UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

OPERACIONES CON ÓRDENES PARCIALES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

HÉCTOR OLVERA VITAL

DIRECTORA DE TESIS:
DRA. GABRIELA CAMPERO ARENA

2019 México, Cd. Mx.

1. Datos del alumno
   Olvera
   Vital
   Héctor
   55 20 90 72 96
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas
   306088557

2. Datos Tutor
   Dra.
   Gabriela
   Campero
   Arena

3. Datos del sinodal 1
   Dr.
   David
   Meza
   Alcántara

4. Datos del sinodal 2
   Dr.
   Favio Ezequiel
   Miranda
   Perea

5. Datos del sinodal 3
   M. en C.
   Luis Jesús
   Turcio
   Cuevas

6. Datos del sinodal 4
   Dr.
   Alejandro Darío
   Rojas
   Sánchez

7. Datos del trabajo escrito
   Operaciones con órdenes parciales
   121 p.
   2019

A mi familia
A mi hermano
A Angelica
A mis alumnos
A Manuel
A Hugo

Índice general

Introducción **ix**

1. Preliminares **1**

1.1. Órdenes . . . 1

1.1.1. Buenos órdenes . . . 4

1.1.2. El orden heredado . . . 4

1.1.3. Segmentos iniciales y finales . . . 6

1.2. Isomorfismos y tipos de orden . . . 8

1.2.1. El tipo de orden de los buenos órdenes . . . 12

1.2.2. Tipo de orden de los naturales, enteros, racionales y reales . . . 14

2. Cofinalidad y coinicialidad **21**

2.1. Orden invertido . . . 21

2.1.1. Invariantes . . . 23

2.1.2. Dualidad . . . 25

2.1.3. Buen orden invertido . . . 27

2.1.4. Órdenes simétricos . . . 28

2.2. Cofinalidad y coinicialidad . . . 28

2.2.1. Entorno . . . 37

2.3. Órdenes η_α . . . 39

3. Operaciones con órdenes **43**

3.1. Suma de órdenes . . . 43

3.1.1. Relación con la cofinalidad y los órdenes η_α . . . 48

3.1.2. La suma y su relación con otras propiedades de los órdenes 52
3.1.3. Suma en buenos órdenes 54
3.2. Producto de órdenes 58
3.2.1. Relación con la cofinalidad y los órdenes η_α 62
3.2.2. Relación con el orden invertido, la suma y otras propiedades 65
3.2.3. Producto en buenos órdenes 67
3.2.4. Producto con órdenes reflexivos 70
3.3. Suma sobre un orden 71
3.3.1. Relación con la cofinalidad y los órdenes η_α 74

4. Generalización del producto **77**
4.1. Producto directo 77
4.2. Producto lexicográfico 80
4.2.1. La cofinalidad en el producto lexicográfico 83
4.2.2. El producto lexicográfico y los órdenes η_α 94
4.2.3. El producto lexicográfico y otras propiedades de los órdenes 98

5. Concluciones **101**
5.1. Clases de órdenes 101
5.2. Propiedades de órdenes 103
5.3. Comentarios finales 105

A. Tipos de orden **107**
A.1. Clases de equivalencia 107
A.2. El truco de Scott 108

Bibliografía **111**

Introducción

Esta tesis surgió de una pregunta en un curso de Teoría de Conjuntos II: *¿La multiplicación de órdenes completos resulta un orden completo?* Aunque la respuesta fue negativa, un primer intento de demostración arrojó condiciones suficientes que de agregarse consiguen que el orden resultante sea completo.

A partir de este resultado surgieron dos preguntas: ¿qué otras propiedades se preservan con el producto? y ¿se puede definir otro producto de órdenes que preserve la propiedad de ser completo?

La primera pregunta nos habla de propiedades invariantes en el producto de órdenes. La idea de invariante es muy importante en matemáticas, los teoremas que muestran propiedades u objetos invariantes resultan ser muy útiles e indispensables, por ejemplo, el Teorema del punto fijo en análisis, los espacios T invariantes en álgebra lineal, etc.

De esta forma, esta tesis tiene como objetivo explorar diferentes tipos de operaciones que se pueden definir entre órdenes y en probar qué propiedades de los órdenes se preservan en las operaciones definidas. Otro objetivo es generar un texto alcanzable para los estudiantes de séptimo u octavo semestre de la Licenciatura en Matemática de la Facultad de Ciencias, cuyos temas se puedan desarrollar en un curso de Teoría de Conjuntos avanzado. Por ello, en esta tesis se dan por hecho algunos resultados que se encuentran en [1] y [2]. Sin embargo, se incluyen algunos de estos resultados, por ejemplo, los relacionados con conjuntos cofinales y coiniciales, ya que su definición varía de los textos citados.

Esta tesis se divide en cuatro capítulos. En el primer capítulo se presentan las definiciones fundamentales con las que se trabajará en los demás capítulos, como son isomorfismos entre órdenes, tipos de orden, etc. Además, se presentan los órdenes que usaremos en la mayoría de los ejemplos, estos son los números ordinales y las estructuras numéricas clásicas ω, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ con su orden canónico.

En el segundo capítulo se introduce la primera operación con órdenes: invertir el orden. Con esta operación se definirá la clase de órdenes que son resultado de invertir el orden de los números ordinales. La clase de los números ordinales junto con la clase que resulta de invertirlos nos ayudarán a definir varios conceptos como son la cofinalidad, la coinicialidad, el entorno de un elemento o de un hueco de un orden lineal. Y juntando estos conceptos caracterizaremos la clase de los órdenes η_α, que serán muy relevantes y recurrentes en esta tesis. Al igual a como sucede con la propiedad de ser completo, los órdenes η_α no se preservan con ciertas operaciones, pero podemos encontrar condiciones suficientes para que se preserven.

En el tercer capítulo exploraremos las operaciones de suma y multiplicación de órdenes, así como su relación con las propiedades de órdenes como la densidad y la completez, y su relación con las clases de órdenes como los ordinales (buenos órdenes) y los órdenes η_α, para terminar con una generalización de la operación de suma.

En el cuarto capítulo desarrollaremos dos formas de generalizar el producto de órdenes. Veremos cuáles de las propiedades de los órdenes se preservan y cómo se comportan con las distintas clases de órdenes. Nos concentraremos especialmente en el producto lexicográfico y su relación con los órdenes η_α. Analizaremos cómo se comporta la cofinalidad y la coinicialidad en el producto lexicográfico para llegar a describir de manera precisa el entorno de las cortaduras del producto lexicográfico. Con toda esta información veremos que la propiedad de ser η_α no se preserva en el producto lexicográfico, a diferencia de lo que se expone en [6]. Sin embargo, veremos que podremos incluir una condición sencilla sobre la cofinalidad para poder garantizar que el producto lexicográfico de órdenes η_α sea un orden η_α.

Finalmente se realiza un compilado de los resultados y se presentan en una tabla para una fácil consulta.

Capítulo I Preliminares

En este primer capítulo introduciremos los conceptos y herramientas que nos ayudarán a estudiar las operaciones entre órdenes. Veremos la noción intuitiva de tipo de orden con respecto a los isomorfismos de órdenes. Además presentaremos las propiedades que analizaremos detalladamente en las operaciones entre órdenes. Iniciaremos introduciendo la notación y algunas definiciones básicas.

1.1 | Órdenes

Una *relación binaria* es un conjunto de pares ordenados. Cuando se quiere especificar que todos los conjuntos que forman los pares ordenados son elementos de un conjunto, se indica que la relación es sobre dicho conjunto.

Definición 1.1 Una **relación binaria $\mathtt{r}$ sobre** un conjunto **A**, es un conjunto de pares ordenados donde cada entrada de los pares ordenados es un elemento del conjunto A, es decir, $\mathtt{r} \subseteq A \times A$.

Para indicar que dos elementos cualesquiera x, y de A están relacionados según $\mathtt{r}$, usaremos indistintamente las expresiones $\langle x, y\rangle \in \mathtt{r}$ y $x \mathrel{\mathtt{r}} y$, siendo la segunda la más ocupada para órdenes.

Denotaremos por $\operatorname{Dom}(\mathtt{r})$ al dominio de $\mathtt{r}$, $\operatorname{Im}(\mathtt{r})$ a la imagen de $\mathtt{r}$ y como $\operatorname{Cam}(\mathtt{r})$ al campo de $\mathtt{r}$, que se define como $\operatorname{Cam}(\mathtt{r}) = \operatorname{Dom}(\mathtt{r}) \cup \operatorname{Im}(\mathtt{r})$.

Algunos ejemplos de relaciones binarias, son los siguientes.

Ejemplo 1.2 Sea A un conjunto. El conjunto vacío es una relación sobre A.

Ejemplo 1.3 Sea A un conjunto. La relación $=$ es una relación sobre A. Esta relación cumple que todo elemento de A está relacionado consigo mismo.

Ejemplo 1.4 Sea A un conjunto. La relación $\subsetneqq$ es una relación sobre el conjunto $\mathcal{P}(A)$.

Las relaciones binarias pueden tener diversas propiedades y comportamientos. A través de estas propiedades se pueden clasificar y nombrar. Algunas de estas propiedades son las siguientes.

Las propiedades más comunes y básicas de las relaciones son: la reflexividad, antirreflexividad, simetría, antisimetría y transitividad. Las relaciones que cumplen conjuntamente varias de estas propiedades presentan características esenciales en matemáticas, como son las relaciones de equivalencia y las relaciones de orden, éstas últimas son aquellas con las que trabajaremos.

Definición 1.5 Sea A un conjunto y $\mathtt{r}$ una relación binaria sobre A. Decimos que $\mathtt{r}$ **es una relación**

(i) **reflexiva sobre** A si y sólo si $\forall x(x \in A \to \langle x, x\rangle \in \mathtt{r})$;

(ii) **antirreflexiva sobre** A si y sólo si $\forall x(x \in A \to \langle x, x\rangle \notin \mathtt{r})$;

(iii) **simétrica** si y sólo si $\forall x\forall y(\langle x, y\rangle \in \mathtt{r} \to \langle y, x\rangle \in \mathtt{r})$;

(iv) **antisimétrica** si y sólo si $\forall x\forall y((\langle x, y\rangle \in \mathtt{r} \wedge \langle y, x\rangle \in \mathtt{r}) \to x = y)$;

(v) **transitiva** si y sólo si $\forall x\forall y\forall z((\langle x, y\rangle \in \mathtt{r} \wedge \langle y, z\rangle \in \mathtt{r}) \to \langle x, z\rangle \in \mathtt{r})$

La relación vacío ($\varnothing$) del ejemplo 1.2 es antirreflexiva para toda A, simétrica, antisimétrica y transitiva. En el caso de que A sea el conjunto vacío, también la relación vacía es reflexiva sobre A.

La relación contención propia ($\subsetneq$) del ejemplo 1.4 es antirreflexiva y transitiva. Otro ejemplo de relación antirreflexiva y transitiva es la pertenencia ($\in$)[1] en los números naturales. Estas dos propiedades modelan un orden.

Definición 1.6 Sea A un conjunto y $\mathtt{r}$ una relación binaria sobre A. El par ordenado $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ es un **orden parcial** si cumple que

(i) $\mathtt{r}$ es antirreflexiva sobre A, y

(ii) $\mathtt{r}$ es transitiva.

Ejemplo 1.7 Consideremos el conjunto $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y la relación

$$\mathtt{r} = \{\langle 0, 1\rangle, \langle 0, 2\rangle, \langle 0, 3\rangle, \langle 0, 4\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 2, 4\rangle\}.$$

El par $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ es un orden parcial.

En el ejemplo anterior el número 1 y 2 no tienen relación según $\mathtt{r}$. Esto no ocurre en los números naturales con la pertenencia, pues, además de cumplir con ser antirreflexiva y transitiva, para cualesquiera dos números naturales n y m siempre se cumple que $n \in m$ o $m \in n$ o $n = m$.

Definición 1.8 Sea A un conjunto y $\mathtt{r}$ una relación binaria sobre A. El par ordenado $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ es un **orden lineal (o total)** si cumple que

[1] Podemos pensar en la pertenencia como relación al restringirla a un conjunto. En este caso, podemos definir $\in^\omega$ como $\langle x, y\rangle \in \in^\omega$ si y sólo si x, $y \in \omega$ y $x \in y$.

(i) $\langle A, \mathtt{r} \rangle$ es un orden parcial y

(ii) $\mathtt{r}$ es tricotómica en A, es decir, $\forall x \forall y((x \in A \land y \in A) \to (x \,\mathtt{r}\, y \lor y \,\mathtt{r}\, x \lor x = y))$.

El par $\langle A, \mathtt{r} \rangle$ del ejemplo 1.7 no es un orden lineal. Si realizamos una *representación gráfica de este orden*, donde $\langle a, b \rangle \in \mathtt{r}$ si hay una flecha o camino de flechas que van de a a b, obtendríamos el esquema que se muestra en la figura 1.1.

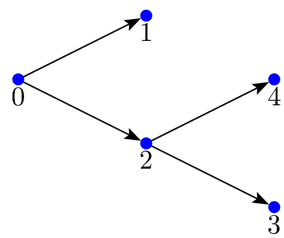

Figura 1.1: Representación gráfica del orden parcial $\langle A, \mathtt{r} \rangle$ del ejemplo 1.7.

Mientras que la representación gráfica de los números naturales se ve como una línea, figura 1.2. De hecho, todo orden lineal se puede ver o representar, como indica su nombre, sobre una línea.

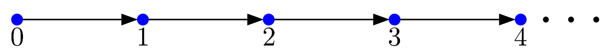

Figura 1.2: Representación gráfica del orden de los números naturales.

Ejemplo 1.9 Los siguientes pares son algunos órdenes lineales que usaremos en ejemplos posteriores.

(i) $\langle \varnothing, \varnothing \rangle$

(ii) $\langle \omega, \in \rangle$

(iii) Para cualquier $n \in \omega$, $\langle n, \in \rangle$

(iv) $\langle \mathbb{Z}, <_{\mathbb{Z}} \rangle$

(v) $\langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}} \rangle$

(vi) $\langle \mathbb{R}, <_{\mathbb{R}} \rangle$

Otro tipo de órdenes son los reflexivos, aquellos que se comportan como el menor o igual $(\leq)$ en los naturales.

Definición 1.10 Sea A un conjunto y $\mathtt{r}$ una relación binaria sobre A. El par ordenado $\langle A, \mathtt{r} \rangle$ es un **orden parcial reflexivo** si cumple que

(i) $\mathtt{r}$ es reflexiva sobre A,

(ii) $\mathtt{r}$ es antisimétrica sobre A, y

(iii) $\mathtt{r}$ es transitiva.

Siempre que tenemos un orden parcial $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ la relación $\mathtt{s}$ sobre A definida como $a\,\mathtt{s}\,b$ si y sólo si $a\,\mathtt{r}\,b$ o $a = b$, cumple que $\langle A, \mathtt{s}\rangle$ es un orden parcial reflexivo.

Definición 1.11 Sea A un conjunto y $\mathtt{r}$ una relación binaria sobre A. El par ordenado $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ es un **orden lineal reflexivo** si cumple que

(i) $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ es un orden parcial reflexivo, y

(ii) $\mathtt{r}$ es bicotómica en A, es decir, $\forall x \forall y((x \in A \wedge y \in A) \rightarrow (x\,\mathtt{r}\,y \vee y\,\mathtt{r}\,x))$.

Ejemplo 1.12 Los siguientes pares son ejemplos de órdenes lineales reflexivos.

(i) $\langle \varnothing, \varnothing\rangle$

(ii) $\langle \omega, \subseteq\rangle$

(iii) Para cualquier $n \in \omega$, $\langle n, \subseteq\rangle$

(iv) $\langle \mathbb{Z}, \leq_{\mathbb{Z}}\rangle$

(v) $\langle \mathbb{Q}, \leq_{\mathbb{Q}}\rangle$

(vi) $\langle \mathbb{R}, \leq_{\mathbb{R}}\rangle$

1.1.1 — Buenos órdenes

Una de las más importantes clases de órdenes con la que trabajaremos son los buenos órdenes, los cuales están determinados y caracterizados por los números ordinales.

Definición 1.13 Sea A un conjunto y $\mathtt{r}$ una relación binaria sobre A. Decimos que $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ es un **buen orden** o un conjunto **bien ordenado** si y sólo si cumple que:

(i) $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ es un orden parcial, y

(ii) todo subconjunto no vacío tiene mínimo, es decir,

$$\forall x((x \subseteq A \wedge x \neq \varnothing) \rightarrow \exists y(y \in x \wedge \forall z(z \in x \rightarrow (z = y \vee y\,\mathtt{r}\,z)))).$$

Aunque en la definición no se indica, se puede probar que los buenos órdenes cumplen la propiedad de tricotomía, es decir, todo buen orden es también un orden lineal.

Un ejemplo de un buen orden son los naturales con la pertenencia. También lo es cualquier número natural con la pertenencia.

Los números ordinales son los buenos órdenes con los que trabajaremos, ya que son los únicos buenos órdenes, salvo isomorfismo. Esto lo veremos más adelante en la siguiente sección.

1.1.2 — El orden heredado

En esta sección estudiaremos cómo son los subconjuntos de un orden parcial con el orden restringido.

Definición 1.14 Sean $\mathtt{r}$ una relación y B un conjunto. La **restricción** de $\mathtt{r}$ al conjunto B es la relación $\mathtt{r} \cap B^2$ y la denotamos por $\mathtt{r}\restriction_B$.

Por la definición de la restricción sabemos que se cumple que $\mathtt{r}\restriction_B \subseteq \mathtt{r}$ y que $\mathtt{r}\restriction_B \subseteq B^2$, es decir, $\mathtt{r}\restriction_B$ es una subrelación de $\mathtt{r}$ y una relación sobre B.

Nos enfocaremos al caso en que $\mathtt{r}$ es una relación sobre A y $B \subseteq A$. Consideremos las estructuras lógicas $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ y $\langle B, \mathtt{r}\restriction_B\rangle$, entonces $\langle B, \mathtt{r}\restriction_B\rangle$ es una subestructura de $\langle A, \mathtt{r}\rangle$. Como consecuencia de esto, podemos afirmar que cualquier enunciado universal[2] si es verdadero en la estructura $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ también será verdadero en la subestructura $\langle B, \mathtt{r}\restriction_B\rangle$.

Analizando la definición 1.5, los enunciados que definen la reflexividad, antirreflexividad, simetría, antisimetría, transitividad y también tricotomía son universales. Así, estas propiedades se heredarán a las subestructuras. La siguiente proposición resume lo anterior.

Proposición 1.15 *Sean $\mathtt{r}$ una relación sobre A y $B \subseteq A$.*

(i) *Si $\mathtt{r}$ es reflexiva sobre A, entonces $\mathtt{r}\restriction_B$ es reflexiva sobre B.*

(ii) *Si $\mathtt{r}$ es antirreflexiva sobre A, entonces $\mathtt{r}\restriction_B$ es antirreflexiva sobre B.*

(iii) *Si $\mathtt{r}$ es simétrica, entonces $\mathtt{r}\restriction_B$ es simétrica.*

(iv) *Si $\mathtt{r}$ es antisimétrica, entonces $\mathtt{r}\restriction_B$ es antisimétrica.*

(v) *Si $\mathtt{r}$ es transitiva, entonces $\mathtt{r}\restriction_B$ es transitiva.*

(vi) *Si $\mathtt{r}$ es tricotómica en A, entonces $\mathtt{r}\restriction_B$ es tricotómica en B.*

En consecuencia cualquier subconjunto B de un orden parcial $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ será también un orden parcial con la relación $\mathtt{r}\restriction_B$. Lo mismo ocurrirá si $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ es un orden lineal.

Los buenos órdenes no se quedan atrás, también esta propiedad se hereda a sus subconjuntos. Pero este resultado no es tan directo como los anteriores, pues la fórmula que distingue a los buenos órdenes no es un enunciado universal.

Teorema 1.16 *Sea $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ un buen orden. Entonces para cada $B \subseteq A$, $\langle B, \mathtt{r}\restriction_B\rangle$ es un buen orden.*

Demostración. Sea $B \subseteq A$. Sabemos que $\langle B, \mathtt{r}\restriction_B\rangle$ es un orden parcial. Veamos ahora que todo subconjunto no vacío de B tiene mínimo.

Sea $C \subseteq B$ no vacío, entonces $C \subseteq A$. Como $C \neq \varnothing$, existe $x \in C$ tal que para cualquier $y \in C$, $x \,\mathtt{r}\, y$ o $x = y$. Como $x \in C$ y $C \subseteq B$, $x \in B$. Como para cada $y \in C$ se tiene que $y \in B$, si $x \,\mathtt{r}\, y$, $x \,\mathtt{r}\restriction_B\, y$. Por lo tanto, existe $x \in C$ tal que para cualquier $y \in C$, $x \,\mathtt{r}\restriction_B\, y$ o $x = y$. Entonces C tiene mínimo.

Por lo tanto, $\langle B, \mathtt{r}\restriction_B\rangle$ es un buen orden.

$\dashv$

A una subestructura de un orden parcial se le llama suborden. La discusión anterior justifica este nombre en el sentido de que efectivamente la subestructura es un orden.

[2]Un enunciado universal es aquél que tiene una estructura $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_k \varphi$, donde φ es una fórmula libre de cuantificadores.

Definición 1.17 Sea $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ un orden parcial. El par $\langle B, \mathtt{s}\rangle$ es un **suborden** de $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ si y sólo si $B \subseteq A$ y $\mathtt{s} = \mathtt{r}\restriction_B$.

La notación $\langle B, \mathtt{r}\restriction_B\rangle$ resulta engorrosa y puede llegar a distraer al lector, así que, cuando no se preste a confusión, escribiremos simplemente $\langle B, \mathtt{r}\rangle$ en lugar de $\langle B, \mathtt{r}\restriction_B\rangle$; o diremos que **consideramos a B con el orden que hereda de A**.

1.1.3 — Segmentos iniciales y finales

Cuando tenemos un orden parcial podemos definir una relación entre subconjuntos del orden parcial.

Definición 1.18 Sean $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ un orden parcial, $a \in A$ y D, $E \subseteq A$. Escribimos $D < E$ si y sólo si para cualesquiera $x \in D$ y $y \in E$, $x \,\mathtt{r}\, y$.

Cuando D o E sean de la forma $\{a\}$ con $a \in A$, escribimos $a < E$ o $D < a$ en lugar de $\{a\} < E$ y $D < \{a\}$ respectivamente. Además, usaremos $D <_{\mathtt{r}} E$ para enfatizar que la relación es $\mathtt{r}$ en los casos en los que pueda haber confusión.

Definición 1.19 Sean $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ un orden parcial y $a \in A$. Definimos el conjunto de todos los elementos de A relacionados por la izquierda con a, que denotaremos por $a{\downarrow}$, como

$$a{\downarrow} = \{x \in A : x \,\mathtt{r}\, a\},$$

y el conjunto de todos los elementos de A relacionados por la izquierda o iguales con a, que denotamos por $a\underline{\downarrow}$, como

$$a\underline{\downarrow} = \{x \in A : x \,\mathtt{r}\, a \vee x = a\}.$$

También definimos el conjunto de todos los elementos de A relacionados por la derecha con a, que denotamos por $a{\uparrow}$, como

$$a{\uparrow} = \{x \in A : a \,\mathtt{r}\, x\},$$

y el conjunto de todos los elementos de A relacionados por la derecha o iguales con a, que denotamos por $a\underline{\uparrow}$, como

$$a\underline{\uparrow} = \{x \in A : a \,\mathtt{r}\, x \vee x = a\}.$$

También usaremos la notación $a\underline{\uparrow}_{\mathtt{r}}$ cuando se quiera enfatizar la relación o cuando se preste a confusión la notación. Además usaremos la notación $a\underline{\uparrow}^A$ cuando se quiera enfatizar el orden al que pertenece a o cuando se preste a confusión la notación.

Definición 1.20 Sea $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ un orden parcial. Un conjunto I es un **segmento inicial de** A si y sólo si $I \subseteq A$ y para cualesquiera a, $b \in A$, si $a \,\mathtt{r}\, b$ y $b \in I$, se tiene que $a \in I$.

Análogamente, un conjunto F es un **segmento final de** A si y sólo si $F \subseteq A$ y para cualesquiera a, $b \in A$, si $b \,\mathtt{r}\, a$ y $b \in F$, se tiene que $a \in F$.

Notemos que $a{\downarrow}$ y $a\underline{\downarrow}$ son ejemplos de segmentos iniciales de A y que $a{\uparrow}$ y $a\underline{\uparrow}$ son ejemplos de segmentos finales de A.

Sin embargo, no todos los segmentos iniciales y finales tiene esta forma. Por ejemplo, en los racionales el conjunto $\{x \in \mathbb{Q} : x \cdot x < 2 \vee x < 0\}$ es un segmento inicial de $\mathbb{Q}$ que no tiene máximo, por lo que no hay ningún $a \in \mathbb{Q}$ tal que $\{x \in \mathbb{Q} : x \cdot x < 2 \vee x < 0\} = a{\downarrow}^{\mathbb{Q}}$. Justamente este ejemplo corresponde al hueco en $\mathbb{Q}$ entendido como la raíz cuadrada de 2.

Proposición 1.21 *Sea $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ un orden parcial y $a \in A$.*

(i) *Para cada $b \in a{\downarrow}$, $b{\downarrow}^{a\downarrow} = b{\downarrow}^{A}$.*

(ii) *Para cada $b \in a{\uparrow}$, $b{\uparrow}^{a\uparrow} = b{\uparrow}^{A}$.*

(iii) *Para cada $b \in a\underline{\downarrow}$, $b\underline{\downarrow}^{a\underline{\downarrow}} = b\underline{\downarrow}^{A}$.*

(iv) *Para cada $b \in a\underline{\uparrow}$, $b\underline{\uparrow}^{a\underline{\uparrow}} = b\underline{\uparrow}^{A}$.*

Demostración. La contenciones de regreso se siguen de la transitividad de $\mathtt{r}$. Sólo basta notar que si $x \in b{\downarrow}^{a\downarrow_{\mathtt{r}}}_{\mathtt{r}\restriction_{a\downarrow_{\mathtt{r}}}}$, como $\mathtt{r}\restriction_{a\downarrow_{\mathtt{r}}} \subseteq \mathtt{r}$, $x \,\mathtt{r}\, b$.

$\dashv$

Si $a \in A$ y $b \in a{\uparrow}$, el conjunto $b{\downarrow}^{a\uparrow}$ no es un segmento inicial o final de A. Este conjunto es el de los elementos de A delimitados por a y por b. Cuando $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ sea un orden lineal los llamaremos intervalos.

Definición 1.22 Sean $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ un orden lineal, $a \in A$ y $b \in a{\uparrow}$.

(i) El **intervalo abierto** definido por a y b es el conjunto

$$(a, b) = \{x \in A : a \,\mathtt{r}\, x \wedge x \,\mathtt{r}\, b\}.$$

(ii) El **intervalo cerrado por la izquierda** definido por a y b es el conjunto

$$[a, b) = \{x \in A : (a \,\mathtt{r}\, x \vee x = a) \wedge x \,\mathtt{r}\, b)\}.$$

(iii) El **intervalo cerrado por la derecha** definido por a y b es el conjunto

$$(a, b] = \{x \in A : a \,\mathtt{r}\, x \wedge (x \,\mathtt{r}\, b \vee x = b)\}.$$

(iv) El **intervalo cerrado** definido por a y b es el conjunto

$$[a, b] = \{x \in A : (a \,\mathtt{r}\, x \vee x = a) \wedge (x \,\mathtt{r}\, b \vee x = b)\}.$$

La siguiente proposición relaciona los intervalos con los conjuntos $a\underline{\uparrow}$.

Proposición 1.23 *Sea $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ un orden lineal. $a \in A$ y $b \in a{\uparrow}$. Entonces las siguientes igualdades se cumplen.*

(i) $(a, b) = a{\uparrow}^{b\downarrow} = b{\downarrow}^{a\uparrow}$.

(ii) $[a, b) = a\underline{\uparrow}^{b\downarrow} = b{\downarrow}^{a\underline{\uparrow}}$.

(iii) $(a, b] = a{\uparrow}^{b\underline{\downarrow}} = b\underline{\downarrow}^{a\uparrow}$.

(iv) $[a, b] = a\underline{\uparrow}^{b\underline{\downarrow}} = b\underline{\downarrow}^{a\underline{\uparrow}}$.

Demostración. La demostración se sigue directamente de las definiciones.

$\dashv$

1.2 Isomorfismos y tipos de orden

Una función que preserva la estructura de la que se está hablando se llama homomorfismo. En nuestro caso, la estructura es un par ordenado $\langle A, \mathtt{r}\rangle$, donde A es un conjunto y $\mathtt{r}$ es una relación sobre A. Un homomorfismo entre los órdenes $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ y $\langle B, \mathtt{s}\rangle$ es una función $f : A \to B$ tal que $\forall x \forall y(x \;\mathtt{r}\; y \leftrightarrow f(x) \;\mathtt{s}\; f(y))$. Si, además, f es inyectiva, diremos que f es un encaje y que $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ se sumerge o encaja en $\langle B, \mathtt{s}\rangle$. Si, además, f es biyectiva, decimos que f es un isomorfismo entre $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ y $\langle B, \mathtt{s}\rangle$, y decimos que $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ y $\langle B, \mathtt{s}\rangle$ son isomorfos.

La gran importancia de los isomorfismos es que definen una "igualdad" entre estructuras, pudiendo ser dos estructuras diferentes como conjuntos pero tales que su comportamiento es igual.

Ejemplo 1.24 Consideremos los siguientes órdenes $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ y $\langle B, \mathtt{s}\rangle$ definidos como $A = \{0, 1\}$, $\mathtt{r} = \{\langle 0, 1\rangle\}$ y $B = \{1, 2\}$, $\mathtt{s} = \{\langle 1, 2\rangle\}$. Si nos fijamos en sus representaciones gráficas, figura 1.3, a pesar de que son conjuntos diferentes, podemos notar que "se ven" iguales. Esto se debe a que $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ y $\langle B, \mathtt{s}\rangle$ son isomorfos.

Figura 1.3: Representación gráfica de los órdenes $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ y $\langle B, \mathtt{s}\rangle$ del ejemplo 1.24.

Cuando dos órdenes son isomorfos notamos que se comportan de la misma forma, esto se debe a que cumplen los mismos enunciados lógicos gracias al Teorema del Homomorfismo, el cual es un resultado importante en el estudio de las estructuras lógicas.

Teorema 1.25 (Homomorfismo) *Sea h un homomorfismo de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ y sea s una función del conjunto de las variables en el dominio de $\mathfrak{A}$.*

(i) *Para cualesquiera términos t tenemos que $h(\bar{s}(t)) = \overline{h \circ s}(t)$, donde $\bar{s}(t)$ se calcula en $\mathfrak{A}$ y $\overline{h \circ s}(t)$ se calcula en $\mathfrak{B}$.*

(ii) *Para cualquier fórmula α libre de cuantificadores que no contenga símbolos de igualdad,*

$$\models_{\mathfrak{A}} \alpha_{[s]} \textit{ si y sólo si } \models_{\mathfrak{B}} \alpha_{[h\circ s]}$$

(iii) *Si h es inyectiva, entonces en el inciso* (ii) *podemos quitar la restricción "que no contenga símbolos de igualdad".*

(iv) *Si h es sobre, entonces en el inciso* (ii) *podemos eliminar la restricción "libre de cuantificadores".*

La demostración de este teorema escapa de nuestro tema de interés, pero se puede consultar en [4].

Cuando tenemos un isomorfismo entre órdenes, cumplirá los cuatro incisos del teorema anterior, con lo que cualquier enunciado de primer orden que cumpla un orden, también lo cumplirá el otro. Esto quiere decir que estas estructuras serán elementalmente equivalentes. Sin embargo, si dos órdenes son elementalmente equivalentes, no necesariamente son isomorfos.

De hecho, el isomorfismo entre órdenes es más fuerte que la equivalencia elemental. Tan es más fuerte que no solo cumplirán los mismos enunciados de primer orden, sino que también de segundo orden (y de órdenes superiores) como se indica en [4][3].

De manera contrapuesta a lo anterior, si un orden cumple un enunciado de primero o segundo orden y el otro no lo cumple, entonces podremos garantizar que no son isomorfos.

En el caso de los órdenes, cuando dos órdenes sean isomorfos diremos que tienen el mismo tipo de orden, como se muestra en la siguiente definición.

Definición 1.26 Sean $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ y $\langle B, \mathtt{s}\rangle$ dos órdenes parciales. Decimos que $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ y $\langle B, \mathtt{s}\rangle$ tienen el **mismo tipo de orden** si y sólo si hay un isomorfismo entre ellos.

Esto lo denotaremos como $\langle A, \mathtt{r}\rangle \cong \langle B, \mathtt{s}\rangle$ o como $\langle A, \mathtt{r}\rangle \cong_f \langle B, \mathtt{s}\rangle$ cuando se quiere especificar que f es un isomorfismo.

La propiedad entre órdenes de *tener el mismo tipo de orden* se comporta de manera reflexiva, simétrica y transitiva, es decir, se comporta como una relación de equivalencia. Con esto podemos "definir" el concepto de tipo de orden como un representante de cada clase[4] de equivalencia.

Para hablar de un tipo de orden usaremos las letras griegas como τ y μ. Así, si decimos que τ es un tipo de orden, pensaremos que existe un orden $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ que es isomorfo a τ y en este caso diremos que $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ es del tipo de orden τ.

Los tipos de órdenes se pueden relacionar entre ellos, podremos decir cuando dos son iguales o cuando uno es menor que el otro.

[3]Véase página 146 de [4].

[4]Clase en doble sentido ya que se puede pensar como clase de equivalencia y como clase propia, pues, la clase de todos los órdenes isomorfos a un orden es una clase propia, excepto en el caso del orden vacío. Véase el anexo A.

Definición 1.27 Sean $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ del tipo de orden τ y $\langle B, \mathtt{s}\rangle$ del tipo de orden μ.

(i) Decimos que $\tau = \mu$ si y sólo si $\langle A, \mathtt{r}\rangle \cong \langle B, \mathtt{s}\rangle$.

(ii) Decimos que $\tau \lesssim \mu$ si y sólo si existe un homomorfismo inyectivo de $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ en $\langle B, \mathtt{s}\rangle$, en este caso escribimos $\langle A, \mathtt{r}\rangle \lesssim \langle B, \mathtt{s}\rangle$.

(iii) Decimos que $\tau \lnsim \mu$ si y sólo si $\tau \leq \mu$ y $\tau \neq \mu$.

Como la composición de homomorfismos es un homomorfismo, la relación $\lesssim$ se comporta de manera transitiva. Además, la función identidad es un homomorfismo, por lo que $\lesssim$ también se comporta de manera reflexiva. Pero la relación $\lnsim$ entre los tipos de orden *no* es transitiva, pues en el ejemplo 1.30 veremos que hay tipos de orden tales que $\tau \lnsim \mu$ y $\mu \lnsim \tau$, pero claramente no se puede dar que $\tau \lnsim \tau$. Por consiguiente, la relación $\lesssim$ no es antisimétrica.

Para dar un ejemplo de lo anterior veremos una proposición que con frecuencia usaremos para demostrar que una función es un isomorfismo entre dos órdenes, la cual nos dice que, bajo ciertas condiciones, bastará demostrar que la función preserva el orden en un sentido para poder afirmar que es un homomorfismo inyectivo.

Proposición 1.28 *Sean A un conjunto y $\mathtt{r}$ una relación tricotómica sobre A, es decir, para cualesquiera x, $y \in A$ pasa una al menos una de las relaciones: $x\,\mathtt{r}\,y$, $y\,\mathtt{r}\,x$ o $x = y$. Sea $\langle B, \mathtt{s}\rangle$ un orden parcial. Si $f : A \to B$ cumple que para cualesquiera x, $y \in A$ con $x\,\mathtt{r}\,y$, se tiene que $f(x)\,\mathtt{s}\,f(y)$, entonces*

(i) *f es inyectiva, y*

(ii) *para cualesquiera x, $y \in A$, $x\,\mathtt{r}\,y$ si y sólo si $f(x)\,\mathtt{s}\,f(y)$.*

Demostración. Primero veamos que f es inyectiva. Sean x, $y \in A$ tales que $f(x) = f(y)$. Como $\mathtt{s}$ es antirreflexiva, no se cumple que $f(x)\,\mathtt{s}\,f(y)$ ni que $f(y)\,\mathtt{s}\,f(x)$. Por la contrapuesta de la hipótesis, tenemos que no pasa $x\,\mathtt{r}\,y$ ni $y\,\mathtt{r}\,x$. Por la tricotomía de $\mathtt{r}$ en A y por descarte de las opciones, concluimos que $x = y$. Por lo tanto, f es inyectiva.

Por hipótesis tenemos ya una implicación del inciso (ii). Demostraremos la otra implicación por contrapuesta. Sean x, $y \in A$, supongamos que no se cumple que $x\,\mathtt{r}\,y$. Por la tricotomía de $\mathtt{r}$ en A, tenemos que $y\,\mathtt{r}\,x$ o $x = y$. Si $y\,\mathtt{r}\,x$, usando la hipótesis se tiene que $f(y)\,\mathtt{s}\,f(x)$ y por la transitividad y la antirreflexividad de s en B, no se cumple que $f(x)\,\mathtt{s}\,f(y)$. Por otro lado, si $x = y$, $f(x) = f(y)$ y por la antirreflexividad de $\mathtt{s}$ en B, no se tiene que $f(x)\,\mathtt{s}\,f(y)$; con lo que queda demostrado el inciso (ii).

$\dashv$

Esta proposición también es cierta si se cambia la hipótesis de ser orden parcial por ser tricotómico. La proposición *no* es cierta cuando ambos son órdenes parciales, como se verá en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.29 Sean $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1, 2\}$, $\mathtt{r} = \{\langle 0, 1\rangle, \langle 0, 2\rangle, \langle 0, 3\rangle, \langle 1, 2\rangle\}$ y $\mathtt{s} = \{\langle 0, 1\rangle, \langle 0, 2\rangle, \langle 1, 2\rangle\}$. Tenemos que $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ y $\langle B, \mathtt{s}\rangle$ son órdenes parciales. Definamos $f : A \to B$ como $f = \{\langle 0, 0\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 1\rangle\}$.

En la figura 1.29 se observan las representaciones gráficas de los órdenes $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ y $\langle B, \mathtt{s}\rangle$ y la función f.

La función f cumple que para cualesquiera $x, y \in A$ con $x \,\mathtt{r}\, y$, se tiene que $f(x) \,\mathtt{s}\, f(y)$, que es una de las hipótesis de la proposición 1.28, pero no es inyectiva. Más aún, $f(3) \,\mathtt{s}\, f(2)$ y no se cumple que $3 \,\mathtt{r}\, 2$.

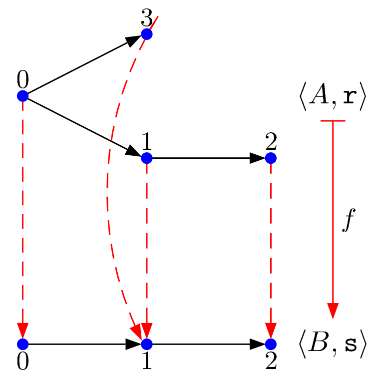

Figura 1.4: Representación gráfica de los órdenes $\langle A, \mathtt{r}\rangle$, $\langle B, \mathtt{s}\rangle$ y f del ejemplo 1.29.

El ejemplo 1.29 muestra que la condición de que $\langle A, r\rangle$ fuera tricotómico es esencial, pues sin ella alguno de los dos incisos podría no cumplirse.

Ahora veamos el ejemplo prometido de que $\lesssim$ en tipos de orden no es transitivo.

Ejemplo 1.30 Consideremos los siguientes subconjuntos de los reales $A = (0, 1) \cup (1, 2)$ y $B = (0, 2)$, ambos con el orden que heredan de los reales, y sean τ el tipo de orden de A y μ el tipo de orden de B.

Sea $f : A \to B$ definida como $f(x) = x$. Claramente si $x < y$, $f(x) < f(y)$ y por la proposición 1.28, f es un homomorfismo inyectivo y, por lo tanto, $\tau \lesssim \mu$.

Sea $g : B \to A$ definida como $g(x) = \frac{1}{2}x$. Si $x < y$, $\frac{1}{2}x < \frac{1}{2}y$, es decir, $g(x) < g(y)$. Por la proposición 1.28, g es un homomorfismo inyectivo y, por lo tanto, $\mu \lesssim \tau$.

Notemos que B cumple la propiedad del supremo de los reales, pero A no la cumple, pues $(0, 1)$ no tiene supremo. Así, no son isomorfos, es decir, $\tau \neq \mu$.

Dado $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ un orden parcial y $B \subseteq A$, la función $f : B \to A$ tal que $f(x) = x$ es un encaje, por lo que, $\langle B, \mathtt{r}\rangle$ se encaja en $\langle A, \mathtt{r}\rangle$. Más aún, si un orden se sumerge en $\langle A, \mathtt{r}\rangle$, entonces hay un suborden de A al cual es isomorfo.

Proposición 1.31 *Sea $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ un orden parcial. Si $\langle B, \mathtt{s}\rangle$ se sumerge en $\langle A, \mathtt{r}\rangle$, entonces existe $\langle C, \mathtt{r}\rangle$ un suborden de A tal que $\langle B, \mathtt{s}\rangle \cong \langle C, \mathtt{r}\rangle$.*

Demostración. Sea $f : B \to A$ un homomorfismo inyectivo. Definamos $C = \mathrm{Im}\,(f) \subseteq A$, entonces $\langle C, \mathtt{r}\rangle$ es un suborden de A. Como f es sobre $\mathrm{Im}\,(f)$, $f : B \to C$ es un isomorfismo. Por lo tanto, $\langle B, \mathtt{s}\rangle \cong \langle C, \mathtt{r}\rangle$.

$\dashv$

El siguiente teorema nos dice que todo orden parcial sobre A es puede representar por un orden con la contención propia.

Teorema 1.32 *Sea $\langle A, <\rangle$ un orden parcial. Entonces existe $B \subseteq \mathcal{P}(A)$, tal que $\langle A, <\rangle$ es isomorfo a $\langle B, \subsetneq\rangle$.*

Demostración. Sea $\langle A, <\rangle$ un orden parcial. Definamos $B \subseteq \mathcal{P}(A)$ como

$$B = \{a\underline{\downarrow} : a \in A\},$$

veamos que $\langle A, <\rangle$ y $\langle B, \subsetneq\rangle$ son isomorfos.

Sea $f : A \to B$ definida como $f(a) = a\underline{\downarrow}$. Sean a, $b \in A$ tales que $a < b$, entonces $a \in b\underline{\downarrow}$. Si $c \in a\underline{\downarrow}$, $c \leq a$ y como $b\underline{\downarrow}$ es segmento inicial, $c \in b\underline{\downarrow}$. Por lo tanto, $a\underline{\downarrow} \subseteq b\underline{\downarrow}$. Además, $b \notin a\underline{\downarrow}$ y $b \in b\underline{\downarrow}$, por lo que $a\underline{\downarrow} \subsetneq b\underline{\downarrow}$, es decir, $f(a) \subsetneq f(b)$.

Ahora, si $f(a) \subsetneq f(b)$, entonces $a\underline{\downarrow} \subsetneq b\underline{\downarrow}$. Como $a \in a\underline{\downarrow}$, $a \in b\underline{\downarrow}$ y, por lo tanto, $a \leq b$. Como $a\underline{\downarrow} \subsetneq b\underline{\downarrow}$, existe $c \in b\underline{\downarrow}$ tal que $c \notin a\underline{\downarrow}$. Entonces $c \leq b$ y no se cumple que $c \leq a$, por lo que $a \neq b$. Por lo tanto, $a < b$ y f es un homomorfismo.

Veamos que f es inyectiva. Sean x, $y \in A$ tales que $f(x) = f(y)$, entonces $x\underline{\downarrow} = y\underline{\downarrow}$. Como $x \in x\underline{\downarrow}$, $x \in y\underline{\downarrow}$ y entonces $x \leq y$. Análogamente $y \leq x$, por lo que $x = y$ y f es inyectiva.

Sólo falta ver que f es sobre. Sea $w \in B$, entonces existe $a \in A$ tal que $w = a\underline{\downarrow}$, por la definición de B. Entonces se tiene que $f(a) = a\underline{\downarrow} = w$. Por lo tanto, f es un isomorfismo entre $\langle A, <\rangle$ y $\langle B, \subsetneq\rangle$.

$\dashv$

1.2.1 — El tipo de orden de los buenos órdenes

Los isomorfismos entre buenos órdenes son limitados, de hecho, son únicos como se muestra en el siguiente Teorema.

Teorema 1.33 *Si $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ y $\langle B, \mathtt{s}\rangle$ son conjuntos bien ordenados isomorfos, entonces el isomorfismo entre ellos es único.*

Demostración. Sean f y g isomorfismos de A en B, veamos que f y g son iguales.

Definamos $C = \{x \in A : f(x) \neq g(x)\}$. Si $C \neq \varnothing$, entonces C tiene mínimo, digamos a_0. Como $a_0 \in C$, $f(a_0) \neq g(a_0)$ y como $\langle B, \mathtt{s}\rangle$ es un buen orden, en particular es un orden lineal, por lo tanto, $f(a_0)\,\mathtt{s}\,g(a_0)$ o $g(a_0)\,\mathtt{s}\,f(a_0)$.

Si $f(a_0)\,\mathtt{s}\,g(a_0)$, entonces $g^{-1}(f(a_0))\,\mathtt{r}\,a_0$, pues g^{-1} es un isomorfismo de B en A. Por la minimalidad de a_0, $f(g^{-1}(f(a_0))) = g(g^{-1}(f(a_0)))$. Entonces $f(g^{-1}(f(a_0))) = f(a_0)$. Pero f es inyectiva, entonces $g^{-1}(f(a_0)) = a_0$, lo cual contradice la tricotomía de $\mathtt{r}$ en A.

Si $g(a_0)\ \mathtt{s}\ f(a_0)$, entonces $f^{-1}(g(a_0))\ \mathtt{r}\ a_0$. Por la minimalidad de a_0, $g(f^{-1}(g(a_0))) = f(f^{-1}(g(a_0))$. entonces $g(f^{-1}(g(a_0))) = g(a_0)$. Por la inyectividad de g, $f^{-1}(g(a_0)) = a_0$, lo cual contradice la tricotomía de $\mathtt{r}$ en A.

En ambos casos obtenemos una contradicción, por lo tanto, $C = \varnothing$, lo cual implica que $f = g$.

$\dashv$

Al reducirse los isomorfismos, la clase de órdenes más sencilla de clasificar es la clase de todos los buenos órdenes. En esta clase podemos escoger de manera fácil un tipo de orden, pues tenemos la clase de los ordinales como representantes de todos los buenos órdenes gracias al Teorema de Enumeración. Este teorema afirma que todo buen orden es isomorfo a un único ordinal, es decir, si $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ es un buen orden, entonces existe un único ordinal γ tal que $\langle A, \mathtt{r}\rangle \cong \langle \gamma, \in\rangle$ y cuya demostración se puede consultar en [2].

Por este teorema, los únicos buenos órdenes, salvo isomorfismo, son los ordinales. Esta unicidad establece que los ordinales son los mejores candidatos para representar a los buenos órdenes, entonces si $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ es un buen orden, su tipo de orden será el único ordinal al cual es isomorfo.

Definición 1.34 Sea $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ un buen orden. El **tipo de orden** de $\langle A, \mathtt{r}\rangle$, denotado $\tau(\langle A, \mathtt{r}\rangle)$ o simplemente $\tau(A)$, es el único ordinal α tal que $\langle A, \mathtt{r}\rangle \cong \langle \alpha, \in\rangle$.

Ejemplo 1.35 Consideremos al conjunto $A = \{\omega, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$ y la relación

$$\mathtt{r} = \{\langle \omega, \mathbb{Z}\rangle, \langle \omega, \mathbb{Q}\rangle, \langle \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\rangle\}.$$

El par $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ es un buen orden y su tipo de orden es el ordinal 3. El isomorfismo entre ellos es: $\omega \mapsto 0$, $\mathbb{Z} \mapsto 1$ y $\mathbb{Q} \mapsto 2$.

Además de buenos representantes, los ordinales son muy fáciles de manejar como tipos de orden. Por ejemplo, el orden de los ordinales y el orden de tipos de orden son compatibles, es decir, si α y β números ordinales, entonces $\alpha \in \beta$ si y sólo si $\langle \alpha, \in\rangle \lnsim \langle \beta, \in\rangle$.

Gracias al siguiente teorema, también podemos resolver la elección de representantes de tipos de orden para los órdenes lineales finitos, ya que como veremos a continuación si un orden lineal es finito, entonces también es un buen orden.

Teorema 1.36 *Sea $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ un orden lineal. Si A es finito, $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ es un buen orden.*

Demostración. Demostremos por inducción que para toda $n \in \omega$, cualquier orden lineal $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ tal que $|A| = n$, $\langle A, \mathtt{r}\rangle \cong \langle n, \in\rangle$.

Si $|A| = 0$, $A = \varnothing$ y $r = \varnothing$. Consideremos la función vacía $\varnothing : A \to 0$, por vacuidad es un isomorfismo. Por lo tanto, $\langle A, \mathtt{r}\rangle \cong \langle 0, \in\rangle$.

Supongamos que para cualquier orden lineal $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ tal que $|A| = n$, se tiene que $\langle A, \mathtt{r}\rangle \cong \langle n, \in\rangle$. Sea $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ un orden lineal tal que $|A| = \mathrm{s}\,(n)$. Entonces $A \neq \varnothing$. Sea $a \in A$. Definamos

$B = A \setminus \{a\}$, $\langle B, \mathtt{r}\rangle$ es un orden total y $|B| = n$. Por hipótesis de inducción, $\langle B, \mathtt{r}\rangle \cong \langle n, \in\rangle$. Sea f dicho isomorfismo.

Consideremos al conjunto $a\!\uparrow\, \subseteq B$. Si $a\!\uparrow\, = \varnothing$, $f \cup \{\langle a, n\rangle\}$ es un isomorfismo entre A y $\mathrm{s}\,(n)$. Si $a\!\uparrow\, \neq \varnothing$, $f[a\!\uparrow] \neq \varnothing$. Sea $m = \text{mín}\, f[a\!\uparrow]$. Definamos $g : A \to \mathrm{s}\,(n)$ como

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \,\mathtt{r}\, a \\ m & \text{si } x = a \\ \mathrm{s}\,(f(x)) & \text{si } a \,\mathtt{r}\, x \end{cases}.$$

Notemos que para cualquier $x \in B$, $f(x) = g(x)$ o $f(x) \in g(x)$, por lo que g preserva el orden. Por la proposición 1.28, g es un homomorfismo inyectivo y claramente es sobre. Por lo tanto, $\langle A, \mathtt{r}\rangle \cong \langle \mathrm{s}\,(n), \in\rangle$.

Finalmente, como $\langle n, \in\rangle$ es un buen orden, entonces cualquier orden total finito es un buen orden.

$\dashv$

De hecho, si $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ es un orden lineal finito, el tipo de orden de $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ es el número ordinal al cual es equipotente.

Definir el tipo de orden de otros órdenes, que no sean buenos órdenes, es más complicado. En la sección 2.1 veremos otra clase de órdenes para los que podremos definir su tipo de orden, la cual está estrechamente ligada a los buenos órdenes. Además, en el anexo A se puede consultar la definición formal de tipo de orden, cuyo uso no es muy práctico. Para las cuestiones que trataremos nos basta la definición dada de tener el mismo tipo de orden. Para los tipos de orden más usuales, como son el de los naturales, enteros, racionales y reales, recordaremos sus teoremas de caracterización y su notación en la siguiente sección.

1.2.2 — Tipo de orden de los naturales, enteros, racionales y reales

Los órdenes más conocidos son los números naturales, enteros, racionales y reales cada uno con su orden usual. En esta sección denotaremos el tipo de orden de cada uno y recordaremos sus caracterizaciones. Además veremos la relación entre sus tipos de orden.

Para trabajar con los números naturales, enteros, racionales y reales usaremos su definición como aparece en [2].

El tipo de orden de los números naturales

Por la definición del tipo de orden de los buenos órdenes $\tau(\langle \omega, \in\rangle) = \omega$.

Para enunciar el teorema de caracterización del orden de los naturales, recordemos las siguientes definiciones.

Definición 1.37 Sea $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ un orden parcial y sea $B \subseteq A$. Decimos que $a \in A$ **es una cota inferior de** B si y sólo si para todo $b \in B$, $a \,\mathtt{r}\, b$ o $a = b$.

Además, decimos que $a \in A$ **es una cota superior de** B si y sólo si para todo $b \in B$, $b \, \mathtt{r} \, a$ o $a = b$.

En el caso en que $B \subseteq A$ y exista una $a \in A$ tal que a es una cota inferior o superior de B, diremos que B está inferiormente o superiormente acotado en A, según sea el caso.

Decimos que $\langle A, \mathtt{r} \rangle$ tiene un **extremo derecho** (**extremo izquierdo**) si y sólo si A tiene un máximo (mínimo). Además, decimos que $\langle A, \mathtt{r} \rangle$ tiene **extremos** si y sólo si $\langle A, \mathtt{r} \rangle$ tiene extremo izquierdo y derecho.

Decimos que $\langle A, \mathtt{r} \rangle$ **no tiene extremo derecho** (**no tiene extremo izquierdo**) si y sólo si para cualquier $x \in A$, existe un $y \in A$ tal que $x \, \mathtt{r} \, y$ ($y \, \mathtt{r} \, x$). Además, decimos que $\langle A, \mathtt{r} \rangle$ **no tiene extremos** si y sólo si $\langle A, \mathtt{r} \rangle$ no tiene extremo derecho ni izquierdo.

Ahora podemos enunciar el teorema de caracterización del orden de los naturales. Daremos una prueba corta usando el Teorema de Enumeración y las propiedades de los ordinales.

Teorema 1.38 *Sea $\langle A, \mathtt{r} \rangle$ un buen orden, no vacío, sin extremo derecho y tal que todo subconjunto no vacío superiormente acotado tiene un máximo. Entonces $\langle A, \mathtt{r} \rangle \cong \langle \omega, \in \rangle$.*

Demostración. Sea $\langle A, \mathtt{r} \rangle$ como en las hipótesis. Como es un buen orden, por el Teorema de Enumeración, existe α ordinal tal que $\langle A, \mathtt{r} \rangle \cong \langle \alpha, \in \rangle$. Como A es no vacío y no tiene extremo derecho, α no es cero y no tiene extremo derecho. Por lo tanto, α es un ordinal límite. Entonces $\omega \subseteq \alpha$. Si $\omega \subsetneq \alpha$, $\omega \in \alpha$. Entonces ω esta acotado superiormente en α por ω. Y por hipótesis, ω tendría máximo en α, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\alpha = \omega$ y $\langle A, \mathtt{r} \rangle \cong \langle \omega, \in \rangle$. $\dashv$

Ejemplo 1.39 Sea $\omega^+ = \omega \setminus \{0\} \subseteq \omega$. Por el orden heredado, $\langle \omega^+, \in \rangle$ es un buen orden. Sea $B \subseteq \omega^+$ no vacío y superiormente acotado. Entonces, B es un subconjunto no vacío y acotado superiormente en $\langle \omega, \in \rangle$, por lo que B tiene máximo. Sea b_0 el máximo de B, entonces para cualquier $b \in B$, $b \, \mathtt{r} \, b_0$ o $b = b_0$, pero $B \subseteq \omega^+$, por lo tanto, para cualquier $b \in B$, $b \, \mathtt{r}\restriction_{\omega^+} b_0$ o $b = b_0$.

Entonces ω^+ cumple las hipótesis de la caracterización de ω, por lo tanto, $\langle \omega^+, \in \rangle \cong \langle \omega, \in \rangle$.

El tipo de orden de los números enteros

El tipo de orden de los números enteros con su orden usual lo denotaremos como ζ, es decir, $\zeta = \tau(\langle \mathbb{Z}, <_{\mathbb{Z}} \rangle)$. Cuando definamos el orden invertido y la suma de órdenes veremos que $\zeta = \omega^* + \omega$.

En la siguiente proposición veremos que el tipo de orden de los naturales es menor que el tipo de orden de los enteros, es decir, $\omega < \zeta$.

