



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
INGENIERÍA MECÁNICA – MECÁNICA APLICADA

ANÁLISIS DE MECANISMOS DE ESLABONES ESPACIALES EMPLEANDO MATRICES  
HOMOGÉNEAS Y PARÁMETROS DE EULER

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
SORIA LARA ALEJANDRA SULLYVAN

TUTOR PRINCIPAL  
FRANCISCO, CUENCA, JIMÉNEZ,  
FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM,  
CENTRO DE INGENIERÍA AVANZADA

CIUDAD DE MÉXICO, FEBRERO 2019



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. González Villela Víctor Javier

Secretario: Dr. Velázquez Villegas Fernando

Vocal: Dr. Cuenca Jiménez Francisco

1<sup>er.</sup> Suplente: Dr. Yáñez Valdez Ricardo

2<sup>d o.</sup> Suplente: M.I. Silva Rico José Antonio

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: Facultad de Ingeniería, UNAM

**TUTOR DE TESIS:**

FRANCISCO CUENCA JIMÉNEZ



A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Francisco Cuenca Jiménez', is written over a horizontal dashed line. The signature is stylized and cursive.

**FIRMA**

# Agradecimientos

Quiero agradecer de manera general a todas las personas que de alguna forma intervinieron. A mis amigos, los nuevos y los que aún siguen siéndolo; en especial a José de Jesús Contreras Arredondo, por siempre hacerse tiempo de explicarme conceptos matemáticos; a Pedro Enrique Ávila Hernández, por su orientación, ideas y consejos respecto al modelado de mecanismos; y a Ervin Galán Uribe, por estar al pendiente durante todo el proceso y verificar que seguía sobreviviendo en la cdmx.

También agradezco a mi tutor de tesis, el Dr. Francisco Cuenca Jiménez, su infinita paciencia; a mi tutor de licenciatura, M.C. Víctor Hugo López Enríquez, por animarme a intentar ingresar a la UNAM; a Juan López de Alda y Fernando von Raesfeld Fabre por su apoyo para mi desarrollo profesional; al Dr. Fernando Velázquez Villegas por compartir su laboratorio con nosotros.

Y finalmente a la UNAM y CONACYT por la beca nacional de manutención para estudios de maestría.

De igual manera considero que el disculparse cuando se comenten errores que dañan a terceros es igual de importante que agradecer. Por consiguiente, ofrezco una sincera disculpa a quienes ofendí, les quedé mal, o hice algún otro tipo de agravio; no sólo durante el periodo de maestría, sino hasta hoy en día.

# Dedicatoria

A mi papá, en su memoria Q.D.E.P.  
Y a mi mamá, que sigue con nosotros amándonos

*La vida es como el patinaje,  
aprendes a avanzar a pesar de las caídas,  
sin olvidar que por mucha experiencia que se pueda tener  
nadie está exento de caer...*

# Índice

1. Introducción.....	3
1.1. Antecedentes.....	3
1.2. Objetivos .....	7
1.3. Justificación.....	7
2. Bases teóricas .....	9
2.1. Bases teóricas de la cinemática .....	9
2.1.1. Posición Generalizada .....	9
2.1.1.1. Posición .....	9
2.1.1.2. Velocidad .....	12
2.1.1.3. Aceleración.....	15
2.1.2. Matrices Homogéneas de Transformación Básicas.....	18
2.1.2.1. Generalización de las matrices homogéneas de transformación .....	18
2.1.3. Parámetros de Euler.....	21
2.1.3.1. Definición .....	21
2.1.3.2. Representación de las rotaciones en parámetros de Euler.....	23
2.2. Bases teóricas de la dinámica .....	25
2.2.1. Método de Newton-Euler .....	25
2.2.2. Fuerza de reacción en las juntas.....	35
3. Metodología.....	38
3.1. Matrices homogéneas de transformación básicas en función de los parámetros de Euler .....	39
3.1.1. Definiciones para las matrices de traslación.....	39

3.1.2. Definiciones para las matrices de rotación .....	43
3.2. Representación escalar de la velocidad y aceleración angular en función de los parámetros de Euler .....	66
<b>4. Resultados.....</b>	<b>70</b>
4.1. Caso de estudio 1: Mecanismo CCCC .....	70
4.1.1. Análisis cinemático .....	70
4.1.2. Análisis dinámico .....	82
4.2. Caso de estudio 2: Mecanismo CSSP .....	93
4.2.1. Análisis cinemático .....	93
4.2.2. Análisis dinámico .....	104
<b>5. Conclusión.....</b>	<b>115</b>
<b>Bibliografía.....</b>	<b>117</b>

# Resumen

En esta tesis se obtuvieron expresiones equivalentes en función de los parámetros de Euler que pueden ser usadas para el análisis cinemático y dinámico de mecanismos espaciales.

El capítulo 1 menciona lo existente respecto al análisis cinemático y dinámico utilizando matrices homogéneas de transformación y parámetros de Euler de manera separada. También menciona el objetivo y justificación de esta tesis.

El capítulo 2 presenta el marco teórico del análisis cinemático y dinámico, mientras que en el capítulo 3 se desarrollan expresiones equivalentes de las matrices homogéneas de transformación y de la velocidad y aceleración angular en función de los parámetros de Euler.

El capítulo 4 muestra dos ejemplos donde se utilizaron las expresiones equivalentes obtenidas en el capítulo 3. Y finalmente el capítulo 5 contiene las conclusiones.

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Antecedentes

Como se menciona en (Shabana, 2001): “ En el análisis cinemático nos interesamos por el estudio del movimiento sin considerar las fuerzas que lo producen. El objetivo del análisis cinemático es determinar las posiciones, velocidades y aceleraciones como resultado de las entradas conocidas y prescritas. Hay tres etapas que deben ser seguidas para un análisis cinemático completo: análisis de posición, velocidad y aceleración. ”

A su vez, cabe resaltar que hay diferentes tipos de análisis cinemáticos, como los que se abordan en (Siciliano, Sciavicco, Villani & Oriolo, 2009), y diferentes clasificaciones de acuerdo a cada autor. En este trabajo se empleó la cinemática inversa, la cuál establece que (Kelly & Santibañez, 2003) “El modelo cinemático inverso consiste justamente en la relación inversa del modelo cinemático directo, es decir, es la relación entre la posición cartesiana  $x$  y la posición articular  $q$ , i.e.,  $q = f^{-1}(x)$ , pudiendo tener, inclusive, ninguna o múltiples soluciones.” Otra forma de decirlo es que “la cinemática inversa nos permite obtener las posiciones de las juntas  $q$  en términos de la posición y orientación del efector final del último eslabón, referenciadas al marco de referencia de la base” (Kelly, Santibañez & Loria, 2005)

El modelo cinemático inverso por lo general es más complejo que el modelo cinemático directo porque (Siciliano et al., 2009):

- Las ecuaciones a resolver por lo general son no lineales y debido a esto no siempre es

posible encontrar una solución de forma cerrada.

- Pueden existir múltiples soluciones.
- Pueden existir soluciones infinitas, por ejemplo, en el caso de un manipulador cinemáticamente redundante.
- Pueden existir soluciones no admisibles desde el punto de vista de la estructura cinemática del manipulador.

En el presente trabajo se aborda el análisis cinemático inverso de mecanismos de eslabones espaciales. Entiéndase por mecanismo de eslabones espaciales a los mecanismos que presentan sólo eslabones como sus elementos de construcción (no contienen elementos tales como engranes, levas, etc) y su movimiento lo realizan en un espacio de trabajo tridimensional. Evítese confundir con el término “espacial” con mecanismos relacionados al área de aeroespacial, sin descartar que algunos de ellos puedan ser empleados en dicha área.

Algunos de los métodos para calcular la cinemática inversa se pueden agrupar dentro de las categorías de métodos geométricos y métodos analíticos. Dentro de los métodos analíticos se encuentra el método matricial, donde:

“Los movimientos de un cuerpo rígido pueden ser representados en forma matricial de manera que la composición de movimientos del cuerpo rígido pueda ser reducida a multiplicaciones de matrices como en el caso de la composición de rotaciones.” (Spong, Hutchinson & Vidyasagar, 2005)

Y a su vez, “la orientación de un cuerpo rígido  $i$  puede ser especificada por una matriz de transformación, los elementos de esta pueden ser expresados en conjuntos de coordenadas apropiados como por ejemplo, los ángulos de Euler, los ángulos de Bryant o los parámetros de Euler.” (Flores, 2015). Una de estas matrices de transformación son las matrices homogéneas. Algunas de las ventajas de las matrices homogéneas son que poseen una interpretación física intuitiva y son una manera compacta de representación de las formulaciones matemáticas. Su principal desventaja es que utilizan los ángulos de Euler, los cuales adolecen del inconveniente de la representación de singularidades ya que (Schiehlen, 1990) dice “Puede ser concluido que el fenómeno de singularidad es un problema inherente asociado a cualquier sistema de 3 coor-

denadas rotacionales a pesar de su forma o convención. Este problema puede ser evitado si se utilizan 4 coordenadas rotacionales, llamadas parámetros de Euler ”

Como lo menciona (Nikravesh, 1988) dentro de las ventajas de los parámetros de Euler se encuentra que “en programas computacionales de larga escala que lidian con la orientación angular de cuerpos, sean rígidos o deformables, el uso de parámetros de Euler puede simplificar drásticamente las formulaciones matemáticas ya que la formulación de los parámetros de Euler permite que las relaciones cinemáticas para diferentes pares sean escritas en forma matricial compacta, permitiendo así el desarrollo de algoritmos computacionales eficientes y compactos”; también “en contraste con los ángulos de Euler y los ángulos de Bryan, o cualquier otro conjunto de tres coordenadas rotacionales, no hay casos críticos en los cuales las fórmulas inversas de las fórmulas explícitas de los parámetros de Euler sean singulares” así como “la naturaleza cuadrática de la matriz de transformación, la ausencia de funciones trigonométricas y la cualidad de libre de singularidades de los parámetros de Euler los hace más atractivos que otros conjuntos de coordenadas rotacionales”. Su principal desventaja es que aparentemente su formulación matemática no posee una interpretación física intuitiva al hacer uso de cuatro parámetros para representar la orientación espacial.

Respecto al panorama actual, en (Wenger & Flores, 2017), donde se hace una recopilación de los resultados más recientes en la investigación de la ciencia de los mecanismos, sólo un artículo, Planar Stewart Gough Platforms with Quadratic Singularity Surface, hace uso de matrices de transformación y parámetros de Euler, pero a diferencia de esta investigación, utilizan la representación generalizada de la matriz de rotación. Como otros ejemplos de la aplicación del método de matrices homogéneas de transformación se puede citar a (Paul & Zhang, 1986) dónde se desarrolla un método a partir de matrices homogéneas para obtener las ecuaciones que involucren el número mínimo de operaciones matemáticas para ser resueltos en computadora, así como a (Zhu, Cai, Li & Liu, 2017) dónde hacen uso de las matrices de transformación homogéneas para obtener el modelo cinemático de un robot industrial.

Por otra parte, como bien lo mencionan en (Saha, Shah & Nandihal 2013), “durante las dos últimas décadas, las aplicaciones de la dinámica de multicuerpos se han expandido en las áreas de robótica, automotriz, aeroespacial, biomecánica y muchas otras.” Estas áreas hacen uso de análisis dinámicos asistidos por computadora para los cuales necesitan los modelos

dinámicos de los sistemas a analizar. El modelo dinámico, de acuerdo a (Flores, Ambrósio, Pimenta & Lankarani, 2008), “ provee una manera de estimar las fuerzas externas que dependen de la posición relativa entre los componentes del sistema, tales como las fuerzas ejercidas por resortes, amortiguadores y actuadores, así como las fuerzas externas que son desarrolladas como consecuencia de la interacción entre los componentes del sistema y el entorno que lo rodea, tal como las fuerzas de fricción y de contacto-impacto.”

Al igual que en la cinemática, el análisis dinámico tiene diferentes clasificaciones, una de ellas (Siciliano et al., 2009) lo clasifica en análisis dinámico directo y análisis dinámico inverso. En este trabajo se emplea la dinámica directa. De acuerdo a (Siciliano et al., 2009), la dinámica directa “ consiste en determinar, para  $t > t_0$ , las aceleraciones de las juntas  $\ddot{q}(t)$  (y entonces  $\dot{q}(t)$ ,  $q(t)$ ) resultantes de los torques de las juntas dados  $\tau(\tau)$ - y las posibles fuerzas del efector final  $h_e(t)$ - una vez que las posiciones iniciales  $q(t_0)$  y las velocidades iniciales  $\dot{q}(t_0)$  son conocidas (estado inicial del sistema).” La dinámica directa es útil para describir un sistema en términos de su aceleración cuando se conocen los torques aplicados a las juntas, lo cual por lo general es un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales.

Existen varios métodos para la obtención de las ecuaciones del modelo dinámico, entre ellos:

“ la formulación de Newton-Euler (NE), el principio de Euler-Lagrange, el enfoque de Gibbs-Appel, el método de Kane, el principio de D’Alembert y otros similares.” (Saha et al., 2013). Algunos están basados en definiciones de energía y otros en definiciones de la mecánica vectorial.

Las formulaciones energéticas emplean cantidades escalares de trabajo y energía las cuales son menos intuitivas y menos transparentes en su forma final y la cual requiere un manejo matemático complicado mientras más cuerpos tenga el sistema y más variables estén involucradas en su definición de posición y orientación. También la obtención de fuerzas y momentos de reacción en los pares cinemáticos, requeridos en aplicaciones de diseño de la estructura de los sistemas, no se pueden obtener en primera instancia y/o requieren de planteamiento extras para su cálculo. Sin embargo los métodos energéticos permiten obtener ecuaciones dinámicas de multicuerpos de forma cerrada (expresiones en las cuales las fuerzas o torques motrices incógnitas del sistema aparecen despejadas del conjunto de ecuaciones) de una manera directa siguiendo las bases de su formulación matemática.

En este trabajo se aborda el método de Newton-Euler para la solución del modelo dinámico,

el cual es una formulación de la mecánica vectorial y “es inherentemente un método recursivo que es eficiente computacionalmente.” (Siciliano et al., 2009). Las aproximaciones vectoriales tienen la ventaja de ser intuitivos, de emplear una notación más concisa y no requieren de un manejo matemático complejo; sin embargo, la obtención de una posible forma cerrada para las variables incógnitas es una tarea más compleja que la de los métodos energéticos debido a las incógnitas de fuerzas y momentos de reacción establecidas en las ecuaciones.

Por otro lado, la relativa sencillez en el establecimiento de las ecuaciones dinámicas (no buscando la forma cerrada de las mismas), la posible obtención de las reacciones incógnitas, útiles en la etapa del diseño para determinar la resistencia requerida de los elementos, así como la obtención de las fuerzas o los torques de los actuadores, aunado todo esto al apoyo de las computadoras para su solución, hacen este método atractivo para el analista involucrado en el diseño mecánico de un sistema de multicuerpos.

## 1.2. Objetivos

Esta investigación busca aplicar los parámetros de Euler y matrices homogéneas a la formulación de Newton-Euler para resolver el problema de la integración de las ecuaciones diferenciales de movimiento libre de singularidades que muestran los ángulos de Euler. Por ello, los objetivos que se persiguen son:

- Proponer las modificaciones pertinentes a la formulación de Newton-Euler para el análisis de mecanismos que realizan su movimiento dentro de un espacio de trabajo tridimensional, basándose en la combinación de matrices homogéneas junto con los parámetros de Euler.
- Obtener un método que conserve las ventajas de las matrices homogéneas y los parámetros de Euler al mismo tiempo que evita sus principales desventajas, ya que en la literatura actual consultada no se encuentra reportado.

## 1.3. Justificación

Con los avances tecnológicos, específicamente la creación de computadoras, se han podido implementar métodos recursivos para la solución del sistema de ecuaciones de modelos cinemáti-

cos y dinámicos de sistemas multicuerpo. A su vez se ha buscado optimizar dichos algoritmos y reducir el tiempo de computo.

El presente trabajo aporta el ensamble de varias metodologías ya existentes, pero con un diferente enfoque no reportado por otros autores, y que permite aprovechar las ventajas de dichas metodologías. También se aporta definiciones nuevas de la velocidad y aceleración angular en función de los parámetros de Euler, en su forma escalar, de manera detallada. Además, el presente trabajo puede ser una referencia útil a trabajos posteriores del área.

# Capítulo 2

## Bases teóricas

### 2.1. Bases teóricas de la cinemática

#### 2.1.1. Posición Generalizada

##### Posición

La posición en el espacio de un punto en un sistema de coordenadas  $a$  está definida por, (Stejskal&Valasek, 1996):

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{R}_{ab}\mathbf{r}_b \quad (2.1)$$

tal que:

$\mathbf{r}_k$  es el vector del origen del sistema de coordenadas  $k$  al punto, medido en  $k$

$\mathbf{R}_{mn}$  es la matriz general de transformación de rotación sobre un eje arbitrario del sistema  $m$  al sistema  $n$ .

Por otra parte, la posición de un punto M en el espacio, haciendo referencia a dos sistemas de coordenadas ( $a$  y  $b$ ) desfasados y con diferente orientación está dada por:

$$\mathbf{r}_{aM} = \mathbf{r}_{bM} + \mathbf{r}_{ab} \quad (2.2)$$

mientras que las coordenadas del punto en el sistema  $a$  están definidas como:

$$\begin{aligned}
 x_{aM} &= a_{11}x_{bM} + a_{12}y_{bM} + a_{13}z_{bM} + a_1 \\
 y_{aM} &= a_{21}x_{bM} + a_{22}y_{bM} + a_{23}z_{bM} + a_2 \\
 z_{aM} &= a_{31}x_{bM} + a_{32}y_{bM} + a_{33}z_{bM} + a_3
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

donde  $a_{ij}$  es el coseno director del ángulo entre el  $i$ -ésimo eje del sistema  $a$  y el  $j$ -ésimo eje del sistema  $b$ , y  $x_{bM}, y_{bM}, z_{bM}$  son las coordenadas del punto en el sistema  $b$ . Definiendo:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_{aM} &= \begin{bmatrix} x_{aM} & y_{aM} & z_{aM} \end{bmatrix}^T \\
 \mathbf{u}_{bM} &= \begin{bmatrix} x_{bM} & y_{bM} & z_{bM} \end{bmatrix}^T \\
 \mathbf{u}_{ab} &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}^T
 \end{aligned}$$

y

$$\mathbf{R}_{ab} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}
 \tag{2.4}$$

se puede reescribir la ec.(2.2) como:

$$\mathbf{u}_{aM} = \mathbf{R}_{ab}\mathbf{u}_{bM} + \mathbf{u}_{ab}
 \tag{2.5}$$

donde  $\mathbf{R}_{ab} = [a_{ij}], i, j = 1, 2, 3$ , es la matriz de cosenos directores.

Usando coordenadas homogéneas, se pueden expresar mediante vectores extendidos los vectores del punto  $M$  en los sistemas de coordenadas  $a$  y  $b$  como:

$$\mathbf{r}_{aM} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{aM} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{bM} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{bM} \\ 1 \end{bmatrix}
 \tag{2.6}$$

se puede reescribir la ec.(2.5) expresando la descomposición del movimiento espacial general en

la forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_{aM} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{ab} & \mathbf{u}_{ab} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{bM} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

de forma detallada, la ec.(2.7) es:

$$\begin{bmatrix} x_{aM} \\ y_{aM} \\ z_{aM} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{bM} \\ y_{bM} \\ z_{bM} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

la cual puede ser escrita como la siguiente ecuación matricial simbólica (Stejskal&Valasek, 1996):

$$\mathbf{r}_{aM} = \mathbf{T}_{ab}\mathbf{r}_{bM} \quad (2.9)$$

que a su vez expresa una transformación homogénea de vectores extendidos, donde la matriz de transformación es:

$$\mathbf{T}_{ab} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{ab} & \mathbf{u}_{ab} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Mientras que la inversa de esta transformación, la matriz  $\mathbf{T}_{ab}^{-1}$ , se obtiene a partir de:

$$\mathbf{T}_{ab}\mathbf{T}_{ab}^{-1} = \mathbf{T}_{ab}^{-1}\mathbf{T}_{ab} = \mathbf{E}_4 \quad (2.11)$$

donde  $\mathbf{E}_4$  es la matriz identidad de 4x4. Además, asumiendo que:

$$\mathbf{T}_{ab}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & D \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

y sustituyendo a (2.12) y (2.10) en (2.11) se tiene que:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{ab} & \mathbf{u}_{ab} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Desarrollando las operaciones se forman las siguientes ecuaciones:

$$\mathbf{R}_{ab}\mathbf{A} + \mathbf{u}_{ab}\mathbf{C} = \mathbf{E}_3 \quad (2.14)$$

$$\mathbf{R}_{ab}\mathbf{B} + \mathbf{u}_{ab}D = \mathbf{0} \quad (2.15)$$

$$\mathbf{0}^T\mathbf{A} + 1\mathbf{C} = \mathbf{0}^T \quad (2.16)$$

$$\mathbf{0}^T\mathbf{B} + D = 1 \quad (2.17)$$

resolviendo a partir de la última ecuación, ec.(2.17), a la primera, ec.(2.14), se obtiene:

$$D = 1, \mathbf{C} = \mathbf{0}^T, \mathbf{B} = -\mathbf{R}_{ab}^{-1}\mathbf{u}_{ab}, \mathbf{A} = \mathbf{R}_{ab}^{-1} \quad (2.18)$$

por lo que la inversa de la transformación se define como:

$$\mathbf{T}_{ab}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{ab}^{-1} & -\mathbf{R}_{ab}^{-1}\mathbf{u}_{ab} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

donde cabe resaltar que:

$$\mathbf{T}_{ab}^{-1} \neq \mathbf{T}_{ab}^T \quad (2.20)$$

## Velocidad

De la posición, ec.(2.9), se tiene:

$$\mathbf{r}_{aM} = \mathbf{T}_{ab}\mathbf{r}_{bM}$$

y derivando esta ecuación respecto al tiempo se obtiene la velocidad extendida del punto M en el sistema  $a$  (Stejskal & Valasek, 1996):

$$\mathbf{v}_{aM} = \dot{\mathbf{T}}_{ab}\mathbf{r}_{bM} \quad (2.21)$$

también, despejando a  $\mathbf{r}_{bM}$  de la ec.(2.9), se tiene:

$$\mathbf{r}_{bM} = \mathbf{T}_{ab}^{-1}\mathbf{r}_{aM} \quad (2.22)$$

Sustituyendo a (2.22) en la ec.(2.21) se obtiene:

$$\mathbf{v}_{aM} = \dot{\mathbf{T}}_{ab} \mathbf{T}_{ab}^{-1} \mathbf{r}_{aM} = \mathbf{V}_{a,ab} \mathbf{r}_{aM} \quad (2.23)$$

donde:

$$\mathbf{V}_{a,ab} = \dot{\mathbf{T}}_{ab} \mathbf{T}_{ab}^{-1} \quad (2.24)$$

Por otro lado, si transformamos a  $\mathbf{V}_{a,ab}$  al sistema  $b$  se tiene:

$$\mathbf{V}_{b,ab} = \mathbf{T}_{ab}^{-1} \mathbf{V}_{a,ab} \mathbf{T}_{ab} \quad (2.25)$$

sustituyendo a ec.(2.24) en ec.(2.25) da como resultado:

$$\mathbf{V}_{b,ab} = \mathbf{T}_{ab}^{-1} \dot{\mathbf{T}}_{ab} \mathbf{T}_{ab}^{-1} \mathbf{T}_{ab} = \mathbf{T}_{ab}^{-1} \dot{\mathbf{T}}_{ab} \mathbf{E}_4 = \mathbf{T}_{ab}^{-1} \dot{\mathbf{T}}_{ab} \quad (2.26)$$

donde, de manera detallada la ec.(2.26) contiene:

$$\mathbf{V}_{b,ab} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{ab}^T & -\mathbf{R}_{ab}^T \mathbf{u}_{ab} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{R}}_{ab} & \dot{\mathbf{u}}_{ab} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{ab}^T \dot{\mathbf{R}}_{ab} & \mathbf{R}_{ab}^T \dot{\mathbf{u}}_{ab} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Una forma corta para conocer que contiene la expresión de la velocidad extendida del punto M, ec.(2.26), se describe a continuación. Primero se procede a despejar a  $\dot{\mathbf{T}}_{ab}$  de la ec.(2.24):

$$\dot{\mathbf{T}}_{ab} = \mathbf{T}_{ab} \mathbf{V}_{b,ab} \quad (2.28)$$

se sustituye la ec.(2.28), la ec.(2.10) y la ec.(2.27), en ese orden, dentro de la ec.(2.21):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{ab} &= \mathbf{T}_{ab} \mathbf{V}_{b,ab} \mathbf{r}_{ba} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{ab} & \mathbf{u}_{ab} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{ab}^T \dot{\mathbf{R}}_{ab} & \mathbf{R}_{ab}^T \dot{\mathbf{u}}_{ab} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \mathbf{r}_{ba} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{ab} \mathbf{R}_{ab}^T \dot{\mathbf{R}}_{ab} & \mathbf{R}_{ab} \mathbf{R}_{ab}^T \dot{\mathbf{u}}_{ab} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \mathbf{r}_{ba} \\ \mathbf{v}_{ab} &= \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{R}}_{ab} & \dot{\mathbf{u}}_{ab} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \mathbf{r}_{ba} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Por otro lado, definiendo a  $\mathbf{\Omega}_{b,ab}$ , como la matriz de velocidad angular del sistema  $b$  visto desde  $a$  y proyectado en  $b$ , se tiene que:

$$\dot{\mathbf{R}}_{ab} = \mathbf{R}_{ab}\mathbf{\Omega}_{b,ab} \quad (2.30)$$

despejando a  $\mathbf{\Omega}_{b,ab}$  de la ec.(2.30) da como resultado:

$$\mathbf{\Omega}_{b,ab} = \mathbf{R}_{ab}^{-1}\dot{\mathbf{R}}_{ab} = \mathbf{R}_{ab}^T\dot{\mathbf{R}}_{ab} \quad (2.31)$$

Otra manera de llegar al resultado es partir de que, de manera generalizada, la matriz de velocidad angular  $\mathbf{\Omega}_{k,ji}$  representa la velocidad angular del sistema  $i$  visto desde el sistema  $j$  y proyectado en el sistema  $k$ . Para nuestro caso particular se tiene:

$$\mathbf{\Omega}_{a,ab} = \dot{\mathbf{R}}_{ab}\mathbf{R}_{ab}^T \quad (2.32)$$

la relación que existe entre  $\mathbf{\Omega}_{b,ab}$  y  $\mathbf{\Omega}_{a,ab}$  se declara como:

$$\mathbf{\Omega}_{a,ab} = \mathbf{R}_{ab}\mathbf{\Omega}_{b,ab}\mathbf{R}_{ab}^T \quad (2.33)$$

expresando la velocidad angular en la base  $b$ , despejando de la ecuación (2.33), se obtiene:

$$\mathbf{\Omega}_{b,ab} = \mathbf{R}_{ab}^T\mathbf{\Omega}_{a,ab}\mathbf{R}_{ab} \quad (2.34)$$

y sustituyendo el valor de  $\mathbf{\Omega}_{a,ab}$  de la ecuación (2.32) en la ecuación (2.34) da como resultado:

$$\mathbf{\Omega}_{b,ab} = \mathbf{R}_{ab}^T\dot{\mathbf{R}}_{ab}\mathbf{R}_{ab}^T\mathbf{R}_{ab} = \mathbf{R}_{ab}^T\dot{\mathbf{R}}_{ab} \quad (2.35)$$

Desarrollando la multiplicación de la ec.(2.31) se obtiene:

$$\mathbf{\Omega}_{b,ab} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

donde el vector asociado con la matriz antisimétrica de la velocidad angular es:

$$\boldsymbol{\omega}_{ab} = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T \quad (2.37)$$

y finalmente, si se sustituye la expresión de la velocidad angular, ec.(2.31), en la expresión de la matriz de velocidad vista desde el sistema  $b$ , ec.(2.27), se tiene que:

$$\mathbf{V}_{b,ab} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{ab}^T \dot{\mathbf{R}}_{ab} & \mathbf{R}_{ab}^T \dot{\mathbf{u}}_{ab} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_{b,ab} & \mathbf{R}_{ab}^T \dot{\mathbf{u}}_{ab} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

### Aceleración

Partiendo de la expresión de la velocidad, ec.(2.21):

$$\mathbf{v}_{aM} = \dot{\mathbf{T}}_{ab} \mathbf{r}_{bM}$$

nuevamente se deriva respecto del tiempo para obtener la aceleración absoluta extendida del punto M en el sistema  $a$ , esto es (Stejskal & Valasek, 1996):

$$\mathbf{a}_{aM} = \ddot{\mathbf{T}}_{ab} \mathbf{r}_{bM} \quad (2.39)$$

donde:

$$\mathbf{a}_{aM} = \dot{\mathbf{v}}_{aM} = \ddot{\mathbf{r}}_{aM} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_{aM} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_{aM} \\ \ddot{\mathbf{y}}_{aM} \\ \ddot{\mathbf{z}}_{aM} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

otra manera de representar el contenido de la aceleración es a través del cálculo de la segunda derivada de la matriz de transformación, a partir de volver a derivar respecto al tiempo a la ec.(2.28), esto es:

$$\ddot{\mathbf{T}}_{ab} = \dot{\mathbf{T}}_{ab} \mathbf{V}_{b,ab} + \mathbf{T}_{ab} \dot{\mathbf{V}}_{b,ab} \quad (2.41)$$

donde se puede definir a:

$$\mathbf{A}_{b,ab} = \dot{\mathbf{V}}_{b,ab} \quad (2.42)$$

donde  $\mathbf{A}_{k,ij}$  es la matriz de aceleración del movimiento de  $j$  visto desde  $i$  y proyectado en  $k$ . Si se sustituye la ec.(2.28) y ec.(2.42) en la ec.(2.41) se obtiene:

$$\ddot{\mathbf{T}}_{ab} = \mathbf{T}_{ab} \mathbf{V}_{b,ab} \mathbf{V}_{b,ab} + \mathbf{T}_{ab} \mathbf{A}_{b,ab} = \mathbf{T}_{ab} (\mathbf{V}_{b,ab}^2 + \mathbf{A}_{b,ab}) = \mathbf{T}_{ab} \mathbf{B}_{b,ab} \quad (2.43)$$

donde por notación:

$$\mathbf{B}_{b,ab} = \mathbf{V}_{b,ab}^2 + \mathbf{A}_{b,ab}. \quad (2.44)$$

Reescribiendo la aceleración, ec.(2.39), en términos de la ec.(2.43) se tiene:

$$\mathbf{a}_{ab} = \mathbf{T}_{ab} \mathbf{B}_{b,ab} \mathbf{r}_{ba} \quad (2.45)$$

Para obtener el desarrollo de  $\mathbf{B}_{b,ab}$ , primero se desarrolla  $\mathbf{A}_{b,ab}$  y después a  $\mathbf{V}_{b,ab}^2$ . Para  $\mathbf{A}_{b,ab}$  tenemos que derivar a  $\mathbf{V}_{b,ab}$  de la ec.(2.27):

$$\mathbf{A}_{b,ab} = \dot{\mathbf{V}}_{b,ab} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{R}}_{ab}^T \dot{\mathbf{R}}_{ab} + \mathbf{R}_{ab}^T \ddot{\mathbf{R}}_{ab} & \dot{\mathbf{R}}_{ab}^T \dot{\mathbf{u}}_{ab} + \mathbf{R}_{ab}^T \ddot{\mathbf{u}}_{ab} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

después, para el desarrollo los términos de la ec.(2.46) se hace uso de  $\dot{\mathbf{R}}_{ab}$ , ec.(2.30), en el cálculo nuevamente su derivada respecto al tiempo, esto es  $\ddot{\mathbf{R}}_{ab}$ :

$$\ddot{\mathbf{R}}_{ab} = \dot{\mathbf{R}}_{ab} \Omega_{b,ab} + \mathbf{R}_{ab} \dot{\Omega}_{b,ab} = \mathbf{R}_{ab} \Omega_{b,ab} \Omega_{b,ab} + \mathbf{R}_{ab} \dot{\Omega}_{b,ab} = \mathbf{R}_{ab} (\Omega_{b,ab}^2 + \dot{\Omega}_{b,ab}) \quad (2.47)$$

sustituyendo la ec.(2.47) y ec.(2.30) en la ec.(2.46) y desarrollando operaciones se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{b,ab} &= \begin{bmatrix} \Omega_{b,ab}^T \mathbf{R}_{ab}^T (\mathbf{R}_{ab} \Omega_{b,ab}) + \mathbf{R}_{ab}^T \mathbf{R}_{ab} (\Omega_{b,ab}^2 + \dot{\Omega}_{b,ab}) & (\mathbf{R}_{ab} \Omega_{b,ab})^T \dot{\mathbf{u}}_{ab} + \mathbf{R}_{ab}^T \ddot{\mathbf{u}}_{ab} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Omega_{b,ab}^T \Omega_{b,ab} + (\Omega_{b,ab}^2 + \dot{\Omega}_{b,ab}) & -\Omega_{b,ab} \mathbf{R}_{ab}^T \dot{\mathbf{u}}_{ab} + \mathbf{R}_{ab}^T \ddot{\mathbf{u}}_{ab} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\Omega_{b,ab}^2 + (\Omega_{b,ab}^2 + \dot{\Omega}_{b,ab}) & -\Omega_{b,ab} \mathbf{R}_{ab}^T \dot{\mathbf{u}}_{ab} + \mathbf{R}_{ab}^T \ddot{\mathbf{u}}_{ab} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \dot{\Omega}_{b,ab} & -\Omega_{b,ab} \mathbf{R}_{ab}^T \dot{\mathbf{u}}_{ab} + \mathbf{R}_{ab}^T \ddot{\mathbf{u}}_{ab} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

donde la matriz de aceleración angular es la derivada de la matriz de velocidad angular, ec.(2.36):

$$\dot{\Omega}_{b,ab} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_z & \alpha_y \\ \alpha_z & 0 & -\alpha_x \\ -\alpha_y & \alpha_x & 0 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

donde el vector axial asociado a esta matriz es:

$$\alpha_{ab} = [\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z]_{ab}^T \quad (2.50)$$

Otra forma de obtener la matriz  $\dot{\Omega}_{b,ab}$  de aceleración angular en términos del sistema  $a$  es derivando la ecuación (2.32), donde se obtiene que la aceleración angular está definida como:

$$\dot{\Omega}_{a,ab} = \ddot{\mathbf{R}}_{ab} \mathbf{R}_{ab}^T + \dot{\mathbf{R}}_{ab} \dot{\mathbf{R}}_{ab}^T \quad (2.51)$$

la relación que existe entre  $\dot{\Omega}_{b,ab}$  y  $\dot{\Omega}_{a,ab}$  se declara como:

$$\dot{\Omega}_{b,ab} = \mathbf{R}_{ab}^T \dot{\Omega}_{a,ab} \mathbf{R}_{ab} \quad (2.52)$$

sustituyendo la ec.(2.51) en la ec.(2.52) y desarrollando operaciones se tiene que:

$$\dot{\Omega}_{b,ab} = \mathbf{R}_{ab}^T (\ddot{\mathbf{R}}_{ab} \mathbf{R}_{ab}^T + \dot{\mathbf{R}}_{ab} \dot{\mathbf{R}}_{ab}^T) \mathbf{R}_{ab} = \mathbf{R}_{ab}^T \ddot{\mathbf{R}}_{ab} \mathbf{R}_{ab}^T \mathbf{R}_{ab} + \mathbf{R}_{ab}^T \dot{\mathbf{R}}_{ab} \dot{\mathbf{R}}_{ab}^T \mathbf{R}_{ab} = \mathbf{R}_{ab}^T \ddot{\mathbf{R}}_{ab} + \mathbf{R}_{ab}^T \dot{\mathbf{R}}_{ab} \dot{\mathbf{R}}_{ab}^T \mathbf{R}_{ab} \quad (2.53)$$

y finalmente, haciendo un arreglo al termino  $\dot{\mathbf{R}}_{ab} \dot{\mathbf{R}}_{ab}^T$  en la ecuación (2.53), se obtiene que:

$$\dot{\Omega}_{b,ab} = \mathbf{R}_{ab}^T \ddot{\mathbf{R}}_{ab} + \mathbf{R}_{ab}^T \Omega_{a,ab} \mathbf{R}_{ab} (-\mathbf{R}_{ab}^T \Omega_{a,ab}) \mathbf{R}_{ab} = \mathbf{R}_{ab}^T \ddot{\mathbf{R}}_{ab} + \mathbf{R}_{ab}^T \Omega_{a,ab} \Omega_{a,ab} \mathbf{R}_{ab} \quad (2.54)$$

Ahora, para obtener a la matriz  $\mathbf{V}_{b,ab}^2$  se multiplica  $\mathbf{V}_{b,ab}$  por si misma, esto es:

$$\mathbf{V}_{b,ab}^2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_{b,ab} & \mathbf{R}_{ab}^T \dot{\mathbf{u}}_{ab} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_{b,ab} & \mathbf{R}_{ab}^T \dot{\mathbf{u}}_{ab} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_{b,ab}^2 & \boldsymbol{\Omega}_{b,ab} \mathbf{R}_{ab}^T \dot{\mathbf{u}}_{ab} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

Por lo que, sustituyendo la ec.(2.55) y la ec.(2.48) en  $\mathbf{B}_{b,ab}$ , ec.(2.44) se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{b,ab} &= \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{b,ab} & -\boldsymbol{\Omega}_{b,ab} \mathbf{R}_{ab}^T \dot{\mathbf{u}}_{ab} + \mathbf{R}_{ab}^T \ddot{\mathbf{u}}_{ab} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_{b,ab}^2 & \boldsymbol{\Omega}_{b,ab} \mathbf{R}_{ab}^T \dot{\mathbf{u}}_{ab} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{b,ab} + \boldsymbol{\Omega}_{b,ab}^2 & -\boldsymbol{\Omega}_{b,ab} \mathbf{R}_{ab}^T \dot{\mathbf{u}}_{ab} + \mathbf{R}_{ab}^T \ddot{\mathbf{u}}_{ab} + \boldsymbol{\Omega}_{b,ab} \mathbf{R}_{ab}^T \dot{\mathbf{u}}_{ab} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{b,ab} + \boldsymbol{\Omega}_{b,ab}^2 & \mathbf{R}_{ab}^T \ddot{\mathbf{u}}_{ab} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.56)$$

### 2.1.2. Matrices Homogéneas de Transformación Básicas

#### Generalización de las matrices homogéneas de transformación

De acuerdo a (Siciliano et al., 2009), “una matriz de transformación homogénea expresa la transformación de la coordenada entre dos marcos de referencia en una manera compacta. Si los marcos de referencia tienen el mismo origen, la matriz de transformación homogénea se reduce a la matriz de rotación. En cambio, si los marcos de referencia tienen distintos orígenes, la notación de superíndices y subíndices se mantiene para caracterizar el marco de referencia actual y el marco de referencia fijo.” Esta transformación de la coordenada entre dos marcos de referencia se utiliza para representar los movimientos de un cuerpo rígido. Las matrices de transformación homogéneas, de acuerdo a (Spong et al., 2005), suelen representarse de la forma:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{d} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{R} \in \mathbf{SO}(3), \mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$$

y

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & -\mathbf{R}^T \mathbf{d} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

Donde

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3 \times 3} & \mathbf{d}_{3 \times 1} \\ \mathbf{f}_{1 \times 3} & s_{1 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \textit{Rotación} & \textit{Traslación} \\ \textit{Perspectiva} & \textit{Factor de escala} \end{bmatrix}$$

De manera que teniendo dos vectores

$$\mathbf{P}^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{p}^0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}^1 = \begin{bmatrix} \mathbf{p}^1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

se puede decir que:

$$\mathbf{P}^0 = \mathbf{T}_1^0 \mathbf{P}^1$$

Además, (Spong et al., 2005) establece que el conjunto de matrices homogéneas de transformación básicas está dado por:

$$\begin{aligned} \textit{Trans}_{x,a} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \textit{Trans}_{y,b} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \textit{Trans}_{z,c} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \textit{Rot}_{x,\alpha} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_\alpha & -s_\alpha & 0 \\ 0 & s_\alpha & c_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \textit{Rot}_{y,\beta} &= \begin{bmatrix} c_\beta & 0 & s_\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_\beta & 0 & c_\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \textit{Rot}_{z,\gamma} &= \begin{bmatrix} c_\gamma & -s_\gamma & 0 & 0 \\ s_\gamma & c_\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

para la traslación y rotación alrededor de los ejes  $x$ ,  $y$ ,  $z$  respectivamente.

