



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

Modulación de Meteoroides
que penetran la atmósfera terrestre

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

PRESENTA:

Juan Gabriel López Hernández

TUTOR

Dr. Victor Manuel Velasco Herrera

2019

Ciudad Universitaria, Ciudad de México





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de Datos

1. Datos del alumno

López
Hernández
Juan Gabriel
5525745416
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
408093372

2. Datos del Tutor

Dr.
Víctor Manuel
Velasco
Herrera

3. Datos Sinodal 1

Dra.
María Dolores
Maravilla
Meza

4.- Datos Sinodal 2

Dra.
María Guadalupe
Cordero
Tercero

5. Datos Sinodal 3

Dr.
Gerardo
Ruiz
Chavarría

6. Datos Sinodal 4

Dr.
David
Riveros
Rosas

7. Datos del trabajo escrito

Modulación de Meteoroides que penetran la atmósfera terrestre
60p
2019

*“A todos aquellos que sumaron ayuda aun siendo esta diferencial,
para poder converger en este punto”*

Índice general

Resumen	2
Introducción	3
1 Sistema Solar	4
1.1 El Sol	4
1.2 Planetas	6
1.3 Momento Angular y Torque	8
1.4 Asteroides y Cometas	10
2 Funciones de Distribución	16
2.1 Variables Aleatorias Continuas	16
2.1.1 Función de Distribución de Probabilidad	16
2.1.2 Función de Densidad de Probabilidad (fdp)	17
2.1.3 Media, Varianza y Desviación Estándar de las Variables Aleatorias Continuas.	17
2.1.4 Algunas Funciones de Distribución Continuas	18
2.2 Variable Aleatoria Discreta	20
2.2.1 Función de Distribución Acumulada	20
2.2.2 Media, Varianza y Desviación Estándar de las Variables Aleatorias Discretas	21
2.2.3 Algunas Funciones de Distribución Discretas	21
3 Transformada de Fourier	24
3.1 Señales	25
3.2 Transformada de Fourier	25
3.3 Transformada de Fourier Con Ventanas	30
4 Análisis Wavelet	32
4.1 Transformada Wavelet	33
4.2 Ejemplos de Funciones Wavelet Madre	35
4.3 Espectro de Potencias de Wavelet	38
4.4 Incertidumbres	40
Resultados	42
Análisis Wavelet de los impactos	42
Distribución de los impactos sobre la Tierra	46
Discusión de Resultados	52
Conclusiones	54
Referencias	55

Resumen

El objetivo del presente trabajo es encontrar algunos de los moduladores que influyen en la variabilidad de la caída de meteoroides sobre la superficie terrestre. Ésto se realizó mediante el análisis espectral de la Transformada Wavelet, además se realizó un estudio espacial (latitud y longitud) de los impactos, mediante la función de densidad de probabilidad, y, de acuerdo a su distribución, se discute si la caída es un proceso aleatorio o no [18,17].

Para llevar a cabo el análisis temporal se analizó la serie de tiempo que describe el número de impactos de meteoritos hallados por año, desde 450 A.C hasta el 2001 con la Transformada Wavelet. El análisis espectral utilizado es una variante en Matlab del proporcionado por C. Torrence y G. Compo [7]. Las periodicidades obtenidas son: 2.6 ± 0.26 , 3.9 ± 0.44 , 8.26 ± 0.32 , 11.69 ± 0.38 , 16.53 ± 2.22 , 31.2 ± 3.65 y 58.9 ± 8.75 todas ellas en años.

También se analizaron datos del momento angular y del torque sobre el baricentro solar (punto sobre el que orbitan todos los cuerpos de sistema solar incluido el Sol) para poder observar los efectos gravitacionales que existen en el sistema solar, estos datos van desde el año 1 al 2015. Nuevamente fueron analizados con la Transformada Wavelet. Se obtuvieron las mismas periodicidades tanto para el momento angular como para el torque siendo éstas 13.12 y 19.66 en años.

A partir de los resultados obtenidos se sugiere que dos de las periodicidades obtenidas están relacionadas con las resonancias orbitales Kirkwood. Conclusión a la que se llega después de aplicar la tercera ley de Kepler a las periodicidades obtenidas con Transformada Wavelet, lo que arrojó una correspondencia entre período y distancia promedio al Sol. Con la Transformada también se comprobó la no aleatoriedad en tiempo de la caída de meteoroides.

