}(g_{4,2}^2)^3 - 24S_{3,2}(g_{4,2}^2)^2(g_{4,1}^{2,1} + g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3}) \\ &- 48S_{3,2}(g_{4,1}^{2,1}g_{4,1}^{2,2}g_{4,1}^{2,3} + g_{4,2}^2(g_{4,1}^{2,1}g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,1}g_{4,1}^{2,3} + g_{4,1}^{2,2}g_{4,1}^{2,3})), \end{aligned}$$

$$\beta_{6,1}^0 = (3\eta + 6)g_{6,1}^0 - S_1g_{8,2}^1 - 48S_{3,3}g_{4,1}^{2,1}g_{4,1}^{2,2}g_{4,1}^{2,3},$$

$$\beta_{8,1}^{4,1} = (4\eta + 6)g_{8,1}^{4,1} + 9S_{2,1}(g_{6,1}^{3,1})^2 + 16S_{2,1}g_{4,1}^{2,1}g_{8,1}^{4,1} - 36S_{3,1}(g_{4,1}^{2,1})^2g_{6,1}^{3,1} + 16S_{4,1}(g_{4,1}^{2,1})^4,$$

$$\beta_{8,1}^{1,1} = (4\eta + 8)g_{8,1}^{1,1} + 4S_{2,1}g_{8,1}^{1,1}g_{4,1}^{2,1} - 24(3S_{3,3} + 2S_{3,14} + S_{3,15})g_{6,1}^{3,1}g_{4,1}^{2,2}g_{4,1}^{2,3},$$

$$\beta_{8,1}^{0,1} = (4\eta + 8)g_{8,1}^{0,1},$$

$$\begin{aligned} \beta_{8,2}^{4,1} &= (4\eta + 7)g_{8,2}^{4,1} + 12S_{2,1}g_{6,1}^{3,1}g_{6,2}^{3,1} + 16S_{2,0}g_{8,1}^{4,1}(g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3} + g_{4,2}^2) + 4(S_{2,0} + 3S_{2,1})g_{8,2}^{4,1}g_{4,1}^{2,1} \\ &\quad + 4S_{2,0}g_{8,2}^{4,1}(g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3} + g_{4,2}^2) - 24S_{3,1}(g_{4,1}^{2,1})^2g_{6,2}^{3,1} - 24(2S_{3,5} + S_{3,9})g_{4,1}^{2,1}g_{6,1}^{3,1}(g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3}) \\ &\quad - 24(2S_{3,5} + S_{3,9})g_{4,1}^{2,1}g_{6,1}^{3,1}g_{4,2}^2 + 32(S_{4,9} + S_{4,10})(g_{4,1}^{2,1})^3(g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3} + g_{4,2}^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_{8,2}^{3,1} &= (4\eta + 8)g_{8,2}^{3,1} + 12S_{2,1}(g_{6,1}^{3,2}g_{6,2}^{3,3} + g_{6,1}^{3,3}g_{6,2}^{3,2}) + 4S_{2,1}g_{6,1}^{2,1}(g_{6,2}^{3,2} + g_{6,2}^{3,3}) + 16S_{2,1}(g_{8,1}^{4,2}g_{4,1}^{2,3} + g_{8,1}^{4,3}g_{4,1}^{2,2}) \\ &\quad + 12S_{2,1}(g_{8,2}^{4,2}g_{4,1}^{2,3} + g_{8,2}^{4,3}g_{4,1}^{2,2}) + 4S_{2,0}g_{8,2}^{3,1}(g_{4,1}^{2,1} + g_{4,2}^2) + 4(S_{2,0} + S_{2,1})g_{8,2}^{3,1}(g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3}) \\ &\quad + 4S_{2,0}g_{8,1}^3(g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3} + g_{4,2}^2) + 8S_{2,0}g_{8,1}^{3,1,1}(g_{4,1}^{2,1} + g_{4,1}^{2,2} + g_{4,2}^2) + 8S_{2,0}g_{8,1}^{3,1,2}(g_{4,1}^{2,1} + g_{4,1}^{2,3} + g_{4,2}^2) \\ &\quad + 8(S_{2,0} + S_{2,1})(g_{8,1}^{2,2,2}g_{4,1}^{2,2} + g_{8,1}^{2,3,1}g_{4,1}^{2,3}) + 8S_{2,0}(g_{8,1}^{2,2,2} + g_{8,1}^{2,3,1})(g_{4,1}^{2,1} + g_{4,2}^2) \\ &\quad + 4(S_{2,0} + S_{2,1})(g_{8,1}^{2,2,3}g_{4,1}^{2,2} + g_{8,1}^{2,3,3}g_{4,1}^{2,3}) + 4S_{2,0}(g_{8,1}^{2,2,3} + g_{8,1}^{2,3,3})(g_{4,1}^{2,1} + g_{4,2}^2) \\ &\quad - 8(2S_{3,5} + S_{3,9})g_{6,1}^{2,1}(g_{4,1}^{2,1}g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,1}g_{4,1}^{2,3} + 2g_{4,1}^{2,2}g_{4,1}^{2,3} + g_{4,2}^2(g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3})) \\ &\quad - 8(S_{3,6} + 2S_{3,7})(2g_{4,1}^{2,1}g_{4,1}^{2,2}g_{6,2}^{3,3} + 2g_{4,1}^{2,1}g_{4,1}^{2,3}g_{6,2}^{3,2} + 2g_{4,1}^{2,2}g_{4,1}^{2,3}g_{6,2}^{3,1} + 3g_{4,1}^{2,2}g_{4,1}^{2,3}g_{6,2}^{3,1}) \\ &\quad - 24(2S_{3,4} + 2S_{3,5} + S_{3,8} + S_{3,9})g_{4,1}^{2,2}g_{4,1}^{2,3}(g_{6,1}^{3,2} + g_{6,1}^{3,3}) - 24(2S_{3,5} + S_{3,9})g_{4,2}^2(g_{4,1}^{2,2}g_{6,1}^{3,3} + g_{4,1}^{2,3}g_{6,1}^{3,2}) \\ &\quad - 8(2S_{3,4} + S_{3,8})((g_{4,1}^{2,2})^2g_{6,2}^{3,3} + (g_{4,1}^{2,3})^2g_{6,2}^{3,2} + 2g_{4,1}^{2,2}g_{4,1}^{2,3}(g_{6,2}^{3,2} + g_{6,2}^{3,3})) \\ &\quad + 32(2S_{4,2} + S_{4,3} + S_{4,4} + S_{4,5} + S_{4,6})(g_{4,1}^{2,2}(g_{4,1}^{2,3})^3 + g_{4,1}^{2,3}(g_{4,1}^{2,2})^3 + g_{4,2}^2((g_{4,1}^{2,2})^2g_{4,1}^{2,3} + (g_{4,1}^{2,3})^2g_{4,1}^{2,2})), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_{8,2}^{1,1} &= (4\eta + 9)g_{8,2}^{1,1} + 4S_{2,0}(g_{8,1}^{1,1}(g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3} + g_{4,2}^2) + g_{8,1}^{1,2}(g_{4,1}^{2,1} + g_{4,1}^{2,3} + g_{4,2}^2) + g_{8,1}^{1,3}(g_{4,1}^{2,1} + g_{4,1}^{2,2} + g_{4,2}^2)) \\ &\quad + 4S_{2,0}g_{8,2}^{1,1}(g_{4,1}^{2,1} + g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3} + g_{4,2}^2) - 48S_{3,3}(g_{4,1}^{2,1}g_{4,1}^{2,2}g_{6,2}^{3,3} + g_{4,1}^{2,2}g_{4,1}^{2,3}g_{6,2}^{3,1} + g_{4,1}^{2,1}g_{4,1}^{2,3}g_{6,2}^{3,2}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_{8,1}^{3,1} &= (4\eta + 7)g_{8,1}^{3,1} - 24(S_{3,6} + 2S_{3,7})(g_{4,1}^{2,1}g_{4,1}^{2,2}g_{6,1}^{3,3} + g_{4,1}^{2,2}g_{4,1}^{2,3}g_{6,1}^{3,1} + g_{4,1}^{2,1}g_{4,1}^{2,3}g_{6,1}^{3,2}) \\ &\quad + 4S_{2,1}g_{8,1}^{3,1}(g_{4,1}^{2,1} + g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_{8,4}^4 &= (4\eta + 9)g_{8,4}^4 + 8S_{2,0}(g_{6,2}^{3,1}g_{6,2}^{3,2} + g_{6,2}^{3,1}g_{6,2}^{3,3} + g_{6,2}^{3,2}g_{6,2}^{3,3}) + 3S_{2,0}g_{6,3}^3(4g_{6,2}^{3,1} + 4g_{6,2}^{3,2} + 4g_{6,2}^{3,3} + 3g_{6,3}^3) \\ &\quad + 16S_{2,0}g_{8,4}^4(g_{4,1}^{2,1} + g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3} + g_{4,2}^2) + 8S_{2,0}g_{8,3}^4(g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3} + g_{4,2}^2) + 8S_{2,0}g_{8,3}^4(g_{4,1}^{2,1} + g_{4,1}^{2,3} + g_{4,2}^2) \\ &\quad + 8S_{2,0}g_{8,3}^4(g_{4,1}^{2,1} + g_{4,1}^{2,2} + g_{4,2}^2) - 48S_{3,2}(g_{4,1}^{2,1}g_{4,1}^{2,2}g_{6,2}^{3,3} + g_{4,1}^{2,2}g_{4,1}^{2,3}g_{6,2}^{3,1} + g_{4,1}^{2,1}g_{4,1}^{2,3}g_{6,2}^{3,2}) \\ &\quad - 24S_{3,2}g_{4,2}^2(2g_{4,1}^{2,1}(g_{6,2}^{3,2} + g_{6,2}^{3,3}) + 2g_{4,1}^{2,2}(g_{6,2}^{3,1} + g_{6,2}^{3,3}) + 2g_{4,1}^{2,3}(g_{6,2}^{3,1} + g_{6,2}^{3,2}) + g_{4,2}^2(g_{6,2}^{3,1} + g_{6,2}^{3,2} + g_{6,2}^{3,3})) \\ &\quad - 36S_{3,2}g_{6,3}^3(2g_{4,1}^{2,1}g_{4,1}^{2,2} + 2g_{4,1}^{2,1}g_{4,1}^{2,3} + 2g_{4,1}^{2,2}g_{4,1}^{2,3} + 2g_{4,2}^2(g_{4,1}^{2,1} + g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3}) + (g_{4,2}^2)^2) \\ &\quad + 16S_{4,11}(g_{4,2}^2)^2(12g_{4,1}^{2,1}g_{4,1}^{2,2} + 12g_{4,1}^{2,1}g_{4,1}^{2,3} + 12g_{4,1}^{2,2}g_{4,1}^{2,3} + (g_{4,2}^2)^2) + 4g_{4,2}^2(g_{4,1}^{2,1} + g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3}) \\ &\quad + 384S_{4,11}g_{4,1}^{2,1}g_{4,1}^{2,2}g_{4,1}^{2,3}g_{4,2}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{8,3}^{4,1} = & (4\eta + 8)g_{8,3}^{4,1} + 6S_{2,0}g_{6,1}^{3,1}(2g_{6,2}^{3,2} + 2g_{6,2}^{3,3} + 3g_{6,3}^3) + 4(S_{2,0} + S_{2,1})(g_{6,2}^{3,1})^2 + 4S_{2,0}g_{6,2}^{3,1}(g_{6,2}^{3,2} + g_{6,2}^{3,3}) \\
& + 6S_{2,0}g_{6,2}^{3,1}g_{6,3}^3 + 8(S_{2,0} + S_{2,1})g_{8,3}^{4,1}g_{4,1}^{2,1} + 4S_{2,0}(2g_{8,3}^{4,1} + 3g_{8,2}^{4,1})(g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3} + g_{4,2}^2) \\
& + 16S_{2,0}g_{8,2}^{4,1,1}(g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3} + g_{4,2}^2) + 8S_{2,0}g_{8,2}^{4,2,2}(g_{4,1}^{2,1} + g_{4,1}^{2,2} + g_{4,2}^2) + 8S_{2,0}g_{8,2}^{4,2,3}(g_{4,1}^{2,1} + g_{4,1}^{2,2} + g_{4,2}^2) \\
& - 36S_{3,2}g_{6,1}^{3,1}(2g_{4,1}^{2,2}g_{4,1}^{2,3} + 2(g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3})g_{4,2}^2 + (g_{4,2}^2)^2) - 8(2S_{3,5} + S_{3,9})(g_{6,2}^{3,2} + g_{6,2}^{3,3})(g_{4,1}^{2,1})^2 \\
& - 8(3S_{3,2} + 4S_{3,5} + 2S_{3,9})g_{6,2}^{3,1}g_{4,1}^{2,1}(g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3}) - 8(3S_{3,2} + 4S_{3,5} + 2S_{3,9})g_{6,2}^{3,1}g_{4,1}^{2,1}g_{4,2}^2 \\
& - 24S_{3,2}g_{6,2}^{3,1}g_{4,1}^{2,2}g_{4,1}^{2,3} - 12S_{3,2}g_{6,2}^{3,1}g_{4,2}^2(2g_{4,1}^{2,2} + 2g_{4,1}^{2,3} + g_{4,2}^2) - 12(2S_{3,5} + S_{3,9})g_{6,3}^3(g_{4,1}^{2,1})^2 \\
& + 16(2S_{4,12} + 3S_{4,13} + S_{4,14})(g_{4,1}^{2,1})^2(g_{4,2}^2(2g_{4,1}^{2,2} + 2g_{4,1}^{2,3} + g_{4,2}^2) + 2g_{4,1}^{2,2}g_{4,1}^{2,3}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{8,1}^{3,1,1} = & (4\eta + 7)g_{8,1}^{3,1,1} + 18S_{2,1}g_{6,1}^{3,2}g_{6,1}^{3,3} + 6S_{2,1}g_{6,1}^{3,3}g_{6,1}^{2,1} + 4S_{2,1}g_{8,1}^{3,1,1}(g_{4,1}^{2,2} + 2g_{4,1}^{2,3}) + 16S_{2,1}g_{8,1}^{4,3}g_{4,1}^{2,2} \\
& - 12S_{3,1}g_{6,1}^{2,1}(g_{4,1}^{2,3})^2 - 12(2S_{3,4} + S_{3,8})g_{6,1}^{3,3}g_{4,1}^{2,2}(g_{4,1}^{2,2} + 2g_{4,1}^{2,3}) - 36S_{3,1}g_{6,1}^{3,2}(g_{4,1}^{2,3})^2 \\
& - 24(S_{3,6} + 2S_{3,7})g_{6,1}^{3,3}g_{4,1}^{2,1}g_{4,1}^{2,2} + 32(S_{4,7} + S_{4,8})g_{4,1}^{2,2}(g_{4,1}^{2,3})^3,
\end{aligned}$$