En (Briot, 2015) se enlistan las siguientes propiedades de las matrices homogéneas de transformación:

### Propiedad 1

La matriz de transformación homogénea puede ser escrita como:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & r_x \\ s_y & n_y & a_y & r_y \\ s_z & n_z & a_z & r_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{s} & \mathbf{n} & \mathbf{a} & \mathbf{r} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{r} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz  $\mathbf{R} = [\mathbf{s} \ \mathbf{n} \ \mathbf{a} \ \mathbf{r}]$  representa la rotación mientras que el vector  $\mathbf{r}$  representa la traslación. Para una transformación de traslación pura,  $\mathbf{R} = \mathbf{1}_3$  ( $\mathbf{1}_3$  representa la matriz identidad de orden 3), mientras que para una transformación de rotación pura  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$

### Propiedad 2

La matriz  $\mathbf{R}$  es ortogonal y su determinante es igual a 1. por consiguiente, su inversa es igual a su transpuesta.

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$$

donde el índice superior "T" indica la transpuesta de la matriz.

### Propiedad 3

La inversa de una matriz es la matriz. De esta manera, para expresar los componentes de un vector en el marco de referencia, se escribe:

$${}^j\tilde{\mathbf{p}}_1 = {}^j\mathbf{T}_i {}^i\tilde{\mathbf{p}}_1 \quad \text{con} \quad {}^j\mathbf{T}_i = {}^i\mathbf{T}_j^{-1}$$

### Propiedad 4

Se puede verificar fácilmente que

$$\begin{aligned} \mathbf{Rot}^{-1}(\mathbf{u}, \theta) &= \mathbf{Rot}(\mathbf{u}, -\theta) = \mathbf{Rot}(-\mathbf{u}, \theta) \\ \mathbf{Trans}^{-1}(\mathbf{u}, d) &= \mathbf{Trans}(\mathbf{u}, -d) = \mathbf{Trans}(-\mathbf{u}, d) \end{aligned}$$

### Propiedad 5

La inversa de la matriz de transformación puede ser obtenida a través de:

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} & & -\mathbf{s}^T \mathbf{r} \\ & \mathbf{R}^T & -\mathbf{n}^T \mathbf{r} \\ & & -\mathbf{a}^T \mathbf{r} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \mathbf{R}^T & -\mathbf{R}^T \mathbf{r} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### Propiedad 6

Composición de dos matrices: la multiplicación de dos matrices de transformación da como

resultado otra matriz de transformación

$$\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & \mathbf{r}_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_2 & \mathbf{r}_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1\mathbf{R}_2 & \mathbf{R}_1\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De manera general,  $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 \neq \mathbf{T}_2\mathbf{T}_1$

### Propiedad 7

Si el marco de referencia  $F_0$  está sujeto a un número  $k$  de transformaciones consecutivas y cada transformación  $i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) es definida con respecto a el marco de referencia actual  $F_{i-1}$ , entonces la transformación  ${}^0\mathbf{T}_k$  puede ser deducida a través de la multiplicación de todas las transformaciones de la derecha, esto es:

$${}^0\mathbf{T}_k = \prod_{i=1}^k {}^{i-1}\mathbf{T}_i = {}^0\mathbf{T}_1 \cdot {}^1\mathbf{T}_2 \cdot {}^2\mathbf{T}_3 \dots {}^{k-1}\mathbf{T}_k$$

### Propiedad 8

Para transformaciones consecutivas sobre el mismo eje se cumplen las siguientes propiedades:

$$\mathbf{Rot}(\mathbf{u}, \theta_1)\mathbf{Rot}(\mathbf{u}, \theta_2) = \mathbf{Rot}(\mathbf{u}, \theta_1 + \theta_2)$$

$$\mathbf{Rot}(\mathbf{u}, \theta_1)\mathbf{Trasl}(\mathbf{u}, d) = \mathbf{Trasl}(\mathbf{u}, d)\mathbf{Rot}(\mathbf{u}, \theta)$$

## 2.1.3. Parámetros de Euler

### Definición

Como bien lo menciona (Nikravesh, 1988), “los parámetros de Euler son una técnica involucrada en la descripción de la orientación angular de cuerpos en el espacio”. Se basan en el teorema de Euler de rotación finita, el cuál (Flores, 2015) lo explica de la siguiente manera:

“De acuerdo al teorema de Euler de rotación finita, una rotación en un espacio tridimensional siempre puede ser descrito por una rotación a lo largo de un cierto eje con un cierto ángulo dado. En otras palabras, el teorema de Euler establece que el desplazamiento general de un cuerpo con un punto fijo es una rotación alrededor de algún eje. El teorema indica que la orientación de los ejes fijos al cuerpo a cualquier instante puede ser obtenida por una rotación imaginaria de estos ejes desde una orientación coincidente con los ejes globales (sistema coordenado global).

Por lo tanto, de acuerdo al teorema de Euler, existe un eje único que si el sistema coordenado  $xyz$  es rotado alrededor de este eje único por un ángulo  $\phi$ , el sistema coordenado  $xyz$  se vuelve paralelo al sistema coordenado  $\xi\eta\zeta$  y viceversa. Este eje imaginario es denotado por  $\vec{u}$  y este es llamado el eje de orientación de rotación”

La representación más conocida de los parámetros de Euler está dada en (Nikravesh, 1988), la cual establece que un conjunto de coordenadas rotacionales:

$$e_0 = \cos \frac{\phi}{2} \quad (2.57)$$

$$\mathbf{e} = [e_1 \ e_2 \ e_3]^T = \mathbf{u} \sin \frac{\phi}{2} \quad (2.58)$$

en los cuales el vector  $\mathbf{e}$  es el eje de orientación de rotación, con magnitud  $\sin \frac{\phi}{2}$ . Mientras que los parámetros de Euler son los escalares  $e_0$ ,  $e_1$ ,  $e_2$  y  $e_3$ . Los cuales mantienen las siguientes relaciones:

$$\cos^2 \frac{\phi}{2} + \mathbf{u}^T \mathbf{u} \sin^2 \frac{\phi}{2} = 1 \quad (2.59)$$

y

$$e_0^2 + \mathbf{e}^T \mathbf{e} = e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1 \quad (2.60)$$

Y suelen representarse como:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} e_0 \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix}^T \quad (2.61)$$

cumpliendo con:

$$\mathbf{p}^T \mathbf{p} = 1 \quad (2.62)$$

Cabe mencionar la existencia de los cuaterniones. En (Wehage, 1984) se describe a los parámetros de Euler como “cuaterniones normalizados con un vector de orientación espacial y un escalar normalizado”. De manera general los cuaterniones se definen como la suma de un escalar con un vector (Kuipers, 1998):

$$q = q_0 + \mathbf{q} = q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3$$

La razón para utilizar parámetros de Euler es que su representación permite un manejo matricial más sencillo que el que se tiene para la forma general de los cuaterniones.

### Representación de las rotaciones en parámetros de Euler

Los parámetros de Euler parten del teorema de Euler en el cual se dice que el desplazamiento general de un cuerpo con un punto fijo es una rotación sobre algún eje. De esto se puede concluir que la transformación del sistema de coordenadas de un punto a otro se puede representar a través de una rotación sobre algún eje, esto significa que la matriz de transformación  $\mathbf{R}_{ab}$  está dada por (Nikravesh, 1988):

$$\mathbf{R}_{ab} = \mathbf{R}(\mathbf{p}_i) \quad (2.63)$$

$$\mathbf{p}_i = \begin{bmatrix} p_{i0} & p_{i1} & p_{i2} & p_{i3} \end{bmatrix}^T \quad (2.64)$$

donde (2.64) corresponde a (2.61), teniendo en cuenta el cambio de la notación a  $p_i$  y además (Nikravesh, 1988):

$$\mathbf{R}(\mathbf{p}_i) = 2 \begin{bmatrix} p_{i0}^2 + p_{i1}^2 - \frac{1}{2} & p_{i1}p_{i2} - p_{i0}p_{i3} & p_{i1}p_{i3} + p_{i0}p_{i2} \\ p_{i1}p_{i2} + p_{i0}p_{i3} & p_{i0}^2 + p_{i2}^2 - \frac{1}{2} & p_{i2}p_{i3} - p_{i0}p_{i1} \\ p_{i1}p_{i3} - p_{i0}p_{i2} & p_{i2}p_{i3} + p_{i0}p_{i1} & p_{i0}^2 + p_{i3}^2 - \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

$\mathbf{R}_{mn}$  es la matriz general de transformación de rotación sobre un eje arbitrario del sistema  $m$  al sistema  $n$ ,

$\mathbf{p}_i$  es el vector de parámetros de Euler correspondiente a  $\mathbf{R}_{mn}$ , esto es  $\mathbf{p}_i = \begin{bmatrix} p_{i0} & p_{i1} & p_{i2} & p_{i3} \end{bmatrix}^T$ , mientras que  $i$  indica el número del movimiento y los números 0 al 3 indican el número de elemento dentro  $\mathbf{p}_i$

A continuación se verá la definición de las matrices de rotación específicas para cada eje de un sistema cartesiano XYZ.

### Rotación en X

Cuando el eje arbitrario de rotación se alinea con el eje X del sistema cartesiano, la definición del vector de parámetros de Euler ( $\mathbf{p}_i$ ) y la matriz de transformación de rotación en X ( $\mathbf{R}_x(\mathbf{p}_i)$ )

está dada por:

$$\mathbf{p}_i = \begin{bmatrix} p_{i0} & p_{i1} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (2.66)$$

$$\mathbf{R}_x(\mathbf{p}_i) = 2 \begin{bmatrix} p_{i0}^2 + p_{i1}^2 - \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & p_{i0}^2 - \frac{1}{2} & -p_{i0}p_{i1} \\ 0 & p_{i0}p_{i1} & p_{i0}^2 - \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

como el lector puede observar, los parámetros de Euler correspondientes a las proyecciones en los ejes Y y Z, así como los términos de la matriz de transformación de rotación que los involucran, tienen el valor de cero.

### Rotación en Y

De la misma manera, cuando el eje arbitrario de rotación se alinea con el eje Y del sistema cartesiano, la definición del vector de parámetros de Euler ( $\mathbf{p}_i$ ) y la matriz de transformación de rotación en Y ( $\mathbf{R}_y(\mathbf{p}_i)$ ) está dada por:

$$\mathbf{p}_i = \begin{bmatrix} p_{i0} & 0 & p_{i2} & 0 \end{bmatrix}^T \quad (2.68)$$

$$\mathbf{R}_y(\mathbf{p}_i) = 2 \begin{bmatrix} p_{i0}^2 - \frac{1}{2} & 0 & p_{i0}p_{i2} \\ 0 & p_{i0}^2 + p_{i2}^2 - \frac{1}{2} & 0 \\ -p_{i0}p_{i2} & 0 & p_{i0}^2 - \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

en este caso, los parámetros de Euler correspondientes a las proyecciones en los ejes X y Z, así como los términos de la matriz de transformación de rotación que los involucran, ahora tienen el valor de cero.

### Rotación en Z

Y finalmente, para el caso en el que el eje arbitrario de rotación se alinea con el eje Z del sistema cartesiano, la definición del vector de parámetros de Euler ( $\mathbf{p}_i$ ) y la matriz de

transformación de rotación en Z ( $\mathbf{R}_z(\mathbf{p}_i)$ ) está dada por:

$$\mathbf{p}_i = \begin{bmatrix} p_{i0} & 0 & 0 & p_{i3} \end{bmatrix}^T \quad (2.70)$$

$$\mathbf{R}_z(\mathbf{p}_i) = 2 \begin{bmatrix} p_{i0}^2 - \frac{1}{2} & -p_{i0}p_{i3} & 0 \\ p_{i0}p_{i3} & p_{i0}^2 - \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{i0}^2 + p_{i3}^2 - \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

donde los parámetros de Euler correspondientes a las proyecciones en los ejes X y Y, así como los términos de la matriz de transformación de rotación que los involucran, tienen el valor de cero.

## 2.2. Bases teóricas de la dinamica

### 2.2.1. Método de Newton-Euler

En esta fomulación primero se separan todos los cuerpos rígidos del sistema para crear el diagrama de cuerpo libre. Para ello se adhieren marcos de referencia local en el centro de masa de cada cuerpo rígido, siendo por lo general paralelos a los marcos de referencia empleados para modelar las juntas cinemáticas del sistema; y también se establecen las fuerzas y momentos de reacción de cada cuerpo, que representan las restricciones impuestas por las juntas cinemáticas.

Estas fuerzas y momentos reacción sobre las juntas cinemáticas son considerados de la misma magnitud y en direcciones opuestas, actuando sobre diferentes cuerpos a lo largo de la misma línea de acción de acuerdo a la tercera ley de Newton. También se establecen las fuerzas y torques externos aplicados a cada cuerpo rígido generados por la interacción con el medio y/o por los actuadores.

Entonces las ecuaciones de Newton – Euler son escritas con respecto al marco de referencia local adherido en el centro de masa de cada cuerpo rígido. Para describir las distintas cantidades cinemáticas, de fuerzas y momentos con respecto al sistema en el centro de masa, se utilizarán las definición de rotación previamente establecidas, permitiendo así establecer definiciones entre distintos marcos de referencia.

Para un cuerpo en el espacio las ecs. de Newton-Euler son:

$$\Sigma \mathbf{F} = m \mathbf{A}_G \quad (2.72)$$

$$\Sigma \mathbf{M}_G = \mathbf{I}_G \alpha + \omega \times (\mathbf{I}_G \omega) \quad (2.73)$$

Definiendo *C.G.* como el centro de gravedad, se tiene:

$\Sigma \mathbf{F}$  Suma de fuerzas externas sobre el cuerpo alrededor del *C.G.*

$m$  Masa del cuerpo.

$\mathbf{A}_G$  Aceleración absoluta del *C.G.* medido en el marco inercial.

$\Sigma \mathbf{M}_G$  Suma de momentos y torques externos alrededor del *C.G.* del cuerpo.

$\mathbf{I}_G$  Matriz de momentos de inercia respecto al *C.G.*

$\alpha$  Vector aceleración angular del cuerpo.

$\omega$  vector velocidad angular del cuerpo.

Para la figura 2.1 mostrada, las ecuaciones dinámicas respecto al *C.G.* son:

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_5 + \mathbf{W} = m \mathbf{A}_G$$

$$\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \dots + \mathbf{M}_4 + \mathbf{R}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{R}_2 \times \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{R}_5 \times \mathbf{F}_5 = \mathbf{I}_G \alpha + \omega \times (\mathbf{I}_G \omega)$$

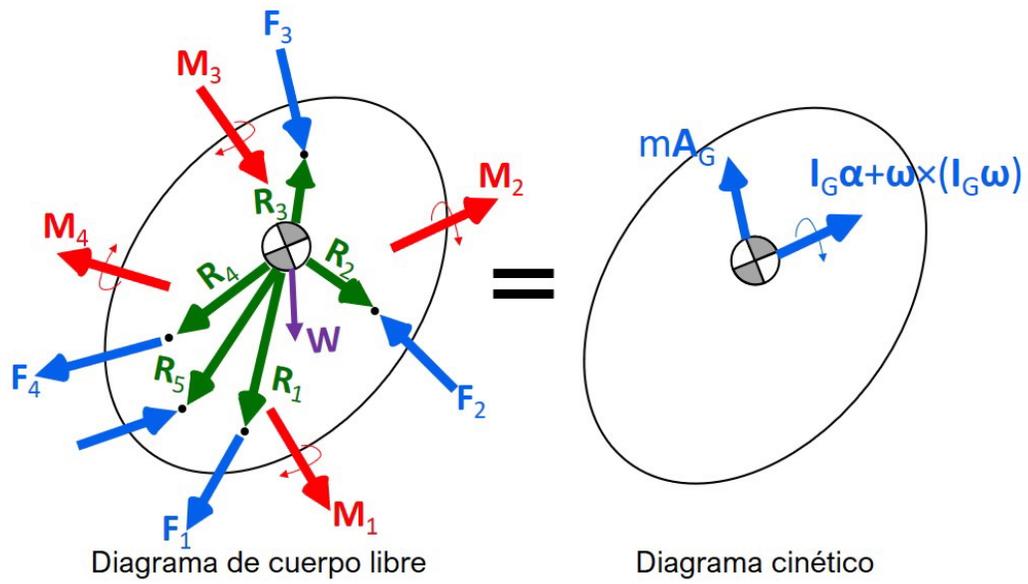


Fig.2.1. Fuerzas y momentos en C.G.

Por otra parte, dada la figura 2.2, las ecuaciones dinámicas respecto a  $P$  son:

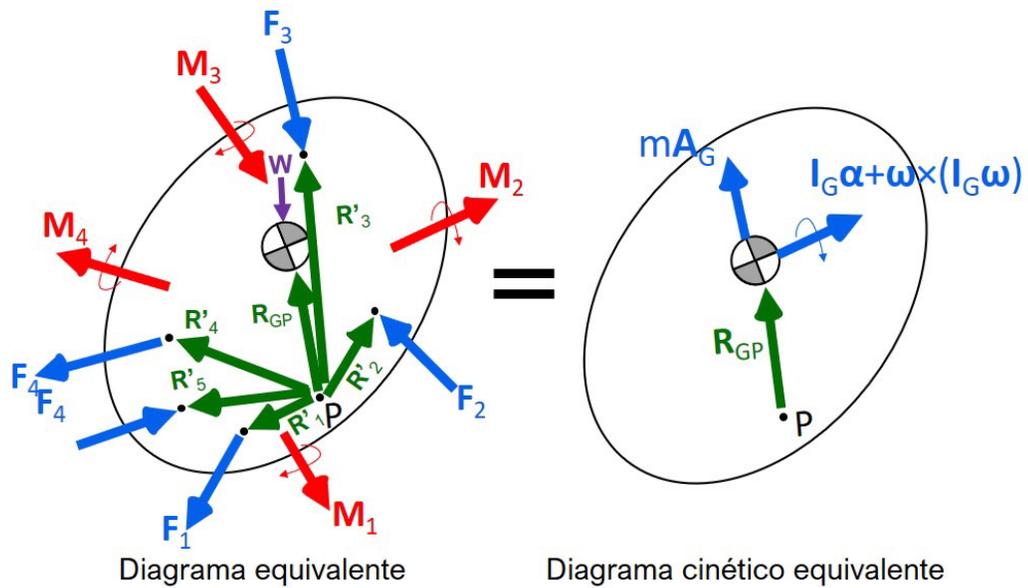


Fig.2.2. Fuerzas y momentos en  $P$ .

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_5 + \mathbf{W} &= m\mathbf{A}_G \\
\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \dots + \mathbf{M}_4 + \mathbf{R}'_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{R}'_2 \times \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{R}'_5 \times \mathbf{F}_5 + \mathbf{R}_{GP} \times \mathbf{W} &= \mathbf{I}_G \alpha + \omega \times (\mathbf{I}_G \omega) \\
&\quad + \mathbf{R}_{GP} \times (m\mathbf{A}_G)
\end{aligned}$$

Las ecs. anteriores se escriben como:

$$\begin{aligned}
\Sigma \mathbf{F} &= m\mathbf{A}_G \\
\Sigma \mathbf{M}_P &= \mathbf{M}_G + \mathbf{R}_{GP} \times (m\mathbf{A}_G)
\end{aligned} \tag{2.74}$$

Donde  $m\mathbf{A}_G$  y  $\mathbf{M}_G = \mathbf{I}_G \alpha + \omega \times (\mathbf{I}_G \omega)$  son las fuerzas y momentos inerciales respectivamente.

### **Formulación Matricial**

Las ecs. (2.72) y (2.74) serán escritas en forma matricial y tomando en cuenta las transformaciones de los vectores entre las bases locales e inerciales. Dada la figura 2.3 y su diagrama de cuerpo libre (figura 2.4). Aplicando las ecs.(2.72) y (2.74) respecto al punto  $O_1$  se tiene:

$$\begin{aligned}
\Sigma \mathbf{F} &= m\mathbf{A}_G \\
\Sigma \mathbf{M}_{O_1} &= \mathbf{M}_G + \mathbf{r}_{GP} \times (m\mathbf{A}_G)
\end{aligned}$$

El vector  $\mathbf{r}_{GP}$  está definido en la base local del cuerpo por conveniencia, como se mostrará más adelante.

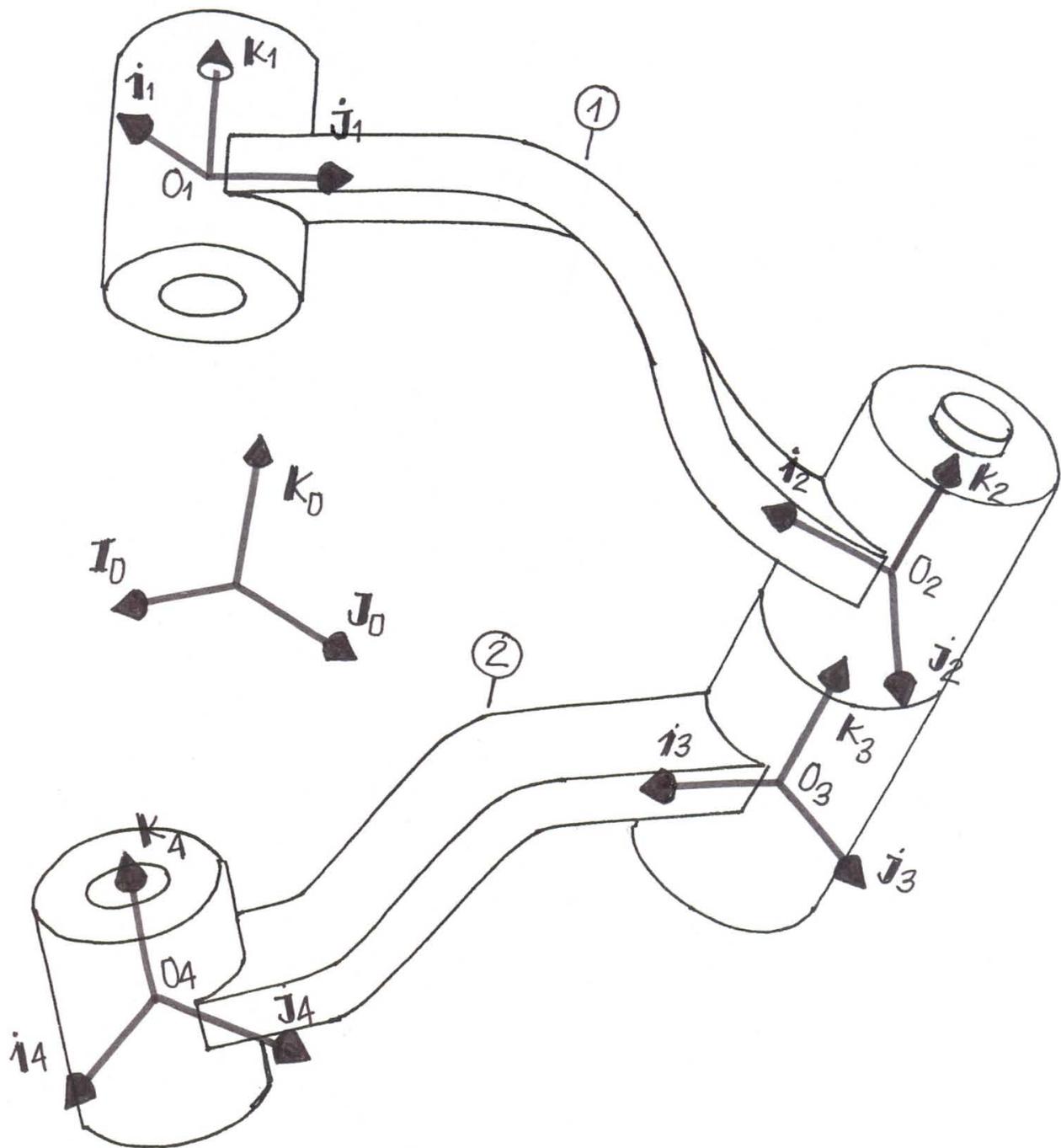


Fig.2.3. Sistema de 2 cuerpos.

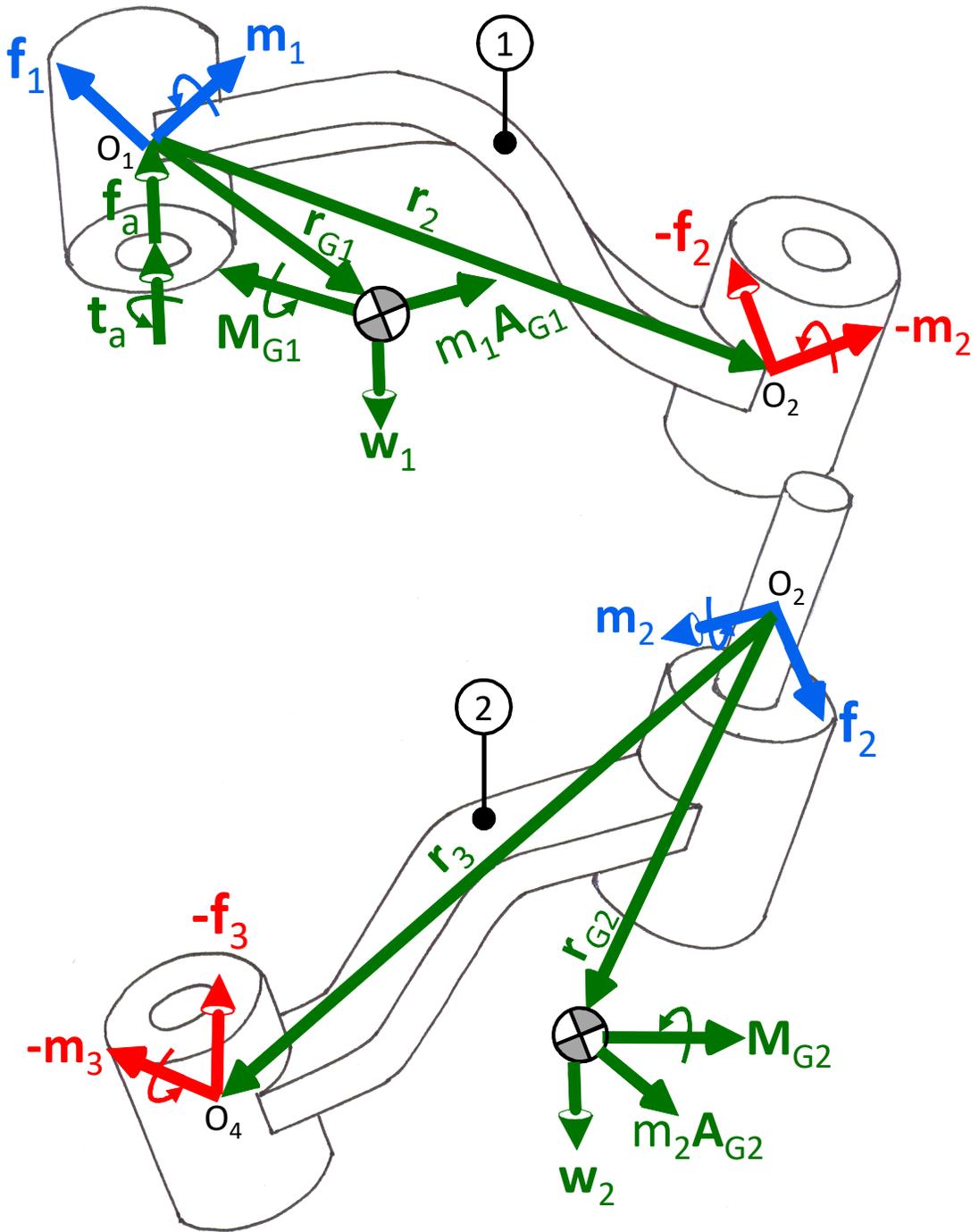


Fig.2.4. Diagrama de cuerpo libre.

Aplicando las ecs. al cuerpo 1 y definiendo las ecs. en la base local ( $i_1, j_1, k_1$ ) se tiene (figura 2.4):

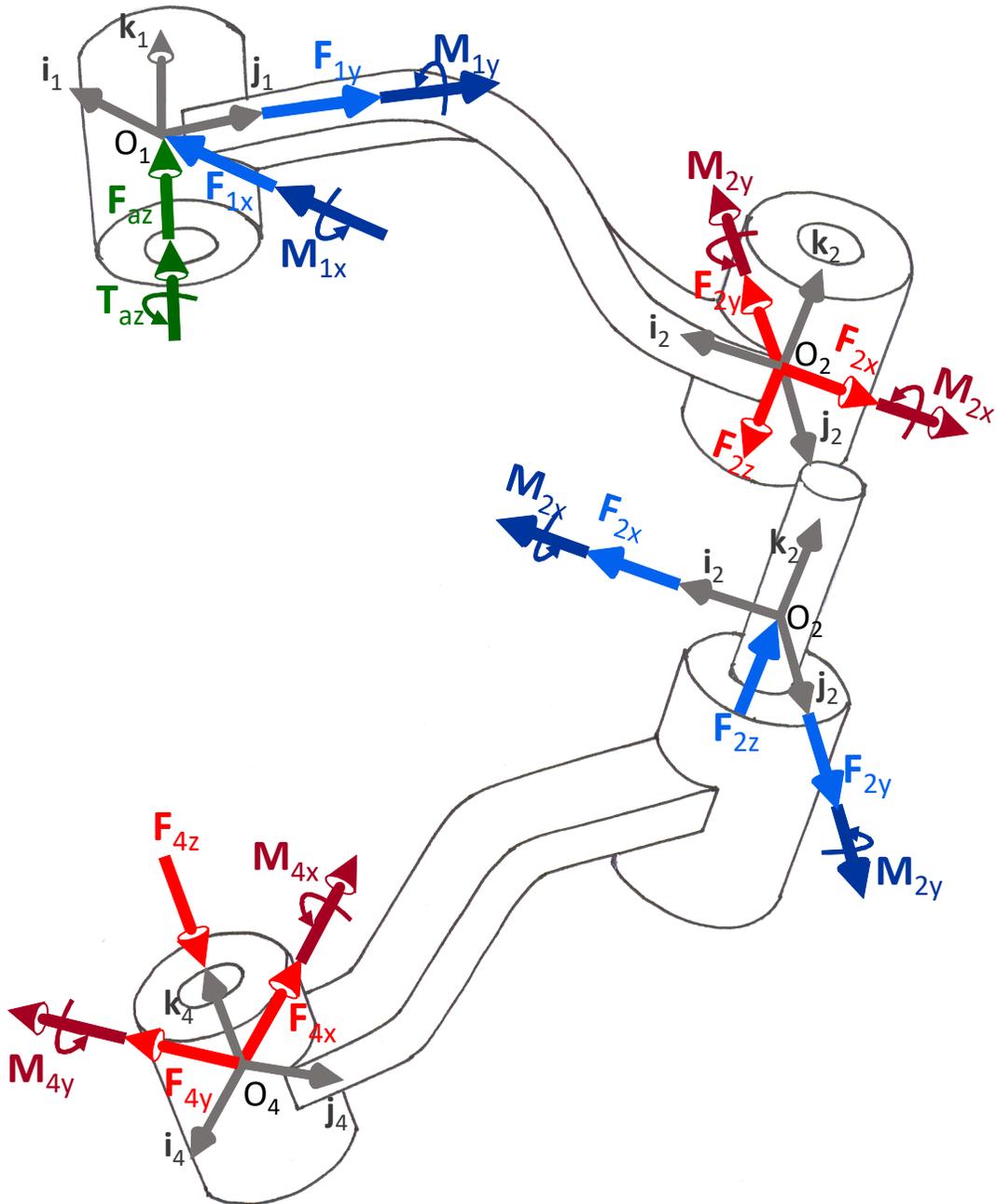


Fig.2.5. Componentes de fuerzas y momentos.

$$\mathbf{f}_a + \mathbf{f}_1 + \mathbf{C}_2^1(-\mathbf{f}_2) + \mathbf{C}_0^1\mathbf{w}_1 = \mathbf{C}_0^1(m_1\mathbf{A}_{G1})$$

$$\mathbf{t}_a + \mathbf{m}_1 + \mathbf{C}_2^1(-\mathbf{m}_2) + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{C}_2^1(-\mathbf{f}_2) + \mathbf{r}_{G1} \times \mathbf{C}_0^1\mathbf{w}_1 = \mathbf{C}_0^1\mathbf{M}_{G1} + \mathbf{r}_{G1} \times \mathbf{C}_0^1(m_1\mathbf{A}_{G1})$$

A partir de la figura 2.5 las componentes de los vectores son:

$$\mathbf{f}_a = [0, 0, F_{az}]^T$$

$$\mathbf{f}_1 = [F_{1x}, F_{1y}, 0]^T$$

$$\mathbf{f}_2 = [F_{2x}, F_{2y}, F_{2z}]^T$$

$$\mathbf{w}_1 = [0, 0, -m_1g]^T$$

$$\mathbf{a}_{G1} = [A_{G1x}, A_{G1y}, A_{G1z}]^T$$

$$\mathbf{t}_a = [0, 0, T_{az}]^T$$

$$\mathbf{m}_1 = [M_{1x}, M_{1y}, 0]^T$$

$$\mathbf{m}_2 = [M_{2x}, M_{2y}, 0]^T$$

$$\mathbf{M}_{G1} = [M_{G1x}, M_{G1y}, M_{G1z}]^T$$

$\mathbf{f}_a, \mathbf{t}_a$  Fuerzas y torques externos aplicados.

$\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$  Fuerzas de reacción de las juntas 1 y 2.

$\mathbf{w}_1$  Peso del cuerpo 1.

$\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$  Momentos de reacción de las juntas 1 y 2.

$\mathbf{A}_{G1}$  Aceleración del centro de gravedad del cuerpo 1 y 2.

$\mathbf{M}_{G1}$  Momento inercial del cuerpo 1.

Los vectores  $\mathbf{f}_a, \mathbf{f}_1, \mathbf{t}_a, \mathbf{m}_1$  están definidos en la base  $(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1)$ . Los vectores  $\mathbf{f}_2, \mathbf{m}_2$  están definidos en la base  $(\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2)$ . Los vectores  $\mathbf{w}_1, \mathbf{A}_{G1}, \mathbf{M}_{G1}$  están definidos en la base  $(\mathbf{I}_0, \mathbf{J}_0, \mathbf{K}_0)$ .

Por otro lado tenemos que  $\mathbf{C}_0^1$  y  $\mathbf{C}_2^1$  son composiciones de matrices de rotación que convierten vectores de la base  $(\mathbf{I}_0, \mathbf{J}_0, \mathbf{K}_0)$  a la base  $(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1)$  y de la base  $(\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2)$  a la base  $(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1)$  respectivamente. Los vectores que no son transformados, ya están definidos en la base  $(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1)$ . Empleando matrices antisimétricas para definir el producto cruz, esto es  $\mathbf{S} = \mathbf{r} \times$ ,

las ecs. anteriores se reescriben como:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_a + \mathbf{f}_1 + \mathbf{C}_2^1(-\mathbf{f}_2) + \mathbf{C}_0^1\mathbf{w}_1 &= \mathbf{C}_0^1(m_1\mathbf{A}_{G1}) \\ \mathbf{t}_a + \mathbf{m}_1 + \mathbf{C}_2^1(-\mathbf{m}_2) + \mathbf{S}_2\mathbf{C}_2^1(-\mathbf{f}_2) + \mathbf{S}_{G1}\mathbf{C}_0^1\mathbf{w}_1 &= \mathbf{C}_0^1\mathbf{M}_{G1} + \mathbf{S}_{G1}\mathbf{C}_0^1(m_1\mathbf{A}_{G1}) \end{aligned}$$

Expresándolas matricialmente:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_a \\ \mathbf{t}_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{m}_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{C}_2^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_2\mathbf{C}_2^1 & \mathbf{C}_2^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{m}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_0^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{G1}\mathbf{C}_0^1 & \mathbf{C}_0^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_0^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{G1}\mathbf{C}_0^1 & \mathbf{C}_0^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1\mathbf{A}_{G1} \\ \mathbf{M}_{G1} \end{bmatrix}$$

Renombrando:

$$\mathbf{F}_a + \mathbf{F}_1 - \mathbf{Q}_2^1\mathbf{F}_2 + \mathbf{Q}_0^1\mathbf{W}_1 = \mathbf{Q}_0^1\mathbf{F}_{G1}$$

Donde:

$$\mathbf{F}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_a \\ \mathbf{t}_a \end{bmatrix} = [0, 0, F_{az}, 0, 0, T_{az}]^T$$

$$\mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{m}_1 \end{bmatrix} = [F_{1x}, F_{1y}, 0, M_{1x}, M_{1y}, 0]^T$$

$$\mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{m}_2 \end{bmatrix} = [F_{2x}, F_{2y}, F_{2z}, M_{2x}, M_{2y}, 0]^T$$

$$\mathbf{W}_1 = [0, 0, -m_1g, 0, 0, 0]^T$$

$$\mathbf{F}_{G1} = \begin{bmatrix} m_1\mathbf{A}_{G1} \\ \mathbf{M}_{G1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_0^1 = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_0^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{G1}\mathbf{C}_0^1 & \mathbf{C}_0^1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_2^1 = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_2^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_2\mathbf{C}_2^1 & \mathbf{C}_2^1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}_{G1} = \begin{bmatrix} 0 & -z_{G1} & y_{G1} \\ z_{G1} & 0 & -x_{G1} \\ -y_{G1} & x_{G1} & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{S}(x_{G1}, y_{G1}, z_{G1})$$

$$\mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -z_2 & y_2 \\ z_2 & 0 & -x_2 \\ -y_2 & x_2 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{S}(x_2, y_2, z_2)$$

Las matrices antisimétricas también pueden ser expresadas en ejes  $(x, y, x)$  como:

$$\mathbf{S}_x(a) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}_y(b) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ -b & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}_z(c) = \begin{bmatrix} 0 & -c & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si un eslabon tiene una longitud  $z$  con un dobléz de ángulo  $\beta$  alrededor del eje  $x$ , esta se define como:

$$\mathbf{S} = \mathbf{R}_x(\beta) \mathbf{S}_z(z) \mathbf{R}_x(\beta)^T$$

Agrupando la ec. dinámica en fuerzas aplicadas, de reacción e inerciales se tiene:

$$\mathbf{F}^A + \mathbf{F}^R + \mathbf{F}^I = \mathbf{0} \quad (2.75)$$

Donde:

$$\mathbf{F}^A = \mathbf{F}_a + \mathbf{Q}_0^1 \mathbf{W}_1$$

$$\mathbf{F}^R = \mathbf{F}_1 - \mathbf{Q}_2^1 \mathbf{F}_2$$

$$\mathbf{F}^I = -\mathbf{Q}_0^1 \mathbf{F}_{G1}$$

Además:

$\mathbf{F}^A$  Torsor de fuerzas y momentos aplicados al cuerpo.

$\mathbf{F}^R$  Torsor de fuerzas y momentos de reacción del cuerpo.

$\mathbf{F}^I$  Torsor de fuerzas y momentos inerciales.

$\mathbf{Q}$  Matrices de transformación de torsesores.

Para un análisis estático se cumple:

$$\mathbf{F}^I = \mathbf{0}$$

La ec.(2.75) representa las ecs. de equilibrio dinámico mediante el uso de torsesores de fuerzas.

Un torsor de fuerza es un vector de 6 componentes, los primeros tres componentes son fuerzas asociadas a la traslación del cuerpo y los segundos tres componentes son torques o momentos

asociados al giro del cuerpo. Una expresión similar puede ser obtenida para el cuerpo 2.