Se analizaron alrededor de 34 mil registros de impactos para observar su función de densidad de probabilidad, así como su respectiva función de distribución acumulada tanto para la longitud como para la latitud. Posteriormente se tomaron datos (latitud longitud) fuera de la Antártida. De igual manera se utilizaron gráficos de la distribución de población mundial por longitud y latitud con el objetivo de comparar como ésto influye en el hallazgo de meteoritos.

Se observó que los reportes de impactos sobre la Tierra (longitud y latitud) se ven influenciados por la densidad de población, de esta forma se reportan más impactos donde abunda más población y menos donde hay menos población. Esto se obtuvo después de comparar la distribución de población con la distribución de impactos sin considerar los de la Antártida y los del océano.

Introducción

La mañana del 15 de febrero de 2013 en la ciudad de Chelyabinsk Rusia, en la zona sur de los Urales, aproximadamente a las 09:20:21 am hora local, estalló un asteroide en la atmósfera causando centenares de personas heridas. Es el mayor sufrido sobre un continente en los últimos cien años, solo superado en el siglo XX por el de Tunguska en 1908. El asteroide medía unos 62 pies de ancho en el momento de entrada en la atmósfera y una masa de aproximadamente 12000 toneladas [22]. En su entrada a la atmósfera pudo verse durante unos 30 segundos en el aire, y antes de su fragmentación brilló más que el Sol. El mismo día se aproximó a la Tierra el asteroide (367943) Duende. Este pasó a 27.700 km de nuestro planeta como estaba previsto, 16 horas después de la explosión y la caída del bólido de Rusia. Estos hechos nos recuerdan la caída de un asteroide de 10 kilómetros de diámetro hace 65.5 millones de años sobre la península de Yucatán la que puso fin a la era de los dinosaurios.

Desde la formación de la Tierra, ésta se ha visto constantemente bombardeada por asteroides cometas y meteoroides de todos los tamaños, pero ¿De dónde vienen? ¿Dónde es más probable que caigan? ¿Qué modula su caída? Estas preguntas han sido el objetivo principal del presente trabajo. Se tienen registros de sus coordenadas y año de impacto desde antes del 450 A.C., lo cual nos da una serie de tiempo del número de hallazgos por año.

Una herramienta para el estudio de series de tiempo sin duda ha sido la Transformada de Fourier, muy útil para un análisis cuando las funciones no son periódicas para asociarles un espectro de frecuencias. El espectro de una serie de tiempo nos enseña cómo es esa serie en el dominio frecuencial. Sin embargo, no se puede saber, en el caso de un proceso no armónico, en qué instante de tiempo están presentes en la señal, es decir, la señal está representada en el dominio de la frecuencia, pero no al mismo tiempo en el dominio del tiempo. Una herramienta de reciente desarrollo que resuelve este problema es la Transformada Wavelet.

El análisis de Wavelets no sólo nos da las frecuencias principales, sino que nos indica cuándo ocurren y cual es su duración. La Transformada Wavelet ha sido usada por numerosos estudios en geofísica, por ejemplo: La Convección Tropical, el Niño, en frentes fríos atmosféricos, señales sísmicas, la dispersión de ondas oceánicas etc [20,21]. También se ha utilizado para la caracterización de latidos cardíacos[8].

En el presente trabajo se ha utilizado la Transformada Wavelet para analizar la serie de tiempo de número de impactos por año de meteoroides <1m. También se han utilizado las coordenadas de impacto, para hallar las funciones de densidad de probabilidad.

En la primera parte de este trabajo se muestra toda la teoría necesaria para abordar el análisis aquí planteado. La segunda parte muestra los resultados obtenidos del análisis Wavelet aplicado a las series de tiempo. De igual manera se presentan las gráficas de las funciones de densidad de probabilidad de los impactos. La tercera y última parte contiene las conclusiones referentes a los resultados obtenidos en la segunda parte.

CAPITULO 1

1 Sistema Solar

Un sistema planetario se define como un sistema compuesto por una estrella central con uno o más planetas. Nuestro sistema solar incluye satélites, núcleos cometarios, meteoroides y asteroides, además de los ocho planetas que orbitan a una estrella llamada Sol.