Proposición 1.40 *El tipo de orden de los números naturales es menor que el tipo de orden de los números enteros, es decir, $\langle \omega, \in \rangle < \langle \mathbb{Z}, <_{\mathbb{Z}} \rangle$.*

Demostración. Definamos $\mathbb{E}_{\mathbb{Z}} : \omega \to \mathbb{Z}$ como $\mathbb{E}_{\mathbb{Z}}(n) = \overline{\langle n, 0\rangle}$. Se puede ver que $\mathbb{E}_{\mathbb{Z}}$ es un encaje.

Por lo tanto, $\langle \omega, \in\rangle \lesssim_{\mathbb{E}_{\mathbb{Z}}} \langle \mathbb{Z}, <_{\mathbb{Z}}\rangle$.

Pero $\langle \mathbb{Z}, <_{\mathbb{Z}}\rangle$ no es un buen orden, pues $\mathbb{Z}$ es no vacío y no tiene mínimo. Entonces, no es isomorfo a $\langle \omega, \in\rangle$. Por lo tanto, $\langle \omega, \in\rangle < \langle \mathbb{Z}, <_{\mathbb{Z}}\rangle$.

$\dashv$

Recordemos la caracterización del orden de los números enteros.

Teorema 1.41 *Sea $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ un orden lineal no vacío sin extremos tal que todo subconjunto no vacío de A acotado superiormente tiene máximo y todo subconjunto no vacío inferiormente acotado tiene mínimo. Entonces $\langle A, \mathtt{r}\rangle \cong \langle \mathbb{Z}, <_{\mathbb{Z}}\rangle$.*

La demostración de este teorema se puede consultar en [2], página 23.

El tipo de orden de los números racionales

El orden de los números racionales es muy importante en la teoría de órdenes. Los racionales con su orden usual son la base de conceptos tan importantes como los órdenes η_α, que estudiaremos en la sección 2.3, y los órdenes $\aleph_\alpha$-universales, en los cuales todo orden lineal de cardinalidad menor o igual a $\aleph_\alpha$ se sumerge en ellos.

Al tipo de orden de los racionales se le denota por η, es decir, $\eta = \tau(\langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}}\rangle)$.

Una de las propiedades que distinguen a los números racionales de los naturales y de los enteros es la densidad. Esta propiedad se define a continuación.

Definición 1.42 Sea $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ un orden parcial. Decimos que $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ es **denso** si y sólo si para cualesquiera x, $y \in A$, si $x \mathrel{\mathtt{r}} y$, entonces existe $z \in A$ tal que $x \mathrel{\mathtt{r}} z$ y $z \mathrel{\mathtt{r}} y$.

Usaremos que $\langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}}\rangle$ es un orden denso, numerable y sin extremos para demostrar que $\langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}}\rangle$ es un orden $\aleph_0$-universal.

Teorema 1.43 *Todo orden lineal finito o numerable se sumerge en $\langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}}\rangle$.*

Demostración. Veremos primero que todo orden numerable se sumerge en $\langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}}\rangle$.

Sea $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ un orden lineal numerable. Como A y $\mathbb{Q}$ son numerables, sean $A = \{a_n : n \in \omega\}$ y $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \omega\}$ de forma que ambas enumeraciones sean inyectivas.

Diremos que una función h es un *isomorfismo parcial* de A en $\mathbb{Q}$ si y sólo si $\mathrm{Dom}\,(h) \subseteq A$ y h es un homomorfismo.

Demostremos que si h es un isomorfismo parcial de A en $\mathbb{Q}$ con dominio finito y $a \in A$, entonces existe un isomorfismo parcial de A en $\mathbb{Q}$, h_a, tal que $h \subseteq h_a$ y $a \in \mathrm{Dom}\,(h_a)$.

Sea $h = \{\langle a_{i_0}, q_{j_0}\rangle, \langle a_{i_1}, q_{j_1}\rangle, \ldots, \langle a_{i_k}, q_{j_k}\rangle\}$ un isomorfismo parcial de A en $\mathbb{Q}$ con dominio finito, donde $a_{i_0} \mathrel{\mathtt{r}} a_{i_1} \mathrel{\mathtt{r}} \cdots \mathrel{\mathtt{r}} a_{i_k}$. Por lo tanto, $q_{j_0} <_{\mathbb{Q}} q_{j_1} <_{\mathbb{Q}} \cdots <_{\mathbb{Q}} q_{j_k}$. Sea $a \in A$.

Si $a \in \mathrm{Dom}\,(h)$, entonces $h_a = h$. Supongamos que $a \notin \mathrm{Dom}\,(h)$. Por la tricotomía de A hay tres casos, $a \mathrel{\mathtt{r}} a_{i_0}$, $a_{i_k} \mathrel{\mathtt{r}} a$ o existe un $r \in k$ tal que $a_{i_r} \mathrel{\mathtt{r}} a \mathrel{\mathtt{r}} a_{i_{\mathrm{s}(r)}}$.

Si $a \mathrel{\mathtt{r}} a_{i_0}$, sea $q_n \in \mathbb{Q}$ tal que n es el mínimo natural que cumple $q_n <_{\mathbb{Q}} q_{j_0}$. Dicho q_n existe porque $\mathbb{Q}$ no tiene extremo izquierdo.

Si $a_{i_k} \mathrel{\mathtt{r}} a$, sea $q_n \in \mathbb{Q}$ tal que n es el mínimo natural que cumple $q_{j_k} <_{\mathbb{Q}} q_n$. Dicho q_n existe, pues $\mathbb{Q}$ no tiene extremo derecho.

Si existe un $r \in k$ tal que $a_{i_r} \mathrel{\mathtt{r}} a \mathrel{\mathtt{r}} a_{i_{\mathrm{s}(r)}}$, sea q_n tal que n es el mínimo natural que cumple $q_{j_r} <_{\mathbb{Q}} q_n <_{\mathbb{Q}} q_{j_{\mathrm{s}(r)}}$. Dicho q_n existe porque $\mathbb{Q}$ es denso.

En todos los casos, q_n guarda la misma relación en el orden $<_{\mathbb{Q}}$ con respecto a $q_{j_0}, \ldots, q_{j_k}$ que la relación que guarda a en el orden $\mathtt{r}$ con respecto a $a_{i_0}, \ldots, a_{i_k}$. Así, $h_a = h \cup \{\langle a, q_n \rangle\}$ es un isomorfismo parcial de A en $\mathbb{Q}$ y cumple que $h \subseteq h_a$ y $a \in \mathrm{Dom}\,(h_a)$.

Definamos por recursión una cadena de isomorfismos parciales, de forma que $h_0 = \varnothing$ y $h_{\mathrm{s}(n)} = (h_n)_{a_n}$. Sea $h = \bigcup_{n\in\omega} h_n$, entonces h es un homomorfismo de A en $\mathbb{Q}$. Por la proposición 1.28, h es inyectiva. Por lo tanto, $\langle A, \mathtt{r}\rangle \lesssim \langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}}\rangle$.

En particular, $\langle \omega, \in\rangle \lesssim \langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}}\rangle$. Ahora, sea $\langle B, \mathtt{s}\rangle$ un orden lineal finito. Por el teorema 1.36, $\langle B, \mathtt{s}\rangle \cong \langle n, \in\rangle$ con $|B| = n$. Además se tiene que $\langle n, \in\rangle \lesssim \langle \omega, \in\rangle$. Por lo tanto, $\langle B, \mathtt{s}\rangle \lesssim \langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}}\rangle$.

Entonces, todo orden lineal finito o numerable se sumerge en $\langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}}\rangle$.

$\dashv$

Corolario 1.44 *Se cumple que* $\omega \lnsim \eta$ *y* $\zeta \lnsim \eta$.

Demostración. Por el teorema anterior, sabemos que $\langle \omega, \in\rangle \lesssim \langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}}\rangle$ y $\langle \mathbb{Z}, <_{\mathbb{Z}}\rangle \lesssim \langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}}\rangle$. Además, sabemos que ni ω ni $\mathbb{Z}$ son densos.

Por lo tanto, $\langle \omega, \in\rangle \lnsim \langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}}\rangle$ y $\langle \mathbb{Z}, <_{\mathbb{Z}}\rangle \lnsim \langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}}\rangle$.

$\dashv$

Recordemos la caracterización del orden de los números racionales y la idea de la demostración.

Teorema 1.45 *Sea* $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ *un orden lineal denso, sin extremos y numerable. Entonces* $\langle A, \mathtt{r}\rangle \cong \langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}}\rangle$.

Demostración. Como A y $\mathbb{Q}$ son numerables, sean $A = \{a_n : n \in \omega\}$ y $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \omega\}$ de forma que ambas enumeraciones sean inyectivas.

En la demostración del teorema 1.43, se definió qué era un isomorfismo parcial y se mostró que cualquier isomorfismo parcial con dominio finito y cualquier $a \in A$ se puede extender a un isomorfismo parcial que tenga a a en su dominio. La construcción de la extensión sólo dependía de que $\mathbb{Q}$ es numerable, sin extremos y denso. De manera análoga se puede extender un isomorfismo parcial con $q \in \mathbb{Q}$, para que la extensión tenga en su imagen a q. Esto se seguirá de que A es numerable, sin extremos y denso.

Por lo tanto, si h es un isomorfismo parcial con dominio finito, $a \in A$ y $q \in \mathbb{Q}$, entonces existe un isomorfismo parcial $h_{a,q}$ tal que $h \subseteq h_{a,q}$, $a \in \mathrm{Dom}\,(h_{a,q})$ y $q \in \mathrm{Im}\,(h_{a,q})$.

Definimos por recursión una serie de isomorfismos parciales, de forma que $h_0 = \varnothing$ y $h_{\mathrm{s}(n)} = (h_n)_{a_n,q_n}$. Sea $h = \bigcup_{n\in\omega} h_n$, entonces h es un isomorfismo entre A y $\mathbb{Q}$.

$\dashv$

El tipo de orden de los números reales

El tipo de orden de los números reales con su orden usual lo denotaremos como λ, es decir, $\lambda = \tau(\langle\mathbb{R}, <_{\mathbb{R}}\rangle)$. Consideremos a $\mathbb{R}$ con su construcción mediante segmento inciales acotados de $\mathbb{Q}$.

La propiedad que distingue a los números reales de los números racionales es la propiedad del supremo. Gracias a la propiedad del supremo, los reales no tiene huecos. En general, a un orden lineal con la propiedad del supremo se le llama completo.

Para enunciar la caracterización del orden de los números reales necesitaremos recordar las siguientes definiciones.

Definición 1.46 Sea $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ un orden parcial y $B \subseteq A$. Decimos que $a \in B$ **es el ínfimo** de B si y sólo si a es la máxima cota inferior de B. Además, decimos que $a \in A$ **es el supremo de** B si y sólo si a es la mínima cota superior de B.

Definición 1.47 Sea $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ un orden lineal. Decimos que D es **denso en** A si y sólo si $D \subseteq A$ y para cualesquiera x, $y \in A$, si $x \,\mathtt{r}\, y$, entonces existe $z \in D$ tal que $x \,\mathtt{r}\, z$ y $z \,\mathtt{r}\, y$.

Notemos que esta definición está dada para órdenes lineales. Esto se debe a que un subconjunto denso en un orden parcial se define de manera diferente y tiene un uso diferente.

Definición 1.48 Sea $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ un orden lineal. Decimos que $\langle A, r\rangle$ es **separable** si y sólo si existe $D \subseteq A$ numerable y denso en A.

Cuando un orden parcial es separable también es denso. Esto es porque el denso en A es un subconjunto de A.

Definición 1.49 Sea $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ un orden lineal. Decimos que $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ es **completo** si y sólo si todo $x \subseteq A$ no vacío y superiormente acotado, tiene supremo.

Los números reales son un orden lineal denso, sin extremos, separable y completo. Sabemos que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ y al ser numerable, es testigo de la separabilidad de $\mathbb{R}$.

Veamos cómo se relaciona el tipo de orden de los reales con el de los demás conjuntos de números.

Teorema 1.50 *Se cumple que* $\omega \lnapprox \lambda$, $\zeta \lnapprox \lambda$ *y* $\eta \lnapprox \lambda$.

Demostración. Por la construcción de $\mathbb{R}$, para toda $r \in \mathbb{Q}$, $r{\downarrow}^{\mathbb{Q}} \in \mathbb{R}$. Por la demostración del teorema 1.32, si $r <_{\mathbb{Q}} s$, $r{\downarrow}^{\mathbb{Q}} \subseteq s{\downarrow}^{\mathbb{Q}}$. Por lo tanto, si definimos $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ como $f(r) = r{\downarrow}^{\mathbb{Q}}$, f es un homomorfismo. Y por la proposición 1.28, f es un encaje. Entonces, $\langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}} \rangle \lesssim \langle \mathbb{R}, <_{\mathbb{R}} \rangle$.

Por lo tanto, $\langle \omega, \in \rangle \lesssim \langle \mathbb{R}, <_{\mathbb{R}} \rangle$ y $\langle \mathbb{Z}, <_{\mathbb{Z}} \rangle \lesssim \langle \mathbb{R}, <_{\mathbb{R}} \rangle$. Pero ni ω ni $\mathbb{Z}$ son densos y $\mathbb{Q}$ no es completo. Entonces, $\langle \omega, \in \rangle \lnsim \langle \mathbb{R}, <_{\mathbb{R}} \rangle$, $\langle \mathbb{Z}, <_{\mathbb{Z}} \rangle \lnsim \langle \mathbb{R}, <_{\mathbb{R}} \rangle$ y $\langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}} \rangle \lnsim \langle \mathbb{R}, <_{\mathbb{R}} \rangle$.

$\dashv$

Veamos la caracterización de los números reales con su orden y el esbozo de su demostración.

Teorema 1.51 *Sea $\langle A, \mathtt{r} \rangle$ un orden lineal denso, sin extremos, separable y completo. Entonces $\langle A, \mathtt{r} \rangle \cong \langle \mathbb{R}, <_{\mathbb{R}} \rangle$.*

Demostración. Sea $\langle A, \mathtt{r} \rangle$ un orden lineal denso, sin extremos, separable y completo.

Como A es separable, sean $D \subseteq A$ denso en A y $Q \subseteq \mathbb{R}$ denso en $\mathbb{R}$. Tanto D como Q son numerables, densos y sin extremos, entonces son isomorfos. Sea $h : D \to Q$ un isomorfismo. Definamos $f : A \to \mathbb{R}$ como sigue:

$$f(a) = \sup\{h(x) : x \in D \wedge (x \,\mathtt{r}\, a \vee x = a)\}.$$

Veamos que está bien definida. Sea $a \in A$, como D no tiene extremo izquierdo, $\{h(x) : x \in D \wedge (x \,\mathtt{r}\, a \vee x = a)\} \neq \varnothing$. Además, como D no tiene extremo derecho, sea $t \in D$ tal que $a \,\mathtt{r}\, t$. Así que para todo $x \in D$ tal que $x \,\mathtt{r}\, a$ o $x = a$, $x \,\mathtt{r}\, t$. Como h es un isomorfismo, $h(t)$ es cota superior de $\{h(x) : x \in D \wedge (x \,\mathtt{r}\, a \vee x = a)\}$. Por lo tanto, $f(a)$ está bien definido.

La función f es el isomorfismo buscado.

$\dashv$

Capítulo II Cofinalidad y coinicialidad

En este capítulo introduciremos la primera operación sobre órdenes, la de invertir el orden. Esta operación nos ayudará a definir los conceptos de cofinalidad y coinicialidad. Estos conceptos son sumamente importantes en la teoría de conjuntos. Con ellos exploraremos el comportamiento de los órdenes y de sus elementos. También introduciremos la clase de órdenes η_α y estudiaremos muy a fondo su relación con las operaciones de órdenes.

2.1 Orden invertido

La primera operación que veremos será invertir el orden. Como es de esperar, las propiedades del orden invertido estarán muy ligadas a las propiedades del orden original. Por ejemplo, el orden invertido de un orden denso seguirá siendo denso. Algunas propiedades no se conservarán, por ejemplo, el orden invertido de un buen orden no necesariamente es un buen orden, pero cumple que todo subconjunto no vacío tiene máximo. Esta dualidad se plasmará en el teorema 2.20. También veremos que hay órdenes que son isomorfos a su invertido, a los que llamaremos simétricos.

Para empezar recordemos la definición de relación inversa.

Definición 2.1 Sea $\mathtt{r}$ una relación. Definimos la **relación inversa**, que denotamos con $\mathtt{r}^{-1}$, como el conjunto

$$\mathtt{r}^{-1} = \{\langle x, y\rangle : \langle y, x\rangle \in \mathtt{r}\}.$$

Observemos que efectivamente $\mathtt{r}^{-1}$ es una relación.

La relación inversa preserva las propiedades de reflexividad, antirreflexividad, simetría, antisimetría y transitividad.

Teorema 2.2 *Sea A un conjunto y $\mathtt{r}$ una relación sobre A. Entonces se cumple:*

(i) *si $\mathtt{r}$ es reflexiva sobre A, $\mathtt{r}^{-1}$ es reflexiva sobre A;*

(ii) *si $\mathtt{r}$ es antirreflexiva sobre A, $\mathtt{r}^{-1}$ es antirreflexiva sobre A;*

(iii) *si $\mathtt{r}$ es simétrica, $\mathtt{r}^{-1}$ es simétrica;*

(iv) *si $\mathtt{r}$ es antisimétrica, $\mathtt{r}^{-1}$ es antisimétrica; y*

(v) *si $\mathtt{r}$ es transitiva, $\mathtt{r}^{-1}$ es transitiva.*

Demostración. Todos los incisos se siguen directamente de las definiciones.

$\dashv$

Dado que las propiedades que definen a un orden parcial, antirreflexividad y transitividad, se mantienen con la relación inversa, si $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ es un orden parcial, $\left\langle A, \mathtt{r}^{-1}\right\rangle$ es un orden parcial.

Definición 2.3 Sea $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ un orden parcial. Definimos el **orden invertido** de $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ como $\langle A, \mathtt{r}\rangle^* = \left\langle A, \mathtt{r}^{-1}\right\rangle$.

Corolario 2.4 *Sea $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ un orden parcial. Entonces, $\langle A, \mathtt{r}\rangle^*$ es un orden parcial.*

Supongamos que $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ y $\langle B, \mathtt{s}\rangle$ son isomorfos y $f : A \to B$ es un isomorfismo. Si $x\, \mathtt{r}^{-1}\, y$, entonces $y\, \mathtt{r}\, x$. Como f es un isomorfismo, $f(y)\, \mathtt{s}\, f(x)$ y así $f(x)\, \mathtt{s}^{-1}\, f(y)$. Por lo tanto, f es un isomorfismo entre $\langle A, \mathtt{r}\rangle^*$ y $\langle B, \mathtt{s}\rangle^*$. De hecho cualquier isomorfismo entre $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ y $\langle B, \mathtt{s}\rangle$ es un isomorfismo entre $\langle A, \mathtt{r}\rangle^*$ y $\langle B, \mathtt{s}\rangle^*$.

Proposición 2.5 *Sean $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ y $\langle B, \mathtt{s}\rangle$. Entonces, $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ es isomorfo a $\langle B, \mathtt{s}\rangle$ si y sólo si $\langle A, \mathtt{r}\rangle^*$ es isomorfo a $\langle B, \mathtt{s}\rangle^*$.*

Definición 2.6 Sean τ un tipo de orden y $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ tal que $\tau(\langle A, \mathtt{r}, \rangle) = \tau$. Definimos el **tipo de orden invertido** τ^* como el tipo de orden de $\left\langle A, r^{-1}\right\rangle$.

Por lo anterior, τ^* está bien definido.

Ejemplo 2.7 Consideremos el tipo de orden ω. El orden $\langle \omega, \ni\rangle$ tiene tipo de orden ω^*. Notemos que el tipo de orden ω^* no es un buen orden, pues ω mismo es un subconjunto no vacío y no tiene mínimo en $\langle \omega, \ni\rangle$. La representación gráfica del orden ω^* se muestra en la figura 2.1.

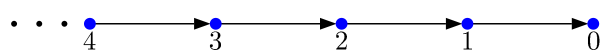

Figura 2.1: Representación gráfica del orden ω^*.

Ejemplo 2.8 Consideremos el orden parcial $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ del ejemplo 1.7, donde $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y $\mathtt{r} = \{\langle 0, 1\rangle, \langle 0, 2\rangle, \langle 0, 3\rangle, \langle 0, 4\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 2, 4\rangle\}$. La representación gráfica de $\langle A, \mathtt{r}\rangle^*$ se muestra en la figura 2.2. El orden $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ tiene un mínimo y no tiene máximos, pero el orden $\langle A, \mathtt{r}\rangle^*$ tiene máximo y no tiene mínimo.

Proposición 2.9 *Sea $\langle A, r\rangle$ un orden parcial y τ su tipo de orden. Entonces $\left(\langle A, r\rangle^*\right)^* = \langle A, r\rangle$ y por lo tanto, $(\tau^*)^* = \tau$.*

Demostración. Es consecuencia directa de que $(\mathtt{r}^{-1})^{-1} = \mathtt{r}$.

$\dashv$

Gracias a esta proposición si demostramos que una propiedad se preserva al invertir el orden, entonces $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ cumplirá la propiedad si y sólo si $\langle A, \mathtt{r}\rangle^*$ la cumple. Por ejemplo, las

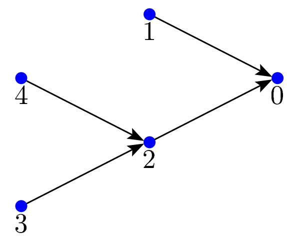

Figura 2.2: Representación gráfica del orden $\langle A, \mathtt{r}\rangle^*$ del ejemplo 1.7.

implicaciones recíprocas de las afirmaciones del teorema 2.2 son ciertas. Usaremos esto para acortar las pruebas.

Veamos cómo se comporta el orden invertido con la relación $\lesssim$ en los tipos de orden.

Teorema 2.10 *Sean τ y μ dos tipos de orden. Entonces, $\tau \lesssim \mu$ si y sólo si $\tau^* \lesssim \mu^*$.*

Demostración. Sean $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ y $\langle B, \mathtt{s}\rangle$ representantes de los tipos de orden τ y μ respectivamente. Supongamos que $\tau \lesssim \mu$. Entonces existe $f : A \to B$ un encaje de $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ en $\langle B, \mathtt{s}\rangle$. Sean $x, y \in A$ tales que $x\,\mathtt{r}^{-1}\,y$, entonces $y\,\mathtt{r}\,x$. Como f es un homomorfismo, $f(y)\,\mathtt{s}\,f(x)$. Por lo que, $f(x)\,\mathtt{s}^{-1}\,f(y)$. Entonces, f es un encaje de $\langle A, \mathtt{r}\rangle^*$ a $\langle B, \mathtt{s}\rangle^*$. Por lo tanto, $\tau^* \lesssim \mu^*$.

El recíproco se da por la proposición 2.9.

$\dashv$

El teorema anterior nos dice que la operación de invertir el orden preserva la relación $\lesssim$ en los tipos de orden.

Ejemplo 2.11 Sabemos que $\omega \lesssim \zeta$, por la proposición anterior, tenemos que $\omega^* \lesssim \zeta^*$. Pero, ¿quién es ζ^*?

Proposición 2.12 *Se cumple que $\zeta^* = \zeta$.*

Demostración. Tomemos a $\langle \mathbb{Z}, <_{\mathbb{Z}}\rangle$ como representante del tipo de orden ζ y tomemos a $\langle \mathbb{Z}, >_{\mathbb{Z}}\rangle$ como representante del tipo de orden ζ^*. Definamos $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ como $f(z) = -z$. La función f es biyectiva y si $a >_{\mathbb{Z}} b$, $-a <_{\mathbb{Z}} -b$. Por lo tanto, f es un isomorfismo entre $\langle \mathbb{Z}, >_{\mathbb{Z}}\rangle$ y $\langle \mathbb{Z}, <_{\mathbb{Z}}\rangle$.

$\dashv$

Retomando el ejemplo anterior, concluimos que $\omega^* \lesssim \zeta$.

2.1.1 — Invariantes

Veamos qué propiedades se preservan al invertir el orden. Ya vimos que si invertimos un orden parcial sigue siendo un orden parcial, también se cumplirá que un orden lineal al invertirlo será un orden lineal.

Teorema 2.13 *Sea* $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ *un orden parcial. Entonces,* $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ *es un orden lineal si y sólo si* $\langle A, \mathtt{r}\rangle^*$ *es un orden lineal.*

Demostración. Supongamos que $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ es un orden lineal, entonces $\langle A, \mathtt{r}\rangle^*$ es un orden parcial. Veamos que $\mathtt{r}^{-1}$ es tricotómica en A. Sean a, $b \in A$. Como $\mathtt{r}$ es tricotómica en A, $a = b$ o $a \,\mathtt{r}\, b$ o $b \,\mathtt{r}\, a$. Entonces, $a = b$ o $b \,\mathtt{r}^{-1}\, a$ o $a \,\mathtt{r}^{-1}\, b$, es decir, $\mathtt{r}^{-1}$ es tricotómica en A. Por lo tanto, $\langle A, \mathtt{r}\rangle^*$ es un orden lineal.

Como ya habíamos comentado, el recíproco se da por la proposición 2.9.

$\dashv$

Otra propiedad que se preserva al invertir el orden es la densidad.

Teorema 2.14 *Sea* $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ *un orden parcial. Entonces,* $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ *es denso si y sólo si* $\langle A, \mathtt{r}\rangle^*$ *es denso.*

Demostración. Supongamos que $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ es denso, veamos que $\langle A, \mathtt{r}\rangle^*$ también lo es. Sean a, $b \in A$ tales que $a \,\mathtt{r}^{-1}\, b$. Entonces, $b \,\mathtt{r}\, a$ y como $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ es denso, existe $c \in A$ tal que $b \,\mathtt{r}\, c$ y $c \,\mathtt{r}\, a$. Entonces, existe $c \in A$ tal que $a \,\mathtt{r}^{-1}\, c$ y $c \,\mathtt{r}^{-1}\, b$. Por lo tanto, $\langle A, \mathtt{r}\rangle^*$ es denso.

Por la proposición 2.9 se da el recíproco.

$\dashv$

La propiedad de ser separable es muy parecida a la densidad y al igual que la densidad se preserva al invertir el orden. Para demostrarlo notemos primero que se preservan los subconjuntos densos en A al invertir el orden, ya que en la demostración basta cambiar $c \in A$ por $c \in D$.

Lema 2.15 *Sean* $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ *un orden lineal y* $D \subseteq A$*. Entonces,* D *es denso en* $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ *si y sólo si* D *es denso en* $\langle A, \mathtt{r}\rangle^*$*.*

Teorema 2.16 *Sea* $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ *un orden lineal. Entonces,* $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ *es separable si y sólo si* $\langle A, \mathtt{r}\rangle^*$ *es separable.*

Demostración. Supongamos que $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ es separable, entonces existe $D \subseteq A$ numerable y denso en $\langle A, \mathtt{r}\rangle$. Por el lema anterior, D es denso en $\langle A, \mathtt{r}\rangle^*$. Entonces, existe $D \subseteq A$ numerable y denso en $\langle A, \mathtt{r}\rangle^*$. Por lo tanto, $\langle A, \mathtt{r}\rangle^*$ es separable.

$\dashv$

Un orden completo al invertirlo también es completo. Para mostrar esto primero recordemos una equivalencia de la definición de orden completo.

Lema 2.17 *Sea* $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ *un orden lineal. Entonces,* $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ *es completo si y sólo si todo subconjunto no vacío inferiormente acotado tiene ínfimo.*

Demostración. Supongamos que $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ es completo. Sea $B \subseteq A$ no vacío e inferiormente acotado.

Definamos $C = \{a \in A : \forall x(x \in B \to (a \mathtt{r} x \vee x = a))\}$, C es el conjunto de las cotas inferiores de B. Como B está acotado inferiormente, $C \neq \varnothing$. Notemos que todo elemento de B es una cota superior de C. Como B es no vacío, C está acotado superiormente. Como $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ es completo, C tiene supremo, digamos z. Veamos que z es el ínfimo de B. Sea x una cota inferior de B, entonces $x \in C$. Como z es el supremo de C, $x \mathtt{r} z$ o $z = x$. Por lo tanto, z es mayor o igual que todas las cotas inferiores de B. Ahora veamos que z es cota inferior. Sea $x \in B$, entonces x es una cota superior de C. Como z es el supremo de C, $z \mathtt{r} x$ o $z = x$. Entonces, z es cota inferior. Por lo tanto, z es el ínfimo de B.

El recíproco es análogo.

$\dashv$

Teorema 2.18 *Sea $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ un orden lineal. Entonces, $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ es completo si y sólo si $\langle A, \mathtt{r}\rangle^*$ es completo.*

Demostración. Supongamos que $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ es completo. Sea $B \subseteq A$ no vacío y acotado superiormente en $\langle A, \mathtt{r}\rangle^*$. Entonces, existe $x \in A$ tal que para todo $y \in B$, $y \mathtt{r}^{-1} x$ o $y = x$. Por lo tanto, para todo $y \in B$, $x \mathtt{r} y$ o $y = x$, es decir, x es una cota inferior de B.

Como $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ es completo, B tiene ínfimo en $\langle A, \mathtt{r}\rangle$, digamos z. Veamos que z es el supremo de B en $\langle A, \mathtt{r}\rangle^*$. Como z es el ínfimo de B en $\langle A, \mathtt{r}\rangle$, z es una cota inferior, es decir, para toda $y \in B$ $z \mathtt{r} y$ o $z = y$. Entonces, para toda $y \in B$, $y \mathtt{r}^{-1} z$ o $z = y$, es decir, z es una cota superior de B en $\langle A, \mathtt{r}\rangle^*$. Sea w una cota superior de B en $\langle A, \mathtt{r}\rangle^*$, entonces w es una cota inferior de B en $\langle A, \mathtt{r}\rangle$. Como z es el ínfimo de B, $w \mathtt{r} z$. Entonces, $z \mathtt{r}^{-1} w$. Por lo tanto, z es el supremo de B en $\langle A, \mathtt{r}\rangle^*$.

$\dashv$

2.1.2 — Dualidad

A diferencia de la densidad y de la completud, la propiedad de ser buen orden no se preserva al invertir el orden, lo cual parece ser una desgracia. Sin embargo, esta accidentada situación nos llevará a un teorema que expandirá nuestros resultados, caracterizaciones, tipos de orden y definiciones.

Consideremos a un buen orden $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ y B un subconjunto no vacío de A. Como es un buen orden, sabemos que existe $b_0 \in B$ tal que para cualquier $b \in B$, $b_0 \mathtt{r} b$ o $b_0 = b$. Veamos qué pasa con b_0 en $\langle A, \mathtt{r}\rangle^*$. Sea $b \in B$, si $b_0 \mathtt{r} b$, entonces $b_0(\mathtt{r}^{-1})^{-1}b$. Por lo tanto, $b \mathtt{r}^{-1} b_0$. Entonces, para cualquier $b \in B$, $b \mathtt{r}^{-1} b_0$ o $b_0 = b$, es decir, ¡b_0 es un máximo de B en $\langle A, \mathtt{r}^*\rangle$!

Así, si B es un subconjuto de A que tiene mínimo en $\langle A, \mathtt{r}\rangle$, entonces B tendrá máximo en $\langle A, \mathtt{r}\rangle^*$. Análogamente, si B tiene máximo en $\langle A, \mathtt{r}\rangle$, entonces B tendrá mínimo en $\langle A, \mathtt{r}\rangle^*$. Por la proposición 2.9 se concluye el siguiente resultado.

Proposición 2.19 *Sean $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ un orden parcial y $B \subseteq A$. Entonces, B tiene mínimo en $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ si y sólo si B tiene máximo en $\langle A, \mathtt{r}\rangle^*$; y B tiene máximo en $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ si y sólo si B tiene mínimo en $\langle A, \mathtt{r}\rangle^*$.*

Esta proposición es un caso particular del siguiente teorema.

Teorema 2.20 (Dualidad) *Sean $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ un orden parcial y $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula, donde $x_1, \ldots, x_n$ son todas las variables que ocurren en ϕ. Sea $\phi'(x_1, \ldots, x_n)$ la fórmula que resulta al sustituir $x_i \,\mathtt{r}\, x_j$ por $x_j \,\mathtt{r}^{-1}\, x_i$. Entonces, $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ es verdadera en $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ si y sólo si $\phi'(x_1, \ldots, x_n)$ es verdadera en $\langle A, \mathtt{r}\rangle^*$.*

Demostración. Se hace por inducción sobre la formación de fórmulas tomando en cuenta que son equivalentes $x_i \,\mathtt{r}\, x_j$ y $x_j \,\mathtt{r}^{-1}\, x_i$, por la definición de $\mathtt{r}^{-1}$.

$\dashv$

Veamos algunos resultados a los que nos lleva el teorema de dualidad.

Corolario 2.21 *Sean $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ un orden lineal y $B \subseteq A$.*

(i) *$\langle A, \mathtt{r}\rangle$ tiene extremo izquierdo si y sólo si $\langle A, \mathtt{r}\rangle^*$ tiene extremo derecho.*

(ii) *$\langle A, \mathtt{r}\rangle$ tiene extremo derecho si y sólo si $\langle A, \mathtt{r}\rangle^*$ tiene extremo izquierdo.*

(iii) *Todo subconjunto no vacío de $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ tiene mínimo si y sólo si todo subconjunto no vacío de $\langle A, \mathtt{r}\rangle^*$ tiene máximo en $\langle A, \mathtt{r}\rangle^*$.*

(iv) *B está acotado superiormente en $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ si y sólo si B está acotado inferiormente en $\langle A, \mathtt{r}\rangle^*$.*

(v) *B está acotado inferiormente en $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ si y sólo si B está acotado superiormente en $\langle A, \mathtt{r}\rangle^*$.*

(vi) *B es un segmento inicial de $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ si y sólo si B es un segmento final de $\langle A, \mathtt{r}\rangle^*$.*

(vii) *B es un segmento final de $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ si y sólo si B es un segmento inicial de $\langle A, \mathtt{r}\rangle^*$.*

Demostración. Demostremos (i) y (ii). Supongamos que $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ tiene extremo izquierdo, entonces $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ hace verdadera a la fórmula $\exists x \in A \forall y \in A(x \,\mathtt{r}\, y \vee x = y)$. Por el Teorema de Dualidad, $\langle A, \mathtt{r}\rangle^*$ hace verdadera a la fórmula $\exists x \in A \forall y \in A(y \,\mathtt{r}^{-1}\, x \vee x = y)$, es decir, $\langle A, \mathtt{r}\rangle^*$ tiene extremo derecho.

Supongamos que $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ tiene extremo derecho, entonces hace verdadera a la fórmula $\exists x \in A \forall y \in A(y \,\mathtt{r}\, x \vee x = y)$. Por el teorema de dualidad, $\langle A, \mathtt{r}\rangle^*$ hace verdadera a la fórmula $\exists x \in A \forall y \in A(x \,\mathtt{r}^{-1}\, y \vee x = y)$, es decir, $\langle A, \mathtt{r}\rangle^*$ tiene extremo izquierdo.

Usando la proposición 2.9, la implicación que demostramos en el inciso (i) demuestra la implicación recíproca de (ii) y viceversa.

Las implicaciones del inciso (iii) se siguen de la proposición 2.19.

Para los incisos restantes sus demostraciones son análogas al inciso (i) y (ii), de la siguiente forma: para los incisos (iv) y (v) la fórmula usada es $\exists x \in A \forall b \in B(b \,\mathtt{r}\, x \vee x = b)$; y para los incisos (vi) y (vii) se usa la fórmula $\forall a, b \in A((a \,\mathtt{r}\, b \wedge b \in B) \rightarrow a \in B)$.

$\dashv$

Por el corolario anterior y su demostración, podemos observar que si $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ no tiene extremos, $\langle A, \mathtt{r}\rangle^*$ tampoco tiene extremos; si a es el mínimo de un subconjunto B de $\langle A, \mathtt{r}\rangle$, entonces a será el máximo para B en $\langle A, \mathtt{r}\rangle^*$, de forma similar para el máximo, cota superior o cota inferior. Si B está acotado en $\langle A, \mathtt{r}\rangle$, B también estará acotado en $\langle A, \mathtt{r}\rangle^*$.

2.1.3 — Buen orden invertido

Entre los resultados que extiende el Teorema de Dualidad está la caracterización del tipo de orden ω^*.

Sea $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ un orden parcial. Por la proposición 2.5, $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ es isomorfo a ω^* si y sólo si $\langle A, \mathtt{r}\rangle^*$ es isomorfo a ω. Por el teorema 1.38, $\langle A, \mathtt{r}\rangle^*$ es un buen orden, no vacío, sin extremo derecho y todo subconjunto no vacío acotado superiormente tiene máximo. Por los corolarios del Teorema de Dualidad, $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ es un orden parcial, no vacío, sin extremo izquierdo, tal que todo subconjunto no vacío tiene máximo y todo subconjunto no vacío acotado inferiormente tiene mínimo. La propiedad dual de buen orden, motiva la siguiente definición.

Definición 2.22 Sea A un conjunto y $\mathtt{r}$ una relación binaria sobre A. Decimos que $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ es un **buen orden invertido** si y sólo si cumple que:

(i) $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ es un orden parcial y

(ii) todo subconjunto no vacío tiene máximo.

Entonces la caracterización de ω^* es la siguiente.

Teorema 2.23 *Sea $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ un buen orden invertido, no vacío, sin extremo izquierdo y tal que todo subconjunto no vacío inferiormente acotado tiene mínimo. Entonces $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ es isomorfo a ω^*.*

Pero la definición de buen orden invertido no se queda ahí. Con ella podemos definir una nueva clase de órdenes, los buenos órdenes invertidos.

Por el Teorema de Dualidad, $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ es un buen orden si y sólo si $\langle A, \mathtt{r}\rangle^*$ es un buen orden invertido.

Usaremos el Teorema de Enumeración para caracterizar a los buenos órdenes invertidos.

Teorema 2.24 *Sea $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ un buen orden invertido. Entonces existe un único ordinal α tal que $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ es isomorfo a $\langle \alpha, \in\rangle^*$.*

Demostración. Sea $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ un buen orden invertido. Entonces, $\langle A, \mathtt{r}\rangle^*$ es un buen orden. Por el Teorema de Enumeración, existe un único ordinal α tal que $\langle A, \mathtt{r}\rangle^*$ es isomorfo a $\langle \alpha, \in\rangle$. Por la proposición 2.5, $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ es isomorfo a $\langle \alpha, \in\rangle^*$.

Por la transitividad del isomorfismo y la unicidad dada por el Teorema de Enumeración, dicho α es único.

$\dashv$

Al igual que con los buenos órdenes, podemos definir el tipo de orden de cualquier buen orden invertido.

Definición 2.25 Sea $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ un buen orden invertido. El tipo de orden de $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ es α^*, donde α es el único ordinal tal que $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ es isomorfo a $\langle \alpha, \in\rangle^*$.

2.1.4 — Órdenes simétricos

En la proposición 2.12 vimos que $\zeta = \zeta^*$, es decir, los enteros son isomorfos a su orden invertido. A este tipo de órdenes se les llama simétricos.

Definición 2.26 Sea $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ un orden parcial. Decimos que $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ es **simétrico** si y sólo si $\langle A, \mathtt{r}\rangle \cong \langle A, \mathtt{r}\rangle^*$.

Veamos algunos tipos de orden que son simétricos.

Teorema 2.27 *Los tipos de orden ζ, η y λ son simétricos.*

Demostración. Ya vimos que ζ es simétrico.

Consideremos η^*, por el teorema 2.14, η^* es denso. Por el corolario 2.21, η^* es un orden sin extremos. Además, η^* sigue siendo numerable. Por lo tanto, es isomorfo a η.

Ahora consideremos λ^*, por el teorema 2.16, λ^* es separable. Por el teorema 2.18, λ^* es completo. Y por el corolario 2.21, λ^* es sin extremos. Por lo tanto, λ^* es isomorfo a λ.

$\dashv$

También los naturales son simétricos, un isomorfismo de n a n^* es $f(x) = n - x$. Pero cualquier ordinal infinito no es simétrico, como veremos a continuación.

Proposición 2.28 *Ningún ordinal infinito es simétrico.*

Demostración. Sea α un ordinal infinito. Entonces $\omega \subseteq \alpha$. Si α fuera simétrico, entonces $\alpha \cong \alpha^*$. Como $\omega \lesssim \alpha$, por el teorema 2.10, se tendría que $\omega^* \lesssim \alpha$. Esto contradice que α es un buen orden. Por lo tanto, α no es simétrico.

$\dashv$

2.2 | Cofinalidad y coinicialidad

En esta sección veremos los conceptos de cofinalidad y coinicialidad, los cuales describen el comportamiento de la parte final e inicial de un orden lineal. También veremos el concepto de ordinal regular, el cual es muy importante en la Teoría de los Conjuntos ya que está presente en las hipótesis de muchos teoremas.

Empecemos definiendo el menor segmento inicial que contiene a un subconjunto de un orden parcial.

Definición 2.29 Sea $\langle A, <_A \rangle$ un orden parcial y sea $T \subseteq A$. Definimos el **menor segmento inicial de** A que **contiene a** T, denotado por IS (T), como

$$\text{IS}\,(T) = \bigcap \{I \subseteq A \,:\, I \text{ es un segmento inicial y } T \subseteq I\}.$$

Análogamente, definimos el **menor segmento final de** A que **contiene a** T, denotado por FS (T), como

$$\text{FS}\,(T) = \bigcap \{I \subseteq A \,:\, I \text{ es un segmento final y } T \subseteq I\}.$$

Veamos una equivalencia útil de la definición.

Proposición 2.30 *Sea* $\langle A, <_A \rangle$ *un orden parcial y sea* $T \subseteq A$. *Entonces*

$$\text{IS}\,(T) = \{x \in A \,:\, \exists y \in T(x \leq_A y)\} \text{ y } \text{FS}\,(T) = \{x \in A \,:\, \exists y \in T(y \leq_A x)\}.$$

Demostración. Sea $T \subseteq A$, definimos $W = \{x \in A \,:\, \exists y \in T\,(y \leq_A x)\}$. Veamos que IS $(T) = W$.

Como para cada $x \in T$ se tiene que $x \leq_A x$, $T \subseteq W$. Ahora demostremos que W es un segmento inicial de A, sean $y, x \in A$ tales que $y <_A x$ y $x \in W$, entonces existe $z \in T$ tal que $x \leq_A z$. Por transitividad, $y <_A z$, de donde $y \in W$. Entonces, W es un segmento inicial de A que contiene a T, y por la definición de IS (T), concluimos que IS $(T) \subseteq W$.

Ahora sea $x \in W$, veamos que $x \in$ IS (T). Para ello, sea I un segmento inicial de A tal que $T \subseteq I$. Basta ver que $x \in I$. Como $x \in W$, existe $y \in T$ tal que $x \leq_A y$. Entonces $y \in I$ y $x \leq_A y$, por lo que $x \in I$, ya que I es un segmento inicial de A.

Por lo tanto, IS $(T) = W$.

Análogamente, se demuestra que FS $(T) = \{x \in A \,:\, \exists y \in T(y \leq_A x)\}$.

$\dashv$

Cuando un subconjunto T de A es tal que el menor segmento inicial que lo contiene es A, decimos que T es cofinal en A.

Definición 2.31 Sea $\langle A, <_A \rangle$ un orden parcial y sea $T \subseteq A$. Decimos que T **es cofinal en** A si y sólo si IS $(T) = A$. Y decimos que T **es coinicial en** A si y sólo si FS $(T) = A$.

Como sugiere el nombre, T es cofinal en A si llega hasta el final de A. Esta noción intuitiva se formaliza en el siguiente teorema.

Teorema 2.32 *Sea* $\langle A, <_A \rangle$ *un orden parcial y sea* $T \subseteq A$. *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) T *es cofinal en* A.

(ii) *Para cualquier* $x \in A$, *existe* $y \in T$ *tal que* $x \leq_A y$.

Demostración. Supongamos que T es cofinal en A. Sea $x \in A$. Como $\mathrm{IS}\,(T) = A$, $x \in \mathrm{IS}\,(T)$. Por la proposición 2.30, existe $y \in T$ tal que $x \leq_A y$, como queríamos demostrar.

Ahora supongamos que para cualquier $x \in A$, existe $y \in T$ tal que $x \leq_A y$. Por la proposición 2.30, se sigue que $A \subseteq \mathrm{IS}\,(T)$. Además, $\mathrm{IS}\,(T) \subseteq A$, con lo que T es cofinal en A. ⊣

Corolario 2.33 *Sea $\langle A, <_A \rangle$ un orden parcial y sea $T \subseteq A$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) *T es coinicial en A.*

(ii) *Para cualquier $x \in A$, existe $y \in T$ tal que $y \leq_A x$.*

Demostración. Análoga a la del teorema anterior. ⊣

Como se puede notar en el teorema y en el corolario anteriores, las equivalencias de cofinal y coinicial sólo difieren en el orden de x y y, por lo que son conceptos duales. Por esta razón nos concentraremos en los subconjuntos cofinales para la discusión y las demostraciones que hablen de conjuntos coiniciales serán análogas a menos de que indiquemos lo contrario.

Gracias a que "los existes suben", si un subconjunto T de A es cofinal en A, cualquier subconjunto que contenga a T será también cofinal. Análogamente, si un subconjunto T de A es coinicial en A, cualquier subconjunto que contenga a T será también coinicial.

Para caracterizar el comportamiento del extremo derecho de cualquier orden necesitamos encontrar una clase de órdenes, digamos $\mathfrak{T}$, que cumpla lo siguiente.

- Para cualquier $\langle A, <_A \rangle$ orden parcial, existe $S \in \mathfrak{T}$ tal que S es cofinal en A;
- dicho S sea único en $\mathfrak{T}$, para cada A;
- para cualquier $X \subseteq A$ cofinal en A, S es cofinal en X.

La clase de órdenes que tenemos mejor caracterizada son los buenos órdenes. Sería deseable que esta fuera la clase que buscamos. Para ello tenemos que asegurar la existencia de al menos un subconjunto cofinal a A que, con el orden heredado, sea un buen orden. Pero esto se cumple sólo cuando $\langle A, <_A \rangle$ es un orden lineal, como veremos a continuación.

Teorema 2.34 *Para cualquier orden lineal $\langle A, <_A \rangle$ existen un ordinal β y $W \subseteq A$ tales que $\langle W, <_A \rangle$ es isomorfo a β, W es cofinal en A y se satisface que $\beta \leq |A|$.*

Demostración. Si A es finito, entonces A es un buen orden y existe un ordinal β isomorfo a A. Como A es finito, $\beta = |A|$.

Supongamos que A no es finito, entonces $|A| = \aleph_\alpha$. Sea $\ll \subseteq A \times A$, tal que $\langle A, \ll \rangle \cong \langle \omega_\alpha, \in \rangle$, entonces $\langle A, \ll \rangle$ es un buen orden con tipo de orden ω_α.

Definamos $W \subseteq A$ como $W = \{a \in A : \forall b \in A(b \ll a \to b <_A a)\}$. Veremos que W es cofinal a A y que $\langle W, <_A \rangle$ es un buen orden.

Primero demostremos que W es cofinal en A. Sea $x \in A$, supongamos que $x \notin W$, entonces existe t tal que $t \ll x$ y $x <_A t$. Definamos $z = \min_{\ll}\{t \in A : t \ll x \wedge x <_A t\}$.

Sea $a \in A$ tal que $a \ll z$, entonces $a \ll x$, además si $z <_A a$, $x <_A a$ lo que contradice la minimalidad de z. Como $a \ll z$, $a \neq z$, por lo que $z \in W$. Dado que existe $z \in W$ tal que $x <_A z$, W es cofinal en A.

Notemos que por cómo se definió W, $\langle W, \ll \rangle \cong \langle W, <_A \rangle$. Además, tenemos que $\langle W, \ll \rangle \lesssim \langle A, \ll \rangle$, por lo que $\langle W, <_A \rangle$ es un buen orden tal que $\langle W, <_A \rangle \lesssim \langle A, \ll \rangle$.

Esto último nos dice que si $\langle W, <_A \rangle$ es isomorfo a β, $\beta \leq \omega_\alpha = |A|$.

$\dashv$

Corolario 2.35 *Para cualquier orden lineal $\langle A, <_A \rangle$ existen un ordinal β y $W \subseteq A$ tales que $\langle W, <_A \rangle$ es isomorfo a β^*, W es coinicial en A y se satisface que $\beta \leq |A|$.*

Demostración. Análoga a la del teorema anterior.

$\dashv$

Usaremos los ordinales para caracterizar la cofinalidad de un orden lineal. Para eso definamos cuándo un ordinal es cofinal en un orden lineal.

Definición 2.36 Dado un ordinal α y $\langle A, <_A \rangle$ un orden lineal, decimos que α **es cofinal en** $\langle A, < \rangle$ si y sólo si existe $W \subseteq A$, tal que $\langle W, <_A \rangle$ es cofinal en A y es isomorfo a $\langle \alpha, \in \rangle$.

Definición 2.37 Dado un ordinal β y $\langle A, <_A \rangle$ un orden lineal, decimos que β^* **es coinicial en** $\langle A, < \rangle$ si y sólo si existe $W \subseteq A$, tal que $\langle W, <_A \rangle$ es coinicial en A y es isomorfo a $\langle \beta, \ni \rangle$.

El teorema y el corolario nos dicen que para cualquier orden lineal $\langle A, <_A \rangle$, existen α, β ordinales tales que α es cofinal en A y β^* es coinicial en A. Por lo que siempre existirá el menor ordinal cofinal en A, que será con el que caracterizaremos a A.

Definición 2.38 Sea $\langle A, <_A \rangle$ un orden lineal. Al mínimo ordinal cofinal en A se le llama la **cofinalidad de** $\langle A, <_A \rangle$ y la denotaremos por $\operatorname{cf}(\langle A, <_A \rangle)$.

De manera similar, al mínimo ordinal coinicial en A se le llama la **coinicialidad de** $\langle A, <_A \rangle$ y la denotaremos por $\operatorname{coin}(\langle A, <_A \rangle)$.

El teorema 2.34 nos indica una desigualdad que también cumplirá la cofinalidad de $\langle A, <_A \rangle$.

Corolario 2.39 *Sea $\langle A, <_A \rangle$ un orden lineal. Entonces se cumple que* $\operatorname{cf}(\langle A, <_A \rangle) \leq |A|$ *y* $\operatorname{coin}(\langle A, <_A \rangle) \leq |A|$.

Demostración. Por el teorema 2.34, existe α cofinal en A tal que $\alpha \leq |A|$. Entonces $\operatorname{cf}(\langle A, <_A \rangle) \leq \alpha \leq |A|$.

De manera análoga, por el corolario 2.35, existe β tal que β^* es coinicial en A y $\beta \leq |A|$. Entonces $\operatorname{coin}(\langle A, <_A\rangle) \leq \beta \leq |A|$.

$\dashv$

Ahora veamos que $\operatorname{cf}(\langle A, <_A\rangle)$ es el mejor representante para caracterizar la cofinalidad. Para esto veamos que si $T \subseteq A$ es cofinal en A, entonces sus cofinalidades son iguales.

Teorema 2.40 *Sea $\langle A, <_A\rangle$ un orden lineal. Si $T \subseteq A$ es cofinal en A,* $\operatorname{cf}(\langle T, <_A\rangle) = \operatorname{cf}(\langle A, <_A\rangle)$.

Demostración. Notemos que si α es cofinal en T, α es cofinal en A. Así, $\operatorname{cf}(\langle A, <_A\rangle) \leq \operatorname{cf}(\langle T, <_A\rangle)$.

Sean $\alpha = \operatorname{cf}(\langle T, <_A\rangle)$ y $W \subseteq T$ cofinal en T tal que $\alpha \cong \langle W, <_A\rangle$. Sean $\beta = \operatorname{cf}(\langle A, <_A\rangle)$ y $V \subseteq A$ cofinal en A tal que $\beta \cong_g \langle V, <_A\rangle$. Definamos $h : \beta \to T$ como

$$h(\delta) = \text{mín}\left(\{t \in W : g(\delta) \leq_A t\} \setminus h[\delta]\right).$$

Veamos que h está bien definida. Sea $\delta \in \beta$, supongamos que para todo ordinal menor a δ, h está bien definida. Como $g(\delta) \in A$, existe $s \in T$ tal que $g(\delta) \leq_A s$, pues T es cofinal en A. Como W es cofinal en T, existe $t \in W$ tal que $s \leq_A t$. Por lo tanto, $\{t \in W : g(\delta) \leq_A t\} \neq \varnothing$.

Supongamos para llegar a una contradicción que existe $\delta \in \beta$ tal que $\{t \in W : g(\delta) \leq_A t\} \subseteq h[\delta]$. Sea $a \in A$, entonces existe $t \in W$ tal que $\text{máx}\{a, g(\delta)\} \leq_A t$, en particular $t \in h[\delta]$. Por lo que, $h[\delta]$ es cofinal en A. Sean $\gamma, \epsilon \in \delta$ tales que $\gamma < \epsilon$. Como $h(\gamma) \in h[\epsilon]$ y $h(\epsilon) \notin h[\epsilon]$, $h(\gamma) \neq h(\epsilon)$. Sabemos que se cumplen las siguientes relaciones $g(\gamma) \leq_A g(\epsilon) \leq_A h(\epsilon)$, por lo que $h(\gamma) \leq_A h(\epsilon)$, $h(\gamma)$ es el mínimo de los elementos de W tales que son mayores o iguales a $g(\gamma)$. Como $h(\gamma) \neq h(\epsilon)$, $h(\gamma) <_A h(\epsilon)$. Por lo tanto, h es un isomorfismo de δ en $h[\delta]$. Entonces δ es cofinal en A, lo cual es un contradicción a la minimalidad de la cofinalidad.

Por lo tanto, $\{t \in W : g(\delta) \leq_A t\} \setminus h[\delta] \neq \varnothing$ y $h(\delta)$ está bien definida.

Por lo anterior, h es además un isomorfismo entre β y $h[\beta]$, sólo falta ver que $h[\beta]$ es cofinal en T. Sea $t \in T$, como V es cofinal en A, existe $d \in V$ tal que $t \leq_A d$. Como g es isomorfismo, existe $\delta \in \beta$ tal que $d = g(\delta)$. Entonces $t \leq_A g(\delta)$. Como $g(\delta) \leq h(\delta)$, $t \leq_A h(\delta)$. Por lo tanto, β es cofinal en T. Entonces $\alpha \leq \beta$ y $\operatorname{cf}(\langle T, <_A\rangle) = \operatorname{cf}(\langle A, <_A\rangle)$.

$\dashv$

Corolario 2.41 *Sea $\langle A, <_A\rangle$ un orden lineal. Si $S \subseteq A$ es coinicial en A,* $\operatorname{coin}(\langle S, <_A\rangle) = \operatorname{coin}(\langle A, <_A\rangle)$.

Demostración. Análoga a la del teorema anterior.

$\dashv$

Cuando invertimos un orden la cofinalidad y la coinicialidad del orden original se intercambiarán en el orden invertido.

Teorema 2.42 *Sea $\langle A, <_A\rangle$ un orden lineal. Entonces se cumple que*

(i) $\text{cf}\,(\langle A, <_A\rangle^*) = \text{coin}\,(\langle A, <_A\rangle)$, *y*

(ii) $\text{coin}\,(\langle A, <_A\rangle^*) = \text{cf}\,(\langle A, <_A\rangle)$.

Demostración. Por la proposición 2.30, los conjuntos $\text{IS}\,(T)$ y $\text{FS}\,(T)$ son duales. Así, un conjunto cofinal en $\langle A, <_A\rangle$ será coinicial en $\langle A, <_A\rangle^*$ y un conjunto coinicial en $\langle A, <_A\rangle$ será cofinal en $\langle A, <_A\rangle^*$.

$\dashv$

Veamos que la cofinalidad y la coinicialidad de cualquier orden lineal es un número cardinal.