$$\beta_{8,2}^{4,1,1} = (4\eta + 7)g_{8,2}^{4,1,1} + S_{2,0}(6g_{6,1}^{3,1} + g_{6,2}^{3,1})g_{6,2}^{3,1} + 16S_{2,1}g_{8,2}^{4,1,1}g_{4,1}^{2,1} - 4(2S_{3,5} + S_{3,9})g_{6,2}^{3,1}(g_{4,1}^{2,1})^2,$$

$$\begin{aligned}
\beta_{8,2}^{4,2,1} = & (4\eta + 7)g_{8,2}^{4,2,1} + 18S_{2,0}g_{6,1}^{3,2}g_{6,1}^{3,3} + 6S_{2,0}(g_{6,1}^{3,2}g_{6,2}^{3,3} + g_{6,1}^{3,3}g_{6,2}^{3,2}) + 2S_{2,0}g_{6,2}^{3,2}g_{6,2}^{3,3} \\
& + 8S_{2,1}g_{8,2}^{4,2,1}(g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3}) - 4(2S_{3,5} + S_{3,9})(3g_{6,1}^{3,3} + g_{6,2}^{3,3})(g_{4,2}^{2,2})^2 + (3g_{6,1}^{3,2} + g_{6,2}^{3,2})(g_{4,1}^{2,3})^2 \\
& + 32(S_{4,15} + S_{4,16} + S_{4,17})(g_{4,1}^{2,2})^2(g_{4,1}^{2,3})^2,
\end{aligned}$$

$$\beta_{8,1}^{2,1,1} = (4\eta + 7)g_{8,1}^{2,1,1} + 8S_{2,1}g_{8,1}^{2,1,1}g_{4,1}^{2,2},$$

$$\beta_{8,1}^{2,1,3} = (4\eta + 7)g_{8,1}^{2,1,3} + 4S_{2,1}g_{8,1}^{2,1,3}(g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3}).$$

Con estas funciones beta y el regulador exponencial se encuentra un punto fijo con una dirección relevante usando la truncación completa hasta $(T\bar{T})^4$, en este punto fijo solo los acoplamientos melónicos cíclicos con un color preferido son distintos de cero y se obtienen 57 exponentes críticos donde solo uno es positivo (esta es la dirección relevante). Debido a la complejidad de las sumas espectrales para el regulador tipo Litim solo es posible llegar a una truncación a orden $(T\bar{T})^6$. Sin embargo, usando una truncación reducida dada por

$$\Gamma_N = Z \text{ (diagrama de un punto) } + \tilde{g}_{4,1}^{2,1} \text{ (diagrama de un cuadrado) } + \tilde{g}_{6,1}^{3,1} \text{ (diagrama de un hexágono) } + \tilde{g}_{8,1}^{4,1} \text{ (diagrama de un octógono) } \quad (4.1)$$

da los mismos valores para los puntos fijos y exponentes críticos (salvo los exponentes críticos negativos asociados a los acoplamientos que se han omitido) en el caso del regulador exponencial hasta orden 8 y el tipo Litim hasta orden 6, por lo que es válido suponer que para el regulador tipo Litim pasa lo mismo a orden 8. Como esta truncación es menor, las funciones beta se simplifican; basta eliminar las funciones beta y acoplamientos del sistema de ecuaciones anterior. En este caso puede obtenerse el punto fijo con una dirección relevante usando los reguladores exponencial y tipo Litim reportados en las Tablas A.1.1 y A.1.2 conforme se amplía la truncación. La tabla A.1.1 muestra los valores de los acoplamientos en el punto fijo usando los dos reguladores mientras que la tabla A.1.2 da los exponentes críticos para los dos reguladores y

en los distintos esquemas mencionados anteriormente.

esq	Exp				Litim			
	η	$g_{4,1}^{2,1}$	$g_{6,1}^{3,1}$	$g_{8,1}^{4,1}$	η	$g_{4,1}^{2,1}$	$g_{6,1}^{3,1}$	$g_{8,1}^{4,1}$
comp	-0.69	-0.69			-0.54	-1.94		
s-p	-0.61	-0.89			-0.51	-2.05		
pert	0	-3.24			0	-4.62		
comp	-0.55	-0.58	-0.17		-0.37	-1.37	-2.14	
s-p	-0.47	-0.68	-0.26		-0.35	-1.41	-2.27	
pert	0	-1.5	-1.56		0	-2.14	-6.12	
comp	-0.45	-0.51	-0.26	-0.15	-0.28	-1.06	-2.56	-6.45
s-p	-0.39	-0.56	-0.34	-0.23	-0.27	-1.08	-2.65	-6.78
pert	0	-0.98	-1.32	-1.71	0	-1.4	-5.2	-18.53

Tabla A.1.1 Punto fijo con una dirección relevante para regulador exponencial y tipo Litim, truncación reducida.

esq	Exp		Litim	
	θ_I	θ'_I	θ_I	θ'_I
comp	2.91	0.62	2.21	0.93
s-p	2.22	0.77	2.09	0.97
pert	2		2	
comp	2.72 -1.72	0.99 -1.81	2.14 -2.24	1.33 -2.3
s-p	2.26 -1.96	1.14 -2.03	2.09 -2.29	1.36 -2.35
pert	2 -3.39		2 -3.37	
comp	2.6 -1.65 -3.71	1.22 -1.82 -3.67	2.11 -2.17 -4.39	1.53 -2.28 -4.36
s-p	2.27 -1.88 -3.96	1.34 -2 -3.94	2.08 -2.21 -4.43	1.55 -2.32 -4.41
pert	2 -3.1 -5.48		2 -3.08 -5.48	

Tabla A.1.2 Exponentes críticos para reguladores exponencial y tipo Litim, truncación reducida.

La única diferencia entre usar la truncación completa y la reducida para este punto fijo es que en el esquema perturbativo aparece una segunda dirección relevante a cada truncación. Sin embargo el valor de esta segunda dirección relevante es muy pequeño y puede atribuírse a errores provenientes de la dependencia del esquema. El análisis de esto se dará en las conclusiones.

Por otro lado, también se encuentra un punto fijo con dos direcciones relevantes. Aplicando el mismo razonamiento que para el punto fijo anterior, se encuentra que la truncación reducida dada por las gráficas con número máximo de sub-melones y un solo color preferido (cíclicas desconectadas)

$$\begin{aligned}
\Gamma_N = & Z \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{4,1}^{2,1} \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{4,2}^2 \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{6,1}^{3,1} \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{6,2}^{3,1} \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{6,3}^3 \text{ (diagrama)} \\
& + \tilde{g}_{8,1}^{4,1} \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{8,2}^{4,1} \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{8,2}^{4,1,1} \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{8,3}^{4,1} \text{ (diagrama)} + \tilde{g}_{8,4}^4 \text{ (diagrama)},
\end{aligned} \tag{4.2}$$

da los mismos resultados que la truncación completa exactamente en el mismo sentido que el punto fijo con una dirección relevante. De esta forma se toma la truncación reducida (4.2) para obtener con los reguladores exponencial y tipo Litim los valores de los acoplamientos en el punto fijo reportados en la Tabla A.2.1 y sus correspondientes exponentes críticos con ambos reguladores en las tablas A.2.2 y A.2.3.

Exp.	η	$g_{4,1}^{2,1}$	$g_{4,2}^2$	$g_{6,1}^{3,1}$	$g_{6,2}^{3,1}$	$g_{6,3}^3$	$g_{8,1}^{4,1}$	$g_{8,2}^{4,1}$	$g_{8,2}^{4,1,1}$	$g_{8,3}^{4,1}$	$g_{8,4}^4$
s-p	-0.74	-0.57	-0.5								
pert	0	-3.24	1.7								
s-p	-0.81	-0.24	-0.94	-0.01	-0.03						
pert	0	-1.45	-0.48	-1.35	-0.61						
comp	-0.74	-0.34	-0.38	-0.04	-0.03	-0.12					
s-p	-0.59	-0.53	-0.31	-0.12	-0.06	-0.1					
pert	0	-1.52	0.32	-1.71	0.44	0.11					
comp	-0.58	-0.37	-0.24	-0.1	-0.11	-0.09	-0.03	-0.06	-0.01	-0.07	-0.04
s-p	-0.44	-0.5	-0.14	-0.23	-0.12	-0.05	-0.12	-0.1	-0.02	-0.05	-0.01
pert	0	-1.19	1.35	-3.32	-5.6	-0.65	-9.41	23.22	4.82	-27.33	8.37
Litim											
comp	-0.67	-1.33	-1.05								
s-p	-0.61	-1.62	-0.8								
pert	0	-4.62	1.73								
comp	-0.76	-0.53	-2.11	-0.39	-0.14						
s-p	-0.69	-0.64	-2.14	-0.23	-0.64						
pert	0	-2.01	-1.64	-4.43	-4.84						
comp	-0.49	-1.1	-0.68	-1.15	-0.59	-0.89					
s-p	-0.45	-1.17	-0.64	-1.34	-0.63	-0.85					
pert	0	-2.14	0.06	-6.18	0.18	0.08					
comp	-0.33	-0.97	-0.26	-1.88	-0.92	-0.31	-3.87	-2.79	-0.56	-1.41	-0.27
s-p	-0.3	-1	-0.22	-2.06	-0.84	-0.26	-4.47	-2.69	-0.54	-1.16	-0.19
pert	0	-1.51	0.67	-7.36	5.84	-0.21	-34	39.17	8.42	-20.8	2.7

Tabla A.2.1 Punto fijo con dos direcciones relevantes para regulador exponencial y tipo Litim.

Nótese que en el esquema perturbativo, excepto por la segunda truncación, desaparece la segunda dirección relevante. Esto está completamente relacionado a la aparición de una segunda dirección relevante en el punto fijo que debería tener uno y se discutirá en las conclusiones. Como una observación, en el esquema completo no hay punto fijo con dos direcciones relevantes usando el regulador exponencial para las primeras dos truncaciones.

Exp.	θ
s-p	2.67 0.12
pert	2 -1.06
s-p	3.11 0.21 -1.15 $\pm i0.39$
pert	2.05 0.15 -3.14 $\pm i0.44$
comp	3.71 0.26 -1.4 $\pm i0.27$ -2.66
s-p	2.61 0.29 -1.7 $\pm i0.32$ -3
pert	1.97 -0.24 -3.21 $\pm i0.3$ -4.23
comp	3.22 0.19 -1.47 $\pm i0.21$ -2.62 -3.28 $\pm i0.08$ -3.99 -4.55 -5.56
s-p	2.46 0.11 -1.79 $\pm i0.12$ -2.94 -3.69 $\pm i0.04$ -4.55 -5.06 -5.95
pert	1.53 -0.11 -2.89 $\pm i1.16$ -3.63 -5.35 -6.49 $\pm i1.44$ -8.62 $\pm i3.2$
	θ'
s-p	0.52 0.47
s-p	0.95 0.37 -1.16 $\pm i0.4$
comp	0.85 0.5 -1.43 $\pm i0.29$ -2.71
s-p	1.01 0.47 -1.73 $\pm i0.33$ -3.02
comp	1.18 0.34 -1.53 $\pm i0.23$ -2.71 -3.28 $\pm i0.09$ -3.98 -4.54 -5.54
s-p	1.33 0.18 -1.85 $\pm i0.11$ -2.97 -3.68 $\pm i0.07$ -4.54 -5.06 -5.95

Tabla A.2.2 Exponentes críticos para regulador exponencial, dos direcciones relevantes.