Existen varias teorías que tratan de explicar la formación del sistema solar, la más conocida es la teoría de la nebulosa solar, una nube de gas y polvo que colapsa bajo su propia gravedad. El centro se comprimió lo suficiente como para llegar a ser una protoestrella y el resto del gas quedó orbitando a su alrededor. La fuerza centrífuga no dejó que algunos de los gases llegaran a la estrella, por esta razón, se creó un disco de acreción alrededor de la estrella, que posteriormente dió origen a los planetas.

1.1. El Sol

El Sol es una de las 100,000 millones de estrellas que conforman nuestra galaxia. Posee el 99.86 % de la masa total del sistema solar. En su núcleo, la temperatura es de 16 millones de grados Kelvin (K), lo cual es suficiente para sostener reacciones de fusión termonuclear. Es una esfera casi perfecta, achatada en los polos debido a su rotación que se mantiene unida por su propia gravedad. Su núcleo es un reactor de fusión estabilizado gravitacionalmente. La materia está casi completamente ionizada debido a las altas temperaturas. En el núcleo, cada segundo 5 millones de toneladas de masa son transformadas en energía.

El Sol presenta una zona radiativa y otra convectiva divididas por la estrecha zona llamada *tacoclina*. La zona radiativa es la más interna seguida del núcleo que va de 0.2 a 0.7 radios solares, le sigue la zona convectiva con un espesor de unos 200,000 km aproximadamente. La atmósfera solar que sigue a la zona convectiva se divide en 3 capas: *fotósfera*, *cromósfera* y *corona*. Estas tres capas exteriores del Sol se encuentran en equilibrio convectivo y es allí donde se generan los fenómenos propios de la actividad solar.

La *fotósfera* tiene un espesor de 500 km, el gas que la compone se encuentra en equilibrio térmico, en esta zona encontramos *gránulos*, *fáculas* y *manchas*. Las *manchas solares* son producidas por concentraciones de fuertes campos magnéticos, que pueden llegar a tener 50,000 km de diámetro y durar varios días o semanas. Se encuentran en latitudes solares menores a 35 grados. En 1908, George Ellery Hale demostró que eran intensamente magnéticas. Cada *mancha* es un polo por lo que en general las *manchas* aparecen en pares o en grupos interactuando magnéticamente. Son más frías pues los intensos campos magnéticos aíslan el gas del resto de la *fotósfera*.

La *cromósfera* es una región que se extiende 2,000 km por encima de la *fotósfera*. En la *cromósfera* encontramos *espículas*, *ráfagas* y *playas*.

La *corona* consiste en plasma muy caliente (unos 2 millones de grados K) que no está en equilibrio térmico, fluyendo hacia el medio interplanetario en forma de *viento solar*.

La energía de la corona proviene de la disipación de energía mecánica desde la zona convectiva y la disipación de la energía magnética por reconexión de las líneas de campo. La radiación de rayos X es originada en la corona[27].

Rotaciones y campo magnético

La rotación de la Tierra tarda 24 h y todo el planeta gira al mismo tiempo porque su superficie es sólida. En el Sol sus polos tardan 34.4 días en rotar, mientras que en el ecuador tarda sólo 25.4 días, a esto se le conoce como rotación diferencial. El movimiento de rotacional depende de su distancia al centro y a su latitud solar.

La rotación del Sol es conocida desde 1611 fue descubierta por el astrónomo alemán Johannes Fabricius, al observar el movimiento de las manchas solares. Posteriormente, Richard Carrington observó por 10 años las posiciones de las manchas solares, para tratar de medir la velocidad de rotación de algunas latitudes, sin poder lograrlo. Este trabajo fue la base para que años posteriores se midiera la rotación diferencial del Sol con éxito. A partir de espectros de alta resolución por medio del efecto Doppler[26].

La rotación diferencial del Sol se acopla a un modelo propuesto por Snodgrass y Ulrich. La rotación diferencial (Fig. 1.1a) es la responsable del continuo retorcimiento de las líneas de intensos campos magnéticos locales, lo que lleva a la destrucción de los mismos (periodos de mínima actividad solar) y a su reconstrucción con la polaridad invertida al cabo de 11 años (máxima actividad solar). Este ciclo de 11 años fue descubierto en 1843 por Heinrich Schwabe cuando trataba de detectar planetas interiores a la órbita de Mercurio. Este ciclo ha sido verificado como una periodicidad al aplicar el análisis Wavelet en distintos estudios que involucran al Sol [1].