Teorema 2.43 *Para cualquier orden lineal* $\langle A, <_A\rangle$, $\text{cf}\,(\langle A, <_A\rangle)$ *y* $\text{coin}\,(\langle A, <_A\rangle)$ *son cardinales.*

Demostración. Supongamos que existe $\alpha < \text{cf}\,(\langle A, <_A\rangle)$ y equipotente a $\text{cf}\,(\langle A, <_A\rangle)$. Sea f una función biyectiva de α en $\text{cf}\,(\langle A, <_A\rangle)$. Definamos $W = \{\delta \in \text{cf}\,(\langle A, <_A\rangle) : \forall\gamma(\gamma < \delta \to f(\gamma) < f(\delta))\}$. De manera análoga a como se hizo en la demostración del teorema 2.34, se puede ver que W es cofinal en $\text{cf}\,(\langle A, <_A\rangle)$ y es un buen orden. Entonces existe un ordinal β isomorfo a W tal que $\beta \leq \alpha$ y es cofinal en $\text{cf}\,(\langle A, <_A\rangle)$. De este modo β es cofinal en $\langle A, <_A\rangle$, lo que contradice la minimalidad de $\text{cf}\,(\langle A, <_A\rangle)$. Por lo tanto, $\text{cf}\,(\langle A, <_A\rangle)$ es un cardinal.

Análogamente se demuestra que $\text{coin}\,(\langle A, <_A\rangle)$ es un cardinal.

$\dashv$

La cofinalidad de $\langle A, <_A\rangle$ es una cota inferior para la cardinalidad de los subconjuntos cofinales, como veremos a continuación.

Teorema 2.44 *Sean* $\langle A, <_A\rangle$ *un orden lineal y* $T \subseteq A$. *Si* $|T| < \text{cf}\,(\langle A, <_A\rangle)$, *entonces* T *está estrictamente acotado superiormente en* A, *es decir, existe un elemento de* A *tal que es estrictamente mayor que todos los elementos de* T.

Demostración. Si T fuera cofinal en A, por el teorema 2.40, $\text{cf}\,(\langle T, <_A\rangle) = \text{cf}\,(\langle A, <_A\rangle)$. Por el corolario 2.39, tenemos que $\text{cf}\,(\langle T, <_A\rangle) < |T|$, y por hipótesis $|T| < \text{cf}\,(\langle A, <_A\rangle)$. Por lo tanto, T no es cofinal en A. Entonces, existe $y \in A$ tal que para cualquier $x \in T$, $x < y$, es decir, T está estrictamente acotado superiormente en A.

$\dashv$

Al igual que para cualquier orden lineal, es interesante preguntarse por la cofinalidad de los números ordinales como buenos órdenes. Para denotar la cofinalidad de un ordinal α escribiremos simplemente $\text{cf}\,(\alpha)$.

Teorema 2.45 *Sea* α *un ordinal. La cofinalidad y la coinicialidad cumplen lo siguiente.*

(i) $\text{cf}\,(\alpha) \leq |\alpha| \leq \alpha$;

(ii) $\text{cf}\,(0) = 0$ *y* $\text{coin}\,(0) = 0$; *más aún, el* 0 *es el único orden que tiene cofinalidad* 0 *y conincialidad* 0.

(iii) *la cofinalidad de cualquier ordinal sucesor es* 1*, es decir,* $\mathrm{cf}\,(\mathrm{s}\,(\alpha)) = 1$*;*

(iv) *si* $\alpha \neq 0$*,* $\mathrm{coin}\,(\alpha) = 1$*; y*

(v) *si* α *es un ordinal límite,* $\mathrm{cf}\,(\alpha) \geq \omega$*.*

Demostración. Las demostraciones se siguen de las definiciones y los resultados anteriores.

⊣

El primer inciso del teorema anterior, nos dice que $\mathrm{cf}\,(\alpha) \leq \alpha$, entonces podría suceder que $\mathrm{cf}\,(\alpha) = \alpha$. A los ordinales que cumplen esta propiedad se les llama regulares.

Definición 2.46 Un ordinal α es **regular** si y sólo si $\mathrm{cf}\,(\alpha) = \alpha$. Por otro lado, α es **singular** si y sólo si $\mathrm{cf}\,(\alpha) < \alpha$.

Veamos algunos ejemplos de ordinales regulares y singulares.

Ejemplo 2.47 Como se vio en el teorema anterior, $\mathrm{cf}\,(0) = 0$ y $\mathrm{cf}\,(1) = 1$. Por lo tanto, 0 y 1 son regulares. Además, por el inciso (v) sabemos que $\mathrm{cf}\,(\omega) \geq \omega$, pero ω es cofinal en ω. Por lo tanto, $\mathrm{cf}\,(\omega) = \omega$, es decir, ω es regular.

La cofinalidad de ω_ω es ω, pues $\{\omega_n : n \in \omega\}$ es cofinal en ω_ω e isomorfo a ω. Por lo tanto, $\mathrm{cf}\,(\omega_\omega) \leq \omega$. Pero ω_ω es límite, entonces $\mathrm{cf}\,(\omega_\omega) = \omega$. Es decir, ω_ω es singular.

Veamos algunas propiedades de los ordinales regulares y singulares.

Proposición 2.48 *Sean* $\langle A, <_A \rangle$ *un orden lineal y* α *un ordinal. Se cumple lo siguiente.*

(i) *Si* α *es regular,* α *es un cardinal;*

(ii) $\mathrm{cf}\,(\langle A, <_A \rangle)$ *es regular; y*

(iii) *los ordinales* 0*,* 1 *y* ω *son regulares;*

(iv) *si* $\alpha \geq 1$*,* $\mathrm{s}\,(\alpha)$ *es singular.*

Demostración. Las demostración de cada inciso se sigue de manera inmediata las definiciones y los resultados anteriores.

⊣

De lo anterior, los únicos ordinales finitos regulares son 0 y 1. Por el inciso (1) del teorema anterior, los ordinales regulares infinitos tienen que ser cardinales, es decir, ordinales iniciales. Sin embargo, no todos los ordinales iniciales son regulares. En el ejemplo 2.47, se muestra que ω_ω es singular. Notemos que ω_ω es un cardinal límite, lo cual no es casualidad, pues todos los cardinales sucesores son regulares, por lo que cualquier cardinal singular debe ser un cardinal límite.

Teorema 2.49 *Sea α un ordinal. Entonces el cardinal $\omega_{\mathrm{s}(\alpha)}$ es regular.*

Demostración. Sea $T \subseteq \omega_{\mathrm{s}(\alpha)}$ cofinal en $\omega_{\mathrm{s}(\alpha)}$. Podemos ver a $\omega_{\mathrm{s}(\alpha)}$ como $\bigcup T$, pues T es cofinal en $\omega_{\mathrm{s}(\alpha)}$. Entonces

$$\aleph_{\mathrm{s}(\alpha)} = |\omega_{\mathrm{s}(\alpha)}| = \left|\bigcup\{x : x \in T\}\right| \leq \sum_{x\in T} |x| \leq \sum_{x\in T} \aleph_\alpha = \aleph_\alpha \cdot |T|,$$

donde la segunda desigualdad se da porque $x \in \omega_{\mathrm{s}(\alpha)}$ y $\omega_{\mathrm{s}(\alpha)}$ es un cardinal implicando que $|x| \leq \aleph_\alpha$. Entonces $|T| = \aleph_{\mathrm{s}(\alpha)}$, de lo contrario, $\aleph_{\mathrm{s}(\alpha)} \leq \aleph_\alpha \cdot |T| = \aleph_\alpha$. Por lo tanto, $|\mathrm{cf}\left(\omega_{\mathrm{s}(\alpha)}\right)| = \aleph_{\mathrm{s}(\alpha)}$, pero $\mathrm{cf}\left(\aleph_{\mathrm{s}(\alpha)}\right)$ es cardinal, entonces $\mathrm{cf}\left(\omega_{\mathrm{s}(\alpha)}\right) = \omega_{\mathrm{s}(\alpha)}$.

$\dashv$

Para los cardinales límites, la cofinalidad depende del subíndice.

Teorema 2.50 *Para cualquier ordinal límite γ,* $\mathrm{cf}\,(\omega_\gamma) = \mathrm{cf}\,(\gamma)$.

Demostración. Sea γ un ordinal límite. Sea $T = \{\omega_\delta : \delta \in \gamma\}$. Como γ es un ordinal límite, T es cofinal en ω_γ y además, T es isomorfo a γ. Por el teorema 2.40, $\mathrm{cf}\,(\omega_\gamma) = \mathrm{cf}\,(\gamma)$.

$\dashv$

Corolario 2.51 *Sea α un ordinal límite. Si ω_α es regular, $\omega_\alpha = \alpha$.*

Demostración. Como ω_α es regular, $\mathrm{cf}\,(\omega_\alpha) = \omega_\alpha$. Por el teorema anterior, $\mathrm{cf}\,(\omega_\alpha) = \mathrm{cf}\,(\alpha)$. Además, sabemos que $\alpha \leq \omega_\alpha$ y $\mathrm{cf}\,(\alpha) \leq \alpha$. Entonces $\omega_\alpha \leq \alpha$. Por lo tanto, $\omega_\alpha = \alpha$.

$\dashv$

Veamos una caracterización de la cofinalidad de un cardinal infinito respecto a la unión y la suma. La cofinalidad de un cardinal infinito κ es el menor cardinal λ tal que κ se puede expresar como la unión de subconjuntos de κ, tantos como λ, de forma que cada uno de los subconjuntos tiene cardinalidad menor que κ.

Teorema 2.52 *Sea κ un cardinal infinito. Para cada $\xi < \mathrm{cf}\,(\kappa)$, existen $A_\xi \subseteq \kappa$, tales que $|A_\xi| < \kappa$ y $\kappa = \bigcup_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} A_\xi$. Además, si λ es un cardinal tal que existen $A_\xi \subseteq \kappa$, tantos como λ, tales que $|A_\xi| < \kappa$ y $\kappa = \bigcup_{\xi<\lambda} A_\xi$, entonces* $\mathrm{cf}\,(\kappa) \leq \lambda$.

Demostración. Mostremos primero la existencia de los A_ξ. Sea $W \subseteq \kappa$ cofinal e isomorfo a $\mathrm{cf}\,(\kappa)$, sea f el isomorfismo de $\mathrm{cf}\,(\kappa)$ a W. Para cada $\xi \in \mathrm{cf}\,(\kappa)$, definimos $A_\xi = \mathrm{IS}\,(f(\xi))$, de forma que $|A_\xi| < \kappa$. Notemos que $\bigcup_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} A_\xi$ es un segmento inicial de κ y $W \subseteq \bigcup_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} A_\xi$. Entonces $\kappa = \mathrm{IS}\,(W) \subseteq \bigcup_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} A_\xi \subseteq \kappa$. Por lo tanto, $\kappa = \bigcup_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} A_\xi$.

Ahora supongamos que λ es un cardinal tal que existen $A_\xi \subseteq \kappa$, con $\xi \in \lambda$, tales que $|A_\xi| < \kappa$ y $\kappa = \bigcup_{\xi<\lambda} A_\xi$. Si $\kappa \leq \lambda$, la desigualdad $\mathrm{cf}\,(\kappa) \leq \lambda$ es inmediata. Supongamos que $\lambda < \kappa$, entonces

$$\kappa = |\kappa| = \left|\bigcup_{\xi<\lambda} A_\xi\right| \leq \sum_{\xi<\lambda} |A_\xi| = \lambda \cdot \sup_{\xi<\lambda} |A_\xi| \leq \lambda \cdot \kappa = \kappa.$$

Así, $\lambda \cdot \sup_{\xi<\lambda} |A_\xi| = \kappa$. Como $\lambda < \kappa$, $\sup_{\xi<\lambda} |A_\xi| = \kappa$. Sea $W = \{|A_\xi| : \xi \in \lambda\} \subseteq \kappa$, W es cofinal en κ. Entonces, $\mathrm{cf}\,(\kappa) \leq \tau(W)$ y así $\mathrm{cf}\,(\kappa) \leq |W|$. Por lo tanto, $\mathrm{cf}\,(\kappa) \leq |W| \leq \lambda$.

$\dashv$

El teorema anterior se puede reescribir usando la suma cardinal. De esta forma, la cofinalidad de un cardinal infinito κ es el mínimo cardinal λ tal que κ se puede expresar como una suma de λ cardinales, cada uno de cardinalidad menor que κ.

Corolario 2.53 *Sea κ un cardinal infinito. Para cada $\xi < \mathrm{cf}\,(\kappa)$, existen cardinales κ_ξ, tales que $\kappa_\xi < \kappa$ y $\kappa = \sum_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_\xi$. Además, si existen κ_ξ cardinales, tantos como λ, tales que $\kappa_\xi < \kappa$ y $\kappa = \sum_{\xi<\lambda} \kappa_\xi$, entonces* $\mathrm{cf}\,(\kappa) \leq \lambda$.

Demostración. Empecemos mostrando la existencia de dichos cardinales. Sea $W \subseteq \kappa$ cofinal e isomorfo a $\mathrm{cf}\,(\kappa)$, sea f el isomorfismo de $\mathrm{cf}\,(\kappa)$ a W. Para cada $\xi < \mathrm{cf}\,(\kappa)$, definamos $\kappa_\xi = |f(\xi)|$. Como $|f(\xi)| \leq f(\xi) < \kappa$, cada κ_ξ es menor que κ. Entonces se cumplen las siguientes relaciones:

$$\kappa = |\kappa| = \left|\bigcup_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} f(\xi)\right| \leq \sum_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} |f(\xi)| = \sum_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_\xi = \mathrm{cf}\,(\kappa) \cdot \sup_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_\xi \leq \kappa.$$

Por lo tanto, $\kappa = \sum_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_\xi$.

Ahora supongamos que existen κ_ξ cardinales, tantos como λ, tales que $\kappa_\xi < \kappa$ y $\kappa = \sum_{\xi<\lambda} \kappa_\xi$. Si λ es mayor o igual que κ, se cumple que $\mathrm{cf}\,(\kappa) \leq \kappa \leq \lambda$.

Supongamos que $\lambda < \kappa$. Sabemos que $\kappa = \sum_{\xi<\lambda} \kappa_\xi = \lambda \cdot \sup_{\xi<\lambda} \kappa_\xi$ y como $\lambda < \kappa$, $\sup_{\xi<\lambda} \kappa_\xi = \kappa$. Entonces $\bigcup_{\xi<\lambda} \kappa_\xi = \kappa$. Así, se cumplen las hipótesis del teorema anterior, pues también $\kappa_\xi \subseteq \kappa$ y $|\kappa_\xi| < \kappa$. Por lo tanto, $\mathrm{cf}\,(\kappa) \leq \lambda$.

$\dashv$

Veamos cómo se relacionan los ordinales regulares con la cofinalidad de un orden lineal.

Teorema 2.54 *Sean $\langle A, <_A\rangle$ un orden lineal y α un ordinal regular. Si α es cofinal en $\langle A, <_A\rangle$, entonces $\alpha = \mathrm{cf}\,(\langle A, <_A\rangle)$.*

Demostración. Por el teorema 2.40, $\mathrm{cf}\,(\alpha) = \mathrm{cf}\,(\langle A, <_A\rangle)$. Pero α es regular, entonces $\mathrm{cf}\,(\alpha) = \alpha$. Por lo tanto, $\mathrm{cf}\,(\langle A, <_A\rangle) = \alpha$.

$\dashv$

Este resultado nos dice que un ordinal regular es cofinal en un orden lineal si y sólo si es la cofinalidad de dicho orden lineal. Dicho de otra forma, la cofinalidad de un orden lineal es el único ordinal regular cofinal al orden lineal.

Corolario 2.55 *Sean $\langle A, <_A\rangle$ un orden lineal y α un ordinal regular. Si α es coinicial en $\langle A, <_A\rangle$, entonces $\alpha = \mathrm{coin}\,(\langle A, <_A\rangle)$.*

Demostración. Análoga a la del teorema anterior.

⊣

Por lo visto, la cofinalidad y la coinicialidad de un orden lineal es 0, 1 o un cardinal regular, además, aquel cardinal regular es el único cardinal regular que cumple ser cofinal, o coinicial, en el orden lineal.

2.2.1 — Entorno

La coinicialidad y la cofinalidad describen el principio y el final de un orden lineal, pero también pueden describir el entorno de un elemento del orden. Dado un orden lineal $\langle A, <_A \rangle$ y $a \in A$, los conjuntos $a{\downarrow}$ y $a{\uparrow}$ son órdenes lineales con el orden heredado por A. La cofinalidad de $a{\downarrow}$ nos indica cómo es el orden lineal por la izquierda de a y la coinicialidad de $a{\uparrow}$ nos indica cómo es el orden lineal a la derecha de a. Estos dos ordinales caracterizan el entorno de a.

Definición 2.56 Sean $\langle A, <_A \rangle$ un orden lineal y $a \in A$. Definamos el **entorno de** a como el par ordenado $\langle \alpha, \beta^* \rangle$, donde α es la cofinalidad de $a{\downarrow}$ y β es la coinicialidad de $a{\uparrow}$. Si α o β es igual a un ω_ξ, decimos que a es un ω_ξ-límite por la izquierda o por la derecha respectivamente.

En $\mathbb{Z}$ todos los elementos tienen entorno $\langle 1, 1 \rangle$. En el ordinal $\omega + 2$, el 0 tiene entorno $\langle 0, 1 \rangle$, ω tiene entorno $\langle \omega, 1 \rangle$, $\omega + 1$ tiene entorno $\langle 1, 0 \rangle$ y todos los demás elementos tienen entorno $\langle 1, 1 \rangle$.

En $\mathbb{Q}$ todos los elementos tienen entorno $\langle \omega, \omega^* \rangle$, pues por la densidad de $\mathbb{Q}$, para cualquier elemento $q \in \mathbb{Q}$, $\mathrm{cf}\,(q{\downarrow})$ y $\mathrm{coin}\,(q{\uparrow})$ no pueden ser 1. Como $\mathbb{Q}$ no tiene extremos, $\mathrm{cf}\,(q{\downarrow})$ y $\mathrm{coin}\,(q{\uparrow})$ no pueden ser 0. Entonces, $\mathrm{cf}\,(q{\downarrow})$ y $\mathrm{coin}\,(q{\uparrow})$ son infinitos, pero $\mathbb{Q}$ es numerable, por lo tanto, $\mathrm{cf}\,(q{\downarrow})$ y $\mathrm{coin}\,(q{\uparrow})$ son ω.

Veamos que en $\mathbb{R}$, al igual que en $\mathbb{Q}$, todos los elementos tienen entorno $\langle \omega, \omega^* \rangle$. Sea $r \in \mathbb{R}$. Al ser $\mathbb{Q}$ denso en $\mathbb{R}$, $r{\downarrow} \cap \mathbb{Q}$ es cofinal en $r{\downarrow}$. Como $r{\downarrow} \cap \mathbb{Q}$ tiene cofinalidad ω, $r{\downarrow}$ tiene cofinalidad ω. De manera similar, $r{\uparrow}$ tiene coinicialidad ω^*. De esta forma, r tiene entorno $\langle \omega, \omega^* \rangle$.

Si un elemento de A tiene entorno $\langle 0, \beta^* \rangle$, dicho elemento es el extremo izquierdo de A. Si un elemento de A tiene entorno $\langle \alpha, 0 \rangle$, dicho elemento es el extremo derecho de A.

En un orden lineal no sólo es importante el comportamiento de los elementos, también es importante el "espacio" entre ellos y para estudiarlo introduciremos el concepto de cortadura.

Definición 2.57 Sea $\langle A, <_A \rangle$ un orden lineal. Una **cortadura** del orden lineal A es un par $\langle C, D \rangle$ tal que C y D son subconjuntos no vacíos de A, $C <_A D$ y $C \cup D = A$.

Se observa directamente de la definición que C es un segmento inicial de A y D es un segmento final de A, más aún, $D = A \setminus C$. Analizando los extremos contiguos de C y D tenemos cuatro casos:

(1) C tiene máximo y D tiene mínimo;

(2) C tiene máximo y D no tiene mínimo;

(3) C no tiene máximo y D tiene mínimo; o

(4) C no tiene máximo y D no tiene mínimo.

Al tipo (1) se le llama **salto**, al tipo (4) se le llama **hueco**. Podemos analizar más a fondo las cortaduras a través de la cofinalidad y la coinicialidad.

Definición 2.58 Sean $\langle A, <_A \rangle$ un orden lineal y $\langle C, D \rangle$ una cortadura de A. Definiremos el **tipo de cortadura** como el par ordenado $\langle \alpha, \beta^* \rangle$, donde α es la cofinalidad de C y β es la coinicialidad de D. Además, diremos que $\langle C, D \rangle$ es una cortadura del tipo $\langle \alpha, \beta^* \rangle$.

En las cortaduras del caso (1), C tiene cofinalidad 1 y D tiene coinicialidad 1, por lo que los saltos son cortaduras del tipo $\langle 1, 1 \rangle$. Para las cortaduras del caso (2) la coinicialidad de D es infinita, por lo que es una cortadura del tipo $\left\langle 1, \omega_\xi^* \right\rangle$ para algún ordinal ξ. De manera similar las cortaduras del caso (3) son del tipo $\langle \omega_\epsilon, 1 \rangle$, para algún ordinal ϵ. Finalmente las del caso (4) son del tipo $\left\langle \omega_\epsilon, \omega_\xi^* \right\rangle$. En este último caso, decimos que se trata de un hueco de **entorno** $\left\langle \omega_\epsilon, \omega_\xi^* \right\rangle$.

Ejemplo 2.59 Veamos que en $\mathbb{R}$ todas las cortaduras son del tipo $\langle 1, \omega^* \rangle$ o del tipo $\langle \omega, 1 \rangle$. Sea $\langle A, B \rangle$ una cortadura de $\mathbb{R}$. Si A tiene máximo, digamos a, éste tiene entorno $\langle \omega, \omega^* \rangle$. Como $a\!\uparrow = B$, $\operatorname{coin}(B) = \omega$. Por lo tanto, $\langle A, B \rangle$ es una cortadura del tipo $\langle 1, \omega^* \rangle$. Si A no tiene máximo, A está superiormente acotado por cualquier elemento de B, el cual sabemos que es no vacío. Como $\mathbb{R}$ es completo, A tiene supremo, el cual está en B y debe ser el mínimo de B. El mínimo de B, digamos b, tiene entorno $\langle \omega, \omega^* \rangle$. Además $b\!\downarrow = A$, por lo tanto, $\langle A, B \rangle$ es una cortadura del tipo $\langle \omega, 1 \rangle$.

Las cortaduras de $\mathbb{Q}$ son del tipo $\langle 1, \omega^* \rangle$, del tipo $\langle \omega, 1 \rangle$ o del tipo $\langle \omega, \omega^* \rangle$, este último es consecuencia de que $\mathbb{Q}$ no es completo. Como $\mathbb{Q}$ es numerable, no pueden haber cortaduras con cofinalidad o coinicialidad mayor a ω. Y por la densidad, en $\mathbb{Q}$ no puede haber cortaduras del tipo $\langle 1, 1 \rangle$.

Definición 2.60 Sea $\langle A, <_A \rangle$ un orden lineal. Decimos que $\langle A, <_A \rangle$ es **continuo** si y sólo si todas sus cortaduras son del tipo $\left\langle 1, \omega_\xi^* \right\rangle$ para algún ordinal ξ o del tipo $\langle \omega_\epsilon, 1 \rangle$ para algún ordinal ϵ.

Por el ejemplo anterior, $\mathbb{R}$ es continuo y $\mathbb{Q}$ no es continuo. Un orden completo puede no ser continuo, pero un orden continuo sí es completo.

Teorema 2.61 *Sea $\langle A, <_A \rangle$ un orden lineal. Si $\langle A, <_A \rangle$ es continuo, entonces $\langle A, <_A \rangle$ es completo.*

Demostración. Sea $B \subseteq A$ no vacío y superiormente acotado. Sean $C = \operatorname{IS}(B)$ y $D = A \backslash C$. Como B es no vacío, C es no vacío. Como B está acotado superiormente, D es no vacío. Por lo tanto, $\langle C, D \rangle$ es una cortadura de A.

Supongamos que $\langle C, D\rangle$ es una cortadura del tipo $\left\langle 1, \omega_\xi^*\right\rangle$. Entonces C tiene cofinalidad 1, es decir, tiene máximo. Sea c_1 el máximo de C, veamos que c_1 es el supremo de B, más aún, c_1 es el máximo de B. Como c_1 es máximo de C y $B \subseteq C$, c_1 es cota superior de B. Como $c_1 \in \mathrm{IS}\,(B)$, existe $b \in B$ tal que $c_1 \leq_A b$, pero $b \leq_A c_1$ por ser c_1 cota superior de B. Entonces, $c_1 \in B$. Por lo tanto, B tiene máximo y en particular supremo.

Ahora, supongamos que $\langle C, D\rangle$ es una cortadura del tipo $\langle \omega_\epsilon, 1\rangle$. Por lo cual, D tiene coinicialidad 1, es decir, tiene mínimo. Sea d_0 el mínimo de D, veamos que d_0 es el supremo de B. Sea $x \in B$, entonces $x \in C$. Como $d_0 \in A \setminus C$, no existe $t \in B$ tal que $d_0 \leq_A t$, por lo tanto, $x <_A d_0$. Sea y una cota superior de B. Si $y \in B$, $y \in C$. Pero ω_ϵ es cofinal en C, así que C no tiene máximo, por lo que existe $z \in C$ tal que $y <_A z$. Pero más aún, como $C = \mathrm{IS}\,(B)$, existe $t \in B$ tal que $z \leq_A t$, entonces $y <_A t$, lo que contradice a que y es una cota superior de B. Por lo tanto, $y \notin B$. De modo que, $y \in D$ y, como d_0 es el mínimo de D, $d_0 \leq_A y$. Por lo tanto, d_0 es el supremo de B.

En ambos casos B tiene supremo. Por lo tanto, $\langle A, <_A\rangle$ es completo.

$\dashv$

Veamos un ejemplo de un orden que es completo pero que no es continuo.

Ejemplo 2.62 Consideremos a ω, veamos que ω es completo y no es continuo. Sea $B \subseteq \omega$ no vacío y superiormente acotado. Entonces B tiene máximo, y en particular supremo. Por lo tanto, ω es completo. Pero las cortaduras de ω son del tipo $\langle 1, 1\rangle$, por lo que no es continuo.

La operación de invertir el orden preserva a los órdenes continuos, pues si una cortadura tiene entorno $\langle 1, \omega_\epsilon^*\rangle$, en el orden invertido tendrá entorno $\langle \omega_\epsilon, 1\rangle$, por el teorema 2.42.

Corolario 2.63 *Sea $\langle A, <_A\rangle$ un orden lineal continuo. Entonces $\langle A, <_A\rangle^*$ es un orden lineal continuo.*

Decimos que un elemento o un hueco es simétrico si tiene entorno $\langle \alpha, \alpha^*\rangle$. Una cortadura es simétrica si es del tipo $\langle \alpha, \alpha^*\rangle$. Las cortaduras simétricas son saltos o tienen tipo $\left\langle \omega_\xi, \omega_\xi^*\right\rangle$ con ω_ξ un cardinal regular.

2.3 | Órdenes η_α

Veamos una clase de órdenes que generalizan el concepto de densidad.

Definición 2.64 Un orden lineal $\langle A, <_A\rangle$ es un **orden** η_α si y sólo si para cualesquiera subconjuntos B, C no vacíos de A de cardinalidad menor que $\aleph_\alpha$, tales que $B < C$, existe un $z \in A$, tal que $B < z < C$; y cualquier subconjunto de A cofinal o coinicial en A tiene cardinalidad mayor o igual que $\aleph_\alpha$.

Observemos que si $\langle A, <_A\rangle$ es un orden η_α, entonces también será un orden η_β, para $\beta < \alpha$.

Ejemplo 2.65 Cualquier orden lineal no vacío sin extremos y denso es un orden η_0. Los números racionales y los reales son órdenes η_0. Los números irracionales con el orden heredado de $\mathbb{R}$, también son un orden η_0.

Dos subconjuntos de A, digamos C y D, se llaman vecinos si $C < D$ y no hay $z \in A$ tal que $C < z$ y $z < D$. También decimos que A separa a C y D si sí existe dicha z. De esta forma, un orden η_α no tiene subconjuntos no vacíos, vecinos y ambos con cardinalidad menor que $\aleph_\alpha$.

Analicemos el entorno de un elemento de un orden η_α. Sean $\langle A, <_A \rangle$ un orden η_α y $a \in A$. El entorno de a no puede ser $\langle 0, \xi^* \rangle$ ni $\langle \epsilon, 0 \rangle$, pues los órdenes η_α no tienen extremos, ya que tanto su cofinalidad como su coinicialidad son mayores o iguales que ω_α. El entorno de a tampoco puede ser $\langle 1, \xi^* \rangle$ ni $\langle \epsilon, 1 \rangle$, pues si a tuviera entorno $\langle 1, \xi^* \rangle$, $a\!\downarrow$ tendría máximo, digamos b. Entonces, $\{b\}$ y $\{a\}$ serían conjuntos vecinos con cardinalidad menor que $\aleph_\alpha$, lo cual no es posible en un orden η_α. De manera similar, suponer que a tiene entorno $\langle \epsilon, 1 \rangle$ nos lleva a una contradicción. De este modo, cualquier elemento de un orden η_α tiene entorno $\left\langle \omega_\epsilon, \omega_\xi^* \right\rangle$, donde ω_ϵ y ω_ξ son ordinales iniciales regulares.

El siguiente teorema caracteriza a los órdenes η_α mediante los conceptos de *entorno* y *cofinalidad*.

Teorema 2.66 *Un orden lineal $\langle A, <_A \rangle$ es un orden η_α si y sólo si las siguientes condiciones se cumplen:*

(i) *todo elemento de A tiene un entorno $\left\langle \omega_\epsilon, \omega_\xi^* \right\rangle$ con ϵ y $\xi \geq \alpha$;*

(ii) *todo hueco de A tiene un entorno $\left\langle \omega_\epsilon, \omega_\xi^* \right\rangle$ con ϵ o $\xi \geq \alpha$; y*

(iii) *la cofinalidad y la coinicialidad de A son mayores o iguales que ω_α.*

Demostración. Sea $\langle A, <_A \rangle$ un orden η_α. Sea $x \in A$, por lo dicho anteriormente, x tiene entorno $\left\langle \omega_\epsilon, \omega_\xi^* \right\rangle$, entonces ω_ϵ es la cofinalidad de $x\!\downarrow$ y ω_ξ es la coinicialidad de $x\!\uparrow$. Sea $C \subseteq x\!\downarrow$ cofinal e isomorfo a ω_ϵ y sea $D \subseteq x\!\uparrow$ coinicial e isomorfo a ω_ξ^*. De modo que C y $\{x\}$ son subconjuntos vecinos. Por la contrapuesta de la definición de η_α, C tiene que ser de cardinalidad mayor que $\aleph_\alpha$. Por lo tanto, $\omega_\epsilon \geq \omega_\alpha$ y en consecuencia $\epsilon \geq \alpha$. De manera análoga, $\xi \geq \alpha$. Sea $\langle X, Y \rangle$ un hueco en A con entorno $\left\langle \omega_\epsilon, \omega_\xi^* \right\rangle$. Sea $C \subseteq X$ cofinal e isomorfo a ω_ϵ y sea $D \subseteq Y$ coinicial e isomorfo a ω_ξ^*. Como $\langle X, Y \rangle$ es una cortadura, C y D son vecinos. Entonces C o D tiene cardinalidad mayor o igual que $\aleph_\alpha$. Por lo tanto, $\epsilon \geq \alpha$ o $\xi \geq \alpha$. El tercer inciso se sigue directamente de la definición de η_α.

Ahora supongamos que $\langle A, <_A \rangle$ cumple los tres incisos. Sean $X < Y$ dos subconjuntos de A, no vacíos y vecinos, veamos que alguno es de cardinalidad mayor o igual que $\aleph_\alpha$. Sea $C \subseteq X$ cofinal e isomorfo a $\mathrm{cf}\,(X)$ y sea $D \subseteq Y$ cofinal e isomorfo a $\mathrm{coin}\,(Y)^*$. Notemos que C y D son conjuntos vecinos en A. Si $\mathrm{cf}\,(X) = 1$, C sólo tiene un elemento, digamos

z. El entorno de z es $\left\langle \omega_\epsilon, \omega_\xi^* \right\rangle$ con ϵ y $\xi \geq \alpha$. Como D es vecino a C, D es coinicial en $z\uparrow$. Entonces la cardinalidad de D es mayor o igual que $\aleph_\alpha$. De manera similar, si $\operatorname{coin}(Y) = 1$, la cardinalidad de C es mayor o igual a $\aleph_\alpha$. Supongamos que $\operatorname{cf}(X) = \omega_\epsilon$ y $\operatorname{coin}(Y) = \omega_\xi$. Entonces, $\langle \mathrm{IS}(X), \mathrm{FS}(Y) \rangle$ es un hueco con entorno $\left\langle \omega_\epsilon, \omega_\xi^* \right\rangle$. Por hipótesis, ϵ o ξ es mayor o igual que α. Por lo tanto, X o Y tiene cardinalidad mayor que $\aleph_\alpha$. Entonces $\langle A, <_A \rangle$ es un orden η_α.

$\dashv$

La operación de invertir el orden preserva a los órdenes η_α.

Teorema 2.67 *Sea $\langle A, <_A \rangle$ un orden η_α. Entonces $\langle A, <_A \rangle^*$ es un orden η_α.*

Demostración. Usaremos la caracterización que acabamos de demostrar. Sea $a \in A$, entonces tiene entorno $\left\langle \omega_\epsilon, \omega_\xi^* \right\rangle$ con ϵ y $\xi \geq \alpha$. Por el teorema 2.42, a tiene entrono $\langle \omega_\xi, \omega_\epsilon^* \rangle$ en $\langle A, <_A \rangle^*$. Por lo tanto, a tiene entrono, en $\langle A, <_A \rangle^*$, $\langle \omega_\xi, \omega_\epsilon^* \rangle$ con ξ y $\epsilon \geq \alpha$, así cumple el primer inciso de la caracterización.

Sea $\langle C, D \rangle$ un hueco en $\langle A, <_A \rangle^*$, entonces $\langle D, C \rangle$ es un hueco de $\langle A, <_A \rangle$. Como $\langle A, <_A \rangle$ es un orden η_α, el hueco $\langle D, C \rangle$ tiene entorno, en $\langle A, <_A \rangle$, $\left\langle \omega_\epsilon, \omega_\xi^* \right\rangle$ con ϵ o $\xi \geq \alpha$. Así que $\langle C, D \rangle$ tiene entorno, en $\langle A, <_A \rangle^*$, $\langle \omega_\xi, \omega_\epsilon^* \rangle$ con ξ o $\epsilon \geq \alpha$. Por lo tanto, se cumple el segundo inciso.

Por el teorema 2.42, $\operatorname{cf}(\langle A, <_A \rangle^*) = \operatorname{coin}(\langle A, <_A \rangle)$ y $\operatorname{coin}(\langle A, <_A \rangle^*) = \operatorname{cf}(\langle A, <_A \rangle)$, y como $\langle A, <_A \rangle$ es un orden η_α, ambos son mayores o iguales ω_α. Por lo tanto, se cumple el tercer inciso.

Por la caracterización de los órdenes η_α, $\langle A, <_A \rangle^*$ es un orden η_α.

$\dashv$

El siguiente teorema delimitará los órdenes η_α cuyo estudio es interesante.

Teorema 2.68 *Si ω_α es un ordinal singular y $\langle A, <_A \rangle$ un orden η_α, entonces $\langle A, <_A \rangle$ es un orden $\eta_{\mathrm{s}(\alpha)}$.*

Demostración. Sea $a \in A$. Como A es un orden η_α, a tiene entorno $\left\langle \omega_\epsilon, \omega_\xi^* \right\rangle$ con ϵ, $\xi \geq \alpha$. Pero ω_ϵ y ω_ξ son regulares y ω_α es singular, entonces ϵ, $\xi \geq \mathrm{s}(\alpha)$. De igual manera, cualquier hueco de A tiene entorno $\left\langle \omega_\epsilon, \omega_\xi^* \right\rangle$ con ϵ o $\xi \geq \mathrm{s}(\alpha)$ y la cofinalidad y la coinicialidad de A son mayores o iguales a $\omega_{\mathrm{s}(\alpha)}$. Por lo tanto, $\langle A, <_A \rangle$ es un orden $\eta_{\mathrm{s}(\alpha)}$.

$\dashv$

Como habíamos dicho anteriormente, la cofinalidad y la regularidad son propiedades que aparecerán en varios teoremas, justamente el teorema anterior es un ejemplo de ello.

Veamos que la propiedad de ser orden η_α se hereda a los subconjuntos densos de un orden η_α.

Teorema 2.69 *Sean E un orden η_α y D un subconjunto denso en E. Entonces D también es un orden η_α.*

Demostración. Sean B, $C \subseteq D$ no vacíos con cardinalidad menor que $\aleph_\alpha$ tales que $B < C$. Como $D \subseteq E$, tenemos que B y C están contenidos en E. Como E es un orden η_α, existe $z \in E$ tal que $B < z < C$. Notemos que $\{z\} < C$ y ambos son conjuntos no vacíos con cardinalidad menor que $\aleph_\alpha$, y así existe $w \in E$ tal que $\{z\} < w < C$. Como D es denso en E, existe $x \in D$ tal que $z < x < w$. Entonces se cumple que $B < x < C$.

Como D es denso en E y E no tiene extremos, D es cofinal en E y coinicial en E. Y así tenemos que $\mathrm{cf}\,(D) = \mathrm{cf}\,(E)$ y $\mathrm{coin}\,(D) = \mathrm{coin}\,(E)$, por el teorema 2.40. Por lo tanto, la cofinalidad de D y la coinicialidad de D es mayor o igual que $\aleph_\alpha$.

$\dashv$

Teorema 2.70 *Sea E un orden η_α. Cualquier intervalo abierto de E es también un orden η_α.*

Demostración. Sean a, $b \in E$ tales que $a < b$. Sean A y B subconjuntos de (a, b) no vacíos con cardinalidad menor que $\aleph_\alpha$ tales que $A < B$. Como $(a, b) \subseteq E$, A, $B \subseteq E$. Como E es un orden η_α, existe $z \in E$ tal que $A < z < B$. Entonces $a < A < z < B < b$, por lo tanto, existe $z \in (a, b)$ tal que $A < z < B$.

Como a, $b \in E$, tienen entorno mayor que ω_α. Entonces (a, b) tiene cofinalidad y coinicialidad mayor que ω_α, pues $\mathrm{coin}\,((a, b)) = \mathrm{coin}\,(a\uparrow)$ y $\mathrm{cf}\,((a, b)) = \mathrm{cf}\,(b\downarrow)$.

Por lo tanto, (a, b) es un orden η_α.

$\dashv$

Capítulo III   Operaciones con órdenes

En este capítulo definiremos las operaciones de suma y multiplicación de órdenes y exploraremos sus propiedades. Veremos cómo se relacionan con las clases de órdenes que hemos estudiado y analizaremos qué conceptos se preservan.

3.1 Suma de órdenes

Si tenemos dos órdenes lineales, podemos generar un nuevo orden al colocar uno a continuación del otro, como se muestra en la figura 3.1.

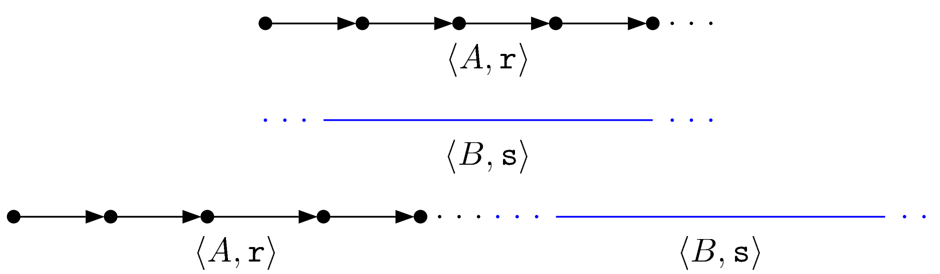

Figura 3.1: Podemos colocar un orden seguido de otro para formar un nuevo orden.

Formalicemos esta idea, para ello definiremos la relación suma.

Definición 3.1 Sean A y B conjuntos disjuntos, $\mathtt{r}$ una relación sobre A y $\mathtt{s}$ una relación sobre B. Definamos la **relación suma $\mathtt{r}+\mathtt{s}$ sobre** $A \cup B$, como

$$\langle x, y\rangle \in \mathtt{r}+\mathtt{s} \text{ si y sólo si } \langle x, y\rangle \in \mathtt{r} \vee \langle x, y\rangle \in \mathtt{s} \vee (x \in A \wedge y \in B)$$

Directamente de la definición se tiene que $\mathtt{r} \subseteq \mathtt{r}+\mathtt{s}$ y $\mathtt{s} \subseteq \mathtt{r}+\mathtt{s}$.

Veamos qué propiedades preserva la relación suma.

Teorema 3.2 *Sean A y B conjuntos disjuntos, $\mathtt{r}$ una relación sobre A y $\mathtt{s}$ una relación sobre B. La relación $\mathtt{r}+\mathtt{s}$ cumple que*

(i) *Si $\mathtt{r}$ es reflexiva sobre A y $\mathtt{s}$ es reflexiva sobre B, $\mathtt{r}+\mathtt{s}$ es reflexiva sobre $A \cup B$.*

(ii) *Si* $\mathtt{r}$ *es antirreflexiva sobre* A *y* $\mathtt{s}$ *es antirreflexiva sobre* B*,* $\mathtt{r}+\mathtt{s}$ *es antirreflexiva sobre* $A \cup B$*.*

(iii) *Si* $\mathtt{r}$ *es antisimétrica y* $\mathtt{s}$ *es antisimétrica,* $\mathtt{r}+\mathtt{s}$ *es antisimétrica.*

(iv) *Si* $\mathtt{r}$ *es transitiva y* $\mathtt{s}$ *es transitiva,* $\mathtt{r}+\mathtt{s}$ *es transitiva.*

Demostración.

(i) Supongamos que $\mathtt{r}$ es reflexiva sobre A y $\mathtt{s}$ es reflexiva sobre B. Sea $x \in A \cup B$. Si $x \in A$, como $\mathtt{r}$ es reflexiva sobre A, $\langle x, x\rangle \in \mathtt{r}$. Si $x \in B$, como $\mathtt{s}$ es reflexiva sobre B, $\langle x, x\rangle \in \mathtt{s}$. Entonces $\langle x, x\rangle \in \mathtt{r}+\mathtt{s}$. Por lo tanto, $\mathtt{r}+\mathtt{s}$ es reflexiva.

(ii) Supongamos que $\mathtt{r}$ es antirreflexiva sobre A y $\mathtt{s}$ es antirreflexiva sobre B. Sea $x \in A \cup B$, supongamos que $x \in A$. Como $\mathtt{r}$ es antirreflexiva sobre A, $\langle x, x\rangle \notin \mathtt{r}$. Como A y B son disjuntos, $x \notin B$, por lo que $\langle x, x\rangle \notin \mathtt{s}$. Entonces $\langle x, x\rangle \notin \mathtt{r}+\mathtt{s}$. Análogamente si $x \in B$, $\langle x, x\rangle \notin \mathtt{s}$. Por lo tanto, $\mathtt{r}+\mathtt{s}$ es antirreflexiva.

(iii) Sean $\mathtt{r}$ y $\mathtt{s}$ antisimétricas. Supongamos que $\langle x, y\rangle \in \mathtt{r}+\mathtt{s}$ y $\langle y, x\rangle \in \mathtt{r}+\mathtt{s}$. Como A y B son disjuntos, x y y tiene que estar sólo en A o sólo en B. Supongamos sin pérdida de la generalidad que $x \in A$ y $y \in A$. Entonces $\langle x, y\rangle \in \mathtt{r}$ y $\langle y, x\rangle \in \mathtt{r}$. Como $\mathtt{r}$ es antisimétrica, $x = y$. Por lo tanto, $\mathtt{r}+\mathtt{s}$ es antisimétrica.

(iv) Sean $\mathtt{r}$ y $\mathtt{s}$ transitivas. Supongamos que $\langle x, y\rangle \in \mathtt{r}+\mathtt{s}$ y $\langle y, z\rangle \in \mathtt{r}+\mathtt{s}$. Analicemos los posibles casos para z, y y x. Si $z \in A$, entonces $\langle y, z\rangle \in \mathtt{r}$ y $\langle x, y\rangle \in \mathtt{r}$. Como $\mathtt{r}$ es transitiva, $\langle x, z\rangle \in \mathtt{r}$. Por lo tanto, $\langle x, z\rangle \in \mathtt{r}+\mathtt{s}$. Supongamos que $z \in B$, analicemos a y. Si $y \in A$, entonces $\langle x, y\rangle \in \mathtt{r}$ y en consecuencia $x \in A$. Así, $\langle x, z\rangle \in \mathtt{r}+\mathtt{s}$. Supongamos que $y \in B$, analicemos por último a x. Si $x \in A$, como $z \in B$, $\langle x, z\rangle \in \mathtt{r}+\mathtt{s}$. Si $x \in B$, $\langle x, y\rangle \in \mathtt{s}$, $\langle y, z\rangle \in \mathtt{s}$. Como $\mathtt{s}$ es transitiva, $\langle x, z\rangle \in \mathtt{s}$. Por lo tanto, $\langle x, z\rangle \in \mathtt{r}+\mathtt{s}$.

En todos los casos tenemos que $\langle x, z\rangle \in \mathtt{r}+\mathtt{s}$, por lo tanto, $\mathtt{r}+\mathtt{s}$ es transitiva.

$\dashv$

En la lista anterior no se encuentra la simetría, de hecho, por la condición de que A y B son disjuntos, cuando ambos sean no vacíos, $\mathtt{r}+\mathtt{s}$ nunca será simétrica.

Corolario 3.3 *Sean* A *y* B *conjuntos disjuntos,* $\mathtt{r}$ *una relación sobre* A *y* $\mathtt{s}$ *una relación sobre* B*. Si* $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ *y* $\langle B, \mathtt{s}\rangle$ *son órdenes parciales, entonces* $\langle A \cup B, \mathtt{r}+\mathtt{s}\rangle$ *es orden parcial.*

Como la suma de relaciones preserva las propiedades de orden parcial, podemos definir una operación en los órdenes parciales.

Definición 3.4 Sean $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ y $\langle B, \mathtt{s}\rangle$ órdenes parciales, con A y B conjuntos disjuntos. Definimos la **suma de órdenes** como el orden parcial $\langle A \cup B, \mathtt{r}+\mathtt{s}\rangle$.

Definición 3.5 Sean τ y μ tipos de orden. Definimos la **suma de tipos de orden**, denotado por $\tau+\mu$, como el tipo de orden de $\langle A \cup B, \mathtt{r}+\mathtt{s}\rangle$, donde A y B son disjuntos, $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ tiene tipo de orden τ y $\langle B, \mathtt{s}\rangle$ tiene tipo de orden μ.

En el caso de los órdenes usaremos $<_{A+B}$ para denotar $\mathtt{r}+\mathtt{s}$ cuando más convenga. Por ejemplo, en lugar de $x\,\mathtt{r}+\mathtt{s}\,y$, escribiremos $x <_{A+B} y$.

Ejemplo 3.6 Sean $A=\{0,1,2,3,4\}$ y $\mathtt{r}=\{\langle 0,1\rangle,\langle 0,2\rangle,\langle 0,3\rangle,\langle 0,4\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle\}$. Sean $B=\{5,6,7,8,9\}$ y $\mathtt{s}=\{\langle 5,7\rangle,\langle 5,8\rangle,\langle 5,9\rangle,\langle 6,7\rangle,\langle 6,8\rangle,\langle 6,9\rangle,\langle 7,8\rangle,\langle 7,9\rangle\}$. Entonces $\langle A,\mathtt{r}\rangle$ y $\langle B,\mathtt{s}\rangle$ son órdenes parciales. Notemos que $A\cap B=\varnothing$, por lo que podemos sumar estos dos órdenes parciales. Tenemos entonces que $A\cup B=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, y

$$\begin{aligned}\mathtt{r}+\mathtt{s}=\mathtt{r}\cup\mathtt{s}\cup\{\,&\langle 0,5\rangle,\langle 0,6\rangle,\langle 0,7\rangle,\langle 0,8\rangle,\langle 0,9\rangle,\langle 1,5\rangle,\langle 1,6\rangle,\langle 1,7\rangle,\langle 1,8\rangle,\langle 1,9\rangle,\\ &\langle 2,5\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 2,7\rangle,\langle 2,8\rangle,\langle 2,9\rangle,\langle 3,5\rangle,\langle 3,6\rangle,\langle 3,7\rangle,\langle 3,8\rangle,\langle 3,9\rangle,\\ &\langle 4,5\rangle,\langle 4,6\rangle,\langle 4,7\rangle,\langle 4,8\rangle,\langle 4,9\rangle\}\end{aligned}$$

En la figura 3.2 se muestra la representación gráfica de $\langle A,\mathtt{r}\rangle$, $\langle B,\mathtt{s}\rangle$ y $\langle A\cup B,\mathtt{r}+\mathtt{s}\rangle$.

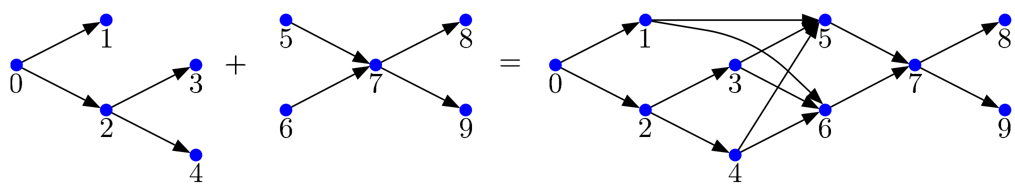

Figura 3.2: Resultado de sumar los órdenes $\langle A,\mathtt{r}\rangle$ y $\langle B,\mathtt{B}\rangle$.

Veamos que la suma de tipos de orden está bien definida.

Proposición 3.7 *Sean τ y μ tipos de orden. Sean $\langle A,\mathtt{r}\rangle$ y $\langle A',\mathtt{r}'\rangle$ órdenes de tipo τ, y sean $\langle B,\mathtt{s}\rangle$ y $\langle B',\mathtt{s}'\rangle$ órdenes de tipo μ, tales que $A\cap B=\varnothing$ y $A'\cap B'=\varnothing$. Entonces, $\langle A\cup B,\mathtt{r}+\mathtt{s}\rangle$ es isomorfo a $\langle A'\cup B',\mathtt{r}'+\mathtt{s}'\rangle$.*

Demostración. Sean $f:A\to A'$ y $g:B\to B'$ isomorfismos. Como $A\cap B=\varnothing$, f y g son funciones compatibles. La función $h=f\cup g$ es el isomorfismo buscado.

$\dashv$

Demostremos que la suma de órdenes es asociativa.

Teorema 3.8 *Sean $\langle A,\mathtt{r}\rangle$, $\langle B,\mathtt{s}\rangle$ y $\langle C,\mathtt{p}\rangle$ órdenes parciales. Entonces*

$$\langle (A\cup B)\cup C,(\mathtt{r}+\mathtt{s})+\mathtt{p}\rangle=\langle A\cup(B\cup C),\mathtt{r}+(\mathtt{s}+\mathtt{p})\rangle\,,$$

es decir, la suma de órdenes es asociativa.

Demostración. Por la asociatividad de la unión tenemos que $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$. Resta probar que $(\mathtt{r}+\mathtt{s})+\mathtt{p}=\mathtt{r}+(\mathtt{s}+\mathtt{p})$, lo cual demostraremos con las siguientes equivalencias.

Sean a y b conjuntos.

$$
\begin{aligned}
& \langle a,b\rangle \in (\mathtt{r}+\mathtt{s})+\mathtt{p} \\
\text{si y sólo si } & \langle a,b\rangle \in (\mathtt{r}+\mathtt{s}) \vee \langle a,b\rangle \in \mathtt{p} \vee (a \in A\cup B \wedge b \in C) \\
\text{si y sólo si } & \langle a,b\rangle \in \mathtt{r} \vee \langle a,b\rangle \in \mathtt{s} \vee (a\in A \wedge b \in B) \vee \langle a,b\rangle \in \mathtt{p} \vee ((a\in A \vee a \in B)\wedge b\in C) \\
\text{si y sólo si } & \langle a,b\rangle \in \mathtt{r} \vee \langle a,b\rangle \in \mathtt{s} \vee (a\in A \wedge b \in B) \vee \langle a,b\rangle \in \mathtt{p} \\
& \qquad\qquad \vee (a\in A\wedge b\in C) \vee (a \in B \wedge b \in C) \\
\text{si y sólo si } & \langle a,b\rangle \in \mathtt{r} \vee (a \in A \wedge (b\in B \vee b \in C)) \vee \langle a,b\rangle \in \mathtt{s} \vee \langle a,b\rangle \in \mathtt{p} \vee (a\in B\wedge b \in C) \\
\text{si y sólo si } & \langle a,b\rangle \in \mathtt{r} \vee (a \in A \wedge b \in B\cup C) \vee \langle a,b\rangle \in \mathtt{s}+\mathtt{p} \\
\text{si y sólo si } & \langle a,b\rangle \in \mathtt{r}+(\mathtt{s}+\mathtt{p})
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $(\mathtt{r}+\mathtt{s})+\mathtt{p} = \mathtt{r}+(\mathtt{s}+\mathtt{p})$. Entonces la suma de órdenes es asociativa. Más aún, la suma de relaciones es asociativa.

$\dashv$

Proposición 3.9 *La suma de órdenes parciales tiene neutro, es decir, existe un orden parcial $\langle E,\mathtt{e}\rangle$ tal que para todo orden parcial $\langle A,\mathtt{r}\rangle$, $\langle A\cup E,\mathtt{r}+\mathtt{e}\rangle = \langle E\cup A,\mathtt{e}+\mathtt{r}\rangle = \langle A,\mathtt{r}\rangle$.*

Demostración. Propongamos $E=\varnothing$ y $\mathtt{e}=\varnothing$. Así, se cumple que $A\cup E = E\cup A = A$. Ahora, si $\langle a,b\rangle \in \mathtt{r}+\mathtt{e}$, entonces $\langle a,b\rangle \in \mathtt{r}$ o $\langle a,b\rangle \in \mathtt{e}$, o bien, $a\in A$ y $b \in E$. Pero $\mathtt{e}=E=\varnothing$, por lo que, $\langle a,b\rangle\in\mathtt{r}$. De manera análoga, si $\langle a,b\rangle \in \mathtt{e}+\mathtt{r}$, $\langle a,b\rangle\in\mathtt{r}$. De modo que, $\mathtt{r}+\mathtt{e}=\mathtt{e}+\mathtt{r}=\mathtt{r}$. Por lo tanto, $\langle\varnothing,\varnothing\rangle$ es el neutro de la suma de órdenes.

$\dashv$

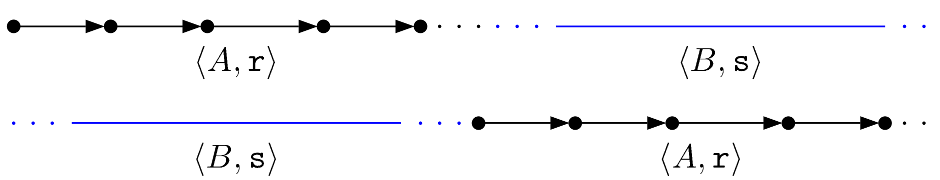

Figura 3.3: Suma de los órdenes $\langle A,\mathtt{r}\rangle$ y $\langle B,\mathtt{s}\rangle$, de la figura 3.1. Arriba $\langle A\cup B,\mathtt{r}+\mathtt{s}\rangle$, abajo $\langle B\cup A,\mathtt{s}+\mathtt{r}\rangle$.

Uno estaría tentado a preguntarse si la suma tiene inversos, pero al definirse mediante la unión, no podemos unir algo para que nos dé el conjunto vacío. La siguiente pregunta sería si es conmutativa, pero como se ve en el ejemplo de la figura 3.1, si intercambiáramos el orden de los sumandos, tendríamos un orden sin mínimo y otro con mínimo. Esto se muestra en la figura 3.3. Pero veamos un ejemplo más concreto.

