



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ZARAGOZA

FLUJO DE HAGEN-POISEUILLE DE UN SISTEMA MICELAR

TRABAJO PROFESIONAL

PARA OBTENER EL TITULO DE INGENIERO QUÍMICO

PRESENTA:

RAMÍREZ BALDERAS VALERIA

DIRECTOR DE TESIS

DR. EDTSON EMILIO HERRERA VALENCIA

01 de Marzo del 2019

CD.MX.





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.





FACULTAD DE ESTUDIOS
SUPERIORES "ZARAGOZA"

DIRECCIÓN



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

JEFE DE LA UNIDAD DE ADMINISTRACIÓN
ESCOLAR
PRESENTE.

Comunico a usted que al alumno(a) Ramírez Balderas Valeria, con número de cuenta 41101458-4 de la carrera Ingeniería Química, se le ha fijado el día 01 del mes de Marzo de 2019 a las 13:00 horas para presentar su examen profesional, que tendrá lugar en la sala de exámenes profesionales del Campus II de esta Facultad, con el siguiente jurado:

PRESIDENTE	DR. MARIANO PÉREZ CAMACHO
VOCAL	DR. EDTSON EMILIO HERRERA VALENCIA
SECRETARIO	I.Q. BLAS MALDONADO SÁNCHEZ
SUPLENTE	DRA. BLANCA ESTELA GARCÍA ROJAS
SUPLENTE	DR. FRANCISCO VIDAL CABALLERO DOMÍNGUEZ

MARIANO PÉREZ CAMACHO
Edison E. Herrera Valencia
~~Blas Maldonado Sánchez~~
~~Blanca Estela García Rojas~~
~~Francisco Vidal Caballero Domínguez~~

El título de la tesis que se presenta es: "Flujo de Hagen – Poiseuille de un sistema micelar".

Opción de Titulación: Convencional

ATENTAMENTE
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
CDMX a 18 de Febrero de 2019.

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES "ZARAGOZA"
DIRECCIÓN
DR. VICENTE JESÚS BERNÁNDEZ ABAD
DIRECTOR

RECIBÉ
OFICINA DE EXÁMENES PROFESIONALES
Y DE GRADO

Vo.Bo.
M. EN C. CESAR SAUL VELASCO HERNÁNDEZ
JEFE DE LA CARRERA DE I. Q.





AGRADECIMIENTOS

- *A la Carrera de Ingeniería Química, de la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza, Universidad Nacional Autónoma de México.*
- *A mi asesor el Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia, por el tiempo dedicado para lograr este proyecto, gracias por su vasto conocimiento y experiencia, por enseñarme cosas más allá de lo académico, gracias por esos momentos de reflexión y animo que me ayudaron a ampliar mi visión profesional, así como de la vida.*
- *Al M. en C. Mariano Pérez Camacho por sus valiosas aportaciones, comentarios y sugerencias para la comparación y discusión de los datos experimentales.*
- *A la Dr. Blanca Estela Rojas García por sus valiosas aportaciones y comentarios en la parte de aplicación.*
- *Al Ing. Blas Maldonado Sánchez por sus valiosas aportaciones y comentarios.*
- *Al Dr. Fausto Calderas García por sus valiosas aportaciones y comentarios.*
- *Al Dr. Francisco Vidal Caballero Domínguez por sus valiosas aportaciones y comentarios.*
- *Finalmente agradezco a todas aquellas personas que me apoyaron a lo largo de mi crecimiento personal y profesional y que de alguna manera ayudaron en la culminación de este trabajo muchas gracias.*
- ***Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM <<IN115919>> <<Análisis del flujo pulsátil de sangre humana con hipercolesterolemia, mediante una ecuación constitutiva nueva, caracterización reológica y simulación computacional en venas elásticas e inelásticas>>. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida***
- ***Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIME) de la UNAM <<PE112716>> << Material Didáctico Teórico, Protocolos experimentales y aula virtual de las materias de Fenómenos de Transporte (cuarto semestre) y Transferencia de Masa (Séptimo semestre) Correspondientes***



a los Ciclos Intermedio y Terminal de la Carrera de Ingeniería Química >>. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida

- ***Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIME) de la UNAM <<PE116519>> << Fenómenos de transporte avanzados: fluidos no newtonianos visco-elásticos lineales y no lineales >>. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida***



DEDICATORIAS

- *A la Carrera de Ingeniería Química, de la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza, Universidad Nacional Autónoma de México.*
- *A mi padre Nicolás Ramírez Bonilla por el gran apoyo y amor que me ha brindado desde pequeña. A él le debo no solo la vida, sino el enseñarme a ser segura y no rendirme ante cada situación. Sin él, mis logros no serían posibles, lo admiro por ser un hombre honesto y trabajador. **Gracias Papí.***
- *A mi madre Isabel Balderas Cardoso a quien le agradezco la confianza, amor y apoyo que ha depositado siempre en mí, alentándome a no rendirme y luchar por cada sueño. No solo le debo este logro, sino la vida. **Gracias Mamí.***
- *A mis hermanas Lizbeth y Miriam por confiar siempre en mí y alentarme durante cada momento. **Gracias Hermanitas** mis compañeras de vida.*
- *A mis locas amigas Isis, Norma, Marlen y Rosa a quienes les agradezco cada bello momento e hicieron de la universidad mi mejor etapa. **Las amodoro.***
- *A mi asesor el Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia, por el tiempo dedicado para lograr este proyecto, gracias por su vasto conocimiento y experiencia, por enseñarme cosas más allá de lo académico, gracias por esos momentos de reflexión y ánimo que me ayudaron a ampliar mi visión profesional, así como de la vida.*
- *Finalmente agradezco a todas aquellas personas que me apoyaron a lo largo de mi crecimiento personal y profesional y que de alguna manera ayudaron en la culminación de este trabajo muchas gracias.*





ÍNDICE

Capítulo 1. Introducción

- 1.1.1 Antecedentes
- 1.1.2 Estructura y comportamiento de los tensoactivos
- 1.1.3 Tensoactivo CTAT
- 1.1.4 Sistemas micelares y concentración micelar crítica (CMC)
- 1.1.5 Mecanismos de formación de micelas
- 1.1.6 Estudio teórico de fluidos reológicos en geometrías simples
- 1.2 Objetivos
 - 1.2.1 Objetivo General
 - 1.2.2 Objetivos Particulares
- 1.3 Hipótesis del sistema
- 1.4 Distribución del material de estudio

Capítulo 2. Marco teórico

- 2.1 Flujo de Hagen-Poiseuille de fluidos newtonianos
- 2.2 Flujo volumétrico de un fluido No-Newtoniano
- 2.3 Modelo Bautista-Manero-Puig

Capítulo 3. Problema físico y modelado matemático

- 3.1 Problema físico
- 3.2 Funciones materiales del modelo BMP
- 3.3 Perfil de velocidades del modelo BMP
- 3.4 Flujo volumétrico del modelo BMP
- 3.5 Fluidez aparente del modelo BMP
- 3.6 Resumen de ecuaciones del capítulo 3



Capítulo 4. Simulación computacional y análisis de resultados

4.1 Mecanismos adelgazantes y engrosantes al corte

4.1.1 Efecto del número B

4.2.1.2 Perfil de velocidades

4.2.1.3 Flujo volumétrico

4.2.2 Mecanismos tixotrópicos

4.2.2.1 Función fluidez

4.2.2.2 Perfil de velocidades

4.2.2.3 Flujo volumétrico

4.2.3 Mecanismos reopéticos

4.2.3.1 Función fluidez

4.2.3.2 Flujo volumétrico

4.2.4.2 Perfil de velocidades

4.2.4.3 Flujo volumétrico

4.2.5 Mecanismos por efecto de la concentración

4.2.5.1 Función fluidez

4.2.5.2 Perfil de velocidades

4.2.5.3 Flujo volumétrico

4.2.6 Factor de fricción

Capítulo 5. Conclusiones finales y trabajo futuro

5.1 Comentarios finales del trabajo

5.1.1 Perfil de velocidades

5.1.2 Función fluidez aparente

5.1.3 Flujo volumétrico



5.2 Trabajo futuro

Apéndices

Apéndice A

Deducción de la ecuación de Hagen-Poiseuille para un fluido Newtoniano.

Apéndice B

Deducción del perfil de velocidad

Apéndice C

Deducción del perfil de velocidad del modelo BMP

Apéndice D

Deducción de flujo volumétrico.

Apéndice E

Deducción de la fluidez aparente.

Bibliografía



NOMENCLATURA

Lista de símbolos

a	Longitud característica asociada al radio del capilar [m]
G_0	Modulo elástico [Pa]
K	Constante cinética [1/Pa]
L	Longitud del capilar [m]
N_1	Primera diferencia de esfuerzos normales [Pa]
N_2	Segunda diferencia de esfuerzos normales [Pa]
Q	Flujo volumétrico [m^3/s]
r	Coordenadas radial
z	Coordenada axial
V_z	Componente axial del vector velocidad [m/s]
$\langle V_z \rangle$	Velocidad promedio [m/s]
dV_z/dr	Rapidez de deformación r_z [1/s]

Letras griegas

η	Función viscosidad [Pa s]
η_0	Viscosidad a baja rapidez de corte [Pa s]
η_∞	Viscosidades a alta rapidez de corte [Pa s]
φ	Función fluidez [1/Pas]
φ_0	Fluidez a rapidez de deformación baja [1/Pas]
φ_{app}	Fluidez aparente [1/Pas]
φ_∞	Fluidez a rapidez de deformación alta [1/Pas]
$\dot{\gamma}_{rz}$	Rapidez de deformación [s^{-1}]
λ	Tiempo de restructuración[s]
λ_0	Tiempo de relajación de Maxwell a baja rapidez de corte [s]



λ_{∞}	Tiempo de relajación de Maxwell a alta rapidez de corte [s]
σ_{rz}	Componente rz del tensor de esfuerzos [Pa]
$\{\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}\}$	Componentes normales del tensor de esfuerzos [Pa]
σ_w	Esfuerzo en la pared [Pa]
θ	Coordenada angular [1]
ρ	Densidad del fluido [m^3/s]

Vector, diádica y tensores

σ	Tensor de esfuerzo cortante [Pa]
\mathbf{V}	Vector velocidad [m/s]
$\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}$	Producto diádico de la velocidad [m^2/s^2]
\mathbf{D}	Tensor rapidez de deformación [1/s]
\mathbf{f}	Fuerzas de volumen [N/m^3]
\mathbf{W}	Tensor de vorticidad [1/s]
$\nabla \mathbf{V}$	Tensor gradiente de velocidad [1/s]
$\nabla \mathbf{V}^T$	Transpuesta del tensor gradiente de velocidad [1/s]
\mathbf{g}	Aceleración de la gravedad [m^2/s]

Variables adimensionales

V_z^*	Velocidad axial [1]
P^*	Gradiente de presión [1]
r^*	Coordenada radial [1]
z^*	Coordenada axial [1]
Q^*	Flujo volumétrico [1]
φ^*	Función fluidez [1]
η^*	Función viscosidad [1]
σ_{rz}^*	Componente rz del tensor de esfuerzo cortante [1]
$\{\sigma_{rr}^*, \sigma_{\theta\theta}^*, \sigma_{zz}^*\}$	Componentes de tensor de esfuerzo normal [1]



Otros símbolos

$()^T$	Transposición de una matriz [1]
∇	Operador gradiente [m^{-1}]
$\nabla \cdot$	Operador divergencia [m^{-1}]
∇^2	Operador Laplace [m^{-2}]
II_D	Segundo invariante del tensor de esfuerzo cortante [1/s]
$\overset{\nabla}{X}$	Derivada codeformacional del tensor X [1/s]

Números adimensionales

A_0	Relación cinético-estructural a baja rapidez de corte [1]
A_∞	Relación cinético-estructural a alta rapidez de corte [1]
B	Viscosidades de fluidez [1]



ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1 El tensoactivo CTAT (cetiltrimetilamonio sulfonato p-tolueno $C_{19}H_{42}N \cdot C_7H_7O_3S$) Peso molecular de 455.74 g/mol, tensoactivo del tipo catiónico. La concentración micelar crítica de surfactante CTAT en agua suele ser relativamente baja, e incluso a concentraciones de 3% ya se empiezan a observar las micelas tipo gusano.

Figura 1.2 Diagrama esquemático de soluciones de tensoactivo mostrado varias morfologías.

Figura 3.1 Representación esquemática del flujo de Poiseuille en el tubo capilar que muestra el campo de velocidad, la velocidad del gradiente y la vorticidad y la velocidad cilíndrica (r, θ, z) utilizando la coordenada para describir un punto genérico P.

Figura 4.1 Fluidez adimensional vs esfuerzo en la pared para distintas condiciones materiales en función de los números adimensionales A y B.

Figura 4.2-b Velocidad axial sin dimensiones vs coordenadas radiales adimensionales en función de los mecanismos de adelgazamiento y de espesamiento a través de los números adimensionales A y B.

Figura 4.2-b. Velocidad axial sin dimensiones vs coordenadas radiales adimensionales en función de los mecanismos de adelgazamiento y de espesamiento a través de los números adimensionales A y B.

Figura 4.3. Función fluidez adimensional vs esfuerzo en la pared en función en función de los mecanismos tixotrópicos a través del número adimensional A.



Figura 4.4. Función fluidez adimensional vs esfuerzo en la pared en función en función de los mecanismos reopecticos a través del número adimensional A

Figura 4.5. Velocidad axial sin dimensiones vs coordenada radial en función de la estructura del sistema. El efecto del tiempo de restructuración del material influye en el número adimensional y por ende en el perfil de velocidades.

Figura 4.6. Función fluidez adimensional vs esfuerzo en la pared en función de la concentración de la muestra en el sistema.

Figura 4.7. Ilustra el perfil de perfil de velocidades vs coordenada radial adimensional en función de la concentración de micelas tipo gusano.

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 4.1 Propiedades materiales del modelo BMP y las pruebas reológicas con las que se obtienen.

Tabla 4.2 Valores de los números adimensionales en función de la concentración.



RESUMEN

En este trabajo, se estudió la reología y transferencia de momento de un sistema micelar bajo la acción de un gradiente de presión. Las condiciones de proceso para modelar el líquido visco-elástico fueron: (a) estado estacionario, (b) proceso isotérmico, (c) fluido incompresible, (d) geometría cilíndrica, (e) los mecanismos gravitacionales son despreciables. El líquido es caracterizado con la ecuación constitutiva Bautista Manero Puig (BMP) (Bautista et al. 1999). La cual, acopla la ecuación convectiva superior de Maxwell con una de tipo cinético (Fredrickson). La ecuación cinética describe los procesos de formación y destrucción de la estructura. El modelo contiene 5 propiedades materiales: fluidez a bajo y alto corte, una constante cinética para el cambio de estructura, un tiempo de reestructuración del material y el módulo elástico que está asociado con la elasticidad del material. A partir de las consideraciones antes expuestas, se obtuvieron expresiones analíticas para la velocidad axial, fluidez, flujo volumétrico y primera diferencia de esfuerzos normales. Para facilitar la interpretación física se proponen variables escaladas las cuales, introducen tres grupos adimensionales que describen los procesos de estructuración y desestructuración y visco-elasticidad del material. A partir de estos, se analizan los mecanismos: (i) adelgazamiento o engrosamiento, (ii) tixotropía o reopexía, (iii) y efectos de la concentración a través de la variación de las propiedades materiales. Finalmente, la propuesta de este trabajo se centra en que todos los resultados son de tipo analítico y no hay aproximaciones de tipo numérico.

Palabras claves: Fenómenos de Transporte, Fluido Viscoso, Modelo BMP, adelgazamiento y engrosamiento al corte, tixotropía y reopexia.



CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN



1.1.1 Antecedentes

El estudio reológico de sistemas complejos han sido punto de partida de varios grupos de investigación a nivel nacional e internacional, y su descripción reológica en el régimen lineal y no lineal, es punto de partida en la descripción de fluidos complejos, materia suave y nuevos materiales (Zana Raoul et al. 2007)

Entre estos sistemas, podemos mencionar: (i) polímeros, (ii) sistemas micelares, (iii) sistemas coloidales, (iv) cristales líquidos neumáticos, (v) cristales líquidos colestericos, (vi) sistemas biológicos, etc. (De Andrade Lima y Rey 2005, 2006; Davies et al. 1978; Dunwoody 1996). Para describir este tipo de sistemas se han empleado diferentes tipos de ecuaciones constitutivas (Herrera-Valencia et al. 2009, 2010)

Los modificadores reológicos son polímeros capaces de absorber agua en grandes cantidades, permitiendo que a grandes concentraciones se traslapen unas cadenas sobre otras formando una red tridimensional o madeja siendo estas liberadas en un disolvente (Bautista et al. 2006; Herrera-Valencia et al. 2009, 2010)

Cuando la concentración es suficiente grande, varias cadenas de polímero se entrelazan entre si formando una red que confiere una mayor viscosidad y propiedades elásticas a la disolución (Bautista et al. 2006).

La resistencia a deformaciones que opone la red tridimensional depende de la cantidad de entrelazamientos físicos entre cadenas, del peso molecular del polímero y de la concentración (Zana Raoul et al. 2007).

El efecto de la estructura se cuantifica a través de los cambios macroscópicos, de la viscosidad, i.e. un fluido con mayor cantidad de puntos estructurales, presenta menor fluidez (mayor viscosidad) que aquel con un menor número de puntos estructurales (Zana Raoul et al. 2007; Bautista et al. 1999).



1.1.2 Estructura y comportamientos de los tensoactivos.

Los tensoactivos o también llamados surfactantes, tienen una estructura molecular que consiste de un grupo estructural que tiene muy poca atracción por el disolvente, conocido como grupo liófilo o liofílico y un grupo que tiene una fuerte atracción por el disolvente llamado grupo liofóbico. Esto es conocido como estructura anfipática (o anfifílica). Cuando una molécula con una estructura anfipática es disuelta en un disolvente, el grupo liofóbico puede distorsionar la estructura del disolvente, incrementando la energía libre del sistema. (Zana R. et al. 2007; Henley et al.200)

Cuando esto ocurre, el sistema responde de alguna manera con el fin de minimizar el contacto entre el grupo liofóbico y el disolvente. En el caso de que el surfactante se encuentre en medio acuoso, el grupo liofóbico o grupo hidrofóbico distorsiona la estructura del agua (por rompimiento de los puentes de hidrógeno entre las moléculas de agua (Zana R. et al. 2007; Henley et al.2000).

Como resultado de la distorsión algunas moléculas de surfactante son expulsadas a las interfaces del sistema, con sus grupos hidrofóbicos orientados con el fin de minimizar el contacto con el agua. La superficie del agua llega a ser cubierta con una capa de moléculas de surfactante con sus grupos hidrofóbicos orientados predominantemente hacia el aire, ya que las moléculas de aire son no polares por naturaleza, como los grupos hidrofóbicos. Esto es lo que provoca una disminución en la tensión superficial. Por otra parte, la presencia del grupo liofílico o grupo hidrofílico impide que el surfactante sea expulsado completamente del disolvente como una fase separada, ya que eso requeriría la deshidratación del grupo hidrofílico. De esta manera, una estructura anfipática no solo disminuye la tensión superficial, sino que orienta las moléculas de la superficie hacia el grupo hidrofílico en la fase acuosa, y aleja a las moléculas del grupo hidrofóbico lejos del solvente. (Zana R. et al. 2007; Bautista, F Sotero 2002).



1.1.3 Tensoactivo CTAT.

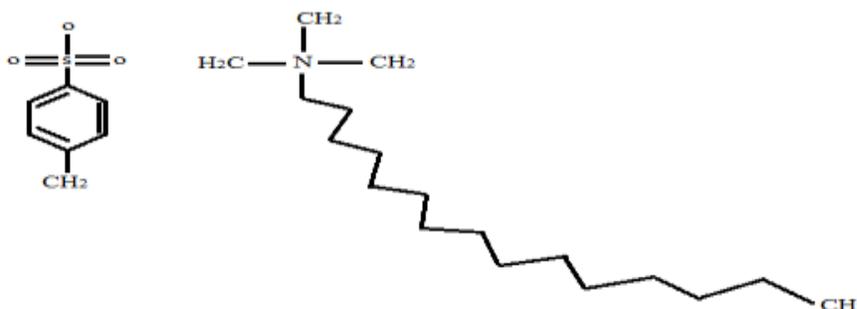


Figura 1.1 El tensoactivo CTAT (cetiltrimetilamonio sulfonato p-tolueno $C_{19}H_{42}N \cdot C_7H_7O_3S$) Peso molecular de 455.74 g/mol, tensoactivo del tipo catiónico. La concentración micelar crítica de surfactante CTAT en agua suele ser relativamente baja, e incluso a concentraciones de 3% ya se empiezan a observar las micelas tipo gusano. (www.advance-scientific.com, hoja de seguridad CTAT.)

1.1.4 Sistemas micelares y concentración de micelar crítica (CMC)

Las micelas son agregados moleculares de los tensoactivos que se forman en mezclas de tensoactivo y disolvente. Cuando una molécula anfifílica es colocada en algún solvente (considérese agua), se presenta una situación inusual: las regiones polares de la molécula gozan la asociación con el agua, pero la parte no polar o la región hidrofóbica tiene una tendencia a separarse del agua para evitar el contacto. Como resultado de esas tendencias opuestas, las moléculas anfifílicas se auto-ensamblan en estructuras las cuales alcanzan el mínimo contacto del grupo no polar con agua, y al mismo tiempo se tiene el máximo contacto del grupo polar con el disolvente. Esas estructuras (o agregados) son conocidos como micelas. Al proceso de formación de micelas se le conoce como micelización. (Zana Raoul et al. 2007)

La micelización es un mecanismo alternativo a la adsorción en las interfaces para remover grupos hidrofóbicos del contacto con el agua, reduciendo la energía libre del sistema. (Zana Raoul et al. 2007).



Dependiendo de la estructura química del tensoactivo, sus micelas pueden ser catiónicas, catiónicos, zwitteriónicos, no iónicos. Esta propiedad única de los tensoactivos hace que las soluciones acuosas de tensoactivos sean medios microheterogéneos. (Zana Raoul et al. 2007).

La concentración por encima de la cual se forman las micelas se conoce como concentración micelar crítica (CMC). Arriba de la CMC, los monómeros y las micelas existen en el equilibrio dinámico. Las micelas son pequeñas partículas coloidales. El valor de la CMC puede ser determinada por el cambio en las propiedades fisicoquímicas de la solución de surfactante conforme la concentración de tensoactivo aumenta, tales como la conductividad eléctrica molar, la tensión superficial, la turbidez, entre otras (Zana R. et al. 2007).