La siguientes expresión más general será aplicada:

$$\mathbf{F}_{ij}^A + \mathbf{F}_{ij}^I + \mathbf{F}_{ij}^R = 0 \quad (2.76)$$

Donde:

$\mathbf{F}_{ij}$   $i$  Base donde se expresan las fuerzas y momentos  
 $j$  Número del cuerpo

### 2.2.2. Fuerza de Reacción en las Juntas

Para establecer las reacciones en las juntas cinemáticas se declara la siguiente regla general:  
*Si una junta evita la traslación de un cuerpo en una dirección dada, entonces una fuerza es desarrollada sobre el cuerpo en esa dirección. De la misma manera, si una rotación es evitada, un momento es desarrollada sobre el cuerpo.* Dadas las siguientes juntas:

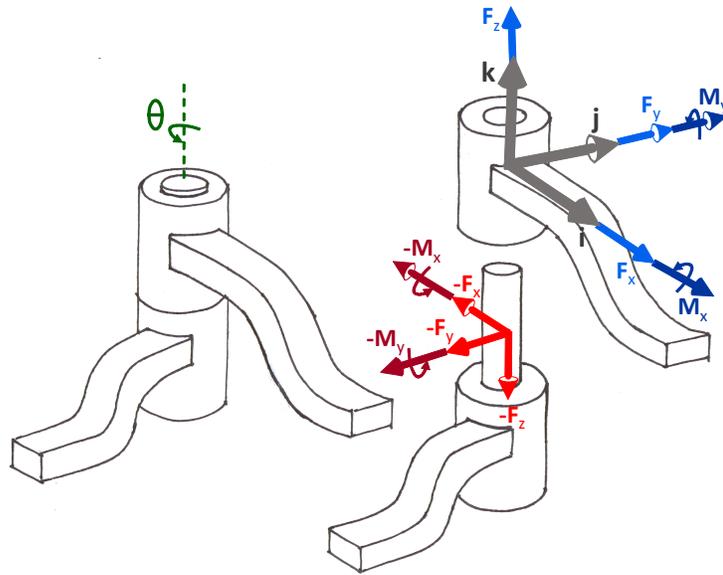


Fig.2.6. Reacciones junta rotacional

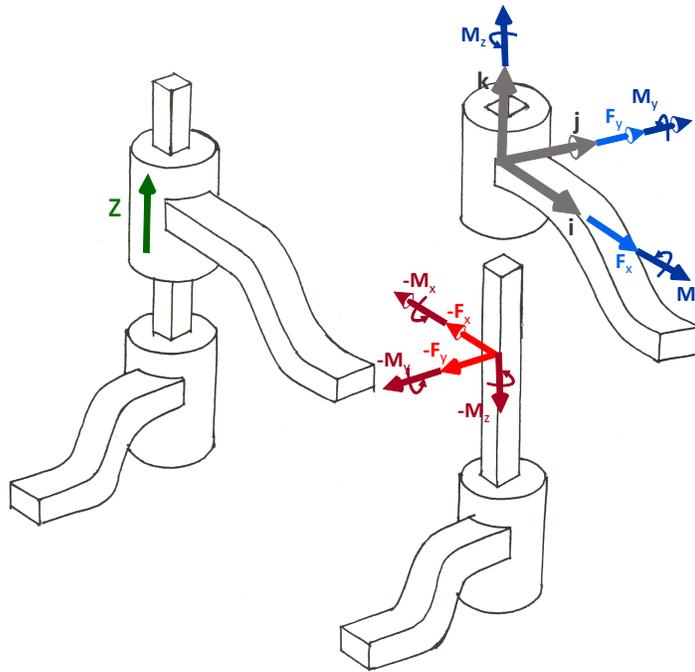


Fig.2.7. Reacciones junta prismática.

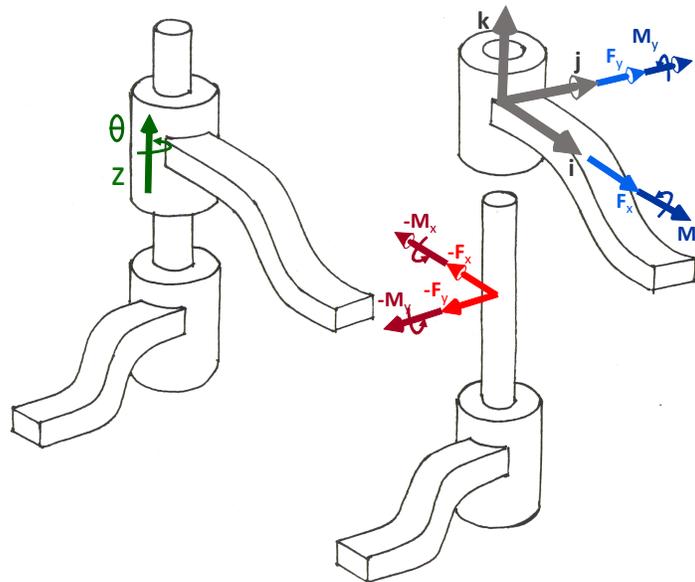


Fig.2.8. Reacciones junta cilíndrica.

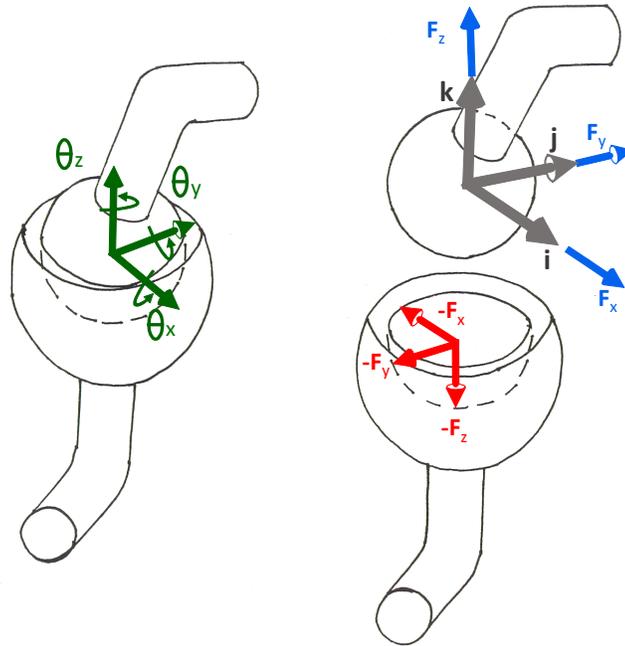


Fig.2.9. Reacciones junta esférica.

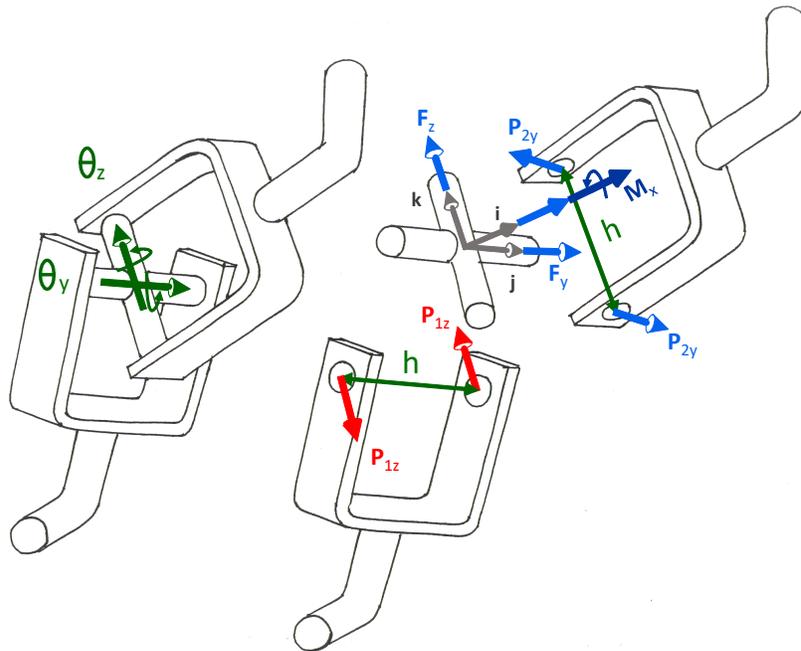


Fig.2.10. Reacciones junta universal.

## Capítulo 3

# Metodología

En esta capítulo se plantean definiciones nuevas a los enfoques existentes, de las matrices de transformación así como para la velocidad y aceleración angular en su forma escalar en función de los parámetros de Euler, tomando como referencia el marco teórico del capítulo 2. En la sección “Matrices homogéneas de transformación básicas en función de los parámetros de Euler” se desarrollan las matrices de transformación para la traslación en los ejes (X, Y, Z) denominadas ( $\mathbf{T}_{z1}$ ,  $\mathbf{T}_{z2}$ ,  $\mathbf{T}_{z3}$ ) y para la rotación ( $\mathbf{T}_{z4}$ ,  $\mathbf{T}_{z5}$ ,  $\mathbf{T}_{z6}$ ), en los mismos ejes respectivos. Cabe mencionar que los parámetros de Euler tienen impacto únicamente sobre las matrices de transformación para la rotación.

Mientras que en la sección “Representación escalar de la velocidad y aceleración angular en función de los parámetros de Euler”, como su nombre lo dice, se desarrolla una definición escalar de la velocidad y aceleración utilizando al vector  $\mathbf{p}$  y sus derivadas, las cuales serán empleadas en el análisis cinemático y dinámico.

### 3.1. Matrices homogéneas de transformación básicas en función de los parámetros de Euler

#### 3.1.1. Definiciones para matrices de traslación

Teniendo en cuenta las ecuaciones (Stejskal&Valasek, 1996) (2.10):

$$\mathbf{T}_{ab} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{ab} & \mathbf{u}_{ab} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

ec.(2.38):

$$\mathbf{V}_{b,ab} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_{b,ab} & \mathbf{R}_{ab}^T \dot{\mathbf{u}}_{ab} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix}$$

ec.(2.56):

$$\mathbf{B}_{b,ab} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{b,ab} + \boldsymbol{\Omega}_{b,ab}^2 & \mathbf{R}_{ab}^T \ddot{\mathbf{u}}_{ab} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix}$$

ec.(2.28)

$$\dot{\mathbf{T}}_{ab} = \mathbf{T}_{ab} \mathbf{V}_{b,ab}$$

y ec.(2.43):

$$\ddot{\mathbf{T}}_{ab} = \mathbf{T}_{ab} \mathbf{B}_{b,ab}$$

y que  $\mathbf{D}_{zi}$  es un operador diferencial, las matrices de movimientos básicos se muestran a continuación.

#### Traslación en X ( $\mathbf{T}_{z1}$ )

##### Posición

La posición en la traslación sobre el eje x está definida como:

$$\mathbf{T}_{z1}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_x & \mathbf{u}_x \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{u}_x \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

## Velocidad

Mientras que la velocidad está definida como:

$$\dot{\mathbf{T}}_{z1}(x) = \mathbf{T}_{z1}(x)\mathbf{V}_{z1}(x) = \mathbf{T}_{z1}(x)\mathbf{D}_{z1}(\dot{x}) \quad (3.2)$$

Donde

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{z1}(x) &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_x & \mathbf{R}_x^T \dot{\mathbf{u}}_x \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \dot{\mathbf{u}}_x \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dot{x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{D}_{z1}(\dot{x}) \end{aligned} \quad (3.3)$$

## Aceleración

Por último, la aceleración está definida como:

$$\ddot{\mathbf{T}}_{z1}(x) = \mathbf{T}_{z1}(x)\mathbf{B}_{z1}(x) = \mathbf{T}_{z1}(x)\mathbf{D}_{z1}(\ddot{x}) \quad (3.4)$$

Donde

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{z1}(x) &= \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\Omega}}_x + \boldsymbol{\Omega}_x^2 & \mathbf{R}_x^T \ddot{\mathbf{u}}_x \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \ddot{\mathbf{u}}_x \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ddot{x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{D}_{z1}(\ddot{x}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

## Traslación en $\mathbf{Y}(\mathbf{T}_{z2})$

### Posición

La posición en la traslación sobre el eje y está definida como:

$$\mathbf{T}_{z2}(y) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_y & \mathbf{u}_y \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{u}_y \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

### Velocidad

Mientras que la velocidad está definida como:

$$\dot{\mathbf{T}}_{z2}(y) = \mathbf{T}_{z2}(y)\mathbf{V}_{z2}(y) = \mathbf{T}_{z2}(y)\mathbf{D}_{z2}(\dot{y}) \quad (3.7)$$

Donde

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{z2}(y) &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_y & \mathbf{R}_y^T \dot{\mathbf{u}}_y \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \dot{\mathbf{u}}_y \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dot{y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{D}_{z2}(\dot{y}) \end{aligned} \quad (3.8)$$

### Aceleración

Por último, la aceleración está definida como:

$$\ddot{\mathbf{T}}_{z2}(y) = \mathbf{T}_{z2}(y)\mathbf{B}_{z2}(y) = \mathbf{T}_{z2}(y)\mathbf{D}_{z2}(\ddot{y}) \quad (3.9)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{z2}(y) &= \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\Omega}}_y + \boldsymbol{\Omega}_y^2 & \mathbf{R}_y^T \ddot{\mathbf{u}}_y \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \ddot{\mathbf{u}}_y \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ddot{y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{D}_{z2}(\ddot{y}) \end{aligned} \quad (3.10)$$

## Traslación en Z ( $\mathbf{T}_{z3}$ )

### Posición

La posición en la traslación sobre el eje z está definida como:

$$\mathbf{T}_{z3}(z) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_z & \mathbf{u}_z \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{u}_z \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

### Velocidad

Mientras que la velocidad está definida como:

$$\dot{\mathbf{T}}_{z3}(z) = \mathbf{T}_{z3}(z)\mathbf{V}_{z3}(z) = \mathbf{T}_{z3}(z)\mathbf{D}_{z3}(\dot{z}) \quad (3.12)$$

Donde

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{z3}(z) &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_z & \mathbf{S}_z^T \dot{\mathbf{u}}_z \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \dot{\mathbf{u}}_z \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dot{z} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{D}_{z3}(\dot{z}) \end{aligned} \quad (3.13)$$

### Aceleración

Por último, la aceleración está definida como:

$$\ddot{\mathbf{T}}_{z3}(z) = \mathbf{T}_{z3}(z)\mathbf{B}_{z3}(z) = \mathbf{T}_{z3}(z)\mathbf{D}_{z3}(\ddot{z}) \quad (3.14)$$

Donde

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{z3}(z) &= \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\Omega}}_z + \boldsymbol{\Omega}_z^2 & \mathbf{R}_z^T \ddot{\mathbf{u}}_z \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \ddot{\mathbf{u}}_z \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ddot{z} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{D}_{z3}(\ddot{z}) \end{aligned} \quad (3.15)$$

### 3.1.2. Definiciones para matrices de rotación

Por otra parte, para el desarrollo de las rotaciones en XYZ ( $\mathbf{T}_{z4}$  a  $\mathbf{T}_{z6}$ ) recordemos ec.(2.63):

$$\mathbf{R}_{ab} = \mathbf{R}(\mathbf{p}_i)$$

ec.(2.64):

$$\mathbf{p}_i = \begin{bmatrix} p_{i0} & p_{i1} & p_{i2} & p_{i3} \end{bmatrix}^T$$

y ec.(2.65):

$$\mathbf{R}(\mathbf{p}_i) = 2 \begin{bmatrix} p_{i0}^2 + p_{i1}^2 - \frac{1}{2} & p_{i1}p_{i2} - p_{i0}p_{i3} & p_{i1}p_{i3} + p_{i0}p_{i2} \\ p_{i1}p_{i2} + p_{i0}p_{i3} & p_{i0}^2 + p_{i2}^2 - \frac{1}{2} & p_{i2}p_{i3} - p_{i0}p_{i1} \\ p_{i1}p_{i3} - p_{i0}p_{i2} & p_{i2}p_{i3} + p_{i0}p_{i1} & p_{i0}^2 + p_{i3}^2 - \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Haciendo uso de las matrices  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{L}$  (Nikravesh, 1988) se puede reescribir a  $\mathbf{R}(\mathbf{p}_i)$  como:

$$\mathbf{R}(\mathbf{p}_i) = \mathbf{GL}^T \quad (3.16)$$

donde

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -p_{i1} & p_{i0} & -p_{i3} & p_{i2} \\ -p_{i2} & p_{i3} & p_{i0} & -p_{i1} \\ -p_{i3} & -p_{i2} & p_{i1} & p_{i0} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$\mathbf{L}^T = \begin{bmatrix} -p_{i1} & -p_{i2} & -p_{i3} \\ p_{i0} & -p_{i3} & p_{i2} \\ p_{i3} & p_{i0} & -p_{i1} \\ -p_{i2} & p_{i1} & p_{i0} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

derivando respecto al tiempo la ec.(3.16) se tiene que:

$$\dot{\mathbf{R}}(\mathbf{p}_i) = \dot{\mathbf{G}}\mathbf{L}^T + \mathbf{G}\dot{\mathbf{L}}^T = 2\dot{\mathbf{G}}\mathbf{L}^T \quad (3.19)$$

donde se utilizó la identidad  $\dot{\mathbf{G}}\mathbf{L}^T = \mathbf{G}\dot{\mathbf{L}}^T$  (Nikravesh, 1988).

Otra relación que se utilizará para el desarrollo de las siguientes definiciones es la transpuesta de  $\mathbf{R}(\mathbf{p}_i)$ , de ec.(3.16) se sabe que:

$$\mathbf{R}(\mathbf{p}_i)^T = \mathbf{L}\mathbf{G}^T \quad (3.20)$$

Mientras que para la velocidad angular, haciendo uso de ec.(2.31), ec.(3.19) y ec.(3.20) se tiene:

$$\boldsymbol{\Omega}_{b,ab} = \mathbf{R}_{ab}^T \dot{\mathbf{R}}_{ab} = \mathbf{L}\mathbf{G}^T (2\dot{\mathbf{G}}\mathbf{L}^T) = 2\mathbf{L}\mathbf{G}^T \dot{\mathbf{G}}\mathbf{L}^T = 2\mathbf{L}\mathbf{G}^T (\mathbf{G}\dot{\mathbf{L}}^T) = 2\mathbf{L}\dot{\mathbf{L}}^T \quad (3.21)$$

donde:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -p_{i1} & p_{i0} & -p_{i3} & p_{i2} \\ -p_{i2} & p_{i3} & p_{i0} & -p_{i1} \\ -p_{i3} & -p_{i2} & p_{i1} & p_{i0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} -p_{i1} & p_{i0} & p_{i3} & -p_{i2} \\ -p_{i2} & -p_{i3} & p_{i0} & p_{i1} \\ -p_{i3} & p_{i2} & -p_{i1} & p_{i0} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} -\dot{p}_{i1} & \dot{p}_{i0} & -\dot{p}_{i3} & \dot{p}_{i2} \\ -\dot{p}_{i2} & \dot{p}_{i3} & \dot{p}_{i0} & -\dot{p}_{i1} \\ -\dot{p}_{i3} & -\dot{p}_{i2} & \dot{p}_{i1} & \dot{p}_{i0} \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} -\dot{p}_{i1} & \dot{p}_{i0} & \dot{p}_{i3} & -\dot{p}_{i2} \\ -\dot{p}_{i2} & -\dot{p}_{i3} & \dot{p}_{i0} & \dot{p}_{i1} \\ -\dot{p}_{i3} & \dot{p}_{i2} & -\dot{p}_{i1} & \dot{p}_{i0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}^T = \begin{bmatrix} -p_{i1} & -p_{i2} & -p_{i3} \\ p_{i0} & p_{i3} & -p_{i2} \\ -p_{i3} & p_{i0} & p_{i1} \\ p_{i2} & -p_{i1} & p_{i0} \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{L}}^T = \begin{bmatrix} -\dot{p}_{i1} & -\dot{p}_{i2} & -\dot{p}_{i3} \\ \dot{p}_{i0} & -\dot{p}_{i3} & \dot{p}_{i2} \\ \dot{p}_{i3} & \dot{p}_{i0} & -\dot{p}_{i1} \\ -\dot{p}_{i2} & \dot{p}_{i1} & \dot{p}_{i0} \end{bmatrix}$$

Por otra parte, para  $\mathbf{T}_{z4}$ ,  $\mathbf{T}_{z5}$  y  $\mathbf{T}_{z6}$  se cumple que:

$$\mathbf{V}_{b,ab} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_{b,ab} & \mathbf{R}_{ab}^T \dot{\mathbf{u}}_{ab} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix}$$

donde:

$$\mathbf{R}_{ab}^T \dot{\mathbf{u}}_{ab} = \mathbf{R}(\mathbf{p}_i)^T \dot{\mathbf{u}}_{ab} = \mathbf{L}\mathbf{G}^T \dot{\mathbf{u}}_{ab} = \mathbf{0}$$

ya que  $\dot{\mathbf{u}}_{ab} = \mathbf{0}$  lo cual se verá reflejado en el término [1,4] de las matrices  $\mathbf{V}_{b,ab}$  y  $\mathbf{B}_{b,ab}$ .

### Rotación en X ( $\mathbf{T}_{z4}$ )

#### Posición

Tomando en consideración las ec.(2.10), ec(2.63) y ec.(2.65), la posición en la rotación sobre el eje x está definida como:

$$\mathbf{T}_{z4}(\mathbf{p}_i) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_x & \mathbf{u}_x \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\mathbf{p}_i) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(p_{i0}^2 + p_{i1}^2 - \frac{1}{2}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2(p_{i0}^2 - \frac{1}{2}) & -2p_{i0}p_{i1} & 0 \\ 0 & 2p_{i0}p_{i1} & 2(p_{i0}^2 - \frac{1}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

donde:

$$\mathbf{p}_i = [p_{i0} \ p_{i1} \ 0 \ 0]^T \quad (3.23)$$

Por lo tanto, se puede decir que el equivalente en parámetros de Euler de la matriz de transformación para la rotación en X es:

$$\mathbf{T}_{z4}(\theta_x) \equiv \mathbf{T}_{z4}(\mathbf{p}) \quad (3.24)$$

donde

$$\mathbf{T}_{z4}(\theta_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_x) & -\text{sen}(\theta_x) & 0 \\ 0 & \text{sen}(\theta_x) & \cos(\theta_x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{z4}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 2(p_0^2 + p_1^2 - \frac{1}{2}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2(p_0^2 - \frac{1}{2}) & -2p_0p_1 & 0 \\ 0 & 2p_0p_1 & 2(p_0^2 - \frac{1}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### Velocidad

Para la velocidad sabemos de las ec.(2.38) y ec.(3.21) que:

$$\mathbf{V}_{z4} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_x^T \dot{\mathbf{R}}_x & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\mathbf{p}_i)^T \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_x(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mathbf{L}_x \dot{\mathbf{L}}_x^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

para el caso específico de la rotación en el eje x, es decir  $\mathbf{T}_{z4}$ , tenemos que:

$$\mathbf{L}_x = \begin{bmatrix} -p_{i1} & p_{i0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{i0} & p_{i1} \\ 0 & 0 & -p_{i1} & p_{i0} \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{L}}_x = \begin{bmatrix} -\dot{p}_{i1} & \dot{p}_{i0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{p}_{i0} & \dot{p}_{i1} \\ 0 & 0 & -\dot{p}_{i1} & \dot{p}_{i0} \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{L}}_x^T = \begin{bmatrix} -\dot{p}_{i1} & 0 & 0 \\ \dot{p}_{i0} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{p}_{i0} & -\dot{p}_{i1} \\ 0 & \dot{p}_{i1} & \dot{p}_{i0} \end{bmatrix}$$

desarrollando  $\boldsymbol{\Omega}_x(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i)$  tenemos:

$$\boldsymbol{\Omega}_x(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i) = 2\mathbf{L}_x \dot{\mathbf{L}}_x^T = 2 \begin{bmatrix} p_{i1}\dot{p}_{i1} + p_{i0}\dot{p}_{i0} & 0 & 0 \\ 0 & p_{i0}\dot{p}_{i0} + p_{i1}\dot{p}_{i1} & -p_{i0}\dot{p}_{i1} + p_{i1}\dot{p}_{i0} \\ 0 & -p_{i1}\dot{p}_{i0} + p_{i0}\dot{p}_{i1} & p_{i1}\dot{p}_{i1} + p_{i0}\dot{p}_{i0} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Por otro lado, dada la identidad:

$$p_{i0}^2 + p_{i1}^2 + p_{i2}^2 + p_{i3}^2 = 1 \quad (3.27)$$

se cumple que:

$$\mathbf{p}_i^T \mathbf{p}_i = 1 \quad (3.28)$$

Derivando respecto al tiempo la ec.(3.28) y haciendo uso de la regla de la cadena se tiene:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_i^T \mathbf{p}_i) = \dot{\mathbf{p}}_i^T \mathbf{p}_i + \mathbf{p}_i^T \dot{\mathbf{p}}_i = 0 \quad (3.29)$$

derivando la ec.(2.64) y desarrollando operaciones se tiene:

$$\dot{\mathbf{p}}_i^T \mathbf{p}_i = \begin{bmatrix} \dot{p}_{i0} & \dot{p}_{i1} & \dot{p}_{i2} & \dot{p}_{i3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{i0} \\ p_{i1} \\ p_{i2} \\ p_{i3} \end{bmatrix} = \dot{p}_{i0}p_{i0} + \dot{p}_{i1}p_{i1} + \dot{p}_{i2}p_{i2} + \dot{p}_{i3}p_{i3} \quad (3.30)$$

y

$$\mathbf{p}_i^T \dot{\mathbf{p}}_i = \begin{bmatrix} p_{i0} & p_{i1} & p_{i2} & p_{i3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_{i0} \\ \dot{p}_{i1} \\ \dot{p}_{i2} \\ \dot{p}_{i3} \end{bmatrix} = p_{i0}\dot{p}_{i0} + p_{i1}\dot{p}_{i1} + p_{i2}\dot{p}_{i2} + p_{i3}\dot{p}_{i3} \quad (3.31)$$

ya que en el producto escalar es conmutativo, se tiene que  $\dot{\mathbf{p}}_i^T \mathbf{p}_i$ , ec.(3.30), y  $\mathbf{p}_i^T \dot{\mathbf{p}}_i$ , ec.(3.31) son identicos, por lo que la ec.(3.29) se puede reescribir como:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_i^T \mathbf{p}_i) = \dot{\mathbf{p}}_i^T \mathbf{p}_i + \mathbf{p}_i^T \dot{\mathbf{p}}_i = 2\dot{\mathbf{p}}_i^T \mathbf{p}_i = 2\mathbf{p}_i^T \dot{\mathbf{p}}_i = 0 \quad (3.32)$$

Dado que  $p_{i1}\dot{p}_{i1} + p_{i0}\dot{p}_{i0} = 0$ , podemos reescribir a  $\boldsymbol{\Omega}_x(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i)$ , ec.(3.26), como:

$$\boldsymbol{\Omega}_x(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i) = 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n(\mathbf{p}_{i1}, \dot{\mathbf{p}}_{i1}) \\ 0 & n(\mathbf{p}_{i1}, \dot{\mathbf{p}}_{i1}) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Donde  $n(\mathbf{p}_{i1}, \dot{\mathbf{p}}_{i1}) = -p_{i1}\dot{p}_{i0} + p_{i0}\dot{p}_{i1}$ . Por otra parte se tiene:

$$\boldsymbol{\Omega}_x = \mathbf{R}_x^T \dot{\mathbf{R}}_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\theta}_x \\ 0 & \dot{\theta}_x & 0 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Comparando elementos se concluye  $\dot{\theta}_x = 2n(\mathbf{p}_{i1}, \dot{\mathbf{p}}_{i1})$ .

Definiendo arbitrariamente un equivalente en los parámetros de Euler para el operador D, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_{z4}(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i) &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_x(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \\
&= 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p_{i0}\dot{p}_{i1} + p_{i1}\dot{p}_{i0} & 0 \\ 0 & -p_{i1}\dot{p}_{i0} + p_{i0}\dot{p}_{i1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n(\mathbf{p}_{i1}, \dot{\mathbf{p}}_{i1}) & 0 \\ 0 & n(\mathbf{p}_{i1}, \dot{\mathbf{p}}_{i1}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.35}
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\mathbf{V}_{z4}(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i) = \mathbf{D}_{z4}(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i) \tag{3.36}$$

Se sabe de ec.(2.28) que:

$$\dot{\mathbf{T}}_{ab} = \mathbf{T}_{ab} \mathbf{V}_{b,ab}$$

Por lo tanto, para  $\dot{\mathbf{T}}_{z4}$  se tiene:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{T}}_{z4}(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i) &= \mathbf{T}_{z4}(\mathbf{p}_i) \mathbf{V}_{z4}(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i) \\
&= \mathbf{T}_{z4}(\mathbf{p}_i) \mathbf{D}_{z4}(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i) \tag{3.37}
\end{aligned}$$

Considerando que

$$\dot{\mathbf{T}}_{z4}(\theta_x) = \mathbf{T}_{z4}(\theta_x) \mathbf{D}_{z4}(\dot{\theta}_x) \tag{3.38}$$

se puede decir que el equivalente en parámetros de Euler de la derivada de la matriz de trans-

formación para la rotación en X es:

$$\mathbf{T}_{z4}(\theta_x)\mathbf{D}_{z4}(\dot{\theta}_x) \equiv \mathbf{T}_{z4}(\mathbf{p})\mathbf{D}_{z4}(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}) \quad (3.39)$$

donde

$$\mathbf{D}_{z4}(\dot{\theta}_x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\theta}_x & 0 \\ 0 & \dot{\theta}_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{z4}(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}) = 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}) & 0 \\ 0 & n(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\dot{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \dot{p}_0 & \dot{p}_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$n(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}) = -p_1\dot{p}_0 + p_0\dot{p}_1$$

### Aceleración

Ahora, para la aceleración, se sabe de ec.(2.43) que:

$$\ddot{\mathbf{T}}_{ab} = \mathbf{T}_{ab}\mathbf{B}_{b,ab}$$

Para el caso de  $\ddot{\mathbf{T}}_{z4}$  se tiene que el equivalente en parámetros de Euler es:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{T}}_{z4}(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i, \ddot{\mathbf{p}}_i) &= \mathbf{T}_{z4}(\mathbf{p}_i)\mathbf{B}_{z4}(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i, \ddot{\mathbf{p}}_i) \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_x(\mathbf{p}_i) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\Omega}}_x(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i) + \boldsymbol{\Omega}_x^2(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.40)$$

donde derivando la ec.(3.26) y desarrollando:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{\Omega}}_x(\mathbf{p}_i, \ddot{\mathbf{p}}_i) &= 2(\dot{\mathbf{L}}_x \dot{\mathbf{L}}_x^T + \mathbf{L}_x \ddot{\mathbf{L}}_x^T) \tag{3.41} \\ &= 2 \begin{bmatrix} \dot{p}_{i0}^2 + \dot{p}_{i1}^2 + p_{i0}\ddot{p}_{i0} + p_{i1}\ddot{p}_{i1} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{p}_{i0}^2 + \dot{p}_{i1}^2 + p_{i0}\ddot{p}_{i0} + p_{i1}\ddot{p}_{i1} & -p_{i0}\ddot{p}_{i1} + p_{i1}\ddot{p}_{i0} \\ 0 & p_{i0}\ddot{p}_{i1} - p_{i1}\ddot{p}_{i0} & \dot{p}_{i0}^2 + \dot{p}_{i1}^2 + p_{i0}\ddot{p}_{i0} + p_{i1}\ddot{p}_{i1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Recordando que tenemos la ec.(3.32):

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_i^T \mathbf{p}_i) = \dot{\mathbf{p}}_i^T \mathbf{p}_i = 0$$

al derivarla respecto al tiempo tenemos:

$$\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{p}}_i^T \mathbf{p}_i) = \ddot{\mathbf{p}}_i^T \mathbf{p}_i + \dot{\mathbf{p}}_i^T \dot{\mathbf{p}}_i = 0 \tag{3.42}$$

Desarrollando cada término:

$$\ddot{\mathbf{p}}_i^T \mathbf{p}_i = \begin{bmatrix} \ddot{p}_{i0} & \ddot{p}_{i1} & \ddot{p}_{i2} & \ddot{p}_{i3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{i0} \\ p_{i1} \\ p_{i2} \\ p_{i3} \end{bmatrix} = \ddot{p}_{i0}p_{i0} + \ddot{p}_{i1}p_{i1} + \ddot{p}_{i2}p_{i2} + \ddot{p}_{i3}p_{i3} \tag{3.43}$$

$$\dot{\mathbf{p}}_i^T \dot{\mathbf{p}}_i = \begin{bmatrix} \dot{p}_{i0} & \dot{p}_{i1} & \dot{p}_{i2} & \dot{p}_{i3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_{i0} \\ \dot{p}_{i1} \\ \dot{p}_{i2} \\ \dot{p}_{i3} \end{bmatrix} = \dot{p}_{i0}\dot{p}_{i0} + \dot{p}_{i1}\dot{p}_{i1} + \dot{p}_{i2}\dot{p}_{i2} + \dot{p}_{i3}\dot{p}_{i3} \tag{3.44}$$

Sustituyendo (3.43) y (3.44) en ec.(3.42):

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{p}}_i^T \mathbf{p}_i + \dot{\mathbf{p}}_i^T \dot{\mathbf{p}}_i &= 0 \\ \ddot{p}_{i0}p_{i0} + \ddot{p}_{i1}p_{i1} + \ddot{p}_{i2}p_{i2} + \ddot{p}_{i3}p_{i3} + \dot{p}_{i0}\dot{p}_{i0} + \dot{p}_{i1}\dot{p}_{i1} + \dot{p}_{i2}\dot{p}_{i2} + \dot{p}_{i3}\dot{p}_{i3} &= 0 \\ \ddot{p}_{i0}p_{i0} + \ddot{p}_{i1}p_{i1} + \ddot{p}_{i2}p_{i2} + \ddot{p}_{i3}p_{i3} + \dot{p}_{i0}^2 + \dot{p}_{i1}^2 + \dot{p}_{i2}^2 + \dot{p}_{i3}^2 &= 0 \end{aligned} \tag{3.45}$$

A partir de la ec.(3.45), para la rotación en X, los elementos  $p_{i2}, p_{i3}$ , y sus derivadas son cero, por lo tanto  $\dot{p}_{i0}^2 + \dot{p}_{i1}^2 + p_{i0}\ddot{p}_{i0} + p_{i1}\ddot{p}_{i1} = 0$ , y podemos reescribir a  $\dot{\Omega}_x(\mathbf{p}_i, \ddot{\mathbf{p}}_i)$  como:

$$\dot{\Omega}_x(\mathbf{p}_i, \ddot{\mathbf{p}}_i) = 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p_{i0}\ddot{p}_{i1} + p_{i1}\ddot{p}_{i0} \\ 0 & p_{i0}\ddot{p}_{i1} - p_{i1}\ddot{p}_{i0} & 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{n}(\mathbf{p}_{i1}, \ddot{\mathbf{p}}_{i1}) \\ 0 & \dot{n}(\mathbf{p}_{i1}, \ddot{\mathbf{p}}_{i1}) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Donde  $\dot{n}(\mathbf{p}_{i1}, \ddot{\mathbf{p}}_{i1}) = p_{i0}\ddot{p}_{i1} - p_{i1}\ddot{p}_{i0}$ . Por otra parte se tiene:

$$\dot{\Omega}_x = \mathbf{R}_x^T \ddot{\mathbf{R}}_x + \mathbf{R}_x^T \Omega_x \Omega_x \mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_x \\ 0 & \alpha_x & 0 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

Comparando elementos se concluye  $\alpha_x = 2\dot{n}(\mathbf{p}_{i1}, \ddot{\mathbf{p}}_{i1})$ .

Retomando la definición de  $\mathbf{B}_{b,ab}$  de la ec.(2.56):

$$\mathbf{B}_{b,ab} = \begin{bmatrix} \dot{\Omega}_{b,ab} + \Omega_{b,ab}^2 & \mathbf{R}_{ab}^T \ddot{\mathbf{u}}_{ab} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix}$$

además de considerar que la derivada del operador D es:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{D}}_{z4}(\mathbf{p}_i, \ddot{\mathbf{p}}_i) &= \begin{bmatrix} \dot{\Omega}_x(\mathbf{p}_i, \ddot{\mathbf{p}}_i) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \\ &= 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p_{i0}\ddot{p}_{i1} + p_{i1}\ddot{p}_{i0} & 0 \\ 0 & p_{i0}\ddot{p}_{i1} - p_{i1}\ddot{p}_{i0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{n}(\mathbf{p}_{i1}, \ddot{\mathbf{p}}_{i1}) & 0 \\ 0 & \dot{n}(\mathbf{p}_{i1}, \ddot{\mathbf{p}}_{i1}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.48)$$

y que para las rotaciones  $\ddot{\mathbf{u}}_{ab} = \mathbf{0}$ , por lo que:

$$\mathbf{R}_{ab}^T \ddot{\mathbf{u}}_{ab} = \mathbf{0} \quad (3.49)$$

entonces, el equivalente para  $\mathbf{B}_{z4}(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i, \ddot{\mathbf{p}}_i)$  se define como:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{z4}(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i, \ddot{\mathbf{p}}_i) &= \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\Omega}}_x(\mathbf{p}_i, \ddot{\mathbf{p}}_i) + \boldsymbol{\Omega}_x^2(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\Omega}}_x(\mathbf{p}_i, \ddot{\mathbf{p}}_i) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_x^2(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \\ &= \dot{\mathbf{D}}_{z4}(\mathbf{p}_i, \ddot{\mathbf{p}}_i) + \mathbf{D}_{z4}^2(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i) \end{aligned} \quad (3.50)$$

Por lo tanto, sustituyendo ec.(3.50) en ec.(2.43) se tiene para  $\ddot{\mathbf{T}}_{z4}(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i, \ddot{\mathbf{p}}_i)$ :

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{T}}_{z4}(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i, \ddot{\mathbf{p}}_i) &= \mathbf{T}_{z4}(\mathbf{p}_i) \mathbf{B}_{z4}(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i, \ddot{\mathbf{p}}_i) \\ &= \mathbf{T}_{z4}(\mathbf{p}_i) (\dot{\mathbf{D}}_{z4}(\mathbf{p}_i, \ddot{\mathbf{p}}_i) + \mathbf{D}_{z4}^2(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i)) \end{aligned} \quad (3.51)$$

Considerando que

$$\ddot{\mathbf{T}}_{z4}(\theta_x) = \mathbf{T}_{z4}(\theta_x) (\dot{\mathbf{D}}_{z4}(\dot{\theta}_x) + \mathbf{D}_{z4}^2(\dot{\theta}_x))$$

se puede decir que el equivalente en parámetros de Euler de la segunda derivada de la matriz de transformación para la rotación en X es:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{z4}(\theta_x) (\dot{\mathbf{D}}_{z4}(\dot{\theta}_x) + \mathbf{D}_{z4}^2(\dot{\theta}_x)) &\equiv \mathbf{T}_{z4}(\mathbf{p}) (\dot{\mathbf{D}}_{z4}(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}) + \mathbf{D}_{z4}^2(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}})) \\ \mathbf{B}_{z4}(\dot{\theta}_x, \ddot{\theta}_x) &\equiv \mathbf{B}_{z4}(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i, \ddot{\mathbf{p}}_i) \end{aligned} \quad (3.52)$$

donde

$$\mathbf{B}_{z4}(\dot{\theta}_x, \ddot{\theta}_x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{\theta}_x^2 & -\ddot{\theta}_x & 0 \\ 0 & \ddot{\theta}_x & -\dot{\theta}_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{z4}(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i, \ddot{\mathbf{p}}_i) = 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -n(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}})n(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}) & -\dot{n}(\mathbf{p}, \ddot{\mathbf{p}}) & 0 \\ 0 & \dot{n}(\mathbf{p}, \ddot{\mathbf{p}}) & -n(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}})n(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\dot{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \dot{p}_0 & \dot{p}_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\ddot{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \ddot{p}_0 & \ddot{p}_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$n(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}) = -p_1\dot{p}_0 + p_0\dot{p}_1$$

$$\dot{n}(\mathbf{p}, \ddot{\mathbf{p}}) = p_0\ddot{p}_1 - p_1\ddot{p}_0$$

## Rotación en Y ( $\mathbf{T}_{z5}$ )

### Posición

Tomando en consideración las ec.(2.10), ec(2.63) y ec.(2.65), la posición en la rotación sobre el eje y esta definida como:

$$\mathbf{T}_{z5}(\mathbf{p}_i) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_y & \mathbf{u}_y \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\mathbf{p}_i) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(p_{i0}^2 - \frac{1}{2}) & 0 & 2p_{i0}p_{i2} & 0 \\ 0 & 2(p_{i0}^2 + p_{i2}^2 - \frac{1}{2}) & 0 & 0 \\ -2p_{i0}p_{i2} & 0 & 2(p_{i0}^2 - \frac{1}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

donde

$$\mathbf{p}_i = \begin{bmatrix} p_{i0} & 0 & p_{i2} & 0 \end{bmatrix}^T \quad (3.54)$$

Por lo tanto, se puede decir que el equivalente en parámetros de Euler de la matriz de transformación para la rotación en Y es:

$$\mathbf{T}_{z5}(\theta_y) \equiv \mathbf{T}_{z5}(\mathbf{p}) \quad (3.55)$$

donde

$$\mathbf{T}_{z5}(\theta_y) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_y) & 0 & \text{sen}(\theta_y) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\text{sen}(\theta_y) & 0 & \cos(\theta_y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{z5}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 2(p_0^2 - \frac{1}{2}) & 0 & 2p_0p_2 & 0 \\ 0 & 2(p_0^2 + p_2^2 - \frac{1}{2}) & 0 & 0 \\ -2p_0p_2 & 0 & 2(p_0^2 - \frac{1}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### Velocidad

Para la velocidad sabemos de la ec.(2.38) y ec.(3.21) que:

$$\mathbf{V}_{z5} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_y^T \dot{\mathbf{R}}_y & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\mathbf{p}_i)^T \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_y(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mathbf{L}_y \dot{\mathbf{L}}_y^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

para el caso específico de la rotación en el eje Y, es decir  $\mathbf{T}_{z5}$ , tenemos que:

$$\mathbf{L}_y = \begin{bmatrix} 0 & p_{i0} & 0 & -p_{i2} \\ -p_{i2} & 0 & p_{i0} & 0 \\ 0 & p_{i2} & 0 & p_{i0} \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{L}}_y = \begin{bmatrix} 0 & \dot{p}_{i0} & 0 & -\dot{p}_{i2} \\ -\dot{p}_{i2} & 0 & \dot{p}_{i0} & 0 \\ 0 & \dot{p}_{i2} & 0 & \dot{p}_{i0} \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{L}}_y^T = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{p}_{i2} & 0 \\ \dot{p}_{i0} & 0 & \dot{p}_{i2} \\ 0 & \dot{p}_{i0} & 0 \\ -\dot{p}_{i2} & 0 & \dot{p}_{i0} \end{bmatrix}$$

desarrollando  $\boldsymbol{\Omega}_y(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i)$  tenemos:

$$\boldsymbol{\Omega}_y(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i) = 2\mathbf{L}_y \dot{\mathbf{L}}_y^T = 2 \begin{bmatrix} p_{i0}\dot{p}_{i0} + p_{i2}\dot{p}_{i2} & 0 & -p_{i2}\dot{p}_{i0} + p_{i0}\dot{p}_{i2} \\ 0 & p_{i0}\dot{p}_{i0} + p_{i2}\dot{p}_{i2} & 0 \\ p_{i2}\dot{p}_{i0} - p_{i0}\dot{p}_{i2} & 0 & p_{i0}\dot{p}_{i0} + p_{i2}\dot{p}_{i2} \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

Dado que  $p_{i0}\dot{p}_{i0} + p_{i2}\dot{p}_{i2} = 0$  debido a ec.(3.32), podemos reescribir a como:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}_y(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i) &= 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -p_{i2}\dot{p}_{i0} + p_{i0}\dot{p}_{i2} \\ 0 & 0 & 0 \\ p_{i2}\dot{p}_{i0} - p_{i0}\dot{p}_{i2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & n(\mathbf{p}_{i2}, \dot{\mathbf{p}}_{i2}) \\ 0 & 0 & 0 \\ -n(\mathbf{p}_{i2}, \dot{\mathbf{p}}_{i2}) & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.58)$$

Donde  $n(\mathbf{p}_{i2}, \dot{\mathbf{p}}_{i2}) = -p_{i2}\dot{p}_{i0} + p_{i0}\dot{p}_{i2}$ . Por otra parte se tiene:

$$\boldsymbol{\Omega}_y = \mathbf{R}_y^T \dot{\mathbf{R}}_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_y \\ 0 & 0 & 0 \\ -\dot{\theta}_y & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

Comparando elementos se concluye  $\dot{\theta}_y = 2n(\mathbf{p}_{i2}, \dot{\mathbf{p}}_{i2})$ .