Ejemplo 3.10 Consideremos los tipos de orden ω y 1. Escojamos como representantes ajenos a $\langle\omega,<_\omega\rangle$ y $\langle\{\omega\},\varnothing\rangle$ respectivamente. Mostremos que $\langle\omega\cup\{\omega\},<_\omega+\varnothing\rangle$ tiene máximo. Sea $a\in\omega\cup\{\omega\}$. Si $a\in\omega$, $\langle a,\omega\rangle \in <_\omega+\varnothing$, pues $\omega\in\{\omega\}$. Y si $a\in\{\omega\}$, $a=\omega$. Por lo tanto, ω es el máximo de $\langle\omega\cup\{\omega\},<_\omega+\varnothing\rangle$.

Veamos que $\langle\{\omega\}\cup\omega, \varnothing + <_\omega\rangle$ es isomorfo a ω. Definimos $f : \{\omega\}\cup\omega \to \omega$ como $f(\omega) = 0$ y para toda $n \in \omega$, $f(n) = n + 1$. Supongamos que $\langle a, b\rangle \in \varnothing + <_\omega$, entonces tenemos dos casos. Si $a = \omega$ y $b \in \omega$, $f(a) = 0$ y $f(b) = b + 1$, por lo que $0 \in b + 1$. Si $a <_\omega b$, entonces $f(a) = a+1$ y $f(b) = b+1$. Pero $a <_\omega b$, entonces $a+1 \in b+1$. En ambos casos $f(a) \in f(b)$, es decir, f preserva el orden. Como f es sobre, por la proposición 1.28, f es un isomorfismo.

Resumiendo, el tipo de orden $\omega + 1$ tiene máximo y el tipo de orden $1 + \omega$ es igual a ω. Como ω no tiene máximo, $\omega + 1 \neq 1 + \omega$. Éste es un ejemplo de que la suma de tipos de órdenes no conmuta.

Veamos que la suma de órdenes preserva los órdenes lineales.

Teorema 3.11 *Sean $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ y $\langle B, \mathtt{s}\rangle$ órdenes lineales, con A y B conjuntos disjuntos. Entonces $\langle A \cup B, \mathtt{r} + \mathtt{s}\rangle$ es un orden lineal.*

Demostración. Por el corolario 3.3 $\langle A \cup B, \mathtt{r} + \mathtt{s}\rangle$ es un orden parcial. Veamos que es tricotómico. Sean a, $b \in A \cup B$. Supongamos que $\langle a, b\rangle \notin \mathtt{r} + \mathtt{s}$ y $\langle b, a\rangle \notin \mathtt{r} + \mathtt{s}$, veamos que $a = b$. Como $\langle a, b\rangle \notin \mathtt{r} + \mathtt{s}$, no sucede que $a \in A$ y $b \in B$. Como $\langle b, a\rangle \notin \mathtt{r} + \mathtt{s}$, no ocurre que $b \in A$ y $a \in B$. Entonces a y b están ambos en A o están ambos en B. Supongamos sin perder la generalidad que a y $b \in A$. Como $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ es un orden lineal, $a \,\mathtt{r}\, b$, $b \,\mathtt{r}\, a$ o $a = b$. El primer caso implica que $\langle a, b\rangle \in \mathtt{r} + \mathtt{s}$, el segundo caso implica que $\langle b, a\rangle \in \mathtt{r} + \mathtt{s}$, lo cual contradice lo anterior. Por lo tanto, $a = b$.

$\dashv$

También la suma de órdenes preserva a los buenos órdenes.

Teorema 3.12 *Sean $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ y $\langle B, \mathtt{s}\rangle$ buenos órdenes, con A y B conjuntos disjuntos. Entonces $\langle A \cup B, \mathtt{r} + \mathtt{s}\rangle$ es un buen orden.*

Demostración. Sea $C \subseteq A \cup B$ no vacío. Analicemos el conjunto $A \cap C$. Si $A \cap C$ es no vacío, como A es un buen orden, existe un $\mathtt{r}$-mínimo c_0 de $A \cap C$. Sea $x \in C$, si $x \in B$, por la definición de la suma, $\langle c_0, x\rangle \in \mathtt{r} + \mathtt{s}$. Si $x \in A$, entonces $x \in A \cap C$, por lo que $x = c_0$ o $\langle c_0, x\rangle \in \mathtt{r} + \mathtt{s}$. Por lo tanto, c_0 es el $<_{A+B}$-mínimo de C.

Ahora, si $A \cap C$ es vacío, entonces $C \subseteq B$. Como C es no vacío y B es un buen orden, C tiene $\mathtt{s}$-mínimo. Pero $\mathtt{s} \subseteq \mathtt{r} + \mathtt{s}$, entonces C tiene $<_{A+B}$-mínimo.

Por lo tanto, $\langle A \cup B, \mathtt{r} + \mathtt{s}\rangle$ es un buen orden.

$\dashv$

Como hemos visto la suma de relaciones contiene a ambas relaciones, esto se traduce con el orden heredado como sigue.

Proposición 3.13 *Sean $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ y $\langle B, \mathtt{s}\rangle$ órdenes parciales, con A y B conjuntos disjuntos. Entonces $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ y $\langle B, \mathtt{s}\rangle$ son subórdenes de $\langle A \cup B, \mathtt{r} + \mathtt{s}\rangle$.*

Demostración. Es claro que $A \subseteq A \cup B$ y $B \subseteq A \cup B$. Veamos que $(\mathtt{r} + \mathtt{s})\restriction_A = \mathtt{r}$. Sea $\langle a, b\rangle \in (\mathtt{r} + \mathtt{s})\restriction_A$. Entonces a, $b \in A$ y $\langle a, b\rangle \in \mathtt{r} + \mathtt{s}$, es decir, $a \,\mathtt{r}\, b$ o $a \,\mathtt{s}\, b$ o $a \in A$ y $b \in B$.

Como A y B son conjuntos disjuntos, no ocurre que $a \, \mathtt{s} \, b$, ni ocurre que $b \in B$. De modo que $a \, \mathtt{r} \, b$. Como $\mathtt{r} \subseteq \mathtt{r} + \mathtt{s}$, $\mathtt{r} = (\mathtt{r} + \mathtt{s}) \restriction_A$. Por lo tanto, $\langle A, \mathtt{r} \rangle$ es un suborden de $\langle A \cup B, \mathtt{r} + \mathtt{s} \rangle$.

De manera análoga se obtiene que $\langle B, \mathtt{s} \rangle$ es un suborden de $\langle A \cup B, \mathtt{r} + \mathtt{s} \rangle$.

$\dashv$

El resultado anterior se puede expresar en términos de tipos de orden como sigue.

Corolario 3.14 *Sean μ y τ tipos de orden. Entonces, $\mu \lesssim \mu + \tau$ y $\tau \lesssim \mu + \tau$.*

3.1.1 — Relación con la cofinalidad y los órdenes η_α

Veamos cómo se comportan los segmentos iniciales y finales en la suma de órdenes.

Corolario 3.15 *Sean $\langle A, \mathtt{r} \rangle$ y $\langle B, \mathtt{s} \rangle$ órdenes parciales con A y B conjuntos disjuntos. Sean $a \in A$ y $b \in B$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones.*

(i) $a{\downarrow}^{A+B} = a{\downarrow}^{A}$.

(ii) $a{\uparrow}^{A+B} = a{\uparrow}^{A} \cup B$.

(iii) $b{\downarrow}^{A+B} = A \cup b{\downarrow}^{B}$.

(iv) $b{\uparrow}^{A+B} = b{\uparrow}^{B}$.

Demostración. Para el inciso (i), supongamos que $x \in a{\downarrow}^{A+B}$, entonces $x <_{A+B} a$. Como $a \in A$, sólo puede ocurrir que $x \, \mathtt{r} \, a$ y, por lo tanto, $x \in a{\downarrow}^{A}$. Ahora supongamos que $x \in a{\downarrow}^{A}$, entonces $x \, \mathtt{r} \, a$ y, por la proposición 3.13, $x <_{A+B} a$. Por lo tanto, $x \in a{\downarrow}^{A+B}$ y entonces $a{\downarrow}^{A+B} = a{\downarrow}^{A}$.

Para el inciso (ii), supongamos que $x \in a{\uparrow}^{A+B}$, entonces $a <_{A+B} x$. Tenemos dos casos $x \in A$ o $x \in B$. Si $x \in A$, $a \, \mathtt{r} \, x$ y así $x \in a{\uparrow}^{A} \cup B$. Si $x \in B$, $x \in a{\uparrow}^{A} \cup B$. En ambos se cumple lo que se quiere. Ahora supongamos que $x \in a{\uparrow}^{A} \cup B$. Si $x \in a{\uparrow}^{A}$, $a \, \mathtt{r} \, x$ y así $a <_{A+B} x$. Si $x \in B$, por definición, $a <_{A+B} x$. En ambos casos, $x \in a{\uparrow}^{A+B}$.

Los incisos (iii) y (iv) son análogos a los incisos anteriores.

$\dashv$

El resultado anterior nos dice que los segmentos iniciales y finales se heredan o simplemente se completan. Esto mismo sucede con los conjuntos $\mathrm{IS}\,(T)$ y $\mathrm{FS}\,(T)$, como se muestra en el siguiente corolario.

Corolario 3.16 *Sean $\langle A, \mathtt{r} \rangle$ y $\langle B, \mathtt{s} \rangle$ órdenes parciales con A y B conjuntos disjuntos. Sean $C \subseteq A$, $D \subseteq B$ y $T \subseteq A \cup B$ tales que $C \neq \varnothing$, $D \neq \varnothing$, $T \cap A \neq \varnothing$ y $T \cap B \neq \varnothing$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones.*

(i) $\mathrm{IS}_{A \cup B}\,(C) = \mathrm{IS}_A\,(C)$.

(ii) $\mathrm{IS}_{A \cup B}\,(D) = A \cup \mathrm{IS}_B\,(D)$.

(iii) $\mathrm{IS}_{A \cup B}\,(T) = \mathrm{IS}_{A \cup B}\,(T \cap B)$.

(iv) $\mathrm{FS}_{A \cup B}\,(D) = \mathrm{FS}_B\,(D)$.

(v) $\mathrm{FS}_{A \cup B}\,(C) = \mathrm{FS}_A\,(C) \cup B$.

(vi) $\mathrm{FS}_{A \cup B}\,(T) = \mathrm{FS}_{A \cup B}\,(T \cap A)$.

Demostración. Para el inciso (i), supongamos que $x \in \mathrm{IS}_{A\cup B}(C)$, así que existe $y \in C$ tal que $x \leq_{A+B} y$. Como $C \subseteq A$, $x \mathtt{r} y$ o $x = y$. Por lo tanto, $x \in \mathrm{IS}_A(C)$. Supongamos que $x \in \mathrm{IS}_A(C)$, de modo que existe $y \in C$ tal que $x \mathtt{r} y$ o $x = y$. Por definición $x \leq_{A+B} y$. Entonces $x \in \mathrm{IS}_{A\cup B}(C)$. Por lo tanto, $\mathrm{IS}_{A\cup B}(C) = \mathrm{IS}_A(C)$.

Para el inciso (ii), supongamos que $x \in \mathrm{IS}_{A\cup B}(D)$, entonces existe $y \in D$ tal que $x \leq_{A+B} y$. Como $y \in B$, $x \in A$ o $x \mathtt{s} y$ o $x = y$. Si $x \mathtt{s} y$ o $x = y$, $x \in \mathrm{IS}_B(D)$. Así que en todos los casos $x \in A \cup \mathrm{IS}_B(D)$. Supongamos que $x \in A \cup \mathrm{IS}_B(D)$. Si $x \in \mathrm{IS}_B(D)$, existe $y \in D$ tal que $x \mathtt{s} y$ o $x = y$. En ambos casos, $x \leq_{A+B} y$. Si $x \in A$, tomemos cualquier $y \in D$, entonces $x \leq_{A+B} y$. De modo que $x \in \mathrm{IS}_{A\cup B}(D)$. Por lo tanto, $\mathrm{IS}_{A\cup B}(D) = A \cup \mathrm{IS}_B(D)$.

Para el inciso (iii), como $T \cap B \subseteq T \subseteq \mathrm{IS}_{A\cup B}(T)$, $\mathrm{IS}_{A\cup B}(T \cap B) \subseteq \mathrm{IS}_{A\cup B}(T)$. Por el inciso anterior, $A \subseteq \mathrm{IS}_{A\cup B}(T \cap B)$, así que $T \cap A \subseteq \mathrm{IS}_{A\cup B}(T \cap B)$. Y como $T \cap B \subseteq \mathrm{IS}_{A\cup B}(T \cap B)$, $T \subseteq \mathrm{IS}_{A\cup B}(T \cap B)$. Entonces $\mathrm{IS}_{A\cup B}(T) \subseteq \mathrm{IS}_{A\cup B}(T \cap B)$. Por lo tanto, $\mathrm{IS}_{A\cup B}(T) = \mathrm{IS}_{A\cup B}(T \cap B)$.

Los incisos (iv), (v) y (vi) son análogos a los anteriores.

$\dashv$

Teorema 3.17 *Sean $\langle A, <_A\rangle$ y $\langle B, <_B\rangle$ órdenes lineales no vacíos, con A y B disjuntos. Entonces, la cofinalidad de $A \cup B$ es igual a la cofinalidad de B, y la coinicialidad de $A \cup B$ es igual a la coinicialidad de A.*

Demostración. Sea $W \subseteq B$ cofinal en B e isomorfo a $\mathrm{cf}(B)$. Demostremos que W es cofinal en $A \cup B$. Por el corolario anterior, $\mathrm{IS}_{A\cup B}(W) = A \cup \mathrm{IS}_B(W)$. Como W es cofinal en B, $\mathrm{IS}_B(W) = B$. Así, $\mathrm{IS}_{A\cup B}(W) = A \cup B$, es decir, W es cofinal en $A \cup B$. Entonces $\mathrm{cf}(A \cup B) = \mathrm{cf}(W)$. Por lo tanto, $\mathrm{cf}(A \cup B) = \mathrm{cf}(B)$.

De manera simétrica se demuestra que $\mathrm{coin}(A \cup B) = \mathrm{coin}(A)$.

$\dashv$

La suma de órdenes preserva la coinicialidad de A y la cofinalidad de B. Pareciera que la información de la cofinalidad de A y la coinicialidad de B se perdiera, pero no es así. Para ver esto analicemos cómo son las cortaduras en $A \cup B$.

Corolario 3.18 *Sean $\langle A, <_A\rangle$ y $\langle B, <_B\rangle$ órdenes lineales no vacíos, con A y B disjuntos. Para toda cortadura de A y toda cortadura de B existe una cortadura del mismo tipo en $\langle A \cup B, <_{A+B}\rangle$.*

Demostración. Sea $\langle C, D\rangle$ una cortadura de A de tipo $\langle \alpha, \beta^*\rangle$. Demostremos que $\langle C, D \cup B\rangle$ es una cortadura de $A \cup B$ de tipo $\langle \alpha, \beta^*\rangle$. Notemos que $C \subseteq A \cup B$, $D \cup B \supseteq A \cup B$, $C \cup D \cup B = A \cup B$ y $C <_{A+B} D \cup B$. Por el teorema anterior, $\mathrm{coin}(D \cup B) = \mathrm{coin}(D) = \beta$. Sabemos que $\mathrm{cf}(C) = \alpha$, entonces $\langle C, D \cup B\rangle$ es una cortadura de $A \cup B$ de tipo $\langle \alpha, \beta^*\rangle$.

Sea $\langle E, F\rangle$ una cortadura de B de tipo $\langle \gamma, \delta^*\rangle$. De manera simétrica se demuestra que $\langle A \cup E, F\rangle$ es una cortadura de $A \cup B$ de tipo $\langle \gamma, \delta^*\rangle$.

$\dashv$

La demostración de este corolario nos dice que cada cortadura de A y de B se puede extender a una cortadura de $A \cup B$. De hecho casi todas las cortaduras de $A \cup B$ vienen de una cortadura de A o de B, solamente una cortadura no es de este tipo. Esta cortadura es la formada por A y B, es decir, $\langle A, B\rangle$.

Corolario 3.19 *Sean $\langle A, <_A\rangle$ y $\langle B, <_B\rangle$ órdenes lineales no vacíos, con A y B disjuntos. Toda cortadura de $A \cup B$ es de tipo $\langle \mathrm{cf}\,(A), \mathrm{coin}\,(B)^*\rangle$ o del mismo tipo que una cortadura de A o de B.*

Demostración. Sea $\langle C, D\rangle$ una cortadura de $A \cup B$ de tipo $\langle \alpha, \beta^*\rangle$. Analicemos el conjunto C. Supongamos que $C \subsetneqq A$, demostremos que $\langle C, D \cap A\rangle$ es un cortadura de A de tipo $\langle \alpha, \beta^*\rangle$. Como $\langle C, D\rangle$ es una cortadura de $A \cup B$, $C \cup D = A \cup B$. Como A y B son disjuntos, $C \cup (D \cap A) = A$. Además, $C <_A D \cap A$, $C \neq \varnothing$ y $D \cap A \neq \varnothing$. Entonces $\langle C, D \cap A\rangle$ es una cortadura de A. Por el teorema 3.17, $\mathrm{coin}\,(D \cap A) = \mathrm{coin}\,((D \cap A) \cup B) = \mathrm{coin}\,(D)$. De modo que $\langle C, D \cap A\rangle$ es de tipo $\langle \alpha, \beta^*\rangle$.

Supongamos que $C = A$, entonces $D = B$. Por lo tanto, $\langle C, D\rangle$ es una cortadura de tipo $\langle \mathrm{cf}\,(A), \mathrm{coin}\,(B)^*\rangle$.

Supongamos que $A \subsetneqq C$, veamos que $\langle C \cap B, D\rangle$ es una cortadura de B de tipo $\langle \alpha, \beta^*\rangle$. Como $\langle C, D\rangle$ es cortadura de $A \cup B$ y A y B son disjuntos, $(C \cap B) \cup D = B$. Además, $C \cap B <_B D$, $C \cap B \neq \varnothing$ y $D \neq \varnothing$. Así que $\langle C \cap B, D\rangle$ es una cortadura de B. Por el teorema 3.17, $\mathrm{cf}\,(C \cap B) = \mathrm{cf}\,(A \cup (C \cap B)) = \mathrm{cf}\,(C)$. Por lo tanto, $\langle C \cap B, D\rangle$ es de tipo $\langle \alpha, \beta^*\rangle$.

$\dashv$

La demostración del corolario nos dice que toda cortadura de $A \cup B$ es una extensión de una cortadura de A o de B, o es la cortadura $\langle A, B\rangle$. Además, podemos deducir el resultado que buscamos: la cofinalidad de A y la coinicialidad de B no se pierden, pues siempre podremos encontrar una cortadura de tipo $\langle \mathrm{cf}\,(A), \mathrm{coin}\,(B)^*\rangle$. Resumamos estos resultados en los siguientes dos teoremas.

Teorema 3.20 *Sean $\langle A, <_A\rangle$ y $\langle B, <_B\rangle$ órdenes lineales no vacíos, con A y B disjuntos. Sean $\langle C, D\rangle$ una cortadura de A y $\langle E, F\rangle$ una cortadura de B. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones.*

(i) *El par $\langle C, D \cup B\rangle$ es una cortadura de $A \cup B$ del mismo tipo que $\langle C, D\rangle$.*

(ii) *El par $\langle A, B\rangle$ es una cortadura de $A \cup B$ de tipo $\langle \mathrm{cf}\,(A), \mathrm{coin}\,(B)^*\rangle$.*

(iii) *El par $\langle A \cup E, F\rangle$ es una cortadura de $A \cup B$ del mismo tipo que $\langle E, F\rangle$.*

Teorema 3.21 *Sean $\langle A, <_A\rangle$ y $\langle B, <_B\rangle$ órdenes lineales no vacíos, con A y B disjuntos. Sea $\langle C, D\rangle$ una cortadura de $A \cup B$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones.*

(i) *Si $C \subsetneqq A$, $\langle C, D \cap A\rangle$ es una cortadura de A del mismo tipo que $\langle C, D\rangle$.*

(ii) *Si $C = A$, entonces $D = B$ y $\langle C, D\rangle$ es una cortadura de tipo $\langle \mathrm{cf}\,(A), \mathrm{coin}\,(B)^*\rangle$.*

(iii) *Si* $A \subsetneq C$, $\langle C \cap B, D\rangle$ *es una cortadura de* B *del mismo tipo que* $\langle C, D\rangle$.

Veamos cómo es el entorno de los elementos de $A \cup B$.

Corolario 3.22 *Sean* $\langle A, <_A\rangle$ *y* $\langle B, <_B\rangle$ *órdenes lineales no vacíos, con* A *y* B *disjuntos. Sea* $x \in A \cup B$, *entonces se cumplen las siguientes afirmaciones.*

(i) *Si* $x \in A$ *y tiene entorno* $\langle \alpha, \beta^*\rangle$ *en* A *con* $\beta \neq 0$, *entonces* x *tiene entorno* $\langle \alpha, \beta^*\rangle$ *en* $A \cup B$.

(ii) *Si* $x \in A$ *y tiene entorno* $\langle \alpha, 0\rangle$ *en* A, *entonces* x *tiene entorno* $\langle \alpha, \mathrm{coin}\,(B)^*\rangle$ *en* $A \cup B$.

(iii) *Si* $x \in B$ *y tiene entorno* $\langle 0, \beta^*\rangle$ *en* B, *entonces* x *tiene entorno* $\langle \mathrm{cf}\,(A)\,, \beta^*\rangle$.

(iv) *Si* $x \in B$ *y tiene entorno* $\langle \alpha, \beta^*\rangle$ *en* B *con* $\alpha \neq 0$, *entonces* x *tiene entorno* $\langle \alpha, \beta^*\rangle$.

Es decir, el entorno se preserva excepto en el extremo derecho de A *y el extremo izquierdo de* B.

Demostración.

(i) Supongamos que $x \in A$ y tiene entorno $\langle \alpha, \beta^*\rangle$ en A con $\beta \neq 0$. Como $\beta \neq 0$, $x{\uparrow}^A \neq \varnothing$. Por el corolario 3.15 y el teorema 3.17, tenemos que $\mathrm{cf}\left(x{\downarrow}^{A+B}\right) = \mathrm{cf}\left(x{\downarrow}^{A}\right)$ y $\mathrm{coin}\left(x{\uparrow}^{A+B}\right) = \mathrm{coin}\left(x{\uparrow}^{A}\right)$, por lo tanto, x tiene entorno $\langle \alpha, \beta^*\rangle$ en $A \cup B$.

(ii) Supongamos que $x \in A$ y tiene entorno $\langle \alpha, 0\rangle$ en A. Entonces, por el corolario 3.15, $x{\uparrow}^{A+B} = \varnothing \cup B = B$. Por lo tanto, x tiene entorno $\langle \alpha, \mathrm{coin}\,(B)^*\rangle$ en $A \cup B$.

(iii) Supongamos que $x \in B$ y tiene entorno $\langle 0, \beta^*\rangle$ en B. Por el corolario 3.15, $x{\downarrow}^{A+B} = A \cup \varnothing = A$. Entonces x tiene entorno $\langle \mathrm{cf}\,(A)\,, \beta^*\rangle$ en $A \cup B$.

(iv) Supongamos que $x \in B$ y tiene entorno $\langle \alpha, \beta^*\rangle$ en B con $\alpha \neq 0$. Como $\alpha \neq 0$, $x{\downarrow}^B \neq \varnothing$. Por el corolario 3.15 y el teorema 3.17, tenemos que $\mathrm{cf}\left(x{\downarrow}^{A+B}\right) = \mathrm{cf}\left(x{\downarrow}^{B}\right)$ y $\mathrm{coin}\left(x{\uparrow}^{A+B}\right) = \mathrm{coin}\left(x{\uparrow}^{B}\right)$, por lo tanto, x tiene entorno $\langle \alpha, \beta^*\rangle$ en $A \cup B$.

$\dashv$

Si ambos órdenes lineales no tienen extremos, el entorno de todo elemento de A y de B se conserva en la suma. Estos resultados los usaremos para demostrar que la suma de dos órdenes η_α es un orden η_α.

Teorema 3.23 *Sean* $\langle A, <_A\rangle$ *y* $\langle B, <_B\rangle$ *órdenes* η_α, *con* A *y* B *disjuntos. Entonces el orden* $\langle A \cup B, <_{A+B}\rangle$ *es un orden* η_α.

Demostración. Usaremos el teorema 2.66 que caracteriza a los órdenes η_α para demostrar que el orden $\langle A \cup B, <_{A+B} \rangle$ es un orden η_α. Demostremos primero que todo elemento de $A \cup B$ tiene entorno $\left\langle \omega_\epsilon, \omega_\xi^* \right\rangle$ con ϵ y $\xi \geq \alpha$. Por el teorema 2.66, sabemos que $\langle A, <_A \rangle$ y $\langle B, <_B \rangle$ no tiene extremos. Por el corolario anterior, el entorno de todos los elementos de A y de B se conserva en $A \cup B$. Por el teorema 2.66, todo elemento de A y de B tiene entorno $\left\langle \omega_\epsilon, \omega_\xi^* \right\rangle$ con ϵ y $\xi \geq \alpha$ y, como este entorno se conserva en $A \cup B$, obtenemos lo que queríamos demostrar.

Ahora demostremos que todo hueco de $A \cup B$ tiene entorno $\left\langle \omega_\epsilon, \omega_\xi^* \right\rangle$ con ϵ o $\xi \geq \alpha$. Notemos que $\langle A, B \rangle$ es un hueco de $A \cup B$ de entorno $\langle \mathrm{cf}\,(A), \mathrm{coin}\,(B)^* \rangle$. Por el teorema 2.66 $\mathrm{cf}\,(A) \geq \omega_\alpha$ y $\mathrm{coin}\,(B) \geq \omega_\alpha$, por lo que se cumple lo que queremos. Por el teorema 3.21, cualquier otro hueco de $A \cup B$ tendrá el mismo entorno que un hueco de A o de B. Y por el teorema 2.66, su entorno será $\left\langle \omega_\epsilon, \omega_\xi^* \right\rangle$ con ϵ o $\xi \geq \alpha$, que es lo que queríamos demostrar.

Por último, notemos que $\mathrm{coin}\,(A) \geq \omega_\alpha$ y $\mathrm{cf}\,(B) \geq \omega_\alpha$ por el teorema 2.66, y por el corolario 2.53, $\mathrm{coin}\,(A \cup B)$ y $\mathrm{cf}\,(A \cup B) \geq \omega_\alpha$. Esto último es el tercer inciso de la caracterización de los órdenes η_α. Por lo tanto, $\langle A \cup B, <_{A+B} \rangle$ es un orden η_α.

$\dashv$

3.1.2 — La suma y su relación con otras propiedades de los órdenes

Analicemos cómo se comporta la suma de órdenes y la operación de invertir el orden.

Teorema 3.24 *Sean μ y τ dos tipos de orden. Entonces $(\mu + \tau)^* = \tau^* + \mu^*$.*

Demostración. Sean $\langle A, \mathtt{r} \rangle$ y $\langle B, \mathtt{s} \rangle$ órdenes de tipo μ y τ respectivamente, tales que A y B son disjuntos. Demostremos que $\langle A \cup B, \mathtt{r} + \mathtt{s} \rangle^*$ es isomorfo a $\left\langle B \cup A, \mathtt{s}^{-1} + \mathtt{r}^{-1} \right\rangle$, más aun, son iguales.

Notemos que $A \cup B = B \cup A$. Supongamos que $\langle a, b \rangle \in (\mathtt{r} + \mathtt{s})^{-1}$, así que $\langle b, a \rangle \in \mathtt{r} + \mathtt{s}$. Veamos casos, si $\langle b, a \rangle \in \mathtt{r}$, entonces $\langle a, b \rangle \in \mathtt{r}^{-1}$ y, por lo tanto, $\langle a, b \rangle \in \mathtt{s}^{-1} + \mathtt{r}^{-1}$. Si $\langle b, a \rangle \in \mathtt{s}$, $\langle a, b \rangle \in \mathtt{s}^{-1}$ y así $\langle a, b \rangle \in \mathtt{s}^{-1} + \mathtt{r}^{-1}$. Y si $b \in A$ y $a \in B$, tenemos que $\langle a, b \rangle \in \mathtt{s}^{-1} + \mathtt{r}^{-1}$. Por lo tanto, $(\mathtt{r} + \mathtt{s})^{-1} \subseteq \mathtt{s}^{-1} + \mathtt{r}^{-1}$.

Supongamos que $\langle a, b \rangle \in \mathtt{s}^{-1} + \mathtt{r}^{-1}$. Si $\langle a, b \rangle \in \mathtt{s}^{-1}$, $\langle b, a \rangle \in s$. De modo que $\langle b, a \rangle \in \mathtt{r} + \mathtt{s}$. Si $\langle a, b \rangle \in \mathtt{r}^{-1}$, $\langle b, a \rangle \in r$ y así $\langle b, a \rangle \in \mathtt{r} + \mathtt{s}$. Y si $a \in B$ y $b \in A$, entonces $\langle b, a \rangle \in \mathtt{r} + \mathtt{s}$. En todos los casos, $\langle b, a \rangle \in \mathtt{r} + \mathtt{s}$, así que $\langle a, b \rangle \in (\mathtt{r} + \mathtt{s})^{-1}$. Por lo tanto, $(\mathtt{r} + \mathtt{s})^{-1} = \mathtt{s}^{-1} + \mathtt{r}^{-1}$.

De esta forma, $\langle A \cup B, \mathtt{r} + \mathtt{s} \rangle^* = \left\langle B \cup A, \mathtt{s}^{-1} + \mathtt{r}^{-1} \right\rangle$. Como $\langle A, \mathtt{r} \rangle^*$ y $\langle B, \mathtt{s} \rangle^*$ son representantes de los tipos de orden μ^* y τ^* respectivamente, $\left\langle B \cup A, \mathtt{s}^{-1} + \mathtt{r}^{-1} \right\rangle$ es representante del tipo de orden $\tau^* + \mu^*$. Por lo tanto, $(\mu + \tau)^* = \tau^* + \mu^*$.

$\dashv$

Con este teorema podemos demostrar fácilmente que los enteros son un orden simétrico. Pero primero tenemos que demostrar que el tipo de orden de los números enteros, ζ, es igual al tipo de orden de $\omega^* + \omega$. En la sección 1.2.2, habíamos mencionado esta igualdad sin haber introducido las operaciones de suma y del orden invertido por lo que había quedado pendiente la justificación. En el siguiente teorema se formaliza dicha igualdad.

Teorema 3.25 *El tipo de orden de los enteros ζ es igual al tipo de orden $\omega^* + \omega$.*

Demostración. Sean $\langle A, <_A \rangle$ y $\langle B, <_B \rangle$ representantes de los tipos de orden ω^* y ω respectivamente, tales que A y B son conjuntos disjuntos. Demostremos que $\langle A \cup B, <_{A+B} \rangle$ es de tipo ζ usando la caracterización de los números enteros del teorema 1.41.

Por el teorema 3.11, $\langle A \cup B, <_{A+B} \rangle$ es un orden lineal. Como A y B son no vacíos, $A \cup B$ es no vacío. Como $\mathrm{cf}\,(A \cup B) = \mathrm{cf}\,(B) = \omega$, $A \cup B$ no tiene extremo derecho. Como $\mathrm{coin}\,(A \cup B) = \mathrm{coin}\,(A) = \omega$, no tiene extremo izquierdo.

Sea $C \subseteq A \cup B$ no vacío. Supongamos que está acotado inferiormente. Si $C \cap A = \varnothing$, entonces $C \subseteq B$, y como B es un buen orden, C tiene mínimo. Si $C \cap A \neq \varnothing$, entonces $C \cap A$ tiene mínimo, pues está acotado inferiormente, y por la demostración del teorema 3.12, coincide con el mínimo de C en $A \cup B$. Ahora supongamos que C está acotado superiormente. Si $C \cap B = \varnothing$, tenemos que $C \subseteq A$ y tiene máximo, pues A es un buen orden invertido. Si $C \cap B \neq \varnothing$, entonces $C \cap B$ tiene máximo, pues $C \cap B$ está acotado superiormente, y coincide con el máximo de C en $A \cup B$.

Por lo tanto, $\langle A \cup B, <_{A+B} \rangle$ es un orden lineal no vacío sin extremos tal que todo subconjunto no vacío acotado superiormente tiene máximo y todo subconjunto no vacío inferiormente acotado tiene mínimo. Entonces, $\langle A \cup B, <_{A+B} \rangle$ es de tipo de orden ζ. Así, $\zeta = \omega^* + \omega$.

$\dashv$

Ejemplo 3.26 Por el teorema 3.25, $\zeta = \omega^* + \omega$. Aplicando la operación de invertir el orden en ambos lados de la igualdad, $\zeta^* = (\omega^* + \omega)^*$. Por el teorema 3.24, $(\omega^* + \omega)^* = \omega^* + (\omega^*)^*$. Pero por la proposición 2.9, $(\omega^*)^* = \omega$. Resumiendo, $\zeta^* = \omega^* + \omega = \zeta$. Por lo tanto, $\omega^* + \omega$ es un tipo de orden simétrico.

Por otro lado, veamos que existen órdenes η_α que no son simétricos.

Ejemplo 3.27 Consideremos los tipos de orden λ y η, ambos son órdenes η_0. Notemos que $(\lambda + \eta)^* = \eta^* + \lambda^* = \eta + \lambda$. Pero $\lambda + \eta$ y $\eta + \lambda$ no son iguales, pues $\lambda + \eta$ tiene segmentos iniciales que son completos. Mientras que en $\eta + \lambda$ ningún segmento inicial es completo. Por lo tanto, el orden $\lambda + \eta$ es un orden η_0 no simétrico.

Notemos que λ y η son simétricos, mientras que $\lambda + \eta$ no lo es. Entonces la suma de órdenes no preserva a los órdenes simétricos.

Veamos que tampoco se preserva la densidad en la suma de órdenes.

Ejemplo 3.28 Veamos que la suma de los intervalos $A = [0, 1]$ y $B = [2, 3]$ de $\mathbb{R}$ no es un orden denso. Por el orden que hereda de $\mathbb{R}$, los intervalos $[0, 1]$ y $[2, 3]$ son densos. El orden $\langle A \cup B, < \rangle$ no es denso, pues entre 1 y 2 no existe x tal que $1 <_{A+B} x <_{A+B} 2$.

En el ejemplo anterior, los órdenes además de ser densos, son separables. Como todo orden separable es denso, el ejemplo anterior no es separable. Por lo tanto, ser separable no se preserva en la suma de órdenes.

La propiedad de ser completo tampoco se preserva en la suma de órdenes.

Ejemplo 3.29 Los intervalos $A = (0, 1)$ y $B = (1, 2)$ de $\mathbb{R}$, por el orden que heredan de $\mathbb{R}$ son completos. Veamos que A no tiene supremo en $A \cup B$. Como A no tiene extremo derecho, el supremo no puede ser elemento de A. Sea $x \in B$, como B no tiene extremo izquierdo, existe $y <_B x$. Como $y \in B$, para cualquier $a \in A$ se cumple que $a <_{A+B} y$. Es decir, y es una cota superior de A menor que x. Entonces, x no puede ser el supremo de A. Por lo tanto, $A \cup B$ no es completo.

En el ejemplo anterior usamos dos órdenes lineales continuos, pero $\langle A, B\rangle$ es una cortadura de tipo $\langle \omega, \omega*\rangle$, por lo que $A \cup B$ no es continuo. Así, ser continuo tampoco se preserva en la suma.

3.1.3 — Suma en buenos órdenes

Al igual que para los números naturales, se pueden definir operaciones para los números ordinales. La suma de ordinales se define mediante el teorema de recursión de forma distinta a la suma de órdenes, como se muestra a continuación.

Definición 3.30 Para cada ordinal α definamos con el teorema de recursión ordinal el funcional $\alpha + (\ )$ como

$$\begin{aligned} \alpha + (0) &= \alpha, \\ \alpha + (\mathrm{s}(\beta)) &= \mathrm{s}(\alpha + (\beta)), \text{ y} \\ \alpha + (\gamma) &= \bigcup_{\delta\in\gamma} \alpha + (\delta); \end{aligned}$$

donde β es un ordinal y γ un ordinal límite. Definimos la **suma de ordinales** como $\alpha + \beta = \alpha + (\beta)$.

Aunque la definición no tenga nada que ver con el orden, la suma de ordinales coincide con la suma de tipos de orden. Para distinguir la notación usaremos $+_{ord}$ para referirnos a la suma de ordinales, después de demostrar que coinciden no se hará distinción. La suma coincide, pues si se suma un representante del tipo de orden α con un representante del tipo de orden de un buen orden de tipo β, el resultado será un buen orden de tipo $\alpha +_{ord} \beta$. Recordemos que la suma de órdenes sólo está definida para dos órdenes disjuntos y los ordinales suelen no ser disjuntos. Para la demostración del teorema, usaremos como representantes a $\alpha \times \{0\}$ y $\beta \times \{1\}$. Esta técnica asegura que sean disjuntos y que sea fácil de copiar el orden.

Teorema 3.31 *La suma de ordinales coincide con la suma de tipos de orden en los buenos órdenes.*

Demostración. Procedamos por inducción. Sea α un ordinal. Por definición de suma ordinal $\alpha +_{ord} 0 = \alpha$. Por la proposición 3.9, $\alpha + 0 = \alpha$. Por lo tanto, $\alpha +_{ord} 0 = \alpha + 0$.

Supongamos que $\alpha +_{ord} \beta = \alpha + \beta$. Sea $\langle \alpha \times \{0\}, <_\alpha \rangle$, donde $<_\alpha$ está definido como $\langle x, 0\rangle <_\alpha \langle y, 0\rangle$ si y sólo si $x \in y$; así que $\langle \alpha \times \{0\}, <_\alpha\rangle$ es un representante del tipo de orden α. Sea $\langle \beta \times \{1\}, <_\beta\rangle$, donde $<_\beta$ se define como $\langle x, 1\rangle <_\beta \langle y, 1\rangle$ si y sólo si $x \in y$; entonces $\langle \beta \times \{1\}, <_\beta\rangle$ es un representante del tipo de orden β. Y sea $\left\langle \mathrm{s}(\beta) \times \{1\}, <_{\mathrm{s}(\beta)}\right\rangle$, donde $<_{\mathrm{s}(\beta)}$ está definido como $\langle x, 1\rangle <_{\mathrm{s}(\beta)} \langle y, 1\rangle$ si y sólo si $x \in y$; de modo que $\left\langle \mathrm{s}(\beta) \times \{1\}, <_{\mathrm{s}(\beta)}\right\rangle$ es un representante del tipo de orden $\mathrm{s}(\beta)$.

Como $\alpha +_{ord} \beta = \alpha + \beta$, $\langle(\alpha \times \{0\}) \cup (\beta \times \{1\}), <_{\alpha+\beta}\rangle$ es isomorfo a $\alpha +_{ord} \beta$. Sea f dicho isomorfismo. Demostremos que $\left\langle(\alpha \times \{0\}) \cup (\mathrm{s}(\beta) \times \{1\}, <_{\alpha+\mathrm{s}(\beta)}\right\rangle$ es isomorfo a $\alpha +_{ord} \mathrm{s}(\beta)$ que, por definición, es igual a $\mathrm{s}(\alpha +_{ord} \beta)$. Sea $g = f \cup \langle\langle\beta, 1\rangle, \alpha +_{ord} \beta\rangle$. Como f es un isomorfismo, basta demostrar que si $\langle x, n\rangle <_{\alpha+\mathrm{s}(\beta)} \langle\beta, 1\rangle$, entonces $g(\langle x, n\rangle) \in g(\langle\beta, 1\rangle)$. Pero si $\langle x, n\rangle <_{\alpha+\mathrm{s}(\beta)} \langle\beta, 1\rangle$, $\langle x, n\rangle \in \mathrm{Dom}(f)$. Entonces $g(\langle x, n\rangle) = f(\langle x, n\rangle) \in \alpha +_{ord} \beta$, que es lo que queríamos demostrar. Notemos que g es sobre $\mathrm{s}(\alpha +_{ord} \beta)$, y por la proposición 1.28, g es un isomorfismo. Por lo tanto, dado que el tipo de orden de un buen orden es único, $\alpha +_{ord} \mathrm{s}(\beta) = \alpha + \mathrm{s}(\beta)$.

Sea γ un ordinal límite. Supongamos que para todo $\delta \in \gamma$ se cumple que $\alpha +_{ord} \delta = \alpha + \delta$. Demostremos que $\alpha +_{ord} \gamma = \alpha + \gamma$. Tomemos a $\langle \alpha \times \{0\}, <_\alpha\rangle$ como representante del tipo de orden α y $\langle \gamma \times \{1\}, <_\gamma\rangle$ como representante del tipo de orden γ. Para cada $\delta \in \gamma$, tomemos $\langle \delta \times \{1\}, <_\delta\rangle$ como representante del tipo de orden δ. Los órdenes $<_\alpha$, $<_\gamma$ y $<_\delta$ se definen de manera análoga al caso anterior.

Por suposición, $\langle(\alpha \times \{0\}) \cup (\delta \times \{1\}, <_{\alpha+\delta}\rangle$ es isomorfo a $\alpha +_{ord} \delta$. Por el teorema 1.33, el isomorfismo es único, de modo que para cada δ sea f_δ dicho isomorfismo. Notemos que si β, $\delta \in \gamma$, entonces f_β y f_δ son compatibles, pues $\beta \cap \delta$ es un ordinal y por el mismo teorema 1.33, los isomorfismos tienen que coincidir. Más aun, si $\beta \in \delta$, se tiene que $f_\beta \subsetneq f_\delta$. Sea $g = \bigcup_{\delta \in \gamma} f_\delta$. Como vimos, cada f_δ es compatible, por lo que g es función. El domino de g es la unión de los dominios de cada f_δ, por lo tanto

$$\mathrm{Dom}(g) = \bigcup_{\delta \in \gamma} \mathrm{Dom}(f_\delta) = \bigcup_{\delta \in \gamma} (\alpha \times \{0\}) \cup (\delta \times \{1\}) = (\alpha \times \{0\}) \cup (\gamma \times \{1\}).$$

La imagen de g es la unión de las imágenes de cada f_δ, así que

$$\mathrm{Im}(g) = \bigcup_{\delta \in \gamma} \alpha +_{ord} \delta = \alpha +_{ord} \gamma.$$

Por lo tanto, $g : (\alpha \times \{0\}) \cup (\gamma \times \{1\}) \to \alpha +_{ord} \gamma$ y es sobre.

Veamos que g es un isomorfismo. Por la proposición 1.28, basta demostrar que preserva el orden. Sean $\langle x, m\rangle <_{\alpha+\gamma} \langle y, n\rangle$. Existe δ tal que $\langle x, m\rangle, \langle y, n\rangle \in \mathrm{Dom}(f_\delta)$. Así, $g(\langle x, m\rangle) = f_\delta(\langle x, m\rangle) \in f_\delta(\langle y, n\rangle) = g(\langle y, n\rangle)$. Entonces, g es un isomorfismo. Por lo tanto, dado que el tipo de orden de un buen orden es único, $\alpha +_{ord} \gamma = \alpha + \gamma$.

$\dashv$

Al coincidir la suma de ordinales con la suma de tipos de orden, podemos concluir que la suma de ordinales es asociativa, por el teorema 3.8, y además que el neutro aditivo es el 0, por la proposición 3.9.

Corolario 3.32 *Sean α, β y γ ordinales. Entonces $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$. Es decir, la suma de ordinales es asociativa.*

Corolario 3.33 *Sea α un ordinal, entonces $\alpha + 0 = 0 + \alpha = 0$.*

Al igual que en los números naturales, $\mathrm{s}(\alpha) = \alpha + 1$. Esta igualdad se da por la definición de suma ordinal, pues $\alpha + 1 = \alpha + \mathrm{s}(0) = \mathrm{s}(\alpha + 0)$. Por el corolario anterior, $\mathrm{s}(\alpha + 0) = \mathrm{s}(\alpha)$. Por lo tanto, $\mathrm{s}(\alpha) = \alpha + 1$.

Proposición 3.34 *Sea α un ordinal. Entonces se puede escribir el tipo de orden de $\mathrm{s}(\alpha)$ como la suma de tipos de orden $\alpha + 1$.*

La cofinalidad de la suma de ordinales depende del segundo sumando, por el corolario 2.53.

Corolario 3.35 *Sean α y β ordinales. Si $\beta \neq 0$, entonces $\mathrm{cf}(\alpha + \beta) = \mathrm{cf}(\beta)$.*

La suma de buenos órdenes tiene propiedades muy interesantes que no se cumplen en general. Empecemos con una mejora al corolario 3.14 que nos dará una desigualdad estricta.

Proposición 3.36 *Si $\beta \neq 0$, entonces $\alpha < \alpha + \beta$.*

Demostración. Por inducción sobre β. Supongamos que $\alpha < \alpha + \beta$, demostremos que $\alpha < \alpha + \mathrm{s}(\beta)$. Por definición de suma ordinal, $\alpha + \mathrm{s}(\beta) = \mathrm{s}(\alpha + \beta)$. Entonces, $\alpha + \beta < \mathrm{s}(\alpha + \beta)$. Por transitividad, $\alpha < \alpha + \mathrm{s}(\beta)$. Por último, supongamos que β es un ordinal límite y que para toda $\delta \in \beta$, $\alpha < \alpha + \delta$. Por la definición de suma, $\alpha + \beta = \bigcup_{\delta \in \beta} \alpha + \delta$. Por definición de unión, $\alpha \in \bigcup_{\delta \in \beta} \alpha + \delta$. Por lo tanto, $\alpha < \alpha + \beta$.

$\dashv$

Esta propiedad no se cumple en general, como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.37 Veamos que $\eta + \eta = \eta$. Sean $\langle A, <_A \rangle$ y $\langle B, <_B \rangle$ dos representantes del tipo de orden η tales que A y B sean conjuntos disjuntos. Por el teorema 3.17, $A \cup B$ es sin extremos. Como A y B son conjuntos numerables, $A \cup B$ es numerable. Sólo falta demostrar que $A \cup B$ es denso. Sean $x <_{A+B} y$, entonces $x <_A y$, $y <_B x$, o bien, $x \in A$ y $y \in B$. En los dos primeros casos, como A y B son densos, existe $z \in A \cup B$ tal que $x <_{A+B} z <_{A+B} y$. Si $x \in A$ y $y \in B$, como A no tiene extremos, existe $z \in A$ tal que $x <_A z$. Así que, $x <_{A+B} z$. Por otro lado, $z \in A$ y $b \in B$. De modo que $z <_{A+B} b$. Por lo tanto, $A \cup B$ es denso. Por el teorema 1.45, $\langle A \cup B, <_{A+B} \rangle$ es de tipo η. Así, $\eta + \eta = \eta$ y, por lo tanto, no se cumple que $\eta < \eta + \eta$.

Veamos que la suma ordinal preserva el orden por la izquierda.

Proposición 3.38 *Sean α, β y γ ordinales. Si $\alpha < \gamma$, entonces $\beta + \alpha < \beta + \gamma$.*

Demostración. Por inducción ordinal sobre γ. Si $\gamma = 0$, la afirmación se cumple por vacuidad.

Supongamos que es cierto para γ y demostremos que se cumple para $\mathrm{s}(\gamma)$. Sean α y β ordinales, supongamos que $\alpha < \mathrm{s}(\gamma)$. Entonces $\alpha = \gamma$ o $\alpha < \gamma$. En el primer caso, $\beta+\alpha = \beta+\gamma$ y a su vez $\beta + \gamma < \mathrm{s}(\beta + \gamma) = \beta + \mathrm{s}(\gamma)$. Por lo tanto, $\beta + \alpha < \beta + \mathrm{s}(\gamma)$. En el segundo caso, $\alpha < \gamma$, por hipótesis de inducción, $\beta + \alpha < \beta + \gamma$. Como $\beta + \gamma < \beta + \mathrm{s}(\gamma)$, $\beta + \alpha < \beta + \mathrm{s}(\gamma)$. Por lo tanto, se cumple la afirmación para $\mathrm{s}(\gamma)$.

Ahora supongamos que γ es un ordinal límite. Sea α un ordinal, tal que $\alpha < \gamma$. Sea β un ordinal, entonces $\beta + \mathrm{s}(\alpha) \subseteq \bigcup_{\delta\in\gamma} \beta + \delta$. Por lo tanto, $\beta + \alpha < \beta + \mathrm{s}(\alpha) \leq \beta + \gamma$.

Por inducción ordinal, tenemos que la afirmación es cierta.

$\dashv$

Los buenos órdenes permiten la cancelación de la suma por la izquierda.

Proposición 3.39 *Sean α, β y γ ordinales. Si $\beta + \alpha = \beta + \gamma$, entonces $\alpha = \gamma$.*

Demostración. La hacemos por contrapuesta. Sean α, β y γ ordinales tales que $\alpha \neq \gamma$. Entonces $\alpha < \gamma$ o $\gamma < \alpha$. Usando la proposición anterior, obtenemos que $\beta + \alpha < \beta + \gamma$ o $\beta + \gamma < \beta + \alpha$. Por lo tanto, $\beta + \alpha \neq \beta + \gamma$.

$\dashv$

Esta propiedad no se cumple para órdenes en general.

Ejemplo 3.40 Veamos que $\lambda + (1 + \lambda) = \lambda$. Escojamos como representantes del tipo de orden λ a $\mathbb{R}^-$ y $\mathbb{R}^+$ y como representante del tipo de orden 1 al $\{0_\mathbb{R}\}$. De modo que $\langle \mathbb{R}^- \cup \{0_\mathbb{R}\} \cup \mathbb{R}^+, <_{\lambda+1+\lambda}\rangle$ es exactamente el orden $\langle \mathbb{R}, <_\mathbb{R}\rangle$. Por lo tanto, $\lambda + (1 + \lambda) = \lambda$. Así se cumple que $\lambda + (1 + \lambda) = \lambda + 0$, pero $(1 + \lambda) \neq 0$.

Se puede también demostrar la cancelación de la suma por la izquierda con desigualdades.

Proposición 3.41 *Sean α, β y γ ordinales. Si $\beta + \alpha < \beta + \gamma$, entonces $\alpha < \gamma$.*

Demostración. Por inducción ordinal sobre γ. Si $\gamma = 0$, la hipótesis se convierte en $\beta+\alpha < \beta$ y esto siempre es falso, ya que si $\alpha = 0$ se tendría que $\beta < \beta$ y si $\alpha \neq 0$, $\beta < \beta + \alpha$. Por lo tanto, si $\gamma = 0$, la afirmación se cumple.

Supongamos que es cierto para γ y demostremos que se cumple para $\mathrm{s}(\gamma)$. Sean α y β ordinales tales que $\beta + \alpha < \beta + \mathrm{s}(\gamma)$. Por definición de suma, $\beta + \mathrm{s}(\gamma) = \mathrm{s}(\beta + \gamma)$. Entonces, $\beta + \alpha \leq \beta + \gamma$. Si $\beta + \alpha = \beta + \gamma$, por la cancelación de la suma por la izquierda, $\alpha = \gamma$. Así que $\alpha < \mathrm{s}(\gamma)$. Si $\beta+\alpha < \beta+\gamma$, por la hipótesis de inducción, $\alpha < \gamma$ y, por lo tanto, $\alpha < \mathrm{s}(\gamma)$. Entonces, la afirmación se cumple para $\mathrm{s}(\gamma)$.

Por último, supongamos que γ es un ordinal límite y que para todo $\delta \in \gamma$ se cumple la afirmación. Sean α y β ordinales tales que $\beta + \alpha < \beta + \gamma$. Por la definición de suma y de unión, existe un $\delta \in \gamma$ tal que $\beta + \alpha < \beta + \delta$. Aplicado la hipótesis de inducción, obtenemos que $\alpha < \delta$. Entonces $\alpha < \gamma$.

$\dashv$

3.2 Producto de órdenes

Hemos definido la operación suma en los tipos de orden, la siguiente operación clásica para definir es el producto.

Definición 3.42 Sean A y B conjuntos, $\mathtt{r}$ una relación sobre A y $\mathtt{s}$ una relación sobre B. Definimos la **relación producto $\mathtt{r} \cdot \mathtt{s}$ sobre** $A \times B$, como

$$\langle \langle a_1, b_1 \rangle, \langle a_2, b_2 \rangle \rangle \in \mathtt{r} \cdot \mathtt{s} \text{ si y sólo si } \langle b_1, b_2 \rangle \in \mathtt{s} \vee (b_1 = b_2 \wedge \langle a_1, a_2 \rangle \in \mathtt{r}).$$

A diferencia de la suma, el producto de relaciones no requiere que A y B sean disjuntos.

Veamos qué propiedades preserva la relación producto.

Teorema 3.43 *Sean A y B conjuntos, $\mathtt{r}$ una relación sobre A y $\mathtt{s}$ una relación sobre B. La relación $\mathtt{r} \cdot \mathtt{s}$ cumple lo siguiente.*

(i) *Si $\mathtt{r}$ es reflexiva sobre A o $\mathtt{s}$ es reflexiva sobre B, $\mathtt{r} \cdot \mathtt{s}$ es reflexiva sobre $A \times B$.*

(ii) *Si $\mathtt{r}$ es antirreflexiva sobre A y $\mathtt{s}$ es antirreflexiva sobre B, $\mathtt{r} \cdot \mathtt{s}$ es antirreflexiva sobre $A \times B$.*

(iii) *Si $\mathtt{r}$ y $\mathtt{s}$ son simétricas, $\mathtt{r} \cdot \mathtt{s}$ es simétrica.*

(iv) *Si $\mathtt{r}$ y $\mathtt{s}$ son transitivas, $\mathtt{r} \cdot \mathtt{s}$ es transitiva.*

Demostración.

(i) Sea $\langle a, b \rangle \in A \times B$. Supongamos que $\mathtt{r}$ es reflexiva sobre A, entonces $\langle a, a \rangle \in \mathtt{r}$. Como $b = b$ y $\langle a, a \rangle \in \mathtt{r}$, $\langle \langle a, b \rangle, \langle a, b \rangle \rangle \in \mathtt{r} \cdot \mathtt{s}$. Ahora supongamos que $\mathtt{s}$ es reflexiva sobre B, así que $\langle b, b \rangle \in \mathtt{s}$ y directamente $\langle \langle a, b \rangle, \langle a, b \rangle \rangle \in \mathtt{r} \cdot \mathtt{s}$. En ambos casos demostramos que $\mathtt{r} \cdot \mathtt{s}$ es reflexiva sobre $A \times B$.

(ii) Sea $\langle a, b \rangle \in A \times B$. Como $\mathtt{s}$ es antirreflexiva en B, $\langle b, b \rangle \notin \mathtt{s}$. Como $\mathtt{r}$ es antirreflexiva en A, $\langle a, a \rangle \notin \mathtt{r}$. Por lo tanto, $\langle \langle a, b \rangle, \langle a, b \rangle \rangle \notin \mathtt{r} \cdot \mathtt{s}$.

(iii) Supongamos que $\langle \langle a_1, b_1 \rangle, \langle a_2, b_2 \rangle \rangle \in \mathtt{r} \cdot \mathtt{s}$. Si $\langle b_1, b_2 \rangle \in \mathtt{s}$, entonces $\langle b_2, b_1 \rangle \in \mathtt{s}$, pues $\mathtt{s}$ es simétrica. Por lo tanto, $\langle \langle a_2, b_2 \rangle, \langle a_1, b_1 \rangle \rangle \in \mathtt{r} \cdot s$. Ahora, si $b_1 = b_2$ y $\langle a_1, a_2 \rangle \in \mathtt{r}$, tenemos que $\langle a_2, a_1 \rangle \in \mathtt{r}$, pues $\mathtt{r}$ es simétrica. Por lo tanto, $\langle \langle a_2, b_2 \rangle, \langle a_1, b_1 \rangle \rangle \in \mathtt{r} \cdot s$.