Litim	θ
comp	2.64 0.14
s-p	2.32 0.14
pert	2 -0.69
comp	3.1 0.25 -1.22 $\pm i$ 0.44
s-p	2.79 0.3 -1.34 $\pm i$ 0.5
pert	2.11 0.34 -2.99 $\pm i$ 0.64
comp	2.47 0.33 -1.87 $\pm i$ 0.36 -3.24
s-p	2.33 0.33 -1.94 $\pm i$ 0.35 -3.32
pert	2 -0.03 -2.78 -3.37 -4.31
comp	2.26 0.11 -2.02 $\pm i$ 0.08 -3.24 -3.92 -4.16 -4.95 -5.47 -6.41
s-p	2.19 0.09 -2.08 $\pm i$ 0.01 -3.28 -3.95 -4.25 -5.04 -5.56 -6.46
pert	1.85 -0.17 -2.94 $\pm i$ 0.66 -4.01 -4.93 -5.88 $\pm i$ 0.18 -7.34 $\pm i$ 1.29
	θ'
comp	0.65 0.47
s-p	0.79 0.35
comp	1.03 0.43 -1.23 $\pm i$ 0.46
s-p	1.1 0.48 -1.36 $\pm i$ 0.51
comp	1.18 0.51 -1.9 $\pm i$ 0.36 -3.27
s-p	1.24 0.48 -1.98 $\pm i$ 0.35 -3.34
comp	1.52 0.17 -2 -2.15 -3.27 -3.93 -4.13 -4.94 -5.47 -6.41
s-p	1.55 0.14 -2.03 -2.24 -3.31 -3.96 -4.23 -5.03 -5.56 -6.46

Tabla A.2.3 Exponentes críticos para regulador tipo Litim, dos direcciones relevantes.

4.1.2. Escalamiento B

En este esquema de escalamiento las funciones beta toman la forma

$$\eta = 2S_1(g_{4,1}^{2,1} + g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3} + g_{4,2}^2),$$

$$\beta_{4,1}^{2,1} = (2\eta + 2)g_{4,1}^{2,1} - S_1(3g_{6,1}^{3,1} + g_{6,1}^{2,2} + g_{6,1}^{2,3} + 3g_{6,1}^0 + g_{6,2}^{3,1}) + 4S_{2,1}(g_{4,1}^{2,1})^2,$$

$$\begin{aligned} \beta_{4,2}^2 &= (2\eta + 3)g_{4,2}^2 - S_1(g_{6,1}^{2,1} + g_{6,1}^{2,2} + g_{6,1}^{2,3}) - 2S_1(g_{6,2}^{3,1} + g_{6,2}^{3,2} + g_{6,2}^{3,3}) - 3S_1g_{6,3}^3 \\ &\quad + 4S_{2,0}((g_{4,2}^2)^2 + 2g_{4,2}^2(g_{4,1}^{2,1} + g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3}) + 2g_{4,1}^{2,1}g_{4,1}^{2,2} + 2g_{4,1}^{2,1}g_{4,1}^{2,3} + 2g_{4,1}^{2,2}g_{4,1}^{2,3}), \end{aligned}$$

$$\beta_{6,1}^{3,1} = (3\eta + 4)g_{6,1}^{3,1} - S_1(4g_{8,1}^{4,1} + 2g_{8,1}^{1,1} + g_{8,2}^{4,1} + g_{8,1}^{3,2,1} + g_{8,1}^{3,3,2}) + 12S_{2,1}g_{4,1}^{2,1}g_{6,1}^{3,1} - 8S_{3,1}(g_{4,1}^{2,1})^3,$$

$$\begin{aligned} \beta_{6,1}^{2,1} &= (3\eta + 4)g_{6,1}^{2,1} - S_1(3g_{8,1}^{1,2} + 3g_{8,1}^{1,3} + 4g_{8,1}^{0,2} + 4g_{8,1}^{0,3} + g_{8,2}^{3,1} + g_{8,1}^3 + 2g_{8,1}^{3,1,1} + 2g_{8,1}^{3,1,2}) \\ &\quad - S_1(2g_{8,1}^{2,2,2} + 2g_{8,1}^{2,3,1} + g_{8,1}^{2,2,3} + g_{8,1}^{2,3,3}) + 4S_{2,1}(g_{6,1}^{2,1} + 3g_{6,1}^0)(g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{6,2}^{3,1} &= (3\eta + 5)g_{6,2}^{3,1} - S_1(g_{8,1}^{1,1} + 3g_{8,2}^{4,1} + g_{8,2}^{3,2} + g_{8,2}^{3,3} + 2g_{8,3}^{4,1} + 3g_{8,2}^1 + g_{8,1}^{3,2,1} + g_{8,1}^{3,3,2}) \\
&\quad - S_1(4g_{8,2}^{4,1,1} + 2g_{8,2}^{4,2,2} + 2g_{8,2}^{4,2,3} + 2g_{8,1}^{2,2,1} + 2g_{8,1}^{2,3,2} + g_{8,1}^{2,2,3} + g_{8,1}^{2,3,3}) + 12S_{2,0}g_{6,1}^{3,1}(g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3} + g_{4,2}^2) \\
&\quad + 12S_{2,0}g_{6,1}^0(g_{4,1}^{2,1} + g_{4,2}^2) + 4S_{2,0}(g_{6,1}^{2,2}g_{4,1}^{2,2} + g_{6,1}^{2,3}g_{4,1}^{2,3}) + 4(S_{2,0} + S_{2,1})g_{4,1}^{2,1}(g_{6,1}^{2,2} + g_{6,1}^{2,3}) \\
&\quad + 4S_{2,0}g_{4,2}^2(g_{6,1}^{2,2} + g_{6,1}^{2,3}) + 4(S_{2,0} + 2S_{2,1})g_{6,2}^{3,1}g_{4,1}^{2,1} + 4S_{2,0}g_{6,2}^{3,1}(g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3} + g_{4,2}^2) \\
&\quad - 8(2S_{3,5} + S_{3,9})(g_{4,2}^{2,1})^2(g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{6,3}^3 &= (3\eta + 6)g_{6,3}^3 - S_1(g_{8,2}^{3,1} + g_{8,2}^{3,2} + g_{8,2}^{3,3} + 2g_{8,3}^{4,1} + 2g_{8,3}^{4,2} + 2g_{8,3}^{4,3} + g_{8,1}^3 + 4g_{8,4}^4) \\
&\quad + 4S_{2,0}(g_{4,1}^{2,1}(2g_{6,2}^{3,2} + 2g_{6,2}^{3,3} + g_{6,1}^{2,1}) + g_{4,1}^{2,2}(2g_{6,2}^{3,1} + 2g_{6,2}^{3,3} + g_{6,1}^{2,2}) + g_{4,1}^{2,3}(2g_{6,2}^{3,1} + 2g_{6,2}^{3,2} + g_{6,1}^{2,3})) \\
&\quad + 4S_{2,0}g_{4,2}^2(g_{6,1}^{2,1} + g_{6,1}^{2,2} + g_{6,1}^{2,3} + 2g_{6,2}^{3,1} + 2g_{6,2}^{3,2} + 2g_{6,2}^{3,3}) + 12S_{2,0}g_{6,3}^3(g_{4,1}^{2,1} + g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3} + g_{4,2}^2) \\
&\quad - 8S_{3,2}(g_{4,2}^2)^3 - 48S_{3,2}(g_{4,1}^{2,1}g_{4,1}^{2,2}g_{4,1}^{2,3} + g_{4,2}^2(g_{4,1}^{2,1}g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,1}g_{4,1}^{2,3} + g_{4,1}^{2,2}g_{4,1}^{2,3})) \\
&\quad - 24S_{3,2}(g_{4,2}^2)^2(g_{4,1}^{2,1} + g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3}),
\end{aligned}$$

$$\beta_{6,1}^0 = (3\eta + 3)g_{6,1}^0 - S_1g_{8,2}^1,$$

$$\beta_{8,1}^{4,1} = (4\eta + 6)g_{8,1}^{4,1} + 9S_{2,1}(g_{6,1}^{3,1})^2 + 16S_{2,1}g_{4,1}^{2,1}g_{8,1}^{4,1} - 36S_{3,1}(g_{4,1}^{2,1})^2g_{6,1}^{3,1} + 16S_{4,1}(g_{4,1}^{2,1})^4,$$

$$\beta_{8,1}^{1,1} = (4\eta + 5)g_{8,1}^{1,1} + 4S_{2,1}g_{8,1}^{1,1}g_{4,1}^{2,1},$$