Los agregados micelares (Fig. 1.2) pueden formar un gran número de formas complejas incluyendo micelas esféricas y gusanos, vesículas y bicapas lipídicas. La morfología de los agregados complejos depende del tamaño de la cabeza del grupo de tensoactivo, la longitud y el número de colas, la larga, la sanidad de la solución, temperatura, y las condiciones de flujo. Los tensoactivos con una cabeza grande y una cola corta tienden a formar micelas esféricas mientras los tensoactivos con cabezas pequeñas y colas largas tienden a formar micelas tipo gusano. Los que presentan dos o más colas tienden a formar bicapas. (Rothstein et al. 2008)

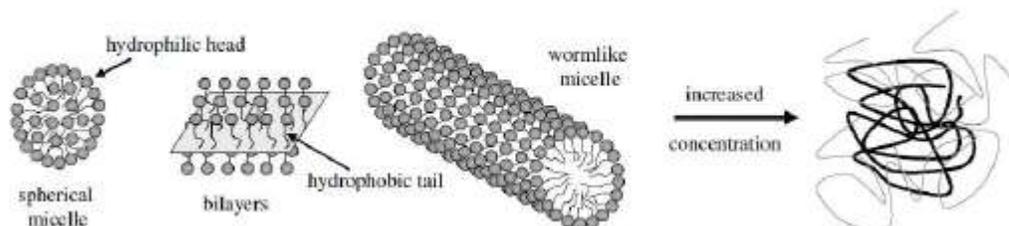


Figura 1.2 Diagrama esquemático de soluciones de tensoactivo mostrando varias morfologías. (Rothstein et al. 2008)



1.1.5 Mecanismos de formación de micelas

En la literatura de la formación de micelas, dos modelos primarios han ganado aceptación general como modelos útiles para el entendimiento del proceso. Se basa en un balance entre las micelas formadas y destruidas por efecto del flujo. Por otra parte, los dos enfoques están basados en: (i) La ley de acción de masas y (ii) Un efecto termodinámico. Para la primera, en el cual las micelas y las especies monoméricas (moléculas de surfactante) se consideran como si estuvieran en equilibrio químico y el modelo de separación de fase, en el cual las micelas se consideran que constituyen una nueva fase formada en el sistema por arriba de la CMC. En el caso, el enfoque de la termodinámica clásica es usado para describir el proceso completo de formación de micelas (; Rothstein et al. 2008; Zana R. et al. 2007)



Con una correspondiente constante de equilibrio K_m , dada por:

$$K_m = \frac{[S_n]}{[S]^n} \quad (1.2)$$

Donde n es el número de moléculas o monómeros de surfactante en la micela, S representa a la molécula de tensoactivo, y S_n representa a la micela, los corchetes indican concentraciones molares. Teóricamente uno debe usar actividades en lugar de concentraciones en la Ec. (1.2); de esta manera la sustitución de concentraciones por actividades es justificada por el hecho de que la concentración micelar crítica ocurre a bajas concentraciones, en las que los coeficientes de actividad pueden suponerse como la unidad. (Rothstein et al. 2008; Zana R. et al. 2007)

Se ha observado que la CMC es característica y única para cada tensoactivo a una temperatura dada. Si C_t denota la concentración total de surfactante en solución, C_s es la fracción de tensoactivo presente como moléculas libres, y C_m el estado de



agregación (Rothstein et al. 2008; Zana R. et al. 2007), la Ec. (1.2) puede ser escrita como:

$$K_m = \frac{C_m}{(C_s)^n} \quad (1.3)$$

En el proceso de formación de micelas, habrá algún valor de C , C_{eq} en el cual el número de moléculas de tensoactivos en la forma micelar será igual a las moléculas de tensoactivo que se encuentran libres. Usando la Ec. (1.3), uno puede escribir (Rothstein et al. 2008; Zana R. et al. 2007):

$$K_m = \left(\frac{1}{2} C_{eq} \right)^{-(n-1)} \quad (1.4)$$

A cualquier valor de C_t , la ecuación entre C_s y C_m puede ser encontrado por sustitución de la Ec. (1.4) en la Ec. (1.3)

$$\frac{C_m}{(C_s)^n} = \left(\frac{1}{2} C_{eq} \right)^{-(n-1)} \quad (1.5)$$

Dónde:

$$C_t = C_s + C_m \quad (1.6)$$

Reordenando la Ec. (1.5):

$$\frac{C_m}{C_{eq}} = \frac{1}{2} \left(\frac{2C_s}{C_{eq}} \right)^n \quad (1.7)$$



Usando la Ec. (1.7) como punto inicial, uno puede estimar cómo varía la concentración en las proximidades de $C_t = C_{eq}$ para un determinado número de agregación. (Boek Es. Et al. 2008-2009; Zana R. et al. 2007)

El enfoque alternativo para el modelo de la formación de micelas es pensar en términos de un modelo de separación de fase en el cual, a la CMC, la concentración de las moléculas de surfactante libres llega a ser constante (como un límite de solubilidad), y todas las moléculas adicionales formarán las micelas. El análisis de los enfoques produce el mismo resultado en términos energéticos para el proceso de formación de micelas, de esta manera, la elección del modelo es realmente asunto de preferencia o circunstancias. (Boek Es. Et al. 2008-2009; Zana R. et al. 2007)

1.1.6 El estudio teórico de fluidos reológicos en geometrías simples.

La reología y transferencia de momento ha sido estudiada en fluidos complejos en geometrías simples como son: (i) capilares, (ii) rendijas, (iii) cilindros concéntricos, (iv) esferas y (v) geometrías que involucran expansiones y contracciones de flujo (Phan-Thien et al. 2015; Pérez-Camacho et al 2018). Los tipos de flujo más investigados son: (a) Flujo cortante simple en estado estacionario y homogéneo, inducido por un gradiente de presión en la dirección de flujo, (b) por mecanismos gravitacionales, (c) por un gradiente de presión pulsátil y (d) por flujo por compresión que combina flujo cortante y extensional. Este sistema se estudia en problemas de lubricación y la geometría consiste en dos platos separados por una distancia H y una longitud característica radial $r = a$. El fluido se coloca en el plato inferior y el plato superior se aproxima al inferior a una velocidad constante (El lector interesado vea Bird et al. 2002, Cap. 3, problema 2.B.8).

En este mismo rubro, Oliveira y Pinho (1999) y Oliveira (2002) deducen soluciones analíticas para el flujo transitorio en rendijas y geometrías cilíndricas con diferentes ecuaciones constitutivas visco-elástica no lineal las cuales son descritas a través de los parámetros materiales asociados a los modelos matemáticos.



Suponiendo flujo incompresible (densidad constante), y asumiendo que el sistema de flujo se encuentra totalmente desarrollado, se obtienen expresiones cerradas (analíticas), para los perfiles de velocidad, flujo volumétrico, velocidad promedio, viscosidad cortante y primera diferencia de esfuerzos normales respectivamente. (Phan-Thien 1977, 1978; Pinho y Oliveira 2000; Oliveira 2002).

Este modelo ha sido empleado en la caracterización reológica de polímeros fundidos y se ha encontrado una relación aceptable entre los resultados experimentales y teóricos. En este mismo contexto, el modelo PPT-exponencial y PTT linealizado se ha utilizado en la descripción del flujo electro-osmótico con gradiente de presión y tomando en cuentas los mecanismos del solvente (Alves et al. 2001). Distribución de partículas en medios visco-elásticos con diferentes cargas bajo la acción combinada de gradientes de presión, efectos gravitacionales y campos eléctricos, son de vital importancia en los estudios básicos de liberado de fármacos (Alves et al. 2001; Afonso et al. 2009).

Afonso et al. (2010) analizaron el fenómeno electro-osmótico mediante ecuaciones visco-elástica no lineales tipo Phan-Thien, tomando en cuenta los efectos del solvente y del polímero. Su trabajo demostró que la reología y flujo dependen de las propiedades materiales de la ecuación constitutiva (viscosidades a corte bajo, alto, tiempos de relajación, tiempos de flujo etc.).

La influencia de estos materiales, fue analizada a través de grupos adimensionales asociados a los diferentes mecanismos aplicados (Bird et al. 1977) y de nueva cuenta, sus resultados reflejan los efectos de las propiedades electro-reológicas newtonianas sobre el flujo.

En este contexto, muchas ecuaciones constitutivas han sido empleadas con el fin de caracterizar la reología y transferencia de momento en sistemas complejos. En este punto, podemos mencionar las siguientes: (i) Phan-Thien-Tanner, (ii) Modelo de Tanner, (iii) Giesekus, (iv) De Kee, (v) White-Metzner, (vi) Oldroyd B, etc. Todas estas



ecuaciones constitutivas tratan de describir el comportamiento lineal y no lineal de estos sistemas. La mayoría de estos modelos describen los siguientes mecanismos: (i) Adelgazamiento y Engrosamiento al corte, (ii) Tixotropía, (iii) Reopexía, etc. La mayoría tiene expresiones analíticas para flujos sencillos de Couette, Poiseuille y flujos combinados, etc. Sin embargo, la mayoría de estos modelos, contiene parámetros de ajuste, es decir que no pueden obtenerse de experimentos reológicos en estado estacionario y no estacionario (Phan-Thien 1977, 1978; Pinho y Oliveira 2000; Alves et al. 2001; Cruz y Pinho 2004; Cruz et al. 2005; Oliveira 2002). Una revisión de este tipo de modelos se puede consultar en el libro de Bird 2012 (Segunda edición, Cap. 8)

La mayoría de los modelos mencionados no describen los procesos de formación y destrucción de la estructura, i.e. no interpretan el cambio de viscosidad en términos de la estructura en la mayoría de los fluidos de interés en la industria y en otras ramas de la ciencia. Además, contienen parámetros de ajuste y que no pueden ser obtenidos en términos de experimentos reológicos, por lo tanto, fluidos como los sistemas micelares, dispersiones de cristales líquidos, polímeros asociativos, fluidos biológicos como la sangre con hipercolesterolemia, coloides deben ser interpretados en términos de su estructura.

Precisamente esta es la razón de esta tesis, utilizar un modelo adecuado que prediga la dinámica no lineal y lineal de un sistema estructurado micelar tipo gusano, que son materiales estructurados que dependen de la posición r , al tiempo t .

En este punto, existen aspectos de interés en los flujos complejos sometidos a flujo cortante simple inducido por un gradiente de presión constante.

- a) Proponer un modelo dinámico lineal y no lineal que pueda describir un fluido con estructura transitoria
- b) A través de las propiedades materiales del modelo propuesto se podrá describir los mecanismos más importantes como son: (i) Adelgazamiento, (ii)



Engrosamiento, (iii) Tixotropía, (iv) Reopexía, (v) Dependencia de la concentración en el sistema

- c) ¿Qué tipo de números adimensionales describen estos mecanismos?
- d) Se podrán obtener expresiones analíticas para: (i) el perfil de velocidades, (ii) flujo volumétrico, (iii) fluidez aparente en función de los números adimensionales.

Para contestar estas preguntas, se plantean los siguientes objetivos.

1.2 Objetivos

El objetivo general y los objetivos particulares de la presente investigación son mencionados a continuación:

1.2.1 Objetivo general

Analizar el comportamiento reológico de un sistema micelar tipo gusano deformado continua e irreversiblemente por un gradiente de presión constante en la dirección de flujo en un capilar de radio $r = a$ y longitud axial z .

1.2.2 Objetivos particulares

Particular 1: Determinar el flujo de un líquido complejo (micelas de gusano) sometido a un gradiente de presión constante en la dirección axial.

Particular 2: Caracterizar la cinemática y dinámica del sistema mediante una ecuación constitutiva que describa el rompimiento de estructura por efecto del flujo.

Particular 3: Proponer un conjunto de variables adimensionales con el fin de obtener un conjunto de números adimensionales que describa la física del sistema.

Particular 4: Obtener los perfiles de velocidad y flujo volumétrico en función de los grupos adimensionales correspondientes.



1.2 Hipótesis del sistema

Si el flujo y la reología de un sistema estructurado depende del número de entrecruzamientos en el tiempo t , **entonces** el cambio en la estructura podrá ser cuantificada a través de los procesos cinéticos de construcción y destrucción del sistema

1.4 Distribución del material de estudio

Se realizó el estudio de la reología y transferencia de momento de un sistema micelar, sometido a un gradiente de presión en la dirección de la velocidad (axial). Mediante las condiciones de proceso y utilizando las variables adimensionales, se obtuvieron expresiones para el esfuerzo cortante, función viscosidad y rapidez de deformación del modelo BMP en forma adimensional. A partir de la ecuación de momento se obtuvo una expresión para el esfuerzo cortante τ_r . Expresando la rapidez de deformación en términos del esfuerzo cortante y los números adimensionales, se obtuvieron: los perfiles de velocidad en el sistema, fluidez aparente, y flujo volumétrico. El material de este proyecto de investigación se ha dividido de la siguiente manera: (1) **En el capítulo 1** se introduce al lector a las definiciones básicas y conceptos de sistema micelar, tensoactivo y formación micelas. **En el capítulo 2** se discute básicamente los conceptos de reología, el modelo BMP y la evolución de este en la literatura especializada concerniente al tema. **En el capítulo 3,** se presenta el modelado matemático, sistema físico, ecuaciones de continuidad, transporte y reológica BMP. Asumiendo estado estacionario, flujo homogéneo y fluido incompresible se obtienen las propiedades materiales del sistema de estudio, junto con el balance simplificado de cantidad de momento. **En el capítulo 4,** se propone un conjunto de números adimensionales con el fin de re-escribir las expresiones obtenidos en términos de estos. La intención de esto, es entender la metodología por separado de las ecuaciones dimensionales y adimensionales de las ecuaciones de estudio. **En el capítulo 5** se describen las predicciones numéricas de las ecuaciones analíticas variando los diferentes mecanismos involucrados. Además, se presentan el análisis de resultados, conclusiones y trabajo futuro de este proyecto de investigación



de licenciatura. En la última sección al final de este trabajo, se presentan los apéndices. El primero contiene la deducción del perfil de velocidades, el segundo, la deducción del flujo volumétrico y la tercera el modelo propuesto para continuar esta investigación. Finalmente, este proyecto es una búsqueda constante en el entendimiento de sistemas complejos sometidos a flujo de Poiseuille, con el fin de dilucidar el comportamiento reológico.



CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO



2.1 Flujo de Hagen-Poiseuille de fluidos newtoniano

El flujo de Hagen-Poiseuille es un flujo in-homogéneo ya que la rapidez de deformación depende de la posición. Este ha sido ampliamente estudiado con diferentes ecuaciones constitutivas. En esta sección, se presentan los resultados más importantes de un fluido newtoniano deformado por medio de un gradiente de presión. (Consultar apéndice A para ver deducción de la Ec. Hagen-Poiseuille para un newtoniano) Del balance de fuerzas de la Ec. de movimiento se obtiene una igualdad entre las divergencias del tensor de esfuerzos $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$ y el gradiente de presión ∇P :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \nabla p \quad (2-1)$$

Si la dirección de la velocidad es el eje coordenada z y se transmite el momento en r , siendo el eje neutral θ , se tiene lo siguiente:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rz}) = \frac{\partial p}{\partial z} \quad (2-2)$$

Suponiendo que la relación entre el esfuerzo cortante y la rapidez con la que se deforma el fluido se tiene esta relación:

$$\sigma_{rz} = \mu \frac{\partial V_z}{\partial r} \quad (2-3)$$

En donde, μ es la viscosidad newtoniana. Combinando la Ec. (2-2) y (2-3) obtenemos la siguiente expresión:

$$\mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) = \frac{\partial p}{\partial z} \quad (2-4)$$

Integrando dos veces la Ec. (2-4) con respecto a la coordenada radial r , se tiene el perfil general de velocidades:

$$V_z(r) = \frac{r^2}{4\mu} \frac{dp}{dz} + C_1 \ln r + C_2 \quad (2-5)$$



Suponiendo que no existe deslizamiento en la pared del sistema y que la velocidad debe ser finita en $r=0$, se plantean las siguientes condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} V_z(r=a) &= 0 \\ V_z(r=0) &= \text{finito} \end{aligned} \quad (2-6)$$

Al sustituir las condiciones de frontera en la Ec. (2-5) y obteniendo los valores de C_1 y C_2 se obtiene el siguiente perfil de velocidades para el fluido newtoniano. Nótese que este, describe una parábola y que en el centro del sistema se obtiene la velocidad máxima:

$$V_z(r) = \frac{a^2}{4\mu} \left(-\frac{dp}{dz} \right) \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] \quad (2-7)$$

La ecuación general para el flujo volumétrico está dada por la doble integral por el campo de velocidades con respecto al área de sección transversal

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^a V_z(r) r dr d\theta \quad (2-8)$$

Sustituyendo el perfil de velocidades en la Ec. (2-8) e integrando con respecto a las coordenadas radial y angular, se tiene la expresión del modelo del flujo volumétrico de un fluido newtoniano (Hagen y Poiseuille)

$$Q = \phi_0 \frac{\pi a^4}{8} \left(-\frac{dp}{dz} \right) \quad (2-9)$$

La Ec. (2-9) depende de la fluidez (inverso de la viscosidad), la cuarta potencia del radio del capilar y del negativo del gradiente de presión.

$$-\frac{dp}{dz} = -\left(\frac{p_L - p_o}{L} \right) = \frac{p_o - p_L}{L} \quad (2-10)$$



2.2 Flujo volumétrico de un fluido No-Newtoniano.

En la siguiente sección se aplicaran los criterios establecidos de las Ecs. (2-10) para un fluido no-newtoniano modelado con el modelo reológico BMP (Bautista-Manero-Piug).

Básicamente la Ec. (2-9) es la misma para un fluido No-Newtoniano, excepto, que la fluidez se cambia por la fluidez aparente en el sistema, es decir:

$$Q_{NW} = \varphi_{app} \frac{\pi a^4}{8} \left(-\frac{dp}{dz} \right) \quad (2-11)$$

Multiplicando y dividiendo por la fluidez a bajo corte se obtiene la siguiente expresión:

$$Q_{N-NW} = \frac{\varphi_{app}}{\varphi_0} \varphi_0 \frac{\pi a^4}{8} \left(-\frac{dp}{dz} \right) \quad (2-12)$$

Finalmente en flujo No-Newtoniano se puede expresar por la fluidez aparente

$$Q_{NN} = \left(\frac{\varphi_{app}}{\varphi_0} \right) Q_N \quad (2-13)$$

La Ec. (2-13) representa el punto medular de este trabajo y básicamente se interpreta de la siguiente manera. El flujo de un líquido de Hagen-Poiseuille no-newtoniano (Inhomogéneo) es el producto de una fluidez reducida o normalizada con la fluidez a bajo corte, multiplicada por el flujo volumétrico newtoniano. En la siguiente sección se presentara la Ec, constitutiva de en un sistema estructurado y la cual es punto de partida en la deducción de una expresión del flujo volumétrico a gradiente depresión constante de un líquido complejo. El propósito es obtener una ecuación similar la Ec. (2-13).

2.3 Modelo Bautista-Manero-Puig

Las ecuaciones constitutivas son aquellas que relacionan el esfuerzo y la deformación y en las que pueden intervenir también otras magnitudes como la temperatura, rapidez de formación y cualquier otra propiedad mecánica relacionada



con el material analizado. Debido a la naturaleza compleja de algunos fluidos, un modelo constitutivo no puede reproducir la dinámica de flujo y los procesos de formación y destrucción de la microestructura debido al flujo. En estos casos, usualmente se considera que las propiedades reológicas dependen de un parámetro estructural (que considera enredos moleculares, redes de uniones, entre otros). Dichas propiedades cambian con la rapidez de deformación, como la viscosidad y depende del nivel de la estructura del fluido. Cuando la estructura se rompe debido al flujo, la viscosidad decrece. Se ha encontrado que la no linealidad y el comportamiento de las funciones reológicas es causado por la estructura interna de la materia, el cual puede ser descrito por un conjunto de dos ecuaciones. Una de ellas es la ecuación constitutiva, que permite obtener el esfuerzo σ como función del tensor rapidez de deformación \mathbf{D} para cada posible estado de la estructura en determinada posición \mathbf{r} . La otra es una ecuación cinética que describe la tasa de cambio de estructura con la cinética instantánea, por ejemplo, la rapidez de deformación. Debido a que la ruptura de la estructura llega a ser un sistema dependiente, no es posible obtener una única ecuación que describa estos procesos. Varios modelos han sido propuestos para asignar diferentes formas a la ecuación constitutiva básica y a la ecuación cinética para el parámetro estructural. Usualmente, dicho parámetro es relacionado con una propiedad reológica medible. La viscosidad aparente ha sido usada como una medida de la estructura. Esto es equivalente a suponer que la viscosidad es proporcional al número instantáneo de puntos estructurales, enlaces o entrecruzamientos físicos al tiempo t . De esta manera, la rapidez de cambio de estos depende del número de puntos iniciales y del trabajo hecho sobre el sistema. Para tomar en cuenta la naturaleza visco-elástica del material, Bautista et al. (1999) propusieron la ecuación constitutiva Bautista-Manero Puig (BMP). En este modelo se describe el estado reológico de un fluido con estructura transitoria (por estructura transitoria se entiende que la viscosidad del fluido es proporcional al número de puntos o entrecruzamientos físicos al tiempo t). El modelo BMP se describe a continuación (Bautista et al. 1999):



$$\boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{G_0 \varphi} \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{2}{\varphi} \mathbf{D} \quad (2-14)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\lambda} (\varphi_0 - \varphi) + K (\varphi_\infty - \varphi) \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \quad (2-15)$$

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{D\boldsymbol{\sigma}}{Dt} - \left\{ (\nabla \mathbf{V})^T \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{V} \right\} \quad (2-16)$$

$$\frac{D}{Dt} \boldsymbol{\sigma} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) \boldsymbol{\sigma} \quad (2-17)$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \left[\nabla \mathbf{V} + (\nabla \mathbf{V})^T \right] \quad (2-18)$$

La Ec. (2-14) es la ecuación convectiva superior de Maxwell del tensor de esfuerzos visco-elásticos. En la Ec. (2-14) φ es la fluidez (inverso de la viscosidad, $\varphi = \eta^{-1}$), λ_φ es un tiempo de restructuración que depende de las propiedades de flujo a través del segunda invariante del tensor rapidez de deformación. El tensor de esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}$, es un tensor de origen visco-elástico y \mathbf{D} es el tensor rapidez de deformación que es la parte simétrica del tensor espacial gradiente de velocidad $\nabla \mathbf{V}$. El símbolo $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}$ arriba del tensor de esfuerzos visco-elástico es la derivada codeformacional de este, y es descrito por la Ec. (2-16). Esta derivada se puede extender como una extensión de la derivada material del tensor de esfuerzos $D\boldsymbol{\sigma}/Dt$ y es conocida en la literatura de la mecánica de medios continuos como derivada material, operador de Stokes o derivada substancial del sistema. Para incluir los efectos no lineales, esta derivada fue extendida a través de los productos entre los tensores gradiente de velocidad, transpuesta del tensor gradiente de velocidad y el tensor de esfuerzo visco-elástico.

Uno de los modelos cinéticos más exitosos en la última década es el modelo de BMP (Bautista Manero Puig) (Manero et al. 1999; Manero et al. 2002), el cual ha sido utilizado en la descripción de fluidos complejos que se encuentran bajo flujo como son los sistemas micelares tipo gusano, cristales líquidos, polímeros asociativos que presentan un comportamiento similar al de las micelas gigantes, nanocompuestos, entre otros (Herrera et al. 2009, 2010, Herrera et al. 2017). La ventaja del modelo BMP con respecto a los otros modelos reológicos no lineales: (i) PTT, (ii) Giesekus, (iii) Tanner, (iv) Oldroyd B, etc. (Bird et al 1977, 2002) es su sencillez para predecir



flujos en geometrías simples en flujo cortante y extensional uniaxial. En corte el modelo BMP (Bautista et al. 1999; Manero et al 2002) predice:

- a) Adelgazamiento y engrosamiento al corte
- b) Tixotropía y Reopexía
- c) Primera diferencia de esfuerzos normales

Otra de las ventajas de este modelo, es que todas las propiedades materiales $\{\eta_0, \eta_\infty, K, \lambda, G_0\}$ y que pueden ser calculados mediante experimentos reológicos en estado estacionario y no estacionario y poseen una interpretación física. $\{\eta_0, \eta_\infty\}$ son las viscosidades a bajo y alto corte, G_0 es el módulo elástico (recuperación del material), K es una constante cinética y λ es un tiempo de restructuración del sistema después de un periodo de deformación.

La elección de este modelo, fue debido a su simplicidad en comparación con otros mucho más complejos, además todas las propiedades materiales pueden ser calculadas mediante experimentos reológicos.



CAPÍTULO III

PROBLEMA FÍSICO

Y

MODELADO MATEMÁTICO

En este capítulo se presenta el sistema físico empleado para un flujo micelar tipo gusano, así como la caracterización con la ecuación constitutiva BMP las funciones materiales, el perfil de velocidades, flujo volumétrico, fluidez aparente.

3.1 Problema físico

Un diagrama esquemático del presente problema se da en Fig.4. El flujo rectilíneo isotérmico e inestable se consigue bajo un gradiente de presión (flujo de Poiseuille) en un tubo / capilar de radio adimensional $r = a$, y longitud axial adimensional $z = L \gg 1$. El sistema presenta simetría angular, es decir, todas las variables dinámicas son independientes de la coordenada angular dimensional θ . En este sistema, todas las magnitudes físicas se definen en coordenadas cilíndricas (r, θ, z) con respecto a un origen en el centro del capilar. El gradiente de presión solamente tiene una componente en la dirección axial, es decir. El vector velocidad solamente tiene una componente diferente de cero en el eje coordenado axial z . El gradiente de velocidad se da en la dirección y , suponemos que el fluido es visco-elástico e incompresible. El proceso se lleva a cabo en régimen permanente e isotérmico.