(iv) Supongamos que $\langle\langle a_1, b_1\rangle, \langle a_2, b_2\rangle\rangle \in \mathtt{r}\cdot\mathtt{s}$ y $\langle\langle a_2, b_2\rangle, \langle a_3, b_3\rangle\rangle \in \mathtt{r}\cdot\mathtt{s}$. Supongamos que $\langle b_1, b_2\rangle \in \mathtt{s}$, veamos los casos. Si $\langle b_2, b_3\rangle \in \mathtt{s}$, tenemos que $\langle b_1, b_3\rangle \in \mathtt{s}$, pues $\mathtt{s}$ es transitiva. Por lo tanto, $\langle\langle a_1, b_1\rangle, \langle a_3, b_3\rangle\rangle \in \mathtt{r}\cdot\mathtt{s}$. Si $b_2 = b_3$ y $\langle a_2, a_3\rangle \in \mathtt{r}$, entonces $\langle b_1, b_3\rangle \in \mathtt{s}$. Por lo tanto, $\langle\langle a_1, b_1\rangle, \langle a_3, b_3\rangle\rangle \in \mathtt{r}\cdot\mathtt{s}$. Ahora supongamos que $b_1 = b_2$ y $\langle a_1, a_2\rangle \in \mathtt{r}$, veamos los casos. Si $\langle b_2, b_3\rangle \in \mathtt{s}$, tenemos que $\langle b_1, b_3\rangle \in \mathtt{s}$. Por lo tanto, $\langle\langle a_1, b_1\rangle, \langle a_3, b_3\rangle\rangle \in \mathtt{r}\cdot\mathtt{s}$. Si $b_2 = b_3$ y $\langle a_2, a_3\rangle \in \mathtt{r}$, entonces $b_1 = b_3$ y $\langle a_1, a_3\rangle \in \mathtt{r}$, pues $\mathtt{r}$ es transitiva. Por lo tanto, $\langle\langle a_1, b_1\rangle, \langle a_3, b_3\rangle\rangle \in \mathtt{r}\cdot\mathtt{s}$. Así, $\mathtt{r}\cdot\mathtt{s}$ es transitiva.

$\dashv$

Notemos que la antisimetría se omitió en la lista anterior, pues no siempre es cierto que el producto de dos relaciones antisimétricas resulte una relación antisimétrica. Esto se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.44 Sean $A = \{0, 1\}$, $\mathtt{r} = \{\langle 0, 0\rangle, \langle 0, 1\rangle, \langle 1, 1\rangle\}$, $B = \{0\}$ y $\mathtt{s} = \{\langle 0, 0\rangle\}$. Notemos que $\mathtt{r}$ y $\mathtt{s}$ son antisimétricas. Entonces $A \times B = \{\langle 0, 0\rangle, \langle 1, 0\rangle\}$. Como $\langle 0, 0\rangle \in \mathtt{s}$, $\langle\langle 0, 0\rangle, \langle 1, 0\rangle\rangle \in \mathtt{r}\cdot\mathtt{s}$ y $\langle\langle 1, 0\rangle, \langle 0, 0\rangle\rangle \in \mathtt{r}\cdot\mathtt{s}$. Pero $\langle 0, 0\rangle \neq \langle 0, 1\rangle$, por lo que $\mathtt{r}\cdot\mathtt{s}$ no es antisimétrica.

Este hecho hace imposible que el producto de órdenes reflexivos sea cerrado, más adelante veremos cómo se puede dar la vuelta a este problema.

Corolario 3.45 *Sean A y B conjuntos, $\mathtt{r}$ una relación sobre A y $\mathtt{s}$ una relación sobre B. Si $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ y $\langle B, \mathtt{s}\rangle$ son órdenes parciales, entonces $\langle A \times B, \mathtt{r}\cdot\mathtt{s}\rangle$ es un orden parcial.*

Este corolario nos lleva a definir el producto de órdenes.

Definición 3.46 Sean $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ y $\langle B, \mathtt{s}\rangle$ órdenes parciales. Definimos el **producto de órdenes** como el orden parcial $\langle A \times B, \mathtt{r}\cdot\mathtt{s}\rangle$.

Definición 3.47 Sean τ y μ tipos de orden. Definimos el **producto de tipos de orden**, denotada por $\tau\cdot\mu$, como el tipo de orden de $\langle A \times B, \mathtt{r}\cdot\mathtt{s}\rangle$, donde $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ tiene tipo de orden τ y $\langle B, \mathtt{s}\rangle$ tiene tipo de orden μ.

En el caso de órdenes usaremos $<_{A\cdot B}$ para denotar $\mathtt{r}\cdot\mathtt{s}$ cuando más convenga.

Veamos que está bien definido el producto de tipos de orden.

Proposición 3.48 *Sean τ y μ tipos de orden. Sean $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ y $\langle A', \mathtt{r}'\rangle$ órdenes de tipo τ; y $\langle B, \mathtt{s}\rangle$ y $\langle B', \mathtt{s}'\rangle$ órdenes de tipo μ. Entonces $\langle A \times B, \mathtt{r}\cdot\mathtt{s}\rangle$ es isomorfo a $\langle A' \times B', \mathtt{r}'\cdot\mathtt{s}'\rangle$.*

Demostración. Sean $f : A \to A'$ y $g : B \to B'$ isomorfismos. Definamos $h : A \times B \to A' \times B'$ como $h(\langle a, b\rangle) = \langle f(a), g(b)\rangle$, h es el isomorfismo buscado.

$\dashv$

Demostremos que el producto de tipos de orden es asociativo.

Teorema 3.49 *Sean μ, ν y τ tipos de orden. Entonces $(\mu\cdot\nu)\cdot\tau = \mu\cdot(\nu\cdot\tau)$.*

Demostración. Sean $\langle A, \mathtt{r}\rangle$, $\langle B, \mathtt{s}\rangle$ y $\langle C, \mathtt{p}\rangle$ representantes de los tipos de orden μ, ν y τ respectivamente. Sea $f : (A \times B) \times C \to A \times (B \times C)$ definida como $f(\langle\langle a, b\rangle, c\rangle) = \langle a, \langle b, c\rangle\rangle$. Esta función es un isomorfismo entre $\langle (A \times B) \times C, (\mathtt{r} \cdot \mathtt{s}) \cdot \mathtt{p}\rangle$ y $\langle A \times (B \times C), \mathtt{r} \cdot (\mathtt{s} \cdot \mathtt{p})\rangle$.

$\dashv$

Veamos cuál es el neutro del producto de tipos de orden.

Proposición 3.50 *El producto de tipos de orden tiene neutro, es decir, existe un tipo de orden ν tal que para todo tipo de orden τ se cumple que $\tau \cdot \nu = \nu \cdot \tau = \tau$.*

Demostración. Sea $U = \{\varnothing\}$ y $\mathtt{u} = \varnothing$. Sea $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ un representante del tipo de orden τ. Demostremos que $\langle A \times U, \mathtt{r} \cdot \mathtt{u}\rangle \cong \langle U \times A, \mathtt{u} \cdot \mathtt{r}\rangle \cong \langle A, \mathtt{r}\rangle$. Sean $f : A \to A \times U$ y $g : A \to U \times A$ definidas como $f(a) = \langle a, \varnothing\rangle$ y $g(a) = \langle \varnothing, a\rangle$. Claramente f y g son biyectivas. Veamos que son isomorfismos.

Supongamos que $a \,\mathtt{r}\, b$. Entonces $\langle a, \varnothing\rangle <_{A \cdot U} \langle b, \varnothing\rangle$ y $f(a) <_{A \cdot U} f(b)$. Ahora supongamos que $f(a) <_{A \cdot U} f(b)$, entonces $\langle a, \varnothing\rangle <_{A \cdot U} \langle b, \varnothing\rangle$. Como no se cumple que $\varnothing \,\mathtt{u}\, \varnothing$, $a \,\mathtt{r}\, b$. Por lo tanto, f es un isomorfismo.

Supongamos que $a \,\mathtt{r}\, b$, así que $\langle \varnothing, a\rangle <_{U \cdot A} \langle \varnothing, b\rangle$. Entonces $g(a) <_{U \cdot A} g(b)$. Ahora supongamos que $g(a) <_{U \cdot A} g(b)$, de modo que $\langle \varnothing, a\rangle <_{U \cdot A} \langle \varnothing, b\rangle$. Como no se cumple que $\varnothing \,\mathtt{u}\, \varnothing$, $a \,\mathtt{r}\, b$. Por lo tanto, g es un isomorfismo.

Observemos que el orden $\langle U, \mathtt{u}\rangle$ es de tipo de orden 1.

$\dashv$

Cuando alguno de los órdenes es el vacío, el producto se anula, es decir, nos queda el orden vacío.

Ejemplo 3.51 Sea $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ un orden parcial. Veamos que $\langle A \times \varnothing, <_{A \cdot \varnothing}\rangle$ y $\langle \varnothing \times A, <_{\varnothing \cdot A}\rangle$ son el orden 0. Por la definición de producto cartesiano, $A \times \varnothing = \varnothing$ y $\varnothing \times A = \varnothing$. Por lo que, $<_{A \cdot \varnothing} = \varnothing$ y $<_{\varnothing \cdot A} = \varnothing$. Ambos órdenes son el orden $\langle \varnothing, \varnothing\rangle$, que es de tipo de orden 0.

Así, el neutro del producto es el 1, mientras que 0 anula el producto.

Al igual que en la suma de órdenes, el producto no es conmutativo. Veamos a continuación un ejemplo.

Ejemplo 3.52 Consideremos los tipos de orden η y 2. Escojamos como representante del tipo de orden η a $\langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}}\rangle$ y como representante del tipo de orden 2 a $\langle 2, \in\rangle$. Veamos que $2 \cdot \eta$ no es denso, para esto fijémonos en los pares ordenados $\langle 0, 0\rangle$ y $\langle 1, 0\rangle$. Notemos que $0 = 0$ y $0 \in 1$, por lo tanto, $\langle 0, 0\rangle <_{2 \cdot \mathbb{Q}} \langle 1, 0\rangle$. Si existiera un par $\langle x, y\rangle$ tal que $\langle 0, 0\rangle <_{2 \cdot \mathbb{Q}} \langle x, y\rangle <_{2 \cdot \mathbb{Q}} \langle 1, 0\rangle$, entonces $y = 0$ y $0 \in x \in 1$, pero esto último no puede pasar. Por lo tanto, $2 \cdot \eta$ no es denso.

Ahora veamos que $\eta \cdot 2$ sí es denso. Sean $\langle a_1, b_1\rangle$, $\langle a_2, b_2\rangle \in \mathbb{Q} \times 2$ tales que $\langle a_1, b_1\rangle <_{\mathbb{Q} \cdot 2} \langle a_2, b_2\rangle$. Si $b_1 \in b_2$, como $\mathbb{Q}$ no tiene extremo derecho, existe $x \in \mathbb{Q}$ tal que $a_1 <_{\mathbb{Q}} x$. Por lo tanto, $\langle a_1, b_1\rangle <_{\mathbb{Q} \cdot 2} \langle x, b_1\rangle <_{\mathbb{Q} \cdot 2} \langle a_2, b_2\rangle$. Si $b_1 = b_2$ y $a_1 <_{\mathbb{Q}} a_2$, como $\mathbb{Q}$ es denso, existe

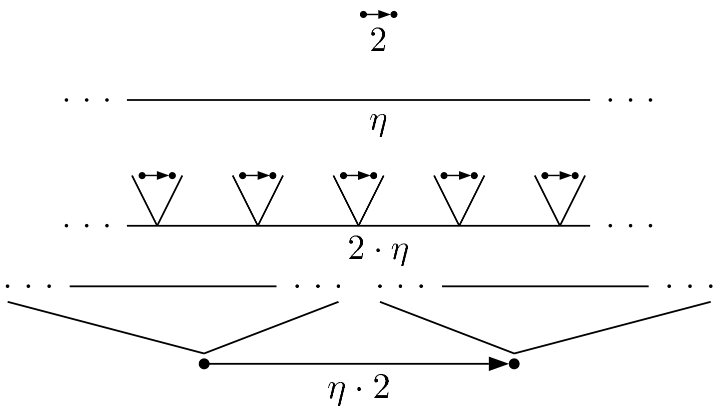

Figura 3.4: Representaciones gráficas de los órdenes $2 \cdot \eta$ y $\eta \cdot 2$.

$x \in \mathbb{Q}$ tal que $a_1 <_{\mathbb{Q}} x <_{\mathbb{Q}} a_2$. Por lo tanto, $\langle a_1, b_1\rangle <_{\mathbb{Q}\cdot 2} \langle x, b_1\rangle <_{\mathbb{Q}\cdot 2} \langle a_2, b_2\rangle$. Así $\eta \cdot 2$ es denso, y entonces $2 \cdot \eta \neq \eta \cdot 2$.

Por lo que el producto de tipos de orden no es conmutativo. En la figura 3.4 se muestran las representaciones gráficas de los órdenes $2 \cdot \eta$ y $\eta \cdot 2$.

Una forma de visualizar el producto de órdenes $\langle A \times B, \mathtt{r} \cdot \mathtt{s}\rangle$ es sustituir cada elemento del orden B por una copia del orden A, un ejemplo de esto se muestra en la figura 3.4. Si los órdenes no son vacíos, podremos encontrar una copia de cada uno de los órdenes originales en el producto.

Teorema 3.53 *Sean μ y τ dos tipos de órdenes. Si $\tau \neq 0$, entonces $\mu \lesssim \mu \cdot \tau$ y $\mu \lesssim \tau \cdot \mu$.*

Demostración. Sean $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ y $\langle B, \mathtt{s}\rangle$ representantes de los tipos de orden μ y τ respectivamente. Como $\langle B, \mathtt{s}\rangle \not\cong \langle 0, \in\rangle$, $B \neq \varnothing$. Sean $b_0 \in B$, $f : A \to A \times B$ y $g : A \to B \times A$, definidas como $f(a) = \langle a, b_0\rangle$ y $g(a) = \langle b_0, a\rangle$. Entonces, f y g son los encajes buscados.

Entonces $\mu \lesssim \mu \cdot \tau$ y $\mu \lesssim \tau \cdot \mu$.

$\dashv$

El producto de órdenes preserva a los órdenes lineales, es decir, el producto de órdenes lineales da como resultado un orden lineal. Esto se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 3.54 *Sean $\langle A, <_A\rangle$ y $\langle B, <_B\rangle$ órdenes lineales. Entonces, $\langle A \times B, <_{A\cdot B}\rangle$ es un orden lineal.*

Demostración. Por el corolario 3.45, $\langle A \times B, <_{A\cdot B}\rangle$ es un orden parcial, basta demostrar que es tricotómico. Sean $\langle a_1, b_1\rangle, \langle a_2, b_2\rangle \in A \times B$. Supongamos que $\langle a_1, b_1\rangle \not<_{A\cdot B} \langle a_2, b_2\rangle$ y $\langle a_2, b_2\rangle \not<_{A\cdot B} \langle a_1, b_1\rangle$, entonces se cumple que $b_1 \not<_B b_2$, y que $b_1 \neq b_2$ o $a_1 \not<_A a_2$; y también que $b_2 \not<_B b_1$, y $b_2 \neq b_1$ o $a_2 \not<_A a_1$. Como $\langle B, <_B\rangle$ es un orden lineal y $b_1 \not<_B b_2$ y $b_2 \not<_B b_1$, $b_1 = b_2$. De modo que, $a_1 \not<_A a_2$ y $a_2 \not<_A a_1$. Por lo tanto, $a_1 = a_2$. Así, $\langle a_1, b_1\rangle = \langle a_2, b_2\rangle$, que es lo que se quería demostrar. Entonces, $\langle A \times B, <_{A\cdot B}\rangle$ es un orden lineal.

$\dashv$

El producto de órdenes también preserva a los buenos órdenes.

Teorema 3.55 *Sean $\langle A, <_A\rangle$ y $\langle B, <_B\rangle$ buenos órdenes. Entonces $\langle A \times B, <_{A\cdot B}\rangle$ es un buen orden.*

Demostración. Sea $C \subseteq A \times B$ no vacío. Definamos el conjunto $C_B \subseteq B$ como

$$C_B = \{b \in B : \exists a \in A(\langle a, b\rangle \in C)\}.$$

Como C es no vacío, existe $\langle x, y\rangle \in C$. Entonces $y \in C_B$ y, por lo tanto, C_B es no vacío. Como $\langle B, <_B\rangle$ es un buen orden, sea b_0 el $<_B$-mínimo de C_B. Definamos el conjunto $C_A \subseteq A$ como

$$C_A = \{a \in A : \langle a, b_0\rangle \in C\}.$$

Como $b_0 \in C_B$, existe $x \in A$ tal que $\langle x, b_0\rangle \in C$. De modo que $x \in C_A$ y así C_A es no vacío. Como $\langle A, <_A\rangle$ es un buen orden, sea a_0 el $<_A$-mínimo de C_A.

Veamos que $\langle a_0, b_0\rangle$ es el mínimo de C. Sea $\langle a, b\rangle \in C$, así que $b \in C_B$. Como b_0 es el $<_B$-mínimo de C_B, $b_0 \leq_B b$. Si $b_0 <_B b$, entonces $\langle a_0, b_0\rangle <_{A\cdot B} \langle a, b\rangle$. Si $b_0 = b$, tenemos que $a \in C_A$. Como a_0 es el $<_A$-mínimo de C_A, $a_0 \leq_A a$. Si $a_0 <_A a$, entonces $\langle a_0, b_0\rangle <_{A\cdot B} \langle a, b\rangle$. Si $a_0 = a$, $\langle a_0, b_0\rangle = \langle a, b\rangle$. En todos los casos $\langle a_0, b_0\rangle \leq_{A\cdot B} \langle a, b\rangle$. De modo que $\langle a_0, b_0\rangle$ es el $<_{A\cdot B}$-mínimo de C. Por lo tanto, $\langle A \times B, <_{A\cdot B}\rangle$ es un buen orden.

$\dashv$

3.2.1 — Relación con la cofinalidad y los órdenes η_α

Veamos cómo se comportan los segmentos iniciales y finales en el producto de órdenes.

Proposición 3.56 *Sean $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ y $\langle B, \mathtt{s}\rangle$ órdenes parciales. Sea $\langle a, b\rangle \in A \times B$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones.*

(i) $\langle a, b\rangle{\downarrow}^{A\cdot B} = \big(A \times b{\downarrow}^B\big) \cup \big(a{\downarrow}^A \times \{b\}\big)$.

(ii) $\langle a, b\rangle{\uparrow}^{A\cdot B} = \big(A \times b{\uparrow}^B\big) \cup \big(a{\uparrow}^A \times \{b\}\big)$.

Demostración. Para el inciso (i), sea $\langle x, y\rangle \in A \times B$. Supongamos que $\langle x, y\rangle \in \langle a, b\rangle{\downarrow}^{A\cdot B}$, entonces $\langle x, y\rangle <_{A\cdot B} \langle a, b\rangle$. Tenemos dos casos $y <_B b$, o $y = b$ y $x <_A a$. En el primer caso, se tiene que $y \in b{\downarrow}^B$. Como $x \in A$, $\langle x, y\rangle \in A \times b{\downarrow}^B$. Para el segundo caso, $x \in a{\downarrow}^A$. Como $y = b$, $\langle x, y\rangle \in a{\downarrow}^A \times \{b\}$. En ambos casos $\langle x, y\rangle \in \big(A \times b{\downarrow}^B\big) \cup \big(a{\downarrow}^A \times \{b\}\big)$. Por lo tanto, $\langle a, b\rangle{\downarrow}^{A\cdot B} \subseteq \big(A \times b{\downarrow}^B\big) \cup \big(a{\downarrow}^A \times \{b\}\big)$.

Supongamos que $\langle x, y\rangle \in \big(A \times b{\downarrow}^B\big) \cup \big(a{\downarrow}^A \times \{b\}\big)$. Si $\langle x, y\rangle \in A \times b{\downarrow}^B$, entonces $y \in b{\downarrow}^B$, es decir, $y <_B b$. Por lo tanto, $\langle x, y\rangle <_{A\cdot B} \langle a, b\rangle$. Si $\langle x, y\rangle \in a{\downarrow}^A \times \{b\}$, tenemos que $x \in a{\downarrow}^A$ y

$y = b$. Como $x \in a{\downarrow}^A$, $x <_A a$. Por lo tanto, $\langle x, y\rangle <_{A\cdot B} \langle a, b\rangle$. En ambos casos tenemos que $\langle x, y\rangle \in \langle a, b\rangle {\downarrow}^{A\cdot B}$. De modo que $\langle a, b\rangle {\downarrow}^{A\cdot B} = \left(A \times b{\downarrow}^B\right) \cup \left(a{\downarrow}^A \times \{b\}\right)$.

El inciso (ii) es dual al inciso (i).

⊣

En el producto de órdenes, calcular los conjuntos IS (T) y FS (T) se vuelve más complicado que en la suma. No se puede llegar a un resultado como el del corolario 3.16 de la suma de órdenes, pero sí se puede determinar la cofinalidad y la coinicialidad del producto de órdenes.

Teorema 3.57 *Sean $\langle A, <_A\rangle$ y $\langle B, <_B\rangle$ órdenes lineales no vacíos. Si* $\mathrm{cf}\,(B) = 1$*, entonces* $\mathrm{cf}\,(A \times B) = \mathrm{cf}\,(A)$*. De manera simétrica, si* $\mathrm{coin}\,(B) = 1$*, entonces* $\mathrm{coin}\,(A \times B) = \mathrm{coin}\,(A)$.

Demostración. Supongamos que $\mathrm{cf}\,(B) = 1$, entonces B tiene un extremo derecho, digamos b_0.

Sea $W \subseteq A$ cofinal e isomorfo a $\mathrm{cf}\,(A)$. Como A es no vacío, W es no vacío. Sea $w_0 \in W$. Sea $T = W \times \{b_0\}$, veamos que T es cofinal en $A \times B$. Sea $\langle x, y\rangle \in A \times B$. Como b_0 es el extremo derecho de B, $y \leq_B b_0$. Si $y <_B b_0$, $\langle x, y\rangle <_{A\cdot B} \langle w_0, b_0\rangle$. Así que $\langle x, y\rangle \in \mathrm{IS}_{A\cdot B}\,(T)$. Si $y = b_0$, como W es cofinal en A, existe $w \in W$ tal que $x \leq_A w$. De modo que $\langle x, y\rangle \leq_{A\cdot B} \langle w, b_0\rangle$. Por lo tanto, $\langle x, y\rangle \in \mathrm{IS}_{A\cdot B}\,(T)$. Así, $A \times B \subseteq \mathrm{IS}_{A\cdot B}\,(T)$, es decir, T es cofinal en $A \times B$. Entonces, $\mathrm{cf}\,(A \times B) = \mathrm{cf}\,(T)$. Por lo tanto, $\mathrm{cf}\,(A \times B) = \mathrm{cf}\,(A)$.

De manera simétrica se demuestra para la coinicialidad.

⊣

Teorema 3.58 *Sean $\langle A, <_A\rangle$ y $\langle B, <_B\rangle$ órdenes lineales no vacíos. Si* $\mathrm{cf}\,(B) \geq \omega$*, entonces* $\mathrm{cf}\,(A \times B) = \mathrm{cf}\,(B)$*. De manera simétrica, si* $\mathrm{coin}\,(B) \geq \omega$*, entonces* $\mathrm{coin}\,(A \times B) = \mathrm{coin}\,(B)$.

Demostración. Supongamos que $\mathrm{cf}\,(B) \geq \omega$. Sea $S \subseteq B$ cofinal e isomorfo a $\mathrm{cf}\,(B)$. Como A es no vacío, sea $a_0 \in A$. Definamos $T = \{a_0\} \times S$, por lo tanto, T es isomorfo a S y $T \subseteq A \times B$ cuya cofinalidad es igual a la cofinalidad de B. Veamos que T es cofinal en $A \times B$. Sea $\langle x, y\rangle \in A \times B$. Como $y \in B$ y S es cofinal en B, existe $s_1 \in S$ tal que $y \leq_B s_1$. Como $\mathrm{cf}\,(B) \geq \omega$, existe $s_2 \in S$ tal que $s_1 <_B s_2$. Entonces $\langle x, y\rangle <_{A\cdot B} \langle a_0, s_2\rangle$ y así $\langle x, y\rangle \in \mathrm{IS}_{A\cdot B}\,(T)$. Por lo tanto, T es cofinal en $A \times B$, de modo que $\mathrm{cf}\,(A \times B) = \mathrm{cf}\,(T)$.

Entonces, $\mathrm{cf}\,(A \times B) = \mathrm{cf}\,(B)$.

De manera simétrica se demuestra para la coinicialidad.

⊣

Veamos que el producto de órdenes preserva a los órdenes η_α.

Teorema 3.59 *Sean $\langle A, <_A\rangle$ y $\langle B, <_B\rangle$ órdenes η_α. Entonces el orden $\langle A \times B, <_{A\cdot B}\rangle$ es un orden η_α.*

Demostración. Veamos que $\langle A \times B, <_{A\cdot B}\rangle$ cumple la caracterización de los órdenes η_α. Sea $\langle a, b\rangle \in A \times B$, demostremos que $\langle a, b\rangle$ tiene entorno $\left\langle \omega_\epsilon, \omega^*_\xi \right\rangle$ con ϵ y $\xi \geq \alpha$. Por la proposición 3.56, $\langle a,b\rangle\downarrow^{A\cdot B} = \left(A\times b\downarrow^{B}\right)\cup\left(a\downarrow^{A}\times\{b\}\right)$, de modo que la cf $\left(\langle a,b\rangle\downarrow^{A\cdot B}\right) = \mathrm{cf}\left(a\downarrow^{A}\right)$. Como $\langle A,<_A\rangle$ es un orden η_α, cf $\left(a\downarrow^{A}\right) = \omega_\epsilon \geq \omega_\alpha$. Por otro lado, $\langle a,b\rangle\uparrow^{A\cdot B} = \left(A\times b\uparrow^{B}\right)\cup\left(a\uparrow^{A}\times\{b\}\right)$, entonces coin $\left(\langle a,b\rangle\uparrow^{A\cdot B}\right) = \mathrm{coin}\left(a\uparrow^{A}\right)$. Como $\langle A,<_A\rangle$ es un orden η_α, coin $\left(a\uparrow^{A}\right) = \omega_\xi \geq \omega_\alpha$. Por lo tanto, el entorno de $\langle a,b\rangle$ es $\left\langle \omega_\epsilon,\omega_\xi^*\right\rangle$ con ϵ y $\xi\geq\alpha$.

Sea $\langle C,D\rangle$ un hueco de $A\times B$ con entorno $\left\langle \omega_\epsilon,\omega_\xi^*\right\rangle$. Veamos que ϵ o $\xi\geq\alpha$. Definamos los conjuntos C_B, $D_B\subseteq B$ como sigue:

$$\begin{aligned} C_B &= \{b\in B : \exists a\in A(\langle a,b\rangle\in C)\}, \text{ y}\\ D_B &= \{b\in B : \exists a\in A(\langle a,b\rangle\in D)\}. \end{aligned}$$

Tenemos dos casos, $C_B\cap D_B$ es no vacío o es vacío. Si $C_B\cap D_B\neq\varnothing$, como $C<_{A\cdot B} D$, tenemos que en la intersección sólo hay un elemento, digamos b_0. Definamos los conjuntos E, $F\subseteq A$ como sigue:

$$\begin{aligned} E &= \{a\in A : \langle a,b_0\rangle\in C\}, \text{ y}\\ F &= \{a\in A : \langle a,b_0\rangle\in D\}. \end{aligned}$$

Veamos que $E\times\{b_0\}$ es un segmento final de C y $F\times\{b_0\}$ es un segmento inicial de D. Por definición de E, $E\times\{b_0\}\subseteq C$. Sean $\langle x,y\rangle$, $\langle w,z\rangle\in C$. Supongamos que $\langle x,y\rangle<_{A\cdot B}\langle w,z\rangle$ y $\langle x,y\rangle\in E\times\{b_0\}$, entonces $y=b_0$. Como $b_0\in D_B$, $z\leq b_0$, ya que $C<_{A\cdot B} D$. De modo que $z=b_0$ y $w\in E$. Por lo tanto, $\langle w,z\rangle\in E\times\{b_0\}$, es decir, $E\times\{b_0\}$ es un segmento final de C. Así que $\mathrm{cf}(E)=\mathrm{cf}(C)=\omega_\epsilon$. De manera simétrica, $F\times\{b_0\}$ es un segmento inicial de D y por lo tanto, $\mathrm{coin}(F)=\mathrm{coin}(D)=\omega_\xi$.

Como $C<_{A\cdot B} D$, $E\times\{b_0\}<_{A\cdot B} F\times\{b_0\}$ y entonces $E<_A F$. Además, si $a\in A$, $\langle a,b_0\rangle\in A\times B$ y, como $A\times B=C\cup D$, $\langle a,b_0\rangle\in C$ o $\langle a,b_0\rangle\in D$. De modo que $a\in E$ o $a\in F$, es decir, $A=E\cup F$. Por lo tanto, $\langle E,F\rangle$ es un hueco de A con entorno $\left\langle \omega_\epsilon,\omega_\xi^*\right\rangle$. Como $\langle A,<_A\rangle$ es un orden η_α, ϵ o $\xi\geq\alpha$, que es lo que queríamos demostrar.

En el segundo caso, $C_B\cap D_B=\varnothing$. Entonces $C=A\times C_B$ y $D=A\times D_B$, pues $A\times B=C\cup D$. Como $C<_{A\cdot B} D$, $C_B<_B D_B$. Como $A\times B=C\cup D$, $B=C_B\cup D_B$. Por lo tanto, $\langle C_B,D_B\rangle$ es una cortadura de B. Analicemos la cofinalidad de C_B y la coinicialidad de D_B. Si $\mathrm{cf}(C_B)=1$, tenemos que $\mathrm{cf}(C)=\mathrm{cf}(A\times C_B)=\mathrm{cf}(A)$, por el teorema 3.57. Si $\mathrm{coin}(D_B)=1$, entonces $\mathrm{coin}(D)=\mathrm{coin}(A\times D_B)=\mathrm{coin}(A)$. Como $\langle A,<_A\rangle$ es un orden η_α, $\mathrm{cf}(A)$ y $\mathrm{coin}(A)$ es mayor o igual que ω_α. Resumiendo, si $\mathrm{cf}(C_B)=1$ o $\mathrm{coin}(D_B)=1$, ϵ o $\xi\geq\alpha$, es decir, obtenemos el resultado.

Supongamos que $\mathrm{cf}(C_B)\geq\omega$ y $\mathrm{coin}(D_B)\geq\omega$, por el teorema 3.58, tenemos que $\mathrm{cf}(C_B)=\mathrm{cf}(A\times C_B)=\mathrm{cf}(C)=\omega_\epsilon$ y $\mathrm{coin}(D_B)=\mathrm{coin}(A\times D_B)=\mathrm{coin}(D)=\omega_\xi$. De modo que, $\langle C_B,D_B\rangle$ es un hueco de B con entorno $\left\langle \omega_\epsilon,\omega_\xi^*\right\rangle$. Como $\langle B,<_B\rangle$ es un orden η_α, ϵ o $\xi\geq\alpha$.

Por lo tanto, todo hueco de $A\times B$ tiene entorno $\left\langle \omega_\epsilon,\omega_\xi^*\right\rangle$, con ϵ o $\xi\geq\alpha$.

Por último, $\mathrm{cf}(A\times B)=\mathrm{cf}(B)\geq\omega_\alpha$ y $\mathrm{coin}(A\times B)=\mathrm{coin}(B)\geq\omega_\alpha$, pues $\langle B,<_B\rangle$ es un orden η_α.

Por el teorema 2.66, $\langle A \times B, <_{A \cdot B} \rangle$ es un orden η_α.

⊣

3.2.2 — Relación con el orden invertido, la suma y otras propiedades

Veamos cómo se relacionan el producto de órdenes y el orden invertido.

Teorema 3.60 *Sean μ y τ tipos de orden. Entonces $(\mu \cdot \tau)^* = \mu^* \cdot \tau^*$.*

Demostración. Sean $\langle A, \mathtt{r} \rangle$ y $\langle B, \mathtt{s} \rangle$ órdenes de tipo μ y τ respectivamente. Demostremos que $(\mathtt{r} \cdot \mathtt{s})^{-1} = \mathtt{r}^{-1} \cdot \mathtt{s}^{-1}$. Sean $\langle a_1, b_1 \rangle$, $\langle a_2, b_2 \rangle \in A \times B$. Procedamos por equivalencias:

$$
\begin{aligned}
\langle a_1, b_1 \rangle \, (\mathtt{r} \cdot \mathtt{s})^{-1} \, \langle a_2, b_2 \rangle \text{ si y sólo si } & \langle a_2, b_2 \rangle \, \mathtt{r} \cdot \mathtt{s} \, \langle a_1, b_1 \rangle \\
\text{si y sólo si } & b_2 \, \mathtt{s} \, b_1 \vee (b_2 = b_2 \wedge a_2 \, \mathtt{r} \, a_1) \\
\text{si y sólo si } & b_1 \, \mathtt{s}^{-1} \, b_2 \vee (b_1 = b_2 \wedge a_1 \, \mathtt{r}^{-1} \, a_2) \\
\text{si y sólo si } & \langle a_1, b_1 \rangle \, \mathtt{r}^{-1} \cdot \mathtt{s}^{-1} \, \langle a_2, b_2 \rangle .
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $(\mathtt{r} \cdot \mathtt{s})^{-1} = \mathtt{r}^{-1} \cdot \mathtt{s}^{-1}$.

Entonces, $\langle A \times B, \mathtt{r} \cdot \mathtt{s} \rangle^* = \left\langle A \times B, \mathtt{r}^{-1} \cdot \mathtt{s}^{-1} \right\rangle$. Como $\langle A, \mathtt{r} \rangle$ y $\langle B, \mathtt{s} \rangle$ son representantes de los tipos de orden μ y τ respectivamente, $\left\langle A, \mathtt{r}^{-1} \right\rangle$ es un representante del tipo de orden μ^* y $\left\langle B, \mathtt{s}^{-1} \right\rangle$ es un representante del tipo de orden τ^*. Entonces, $\left\langle A \times B, \mathtt{r}^{-1} \cdot \mathtt{s}^{-1} \right\rangle$ es un representante del tipo de orden $\mu^* \cdot \tau^*$. Por lo tanto, $(\mu \cdot \tau)^* = \mu^* \cdot \tau^*$.

⊣

El orden invertido de un producto no intercambia los órdenes de lugar como sucede en la suma, por lo que se preservarán los órdenes simétricos.

Proposición 3.61 *Sean μ y τ tipos de orden simétricos. Entonces $\mu \cdot \tau$ es simétrico.*

Demostración. Sean μ y τ tipos de orden simétricos, es decir, $\mu^* = \mu$ y $\tau^* = \tau$. Por el teorema 3.60, $(\mu \cdot \tau)^* = \mu^* \cdot \tau^*$. De modo que $\mu^* \cdot \tau^* = \mu \cdot \tau$. Por lo tanto, $(\mu \cdot \tau)^* = \mu \cdot \tau$, es decir, $\mu \cdot \tau$ es simétrico.

⊣

Veamos que el producto se distribuye por la izquierda sobre la suma.

Teorema 3.62 *Sean τ, μ y σ tipos de orden. Entonces $\tau \cdot (\mu + \sigma) = (\tau \cdot \mu) + (\tau \cdot \sigma)$.*

Demostración. Sean $\langle A, \mathtt{r} \rangle$, $\langle B, \mathtt{s} \rangle$ y $\langle C, \mathtt{p} \rangle$ representantes de los tipos de orden τ, μ y σ respectivamente, tales que B y C son conjuntos disjuntos.

Sabemos que $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

Ahora demostremos que $\mathtt{r} \cdot (\mathtt{s} + \mathtt{p}) = (\mathtt{r} \cdot \mathtt{s}) + (\mathtt{r} \cdot \mathtt{p})$. Sean $\langle x_1, y_1 \rangle$, $\langle x_2, y_2 \rangle \in A \times (B \cup C)$. Para la primera contención, supongamos que $\langle x_1, y_1 \rangle <_{A \cdot (B+C)} \langle x_2, y_2 \rangle$, así que $y_1 <_{B+C} y_2$ o bien $y_1 = y_2$ y $x_1 \, \mathtt{r} \, x_2$.

Supongamos primero que $y_1 <_{B+C} y_2$. Por la definición de suma, tenemos tres casos: $y_1 \,\mathtt{s}\, y_2$, $y_1 \,\mathtt{p}\, y_2$, o bien $y_1 \in B$ y $y_2 \in C$. Si $y_1 \,\mathtt{s}\, y_2$, y_1 y y_2 son elementos de B, por lo tanto, $\langle x_1, y_1\rangle <_{A\cdot B} \langle x_2, y_2\rangle$. Por la definición de suma, $\langle x_1, y_1\rangle <_{(A\cdot B)+(A\cdot C)} \langle x_2, y_2\rangle$. En el segundo caso, y_1, $y_2 \in C$, pues $y_1 \,\mathtt{p}\, y_2$, de este modo $\langle x_1, y_1\rangle <_{A\cdot C} \langle x_2, y_2\rangle$. Así, $\langle x_1, y_1\rangle <_{(A\cdot B)+(A\cdot C)} \langle x_2, y_2\rangle$. Para el tercer caso, $y_1 \in B$ y $y_2 \in C$, entonces $\langle x_1, y_1\rangle \in A \times B$ y $\langle x_2, y_2\rangle \in A \times C$. Por la definición de suma, $\langle x_1, y_1\rangle <_{(A\cdot B)+(A\cdot C)} \langle x_2, y_2\rangle$. En los tres casos llegamos a lo que queríamos demostrar.

Ahora, supongamos que $y_1 = y_2$ y $x_1 \,\mathtt{r}\, x_2$. Como $y_1 \in B \cup C$, tenemos dos casos. Si $y_1 \in B$, tenemos que $\langle x_1, y_1\rangle <_{A\cdot B} \langle x_2, y_2\rangle$. Así, $\langle x_1, y_1\rangle <_{(A\cdot B)+(A\cdot C)} \langle x_2, y_2\rangle$. Y si $y_1 \in C$, entonces $\langle x_1, y_1\rangle <_{A\cdot C} \langle x_2, y_2\rangle$. Por lo tanto, $\langle x_1, y_1\rangle <_{(A\cdot B)+(A\cdot C)} \langle x_2, y_2\rangle$. En ambos casos llegamos a lo que queríamos demostrar.

Por lo tanto, $\mathtt{r} \cdot (\mathtt{s} + \mathtt{p}) \subseteq (\mathtt{r} \cdot \mathtt{s}) + (\mathtt{r} \cdot \mathtt{p})$.

Para la contención contraria, supongamos que $\langle x_1, y_1\rangle <_{(A\cdot B)+(A\cdot C)} \langle x_2, y_2\rangle$. Tenemos tres casos, $\langle x_1, y_1\rangle <_{A\cdot B} \langle x_2, y_2\rangle$, $\langle x_1, y_1\rangle <_{A\cdot C} \langle x_2, y_2\rangle$, o bien, $\langle x_1, y_1\rangle \in A \times B$ y $\langle x_2, y_2\rangle \in A \times C$.

En el primer caso, tenemos que $\langle x_1, y_1\rangle <_{A\cdot B} \langle x_2, y_2\rangle$, de modo que $y_1 <_B y_2$, o bien, $y_1 = y_2$ y $x_1 <_A x_2$. Si $y_1 <_B y_2$, tendríamos que $y_1 <_{B+C} y_2$. Así, $\langle x_1, y_1\rangle <_{A\cdot(B+C)} \langle x_2, y_2\rangle$. Si $y_1 = y_2$ y $x_1 <_A x_2$, entonces y_1, $y_2 \in B \cup C$. Por la definición del producto, $\langle x_1, y_1\rangle <_{A\cdot(B+C)} \langle x_2, y_2\rangle$.

Para el segundo caso, $\langle x_1, y_1\rangle <_{A\cdot C} \langle x_2, y_2\rangle$, entonces $y_1 <_C y_2$, o, $y_1 = y_2$ y $x_1 <_A x_2$. Si $y_1 <_C y_2$, tendríamos que $y_1 <_{B+C} y_2$. Por lo tanto, $\langle x_1, y_1\rangle <_{A\cdot(B+C)} \langle x_2, y_2\rangle$. Si $y_1 = y_2$ y $x_1 <_A x_2$, notemos que y_1, $y_2 \in B \cup C$. Así, $\langle x_1, y_1\rangle <_{A\cdot(B+C)} \langle x_2, y_2\rangle$.

Por último supongamos que $\langle x_1, y_1\rangle \in A \times B$ y $\langle x_2, y_2\rangle \in A \times C$, entonces $y_1 \in B$ y $y_2 \in C$. Por la definición de la suma, $y_1 <_{B+C} y_2$. Y por la definición del producto, $\langle x_1, y_1\rangle <_{A\cdot(B+C)} \langle x_2, y_2\rangle$. Así tenemos que $(\mathtt{r} \cdot \mathtt{s}) + (\mathtt{r} \cdot \mathtt{p}) \subseteq \mathtt{r} \cdot (\mathtt{s} + \mathtt{p})$.

Por lo tanto, $\mathtt{r} \cdot (\mathtt{s} + \mathtt{p}) = (\mathtt{r} \cdot \mathtt{s}) + (\mathtt{r} \cdot \mathtt{p})$.

Entonces, $\left\langle A \times (B \cup C), <_{A\cdot(B+C)}\right\rangle = \left\langle (A \times B) \cup (A \times C), <_{(A\cdot B)+(A\cdot C)}\right\rangle$, y por lo tanto, $\tau \cdot (\mu + \sigma) = (\tau \cdot \mu) + (\tau \cdot \sigma)$.

$\dashv$

Veamos que el producto de órdenes preserva la densidad.

Teorema 3.63 *Sean $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ y $\langle B, \mathtt{s}\rangle$ órdenes densos. Entonces $\langle A \times B, \mathtt{r} \cdot \mathtt{s}\rangle$ es denso.*

Demostración. Sean $\langle a_1, b_1\rangle$, $\langle a_2, b_2\rangle \in A \times B$, supongamos que $\langle a_1, b_1\rangle <_{A\cdot B} \langle a_2, b_2\rangle$. Entonces $b_1 \,\mathtt{s}\, b_2$, o bien, $b_1 = b_2$ y $a_1 \,\mathtt{r}\, a_2$. Si $b_1 \,\mathtt{s}\, b_2$, como $\langle B, \mathtt{s}\rangle$ es denso, existe $b_3 \in B$ tal que $b_1 \,\mathtt{s}\, b_3 \,\mathtt{s}\, b_2$. Por lo tanto, $\langle a_1, b_1\rangle <_{A\cdot B} \langle a_1, b_3\rangle <_{A\cdot B} \langle a_2, b_2\rangle$.

Si $b_1 = b_2$ y $a_1 \,\mathtt{r}\, a_2$, como $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ es denso, existe $a_3 \in A$ tal que $a_1 \,\mathtt{r}\, a_3 \,\mathtt{r}\, a_2$. De modo que $\langle a_1, b_1\rangle <_{A\cdot B} \langle a_3, b_1\rangle <_{A\cdot B} \langle a_2, b_2\rangle$. En ambos casos encontramos a un elemento de $A \times B$ que se encuentra entre ellos. Por lo tanto, $\langle A \cdot B, \mathtt{r} \cdot \mathtt{s}\rangle$ es denso.

$\dashv$

Aún así, si los órdenes son separables, el producto no necesariamente es separable.

Ejemplo 3.64 Consideremos el tipo de orden $\lambda \cdot \lambda$ y $\mathbb{R}$ como representante de λ. Veamos que $\langle \mathbb{R} \times \mathbb{R}, <_{\mathbb{R} \cdot \mathbb{R}} \rangle$ no es separable. Sea $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ denso en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Entonces, para cada real y, existe $\langle w, z \rangle \in D$ tal que $\langle 0, y \rangle <_{\mathbb{R} \cdot \mathbb{R}} \langle w, z \rangle <_{\mathbb{R} \cdot \mathbb{R}} \langle 1, y \rangle$. Por la definición de producto, $z = y$. Por lo tanto, hay al menos tantos pares ordenandos en D como números reales. Entonces, D no es numerable y $\lambda \cdot \lambda$ no es separable.

La propiedad de ser completo tampoco se preserva en el producto de órdenes.

Ejemplo 3.65 Consideremos nuevamente al tipo de orden $\lambda \cdot \lambda$. Tomemos a $\mathbb{R}$ como un representante de λ. Consideremos el conjunto $C = \{0\} \times (0, 1)$. Notemos que $\left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle \in C$, por lo tanto, C es no vacío. Además, $\langle 0, 1 \rangle$ es una cota superior de C. Entonces C es no vacío y superiormente acotado. Veamos que C no tiene supremo.

Sea $\langle a, b \rangle$ una cota superior de C. Entonces $0 <_{\mathbb{R}} b$. Como $\mathbb{R}$ no tiene extremos, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $c <_{\mathbb{R}} a$. Consideremos el par $\langle c, 1 \rangle$. Para llegar a una contradicción supongamos que $\langle a, b \rangle <_{\mathbb{R} \cdot \mathbb{R}} \langle c, 1 \rangle$. En este caso $b <_{\mathbb{R}} 1$, o $b = 1$ y $a <_{\mathbb{R}} c$. Pero no se cumple esto último, así que $b <_{\mathbb{R}} 1$. Como $\mathbb{R}$ es denso, existe $d \in \mathbb{R}$ tal que $b <_{\mathbb{R}} d <_{\mathbb{R}} 1$. Así, $\langle a, b \rangle <_{\mathbb{R} \cdot \mathbb{R}} \langle 0, d \rangle$ y $\langle 0, d \rangle \in C$, lo cual es una contradicción a que $\langle a, b \rangle$ es una cota superior. De modo que $\langle c, 1 \rangle \leq_{\mathbb{R} \cdot \mathbb{R}} \langle a, b \rangle$. Como $c <_{\mathbb{R}} a$, $\langle c, 1 \rangle <_{\mathbb{R} \cdot \mathbb{R}} \langle a, b \rangle$. Demostremos que $\langle c, 1 \rangle$ es una cota superior. Sea $\langle 0, x \rangle \in C$. Como $x \in (0, 1)$, $x <_{\mathbb{R}} 1$. Así, $\langle 0, x \rangle <_{\mathbb{R} \cdot \mathbb{R}} \langle c, 1 \rangle$. Por lo tanto, $\langle c, 1 \rangle$ es una cota superior y $\langle a, b \rangle$ no es la mínima cota superior. Entonces, C no tiene supremo y $\lambda \cdot \lambda$ no es completo.

Recordemos que λ es un orden lineal continuo, y como $\lambda \cdot \lambda$ no es completo, por el teorema 2.61, $\lambda \cdot \lambda$ no es continuo. Por lo tanto, no se preserva la continuidad en el producto.

3.2.3 — Producto en buenos órdenes

En los números ordinales se puede definir una multiplicación de manera similar a como se definió la suma ordinal, esto es mediante el teorema de recursión ordinal.

Definición 3.66 Para cada ordinal α definamos con el teorema de recursión ordinal el funcional $\alpha \cdot (\ )$ como

$$\alpha \cdot (0) = 0, \tag{3.1}$$

$$\alpha \cdot (\mathrm{s}\,(\beta)) = \alpha \cdot (\beta) + \alpha, \text{ y} \tag{3.2}$$

$$\alpha \cdot (\gamma) = \bigcup_{\delta \in \gamma} \alpha \cdot (\delta); \tag{3.3}$$

donde β es un ordinal y γ un ordinal límite. Definimos el **producto de ordinales** como $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot (\beta)$.

Veamos que el producto ordinal y el producto de tipos de orden coinciden. Para distinguir la notación usaremos $\cdot_{ord}$ para referirnos al producto de ordinales, después de demostrar que coinciden no se hará distinción.

Demostremos primero un lema que nos servirá para un caso en el teorema.

Lema 3.67 *Sea α un ordinal. Entonces $0 \cdot_{ord} \alpha = 0$.*

Demostración. La hacemos por inducción. Si $\alpha = 0$, entonces $0 \cdot_{ord} \alpha = 0 \cdot_{ord} 0 = 0$, por la definición del producto.

Supongamos que $0 \cdot_{ord} \alpha = 0$, demostremos que se cumple para $\mathrm{s}(\alpha)$. Por la definición tenemos que $0 \cdot_{ord} \mathrm{s}(\alpha) = (0 \cdot_{ord} \alpha) +_{ord} 0$. Por la hipótesis de inducción, $0 \cdot_{ord} \alpha = 0$, así que $0 \cdot_{ord} \mathrm{s}(\alpha) = 0 +_{ord} 0 = 0$.

Por último, supongamos que α es un ordinal límite y que para todo $\delta \in \alpha$ se cumple que $0 \cdot_{ord} \delta = 0$. Entonces $0 \cdot_{ord} \alpha = \bigcup_{\delta \in \alpha} 0 \cdot_{ord} \delta = \bigcup_{\delta \in \alpha} 0 = 0$.

Por lo tanto, para todo ordinal α se cumple que $0 \cdot_{ord} \alpha = 0$.

$\dashv$

Teorema 3.68 *El producto ordinal coincide con el producto de tipos de orden.*

Demostración. Procedamos por inducción. Sea α un ordinal. Por la definición de producto ordinal, $\alpha \cdot_{ord} 0 = 0$. Por el ejemplo 3.51, sabemos que $\alpha \cdot 0 = 0$. Por lo tanto, $\alpha \cdot_{ord} 0 = \alpha \cdot 0$.

Supongamos que $\alpha \cdot_{ord} \beta = \alpha \cdot \beta$, demostremos que $\mathrm{s}(\beta)$ cumple la afirmación. Por la proposición 3.34, $\mathrm{s}(\beta) = \beta + 1$, entonces $\alpha \cdot \mathrm{s}(\beta) = \alpha \cdot (\beta + 1)$. Por el teorema 3.62, $\alpha \cdot (\beta + 1) = (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot 1)$. Así que $\alpha \cdot \mathrm{s}(\beta) = (\alpha \cdot \beta) + \alpha$. Por la hipótesis de inducción, $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot_{ord} \beta$. Entonces, $\alpha \cdot \mathrm{s}(\beta) = (\alpha \cdot_{ord} \beta) +_{ord} \alpha$, pues la suma ordinal coincide con la suma de tipos de orden. Por la definición de producto ordinal, $(\alpha \cdot_{ord} \beta) +_{ord} \alpha = \alpha \cdot_{ord} \mathrm{s}(\beta)$. Por lo tanto, $\alpha \cdot \mathrm{s}(\beta) = \alpha \cdot_{ord} \mathrm{s}(\beta)$.

Sea γ un ordinal límite. Si $\alpha = 0$, por el lema anterior, $0 \cdot_{ord} \gamma = 0$. Y por el ejemplo 3.51, $0 \cdot \gamma = 0$. Entonces, $\alpha \cdot \gamma = \alpha \cdot_{ord} \gamma$. Supongamos que $\alpha \neq 0$ y para todo $\delta \in \gamma$ se cumple que $\alpha \cdot_{ord} \delta = \alpha \cdot \delta$ y demostremos que $\alpha \cdot_{ord} \gamma = \alpha \cdot \gamma$. Por la hipótesis de inducción, $\alpha \cdot_{ord} \delta = \alpha \cdot \delta$, entonces $\langle \alpha \cdot \delta, <_{\alpha \cdot \delta} \rangle$ es isomorfo a $\alpha \cdot_{ord} \delta$. Como son buenos órdenes, el isomorfismo es único. Así, para cada $\delta \in \gamma$ sea f_δ dicho isomorfismo. Notemos que el dominio de f_δ es $\alpha \times \delta$ y su imagen es $\alpha \cdot_{ord} \delta$. Veamos que las f_δ son funciones compatibles, más aun, forman una cadena de contenciones. Sean β, $\delta \in \gamma$, tales que $\beta < \delta$. De modo que $\langle 0, \beta \rangle \in \mathrm{Dom}(f_\delta)$ y $\langle 0, \beta \rangle \notin \mathrm{Dom}(f_\beta)$, por lo tanto, $f_\delta \neq f_\beta$. Notemos que $\mathrm{Dom}(f_\beta) \cap \mathrm{Dom}(f_\delta) = \mathrm{Dom}(f_\beta)$, pues $\alpha \times \beta \subseteq \alpha \times \delta$. Como f_β es único, f_β y f_δ coinciden en $\alpha \times \beta$. Por lo tanto, $f_\beta \subsetneqq f_\delta$.

Sea $g = \bigcup_{\delta \in \gamma} f_\delta$, por lo anterior, g es función. El dominio de g es la unión de los dominios de cada f_δ, entonces

$$\mathrm{Dom}(g) = \bigcup_{\delta \in \gamma} \mathrm{Dom}(f_\delta) = \bigcup_{\delta \in \gamma} \alpha \times \delta = \alpha \times \bigcup_{\delta \in \gamma} \delta = \alpha \times \gamma.$$

La imagen de g es la unión de las imágenes de cada f_δ, entonces

$$\mathrm{Im}(g) = \bigcup_{\delta \in \gamma} \mathrm{Im}(f_\delta) = \bigcup_{\delta \in \gamma} \alpha \cdot_{ord} \delta = \alpha \cdot_{ord} \gamma.$$

Por lo tanto, $g : \alpha \times \gamma \to \alpha \cdot_{ord} \gamma$ y es sobre.

Veamos que g es un isomorfismo. Por la proposición 1.28, basta demostrar que preserva el orden. Sean $\langle x_1, y_1\rangle <_{\alpha\cdot\beta} \langle x_2, y_2\rangle$. Entonces existe un δ tal que $\langle x_1, y_1\rangle$, $\langle x_2, y_2\rangle \in \mathrm{Dom}\,(f_\delta)$. Entonces

$$g(\langle x_1, y_1\rangle) = f_\delta(\langle x_1, y_1\rangle) \in f_\delta(\langle x_2, y_2\rangle) = g(\langle x_2, y_2\rangle).$$

Así, g es un isomorfismo. Por lo tanto, $\alpha \cdot \gamma = \alpha \cdot_{ord} \gamma$.

Por lo tanto, el producto ordinal y el producto de órdenes coinciden.

$\dashv$

Al coincidir el producto ordinal con el producto de tipos de orden, los resultados anteriores son válidos para el producto ordinal. Recapitulemos algunos de ellos.

Corolario 3.69 *Sean α, β y γ ordinales. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones.*

(i) $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$.

(ii) $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$.

(iii) $\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0$.

(iv) *Si* $\mathrm{cf}\,(\beta) = 1$, $\mathrm{cf}\,(\alpha \cdot \beta) = \mathrm{cf}\,(\alpha)$.

(v) *Si* $\mathrm{cf}\,(\beta) \geq \omega$, $\mathrm{cf}\,(\alpha \cdot \beta) = \mathrm{cf}\,(\beta)$.

(vi) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot \gamma)$.

Nuevamente podremos demostrar más propiedades con los buenos órdenes. Veamos primero que el producto por la izquierda de un ordinal no cero preserva el orden.

Proposición 3.70 *Sean α, β y γ ordinales, de forma que $\beta \neq 0$. Si $\alpha < \gamma$, entonces $\beta \cdot \alpha < \beta \cdot \gamma$.*

Demostración. La hacemos por inducción ordinal sobre γ. Si $\gamma = 0$, entonces la afirmación es cierta por vacuidad.

Supongamos que es cierto para γ y demostremos que se cumple para $\mathrm{s}\,(\gamma)$. Sean α y β ordinales con $\beta \neq 0$. Supongamos que $\alpha < \mathrm{s}\,(\gamma)$, así que $\alpha = \gamma$ o $\alpha < \gamma$. En el primer caso, $\beta \cdot \alpha = \beta \cdot \gamma$, además, $\beta \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma + \beta$, por la proposición 3.36, ya que $\beta \neq 0$. Por lo tanto, $\beta \cdot \alpha < \beta \cdot \mathrm{s}\,(\gamma)$. En el segundo caso, $\alpha < \gamma$, por la hipótesis de inducción, $\beta \cdot \alpha < \beta \cdot \gamma$. Como $\beta \cdot \gamma < \beta \cdot \mathrm{s}\,(\gamma)$, $\beta \cdot \alpha < \beta \cdot \mathrm{s}\,(\gamma)$. Por lo tanto, se cumple la afirmación para $\mathrm{s}\,(\gamma)$.