Utilizando el operador D, en este caso se obtiene que:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{z5}(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i) &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_y(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \\ &= 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -p_{i2}\dot{p}_{i0} + p_{i0}\dot{p}_{i2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{i2}\dot{p}_{i0} - p_{i0}\dot{p}_{i2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & n(\mathbf{p}_{i2}, \dot{\mathbf{p}}_{i2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -n(\mathbf{p}_{i2}, \dot{\mathbf{p}}_{i2}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.60)$$

Por lo tanto:

$$\mathbf{V}_{z5}(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i) = \mathbf{D}_{z5}(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i) \quad (3.61)$$

Se sabe de ec.(2.28) que:

$$\dot{\mathbf{T}}_{ab} = \mathbf{T}_{ab} \mathbf{V}_{b,ab}$$

Por lo tanto, para  $\dot{\mathbf{T}}_{z5}$  se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{T}}_{z5}(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i) &= \mathbf{T}_{z5}(\mathbf{p}_i) \mathbf{V}_{z5}(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i) \\ &= \mathbf{T}_{z5}(\mathbf{p}_i) \mathbf{D}_{z5}(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i) \end{aligned} \quad (3.62)$$

Considerando que

$$\dot{\mathbf{T}}_{z5}(\theta_y) = \mathbf{T}_{z5}(\theta_y) \mathbf{D}_{z5}(\dot{\theta}_y) \quad (3.63)$$

se puede decir que el equivalente en parámetros de Euler de la derivada de la matriz de transformación para la rotación en Y es:

$$\mathbf{T}_{z5}(\theta_y) \mathbf{D}_{z5}(\dot{\theta}_y) \equiv \mathbf{T}_{z5}(\mathbf{p}) \mathbf{D}_{z5}(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}})$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{z5}(\dot{\theta}_y) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\dot{\theta}_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{D}_{z5}(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}) &= 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & n(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -n(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{p} &= \begin{bmatrix} p_0 & 0 & p_2 & 0 \end{bmatrix}^T \\ \dot{\mathbf{p}} &= \begin{bmatrix} \dot{p}_0 & 0 & \dot{p}_2 & 0 \end{bmatrix}^T \\ n(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}) &= -p_2 \dot{p}_0 + p_0 \dot{p}_2 \end{aligned}$$

## Aceleración

Ahora, para la aceleración, se sabe de ec.(2.43) que:

$$\ddot{\mathbf{T}}_{ab} = \mathbf{T}_{ab} \mathbf{B}_{b,ab}$$

Para el caso de  $\ddot{\mathbf{T}}_{z5}$  se tiene que el equivalente en parámetros de Euler es:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{T}}_{z5}(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i, \ddot{\mathbf{p}}_i) &= \mathbf{T}_{z5}(\mathbf{p}_i) \mathbf{B}_{z5}(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i, \ddot{\mathbf{p}}_i) \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_y(\mathbf{p}_i) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\Omega}}_y(\mathbf{p}_i, \ddot{\mathbf{p}}_i) + \boldsymbol{\Omega}_x^2(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.64)$$

donde derivando la ec.(3.57) y desarrollando se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\Omega}}_y(\mathbf{p}_i, \ddot{\mathbf{p}}_i) &= 2(\dot{\mathbf{L}}_y \dot{\mathbf{L}}_y^T + \mathbf{L}_y \ddot{\mathbf{L}}_y^T) \\ &= 2 \begin{bmatrix} \dot{p}_{i0}^2 + \dot{p}_{i2}^2 + p_{i0}\ddot{p}_{i0} + p_{i2}\ddot{p}_{i2} & 0 & -p_{i2}\ddot{p}_{i0} + p_{i0}\ddot{p}_{i2} \\ 0 & \dot{p}_{i0}^2 + \dot{p}_{i2}^2 + p_{i0}\ddot{p}_{i0} + p_{i2}\ddot{p}_{i2} & 0 \\ -p_{i0}\ddot{p}_{i2} + p_{i2}\ddot{p}_{i0} & 0 & \dot{p}_{i0}^2 + \dot{p}_{i2}^2 + p_{i0}\ddot{p}_{i0} + p_{i2}\ddot{p}_{i2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.65)$$

A partir de la ec.(3.45), para la rotación en Y, los elementos  $p_{i1}$ ,  $p_{i3}$ , y sus derivadas son cero, por lo tanto  $\dot{p}_{i0}^2 + \dot{p}_{i2}^2 + p_{i0}\ddot{p}_{i0} + p_{i2}\ddot{p}_{i2} = 0$ , y podemos reescribir a  $\dot{\boldsymbol{\Omega}}_y(\mathbf{p}_i, \ddot{\mathbf{p}}_i)$  como:

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}}_y(\mathbf{p}_i, \ddot{\mathbf{p}}_i) = 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -p_{i2}\ddot{p}_{i0} + p_{i0}\ddot{p}_{i2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -p_{i0}\ddot{p}_{i2} + p_{i2}\ddot{p}_{i0} & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{n}(\mathbf{p}_{i2}, \ddot{\mathbf{p}}_{i2}) \\ 0 & 0 & 0 \\ -\dot{n}(\mathbf{p}_{i2}, \ddot{\mathbf{p}}_{i2}) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Donde  $\dot{n}(\mathbf{p}_{i2}, \ddot{\mathbf{p}}_{i2}) = -p_{i2}\ddot{p}_{i0} + p_{i0}\ddot{p}_{i2}$ . Por otra parte se tiene:

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}}_y = \mathbf{R}_y^T \ddot{\mathbf{R}}_y + \mathbf{R}_y^T \boldsymbol{\Omega}_y \boldsymbol{\Omega}_y \mathbf{R}_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha_y \\ 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_y & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

comparando elementos se concluye  $\alpha_y = 2\dot{n}(\mathbf{p}_{i2}, \ddot{\mathbf{p}}_{i2})$ .

Retomando la definición de  $\mathbf{B}_{b,ab}$  de la ec.(2.56):

$$\mathbf{B}_{b,ab} = \begin{bmatrix} \dot{\Omega}_{b,ab} + \Omega_{b,ab}^2 & \mathbf{R}_{ab}^T \ddot{\mathbf{u}}_{ab} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix}$$

además de considerar que la derivada del operador D para este caso es:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{D}}_{z5}(\mathbf{p}_i, \ddot{\mathbf{p}}_i) &= \begin{bmatrix} \dot{\Omega}_y(\mathbf{p}_i, \ddot{\mathbf{p}}_i) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \\ &= 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -p_{i2}\ddot{p}_{i0} + p_{i0}\ddot{p}_{i2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -p_{i0}\ddot{p}_{i2} + p_{i2}\ddot{p}_{i0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{n}(\mathbf{p}_{i2}, \ddot{\mathbf{p}}_{i2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\dot{n}(\mathbf{p}_{i2}, \ddot{\mathbf{p}}_{i2}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.67)$$

y considerando ec.(3.49), entonces, el equivalente para  $\mathbf{B}_{z5}(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i, \ddot{\mathbf{p}}_i)$  se define como:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{z5}(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i, \ddot{\mathbf{p}}_i) &= \begin{bmatrix} \dot{\Omega}_y(\mathbf{p}_i, \ddot{\mathbf{p}}_i) + \Omega_y^2(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dot{\Omega}_y(\mathbf{p}_i, \ddot{\mathbf{p}}_i) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Omega_y^2(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \\ &= \dot{\mathbf{D}}_{z5}(\mathbf{p}_i, \ddot{\mathbf{p}}_i) + \mathbf{D}_{z5}^2(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i) \end{aligned} \quad (3.68)$$

Por lo tanto, sustituyendo ec.(3.68) en ec.(2.43) se tiene para  $\ddot{\mathbf{T}}_{z5}(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i, \ddot{\mathbf{p}}_i)$ :

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{T}}_{z5}(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i, \ddot{\mathbf{p}}_i) &= \mathbf{T}_{z5}(\mathbf{p}_i) \mathbf{B}_{z5}(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i, \ddot{\mathbf{p}}_i) \\ &= \mathbf{T}_{z5}(\dot{\mathbf{D}}_{z5}(\mathbf{p}_i, \ddot{\mathbf{p}}_i) + \mathbf{D}_{z5}^2(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i)) \end{aligned} \quad (3.69)$$

Considerando que

$$\ddot{\mathbf{T}}_{z5}(\theta_y) = \mathbf{T}_{z5}(\theta_y)(\dot{\mathbf{D}}_{z5}(\ddot{\theta}_y) + \mathbf{D}_{z5}^2(\dot{\theta}_y))$$

se puede decir que el equivalente en parámetros de Euler de la segunda derivada de la matriz de transformación para la rotación en Y es:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{z5}(\theta_y)(\dot{\mathbf{D}}_{z5}(\ddot{\theta}_y) + \mathbf{D}_{z5}^2(\dot{\theta}_y)) &\equiv \mathbf{T}_{z5}(\mathbf{p})(\dot{\mathbf{D}}_{z5}(\mathbf{p}, \ddot{\mathbf{p}}) + \mathbf{D}_{z5}^2(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}})) \\ \mathbf{B}_{z5}(\dot{\theta}_y, \ddot{\theta}_y) &\equiv \mathbf{B}_{z5}(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i, \ddot{\mathbf{p}}_i) \end{aligned} \quad (3.70)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{z5}(\dot{\theta}_y, \ddot{\theta}_y) &= \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_y^2 & 0 & \ddot{\theta}_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\ddot{\theta}_y & 0 & -\dot{\theta}_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_{z5}(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i, \ddot{\mathbf{p}}_i) &= 2 \begin{bmatrix} -n(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}})n(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}) & 0 & \dot{n}(\mathbf{p}, \ddot{\mathbf{p}}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\dot{n}(\mathbf{p}, \ddot{\mathbf{p}}) & 0 & -n(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}})n(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{p} &= \begin{bmatrix} p_0 & 0 & p_2 & 0 \end{bmatrix}^T \\ \dot{\mathbf{p}} &= \begin{bmatrix} \dot{p}_0 & 0 & \dot{p}_2 & 0 \end{bmatrix}^T \\ \ddot{\mathbf{p}} &= \begin{bmatrix} \ddot{p}_0 & 0 & \ddot{p}_2 & 0 \end{bmatrix}^T \\ n(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}) &= -p_2\dot{p}_0 + p_0\dot{p}_2 \\ \dot{n}(\mathbf{p}, \ddot{\mathbf{p}}) &= -p_2\ddot{p}_0 + p_0\ddot{p}_2 \end{aligned}$$

## Rotación en Z ( $\mathbf{T}_{z6}$ )

### Posición

Tomando en consideración la ec. (2.10), ec.(2.63) y ec(2.65), la posición en la rotación sobre el eje z esta definida como:

$$\mathbf{T}_{z6}(\mathbf{p}_i) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_z & \mathbf{u}_z \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_z(\mathbf{p}_i) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(p_{i0}^2 - \frac{1}{2}) & -2p_{i0}p_{i3} & 0 & 0 \\ 2p_{i0}p_{i3} & 2(p_{i0}^2 - \frac{1}{2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(p_{i0}^2 + p_{i3}^2 - \frac{1}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

donde

$$\mathbf{p}_i = \begin{bmatrix} p_{i0} & 0 & 0 & p_{i3} \end{bmatrix}^T \quad (3.72)$$

Por lo tanto, se puede decir que el equivalente en parámetros de Euler de la matriz de transformación para la rotación en Z es:

$$\mathbf{T}_{z6}(\theta_z) \equiv \mathbf{T}_{z6}(\mathbf{p}) \quad (3.73)$$

donde

$$\mathbf{T}_{z6}(\theta_z) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) & 0 & 0 \\ \text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{z6}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 2(p_{i0}^2 - \frac{1}{2}) & -2p_{i0}p_{i3} & 0 & 0 \\ 2p_{i0}p_{i3} & 2(p_{i0}^2 - \frac{1}{2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(p_{i0}^2 + p_{i3}^2 - \frac{1}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_0 & 0 & 0 & p_3 \end{bmatrix}^T$$

## Velocidad

Para la velocidad sabemos de ec. (2.38) y ec.(3.21) que:

$$\mathbf{V}_{z6} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_z^T \dot{\mathbf{R}}_z & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_z(\mathbf{p}_i)^T \dot{\mathbf{R}}_z(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_z(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mathbf{L}_z \dot{\mathbf{L}}_z^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

para el caso específico de la rotación en el eje x,  $\mathbf{T}_{z6}$ , tenemos que:

$$\mathbf{L}_z = \begin{bmatrix} 0 & p_{i0} & p_{i3} & 0 \\ 0 & -p_{i3} & p_{i0} & 0 \\ -p_{i3} & 0 & 0 & p_{i0} \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{L}}_z = \begin{bmatrix} 0 & \dot{p}_{i0} & \dot{p}_{i3} & 0 \\ 0 & -\dot{p}_{i3} & \dot{p}_{i0} & 0 \\ -\dot{p}_{i3} & 0 & 0 & \dot{p}_{i0} \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{L}}_z^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\dot{p}_{i3} \\ \dot{p}_{i0} & -\dot{p}_{i3} & 0 \\ \dot{p}_{i3} & \dot{p}_{i0} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{p}_{i0} \end{bmatrix}$$

desarrollando tenemos:

$$\boldsymbol{\Omega}_z(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i) = 2\mathbf{L}_z \dot{\mathbf{L}}_z^T = 2 \begin{bmatrix} p_{i0}\dot{p}_{i0} + p_{i3}\dot{p}_{i3} & -p_{i0}\dot{p}_{i3} + p_{i3}\dot{p}_{i0} & 0 \\ -p_{i3}\dot{p}_{i0} + p_{i0}\dot{p}_{i3} & p_{i0}\dot{p}_{i0} + p_{i3}\dot{p}_{i3} & 0 \\ 0 & 0 & p_{i0}\dot{p}_{i0} + p_{i3}\dot{p}_{i3} \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

Dado que  $p_{i0}\dot{p}_{i0} + p_{i3}\dot{p}_{i3} = 0$  debido a ec.(3.32), podemos reescribir a  $\boldsymbol{\Omega}_z(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i)$  como:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}_z(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i) &= 2 \begin{bmatrix} 0 & -p_{i0}\dot{p}_{i3} + p_{i3}\dot{p}_{i0} & 0 \\ -p_{i3}\dot{p}_{i0} + p_{i0}\dot{p}_{i3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= 2 \begin{bmatrix} 0 & -n(\mathbf{p}_{i3}, \dot{\mathbf{p}}_{i3}) & 0 \\ n(\mathbf{p}_{i3}, \dot{\mathbf{p}}_{i3}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.76)$$

Donde  $n(\mathbf{p}_{i3}, \dot{\mathbf{p}}_{i3}) = -p_{i3}\dot{p}_{i0} + p_{i0}\dot{p}_{i3}$ . Por otra parte se tiene:

$$\boldsymbol{\Omega}_z = \mathbf{R}_z^T \dot{\mathbf{R}}_z = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_z & 0 \\ \dot{\theta}_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

Comparando elementos se concluye  $\dot{\theta}_z = 2n(\mathbf{p}_{i3}, \dot{\mathbf{p}}_{i3})$ .

Utilizando el operador D, en este caso se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_{z6}(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i) &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_z(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \\
&= 2 \begin{bmatrix} 0 & -p_{i0}\dot{p}_{i3} + p_{i3}\dot{p}_{i0} & 0 & 0 \\ -p_{i3}\dot{p}_{i0} + p_{i0}\dot{p}_{i3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= 2 \begin{bmatrix} 0 & -n(\mathbf{p}_{i3}, \dot{\mathbf{p}}_{i3}) & 0 & 0 \\ n(\mathbf{p}_{i3}, \dot{\mathbf{p}}_{i3}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.78}
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\mathbf{V}_{z6}(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i) = \mathbf{D}_{z6}(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i) \tag{3.79}$$

Se sabe de ec.(2.28) que:

$$\dot{\mathbf{T}}_{ab} = \mathbf{T}_{ab} \mathbf{V}_{b,ab}$$

Por lo tanto, para  $\dot{\mathbf{T}}_{z6}$  se tiene:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{T}}_{z6}(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i) &= \mathbf{T}_{z6}(\mathbf{p}_i) \mathbf{V}_{z6}(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i) \\
&= \mathbf{T}_{z6}(\mathbf{p}_i) \mathbf{D}_{z6}(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i) \tag{3.80}
\end{aligned}$$

Considerando que

$$\dot{\mathbf{T}}_{z6}(\theta_z) = \mathbf{T}_{z6}(\theta_z) \mathbf{D}_{z6}(\dot{\theta}_z) \tag{3.81}$$

se puede decir que el equivalente en parámetros de Euler de la derivada de la matriz de transformación para la rotación en Z es:

$$\mathbf{T}_{z6}(\theta_z) \mathbf{D}_{z6}(\dot{\theta}_z) \equiv \mathbf{T}_{z6}(\mathbf{p}) \mathbf{D}_{z6}(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}) \tag{3.82}$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_{z6}(\dot{\theta}_z) &= \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_z & 0 & 0 \\ \dot{\theta}_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{D}_{z6}(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}) &= 2 \begin{bmatrix} 0 & -n(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}) & 0 & 0 \\ n(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{p} &= \begin{bmatrix} p_0 & 0 & 0 & p_3 \end{bmatrix}^T \\
\dot{\mathbf{p}} &= \begin{bmatrix} \dot{p}_0 & 0 & 0 & \dot{p}_3 \end{bmatrix}^T \\
n(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}) &= -p_3\dot{p}_0 + p_0\dot{p}_3
\end{aligned}$$

### Aceleración

Ahora, para la aceleración, se sabe de ec.(2.43) que:

$$\ddot{\mathbf{T}}_{ab} = \mathbf{T}_{ab}\mathbf{B}_{b,ab}$$

Para el caso de  $\ddot{\mathbf{T}}_{z6}$  se tiene que el equivalente en parámetros de Euler es:

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{T}}_{z6} &= \mathbf{T}_z(\mathbf{p}_i)\mathbf{B}_z(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i, \ddot{\mathbf{p}}_i) \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_z(\mathbf{p}_i) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\Omega}}_z(\mathbf{p}_i, \ddot{\mathbf{p}}_i) + \boldsymbol{\Omega}_x^2(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \quad (3.83)
\end{aligned}$$

donde derivando la ec.(3.75) y desarrollando se obtiene:

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}}_z(\mathbf{p}_i, \ddot{\mathbf{p}}_i) = 2(\dot{\mathbf{L}}_{z6}\dot{\mathbf{L}}_{z6}^T + \mathbf{L}_{z6}\ddot{\mathbf{L}}_{z6}^T) \quad (3.84)$$

$$= 2 \begin{bmatrix} \dot{p}_{i0}^2 + \dot{p}_{i3}^2 + p_{i0}\ddot{p}_{i0} + p_{i3}\ddot{p}_{i3} & -p_{i0}\ddot{p}_{i3} + p_{i3}\ddot{p}_{i0} & 0 \\ -p_{i3}\ddot{p}_{i0} + p_{i0}\ddot{p}_{i3} & \dot{p}_{i0}^2 + \dot{p}_{i3}^2 + p_{i0}\ddot{p}_{i0} + p_{i3}\ddot{p}_{i3} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{p}_{i0}^2 + \dot{p}_{i3}^2 + p_{i0}\ddot{p}_{i0} + p_{i3}\ddot{p}_{i3} \end{bmatrix}$$

A partir de la ec.(3.45), para la rotación en Z, los elementos  $p_{i1}$ ,  $p_{i2}$ , y sus derivadas son cero, por lo tanto  $\dot{p}_{i0}^2 + \dot{p}_{i3}^2 + p_{i0}\ddot{p}_{i0} + p_{i3}\ddot{p}_{i3} = 0$ , y podemos reescribir a  $\dot{\Omega}_z(\mathbf{p}_i, \ddot{\mathbf{p}}_i)$  como:

$$\dot{\Omega}_z(\mathbf{p}_i, \ddot{\mathbf{p}}_i) = 2 \begin{bmatrix} 0 & -p_{i0}\ddot{p}_{i3} + p_{i3}\ddot{p}_{i0} & 0 \\ -p_{i3}\ddot{p}_{i0} + p_{i0}\ddot{p}_{i3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 0 & -\dot{n}(\mathbf{p}_{i3}, \ddot{\mathbf{p}}_{i3}) & 0 \\ \dot{n}(\mathbf{p}_{i3}, \ddot{\mathbf{p}}_{i3}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.85)$$

Donde  $\dot{n}(\mathbf{p}_{i3}, \ddot{\mathbf{p}}_{i3}) = -p_{i3}\ddot{p}_{i0} + p_{i0}\ddot{p}_{i3}$ . Por otra parte se tiene:

$$\dot{\Omega}_z = \mathbf{R}_z^T \ddot{\mathbf{R}}_z + \mathbf{R}_z^T \Omega_z \Omega_z \mathbf{R}_z = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_z & 0 \\ \alpha_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

comparando elementos se concluye  $\alpha_z = \dot{n}(p_{i3}, \ddot{p}_{i3})$ .

Retomando la definición de  $\mathbf{B}_{b,ab}$  de la ec.(2.56):

$$\mathbf{B}_{b,ab} = \begin{bmatrix} \dot{\Omega}_{b,ab} + \Omega_{b,ab}^2 & \mathbf{R}_{ab}^T \ddot{\mathbf{u}}_{ab} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix}$$

además de considerar que la derivada del operador D para esre caso es:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{D}}_{z6}(\mathbf{p}_i, \ddot{\mathbf{p}}_i) &= \begin{bmatrix} \dot{\Omega}_z(\mathbf{p}_i, \ddot{\mathbf{p}}_i) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \\ &= 2 \begin{bmatrix} 0 & -p_{i0}\ddot{p}_{i3} + p_{i3}\ddot{p}_{i0} & 0 & 0 \\ -p_{i3}\ddot{p}_{i0} + p_{i0}\ddot{p}_{i3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= 2 \begin{bmatrix} 0 & -\dot{n}(\mathbf{p}_{i3}, \ddot{\mathbf{p}}_{i3}) & 0 & 0 \\ \dot{n}(\mathbf{p}_{i3}, \ddot{\mathbf{p}}_{i3}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

y considerando ec.(3.49), entonces, el equivalente para  $\mathbf{B}_{z6}(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i, \ddot{\mathbf{p}}_i)$  se define como:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{z6}(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i, \ddot{\mathbf{p}}_i) &= \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\Omega}}_z(\mathbf{p}_i, \ddot{\mathbf{p}}_i) + \boldsymbol{\Omega}_z^2(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\Omega}}_z(\mathbf{p}_i, \ddot{\mathbf{p}}_i) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_z^2(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \\ &= \dot{\mathbf{D}}_{z6}(\mathbf{p}_i, \ddot{\mathbf{p}}_i) + \mathbf{D}_{z6}^2(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i) \end{aligned} \quad (3.88)$$

Por lo tanto, sustituyendo ec.(3.88) en ec.(2.43) se tiene para  $\ddot{\mathbf{T}}_{z6}$ :

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{T}}_{z6}(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i, \ddot{\mathbf{p}}_i) &= \mathbf{T}_z(\mathbf{p}_i) \mathbf{B}_z(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i, \ddot{\mathbf{p}}_i) \\ &= \mathbf{T}_z(\mathbf{p}_i) (\dot{\mathbf{D}}_{z6}(\mathbf{p}_i, \ddot{\mathbf{p}}_i) + \mathbf{D}_{z6}^2(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i)) \end{aligned}$$

Considerando que

$$\ddot{\mathbf{T}}_{z6}(\theta_z) = \mathbf{T}_{z6}(\theta_z) (\dot{\mathbf{D}}_{z6}(\ddot{\theta}_z) + \mathbf{D}_{z6}^2(\dot{\theta}_z))$$

se puede decir que el equivalente en parámetros de Euler de la segunda derivada de la matriz de transformación para la rotación en Z es:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{z6}(\theta_z) (\dot{\mathbf{D}}_{z6}(\ddot{\theta}_z) + \mathbf{D}_{z6}^2(\dot{\theta}_z)) &\equiv \mathbf{T}_{z6}(\mathbf{p}) (\dot{\mathbf{D}}_{z6}(\mathbf{p}, \ddot{\mathbf{p}}) + \mathbf{D}_{z6}^2(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}})) \\ \mathbf{B}_z(\dot{\theta}_z, \ddot{\theta}_z) &\equiv \mathbf{B}_z(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i, \ddot{\mathbf{p}}_i) \end{aligned} \quad (3.89)$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_z(\dot{\theta}_z, \ddot{\theta}_z) &= \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_z^2 & -\ddot{\theta}_z & 0 & 0 \\ \ddot{\theta}_z & -\dot{\theta}_z^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{B}_z(\mathbf{p}_i, \dot{\mathbf{p}}_i, \ddot{\mathbf{p}}_i) &= 2 \begin{bmatrix} -n(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}})n(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}) & -\dot{n}(\mathbf{p}, \ddot{\mathbf{p}}) & 0 & 0 \\ \dot{n}(\mathbf{p}, \ddot{\mathbf{p}}) & -n(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}})n(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{p} &= \begin{bmatrix} p_0 & 0 & 0 & p_3 \end{bmatrix}^T \\
\dot{\mathbf{p}} &= \begin{bmatrix} \dot{p}_0 & 0 & 0 & \dot{p}_3 \end{bmatrix}^T \\
\ddot{\mathbf{p}} &= \begin{bmatrix} \ddot{p}_0 & 0 & 0 & \ddot{p}_3 \end{bmatrix}^T \\
n(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}) &= -p_3\dot{p}_0 + p_0\dot{p}_3 \\
\dot{n}(\mathbf{p}, \ddot{\mathbf{p}}) &= -p_3\ddot{p}_0 + p_0\ddot{p}_3
\end{aligned}$$

### 3.2. Representación escalar de la velocidad y aceleración angular en función de los parámetros de Euler

Tomando en cuenta la forma que tiene  $\mathbf{p}$  para cada rotación (ec.(2.66), ec.(2.68), ec.(2.70)) y la equivalencia que existe entre los componentes de  $\mathbf{p}$  y los ángulos de Euler (ec.(2.57), ec.(2.58)) se tiene que:

$$\begin{aligned}
\text{Rotación sobre eje } x \rightarrow \mathbf{p} &= \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) & \text{sen}(\frac{\theta}{2}) & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\
\text{Rotación sobre eje } y \rightarrow \mathbf{p} &= \begin{bmatrix} p_0 & 0 & p_2 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) & 0 & \text{sen}(\frac{\theta}{2}) & 0 \end{bmatrix}^T \\
\text{Rotación sobre eje } z \rightarrow \mathbf{p} &= \begin{bmatrix} p_0 & 0 & 0 & p_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) & 0 & 0 & \text{sen}(\frac{\theta}{2}) \end{bmatrix}^T
\end{aligned} \tag{3.90}$$

De lo cual se puede observar que para cada rotación el ángulo  $\theta$  está en función de dos variables,  $p_0$  y la correspondiente  $p_1$ ,  $p_2$  o  $p_3$ , según sea el caso. También se observa que, independientemente de cual sea el eje de rotación, las variables de  $\mathbf{p}$  siempre quedan relacionadas

con el ángulo  $\theta$  a través de las identidades trigonométricas  $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$  y  $\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$ . Haciendo uso de la definición de tangente:

$$\tan(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}$$

y haciendo los siguientes cambios de variables sustentados en el sistema de ecs. (3.90):

$$x = \frac{\theta}{2} \quad \cos(x) = p_0 \quad \text{sen}(x) = p_j, \quad j = 1, 2, 3$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \frac{p_j}{p_0} \\ \frac{\theta}{2} &= \tan^{-1}\left(\frac{p_j}{p_0}\right) \\ \theta &= 2\tan^{-1}\left(\frac{p_j}{p_0}\right) \end{aligned} \quad (3.91)$$

donde ec.(3.91) establece la relación escalar entre el ángulo de rotación  $\theta$  y las componentes de  $\mathbf{p}$ . Partiendo de la definición de que la velocidad angular es la derivada respecto al tiempo de la posición angular, esto es

$$\dot{\theta} = \frac{d}{dt}\theta \quad (3.92)$$

sustituyendo a ec.(3.91) en ec.(3.92) se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{d}{dt}\left(2\tan^{-1}\left(\frac{p_j}{p_0}\right)\right) \\ \dot{\theta} &= 2\frac{d}{dt}\left(\tan^{-1}\left(\frac{p_j}{p_0}\right)\right) \end{aligned} \quad (3.93)$$

tomando en cuenta que la derivada de tangente inversa es:

$$\frac{d}{dt}\left(\tan^{-1}\frac{x}{y}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2}dx + \frac{x}{x^2 + y^2}dy \quad (3.94)$$

sustituyendo a ec.(3.94) en ec.(3.93) se tiene que:

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= 2 \left( -\frac{p_j}{p_0^2 + p_j^2} \dot{p}_0 + \frac{p_0}{p_0^2 + p_j^2} \dot{p}_j \right) \\ &= 2 (-p_j \dot{p}_0 + p_0 \dot{p}_j)\end{aligned}\quad (3.95)$$

ya que recordando ec.(2.60) se sabe que  $p_0^2 + p_j^2 = 1$ . La ec.(3.95) se puede representar como el producto de dos vectores de tal manera que para cada eje se tiene:

$$\dot{\theta}_x = 2 \begin{bmatrix} -p_1 & p_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_0 & \dot{p}_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (3.96)$$

$$\dot{\theta}_y = 2 \begin{bmatrix} -p_2 & 0 & p_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_0 & 0 & \dot{p}_2 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (3.97)$$

$$\dot{\theta}_z = 2 \begin{bmatrix} -p_3 & 0 & 0 & p_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_0 & 0 & 0 & \dot{p}_3 \end{bmatrix}^T \quad (3.98)$$

$$\dot{\theta} = 2 \mathbf{p}' \dot{\mathbf{p}} \quad (3.99)$$

donde  $\mathbf{p}'$  es un vector renglón y su forma depende del eje de rotación sobre el que se efectúa el giro. De manera general se puede decir que su primera componente es menos la  $p_j$  correspondiente al eje de rotación, mientras que  $p_0$  ocupa el lugar que tendría  $p_j$  en el vector  $\mathbf{p}$ .

Y finalmente, para obtener la expresión de aceleración angular, se deriva respecto al tiempo la ec.(3.95), dando:

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} &= \frac{d}{dt} (2 (-p_j \dot{p}_0 + p_0 \dot{p}_j)) \\ &= -2 \frac{d}{dt} (p_j \dot{p}_0) + 2 \frac{d}{dt} (p_0 \dot{p}_j) \\ &= -2 (\dot{p}_j \dot{p}_0 + p_j \ddot{p}_0) + 2 (\dot{p}_0 \dot{p}_j + p_0 \ddot{p}_j) \\ &= -2 \dot{p}_j \dot{p}_0 - 2 p_j \ddot{p}_0 + 2 \dot{p}_0 \dot{p}_j + 2 p_0 \ddot{p}_j \\ &= -2 p_j \ddot{p}_0 + 2 p_0 \ddot{p}_j \\ \ddot{\theta} &= 2 (-p_j \ddot{p}_0 + p_0 \ddot{p}_j)\end{aligned}\quad (3.100)$$

De manera similar al caso de de la velocidad angular, la aceleración angular, ec.(3.100), se puede

expresar como el producto de dos vectores de tal manera que se tiene:

$$\ddot{\theta}_x = 2 \begin{bmatrix} -p_1 & p_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{p}_0 & \ddot{p}_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (3.101)$$

$$\ddot{\theta}_y = 2 \begin{bmatrix} -p_2 & 0 & p_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{p}_0 & 0 & \ddot{p}_2 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (3.102)$$

$$\ddot{\theta}_z = 2 \begin{bmatrix} -p_3 & 0 & 0 & p_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{p}_0 & 0 & 0 & \ddot{p}_3 \end{bmatrix}^T \quad (3.103)$$

$$\ddot{\theta} = 2\mathbf{p}'\ddot{\mathbf{p}} \quad (3.104)$$

Cabe resaltar que las ecuaciones (3.101) a (3.104) son muy similares a las ecuaciones (3.96) a (3.99), dónde lo único que cambia es el vector  $\dot{\mathbf{p}}$  por el vector  $\ddot{\mathbf{p}}$ .

## Capítulo 4

# Resultados

En esta capítulo se aplicarán las definiciones nuevas obtenidas en el capítulo 3 para calcular la cinemática y dinámica de mecanismos CCCC y CSSP, donde C representa la junta cilíndrica, S la junta esférica y P la junta prismática. Para fines demostrativos, se hará una comparación en las expresiones obtenidas en función de ángulos de Euler y parámetros de Euler en el mecanismo CCCC.

### 4.1. Casos de estudio 1: Mecanismo CCCC

#### 4.1.1. Análisis cinemático

Dado el mecanismo de la figura 4.1, se proponen los movimientos que ayudarán a formar las ecuaciones de lazo cinemático que se ilustran en 4.2 y 4.3

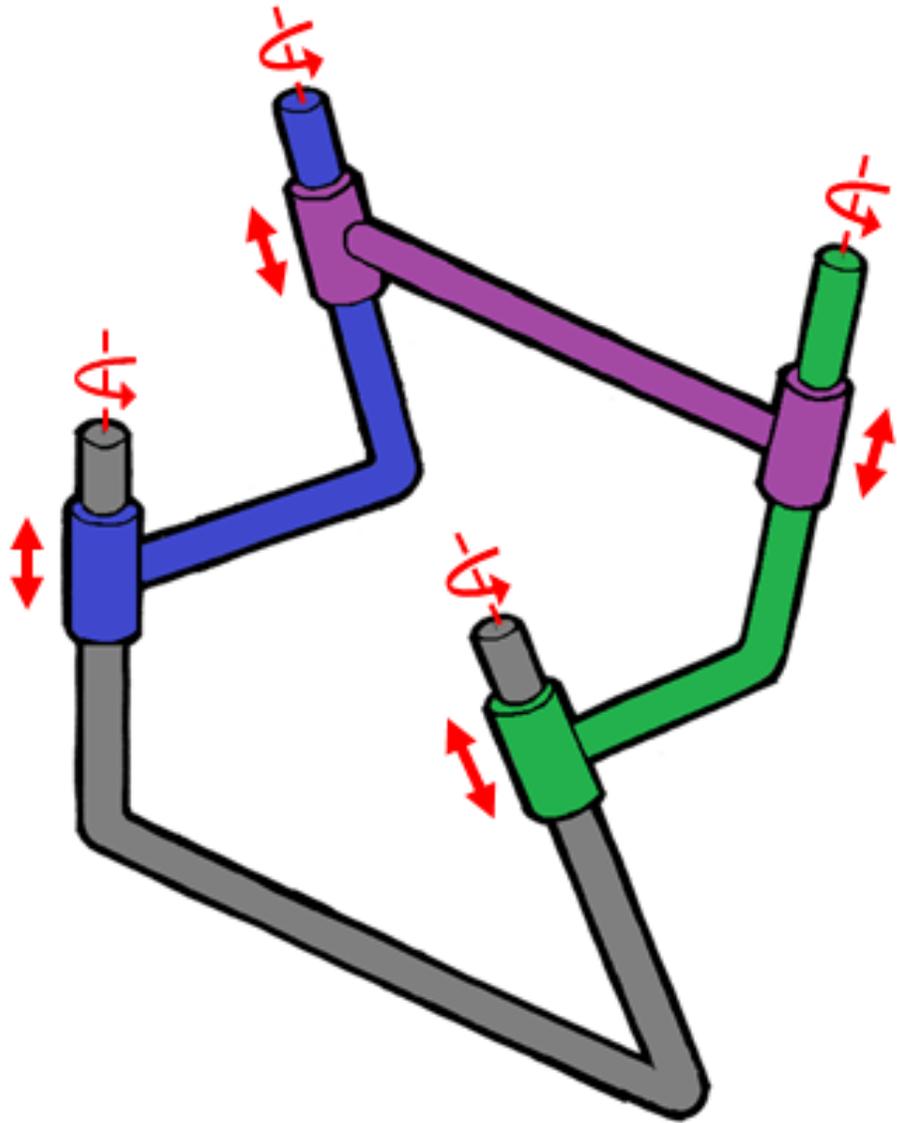


Fig.4.1.Movimientos de las juntas del mecanismo CCCC.