$$\beta_{8,1}^{0,1} = (4\eta + 5)g_{8,1}^{0,1} + 9S_{2,2}(g_{6,1}^0)^2,$$

$$\beta_{8,1}^{0,4} = (4\eta + 6)g_{8,1}^{0,4},$$

$$\begin{aligned}
\beta_{8,2}^{4,1} &= (4\eta + 7)g_{8,2}^{4,1} + 6S_{2,1}g_{6,1}^{3,1}(g_{6,1}^{2,2} + g_{6,1}^{2,3}) + 12S_{2,1}g_{6,1}^{3,1}g_{6,2}^{3,1} + 16S_{2,0}g_{8,1}^{4,1}(g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3} + g_{4,2}^2) \\
&\quad + 8S_{2,0}g_{8,1}^{1,1}(g_{4,1}^{2,1} + g_{4,2}^2) + 4(S_{2,0} + 3S_{2,1})g_{8,2}^{4,1}g_{4,1}^{2,1} + 4S_{2,0}g_{8,2}^{4,1}(g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3} + g_{4,2}^2) \\
&\quad + 4S_{2,0}(g_{8,1}^{3,2,1}(g_{4,1}^{2,2} + g_{4,2}^2) + g_{8,1}^{3,3,2}(g_{4,1}^{2,3} + g_{4,2}^2)) + 4(S_{2,0} + S_{2,1})g_{4,1}^{2,1}(g_{8,1}^{3,2,1} + g_{8,1}^{3,3,2}) \\
&\quad - 24S_{3,1}(g_{4,1}^{2,1})^2(g_{6,2}^{3,1} + g_{6,1}^{2,2} + g_{6,1}^{2,3}) - 24(2S_{3,5} + S_{3,9})g_{4,1}^{2,1}g_{6,1}^{3,1}(g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3} + g_{4,2}^2) \\
&\quad + 32(S_{4,9} + S_{4,10})(g_{4,1}^{2,1})^3(g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3} + g_{4,2}^2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{8,2}^{3,1} &= (4\eta + 7)g_{8,2}^{3,1} + 2S_{2,1}g_{6,1}^{2,1}(4g_{6,1}^{2,1} + g_{6,1}^{2,2} + g_{6,1}^{2,3} + 2g_{6,2}^{3,2} + 2g_{6,2}^{3,3}) + 12S_{2,1}g_{6,1}^0(g_{6,1}^{2,1} + g_{6,2}^{3,2} + g_{6,2}^{3,3}) \\
&\quad + 4(3S_{2,0} + S_{2,1})(g_{8,1}^{1,2}g_{4,1}^{2,3} + g_{8,1}^{1,3}g_{4,1}^{2,2}) + 12S_{2,0}g_{4,2}^2(g_{8,1}^{1,2} + g_{8,1}^{1,3}) + 16S_{2,0}(g_{8,1}^{0,2}g_{4,1}^{2,3} + g_{8,1}^{0,3}g_{4,1}^{2,3}) \\
&\quad + 16S_{2,0}g_{4,2}^2(g_{8,1}^{0,2} + g_{8,1}^{0,3}) + 4S_{2,0}g_{8,2}^{3,1}(g_{4,1}^{2,1} + g_{4,2}^2) + 4(S_{2,0} + S_{2,1})g_{8,2}^{3,1}(g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3}) \\
&\quad + 12S_{2,1}g_{8,2}^1(g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3}) + 4S_{2,0}g_{8,1}^3(g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3} + g_{4,2}^2) + 8S_{2,0}g_{8,1}^{3,1,1}(g_{4,1}^{2,1} + g_{4,1}^{2,2} + g_{4,2}^2) \\
&\quad + 8S_{2,0}g_{8,1}^{3,1,2}(g_{4,1}^{2,1} + g_{4,1}^{2,3} + g_{4,2}^2) + 4(S_{2,0} + S_{2,1})((2g_{8,1}^{2,2,2} + g_{8,1}^{2,2,3})g_{4,1}^{2,2} + (2g_{8,1}^{2,3,1} + g_{8,1}^{2,3,3})g_{4,1}^{2,3}) \\
&\quad + 4S_{2,0}(g_{4,1}^{2,1} + g_{4,2}^2)(2g_{8,1}^{2,2,2} + 2g_{8,1}^{2,3,1} + g_{8,1}^{2,2,3} + g_{8,1}^{2,3,3}) \\
&\quad - 8(2S_{3,5} + S_{3,9})(g_{6,1}^{2,1}((g_{4,1}^{2,1} + g_{4,2}^2)(g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3}) + 2g_{4,1}^{2,2}g_{4,1}^{2,3}) + 3g_{6,1}^0(g_{4,2}^2(g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3}) + 2g_{4,1}^{2,2}g_{4,1}^{2,3})),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{8,2}^1 &= (4\eta + 6)g_{8,2}^1 + 4S_{2,0}(g_{8,1}^{1,1}(g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3} + g_{4,2}^2) + g_{8,1}^{1,2}(g_{4,1}^{2,1} + g_{4,1}^{2,3} + g_{4,2}^2) + g_{8,1}^{1,3}(g_{4,1}^{2,1} + g_{4,1}^{2,2} + g_{4,2}^2)) \\
&\quad + 4S_{2,0}g_{8,2}^1(g_{4,1}^{2,1} + g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3} + g_{4,2}^2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_{8,1}^3 &= (4\eta + 6)g_{8,1}^3 + 4S_{2,1}(g_{8,1}^{1,1}(g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3}) + g_{8,1}^{1,2}(g_{4,1}^{2,1} + g_{4,1}^{2,3}) + g_{8,1}^{1,3}(g_{4,1}^{2,1} + g_{4,1}^{2,2})) \\ &\quad + 4S_{2,1}g_{8,1}^3(g_{4,1}^{2,1} + g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_{8,4}^4 &= (4\eta + 9)g_{8,4}^4 + 4S_{2,0}(g_{6,1}^{2,1}g_{6,2}^{3,1} + g_{6,1}^{2,2}g_{6,2}^{3,2} + g_{6,1}^{2,3}g_{6,2}^{3,3}) + 8S_{2,0}(g_{6,2}^{3,1}g_{6,2}^{3,2} + g_{6,2}^{3,1}g_{6,2}^{3,3} + g_{6,2}^{3,2}g_{6,2}^{3,3}) \\ &\quad + 12S_{2,0}g_{6,3}^3(g_{6,2}^{3,1} + g_{6,2}^{3,2} + g_{6,2}^{3,3}) + 9S_{2,0}g_{6,3}^3(g_{6,3}^3 + g_{6,1}^{2,1} + g_{6,1}^{2,2} + g_{6,1}^{2,3}) \\ &\quad + 4S_{2,0}(g_{8,2}^{3,1}g_{4,1}^{2,1} + g_{8,2}^{3,2}g_{4,1}^{2,2} + g_{8,2}^{3,3}g_{4,1}^{2,3}) + 4S_{2,0}g_{4,2}^2(g_{8,2}^{3,1} + g_{8,2}^{3,2} + g_{8,2}^{3,3}) + 4S_{2,0}g_{4,2}^2g_{8,1}^3 \\ &\quad + 16S_{2,0}g_{8,4}^4(g_{4,1}^{2,1} + g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3} + g_{4,2}^2) + 8S_{2,0}g_{8,3}^4(g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3} + g_{4,2}^2) + 8S_{2,0}g_{8,3}^4(g_{4,1}^{2,1} + g_{4,1}^{2,3} + g_{4,2}^2) \\ &\quad + 8S_{2,0}g_{8,3}^4(g_{4,1}^{2,1} + g_{4,1}^{2,2} + g_{4,2}^2) - 48S_{3,2}(g_{4,1}^{2,1}g_{4,1}^{2,2}g_{6,2}^{3,3} + g_{4,1}^{2,2}g_{4,1}^{2,3}g_{6,2}^{3,1} + g_{4,1}^{2,1}g_{4,1}^{2,3}g_{6,2}^{3,2}) \\ &\quad - 24S_{3,2}g_{4,2}^2(2g_{4,1}^{2,1}(g_{6,2}^{3,2} + g_{6,2}^{3,3}) + 2g_{4,1}^{2,2}(g_{6,2}^{3,1} + g_{6,2}^{3,3}) + 2g_{4,1}^{2,3}(g_{6,2}^{3,1} + g_{6,2}^{3,2}) + g_{4,2}^2(g_{6,2}^{3,1} + g_{6,2}^{3,2} + g_{6,2}^{3,3})) \\ &\quad - 12S_{3,2}g_{4,2}^2(2g_{4,1}^{2,1}g_{6,1}^{2,1} + 2g_{4,1}^{2,2}g_{6,1}^{2,2} + 2g_{4,1}^{2,3}g_{6,1}^{2,3} + g_{4,2}^2(g_{6,1}^{2,1} + g_{6,1}^{2,2} + g_{6,1}^{2,3})) \\ &\quad - 36S_{3,2}g_{6,3}^3(2g_{4,1}^{2,1}g_{4,1}^{2,2} + 2g_{4,1}^{2,1}g_{4,1}^{2,3} + 2g_{4,1}^{2,2}g_{4,1}^{2,3} + 2g_{4,2}^2(g_{4,1}^{2,1} + g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3}) + (g_{4,2}^2)^2) \\ &\quad + 16S_{4,11}(g_{4,2}^2)^2(12(g_{4,1}^{2,1}g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,1}g_{4,1}^{2,3} + g_{4,1}^{2,2}g_{4,1}^{2,3}) + 4g_{4,2}^2(g_{4,1}^{2,1} + g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3}) + (g_{4,2}^2)^2) \\ &\quad + 384S_{4,11}g_{4,1}^{2,1}g_{4,1}^{2,2}g_{4,1}^{2,3}g_{4,2}^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_{8,3}^{4,1} &= (4\eta + 8)g_{8,3}^{4,1} + 6S_{2,0}g_{6,1}^{3,1}(g_{6,1}^{2,1} + 2g_{6,2}^{3,2} + 2g_{6,2}^{3,3} + 3g_{6,3}^3) + 2S_{2,0}(g_{6,1}^{2,1}g_{6,2}^{3,1} + 2g_{6,1}^{2,2}g_{6,2}^{3,2} + 2g_{6,1}^{2,3}g_{6,2}^{3,3}) \\ &\quad + 2(3S_{2,0} + 2S_{2,1})g_{6,2}^{3,1}(g_{6,1}^{2,2} + g_{6,1}^{2,3}) + 2(2S_{2,0} + S_{2,1})g_{6,1}^{2,2}g_{6,1}^{2,3} + 6S_{2,0}g_{6,3}^3(g_{6,1}^{2,2} + g_{6,1}^{2,3}) \\ &\quad + 4(S_{2,0} + S_{2,1})(g_{6,2}^{3,1})^2 + 4S_{2,0}g_{6,2}^{3,1}(g_{6,2}^{3,2} + g_{6,2}^{3,3}) + 6S_{2,0}(2g_{6,2}^{3,1}g_{6,3}^3 + 2g_{6,2}^{3,1}g_{6,1}^0 + 3g_{6,3}^3g_{6,1}^0) \\ &\quad + 4S_{2,0}g_{8,1}^{1,1}g_{4,2}^2 + 8(S_{2,0} + S_{2,1})g_{8,3}^4g_{4,1}^{2,1} + 4S_{2,0}(2g_{8,3}^4 + 3g_{8,2}^4)(g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3} + g_{4,2}^2) \\ &\quad + 4S_{2,0}(g_{8,2}^{3,2}(g_{4,1}^{2,2} + g_{4,2}^2) + g_{8,2}^{3,3}(g_{4,1}^{2,3} + g_{4,2}^2)) + 4(S_{2,0} + S_{2,1})g_{4,1}^{2,1}(g_{8,2}^{3,2} + g_{8,2}^{3,3}) + 4S_{2,1}g_{8,1}^3g_{4,1}^{2,1} \\ &\quad + 12S_{2,0}g_{8,2}^4(g_{4,1}^{2,1} + g_{4,2}^2) + 4S_{2,0}(g_{8,1}^{3,2,1}(g_{4,1}^{2,2} + g_{4,2}^2) + g_{8,1}^{3,3,2}(g_{4,1}^{2,3} + g_{4,2}^2)) \\ &\quad + 4S_{2,0}(g_{4,1}^{2,1} + g_{4,2}^2)(2g_{8,1}^{2,2,1} + 2g_{8,1}^{2,3,2} + g_{8,1}^{2,2,3} + g_{8,1}^{2,3,3}) + 16S_{2,0}g_{8,2}^4(g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3} + g_{4,2}^2) \\ &\quad + 8S_{2,0}g_{8,2}^4(g_{4,1}^{2,1} + g_{4,1}^{2,2} + g_{4,2}^2) + 8S_{2,0}g_{8,2}^4(g_{4,1}^{2,1} + g_{4,1}^{2,3} + g_{4,2}^2) \\ &\quad - 36S_{3,2}g_{6,1}^3(2g_{4,1}^{2,2}g_{4,1}^{2,3} + 2(g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3})g_{4,2}^2 + (g_{4,2}^2)^2) - 8(2S_{3,5} + S_{3,9})(g_{6,2}^{3,2} + g_{6,2}^{3,3})(g_{4,1}^{2,1})^2 \\ &\quad - 8(3S_{3,2} + 4S_{3,5} + 2S_{3,9})g_{6,2}g_{4,1}^{3,1}(g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3}) - 8(3S_{3,2} + 4S_{3,5} + 2S_{3,9})g_{6,2}^3g_{4,1}^{2,1}g_{4,2}^2 \\ &\quad - 24S_{3,2}g_{6,2}^3g_{4,1}^{2,2}g_{4,1}^{2,3} - 12S_{3,2}g_{6,2}^3g_{4,2}^2(2g_{4,1}^{2,2} + 2g_{4,1}^{2,3} + g_{4,2}^2) - 12(2S_{3,5} + S_{3,9})g_{6,3}^3(g_{4,1}^{2,1})^2 \\ &\quad - 4(2S_{3,5} + S_{3,9})(g_{4,1}^{2,1})^2g_{6,1}^{2,1} - 8(3S_{3,2} + 2S_{3,5} + S_{3,9})g_{4,1}^{2,1}((g_{4,1}^{2,2} + g_{4,2}^2)g_{6,1}^{2,2} + (g_{4,1}^{2,3} + g_{4,2}^2)g_{6,1}^{2,3}) \\ &\quad - 12S_{3,2}g_{4,2}^2(2g_{4,1}^{2,2}g_{6,1}^{2,2} + 2g_{4,1}^{2,3}g_{6,1}^{2,3} + g_{4,2}^2(g_{6,1}^{2,2} + g_{6,1}^{2,3})) - 36S_{3,2}g_{6,1}^0g_{4,2}^2(2g_{4,1}^{2,1} + g_{4,2}^2) \\ &\quad + 16(2S_{4,12} + 3S_{4,13} + S_{4,14})(g_{4,1}^{2,1})^2(g_{4,2}^2(2g_{4,1}^{2,2} + 2g_{4,1}^{2,3} + g_{4,2}^2) + 2g_{4,1}^{2,2}g_{4,1}^{2,3}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_{8,1}^{3,1,1} &= (4\eta + 6)g_{8,1}^{3,1,1} + 6S_{2,1}g_{6,1}^{3,3}(g_{6,1}^{2,1} + 3g_{6,1}^0) + 8S_{2,1}g_{8,1}^{1,3}(g_{2,1}^{4,2} + g_{2,1}^{4,3}) + 4S_{2,1}g_{8,1}^{3,1,1}(g_{4,1}^{2,2} + 2g_{4,1}^{2,3}) \\ &\quad - 12S_{3,1}g_{6,1}^{2,1}(g_{4,1}^{2,3})^2 - 36S_{3,1}g_{6,1}^0(g_{4,1}^{2,3})^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_{8,2}^{4,1,1} &= (4\eta + 7)g_{8,2}^{4,1,1} + 6S_{2,0}g_{6,1}^{3,1}(g_{6,1}^{2,2} + g_{6,1}^{2,3}) + S_{2,0}(6g_{6,1}^{3,1} + g_{6,2}^{3,1})g_{6,2}^{3,1} + 16S_{2,1}g_{8,2}^{4,1,1}g_{4,1}^{2,1} \\ &\quad + 2S_{2,0}(g_{6,1}^{2,2}g_{6,1}^{2,3} + g_{6,2}^{3,1}(g_{6,1}^{2,2} + g_{6,1}^{2,3})) + 6S_{2,0}g_{6,1}^0(3g_{6,1}^{3,1} + g_{6,2}^{3,1}) + 4S_{2,1}g_{4,1}^{2,1}(g_{8,1}^{1,1} + 2g_{8,1}^{2,2,1} + 2g_{8,1}^{2,3,2}) \\ &\quad - 4(2S_{3,5} + S_{3,9})(g_{4,1}^{2,1})^2(g_{6,2}^{3,1} + g_{6,1}^{2,2} + g_{6,1}^{2,3} + 3g_{6,1}^0),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{8,2}^{4,2,1} &= (4\eta + 7)g_{8,2}^{4,2,1} + 18S_{2,0}g_{6,1}^{3,2}g_{6,1}^{3,3} + 6S_{2,0}(g_{6,1}^{3,2}(g_{6,2}^{3,3} + g_{6,1}^{2,2}) + g_{6,1}^{3,3}(g_{6,2}^{3,2} + g_{6,1}^{2,3})) + 2S_{2,0}g_{6,2}^{3,2}g_{6,2}^{3,3} \\
&+ 2(2S_{2,0} + S_{2,2})(g_{6,1}^{2,1})^2 + 2S_{2,0}g_{6,1}^{2,1}(g_{6,1}^{2,2} + g_{6,1}^{2,3} + g_{6,2}^{3,2} + g_{6,2}^{3,3}) + 2S_{2,0}(g_{6,1}^{2,2}g_{6,2}^{3,2} + g_{6,1}^{2,3}g_{6,2}^{3,3}) \\
&+ 6S_{2,0}g_{6,1}^0(2g_{6,1}^{2,1} + g_{6,2}^{3,2} + g_{6,2}^{3,3}) + 4S_{2,1}(g_{8,1}^{3,1,1}g_{4,1}^{2,2} + g_{8,1}^{3,1,2}g_{4,1}^{2,3}) + 4S_{2,1}g_{8,1}^{2,1,3}(g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3}) \\
&+ 8S_{2,1}g_{8,2}^{4,2,1}(g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3}) - 4(2S_{3,5} + S_{3,9})((3g_{6,1}^{3,3} + g_{6,2}^{3,3})(g_{4,2}^{2,2})^2 + (3g_{6,1}^{3,2} + g_{6,2}^{3,2})(g_{4,1}^{2,3})^2) \\
&- 4(2S_{3,5} + S_{3,9})(2g_{6,1}^{2,1}g_{4,2}^{2,2}g_{4,2}^{2,3} + g_{6,1}^{2,2}(g_{4,2}^{2,2})^2 + g_{6,1}^{2,3}(g_{4,2}^{2,3})^2) \\
&+ 32(S_{4,15} + S_{4,16} + S_{4,17})(g_{4,1}^{2,2})^2(g_{4,1}^{2,3})^2,
\end{aligned}$$

$$\beta_{8,1}^{2,1,1} = (4\eta + 6)g_{8,1}^{2,1,1} + S_{2,1}(g_{6,1}^{2,3})^2 + 6S_{2,1}g_{6,1}^0g_{6,1}^{2,3} + 4S_{2,1}g_{8,1}^{1,2}g_{4,1}^{2,2} + 16S_{2,1}g_{8,1}^{0,2}g_{4,1}^{2,2} + 8S_{2,1}g_{8,1}^{2,1,1}g_{4,1}^{2,2},$$

$$\begin{aligned}
\beta_{8,1}^{2,1,3} &= (4\eta + 6)g_{8,1}^{2,1,3} + 2S_{2,1}g_{6,1}^{2,2}g_{6,1}^{2,3} + 18S_{2,1}(g_{6,1}^0)^2 + 6S_{2,1}g_{6,1}^0(g_{6,1}^{2,1} + g_{6,1}^{2,2} + g_{6,1}^{2,3}) \\
&+ 8S_{2,1}(g_{8,1}^{1,2}g_{4,1}^{2,3} + g_{8,1}^{1,3}g_{4,1}^{2,2}) + 16S_{2,1}g_{8,1}^{0,1}(g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3}) + 4S_{2,1}g_{8,1}^{2,1,3}(g_{4,1}^{2,2} + g_{4,1}^{2,3}) \\
&- 24(S_{3,6} + 2S_{3,7})g_{6,1}^0g_{4,1}^{2,2}g_{4,1}^{2,3}.
\end{aligned}$$