Supongamos que γ es un ordinal límite y que para todo $\delta \in \gamma$ se cumple la afirmación. Sean α y β ordinales, con $\beta \neq 0$. Supongamos que $\alpha < \gamma$, entonces $\alpha < \mathrm{s}\,(\alpha) < \gamma$. Por la hipótesis de inducción aplicada a $\mathrm{s}\,(\alpha)$, $\beta \cdot \alpha < \beta \cdot \mathrm{s}\,(\alpha)$. Además, $\beta \cdot \mathrm{s}\,(\alpha) \subseteq \bigcup_{\delta\in\gamma} \beta \cdot \delta$, pues $\mathrm{s}\,(\alpha) < \gamma$. De modo que $\beta \cdot \mathrm{s}\,(\alpha) \leq \beta \cdot \gamma$. Por lo tanto, $\beta \cdot \alpha < \beta \cdot \gamma$.

$\dashv$

Al igual que en la suma, los buenos órdenes permiten la cancelación del producto por la izquierda.

Proposición 3.71 *Sean α, β y γ ordinales con $\beta \neq 0$. Si $\beta \cdot \alpha = \beta \cdot \gamma$, entonces $\alpha = \gamma$.*

Demostración. La hacemos por contrapuesta. Sean α, β y γ ordinales con $\beta \neq 0$. Supongamos que $\alpha \neq \gamma$, así que $\alpha < \gamma$ o $\gamma < \alpha$. Por la proposición anterior, tenemos que $\beta \cdot \alpha < \beta \cdot \gamma$

o $\beta \cdot \gamma < \beta \cdot \alpha$. En ambos casos llegamos a que $\beta \cdot \alpha \neq \beta \cdot \gamma$.

$\dashv$

También los ordinales admiten la cancelación del producto por la izquierda en desigualdades.

Corolario 3.72 *Sean α, β y γ ordinales con $\beta \neq 0$. Si $\beta \cdot \alpha < \beta \cdot \gamma$, entonces $\alpha < \gamma$.*

Demostración. La hacemos por contrapuesta. Sean α, β y γ ordinales con $\beta \neq 0$. Supongamos que $\alpha \not< \gamma$, de modo que $\gamma < \alpha$ o $\alpha = \gamma$. Así, $\beta \cdot \gamma < \beta \cdot \alpha$, por la proposición 3.70; o bien, $\beta \cdot \alpha = \beta \cdot \gamma$, pues $\beta \cdot (\ )$ es función. En ambos casos tenemos que $\beta \cdot \alpha \not< \beta \cdot \gamma$.

$\dashv$

3.2.4 — Producto con órdenes reflexivos

Como vimos al principio de la sección, el producto de relaciones no preserva la antisimetría, esto dificulta el producto de órdenes reflexivos. De hecho, en el ejemplo 3.44, donde se muestra que no se preserva la antisimetría, se usaron los órdenes reflexivos $\langle 2, \subseteq \rangle$ y $\langle 1, \subseteq \rangle$.

Esto lo solucionaremos multiplicado un orden reflexivo y un orden estricto de manera adecuada. Aunque en este momento esta solución se vea muy forzada será un caso particular de la generalización de la suma de órdenes que veremos en la siguiente sección.

Proposición 3.73 *Sean $\langle A, \leq_A \rangle$ un orden parcial reflexivo y $\langle B, <_B \rangle$ un orden parcial. Entonces $\langle A \times B, \leq_A \cdot <_B \rangle$ es un orden parcial reflexivo. A la relación $\leq_A \cdot <_B$ la denotaremos como $\leq_{A \cdot B}$.*

Demostración. Demostremos que $\leq_{A \cdot B}$ es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva en $A \times B$.

Por el teorema 3.43, se cumple que es reflexiva sobre $A \times B$, pues $\leq_A$ es reflexiva; y que es transitiva, pues ambas son transitivas. Veamos que es antisimétrica. Supongamos que $\langle a_1, b_1 \rangle \leq_{A \cdot B} \langle a_2, b_2 \rangle$ y $\langle a_2, b_2 \rangle \leq_{A \cdot B} \langle a_1, b_1 \rangle$. Supongamos que $b_1 \neq b_2$. Como $\langle a_1, b_1 \rangle \leq_{A \cdot B} \langle a_2, b_2 \rangle$ y $b_1 \neq b_2$, $b_1 <_B b_2$. Como $\langle a_2, b_2 \rangle \leq_{A \cdot B} \langle a_1, b_1 \rangle$ y $b_1 \neq b_2$, $b_2 <_B b_1$. Así que $b_1 <_B b_1$, pues $<_B$ es transitiva, lo cual es una contradicción a que $<_B$ es antirreflexiva sobre B. Entonces $b_1 = b_2$, además, $b_1 \not<_B b_2$ y $b_2 \not<_B b_1$, pues $<_B$ es antirreflexiva. Como $\langle a_1, b_1 \rangle \leq_{A \cdot B} \langle a_2, b_2 \rangle$ y $b_1 \not<_B b_2$, $a_1 \leq_A a_2$. Como $\langle a_2, b_2 \rangle \leq_{A \cdot B} \langle a_1, b_1 \rangle$ y $b_2 \not<_B b_1$, $a_2 \leq_A a_1$. Como $\leq_A$ es antisimétrica, $a_1 = a_2$. Por lo tanto, $\langle a_1, b_1 \rangle = \langle a_2, b_2 \rangle$. De este modo $\leq_{A \cdot B}$ es antisimétrica.

Así, $\langle A \times B, \leq_{A \cdot B} \rangle$ es un orden parcial reflexivo.

$\dashv$

Como la tricotomía se preserva, también podemos recuperar los órdenes lineales reflexivos.

Corolario 3.74 *Sean $\langle A, \leq_A \rangle$ un orden lineal reflexivo y $\langle B, <_B \rangle$ un orden lineal. Entonces $\langle A \times B, \leq_A \cdot <_B \rangle$ es un orden lineal reflexivo.*

3.3 | Suma sobre un orden

Recordemos el ejemplo 3.52 en el que analizamos los órdenes $\eta \cdot 2$ y $2 \cdot \eta$. En la figura 3.5 podemos observar nuevamente la representación gráfica del orden $\eta \cdot 2$, en la cual podemos ver un comportamiento similar al de la suma de órdenes. Por la proposición 3.34, $2 = 1 + 1$, entonces $\eta \cdot 2 = \eta \cdot (1+1) = (\eta \cdot 1) + (\eta \cdot 1) = \eta + \eta$.

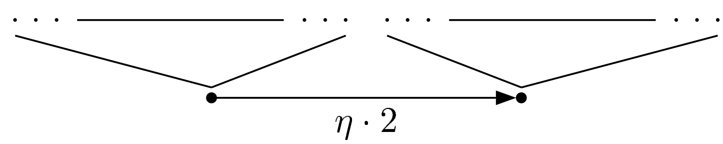

Figura 3.5: Representaciones gráficas del orden $\eta \cdot 2$.

En general, para cualquier tipo de orden μ, el producto $\mu \cdot 2 = \mu + \mu$. Si pensamos recíprocamente, la suma de $\mu + \mu$ podemos representarla como el orden 2 reemplazando cada elemento por μ. De esta forma podemos ver a la suma de órdenes como sustituir en el orden 2 cada elemento por un orden. Generalizando esta idea podemos definir la suma de órdenes sobre un orden.

Definición 3.75 Sea $\langle I, < \rangle$ un orden parcial. Para cada $i \in I$, sea $\langle A_i, \mathtt{r}_i \rangle$ un orden parcial. Definimos la **suma ordenada** de los órdenes parciales $\langle A_i, \mathtt{r}_i \rangle$ **sobre el orden** $\langle I, < \rangle$ como el orden $\left\langle \sum_I A_i, <^I \right\rangle$, donde $\sum_I A_i = \bigcup_{i \in I} (A_i \times \{i\})$ y $<^I$ se define como

$$\langle a, i \rangle <^I \langle b, j \rangle \text{ si y sólo si } (i < j) \vee (i = j \wedge a \, \mathtt{r}_i \, b).$$

Veamos que está bien definida, es decir, veamos que efectivamente $\left\langle \sum_I A_i, <^I \right\rangle$ es un orden parcial.

Proposición 3.76 *Sea $\langle I, < \rangle$ un orden parcial. Para cada $i \in I$, sea $\langle A_i, \mathtt{r}_i \rangle$ un orden parcial. Entonces $\left\langle \sum_I A_i, <^I \right\rangle$ es un orden parcial.*

Demostración. Demostremos que $<^I$ es antirreflexiva en $\sum_I A_i$. Sea $\langle a, i \rangle \in \sum_I A_i$, de modo que $a \in A_i$. Como $\langle I, < \rangle$ es antirreflexivo, $i \not< i$, y así no se puede cumplir la primera parte de la definición de que $\langle a, i \rangle <^I \langle a, i \rangle$. Como $\langle A_i, \mathtt{r}_i \rangle$ es antirreflexivo, no ocurre que $a \mathtt{r}_i a$ y de este modo no se cumple la segunda parte de la definición. Por lo tanto, $\langle a, i \rangle \not<^I \langle a, i \rangle$.

Veamos que es transitiva. Sean $\langle a, i \rangle$, $\langle b, j \rangle$, $\langle c, k \rangle \in \sum_I A_i$ tales que $\langle a, i \rangle <^I \langle b, j \rangle$ y $\langle b, j \rangle <^I \langle c, k \rangle$. Supongamos que $i < j$ y veamos los casos. Si $j < k$, entonces $i < k$, pues $\langle I, < \rangle$ es transitivo. Por lo tanto, $\langle a, i \rangle <^I \langle c, k \rangle$. Si $j = k$ y $b \, \mathtt{r}_j \, c$, tenemos que $i < k$. De modo que $\langle a, i \rangle <^I \langle c, k \rangle$. Ahora supongamos que $i = j$ y $a \, \mathtt{r}_i \, b$, y veamos los casos. Si $j < k$, entonces $i < k$. Así que $\langle a, i \rangle <^I \langle c, k \rangle$. Si $j = k$ y $b \, \mathtt{r}_j \, c$, $i = k$ y $a \, \mathtt{r}_i \, c$, pues $\mathtt{r}_i$ es transitiva. Por lo tanto, $\langle a, i \rangle <^I \langle c, k \rangle$. En todos los casos tenemos que $<^I$ es transitiva.

Entonces, $\left\langle \sum_I A_i, <^I \right\rangle$ es un orden parcial.

$\dashv$

Una vez comprobado que es un orden parcial, podemos definir la suma de tipos de orden sobre un orden.

Definición 3.77 Sea $\langle I, < \rangle$ un orden parcial. Para cada $i \in I$, sea μ_i un tipo de orden y $\langle A_i, \mathtt{r}_i \rangle$ un representante del tipo de orden μ_i. Definamos la **suma ordenada** de los tipos de orden μ_i **sobre el orden** $\langle I, < \rangle$ como el tipo de orden de $\left\langle \sum_I A_i, <^I \right\rangle$. A este orden lo denotaremos como $\sum_I \mu_i$.

Veamos que esta definición no depende de los representantes de los órdenes μ_i.

Proposición 3.78 *Sea $\langle I, < \rangle$ un orden parcial. Para cada $i \in I$, sean μ_i un tipo de orden y $\langle A, \mathtt{r}_i \rangle$, $\langle A', \mathtt{r'}_i \rangle$ representantes del tipo de orden μ_i. Entonces $\left\langle \sum_I A_i, <^I \right\rangle$ y $\left\langle \sum_I A'_i, <'^I \right\rangle$ son isomorfos.*

Demostración. Como $\langle A_i, \mathtt{r}_i \rangle$ y $\langle A'_i, \mathtt{r'}_i \rangle$ son ambos órdenes de tipo μ_i, son isomorfos. Así que para cada $i \in I$, sea $f_i : A_i \to A'_i$ un isomorfismo. Definamos $g : \sum_I A_i \to \sum_I A'_i$ como $g(\langle a, i \rangle) = \langle f_i(a), i \rangle$, g es el isomorfismo buscado.

$\dashv$

Demostremos que esta suma preserva a los órdenes lineales cuando $\langle I, < \rangle$ es un orden lineal.

Teorema 3.79 *Sea $\langle I, < \rangle$ un orden lineal. Para cada $i \in I$, sea $\langle A_i, <_i \rangle$ un orden lineal. Entonces $\left\langle \sum_I A_i, <^I \right\rangle$ es un orden lineal.*

Demostración. Por la proposición 3.76, $\left\langle \sum_I A_i, <^I \right\rangle$ es un orden parcial, basta probar que es tricotómico. Sean $\langle a, i \rangle$, $\langle b, j \rangle \in \sum_I A_i$ tales que $\langle a, i \rangle \not<^I \langle b, j \rangle$ y $\langle b, j \rangle \not<^I \langle a, i \rangle$. Como $\langle a, i \rangle \not<^I \langle b, j \rangle$, $i \not< j$ y además si $i = j$, no ocurre que $a \,\mathtt{r}_i\, b$. Como $\langle b, j \rangle \not<^I \langle a, i \rangle$, $j \not< i$ y además si $i = j$, no ocurre que $b \,\mathtt{r}_i\, a$. Como $<$ es tricotómica, $i = j$. De modo que no ocurre que $a \,\mathtt{r}_i\, b$, ni $b \,\mathtt{r}_i\, a$. Como $\mathtt{r}_i$ es tricotómica, $a = b$. Así que $\langle a, i \rangle = \langle b, j \rangle$. Es decir, $<^I$ es tricotómica.

Por lo tanto, $\left\langle \sum_I A_i, <^I \right\rangle$ es un orden lineal.

$\dashv$

Esta nueva operación se comporta bien con los órdenes parciales y lineales, veamos que también lo hace con los buenos órdenes.

Teorema 3.80 *Sea $\langle I, < \rangle$ un buen orden. Para cada $i \in I$, sea $\langle A_i, <_i \rangle$ un buen orden. Entonces $\left\langle \sum_I A_i, <^I \right\rangle$ es un buen orden.*

Demostración. Sea $C \subseteq \sum_I A_i$ no vacío. Definamos el conjunto $D \subseteq I$ como

$$D = \{j \in I : \exists a \in A_j (\langle a, j \rangle \in C)\}.$$

Como C es no vacío, existe $\langle a, i\rangle \in C$. De modo que $i \in D$ y así D es no vacío. Como $\langle I, <\rangle$ es un buen orden, sea i_0 el $<$-mínimo de D. Definamos el conjunto $E \subseteq A_{i_0}$ como

$$E = \{a \in A_{i_0} : \langle a, i_0\rangle \in C\}.$$

Como $i_0 \in D$, existe $x \in A_{i_0}$ tal que $\langle x, i_0\rangle \in C$. De este modo $x \in E$ y así E es no vacío. Como $\left\langle A_{i_0}, <_{A_{i_0}}\right\rangle$ es un buen orden, sea a_0 el $<_{A_{i_0}}$-mínimo de E.

Veamos que $\langle a_0, i_0\rangle$ es el mínimo de C. Sea $\langle a, i\rangle \in C$, así que $i \in D$. Como i_0 es el $<$-mínimo de D, $i_0 \leq i$. Si $i_0 < i$, entonces $\langle a_0, i_0\rangle <^I \langle a, i\rangle$. Si $i_0 = i$, tenemos que $a \in E$. Como a_0 es el $<_A$-mínimo de E, $a_0 \leq_{A_{i_0}} a$. Si $a_0 <_{A_{i_0}} a$, entonces $\langle a_0, i_0\rangle <^I \langle a, i\rangle$. Si $a_0 = a$, $\langle a_0, i_0\rangle = \langle a, i\rangle$. En todos los casos $\langle a_0, i_0\rangle \leq^I \langle a, i\rangle$. De modo que $\langle a_0, i_0\rangle$ es el $<^I$-mínimo de C. Por lo tanto, $\left\langle \sum_I A_i, <^I\right\rangle$ es un buen orden.

$\dashv$

Anunciamos esta operación como una generalización de la suma, veamos que efectivamente la contiene.

Teorema 3.81 *Sean $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ y $\langle B, \mathtt{s}\rangle$ órdenes parciales tales que A y B son conjuntos disjuntos. Entonces $\langle A \cup B, <_{A+B}\rangle$ es isomorfo a $\left\langle \sum_2 A_i, <^2\right\rangle$, donde $A_0 = A$ y $A_1 = B$.*

Demostración. Sea $f : A \cup B \to \sum_2 A_i$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} \langle x, 0\rangle & \text{si } x \in A, \\ \langle x, 1\rangle & \text{si } x \in B. \end{cases}$$

Notemos que f está bien definida pues A y B son conjuntos disjuntos y que f es un isomorfismo.

$\dashv$

Así, la suma de órdenes es isomorfa al orden $<^2$. Pero no sólo engloba a la suma, también podemos obtener el producto. Además, podemos recuperar el sentido clásico de que el producto es sumar repetidas veces. De esta forma $\mu \cdot \tau$ es el orden μ, τ veces.

Teorema 3.82 *Sean $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ y $\langle B, \mathtt{s}\rangle$ órdenes parciales. Entonces $\langle A \times B, <_{A\cdot B}\rangle$ es isomorfo a $\left\langle \sum_B A_i, <^B\right\rangle$, donde para cada $i \in B$, $A_i = A$.*

Demostración. Recordemos que $\sum_B A_i = \bigcup_{i\in B}(A_i \times \{i\})$. En este caso, cada $A_i = A$. Entonces $\sum_B A_i = \bigcup_{i\in B}(A \times \{i\}) = A \times \bigcup_{i\in B}\{i\} = A \times B$. Además, por la definición de $<^B$, $\langle a_1, b_1\rangle <^B \langle a_2, b_2\rangle$ si y sólo si $b_1 \,\mathtt{s}\, b_2$, o bien, $b_1 = b_2$ y $a_1 \,\mathtt{r}_{b_1}\, a_2$. Pero $\mathtt{r}_{b_1} = \mathtt{r}$, por lo que coincide con la definición del producto de órdenes. Así, $\left\langle \sum_B A, <^B\right\rangle = \langle A \times B, <_{A\cdot B}\rangle$.

$\dashv$

Dado que esta suma contiene al producto de órdenes, las propiedades de ser simétrico, separable, completo y continuo, no se preservan.

En el caso de la densidad sí la preservará al pedir también la densidad del orden $\langle I, <\rangle$.

Teorema 3.83 *Sea $\langle I,<\rangle$ un orden denso. Para cada $i \in I$, sea $\langle A_i,<_i\rangle$ un orden denso. Entonces $\left\langle \sum_I A_i,<^I \right\rangle$ es denso.*

Demostración. Sea $\langle a,i\rangle$, $\langle b,j\rangle \in \sum_I A_i$. Supongamos que $\langle a,i\rangle <^I \langle b,j\rangle$, así que $i<j$ o $i=j$ y $a<_i b$. Si $i<j$, como $\langle I,<\rangle$ es denso, existe $k \in I$ tal que $i<k<j$. De modo que $\langle a,i\rangle <^I \langle a,k\rangle$ y $\langle a,k\rangle <^I \langle b,j\rangle$.

Ahora, si $i=j$ y $a<_i b$, como $\langle A_i,<_i\rangle$ es denso, existe $c \in A_i$ tal que $a<_i c<_i b$. Así tenemos que $\langle a,i\rangle <^I \langle c,i\rangle$ y $\langle c,i\rangle <^I \langle b,j\rangle$.

Por lo tanto, $\left\langle \sum_I A_i,<^I \right\rangle$ es denso.

$\dashv$

Veamos que la suma sobre un orden tiene un tipo de orden mayor o igual que cualquier sumando.

Teorema 3.84 *Sea $\langle I,<\rangle$ un orden parcial. Para cada $i \in I$, sea $\langle A_i,<_i\rangle$ un orden parcial. Entonces para toda $k \in I$, $\langle A_k,<_k\rangle$ se sumerge en $\left\langle \sum_I A_i,<^I \right\rangle$.*

Demostración. Sea $k \in I$ cualquiera. Sea $f: A_k \to \sum_I A_i$ definida como $f(a)=\langle a,k\rangle$. Si a, $b \in A_k$ y $a \neq b$, entonces $\langle a,k\rangle \neq \langle b,k\rangle$ y así $f(a) \neq f(b)$. Por lo tanto, f es inyectiva.

Supongamos que $a<_k b$, por definición de $<^I$, es equivalente a que $\langle a,k\rangle <^I \langle b,k\rangle$. Por lo que $f(a) <^I f(b)$. Por lo tanto, f es un encaje.

Entonces, para toda $k \in I$, $\langle A_k,<_k\rangle$ se sumerge en $\left\langle \sum_I A_i,<^I \right\rangle$.

$\dashv$

3.3.1 — Relación con la cofinalidad y los órdenes η_α

La cofinalidad de la suma dependerá del orden sobre el que estemos sumando de manera similar a como sucede con el producto de órdenes.

Teorema 3.85 *Sea $\langle I,<\rangle$ un orden lineal no vacío. Para cada $i \in I$, sea $\langle A_i,<_i\rangle$ un orden lineal no vacío. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones.*

(i) *Si* $\mathrm{cf}(I)=1$, *entonces* $\mathrm{cf}\left(\sum_I A_i\right)=\mathrm{cf}(A_r)$, *donde r es el extremo derecho de I.*

(ii) *Si* $\mathrm{cf}(I)\geq\omega$, *entonces* $\mathrm{cf}\left(\sum_I A_i\right)=\mathrm{cf}(I)$.

(iii) *Si* $\mathrm{coin}(I)=1$, *entonces* $\mathrm{coin}\left(\sum_I A_i\right)=\mathrm{coin}(A_l)$, *donde l es el extremo izquierdo de I.*

(iv) *Si* $\mathrm{coin}(I)\geq\omega$, *entonces* $\mathrm{coin}\left(\sum_I A_i\right)=\mathrm{coin}(I)$.

Demostración. Supongamos $\mathrm{cf}(I)=1$, así que B tiene extremo derecho, digamos r.

Sea $W \subseteq A_r$ cofinal e isomorfo a $\mathrm{cf}(A_r)$. Como A_r es no vacío, W es no vacío, así, sea $w_0 \in W$.

Definamos $T = W \times \{r\}$. Como $T \subseteq A_r \times \{r\}$, $T \subseteq \sum_I A_i$, además T es isomorfo a W. Veamos que T es cofinal en $\sum_I A_i$. Sea $\langle a, j\rangle \in \sum_I A_i$. Como r es el extremo derecho de B, $j \leq r$. Si $j < r$, $\langle a, j\rangle <^I \langle w_0, r\rangle$, además notemos que $\langle w_0, r\rangle \in T$. Si $j = r$, entonces $a \in A_r$. Como W es cofinal en A_r, existe $w \in W$ tal que $a \leq_r w$. Así, $\langle a, j\rangle <^I \langle w, r\rangle$ y $\langle w, r\rangle \in T$. De modo que, T es cofinal en $\sum_I A_i$ y $\mathrm{cf}\,(\sum_I A_i) = \mathrm{cf}\,(T)$. Por lo tanto, $\mathrm{cf}\,(\sum_I A_i) = \mathrm{cf}\,(A_r)$.

De manera simétrica se demuestra el inciso (iii).

Ahora supongamos que $\mathrm{cf}\,(I) \geq \omega$. Sea $S \subseteq I$ cofinal e isomorfo a $\mathrm{cf}\,(I)$. Para cada $s \in S$, sea $a_s \in A_s$. Definamos $U = \{\langle a_s, s\rangle \in \sum_I A_i : s \in S\}$. Notemos que U es isomorfo a S, pues si i, $j \in S$, entonces $i < j$ si y sólo si $\langle a_i, i\rangle <^I \langle a_j, j\rangle$. Veamos que U es cofinal en $\sum_I A_i$. Sea $\langle b, j\rangle \in \sum_I A_i$. Como $\mathrm{cf}\,(I) \geq \omega$, existe $k \in S$ tal que $j < k$. De modo que $\langle a_k, k\rangle \in U$ y $\langle b, j\rangle <^I \langle a_k, k\rangle$. Así, U es cofinal en $\sum_I A_i$ y $\mathrm{cf}\,(\sum_I A_i) = \mathrm{cf}\,(U)$. Por lo tanto, $\mathrm{cf}\,(\sum_I A_i) = \mathrm{cf}\,(I)$.

De manera simétrica se demuestra el inciso (iv).

$\dashv$

Veamos que la suma de órdenes η_α sobre un orden η_α es a su vez un orden η_α.

Teorema 3.86 *Sea $\langle I, <\rangle$ un orden η_α. Para cada $i \in I$, sea $\langle E_i, <_i\rangle$ un orden η_α. Entonces $\left\langle \sum_I E_i, <^I \right\rangle$ es un orden η_α.*

Demostración. Veamos que $\left\langle \sum_I E_i, <^I \right\rangle$ cumple con la caracterización de los órdenes η_α. Sea $\langle c, k\rangle \in \sum_I E_i$, veamos que tiene entorno $\left\langle \omega_\epsilon, \omega_\xi^* \right\rangle$ con ϵ y $\xi \geq \alpha$.

Consideremos el conjunto $T = c{\downarrow}^{E_k} \times \{k\}$, notemos que $T \subseteq E_k \times \{k\}$, así que $T \subseteq \sum_I E_i$. Como $\langle E_k, <_k\rangle$ es un orden η_α, existe $d <_k c$. De modo que $d \in c{\downarrow}^{E_k}$ y T no es vacío, pues $\langle d, k\rangle \in T$. Demostremos que T es cofinal en $\langle c, k\rangle{\downarrow}^{<^I}$. Sea $\langle a, k\rangle \in T$, así que $a \in c{\downarrow}^{E_k}$, es decir, $a <_k c$. Por lo tanto, $\langle a, k\rangle <^I \langle c, k\rangle$. De este modo $T \subseteq \langle c, k\rangle{\downarrow}^{<^I}$.

Sea $\langle b, j\rangle \in \langle c, k\rangle{\downarrow}^{<_I}$, así que $\langle b, j\rangle <^I \langle c, k\rangle$. Si $j < k$, tenemos que $\langle b, j\rangle <^I \langle d, k\rangle$. Si $j = k$ y $b <_k c$, entonces $b \in c{\downarrow}^{E_k}$ y por tanto $\langle b, j\rangle \in T$. De este modo T es cofinal en $\langle c, k\rangle{\downarrow}^{<^I}$. Así que $\mathrm{cf}\left(\langle c, k\rangle{\downarrow}^{<^I}\right) = \mathrm{cf}\,(T)$. Notemos que por su definición, T es isomorfo a $c{\downarrow}^{E_k}$ y como $\langle E_k, <_k\rangle$ es un orden η_α, $\mathrm{cf}\left(c{\downarrow}^{E_k}\right) \geq \omega_\alpha$. Por lo tanto, $\mathrm{cf}\left(\langle c, k\rangle{\downarrow}^{<^I}\right) \geq \omega_\alpha$.

De manera simétrica se demuestra que $\mathrm{coin}\left(\langle c, k\rangle{\uparrow}^{<^I}\right) \geq \omega_\alpha$. De modo que, $\langle c, k\rangle$ tiene entorno $\left\langle \omega_\epsilon, \omega_\xi^* \right\rangle$ con ϵ y $\xi \geq \alpha$.

Sea $\langle C, D\rangle$ un hueco de $\sum_I E_k$ con entorno $\left\langle \omega_\epsilon, \omega_\xi^* \right\rangle$. Veamos que ϵ o $\xi \geq \alpha$. Definamos los conjuntos C_I, $D_I \subseteq I$ como sigue:

$$\begin{aligned} C_I = &\{i \in I : \exists a \in E_i(\langle a, i\rangle \in C)\}, \text{ y} \\ D_I = &\{i \in I : \exists a \in E_i(\langle a, i\rangle \in D)\}. \end{aligned}$$

Si $C_I \cap D_I = \varnothing$, entonces $C = \sum_{C_I} E_i$ y $D = \sum_{D_I} E_i$. Además, $\langle C_I, D_I\rangle$ forman una cortadura de I. Analicemos la cofinalidad de C_I y la coinicialidad de D_I. Si $\mathrm{cf}\,(C_I) = 1$, por el teorema anterior, $\mathrm{cf}\,(C) = \mathrm{cf}\,(E_r)$ con r el extremo derecho de C_I. Como $\langle E_r, <_r\rangle$ es un orden η_α, $\mathrm{cf}\,(E_r) \geq \omega_\alpha$. Así, $w_\epsilon \geq \omega_\alpha$. Si $\mathrm{coin}\,(D_I) = 1$, tenemos que $\mathrm{coin}\,(D) = \mathrm{coin}\,(E_l)$, donde l es el extremo izquierdo de D_I. Como $\langle E_l, <_l\rangle$ es un orden η_α, $\mathrm{coin}\,(E_l) \geq \omega_\alpha$. En este caso, $\omega_\xi \geq \omega_\alpha$. Por último, si $\mathrm{cf}\,(C_I) \geq \omega$ y $\mathrm{coin}\,(D_I) \geq \omega$, entonces $\langle C_I, D_I\rangle$ es un hueco de I. Como $\langle I, <\rangle$ es un orden η_α, $\mathrm{cf}\,(C_I) \geq \omega_\alpha$ y $\mathrm{coin}\,(D_I) \geq \omega_\alpha$. Por el teorema 3.85, $\mathrm{cf}\,(C) = \mathrm{cf}\,(C_I)$ y $\mathrm{coin}\,(D) = \mathrm{coin}\,(D_I)$.

En todos los casos, $\langle C, D\rangle$ tiene entorno $\left\langle \omega_\epsilon, \omega_\xi^* \right\rangle$ con ϵ o $\xi \geq \alpha$.

Ahora supongamos que $C_I \cap D_I \neq \varnothing$, así que $C_I \cap D_I = \{k\}$, pues $C <^I D$. Definamos los conjuntos C_k, $D_k \subseteq E_k$ como sigue:

$$\begin{aligned} C_k &= \{a \in E_k : \langle a, k\rangle \in C\}, \text{ y} \\ D_k &= \{a \in E_k : \langle a, k\rangle \in D\}. \end{aligned}$$

Como $\langle C, D\rangle$ es un hueco, $\langle C_k, D_k\rangle$ es una cortadura de E_k. Sean $c \in C_k$ y $d \in D_k$. Veamos que $C_k \times \{k\}$ es cofinal en C y $D_k \times \{k\}$ es coinicial en D. Sea $\langle a, i\rangle \in C$ y $\langle b, j\rangle \in D$. Si $i < k$, $\langle a, i\rangle <^I \langle c, k\rangle$. Si $i = k$, $\langle a, i\rangle \in C_k \times \{k\}$. De modo que $C_k \times \{k\}$ es cofinal en C. Ahora, si $k < j$, $\langle d, k\rangle <^I \langle b, j\rangle$. Si $j = k$, $\langle b, j\rangle \in D_k \times \{k\}$. Así que, $D_k \times \{k\}$ es coinicial en D.

Por lo tanto, $\mathrm{cf}\,(C_k) = \mathrm{cf}\,(C)$ y $\mathrm{coin}\,(D_k) = \mathrm{coin}\,(D)$. De este modo $\langle C_k, D_k\rangle$ es un hueco de E_k con entorno $\left\langle \omega_\epsilon, \omega_\xi^* \right\rangle$. Como $\langle E_k, <_k\rangle$ es un orden η_α, ϵ o $\xi \geq \alpha$.

Entonces, todo hueco de $\left\langle \sum_I E_i, <^I \right\rangle$ tiene entorno $\left\langle \omega_\epsilon, \omega_\xi^* \right\rangle$ con ϵ o $\xi \geq \alpha$.

Finalmente, por el teorema 3.85, $\mathrm{cf}\,(\sum_I E_i) = \mathrm{cf}\,(I)$ y $\mathrm{coin}\,(\sum_I) = \mathrm{coin}\,(I)$ y ambos son mayores que ω_α, pues $\langle I, <\rangle$ es un orden η_α.

Por lo tanto, $\left\langle \sum_I E_i, <^I \right\rangle$ es un orden η_α.

$\dashv$

Capítulo IV Generalización del producto

En el capítulo anterior vimos la definición de la suma y el producto de órdenes, además vimos una generalización de la suma de órdenes, la cual permite sumar una cantidad arbitraria de órdenes. En este capítulo generalizaremos el producto, primero con una operación desafortunada, pues casi no preserva propiedades de los órdenes, pero que nos guiará a la definición del producto lexicográfico. El producto lexicográfico tiene gran importancia en diversas áreas de las matemáticas, por ejemplo, en la combinatoria, la teoría de grupos y la topología; y también tiene gran importancia en la teoría de órdenes, con él se pueden definir la clase de órdenes universales h_α.

4.1 Producto directo

Recordemos que el producto se definió sobre $A \times B$, así que empezaremos por generalizar el producto cartesiano.

Definición 4.1 Sea I un conjunto de índices. Para cada $i \in I$, sea A_i un conjunto. Definamos el **producto cartesiano de los conjuntos** A_i como

$$\bigtimes_{i\in I} A_i = \{f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i \mid \forall i \in I(f(i) \in A_i)\}.$$

Esta definición de producto cartesiano alberga de cierto modo al producto cartesiano clásico $A \times B$.

Proposición 4.2 *Sean A y B conjuntos. Entonces existe una función biyectiva entre $A \times B$ y $\bigtimes_{i\in 2} A_i$, donde $A_0 = A$ y $A_1 = B$.*

Demostración. Definamos $g : A \times B \to \bigtimes_{i\in 2} A_i$ como $g(\langle a, b\rangle) = \{\langle 0, a\rangle, \langle 1, b\rangle\}$. Notemos que $\mathrm{Dom}\,(g(\langle a, b\rangle)) = 2$, $g(\langle a, b\rangle)(0) \in A = A_0$ y $g(\langle a, b\rangle)(1) \in B = A_1$. Por lo tanto, $g(\langle a, b\rangle) \in \bigtimes_{i\in 2} A_i$, es decir, está bien definida.

Definamos la función $h : \bigtimes_{i\in 2} A_i \to A \times B$ como $h(f) = \langle f(0), f(1)\rangle$. Como $f(0) \in A$ y $f(1) \in B$, $\langle f(A), f(B)\rangle \in A \times B$ y de este modo h está bien definida. Además h es la función inversa de g, por lo tanto, g es biyectiva.

$\dashv$

Si alguno de los conjuntos de A_i es vacío, el producto cartesiano es vacío.

Proposición 4.3 *Sea I un conjunto. Para cada $i \in I$, sea A_i un conjunto. Si existe $j \in I$ tal que $A_j = \varnothing$, entonces $\bigtimes_{i\in I} A_i = \varnothing$.*

Demostración. Supongamos que $j \in I$ y $A_j = \varnothing$, entonces cualquier $f \in \bigtimes_{i\in I} A_i$ debería de cumplir que $f(j) \in A_j = \varnothing$. Como esto es una contradicción, $\bigtimes_{i\in I} A_i = \varnothing$.

⊣

El regreso de esta proposición es una variante del *axioma de elección multiplicativo*, que es equivalente al *axioma de elección*.

Si I es vacío, el producto cartesiano no es vacío.

Proposición 4.4 *Se cumple que $\bigtimes_{i\in\varnothing} A_i = \{\varnothing\}$.*

Demostración. Sea $f \in \bigtimes_{i\in\varnothing} A_i$, entonces $f : \varnothing \to \varnothing$. Por lo tanto, $f = \varnothing$. De esta forma $\bigtimes_{i\in\varnothing} A_i = \{\varnothing\}$.

⊣

Ahora definiremos un producto de órdenes con la nueva definición de producto cartesiano. Al no pedir que I tuviera un orden, no temos una forma de decidir cúal de los órdenes que vamos a multiplicar tendrá más relevacia. En el caso del producto le asignábamos más relevancia al segundo factor y empezábamos a comparar los pares órdenados por la segunda entrada. Una forma de solucionar esto será comparar al mismo tiempo en todos los órdenes A_i.

Definición 4.5 Sea I un conjunto no vacío. Para cada $i \in I$, sea $\langle A_i, \mathtt{r}_i\rangle$ un orden parcial. Definamos el **producto directo** de los órdenes $\langle A_i, \mathtt{r}_i\rangle$ como el orden $\left\langle \bigtimes_{i\in I} A_i, <_p \right\rangle$, donde $<_p$ se define como

$$a <_p b \text{ si y sólo si } \forall i \in I(a(i)\,\mathtt{r}_i\,b(i)).$$

Veamos que efectivamente el producto directo es un orden parcial.

Proposición 4.6 *Sea I un conjunto no vacío. Para cada $i \in I$, sea $\langle A_i, \mathtt{r}_i\rangle$ un orden parcial. Entonces $\left\langle \bigtimes_{i\in I} A_i, <_p \right\rangle$ es un orden parcial.*

Demostración. Demostremos primero que $<_p$ es antirreflexiva en $\bigtimes_{i\in I} A_i$. Sean $a \in \bigtimes_{i\in I} A_i$ e $i \in I$. Como $\mathtt{r}_i$ es antirreflexiva en A_i, no ocurre que $a(i)\,\mathtt{r}_i\,a(i)$. Por lo tanto, $a(i) \not<_p a(i)$. Así, $<_p$ es antirreflexiva en $\bigtimes_{i\in I} A_i$.

Veamos que $<_p$ es transitiva. Sean a, b, $c \in \bigtimes_{i\in I} A_i$, tales que $a <_p b$ y $b <_p c$. Sea $i \in I$ cualquiera, así que $a(i)\,\mathtt{r}_i\,b(i)$ y $b(i)\,\mathtt{r}_i\,c(i)$. Como $\mathtt{r}_i$ es transitiva, $a(i)\,\mathtt{r}_i\,c(i)$. De modo que para toda $i \in I$, $a(i)\,\mathtt{r}_i\,c(i)$. Por lo tanto, $a <_p c$ y así $<_p$ es transitiva.

Entonces $\left\langle \bigtimes_{i\in I} A_i, <_p \right\rangle$ es un orden parcial.

⊣

Así, el producto directo está bien definido. Sin embargo, el producto directo no preserva a los órdenes lineales.

Ejemplo 4.7 Sea $I = 2$. Consideremos los órdenes $\langle A_i, \mathtt{r}_i \rangle = \langle 2, \in \rangle$, para cada $i \in 2$. Sean a, $b \in \bigtimes_{i \in 2} 2$, definidos como $a(i) = i$ y $b(i) = 1 - i$. De modo que $a(0) = 0 \in 1 = b(0)$ y $b(1) = 0 \in 1 = a(1)$. Por lo tanto, $a \not<_p b$, $b \not<_p a$ y $a \neq b$. Así, $\left\langle \bigtimes_{i \in 2} 2, <_p \right\rangle$ no es un orden lineal.

En el ejemplo anterior usamos el orden $\langle 2, \in \rangle$ que no solamente es un orden lineal, sino, también es un buen orden. Por lo que, el producto directo no preserva a los buenos órdenes. Además, el argumento de este ejemplo se puede adaptar a cualquier producto que tenga al menos dos conjuntos con dos elementos. Así que en la mayoría de los casos los órdenes resultantes del producto directo no serán órdenes lineales.

Aunque ganamos el poder multiplicar una cantidad arbitraria de órdenes parciales, hemos perdido a la preservación de los órdenes lineales y de los buenos órdenes.

Veamos qué sucede con las demás propiedades de órdenes. Es claro que las propiedades de ser orden η_α y separable, no se preservarán pues en su definición tenemos que son órdenes lineales. Además, no podremos hablar de cofinalidad y por ende no preservará los órdenes continuos.

Para ver que los órdenes simétricos se preservan, veamos cómo se relaciona la operación de invertir el orden y el producto directo.

Teorema 4.8 *Sea I un conjunto no vacío. Para cada $i \in I$, sea $\langle A_i, \mathtt{r}_i \rangle$ un orden parcial. Entonces $\left\langle \bigtimes_{i \in I} A_i, <_p \right\rangle^*$ es igual al producto directo de los órdenes $\langle A_i, \mathtt{r}_i \rangle^*$.*

Demostración. Para distinguir entre los dos productos directos denotaremos con $<_p^*$ al de los órdenes $\langle A_i, \mathtt{r}_i \rangle^*$. Sea a, $b \in \bigtimes_{i \in I} A_i$. Supongamos primero que $a <_p^{-1} b$, de modo que $b <_p a$. Por la definición, para todo $i \in I$, se cumple que $b(i) \, \mathtt{r} \, a(i)$. Entonces, para toda $i \in I$ se cumple que $a(i) \, \mathtt{r}^{-1} \, b(i)$, así, $a <_p^* b$. Todos los pasos son reversibles, por lo tanto, $<_p^{-1} = <_p^*$.

⊣

Veamos que el producto directo de órdenes simétricos da como resultado un orden simétrico.

Teorema 4.9 *Sea I un conjunto no vacío. Para cada $i \in I$, sea $\langle A_i, \mathtt{r}_i \rangle$ un orden parcial simétrico. Entonces $\left\langle \bigtimes_{i \in I} A_i, <_p \right\rangle$ es un orden simétrico.*

Demostración. Como para cada $i \in I$, $\langle A_i, \mathtt{r}_i \rangle$ es simétrico, sea f_i un isomorfismo de $\langle A_i, \mathtt{r}_i \rangle$ a $\langle A_i, \mathtt{r}_i \rangle^*$. Definamos $g : \bigtimes_{i \in I} A_i \to \bigtimes_{i \in I} A_i$ tal que $g(a)(i) = f_i(a(i))$. Como $f_i(a(i)) \in A_i$, g está bien definida.

Veamos que g es biyectiva. Sean a, $b \in \bigtimes_{i \in I} A_i$ tales que $a \neq b$, así que existe $i \in I$ tal que $a(i) \neq b(i)$. Como f_i es inyectiva, $f_i(a(i)) \neq f_i(b(i))$. De modo que $g(a)(i) \neq g(b)(i)$. Así, $g(a) \neq g(b)$ y g es inyectiva. Sea $c \in \bigtimes_{i \in I} A_i$, definamos $d \in \bigtimes_{i \in I} A_i$, como $d(i) = f_i^{-1}(c(i)) \in A_i$. Entonces $g(d)(i) = f_i(d(i)) = f_i(f_i^{-1}(c(i))) = c(i)$. Por lo tanto, $g(d) = c$ y así g es biyectiva.

Ahora veamos que preserva el orden. Sean a, $b \in \bigtimes_{i \in I} A_i$, tales que $a <_p b$. Así que, para cada $i \in I$, $a(i) \mathtt{r}_i b(i)$. Como cada f_i es isomorfismo, para cada $i \in I$, $f_i(a(i)) \mathtt{r}_i f_i(b(i))$. De este modo para cada $i \in I$, $g(a)(i)\ \mathtt{r}_i\ g(b)(i)$. Por lo tanto, $g(a) <_p g(b)$. Dado f_i es isomorfismo, también se obtiene el recíproco, concluyendo que g es un isomorfismo.

Entonces, $\left\langle \bigtimes_{i \in I} A_i, <_p \right\rangle$ es un orden simétrico.

$\dashv$

Otra propiedad que preserva el producto directo es la densidad.

Teorema 4.10 *Sea I un conjunto no vacío. Para cada $i \in I$, sea $\langle A_i, \mathtt{r}_i \rangle$ un orden denso. Entonces $\left\langle \bigtimes_{i \in I} A_i, <_p \right\rangle$ es un orden denso.*

Demostración. Sean $a, b \in \bigtimes_{i \in I} A_i$ tales que $a <_p b$. De modo que para toda $i \in I$, $a(i) \mathtt{r}_i b(i)$. Como cada $\langle A_i, \mathtt{r}_i \rangle$ es denso, para toda $i \in I$, existe un $x_i \in A_i$ tal que $a(i)\ \mathtt{r}_i\ x_i\ \mathtt{r}_i\ b(i)$. Definamos $c \in \bigtimes_{i \in I} A_i$ como $c(i) = x_i \in A_i$. Sea $j \in I$ cualquiera, así que $a(j)\ \mathtt{r}_j\ x_j = c(j)$ y $c(j) = x_j\ \mathtt{r}_j\ b(j)$. De este modo, $a <_p c$ y $c <_p b$. Por lo tanto, $\left\langle \bigtimes_{i \in I} A_i, <_p \right\rangle$ es un orden denso.

$\dashv$

La propiedad de ser completo no se preserva, ya que no se preservan los órdenes lineales.

4.2 Producto lexicográfico

Como podemos ver en el ejemplo 4.7, al involucrar a todos los elementos de I se obtienen muchos elementos incomparables en el producto directo. Para poder escoger una forma de no involucrar a todos los elementos de I al mismo tiempo usaremos un orden en I. Pero iremos más lejos usaremos un buen orden.

Definición 4.11 Sea $\langle I, < \rangle$ un buen orden no vacío. Para cada $i \in I$, sea $\langle A_i, \mathtt{r}_i \rangle$ un orden parcial. Definimos el **producto lexicográfico** de los órdenes $\langle A_i, \mathtt{r}_i \rangle$, que denotamos por $L_{i \in I} \langle A_i, \mathtt{r}_i \rangle$, como el orden $\left\langle \bigtimes_{i \in I} A_i, <_L \right\rangle$, donde $<_L$ se define como

$$a <_L b \text{ si y sólo si } \exists i \in I(\forall j \in I(j < i \rightarrow a(j) = b(j)) \wedge a(i)\ \mathtt{r}_i\ b(i)).$$

Notemos que si $a \neq b$, entonces el conjunto $S = \{i \in I : a(i) \neq b(i)\}$ es no vacío, así que tendrá un mínimo, pues $\langle I, < \rangle$ es un buen orden. Digamos que i_0 es el mínimo de S, de modo que i_0 cumple que para toda $j \in I$ si $a(j) \neq b(j)$, $i \leq j$. Así, siempre que $a \neq b$ existirá un i que cumpla la primera parte de la definición. Por eso el orden lexicográfico también es llamado el **orden de la primera diferencia**. Llamaremos a esta i_0 como la primera diferencia entre a y b.

Gracias a la tricotomía de $\langle I, < \rangle$, al usar la contrapuesta de la implicación que aparece en la definición, podemos intercambiar $j < i \rightarrow a(j) = b(j)$ por $a(j) \neq b(j) \leftrightarrow i \leq j$.

Veamos que efectivamente $L_{i \in I} \langle A_i, \mathtt{r}_i \rangle$ es un orden parcial.

Proposición 4.12 *Sea $\langle I, < \rangle$ un buen orden no vacío. Para cada $i \in I$, sea $\langle A_i, \mathtt{r}_i \rangle$ un orden parcial. Entonces $L_{i\in I} \langle A_i, \mathtt{r}_i \rangle$ es un orden parcial.*

Demostración. Demostremos que $<_L$ es antirreflexiva en $\bigtimes_{i\in I} A_i$. Sea $a \in \bigtimes_{i\in I} A_i$. Como para toda $i \in I$, $\mathtt{r}_i$ es antirreflexiva en A_i, para ninguna $i \in I$ se cumple que $a(i)\, \mathtt{r}_i\, a(i)$. Así, $a \not<_L a$.

Veamos que $<_L$ es transitiva. Sean a, b, $c \in \bigtimes_{i\in I} A_i$ tales que $a <_L b$ y $b <_L c$. De modo que existe $i_1 \in I$ tal que para toda $j \in I$ si $j < i_1$, entonces $a(j) = b(j)$; y $a(i_1)\, \mathtt{r}_{i_1}\, b(i_1)$. Además, existe $i_2 \in I$ tal que para toda $j \in I$ si $j < i_2$, $b(j) = c(j)$; y $b(i_2)\, \mathtt{r}_{i_2}\, c(i_2)$.

Supongamos que i_1 es el mínimo de i_1 e i_2. Entonces $i_1 \leq i_2$, así que para toda $i \leq i_1$, $b(i) = c(i)$. Supongamos que $i_1 < i_2$, entonces $b(i_1) = c(i_1)$, y como $a(i_1) \mathtt{r}_{i_1} b(i_1)$, $a(i_1) \mathtt{r}_{i_1} c(i_1)$. Ahora supongamos que $i_1 = i_2$, entonces se cumple que $a(i_1)\, \mathtt{r}_{i_1}\, b(i_1)\, \mathtt{r}_{i_1}\, c(i_1)$. En ambos casos tenemos que $a(i_i)\, \mathtt{r}_{i_1}\, c(i_1)$. Por último, como para toda $i < i_1$ se tiene que $a(i) = b(i)$ y para toda $i < i_1 \leq i_2$ se cumple que $b(i) = c(i)$, tenemos que para toda $i < i_1$ se satisface que $a(i) = c(i)$. Por lo tanto, $a <_L c$.

De manera similar se puede ver que $a <_L c$ cuando i_2 es el mínimo entre i_1 e i_2.

De este modo $<_L$ es transitiva y $L_{i\in I} \langle A_i, \mathtt{r}_i \rangle$ es un orden parcial.

$\dashv$

Una vez verificado que el producto lexicográfico es un orden parcial, podemos definir el producto lexicográfico de tipos de orden.

Definición 4.13 Sea $\langle I, < \rangle$ un buen orden no vacío. Para cada $i \in I$, sea τ_i un tipo de orden y $\langle A_i, \mathtt{r}_i \rangle$ un orden de tipo τ_i. Definimos el **producto lexicográfico** de los tipos de orden τ_i, que denotaremos por $L_{i\in I}\tau_i$, como el tipo de orden de $L_{i\in I} \langle A_i, \mathtt{r}_i \rangle$.

Veamos que esta definición no depende del tipo de orden escogido.

Proposición 4.14 *Sea $\langle I, < \rangle$ un buen orden no vacío. Para cada $i \in I$, sea τ_i un tipo de orden y $\langle A_i, \mathtt{r}_i \rangle$, $\langle A'_i, \mathtt{r'}_i \rangle$ órdenes de tipo τ_i. Entonces $L_{i\in I} \langle A_i, \mathtt{r}_i \rangle$ y $L_{i\in I} \langle A'_i, \mathtt{r'}_i \rangle$ son isomorfos.*

Demostración. Denotaremos por $<'_L$ a la relación de orden de $L_{i\in I} \langle A'_i, \mathtt{r'}_i \rangle$. Para cada $i \in I$, sea f_i un isomorfismo de $\langle A_i, \mathtt{r}_i \rangle$ a $\langle A'_i, \mathtt{r}_i \rangle$. Definamos a $g : \bigtimes_{i\in I} A_i \to \bigtimes_{i\in I} A'_i$, como $g(a)(i) = f_i(a(i)) \in A'_i$. Entonces, g es el isomorfismo buscado.

$\dashv$

El producto lexicográfico mejora al producto directo, es decir, el producto directo es una subrelación del producto lexicográfico.

Teorema 4.15 *Sea $\langle I, < \rangle$ un buen orden no vacío. Para cada $i \in I$, sea $\langle A_i, \mathtt{r}_i \rangle$ un orden parcial. Entonces el producto directo es una subrelación del producto lexicográfico, es decir, $<_P \subseteq <_L$.*

Demostración. Sean a, $b \in \bigtimes_{i\in I} A_i$. Supongamos que $a <_P b$, entonces para toda $i \in I$ tenemos que $a(i)\, \mathtt{r}_i\, b(i)$. Como I es un buen orden, sea i_0 el mínimo de I. Así, para toda $j \in I$,

$i_0 \leq j$ y $a(i_0)\, \mathtt{r}_{i_0}\, b(i_0)$. Por lo tato, $a <_L b$.

$\dashv$

El producto directo no preservaba a los órdenes lineales por la existencia de elementos incomparables. Por el teorema anterior, el producto lexicográfico podría tener más elementos comparables y así es. Más aun, el producto lexicográfico de órdenes lineales sí será un orden lineal.

Teorema 4.16 *Sea $\langle I, < \rangle$ un buen orden no vacío. Para cada $i \in I$, sea $\langle A_i, <_i \rangle$ un orden lineal. Entonces $L_{i \in I} \langle A_i, <_i \rangle$ es un orden lineal.*

Demostración. Por la proposición 4.12, $L_{i \in I} \langle A_i, <_i \rangle$ es un orden parcial. Veamos que $L_{i \in I} \langle A_i, <_i \rangle$ es tricotómico.

Sean $a, b \in \bigtimes_{i \in i} A_i$. Supongamos que $a \neq b$ y que $b \not<_L a$. Como $a \neq b$, existe $i \in I$ tal que $a(i) \neq b(i)$. Sea k el $<$-mínimo tal que $a(k) \neq b(k)$. Como $\langle A_k, \mathtt{r}_k \rangle$ es tricotómico, $a(k)\, \mathtt{r}_k\, b(k)$ o $b(k)\, \mathtt{r}_k\, a(k)$. Si $b(k)\, \mathtt{r}_k\, a(k)$, como k es el mínimo tal que $a(k) \neq b(k)$, para toda $j \in I$ si $a(j) \neq b(j)$, $k \leq j$. Entonces $b <_L a$, lo cual contradice a que $b \not<_L a$. Por lo tanto, $a(k)\, \mathtt{r}_k\, b(k)$ y así $a <_L b$. Entonces, $L_{i \in I} \langle A_i, \mathtt{r}_i \rangle$ es un orden lineal.

$\dashv$

Aunque el producto lexicográfico de órdenes lineales es un orden lineal, no pasará lo mismo con los buenos órdenes, es decir, el producto lexicográfico de buenos órdenes no necesariamente será un buen orden.

Para ver un ejemplo de esto introduciremos un caso particular del producto lexicográfico. Cuando cada $\langle A_i, \mathtt{r}_i \rangle$ es isomorfo a un mismo orden $\langle A, \mathtt{r} \rangle$, denotaremos al producto lexicográfico por $\left\langle A^I, <_L \right\rangle$. Si I y A son ordinales, digamos $I = \beta$ y $A = \alpha$, denotaremos al producto lexicográfico como $\alpha((\beta))$, en lugar de α^β para distinguirlo de la exponenciación ordinal. Notemos que $\alpha((\beta))$ es el conjunto de las funciones de β a α, es decir, sucesiones de tamaño β de ordinales menores a α.

Ejemplo 4.17 Consideremos el conjunto $2((\omega))$ con el orden lexicográfico. Para cada $n \in \omega$, definamos la función $f_n : \omega \to 2$ como $f_n(x) = 0$, si $x \neq n$; y $f_n(x) = 1$, si $x = n$. Usando la delta de Kronecker, $f_n(x) = \delta_{nx}$. Sea $C = \{f_n : n \in \omega\}$, para llegar a una contradicción supongamos que C tiene mínimo, digamos f_i. Consideremos a $f_{\mathrm{s}(i)}$, para toda $x < i$, $f_i(x) = 0$ y $f_{\mathrm{s}(i)}(x) = 0$. Además, $f_{\mathrm{s}(i)}(i) = 0 \in 1 = f_i(i)$, entonces $f_{\mathrm{s}(i)} <_L f_i$. Esto contradice a que f_i sea el mínimo de C. Por lo tanto, C no tiene mínimo.

Notemos que C cumple que para toda $n \in \omega$, $f_{\mathrm{s}(n)} <_L f_n$, es decir, C es una cadena descendente infinita y por eso no tiene mínimo. Si I fuera finito, este argumento no se podría usar. De hecho, cuando I es finito el orden lexicográfico preserva la propiedad de buen orden.

Teorema 4.18 *Sea $\langle I, < \rangle$ un buen orden finito y no vacío. Para cada $i \in I$ sea $\langle A_i, <_i \rangle$ un buen orden. Entonces $L_{i \in I} \langle A_i, <_i \rangle$ es un buen orden.*

Demostración. Como I es un buen orden finito, I es isomorfo a un natural. Sin pérdida de la generalidad, supongamos que $I \in \omega$. Sea $C \subseteq \bigtimes_{i \in I} A_i$ no vacío. Definamos, por recursión hasta I, los conjuntos $C_i \subseteq C$, $D_i \subseteq A_i$ y $d_i \in D_i$ como sigue:

$$\begin{aligned} C_0 &= C \\ D_0 &= \{x \in A_0 : \exists a \in C_0(a(0) = x)\} \\ d_0 &= <_0\text{-}\min D_0 \\ C_{\mathrm{s}(n)} &= \{x \in C_n : x(n) = d_n\} \\ D_{\mathrm{s}(n)} &= \{x \in A_{\mathrm{s}(n)} : \exists a \in C_{\mathrm{s}(n)}(a(\mathrm{s}\,(n)) = x)\} \\ d_{\mathrm{s}(n)} &= <_{\mathrm{s}(n)}\text{-}\min D_{\mathrm{s}(n)} \end{aligned}$$

Veamos por inducción que están bien definidos. Como $C \neq \varnothing$, D_0 es no vacío. Como $\langle A_0, <_0\rangle$ es un buen orden, existe el mínimo de D_0. Por lo tanto, C_0, D_0 y d_0 están bien definidos. Supongamos que C_n, D_n y d_n están bien definidos. Como $d_n \in D_n$, existe $a \in C_n$ tal que $a(n) = d_n$. Entonces $a \in C_{\mathrm{s}(n)}$, es decir, $C_{\mathrm{s}(n)}$ es no vacío. Como $C_{\mathrm{s}(n)}$ es no vacío, $D_{\mathrm{s}(n)}$ es no vacío. Como $\left\langle A_{\mathrm{s}(n)}, <_{\mathrm{s}(n)}\right\rangle$ es un buen orden, $D_{\mathrm{s}(n)}$ tiene mínimo y así $d_{\mathrm{s}(n)}$ existe. Por lo tanto, los conjuntos C_i, D_i y d_i están bien definidos.