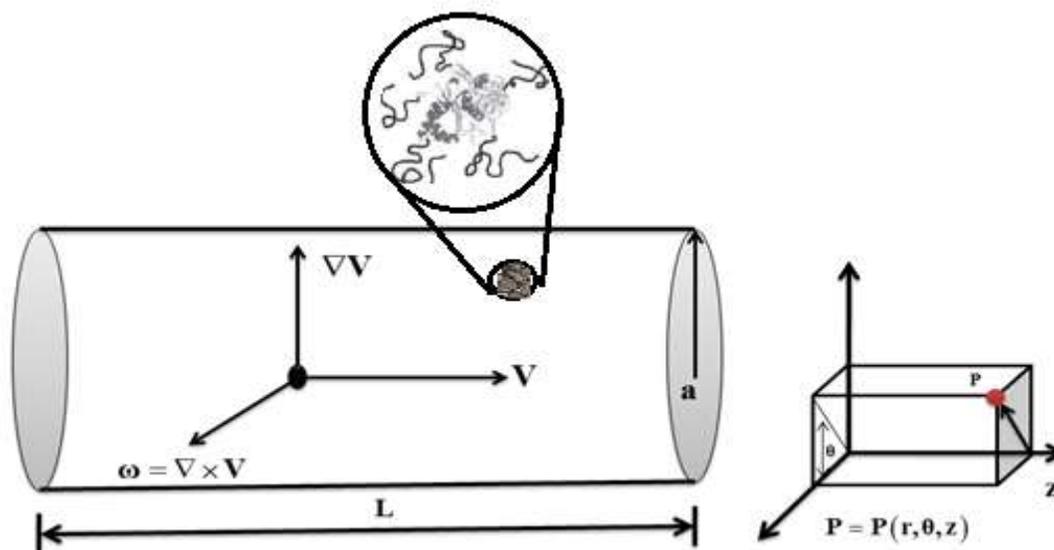


Figura 3.1. Representación esquemática del flujo de Poiseuille en el tubo capilar que muestra el campo de velocidad, la velocidad del gradiente y la vorticidad y



la velocidad cilíndrica (r, θ, z) utilizando la coordenada para describir un punto genérico P.

En este capítulo se modela en un flujo cortante simple inducido por el gradiente de presión constante y el comportamiento reológico de un sistema micelar. El mismo está dividido en la ecuación BMP y a partir de esta, se calcularán las funciones materiales del sistema como son esfuerzo cortante, función viscosidad, primera diferencia de esfuerzos normales y flujo volumétrico. Para su descripción reológica planteamos las siguientes físicas:

- Estado estacionario: ninguna variable dinámica o intrínseca del sistema dependen del tiempo.
- El fluido se deforma continua e irreversiblemente debido a un gradiente de presión constante en la dirección axial z.
- Los efectos gravitacionales son despreciables (Tubo horizontal)
- Flujo cortante simple. El vector velocidad solo depende de una coordenada
- Fluido incompresible (densidad constante, i.e. no depende del tiempo y de la posición matemáticamente, se tiene un flujo solenoidal)
- Proceso isotérmico (Temperatura constante, $T = \text{cte}$).

3.2 Funciones materiales del modelo BMP

Debido a la simetría del tensor de esfuerzos $\sigma_{zr} = \sigma_{rz}$, por lo que solamente debe de tomarse solo una de estas ecuaciones: (Ver la deducción en el apéndice B)

$$\sigma_{zr} = \eta \left(\dot{\gamma}_{zr} \right) \dot{\gamma}_{zr} \quad (3.1)$$

A partir de la Ec. (3.1) obtenemos la componente zz del tensor de esfuerzos:

$$\sigma_{zz} = 2 \frac{\eta \left(\dot{\gamma}_{zr} \right)}{G_0} \dot{\gamma}_{zr} \sigma_{zr} = 2 \frac{\sigma_{zr}^2}{G_0} \quad (3.2)$$

La ecuación cinética, se reduce a la siguiente forma algebraica:

$$K\lambda\sigma_{zr}^2\varphi^2 + (1 - K\lambda\varphi_\infty\sigma_{zr}^2)\varphi - \varphi_0 = 0 \quad (3.3)$$



La Ec. (3.3) puede ser resuelta utilizando la ecuación algebraica de segundo orden, por lo que se tiene lo siguiente:

$$\boxed{\varphi(\sigma_{zr}) = \frac{K\lambda\varphi_{\infty}\sigma_{zr}^2 - 1 + \sqrt{(K\lambda\varphi_{\infty}\sigma_{zr}^2 - 1)^2 + 4K\lambda\sigma_{zr}^2\varphi_0}}{2K\lambda\sigma_{zr}^2}} \quad (3.4)$$

La Ec. (3.4) es la fluidez en estado estacionario y homogéneo del modelo BMP. Esta ecuación tiene dos límites asintóticos a bajos y altos cortes. Es decir, se satisfacen los siguientes límites:

$$\text{Lim}_{\sigma_{zr} \rightarrow 0} \varphi(\sigma_{zr}) = \varphi_0 \quad (3.5 a)$$

Y

$$\text{Lim}_{\sigma_{zr} \rightarrow \infty} \varphi(\sigma_{zr}) = \varphi_{\infty} \quad (3.5 b)$$

La rapidez de deformación en términos del esfuerzo cortante, se puede expresar como:

$$\frac{dV_z}{dr} = \varphi(\sigma_{zr})\sigma_{zr} = \frac{K\lambda\varphi_{\infty}\sigma_{zr}^2 - 1 + \sqrt{(K\lambda\varphi_{\infty}\sigma_{zr}^2 - 1)^2 + 4K\lambda\sigma_{zr}^2\varphi_0}}{2K\lambda\sigma_{zr}} \quad (3.6)$$

La rapidez de deformación tiene dos límites asintóticos a baja y alta rapidez de deformación respectivamente:

$$\text{Lim}_{\sigma_{zr} \rightarrow 0} \frac{dV_z}{dr} = \varphi_0\sigma_{zr} \quad (3.7)$$

y

$$\text{Lim}_{\sigma_{zr} \rightarrow \infty} \frac{dV_z}{dr} = \varphi_{\infty}\sigma_{zr} \quad (3.8)$$



3.3 Perfil de velocidades del modelo BMP

A continuación se presentan las ecuaciones del perfil de velocidades axial en el sistema de flujo (Ver apéndice C para ver el cálculo):

$$V_z(r) = \int \left(\frac{K\lambda\phi_\infty\sigma_{zr}^2 - 1 + \sqrt{(K\lambda\phi_\infty\sigma_{zr}^2 - 1)^2 + 4K\lambda\sigma_{zr}^2\phi_0}}{2K\lambda\sigma_{zr}} \right) dr + C \quad (3.9)$$

Al substituir el esfuerzo constante r_z de la ecuación de movimiento tomando en cuenta estado estacionario y mecanismos inerciales despreciables, se tiene lo siguiente:

$$\sigma_{zr} = \frac{1}{2} \nabla_z p r \quad (3.10)$$

La integral se resuelve utilizando varios cambios de variables, por lo que se utilizan el programa Mathematica 11.1 (Licencia UNAM):

$$V_z(r) = \frac{\phi_\infty (\nabla_z p / 2)}{4X^2} \left\{ u + \sqrt{(u-1)^2 + 4\phi_r u} + (2\phi_r - 1) \text{Ln} \left| \frac{1 - (2\phi_r + u) - \sqrt{(u-1)^2 + 4\phi_r u}}{1 + (2\phi_r - 1)u + \sqrt{(u-1)^2 + 4\phi_r u}} \right| \right\} + C \quad (3.11)$$

Suponiendo que no existe deslizamiento en la pared, se cumple la siguiente condición de frontera, por lo que:

$$r = a; V_z(r=a) = 0 \quad (3.12)$$

Por lo que la constante C de la Ec. (3.11) toma la forma:



$$C = \frac{\varphi_{\infty} (\nabla_z p/2)}{4X^2} \left\{ - \left(u_w + \sqrt{(u_w - 1)^2 + 4\varphi_r u_w} \right) - (2\varphi_r - 1) \text{Ln} \left| \frac{1 - (2\varphi_r + u_w) - \sqrt{(u_w - 1)^2 + 4\varphi_r u_w}}{1 + (2\varphi_r - 1)u_w + \sqrt{(u_w - 1)^2 + 4\varphi_r u_w}} \right| \right\} \quad (3.13)$$

Sustituyendo las Ecs. (3.13) y el término $u_w = X^2 a^2$ se tiene lo siguiente:

$$V_z(r) = \frac{\varphi_{\infty} (\nabla_z p/2)}{4X^2} \left\{ u - u_w + \sqrt{(u-1)^2 + 4\varphi_r u} - \sqrt{(u_w - 1)^2 + 4\varphi_r u_w} + (2\varphi_r - 1) \text{Ln} \left| \frac{1 - (2\varphi_r + u) - \sqrt{(u-1)^2 + 4\varphi_r u}}{1 - (2\varphi_r + u_w) - \sqrt{(u_w - 1)^2 + 4\varphi_r u_w}} \right| \right. \\ \left. + \text{Ln} \left| \frac{1 + (2\varphi_r - 1)u_w + \sqrt{(u_w - 1)^2 + 4\varphi_r u_w}}{1 + (2\varphi_r - 1)u + \sqrt{(u-1)^2 + 4\varphi_r u}} \right| \right\} \quad (3.14)$$

La Ec. (3.15) se reduce al modelo Newtoniano cuando $\varphi_r = 1$, por lo que:

$$\text{Lim}_{\varphi_r \rightarrow 1} V_z(r) = \text{Lim}_{\varphi_r \rightarrow 1} \frac{\varphi_{\infty} (\nabla_z p/2)}{4X^2} \left\{ u - u_w + \sqrt{(u-1)^2 + 4\varphi_r u} - \sqrt{(u_w - 1)^2 + 4\varphi_r u_w} + (2\varphi_r - 1) \text{Ln} \left| \frac{1 - (2\varphi_r + u) - \sqrt{(u-1)^2 + 4\varphi_r u}}{1 - (2\varphi_r + u_w) - \sqrt{(u_w - 1)^2 + 4\varphi_r u_w}} \right| \right. \\ \left. + \text{Ln} \left| \frac{1 + (2\varphi_r - 1)u_w + \sqrt{(u_w - 1)^2 + 4\varphi_r u_w}}{1 + (2\varphi_r - 1)u + \sqrt{(u-1)^2 + 4\varphi_r u}} \right| \right\} \quad (3.15)$$

Por lo que

$$\text{Lim}_{\varphi_r \rightarrow 1} (2\varphi_r - 1) \text{Ln} \left| \frac{1 - (2\varphi_r + u) - \sqrt{(u-1)^2 + 4\varphi_r u}}{1 - (2\varphi_r + u_w) - \sqrt{(u_w - 1)^2 + 4\varphi_r u_w}} \right| = 0 \quad (3.16)$$

Por lo tanto, el perfil de velocidades toma se simplifica a:



$$\text{Lim}_{\phi_r \rightarrow 1} V_z(r) = \text{Lim}_{\phi_r \rightarrow 1} \frac{\phi_\infty (\nabla_z p/2)}{4 X^2} \left\{ u - u_w + \sqrt{(u-1)^2 + 4u} - \sqrt{(u_w - 1)^2 + 4u_w} \right\} \quad (3.17)$$

Por lo que, se tiene lo siguiente:

$$V_z(r) = \frac{\phi_0 a^2}{4} \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right) (-\nabla_z p) \quad (3.18)$$

La Ec. (3.14) es el perfil general del modelo BMP la cual, es consistente con el perfil newtoniano cuando la fluidez reducida es igual a la unidad, i.e. $\phi_r = 1$, por lo que la condición sería:

$$\boxed{\text{Lim}_{\phi_r \rightarrow 1} V_z(r) \rightarrow V_{z_N}(r) = \frac{a^2 \phi_0 (-\nabla_z p)}{4} \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right)} \quad (3.19)$$

La Ec. (3.15) es la solución analítica para el perfil de velocidades del modelo BMP. Nótese que depende del gradiente de presión, y las propiedades materiales del modelo BMP. La velocidad máxima toma la forma:

$$V_{\max} = V_z(r=0) = \frac{\phi_\infty (\nabla_z p/2)}{4 X^2} \left\{ -u_w - \sqrt{(u_w - 1)^2 + 4\phi_r u_w} + (2\phi_r - 1) \text{Ln} \left| \frac{2B}{2B + u_w + \sqrt{(u_w - 1)^2 + 4\phi_r u_w} - 1} \right| + \text{Ln} \left| \frac{1 + (2B - 1)u_w + \sqrt{(u_w - 1)^2 + 4\phi_r u_w}}{2} \right| \right\} \quad (3.20)$$

3.4 Flujo volumétrico del modelo BMP

La Ec. (3.19) es extremadamente compleja, por lo que el flujo volumétrico requiere de muchos procedimientos algebraicos, por lo que se procede inicialmente con la expresión general del flujo volumétrico. Al integrar una vez por partes, y suponiendo que no hay deslizamiento en la pared, se tiene lo siguiente (Ver apéndice D para la deducción de flujo aparente):



$$Q = -\pi \int_0^a \frac{\partial V_z(r)}{\partial r} r^2 dr \quad (3.21)$$

La Ec. (3.21) nos permite calcular el flujo volumétrico en función de la rapidez de deformación

$$Q = -\pi \int_0^a \left(\frac{K\lambda\phi_\infty (\nabla_z p/2)^2 r^2 - 1 + \sqrt{(K\lambda\phi_\infty (\nabla_z p/2)^2 r^2 - 1)^2 + 4K\lambda\phi_0 (\nabla_z p/2)^2 r^2}}{2K\lambda(\nabla_z p/2)r} \right) r^2 dr \quad (3.22)$$

Simplificando la expresión, se tiene lo siguiente:

$$Q = -\frac{\pi}{4} \phi_\infty \frac{(\nabla_z p/2)}{(K\lambda\phi_\infty (\nabla_z p/2)^2)^2} \int_0^{u_w} \left(u - 1 + \sqrt{(u-1)^2 + 4\phi_r u} \right) du \quad (3.23)$$

En donde el cambio de variable utilizado fue:

$$u = K\lambda\phi_\infty (\nabla_z p/2)^2 r^2 \quad (3.24)$$

Y la variable evaluada en la pared toma la forma:

$$u_w = K\lambda\phi_\infty (\nabla_z p/2)^2 a^2 \quad (3.25)$$

Y la fluidez reducida

$$\phi_r = \phi_0 / \phi_\infty \quad (3.26)$$

A partir de la Ec. (3.22), se tiene lo siguiente:

$$Q_{BMP} = \phi_{app} Q_N \quad (3.27)$$

En donde el flujo newtoniano,

$$Q_N = \phi_0 \frac{\pi}{4} a^4 (-\nabla_z p/2) \quad (3.28)$$



La fluidez se reduce al modelo newtoniano. Esto es claro de la Ec. (3.3) la cual algebraicamente es cuadrática en la fluidez:

$$\varphi_0 - \varphi + K\lambda(\varphi_\infty - \varphi)\sigma_{zr}^2\varphi = 0 \quad (3.29)$$

Si la lambda es cero, el producto $K\lambda$ es cero por lo que la fluidez se simplifica de la siguiente manera:

$$\varphi \rightarrow \varphi_0 \quad (3.30)$$

Entonces el flujo BMP se reduce al modelo newtoniano, i.e.

$$\boxed{\text{Lim}_{\lambda \rightarrow 0} Q_{\text{BMP}} = \text{Lim}_{K\lambda \rightarrow 0} Q_{\text{BMP}} \rightarrow Q_N = \varphi_0 \frac{\pi a^4}{8} (-\nabla_z p)} \quad (3.31)$$

Otra alternativa es a partir de la definición de flujo volumétrico

$$\text{Lim}_{\lambda \rightarrow 0} Q = \text{Lim}_{\lambda \rightarrow 0} \pi \int_0^a \left(\frac{K\lambda\varphi_\infty (\nabla_z p/2)^2 r^2 - 1 + \sqrt{(K\lambda\varphi_\infty (\nabla_z p/2)^2 r^2 - 1)^2 + 4K\lambda\varphi_0 (\nabla_z p/2)^2 r^2}}{2K\lambda(\nabla_z p/2)r} \right) r^2 dr \quad (3.32)$$

Por lo tanto,

$$\text{Lim}_{\lambda \rightarrow 0} Q = \text{Lim}_{\lambda \rightarrow 0} \pi \int_0^a \left(\frac{-1 + \sqrt{1 + 4K\lambda\varphi_0 (\nabla_z p/2)^2 r^2}}{2K\lambda(\nabla_z p/2)r} \right) r^2 dr \quad (3.33)$$

Desarrollando el numerador de la integral en serie de Taylor, se tiene lo siguiente:

$$\sqrt{1 + 4K\lambda\varphi_0 (\nabla_z p/2)^2 r^2} \cong 1 + \frac{1}{2} (4K\lambda\varphi_0 (\nabla_z p/2)^2 r^2) = 1 + 2K\lambda\varphi_0 (\nabla_z p/2)^2 r^2 + O(4K\lambda\varphi_0 (\nabla_z p/2)^2 r^2) \quad (3.34)$$

Sustituyendo en la integral



$$\text{Lim}_{\lambda \rightarrow 0} Q = \text{Lim}_{\lambda \rightarrow 0} -\pi \int_0^a \left(\frac{-1 + 1 + 2K\lambda\phi_0 (\nabla_z p/2)^2 r^2}{2K\lambda(\nabla_z p/2)r} \right) r^2 dr \quad (3.35)$$

Simplificando:

$$\text{Lim}_{\lambda \rightarrow 0} Q = \text{Lim}_{\lambda \rightarrow 0} -\pi\phi_0 (\nabla_z p/2) \int_0^a r^3 dr = -\pi\phi_0 (\nabla_z p/2) \frac{r^4}{4} \Big|_0^a = \frac{\pi\phi_0 a^4}{8} (-\nabla_z p) \quad (3.36)$$

Por lo tanto, si el parámetro K tiende a cero, el flujo volumétrico es newtoniano.

En la siguiente sección se presenta un resumen de los resultados más importantes del presente capítulo.

3.5 Fluidez aparente del modelo BMP

La fluidez aparente del modelo BMP, (Ver Apéndice E para la deducción) se puede expresar en términos de la siguiente integral, por lo que:

$$\frac{\Phi_{app}}{\Phi_0} = \frac{1/\phi_r}{a^4 \left(K\lambda\phi_\infty (\nabla_z p/2)^2 \right)^2} \int_0^{u_w} \left(u - 1 + \sqrt{(u-1)^2 + 4\phi_r u} \right) du \quad (3.37)$$

Los límites asintóticos de la fluidez, toman la forma:

$$\text{Lim}_{\sigma_w \rightarrow 0} \frac{\Phi_{app}}{\Phi_0} = \frac{1/\phi_r}{a^4 \left(K\lambda\phi_\infty (\nabla_z p/2)^2 \right)^2} \int_0^{u_w} \left(u - 1 + \sqrt{(u-1)^2 + 4\phi_r u} \right) du = 1 \quad (3.38)$$

$$\text{Lim}_{\sigma_w \rightarrow \infty} \frac{\Phi_{app}}{\Phi_0} = \frac{1/\phi_r}{a^4 \left(K\lambda\phi_\infty (\nabla_z p/2)^2 \right)^2} \int_0^{u_w} \left(u - 1 + \sqrt{(u-1)^2 + 4\phi_r u} \right) du = \phi_\infty \quad (3.39)$$

Por lo tanto, el flujo volumétrico toma la forma, para el modelo BMP:

$$Q_{BMP} = \left(\frac{\Phi_{app}}{\Phi_0} \right) Q_N = \frac{1/\phi_r}{a^4 \left(K\lambda\phi_\infty (\nabla_z p/2)^2 \right)^2} I(K\lambda, \phi_0, \phi_\infty, \nabla_z p) Q_N \quad (3.40)$$



$$\boxed{\lim_{\lambda \rightarrow 0} Q = \lim_{\lambda \rightarrow 0} -\pi \phi_0 (\nabla_z p / 2) \int_0^a r^3 dr = -\pi \phi_0 (\nabla_z p / 2) \frac{r^4}{4} \Big|_0^a = \frac{\pi \phi_0 a^4}{8} (-\nabla_z p)} \quad (3.41)$$

Por lo tanto, si el parámetro K tiende a cero, el flujo volumétrico es newtoniano.

El flujo volumétrico del modelo BMP se puede comprender como el producto del fluido newtoniano con la función fluidez aparente del modelo BMP, normalizada con la fluidez a bajo corte. Por otra parte, si el tiempo de restructuración tiende a cero, significa que el fluido es newtoniano, debido que la fluidez se reduce al modelo newtoniano.

3.6 Resumen de ecuaciones del capítulo 3

En este capítulo se desarrollaron los principales resultados analíticos de la presente tesis. Los resultados obtenidos son válidos, solamente para sistemas diluidos y semi-diluidos como aquellos correspondientes a los sistemas micelares tipo gusano, cristales líquidos, polímeros asociativos, sistemas biológicos como la sangre con bajo y alto colesterol respectivamente. Partiendo de la idea, de que el sistema de flujo se encuentra en estado estacionario, fluido incompresible, flujo homogéneo, mecanismos gravitacionales despreciables y que el fluido se corta debido a un gradiente de presión constante en la dirección primaria de flujo (coordenada axial z), el momento se transmite en la dirección del gradiente de velocidad (coordenada radial r) y la vorticidad que es el rotor de la velocidad, se transmite en la dirección neutra de nuestro sistema (coordenada angular). El fluido es caracterizado con la ecuación constitutiva de BMP, la cual acopla la ecuación codeformacional de Maxwell con una de tipo cinético que describe los cambios en la estructura, debido a dos procesos: (i) construcción de la estructura asociada a la relajación del sistema, y (ii) destrucción de la estructura que es proporcional al trabajo irreversible para destruir la estructura. Los resultados analíticos que fueron deducidos se enlistan a continuación:

- a) Perfil de velocidades axial
- b) Flujo volumétrico
- c) Fluidez aparente



CAPÍTULO IV

SIMULACIÓN COMPUTACIONAL Y ANÁLISIS DE RESULTADOS



4.1 Predicciones del modelo

Variables adimensionales

En este capítulo, se presentan las predicciones teóricas de este trabajo de licenciatura. Para facilitar la interpretación de los resultados, se propone un conjunto de variables características, con el fin de introducir grupos adimensionales que describan la física involucrada en el sistema. El conjunto de variables escaladas se enlista a continuación: (i) coordenadas axial y radial $\{r, z\}$, (ii) perfil de velocidades Vz , (iii) flujo volumétrico Q , (iv) fluidez aparente φ_{app} , (v) presión p , (vi) esfuerzo cortante σ_{rz} y (vii) esfuerzos normales $\{\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}\}$. Las variables características para las variables mencionadas: (i) es $r_c = a$, $z_c = L$; (ii) $Vc = \langle Vz \rangle_N$; (iii) $Qc = Q_N = \langle Vz \rangle_N \pi a^2$; (iv) $\varphi_c = \varphi_0$; (v) $p_c = \varphi_0^{-1} \langle Vz \rangle_N / a$; (vi) $\sigma_{rz} = \varphi_0^{-1} \langle Vz \rangle_N / a$; (vii) $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz} = \varphi_0^{-1} \langle Vz \rangle_N / a$.

Las variables adimensionales en este caso son:

$$r^* = \frac{r}{a}; z^* = \frac{z}{a} \quad (4.1)$$

$$Vz^* = \frac{Vz}{\langle Vz \rangle_N}; Q_{BMP}^* = \frac{Q_{BMP}}{Q_N} \quad (4.2)$$

$$\varphi_{app}^* = \frac{\varphi_{app}}{\varphi_0} \quad (4.3)$$

$$p^* = \frac{p}{\varphi_0^{-1} \langle Vz \rangle_N / a} \quad (4.4)$$

$$\sigma_{zr}^* = \frac{\sigma_{zr}}{\varphi_0^{-1} \langle Vz \rangle_N / a} \quad (4.5)$$

$$\sigma_{(ii)}^* = \frac{\sigma_{ii}}{\varphi_0^{-1} \langle Vz \rangle_N / a}, ii = \{rr, \theta\theta, zz\} \quad (4.6)$$

Las variables características geométricas r y z son escaladas con la longitud características asociadas al radio el tubo “ a ”. Bajo este contexto, la coordenada radial adimensional r^* está acotada entre 0 y 1. En contraste, la coordenada axial adimensional z^* está acotada entre 0 y el cociente $z/a \gg 1$. Geométricamente, el



sistema de flujo es un capilar de longitud muy grande L en comparación con la coordenada característica a .