Podemos comparar este sistema de ecuaciones dado por el escalamiento B con el del escalamiento A. La diferencia principal es que este sistema es mucho más grande, se incluyen muchos más términos que en el escalamiento A donde por su escalamiento dimensional no contribuyen a las funciones beta. La mayoría de los términos que contribuyen al escalamiento A también se encuentran en el B. Los términos que surgen como nuevas contribuciones a las funciones beta de diagramas cíclicos y cíclicos desconectados provienen de diagramas que no tienen un número máximo de sub-melones. A su vez, las nuevas contribuciones a las funciones beta de gráficas que no tienen un número máximo de sub-melones tienen que ver con los cíclicos y cíclicos desconectados.

Con estas funciones beta y en este esquema de escalamiento también se encuentra el punto fijo con una dirección relevante. Aplicando el mismo razonamiento que en la sección anterior, la truncación reducida (4.1) da los mismos valores para puntos fijos y exponentes críticos que la truncación completa. Además estos valores resultan coincidir con los del escalamiento A aunque la estructura de las funciones beta haya cambiado. Por tanto los resultados para este esquema también son los reportados en las Tablas A.1.1 y A.1.2.

También se encuentra el punto fijo con dos direcciones relevantes en el cuál aplica el mismo razonamiento de reducción de truncación, así los resultados para puntos fijos y exponentes críticos son los mismos para ambas truncaciones. Pero en este caso los valores numéricos se modifican ligeramente respecto al escalamiento A y están reportados en las Tablas B.2.1, B.2.2 y B.2.3.

Exp.	η	$g_{4,1}^{2,1}$	$g_{4,2}^2$	$g_{6,1}^{3,1}$	$g_{6,2}^{3,1}$	$g_{6,3}^3$	$g_{8,1}^{4,1}$	$g_{8,2}^{4,1}$	$g_{8,2}^{4,1,1}$	$g_{8,3}^{4,1}$	$g_{8,4}^4$
s-p	-0.74	-0.57	-0.5								
pert	0	-3.24	1.7								
s-p	-0.81	-0.24	-0.94	-0.01	-0.03						
pert	0	-1.45	-0.48	-1.35	-0.61						
comp	-0.74	-0.33	-0.39	-0.04	-0.03	-0.12					
s-p	-0.59	-0.51	-0.34	-0.12	-0.06	-0.11					
pert	0	-1.49	-0.11	-1.51	-0.14	-0.02					
comp	-0.57	-0.38	-0.23	-0.1	-0.11	-0.09	-0.04	-0.06	-0.01	-0.07	-0.04
s-p	-0.45	-0.48	-0.17	-0.21	-0.14	-0.06	-0.11	-0.1	-0.02	-0.07	-0.02
pert	0	-1	0.14	-1.49	0.46	-0.06	-2.13	0.91	0.22	-0.25	0.02
Litim											
comp	-0.67	-1.33	-1.05								
s-p	-0.61	-1.62	-0.8								
pert	0	-4.62	1.73								
comp	-0.76	-0.53	-2.11	-0.39	-0.14						
s-p	-0.69	-0.64	-2.14	-0.23	-0.64						
pert	0	-2.01	-1.64	-4.43	-4.84						
comp	-0.5	-1.07	-0.75	-1.06	-0.61	-0.94					
s-p	-0.47	-1.14	-0.73	-1.24	-0.68	-0.91					
pert	0	-2.11	-0.41	-5.68	-1.29	-0.4					
comp	-0.34	-0.94	-0.32	-1.72	-1.11	-0.39	-3.37	-3.17	-0.63	-2.01	-0.46
s-p	-0.32	-0.97	-0.31	-1.86	-1.1	-0.35	-3.79	-3.28	-0.66	-1.91	-0.4
pert	0	-1.4	0.03	-5.3	0.27	0.01	-19.2	1.38	0.32	-0.06	0.001

Tabla B.2.1 Punto fijo con dos direcciones relevantes para regulador exponencial y tipo Litim.

Nótese que en este escalamiento tampoco se encuentra en las primeras dos truncaciones el punto fijo con dos direcciones relevantes en el esquema completo para el regulador exponencial. Además aquí sí se muestra con ambos reguladores el comportamiento en el que la segunda dirección relevante se vuelve irrelevante en el esquema perturbativo.

Exp.	θ
s-p	2.67 0.12
pert	2 -1.06
s-p	3.11 0.21 -1.15 $\pm i0.39$
pert	2.05 0.15 -3.14 $\pm i0.44$
comp	3.73 0.28 -1.43 $\pm i0.25$ -2.6
s-p	2.65 0.36 -1.73 $\pm i0.34$ -2.86
pert	2.01 0.15 -2.93 -3.38 -3.43
comp	3.2 0.24 -1.54 $\pm i0.2$ -2.52 -3.31 $\pm i0.11$ -4.01 -4.66 -5.56
s-p	2.5 0.21 -1.82 $\pm i0.19$ -2.75 -3.67 $\pm i0.12$ -4.51 -5.05 -5.91
pert	1.95 -0.17 -3.04 $\pm i0.54$ -3.22 -4.52 -6.8 $\pm i0.52$ -5.53 -6.44
	θ'
s-p	0.52 0.47
s-p	0.95 0.37 -1.16 $\pm i0.4$
comp	0.87 0.51 -2.66 $\pm i0.29$ -2.66
s-p	1.01 0.55 -1.75 $\pm i0.37$ -2.89
comp	1.19 0.38 -1.6 $\pm i0.25$ -2.61 -3.3 $\pm i0.13$ -4 -4.65 -5.55
s-p	1.34 0.29 -1.88 $\pm i0.22$ -2.8 -3.67 $\pm i0.13$ -4.5 -5.05 -5.91

Tabla B.2.2 Exponentes críticos para regulador exponencial, dos direcciones relevantes.

Litim	θ											
comp	2.64	0.14										
s-p	2.32	0.14										
pert	2	-0.69										
comp	3.1	0.25	-1.22	$\pm i$	0.44							
s-p	2.78	0.3	-1.34	$\pm i$	0.5							
pert	2.11	0.34	-2.99	$\pm i$	0.64							
comp	2.52	0.42	-1.9	$\pm i$	0.39	-3.08						
s-p	2.37	0.43	-1.97	$\pm i$	0.4	-3.14						
pert	2.03	0.34	-3.06	$\pm i$	0.21	-3.81						
comp	2.31	0.22	-2.05	$\pm i$	0.21	-3.03	-4.02	$\pm i$	0.04	-4.9	-5.46	-6.37
s-p	2.24	0.22	-2.1	$\pm i$	0.2	-3.06	-4.02	-4.14	-4.98	-5.52	-6.42	
pert	1.99	-0.03	-3.08	$\pm i$	0.06	-3.21	-4.6	-5.48	-6.38	-6.93	$\pm i$	0.14
	θ'											
comp	0.65	0.47										
s-p	0.79	0.35										
comp	1.03	0.43	-1.23	$\pm i$	0.46							
s-p	1.1	0.48	-1.36	$\pm i$	0.51							
comp	1.18	0.61	-1.92	$\pm i$	0.42	-3.12						
s-p	1.23	0.6	-2	$\pm i$	0.42	-3.12						
comp	1.53	0.29	-2.1	$\pm i$	0.21	-3.08	-4.01	$\pm i$	0.09	-4.89	-5.45	-6.36
s-p	1.55	0.27	-2.15	$\pm i$	0.2	-3.11	-4.07	$\pm i$	0.05	-4.97	-5.52	-6.42

Tabla B.2.3 Exponentes críticos para regulador tipo Litim, dos direcciones relevantes.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo se presentó el desarrollo conceptual del Grupo de Renormalización funcional desde una visión histórica con el objetivo de entender la perspectiva wilsoniana y su implementación en la ecuación de Wetterich. Este desarrollo conceptual es motivado posteriormente por el escenario de Seguridad Asintótica que utiliza herramientas del Grupo de Renormalización. Así se dio un panorama general de la Gravedad Cuántica llegando a definir los Modelos Matriciales y Tensoriales Coloreados como Teorías Cuánticas de Campo de geometrías aleatorias; haciendo un especial énfasis en usar la ecuación de Wetterich para encontrar funciones beta, puntos fijos y exponentes críticos pues es evidencia de Seguridad Asintótica en dichos modelos. Después se dio la implementación de la ecuación de Wetterich a los Modelos Tensoriales Coloreados, dando algunas consideraciones generales para entender la notación usada y definir algunos conceptos necesarios. Se hizo un ejemplo de una truncación hasta orden 4 con el objetivo de evidenciar la necesidad del uso de software en truncaciones más grandes y por último se describió cómo se implementaron las sumas espectrales en Mathematica. Al final se presentaron los resultados para una truncación a orden 8 como las funciones beta en dos sistemas de ecuaciones y los puntos fijos y exponentes críticos en tablas usando diferentes esquemas para cuantificar la dependencia del esquema.

El uso del regulador exponencial permitió usar satisfactoriamente una truncación hasta orden 8, con todas las gráficas que la combinatoria permitía. Este regulador simplifica la estructura de las sumas espectrales al evitar restricciones en los índices y permitir sumar todos hasta N , lo cuál difiere del regulador tipo Litim donde la función escalón ϑ inducía estructuras complicadas que a ordenes mayores eran imposibles de hacer en Mathematica. El regulador exponencial aún no es un regulador ideal ya que, aunque evitamos estas estructuras en los índices, los términos que debemos sumar toman la forma de cocientes de exponenciales que no tienen una expresión analítica como resultado, por lo que se tuvo que recurrir a series de Taylor para así expresar las sumas como polinomios sobre los índices.

Se encontró una expresión general para las funciones beta hasta orden 8, en términos de una familia de reguladores arbitrarios. Toda la dependencia de este regulador se recoge en las sumas espectrales $S_{i,j}$ cuya estructura y valores numéricos son reportados en el Apéndice A. Esta familia de reguladores R_{ijklmn} consiste en aquellos son de la forma

$$R_{ijklmn} = \tau \left(\frac{i+j+k}{N} \right) \delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn},$$

con τ una función arbitraria cuyos índices juegan el mismo papel simétrico. Debe notarse que por consecuencia, en cada suma $S_{i,j}$ pueden hacerse permutaciones en los índices que dan el mismo resultado por esta simetría. Además se encontró que la truncación completa para Γ_N puede reducirse sin alterar los valores de los puntos fijos y exponentes críticos estudiados. Esto llevó a obtener resultados para ambos reguladores usados, exponencial y tipo Litim hasta orden 8.

Se encontraron tres puntos fijos con una dirección relevante, tres con dos direcciones relevantes (estas triadas de puntos fijos corresponden a cada color preferente), el punto fijo Gaussiano donde todos los acoplamientos son cero, además de una gran cantidad de puntos fijos complejos o con valores grandes, los cuales por estas características son descartados como puntos fijos inducidos por la truncación.

El escalamiento de los acoplamientos después de fijar $d_{4,1}^{2,i}$ y $d_{4,2}^2$ con el objetivo de que la dimensión anómala dependa de sus respectivos acoplamientos, se determinan únicamente pero la mayoría cumplen con desigualdades que les da la libertad de tomar distintos valores. El escalamiento A consiste así de la cota inferior de dichos acoplamientos mientras que el escalamiento B dado por la prescripción de la sección anterior, resulta coincidir con la cota superior. La composición de las funciones beta se modifica como resultado de estos escalamientos. Sin embargo como veremos más adelante, los valores de los exponentes críticos relevantes de los puntos fijos estudiados, no se modifican.