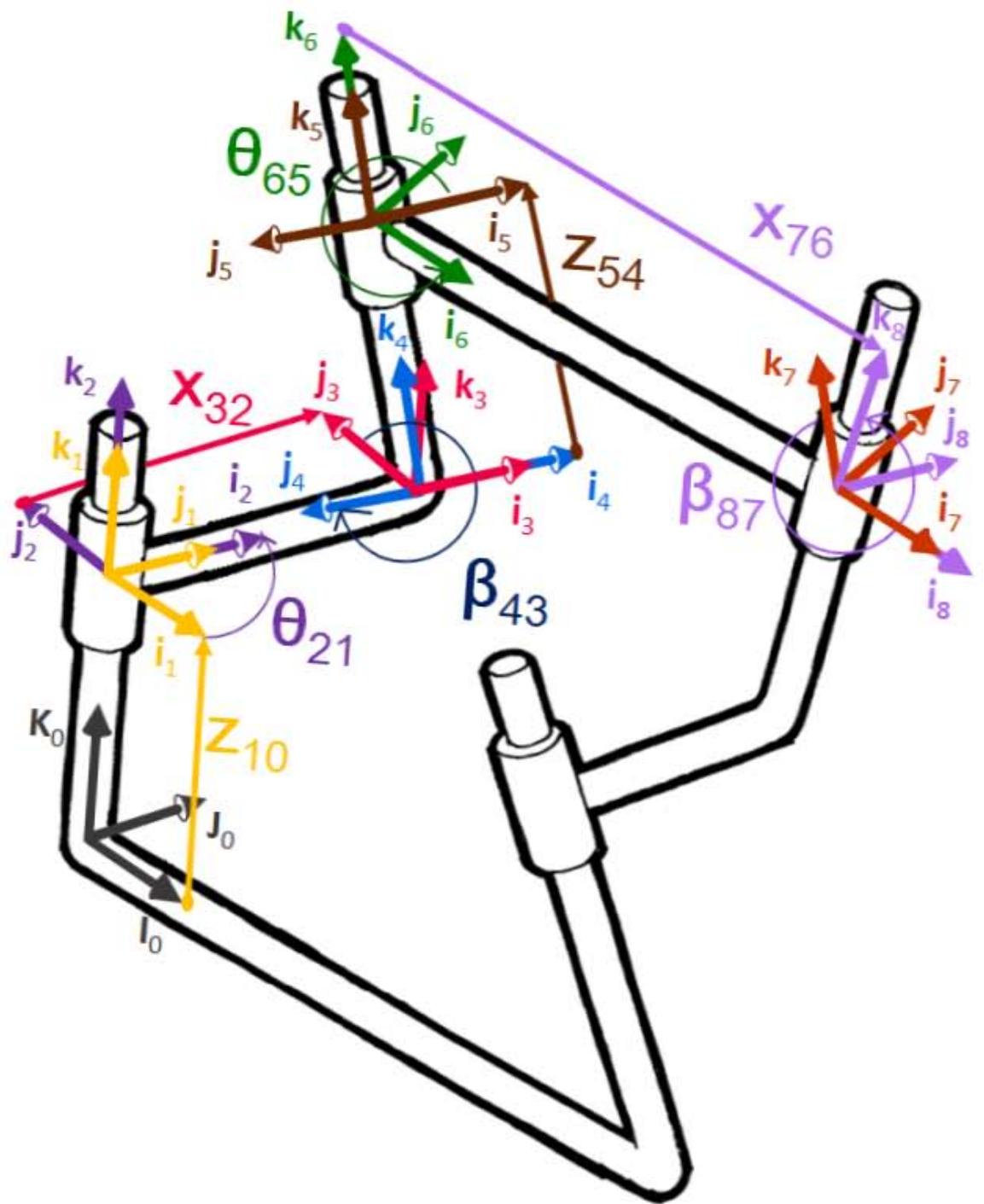


Fig.4.2.Movimientos para lazo 1.

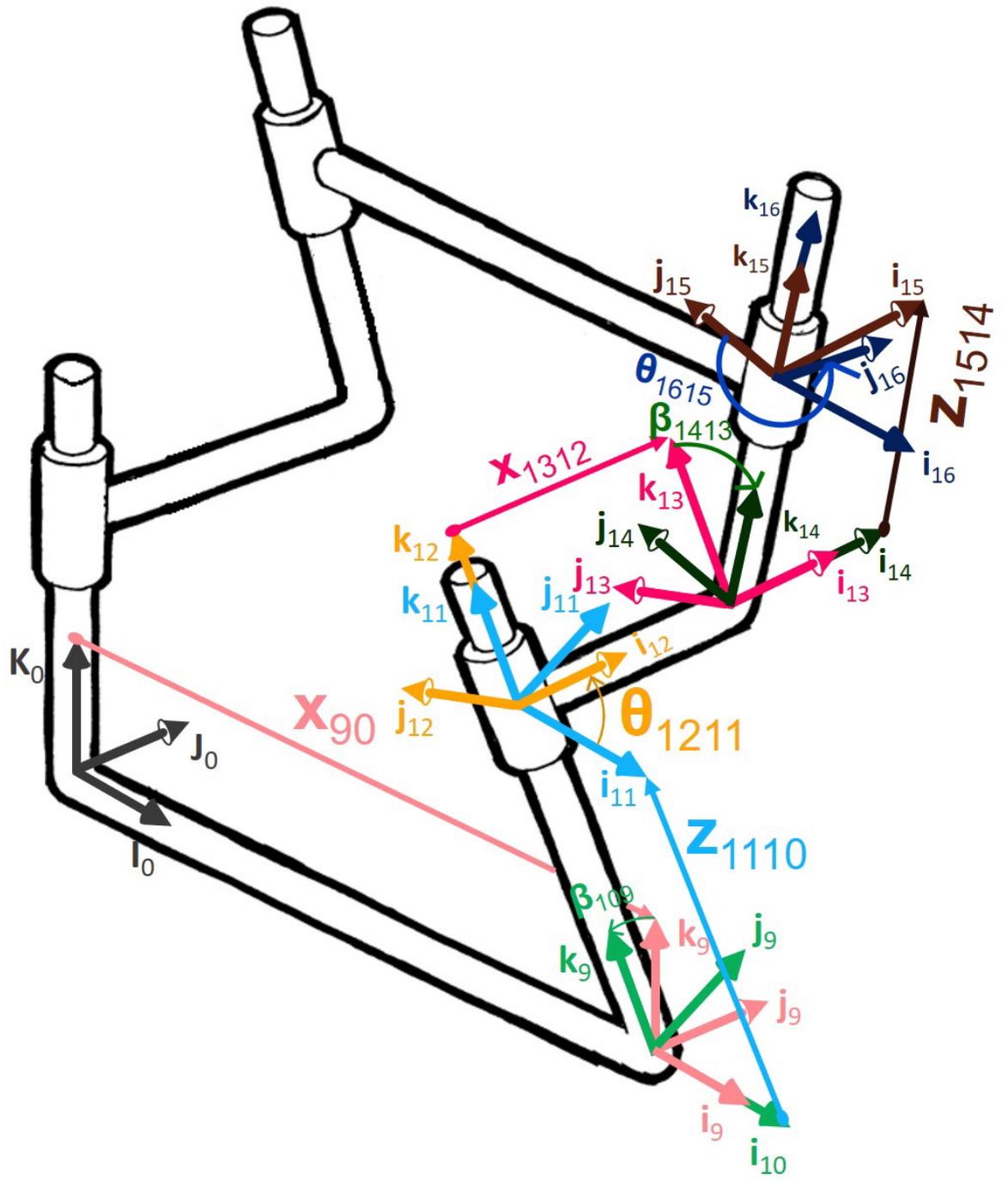


Fig.4.3.Movimientos para lazo 2.

De los cuales se obtienen las siguientes ecuaciones de posición:

$$\mathbf{T}_2^0 \mathbf{T}_4^2 \mathbf{T}_6^4 \mathbf{T}_8^6 = \mathbf{T}_{10}^0 \mathbf{T}_{12}^{10} \mathbf{T}_{14}^{12} \mathbf{T}_{16}^{14} \quad (4.1)$$

Para mostrar una comparativa, se muestran las expresiones utilizando las matrices homogéneas de transformación en función de los ángulos de Euler:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_2^0 &= \mathbf{T}_{z3}(z_{10}) \mathbf{T}_{z6}(\theta_{21}) & \mathbf{T}_4^2 &= \mathbf{T}_{z1}(x_{32}) \mathbf{T}_{z4}(\beta_{43}) \\ \mathbf{T}_6^4 &= \mathbf{T}_{z3}(z_{54}) \mathbf{T}_{z6}(\theta_{65}) & \mathbf{T}_8^6 &= \mathbf{T}_{z1}(x_{76}) \mathbf{T}_{z4}(\beta_{87}) \\ \mathbf{T}_{10}^0 &= \mathbf{T}_{z1}(x_{90}) \mathbf{T}_{z4}(\theta_{109}) & \mathbf{T}_{12}^{10} &= \mathbf{T}_{z3}(z_{1110}) \mathbf{T}_{z6}(\theta_{1211}) \\ \mathbf{T}_{14}^{12} &= \mathbf{T}_{z1}(x_{1312}) \mathbf{T}_{z4}(\theta_{1413}) & \mathbf{T}_{16}^{14} &= \mathbf{T}_{z3}(z_{1514}) \mathbf{T}_{z6}(\theta_{1615}) \end{aligned}$$

y en función de los parámetros de Euler:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_2^0 &= \mathbf{T}_{z3}(z_{10}) \mathbf{T}_{z6}(\mathbf{p}_{21}) & \mathbf{T}_4^2 &= \mathbf{T}_{z1}(x_{32}) \mathbf{T}_{z4}(\mathbf{p}_{43}) \\ \mathbf{T}_6^4 &= \mathbf{T}_{z3}(z_{54}) \mathbf{T}_{z6}(\mathbf{p}_{65}) & \mathbf{T}_8^6 &= \mathbf{T}_{z1}(x_{76}) \mathbf{T}_{z4}(\mathbf{p}_{87}) \\ \mathbf{T}_{10}^0 &= \mathbf{T}_{z1}(x_{90}) \mathbf{T}_{z4}(\mathbf{p}_{109}) & \mathbf{T}_{12}^{10} &= \mathbf{T}_{z3}(z_{1110}) \mathbf{T}_{z6}(\mathbf{p}_{1211}) \\ \mathbf{T}_{14}^{12} &= \mathbf{T}_{z1}(x_{1312}) \mathbf{T}_{z4}(\mathbf{p}_{1413}) & \mathbf{T}_{16}^{14} &= \mathbf{T}_{z3}(z_{1514}) \mathbf{T}_{z6}(\mathbf{p}_{1615}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{21} &= [c(\frac{\theta_{21}}{2}), 0, 0, s(\frac{\theta_{21}}{2})] & \mathbf{p}_{43} &= [c(\frac{\beta_{43}}{2}), s(\frac{\beta_{43}}{2}), 0, 0] \\ \mathbf{p}_{65} &= [p_{650}, 0, 0, p_{653}] & \mathbf{p}_{87} &= [c(\frac{\beta_{87}}{2}), s(\frac{\beta_{87}}{2}), 0, 0] \\ \mathbf{p}_{109} &= [c(\frac{\beta_{109}}{2}), s(\frac{\beta_{109}}{2}), 0, 0] & \mathbf{p}_{1211} &= [p_{12110}, 0, 0, p_{12113}] \\ \mathbf{p}_{1413} &= [c(\frac{\beta_{1413}}{2}), s(\frac{\beta_{1413}}{2}), 0, 0] & \mathbf{p}_{1615} &= [p_{16150}, 0, 0, p_{16153}] \end{aligned}$$

En la formulación de matrices homogéneas de transformación en función de los parámetros de Euler, además de considerar las ecuaciones de posición, ec.(4.1) se deben de considerar adicionalmente las restricciones:

$$\mathbf{p}_{65}^T \mathbf{p}_{65} - 1 = 0 \quad (4.2)$$

$$\mathbf{p}_{1211}^T \mathbf{p}_{1211} - 1 = 0 \quad (4.3)$$

$$\mathbf{p}_{1615}^T \mathbf{p}_{1615} - 1 = 0 \quad (4.4)$$

al resolver las ecuaciones de posición. Dados:

$$z_{10} = 0 \text{ in} \quad 0^\circ \leq \theta_{21} \leq 360^\circ$$

Además, los valores asumidos para las longitudes constantes en el mecanismo fueron:

$$x_{32} = 2 \text{ in} \quad x_{76} = -3 \text{ in} \quad x_{90} = -5 \text{ in} \quad x_{1312} = 4 \text{ in}$$

mientras que los valores asumidos para los ángulos constantes fueron:

$$\beta_{43} = 30^\circ \quad \beta_{87} = -225^\circ \quad \beta_{109} = -240^\circ \quad \beta_{1413} = 55^\circ$$

La posición de las incógnitas en una simulación de 360 muestras de una vuelta completa de  $\theta_{21}$ , y con valores iniciales de:

$$\begin{aligned} z_{54} &= 0.115081 \text{ in} & z_{1110} &= 0.209829 \text{ in} & z_{1514} &= 2.69301 \text{ in} \\ p_{650} &= 0.95162 & p_{12110} &= 0.965199 & p_{16150} &= -0.922011 \\ p_{653} &= 0.307279 & p_{12113} &= 0.261517 & p_{16153} &= 0.387164 \end{aligned}$$

o en el caso de utilizar las matrices de transformación homogénea con ángulos de Euler:

$$\begin{aligned} z_{54} &= 0.115081 \text{ in} & z_{1110} &= 0.209829 \text{ in} & z_{1514} &= 2.69301 \text{ in} \\ \theta_{650} &= 35.7906^\circ & \theta_{12110} &= 30.3202^\circ & \theta_{16150} &= 314.444^\circ \end{aligned}$$

muestra las siguientes gráficas (figuras 4.4 a 4.9), teniendo en cuenta que en el análisis que emplea las matrices homogéneas de transformación en función de los parámetros de Euler, la manera de recuperar el valor de los ángulos es a través de la relación  $\theta_i = \text{Tan}\left(\frac{pi3}{pi0}\right)$ .

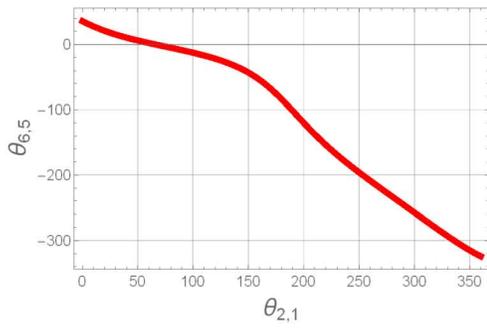


Fig.4.4

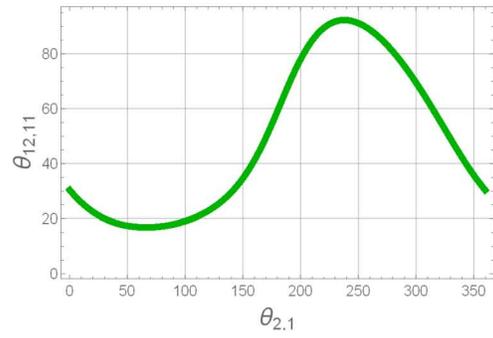


Fig.4.5

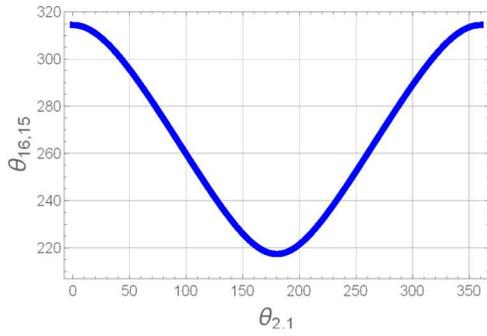


Fig.4.6

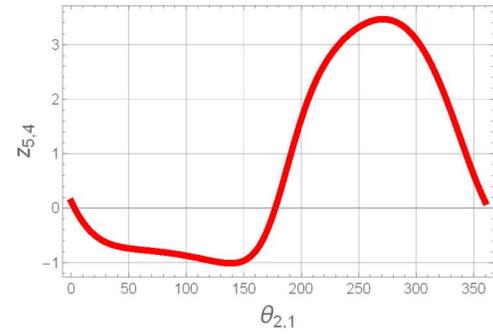


Fig.4.7

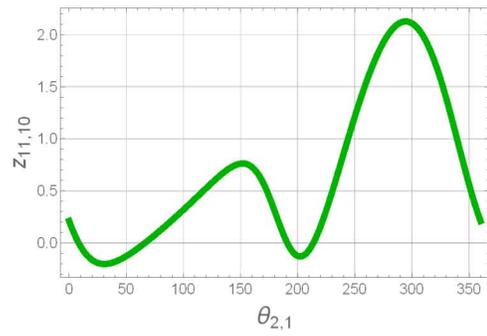


Fig.4.8

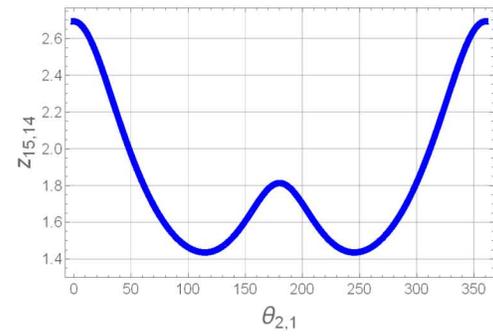


Fig.4.9

Las ecuaciones de velocidad se obtienen derivando la ecuación (4.1)

$$\dot{\mathbf{T}}_2^0 \mathbf{T}_4^2 \mathbf{T}_6^4 \mathbf{T}_8^6 + \mathbf{T}_2^0 \mathbf{T}_4^2 \dot{\mathbf{T}}_6^4 \mathbf{T}_8^6 = \mathbf{T}_{10}^0 \dot{\mathbf{T}}_{12}^{10} \mathbf{T}_{14}^{12} \mathbf{T}_{16}^{14} + \mathbf{T}_{10}^0 \mathbf{T}_{12}^{10} \mathbf{T}_{14}^{12} \dot{\mathbf{T}}_{16}^{14} \quad (4.5)$$

donde en el caso de matrices homogéneas de transformación en función de los ángulos de Euler se tiene que:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{T}}_2^0 &= \dot{\mathbf{T}}_{z3}(z_{10}, \dot{z}_{10}) \mathbf{T}_{z6}(\theta_{21}) + \mathbf{T}_{z3}(z_{10}) \dot{\mathbf{T}}_{z6}(\theta_{21}, \dot{\theta}_{21}) \\ \dot{\mathbf{T}}_6^4 &= \dot{\mathbf{T}}_{z3}(z_{54}, \dot{z}_{54}) \mathbf{T}_{z6}(\theta_{65}) + \mathbf{T}_{z3}(z_{54}) \dot{\mathbf{T}}_{z6}(\theta_{65}, \dot{\theta}_{65}) \\ \dot{\mathbf{T}}_{12}^{10} &= \dot{\mathbf{T}}_{z3}(z_{1110}, \dot{z}_{1110}) \mathbf{T}_{z6}(\theta_{1211}) + \mathbf{T}_{z3}(z_{1110}) \dot{\mathbf{T}}_{z6}(\theta_{1211}, \dot{\theta}_{1211}) \\ \dot{\mathbf{T}}_{16}^{14} &= \dot{\mathbf{T}}_{z3}(z_{1514}, \dot{z}_{1514}) \mathbf{T}_{z6}(\theta_{1615}) + \mathbf{T}_{z3}(z_{1514}) \dot{\mathbf{T}}_{z6}(\theta_{1615}, \dot{\theta}_{1615}) \end{aligned}$$

Para el caso de matrices homogéneas en función de los parámetros de Euler, además de tener en cuenta la ec.(4.5) hay que derivar las restricciones (4.2), (4.3) y (4.4):

$$\mathbf{p}_{65}^T \dot{\mathbf{p}}_{65} = 0 \quad (4.6)$$

$$\mathbf{p}_{1211}^T \dot{\mathbf{p}}_{1211} = 0 \quad (4.7)$$

$$\mathbf{p}_{1615}^T \dot{\mathbf{p}}_{1615} = 0 \quad (4.8)$$

donde

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{T}}_2^0 &= \dot{\mathbf{T}}_{z3}(z_{10}, \dot{z}_{10}) \mathbf{T}_{z6}(\mathbf{p}_{21}) + \mathbf{T}_{z3}(z_{10}) \dot{\mathbf{T}}_{z6}(\mathbf{p}_{21}, \dot{\mathbf{p}}_{21}) \\ \dot{\mathbf{T}}_6^4 &= \dot{\mathbf{T}}_{z3}(z_{54}, \dot{z}_{54}) \mathbf{T}_{z6}(\mathbf{p}_{65}) + \mathbf{T}_{z3}(z_{54}) \dot{\mathbf{T}}_{z6}(\mathbf{p}_{65}, \dot{\mathbf{p}}_{65}) \\ \dot{\mathbf{T}}_{12}^{10} &= \dot{\mathbf{T}}_{z3}(z_{1110}, \dot{z}_{1110}) \mathbf{T}_{z6}(\mathbf{p}_{1211}) + \mathbf{T}_{z3}(z_{1110}) \dot{\mathbf{T}}_{z6}(\mathbf{p}_{1211}, \dot{\mathbf{p}}_{1211}) \\ \dot{\mathbf{T}}_{16}^{14} &= \dot{\mathbf{T}}_{z3}(z_{1514}, \dot{z}_{1514}) \mathbf{T}_{z6}(\mathbf{p}_{1615}) + \mathbf{T}_{z3}(z_{1514}) \dot{\mathbf{T}}_{z6}(\mathbf{p}_{1615}, \dot{\mathbf{p}}_{1615}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}_{21} &= \frac{1}{2} [-s(\frac{\theta_{21}}{2}) \dot{\theta}_{21}, 0, 0, c(\frac{\theta_{21}}{2}) \dot{\theta}_{21}] & \dot{\mathbf{p}}_{43} &= [0, 0, 0, 0] & \dot{\mathbf{p}}_{65} &= [\dot{p}_{650}, 0, 0, \dot{p}_{653}] \\ \dot{\mathbf{p}}_{87} &= [0, 0, 0, 0] & \dot{\mathbf{p}}_{109} &= [0, 0, 0, 0] & \dot{\mathbf{p}}_{1211} &= [\dot{p}_{12110}, 0, 0, \dot{p}_{12113}] \\ \dot{\mathbf{p}}_{1615} &= [\dot{p}_{16150}, 0, 0, \dot{p}_{16153}] & \dot{\mathbf{p}}_{1413} &= [0, 0, 0, 0] \end{aligned}$$

Dados:

$$\dot{z}_{10} = 0 \text{ in/seg} \quad \dot{\theta}_{21} = 100 \text{ rad/seg}$$

Y tomando en cuenta que las derivadas de las matrices de transformación con valores constantes dan como resultado una matriz llena de ceros. Resolviendo en una simulación de 360 muestras de una vuelta completa de  $\theta_{21}$  y con valores iniciales de:

$$\begin{aligned} \dot{z}_{54} &= -250 \text{ in/s} & \dot{z}_{1110} &= -173,205 \text{ in/s} & \dot{z}_{1514} &= 0 \text{ in/s} \\ \dot{p}_{650} &= 13.3056 & \dot{p}_{12110} &= 6.53792 & \dot{p}_{16150} &= 0 \\ \dot{p}_{653} &= -41.2063 & \dot{p}_{12113} &= -24.13 & \dot{p}_{16153} &= 0 \end{aligned}$$

o en el caso de utilizar las matrices de transformación homogénea con ángulos de Euler:

$$\begin{aligned} \dot{z}_{54} &= -250 \text{ in/s} & \dot{z}_{1110} &= -173,205 \text{ in/s} & \dot{z}_{1514} &= 0 \text{ in/s} \\ \dot{\theta}_{650} &= -86.6025 \text{ rad/seg} & \dot{\theta}_{12110} &= -50.0 \text{ rad/seg} & \dot{\theta}_{16150} &= 0 \text{ rad/seg} \end{aligned}$$

se obtuvieron las siguientes gráficas para la velocidad (figuras 4.10 a 4.15), teniendo en cuenta que la manera de recuperar los valores de las velocidades angulares es a través de la relación  $\dot{\theta}_i = 2\mathbf{p}'_i\dot{\mathbf{p}}_i$

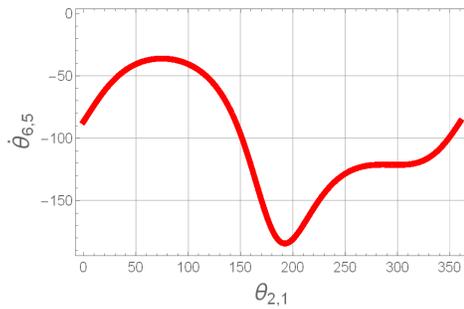


Fig.4.10

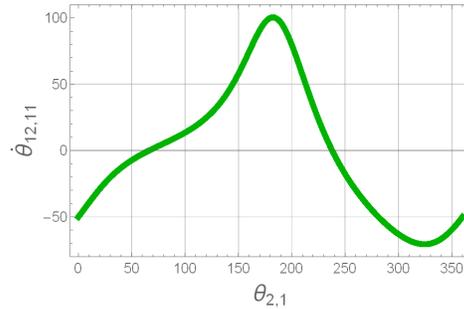


Fig.4.11

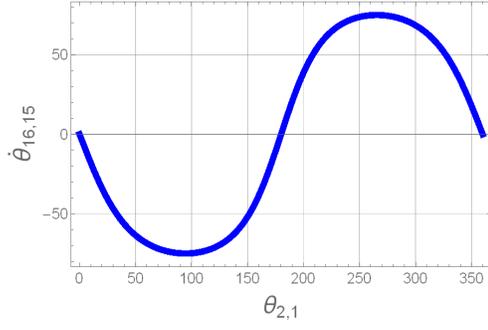


Fig.4.12

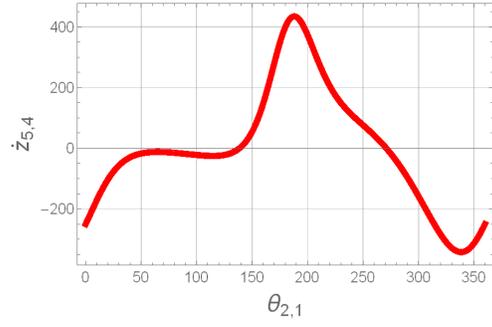


Fig.4.13

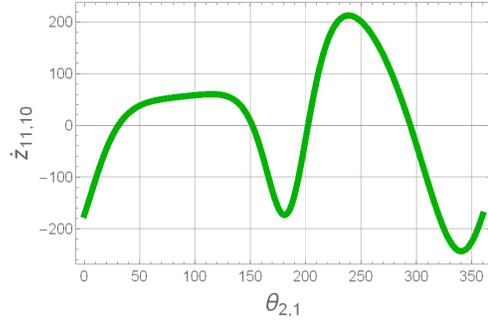


Fig.4.14

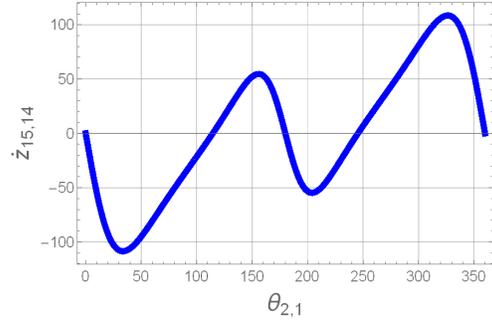


Fig.4.15

De manera similar, las ecuaciones de aceleración se obtienen derivando la ecuación de velocidad ec.(4.5):

$$\ddot{\mathbf{T}}_2^0 \mathbf{T}_4^2 \mathbf{T}_6^4 \mathbf{T}_8^6 + 2\dot{\mathbf{T}}_2^0 \mathbf{T}_4^2 \dot{\mathbf{T}}_6^4 \mathbf{T}_8^6 + \mathbf{T}_2^0 \mathbf{T}_4^2 \ddot{\mathbf{T}}_6^4 \mathbf{T}_8^6 = \mathbf{T}_{10}^0 \ddot{\mathbf{T}}_{12}^{10} \mathbf{T}_{14}^{12} \mathbf{T}_{16}^{14} + 2\mathbf{T}_{10}^0 \dot{\mathbf{T}}_{12}^{10} \mathbf{T}_{14}^{12} \dot{\mathbf{T}}_{16}^{14} + \mathbf{T}_{10}^0 \mathbf{T}_{12}^{10} \mathbf{T}_{14}^{12} \ddot{\mathbf{T}}_{16}^{14} \quad (4.9)$$

donde en el caso de matrices homogéneas de transformación en función de los ángulos de Euler

se tiene que:

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{T}}_2^0 &= \ddot{\mathbf{T}}_{z3}(z_{10}, \dot{z}_{10}, \ddot{z}_{10})\mathbf{T}_{z6}(\theta_{21}) + 2\dot{\mathbf{T}}_{z3}(z_{10}, \dot{z}_{10})\dot{\mathbf{T}}_{z6}(\theta_{21}, \dot{\theta}_{21}) + \mathbf{T}_{z3}(z_{10})\ddot{\mathbf{T}}_{z6}(\theta_{21}, \dot{\theta}_{21}, \ddot{\theta}_{21}) \\
\ddot{\mathbf{T}}_6^4 &= \ddot{\mathbf{T}}_{z3}(z_{54}, \dot{z}_{54}, \ddot{z}_{54})\mathbf{T}_{z6}(\theta_{65}) + 2\dot{\mathbf{T}}_{z3}(z_{54}, \dot{z}_{54})\dot{\mathbf{T}}_{z6}(\theta_{65}, \dot{\theta}_{65}) + \mathbf{T}_{z3}(z_{54})\ddot{\mathbf{T}}_{z6}(\theta_{65}, \dot{\theta}_{65}, \ddot{\theta}_{65}) \\
\ddot{\mathbf{T}}_{12}^{10} &= \ddot{\mathbf{T}}_{z3}(z_{1110}, \dot{z}_{1110}, \ddot{z}_{1110})\mathbf{T}_{z6}(\theta_{1211}) + 2\dot{\mathbf{T}}_{z3}(z_{1110}, \dot{z}_{1110})\dot{\mathbf{T}}_{z6}(\theta_{1211}, \dot{\theta}_{1211}) \\
&\quad + \mathbf{T}_{z3}(z_{1110})\ddot{\mathbf{T}}_{z6}(\theta_{1211}, \dot{\theta}_{1211}, \ddot{\theta}_{1211}) \\
\ddot{\mathbf{T}}_{16}^{14} &= \ddot{\mathbf{T}}_{z3}(z_{1514}, \dot{z}_{1514}, \ddot{z}_{1514})\mathbf{T}_{z6}(\theta_{1615}) + 2\dot{\mathbf{T}}_{z3}(z_{1514}, \dot{z}_{1514})\dot{\mathbf{T}}_{z6}(\theta_{1615}, \dot{\theta}_{1615}) \\
&\quad + \mathbf{T}_{z3}(z_{1514})\ddot{\mathbf{T}}_{z6}(\theta_{1615}, \dot{\theta}_{1615}, \ddot{\theta}_{1615})
\end{aligned}$$

Para el caso de matrices homogéneas en función de los parámetros de Euler, además de tomar en cuenta la ec.(4.9) hay que derivar las restricciones (4.6), (4.7) y (4.8):

$$\dot{\mathbf{p}}_{65}^T \dot{\mathbf{p}}_{65} + \mathbf{p}_{65}^T \ddot{\mathbf{p}}_{65} = 0 \quad (4.10)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_{1211}^T \dot{\mathbf{p}}_{1211} + \mathbf{p}_{1211}^T \ddot{\mathbf{p}}_{1211} = 0 \quad (4.11)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_{1615}^T \dot{\mathbf{p}}_{1615} + \mathbf{p}_{1615}^T \ddot{\mathbf{p}}_{1615} = 0 \quad (4.12)$$

donde

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{T}}_2^0 &= \ddot{\mathbf{T}}_{z3}(z_{10}, \dot{z}_{10}, \ddot{z}_{10})\mathbf{T}_{z6}(\mathbf{p}_{21}) + 2\dot{\mathbf{T}}_{z3}(z_{10}, \dot{z}_{10})\dot{\mathbf{T}}_{z6}(\mathbf{p}_{21}, \dot{\mathbf{p}}_{21}) + \mathbf{T}_{z3}(z_{10})\ddot{\mathbf{T}}_{z6}(\mathbf{p}_{21}, \dot{\mathbf{p}}_{21}, \ddot{\mathbf{p}}_{21}) \\
\ddot{\mathbf{T}}_6^4 &= \ddot{\mathbf{T}}_{z3}(z_{54}, \dot{z}_{54}, \ddot{z}_{54})\mathbf{T}_{z6}(\mathbf{p}_{65}) + 2\dot{\mathbf{T}}_{z3}(z_{54}, \dot{z}_{54})\dot{\mathbf{T}}_{z6}(\mathbf{p}_{65}, \dot{\mathbf{p}}_{65}) + \mathbf{T}_{z3}(z_{54})\ddot{\mathbf{T}}_{z6}(\mathbf{p}_{65}, \dot{\mathbf{p}}_{65}, \ddot{\mathbf{p}}_{65}) \\
\ddot{\mathbf{T}}_{12}^{10} &= \ddot{\mathbf{T}}_{z3}(z_{1110}, \dot{z}_{1110}, \ddot{z}_{1110})\mathbf{T}_{z6}(\mathbf{p}_{1211}) + 2\dot{\mathbf{T}}_{z3}(z_{1110}, \dot{z}_{1110})\dot{\mathbf{T}}_{z6}(\mathbf{p}_{1211}, \dot{\mathbf{p}}_{1211}) \\
&\quad + \mathbf{T}_{z3}(z_{1110})\ddot{\mathbf{T}}_{z6}(\mathbf{p}_{1211}, \dot{\mathbf{p}}_{1211}, \ddot{\mathbf{p}}_{1211}) \\
\ddot{\mathbf{T}}_{16}^{14} &= \ddot{\mathbf{T}}_{z3}(z_{1514}, \dot{z}_{1514}, \ddot{z}_{1514})\mathbf{T}_{z6}(\mathbf{p}_{1615}) + 2\dot{\mathbf{T}}_{z3}(z_{1514}, \dot{z}_{1514})\dot{\mathbf{T}}_{z6}(\mathbf{p}_{1615}, \dot{\mathbf{p}}_{1615}) \\
&\quad + \mathbf{T}_{z3}(z_{1514})\ddot{\mathbf{T}}_{z6}(\mathbf{p}_{1615}, \dot{\mathbf{p}}_{1615}, \ddot{\mathbf{p}}_{1615})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{p}}_{21} &= [\ddot{p}_{210}, 0, 0, \ddot{p}_{213}] & \ddot{\mathbf{p}}_{65} &= [\ddot{p}_{650}, 0, 0, \ddot{p}_{653}] \\
\dot{p}_{210} &= -\frac{1}{4}c\left(\frac{\theta_{21}}{2}\right)\dot{\theta}_{21}^2 - \frac{1}{2}s\left(\frac{\theta_{21}}{2}\right)\ddot{\theta}_{21} & \ddot{\mathbf{p}}_{1211} &= [\ddot{p}_{12110}, 0, 0, \ddot{p}_{12113}] \\
\dot{p}_{213} &= -\frac{1}{4}s\left(\frac{\theta_{21}}{2}\right)\dot{\theta}_{21}^2 - \frac{1}{2}c\left(\frac{\theta_{21}}{2}\right)\ddot{\theta}_{21} & \ddot{\mathbf{p}}_{1615} &= [\ddot{p}_{16150}, 0, 0, \ddot{p}_{16153}]
\end{aligned}$$

Dados:

$$\ddot{z}_{10} = 0 \text{ in/s}^2 \quad \ddot{\theta}_{21} = 0$$

Resolviendo en una simulación de 360 muestras de una vuelta completa de  $\theta_{21}$  y con valores iniciales de:

$$\begin{aligned} \ddot{z}_{54} &= 43457.5 \text{ in/s}^2 & \ddot{z}_{1110} &= 36685.9 \text{ in/s}^2 & \ddot{z}_{1514} &= -33415.5 \text{ in/s}^2 \\ \ddot{p}_{650} &= -2921.85 & \ddot{p}_{12110} &= 1388.58 & \ddot{p}_{16150} &= 2027.0 \\ \ddot{p}_{653} &= 2946.82 & \ddot{p}_{12113} &= 2735.02 & \ddot{p}_{16153} &= 4827.21 \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} \ddot{z}_{54} &= 43457.5 \text{ in/s}^2 & \ddot{z}_{1110} &= 36685.9 \text{ in/s}^2 & \ddot{z}_{1514} &= -33415.5 \text{ in/s}^2 \\ \ddot{\theta}_{650} &= 7404.14 \text{ rad/s}^2 & \ddot{\theta}_{12110} &= 6005.94 \text{ rad/s}^2 & \ddot{\theta}_{16150} &= 10471 \text{ rad/s}^2 \end{aligned}$$

se obtuvieron las siguientes gráficas para la aceleración (figuras 4.16 a 4.21), teniendo en cuenta que la manera de recuperar los valores de las velocidades angulares es a través de la relación  $\ddot{\theta}_i = 2\mathbf{p}'_i\ddot{\mathbf{p}}_i$

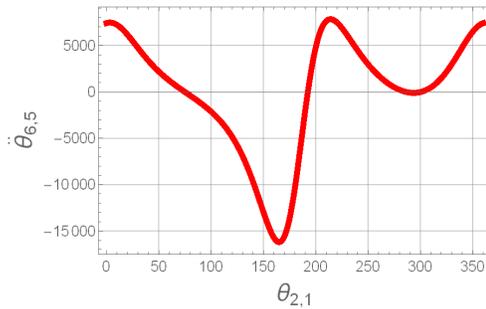


Fig.4.16

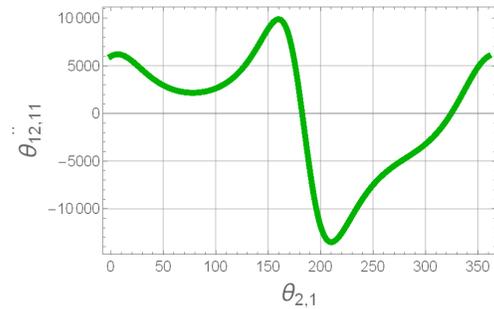


Fig.4.17

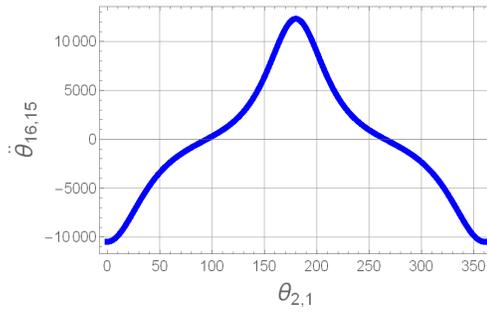


Fig.4.18

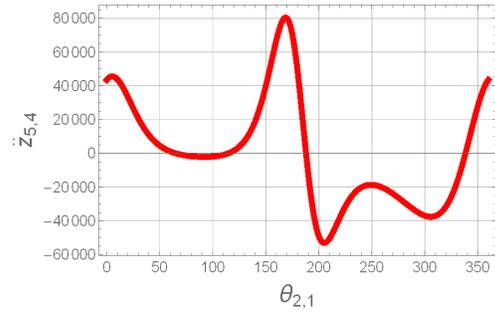


Fig.4.19

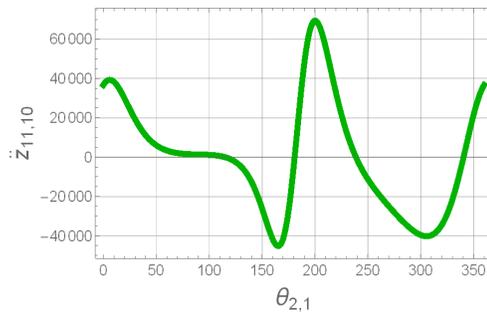


Fig.4.20

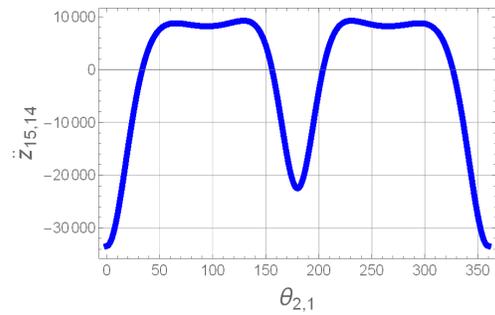


Fig.4.21

#### 4.1.2. Análisis dinámico

Se tiene el mismo mecanismo CCCC de la Fig.4.1. En el mecanismo actúan las fuerzas de gravedad  $W$ , una fuerza de salida  $F_{out}$ , un momento de salida  $M_{out}$ , una fuerza de entrada  $F_{in}$ , y un momento de entrada  $M_{in}$ . El diagrama de cuerpo libre considerado para dicho mecanismo se presenta en la Fig 4.22.