La velocidad axial y el flujo volumétrico se han escalado con la velocidad promedio newtoniana.

$$\langle V_z \rangle_N = \frac{a^2 \varphi_0}{8} \left(-\frac{dp}{dz} \right) \quad (4.7)$$

La fluidez aparente es normalizada con la fluidez a bajo corte φ_0 . Bajo este contexto la fluidez aparente adimensional está normalizada a la unidad, i.e. $0 < \varphi_{app}^* < \varphi_\infty / \varphi_0$. Dependiendo el valor de las fluideces a bajo y alto corte el fluido puede ser adelgazante o espesante al corte respectivamente. La presión p , esfuerzo cortante σ_{rz} y esfuerzos normales $\{\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}\}$, son escalados con el esfuerzo cortante viscoso, i.e. el producto de la viscosidad a bajo corte φ_0^{-1} por el producto de la rapidez de deformación $\langle V_z \rangle_N / a$.

Números adimensionales

A partir de las variables adimensionales propuestas, se deducen los números adimensionales (Herrera et al. 2017; Castillo et al. 2018). El primero de ellos, B

$$B = \frac{\varphi_\infty}{\varphi_0} \quad (4.8)$$

es un cociente de fluideces el cual, relaciona el número de puntas estructurales a bajo y alto corte, i.e. las propiedades adelgazantes o engrosantes al corte. El segundo de ellos es un cociente de energías asociadas a los procesos irreversibles para destruir la estructura y la energía relacionada con la cinética y destrucción de la estructura.

$$A = \frac{\varphi_0^{-1} \langle V_z \rangle_N / a}{1/k\lambda} \quad (4.9)$$

El tercer grupo es el número de Weissenberg We

$$We = (\varphi_0 G_0)^{-1} \frac{\langle V_z \rangle_N}{a} \quad (4.10)$$



el cuál es el producto del tiempo de relajación característico del material a bajo corte $1/\varphi_0 G_0$ y la rapidez de deformación característica newtoniana $\langle Vz \rangle_N/a$. Si el Weissenberg tiende a cero, el fluido es inelástico newtoniano o no newtoniano dependiendo de la naturaleza reológica del material. Si $We = 1$, el fluido es viscoelástico, i.e. presenta componentes viscosos y elásticos respectivamente. Si $We \rightarrow \infty$, el fluido es dominado por los mecanismos elásticos principalmente.

Las ecuaciones analíticas adimensionales deducidas en este trabajo son:

- a) Perfil de velocidades
- b) Flujo volumétrico
- c) Fluidez aparente
- d) Primera diferencia de esfuerzos normales

Ecuaciones analíticas adimensionales

Velocidad axial

Las ecuaciones analíticas que describen los perfiles de velocidad axial, fluidez y flujo volumétrico en término de variables adimensionales, se describen a continuación:

$$Vz^* [A, B, \sigma_w^*, r^*] = \frac{1}{4A\sigma_w^*} \left\{ \begin{aligned} & AB\sigma_w^{*2}(1-r^{*2}) + \sqrt{(AB\sigma_w^{*2}-1)^2 + 4A\sigma_w^{*2}} - \sqrt{(AB(\sigma_w^* r^*)^2 - 1)^2 + 4A(\sigma_w^* r^*)^2} \\ & + \text{Log} \left| G_2 [A, B, \sigma_w^*, r^*] (G_3 [A, B, \sigma_w^*, r^*]) \right| \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

Donde G_1 y G_2 tienen la siguiente forma

$$G_2 [A, B, \sigma_w^*, r^*] = \frac{1 + A(2-B)(\sigma_w^* r^*)^2 + \sqrt{(AB(\sigma_w^* r^*)^2 - 1)^2 + 4A(\sigma_w^* r^*)^2}}{1 + A(2-B)\sigma_w^{*2} + \sqrt{(AB\sigma_w^{*2} - 1)^2 + 4A\sigma_w^{*2}}} \quad (4.12)$$



$$G_3 [A, B, \sigma_w^*, r^*] = \left(\frac{2 + AB^2 (\sigma_w^* r^*)^2 + B \left(\sqrt{(AB (\sigma_w^* r^*)^2 - 1)^2 + 4A_0 (\sigma_w^* r^*)^2 - 1} \right)}{2 + AB^2 \sigma_w^{*2} + B \left(\sqrt{(AB \sigma_w^{*2} - 1)^2 + 4A \sigma_w^{*2} - 1} \right)} \right)^{(B-2)/B} \quad (4.13)$$

El perfil de velocidades del modelo BMP depende de los números adimensionales A y B asociados a los procesos de formación y destrucción de la estructura y de la fuerza motriz relacionada con el esfuerzo en la pared σ_w^* .

Flujo volumétrico

El flujo volumétrico adimensional para el modelo BMP queda definido de la siguiente manera:

$$Q_{BMP}^* = \Phi_{(app)}^* \quad (4.14)$$

Fluidez aparente

En donde la fluidez aparente normalizada toma la forma:

$$\begin{aligned} \Phi_{(app)}^* [A, B, \sigma_w^*] = & \frac{1}{2} B - \frac{1}{A \sigma_w^{*2}} + \frac{1}{2A^2 B^2 \sigma_w^{*4}} \left((AB^2 \sigma_w^{*2} + 2-B) \left(\sqrt{(AB \sigma_w^{*2} - 1)^2 + 4A \sigma_w^{*2}} \right) - (2-B) \right) \\ & + \frac{2}{A^2 \sigma_w^{*4}} \left(\frac{B-1}{B^3} \right) \text{Log} \left| \frac{2 + AB^2 \sigma_w^{*2} + B \left(\sqrt{(AB \sigma_w^{*2} - 1)^2 + 4A \sigma_w^{*2} - 1} \right)}{2} \right| \end{aligned} \quad (4.15)$$

El flujo volumétrico del modelo BMP, Q_{BMP} ha sido escalado con el flujo volumétrico newtoniano, i.e. $Q_N = \varphi_0 \pi a^4 (-dp/dz)/8$. La fluidez aparente φ_{app} con la fluidez a bajos cortes, i.e. φ_0 . Es claro que, bajo esta propuesta adimensional, el flujo volumétrico cambia conforme la fluidez aparente, y esta depende de los números adimensionales A y B respectivamente: $\varphi_{(app)}^* = \varphi_{(app)}^*(A, B)$.

Primer coeficiente de esfuerzos normales



La parte elástica del material solo puede ser capturada a través del primer coeficiente de esfuerzos normales y depende de las propiedades materiales en el sistema a través de los grupos adimensionales A, B y We.

$$N_1^* = 2We\sigma_{zr}^{*2} = 2We\sigma_w^{*2}r^{*2} \quad (4.16)$$

Nótese que para un fluido newtoniano el primer coeficiente de esfuerzos normales, es cero, i.e. $N_1^* = 0$. La primera diferencia de esfuerzos normales, depende del número de Weissenberg multiplicado por la segunda potencia del producto del esfuerzo en la pared σ_w^* y la coordenada radial adimensional r^* respectivamente.

En las siguientes secciones, se analizarán los siguientes mecanismos a través de los números A y B discutidos en esta sección. Estos son:

- (a) Adelgazamiento o engrosamiento
- (b) Tixotropía y Reopexia
- (c) Concentración

4.2 Mecanismos adelgazantes y engrosantes al corte

Efecto del número B

En esta sección se analizará el efecto que tiene el número adimensional B en el sistema de flujo. Este número es un cociente de fluideces a alto y bajo corte respectivamente el cual, fue definido de la siguiente manera:

$$B = \frac{\Phi_\infty}{\Phi_0}$$

Este número tiene dos límites físicos. Si $B \gg 1$ el fluido es adelgazante al corte mientras que si $B \ll 1$, este es engrosante al corte. El caso newtoniano se obtiene cuando $B = 1$.

A) Fluidez aparente

Las simulaciones de esta sección (Figs. 4.1 y 4.2) fueron obtenidas utilizando las ecuaciones adimensionales previamente definidas. Los valores del modelo BMP fueron obtenidas del trabajo teórico de Bautista et al. (1999) para fluidos estructurados que presentan adelgazamiento, engrosamiento y tixotropía respectivamente. Los



datos empleados en las simulaciones de la fluidez adimensionales fueron tomados de la literatura ref. (Bautista et al. 1999, Ver Fig. 1). Los valores numéricos son: φ_{∞} (Pa s)⁻¹: (a = 0.0002); (b = 0.002); (c = 0.0053); (d = 0.20); (e = 1); φ_0 (Pa s)⁻¹ = 0.0053; G_0 (Pa) = 185; k (Pa⁻¹) = 3.9×10^{-5} ; λ (s): 0.14. Bajo este contexto los números adimensionales A y B toman tiene los siguientes valores: A =

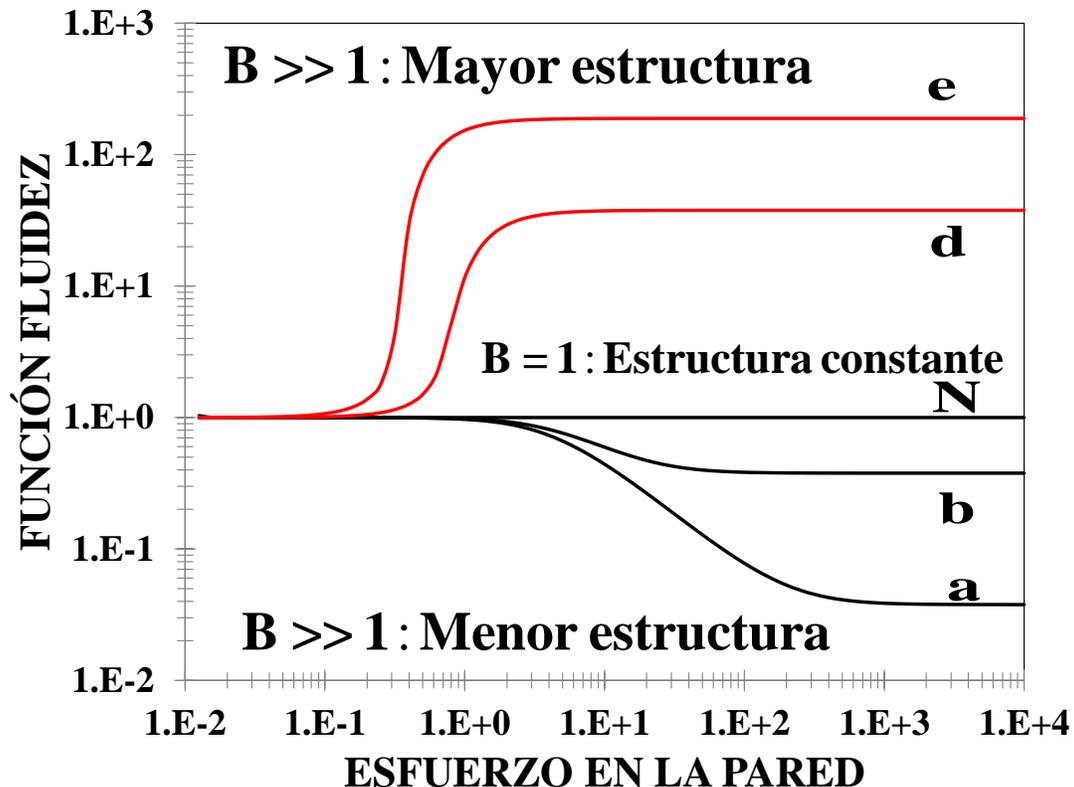


Figura 4.1. Fluidez adimensional vs esfuerzo en la pared para distintas condiciones materiales en función de los números adimensionales A y B. Los datos empleados en las simulaciones de la fluidez adimensionales fueron tomados de la literatura ref. (Bautista et al. 1999, Ver Fig. 1). Los valores numéricos son: φ_{∞} (Pa s)⁻¹: (a = 0.0002); (b = 0.002); (c = 0.0053); (d = 0.20); (e = 1); φ_0 (Pa s)⁻¹ = 0.0053; G_0 (Pa) = 185; k (Pa⁻¹) = 3.9×10^{-5} ; λ (s): 0.14.

La función fluidez aparente ilustrada en la Fig. 4.1 presenta tres comportamientos los cuales, son resumidos a continuación:

- a) Para $B \gg 1$, el primero de ellos asociado a la pérdida de puntos estructurales en el sistema debido al flujo (simulaciones {g,h}),



- b) Para $B = 1$, el sistema presenta una estructura constante e independiente del esfuerzo en la pared (Simulación N). Aquí la fluidez es la misma en toda la ventana de deformación.
- c) Para $B \ll 1$, asociada a una estructura más compacta que induce un mayor número de puntos estructurales al tiempo (Simulaciones {e, f})

Matemáticamente, la Fig. 4.1 muestra un comportamiento constante a esfuerzos en la pared bajos, i.e. $\sigma_w^* \in [10^{-2}, 10^{-1}]$ el comportamiento de la función fluidez es constante, mientras que, para un valor crítico de esfuerzo en la pared, la fluidez experimenta un comportamiento monótono creciente o monótono decreciente dependiendo, si aumenta (adelgazamiento al corte) o si decrece (espesamiento al corte) respectivamente. Para un segundo esfuerzo en la pared crítico, la fluidez es constante independientemente del valor del esfuerzo en la pared.

Físicamente, a esfuerzos en la pared bajos $\sigma_w^* \in (10^{-2}, 10^{-1})$, el fluido presenta una estructura constante independientes de los valores de A y B seleccionados.

En la zona de esfuerzos moderados (zona tipo ley de potencia), $\sigma_w^* \in (10^{-1}, 10^1)$, el sistema experimenta cambios constantes en su estructura debido al incremento del esfuerzo en la pared (simulaciones g, h). En otras palabras, si la fluidez aumenta, el número de puntos estructurales decrece debido a los esfuerzos internos por unidad de área en el bulto (Adelgazamiento al corte).

Por otra parte, si la fluidez decrece (simulaciones f, e de la Fig. 4.1), el número de puntos estructurales aumenta por efecto de tener una estructura más compacto debido a que se tiene una estructura más enredada (Engrosamiento al corte).

Finalmente, a esfuerzos en la pared altos, i.e. $\sigma_w^* \in [10^2, 10^4]$, la fluidez muestra un comportamiento constante independiente del esfuerzo en la pared que se aplique. Si la fluidez aumenta, el número de puntos decrece de tal manera que, el valor de esta depende del número B y es equiparable a la fluidez del solvente. El caso opuesto (Simulaciones f, e, Fig. 4.1) presenta el decremento de la fluidez lo que implicaría una estructura más enredada y compacta lo que induciría a un aumento en el número de



puntos estructurales. El caso $B = 1$ (Simulación N de la Fig., 4.4) es aquel en donde la fluidez es independiente del esfuerzo en la aplicado, i.e. el número de puntos estructurales es constante (líquido newtoniano).

B) Perfil de velocidades

En la Fig. 4.2, se presenta el perfil de velocidades en función de la coordenada radial en función del número adimensional B asociado a los procesos de destrucción y construcción de la estructura a bajos y altos cortes respectivamente.

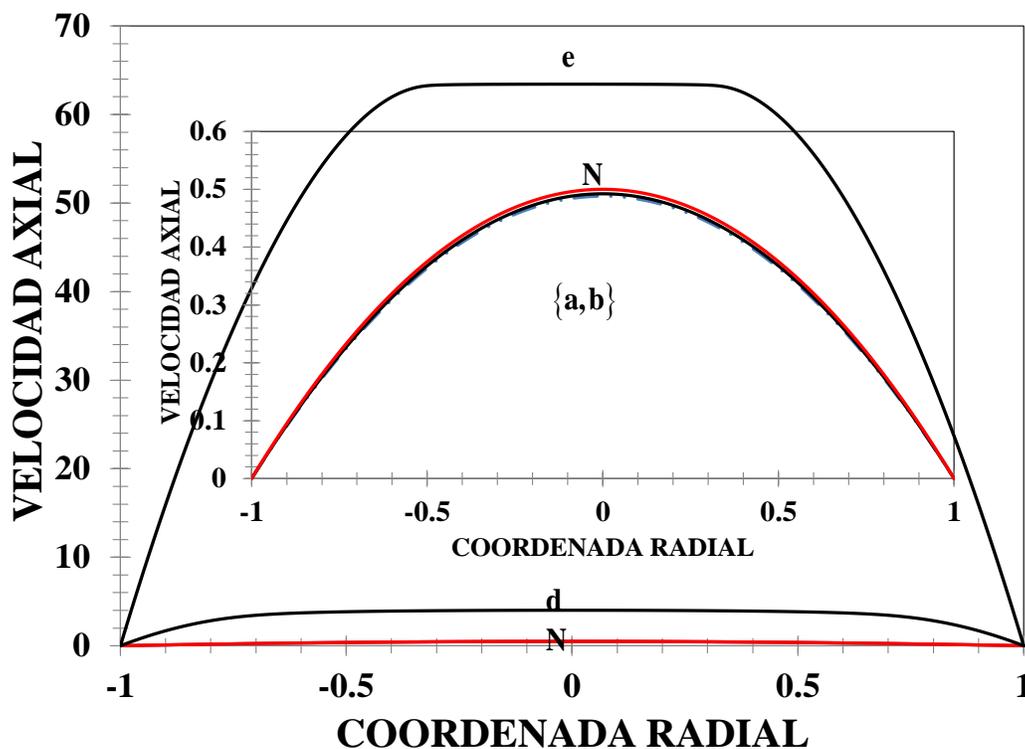


Figura 4.2-b Velocidad axial sin dimensiones vs coordenadas radiales adimensionales en función de los mecanismos de adelgazamiento y de espesamiento a través de los números adimensionales A y B. Los datos utilizados son los mismos de la Fig. 4.1

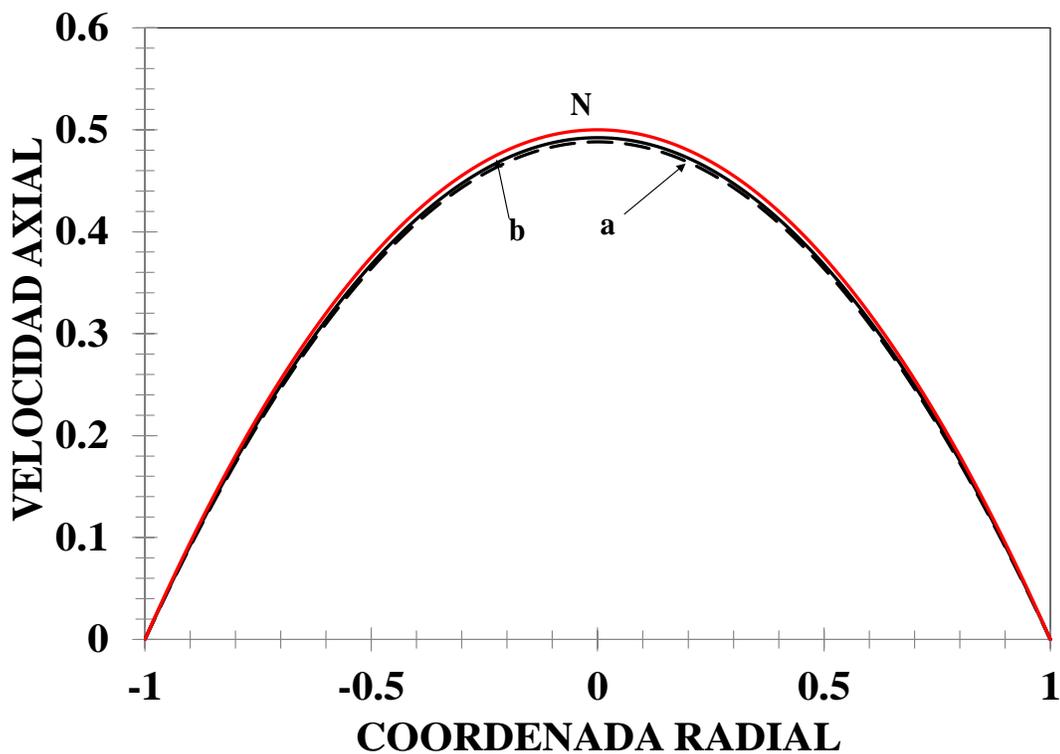


Figura 4.2-b. Velocidad axial sin dimensiones vs coordenadas radiales adimensionales en función de los mecanismos de adelgazamiento y de espesamiento a través de los números adimensionales A y B. Los datos utilizados son los mismos de la Fig. 4.1

En las Figs. 4.2 (a-b) se presentan las simulaciones del perfil velocidades para los datos ocupados en las simulaciones de la función fluidez de la Fig. 4.1. La simulación N de la Fig. 4.2 es la que corresponde a $B = 1$. En esta, se presenta una estructura constante. En la pared del capilar, la velocidad axial es cero, i.e. $V_z = 0$, debido a la adherencia del fluido al sólido. En el centro del capilar, $r^* = 0$, la velocidad axial es máxima y su valor es de 0.5 respectivamente.

Los casos {d, e} corresponden a un aumento en la fluidez ($B \gg 1$), i.e. que el sistema experimenta una disminución de puntos estructurales, lo que implica que los perfiles de velocidad aumentan, lo que es comprobable visualmente en la Fig. 4.2.

Por otra parte, los casos {a} corresponden a un líquido visco-elástico en el que su fluidez decrece con el esfuerzo en la pared. Los perfiles de velocidad parabólicos se



encuentran por debajo del fluido newtoniano (Fig. 4.2 (b)). Es claro que en la pared del sistema la velocidad del fluido es cero, mientras que en el centro es máxima. Nótese que, de las cinco simulaciones, el caso en donde la fluidez decrece (aumento en la viscosidad), muestra perfiles de velocidad parabólicos (Fig. 4.2 (b)) pero su velocidad máxima es mucho menor en comparación con los mecanismos adelgazantes en donde la fluidez aumenta considerablemente {a, b}.

En las cinco simulaciones, la velocidad máxima en los perfiles de velocidad puede ser determinada mediante evaluando la función $Vz^* (r^* = 0) = Vmax^*$, por lo que su expresión analítica queda determinada por.

$$Vz_{\max}^* [A, B, \sigma_w^*, r^* = 0] = \frac{1}{4A\sigma_w^*} \left\{ \frac{AB\sigma_w^{*2} + \sqrt{(AB\sigma_w^{*2} - 1)^2 + 4A\sigma_w^{*2} - 1}}{\text{Log} \left| G_2 [A, B, \sigma_w^*, r^* = 0] \left(G_3 [A, B, \sigma_w^*, r^* = 0] \right) \right|} \right\} \quad (4.17)$$

Es claro que la expresión de la velocidad máxima está determinada por un acoplamiento entre las propiedades viscosas, estructurales y cinéticas a través de los números adimensionales A y B respectivamente.

c) Flujo volumétrico

De acuerdo con el escalamiento propuesto en la primera sección de este trabajo, el flujo volumétrico es igual a la variación de la fluidez. A bajos y altos esfuerzos, el flujo volumétrico es constante debido a que esta normalizado con el flujo volumétrico newtoniano. A bajos esfuerzos en la pared, el flujo volumétrico tiene el siguiente límite asintótico:

$$\text{Lim}_{\sigma_w \rightarrow 0} Q_{\text{BMP}}^* = 1 \quad (4.18)$$

Mientras que valores altos del esfuerzo en la pared, se tiene lo siguiente:

$$\text{Lim}_{\sigma_w \rightarrow \infty} Q_{\text{BMP}}^* = B \quad (4.19)$$



Un caso particular del flujo volumétrico se obtiene cuando $B = 1$, es decir cuando el número de puntos estructurales a bajo y alto corte es el mismo, el flujo volumétrico del modelo BMP se reduce al Newtoniano, i.e..

$$\lim_{B \rightarrow 1} Q_{BMP}^* = 1 \quad (4.20)$$

d) Primera diferencia de esfuerzos normales

La primera diferencia de esfuerzos normales, depende del número de Weissenberg y de la segunda potencia del componente z_r del esfuerzo. Es claro que la elasticidad, depende del cuadrado de la fuerza motriz asociada al gradiente de presión y es una función cuadrática de la coordenada radial adimensional. Su valor máximo está determinado por:

$$N_{1,w}^* = N_1^* \Big|_{r^*=1} = 2We \sigma_{zr}^{*2} \Big|_{r^*=1} = 2We \sigma_w^{*2} \quad (4.21).$$

La Ec. (4.21) es el valor máximo de la primera diferencia de esfuerzos normales y se obtiene en la interface entre el sólido y la pared respectivamente. Por otra parte, en el centro del capilar $r^* = 0$, la elasticidad es cero, i.e. $N_1^* = 0$.

Finalmente, el número adimensional B , está asociado a los procesos de desestructuración del material a través de los cambios de las fludeces a bajo y alto corte, i.e. este es una medida de los procesos adelgazantes y engrosantes al corte respectivamente.