Por la definición de los C_i, $C_{\mathrm{s}(n)} \subseteq C_n$. Como I es no vacío, sea $k \in \omega$ tal que $\mathrm{s}\,(k) = I$. Definamos $C_I = \{x \in C_k : x(k) = d_k\}$, entonces $C_I \subseteq C$ y como d_k está bien definido, C_I es no vacío. Sea $d \in C_I$, entonces $d \in C$ y para toda $i \in I$, $d \in C_i$. Así, para toda $i \in I$ se tiene que $d(i) = d_i$. Demostremos que d es el mínimo de C. Ya vimos que $d \in C$, entonces sea $a \in C$. Supongamos que $a \neq d$, entonces existe $i \in I$ tal que $a(i) \neq d(i)$. Sea l el mínimo de I que cumple $a(l) \neq d(l)$. Si $j < l$, $a(j) = d(j) = d_j$. Entonces, para toda $j < l$, $a \in C_{\mathrm{s}(j)}$. Por lo tanto, $a \in C_l$ y $a(l) \in D_l$. Entonces $d(l) <_l a(l)$, ya que $a(l) \neq d(l)$ y $d(l)$ es el mínimo de D_l. Así, $d <_L a$ y d es el mínimo de C.

Por lo tanto, $L_{i\in I} \langle A_i, <_i\rangle$ es un buen orden.

$\dashv$

Aunque sea inconveniente que la propiedad de buen orden no se preserve en el producto lexicográfico en general, esto nos dará más riqueza en los órdenes que podamos construir. Por ejemplo, habrá órdenes densos que serán el producto de ordinales.

4.2.1 — La cofinalidad en el producto lexicográfico

Para comparar dos elementos del producto lexicográfico podemos pensar en estratos de comparación, donde la primera diferencia entre ellos define el estrato de comparación significativo. Tenemos entonces una jerarquía de comparación: si dos elementos del producto lexicográfico difieren en los "primeros" estratos, los elementos están más separados que si difieren en los "últimos" estratos. Así, cuando busquemos calcular el entorno de un elemento nos importarán más los "últimos" estratos y cuando busquemos calcular la cofinalidad nos importarán los "primeros" estratos para hacer conjuntos mejor colocados. Además, podemos retomar la idea de las sucesiones y pensar a los elementos del producto lexicográfico como sucesiones de longitud β que toman un elemento de A_δ en su entrada δ. De esta forma, la jerarquía que mencionamos está dada por β.

Ejemplo 4.19 Consideremos el orden $2((5))$ formado por sucesiones de 0's y 1's de longitud 5. Sean $a = \langle 0, 1, 0, 1, 0\rangle$ y $b = \langle 0, 1, 1, 1, 0\rangle$, elementos de $2((5))$. En la figura 4.1, se muestra la representación gráfica de la construcción de estos elementos. Notemos que en su construcción difieren en el nivel 2, y a partir de ahí se separa su construcción, de hecho, se encuentran distantes en el orden $2((5))$, aun cuando sólo difieren en una entrada.

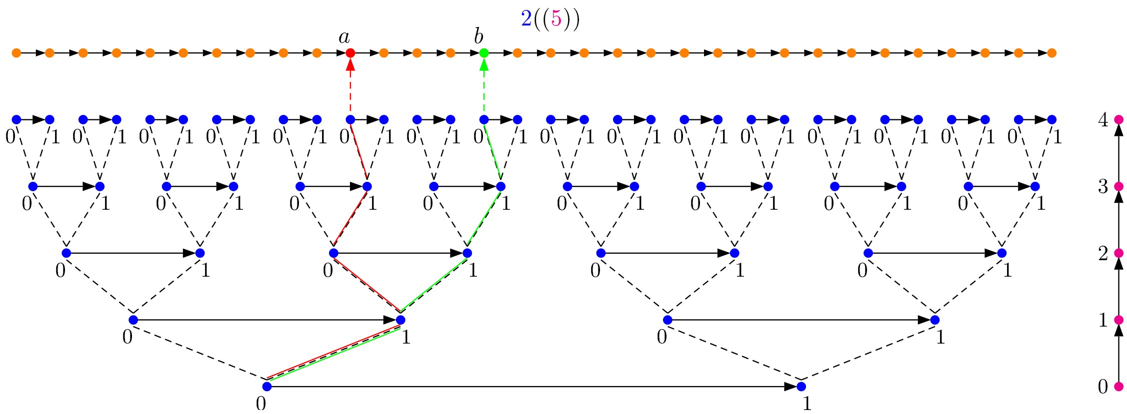

Figura 4.1: Representación gráfica del orden $2((5))$ y la construcción de dos elementos en el orden.

Para determinar la cofinalidad del producto lexicográfico analicemos dos casos, cuando algún orden no tiene extremos y cuando todos los órdenes tienen extremos.

Teorema 4.20 *Sea β un ordinal no cero. Para cada $\delta \in \beta$, sea $\langle A_\delta, <_\delta\rangle$ un orden lineal no vacío. Si existe $\delta \in \beta$ tal que $\operatorname{cf}(\langle A_\delta, <_\delta\rangle) \geq \omega$, entonces $\operatorname{cf}(L_{\delta\in\beta}\langle A_\delta, <_\delta\rangle) \geq \omega$. Más aun, si γ es el mínimo en β tal que $\operatorname{cf}(\langle A_\gamma, <_\gamma\rangle) \geq \omega$, entonces $\operatorname{cf}(L_{\delta\in\beta}\langle A_\delta, <_\delta\rangle) = \operatorname{cf}(\langle A_\gamma, <_\gamma\rangle)$.*

Demostración. Como existe $\delta \in \beta$ tal que $\operatorname{cf}(\langle A_\delta, <_\delta\rangle) \geq \omega$, sea γ el mínimo en β que lo cumple. Como todo $\langle A_\delta, <_\delta\rangle$ es no vacío y γ es el mínimo, si $\delta \in \gamma$ se tiene que $\operatorname{cf}(\langle A_\delta, <_\delta\rangle) = 1$. Para cada $\delta \in \gamma$, sea x_δ el máximo de $\langle A_\delta, <_\delta\rangle$. Además, para cada $\delta \in \beta$ tal que $\gamma \in \delta$, sea $x_\delta \in A_\delta$ arbitrario.

Definamos el conjunto $T \subseteq \bigtimes_{\delta\in\beta} A_\delta$ como

$$T = \left\{a \in \bigtimes_{\delta\in\beta} A_\delta : \forall\delta \in \beta(\delta \neq \gamma \to a(\delta) = x_\delta)\right\}.$$

El conjunto T con el orden lexicográfico es isomorfo a $\langle A_\gamma, <_\gamma\rangle$, ya que la función $g : T \to A_\gamma$ definida como $g(a) = a(\gamma)$ es un isomorfismo. Veamos que T es cofinal en $L_{\delta\in\beta}\langle A_\delta, <_\delta\rangle$.

Sea $b \in \bigtimes_{\delta\in\beta} A_\delta$. Si para algún $\delta \in \gamma$, $b(\delta) \neq x_\delta$, entonces $b(\delta) < x_\delta$. Así, $b <_L T$. Entonces supongamos que para toda $\delta \in \gamma$ se cumple que $b(\delta) = x_\delta$. Como $\langle A_\gamma, <_\gamma\rangle$ no tiene extremos, sea x_γ tal que $b(\gamma) < x_\gamma$. Definamos $a \in \bigtimes_{\delta\in\beta} A_\delta$ como $a(\delta) = x_\delta$. Notemos que $a \in T$ y que además $b <_L a$. De este modo, T es cofinal en $L_{\delta\in\beta}\langle A_\delta, <_\delta\rangle$.

Por lo tanto, $\mathrm{cf}\left(L_{\delta\in\beta}\left\langle A_\delta, <_\delta\right\rangle\right) = \mathrm{cf}\left(T\right) = \mathrm{cf}\left(\left\langle A_\gamma, <_\gamma\right\rangle\right)$.

$\dashv$

Al tomar el mínimo orden que no tiene extremos, nos estamos enfocando en los "primeros" estratos de comparación y el mínimo resulta el estrato significativo.

Corolario 4.21 *Sea β un ordinal no cero. Para cada $\delta \in \beta$, sea $\langle A_\delta, <_\delta\rangle$ un orden lineal no vacío. Si existe $\delta \in \beta$ tal que* $\mathrm{coin}\left(\left\langle A_\delta, <_\delta\right\rangle\right) \geq \omega$*, entonces* $\mathrm{coin}\left(L_{\delta\in\beta}\left\langle A_\delta, <_\delta\right\rangle\right) \geq \omega$*. Más aun, si γ es el mínimo en β tal que* $\mathrm{coin}\left(\left\langle A_\gamma, <_\gamma\right\rangle\right) \geq \omega$*, entonces* $\mathrm{coin}\left(L_{\delta\in\beta}\left\langle A_\delta, <_\delta\right\rangle\right) = \mathrm{coin}\left(\left\langle A_\gamma, <_\gamma\right\rangle\right)$.

Veamos ahora el caso cuando todos los órdenes tienen extremos.

Teorema 4.22 *Sea β un ordinal no cero. Para cada $\delta \in \beta$, sea $\langle A_\delta, <_\delta\rangle$ un orden lineal. Si para toda $\delta \in \beta$ se tiene que* $\mathrm{cf}\left(\left\langle A_\delta, <_\delta\right\rangle\right) = 1$*, entonces* $\mathrm{cf}\left(L_{\delta\in\beta}\left\langle A_\delta, <_\delta\right\rangle\right) = 1$.

Demostración. Como para toda $\delta \in \beta$ se tiene que $\mathrm{cf}\left(\left\langle A_\delta, <_\delta\right\rangle\right) = 1$, para cada $\delta \in \beta$ sea x_δ el máximo de A_δ. Definimos $a \in \bigtimes_{\delta\in\beta} A_\delta$ como $a(\delta) = x_\delta$. Entonces a es el máximo de $L_{\delta\in\beta}\left\langle A_\delta, <_\delta\right\rangle$, por lo tanto, $\mathrm{cf}\left(L_{\delta\in\beta}\left\langle A_\delta, <_\delta\right\rangle\right) = 1$.

$\dashv$

Corolario 4.23 *Sea β un ordinal no cero. Para cada $\delta \in \beta$, sea $\langle A_\delta, <_\delta\rangle$ un orden lineal. Si para toda $\delta \in \beta$ se tiene que* $\mathrm{coin}\left(\left\langle A_\delta, <_\delta\right\rangle\right) = 1$*, entonces* $\mathrm{coin}\left(L_{\delta\in\beta}\left\langle A_\delta, <_\delta\right\rangle\right) = 1$.

Al analizar el entorno de un elemento del producto lexicográfico nos tenemos que enforcar en los "últimos" estratos, pero esto añade una dificultad extra: ahora también interviene la cofinalidad del ordinal β con el que indexamos.

Dividiremos el análisis en dos casos, cuando β es un ordinal límite y cuando β es un ordinal sucesor.

Teorema 4.24 *Sea β un ordinal límite. Para cada $\delta \in \beta$, sea $\langle A_\delta, <_\delta\rangle$ un orden lineal no vacío y sin extremos. Entonces, todo elemento del producto lexicográfico $L_{\delta\in\beta}\langle A_\delta, <_\delta\rangle$ tiene entorno* $\left\langle \mathrm{cf}\left(\beta\right), \mathrm{cf}\left(\beta\right)^*\right\rangle$.

Demostración. Sea $x \in \bigtimes_{\delta\in\beta} A_\delta$. Como todos los órdenes $\langle A_\delta, <_\delta\rangle$ no tienen extremos, para cada $\delta \in \beta$, sea $a_\delta \in A_\delta$ tal que $a_\delta <_\delta x(\delta)$.

Para cada $\alpha \in \beta$, definimos $d_\alpha \in \bigtimes_{\delta\in\beta} A_\delta$ como $d_\alpha(\alpha) = a_\alpha$ y para toda $\delta \in \beta$ con $\delta \neq \alpha$, $d_\alpha(\delta) = x(\delta)$. Por construcción, para toda $\alpha \in \beta$ se tiene que $d_\alpha <_L x$. Además, $d_\alpha <_L d_{\mathrm{s}(\alpha)}$, pues $d_\alpha(\alpha) = a_\alpha <_\alpha x(\alpha) = d_{\mathrm{s}(\alpha)}(\alpha)$. Sea $D = \{d_\alpha : \alpha \in \beta\}$, notemos que D es isomorfo a β y $D \subseteq x{\downarrow}^L$.

Veamos que D es cofinal en $x{\downarrow}^L$. Supongamos que $c <_L x$. Sea γ la primera diferencia entre c y x, entonces $c(\gamma) <_\gamma x(\gamma)$. Fijémonos en $d_{\mathrm{s}(\gamma)}$, existe pues β es un ordinal límite, entonces para toda $\delta \in \gamma$ se tiene que $c(\delta) = x(\delta) = d_{\mathrm{s}(\gamma)}(\delta)$. Y $c(\gamma) <_\gamma x(\gamma) = d_{\mathrm{s}(\gamma)}(\gamma)$. Así, $c <_L d_{\mathrm{s}(\gamma)}$. Entonces D es cofinal en $x{\downarrow}^L$. Por lo tanto, $\mathrm{cf}\left(x{\downarrow}^L\right) = \mathrm{cf}\left(\beta\right)$.

Con una construcción simétrica, se demuestra que coin $\left(x{\uparrow}^L\right) = \mathrm{cf}\,(\beta)$. Por lo tanto, x tiene entorno $\langle \mathrm{cf}\,(\beta)\,, \mathrm{cf}\,(\beta)^*\rangle$.

$\dashv$

Notemos que en la construcción se usó que los órdenes no tenían extremos, ya que de lo contrario tendríamos que explorar muchos casos. Una mejora posible de este teorema se da si pedimos que en un subconjunto cofinal a β se tengan órdenes sin extremos y, dado $x \in \bigtimes_{\delta\in\beta} A_\delta$, definir $a_\delta <_\delta x(\delta)$ para dichos órdenes y en los demás $a_\delta \leq_\delta x(\delta)$. De esta forma se nota mejor que los "últimos" estratos son los significativos.

Veamos ahora el caso cuando β es un ordinal sucesor.

Teorema 4.25 *Sea β un ordinal. Para cada $\delta \in \mathrm{s}\,(\beta)$, sea $\langle A_\delta, <_\delta\rangle$ un orden lineal no vacío y sin extremos. Entonces, todo elemento x del producto lexicográfico $L_{\delta\in\mathrm{s}(\beta)}\,\langle A_\delta, <_\delta\rangle$ tiene entorno igual al entorno de $x(\beta)$ en $\langle A_\beta, <_\beta\rangle$.*

Demostración. Sea $x \in \bigtimes_{\delta\in\mathrm{s}(\beta)} A_\delta$. Definamos $T = \{a \in x{\downarrow}^L : \forall\delta \in \beta(a(\delta) = x(\delta))\}$, T es no vacío, pues $\langle A_\beta, <_\beta\rangle$ no tiene extremos. Observemos que si $a \in T$, entonces β es la primera diferencia entre x y a y $a(\beta) <_\beta x(\beta)$. Así, $a(\beta) \in x(\beta){\downarrow}^{A_\beta}$. Más aun, T es isomorfo a $x(\beta){\downarrow}^{A_\beta}$.

Veamos que T es cofinal en $x{\downarrow}^L$. Sea $c \in x{\downarrow}^L$, entonces $c <_L x$. Sea $a \in T$ y sea γ la primera diferencia entre c y x. Si $\gamma \in \beta$, entonces para toda $\delta \in \gamma$ se cumple que $c(\delta) = x(\delta) = a(\delta)$, además $c(\gamma) <_\gamma x(\gamma) = a(\gamma)$. Por lo tanto, $c <_L a$. Ahora, si $\gamma = \beta$, entonces $c \in T$. De modo que T es cofinal en $x{\downarrow}^L$. Por lo tanto, $\mathrm{cf}\left(x{\downarrow}^L\right) = \mathrm{cf}\,(T) = \mathrm{cf}\left(x(\beta){\downarrow}^{A_\beta}\right)$.

De manera simétrica se demuestra que coin $\left(x{\uparrow}^L\right) = \mathrm{coin}\left(c(\beta){\uparrow}^{A_\beta}\right)$. Por lo tanto, x tiene el mismo entorno en $L_{\delta\in\mathrm{s}(\beta)}\,\langle A_\delta, <_\delta\rangle$ que $x(\beta)$ en $\langle A_\beta, <_\beta\rangle$.

$\dashv$

En esta última prueba es patente que el estrato significativo para el entorno es el último. Por lo tanto, en las hipótesis del teorema basta pedir que $\langle A_\beta, <_\beta\rangle$ fuera un orden lineal sin extremos.

Analicemos ahora los huecos en el producto lexicográfico. Para ello veamos unos ejemplos para comprender el comportamiento de las cortaduras en el producto lexicográfico.

Ejemplo 4.26 Analicemos una cortadura en el orden $2((5))$. Sean $a = \langle 0, 1, 0, 0, 1\rangle$ y $b = \langle 0, 1, 0, 1, 0\rangle$ elementos de $2((5))$. Definamos $C = a\underline{\downarrow}$ y $D = b\underline{\uparrow}$, en la figura 4.2 se muestra la representación gráfica de estos conjuntos. Dado que a y b son vecinos en orden $2((5))$, notemos que $\langle C, D\rangle$ es una cortadura de $2((5))$. En la figura 4.2 también se muestra la construcción del orden $2((5))$ y la construcción de a y b. Si analizamos el corte, representado por una línea punteada vertical entre a y b en la figura 4.2, podemos notar que los elementos de C más cerca a D y los elementos de D más cercanos a C, comparten una construcción similar. Más concretamente a y b comparten la misma construcción hasta el estrato 2 y en el estrato 3 se separan. Además, cualquier elemento de C no comparte una construcción similar después del estrato 2. Así, podríamos decir que C y D se separan en el estrato 3 de la construcción, o que la primera diferencia de C y D se da en el estrato 3, recordando al orden lexicográfico.

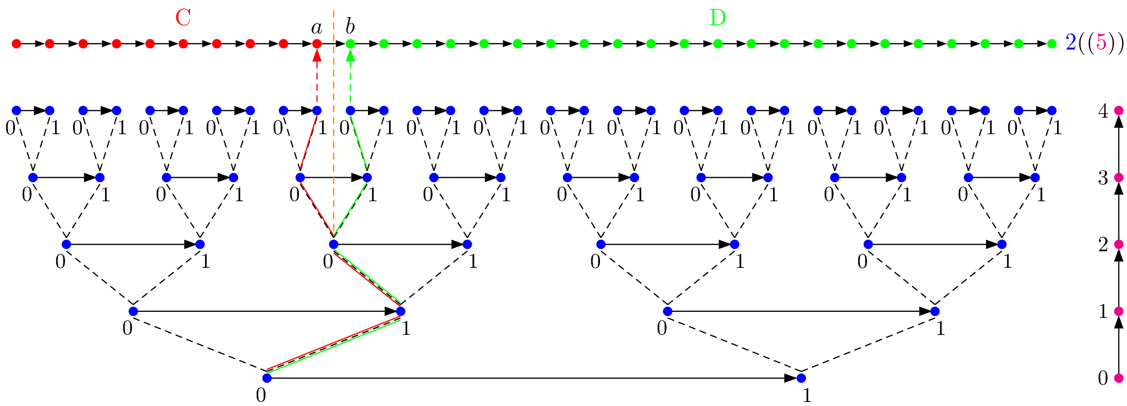

Figura 4.2: Representación gráfica de una cortadura en el orden 2((5)).

Formalicemos y generalicemos lo descrito en el ejemplo anterior. Sea $\langle C, D\rangle$ una cortadura de $L_{\delta\in\beta}\langle A_\delta, <_\delta\rangle$. Definamos $S \subseteq \beta$ como

$$S = \{\gamma \in \beta : \exists a \in C\, \exists b \in D \forall\, \delta \in \gamma(a(\delta) = b(\delta))\},$$

notemos que S es transitivo, por lo que, S es un ordinal. Además, por vacuidad siempre se tiene que $0 \in S$.

Ejemplo 4.27 Siguiendo el ejemplo 4.26, en la figura 4.3 se muestra el conjunto $S \subseteq 5$. Para este caso $S = \{0, 1, 2, 3\}$. El conjunto S nos indica los estratos en los que C y D están más cerca, siendo el estrato 3 donde se separan. Si llamamos σ al máximo de S, en este caso 3, σ es el estrato donde C y D ya no comparten elementos con una construcción igual hasta ese estrato, pero para todos los anteriores sí. Además, σ nos indica el primer estrato de separación entre C y D, o la profundidad de la cortadura, como se sugiere en la figura 4.3. Notemos también que los testigos que justifican la pertenencia de 3 a S, siempre comparten la misma construcción hasta el estrato 2. Pero también ocurre con los testigos de 2, 1 y de 0. Siendo $\langle 0, 1, 0\rangle$ el segmento inicial de construcción más largo común entre los elementos de C y D.

Como notamos en el ejemplo anterior, dado $\gamma \in S$ y $\delta \in \gamma$, $a(\delta)$ y $b(\delta)$ no dependen de la elección del $a \in C$ ni del $b \in D$, es decir, $a(\delta)$ y $b(\delta)$ es el mismo elemento de A_δ para todos los testigos a y b.

Podemos pensar en un segmento inicial de construcción que es común entre algunos elementos de C y D. Como vimos en el ejemplo 4.27, el elemento máximo de S nos proporciona el segmento más largo. Sin embargo, no siempre S tiene máximo. Así que definiremos $\sigma = \bigcup S$, es decir, el supremo de S.

Definición 4.28 Sea β un ordinal no cero. Para cada $\delta \in \beta$, sea $\langle A_\delta, <_\delta\rangle$ un orden lineal no vacío. Sean C y D subconjuntos de $\bigtimes_{\delta\in\beta} A_\delta$, tal que $\langle C, D\rangle$ es una cortadura de $L_{\delta\in\beta}\langle A_\delta, <_\delta\rangle$. Definamos la **primera diferencia entre C y D** como

$$\sigma = \bigcup\{\gamma \in \beta : \exists a \exists b(a \in C \wedge b \in D \wedge \forall \delta \in \gamma(a(\delta) = b(\delta)))\}.$$

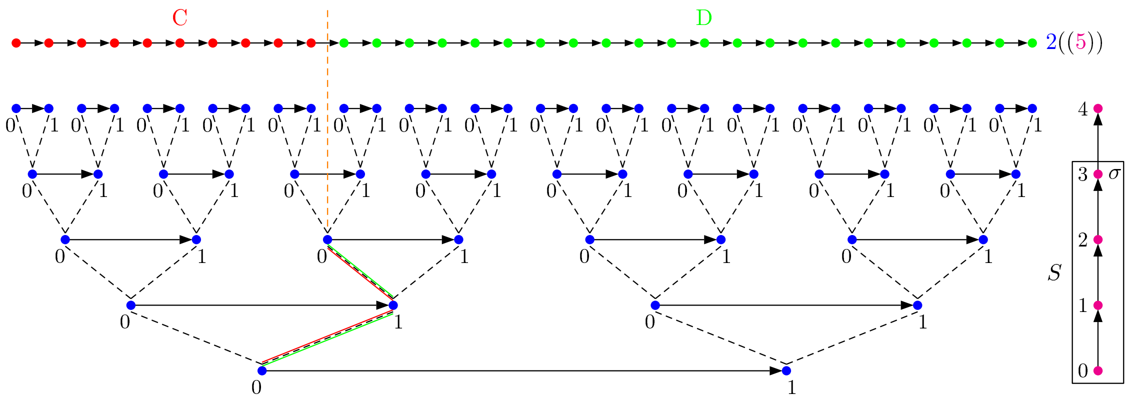

Figura 4.3: Representación gráfica de una cortadura en el orden 2((5)) y el conjunto S correspondiente.

El ordinal σ nos dará mucha información sobre la cortadura. Como hemos comentado, σ nos indica el primer estrato de construcción donde los elementos C y D ya no comparten segmentos iniciales idénticos. Otra forma de pensar a σ es que a partir del el estrato σ, la construcción de los elementos de C y D se separan por completo, que visualmente podríamos pensar en qué tan profunda fue la cortadura. Además, σ nos ayudará a definir dicho "segmento inicial más largo", al cual llamaremos tronco común de construcción de C y D. En la definición de σ ya se involucran a los elementos de C y D que coinciden en las primeras entradas, por lo que, al tomar el supremo es evidente la relación de σ con dicho tronco común de construcción.

Definición 4.29 Sea β un ordinal no cero. Para cada $\delta \in \beta$, sea $\langle A_\delta, <_\delta \rangle$ un orden lineal no vacío. Sean C y D subconjuntos de $\bigtimes_{\delta\in\beta} A_\delta$, tales que $\langle C, D\rangle$ es una cortadura de $L_{\delta\in\beta} \langle A_\delta, <_\delta\rangle$. Sean $\gamma \in \beta$ y $t \in \bigtimes_{\delta\in\gamma} A_\delta$. Decimos que t **es el tronco común de construcción de** C **y** D si se cumple lo siguiente:

(i) γ es la primera diferencia entre C y D.

(ii) $\forall \xi \in S \forall a \in C \forall b \in D(\forall\, \delta \in \xi(a(\delta) = b(\delta)) \to \forall\, \delta \in \xi(a(\delta) = b(\delta) = t(\delta)))$.

Por el inciso (ii) de la definición, tenemos directamente que el tronco común de construcción es único dados C y D. Veamos que siempre existe dicho tronco común de construcción.

Teorema 4.30 *Sea β un ordinal no cero. Para cada $\delta \in \beta$, sea $\langle A_\delta, <_\delta\rangle$ un orden lineal no vacío. Sean C y D subconjuntos de $\bigtimes_{\delta\in\beta} A_\delta$, tales que $\langle C, D\rangle$ es una cortadura del orden $L_{\delta\in\beta} \langle A_\delta, <_\delta\rangle$. Sea σ la primera diferencia entre C y D. Entonces existe $t \in \bigtimes_{\delta\in\sigma} A_\delta$ tal que*

$$\forall \xi \in S \forall a \in C \forall b \in D(\forall\, \delta \in \xi(a(\delta) = b(\delta)) \to \forall\, \delta \in \xi(a(\delta) = b(\delta) = t(\delta))).$$

Demostración. Si $\sigma = 0$, el teorema se cumple con $t = \varnothing$. Supongamos que $\sigma \neq 0$. Definamos por recursión hasta σ los conjuntos $C_\delta \subseteq A_\delta$, $D_\delta \subseteq A_\delta$ y $t_\delta \in A_\delta$ como sigue:

$$\begin{aligned} C_\delta &= \{x \in A_\delta : \exists a \in C(\forall \xi \in \delta(a(\xi) = t_\xi) \wedge a(\delta) = x)\}, \\ D_\delta &= \{x \in A_\delta : \exists b \in D(\forall \xi \in \delta(b(\xi) = t_\xi) \wedge b(\delta) = x)\}, \text{ y} \\ t_\delta &\in C_\delta \cap D_\delta. \end{aligned}$$

Los conjuntos t_δ formarán el tronco común de construcción de C y D.

Veamos que están bien definidos, es decir, veamos que $C_\delta \cap D_\delta$ es un unitario. Procedamos por inducción fuerte: Sea $\gamma \in \sigma$, supongamos que para toda $\delta \in \gamma$, los conjuntos C_δ, D_δ y t_δ están bien definidos. Como $\gamma \in \sigma$, existe $\epsilon \in S$ tal que $\gamma \in \epsilon$. Entonces existen $a \in C$ y $b \in D$ tales que para toda $\delta \in \epsilon$, $a(\delta) = b(\delta)$.

Demostremos que para toda $\delta \in \gamma$ se tiene que $a(\delta) = b(\delta) = t_\delta$, procedamos nuevamente por inducción fuerte. Sea $\delta \in \gamma$, supongamos que para toda $\xi \in \delta$ se cumple que $a(\xi) = b(\xi) = t_\xi$. Notemos que $a(\delta) \in C_\delta$ y $b(\delta) \in D_\delta$. Como $a(\delta) = b(\delta)$, $a(\delta) \in C_\delta \cap D_\delta$. Como $\delta \in \gamma$, $C_\delta \cap D_\delta = \{t_\delta\}$, por hipótesis de la primera inducción. Así, $a(\delta) = b(\delta) = t_\delta$.

Entonces $a(\gamma) \in C_\gamma$ y $b(\gamma) \in D_\gamma$. Como $\gamma \in \epsilon$, $a(\gamma) = b(\gamma)$. Así, $C_\gamma \cap D_\gamma \neq \varnothing$.

Vemos que $C_\gamma \cap D_\gamma$ es un unitario. Sean x, $y \in C_\gamma \cap D_\gamma$, supongamos que $x \neq y$. Supongamos sin pérdida de la generalidad que $x <_\gamma y$. Como $x \in D_\gamma$, existe $w \in D$ tal que para toda $\delta \in \gamma$ se cumple que $w(\delta) = t_\delta$ y además $w(\gamma) = x$. Como $y \in C_\gamma$, existe $z \in C$ tal que para toda $\delta \in \gamma$ se cumple que $z(\delta) = t_\delta$ y además $z(\gamma) = y$. Por lo tanto, $w <_L z$, lo cual contradice que $C <_L D$. De modo que, $x = y$ y $C_\gamma \cap D_\gamma$ es un unitario.

Por lo tanto, están bien definidos los conjuntos C_γ, D_γ y t_γ. Así, definamos $t \in \bigtimes_{\delta\in\sigma} A_\delta$ como $t(\delta) = t_\delta$.

Sean $\xi \in S$, $a \in C$ y $b \in D$ tales que para toda $\delta \in \xi$ se tiene que $a(\delta) = b(\delta)$. Demostremos que para toda $\gamma \in \xi$ se cumple que $a(\gamma) = b(\gamma) = t(\gamma)$.

Procedamos por inducción fuerte. Sea $\gamma \in \xi$, supongamos que para toda $\delta \in \gamma$ se cumple que $a(\delta) = b(\delta) = t(\delta)$. Entonces $a(\gamma) \in C_\gamma$ y $b(\gamma) \in D_\gamma$. Como $a(\gamma) = b(\gamma)$, $a(\gamma) \in C_\gamma \cap D_\gamma$. Por lo tanto, $a(\gamma) = b(\gamma) = t_\gamma = t(\gamma)$.

De esta forma, t es el tronco común de construcción de C y D.

$\dashv$

Veamos un lema que nos ayudará en las siguientes demostraciones.

Lema 4.31 *Sea β un ordinal no cero. Para cada $\delta \in \beta$, sea $\langle A_\delta, <_\delta\rangle$ un orden lineal no vacío. Sean C y D subconjuntos de $\bigtimes_{\delta\in\beta} A_\delta$, tales que $\langle C, D\rangle$ es una cortadura de $L_{\delta\in\beta}\langle A_\delta, <_\delta\rangle$. Sean σ la primera diferencia entre C y D, y t el tronco común de construcción de C y D. Sea $x \in \bigtimes_{\delta\in\beta} A_\delta$. Para cualquier $\gamma \in \sigma$ si para toda $\delta \in \gamma$ se cumple que $x(\delta) = t(\delta)$, entonces*

(i) *si $x(\gamma) <_\gamma t(\gamma)$, $x \in C$, y*

(ii) *si $t(\gamma) <_\gamma x(\gamma)$, $x \in D$.*

Demostración. Primero supongamos que $x(\gamma) <_\gamma t(\gamma)$. Como $t(\gamma) \in C_\gamma$, existe $a \in C$ tal que para toda $\delta \in \gamma$, $a(\delta) = t(\delta)$ y $a(\gamma) = t(\gamma)$. Entonces γ es la primera diferencia de x y a. Así, $x <_L a$. Como $C <_L D$, $x \in C$.

El segundo inciso se demuestra de forma análoga.

$\dashv$

Usaremos a β, σ y $t(\delta) = t_\delta$ para analizar las cortaduras del producto lexicográfico.

El primer caso que analizaremos es cuando $\sigma = \beta$. En este caso σ es un ordinal límite y $t \in \bigtimes_{\delta\in\beta} A_\delta$. Como $\langle C, D\rangle$ es una cortadura, $t \in C$ o $t \in D$ pero no en ambos. Si $t \in C$, $C = t\underline{\downarrow}$ y $D = t\uparrow$. Por el teorema 4.24, la cortadura $\langle C, D\rangle$ es de tipo $\langle 1, \mathrm{cf}\,(\beta)^*\rangle$. Ahora, si $t \in D$, $D = t\underline{\uparrow}$ y $C = t\downarrow$. Nuevamente por el teorema 4.24, la cortadura $\langle C, D\rangle$ es de tipo $\langle \mathrm{cf}\,(\beta)\,, 1\rangle$.

Resumamos lo anterior en un teorema.

Teorema 4.32 *Sea β un ordinal no cero. Para cada $\delta \in \beta$, sea $\langle A_\delta, <_\delta\rangle$ un orden lineal no vacío. Sean C y D subconjuntos de $\bigtimes_{\delta\in\beta} A_\delta$, tales que $\langle C, D\rangle$ es una cortadura del orden $L_{\delta\in\beta}\,\langle A_\delta, <_\delta\rangle$. Entonces $\langle C, D\rangle$ es de tipo*

(i) $\langle 1, \mathrm{cf}\,(\beta)^*\rangle$, *si $\sigma = \beta$ y $t \in C$;*

(ii) $\langle \mathrm{cf}\,(\beta)\,, 1\rangle$, *si $\sigma = \beta$ y $t \in D$;*

donde σ es la primera diferencia entre C y D, y t es el tronco común de construcción de C y D.

Ahora veamos el caso cuando $\sigma \in \beta$. En este caso analizaremos los conjuntos C_σ, D_σ definidos como

$$\begin{aligned} C_\sigma &= \{x \in A_\sigma : \exists a \in C(\forall \xi \in \sigma(a(\xi) = t_\xi) \wedge a(\sigma) = x)\}, \text{ y} \\ D_\sigma &= \{x \in A_\sigma : \exists b \in D(\forall \xi \in \sigma(b(\xi) = t_\xi) \wedge b(\sigma) = x)\}. \end{aligned}$$

Dado que σ es el supremo de S, tenemos otros dos casos, $\sigma \in S$ o $\sigma \notin S$. Analicemos primero el caso en el que $\sigma \notin S$.

Si $\sigma \notin S$, entonces σ es un ordinal límite y no existen $a \in C$ y $b \in D$ tales que para toda $\delta \in \sigma$, $a(\delta) = b(\delta)$. Así, $C_\sigma = \varnothing$ o $D_\sigma = \varnothing$, pero no ambos a la vez.

Supongamos que $D_\sigma = \varnothing$. Sea $\langle C', D'\rangle$ una cortadura de $L_{\delta\in\sigma}\,\langle A_\delta, <_\delta\rangle$ definida como $C' = t\underline{\downarrow}$ y $D' = t\uparrow$. Por el teorema 4.24, la cortadura $\langle C', D'\rangle$ es de tipo $\langle 1, \mathrm{cf}\,(\sigma)^*\rangle$. Veamos que la coinicialidad de D es igual a $\mathrm{cf}\,(\sigma)$. Para cada $\delta \in \beta$ sea $a_\delta \in A_\delta$ tales que si $\delta \in \sigma$, $t_\delta <_\delta a_\delta$, y si $\sigma \leq \delta$, a_δ es arbitraria. Para cada $\delta \in \sigma$, definamos $d_\delta \in \bigtimes_{\delta\in\beta} A_\delta$ como

$$d_\delta(\xi) = \begin{cases} t_\xi & \text{si } \xi \in \sigma \text{ y } \xi \neq \delta, \\ a_\xi & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Definamos $T \subseteq \bigtimes_{\delta\in\beta} A_\delta$ como $T = \{d_\delta : \delta \in \sigma\}$. Notemos que T es isomorfo a σ^*, pues si $\delta \in \sigma$ y $\xi \in \delta$, entonces $d_\delta(\xi) = t_\xi <_\xi a_\xi = d_\xi(\xi)$. Veamos que $T \subseteq D$. Sea $\delta \in \sigma$, entonces para toda $\xi \in \delta$, $d_\delta(\xi) = t_\xi$, y $t_\delta <_\delta d_\delta(\delta)$. Por el lema 4.31, $d_\delta \in D$. Por lo tanto, $T \subseteq D$. Por último demostremos que T es coinicial en D. Sea $b \in D$, como $D_\sigma = \varnothing$, existe $\xi \in \sigma$ tal que $b(\xi) \neq t_\xi$. Sea γ el mínimo que cumple lo anterior. Entonces, $d_{\mathrm{s}(\gamma)}(\gamma) = t_\gamma \neq b(\gamma)$ y para toda $\xi \in \gamma$, $d_{\mathrm{s}(\gamma)}(\xi) = t_\xi = b(\xi)$. Así, γ es la primera diferencia entre b y $d_{\mathrm{s}(\gamma)}$. Si $b(\gamma) <_\gamma t_\gamma = d_{\mathrm{s}(\gamma)}(\gamma)$, entonces $b \in C$ por el lema 4.31, lo cual es una contradicción a que $\langle C, D\rangle$ es una cortadura. Por lo tanto, $d_{\mathrm{s}(\gamma)}(\gamma) <_\gamma b(\gamma)$ y así $d_{\mathrm{s}(\gamma)} <_L b$. De esta forma, T es coinicial en D. Por lo que, $\mathrm{coin}\,(D) = \mathrm{coin}\,(T) = \mathrm{coin}\,(\sigma^*) = \mathrm{cf}\,(\sigma)$.

Como supusimos que $D_\sigma = \varnothing$, $C_\sigma = A_\sigma$, lo cual nos indica que C_σ surge del t en el estrato anterior, es decir, del máximo de C'. De hecho, podemos pensar que todos los estratos anteriores también tienen máximo, t_δ. Esto nos sugiere usar los teoremas 4.20 y 4.22 para determinar la cofinalidad de C.

Sea $W = \{a \in \bigtimes_{\delta\in\beta} A_\delta : \forall\delta \in \sigma(a(\delta) = t_\delta)\}$. Veamos que W es un subconjunto de C. Sea $a \in W$, entonces para toda $\delta \in \sigma$ se tiene que $a(\delta) = t_\delta$. Como $D_\sigma = \varnothing$, $a(\sigma) \notin D_\sigma$, por lo que $a \notin D$. Como $\langle C, D\rangle$ es una cortadura, $a \in C$. Por lo tanto, $W \subseteq C$. Ahora veamos que W es cofinal en C. Sea $b \in C$. Si para toda $\delta \in \sigma$ se tiene que $b(\delta) = t_\delta$, entonces $b \in W$. Si existe $\delta \in \sigma$ tal que $b(\delta) \neq t_\delta$, sea γ el mínimo que cumple esto. Entonces para toda $\delta \in \gamma$ se tiene que $b(\delta) = t_\delta$ y $b(\gamma) \neq t_\gamma$. Si $t_\gamma <_\gamma b(\gamma)$, por el lema 4.31 tendríamos que $b \in D$, lo cual contradice que $\langle C, D\rangle$ es una cortadura. Por lo tanto, $b(\gamma) <_\gamma t_\gamma$. Sea $a \in W$, entonces $b <_L a$. Entonces W es cofinal en C y $\mathrm{cf}\,(W) = \mathrm{cf}\,(C)$.

Para determinar la cofinalidad de W, lo compararemos como un producto lexicográfico. Vamos que W es isomorfo a $L_{\delta\in\beta\setminus\sigma}\,\langle A_\delta, <_\delta\rangle$. Notemos que $\beta \setminus \sigma \subseteq \beta$ y, por lo tanto, es un buen orden, así que está bien definido el producto lexicográfico.

Sea $f : \bigtimes_{\delta\in\beta\setminus\sigma} A_\delta \to W$, definida como $f(x)(\xi) = t_\xi$, si $\xi \in \sigma$ y, $f(x)(\xi) = x(\xi)$, si $\xi \in \beta \setminus \sigma$. Así, f es el isomorfismo buscado.

De esta forma, la cofinalidad de C está dada por los teoremas 4.20 y 4.22 aplicados a $L_{\delta\in\beta\setminus\sigma}\,\langle A_\delta, <_\delta\rangle$.

De manera simétrica se puede tratar el caso donde $C_\sigma = \varnothing$, llegando a que $\mathrm{cf}\,(C) = \mathrm{cf}\,(\sigma)$ y $\mathrm{coin}\,(D)$ se resuelve aplicando los corolarios 4.21 y 4.23 a $L_{\delta\in\beta\setminus\sigma}\,\langle A_\delta, <_\delta\rangle$. Resumamos lo anterior en el siguiente teorema.

Teorema 4.33 *Sea β un ordinal no cero. Para cada $\delta \in \beta$, sea $\langle A_\delta, <_\delta\rangle$ un orden lineal no vacío. Sean C y D subconjuntos de $\bigtimes_{\delta\in\beta} A_\delta$, tales que $\langle C, D\rangle$ es una cortadura del orden $L_{\delta\in\beta}\,\langle A_\delta, <_\delta\rangle$. Sean σ la primera diferencia entre C y D, y t el tronco común de construcción de C y D. Si $\sigma \in \beta$ y no existen $a \in C$ y $b \in D$ tales que para toda $\delta \in \sigma$, $a(\delta) = b(\delta)$, entonces $\langle C, D\rangle$ es de tipo*

(i) $\langle 1, \mathrm{cf}\,(\sigma)^*\rangle$, *si existe $a \in C$ tal que para toda $\delta \in \sigma$, $a(\delta) = t(\delta)$; y para toda $\delta \in \beta \setminus \sigma$ se tiene que* $\mathrm{cf}\,(\langle A_\delta, <_\delta\rangle) = 1$;

(ii) $\langle \mathrm{cf}\,(\langle A_\gamma, <_\gamma\rangle), \mathrm{cf}\,(\sigma)^*\rangle$, *si existe $a \in C$ tal que para toda $\delta \in \sigma$, $a(\delta) = t(\delta)$; y existe $\delta \in \beta \setminus \sigma$ tal que* $\mathrm{cf}\,(\langle A_\delta, <_\delta\rangle) \geq \omega$ *y γ es el mínimo en $\beta \setminus \sigma$ tal que* $\mathrm{cf}\,(\langle A_\gamma, <_\gamma\rangle) \geq \omega$;

(iii) $\langle \mathrm{cf}\,(\sigma)\,, 1\rangle$, *si existe* $b \in D$ *tal que para toda* $\delta \in \sigma$, $b(\delta) = t(\delta)$; *y para toda* $\delta \in \beta \setminus \sigma$ *se tiene que* $\mathrm{coin}\,(\langle A_\delta, <_\delta\rangle) = 1$;

(iv) $\langle \mathrm{cf}\,(\sigma)\,, \mathrm{coin}\,(\langle A_\gamma, <_\gamma\rangle)^*\rangle$, *si existe* $b \in D$ *tal que para toda* $\delta \in \sigma$, $b(\delta) = t(\delta)$; *y existe* $\delta \in \beta \backslash \sigma$ *tal que* $\mathrm{coin}\,(\langle A_\delta, <_\delta\rangle) \geq \omega$ *y* γ *es el mínimo en* $\beta \backslash \sigma$ *tal que* $\mathrm{coin}\,(\langle A_\gamma, <_\gamma\rangle) \geq \omega$.

Ahora exploremos el caso en que $\sigma \in S$. En este caso $C_\sigma \neq \varnothing$ y $D_\sigma \neq \varnothing$. Como σ es el máximo de S, $C_\sigma \cap D_\sigma = \varnothing$. Por su construcción $C_\sigma <_\sigma D_\sigma$. Como $\langle C, D\rangle$ es una cortadura, $C_\sigma \cup D_\sigma = A_\sigma$. Por lo tanto, $\langle C_\sigma, D_\sigma\rangle$ es una cortadura de $\langle A_\sigma, <_\sigma\rangle$. Aquí tenemos varios casos dependiendo del tipo de cortadura de $\langle C_\sigma, D_\sigma\rangle$.

Veamos primero el caso de un hueco en A_σ. Para cada $\delta \in \beta$ tal que $\sigma \in \delta$ sea $t_\delta \in A_\delta$. Definamos $T \subseteq C$ como $T = \{a \in C : \forall \delta \in \beta(\delta \neq \sigma \to a(\delta) = t_\delta)\}$. Notemos que T es isomorfo a C_σ. Veamos que T es cofinal en C.

Sea $x \in C$. Supongamos que existe $\delta \in \sigma$ tal que $x(\delta) \neq t_\delta$. Sea γ el mínimo que lo cumple y sea $a \in T$. Entonces γ es la mínima diferencia de x y a. Si ocurriera que $t_\gamma <_\gamma x(\gamma)$, por el lema 4.31, $x \in D$, lo cual contradice que $\langle C, D\rangle$ es una cortadura. Entonces $x(\gamma) <_\gamma t_\gamma = a(\gamma)$, así, $x <_L a$. Ahora, si para toda $\delta \in \sigma$ se tiene que $x(\delta) = t_\delta$, entonces $x(\sigma) \in C_\sigma$. Sea $y \in C_\sigma$ tal que $x(\sigma) <_\sigma y$. Como C_σ no tiene máximo, esto es posible. Definimos a como $a(\sigma) = y$ y para toda $\delta \in \beta$ si $\delta \neq \sigma$, $a(\delta) = t_\delta$. Observemos que $a \in T$ y σ es la primera diferencia entre a y x. Así, $x <_L a$. Por lo tanto, T es cofinal en C. Entonces $\mathrm{cf}\,(C) = \mathrm{cf}\,(T) = \mathrm{cf}\,(C_\sigma)$.

De manera simétrica se demuestra que $\mathrm{coin}\,(D) = \mathrm{coin}\,(D_\sigma)$. Por lo tanto, $\langle C, D\rangle$ es de tipo $\langle \mathrm{cf}\,(C_\sigma)\,, \mathrm{coin}\,(D_\sigma)^*\rangle$.

Ahora, si C_σ tiene máximo o D_σ tiene mínimo, se aplican los teoremas de 4.20 y 4.22 y los corolarios 4.21 y 4.23 en los casos respectivos.

Teorema 4.34 *Sea* β *un ordinal no cero. Para cada* $\delta \in \beta$, *sea* $\langle A_\delta, <_\delta\rangle$ *un orden lineal no vacío. Sean* C *y* D *subconjuntos de* $\bigtimes_{\delta\in\beta} A_\delta$, *tales que* $\langle C, D\rangle$ *es una cortadura del orden* $L_{\delta\in\beta}\langle A_\delta, <_\delta\rangle$. *Sean* σ *la primera diferencia entre* C *y* D, *y* t *el tronco común de construcción de* C *y* D. *Supongamos que* $\sigma \in \beta$, *sean* $C_\sigma \subseteq A_\sigma$ *y* $D_\sigma \subseteq A_\sigma$, *definidos como*

$$C_\sigma = \{x \in A_\sigma : \exists a \in C(\forall \xi \in \sigma(a(\xi) = t(\xi)) \wedge a(\sigma) = x)\}, \ \ y$$
$$D_\sigma = \{x \in A_\sigma : \exists b \in D(\forall \xi \in \sigma(b(\xi) = t(\xi)) \wedge b(\sigma) = x)\}.$$

Si $C_\sigma \neq \varnothing$ *y* $D_\sigma \neq \varnothing$, *entonces* $\langle C, D\rangle$ *es de tipo*

(i) $\langle 1, 1\rangle$, *si* $\langle C_\sigma, D_\sigma\rangle$ *es una cortadura de tipo* $\langle 1, 1\rangle$; *para toda* $\delta \in \beta \setminus \mathrm{s}\,(\sigma)$ *se tiene que* $\mathrm{cf}\,(\langle A_\delta, <_\delta\rangle) = 1$; *y para toda* $\delta \in \beta \setminus \mathrm{s}\,(\sigma)$ *se tiene que* $\mathrm{coin}\,(\langle A_\delta, <_\delta\rangle) = 1$;

(ii) $\langle \mathrm{cf}\,(\langle A_\gamma, <_\gamma\rangle)\,, 1\rangle$, *si* $\langle C_\sigma, D_\sigma\rangle$ *es una cortadura de tipo* $\langle 1, 1\rangle$; *existe* $\delta \in \beta \setminus \mathrm{s}\,(\sigma)$ *tal que* $\mathrm{cf}\,(\langle A_\delta, <_\delta\rangle) \geq \omega$ *y* γ *es el mínimo en* $\beta \setminus \mathrm{s}\,(\sigma)$ *que lo cumple; y para toda* $\delta \in \beta \setminus \mathrm{s}\,(\sigma)$ *se tiene que* $\mathrm{coin}\,(\langle A_\delta, <_\delta\rangle) = 1$;

(iii) $\langle 1, \mathrm{coin}\,(\langle A_\gamma, <_\gamma\rangle)^*\rangle$, *si* $\langle C_\sigma, D_\sigma\rangle$ *es una cortadura de tipo* $\langle 1, 1\rangle$; *para toda* $\delta \in \beta \setminus \mathrm{s}\,(\sigma)$ *se tiene que* $\mathrm{cf}\,(\langle A_\delta, <_\delta\rangle) = 1$; *y existe* $\delta \in \beta \setminus \mathrm{s}\,(\sigma)$ *tal que* $\mathrm{coin}\,(\langle A_\delta, <_\delta\rangle) \geq \omega$ *y* γ *es el mínimo en* $\beta \setminus \mathrm{s}\,(\sigma)$ *que lo cumple;*

(iv) $\langle \mathrm{cf}\left(\langle A_\gamma, <_\gamma\rangle\right), \mathrm{coin}\left(\langle A_\xi, <_\xi\rangle\right)^*\rangle$, *si* $\langle C_\sigma, D_\sigma\rangle$ *es una cortadura de tipo* $\langle 1, 1\rangle$*; existe* $\delta \in \beta \setminus \mathrm{s}(\sigma)$ *tal que* $\mathrm{cf}\left(\langle A_\delta, <_\delta\rangle\right) \geq \omega$ *y* γ *es el mínimo en* $\beta \setminus \mathrm{s}(\sigma)$ *que lo cumple; y existe* $\delta \in \beta \setminus \mathrm{s}(\sigma)$ *tal que* $\mathrm{coin}\left(\langle A_\delta, <_\delta\rangle\right) \geq \omega$ *y* ξ *es el mínimo en* $\beta \setminus \mathrm{s}(\sigma)$ *que lo cumple;*

(v) $\langle \mathrm{cf}\left(C_\sigma\right), 1\rangle$, *si* $\langle C_\sigma, D_\sigma\rangle$ *es una cortadura de tipo* $\langle \omega_\epsilon, 1\rangle$*; y para toda* $\delta \in \beta \setminus \mathrm{s}(\sigma)$ *se tiene que* $\mathrm{coin}\left(\langle A_\delta, <_\delta\rangle\right) = 1$*;*

(vi) $\langle \mathrm{cf}\left(C_\sigma\right), \mathrm{coin}\left(\langle A_\gamma, <_\gamma\rangle\right)^*\rangle$, *si* $\langle C_\sigma, D_\sigma\rangle$ *es una cortadura de tipo* $\langle \omega_\epsilon, 1\rangle$*; y existe* $\delta \in \beta \setminus \mathrm{s}(\sigma)$ *tal que* $\mathrm{coin}\left(\langle A_\delta, <_\delta\rangle\right) \geq \omega$ *y* γ *es el mínimo en* $\beta \setminus \mathrm{s}(\sigma)$ *que lo cumple;*

(vii) $\langle 1, \mathrm{coin}\left(D_\sigma\right)^*\rangle$, *si* $\langle C_\sigma, D_\sigma\rangle$ *es una cortadura de tipo* $\langle 1, \omega_\epsilon\rangle$*; y para toda* $\delta \in \beta \setminus \mathrm{s}(\sigma)$ *se tiene que* $\mathrm{cf}\left(\langle A_\delta, <_\delta\rangle\right) = 1$*;*

(viii) $\langle \mathrm{cf}\left(\langle A_\gamma, <_\gamma\rangle\right), \mathrm{coin}\left(D_\sigma\right)^*\rangle$, *si* $\langle C_\sigma, D_\sigma\rangle$ *es una cortadura de tipo* $\langle 1, \omega_\epsilon\rangle$*; y existe* $\delta \in \beta \setminus \mathrm{s}(\sigma)$ *tal que* $\mathrm{cf}\left(\langle A_\delta, <_\delta\rangle\right) \geq \omega$ *y* γ *es el mínimo en* $\beta \setminus \mathrm{s}(\sigma)$ *que lo cumple;*

(ix) $\langle \mathrm{cf}\left(C_\sigma\right), \mathrm{coin}\left(D_\sigma\right)^*\rangle$, *si* $\langle C_\sigma, D_\sigma\rangle$ *es una cortadura de tipo* $\langle \omega_\epsilon, \omega_\xi\rangle$*.*

En la próxima sección nos interesarán los huecos del orden lexicográfico, así que enunciaremos un teorema recapitulando los tipos de huecos que existen.

Teorema 4.35 *Sea* β *un ordinal no cero. Para cada* $\delta \in \beta$*, sea* $\langle A_\delta, <_\delta\rangle$ *un orden lineal no vacío. Sean* C *y* D *subconjuntos de* $\bigtimes_{\delta\in\beta} A_\delta$*, tales que* $\langle C, D\rangle$ *es un hueco de* $L_{\delta\in\beta}\langle A_\delta, <_\delta\rangle$*. Sean* σ *la primera diferencia entre* C *y* D*, y* t *el tronco común de construcción de* C *y* D*. Supongamos que* $\sigma \in \beta$*, sean* $C_\sigma \subseteq A_\sigma$ *y* $D_\sigma \subseteq A_\sigma$*, definidos como*

$$C_\sigma = \{x \in A_\sigma : \exists a \in C(\forall \xi \in \sigma(a(\xi) = t(\xi)) \wedge a(\sigma) = x)\}, \text{ y}$$
$$D_\sigma = \{x \in A_\sigma : \exists b \in D(\forall \xi \in \sigma(b(\xi) = t(\xi)) \wedge b(\sigma) = x)\}.$$

Entonces el entorno del hueco $\langle C, D\rangle$ *sólo puede ser alguno de los siguientes:*

(i) $\langle \mathrm{cf}\left(\langle A_\epsilon, <_\epsilon\rangle\right), \mathrm{cf}\left(\sigma\right)^*\rangle$, *si* $D_\sigma = \varnothing$, $\epsilon \in \beta \setminus \sigma$ *es el mínimo tal que* $\mathrm{cf}\left(\langle A_\epsilon, <_\epsilon\rangle\right) \geq \omega$*.*

(ii) $\langle \mathrm{cf}\left(\sigma\right), \mathrm{coin}\left(\langle A_\epsilon, <_\epsilon\rangle\right)^*\rangle$, *si* $C_\sigma = \varnothing$, $\epsilon \in \beta \setminus \sigma$ *es el mínimo tal que* $\mathrm{coin}\left(\langle A_\epsilon, <_\epsilon\rangle\right) \geq \omega$*.*

Para los siguientes incisos, sea $\gamma \in \beta \setminus \mathrm{s}(\sigma)$ *el mínimo que cumple que* $\mathrm{cf}\left(\langle A_\gamma, <_\gamma\rangle\right) \geq \omega$ *y sea* $\xi \in \beta \setminus \mathrm{s}(\sigma)$ *el mínimo que cumple que* $\mathrm{coin}\left(\langle A_\xi, <_\xi\rangle\right) \geq \omega$*.*

(iii) $\langle \mathrm{cf}\left(\langle A_\gamma, <_\gamma\rangle\right), \mathrm{coin}\left(\langle A_\xi, <_\xi\rangle\right)^*\rangle$, *si* $\langle C_\sigma, D_\sigma\rangle$ *es una cortadura de tipo* $\langle 1, 1\rangle$ *en* A_σ*.*

(iv) $\langle \mathrm{cf}\left(C_\sigma\right), \mathrm{coin}\left(\langle A_\xi, <_\xi\rangle\right)^*\rangle$, *si* $\langle C_\sigma, D_\sigma\rangle$ *es una cortadura de tipo* $\langle \omega_\epsilon, 1\rangle$ *en* A_σ*.*

(v) $\langle \mathrm{cf}\left(\langle A_\gamma, <_\gamma\rangle\right), \mathrm{coin}\left(D_\sigma\right)^*\rangle$, *si* $\langle C_\sigma, D_\sigma\rangle$ *es una cortadura de tipo* $\langle 1, \omega_\epsilon\rangle$ *en* A_σ*.*

(vi) $\langle \mathrm{cf}\left(C_\sigma\right), \mathrm{coin}\left(D_\sigma\right)^*\rangle$, *si* $\langle C_\sigma, D_\sigma\rangle$ *es una cortadura de tipo* $\langle \omega_\epsilon, \omega_\xi\rangle$ *en* A_σ*.*

4.2.2 — El producto lexicográfico y los órdenes η_α

La propiedad de ser η_α tampoco se preserva con el producto lexicográfico, pero al igual que con los buenos órdenes se puede encontrar una condición para que esto sí suceda.