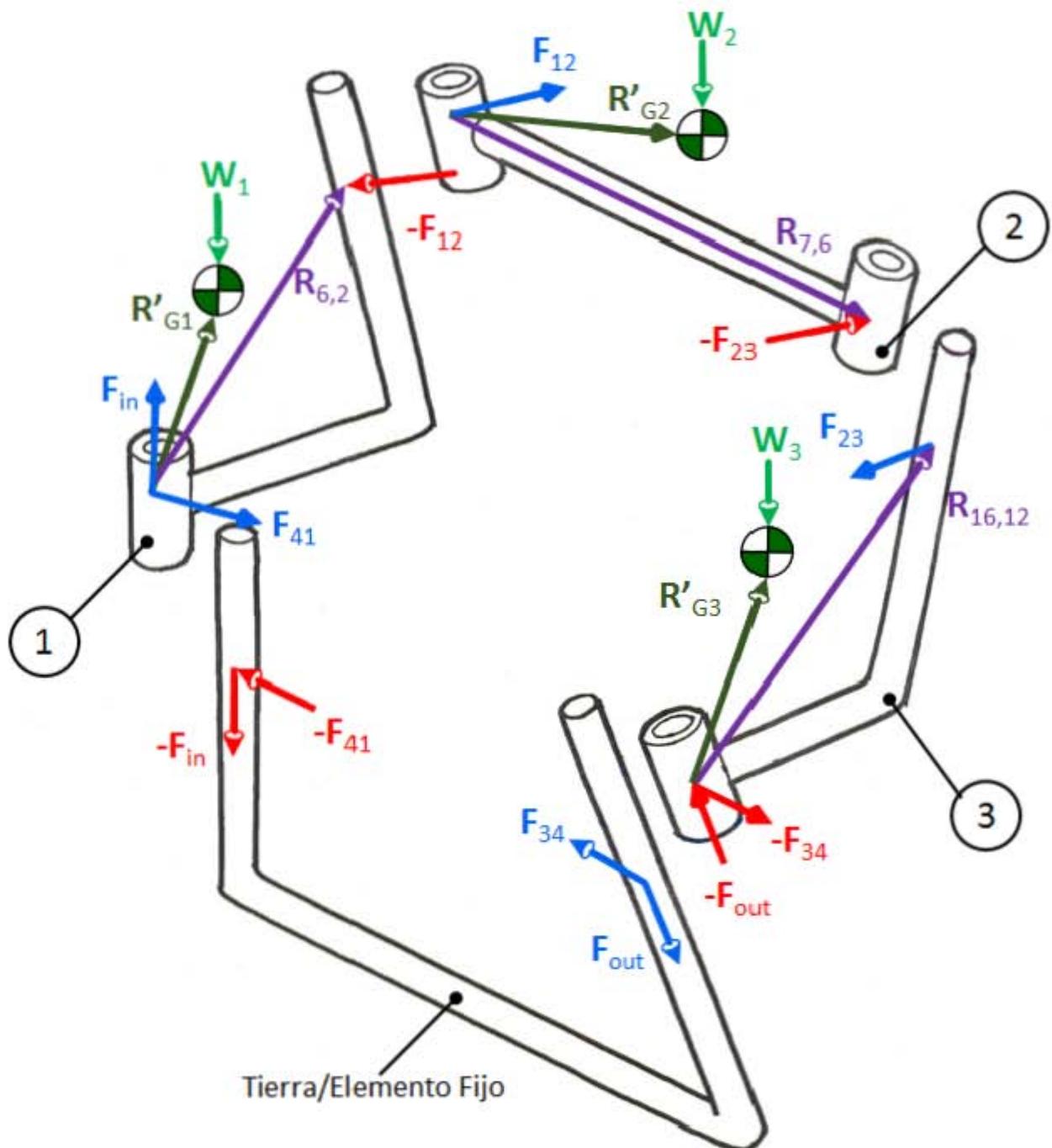


Fig.4.22.-Diagrama de cuerpo libre

Para dicho mecanismo se tienen las siguientes incógnitas y ecuaciones:

$$\begin{array}{rcl} 3 \text{ cuerpos en mov.} \times 6 \text{ ecuaciones} & = & 18 \text{ ecuaciones} \\ & & \hline & & 18 \text{ ecuaciones} \\ \\ 0 \text{ rotacionales} \times 5 \text{ incógnitas} & = & \\ 0 \text{ prismáticas} \times 5 & = & \\ \quad 0 \text{ tornillo} \times 4 & = & \\ 4 \text{ cilíndricas} \times 4 & = & 16 \text{ incógnitas} \\ 0 \text{ universales} \times 4 & = & \\ \quad 0 \text{ esféricas} \times 3 & = & \\ \quad 0 \text{ planas} \times 4 & = & \\ 2 \text{ actuadores} \times 1 & = & 2 \\ & & \hline & & 18 \text{ incógnitas} \end{array}$$

La figura 4.23 muestra las componentes de cada una de las fuerzas que aparecen en el diagrama de cuerpo libre, mientras que la figura 4.24 muestra la equivalencia de los vectores de centro de masa.

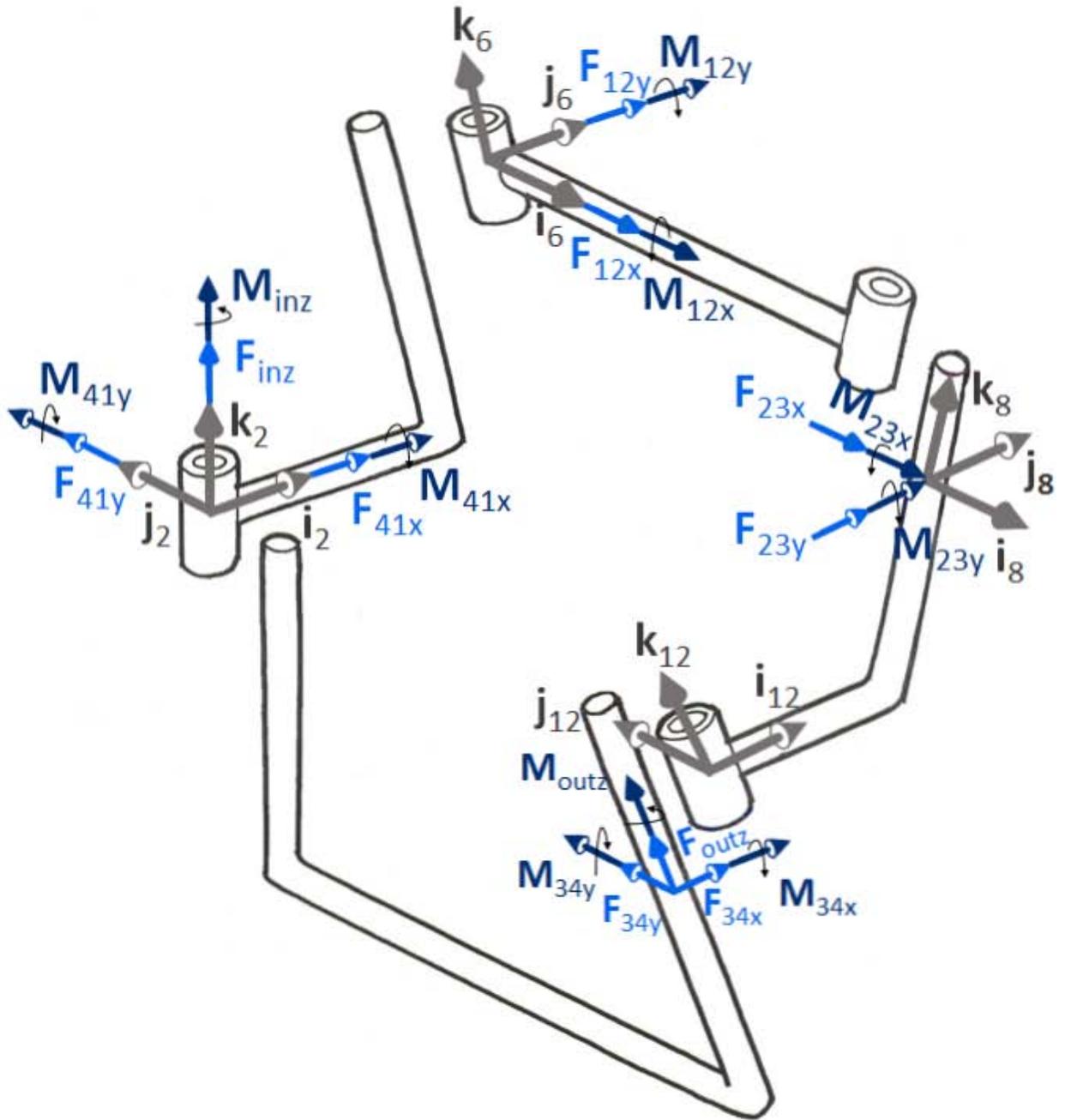


Fig.4.23. Componentes de fuerzas proyectadas a bases locales

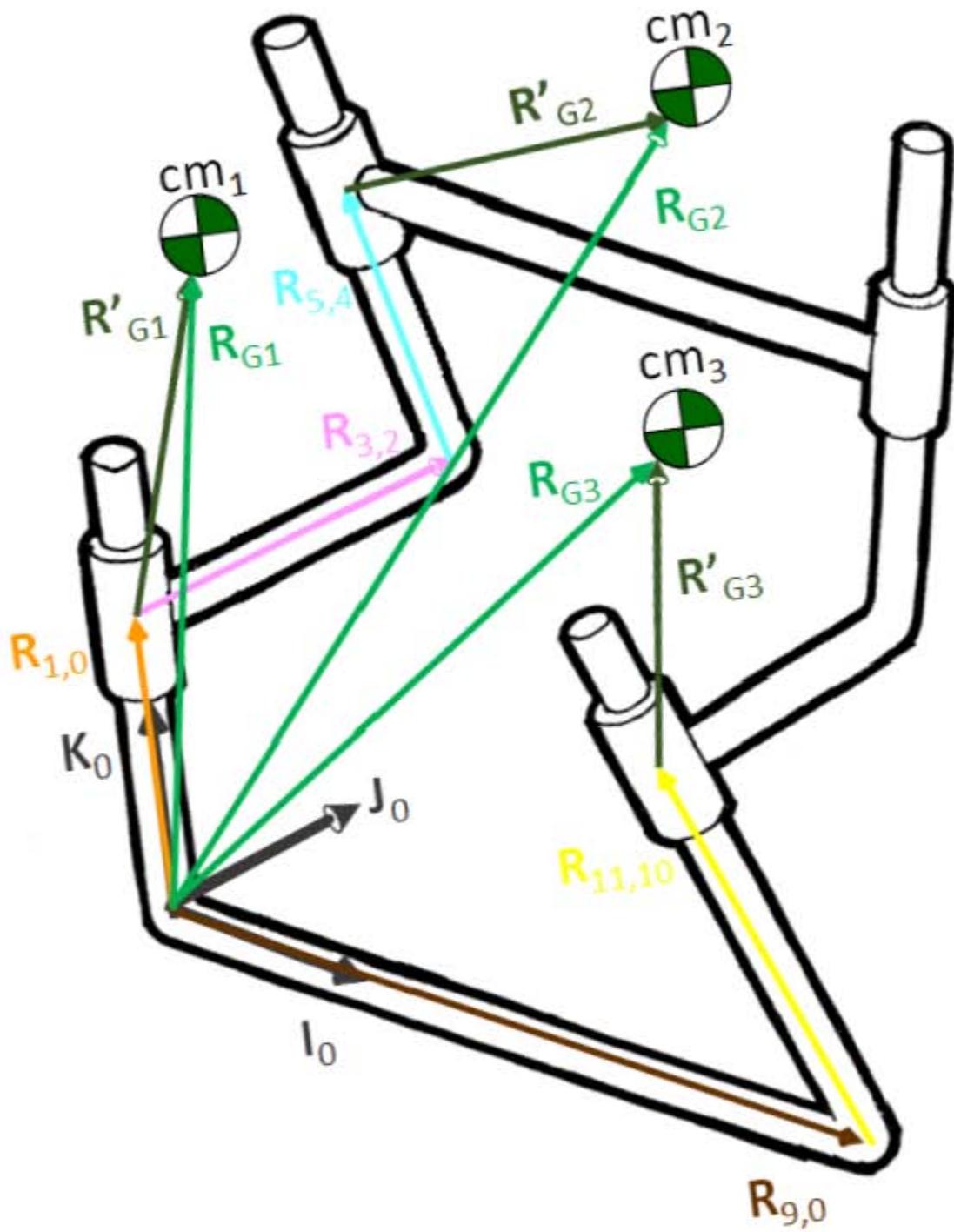


Fig.4.24.Equivalencia de los vectores de centro de masa

Para la solución de la dinámica, se propone usar la forma:

$$\mathbf{F}_{ij}^A + \mathbf{F}_{ij}^I + \mathbf{F}_{ij}^R = 0$$

Donde  $\mathbf{F}_{ij}$ ,  $i$  base donde se miden las fuerzas y momentos,  $j$  número del cuerpo.

Y teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned} \alpha &= 2\mathbf{p}'\ddot{\mathbf{p}} & \alpha &= 2\mathbf{p}'\ddot{\mathbf{p}}\mathbf{U} \\ \omega &= 2\mathbf{p}'\dot{\mathbf{p}} & \omega &= 2\mathbf{p}'\dot{\mathbf{p}}\mathbf{U} \end{aligned}$$

A continuación se presentan las ecuaciones del cuerpo 1 escritas en la base 2:

$$\mathbf{F}_{2,1}^A + \mathbf{F}_{2,1}^R + \mathbf{F}_{2,1}^I = \mathbf{0}$$

Donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{2,1}^A &= \mathbf{F}_{in} + \mathbf{Q}_0^2 \mathbf{W}_1 & \mathbf{F}_{in} &= [0, 0, F_{inz}, 0, 0, T_{inz}]^T \\ \mathbf{F}_{2,1}^R &= \mathbf{F}_{41} - \mathbf{Q}_6^2 \mathbf{F}_{12} & \mathbf{W}_1 &= [0, 0, -m_1 g, 0, 0, 0]^T \\ \mathbf{F}_{2,1}^I &= -\mathbf{Q}_0^2 \mathbf{F}_{G1} & \mathbf{F}_{41} &= [F_{41x}, F_{41y}, 0, M_{41x}, M_{41y}, 0]^T \\ & & \mathbf{F}_{12} &= [F_{12x}, F_{12y}, 0, M_{12x}, M_{12y}, 0]^T \\ & & \mathbf{F}_{G1} &= [m_1 \mathbf{A}_{G1}^T, \mathbf{M}_{G1}^T]^T \end{aligned}$$

$$\mathbf{Q}_0^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_0^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{G1} \mathbf{C}_0^2 & \mathbf{C}_0^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_6^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_6^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{62} \mathbf{C}_6^2 & \mathbf{C}_6^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_2^0 &= \mathbf{R}_z(\mathbf{p}_{21}) & \mathbf{R}_{G1} &= \mathbf{R}_{10} + \mathbf{R}'_{G1} \\ \mathbf{C}_0^2 &= (\mathbf{C}_2^0)^T = (\mathbf{R}_z(\mathbf{p}_{21}))^T & \mathbf{R}_{10} &= z_{10} \mathbf{K}_0 \\ \mathbf{C}_6^2 &= \mathbf{R}_x(\mathbf{p}_{43}) \mathbf{R}_z(\mathbf{p}_{65}) & \mathbf{R}'_{G1} &= \mathbf{C}_2^0 \mathbf{r}_{G1} \\ \mathbf{S}_{G1} &= \mathbf{S}(x_{G1}, y_{G1}, z_{G1}) & \mathbf{r}_{G1} &= [x_{G1}, y_{G1}, z_{G1}]^T \\ \mathbf{S}_{62} &= \mathbf{S}_x(x_{32}) + \mathbf{R}_x(\mathbf{p}_{43}) \mathbf{S}_z(z_{54}) \mathbf{R}_x(\mathbf{p}_{43})^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{G1} &= \mathbf{A}_{10} + \mathbf{A}'_{G1} & \omega_2 &= \omega_{21} \\
\mathbf{A}_{10} &= \ddot{z}_{10} \mathbf{K}_0 & \alpha_2 &= \dot{\omega}_{21} \\
\mathbf{A}'_{G1} &= \alpha_2 \times \mathbf{R}'_{G1} + \omega_2 \times (\omega_2 \times \mathbf{R}'_{G1}) & \omega_{21} &= 2\mathbf{p}'_{21}\dot{\mathbf{p}}_{21} \mathbf{K}_1 \\
\mathbf{M}_{G1} &= \mathbf{I}_{G1}\alpha_2 + \omega_2 \times (\mathbf{I}_{G1}\omega_2) & \dot{\omega}_{21} &= 2\mathbf{p}'_{21}\ddot{\mathbf{p}}_{21} \mathbf{K}_1 \\
& & \mathbf{K}_1 &= \mathbf{K}_0
\end{aligned}$$

Para el caso donde se usan ángulos de Euler, las siguientes variables tendrían valores de:

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_2^0 &= \mathbf{R}_z(\theta_{21}) & \omega_{21} &= \dot{\theta}_{21} \mathbf{K}_1 \\
\mathbf{C}_0^2 &= (\mathbf{C}_2^0)^T = (\mathbf{R}_z(\theta_{21}))^T & \dot{\omega}_{21} &= \ddot{\theta}_{21} \mathbf{K}_1 \\
\mathbf{C}_6^2 &= \mathbf{R}_x(\beta_{43}) \mathbf{R}_z(\theta_{65}) & \mathbf{S}_{62} &= \mathbf{S}_x(x_{32}) + \mathbf{R}_x(\beta_{43}) \mathbf{S}_z(z_{54}) \mathbf{R}_x(\beta_{43})^T
\end{aligned}$$

Para el cuerpo 2 se tiene que las ecuaciones escritas en la base 6 son:

$$\mathbf{F}_{6,2}^A + \mathbf{F}_{6,2}^R + \mathbf{F}_{6,2}^I = \mathbf{0}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{6,2}^A &= \mathbf{Q}_0^6 \mathbf{W}_2 & \mathbf{W}_2 &= [0, 0, -m_2g, 0, 0, 0]^T \\
\mathbf{F}_{6,2}^R &= \mathbf{F}_{12} - \mathbf{Q}_8^6 \mathbf{F}_{23} & \mathbf{F}_{23} &= [F_{23x}, F_{23y}, 0, M_{23x}, M_{23y}, 0]^T \\
\mathbf{F}_{6,2}^I &= -\mathbf{Q}_0^6 \mathbf{F}_{G2} & \mathbf{F}_{G2} &= [m_2 \mathbf{A}_{G2}^T, \mathbf{M}_{G2}^T]^T
\end{aligned}$$

$$\mathbf{Q}_0^6 = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_0^6 & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{G2} \mathbf{C}_0^6 & \mathbf{C}_0^6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_8^6 = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_8^6 & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{76} \mathbf{C}_8^6 & \mathbf{C}_8^6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_6^0 &= \mathbf{R}_z(\mathbf{p}_{21}) \mathbf{R}_x(\mathbf{p}_{43}) \mathbf{R}_z(\mathbf{p}_{65}) & \mathbf{R}_{G2} &= \mathbf{R}_{10} + \mathbf{R}_{32} + \mathbf{R}_{54} + \mathbf{R}'_{G2} \\
\mathbf{C}_0^6 &= (\mathbf{C}_6^0)^T & \mathbf{R}_{32} &= x_{32} \mathbf{I}_2 \\
&= \mathbf{R}_z(\mathbf{p}_{65})^T \mathbf{R}_x(\mathbf{p}_{43})^T \mathbf{R}_z(\mathbf{p}_{21})^T & \mathbf{R}_{54} &= z_{54} \mathbf{K}_4 \\
\mathbf{C}_8^6 &= \mathbf{R}_x(\mathbf{p}_{87}) & \mathbf{R}'_{G2} &= \mathbf{C}_6^0 \mathbf{r}_{G2} \\
\mathbf{S}_{G2} &= \mathbf{S}(x_{G2}, y_{G2}, z_{G2}) & \mathbf{r}_{G2} &= [x_{G2}, y_{G2}, z_{G2}]^T \\
\mathbf{S}_{76} &= \mathbf{S}_x(x_{76})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{G2} &= \mathbf{A}_{10} + \mathbf{A}_{32} + \mathbf{A}_{54} + \mathbf{A}'_{G2} & \mathbf{M}_{G2} &= \mathbf{I}_{G2}\alpha_6 + \omega_6 \times (\mathbf{I}_{G2}\omega_6) \\
\mathbf{A}_{32} &= \alpha_2 \times \mathbf{R}_{32} + \omega_2 \times (\omega_2 \times \mathbf{R}_{32}) & \omega_4 &= \omega_{21} + \omega_{43} \\
\mathbf{A}_{54} &= \ddot{z}_{54} \mathbf{K}_4 + 2 \omega_4 \times (\dot{z}_{54} \mathbf{K}_4) & \omega_6 &= \omega_{21} + \omega_{43} + \omega_{65} \\
&+ \alpha_4 \times \mathbf{R}_{54} + \omega_4 \times (\omega_4 \times \mathbf{R}_{54}) & \alpha_4 &= \dot{\omega}_{21} + \dot{\omega}_{43} \\
\mathbf{A}'_{G2} &= \alpha_6 \times \mathbf{R}'_{G2} + \omega_6 \times (\omega_6 \times \mathbf{R}'_{G2}) & \alpha_6 &= \dot{\omega}_{21} + \dot{\omega}_{43} + \dot{\omega}_{65} \\
\\ 
\mathbf{I}_2 &= \mathbf{C}_2^0 \mathbf{i}_2 & \omega_{43} &= \mathbf{0} \\
\mathbf{K}_4 &= \mathbf{C}_4^0 \mathbf{k}_4 & \omega_{65} &= 2\mathbf{p}'_{65}\dot{\mathbf{p}}_{65} \mathbf{K}_5 \\
\mathbf{C}_4^0 &= \mathbf{R}_z(\mathbf{p}_{21}) \mathbf{R}_x(\mathbf{p}_{43}) & \dot{\omega}_{43} &= \mathbf{0} \\
\mathbf{K}_5 &= \mathbf{C}_5^0 \mathbf{k}_5 & \dot{\omega}_{65} &= 2\mathbf{p}'_{65}\ddot{\mathbf{p}}_{65} \mathbf{K}_5 + \omega_{21} \times \omega_{65} \\
\mathbf{C}_5^0 &= \mathbf{R}_z(\mathbf{p}_{21}) \mathbf{R}_x(\mathbf{p}_{43})
\end{aligned}$$

Para el caso donde se usan ángulos de Euler, las siguientes variables tendrían valores de:

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_6^0 &= \mathbf{R}_z(\theta_{21}) \mathbf{R}_x(\beta_{43}) \mathbf{R}_z(\theta_{65}) & \mathbf{C}_8^6 &= \mathbf{R}_x(\mathbf{p}_{87}) \\
\mathbf{C}_0^6 &= (\mathbf{C}_6^0)^T & \mathbf{C}_4^0 &= \mathbf{R}_z(\theta_{21}) \mathbf{R}_x(\beta_{43}) \\
&= \mathbf{R}_z(\theta_{65})^T \mathbf{R}_x(\beta_{43})^T \mathbf{R}_z(\theta_{21})^T & \mathbf{C}_5^0 &= \mathbf{R}_z(\theta_{21}) \mathbf{R}_x(\beta_{43}) \\
\omega_{65} &= \dot{\theta}_{65} \mathbf{K}_5 & \dot{\omega}_{65} &= \ddot{\theta}_{65} \mathbf{K}_5 + \omega_{21} \times \omega_{65}
\end{aligned}$$

Y para el cuerpo 3, las ecuaciones escritas en la base 12 son:

$$\mathbf{F}_{12,3}^A + \mathbf{F}_{12,3}^R + \mathbf{F}_{12,3}^I = \mathbf{0}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{12,3}^A &= -\mathbf{F}_{out} + \mathbf{Q}_0^{12} \mathbf{W}_3 & \mathbf{F}_{out} &= [0, 0, F_{outz}, 0, 0, T_{outz}]^T \\
\mathbf{F}_{12,3}^R &= -\mathbf{F}_{34} - \mathbf{Q}_{16}^{12} \mathbf{F}_{23} & \mathbf{W}_3 &= [0, 0, -m_3g, 0, 0, 0]^T \\
\mathbf{F}_{12,3}^I &= -\mathbf{Q}_0^{12} \mathbf{F}_{G3} & \mathbf{F}_{34} &= [F_{34x}, F_{34y}, 0, M_{34x}, M_{34y}, 0]^T \\
\text{donde base 8 igual a 16} & & \mathbf{F}_{G3} &= [m_2 \mathbf{A}_{G3}^T, \mathbf{M}_{G3}^T]^T
\end{aligned}$$

$$\mathbf{Q}_0^{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_0^{12} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{G3} \mathbf{C}_0^{12} & \mathbf{C}_0^{12} \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_{16}^{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{16}^{12} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{16,12} \mathbf{C}_{16}^{12} & \mathbf{C}_{16}^{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_{10}^0 &= \mathbf{R}_x(\mathbf{p}_{10,9}) & \mathbf{R}_{G3} &= \mathbf{R}_{90} + \mathbf{R}_{11,10} + \mathbf{R}'_{G3} \\
\mathbf{C}_{12}^0 &= \mathbf{R}_x(\mathbf{p}_{10,9}) \mathbf{R}_z(\mathbf{p}_{12,11}) & \mathbf{R}_{90} &= x_{90} \mathbf{I}_0 \\
\mathbf{C}_0^{12} &= (\mathbf{C}_{12}^0)^T = \mathbf{R}_z(\mathbf{p}_{12,11})^T \mathbf{R}_x(\mathbf{p}_{10,9})^T & \mathbf{R}_{11,10} &= z_{11,10} \mathbf{K}_{10} \\
\mathbf{C}_{16}^{12} &= \mathbf{R}_x(\mathbf{p}_{14,13}) \mathbf{R}_z(\mathbf{p}_{16,15}) & \mathbf{R}'_{G3} &= \mathbf{C}_{12}^0 \mathbf{r}_{G3} \\
\mathbf{S}_{G3} &= \mathbf{S}(x_{G3}, y_{G3}, z_{G3}) & \mathbf{r}_{G3} &= [x_{G3}, y_{G3}, z_{G3}]^T \\
\mathbf{S}_{16,12} &= \mathbf{S}_x(x_{13,12}) + \mathbf{R}_x(\mathbf{p}_{14,13}) \mathbf{S}_z(z_{15,14}) \mathbf{R}_x(\mathbf{p}_{14,13})^T & \mathbf{K}_{10} &= \mathbf{C}_{10}^0 \mathbf{k}_{10} \\
\\
\mathbf{A}_{G3} &= \mathbf{A}_{90} + \mathbf{A}_{11,10} + \mathbf{A}'_{G3} & \omega_{12} &= \omega_{12,11} \\
\mathbf{A}_{90} &= \mathbf{0} & \alpha_{12} &= \dot{\omega}_{12,11} \\
\mathbf{A}_{11,10} &= \ddot{z}_{11,10} \mathbf{K}_{10} & \omega_{12,11} &= 2\mathbf{p}'_{12,11} \dot{\mathbf{p}}_{12,11} \mathbf{K}_{11} \\
\mathbf{A}'_{G3} &= \alpha_{12} \times \mathbf{R}'_{G3} + \omega_{12} \times (\omega_{12} \times \mathbf{R}'_{G3}) & \dot{\omega}_{12,11} &= 2\mathbf{p}'_{12,11} \ddot{\mathbf{p}}_{12,11} \mathbf{K}_{11} \\
\mathbf{M}_{G3} &= \mathbf{I}_{G3} \alpha_{12} + \omega_{12} \times (\mathbf{I}_{G3} \omega_{12}) & \mathbf{K}_{11} &= \mathbf{K}_{10}
\end{aligned}$$

Para el caso donde se usan ángulos de Euler, las siguientes variables tendrían valores de:

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_{10}^0 &= \mathbf{R}_x(\beta_{10,9}) & \mathbf{C}_0^{12} &= (\mathbf{C}_{12}^0)^T = \mathbf{R}_z(\theta_{12,11})^T \mathbf{R}_x(\beta_{10,9})^T \\
\mathbf{C}_{12}^0 &= \mathbf{R}_x(\beta_{10,9}) \mathbf{R}_z(\theta_{12,11}) & \mathbf{C}_{16}^{12} &= \mathbf{R}_x(\beta_{14,13}) \mathbf{R}_z(\theta_{16,15}) \\
\omega_{12,11} &= \dot{\theta}_{12,11} \mathbf{K}_{11} & \dot{\omega}_{12,11} &= \ddot{\theta}_{12,11} \mathbf{K}_{11}
\end{aligned}$$

Los datos utilizados para las masas, tensores de inercias y vectores de centro de masa son:

<i>Cuerpo</i>	<i>Masa</i> $\times 10^{-3}(lb)$	$(I_G, I_G, I_G) \times 10^{-3}$	$(x_G, y_G, z_G)$
1	4.42	$\begin{bmatrix} 17.4289 & 0.733941 & -1.27097 \\ 0.733941 & 13.9167 & -10.8679 \\ -1.27097 & -10.8679 & 4.33752 \end{bmatrix}$	(0.405,0.41,-0.71)
2	4.24	$\begin{bmatrix} 0.442 & 0 & 0 \\ 0 & -4.12 & 0 \\ 0 & 0 & -3.86 \end{bmatrix}$	(-2,0,0)
3	3.72	$\begin{bmatrix} -21.8887 & 13.3588 & 14.2868 \\ 13.3588 & -20.1016 & 12.3136 \\ 14.2868 & 12.3136 & -20.4572 \end{bmatrix}$	(-2,-1.78,-1.78)

Donde  $g = 32.2 \text{ ft/s}^2$ .

A continuación se muestran las gráficas (figuras 4.25 a 4.34) de los resultados obtenidos para una revolución completa de  $\theta_{21}$  con  $\dot{\theta}_{21} = 100 \text{ rad/s}$

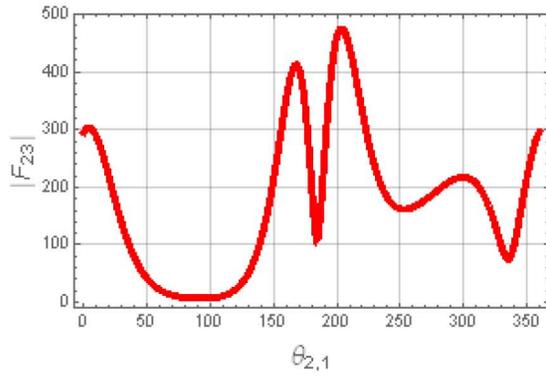


Fig.4.25

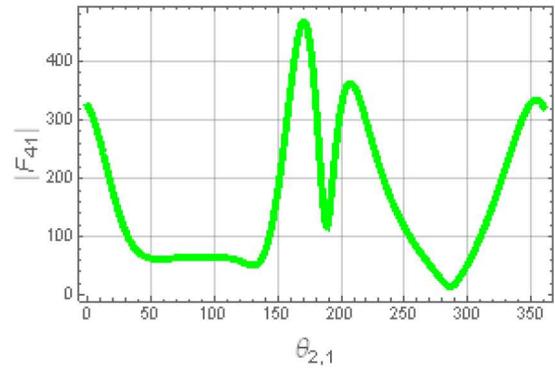


Fig.4.26

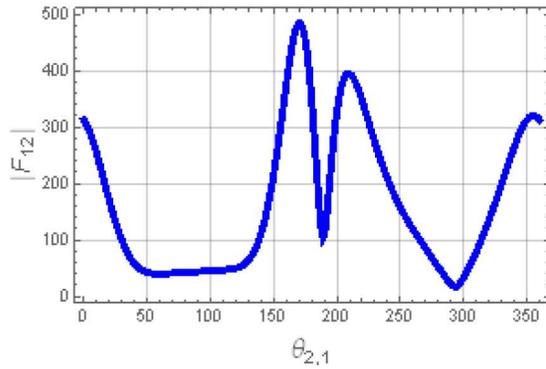


Fig.4.27

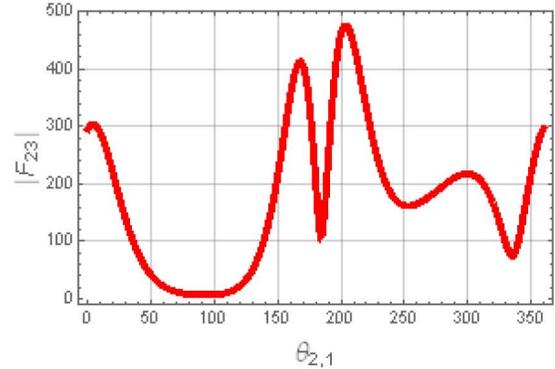


Fig.4.28

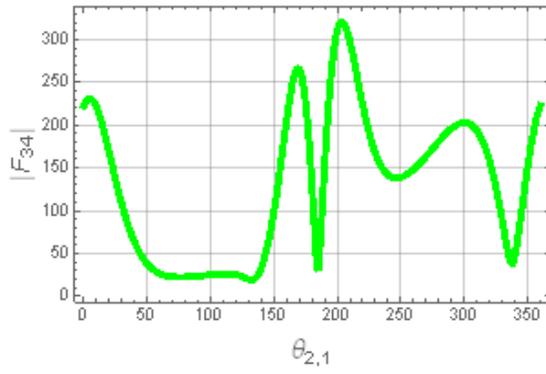


Fig.4.29

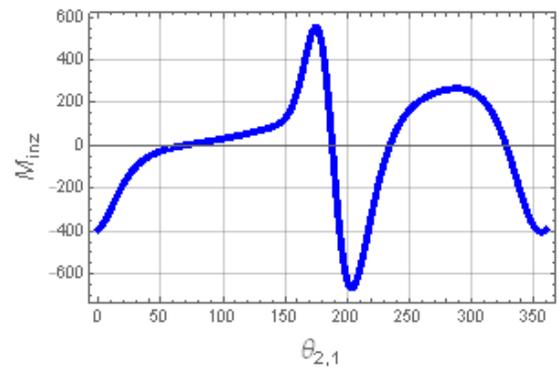


Fig.4.30

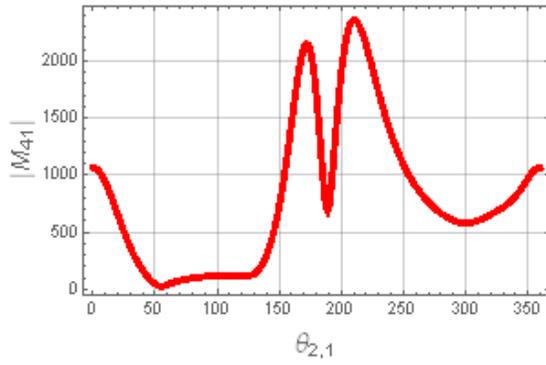


Fig.4.31

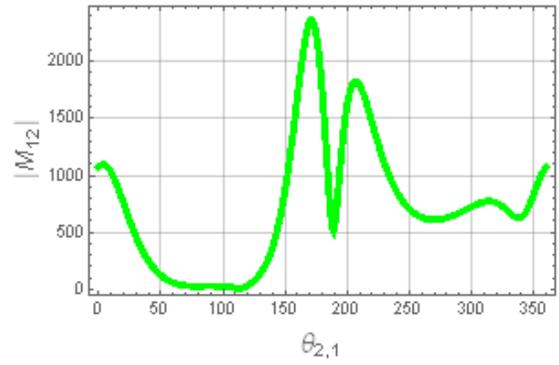


Fig.4.32

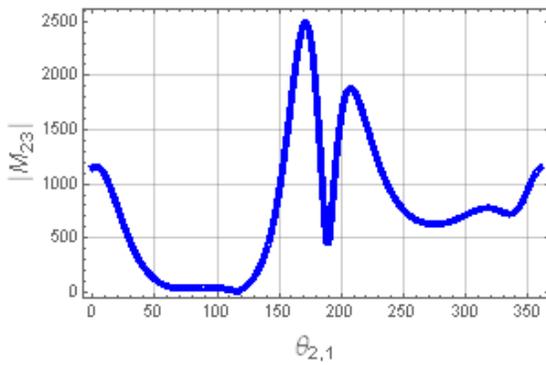


Fig.4.33

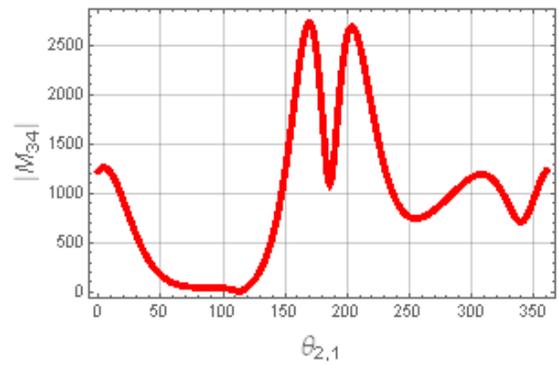


Fig.4.34

## 4.2. Casos de estudio 2: Mecanismo CSSP

### 4.2.1. Análisis cinemático

Dado el mecanismo de la figura 4.35, se proponen el lazo cinemático que se ilustra en las figuras 4.36 y 4.37:

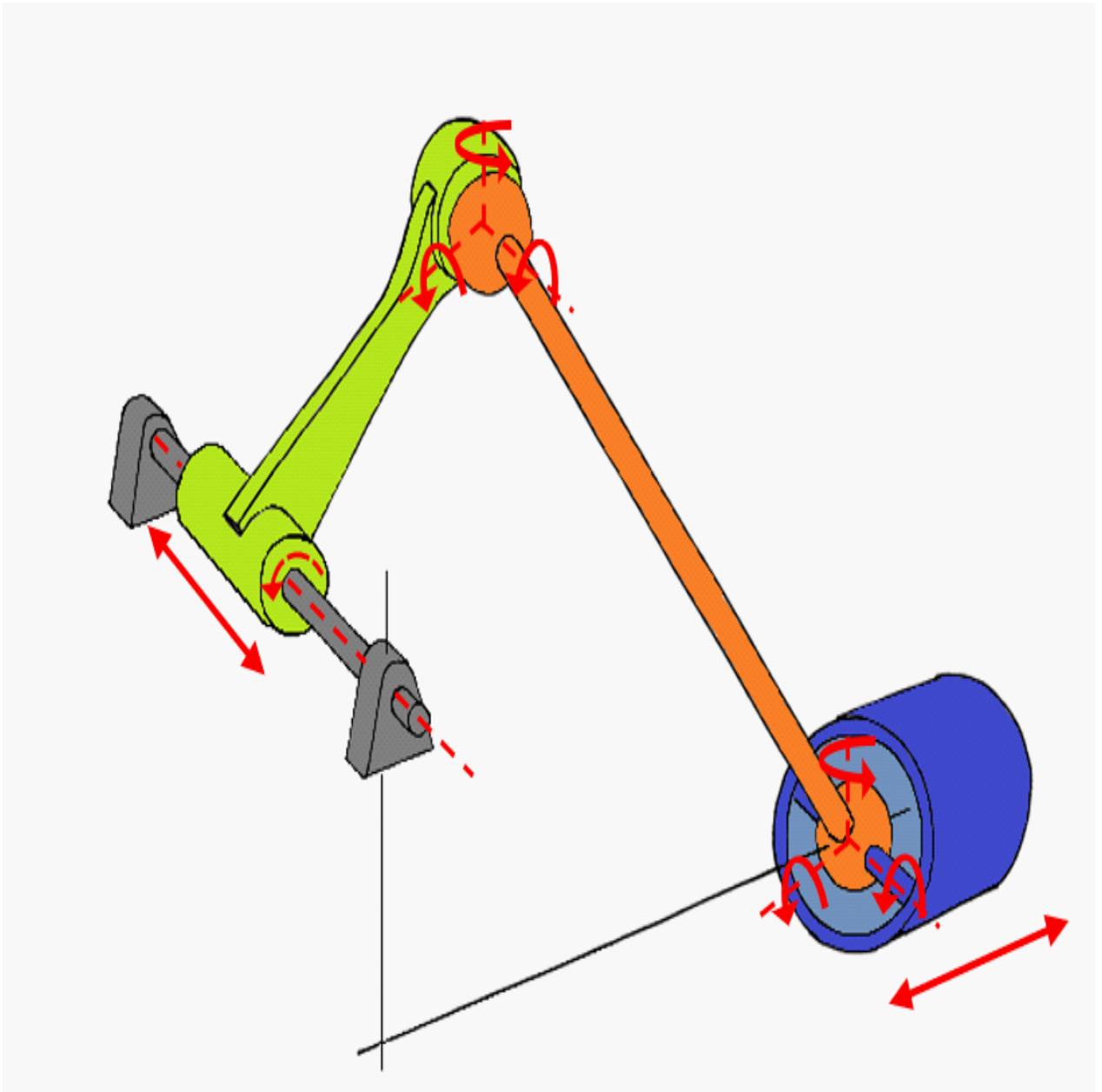


Fig.4.35.Movimientos de las juntas del mecanismo CSSP

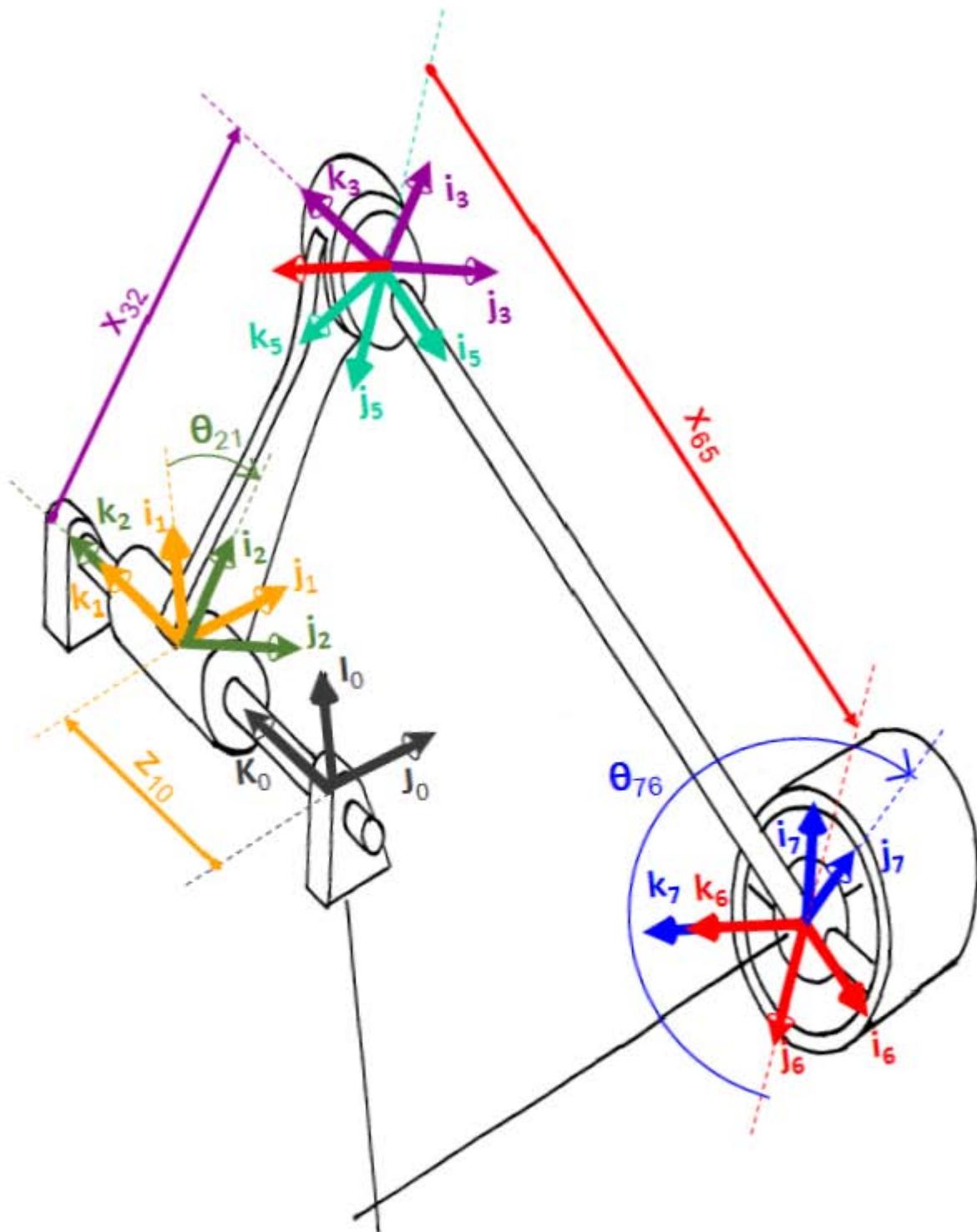


Fig.4.36.-Primera parte del lazo cinemático, base 0 hasta base 7

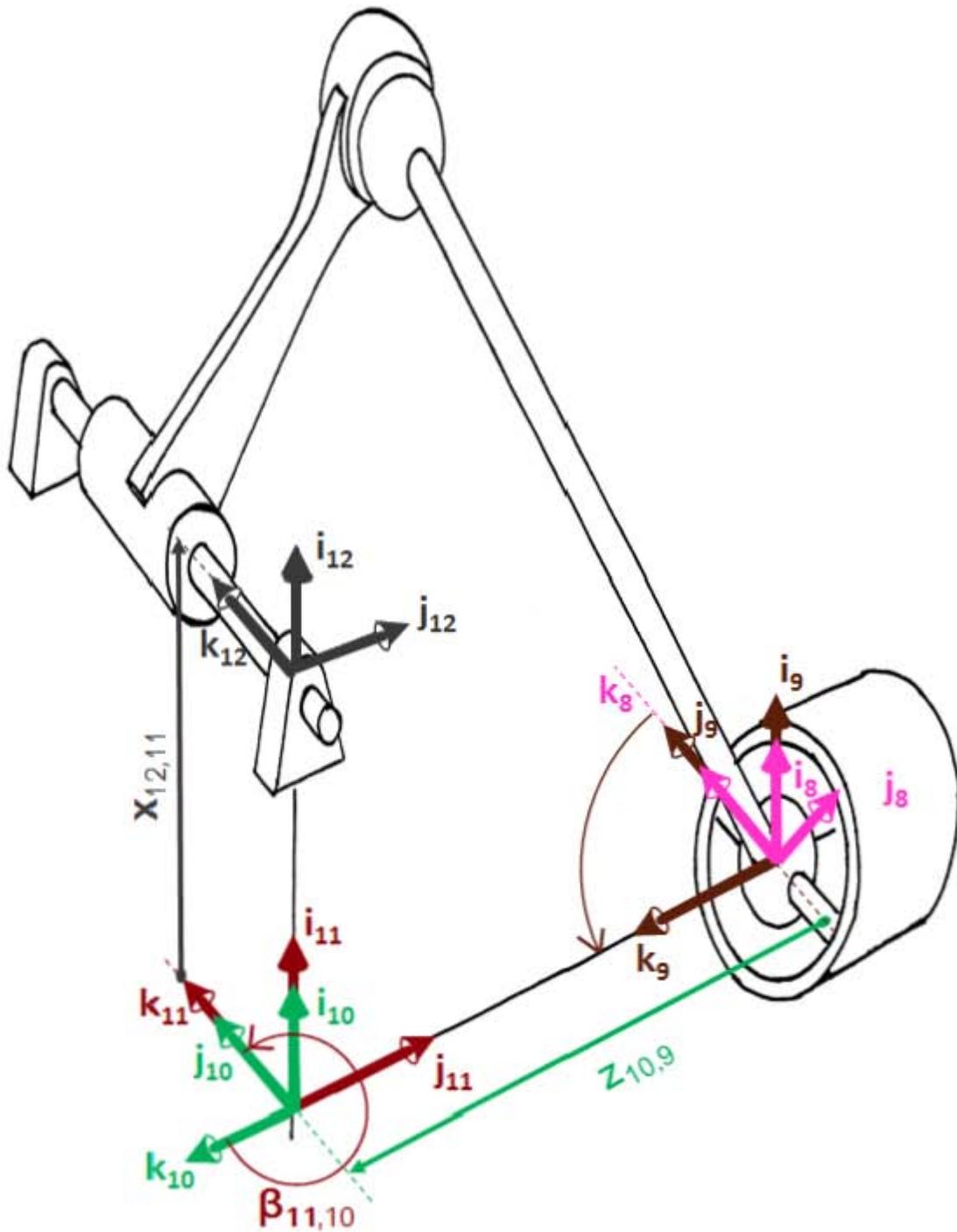


Fig.4.37.-Segunda parte del lazo cinemático, base 8 hasta base 12

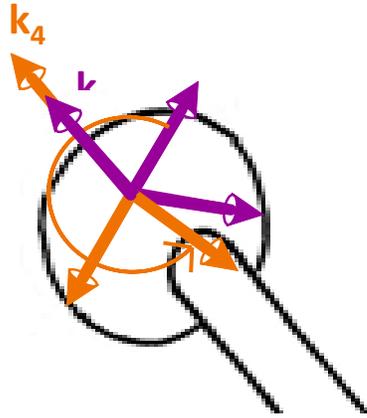


Fig.4.38.-Junta esférica 1, rotación entre base 3 y base 4

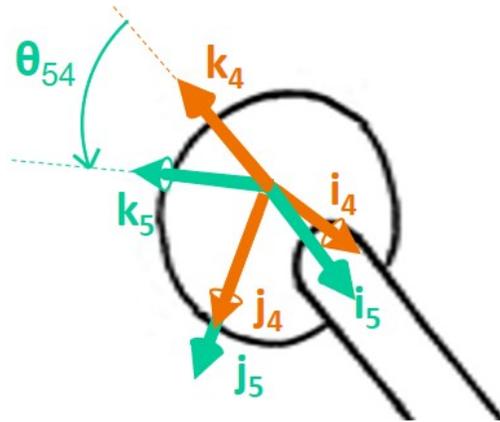


Fig.4.39.-Junta esférica 1, rotación entre base 4 y base 5

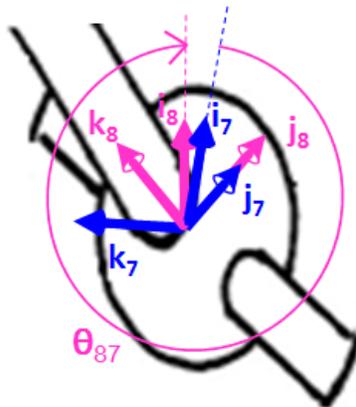


Fig.4.40-Junta esférica 2, rotación entre base 7 y base 8

Del cual se obtiene la siguiente ecuación de posición

$$\mathbf{T}_2^0 \mathbf{T}_5^2 \mathbf{T}_9^5 \mathbf{T}_{12}^9 = \mathbf{I}_{4 \times 4} \quad (4.13)$$

la cual esta igualada a la matriz identidad porque la base local 12 coincide en posición y orientación con la base inicial del lazo cinemático, en este caso la base 0 (base inercial fija), y donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_2^0 &= \mathbf{T}_{z3}(z_{10}) \mathbf{T}_{z6}(\mathbf{p}_{21}) & \mathbf{T}_9^5 &= \mathbf{T}_{z1}(x_{65}) \mathbf{T}_{z6}(\mathbf{p}_{76}) \mathbf{T}_{z5}(\mathbf{p}_{87}) \mathbf{T}_{z4}(\mathbf{p}_{98}) \\ \mathbf{T}_5^2 &= \mathbf{T}_{z1}(x_{32}) \mathbf{T}_{z6}(\mathbf{p}_{43}) \mathbf{T}_{z5}(\mathbf{p}_{54}) & \mathbf{T}_{12}^9 &= \mathbf{T}_{z3}(z_{109}) \mathbf{T}_{z4}(\mathbf{p}_{1110}) \mathbf{T}_{z1}(x_{1211}) \\ \mathbf{p}_{21} &= [c(\frac{\theta_{21}}{2}), 0, 0, s(\frac{\theta_{21}}{2})] & \mathbf{p}_{87} &= [p_{870}, 0, p_{872}, 0] \\ \mathbf{p}_{43} &= [p_{430}, 0, 0, p_{433}] & \mathbf{p}_{98} &= [p_{980}, p_{981}, 0, 0] \\ \mathbf{p}_{54} &= [p_{540}, 0, p_{542}, 0] & \mathbf{p}_{1110} &= [\cos(\frac{\beta_{1110}}{2}), \sin(\frac{\beta_{1110}}{2}), 0, 0] \\ \mathbf{p}_{76} &= [p_{760}, 0, 0, p_{763}] \end{aligned}$$

Y adicionalmente se debe de considerar las restricciones:

$$\mathbf{p}_{43}^T \mathbf{p}_{43} - 1 = 0 \quad (4.14)$$

$$\mathbf{p}_{54}^T \mathbf{p}_{54} - 1 = 0 \quad (4.15)$$

$$\mathbf{p}_{76}^T \mathbf{p}_{76} - 1 = 0 \quad (4.16)$$

$$\mathbf{p}_{87}^T \mathbf{p}_{87} - 1 = 0 \quad (4.17)$$

$$\mathbf{p}_{98}^T \mathbf{p}_{98} - 1 = 0 \quad (4.18)$$

Dados:

$$z_{10} = 0 \text{ in} \quad 0^\circ \leq \theta_{21} \leq 360^\circ$$

Además, los valores asumidos para las longitudes constantes en el mecanismo fueron:

$$x_{32} = 1.75 \text{ in} \quad x_{65} = 6.11 \text{ in} \quad x_{1211} = 0 \text{ mm}$$

mientras que el valor asumido para el angulo constante fue:

$$\beta_{1110} = 250^\circ$$

La posición de las incógnitas en un tiempo de simulación de 5 segundos, y con valores iniciales de

$$\begin{aligned} p_{430} &= 0.590273 & p_{540} &= -18.8117 & p_{760} &= 250.397 \\ p_{433} &= 110.618 & p_{542} &= -18.8117 & p_{763} &= 250.397 \\ p_{870} &= -6.52012 & p_{980} &= 0.696475 & z_{109} &= 92.3158 \text{ mm} \\ p_{872} &= -6.52012 & p_{981} &= 0.717581 \end{aligned}$$

se pueden observar en las gráficas 4.41 a 4.46

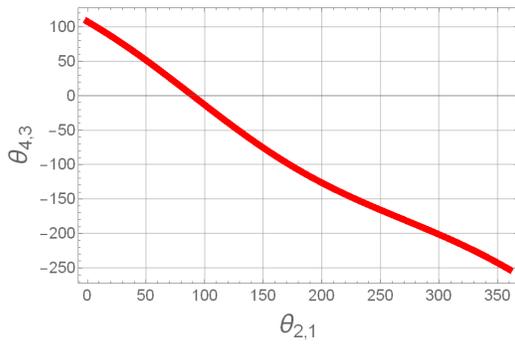


Fig.4.41

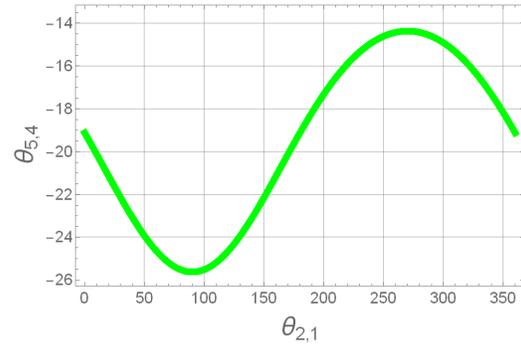


Fig.4.42

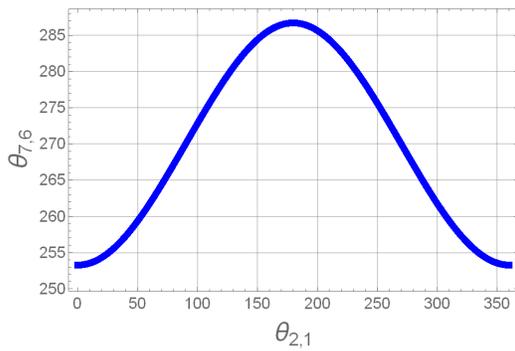


Fig.4.43

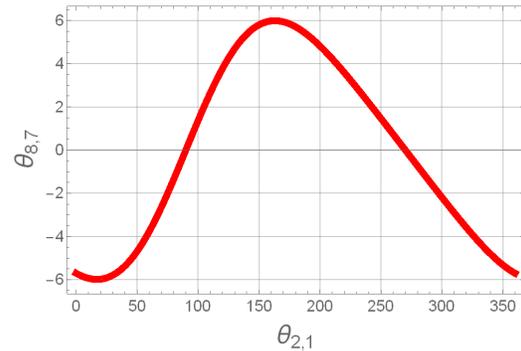


Fig.4.44

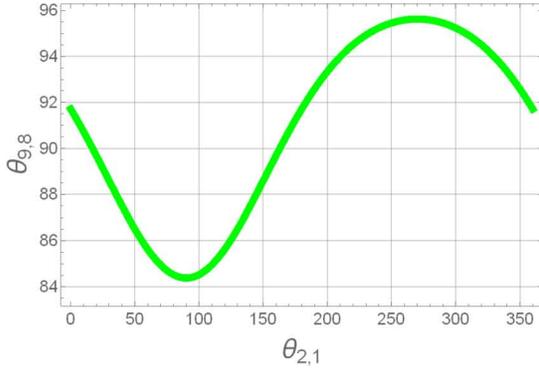


Fig.4.45

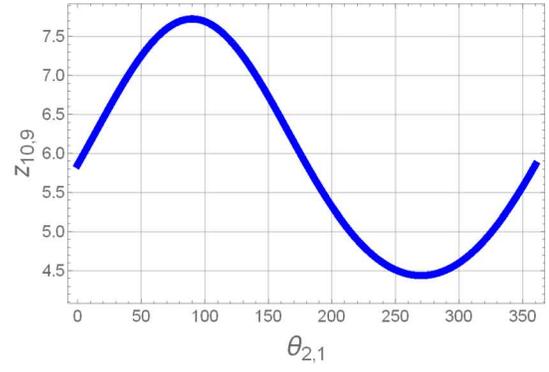


Fig.4.46

La ecuación de velocidad se obtienen derivando la ecuación 4.13 y las restricciones 4.14, 4.15, 4.16, 4.17 y 4.18:

$$\dot{\mathbf{T}}_2^0 \mathbf{T}_5^2 \mathbf{T}_9^5 \mathbf{T}_{12}^9 + \mathbf{T}_2^0 \dot{\mathbf{T}}_5^2 \mathbf{T}_9^5 \mathbf{T}_{12}^9 + \mathbf{T}_2^0 \mathbf{T}_5^2 \dot{\mathbf{T}}_9^5 \mathbf{T}_{12}^9 + \mathbf{T}_2^0 \mathbf{T}_5^2 \mathbf{T}_9^5 \dot{\mathbf{T}}_{12}^9 = \mathbf{0}_{4 \times 4} \quad (4.19)$$

y

$$\mathbf{p}_{43}^T \dot{\mathbf{p}}_{43} = 0 \quad (4.20)$$

$$\mathbf{p}_{54}^T \dot{\mathbf{p}}_{54} = 0 \quad (4.21)$$

$$\mathbf{p}_{76}^T \dot{\mathbf{p}}_{76} = 0 \quad (4.22)$$

$$\mathbf{p}_{87}^T \dot{\mathbf{p}}_{87} = 0 \quad (4.23)$$

$$\mathbf{p}_{98}^T \dot{\mathbf{p}}_{98} = 0 \quad (4.24)$$

donde

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{T}}_2^0 &= \dot{\mathbf{T}}_{z3}(z_{10}, \dot{z}_{10})\mathbf{T}_{z6}(\mathbf{p}_{21}) + \mathbf{T}_{z3}(z_{10})\dot{\mathbf{T}}_{z6}(\mathbf{p}_{21}, \dot{\mathbf{p}}_{21}) \\
\dot{\mathbf{T}}_5^2 &= \mathbf{T}_{z1}(x_{32})(\dot{\mathbf{T}}_{z6}(\mathbf{p}_{43}, \dot{\mathbf{p}}_{43})\mathbf{T}_{z5}(\mathbf{p}_{54}) + \mathbf{T}_{z6}(\mathbf{p}_{43})\dot{\mathbf{T}}_{z5}(\mathbf{p}_{54}, \dot{\mathbf{p}}_{54})) \\
\dot{\mathbf{T}}_9^5 &= \mathbf{T}_{z1}(x_{65})(\dot{\mathbf{T}}_{z6}(\mathbf{p}_{76}, \dot{\mathbf{p}}_{76})\mathbf{T}_{z5}(\mathbf{p}_{87})\mathbf{T}_{z4}(\mathbf{p}_{98}) + \mathbf{T}_{z6}(\mathbf{p}_{76})\dot{\mathbf{T}}_{z5}(\mathbf{p}_{87}, \dot{\mathbf{p}}_{87})\mathbf{T}_{z4}(\mathbf{p}_{98}) \\
&\quad + \mathbf{T}_{z6}(\mathbf{p}_{76})\mathbf{T}_{z5}(\mathbf{p}_{87})\dot{\mathbf{T}}_{z4}(\mathbf{p}_{98}, \dot{\mathbf{p}}_{98})) \\
\dot{\mathbf{T}}_{12}^9 &= \dot{\mathbf{T}}_{z3}(z_{109}, \dot{z}_{109})\mathbf{T}_{z4}(\mathbf{p}_{1110})\mathbf{T}_{z1}(x_{1211})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{p}}_{21} &= \left[ \frac{1}{2}[-s(\frac{\theta_{21}}{2})\dot{\theta}_{21}, 0, 0, c(\frac{\theta_{21}}{2})\dot{\theta}_{21}] \right] & \dot{\mathbf{p}}_{54} &= [\dot{p}_{540}, 0, \dot{p}_{542}, 0] & \dot{\mathbf{p}}_{87} &= [\dot{p}_{870}, 0, \dot{p}_{872}, 0] \\
\dot{\mathbf{p}}_{43} &= [\dot{p}_{430}, 0, 0, \dot{p}_{433}] & \dot{\mathbf{p}}_{76} &= [\dot{p}_{760}, 0, 0, \dot{p}_{763}] & \dot{\mathbf{p}}_{98} &= [\dot{p}_{980}, \dot{p}_{981}, 0, 0]
\end{aligned}$$

Dados:

$$\dot{z}_{10} = 0 \quad \dot{\theta}_{21} = 2\pi$$

Y tomando en cuenta que las derivadas de las matrices de transformación con valores constantes dan como resultado una matriz llena de ceros.

Resolviendo para una vuelta completa de  $\theta_{21}$  con 360 muestras y con valores iniciales de

$$\begin{aligned}
\dot{p}_{430} &= 2.50864 & \dot{p}_{540} &= -0.0508587 & \dot{p}_{760} &= 0.00237665 \\
\dot{p}_{433} &= -1.83446 & \dot{p}_{542} &= -0.301837 & \dot{p}_{763} &= 0.00176735 \\
\dot{p}_{870} &= -0.00490877 & \dot{p}_{980} &= 0.209098 & \dot{z}_{109} &= 10.3325 \\
\dot{p}_{872} &= -0.0985821 & \dot{p}_{981} &= 0.202948 & &
\end{aligned}$$

se obtuvieron las siguientes gráficas (figuras 4.47 a Fig.4.52) para la velocidad:

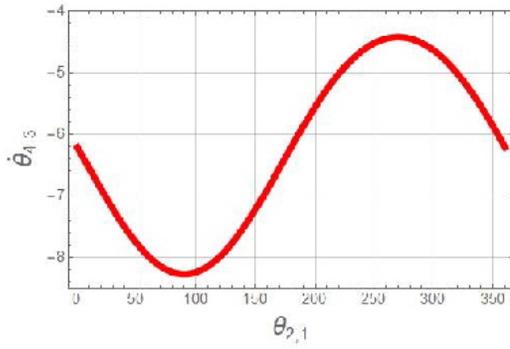


Fig.4.47

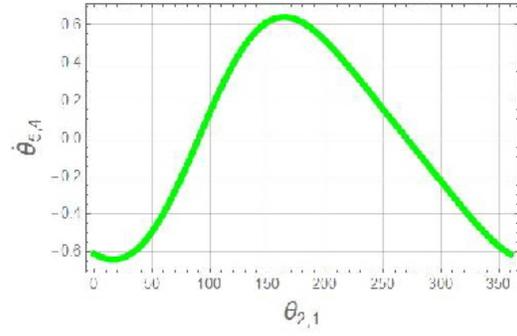


Fig.4.48

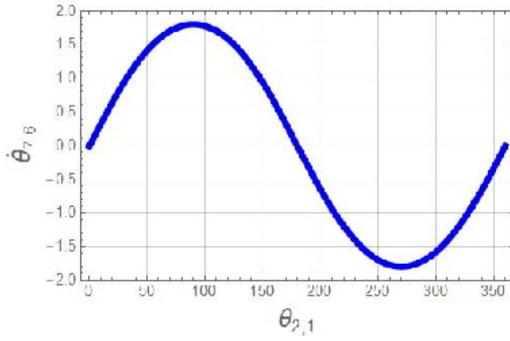


Fig.4.49

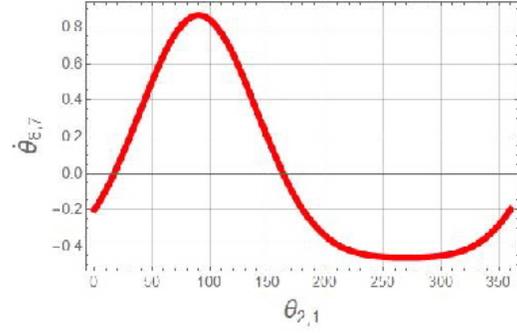


Fig.4.50

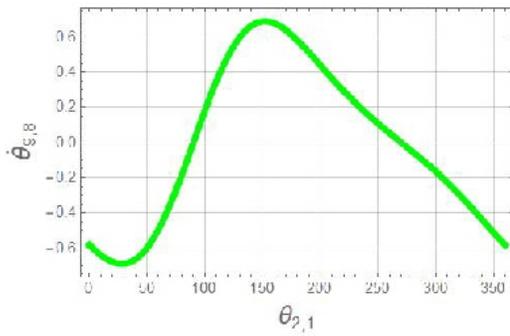


Fig.4.51

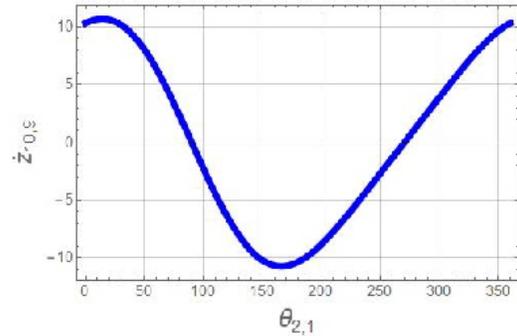


Fig.4.52

De manera similar, la ecuación de aceleración se obtiene derivando la ecuación de velocidad ec.(4.19) y las restricciones (4.20), (4.21), (4.22), (4.23) y (4.24):

$$\begin{aligned}
& \ddot{\mathbf{T}}_2^0 \mathbf{T}_5^2 \mathbf{T}_9^5 \mathbf{T}_{12}^9 + \mathbf{T}_2^0 \ddot{\mathbf{T}}_5^2 \mathbf{T}_9^5 \mathbf{T}_{12}^9 + \mathbf{T}_2^0 \mathbf{T}_5^2 \ddot{\mathbf{T}}_9^5 \mathbf{T}_{12}^9 + \mathbf{T}_2^0 \mathbf{T}_5^2 \mathbf{T}_9^5 \ddot{\mathbf{T}}_{12}^9 + 2(\dot{\mathbf{T}}_2^0 \dot{\mathbf{T}}_5^2 \mathbf{T}_9^5 \mathbf{T}_{12}^9 \\
& + \dot{\mathbf{T}}_2^0 \mathbf{T}_5^2 \dot{\mathbf{T}}_9^5 \mathbf{T}_{12}^9 + \dot{\mathbf{T}}_2^0 \mathbf{T}_5^2 \mathbf{T}_9^5 \dot{\mathbf{T}}_{12}^9 + \mathbf{T}_2^0 \dot{\mathbf{T}}_5^2 \dot{\mathbf{T}}_9^5 \mathbf{T}_{12}^9 + \mathbf{T}_2^0 \dot{\mathbf{T}}_5^2 \mathbf{T}_9^5 \dot{\mathbf{T}}_{12}^9 + \mathbf{T}_2^0 \mathbf{T}_5^2 \dot{\mathbf{T}}_9^5 \dot{\mathbf{T}}_{12}^9) \\
& = \mathbf{0}_{4 \times 4}
\end{aligned} \tag{4.25}$$

y

$$\dot{\mathbf{p}}_{43}^T \dot{\mathbf{p}}_{43} + \mathbf{p}_{43}^T \ddot{\mathbf{p}}_{43} = 0 \tag{4.26}$$

$$\dot{\mathbf{p}}_{54}^T \dot{\mathbf{p}}_{54} + \mathbf{p}_{54}^T \ddot{\mathbf{p}}_{54} = 0 \tag{4.27}$$

$$\dot{\mathbf{p}}_{76}^T \dot{\mathbf{p}}_{76} + \mathbf{p}_{76}^T \ddot{\mathbf{p}}_{76} = 0 \tag{4.28}$$

$$\dot{\mathbf{p}}_{87}^T \dot{\mathbf{p}}_{87} + \mathbf{p}_{87}^T \ddot{\mathbf{p}}_{87} = 0 \tag{4.29}$$

$$\dot{\mathbf{p}}_{98}^T \dot{\mathbf{p}}_{98} + \mathbf{p}_{98}^T \ddot{\mathbf{p}}_{98} = 0 \tag{4.30}$$

donde

$$\ddot{\mathbf{T}}_2^0 = \ddot{\mathbf{T}}_{z3}(z_{10}, \dot{z}_{10}, \ddot{z}_{10}) \mathbf{T}_{z6}(\mathbf{p}_{21}) + 2\dot{\mathbf{T}}_{z3}(z_{10}, \dot{z}_{10}) \dot{\mathbf{T}}_{z6}(\mathbf{p}_{21}, \dot{\mathbf{p}}_{21}) + \mathbf{T}_{z3}(z_{10}) \ddot{\mathbf{T}}_{z6}(\mathbf{p}_{21}, \dot{\mathbf{p}}_{21}, \ddot{\mathbf{p}}_{21})$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{T}}_5^2 &= \mathbf{T}_{z1}(x_{32}) (\ddot{\mathbf{T}}_{z6}(\mathbf{p}_{43}, \dot{\mathbf{p}}_{43}, \ddot{\mathbf{p}}_{43}) \mathbf{T}_{z5}(\mathbf{p}_{54}) + 2\dot{\mathbf{T}}_{z6}(\mathbf{p}_{43}, \dot{\mathbf{p}}_{43}) \dot{\mathbf{T}}_{z5}(\mathbf{p}_{54}, \dot{\mathbf{p}}_{54}) \\
&+ \mathbf{T}_{z6}(\mathbf{p}_{43}) \ddot{\mathbf{T}}_{z5}(\mathbf{p}_{54}, \dot{\mathbf{p}}_{54}, \ddot{\mathbf{p}}_{54}))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{T}}_9^5 &= \mathbf{T}_{z1}(x_{65}) (\ddot{\mathbf{T}}_{z6}(\mathbf{p}_{76}, \dot{\mathbf{p}}_{76}, \ddot{\mathbf{p}}_{76}) \mathbf{T}_{z5}(\mathbf{p}_{87}) \mathbf{T}_{z4}(\mathbf{p}_{98}) + \mathbf{T}_{z6}(\mathbf{p}_{76}) \ddot{\mathbf{T}}_{z5}(\mathbf{p}_{87}, \dot{\mathbf{p}}_{87}, \ddot{\mathbf{p}}_{87}) \mathbf{T}_{z4}(\mathbf{p}_{98}) \\
&+ \mathbf{T}_{z6}(\mathbf{p}_{76}) \mathbf{T}_{z5}(\mathbf{p}_{87}) \ddot{\mathbf{T}}_{z4}(\mathbf{p}_{98}, \dot{\mathbf{p}}_{98}, \ddot{\mathbf{p}}_{98})) + 2\mathbf{T}_{z1}(x_{65}) (\dot{\mathbf{T}}_{z6}(\mathbf{p}_{76}, \dot{\mathbf{p}}_{76}) \dot{\mathbf{T}}_{z5}(\mathbf{p}_{87}, \dot{\mathbf{p}}_{87}) \mathbf{T}_{z4}(\mathbf{p}_{98}) \\
&+ \mathbf{T}_{z6}(\mathbf{p}_{76}) \dot{\mathbf{T}}_{z5}(\mathbf{p}_{87}, \dot{\mathbf{p}}_{87}) \dot{\mathbf{T}}_{z4}(\mathbf{p}_{98}, \dot{\mathbf{p}}_{98}) + \dot{\mathbf{T}}_{z6}(\mathbf{p}_{76}, \dot{\mathbf{p}}_{76}) \mathbf{T}_{z5}(\mathbf{p}_{87}) \dot{\mathbf{T}}_{z4}(\mathbf{p}_{98}, \dot{\mathbf{p}}_{98}))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{p}}_{21} &= [\ddot{p}_{210}, 0, 0, \ddot{p}_{213}] & \ddot{\mathbf{p}}_{43} &= [\ddot{p}_{430}, 0, 0, \ddot{p}_{433}] & \ddot{\mathbf{p}}_{87} &= [\ddot{p}_{870}, 0, \ddot{p}_{872}, 0] \\
\ddot{p}_{210} &= -\frac{1}{4}c\left(\frac{\theta_{21}}{2}\right)\dot{\theta}_{21}^2 - \frac{1}{2}s\left(\frac{\theta_{21}}{2}\right)\ddot{\theta}_{21} & \ddot{\mathbf{p}}_{54} &= [\ddot{p}_{540}, 0, \ddot{p}_{542}, 0] & \ddot{\mathbf{p}}_{98} &= [\ddot{p}_{980}, \ddot{p}_{981}, 0, 0] \\
\ddot{p}_{213} &= -\frac{1}{4}s\left(\frac{\theta_{21}}{2}\right)\dot{\theta}_{21}^2 - \frac{1}{2}c\left(\frac{\theta_{21}}{2}\right)\ddot{\theta}_{21} & \ddot{\mathbf{p}}_{76} &= [\ddot{p}_{760}, 0, 0, \ddot{p}_{763}]
\end{aligned}$$

Dados:

$$\ddot{z}_{10} = 0 \quad \ddot{\theta}_{21} = 0$$

Resolviendo para un intervalo de tiempo de 5 segundos y con valores iniciales de

$$\begin{aligned} \ddot{p}_{430} &= -0.746506 & \ddot{p}_{540} &= -0.192955 & \ddot{p}_{760} &= -4.79765 \\ \ddot{p}_{433} &= -11.4195 & \ddot{p}_{542} &= -0.581269 & \ddot{p}_{763} &= -3.5677 \\ \ddot{p}_{870} &= 0.076387 & \ddot{p}_{980} &= 0.776024 & \ddot{z}_{109} &= 18.237 \\ \ddot{p}_{872} &= 1.72997 & \ddot{p}_{981} &= -0.871528 & & \end{aligned}$$

se obtuvieron las siguientes gráficas (figuras 4.53 a Fig.4.58) para la aceleración:

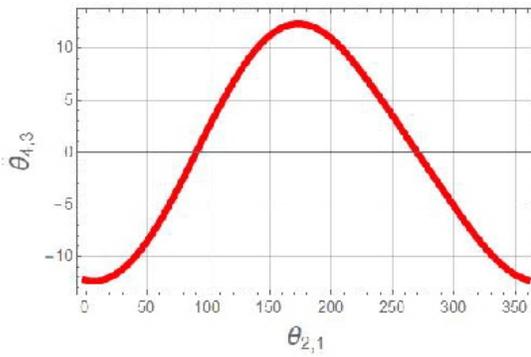


Fig.4.53

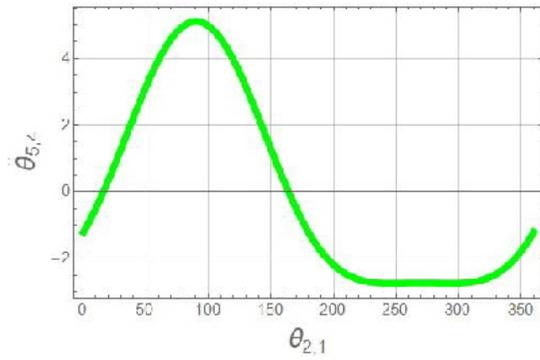


Fig.4.54

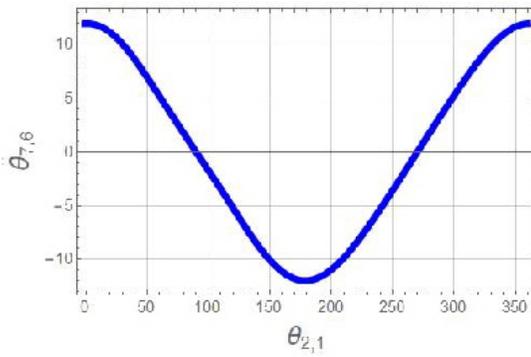


Fig.4.55

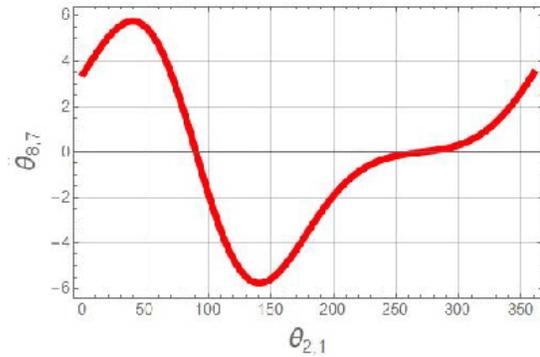


Fig.4.56

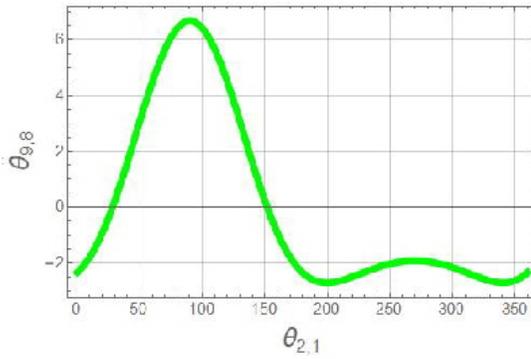


Fig.4.57

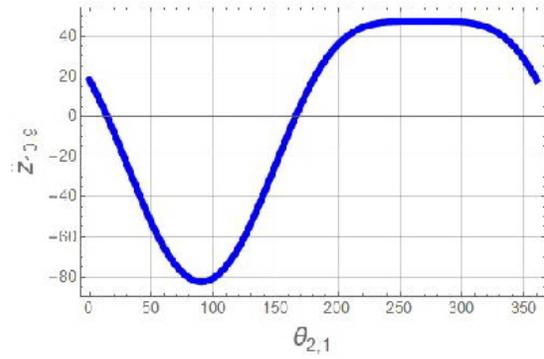


Fig.4.58

### 4.2.2. Análisis dinámico.

Se tiene el mismo mecanismo CSSP de la figura 4.35 En el mecanismos actúan las fuerzas de gravedad  $\mathbf{W}$ , una fuerza de entrada  $\mathbf{F}_{in}$ , una fuerza de salida  $\mathbf{F}_{out}$ , y un momento de entrada  $\mathbf{M}_{in}$ . El diagrama de cuerpo libre considerado para dicho mecanismo se presenta en la figura 4.59