4. 3 Mecanismos tixotrópicos

Efecto del número adimensional A

En esta sección exploramos los efectos del número A el cual tiene la siguiente representación matemática

$$A = \frac{\phi_0^{-1} (\langle Vz \rangle / a)^2}{1/K\lambda}$$

Este número ha sido definido por Herrera-Valencia et al. (2017) como un cociente entre el trabajo irreversible para romper la estructura y la energía asociada a los procesos cinéticos y estructurales en el sistema. Este número ha sido utilizado



recientemente para describir fluidos tixotrópicos y elasto-plásticos (Castillos et al. 2018). Los límites de este número son $A \rightarrow 0$ esto implica que el trabajo irreversible asociado a la destrucción del material es pequeño, en comparación con los procesos cinéticos y estructurales. Si $A \rightarrow \infty$, el caso opuesto domina, i.e. el trabajo irreversible para romper la estructura domina sobre la energía asociada a la cinética y estructuración del material.

A Función fluidez

La Fig. 4.3. Ilustra la función fluidez adimensional vs el esfuerzo en la pared en función del número adimensional A . Los valores empleados en la simulación fueron obtenidos de Herrera et al. 2017, para un sistema micelar tipo gusano CTAT (Ver Tabla 1). Los parámetros materiales utilizados en la simulación son: (i) k [Pa^{-1}] = 39×10^{-6} ; (ii) λ [s]: (a) 0.14, (b) 0.10, (c) 0.01, (d) 0.001; (iii) G_0 [Pa] = 185; (iv) φ_0 [$\text{Pa}^{-1} \text{s}^{-1}$] = 0.0053; φ_∞ [$\text{Pa}^{-1} \text{s}^{-1}$] = 1. Herrera-Valencia et al. (2017) propuso que, para sistemas micelares, el tiempo característico t_c [s] = $\langle Vz \rangle/a$, es del orden del tiempo de restructuración, i.e. $t_c = \lambda$, y que la constante cinética k es igual al inverso del módulo elástico, por lo que: $k = 1/G_0$. Por lo tanto, el número adimensional A se reduce a: $A = (\varphi_0 G_0 \lambda)^{-1}$.

Los valores de A y B obtenidos con estos valores numéricos son:

$$B = (0.0053)^{-1}$$

$$A(\lambda) = (i) (185)^{-1} (0.0053)^{-1} \lambda^{-1}$$

Las predicciones de estos valores se presentan en las Figs. (4.3) y (4.4) respectivamente.

Matemáticamente, en las cinco simulaciones presentadas en la Fig. (4.3) se observan tres zonas. (i) A bajos esfuerzos en la pared σ_w [10^{-4} , 10^0] se observa una meseta en donde la estructura es constante. A un esfuerzo en la pared crítico, se observa un comportamiento monótono creciente, en donde el sistema (fluido visco-elástico) presenta constantes cambios en su estructura. A un segundo esfuerzo crítico, la función fluidez muestra otra meseta en donde está, es independiente del esfuerzo en la pared que se aplique en el sistema.



Físicamente, el líquido pasa de estados de menor a mayor fluidez por efecto de la fuerza que lo de forma continua e irreversiblemente asociada al producto del gradiente de presión y la longitud característica asociada al radio del tubo.

El efecto que tiene el número A en las simulaciones. El menor valor del número A extiende la primera región newtoniana antes de que el sistema experimente cambios continuos en su estructura debido al esfuerzo en la pared aplicado σ_w (zona tipo ley de potencia), como se observa en la simulación “a” de la Fig. 4.3. En contraste, si el valor de A aumenta su valor numérico se observa que el sistema pasa de estados de menos a mayor estructura por efecto del flujo, a un valor menor de esfuerzo en la pared. Esto es fácilmente observable en la simulación (e) de la Fig. 4.3.

Cuantitativamente, la simulación (a) de la Fig. 4.3 experimenta estos cambios de estructura a un valor de esfuerzo de pared $\sigma_w \cong 1$, mientras que la simulación (e) lo hace a un valor de esfuerzo en la pared de $\sigma_w \cong 10^{-3}$ aproximadamente. Esto implica que, la diferencia del esfuerzo en la pared aplicado en el sistema es del orden de la unidad, i.e. $\Delta\sigma_w = \sigma_{w2} - \sigma_{w1} \cong 0.999$ y $\Delta A = A_2 - A_1 \cong 0.984$.

Por lo tanto, las siguientes observaciones son importantes;

- a) El efecto de los mecanismos tixotrópicos está relacionado con el valor del número A .
- b) El efecto de la tixotropía se puede entender como el cociente de dos tiempos característicos $A = \lambda/\lambda_0$. EL primero de ellos asociado a los procesos de restructuración del material, mientras que el otro a los visco-elásticos, i.e. a los asociados al flujo.
- c) Si $A \gg 1$, el tiempo de restructuración es mayor por lo que el sistema necesita de un menor esfuerzo en la pared para experimentar cambios en la estructura.
- d) Si $A \ll 1$, el tiempo de flujo es mayor y el sistema necesita mayor energía asociada al esfuerzo en la pared para cambiar su estructura.
- e) Las curvas de la Fig. 4.3, son las correspondientes a los ciclos de tixotropía, en reometría de fluidos complejos. Bautista et al. (1999) demostró mediante



rampas de esfuerzo que estas curvas, están controladas por la reestructuración en el sistema, i.e. por el tiempo de reestructuración λ .

- f) Los mecanismos adelgazantes o engrosantes al corte dependen exclusivamente del número B, i.e. si $B \gg 1$, el fluido es adelgazante al corte, mientras que, si $B \ll 1$, el efecto opuesto es claramente visto (engrosamiento al corte).

4. 4 Mecanismos reopécticos

A. Función fluidez

Los mecanismos reopécticos también llamados anti-tixotrópicos y se obtienen cuando el fluido experimenta un engrosamiento al corte y presenta ciclos de competencia entre los tiempos de reestructuración y de flujo del material. Básicamente, el comportamiento es el mismo que en la Fig. 4.3. Los parámetros materiales utilizados en la descripción de la Fig. 4.3 son los mismos que en la Fig. 4.3., excepto que la fluidez a alto corte se modifica por: $\varphi_{\infty}[\text{Pa}^{-1} \text{s}^{-1}] = 0.0002$. Utilizando este valor en B se obtiene $B = \varphi_{\infty} / \varphi_0 = 0.0002 / 0.0053 = 0.038$.

Bajo estos mismos argumentos observamos un comportamiento similar a de la Fig. 4.3 por lo que, las conclusiones son muy similares. A bajo y a alto esfuerzo en la pared el sistema presenta dos mesetas en donde la estructura no cambia. A moderaos esfuerzos en la pared, el sistema experimenta un decremento en la fluidez (aumento del número de puntos estructurales en el sistema). La extensión de la zona newtoniana (simulación “a” de la Fig. 4.4) o el decremento de esta (simulación “e” de la Fig.4.4), depende de la relación entre los tiempos de reestructuración λ y el tiempo de flujo λ_0 respectivamente.

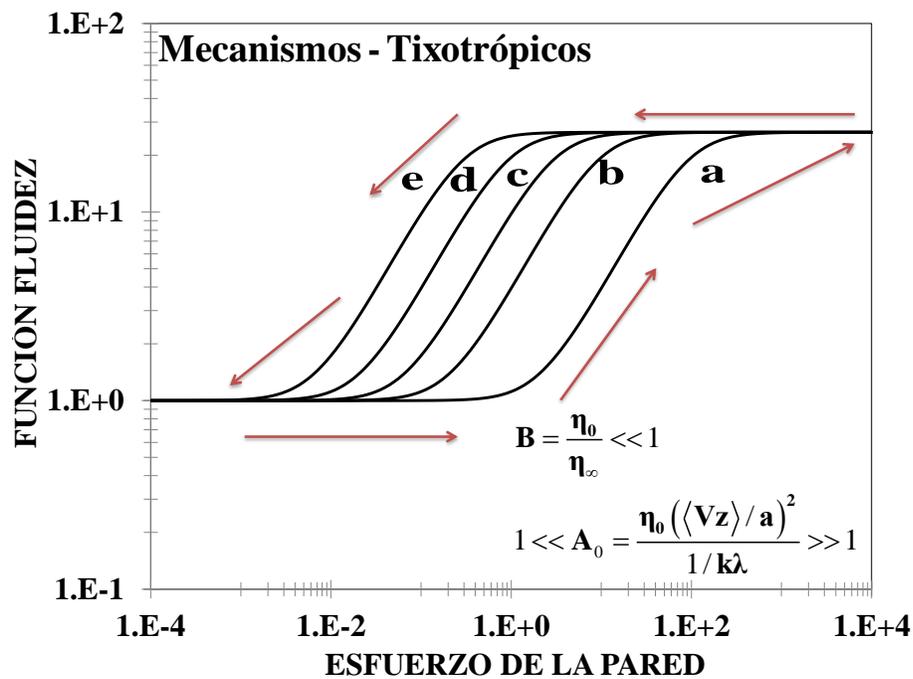


Figura 4.3. Función fluidez adimensional vs esfuerzo en la pared en función en función de los mecanismos tixotrópicos a través del número adimensional A. Los valores numéricos de A y B se, muestran a continuación: A: (i) 7.3, (ii) 10.2, (iii) 101.989, (iv) 1019.89; y B = 189.

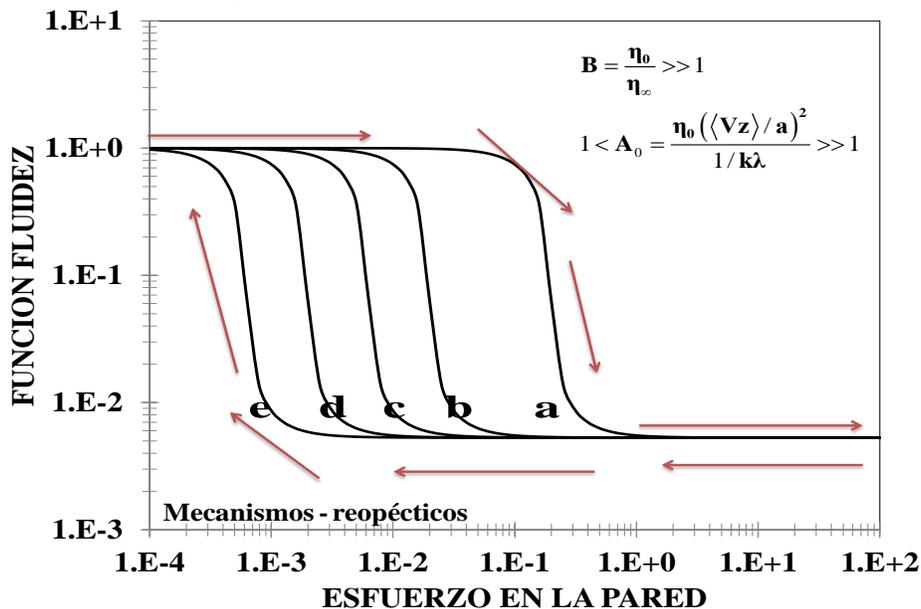


Figura 4.4. Función fluidez adimensional vs esfuerzo en la pared en función en función de los mecanismos reopéticos a través del número adimensional A. Los valores numéricos de A y B se, muestran a continuación: A: (i) 7.3, (ii) 10.2, (iii) 101.989, (iv) 1019.89; y B = 189.



C. Perfil de velocidades

La Fig. 4.5, ilustra el perfil de velocidad para un fluido estructurado vs la coordenada radial adimensional r^* . se presentan cinco simulaciones con diferentes valores en el tiempo de restructuración del material.

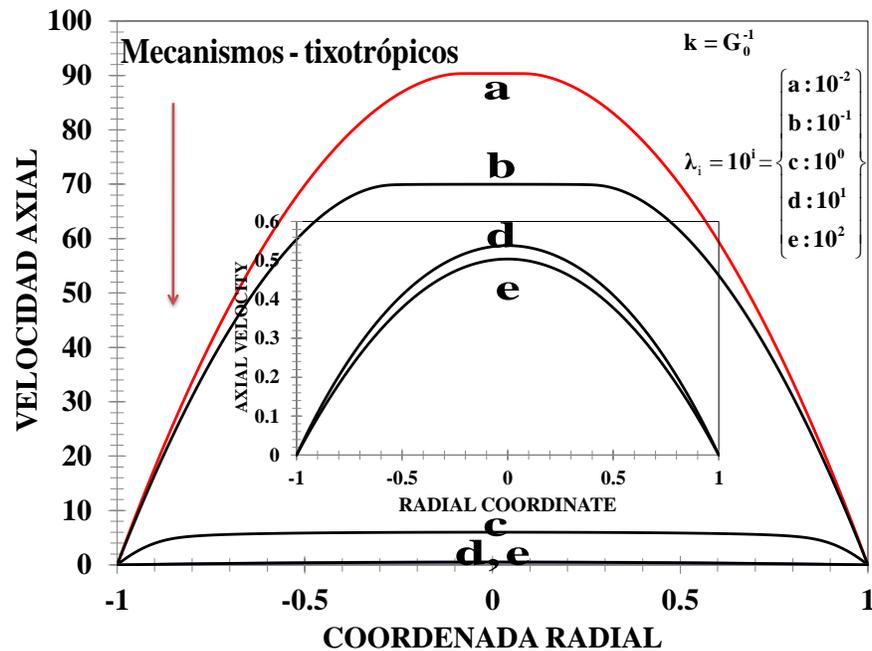


Figura 4.5. Velocidad axial sin dimensiones vs coordenada radial en función de la estructura del sistema. El efecto del tiempo de restructuración del material influye en el número adimensional y por ende en el perfil de velocidades.

Se observa que, en todos los casos, el perfil de velocidades es parabólico, sin embargo, al aumentar el tiempo de restructuración del material el sistema decrece su velocidad, debido a que se favorece los mecanismos cinéticos estructurales en el sistema por lo que velocidad decrece considerablemente como se observa en la Fig. 4.5. Es claro que el tiempo de restructuración favorece, los ciclos de tixotropía en el sistema. Por otra parte, en todas las simulaciones, se observan los perfiles parabólicos que consisten en curvas axi-simétricas con la máxima velocidad en el centro del tubo, En la simulación "b" de la Fig.4.5, se observa una zona en donde existe un frente homogéneo de velocidades. Es claro que la dinámica lineal y no lineal del sistema se debe al valor numérico de los números adimensionales A y B



asociados a la cinética, la estructura y el mecanismo viscoso a rapidezces de deformación bajas y altas respectivamente.

4.5 Efecto de la concentración

En esta sección se analizan los efectos de la concentración de un sistema micelar tipo gusano en los números adimensionales A y B. Al aumentar la concentración del líquido visco-elástico, las propiedades materiales del sistema cambian por efecto de la concentración, por lo tanto, este cambio será cuantificado indirectamente a través de los números adimensionales en el sistema.

$$A (\% \text{ wt.}) = \frac{\varphi_0^{-1} (\langle V_z \rangle / a)^2}{1/K\lambda}; B (\% \text{ wt.}) = \frac{\varphi_\infty}{\varphi_0}$$

Como en los casos anteriores, el primer punto a analizar es la función fluidez. Los parámetros materiales que serán utilizado en esta sección corresponden a un sistema micelar tipo gusano, los cuales fueron obtenidos por Soltero et al. (1999), los cuales son resumidos en la Tabla 4.1

Tabla 4.1 propiedades materiales del modelo BMP en función de la concentración

Ecuación constitutiva BMP	Constante Cinética	Tiempo de restructuración del material	Modulo Elástico	Viscosidad A baja rapidez de deformación	Viscosidad a alta rapidez de deformación
Material Properties	$k \times 10^5$ [Pa ⁻¹]	λ [s]	G_0 [Pa]	η_0 [Pas]	η_∞ [Pas]
Concentración del tesnoactivo catiónico CTAT (wt. %)					
5%					
10%	2500	0.12	41.5	0.0275	19.8
15%	303	0.33	176.0	0.0061	15.0
20%	105	0.38	138.0	0.0050	12.6
	42	0.42	620.0	0.0042	12.0

Soltero et al. 1999. (Tabla 3). A partir de la tabla 4.1 se construyen los números adimensionales A y B

Tabla 4. 2 Números adimensionales en función de la concentración



Números Dimensionales	$A = \lambda/\lambda_0$	$B = \varphi_\infty / \varphi_0$
Concentración CTAT (wt. %)		
5%	0.076	0.000105
10%	0.015	$6.1 \cdot 10^{-6}$
15%	0.0055	$2.18 \cdot 10^{-6}$
20%	0.0024	$8.04 \cdot 10^{-7}$

Tabla construida a partir de la tabla 4.1 de los números adimensionales.

A. Función fluidez

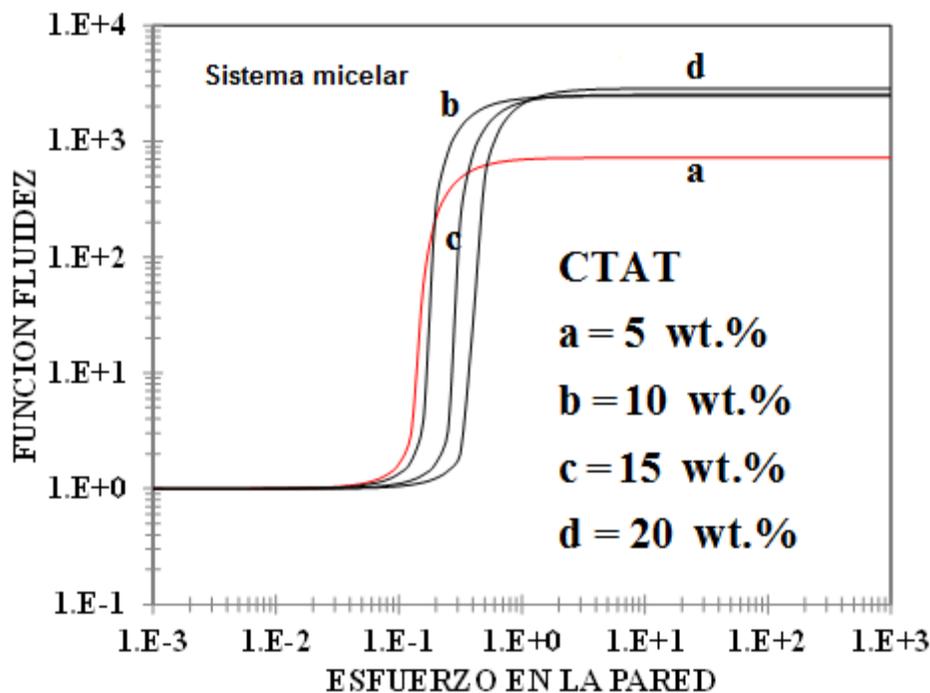


Figura 4.6. Función fluidez adimensional vs esfuerzo en la pared en función de la concentración de la muestra en el sistema.

En la Fig. (4.6) se observa la función fluidez vs esfuerzo en la pared como función de la concentración de la muestra. En todas las concentraciones se observa el mismo comportamiento, i.e. a esfuerzos en la pared bajos, se obtiene un comportamiento constante, y para un esfuerzo en la pared crítico, el sistema experimenta un aumento en la fluidez debido al esfuerzo en la pared aplicado. Para un segundo esfuerzo crítico, la fluidez muestra un comportamiento constante independiente del esfuerzo en la pared. El efecto de la concentración en la muestra,



se puede cuantificar indirectamente a través de los números adimensionales que describen la física del sistema A y B. Por ejemplo, en la simulación de la Fig. (5.6 a) se observa que el número adimensional A es el mayor de los cuatro, por lo que se infiere que presentara menos tixotropía, es decir el plato a bajos esfuerzos en la pared, será el menor de los cuatro, lo que se puede comprobar por simple inspección en la Fig. (4.6 a). El valor de la meseta a valores grandes del esfuerzo en la pared, está determinado por el número adimensional $B = 662.252$. Esto se puede verificar gráficamente en la Fig. (4.6 a). Al disminuir el valor de A el sistema presenta más tixotropía debido a que el plato a bajos esfuerzos en la pared aumenta. El valor de B implica que tiene mayor pérdida de puntos estructurales por lo que su fluidez aumenta. Los casos de la Fig. (4.6 c, d) son similares y su diferencia se debe al valor numérico de los grupos adimensionales antes mencionados.

B. Perfil de velocidades

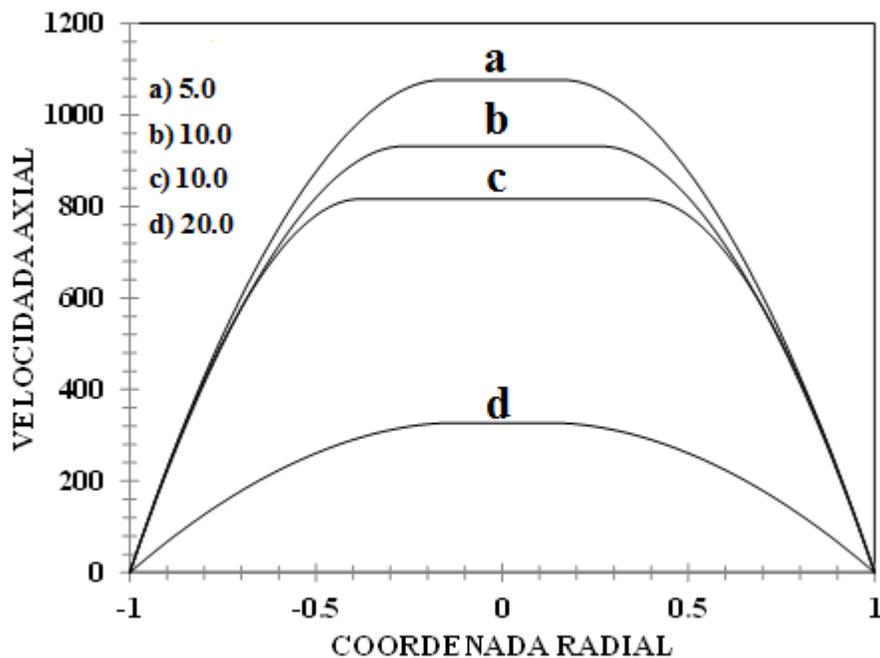


Figura 4.7. Ilustra el perfil de perfil de velocidades vs coordenada radial adimensional en función de la concentración de micelas tipo gusano.



La Fig. (4.7) muestra los perfiles de velocidad de coordenada radial adimensional en función de la concentración de la muestra. Los valores utilizados en la simulación son los mismos que las Tablas de la Figs. (4.1) y (4.2). Para la solución con 5% de micelas. En la pared todas las simulaciones son cero, en el centro del tubo, la velocidad es máxima. En todos los casos, se observa un frente homogéneo en todas las muestras. En el caso de la mínima concentración, los números adimensionales A y B están determinadas en la Tabla (4.2). En la mínima concentración (5 %) el sistema presenta la mínima tixotropía de las cuatro muestras, y el mínimo valor del número adimensional B. Físicamente, la máxima velocidad en el sistema está determinado por un acoplamiento entre las propiedades estructurales, cinéticas y viscosas respectivamente. Por otra parte, en la simulación del 10 % del sistema micelar (Fig. 4.7 b), se observa un frente homogéneo de velocidades más pronunciado por efecto del incremento en la concentración. Por otra parte, los valores de los números adimensionales A y B, son mayores que en la Fig. (4.7 a). El efecto de aumentar la tixotropía y aumentar el valor del número B, i.e. el número de puntos estructurales a bajo y alto esfuerzo en la pared adimensional. Por otra parte, para la concentración del 10 wt. % el valor de los números adimensionales $A = 0.0008$ y el valor del número $B = 2520$. Al aumentar la tixotropía en el sistema, decreciendo el valor del número A, se observa que los perfiles de velocidad axial son menores por efecto de los mecanismos estructurales en el sistema. Finalmente, la última simulación de la Fig. (4.7 d) se observa que el frente homogéneo que se forma en el centro disminuye, debido a que el número adimensional B aumenta drásticamente a pesar de que A_0 disminuye. Es claro dos puntos en esta simulación:

- a) Al aumentar la estructura por efecto de la concentración favorece la tixotropía por efecto del aumento en los procesos estructurales y cinéticos.
- b) El aumento de la concentración, induce un frente homogéneo en el tubo asociado a los procesos acoplados tixotrópicos y de estructura.
- c) Al aumentar el valor del número adimensional B, el frente homogéneo que se forma por tixotropía decrece. En este punto, es interesante observar la simulación de la Fig. (4.7 d), en donde el número A es la menor de las cuatro



muestras y el valor numérico de B de las cuatro concentraciones es el mayor, presenta el menor perfil de velocidad y el menor frente homogéneo de velocidades.