5.1. Punto fijo con una dirección relevante

En todos los casos se obtiene un punto fijo con una dirección relevante, el cual está caracterizado por los acoplamientos melónicos cíclicos de un solo color preferido, distintos de cero. Este punto fijo es simétrico bajo los colores ya que en realidad es una triada de puntos fijos en donde cada color juega el mismo papel, aunque en cada uno por si mismo, solo hay un color preferente. Sin importar el orden de la truncación, escalamiento, el regulador exponencial o tipo Litim, el esquema θ_I o θ'_I o el esquema completo y semi-perturbativo. Sin embargo en el esquema perturbativo surge una segunda dirección relevante debido a la inclusión de diagramas desconectados. Esto puede cotejarse cuando ampliamos la truncación de orden 6 incluyendo el término asociado a $g_{6,3}^3$ (melónico triple). Además esto también tiene que ver con el escalamiento ya que en el B, dicha dirección relevante en el esquema perturbativo no surge más que a orden 4 y orden 8. Por otro lado, como este punto fijo se mantiene en estos esquemas entonces podemos asegurar que no es inducido por la truncación.

Respecto a la elección del regulador, es claro que las funciones beta y puntos fijos dependen directamente de este al estar compuestos por las sumas espectrales $S_{i,j}$; sin embargo se espera que los exponentes críticos sean independientes. Podemos notar que en la comparación del exponente crítico relevante, usando los dos esquemas encontramos una diferencia porcentual que se reduce al ampliar la truncación, de un intervalo de 33.33 % a 0.00 % hasta un intervalo de 23.22 % a 0.00 % (Tabla A.1.2). Este resultado es satisfactorio ya que indica que la diferencia porcentual causada por la elección del regulador se reduce conforme se amplía la truncación. Esto es de esperarse de un punto fijo legítimo en el marco de la ecuación de Wetterich ya que al estar definida en un espacio infinito de operadores, la manera usual de trabajar con ella es tomar

truncaciones cada vez más grandes que aseguren la convergencia del comportamiento del punto fijo.

El valor del exponente crítico relevante difiere en los esquemas θ_I, θ'_I , completo, semi-perturbativo y perturbativo a cada orden en la truncación; también podemos notar que esta diferencia porcentual se reduce conforme se amplía la truncación. En el caso del regulador tipo Litim, el valor difiere por 57.92% en orden 4, a orden 6 se reduce a 37.85% y a orden 8 27.49% (Tabla A.1.2). En el caso del regulador exponencial, a orden 4 la diferencia es de 78.69%, a orden 6 de 63.60% y a orden 8 es de 53.08% (Tabla A.1.2). Donde hemos tomado para la diferencia porcentual el valor más alto y más pequeño a cada orden del exponente crítico relevante. Es claro que la diferencia porcentual es mucho mayor en el caso del regulador exponencial.

Respecto al escalamiento de los acoplamientos, los esquemas A y B que corresponden a la cota inferior y superior respectivamente, se encuentra que el valor del exponente crítico relevante coincide numéricamente. Dicho valor numérico se encuentra al rededor o dentro de los rangos 2.11 y 1.53 para el caso del regulador tipo Litim, 2.6 y 1.22 para el regulador exponencial hasta orden 8. Por otro lado, algunos valores numéricos de los exponentes críticos irrelevantes sí se modifican entre estos dos esquemas.

En conclusión el punto fijo con una dirección relevante, al mantenerse en los diferentes esquemas y los dos reguladores, resulta ser un punto fijo legítimo. El comportamiento de este punto fijo es consistente con el punto fijo buscado, al tener una sola dirección relevante dada por los acoplamientos melónicos cíclicos conectados que representan topología esférica y el mayor peso en la expansión $1/N$ de los modelos (límite de doble escalamiento).

De este modo, $\theta_1 \in (1.22, 2.6)$ para el regulador exponencial y $\theta_1 \in (1.53, 2.11)$ para el regulador tipo Litim. Lo cuál no brinda la precisión numérica del resultado analítico $\theta = 1$ de los Modelos Tensoriales Coloreados, pero el comportamiento general es el esperado para el límite de doble escalamiento. Sin embargo, al analizar la truncación reducida (4.1), notamos que la Acción Efectiva Promedio puede interpretarse como un modelo matricial efectivo, de dos dimensiones; ya que las parejas de colores verde y azul siempre van juntas y juegan el papel de un solo índice. Este modelo está protegido por una simetría $U(N) \otimes U(N^2)$.

Además, el hecho de que la truncación completa y la truncación reducida coincidan numéricamente para puntos fijos y exponentes críticos indica que para el estudio de este punto fijo solo es necesario tomar truncaciones que involucren este tipo de gráficas cíclicas, ya que el exponente crítico relevante resulta ser el mismo ante esta truncación menor. El análisis con la truncación completa era necesario para poder concluir que estas son el tipo de gráficas necesarias para la truncación; y como una truncación es una proyección de el Espacio de Teorías completo, esto significa que es suficiente proyectar sobre este tipo de gráficas.

Como trabajo a futuro se plantea el uso suficiente de una truncación con diagramas cíclicos y su ampliación a ordenes más altos para asegurar la convergencia del exponente crítico relevante; esto simplifica mucho las sumas espectrales y funciones beta. Además, deberán probarse otra forma del tensor T_{ijk} para asegurar la fidelidad de los resultados, usando otro tensor simétrico bajo los índices y uno sin la simetría.

5.2. Punto fijo con dos direcciones relevantes

En todos los casos obtenemos un punto fijo con dos direcciones relevantes, excepto en los esquemas completos para orden 4 y orden 6 (sin acoplamiento $g_{6,3}^3$) con el regulador exponencial. Este punto fijo está caracterizado por gráficas conectadas y desconectadas con el número máximo de sub-melones, es decir acoplamientos de la forma $g_{2i,i'}^{i,i'}$. Una vez dicho esto, podemos justificar la ausencia del punto fijo en los ordenes mencionados ya que también hay ausencia de este tipo de gráficas.

Igual que en el punto fijo anterior, encontramos el mismo comportamiento en el que además de la ausencia del acoplamiento melónico triple $g_{6,3}^3$, el escalamiento también está involucrado, ya que en el esquema perturbativo desaparece la segunda dirección relevante, pero esto no siempre pasa en el escalamiento B. También se encuentra que en este punto fijo, los valores de los exponentes críticos relevantes sí difieren respecto al escalamiento pero solo a partir de orden 6 (con la gráfica melónica triple). Con el regulador tipo Litim encontramos una diferencia porcentual máxima de 59.09 % mientras que con el regulador exponencial encontramos 47.62 %. Estos porcentajes están determinados por la segunda dirección relevante, lo cuál es de esperarse ya que el escalamiento está involucrado en que este segundo exponente crítico θ_2 sea positivo o negativo. La diferencia porcentual del primer exponente crítico relevante θ_1 es mucho menor. En el caso del regulador exponencial hasta orden 8, la diferencia máxima porcentual es de 21.54 % y para el regulador tipo Litim 7.03 %. Como más operadores están involucrados en este punto fijo y el escalamiento modifica las funciones beta, es de esperarse este comportamiento. Sin embargo, podemos argumentar que el comportamiento en general de este punto fijo es el mismo para estos dos escalamientos y que la diferencia porcentual aunque grande, es irrelevante debido a que aún no se han determinado valores numéricos exactos y debido al valor pequeño de este segundo exponente crítico.

La interpretación geométrica en consecuencia, resulta ser el de una fase que consiste de pedazos desconectados de fronteras de espacio-tiempo (por el tipo de gráficas). Este punto fijo también es simétrico bajo los colores en el sentido de que en realidad es una triada de puntos fijos, donde cada uno tiene un color preferido (los tres posibles colores preferidos).

Respecto a la elección del regulador encontramos diferencias porcentuales mayores que en el punto fijo anterior. Salvo por los casos en los que no existe el punto fijo con el regulador exponencial, podemos compararlo con el de Litim con las diferencias porcentuales para el primer exponente crítico relevante θ_1 que van de 34.18 % a 0.00 % a orden 4, 13.64 % a 2.84 % para orden 6, 35.63 % a 0.99 % para orden 6 con el melónico triple y 29.81 % a 2.01 % para orden 8. La diferencia porcentual es aún mayor para el segundo exponente crítico θ_2 dando 25.53 % a 14.29 % a orden 4, 55.88 % a 8.11 % a orden 6, 55.88 % a 1.96 % a orden 6 con el melónico triple y 42.11 % a 4.55 %. Comparando con el punto fijo anterior, la diferencia porcentual es mucho mayor y esto es debido a que hay más operadores involucrados. Aún con estas diferencias porcentuales podemos asegurar que el comportamiento general es el mismo y el hecho de que sean mayores para el escalamiento B está justificado con que este es una cota superior y como los tadpoles establecen cotas superiores, tenemos la mayoría de los tadpoles como contribuciones a las funciones beta, a diferencia del escalamiento A; esto induce una mayor cantidad de sumas espectrales en las funciones beta y en sus derivadas que constituyen la matriz hessiana de donde se obtienen los exponentes críticos. De esta forma, estas diferencias porcentuales son consecuencia de dependencia del esquema.

El valor de los exponentes críticos también difiere entre los esquemas θ_I , θ'_I , completo, semi-perturbativo y perturbativo. Según las Tabla A.2.3 (escalamiento A) con el regulador tipo Litim, la diferencia porcentual para θ_1 decrece conforme se amplía la truncación de 75.38 % a 32.74 % y θ_2 de 70.21 % a 47.06 % y por la Tabla B.2.3 (escalamiento B), la diferencia se reduce para θ_1 de 75.38 % a 33.77 % y para θ_2 de 70.21 % a 24.14 %. Para el regulador exponencial no es claro si esta diferencia porcentual se reduce al ampliar la truncación, debido a la ausencia del punto fijo en algunos esquemas.

En conclusión el punto fijo con dos direcciones relevantes es legítimo, ya que aparece en la mayoría de los esquemas sin importar el regulador. Sin embargo, en comparación con el de una dirección relevante, debido a las diferencias porcentuales tan altas de reguladores y esquemas, podemos decir que es estable aunque susceptible ante perturbaciones, tiene mayor dependencia del esquema. Para el regulador tipo Litim hasta orden 8 obtenemos los valores numéricos para los exponentes críticos $\theta_1 \in (1.52, 2.31)$, $\theta_2 \in (-0.17, 0.29)$ y para el regulador exponencial hasta orden 8, de $\theta_1 \in (1.18, 3.22)$, $\theta_2 \in (-0.17, 0.38)$.

Para trabajo a futuro también se puede plantear la reducción de la truncación como se hizo en la ecuación (4.2) con el tipo de operadores asociados a los acoplamientos que son distintos de cero, de esta forma el número de operadores y funciones beta se reduce y simplifica. Además de que dan los mismos valores para puntos fijos y exponentes críticos que la truncación completa. También es necesario probar un tensor que no tenga simetría bajo los 3 índices y verificar si existe un punto fijo estable bajo esa condición.

5.3. Interpretación física

Ahora que se ha concluido que los puntos fijos encontrados son estables y legítimos pasemos a la discusión sobre la física de los mismos. Los dos tipos de puntos fijos encontrados pueden interpretarse como un modelo matricial efectivo donde los colores verde y azul juegan el papel de un solo índice. Esto lo muestra la similaridad entre la ecuación (2.7) que es una truncación a una traza única para los Modelos Matriciales

$$\begin{aligned}\Gamma_N^M &= Z \text{Tr}(\phi\phi^T) + g_4 \text{Tr}((\phi\phi^T)^2) + g_6 \text{Tr}((\phi\phi^T)^3) + g_8 \text{Tr}((\phi\phi^T)^4) \\ &= Z\phi_{ij}\phi_{ij} + g_4\phi_{ij}\phi_{kj}\phi_{kl}\phi_{il} + g_6\phi_{ij}\phi_{kj}\phi_{kl}\phi_{ml}\phi_{mn}\phi_{in} + g_8\phi_{ij}\phi_{kj}\phi_{kl}\phi_{ml}\phi_{mn}\phi_{on}\phi_{op}\phi_{ip},\end{aligned}$$

y la ecuación (4.1) que es la truncación reducida para los Modelos Tensoriales Coloreados y el punto fijo con una dirección relevante

$$\Gamma_N^T = Z \text{Tr}(\phi\phi^T) + \tilde{g}_{4,1}^{2,1} \text{Tr}(\phi\phi^T)^2 + \tilde{g}_{6,1}^{3,1} \text{Tr}(\phi\phi^T)^3 + \tilde{g}_{8,1}^{4,1} \text{Tr}(\phi\phi^T)^4$$

puede notarse que término a término, bajo la inspección de los índices de las matrices ϕ y las gráficas coloreadas tomando los colores verde y azul como un solo índice; que estas dos truncaciones para Modelos Matriciales y Tensoriales tienen la misma estructura.