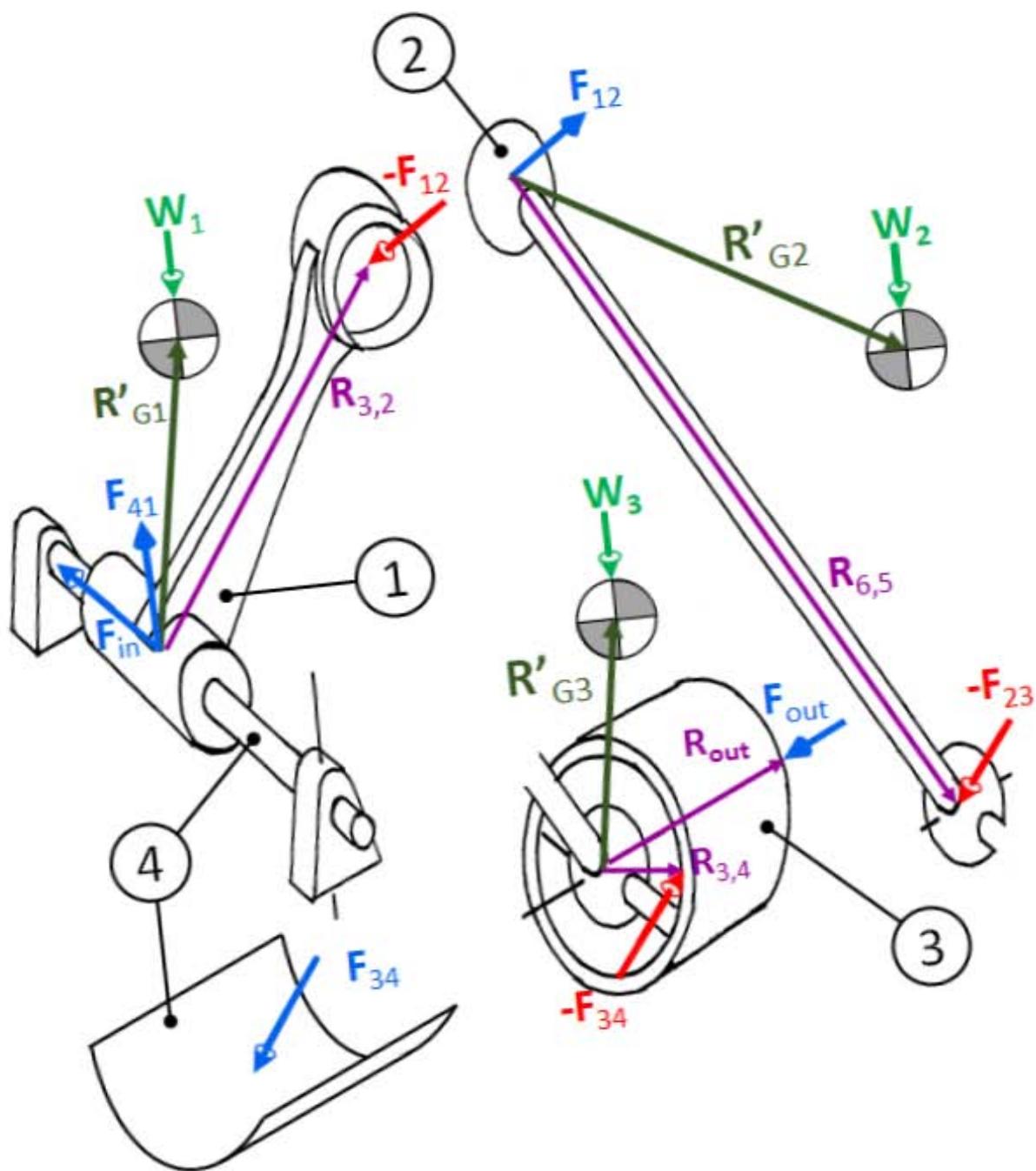


Fig.4.59. Diagrama de cuerpo libre

Para dicho mecanismo se tienen las siguientes incógnitas y ecuaciones:

$$\begin{array}{rcl}
 3 \text{ cuerpos en mov.} \times 6 \text{ ecuaciones} & = & 18 \text{ ecuaciones} \\
 & & \hline
 & & 18 \text{ ecuaciones}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 0 \text{ rotacionales} \times 5 \text{ incógnitas} & = & \\
 1 \text{ prismática} \times 5 & = & 5 \text{ incógnitas} \\
 0 \text{ tornillo} \times 4 & = & \\
 1 \text{ cilíndrica} \times 4 & = & 4 \\
 0 \text{ universales} \times 4 & = & \\
 2 \text{ esféricas} \times 3 & = & 6 \\
 0 \text{ planas} \times 4 & = & \\
 2 \text{ actuadores} \times 1 & = & 2 \\
 & & \hline
 & & 17 \text{ incógnitas}
 \end{array}$$

La figura 4.60 muestra las componentes de cada una de las fuerzas que aparecen en el diagrama de cuerpo libre, mientras que la figura 4.61 muestra la equivalencia de los vectores de centro de masa

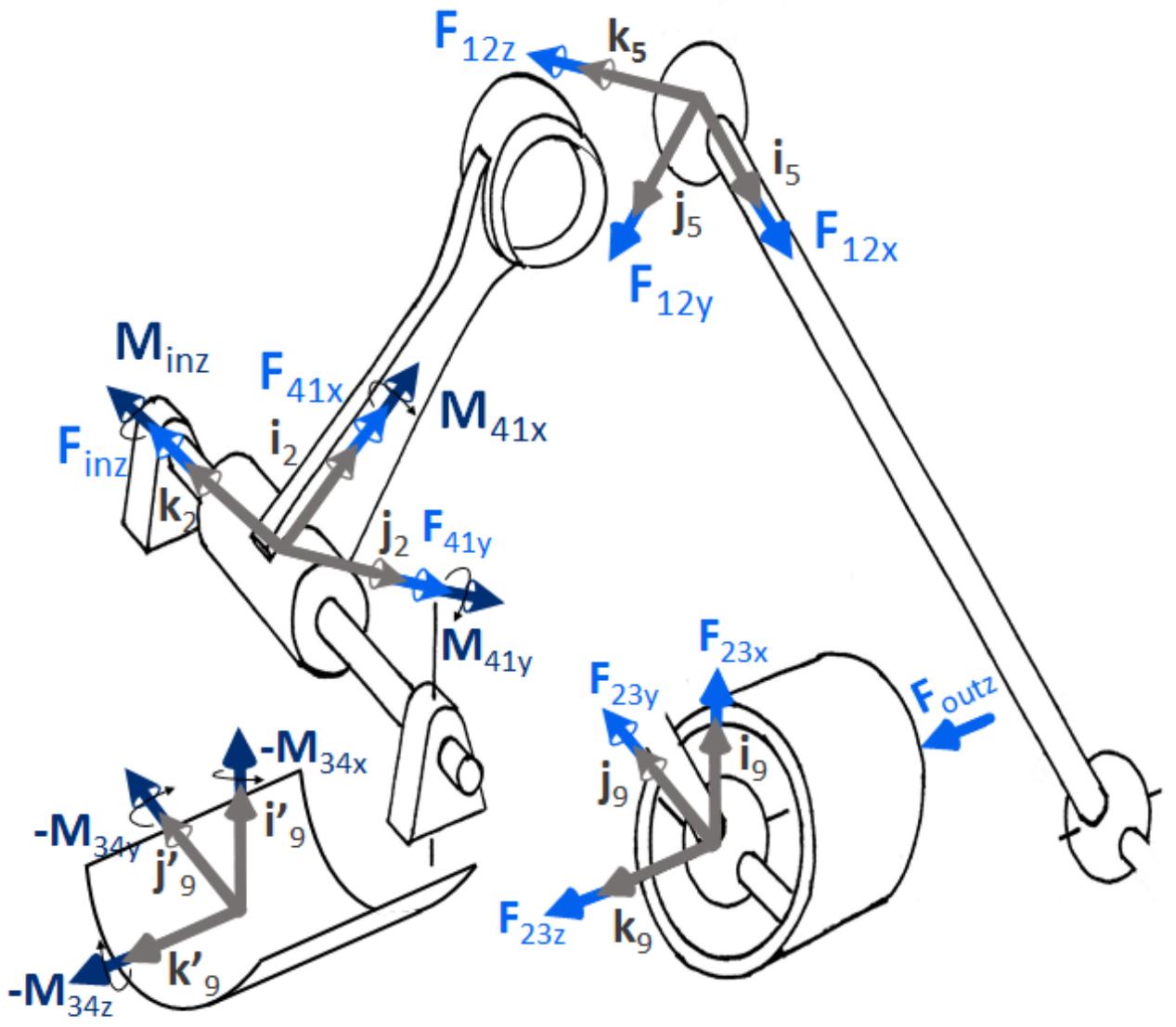


Fig.4.60.- Componentes de fuerzas proyectadas a bases locales

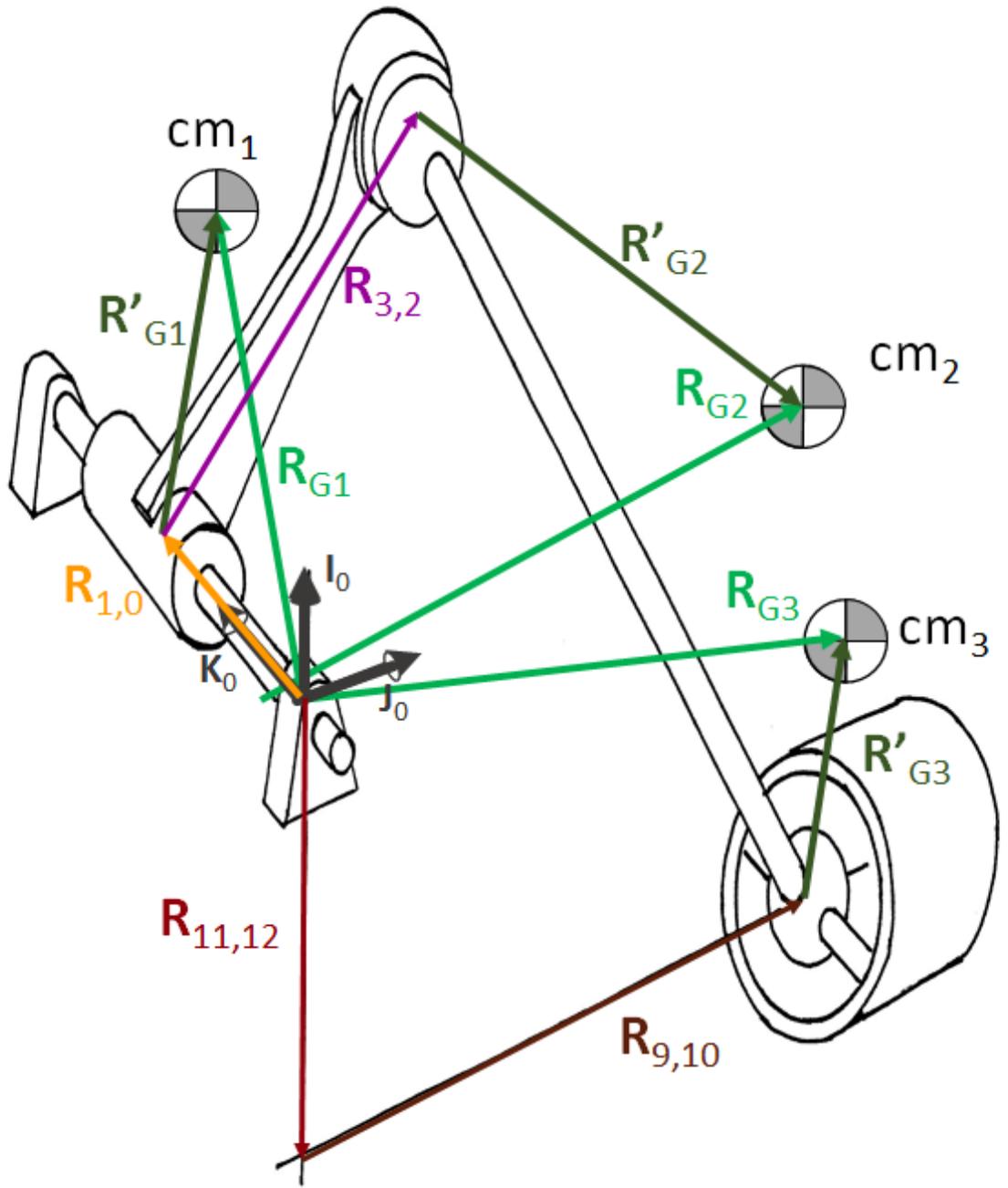


Fig.4.61.-Equivalencia de los vectores de centro de masa

Para la solución de la dinámica se propone usar la forma:

$$\mathbf{F}_{ij}^A + \mathbf{F}_{ij}^I + \mathbf{F}_{ij}^R = 0$$

Donde  $\mathbf{F}_{ij}$ ,  $i$  base donde se miden las fuerzas y momentos,  $j$  número del cuerpo.

Y teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned} \alpha &= 2\mathbf{p}'\ddot{\mathbf{p}} & \alpha &= 2\mathbf{p}'\ddot{\mathbf{p}}\mathbf{U} \\ \omega &= 2\mathbf{p}'\dot{\mathbf{p}} & \omega &= 2\mathbf{p}'\dot{\mathbf{p}}\mathbf{U} \end{aligned}$$

A continuación se presentan las ecuaciones del cuerpo 1 escritas en la basa 2:

$$\mathbf{F}_{2,1}^A + \mathbf{F}_{2,1}^R + \mathbf{F}_{2,1}^I = \mathbf{0}$$

Donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{2,1}^A &= \mathbf{F}_{in} + \mathbf{Q}_0^2 \mathbf{W}_1 & \mathbf{F}_{in} &= [0, 0, F_{inz}, 0, 0, M_{inz}]^T \\ \mathbf{F}_{2,1}^R &= \mathbf{F}_{41} - \mathbf{Q}_5^2 \mathbf{F}_{12} & \mathbf{W}_1 &= [-m_1 g, 0, 0, 0, 0, 0]^T \\ \mathbf{F}_{2,1}^I &= -\mathbf{Q}_0^2 \mathbf{F}_{G1} & \mathbf{F}_{41} &= [F_{41x}, F_{41y}, 0, M_{41x}, M_{41y}, 0]^T \\ & & \mathbf{F}_{12} &= [F_{12x}, F_{12y}, F_{12z}, 0, 0, 0]^T \\ & & \mathbf{F}_{G1} &= [m_1 \mathbf{A}_{G1}^T, \mathbf{M}_{G1}^T]^T \end{aligned}$$

$$\mathbf{Q}_0^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_0^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{G1} \mathbf{C}_0^2 & \mathbf{C}_0^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_5^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_5^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{32} \mathbf{C}_5^2 & \mathbf{C}_5^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_2^0 &= \mathbf{R}_z(\mathbf{p}_{21}) & \mathbf{R}_{G1} &= \mathbf{R}_{10} + \mathbf{R}'_{G1} \\ \mathbf{C}_0^2 &= (\mathbf{C}_2^0)^T = (\mathbf{R}_z(\mathbf{p}_{21}))^T & \mathbf{R}_{10} &= z_{10} \mathbf{K}_0 \\ \mathbf{C}_5^2 &= \mathbf{R}_z(\mathbf{p}_{43}) \mathbf{R}_y(\mathbf{p}_{54}) & \mathbf{R}'_{G1} &= \mathbf{C}_2^0 \mathbf{r}_{G1} \\ \mathbf{S}_{G1} &= \mathbf{S}(x_{G1}, y_{G1}, z_{G1}) & \mathbf{r}_{G1} &= [x_{G1}, y_{G1}, z_{G1}]^T \\ \mathbf{S}_{32} &= \mathbf{S}_x(x_{32}) & \mathbf{K}_0 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{G1} &= \mathbf{A}_{10} + \mathbf{A}'_{G1} & \omega_2 &= \omega_{21} \\
\mathbf{A}_{10} &= \ddot{z}_{10} \mathbf{K}_0 & \alpha_2 &= \dot{\omega}_{21} \\
\mathbf{A}'_{G1} &= \alpha_2 \times \mathbf{R}'_{G1} + \omega_2 \times (\omega_2 \times \mathbf{R}'_{G1}) & \omega_{21} &= 2\mathbf{p}'_{21}\dot{\mathbf{p}}_{21} \mathbf{K}_1 \\
\mathbf{M}_{G1} &= \mathbf{I}_{G1}\alpha_2 + \omega_2 \times (\mathbf{I}_{G1}\omega_2) & \dot{\omega}_{21} &= 2\mathbf{p}'_{21}\ddot{\mathbf{p}}_{21} \mathbf{K}_1 \\
\mathbf{I}_{G1} &= \mathbf{C}_2^0 \mathbf{i}_{G1} (\mathbf{C}_2^0)^T & \mathbf{K}_1 &= \mathbf{K}_0
\end{aligned}$$

Para el cuerpo 2 se tiene que las ecuaciones escritas en la base 5 son:

$$\mathbf{F}_{5,2}^A + \mathbf{F}_{5,2}^R + \mathbf{F}_{5,2}^I = \mathbf{0}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{5,2}^A &= \mathbf{Q}_0^5 \mathbf{W}_2 & \mathbf{W}_2 &= [-m_2g, 0, 0, 0, 0, 0]^T \\
\mathbf{F}_{5,2}^R &= \mathbf{F}_{12} - \mathbf{Q}_9^5 \mathbf{F}_{23} & \mathbf{F}_{23} &= [F_{23x}, F_{23y}, F_{23z}, 0, 0, 0]^T \\
\mathbf{F}_{5,2}^I &= -\mathbf{Q}_0^5 \mathbf{F}_{G2} & \mathbf{F}_{G2} &= [m_2 \mathbf{A}_{G2}^T, \mathbf{M}_{G2}^T]^T
\end{aligned}$$

$$\mathbf{Q}_0^5 = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_0^5 & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{G2} \mathbf{C}_0^5 & \mathbf{C}_0^5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_9^5 = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_9^5 & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{65} \mathbf{C}_9^5 & \mathbf{C}_9^5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_3^0 &= \mathbf{R}_z(\mathbf{p}_{21}) & \mathbf{R}_{G2} &= \mathbf{R}_{10} + \mathbf{R}_{32} + \mathbf{R}'_{G2} \\
\mathbf{C}_4^0 &= \mathbf{R}_z(\mathbf{p}_{21}) \mathbf{R}_z(\mathbf{p}_{43}) & \mathbf{R}'_{G2} &= \mathbf{C}_5^0 \mathbf{r}_{G2} \\
\mathbf{C}_5^0 &= \mathbf{R}_z(\mathbf{p}_{21}) \mathbf{R}_z(\mathbf{p}_{43}) \mathbf{R}_y(\mathbf{p}_{54}) & \mathbf{R}_{32} &= x_{32} \mathbf{I}_2 \\
\mathbf{C}_5^0 &= (\mathbf{C}_5^0)^T = \mathbf{R}_y(\mathbf{p}_{54})^T \mathbf{R}_z(\mathbf{p}_{43})^T \mathbf{R}_z(\mathbf{p}_{21})^T & \mathbf{r}_{G2} &= [x_{G2}, y_{G2}, z_{G2}]^T \\
\mathbf{C}_9^5 &= \mathbf{R}_z(\mathbf{p}_{76}) \mathbf{R}_y(\mathbf{p}_{87}) \mathbf{R}_x(\mathbf{p}_{98}) & \mathbf{I}_2 &= \mathbf{C}_2^0 \mathbf{i}_2 \\
\mathbf{S}_{G2} &= \mathbf{S}(x_{G2}, y_{G2}, z_{G2}) & \mathbf{K}_3 &= \mathbf{C}_3^0 \mathbf{k}_3 \\
\mathbf{S}_{65} &= \mathbf{S}_x(x_{65}) & \mathbf{J}_4 &= \mathbf{C}_4^0 \mathbf{j}_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{32} &= \alpha_2 \times \mathbf{R}_{32} + \omega_2 \times (\omega_2 \times \mathbf{R}_{32}) & \omega_5 &= \omega_{21} + \omega_{43} + \omega_{54} \\
\mathbf{A}'_{G2} &= \alpha_5 \times \mathbf{R}'_{G2} + \omega_5 \times (\omega_5 \times \mathbf{R}'_{G2}) & \alpha_5 &= \dot{\omega}_{21} + \dot{\omega}_{43} + \dot{\omega}_{54} \\
\mathbf{A}_{G2} &= \mathbf{A}_{10} + \mathbf{A}_{32} + \mathbf{A}'_{G2} & \omega_{43} &= 2\mathbf{p}'_{43}\dot{\mathbf{p}}_{43} \mathbf{K}_3 \\
\mathbf{M}_{G2} &= \mathbf{I}_{G2}\alpha_5 + \omega_5 \times (\mathbf{I}_{G2}\omega_5) & \omega_{54} &= 2\mathbf{p}'_{54}\dot{\mathbf{p}}_{54} \mathbf{J}_4 \\
\mathbf{I}_{G2} &= \mathbf{C}_5^0 \mathbf{i}_{G2} (\mathbf{C}_5^0)^T & \dot{\omega}_{43} &= 2\mathbf{p}'_{43}\ddot{\mathbf{p}}_{43} \mathbf{K}_3 + \omega_{21} \times \omega_{43} \\
& & \dot{\omega}_{54} &= 2\mathbf{p}'_{54}\ddot{\mathbf{p}}_{54} \mathbf{J}_4 + (\omega_{21} + \omega_{43}) \times \omega_{54}
\end{aligned}$$

Y para el cuerpo 3, las ecuaciones escritas en la base 9 son:

$$\mathbf{F}_{9,3}^A + \mathbf{F}_{9,3}^R + \mathbf{F}_{9,3}^I = \mathbf{0}$$

Donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{9,3}^A &= \mathbf{Q}_{out}^9 \mathbf{F}_{out} + \mathbf{Q}_0^9 \mathbf{W}_3 & \mathbf{F}_{out} &= [0, 0, F_{outz}, 0, 0, 0]^T \\ \mathbf{F}_{9,3}^R &= \mathbf{F}_{23} - \mathbf{Q}_{f_{34}} \mathbf{F}_{34} & \mathbf{W}_3 &= [-m_{3g}, 0, 0, 0, 0, 0]^T \\ \mathbf{F}_{9,3}^I &= -\mathbf{Q}_0^9 \mathbf{F}_{G3} & \mathbf{F}_{34} &= [F_{34x}, F_{34y}, 0, M_{34x}, M_{34y}, M_{34z}]^T \\ & & \mathbf{F}_{G3} &= [m_2 \mathbf{A}_{G3}^T, \mathbf{M}_{G3}^T]^T \end{aligned}$$

$$\mathbf{Q}_0^9 = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_0^9 & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{G3} \mathbf{C}_0^9 & \mathbf{C}_0^9 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_{f_{34}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{f_{34}} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_6^0 = \mathbf{R}_z(\mathbf{p}_{21}) \mathbf{R}_z(\mathbf{p}_{43}) \mathbf{R}_y(\mathbf{p}_{54})$$

$$\mathbf{C}_7^0 = \mathbf{R}_z(\mathbf{p}_{21}) \mathbf{R}_z(\mathbf{p}_{43}) \mathbf{R}_y(\mathbf{p}_{54}) \mathbf{R}_z(\mathbf{p}_{76})$$

$$\mathbf{C}_8^0 = \mathbf{R}_z(\mathbf{p}_{21}) \mathbf{R}_z(\mathbf{p}_{43}) \mathbf{R}_y(\mathbf{p}_{54}) \mathbf{R}_z(\mathbf{p}_{76}) \mathbf{R}_y(\mathbf{p}_{87})$$

$$\mathbf{C}_9^0 = \mathbf{R}_z(\mathbf{p}_{21}) \mathbf{R}_z(\mathbf{p}_{43}) \mathbf{R}_y(\mathbf{p}_{54}) \mathbf{R}_z(\mathbf{p}_{76}) \mathbf{R}_y(\mathbf{p}_{87}) \mathbf{R}_x(\mathbf{p}_{98})$$

$$\mathbf{C}_0^9 = (\mathbf{C}_9^0)^T = \mathbf{R}_x^T(\mathbf{p}_{98}) \mathbf{R}_y^T(\mathbf{p}_{87}) \mathbf{R}_z^T(\mathbf{p}_{76}) \mathbf{R}_y^T(\mathbf{p}_{54}) \mathbf{R}_z^T(\mathbf{p}_{43}) \mathbf{R}_z^T(\mathbf{p}_{21})$$

$$\mathbf{C}_{11}^0 = \mathbf{R}_x^T(\mathbf{p}_{98}) \mathbf{R}_y^T(\mathbf{p}_{87}) \mathbf{R}_z^T(\mathbf{p}_{76}) \mathbf{R}_y^T(\mathbf{p}_{54}) \mathbf{R}_z^T(\mathbf{p}_{43}) \mathbf{R}_z^T(\mathbf{p}_{21}) \mathbf{R}_x^T(\mathbf{p}_{1110})$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_6 &= \mathbf{C}_6^0 \mathbf{k}_6 & \mathbf{A}_{G3} &= \mathbf{A}_{12,11} + \mathbf{A}_{10,9} + \mathbf{A}'_{G3} \\
\mathbf{J}_7 &= \mathbf{C}_7^0 \mathbf{j}_7 & \mathbf{A}_{12,11} &= \mathbf{0} \\
\mathbf{I}_8 &= \mathbf{C}_8^0 \mathbf{i}_8 & \mathbf{A}_{10,9} &= \mathbf{0} \\
\mathbf{K}_9 &= \mathbf{C}_9^0 \mathbf{k}_9 & \mathbf{A}'_{G3} &= \alpha_9 \times \mathbf{R}'_{G3} + \omega_9 \times (\omega_9 \times \mathbf{R}'_{G3}) \\
\mathbf{I}_{11} &= \mathbf{C}_{11}^0 \mathbf{i}_{11} & \mathbf{M}_{G3} &= \mathbf{I}_{G3} \alpha_9 + \omega_9 \times (\mathbf{I}_{G3} \omega_9)
\end{aligned}$$
  

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{G3} &= \mathbf{R}_{12,11} + \mathbf{R}_{10,9} + \mathbf{R}'_{G3} & \omega_9 &= \omega_{21} + \omega_{43} + \omega_{54} + \omega_{76} + \omega_{87} + \omega_{98} \\
\mathbf{R}_{12,11} &= x_{12,11} \mathbf{I}_{11} & \omega_{76} &= 2\mathbf{p}'_{76} \dot{\mathbf{p}}_{76} \mathbf{K}_6 \\
\mathbf{R}_{10,9} &= z_{10,9} \mathbf{K}_9 & \omega_{87} &= 2\mathbf{p}'_{87} \dot{\mathbf{p}}_{87} \mathbf{J}_7 \\
\mathbf{R}'_{G3} &= \mathbf{C}_9^0 \mathbf{r}_{G3} & \omega_{98} &= 2\mathbf{p}'_{98} \dot{\mathbf{p}}_{98} \mathbf{I}_8 \\
\mathbf{r}_{G3} &= [x_{G3}, y_{G3}, z_{G3}]^T & & \\
\mathbf{I}_{G3} &= \mathbf{C}_9^0 \mathbf{i}_{G3} (\mathbf{C}_9^0)^T & \alpha_9 &= \dot{\omega}_{21} + \dot{\omega}_{43} + \dot{\omega}_{54} + \dot{\omega}_{76} + \dot{\omega}_{87} + \dot{\omega}_{98} \\
\mathbf{S}_{G3} &= \mathbf{S}(x_{G3}, y_{G3}, z_{G3}) & \dot{\omega}_{76} &= 2\mathbf{p}'_{76} \ddot{\mathbf{p}}_{76} \mathbf{K}_6 + (\omega_{21} + \omega_{43} + \omega_{54}) \times \omega_{76} \\
\mathbf{S}_{\mathbf{f}_{34}} &= \mathbf{S}_x(r_{x34}) & \dot{\omega}_{87} &= 2\mathbf{p}'_{87} \ddot{\mathbf{p}}_{87} \mathbf{J}_7 + (\omega_{21} + \omega_{43} + \omega_{54} + \omega_{76}) \times \omega_{87} \\
r_{x34} &= -0.4 & \dot{\omega}_{98} &= 2\mathbf{p}'_{98} \ddot{\mathbf{p}}_{98} \mathbf{I}_8 + (\omega_{21} + \omega_{43} + \omega_{54} + \omega_{76} + \omega_{87}) \times \omega_{98}
\end{aligned}$$

Los datos utilizados para las masas, tensores de inercias y vectores de centro de masa son:

$$\begin{aligned}
x_{32} &= 1.75 \text{ in} & k_{1x} &= k_{1y} = k_{1z} = 1.5 \text{ in} \\
x_{65} &= 6.11 \text{ in} & k_{2x} &= 0.6 \text{ in} & k_{2y} &= k_{2z} = 4.5 \text{ in} \\
& & k_{3x} &= k_{3y} = 1.54 \text{ in} & k_{3z} &= 1.6 \text{ in}
\end{aligned}$$

Cuerpo	1	2	3
Masa ( $lb \cdot s^2/in$ )	0.00776	0.00389	0.00389
$(\mathbf{I}_{G1}, \mathbf{I}_{G2}, \mathbf{I}_{G3})$	$m_1 \begin{bmatrix} k_{1x}^2 & 0 & 0 \\ 0 & k_{1y}^2 & 0 \\ 0 & 0 & k_{1z}^2 \end{bmatrix}$	$m_2 \begin{bmatrix} k_{2x}^2 & 0 & 0 \\ 0 & k_{2y}^2 & 0 \\ 0 & 0 & k_{2z}^2 \end{bmatrix}$	$m_3 \begin{bmatrix} k_{3x}^2 & 0 & 0 \\ 0 & k_{3y}^2 & 0 \\ 0 & 0 & k_{3z}^2 \end{bmatrix}$
$(x_G, y_G, z_G)$	(0.925, 0, 0)	(3.055, 0, 0)	(0, 0, 0)

Donde  $g = 32.2 \text{ ft/s}^2$

A continuación se muestran las gráficas de las fuerza y momentos para una revolución completa de  $\theta_{21}$  con  $\dot{\theta}_{21} = 2 \text{ rad/s}$

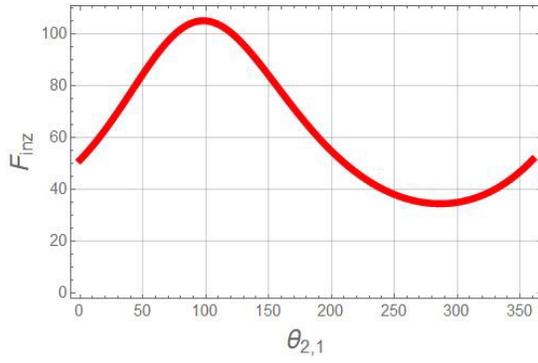


Fig.4.62

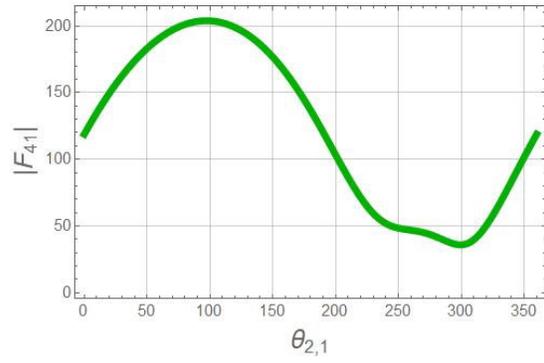


Fig.4.63

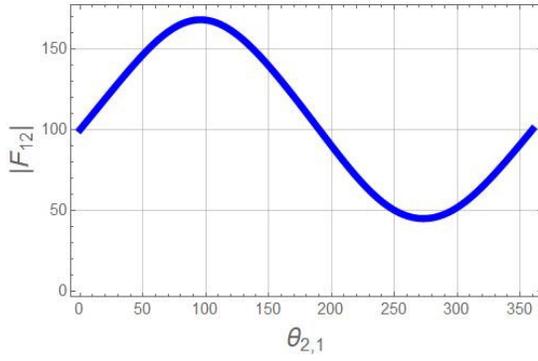


Fig.4.64

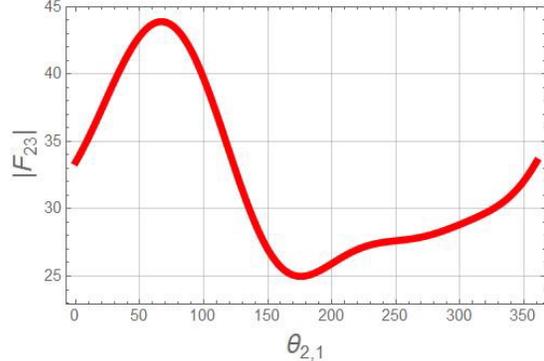


Fig.4.65

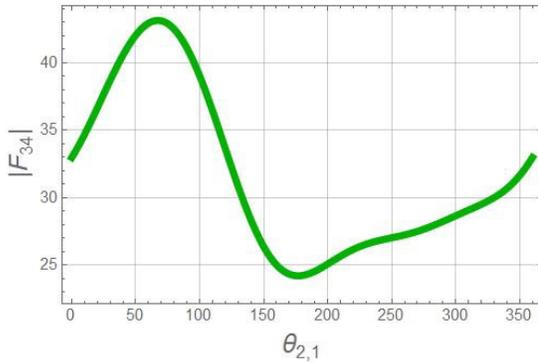


Fig.4.66

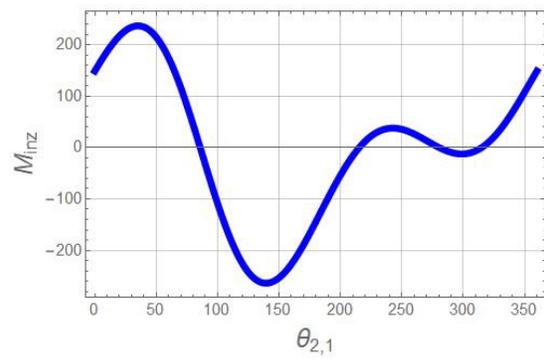


Fig.4.67

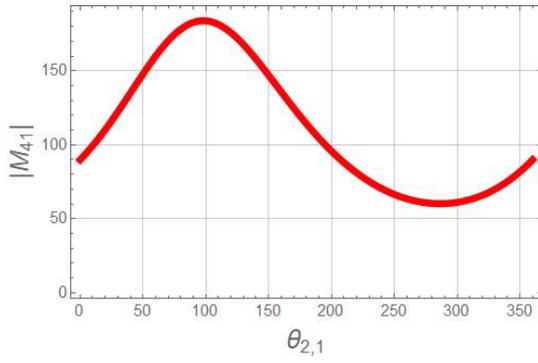


Fig.4.68

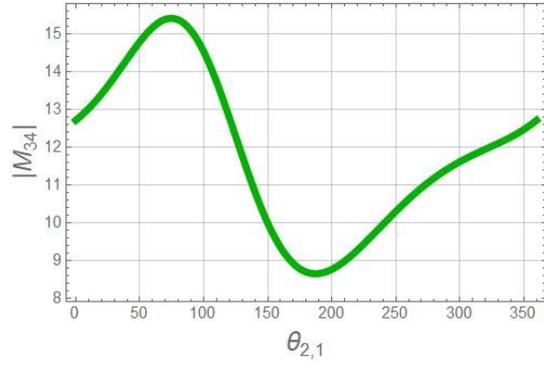


Fig.4.69

## Capítulo 5

# Conclusión

El proyecto incluye tres etapas, la primera etapa es el análisis cinemático, la segunda etapa el análisis dinámico de fuerzas, la tercera etapa el análisis dinámico de movimiento. En esta tesis se realizaron las dos primeras etapas, la formulación e implementación de la cinemática y de la dinámica de fuerzas. En la cinemática se implementó una adaptación a la metodología de las matrices homogéneas de transformación en conjunto de los parámetros de Euler. Esta adaptación permite utilizar las ventajas de ambos métodos; las ventajas de las matrices homogéneas son: aplicación intuitiva y representación sencilla de los movimientos espaciales de rotación y traslación mediante multiplicación de matrices; mientras que la ventaja de los parámetros de Euler es evitar la singularidad matemática cuando se resuelve el problema de la dinámica de movimiento.

Para el caso del problema dinámico de fuerzas, las rotaciones y aceleraciones lineales y angulares, fueron expresados en función de los parámetros de Euler. La resolución del sistema resultante fue tratada como un sistema lineal de ecuaciones simultáneas, que permitió calcular las fuerzas de reacción y las fuerzas motrices.

Durante la implementación de la dinámica de fuerzas, se pudo observar que el tiempo total de ejecución del programa era menor usando los parámetros de Euler en comparación con los ángulos de Euler. Hizo falta un mecanismo de evaluación para determinar el tiempo de rapidez de la ejecución.

Las desventajas más notorias del uso de los parámetros de Euler son que su aplicación no es intuitiva y es muy laboriosa. Además, una vez calculados los parámetros y sus derivadas se

deben de realizar cálculos adicionales para recuperar los valores de las variables de posición, velocidad y aceleración angular para su interpretación física.

Los parámetros de Euler, se suelen usar para representar movimientos absolutos de cada cuerpo, esto tiene la ventaja de modelos cinemáticos y dinámicos con menos operaciones, pero tiene la desventaja de requerir un proceso posterior para calcular los ángulos, velocidades y aceleraciones angulares relativos en las juntas, necesarios para graficar valores usados para la selección de actuadores. En este trabajo se usaron parámetros de Euler relativos para componer los movimientos absolutos de los cuerpos, esto generó modelos cinemáticos y dinámicos más laboriosos, pero permitió obtener de manera directa los ángulos, velocidades y aceleraciones angulares relativos en las juntas.

La tercera etapa del trabajo, dinámica de movimiento, se deja como trabajo a futuro. Se hicieron unos avances no reportados en esta tesis empleando el método de Complemento Natural Ortogonal (NOC, Natural Orthogonal Complement) para establecer las ecuaciones diferenciales de movimiento en función de los parámetros de Euler relativos, este modelo no se encuentra reportado en la literatura ni en artículos revisados. Aunque se obtuvieron modelos, la literatura consultada y los experimentos numéricos indicaban que la norma de los parámetros de Euler debía de formar parte de la ecuación diferencial para tener un sistema de  $n$  ecuaciones  $x$   $n$  incógnitas, contrario a como sucedía en la cinemática. También se puede extender la metodología desarrollada en el presente trabajo a mecanismos constituidos por diferentes tipos de cuerpos, más allá de eslabones, tales como engranes y levas.

# Bibliografía

- [1] Briot, S., and Khalil, W., (2015). Dynamics of Parallel Robots, *Springer International Switzerland*, p.22.
- [2] Flores, P., (2015). Concepts and Formulations for Spatial Multibody Dynamics, *Springer-Briefs in Applied Sciences and Technology*, pp.15,19.
- [3] Flores, P., Ambrósio, J., Pimenta, J.C., and Lankarani, M., (2008). Kinematics and Dynamics of Multibody Systems with Imperfect Joints, *Springer-Verlag*, p.6.
- [4] Kelly, R. , and Santibañez, V., (2003). Control de Movimiento de Robots Manipuladores, *Pearson Educación*, p.61.
- [5] Kelly, R. , Santibañez, V., and Loria, A., (2005). Control of Robot Manipulators in Joint Space, *London: Springer-Verlag*, pp.115,116.
- [6] Kuipers, J. B., (1998). Quaternions and Rotation Sequences: A Primer with Applications to Orbits, Aerospace, and Virtual Reality. *Princeton, NJ: Princeton University Press*.
- [7] Nikravesh, P., (1988). Computer-aided analysis of mechanical systems, *Prentice Hall*, pp.153,157,162,186.
- [8] Paul, R. , and Zhang, H., (1986). Computationally Efficient Kinematics for Manipulators with Spherical Wrists Based on the Homogeneous Transformation Representation, in *The International Journal of Robotics Research*, vol. 5, pp. 32-44.
- [9] Saha, S., Shah, S., and Nandihal, P., (2013). Evolution of the DeNOC-based dynamic modelling for multibody systems, in *Mech. Sci.*, p.1.

- [10] Schiehlen, W., (1990). Multibody Systems Handbook, *Springer-Verlag Berlin Heidelberg*.
- [11] Shabana, A., (2001). Computational dynamics, *New York: Wiley*, p.95.
- [12] Siciliano, B., Sciavicco, L., Villani, L., and Oriolo, G., (2009). Robotics. Modelling, Planning and Control, *London: Springer-Verlag*, pp.39,56,57,58,90,91,104,292.
- [13] Spong, M., Hutchinson,S., and Vidyasagar, M., (2005). Robot modeling and control, *Wiley*, pp. 54, 187.
- [14] Stejskal, V., Valasek, M., (1996). Kinematics and dynamics of machinery, *Marcel Dekker Inc.*
- [15] Wehage R.A. (1984) Quaternions and Euler Parameters — A Brief Exposition. In: Haug E.J. (eds) Computer Aided Analysis and Optimization of Mechanical System Dynamics. NATO ASI Series (Series F: Computer and Systems Sciences), vol 9. Springer, Berlin, Heidelberg
- [16] Wenger,P., Flores, P., (2017). New Trend in Mechanism and Machine Science. Theory and Industrial Applications, *Springer in Mechanisms and Machine Science*.
- [17] Zhu, T., Cai, F., Li, Y., and Liu, W., (2017). Kinematics Control and Analysis of Industrial Robot, in *International Conference on Robotics and Mechantronics*