En este punto, se observa que la tixotropía tiene un efecto en negativo sobre el perfil de velocidades, por lo que la concentración máxima del sistema micelar tipo gusano CTAT y el perfil de velocidad disminuye debido a una alta tixotropía. En contraste, el máximo perfil de velocidades, se obtiene al contenido mínimo del polímero asociativo. En la simulación de la Fig. (4.7 d) se tiene la máxima estructura debido a que se tiene la máxima tixotropía ($A = 0.0024$), esta estructura se destruye por el flujo exhibido por la destrucción de puntos estructurales debido a la fuerza motriz que deforma el fluido. Además, el valor máximo de la velocidad se desplaza a estados menos tixotrópicos, lo que implica una gran demanda de energía para los perfiles de velocidad. Finalmente, el valor del máximo está completamente determinado por un acoplamiento entre las propiedades cinéticas, viscosas y estructurales del modelo BMP. Estas relaciones particulares sólo son válidas en el régimen de concentraciones diluidas o semi-diluidas de la muestra del sistema complejo, ya que cuando la concentración aumenta hay muchos procesos estructurales y cinéticos que no pueden explicarse con esta formulación matemática y muchas veces se necesitarían modelos multimodales para poder obtener expresiones útiles.



CAPÍTULO V

CONCLUSIONES

Y

TRABAJO FUTURO



5.1 Comentarios finales del trabajo

En este trabajo se realizó el estudio de la reología y transferencia de momento de un sistema micelar, sometido a un gradiente de presión en la dirección de la velocidad (axial). EL flujo y la reología fueron caracterizados por la ecuación constitutiva BMP. Físicamente, este modelo describe el cambio de estructura inducido del por el cambio del flujo. Este modelo acopla a la ecuación convectiva superior de Maxwell con una de tipo cinético que cuantifica la evolución de la estructura a través de los procesos de construcción y destrucción por efecto de corte. En su forma más simple, este modelo contiene 5 propiedades materiales las cuales enlistamos a continuación: (i) Viscosidad a alto y bajo corte $\{\varphi_0, \varphi_\infty\}$, (iii) El módulo elástico referente a la recuperación del material G_0 , (iv) λ tiempo de restructuración del sistema después de un periodo de deformación, (v) K_0 puede ser interpretado como una constante cinética que describe la cinética física de puntos estructurales por efecto del corte. Los mecanismos que se simularon en esta tesis son los siguientes: (a) Adelgazamiento o engrosamiento al corte, que tiene que ver con el número de puntos estructurales a bajo y alto corte. (b) Tixotropía y reopexia que relaciona los mecanismos estructurales y de flujo en el sistema, es decir, se obtiene las curvas de histéresis asociada a los procesos cinéticos-estructurales y disipativos. (c) Efecto de la concentración. Esta se expresa indirectamente en el sistema a través de las propiedades materiales. Es evidente que, al aumentar la concentración, se incrementan los puntos estructurales y su vez adquiere un incremento en sus propiedades visco-elásticas.

Para describir la naturaleza del sistema se emplearon los siguientes números adimensionales que define los mecanismos de transferencia de momento y reología en el sistema de flujo. El primero de ellos es el número B (asociado al adelgazamiento y engrosamiento al corte) el cual se puede interpretar como una relación de estructura a alto y bajo corte. El segundo es el número A_0 que está asociado a los mecanismos de tixotropía y reopexia, es decir, a los procesos de construcción y destrucción de la estructura. El tercero de ellos, es el Weissenberg el cual representa las propiedades



visco-elásticas del sistema. El cual al presentar esfuerzo cortante constante de la velocidad de aplicación del esfuerzo por el tiempo de relajación.

A partir de las suposiciones de estado estacionario, proceso isotérmico, fluido incompresible y utilizando las variables adimensionales, se obtuvieron expresiones cerradas para el esfuerzo cortante, función viscosidad y rapidez de deformación del modelo BMP en forma adimensional. A partir de la ecuación de momento se obtuvo una expresión para el esfuerzo cortante τ . Expresando la rapidez de deformación en términos del esfuerzo cortante y los números adimensionales, se obtuvieron: (i) los perfiles de velocidad en el sistema, (ii) fluidez aparente, y (iii) flujo volumétrico

5.1.1 Perfil de velocidades

En general en todos los casos se observa un perfil parabólico, es decir que en las paredes la velocidad del fluido es cero, mientras que en el centro es máxima. Y el máximo queda determinado por un acoplamiento entre los mecanismos cinéticos, estructurales y viscosos. El efecto del número B sobre el perfil es aumentar los estados de velocidad ($B \gg 1$), mientras que el caso opuesto ($B \ll 1$) el perfil decrece. El efecto del número A es contribuir a los procesos cinéticos estructurales del fluido. Si al fluido es Newtoniano, mientras que $A \gg 1$, el fluido es no newtoniano adelgazante o engrosantes al corte. A está relacionado con el valor del esfuerzo en la pared para el cual, el fluido experimenta cambios en la estructura, i.e. aumenta o disminuye el número de puntos estructurales.

5.1.2 Función fluidez aparente

La fluidez aparente es el inverso de la viscosidad. De acuerdo al formalismo del BMP se tiene dos tipos de fluideces. La primera describe los efectos adelgazantes, engrosantes, tixotrópicos y reopécticos a través de los números adimensional A , B y del esfuerzo en la pared que se aplica al sistema por efecto del gradiente de presión. En el caso de $B \gg 1$, el fluido experimenta una transición de estados de mayor a menor estructura, asociados a los mecanismos de adelgazamiento al corte. Si $B = 1$ se tiene el mismo número de punto estructurales a alto, bajo y medianos cortes el (fluido



Newtoniano). Para $B \gg 1$ el fluido experimenta estados de menor a mayor estructura por efecto de corte. Físicamente, se tiene una estructura más compacta (enredada) lo que induce un mayor número de entrecruzamientos físicos asociados a los mecanismos engrosantes al corte.

Si A_0 es igual a cero, i.e. $A = 0$, el sistema a bajo y alto corte presenta la misma estructura por lo que, el fluido es newtoniano. Si $A \ll 1$, el valor del esfuerzo en la pared en donde el sistema cambio de estados de mayor a menor estructura (adelgazamiento al corte) o, de menor a mayores entrecruzamientos físicos (engrosamiento al corte) es mayor. Si $A \gg 1$, el sistema a menores esfuerzos en la pared presenta cambios en la estructura (adelgazante o engrosante).

5.1.3 Flujo volumétrico

El flujo volumétrico del modelo BMP se puede expresar como el producto de la fluidez del BMP con el flujo volumétrico newtoniano. Esta fluidez, se puede expresar como una desviación del comportamiento newtoniano. El flujo volumétrico depende de las propiedades materiales a través de los grupos adimensionales antes expuestos, i.e. $Q = Q(A, B)$ para el adelgazamiento o engrosamiento al corte. En general los mecanismos adelgazantes y engrosantes incrementan o decrecen el valor numérico del flujo volumétrico y el valor de A_0 , solamente está relacionado con el esfuerzo en la pared asociado al gradiente de presión para el cual, el sistema experimenta un cambio en la estructura (adelgazante o engrosante).

5.2 Trabajo futuro

Una continuación natural de este trabajo, es incluyendo geometrías diferentes, por ejemplo, sistemas anulares y el flujo en cascarones esféricos. El efecto de la geometría es importante, porque cambia las ecuaciones analíticas a resultados numéricos. Un ejemplo de esto, es si se cambiase la geometría de esta investigación por una rendija, el valor del flujo volumétrico se debe de evaluar numéricamente. Otro camino en la dirección de incluir nuevos mecanismos. Otro camino, es estudiar este tipo de sistemas sometidos a diferentes tipos de flujos: (i) extensional uniaxial, (ii) flujo



oscilatorio a baja y alta amplitud, (iii) flujo por compresión, (iv) Flujo pulsátil de baja y alta amplitud respectivamente. Otra línea de investigación sería estudiar ecuaciones acopladas de momento acopladas con calor o masa. Finalmente, estudiar sistemas que presenten al menos dos componentes del vector velocidad, en diferentes geometrías de flujo.

Finalmente, el modelo más simple BMP contiene la necesaria física para describir sistemas complejos en término de los diferentes mecanismos involucrados, a través de las propiedades materiales del sistema. Las propiedades materiales, del modelo BMP, pueden ser calculados con experimentos reológicos en estado estacionario y no estacionario. El modelo BMP puede reproducir los diferentes tipos de flujo: (i) Cortante, (ii) Extensional, (iii) Oscilatorio a baja amplitud, (iv) Pulsátil de baja amplitud. Este trabajo y los resultados obtenidos en este, representan una búsqueda constante en obtener resultados analíticos en geometrías simples (capilares, rendijas), y que sean punto de partida en problemas más complejos.



APÉNDICE A



En este apéndice se va a deducir la ecuación de Hagen-Poiseuille para un fluido Newtoniano.

Las ecuaciones generales de continuidad, movimiento y constitutiva son presentadas continuación:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (\text{A-1})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (\text{A-2})$$

La ecuación de cantidad de movimiento se describe en la siguiente forma vectorial:

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} \quad (\text{A-3})$$

Suponiendo que el fluido es Newtoniano se tiene la siguiente ecuación:

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \rho \mathbf{g} \quad (\text{A-4})$$

La ecuación de movimiento para un fluido newtoniano en función de los gradientes de velocidad. Desacoplando en sus tres componentes:

Coordenadas cilíndricas en la componente r :

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right] + \rho g_r \quad (\text{A-5})$$

Coordenadas cilíndricas en la componente θ :

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} - \frac{v_r v_\theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] + \rho g_\theta \quad (\text{A-6})$$



Coordenadas cilíndricas en la componente **z**:

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z \quad (\text{A-7})$$

Suponiendo estado estacionario, fluido incompresible y que el fluido es deformado continua e irreversiblemente debido a un gradiente de presión en la dirección uniaxial, se obtiene la siguiente expresión del componente Z de la ecuación de movimiento. Aplicando las condiciones anteriores se tiene la siguiente expresión:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \quad (\text{A-8})$$

Despejando el término $\frac{\partial p}{\partial z}$:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \quad (\text{A-9})$$

Obteniendo la ecuación de esfuerzo se expresa de a siguiente manera:

$$r \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \quad (\text{A-10})$$

Integrando la Ec. (A-10) con respecto a la coordenada radial:

$$\int r \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \quad (\text{A-11})$$

Se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{r^2}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} + C_1 = r \frac{dv_z}{dr} \quad (\text{A-12})$$

Integrando la Ec. (A-12) por segunda ocasión con respecto a la coordenada radial:



$$\int \left(\frac{r}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{C_1}{r} \right) dr = \int dv_z \quad (\text{A-13})$$

Se tiene el perfil general de velocidades:

$$v_z(r) = \frac{r^2}{4\mu} \frac{dp}{dz} + C_1 \ln r + C_2 \quad (\text{A-14})$$

Suponiendo que no existe deslizamiento en la pared del sistema y que la velocidad debe ser finita en $r=0$, se plantean las siguientes condiciones de frontera:

$$v_z|_{r=a} = 0 \quad (\text{A-15})$$

$$v_z|_{r=0} = C_1 \text{finito} \quad (\text{A-16})$$

Obteniendo los valores de C_1 y C_2 se obtiene el siguiente perfil de velocidades para el fluido newtoniano. Nótese que este, describe una parábola y que en el centro del sistema se obtiene la velocidad máxima:

$$v_z(r) = \frac{a^2}{4\mu} \left(-\frac{dp}{dz} \right) \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] \quad (\text{A-17})$$

Al sustituir la condición de frontera (A-15) se tiene la siguiente expresión:

$$0 = \frac{a^2}{4\mu} \frac{dp}{dz} + C_1 \ln a + C_2 \quad (\text{A-18})$$

Al sustituir la condición de frontera (A-16) se tiene la siguiente expresión:

$$\text{finito} = \frac{a^2}{4\mu} \frac{dp}{dz} + C_1 \ln(0) + C_2 = -\infty \quad (\text{A-19})$$

$$C_2 = -\frac{a^2}{4\mu} \frac{dp}{dz} \quad (\text{A-20})$$



APÉNDICE B



A partir de las restricciones: estado estacionario, el fluido se deforma continua e irreversiblemente, los efectos gravitacionales son despreciables, flujo cortante simple, el vector velocidad solo depende de una coordenada, fluido incompresible, proceso isotérmico. Se tiene la expresión analítica del vector de velocidad:

$$\mathbf{V}=[V_r, V_\theta, V_z]=[0,0,V_z(r)] \quad (\text{B-1})$$

Tensores cinemáticos

Gradiente de velocidad

El tensor gradiente espacial de la velocidad en coordenadas cilíndricas está dado por:

$$\nabla \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_r}{\partial r} & \frac{\partial V_\theta}{\partial r} & \frac{\partial V_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} & \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial V_r}{\partial z} & \frac{\partial V_\theta}{\partial z} & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial V_z}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B-2})$$

A partir del tensor gradiente espacial de velocidades (Ec. B-2) se calcula la transpuesta, i.e.

$$(\nabla \mathbf{V})^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_r}{\partial r} & \frac{\partial V_\theta}{\partial r} & \frac{\partial V_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} & \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial V_r}{\partial z} & \frac{\partial V_\theta}{\partial z} & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial V_z}{\partial r} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B-3})$$

Rapidez de deformación

De las Ecs. (B-4) se puede calcular el tensor rapidez de deformación. Nótese que este, está asociado a los cambios de forma de un elemento de control.



$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{V} + \nabla\mathbf{V}^T) = \frac{1}{2} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial V_z}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial V_z}{\partial r} & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial V_z}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial V_z}{\partial r} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B-4})$$

Tensor de esfuerzos

Para un flujo cortante simple, el tensor de esfuerzos y los tensores gradiente de velocidad y gradiente de velocidad transpuesto toman la forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{rz} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (\text{B-5})$$

En los tensores gradiente de velocidad y transpuesta del tensor gradiente de velocidad se ha definido el escalar rapidez de deformación $\dot{\gamma}_{rz}$ en la siguiente forma:

$$\dot{\gamma}_{rz} = \frac{\partial V_z}{\partial r} \quad (\text{B-6})$$

la ecuación tensorial en términos de matrices toma la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\sigma} + \frac{\eta}{G_0} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \boldsymbol{\sigma} - \nabla \mathbf{V}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{V} \right) = 2\eta \mathbf{D} = \eta (\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T) \quad (\text{B-7})$$

Suponiendo flujo homogéneo y régimen permanente, se tiene la siguiente expresión para la ecuación codeformacional de Maxwell.

$$\boldsymbol{\sigma} - \frac{\eta}{G_0} (\nabla \mathbf{V}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{V}) = \eta (\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T) \quad (\text{B-8})$$

Sustituyendo las matrices en la ecuación tensorial, se tiene lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{rz} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} - \frac{\eta}{G_0} \left(\begin{pmatrix} \dot{\gamma}_{rz} \\ \dot{\gamma}_{rz} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{rz} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{rz} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dot{\gamma}_{rz} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \eta \left(\begin{pmatrix} \dot{\gamma}_{rz} \\ \dot{\gamma}_{rz} & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dot{\gamma}_{rz} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \quad (\text{B-9})$$



Simplificando las matrices de la Ec. (B-9), se obtiene lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{rz} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} - \frac{\eta(\dot{\gamma}_{rz})}{G_0} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \dot{\gamma}_{rz} \sigma_{rr} & 0 & \dot{\gamma}_{rz} \sigma_{zz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{rr} \dot{\gamma}_{rz} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \dot{\gamma}_{rz} \end{pmatrix} = \eta(\dot{\gamma}_{rz}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \dot{\gamma}_{rz} & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dot{\gamma}_{rz} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(B-10a)

Simplificando la Ec. (B-10), se tiene lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{rz} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} - \frac{\eta(\dot{\gamma}_{rz})}{G_0} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{rr} \dot{\gamma}_{rz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \dot{\gamma}_{rz} \sigma_{rr} & 0 & \dot{\gamma}_{rz} \sigma_{zz} + \sigma_{zz} \dot{\gamma}_{rz} \end{pmatrix} = \eta(\dot{\gamma}_{rz}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dot{\gamma}_{rz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \dot{\gamma}_{rz} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(B-10b)

Así que,

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} - \frac{\eta(\dot{\gamma}_{rz})}{G_0} (\sigma_{rr} \dot{\gamma}_{rz}) \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{rz} - \frac{\eta(\dot{\gamma}_{rz})}{G_0} \dot{\gamma}_{rz} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{zz} - \frac{\eta(\dot{\gamma}_{rz})}{G_0} (\dot{\gamma}_{rz} \sigma_{zz} + \sigma_{zz} \dot{\gamma}_{rz}) \end{pmatrix} = \eta(\dot{\gamma}_{rz}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dot{\gamma}_{rz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \dot{\gamma}_{rz} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(B-10c)

Desacoplado las ecuaciones, obtenemos las siguientes ecuaciones algebraicas

$$\sigma_{rz} - \frac{\eta(\dot{\gamma}_{rz})}{G_0} (\sigma_{rr} \dot{\gamma}_{rz}) = \eta \dot{\gamma}_{rz}$$

(B-11)

$$\sigma_{rz} - \frac{\eta(\dot{\gamma}_{rz})}{G_0} \dot{\gamma}_{rz} \sigma_{rr} = \eta \dot{\gamma}_{rz}$$

(B-12)

$$\sigma_{zz} - \frac{\eta(\dot{\gamma}_{rz})}{G_0} (\dot{\gamma}_{rz} \sigma_{zz} + \sigma_{zz} \dot{\gamma}_{rz}) = 0$$

(B-13)

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = 0$$

(B-14)



Funciones materiales del modelo BMP

Es claro que las Ecs. (B-11) y (B-12) tienen la misma estructura algebraica debido a la simetría del tensor de esfuerzos $\sigma_{zr} = \sigma_{rz}$, por lo que solamente debe de tomarse solo una de estas ecuaciones:

$$\sigma_{zr} = \eta \left(\dot{\gamma}_{zr} \right) \dot{\gamma}_{zr} \quad (\text{B-15})$$

A partir de la Ec. (B-15) obtenemos la componente zz del tensor de esfuerzos:

$$\sigma_{zz} = 2 \frac{\eta \left(\dot{\gamma}_{zr} \right) \dot{\gamma}_{zr}}{G_0} \sigma_{zr} = 2 \frac{\sigma_{zr}^2}{G_0} \quad (\text{B-16})$$

La ecuación cinética, se reduce a la siguiente forma algebraica:

$$\varphi_0 - \varphi + K\lambda(\varphi_\infty - \varphi) \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} = 0 \quad (\text{B-17})$$

El doble producto tensorial del modelo BMP toma la forma:

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{zr} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{rz} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dot{\gamma}_{zr} \\ 0 & 0 & 0 \\ \dot{\gamma}_{zr} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left(\sigma_{zr} \dot{\gamma}_{zr} + \sigma_{rz} \dot{\gamma}_{zr} \right) = \sigma_{zr} \dot{\gamma}_{zr} \quad (\text{B-18})$$

Al combinar las Ecs. (B-17) y (B-18), se tiene lo siguiente:

$$\varphi_0 - \varphi + K\lambda(\varphi_\infty - \varphi) \sigma_{zr} \dot{\gamma}_{zr} = 0 \quad (\text{B-19})$$

Combinando la Ec. (B-15) en términos de la fluidez, y sustituyéndola en la Ec. (B-19), se tiene lo siguiente:

$$\varphi_0 - \varphi + K\lambda(\varphi_\infty - \varphi) \sigma_{zr}^2 \varphi = 0 \quad (\text{B-20})$$

Desarrollando algebraicamente, se tiene lo siguiente:

$$K\lambda \sigma_{zr}^2 \varphi^2 + (1 - K\lambda \varphi_\infty \sigma_{zr}^2) \varphi - \varphi_0 = 0 \quad (\text{B-21})$$



La Ec. (B-21) puede ser resuelta utilizando la ecuación algebraica de segundo orden, por lo que se tiene lo siguiente:

$$\varphi(\sigma_{zr}) = \frac{K\lambda\varphi_{\infty}\sigma_{zr}^2 - 1 + \sqrt{(K\lambda\varphi_{\infty}\sigma_{zr}^2 - 1)^2 + 4K\lambda\sigma_{zr}^2\varphi_0}}{2K\lambda\sigma_{zr}^2} \quad (\text{B-22})$$

La Ec. (B-22) es la fluidez en estado estacionario y homogéneo del modelo BMP. Esta ecuación tiene dos límites asintóticos a bajos y altos cortes. Es decir, se satisfacen los siguientes límites:

$$\text{Lim}_{\sigma_{zr} \rightarrow 0} \varphi(\sigma_{zr}) = \varphi_0 \quad (\text{B-23 a})$$

Y

$$\text{Lim}_{\sigma_{zr} \rightarrow \infty} \varphi(\sigma_{zr}) = \varphi_{\infty} \quad (\text{B-23 b})$$

La rapidez de deformación en términos del esfuerzo cortante, se puede expresar como:

$$\frac{dV_z}{dr} = \varphi(\sigma_{zr})\sigma_{zr} = \frac{K\lambda\varphi_{\infty}\sigma_{zr}^2 - 1 + \sqrt{(K\lambda\varphi_{\infty}\sigma_{zr}^2 - 1)^2 + 4K\lambda\sigma_{zr}^2\varphi_0}}{2K\lambda\sigma_{zr}} \quad (\text{B-24})$$

La rapidez de deformación tiene dos límites asintóticos a baja y alta rapidez de deformación respectivamente:

$$\text{Lim}_{\sigma_{zr} \rightarrow 0} \frac{dV_z}{dr} = \varphi_0\sigma_{zr} \quad (\text{B-25})$$

y

$$\text{Lim}_{\sigma_{zr} \rightarrow \infty} \frac{dV_z}{dr} = \varphi_{\infty}\sigma_{zr} \quad (\text{B-26})$$



APÉNDICE C



Perfil de velocidades del modelo BMP

En esta subsección se calcula el perfil de velocidades axial en el sistema de flujo:

$$V_z(r) = \int \frac{dV_z}{dr} dr + C \quad (C-1)$$

Substituyendo la rapidez de deformación:

$$V_z(r) = \int \left(\frac{K\lambda\phi_\infty\sigma_{zr}^2 - 1 + \sqrt{(K\lambda\phi_\infty\sigma_{zr}^2 - 1)^2 + 4K\lambda\sigma_{zr}^2\phi_0}}{2K\lambda\sigma_{zr}} \right) dr + C \quad (C-2)$$

Al substituir el esfuerzo constante r_z de la ecuación de movimiento tomando en cuenta estado estacionario y mecanismos inerciales despreciables, se tiene lo siguiente:

$$\sigma_{zr} = \frac{1}{2} \nabla_z p r \quad (C-3)$$

En la Ec. (C-3), se utilizó la condición de que el esfuerzo debe de permanecer acotado en el centro del tubo. Combinando las Ecs. (C-2) y (C-3) se tiene la siguiente expresión simplificada:

$$V_z(r) = \int \left(\frac{K\lambda\phi_\infty (\nabla_z p/2)^2 r^2 - 1 + \sqrt{(K\lambda\phi_\infty (\nabla_z p/2)^2 r^2 - 1)^2 + 4K\lambda\phi_0 (\nabla_z p/2)^2 r^2}}{2K\lambda (\nabla_z p/2) r} \right) dr + C \quad (C-4)$$

En donde u , u_w y ϕ_r están definidas como:

$$\phi_r = \phi_0 / \phi_\infty \quad (C-5)$$

$$u = K\lambda\phi_\infty (\nabla_z p/2)^2 r^2 \quad (C-6)$$



$$u_w = K\lambda\phi_\infty (\nabla_z p/2)^2 a^2 \quad (C-7)$$

El perfil de velocidades de la Ec. (C-7) puede ser re-escrito de la siguiente forma:

$$V_z(r) = \phi_\infty (\nabla_z p/2) \int \left(\frac{K\lambda\phi_\infty (\nabla_z p/2)^2 r^2 - 1 + \sqrt{(K\lambda\phi_\infty (\nabla_z p/2)^2 r^2 - 1)^2 + \left(\frac{\phi_0}{\phi_\infty}\right) 4K\lambda\phi_\infty (\nabla_z p/2)^2 r^2}}{2K\lambda\phi_\infty (\nabla_z p/2)^2 r} \right) dr + C \quad (C-8)$$