Análogamente el mismo razonamiento puede aplicarse a la truncación multi-traza de Modelos Matriciales 2.8 que está dada por

$$\begin{aligned}\Gamma_N^M &= Z \text{Tr}(\phi\phi^T) + g_4 \text{Tr}((\phi\phi^T)^2) + g_{2,2} \text{Tr}(\phi\phi^T)^2 + g_6 \text{Tr}((\phi\phi^T)^3) \\ &+ g_{2,4} \text{Tr}(\phi\phi^T) \text{Tr}((\phi\phi^T)^2) + g_{2,2,2} \text{Tr}(\phi\phi^T)^3 + g_8 \text{Tr}((\phi\phi^T)^4) + g_{2,6} \text{Tr}(\phi\phi^T) \text{Tr}((\phi\phi^T)^3) \\ &+ g_{4,4} \text{Tr}((\phi\phi^T)^2)^2 + g_{2,2,4} \text{Tr}(\phi\phi^T)^2 \text{Tr}((\phi\phi^T)^2) + g_{2,2,2,2} \text{Tr}(\phi\phi^T)^4,\end{aligned}$$

la cuál puede escribirse en términos de índices como se hizo en la truncación matricial anterior. Y la segunda truncación reducida para el punto fijo con dos direcciones relevantes 4.2:

$$\Gamma_N^T = Z \text{ (diagrama) } + \tilde{g}_{4,1}^{2,1} \text{ (diagrama) } + \tilde{g}_{4,2}^2 \text{ (diagrama) } + \tilde{g}_{6,1}^{3,1} \text{ (diagrama) } + \tilde{g}_{6,2}^{3,1} \text{ (diagrama) } + \tilde{g}_{6,3}^3 \text{ (diagrama) } \\ + \tilde{g}_{8,1}^{4,1} \text{ (diagrama) } + \tilde{g}_{8,2}^{4,1} \text{ (diagrama) } + \tilde{g}_{8,2}^{4,1,1} \text{ (diagrama) } + \tilde{g}_{8,3}^{4,1} \text{ (diagrama) } + \tilde{g}_{8,4}^4 \text{ (diagrama) },$$

y al comparar término a término ambas truncaciones encontramos que también satisfacen tener la misma estructura cuando se toman los colores verde y azul como un solo índice.

Por lo tanto concluimos que ambos puntos fijos están asociados a un modelo matricial efectivo contenido dentro de los Modelos Tensoriales Coloreados de rango 3. Con esta asociación al ser encontrada usando el Grupo de Renormalización funcional, es posible interpretar tentativamente los resultados como un posible límite al continuo a Gravedad Cuántica en dos dimensiones, ya que esto es lo que describen estos Modelos Matriciales Efectivos y los puntos fijos encontrados en la región UV del flujo de renormalización. De esta manera comenzamos en una fase pre-geométrica compuesta por bloques de construcción del espacio-tiempo de 3 dimensiones, como lo indica nuestra truncación usando Modelos Tensoriales Coloreados y que estos bloques pasan por una transición de fase a una teoría continua en 2 dimensiones. Esto es entendido como un mecanismo de reducción dimensional y es compatible con la ecuación 3.4 en el hecho de que las funciones beta se desacoplen permitiendo tomar las truncaciones reducidas que tienen una dimensión canónica $D_0 = 2$ por ser un modelo matricial efectivo y la dimensión anómala η como puede verse en todos los casos se reduce al ampliar la truncación además de que parece ser que el esquema $\eta = 0$ es el más estable.

La reducción dimensional es una interpretación apropiada y satisfactoria ya que varios enfoques¹ de Gravedad Cuántica coinciden en que a escalas pequeñas o altas energías la dimensión se reduce a $D \approx 2$. En lo que a este trabajo respecta, este mismo comportamiento ha sido observado en el caso de Modelos Tensoriales Coloreados reales en [49, 51] con truncaciones más pequeñas. Además del enfoque de triangulaciones dinámicas causales que utiliza algoritmos de Monte-Carlo y la acción de Regge imponiendo una estructura causal, ha encontrado partiendo de simplices de 4 o 3 dimensiones que (usando caminatas aleatorias para obtener la dimensión espectral como observable) a escalas pequeñas la dimensión es aproximadamente 2 mientras que a escalas grandes se reproduce un espacio-tiempo de 4 o 3 dimensiones respectivamente y también el enfoque de triangulaciones dinámicas euclidianas parece tener el mismo comportamiento [52].

Por otro lado, los puntos fijos encontrados ¿son consistentes con los Modelos Matriciales comunes? En parte lo son ya que como se ha mencionado en la sección 2.2.3, los Modelos Matriciales exhiben un límite de doble escalamiento lo cuál se refleja en el punto fijo con una dirección relevante; además de tener puntos multicríticos y esto también se refleja en el punto fijo con dos direcciones relevantes. Sin embargo, los valores de los exponentes críticos encontrados distan mucho del valor analítico de los Modelos Matriciales, el valor encontrado resulta ser de aproximadamente el doble dentro de los rangos reportados. Más importante aún, el valor numérico de los exponentes críticos encontrados para esta tesis usando la ecuación de Wetterich también difiere aproximadamente por el doble de los exponentes críticos encontrados en los Modelos Matriciales de

¹Como puede verse en la referencia [52] con la transición de Hagedorn en teoría de cuerdas, Seguridad Asintótica aplicada a truncaciones de la acción de E-H, teoría de conjuntos causales, Gravedad Cuántica de lazos, espumas de espín, propuestas de gravedad modificadas como Hořava-Lifhitz, etc. Si esto es una coincidencia o indica que la reducción dimensional de todos estos enfoques tienen un origen en común es una pregunta abierta.

[3] y [4], donde también se usó la ecuación de Wetterich.

Esto puede justificarse haciendo una inspección más detallada de lo que significa nuestro argumento sobre los dos índices jugando el papel de uno. Como se mencionó anteriormente nuestra truncación está protegida por una simetría $U(N) \otimes U(N^2)$, así un índice tiene simetría $U(N)$ mientras que el índice efectivo tiene simetría $U(N^2)$. Como este modelo matricial efectivo en el UV describe Gravedad Cuántica en 2 dimensiones, podemos interpretar a un índice como el tiempo y a otro como el espacio, dando así una anisotropía entre espacio y tiempo a altas energías. Es decir que el espacio y tiempo son distintos a escalas cuánticas. Este resultado podemos compararlo con la propuesta de gravedad de Hořava-Lifhitz. De esta forma concluimos que estos puntos fijos encontrados no corresponden a Modelos Matriciales comunes.

La gravedad de Hořava-Lifhitz es una teoría que se fundó como un intento de cuantizar la gravedad usando técnicas de Teoría Cuántica de Campos y tomando la métrica del espacio-tiempo como campo elemental en el formalismo de integral funcional. Para esto, Hořava decidió abandonar la invariancia de Lorentz como un principio fundamental y optar por un escalamiento anisotrópico tipo Lifshitz entre espacio y tiempo a altas energías y recuperando aproximadamente la invariancia a bajas energías [53], esto con el objetivo de hacer la Relatividad General renormalizable a través de esta modificación de la acción de Einstein-Hilbert. La anisotropía entre espacio y tiempo se caracteriza por

$$x_i \rightarrow bx_i, \quad t \rightarrow b^z t$$

con z un exponente crítico dinámico como observable y asociado a un punto fijo en el Grupo de Renormalización [54]. Sobre la invariancia de Lorentz se argumenta que como esta es una simetría continua del espacio-tiempo, a la escala de Planck tomando como principio fundamental que la naturaleza de la Gravedad Cuántica es discreta como se mencionó en la sección 2.2, puede que esta simetría se rompa en el UV para ser recuperada en el IR. Con esta anisotropía pueden añadirse derivadas espaciales a ordenes altos y dejar las derivadas temporales a segundo orden para evitar el problema de la no unitariedad del propagador.

Una posible interpretación física es clara entonces. Hemos encontrado dos puntos fijos en la región UV del flujo de renormalización que representan dos posibles límites al continuo, partiendo de un modelo discreto compuesto de bloques fundamentales de espacio-tiempo en 3 dimensiones que por los razonamientos anteriores, transicionan de una fase pre-geométrica a un espacio-tiempo cuántico continuo de 2 dimensiones como un mecanismo de reducción dimensional donde el espacio y tiempo son anisotrópicos. Se encontraron los exponentes críticos que en principio son observables y caracterizan esta transición de fase, es esta la razón por la que hay que buscar nuevas clases de universalidad estables que sean compatibles numéricamente con los exponentes críticos obtenidos en esta tesis. Sin embargo, para asegurar la viabilidad de dicha interpretación, es necesario más trabajo a futuro, ampliar la truncación y hacer uso de más herramientas analíticas.

Apéndice A

Sumas Espectrales

La estructura de las sumas espectrales está dada por

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{N^3} \sum reg(a1, a2, a3) \\ S_{2,0} &= \frac{1}{N^3} \sum reg(a1, a2, a3)p(a1, a2, a3) \\ S_{2,1} &= \frac{1}{N^4} \sum reg(a1, a2, a3)p(a1, a2, b3) \\ S_{2,2} &= \frac{1}{N^5} \sum reg(a1, a2, a3)p(a1, b2, b3) \\ S_{2,3} &= \frac{1}{N^6} \sum reg(a1, a2, a3)p(b1, b2, b3) \\ S_{3,1} &= \frac{1}{N^5} \sum reg(a1, a2, a3)p(b1, a2, a3)p(c1, a2, a3) \\ S_{3,2} &= \frac{1}{N^3} \sum reg(a1, a2, a3)p(a1, a2, a3)^2 \\ S_{3,3} &= \frac{1}{N^6} \sum reg(a1, a2, a3)p(b1, b2, a3)p(b1, a2, c3) \\ S_{3,4} &= \frac{1}{N^6} \sum reg(a1, a2, a3)p(a1, b2, b3)p(a1, c2, a3) \\ S_{3,5} &= \frac{1}{N^4} \sum reg(a1, a2, a3)p(b1, a2, a3)p(a1, a2, a3) \\ S_{3,6} &= \frac{1}{N^5} \sum reg(a1, a2, a3)p(b1, a2, a3)p(a1, c2, a3) \\ S_{3,7} &= \frac{1}{N^5} \sum reg(a1, a2, a3)p(b1, b2, a3)p(b1, a2, a3) \\ S_{3,8} &= \frac{1}{N^6} \sum reg(a1, a2, a3)p(a1, b2, b3)p(a1, b2, c3) \\ S_{3,9} &= \frac{1}{N^4} \sum reg(a1, a2, a3)p(b1, a2, a3)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{3,10} &= \frac{1}{N^6} \sum \text{reg}(a1, a2, a3)p(b1, b2, b3)p(b1, a2, a3) \\
S_{3,11} &= \frac{1}{N^6} \sum \text{reg}(a1, a2, a3)p(b1, b2, b3)p(b1, b2, a3) \\
S_{3,12} &= \frac{1}{N^7} \sum \text{reg}(a1, a2, a3)p(a1, b2, b3)p(a1, c2, c3) \\
S_{3,13} &= \frac{1}{N^6} \sum \text{reg}(a1, a2, a3)p(a1, b2, b3)p(c1, a2, a3) \\
S_{3,14} &= \frac{1}{N^7} \sum \text{reg}(a1, a2, a3)p(b1, b2, b3)p(a1, b2, c3) \\
S_{3,15} &= \frac{1}{N^7} \sum \text{reg}(a1, a2, a3)p(a1, b2, b3)p(c1, a2, c3) \\
S_{4,1} &= \frac{1}{N^6} \sum \text{reg}(a1, a2, a3)p(b1, a2, a3)p(c1, a2, a3)p(d1, a2, a3) \\
S_{4,2} &= \frac{1}{N^6} \sum \text{reg}(a1, a2, a3)p(a1, a2, a3)p(a1, c2, a3)p(a1, d2, d3) \\
S_{4,3} &= \frac{1}{N^6} \sum \text{reg}(a1, a2, a3)p(a1, b2, a3)^2p(a1, d2, d3) \\
S_{4,4} &= \frac{1}{N^6} \sum \text{reg}(a1, a2, a3)p(a1, b2, a3)p(a1, c2, c3)^2 \\
S_{4,5} &= \frac{1}{N^6} \sum \text{reg}(a1, a2, a3)p(a1, b2, b3)p(a1, c2, b3)p(a1, a2, a3) \\
S_{4,6} &= \frac{1}{N^6} \sum \text{reg}(a1, a2, a3)p(a1, b2, b3)p(a1, c2, b3^2) \\
S_{4,7} &= \frac{1}{N^8} \sum \text{reg}(a1, a2, a3)p(a1, b2, b3)p(a1, c2, b3)p(a1, d2, d3) \\
S_{4,8} &= \frac{1}{N^8} \sum \text{reg}(a1, a2, a3)p(a1, b2, a3)p(a1, c2, c3)p(a1, d2, d3) \\
S_{4,9} &= \frac{1}{N^5} \sum \text{reg}(a1, a2, a3)p(a1, a2, a3)p(c1, a2, a3)p(d1, a2, a3) \\
S_{4,10} &= \frac{1}{N^5} \sum \text{reg}(a1, a2, a3)p(b1, a2, a3)^2p(d1, a2, a3) \\
S_{4,11} &= \frac{1}{N^3} \sum \text{reg}(a1, a2, a3)p(a1, a2, a3)^3 \\
S_{4,12} &= \frac{1}{N^4} \sum \text{reg}(a1, a2, a3)p(b1, a2, a3)^2p(a1, a2, a3) \\
S_{4,13} &= \frac{1}{N^4} \sum \text{reg}(a1, a2, a3)p(a1, a2, a3)^2p(d1, a2, a3) \\
S_{4,14} &= \frac{1}{N^4} \sum \text{reg}(a1, a2, a3)p(b1, a2, a3)^3 \\
S_{4,15} &= \frac{1}{N^5} \sum \text{reg}(a1, a2, a3)p(a1, a2, a3)p(a1, b2, a3)p(d1, a2, a3) \\
S_{4,16} &= \frac{1}{N^5} \sum \text{reg}(a1, a2, a3)p(b1, a2, a3)p(a1, c2, a3)p(b1, c2, a3) \\
S_{4,17} &= \frac{1}{N^5} \sum \text{reg}(a1, a2, a3)p(a1, b2, a3)^2p(c1, b2, a3) \\
S_{4,18} &= \frac{1}{N^7} \sum \text{reg}(a1, a2, a3)p(b1, a2, b3)p(c1, a2, a3)p(d1, a2, a3)
\end{aligned}$$

Las sumas anteriores no consideran toda la combinatoria necesaria, pero debido a la simetría de los índices o de intercambio de color, las permutaciones de los índices están contenidas. En la siguiente tabla se reportan los valores numéricos de las sumas espectrales anteriores, considerando que el regulador exponencial

usa una aproximación y que faltan algunas sumas para el regulador tipo Litim por su complejidad, sin embargo son innecesarias para los puntos fijos y exponentes críticos involucrados (con las truncaciones que se tomaron para este regulador).