Primero veamos un lema sobre los huecos en el producto lexicográfico de órdenes η_α.

Lema 4.36 *Sea β un ordinal no cero. Para cada $\delta \in \beta$, sea $\langle E_\delta, <_\delta \rangle$ un orden η_α. Sea $\langle C, D \rangle$ un hueco del orden de $L_{\delta\in\beta} \langle E_\delta, <_\delta \rangle$. Sean σ la primera diferencia entre C y D, y t el tronco común de construcción de C y D. Entonces el entorno del hueco $\langle C, D \rangle$ es $\left\langle \omega_\epsilon, \omega_\xi^* \right\rangle$, con $\epsilon \geq \alpha$ o $\xi \geq \alpha$.*

Demostración. Analicemos cada inciso del teorema 4.35, el cual nos indica todos los entornos posibles de un hueco en el producto lexicográfico.

El inciso (i) se reduce a que el entorno de un hueco sea $\langle \omega_\epsilon, \mathrm{cf}\,(\sigma)^* \rangle$, con $\epsilon \geq \alpha$, pues la cofinalidad de $\langle E_\sigma, <_\sigma \rangle$ es mayor o igual que ω_α.

El inciso (ii) se reduce a que el entorno de un hueco sea $\left\langle \mathrm{cf}\,(\sigma)\,, \omega_\xi^* \right\rangle$, con $\xi \geq \alpha$, pues la coinicialidad de $\langle E_\sigma, <_\sigma \rangle$ es mayor o igual que ω_α.

El inciso (iii) no tiene lugar en los órdenes η_α, pues no hay ninguna cortadura de tipo $\langle 1, 1 \rangle$ en E_σ.

El inciso (iv) y (v) corresponden al entorno de un elemento en E_σ y a la cofinalidad y coinicialidad, respectivamente, de un orden η_α, por lo que se reduce a que el entorno sea $\left\langle \omega_\epsilon, \omega_\xi^* \right\rangle$, con $\epsilon \geq \alpha$ y $\xi \geq \alpha$.

El inciso (vi) nos indica un hueco en el orden $\langle E_\sigma, <_\sigma \rangle$, lo cual se reduce a que su entorno sea $\left\langle \omega_\epsilon, \omega_\xi^* \right\rangle$, con $\epsilon \geq \alpha$ o $\xi \geq \alpha$.

En todos los casos tenemos que se cumple que el entorno de $\langle C, D \rangle$ es $\left\langle \omega_\epsilon, \omega_\xi^* \right\rangle$, con $\epsilon \geq \alpha$ o $\xi \geq \alpha$

$\dashv$

Veamos bajo qué condiciones le producto lexicográfico preserva a los órdenes η_α. Aunque las demostraciones serán cortas, hay que notar que usaremos casi todos los teoremas de la sección pasada.

Teorema 4.37 *Sea β un ordinal no cero. Para cada $\delta \in \beta$, sea $\langle E_\delta, <_\delta \rangle$ un orden η_α. Si $\mathrm{cf}\,(\beta) = 1$ o $\mathrm{cf}\,(\beta) \geq \omega_\alpha$, entonces $L_{\delta\in\beta} \langle E_\delta, <_\delta \rangle$ es un orden η_α.*

Demostración.

Si $\mathrm{cf}\,(\beta) = 1$, β es un ordinal sucesor, digamos $\beta = \mathrm{s}\,(\gamma)$. Por el teorema 4.25, x tiene el mismo entorno en $L_{\delta\in\beta} \langle E_\delta, <_\delta \rangle$ que $x(\gamma)$ en $\langle E_\gamma, <_\gamma \rangle$. Como $\langle E_\gamma, <_\gamma \rangle$ es un orden η_α, $x(\gamma)$ tiene entorno $\left\langle \omega_\epsilon, \omega_\xi^* \right\rangle$ en $\langle E_\gamma, <_\gamma \rangle$, con $\epsilon,\ \xi \geq \alpha$. Por lo tanto, x tiene entorno $\left\langle \omega_\epsilon, \omega_\xi^* \right\rangle$ en $L_{\delta\in\beta} \langle E_\delta, <_\delta \rangle$, con $\epsilon,\ \xi \geq \alpha$.

Si $\mathrm{cf}(\beta) \geq \omega_\alpha$, entonces β es un ordinal límite. Por el teorema 4.24, x tiene entorno $\langle \mathrm{cf}(\beta), \mathrm{cf}(\beta)^* \rangle$ en $L_{\delta\in\beta} \langle E_\delta, <_\delta \rangle$, con $\mathrm{cf}(\beta) \geq \omega_\alpha$.

Sea $\langle A, B \rangle$ un hueco de $L_{\delta\in\beta} \langle E_\delta, <_\delta \rangle$. Por el lema 4.36, $\langle A, B \rangle$ tiene entorno $\left\langle \omega_\epsilon, \omega_\xi^* \right\rangle$, con $\epsilon \geq \alpha$ o $\xi \geq \alpha$.

Por el teorema 4.20 y el corolario 4.21, $L_{\delta\in\beta} \langle E_\delta, <_\delta \rangle$ tiene la misma cofinalidad y coinicialidad que $\langle E_0, <_0 \rangle$. Como $\langle E_0, <_0 \rangle$ es un orden η_α, ambas son mayores que ω_α.

Por lo tanto, $L_{\delta\in\beta} \langle E_\delta, <_\delta \rangle$ es un orden η_α.

$\dashv$

La condición impuesta sobre la cofinalidad de β se usa al determinar el entorno de los elementos de $L_{\delta\in\beta} \langle E_\delta, <_\delta \rangle$ y por el teorema 4.24 esta condición es necesaria.

Teorema 4.38 *Sea β un ordinal límite tal que* $\mathrm{cf}(\beta) < \omega_\alpha$. *Para cada $\delta \in \beta$ sea $\langle E_\delta, <_\delta \rangle$ un orden η_α. Entonces $L_{\delta\in\beta} \langle E_\delta, <_\delta \rangle$ no es un orden η_α.*

Demostración. Por el teorema 4.24, todos los elementos de $L_{\delta\in\beta} \langle E_\delta, <_\delta \rangle$ tienen entorno $\langle \mathrm{cf}(\beta), \mathrm{cf}(\beta)^* \rangle$. Como $\mathrm{cf}(\beta) < \omega_\alpha$, $L_{\delta\in\beta} \langle E_\delta, <_\delta \rangle$ no es un orden η_α.

$\dashv$

Corolario 4.39 *Sea β un ordinal límite. Para cada $\delta \in \beta$ sea $\langle E_\delta, <_\delta \rangle$ un orden η_α. Entonces $L_{\delta\in\beta} \langle E_\delta, <_\delta \rangle$ es un orden η_α si y sólo si* $\mathrm{cf}(\beta) \geq \omega_\alpha$.

Un caso particular del teorema 4.37 es cuando $\alpha = 0$.

Corolario 4.40 *Sea β un ordinal no cero. Para cada $\delta \in \beta$ sea $\langle E_\delta, <_\delta \rangle$ un orden η_0. Entonces $L_{\delta\in\beta} \langle E_\delta, <_\delta \rangle$ es un orden η_0.*

Demostración. Todo ordinal no cero tiene cofinalidad 1 o mayor o igual que ω_0. Por el teorema 4.37, la afirmación es cierta.

$\dashv$

Ahora veamos una aplicación del producto lexicográfico para construir órdenes η_α. Para ello usaremos un subconjunto de los órdenes $2((\omega_\alpha))$.

Definición 4.41 Definimos para cada ordinal α al **conjunto** $H_\alpha \subseteq 2((\omega_\alpha))$ como

$$\forall a (a \in H_\alpha \leftrightarrow (a \in 2((\omega_\alpha)) \wedge \exists \mu \in \omega_\alpha (a(\mu) = 1 \wedge \forall \nu \in \omega_\alpha (\mu \in \nu \rightarrow a(\nu) = 0)))).$$

Además los consideraremos con el orden lexicográfico que le hereda $2((\omega_\alpha))$.

Ejemplo 4.42 Sea a una sucesión definida como $a(\mu) = 1$ si $\mu \in \omega_0$; y $a(\mu) = 0$ si $\omega_0 \subseteq \mu \in \omega_1$. La sucesión a cumple que $a \in 2((\omega_1))$, pero $a \notin H_1$.

En cambio si definimos b como $b(\mu) = 1$ si $\mu \subseteq \omega_0$; y $b(\mu) = 0$ si $\omega_0 \in \mu \in \omega_1$. La sucesión b cumple que $b \in 2((\omega_1))$ y $b \in H_1$.

Los conjuntos H_α cumplen varias propiedades interesantes y son muy relevantes en el estudio de los órdenes universales, aunque en este trabajo veremos las relacionadas a los órdenes η_α.

Teorema 4.43 *Todos los elementos del orden H_α tienen entorno $\langle \mathrm{cf}\,(\omega_\alpha)\,, \mathrm{cf}\,(\omega_\alpha)^*\rangle$.*

Demostración. Sea $a \in H_\alpha$, entonces existe $\mu \in \omega_\alpha$ tal que $a(\mu) = 1$ y para toda ν mayor que μ se tiene que $a(\nu) = 0$. Para cada $\tau \in \omega_\alpha$ mayor que μ, definamos $b_\tau \in H_\alpha$ como sigue:

$$b_\tau(\nu) = \begin{cases} a(\nu) & \text{si } \nu < \mu, \\ 0 & \text{si } \nu = \mu, \\ 1 & \text{si } \mu < \nu \leq \tau, \text{ y} \\ 0 & \text{si } \tau < \nu. \end{cases}$$

Notemos que para cualquier $\tau > \mu$ se tiene que $b_\tau < a$, pues la primera diferencia entre ambos es μ, y se cumple que $b_\tau(\mu) = 0 < 1 = a(\tau)$.

Veamos que $\{b_\tau : \mu < \tau < \omega_\alpha\}$, es cofinal en $a{\downarrow}$. Sea $c \in H_\alpha$ tal que $c < a$. Sea i la primera diferencia entre c y a. Como $c(i) < a(i)$, $a(i) = 1$ y, por lo tanto, i tiene que ser menor o igual que μ. Si $i < \mu$, se tiene enseguida que $c < b_{\mu+1}$. Supongamos entonces que $i = \mu$. Como $c \in H_\alpha$, existe $\xi \in \omega_\alpha$ tal que $c(\xi) = 1$ y para toda $\nu > \xi$, $c(\nu) = 0$. Así, $c < b_{\text{máx}\{\mu,\xi\}+1}$. Por lo tanto, $a{\downarrow}$ tiene cofinalidad igual a $\mathrm{cf}\,(\omega_\alpha)$.

Por otro lado, para cada $\tau \in \omega_\alpha$ definamos $d_\tau \in H_\alpha$ como sigue:

$$d_\tau(\nu) = \begin{cases} a(\nu) & \text{si } \nu \leq \mu, \\ 0 & \text{si } \mu < \nu \text{ y } \nu \neq \tau \text{ ; y} \\ 1 & \text{si } \nu = \tau. \end{cases}$$

Notemos que para cualquier $\tau > \mu$ se tiene que $a < d_\tau$, pues la primera diferencia entre ellos es τ y además se cumple que $a(\tau) = 0 < 1 = d_\tau(\tau)$.

Veamos que $\{d_\tau : \mu < \tau < \omega_\alpha\}$, es coinicial en $a{\uparrow}$. Sea $c \in H_\alpha$ tal que $c > a$. Sea i la primera diferencia entre c y a. Como $a(i) < c(i)$, $a(i) = 0$ y, por lo tanto, $i \neq \mu$. Si $i < \mu$, $b_{\mu+1}(i) = a(i) < c(i)$. Supongamos que $i > \mu$, entonces $b_{i+1}(i) = 0 < c(i)$. Por lo tanto, $\{d_\tau : \mu < \tau < \omega_\alpha\}$ es coinicial en $a{\uparrow}$. Así, la coinicialidad de $a{\uparrow}$ es igual a $\mathrm{cf}\,(\omega_\alpha)$.

De este modo, todo elemento del orden H_α tiene entorno $\langle \mathrm{cf}\,(\omega_\alpha)\,, \mathrm{cf}\,(\omega_\alpha)^*\rangle$.

$\dashv$

Antes de analizar los huecos en los órdenes H_α, veamos un lema que nos muestra cómo se comportan los órdenes $2((\omega_\alpha))$.

Lema 4.44 *Todo conjunto no vacío de $2((\omega_\alpha))$ tiene supremo e ínfimo.*

Demostración. Sea $C \subseteq 2((\omega_\alpha))$. Definamos para cada $\delta \in \omega_\alpha$ a $C_\delta \subseteq 2$ y $\tau_\delta \in C_\delta$, como sigue:

$$\begin{aligned} C_\delta &= \{x \in 2 : \exists a \in C(\forall \xi \in \delta(a(\xi) = \tau_\xi) \wedge a(\delta) = x)\}, \\ \tau_\delta &= \text{máx}\, C_\delta. \end{aligned}$$

Se puede demostrar que C_δ y τ_δ están bien definidos de manera análoga a como se demuestra que el tronco común de construcción está bien definido.

Sea $\tau \in 2((\omega_\alpha))$ definido como $\tau(\delta) = \tau_\delta$. Veamos que τ es el supremo de C. Sea $c \in C$. Supongamos que $c \neq \tau$, entonces sea i la primera diferencia entre ambos. Como para toda $\delta \in i$ se tiene que $c(\delta) = \tau(\delta)$, $c(i) \in C_i$. Así, $c(i) < \tau(i)$. Por lo tanto, $c \leq \tau$. Sea $b \in 2((\omega_\alpha))$ tal que $C \leq b$. Supongamos que $b \neq \tau$, sea i la primera diferencia entre b y τ. Como $\tau(i) \in C_i$, existe $a \in C$ tal que para toda $\delta \in i$, $a(\delta) = \tau_\delta$; y $a(i) = \tau(i)$. Como $a \leq b$ y $a(i) = \tau(i)$, $\tau(i) = a(i) < b(i)$. De modo que, $\tau \leq b$. Por lo tanto, τ es el supremo de C.

Si cambiamos la definición de τ_δ como el mínimo de C_δ y procedemos de manera análoga, obtenemos el ínfimo de C.

$\dashv$

Teorema 4.45 *Todo hueco de H_α tiene entorno $\left\langle \omega_\epsilon, \omega_\xi^* \right\rangle$ con ϵ o ξ igual a* $\mathrm{cf}\,(\omega_\alpha)$.

Demostración. Sea $\langle A, B \rangle$ un hueco de H_α. Como $A \subseteq 2((\omega_\alpha))$, tiene supremo en $2((\omega_\alpha))$. Sea x el supremo de A en $2((\omega_\alpha))$, x no es elemento de B pues $\langle A, B \rangle$ es un hueco. Así que $x \notin H_\alpha$. Dado que x no cumple las condiciones para pertenecer a H_α, ocurre que existe un conjunto $U \subseteq \omega_\alpha$ cofinal a ω_α tal que para todo $\nu \in U$, $x(\nu) = 1$ o existe un conjunto $V \subseteq \omega_\alpha$ cofinal a ω_α tal que para todo $\nu \in V$, $x(\nu) = 0$.

Definamos para cada $\delta \in \omega_\alpha$ a $d_\delta \in H_\alpha$ como sigue:

$$d_\delta(\nu) = \begin{cases} x(\nu) & \text{si } \nu < \delta, \\ 1 & \text{si } \nu = \delta, \text{ y} \\ 0 & \text{si } \delta < \nu. \end{cases}$$

Si existe un conjunto $U \subseteq \omega_\alpha$ cofinal a ω_α tal que para todo $\nu \in U$, $x(\nu) = 1$, veamos que $\{d_\delta : \delta \in U\}$ es cofinal a A. Para eso, primero veamos que efectivamente es un subconjunto de A. Sea $\delta \in U$. Como para toda $\nu \in U$ se tiene que $x(\nu) = 1$ y U es cofinal en ω_α, $x \neq d_\delta$. Sea i la primera diferencia entre ambos. Notemos que i tiene que ser mayor que δ, por lo tanto, $d_\delta(i) = 0$. Así, $d_\delta <_{2((\omega_\alpha))} x$. Como $\langle A, B \rangle$ es una cortadura y x es el supremo de A, se tiene que $d_\delta \in A$.

Ahora veamos que es cofinal en A. Sea $a \in A$. Como x es el supremo de A en el orden $2((\omega_\alpha))$, $a <_{2((\omega_\alpha))} x$. Sea i la primer diferencia entre a y x, entonces $a(i) < x(i)$. Notemos que d_i es tal que para toda $\nu < i$, $d_i(\nu) = x(\nu) = a(\nu)$ y $d_i(i) = 1$, así que, $a(i) < d_i(x)$. Por lo tanto, $a < d_i$. De modo que A tiene cofinalidad igual a $\mathrm{cf}\,(U) = \mathrm{cf}\,(\omega_\alpha)$.

Si existe un conjunto $V \subseteq \omega_\alpha$ cofinal a ω_α tal que para todo $\nu \in V$, $x(\nu) = 0$, veamos que $\{d_\delta : \delta \in V\}$ es coinicial a B. Verifiquemos que realmente es un subconjunto de B. Sea $\delta \in V$. Como para toda $\nu < \delta$ se tiene que $x(\nu) = d_\delta(\nu)$, y $x(\delta) = 0 < 1 = d_\delta(\delta)$, $x <_{2((\omega_\alpha))} d_\delta$. Así, d_δ es mayor al supremo de A en $2((\omega_\alpha))$, entonces d_δ es cota superior. Como $\langle A, B \rangle$ es una cortadura, $d_\delta \in B$.

Para terminar veamos que es coinicial en B. Sea $b \in B$, entonces $x <_{2((\omega_\alpha))} b$. Sea i la primera diferencia entre ambos, así, $x(i) < b(i)$. Como V es cofinal en ω_α, existe $j \in V$ tal que

$i < j$. Notemos que para toda $\nu < i$ se tiene que $d_j(\nu) = x(\nu) = b(\nu)$ y $d_j(i) = x(i) < b(i)$, por lo que, $d_j < b$. Así, B tiene coinicialidad igual a $\mathrm{cf}\,(V) = \mathrm{cf}\,(\omega_\alpha)$.

Por lo tanto, todo hueco de H_α tiene entorno $\left\langle \omega_\epsilon, \omega_\xi^* \right\rangle$ con ϵ o ξ igual a $\mathrm{cf}\,(\omega_\alpha)$.

$\dashv$

Teorema 4.46 *La cofinalidad y la coinicialidad de los órdenes H_α es $\mathrm{cf}\,(\omega_\alpha)$.*

Demostración. Realizando una construcción análoga al teorema anterior proponiendo x como la sucesión constante 0, obtenemos que la coinicialidad de H_α es igual a $\mathrm{cf}\,(\omega_\alpha)$. Y proponiendo x como la sucesión constante 1, obtenemos que la cofinalidad de H_α es igual a $\mathrm{cf}\,(\omega_\alpha)$.

$\dashv$

Con estos teoremas parece que los conjuntos H_α en general no cumplen lo necesario para ser órdenes η_α, ya que el teorema de caracterización de los órdenes η_α pide que el entorno de los elementos, el entorno de los huecos, la cofinalidad y la coinicialidad sean mayores o igual a ω_α y los teoremas nos dan las desigualdades al revés. Sin embargo, se puede dar la igualdad cuando ω_α es regular, y en ese caso sí cumplen con la caracterización de los órdenes η_α.

Teorema 4.47 *Si ω_α es regular, entonces H_α es un conjunto η_α.*

Pero recordemos que si $\langle A, <_A \rangle$ es un orden η_α, entonces también será un orden η_β, para cualquier $\beta < \alpha$. Por lo que tendremos ejemplos de órdenes η_α para cualquier α, como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 4.48 *Sea α un ordinal. Si ω_α es regular, H_α es un orden η_α. Si ω_α es singular, existe ω_γ tal que $\omega_\alpha < \omega_\gamma$ y ω_γ es regular. Así, H_γ es un orden η_α.*

Podemos simplificar el teorema recordando que $\omega_{\mathrm{s}(\alpha)}$ es regular.

Teorema 4.49 *Sea α un ordinal, entonces $H_{\mathrm{s}(\alpha)}$ es un orden η_α.*

4.2.3 — El producto lexicográfico y otras propiedades de los órdenes

Veamos cómo se relaciona el producto lexicográfico con las demás propiedades que hemos estudiado. Empecemos con los órdenes simétricos.

Teorema 4.50 *Sea β un ordinal no cero. Para cada $i \in \beta$, sea $\langle A_i, <_i \rangle$ un orden simétrico. Entonces $L_{i\in\beta} \langle A_i, <_i \rangle$ es un orden simétrico.*

Demostración. Para cada $i \in \beta$, sea f_i un isomorfismo entre $\langle A_i, <_i \rangle$ y $\langle A_i, <_i \rangle^*$. Sea $g : \bigtimes_{i\in\beta} A_i \to \bigtimes_{i\in\beta} A_i$ definida como $g(x)(i) = f_i(x(i))$. Veamos que g es un isomorfismo entre $L_{i\in\beta} \langle A, <_i \rangle$ y $(L_{i\in\beta} \langle A, <_i \rangle)^*$. Sean a, $b \in \bigtimes_{i\in\beta} A_i$, tales que $a \neq b$, entonces existe $i \in \beta$ tal que $a(i) \neq b(i)$. Como f_i es inyectiva, $f_i(a(i)) \neq f_i(b(i))$. Por lo tanto, $g(a) \neq g(b)$ y así g es inyectiva. Sea $c \in \bigtimes_{i\in\beta} A_i$, definamos $d \in \bigtimes_{i\in\beta} A_i$ como $d(i) = f_i^{-1}(c(i))$. Entonces $g(d)(i) = f_i(d(i)) = f_i(f_i^{-1}(c(i))) = c(i)$. Por lo tanto, g es biyectiva.

Sean a, $b \in \bigtimes_{i\in\beta} A_i$. Supongamos que $a <_L b$, sea i la primera diferencia entre a y b. Sea $j \in i$, entonces $a(j) = b(j)$ y $f_j(a(j)) = f_j(b(j))$. Así, para toda $j \in i$, se tiene que $g(a)(j) = g(b)(j)$. Como f_i es un isomorfismo y $a(i) <_i b(i)$, $f_i(a(i)) <_i^{-1} f_i(b(i))$. Entonces $g(b)(i) <_i g(a)(i)$ y de este modo $g(b) <_L g(a)$. Por lo tanto, $g(a) <_L^{-1} g(b)$.

Ahora supongamos que $g(a) <_L^{-1} g(b)$, entonces $g(b) <_L g(a)$. Sea i la primera diferencia entre $g(a)$ y $g(b-i)$. Como para todo $j \in i$ ocurre que $g(b)(j) = g(a)(j)$, para toda $j \in i$, $f_j(b(j)) = f_j(a(j))$. Como f_j es inyectiva, para toda $j \in i$ se tiene que $a(j) = b(j)$. Como $g(b)(i) <_i g(a)(i)$, se tiene que $f_i(b(i)) <_i f_i(a(i))$ y así $f_i(a(i)) <_i^{-1} f_i(b(i))$. Como f_i es un isomorfismo, $a(i) <_i b(i)$. Entonces $a <_L b$, pues i es la primera diferencia entre a y b. Por lo tanto, g es un isomorfismo.

Entonces $L_{i\in\beta} \langle A_i, <_i\rangle$ es un orden simétrico.

$\dashv$

Como vimos en el teorema 4.24, cuando β es límite y los órdenes no tienen extremos, todos los elementos del producto tienen entorno $\langle \mathrm{cf}(\beta), \mathrm{cf}(\beta)^*\rangle$ y en particular son densos. Cuando β es límite, el producto lexicográfico tiende a formar puntos de acumulación, así que es plausible pensar que preserva la propiedad de densidad.

Teorema 4.51 *Sea β un ordinal no cero. Para cada $i \in \beta$, sea $\langle A_i, <_i\rangle$ un orden denso. Entonces $L_{i\in\beta} \langle A_i, <_i\rangle$ es un orden denso.*

Demostración. Sean $a, b \in \bigtimes_{i\in\beta} A_i$, supongamos que $a <_L b$. Sea $i \in \beta$ la primera diferencia entre a y b, entonces para toda $j \in i$ ocurre que $a(j) = b(j)$, y $a(i) <_i b(i)$. Como $\langle A_i, <_i\rangle$ es denso, existe $x \in A_i$ tal que $a(i) <_i x <_i b(i)$. Definamos $c \in \bigtimes_{i\in\beta} A_i$ como $c(i) = x$ y para toda $j \neq i$ $c(j) = a(j)$. Entonces para toda $j \in i$, $c(j) = a(j) = b(j)$. Así, i es la primera diferencia entre a y c, y también entre b y c. Como $a(i) <_i c(i)$ y $c(i) <_i b(i)$, $a <_L c <_L b$.

Por lo tanto, $L_{i\in\beta} \langle A_i, <_i\rangle$ es un orden denso.

$\dashv$

Ya habíamos visto que el producto directo era una subrelación del producto lexicográfico, ahora veamos que el producto de órdenes es un caso particular del producto lexicográfico.

Proposición 4.52 *Sean $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ y $\langle B, \mathtt{s}\rangle$ órdenes parciales. Entonces $L_{i\in 2} \langle C_i, \mathtt{p}_i\rangle$ es isomorfo a $\langle A \times B, \mathtt{r} \cdot \mathtt{s}\rangle$; donde $C_0 = B$, $C_1 = A$, $\mathtt{p}_0 = \mathtt{s}$ y $\mathtt{p}_1 = \mathtt{r}$.*

Demostración. Definamos $f : A \times B \to \bigtimes_{i\in 2} C_i$ como $f(\langle a, b\rangle) = \{\langle 0, b\rangle, \langle 1, a\rangle\}$. Notemos que f está bien definida, pues $f(\langle a, b\rangle)(0) = b \in B = C_0$ y $f(\langle a, b\rangle)(1) = a \in A = C_1$.

Definamos $g : \bigtimes_{i\in\beta} C_i \to A \times B$ como $g(x) = \langle x(1), x(0)\rangle$. Efectivamente $g(x) \in A \times B$. Veamos que g es la inversa de f. Sea $\langle a, b\rangle \in A \times B$ y $x \in \bigtimes_{i\in\beta} C_i$, entonces

$$g \circ f(\langle a, b\rangle) = g(f(\langle a, b\rangle)) = \langle f(\langle a, b\rangle)(1), f(\langle a, b\rangle)(0)\rangle = \langle a, b\rangle, \text{ y}$$
$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\langle x(1), x(0)\rangle) = \{\langle 0, x(0)\rangle, \langle 1, x(1)\rangle\} = x.$$

Por lo tanto, f es biyectiva.

Sean $\langle a_1, b_1\rangle$, $\langle a_2, b_2\rangle \in A \times B$. Supongamos que $\langle a_1, b_1\rangle <_{A\cdot B} \langle a_2, b_2\rangle$. Tenemos dos casos, supongamos primero que $b_1 \,\mathtt{s}\, b_2$. Notemos que $f(\langle a_1, b_1\rangle)(0) = b_1$, $f(\langle a_1, b_1\rangle)(1) = a_1$, $f(\langle a_2, b_2\rangle)(0) = b_2$ y $f(\langle a_1, b_1\rangle)(1) = a_2$. Como $p_0 = \mathtt{s}$, $f(\langle a_1, b_1\rangle)(0) \,\mathtt{p}_0\, f(\langle a_2, b_2\rangle)(0)$. Por lo tanto, $f(\langle a_1, b_1\rangle) <_L f(\langle a_2, b_2\rangle)$. Para el segundo caso supongamos que $b_1 = b_2$ y $a_1 \,\mathtt{r}\, a_2$. Como $\mathtt{p}_1 = \mathtt{r}$, $f(\langle a_1, b_1\rangle)(1) \,\mathtt{p}_1\, f(\langle a_2, b_2\rangle)(1)$. Además, $f(\langle a_1, b_1\rangle)(0) = f(\langle a_2, b_2\rangle)(0)$. Entonces 1 es la primera diferencia entre $f(\langle a_1, b_1\rangle)$ y $f(\langle a_2, b_2\rangle)$. Por lo tanto, $f(\langle a_1, b_1\rangle) <_L f(\langle a_2, b_2\rangle)$.

Ahora, supongamos que $f(\langle a_1, b_1\rangle) <_L f(\langle a_2, b_2\rangle)$. Sea $i \in 2$ la primera diferencia entre $f(\langle a_1, b_1\rangle)$ y $f(\langle a_2, b_2\rangle)$, entonces $f(\langle a_1, b_1\rangle)(i) \,\mathtt{p}_i\, f(\langle a_2, b_2\rangle)(i)$ y para toda $j \in i$ se tiene que $f(\langle a_1, b_1\rangle)(j) = f(\langle a_2, b_2\rangle)(j)$. Si $i = 0$, entonces $b_1 \,\mathtt{p}_i\, b_2$, es decir, $b_1 \,\mathtt{s}\, b_2$. En ese caso, $\langle a_1, b_1\rangle <_{A\cdot B} \langle a_2, b_2\rangle$. Si $i = 1$, $b_1 = b_2$ y $a_1 \,\mathtt{p}_1\, a_2$, es decir, $a_1 \,\mathtt{r}\, a_2$. Así, $\langle a_1, b_1\rangle <_{A\cdot B} \langle a_2, b_2\rangle$.

Por lo tanto, f es un isomorfismo.

$\dashv$

Usando este isomorfismo, podemos ver que las propiedades de ser separable, ser completo y ser continuo, no son preservadas por el producto lexicográfico. Más concretamente, λ^2 con el orden lexicográfico es isomorfo a $\lambda \cdot \lambda$ y, por lo tanto, no es separable, no es completo y no es continuo, véanse los ejemplos 3.64 y 3.65.

Veamos que cualquier factor del producto lexicográfico se encaja en el producto lexicográfico.

Teorema 4.53 *Sea β un ordinal no cero. Para cada $i \in \beta$, sea $\langle A_i, \mathtt{r}_i\rangle$ un orden parcial no vacío. Entonces para toda $k \in \beta$ se cumple que $\langle A_k, \mathtt{r}_k\rangle \lesssim L_{i\in\beta} \langle A_i, \mathtt{r}_i\rangle$.*

Demostración. Sea $e \in \bigtimes_{i\in\beta} A_i$ y sea $k \in \beta$ arbitraria. Definamos $f : A_k \to \bigtimes_{i\in\beta} A_i$ como $f(a)(k) = a$ y para toda $j \neq k$, $f(a)(j) = e(j)$. Veamos que f es un encaje.

Sean a, $b \in A_k$. Supongamos que $a \neq b$, entonces $f(a)(k) \neq f(b)(k)$. Así, $f(a) \neq f(b)$ y, por lo tanto, f es inyectiva.

Supongamos que $a \,\mathtt{r}_k\, b$. Si $j \in k$, entonces $f(a)(j) = e(j)$ y $f(b)(j) = e(j)$. Por lo tanto, para toda $j \in k$ se tiene que $f(a)(j) = f(b)(j)$. Así, k es la primera diferencia entre $f(a)$ y $f(b)$, y como $a \,\mathtt{r}_k\, b$, $f(a) <_L f(b)$.

Supongamos que $f(a) <_L f(b)$. Como para toda $j \neq k$ se tiene $f(a)(j) = e(j) = f(b)(j)$, la única diferencia entre a y b ocurre en k. Entonces $f(a)(k) \,\mathtt{r}_k\, f(b)(k)$ y así $a \,\mathtt{r}_k\, b$. Por lo tanto, f es un encaje de $\langle A_k, \mathtt{r}_k\rangle$ a $L_{i\in\beta} \langle A_i, \mathtt{r}_i\rangle$.

Como k fue arbitraria, para toda $k \in \beta$ se cumple que $\langle A_k, \mathtt{r}_k\rangle \lesssim L_{i\in\beta} \langle A_i, \mathtt{r}_i\rangle$.

$\dashv$

Capítulo V Concluciones

A lo largo de este trabajo hemos visto la relación entre las operaciones sobre órdenes y los principales conceptos de órdenes. Podemos separar a dichos conceptos en dos: clases de órdenes y propiedades de los órdenes.

Las clases de órdenes que hemos analizado son: los órdenes lineales, los buenos órdenes, los órdenes simétricos y los órdenes η_α.

Las propiedades de órdenes que hemos estudiado son: ser denso, ser separable, ser completo y ser continuo. Además hemos visto cómo se comporta la cofinalidad y la coinicialidad en cada operación.

Concentraremos los resultados que obtuvimos de cada propiedad, veremos cuales se preservan en las diversas operaciones que definimos. Para ello enlistaremos los resultados y marcaremos con ✓ los que preservan la propiedad y con $\times$ los que no.

5.1 Clases de órdenes

Vimos que cada operación de órdenes que definimos fuera cerrada sobre los órdenes parciales, pues debían de estar bien definidas para llamarlas operaciones sobre éstos órdenes.

✓ Orden inverso: corolario 2.4, página 22.

✓ Suma de órdenes: corolario 3.3, página 44.

✓ Producto de órdenes: corolario 3.45, página 59.

✓ Suma sobre un orden: proposición 3.76, página 71.

✓ Producto directo: proposición 4.6, página 78.

✓ Producto lexicográfico: proposición 4.12, página 81.

Ahora analicemos la clase de los órdenes lineales. La única operación que no preserva a los órdenes lineales es el producto directo. Todas las demás operaciones son cerradas en los órdenes lineales. Enlistemos los resultados de cada operación.

✓ Orden inverso: teorema 2.13, página 24.

- ✓ Suma de órdenes: teorema 3.11, página 47.
- ✓ Producto de órdenes: teorema 3.54, página 61.
- ✓ Suma sobre un orden (lineal): teorema 3.79, página 72.
- × Producto directo: ejemplo 4.7, página 79.
- ✓ Producto lexicográfico: teorema 4.16, página 82.

En los buenos órdenes sólo son cerradas las operaciones de suma de órdenes, producto de órdenes y la suma sobre un orden. Esta última tiene que ser sobre un buen orden.

- × Orden inverso: ejemplo 2.7, página 22.
- ✓ Suma de órdenes: teorema 3.12, página 47.
- ✓ Producto de órdenes: teorema 3.55, página 62.
- ✓ Suma sobre un (buen) orden: teorema 3.80, página 72.
- × Producto directo: comentarios sobre el ejemplo 4.7, página 79.
- × Producto lexicográfico: ejemplo 4.17, página 82.

Sin embargo, el orden invertido sí preserva a los buenos órdenes finitos, pues son simétricos. Véase el comentario antes de la proposición 2.28, página 28.

La razón por la cual el producto lexicográfico no preserva a los buenos órdenes es la posibilidad de multiplicar una cantidad arbitraria de órdenes, pues en el caso de una cantidad infinita empiezan a aparecer puntos de acumulación que forman cadenas descendentes. Pero si se limita a multiplicar una cantidad finita de buenos órdenes, el resultado sí será un buen orden. Véase el teorema 4.18 en la página 82.

La clase de los órdenes η_α sin duda ha sido una de las más desarrolladas en este trabajo, y no es para menos, pues solamente el producto directo y el lexicográfico no la preserva. Sin embargo, vimos que el producto lexicográfico sí la preserva si se agrega una condición más débil de la que pusimos para los buenos órdenes.

El producto lexicográfico preserva a los órdenes η_α cuando el ordinal que indexa no es límite con cofinalidad menor a ω_α, según el teorema 4.37 de la página 94. Curiosamente, el orden lexicográfico preserva a los órdenes η_0, sin necesidad de esta condición.

- ✓ Orden inverso: teorema 2.67, página 41.
- ✓ Suma de órdenes: teorema 3.23, página 51.
- ✓ Producto de órdenes: teorema 3.59, página 63.

- ✓ Suma sobre un orden: teorema 3.86, página 75.
- × Producto directo: consecuencia del ejemplo 4.7.
- × Producto lexicográfico: teorema 4.38, página 95.

En la tabla 5.1 se muestra toda esta información.

Clase	O.inverso	Suma	Producto	Suma/orden	P. directo	P. lexicográfico
Parcial	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Lineal	✓	✓	✓	✓	×	✓
Buen orden	Finitos	✓	✓	✓	×	I finito
η_α	✓	✓	✓	✓	×	$\mathrm{cf}\,(I) = 1$ o $\geq \omega_\alpha$

Tabla 5.1: Relación entre las operaciones de órdenes y las clases de órdenes.

De la tabla podemos concluir que la suma, el producto y las suma sobre un orden son cerradas en todas las clases estudiadas.

Los órdenes lineales son los más adecuados para hacer operaciones, pues son preservados por casi todas ellas; mientras que los buenos órdenes son los más difíciles de preservar.

5.2 | Propiedades de órdenes

Ahora analizaremos las propiedades de órdenes. Las definiciones de estas propiedades son motivadas por el comportamiento de las estructuras numéricas clásicas, los números enteros, racionales y reales. La simetría surge en los enteros, la densidad en los racionales, la separabilidad, completez y continuidad en los reales.

Empecemos con la propiedad de simetría. La suma y la suma sobre un orden no preservan esta propiedad, pues el orden de los sumandos es alterado al invertir el orden. Las demás operaciones sí preservan la simetría.

- ✓ Orden inverso: definición 2.26, página 28.
- × Suma de órdenes: ejemplo 3.27, página 53.
- ✓ Producto de órdenes: proposición 3.61, página 65.
- × Suma sobre un orden: consecuencia del teorema 3.81, página 73.
- ✓ Producto directo: teorema 4.9, página 79.
- ✓ Producto lexicográfico: teorema 4.50, página 98.

La densidad se preserva por todas las operaciones a excepción de la suma. La suma no preserva la densidad, ya que al sumar dos órdenes densos que tengan extremos, los extremos pueden quedar contiguos y así no satisfacer la densidad.

✓ Orden inverso: teorema 2.14, página 24.

× Suma de órdenes: ejemplo 3.28, página 53.

✓ Producto de órdenes: teorema 3.63, página 66.

✓ Suma sobre un orden: teorema 3.83, página 74.

✓ Producto directo: teorema 4.10, página 80.

✓ Producto lexicográfico: teorema 4.51, página 99.

La separabilidad, la completez y la continuidad solamente las preserva el orden inverso. Las demás operaciones no las preservan. Excluiremos al producto directo, pues no preserva a los órdenes lineales y estas propiedades son para órdenes lineales.

Así, para la separabilidad tenemos los siguientes resultados.

✓ Orden inverso: teorema 2.16, página 24.

× Suma de órdenes: ejemplo 3.28 y comentarios siguientes; página 53.

× Producto de órdenes: ejemplo 3.64, página 67.

× Suma sobre un orden: por el teorema 3.82 y el ejemplo 3.64.

× Producto lexicográfico: por la proposición 4.52 y el ejemplo 3.64.

La suma de órdenes no preserva la separabilidad como consecuencia de que no preserva la densidad. El producto de órdenes no la preserva por razones de cardinalidad. Dado que la suma sobre un orden y el producto lexicográfico contienen al producto de órdenes, el ejemplo 3.64 también sirve para testificar que no preservan la separabilidad.

Ahora veamos los resultados para la completez.

✓ Orden inverso: teorema 2.18, página 25.

× Suma de órdenes: ejemplo 3.29, página 54.

× Producto de órdenes: ejemplo 3.65, página 67.

× Suma sobre un orden: por el teorema 3.82 y el ejemplo 3.65.

× Producto lexicográfico: por la proposición 4.52 y el ejemplo 3.65.

En el caso de la suma, vimos que $\lambda + \lambda$ no es completo y en el caso del producto, vimos que $\lambda \cdot \lambda$ no es completo. En ambos casos se usó que λ no tiene extremos para construir el conjunto sin supremo. Así, en la suma sobre un orden y en el producto lexicográfico el ejemplo de $\lambda \cdot \lambda$ testifica que no se preserva la completez.

La continuidad está muy ligada a la completez. Siendo más fuerte la continuidad, es de esperar un resultado similar a la completez. De hecho, al ser λ completo y continuo, los ejemplos anteriores vuelen a servir para ver que la completez no se preserva.

- ✓ Orden inverso: corolario 2.63, página 39.
- × Suma de órdenes: ejemplo 3.29, página 54.
- × Producto de órdenes: ejemplo 3.65, página 67.
- × Suma sobre un orden: por el teorema 3.82 y el ejemplo 3.65.
- × Producto lexicográfico: por la proposición 4.52 y el ejemplo 3.65.

En la tabla 5.2 se resume toda esta información.

Propiedad	O.inverso	Suma	Producto	Suma/orden	P. directo	P. lexicográfico
Simetría	✓	×	✓	×	✓	✓
Densidad	✓	×	✓	✓	✓	✓
Separabilidad	✓	×	×	×	×	×
Completez	✓	×	×	×	×	×
Continuidad	✓	×	×	×	×	×

Tabla 5.2: Relación entre las operaciones de órdenes y las clases de órdenes.

De la tabla podemos concluir que la densidad es la propiedad que más se preserva, pues solamente la suma no la preserva. Además, podemos ver que el orden inverso es la operación más sencilla, pues preserva a todas las propiedades estudiadas. Aunque la suma parezca más fácil que el producto, es la operación que tiene más complicaciones. Por último, la continuidad es la propiedad más difícil de preservar, ya que por el teorema 2.61 está ligada a la completez.

5.3 | Comentarios finales

La operaciones más importantes que se estudiaron son el producto lexicográfico, la suma de órdenes y el producto de órdenes. El producto lexicográfico tiene muchas aplicaciones en diversas áreas, como ya se había comentado. La suma de órdenes y el producto de órdenes tienen su importancia por la suma y el producto ordinal, y por el estudio de la cofinalidad de ellos.

El producto lexicográfico es la mejor generalización para el producto de órdenes, podemos con él sobrepasar la barrera finita que nos impone el producto cartesiano habitual. El producto directo nos sirvió para introducir el producto lexicográfico, pero resultó ser poco interesante por no preservar a los órdenes lineales.

La suma sobre un orden generaliza muy bien a la suma, y podemos ver en la tabla 5.2, que la mejora al preservar a los órdenes densos cuando se hace suma sobre un orden denso.

Un comentario final es que en el teorema 4.37 se agrega una condición extra a lo expuesto en [6], pues con el teorema 4.24 se hace notar que el autor no consideró un caso (cf. [6] pag. 122).

Apéndice **A**

Tipos de orden

En la sección 1.2 vimos el concepto de isomorfismo entre órdenes y definimos de manera intuitiva la noción de tipo de orden. En este anexo se muestra una forma de definir el tipo de orden de manera formal.

A.1 Clases de equivalencia

Sean $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ y $\langle B, \mathtt{s}\rangle$ dos órdenes parciales. Decimos que $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ tiene el **mismo tipo de orden** que $\langle B, \mathtt{s}\rangle$ si y sólo si existe un isomorfismo f de A a B.

Veamos que la relación tener el *mismo tipo de orden* se comporta como una relación de equivalencia.

Sean $\langle A, \mathtt{r}\rangle$, $\langle B, \mathtt{s}\rangle$ y $\langle C, \mathtt{p}\rangle$ órdenes parciales. La función identidad en A es un isomorfismo de A en A, por lo cual $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ tiene el *mismo tipo de orden* que $\langle A, \mathtt{r}\rangle$. Supongamos que $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ tiene el *mismo tipo de orden* que $\langle B, \mathtt{s}\rangle$, sea f un isomorfismo entre A y B. Entonces f^{-1} es un isomorfismo de B en A, y así $\langle B, \mathtt{s}\rangle$ tiene el *mismo tipo de orden* que $\langle A, \mathtt{r}\rangle$. Supongamos además que $\langle B, \mathtt{s}\rangle$ tiene el *mismo tipo de orden* que $\langle C, \mathtt{p}\rangle$, sea g un isomorfismo entre B y C. Entonces $g \circ f$ es un isomorfismo de A a C.

Consideremos las colecciones $\mathcal{C}(\langle A, \mathtt{r}\rangle) = \{\langle B, \mathtt{s}\rangle : \langle B, \mathtt{s}\rangle \cong \langle A, \mathtt{r}\rangle\}$. Analicemos cómo se comportan, para empezar calculemos $C(\langle 0, \in\rangle)$. Como $0 = \varnothing$, el único conjunto biyectable con el vacío es el mismo vacío. Así, $C(\langle 0, \in\rangle) = \{\langle 0, \in\rangle\}$.

Sea $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ un orden parcial no vacío, sea $a^* \in A$. Como A es un conjunto, la clase $\mathcal{A} = \{\alpha \in \mathsf{OR} : \alpha \notin A\}$ es una clase propia. Definimos para cada $\alpha \in \mathcal{A}$ el conjunto $A_\alpha = (A \setminus \{a^*\}) \cup \{\alpha\}$. Para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, definamos r_α como sigue:

$$r_\alpha = (r \setminus \{\langle x, y\rangle \in A \times A : x = a^* \vee y = a^*\}) \cup \{\langle \alpha, b\rangle : b \in a^*\!\uparrow\} \cup \{\langle b, \alpha\rangle : b \in a^*\!\downarrow\}.$$

Es decir, sustituimos a^* por α en todos los pares ordenados en los que aparece a^*. Definimos la función $f_\alpha : A \to A_\alpha$ como $f_\alpha(a^*) = \alpha$ y para toda $b \in A$ tal que $b \neq a^*$, $f(b) = b$. Entonces para toda $\alpha \in \mathcal{A}$, f_α es un isomorfismo entre $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ y $\langle A_\alpha, \mathtt{r}_\alpha\rangle$, para toda $\alpha \in \mathcal{A}$. Así, $\mathcal{C}(\langle A, \mathtt{r}\rangle)$ es una clase propia.

Se podría definir el tipo de orden de $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ como la clase $\mathcal{C}(\langle A, \mathtt{r}\rangle)$, pero el tipo de orden no sería un conjunto. Una solución sería escoger un representante de cada clase, pero el axioma de elección solo nos permite trabajar con conjuntos.

A.2 El truco de Scott

Una buena definición de tipo de orden debe cumplir lo siguiente:

- El tipo de orden de un orden parcial debe ser un conjunto.
- Para cada orden parcial, debe de existir un único tipo de orden que lo represente.
- Dos órdenes parciales son isomorfos si y sólo si sus tipos de orden son iguales.

Las clases $\mathcal{C}$ que definimos anteriormente no cumplen el primer punto. La igualdad del tercer punto tiene que ser la igualdad de conjuntos, así que las clases $\mathcal{C}$ tampoco cumplen el tercer punto.

Lo ideal sería un representante, pero como comentamos esto necesitaría de un axioma de elección para clases. La siguiente posibilidad es encontrar una subcolección de las clases $\mathcal{C}$ que sea conjunto y que esté bien determinada para que cumpla el segundo punto.

Dana Scott en su trabajo *Definitions by abstraction in axiomatic set theory*, [9], introdujo un método que sirve para encontrar un subconjunto de una clase que está bien determinado. A este método se le suele llamar el *truco de Scott*.

La esencia del método es la siguiente: consideremos una clase $M = \{x : \varphi(x)\}$, definamos la subclase $\hat{M}$ de M como

$$\hat{M} = \{x : \varphi(x) \wedge \forall y(\varphi(y) \to \rho(x) \leq \rho(y))\},$$

es decir, $\hat{M}$ es la subclase de todos los conjuntos de rango mínimo en M, según la Jerarquía de los Bien Fundados,[7].

Veamos que $\hat{M}$ es un conjunto. Si $M = \varnothing$, entonces $\hat{M} = \varnothing$ y claramente es conjunto. Supongamos que M es una clase no vacía, sea $x \in M$. Definamos la clase $B = \{\alpha \in \mathsf{OR} : \exists y(\varphi(y) \wedge \rho(y) = \alpha)\}$, es decir, el conjunto de todos los rangos de los elementos de M. Notemos que $\rho(x) \in B$, así que B es una clase no vacía. Por el principio del mínimo ordinal, B tiene mínimo, digamos γ.

Definamos $D = \{z \in \mathsf{BF}_{\mathrm{s}(\gamma)} : \varphi(z)\}$. D es un conjunto por el axioma de separación y es no vacío, pues $\gamma \in B$. Veamos que $\hat{M} \subseteq D$. Sea $z \in \hat{M}$, entonces se cumple $\varphi(z)$ y para toda y si se cumple $\varphi(y)$, entonces $\rho(z) \leq \rho(y)$. Notemos que $\rho(z) \in B$, así $\gamma \leq \rho(z)$. Como $\gamma \in B$, existe y tal que se cumple $\varphi(y)$ y $\rho(y) = \gamma$. Como y cumple φ, $\rho(z) \leq \rho(y) = \gamma$. Por lo tanto, $\rho(z) = \gamma$ y así $z \in \mathsf{BF}_{\mathrm{s}(\gamma)}$. Entonces, $z \in D$. Por el axioma de separación, $\hat{M}$ es un conjunto. Además, $\hat{M}$ es no vacío.

Definición A.1 Sea $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ un orden parcial. Definimos el **tipo de orden** de $\langle A, \mathtt{r}\rangle$, denotado por $\tau(\langle A, \mathtt{r}\rangle)$, como

$$\tau(\langle A, \mathtt{r}\rangle) = \big\{ \langle B, \mathtt{s}\rangle : \langle B, \mathtt{s}\rangle \cong \langle A, \mathtt{r}\rangle \wedge \forall \langle C, \mathtt{p}\rangle \left(\langle C, \mathtt{p}\rangle \cong \langle A, \mathtt{r}\rangle \to \rho\left(\langle B, \mathtt{s}\rangle\right) \leq \rho\left(\langle C, \mathtt{p}\rangle\right) \right) \big\},$$

es decir, el conjunto de todos los órdenes isomorfos a $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ de rango mínimo, según la Jerarquía de los Bien Fundados.

El tipo de orden es justamente $\hat{\mathcal{C}}(\langle A, \mathtt{r}\rangle)$, así que cumplirá los dos primeros puntos, además será siempre no vacío, pues $\langle A, \mathtt{r}\rangle \in \mathcal{C}(\langle A, \mathtt{r}\rangle)$. Veamos qué pasa con el último punto.

Teorema A.2 *Sean $\langle A, \mathtt{r}\rangle$ y $\langle B, \mathtt{s}\rangle$ dos órdenes parciales. Entonces, $\langle A, \mathtt{r}\rangle \cong \langle B, \mathtt{s}\rangle$ si y sólo si $\tau(\langle A, \mathtt{r}\rangle) = \tau(\langle B, \mathtt{s}\rangle)$.*

Demostración. Para la primera implicación supongamos que $\langle A, \mathtt{r}\rangle \cong \langle B, \mathtt{s}\rangle$. Sea $\langle C, \mathtt{p}\rangle \in \tau(\langle A, \mathtt{r}\rangle)$, entonces $\langle C, \mathtt{p}\rangle \cong \langle A, \mathtt{r}\rangle$. Como $\langle A, \mathtt{r}\rangle \cong \langle B, \mathtt{s}\rangle$, $\langle C, \mathtt{p}\rangle \cong \langle B, \mathtt{s}\rangle$. Sea $\langle D, \mathtt{q}\rangle$ tal que $\langle D, \mathtt{q}\rangle \cong \langle B, \mathtt{s}\rangle$, entonces $\langle D, \mathtt{q}\rangle \cong \langle A, \mathtt{r}\rangle$. Como $\langle C, \mathtt{p}\rangle \in \tau(\langle A, \mathtt{r}\rangle)$, $\rho(\langle C, \mathtt{p}\rangle) \leq \rho(\langle D, \mathtt{q}\rangle)$. Por lo tanto, $\langle C, \mathtt{p}\rangle \in \tau(\langle B, \mathtt{s}\rangle)$ y de este modo $\tau(\langle A, \mathtt{r}\rangle) \subseteq \tau(\langle B, \mathtt{s}\rangle)$.

De manera análoga se demuestra que $\tau(\langle B, \mathtt{s}\rangle) \subseteq \tau(\langle A, \mathtt{r}\rangle)$. Así, $\tau(\langle A, \mathtt{r}\rangle) = \tau(\langle B, \mathtt{s}\rangle)$.

Ahora veamos la implicación de regreso. Supongamos que $\tau(\langle A, \mathtt{r}\rangle) = \tau(\langle B, \mathtt{s}\rangle)$. Como $\tau(\langle A, \mathtt{r}\rangle)$ es no vacío, sea $\langle C, \mathtt{p}\rangle \in \tau(\langle A, \mathtt{r}\rangle)$. Entonces $\langle C, \mathtt{p}\rangle \cong \langle A, \mathtt{r}\rangle$. Por la igualdad de los tipos de orden, $\langle C, \mathtt{p}\rangle \in \tau(\langle B, \mathtt{s}\rangle)$. Por lo tanto, $\langle C, \mathtt{p}\rangle \cong \langle B, \mathtt{s}\rangle$. Entonces $\langle A, \mathtt{r}\rangle \cong \langle B, \mathtt{s}\rangle$.

$\dashv$

Esta definición de tipo de orden no usa en ningún momento el *axioma de elección*, pero está restringida a los conjuntos bien fundados.

Este método también sirve para definir la cardinalidad de un conjunto bien fundado sin usar el *axioma de elección*. Para ello se tiene que usar en lugar de isomorfismos, funciones biyectivas.

Este método da pie al *principio de la colección*, que se puede consultar en [7] p. 65, que parafraseado dice: Dado un conjunto X y una colección de clases C_u, con $u \in X$, existe un conjunto Y tal que para toda $u \in X$ si $C_u \neq \varnothing$, entonces $C_u \neq Y$.

Bibliografía

[1] J.A. Amor Montaño. *Teoría de conjuntos para estudiantes de ciencias*, Segunda edición. Coordinación de Servicios Editoriales. Facultad de Ciencias UNAM, 2005.

[2] J.A Amor Montaño, G. Campero Arena, F. E. Miranda Perea. *Teoría de conjuntos: Curso intermedio*, segunda edición. Coordinación de Servicios Editoriales. Facultad de Ciencias UNAM, 2014.

[3] Herbert B. Enderton. *Elements of set theory*. Academic Press, 1977.

[4] Herbert B. Enderton. *Una introducción a la lógica matemática*, segunda edición. Traducción por José Alfredo Amor Montaño. Instituto de Investigaciones Filosóficas UNAM, 2004.

[5] Isidore Fleischer. *A characterization of lexicographically ordered η_α-sets*, Proceedings of the National Academy of Sciences, 1963, vol. 50, no 6, p. 1107-1108.

[6] Egbert Harzheim. *Ordered Sets*, Advances in Mathematic vol. 7. Springer. 2006

[7] Thomas J. Jech. *Set theory The Third Millennium Edition, revised and expanded*, Springer Monographs in Mathematics. Springer, 2002.

[8] Kenneth Kunen. *Set theory*, Studies in Logic vol. 34. London: College Publications. 2013

[9] Dana S. Scott. *Definitions by abstraction in axiomatic set theory*, Bull. Amer. Math. Soc. 61 (1955), p. 442.