La Ec. (C-8) puede escribirse en la siguiente forma compacta:

$$V_z(r) = \frac{\phi_\infty (\nabla_z p/2)}{4X^2} \int \left(\frac{u-1 + \sqrt{(u-1)^2 + 4\phi_r u}}{u} \right) du + C \quad (C-9)$$

En donde se han definido las siguientes variables:

$$X^2 = K\lambda\phi_\infty (\nabla_z p/2)^2 \quad (C-10)$$

$$\phi_r = \phi_0 / \phi_\infty \quad (C-11)$$

$$u = X^2 r^2 \quad (C-12)$$

La Integral de la Ec. (C-13) puede ser resuelta mediante métodos integrales del cálculo de función de una variable. **Nótese que la Ec. (C-13) se reduce al modelo newtoniano, cuando la fluidez reducida es igual a la unidad, i.e. $\phi_r = 1$, por lo que se tiene lo siguiente:**

$$V_z(r) = \frac{\phi_\infty (\nabla_z p/2)}{4X^2} \int \left(\frac{u-1 + \sqrt{(u-1)^2 + 4u}}{u} \right) du + C \quad (C-13)$$



Simplificando, se tiene lo siguiente:

$$V_z(r) = \frac{\varphi_\infty (\nabla_z p/2)}{4X^2} \int \left(\frac{u-1 + \sqrt{(u+1)^2}}{u} \right) du + C \quad (\text{C-13 a})$$

Por lo que,

$$V_z(r) = \frac{\varphi_\infty (\nabla_z p/2)}{4X^2} \int \left(\frac{u-1 + u+1}{u} \right) du + C \quad (\text{C-13 b})$$

Reduciendo

$$V_z(r) = \frac{\varphi_\infty (\nabla_z p/2)}{2X^2} X^2 r^2 + C = \frac{\varphi_\infty (\nabla_z p/2)}{2} r^2 + C \quad (\text{C-13 c})$$

Aplicando la condición de frontera de no deslizamiento, i.e. $V_z(r = a) = 0$, se tiene:

$$C = -\frac{\varphi_\infty (\nabla_z p/2)}{2} a^2 \quad (\text{C-13 d})$$

Por lo que:

$$V_z(r) = \frac{\varphi_\infty (\nabla_z p/2)}{2} r^2 - \frac{\varphi_\infty (\nabla_z p/2)}{2} a^2 \quad (\text{C-13 e})$$

implicando

$$V_z(r) = \frac{a^2 \varphi_\infty (-\nabla_z p)}{4} \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right) \quad (\text{C-13 f})$$

Como $\varphi_r = 1$, $\varphi_\infty = \varphi_0$, por lo que finalmente se tiene:

$$V_z(r) = \frac{a^2 \varphi_0 (-\nabla_z p)}{4} \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right) \quad (\text{C-13 g})$$

La integral se resuelve utilizando varios cambios de variables, por lo que se utilizan el programa Mathematica 11.1 (Licencia UNAM):



$$V_z(r) = \frac{\varphi_\infty (\nabla_z p/2)}{4X^2} \left\{ u + \sqrt{(u-1)^2 + 4\varphi_r u} + (2\varphi_r - 1) \operatorname{Ln} \left| \frac{1 - (2\varphi_r + u) - \sqrt{(u-1)^2 + 4\varphi_r u}}{1 + (2\varphi_r - 1)u + \sqrt{(u-1)^2 + 4\varphi_r u}} \right| \right\} + C \quad (C-14)$$

Suponiendo que no existe deslizamiento en la pared, se cumple la siguiente condición de frontera, por lo que:

$$r = a; V_z(r=a) = 0 \quad (C-15)$$

Por lo que la constante C de la Ec. (C-14) toma la forma:

$$C = \frac{\varphi_\infty (\nabla_z p/2)}{4X^2} \left\{ - \left(u_w + \sqrt{(u_w - 1)^2 + 4\varphi_r u_w} \right) - (2\varphi_r - 1) \operatorname{Ln} \left| \frac{1 - (2\varphi_r + u_w) - \sqrt{(u_w - 1)^2 + 4\varphi_r u_w}}{1 + (2\varphi_r - 1)u_w + \sqrt{(u_w - 1)^2 + 4\varphi_r u_w}} \right| \right\} \quad (C-16)$$

En la Ec. (C-16) u_w se ha definido de la siguiente manera:

$$u_w = X^2 a^2 \quad (C-17)$$

Sustituyendo las Ecs. (C-16) y (C-17), se tiene lo siguiente:

$$V_z(r) = \frac{\varphi_\infty (\nabla_z p/2)}{4X^2} \left\{ u - u_w + \sqrt{(u-1)^2 + 4\varphi_r u} - \sqrt{(u_w - 1)^2 + 4\varphi_r u_w} + (2\varphi_r - 1) \operatorname{Ln} \left| \frac{1 - (2\varphi_r + u) - \sqrt{(u-1)^2 + 4\varphi_r u}}{1 - (2\varphi_r + u_w) - \sqrt{(u_w - 1)^2 + 4\varphi_r u_w}} \right| \right. \\ \left. + \operatorname{Ln} \left| \frac{1 + (2\varphi_r - 1)u_w + \sqrt{(u_w - 1)^2 + 4\varphi_r u_w}}{1 + (2\varphi_r - 1)u + \sqrt{(u-1)^2 + 4\varphi_r u}} \right| \right\} \quad (C-18)$$

La Ec. (B-18) se reduce al modelo Newtoniano cuando $\varphi_r = 1$, por lo que:



$$\begin{aligned} \text{Lim}_{\varphi_r \rightarrow 1} Vz(r) &= \text{Lim}_{\varphi_r \rightarrow 1} \frac{\varphi_\infty (\nabla_z p/2)}{4X^2} \\ &\left\{ u - u_w + \sqrt{(u-1)^2 + 4\varphi_r u} - \sqrt{(u_w-1)^2 + 4\varphi_r u_w} + (2\varphi_r - 1) \text{Ln} \left| \frac{1 - (2\varphi_r + u) - \sqrt{(u-1)^2 + 4\varphi_r u}}{1 - (2\varphi_r + u_w) - \sqrt{(u_w-1)^2 + 4\varphi_r u_w}} \right| \right. \\ &\left. + \text{Ln} \left| \frac{1 + (2\varphi_r - 1)u_w + \sqrt{(u_w-1)^2 + 4\varphi_r u_w}}{1 + (2\varphi_r - 1)u + \sqrt{(u-1)^2 + 4\varphi_r u}} \right| \right\} \end{aligned} \quad (\text{C-19})$$

Por lo que

$$\text{Lim}_{\varphi_r \rightarrow 1} (2\varphi_r - 1) \text{Ln} \left| \frac{1 - (2\varphi_r + u) - \sqrt{(u-1)^2 + 4\varphi_r u}}{1 - (2\varphi_r + u_w) - \sqrt{(u_w-1)^2 + 4\varphi_r u_w}} \right| = 0 \quad (\text{C-20})$$

Por lo tanto, el perfil de velocidades toma se simplifica a:

$$\text{Lim}_{\varphi_r \rightarrow 1} Vz(r) = \text{Lim}_{\varphi_r \rightarrow 1} \frac{\varphi_\infty (\nabla_z p/2)}{4X^2} \left\{ u - u_w + \sqrt{(u-1)^2 + 4u} - \sqrt{(u_w-1)^2 + 4u_w} \right\} \quad (\text{C-21})$$

Por lo que, se tiene lo siguiente:

$$Vz(r) = \frac{\varphi_0 a^2}{4} \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right) (-\nabla_z p) \quad (\text{C-22})$$

La Ec. (C-22) es el perfil general del modelo BMP la cual, es consistente con el perfil newtoniano cuando la fluidez reducida es igual a la unidad, i.e. $\varphi_r = 1$, por lo que la condición sería:

$$\boxed{\text{Lim}_{\varphi_r \rightarrow 1} Vz(r) \rightarrow Vz_N(r) = \frac{a^2 \varphi_0 (-\nabla_z p)}{4} \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right)} \quad (\text{C-23})$$

La Ec. (C-23) es la solución analítica para el perfil de velocidades del modelo BMP. Nótese que depende del gradiente de presión, y las propiedades materiales del modelo BMP. La velocidad máxima toma la forma:



$$V_{\max} = V_z(r=0) = \frac{\phi_{\infty} (\nabla_z p/2)}{4X^2}$$

$$\left\{ -u_w - \sqrt{(u_w - 1)^2 + 4\phi_r u_w} + (2\phi_r - 1) \operatorname{Ln} \left| \frac{2B}{2B + u_w + \sqrt{(u_w - 1)^2 + 4\phi_r u_w} - 1} \right| \right. \\ \left. + \operatorname{Ln} \left| \frac{1 + (2B - 1)u_w + \sqrt{(u_w - 1)^2 + 4\phi_r u_w}}{2} \right| \right\} \quad (C-24)$$

En esta sección se deduce la **velocidad axial** del modelo BMP para un cilindro. Postulando estado estacionario y flujo homogéneo, la rapidez de deformación adimensional, toma la siguiente forma:

$$\gamma_{rz}^* = - \frac{A_0 B (\sigma_{w0}^* r^*)^2 - 1 + \sqrt{(A_0 B (\sigma_{w0}^* r^*)^2 - 1)^2 + 4A_0 (\sigma_{w0}^* r^*)^2}}{2A_0 (\sigma_{w0}^* r^*)} \quad (C-25)$$

Proponiendo el siguiente cambio de variable en el sistema

$$U = A_0 (\sigma_{w0}^* r^*)^2; dU = 2A_0 \sigma_{w0}^{*2} dr^* \quad (C-26)$$

Y calculando su diferencial

$$dU = 2A_0 \sigma_{w0}^{*2} dr^* \quad (C-27)$$

La Ec. (C-1) toma la forma:

$$\gamma_{rz}^* = - \frac{BU - 1 + \sqrt{(BU - 1)^2 + 4U}}{2A_0 (\sigma_{w0}^* r^*)} \quad (C-28)$$

Finalmente al integrar la expresión (C-28) se tiene lo siguiente:

$$V_z^*(r^*) = \frac{1}{4A\sigma_w^*} \left(BU - \operatorname{Ln}|U| + B \int \frac{\sqrt{(U - \phi_B)^2 + 4\phi_B^2 U}}{U} dU \right) + C \quad (C-29)$$



La Ec- (C-29) puede ser expresada como:

$$Vz^*(r^*) = \frac{1}{4A\sigma_w^*} (BU - L_n|U| + BI) + C \quad (C-30)$$

En donde la integral indefinida I, se define como:

$$I = \int \frac{\sqrt{(U - \varphi_B)^2 + 4\varphi_B^2 U}}{U} dU = \int \frac{\sqrt{(U + \delta)^2 + \delta_1^2}}{U} dU \quad (C-31)$$

donde δ y δ_1 se han escrito como:

$$\begin{aligned} \delta_1^2 &= \varphi_B^2 - (\varphi_B (2\varphi_B - 1))^2 = (\varphi_B + \varphi_B (2\varphi_B - 1))(\varphi_B - \varphi_B (2\varphi_B - 1)) = 4\varphi_B^3 (1 - \varphi_B) \\ \delta^2 &= (\varphi_B (2\varphi_B - 1))^2 \end{aligned} \quad (C-32)$$

Haciendo el siguiente cambio de variable

$$U + \delta = \delta_1 \tan \theta \quad (C-33)$$

La Ec. (C-33) toma la forma:

$$I = \delta_1 \int \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{\sin \theta d\theta}{(1 - (1 + (\delta/\delta_1)^2) \cos^2 \theta)} + \delta \int \frac{1}{1 - \sin^2 \theta} \frac{\cos \theta d\theta}{((1 + (\delta/\delta_1)^2) \sin^2 \theta - (\delta/\delta_1)^2)} \quad (C-34)$$

Con el fin de resolver las integrales, se propone el siguiente cambio de variable, seguido del uso de fracciones parciales:

$$x_1 = \cos \theta; x_2 = \sin \theta \quad (C-35)$$

Las integrales (C-35) toman la forma:

$$I_1 = \delta_1 \left(\int \frac{1}{x_1^2} \frac{dx_1}{\Delta_1^2 x_1^2 - 1} \right) + \delta \left(\int \frac{1}{1 - x_2^2} \frac{dx_2}{\Delta_1^2 x_2^2 - \Delta_2^2} \right) \quad (C-36)$$

En donde las siguientes expresiones han sido definidas:



$$\Delta_1^2 = 1 + (\delta/\delta_1)^2; \Delta_2^2 = (\delta/\delta_1)^2 \quad (C-37)$$

Las integrales de la primera expresión pueden ser resueltas en términos de funciones analíticas elementales.

$$I_1 = \int \left(\frac{c_1}{x_1} + \frac{c_2}{x_1^2} + \frac{c_3}{\Delta_1 x_1 - 1} + \frac{c_4}{\Delta_1 x_1 + 1} \right) dx_1 = \frac{1}{x_1} + \frac{\Delta_1}{2} \text{Ln} \left| \frac{\Delta_1 x_1 - 1}{\Delta_1 x_1 + 1} \right| \quad (C-38)$$

De las Ecs. (C-30) y (C-36) se tiene lo siguiente:

$$\delta_1 B I_1 = \sqrt{(BU+1)^2 + 4U} + \frac{1}{2} \text{Ln} \left| \frac{1 - \sqrt{(BU+1)^2 + 4U}}{1 + \sqrt{(BU+1)^2 + 4U}} \right| \quad (C-39)$$

La segunda integral toma la forma:

$$I_2 = \int \left(\frac{d_1}{1-x_2} + \frac{d_2}{1+x_2} + \frac{d_3}{\Delta_1 x_2 - \Delta_2} + \frac{d_4}{\Delta_1 x_2 + \Delta_2} \right) dx_2 \quad (C-40)$$

La segunda integral es calculada en la misma forma:

$$I_2 = \frac{1}{2(\Delta_1^2 - \Delta_2^2)} \text{Ln} \left| \frac{1+x_2}{1-x_2} \right| + \frac{\Delta_1 / \Delta_2}{2(\Delta_1^2 - \Delta_2^2)} \text{Ln} \left| \frac{\Delta_1 x_2 - \Delta_2}{\Delta_1 x_2 + \Delta_2} \right| \quad (C-41)$$

De las Ecs. (C-30) y (C-36) se tiene lo siguiente:

$$B\delta I_2 = \frac{\delta}{2} B \text{Ln} \left| \frac{\sqrt{(U+\delta)^2 + \delta_1^2} + U + \delta}{\sqrt{(U+\delta)^2 + \delta_1^2} - (U+\delta)} \right| + \frac{1}{2} \left(\sqrt{\delta_1^2 + \delta^2} \right) B \text{Ln} \left| \frac{\sqrt{\delta_1^2 + \delta^2} (U+\delta) - \delta \sqrt{(U+\delta)^2 + \delta_1^2}}{\sqrt{\delta_1^2 + \delta^2} (U+\delta) + \delta \sqrt{(U+\delta)^2 + \delta_1^2}} \right| \quad (C-42)$$

Recolectando todos los términos de integrales I_1 y I_2



$$Vz_{(0)}^* = \frac{1}{4A\sigma_w^*} \left(\begin{aligned} & BU - \text{Ln}|U| + \sqrt{(BU+1)^2 + 4U} + \frac{1}{2} \text{Ln} \left| \frac{1 - \sqrt{(BU+1)^2 + 4U}}{1 + \sqrt{(BU+1)^2 + 4U}} \right| \\ & + \frac{\delta}{2} B \text{Ln} \left| \frac{\sqrt{(U+\delta)^2 + \delta_1^2} + U + \delta}{\sqrt{(U+\delta)^2 + \delta_1^2} - (U+\delta)} \right| \\ & + \frac{1}{2} (\sqrt{\delta_1^2 + \delta^2}) B \text{Ln} \left| \frac{\sqrt{\delta_1^2 + \delta^2} (U+\delta) - \delta \sqrt{(U+\delta)^2 + \delta_1^2}}{\sqrt{\delta_1^2 + \delta^2} (U+\delta) + \delta \sqrt{(U+\delta)^2 + \delta_1^2}} \right| \end{aligned} \right) + C \quad (C-43)$$

Simplificando la expresión anterior:

$$Vz_{(0)}^* = \frac{1}{4A\sigma_w^*} \left(\begin{aligned} & BU - \text{Ln}|U| + \sqrt{(BU+1)^2 + 4U} + \frac{1}{2} \text{Ln} \left| \frac{1 - \sqrt{(BU+1)^2 + 4U}}{1 + \sqrt{(BU+1)^2 + 4U}} \right| \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{2-B}{B} \right) \text{Ln} \left| \frac{2+B(U-1) + \sqrt{(BU+1)^2 + 4U}}{-2-B(U+1) + \sqrt{(BU+1)^2 + 4U}} \right| \\ & + \frac{1}{2} \text{Ln} \left| \frac{BU + \left(\frac{2-B}{B} \right) - (2-B) \sqrt{(BU+1)^2 + 4U}}{BU + \left(\frac{2-B}{B} \right) + (2-B) \sqrt{(BU+1)^2 + 4U}} \right| \end{aligned} \right) + C \quad (C-44)$$

Finalmente usando el:

$$Vz_{(0)}^* (A, B, \sigma_w^*, U) = \frac{1}{4A\sigma_w^*} \left\{ \begin{aligned} & -BU - \sqrt{(BU-1)^2 + 4U} + \text{Log} \left| 1 + (2-B)U + \sqrt{(BU-1)^2 + 4U} \right| \\ & + \left(\frac{B-2}{B} \right) \text{Log} \left| 2 + B^2U + B \left(\sqrt{(BU-1)^2 + 4U} - 1 \right) \right| \end{aligned} \right\} + C \quad (C-45)$$



APÉNDICE D



Flujo volumétrico

A continuación se procede inicialmente con la expresión general del flujo volumétrico la cual está dada por la doble integral del campo de velocidades con respecto al área de sección transversal:

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^a v_z(r) r dr d\theta \quad (D-1)$$

Sustituyendo el perfil de velocidades en la Ec. (D-1):

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{a^2}{4\mu} \left(-\frac{dp}{dz} \right) \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] r dr d\theta \quad (D-2)$$

Integrando con respecto a la coordenada radial:

$$Q = \int_0^{2\pi} \frac{a^2}{4\mu} \left(-\frac{dp}{dz} \right) \left[\int_0^a r dr - \int_0^a \frac{r^3}{a^2} dr \right] d\theta \quad (D-3)$$

$$Q = \frac{a^2}{4\mu} \left(-\frac{dp}{dz} \right) \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4a^2} \right) d\theta \quad (D-4)$$

Integrando con respecto a la coordenada angular:

$$Q = \frac{a^2}{4\mu} \left(-\frac{dp}{dz} \right) \int_0^{2\pi} \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{4a^2} \right) d\theta \quad (D-5)$$

$$Q = \frac{2\pi a^2}{4\mu} \left(-\frac{dp}{dz} \right) \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} \quad (D-6)$$

Reduciendo términos algebraicos se tiene:



$$Q = \frac{\pi a^2}{2\mu} \left(-\frac{dp}{dz} \right) \frac{a^2}{4} \quad (D-7)$$

Simplificando la Ec. (D-7):

$$Q = \frac{\pi a^4}{8\mu} \left(-\frac{dp}{dz} \right) \quad (D-8)$$

Sustituyendo η_0^{-1} en la Ec. (D-8):

$$Q = \frac{1}{\eta_0} \frac{\pi a^4}{8\mu} \left(-\frac{dp}{dz} \right) \quad (D-9)$$

Se tiene la expresión del modelo del flujo volumétrico de un fluido newtoniano (Hagen y Poiseuille)

$$Q_{NW} = \varphi_0 \frac{\pi a^4}{8\mu} \left(-\frac{dp}{dz} \right) \quad (D-10)$$

Básicamente la Ec. (D-10) es la misma para un fluido No-Newtoniano, excepto, que la fluidez se cambia por la fluidez aparente en el sistema, es decir:

$$Q_{NW} = \varphi_{app} \frac{\pi a^4}{8} \left(-\frac{dp}{dz} \right) \quad (D-11)$$

Multiplicando y dividiendo por la fluidez a bajo corte se obtiene la siguiente expresión:

$$Q_{N-NW} = \frac{\varphi_{app}}{\varphi_0} \varphi_0 \frac{\pi a^4}{8} \left(-\frac{dp}{dz} \right) \quad (D-12)$$

La Ec. (D-12) puede ser descrita en términos de la fluidez aparente del sistema:

$$Q_{BMP} = \frac{\varphi_{App}}{\varphi_0} Q_N \quad (D-13)$$



Deducción del flujo volumétrico para el modelo BMP

Derivación de la velocidad de flujo utilizando el fluido BMP en un tubo cilíndrico

En esta sección, se presenta el cálculo general de la velocidad de flujo. Sustitución de la tensión de cizallamiento a orden cero en la ecuación para la velocidad de flujo, se obtiene la siguiente expresión:

$$Q_0^* = \frac{1}{2A_0\sigma_{w0}^*} \int_0^1 \left(A_0B(\sigma_{w0}^*r^*)^2 - 1 + \sqrt{\left(A_0B(\sigma_{w0}^*r^*)^2 - 1 \right)^2 + 4A_0(\sigma_{w0}^*r^*)^2} \right) r^* dr^* \quad (D-14)$$

Sobre un cambio de variables: El índice de flujo viene dado por la expresión:

$$Q_0^* = \frac{1}{4A_0^2\sigma_{w0}^{*3}} \int_0^{A_0\sigma_{w0}^{*2}} \left(BU - 1 + \sqrt{(BU - 1)^2 + 4U} \right) dU = \frac{1}{4A_0^2\sigma_w^{*3}} \left(\frac{A_0^2B}{2} \sigma_{w0}^{*4} - A_0^2\sigma_{w0}^{*2} + BI \right) \quad (D-15)$$

Resolviendo la integral anterior:

$$I = \int_0^{A_0\sigma_{w0}^{*2}} \left(\sqrt{(U - \varphi_B)^2 + 4\varphi_B^2 U} \right) dU \quad (D-16a)$$

El núcleo integral se puede cambiar de la misma forma que para la velocidad axial

$$\sqrt{(U - \varphi_B)^2 + 4\varphi_B^2 U} = \sqrt{U^2 + 2\varphi_B(2\varphi_B - 1)U + (\varphi_B(2\varphi_B - 1))^2 + \varphi_B^2 - (\varphi_B(2\varphi_B - 1))^2} \quad (D-16b)$$



Las constantes están dadas por:

$$\delta_1^2 = \varphi_B^2 - (\varphi_B (2\varphi_B - 1))^2 = (\varphi_B + \varphi_B (2\varphi_B - 1))(\varphi_B - \varphi_B (2\varphi_B - 1)) = 4\varphi_B^3 (1 - \varphi_B) \quad (D-17)$$

$$\delta^2 = (\varphi_B (2\varphi_B - 1))^2; \delta_1^2 + \delta^2 = \varphi_B^2$$

Sustituyendo las definiciones anteriores en la integral, tenemos:

$$I = \int_0^{A_0 \sigma_{w0}^{*2}} \left(\sqrt{(U+\delta)^2 + \delta_1^2} \right) dU \quad (D-18)$$

Aplicando el mismo cambio de variables en la integral, i.e., $U+\delta = \delta_1 \tan \theta$; $dU = \delta_1 \sec^2 \theta$,

Obtenemos:

$$I = \int_0^{A_0 \sigma_{w0}^{*2}} \left(\sqrt{(U+\delta)^2 + \delta_1^2} \right) dU = \delta_1^2 \int_0^{A_0 \sigma_{w0}^{*2}} \sec^3 \theta d\theta = \frac{1}{2} (\sec \theta \tan \theta + \ln |\sec \theta + \tan \theta|) \quad (D-19)$$

La última integral se puede calcular directamente utilizando una integración cíclica parcial, de acuerdo con el siguiente cambio de variable $U = \sec \theta$; $dU = \sec^2 \theta d\theta$. El resultado de esta sustitución da:

$$I = \int_0^{A_0 \sigma_{w0}^{*2}} \left(\sqrt{(U+\delta)^2 + \delta_1^2} \right) dU = \delta_1^2 \int_0^{A_0 \sigma_{w0}^{*2}} \sec^3 \theta d\theta = \frac{1}{2} (\sec \theta \tan \theta + \ln |\sec \theta + \tan \theta|) \quad (D-20)$$