Suma	Reg. Exp.	Reg. Litim
S_1	$0.34485-0.22829\eta$	$\frac{5-\eta}{40}$
$S_{2,0}$	$0.15669-0.10125\eta$	$\frac{6-\eta}{60}$
$S_{2,1}$	$0.15424-0.10044\eta$	$\frac{13(21-4\eta)}{630 \cdot 4}$
$S_{2,2}$	$0.15194-0.09974\eta$	$\frac{29}{252} - \frac{51\eta}{2240}$
$S_{2,3}$	$0.14979-0.09916\eta$	$\frac{23(5-\eta)}{960}$
$S_{3,1}$	$0.07174-0.04607\eta$	$\frac{5769-1049\eta}{60480}$
$S_{3,2}$	$0.07499-0.04753\eta$	$\frac{7-\eta}{84}$
$S_{3,3}$	$0.06837-0.04454\eta$	$\frac{73160-13889\eta}{1814400}$
$S_{3,4}$	$0.06934-0.04482\eta$	$\frac{12107}{120960} - \frac{163\eta}{8640}$
$S_{3,5}$	$0.07262-0.04629\eta$	$\frac{221}{2520} - \frac{283\eta}{20160}$
$S_{3,6}$	$0.07018-0.0445\eta$	$\frac{1259}{13440} - \frac{883\eta}{51840}$
$S_{3,7}$	$0.07087-0.04585\eta$	$\frac{14969-2387\eta}{181440}$
$S_{3,8}$	$0.06998-0.04562\eta$	$\frac{43(755-148\eta)}{302400}$
$S_{3,9}$	$0.07328-0.04711\eta$	$\frac{83}{840} - \frac{23\eta}{1260}$
$S_{3,10}$	$0.0684-0.04464\eta$	-
$S_{3,11}$	$0.06909-0.04539\eta$	-
$S_{3,12}$	$0.06844-0.04459\eta$	-
$S_{3,13}$	$0.06778-0.04377\eta$	-
$S_{3,14}$	$0.06753-0.04435\eta$	-
$S_{3,15}$	$0.06685-0.04352\eta$	-
$S_{4,1}$	$0.03444-0.02185\eta$	$\frac{143}{1680} - \frac{73\eta}{4928}$
$S_{4,2}$	$0.03316-0.021\eta$	-
$S_{4,3}$	$0.03346-0.02137\eta$	-
$S_{4,4}$	$0.03315-0.0213\eta$	-
$S_{4,5}$	$0.03288-0.02097\eta$	-

Suma	Reg. Exp.	Reg. Litim
$S_{4,6}$	$0.03403-0.02206\eta$	-
$S_{4,7}$	$0.05176-0.03332\eta$	-
$S_{4,8}$	$0.05077-0.03235\eta$	-
$S_{4,9}$	$0.03478-0.0219\eta$	$\frac{59}{756} - \frac{727\eta}{60480}$
$S_{4,10}$	$0.03508-0.02228\eta$	$\frac{1327}{15120} - \frac{703\eta}{45360}$
$S_{4,11}$	$0.0373-0.02326\eta$	$\frac{1}{14} - \frac{\eta}{112}$
$S_{4,12}$	$0.03542-0.02234\eta$	$\frac{29}{360} - \frac{19\eta}{1512}$
$S_{4,13}$	$0.03572-0.02238\eta$	$\frac{33}{448} - \frac{41\eta}{4032}$
$S_{4,14}$	$0.03634-0.02312\eta$	$\frac{89}{960} - \frac{29\eta}{1728}$
$S_{4,15}$	$0.034097-0.02146\eta$	-
$S_{4,16}$	$0.03344-0.02134\eta$	-
$S_{4,17}$	$0.03473-0.02221\eta$	-
$S_{4,18}$	$0.03444-0.02185\eta$	-

Bibliografía

- [1] A. Eichhorn & T. Koslowski, *Flowing to the continuum in discrete tensor models for quantum gravity*. arXiv:1701.03029 [gr-qc].
- [2] J. B. Geloun, T. Koslowski, D. Oriti & A. D. Pereira, *Functional Renormalization Group analysis of rank 3 tensorial group field theory: The full quartic invariant truncation*. Phys. Rev. D 97, 126018 (2018). arXiv:1805.01619 [hep-th].
- [3] A. Eichhorn & T. Koslowski, *Continuum limit in matrix models for quantum gravity from the Functional Renormalization Group*. Phys. Rev. D 88, 084016 (2013) arXiv:1309.1690 [gr-qc].
- [4] A. Eichhorn & T. Koslowski, *Towards phase transitions between discrete and continuum quantum space-time from the Renormalization Group*. Phys. Rev. D 90, no. 10, arXiv:1408.4127 [gr-qc].
- [5] L. D. Landau & E. M. Lifshitz, *Statistical Physics, Vol.5 of Course of Theoretical Physics*. Pergamon London, 1958.
- [6] M. E. Fisher, *Renormalization group theory: It's basis and formulation in statistical physics*. Rev. Mod. Phys. Vol. 70, 1998.
- [7] L. D. Landau, A. A. Abrikosov & I. M. Khalatnikov. Dokl. Akad. Nauk. 95, 1953.
- [8] M. E. Peskin, *Ken Wilson: Solving the Strong Interactions*. Journal of Statistical Physics, 2014. arXiv:1405.7086 [physics.hist-ph].
- [9] H. B. Callen, *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*. John Wiley & sons, USA; 2nd edition 1985.
- [10] L. Onsager, *Crystal Statistics in a Two-dimensional Model with an Order-Disorder Transition*. Phys. Rev. 62, 1944.
- [11] B. Kaufman & L. Onsager, *Crystal Statistics II. Short-Range Order in a Binary Lattice* Phys. Rev. 76, 1949.
- [12] L. P. Kadanoff, *Statistical Physics: Statics, Dynamics and Renormalization*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. USA 2000.
- [13] L. P. Kadanoff, *Scaling Laws for Ising Models near T_c* . Physics (Long Island City, NY) 2, 1966.
- [14] K. G. Wilson, *Model Hamiltonians for Local Quantum Field Theory*. Phys. Rev. 140, B445 (1965).

- [15] K. G. Wilson, *Non-Lagrangian Models of Current Algebra*. Phys. Rev. 179, 1499 (1969).
- [16] K. G. Wilson, *Renormalization Group and Strong Interactions*. Phys. Rev. D 3, 1818 (1971).
- [17] K. G. Wilson, *Confinement of Quarks*. Phys. Rev. D 10, 2445 (1974).
- [18] K. Huang, *A Critical History of Renormalization*. Int. J. Mod. Phys. A, 28 (2013) 1330050. arXiv:1310.5533 [physics.hist-ph].
- [19] A. Suri, *A Calculation of the Two Body Elastic Scattering Amplitude for an Ising Model Quantum Field Theory on a Lattice Space*. Cornell University, PhD Thesis (1969).
- [20] S. Coleman, *Aspects of Symmetry*. Cambridge University Press, 1985.
- [21] C. Wetterich, *Exact Evolution Equation for the Effective Potential*. (1993) Phys Lett B 301:90.
- [22] H. Gies, *Introduction to the functional RG and applications to gauge theories*. arXiv:0611146 [hep-ph].
- [23] M. E. Peskin & D. V. Schröder, *An Introduction to Quantum Field Theory*. Addison-Wesley, 1995.
- [24] M. D. Schwartz, *Quantum Field Theory and The Standard Model*. Cambridge University Press, USA 2014.
- [25] S. Flörchinger, *Functional Renormalization and Ultracold Quantum Gases*. Springer, 2010.
- [26] C. Kiefer, *Quantum Gravity*. Oxford University Press, New York, 2007.
- [27] M. M. Scherer, *Introduction to Renormalization with Applications in Condensed-Matter and High-Energy Physics*. Lecture Course, 2017/2018. <http://www.thp.uni-koeln.de/~scherer/RGLecture2017.pdf>
- [28] D. Oriti, *Spin Foam Models of Quantum Spacetime*. PhD Thesis, Cambridge University, DAMTP, 2003. arXiv:0311066 [gr-qc].
- [29] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Vol. I (Foundations)*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [30] K. S. Stelle, *Renormalization of Higher-Derivative Quantum Gravity*. Phys. Rev. D, 16, 1977.
- [31] B. S. DeWitt, *Quantum Theory of Gravity. II. The Manifestly Covariant Theory*. Phys. Rev., 162, 1967.
- [32] S. Weinberg, *Ultraviolet Divergences in Quantum Theories of Gravitation*. Ed. S. W. Hawking and W. Israel. Cambridge University Press, Cambridge, 1979.
- [33] M. Niedermaier & M. Reuter, *The Asymptotic Safety Scenario in Quantum Gravity*. Living Reviews in Relativity. Class. Quant. Grav. 24:R171-230, 2007. arXiv:0610018 [gr-qc].
- [34] M. Reuter, *Nonperturbative Evolution Equation for Quantum Gravity*. Phys. Rev. D 57, 971–85, 1998.
- [35] O. Lauscher & M. Reuter, *Ultraviolet Fixed Point and Generalized Flow Equation of Quantum Gravity*. Phys. Rev. D 65, 025013, 2001.
- [36] O. Lauscher & M. Reuter, *Flow Equation of Quantum Einstein Gravity in a Higher-Derivative Truncation*. Phys. Rev. D 66, 025026, 2002.

- [37] A. Eichhorn, *The Renormalization Group Flow of Unimodular $f(R)$ Gravity*. arXiv:1501.05848 [gr-qc].
- [38] A. Eichhorn, *Status of the Asymptotic Safety Paradigm for Quantum Gravity and Matter*. arXiv:1709.03696 [gr-qc].
- [39] A. Dasgupta, *The Gravitational Path Integral and Trace of the Diffeomorphisms*. Gen. Rel. Grav. 43:2237-2255, 2011. arXiv:0801.4770 [gr-qc].
- [40] R. Geroch & J. B. Hartle, *Computability and physical theories*. Found. Phys., 16, 1986.
- [41] G. Gibbons, S. Hawking & M. J. Perry, *Path integrals and the indefiniteness of gravitational action*. Nucl. Phys. B, 138, 1978.
- [42] C. W. Misner, K. S. Thorne & J. A. Wheeler, *Gravitation*. W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1973.
- [43] V. Rivasseau, *Quantum Gravity and Renormalization: The Tensor Track*. arXiv:1112.5104v1 [hep-th].
- [44] V. Rivasseau, *Random Tensors and Quantum Gravity*. SIGMA 12 (2016), 069. arXiv:1603.07278v2 [math-ph].
- [45] R. Gurau, *A Review of the $1/N$ Expansion in Random Tensor Models*. arXiv:1209:3252v1 [math-ph].
- [46] R. Gurau, *A Review of the Large N Limit of Tensor Models*. arXiv:1209.4295v1 [math-ph].
- [47] T. Delepouve & R. Gurau, *Phase Transitions in Tensor Models*. JHEP 06 (2015) 178. arXiv:1504.05745v1 [hep-th].
- [48] R. Gurau, *Colored Tensor Models - A Review*. arXiv:1109.4812 [hep-th].
- [49] A. Eichhorn, T. Koslowski & A. D. Pereira, *Status of background-independent coarse-graining in tensor models for quantum gravity*. arXiv:1811:12909 [gr-qc].
- [50] V. Bonzom, R. Gurau, J. P. Ryan & A. Tanasa, *The Double Scaling Limit of Random Tensor Models*. JHEP 1409, 051 (2014), arXiv:1404.7517 [hep-th].
- [51] A. Eichhorn, T. Koslowski, A. D. Pereira & J. Lumma, *Towards background independent quantum gravity with tensor models*. arXiv:1811.00814 [gr-qc].
- [52] S. Carlip, *Dimension and Dimensional Reduction in Quantum Gravity* Class. Quant. Grav. 34, 193001 (2017), arXiv:1705.05417 [gr-qc].
- [53] A. Wang, *Hořava Gravity at a Lifshitz Point: A Progress Report*. Int. J. Mod. Phys. D26 (2017) 1730014, arXiv:1701.06087 [gr-qc].
- [54] P. Hořava, *General covariance in gravity at a Lifshitz point*. Class. Quantum Grav. 28 (2011) 114012, arXiv:1101.1081 [hep-th].