La expresión anterior se puede expresar como:

$$I = \delta_1^2 \int_0^{A_0 \sigma_{w0}^{*2}} \sec^3 \theta d\theta = \frac{1}{2} \left((U+\delta) \sqrt{(U+\delta)^2 + \delta_1^2} - \delta \sqrt{\delta^2 + \delta_1^2} + \delta_1^2 \ln \left| \frac{\sqrt{(U+\delta)^2 + \delta_1^2} + U + \delta}{\sqrt{\delta^2 + \delta_1^2} + \delta} \right| \right) \quad (D-21)$$

Insertando Eq. (D-14), en la expresión general de la velocidad de flujo (Eq. D-15) Y cambiando el U variable en términos de los números adimensionales y el



estrés de la pared, Eqs. (D-18, D-19) se obtiene la solución analítica para el caudal: Eq. (D-21). Es importante mencionar que la variable de control es la velocidad de flujo y da como resultado una ecuación algebraica no lineal $\Omega: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^1$; $\Omega[A_0, B, \sigma_{w0}^*] = Q_{BMP}^*[A_0, B, \sigma_{w0}^*] - Q_N^* \cdot \varphi_0^*[A_0, B, \sigma_{w0}^*]$. Dados los números $\{A_0, B\}$ de los datos reométricos y el índice de flujo $Q[A_0, B, \sigma_{w0}^*]$, el gradiente de presión puede calcularse usando un producto iterativo estándar tal como Newton-Rhapson:

$$p_0^* - p_L^* = \int_0^{L^*} \sigma_{w0}^* dz^* = -\frac{1}{2} \int_0^{L^*} \nabla^* p^* dz^* \quad (D-22)$$



APÉNDICE E



Fluidez aparente del modelo BMP

La fluidez aparente del modelo BMP, se puede expresar en términos de la siguiente integral, por lo que:

$$\frac{\Phi_{app}}{\Phi_0} = \frac{1/\phi_r}{a^4 \left(K\lambda\phi_\infty (\nabla_z p/2)^2 \right)^2} \int_0^{u_w} \left(u-1 + \sqrt{(u-1)^2 + 4\phi_r u} \right) du \quad (E-1)$$

Los límites asintóticos de la fluidez, toman la forma:

$$\lim_{\sigma_w \rightarrow 0} \frac{\Phi_{app}}{\Phi_0} = \frac{1/\phi_r}{a^4 \left(K\lambda\phi_\infty (\nabla_z p/2)^2 \right)^2} \int_0^{u_w} \left(u-1 + \sqrt{(u-1)^2 + 4\phi_r u} \right) du = 1 \quad (E-2)$$

$$\lim_{\sigma_w \rightarrow \infty} \frac{\Phi_{app}}{\Phi_0} = \frac{1/\phi_r}{a^4 \left(K\lambda\phi_\infty (\nabla_z p/2)^2 \right)^2} \int_0^{u_w} \left(u-1 + \sqrt{(u-1)^2 + 4\phi_r u} \right) du = \phi_\infty \quad (E-3)$$

Integrando la fluidez aparente, se tiene lo siguiente:

$$\frac{\Phi_{app}}{\Phi_0} = \frac{1/\phi_r}{a^4 \left(K\lambda\phi_\infty (\nabla_z p/2)^2 \right)^2} I(K\lambda, \phi_0, \phi_\infty, \nabla_z p) \quad (E-4)$$

En donde la integral, tiene la siguiente forma analítica:

$$I = \int_0^{u_w} \left(u-1 + \sqrt{(u-1)^2 + 4\phi_r u} \right) du \quad (E-5)$$

Resolviendo la integral, se tiene lo siguiente:

$$I = \frac{u_w^2}{2} - u_w + \left(\frac{1}{2}(u_w - 1) + \phi_r \right) \sqrt{(u_w - 1)^2 + 4\phi_r u_w} + \left(\phi_r - \frac{1}{2} \right) 2(1-\phi_r)\phi_r \ln \left[\frac{-1 + u_w + 2\phi_r + \sqrt{(u_w - 1)^2 + 4\phi_r u_w}}{-1 + 2\phi_r} \right] \quad (E-6)$$



Por lo tanto, el flujo volumétrico toma la forma, para el modelo BMP:

$$Q_{\text{BMP}} = \left(\frac{\varphi_{\text{app}}}{\varphi_0} \right) Q_N = \frac{1/\varphi_r}{a^4 \left(K\lambda\varphi_\infty (\nabla_z p/2)^2 \right)^2} I(K\lambda, \varphi_0, \varphi_\infty, \nabla_z p) Q_N \quad (\text{E-7})$$

Por lo tanto, el flujo volumétrico del modelo BMP se puede comprender como el producto del fluido newtoniano con la función fluidez aparente del modelo BMP, normalizada con la fluidez a bajo corte. Por otra parte, si el tiempo de restructuración tiende a cero, significa que el fluido es newtoniano, debido que la fluidez se reduce al modelo newtoniano.

$$\varphi_0 - \varphi + K\lambda(\varphi_\infty - \varphi)\sigma_{zr}^2\varphi = 0 \quad (\text{E-8})$$

Si la lambda es cero, el producto $K\lambda$ es cero por lo que la fluidez se simplifica de la siguiente manera:

$$\varphi \rightarrow \varphi_0 \quad (\text{E-9})$$

Entonces el flujo BMP se reduce al modelo newtoniano, i.e.

$$\text{Lim}_{\lambda \rightarrow 0} Q_{\text{BMP}} = \text{Lim}_{K\lambda \rightarrow 0} Q_{\text{BMP}} \rightarrow Q_N = \varphi_0 \frac{\pi a^4}{8} (-\nabla_z p) \quad (\text{E-10})$$

Otra alternativa es a partir de la definición de flujo volumétrico

$$\text{Lim}_{\lambda \rightarrow 0} Q = \text{Lim}_{\lambda \rightarrow 0} \pi \int_0^a \left(\frac{K\lambda\varphi_\infty (\nabla_z p/2)^2 r^2 - 1 + \sqrt{\left(K\lambda\varphi_\infty (\nabla_z p/2)^2 r^2 - 1 \right)^2 + 4K\lambda\varphi_0 (\nabla_z p/2)^2 r^2}}{2K\lambda (\nabla_z p/2) r} \right) r^2 dr \quad (\text{E-11})$$

Por lo tanto,



$$\text{Lim}_{\lambda \rightarrow 0} Q = \text{Lim}_{\lambda \rightarrow 0} -\pi \int_0^a \left(\frac{-1 + \sqrt{1 + 4K\lambda\phi_0 (\nabla_z p/2)^2 r^2}}{2K\lambda(\nabla_z p/2)r} \right) r^2 dr \quad (\text{E-12})$$

Desarrollando el numerador de la integral en serie de Taylor, se tiene lo siguiente:

$$\sqrt{1 + 4K\lambda\phi_0 (\nabla_z p/2)^2 r^2} \cong 1 + \frac{1}{2} (4K\lambda\phi_0 (\nabla_z p/2)^2 r^2) = 1 + 2K\lambda\phi_0 (\nabla_z p/2)^2 r^2 + O(4K\lambda\phi_0 (\nabla_z p/2)^2 r^2) \quad (\text{E-13})$$

Sustituyendo en la integral

$$\text{Lim}_{\lambda \rightarrow 0} Q = \text{Lim}_{\lambda \rightarrow 0} -\pi \int_0^a \left(\frac{-1 + 1 + 2K\lambda\phi_0 (\nabla_z p/2)^2 r^2}{2K\lambda(\nabla_z p/2)r} \right) r^2 dr \quad (\text{E-14})$$

Simplificando:

$$\text{Lim}_{\lambda \rightarrow 0} Q = \text{Lim}_{\lambda \rightarrow 0} -\pi\phi_0 (\nabla_z p/2) \int_0^a r^3 dr = -\pi\phi_0 (\nabla_z p/2) \frac{r^4}{4} \Big|_0^a = \frac{\pi\phi_0 a^4}{8} (-\nabla_z p) \quad (\text{E-15})$$

Por lo tanto, si el parámetro K tiende a cero, el flujo volumétrico es newtoniano.



BIBLIOGRAFÍA



Acierno A, La Mantia FP, Marrucci G, Titomanlio G (1976), A non linear viscoelastic model with structure dependent relaxation times. I. Basic formulation. *J Non-Newtonian Fluid Mech.* 1, 125-146.

Aubry T, and Moan M, Rheological behavior of a hydrophobically associating water soluble polymer, *J. Rheol.* (1994), 38 (6), 1681-1692.

Alves MA, Pinho FT, Oliveira PJ (2001), Study of steady pipe and channel flows of a single-mode Phan-Thien-Tanner fluid. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 101, 55-76.

A. M. Afonso, M. A. Alves, F. T. Pinho (2010), Electro-osmotic flow of viscoelastic fluids in micro channels under asymmetric zeta potentials, I, 15-30.

Arrault J, Cates ME, Grand C (1997), Slow transients and metastability in wormlike micelle rheology, *J. Phys. II*, 7, 1071-1086.

Alami E, Francois J, Almgren M, Brown W. Aggregation of hydrophobically end-capped poly(ethylene oxide) in aqueous solutions. *Macromolecules*, 29 (1996) 2229.

Anderson VJ, Boek ES, Briels WJ, Crawshaw JP, Padding JT, (2007), Flow of entangled wormlike micellar fluids: Mesoscopic simulations, rheology and μ -PIV experiments, *J Non-Newtonian Fluid Mech.* **146**(1-3): 11-21.

Annable T, Buscall R, Ettelaie R (1996), Network formation and its consequences for the physical behavior of associating polymers in solution. *Colloids and Surfaces A: Physicochem. Eng. Aspects* 112, 97.

Anderson VJ, Boek ES, Pearson JRA. The rheology of worm-like micellar fluids. *Rheology Reviews* 2006, 217 - 253.

Aguayo JP, Jahromi HRT, Manero O, Webster MF. (2011), Numerical investigation of transient contraction flows for worm-like micellar systems using Bautista-Manero models *J Non-Newtonian Fluid Mech.*, 166, 102-117.



Appell, J, et al. Static and dynamic properties of a network of wormlike surfactant micelles (cetylpyridinium chlorate in sodium-chlorate brine). *J. De Physique II*, 2(5) (1992) 1045-1052.

Apostolis AJ, Beris AN (2015), The effect of cholesterol and triglycerides on the steady state rheology of blood. *Rheol. Acta* 1, 1-13.

Barnes HA, Townsend P, Walters K (1969), Flow of non-Newtonian liquids under a varying pressure gradient. *Nature* 224, 585-587.

Barnes HA, Townsend P, Walters K (1971), On pulsatile flow of non-Newtonian liquids. *Rheol Acta* 10, 517-527.

Bautista F, De Santos JM, Puig JE, Manero O (1999), Understanding thixotropic and antithixotropic behavior of viscoelastic micellar solutions and liquid crystalline dispersions. The model. *J Non-Newtonian Fluid Mech* 80, 93-113.

Bautista F, Escalante JI, Manero O, Macias ER, Perez-Lopez JH, Puig JE, Soltero JFA (2003), Shear-banded flow and transient rheology of cationic wormlike micellar solutions. *Langmuir* 19, 6620-6626.

Bautista F, Soltero JFA, Macias ER, Manero O (2002), On the shear banding flow of wormlike micelles. *J Phys. Chem. B* 106, 13018-13026.

Bautista F, Soltero JFA, Pérez-López JH, Puig JE, Manero O (2000), On the shear banding flow of elongated micellar solutions. *J Non-Newtonian Fluid Mech.* 94, 57-66.

Bautista F, Soltero JFA, Puig JE, Manero O (2002), Dynamics of worm-like micelles: the Cox-Merz rule. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 106, 1-15.

Bautista F, Manero O, Puig JE, Soltero JFA (2002), Irreversible thermodynamics approach and modeling of shear-banding flow of wormlike micelles. *J. Phys. Chem. B* 106, 13018-13026.



Bautista F, García JP, Manero O, Perez-Lopez JH, Puig JE (2007), Stability analysis of shear banding flow with the BMP. *J. Non-Newtonian Fluid Mech* 144, 160-169.

Bautista F, Castillo-Tejas J, Manero O, Muñoz M, Pérez-López JH, Puig JE(2009), Critical phenomenon analysis of shear-banding flow in polymer-like micellar solutions.1. Theoretical approach. *J. Phys. Chem. B*, 113, 16101-9.

Bautista F, Caram Y, Manero O, Puig JE (2006), On the rheological modelling of associative polymers. *Rheol. Acta* 46, 45-57.

Bassett DR, Winnik MA, Tam KC, Jenkins RD (1998),A structural model of hydrophobically modified urethane-ethoxylate (HEUR) associative polymers in shear flow. *Macromolecules* 31, 4149.

Branched LZ (1996), Worm-like micelles and their networks.*Langmuir*12, 1729-1737.

Berret LF (1997), Transient Rheology of Wormlike Micelles. *J Rheol.* 39, 725-741.

Berret J, Séréro Y, Winkelman. Nonlinear rheology of telechelic polymer networks.*J. Rheol.*45 (2001) 477.

Boek ES, Briels WJ, Padding JT, Stukan MR (2009), Review of multi-scale particulate simulation of the rheology of wormlike micellar fluids. *Soft matter* 5, 4367-4375.

Boek ES, Briels WJ, Crawshaw JP, Padding JT, Stukan MR(2008), Flow of wormlike micelles in an expansion-contraction geometry, *Soft Matter* 4, 870-879.

Boek ES, Crawshaw JP, Padding JT, Stukan MR(2008), Influence of system size and solvent flow on the distribution of wormlike micelles in a contraction-expansion geometry. *Eur. Phys. J. E* 26, 63-71.



Bird RB, Armstrong RC, Hassager O (1977), Dynamics of polymeric liquids, vol 1. Fluid Mechanics. Wiley, New York

Calderas F, Maciel A, Manero O, Sánchez-Solis A(2009), The Transient flow of the PETPEN-Montmorillonite clay Nanocomposite Macromol Symp. 283-284, 354-360.

Casualli J, Clermont JR, Von Ziegler A, Mena B (1990),The oscillating die: a useful concept in polymer extrusion. J. Polym. Eng. Sci. 30.1551-1556.

Castillo HA, Castillo Tejas J, García-Sandoval JP, Matus O, Bautista F, Puig JE, Manero O (2014), Derivation of the mechanical and thermodynamic potentials from the generalized bmp model under shear-banded flow. J. Non-Equilibrium Thermodyn 39, 231-248.

Cates ME (1987), Reptation of living polymers: dynamics of entangled polymers in the presence of reversible chain-scission reactions. Macromolecules 20, 2289-2296.

Cates ME, Candau SJ (1990) Statics and dynamics of worm-like surfactants micelles. J Phys Condens Matter 2, 6869-6892

Caram Y, Bautista F, Puig JE, Manero O (2006), On the rheological modeling of associative polymers. Rheo. Acta 46, 45-57.

Cooper SL, Ma SX (2001), Shear thickening in aqueous solutions of hydrocarbon and end-capped poly (ethylene oxide). Macromolecules 34, 3294.

Cook LP, Kim NJ, McKinley GH, Pipe CJ, Vasquez PA (2010), Wormlike micellar solutions: II. Comparison between experimental data and scission model predictions, J. Rheol.54881-913.

Cooper SL, Ma SX (2001), Shear thickening in aqueous solutions of hydrocarbon and end-capped poly (ethylene oxide). Macromolecules 34, 3294.



Collet A, Calvet D, Berret J, Viguiet M, S  r  ro Y (2003), Perfluoroalkyl end-capped poly (ethylene oxide). Synthesis, characterization, and rheological behavior in aqueous solution. *Macromolecules* 36, 449.

Cromer M, Cook LP, McKinley GH (2011), Pressure-driven flow of worm-like micellar solutions in rectilinear microchannels. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 166, 180-193.

Cruz DOA, Pinho FT, Oliveira PJ (2005), Analytical solutions for fully developed laminar flow of some viscoelastic liquids with a Newtonian solvent contribution. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 132, 28-35.

Davies JM, Bhumiratana S, Bird RB (1978), Elastic and inertial effects in pulsatile flow of polymeric liquids in circular tubes. *J Non-Newtonian Fluid Mech* 3, 237-259.

De Kee D, Chan Man Fong CF (1994), Rheological Properties of Structured Fluids. *Polym. Eng. Sci.* 34, 438-445.

Edwards MF, Nellist DA, Wilkinson WL (1972), Pulsating flows of non-Newtonian fluids in pipes. *Chem. Eng. Sci.* 27, 545-553.

Escalante JI, Escobar DE, Mac  as ER, Pérez-López JH, Bautista F, Mendizabal E, Puig JE, Manero O (2007), Effect of a hydrotope on the viscoelastic properties of polymer-like micellar solutions. *Rheol. Acta* 46, 695-691.

Fredrickson AG (1964) *Principles and Applications of Rheology*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs.

Fredrickson AG (1970), A model for the thixotropy of suspensions. *AIChE J.* 16, 436-441.



García-Rojas B, Bautista F, Puig JE, Manero O (2009), Thermodynamic approach to rheology of complex fluids: Flow-concentration coupling. *Phys. Rev. E* 80, 036313-12.

García-Sandoval JP, Manero O, Bautista F, Puig JE (2012), Inhomogeneous flows and shear banding formation in micellar solutions: Predictions of the BMP model. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 179-180, 43-54.

Giesekus H (1966), Die Elastizität von Flüssigkeiten. *Rheol Acta* 5, 29-35.

Giesekus H (1982), A Simple Constitutive Equation for Polymer Fluids Based on the Concept of Deformation-dependent Tensorial Mobility. *J Non-Newtonian Fluid Mech.* 11, 69-109..

Giesekus H (1985), Constitutive equation for Polymer Fluids Based on the Concept of Configuration dependent Molecular Mobility: A Generalized Mean-Configuration Model. *J Non-Newtonian Fluid Mech.* 17, 349-372.

Glass JE, Kaczmarek JP (1993), Synthesis and solution properties of hydrophobically-modified ethoxylated urethanes with variable oxyethylene spacer lengths. *Macromolecules* 26, 5149.

Jongschaap RJJ (1981), Derivation of the Marrucci model from transient-network theory. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 8, 183-190.

Hashimoto T, Yamamoto T, Yamashita A (2008), Flow analysis for wormlike micellar solutions in an axisymmetric capillary channel. *Rheol. Acta* 47, 963-974.

Herrera-Valencia EE, Calderas F, Chávez AE, Manero O (2010), Study on the pulsating flow of worm-like micellar solutions, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 165, 174-183.

Herrera EE, Calderas F, Chavez AE, Manero O, Mena B (2009), Effect of random longitudinal vibration on the Poiseuille flow of a complex liquid. *Rheol. Acta* 48, 779-800.



Herrera Velarde JR, Zenit R, Mena B (2003), Measurement of the temperature rise in non-Newtonian oscillatory pipe flows. *J Non-Newtonian Fluid Mech.* 109, 157-176.

Lundberg DJ, Glass JE, Eley RR (1991), Viscoelastic behaviour among HEUR thickeners. *J. Rheol.* 35, 1255.

Macias ER, Bautista F, Attané P, Soltero JFA, Puig JE, Manero O (2003), On the shear thickening flow of dilute CTAT worm-like micellar solutions. *J. Rheol.* 47, 643-658.

Maestro A, González C, Gutierrez JM (2002), Shear thinning and thixotropy of HMHEC and HEC water solutions. *J. Rheol.* 46, 1445-1457.

Manero O, Bautista F, Soltero JFA, Puig JE (2002), Dynamics of worm-like micelles: the Cox-Merz rule. *J Non-Newtonian Fluid Mech.* 106, 1-15.

Manero O, Mena B (1977), An interesting effect in non-Newtonian flow in oscillating pipes. *Rheol. Acta* 19, 277-284.

Marrucci G, Bhargava S, Cooper SL (1993), Models of Shear-thickening behaviour in physically cross-linked networks. *Molecules* 26, 6483-6488.

Mena B, Manero O, Binding DM (1979), Complex flow of viscoelastic fluids through oscillating pipes. Interesting effects and applications. *J Non-Newtonian Fluid Mech.* 5, 427-448.

Mendoza-Fuentes AJ, Montiel R, Zenit R, Manero O (2009), On the flow of associative polymers past a sphere: Evaluation of negative wake criteria. *Phys. Fluids* 21, 033104-12.

Mewis J, Pellens L, Gamez Corrales R (2004), General nonlinear rheological behavior of associative polymers. *J. Rheol.* 48, 379.



Middleman S (1977) Fundamental of polymer processing. McGraw-Hill. New-York.

Herrera-Valencia EE (2015a). PAPIIT IN115615. Fenómenos de transporte y reología de fluidos complejos aplicados a sistemas biológicos.

Herrera-Valencia EE (2015b). PAPIME PE112716. Material didáctico Teórico, protocolos experimentales y aula virtual de las materias de fenómenos de transporte (cuarto semestre) y transferencia de masa (séptimo semestre) correspondientes a los ciclos intermedio y terminal de la carrera de ingeniería química.

Phan-Thien N, Tanner RI (1977), A new constitutive equation derived from network theory. J. Non-Newtonian Fluid Mech. 2, 353-365.

Pinho FT, Oliveira PJ (2000), Axial annular flow of a nonlinear viscoelastic fluid-an analytical solution. J. Non-Newtonian Fluid Mech. 93, 325-337.

Pinho FT, Coelho PM (2006), Fully-developed heat transfer in annuli for viscoelastic fluids with viscous dissipation. J. Non-Newtonian Fluid Mech. 138, 7-21.

Pinho FT, Whitelaw JH (1990), Flow of non-newtonian fluids in a pipe. J. Non-Newtonian Fluid Mech. 138, 7-21.

Rincon E, Chávez AE, Herrera R, Manero O (2005), Rheological modelling of complex fluids: A transient network model with microstates. J. Non-Newtonian Fluid Mech. 131, 64-77.

Sousa PC, Pinho FT, Oliveira MSN, Alves MA (2011), Extensional flow of blood analog solutions in microfluidic devices. Biomicrofluidics 5, 014108-19.

Turcio M, Reyes JM, Camacho R, Lira-galeana C, Vargas RO, Manero O (2013), Calculation of effective permeability for the BMP model in fractal porous media. J. Pet. Sci. Eng. 103, 51-60.



Kästner U (2001), The impact of rheological modifiers on water-borne coatings. *Colloids and Surfaces A: Physicochem. Eng. Aspect.* 183-185, 805.

Rao B, Dyke L, Macdonald PM, Uemura Y (1995), Self-diffusion coefficient of hydrophobic ethoxylated urethane associating polymers using pulsed-gradient spin-echo nuclear magnetic resonance. *Macromolecules* 28, 531.

Soltero JFA, Puig JE, Manero O (1999) Rheology of Cetyltrimethylammonium p-Toluenesulfonate-Water System. 3. Nonlinear Viscoelasticity. *Langmuir* 15, 1604-1612.

Spenley NA, Cates ME (1994) Pipe models for entangled fluids under strong shear. *Macromolecules* 27, 3850-3858.

Spenley NA, Cates ME, McLeish TCB (1993), Non-linear rheology of wormlike micelles. *Phys Rev. Lett.* 71, 939-942.

Spenley NA, Yuan XF, Cates ME (1996), Non-monotonic constitutive laws and the formation of shear banded flows. *J Phys II France* 6, 551-571.

Sundstrom DW, Kaufman A (1977), Pulsating flow of polymeric solutions. *Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev.* 16, 320-325.

Vaccaro A, Marrucci G (2000), A model for the nonlinear rheology of associating polymers. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 92, 261-273.

Vasquez, PA, McKinley GH, Cook LP (2007), A network scission model for wormlike micellar solutions I, Model formulation and viscometric flow predictions. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 144, 122-139.

Whittlestone D, Annable T, Buscall R, Ettelaie, R (1993), The rheology of solutions of associating polymers: comparison of experimental behavior with transient network theory. *J. Rheol.* 37, 695.



Yekta A, Winnik MA (1997), Associative polymers in aqueous solution. *Curr.Opin.Colloid Interface Sci.* 2, 424.

Yekta A, Xu B, James DF, Basset DR, Winnik MA, Sadegny-Daviland K, Jenkins RD (1993), Viscoelastic properties in water of comb associative polymers based on poly(ethylene oxide). *Langmuir* 13, 6903.

Yekta A, Xu B, Duhamel J, Adiwidjaja H, Winnik MA (1995), Fluorescence studies of associating polymers in water-determination of the chain-end aggregation number and a model for the association process. *Macromolecules* 28, 956.