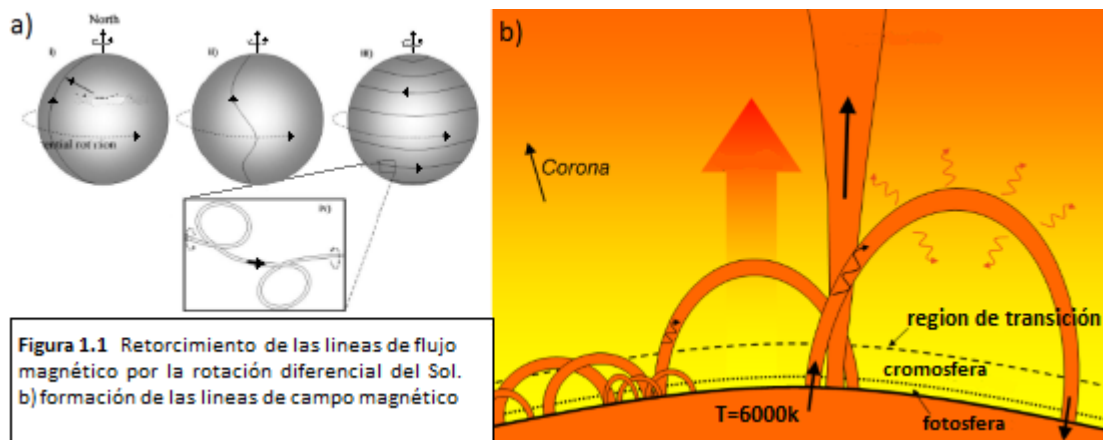


Figura 1.1 Retorcimiento de las líneas de flujo magnético por la rotación diferencial del Sol. b) formación de las líneas de campo magnético

Algunos investigadores sostienen que el ciclo de 11 años y sus variaciones a lo largo de la historia podría estar vinculado al movimiento del Sol en torno del baricentro del sistema solar determinado por Júpiter y los otros planetas gaseosos. Toda la actividad solar está conectada al ciclo de 22 años de su campo magnético (ciclo de Hale). Las capas convectivas del Sol convierten la turbulencia y la rotación diferencial en un campo magnético oscilante generado por un mecanismo de dínamo.

Movimiento Inercial del Sol (en inglés SIM)

El SIM es un movimiento del Sol alrededor del centro de masa del sistema solar. Este movimiento se debe a la posición variable de los planetas, especialmente los planetas

gigantes. Ya Isaac Newton en su Principia (1687) llegó a esta conclusión: “ya que el centro de masa está continuamente en reposo, el Sol, de acuerdo con las distintas posiciones de los planetas, debe moverse continuamente todos los días, pero nunca retrocederá lejos de ese centro” [2].

1.2. Planetas

Los planetas se dividen en dos grandes grupos, según el material con que están formados. Los interiores (Mercurio, Venus, Tierra y Marte) son llamados planetas rocosos y los exteriores (Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno) son los planetas gaseosos. Los planetas interiores están separados de los planetas exteriores por un cinturón de asteroides.

Todos los planetas y cuerpos que componen el sistema solar están sujetos a las tres leyes de Kepler;

1° Ley

"Todos los planetas se desplazan alrededor del Sol describiendo órbitas elípticas. El Sol se encuentra en uno de los focos de la elipse".

2° Ley

"El radio vector que une al Sol con un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales". Cuando un planeta está más alejado del Sol (afelio) su velocidad es menor que cuando está más cerca al Sol (perihelio).

3° Ley

Para cualquier planeta, el cuadrado de su período orbital es directamente proporcional al cubo de la longitud del semieje mayor de su órbita elíptica $T^2 \approx a^3$.

No es que los planetas de nuestro Sistema Solar orbiten en torno al Sol, sino que el Sol y los planetas orbitan en torno a su baricentro o centro de masas. Esta órbita del Sol en torno a su respectivo baricentro hace que el Sol realice un movimiento de bamboleo. En el caso del sistema Tierra-Sol, el baricentro estaría en un punto imaginario situado en el interior del mismo Sol, y muy cercano a su centro, a solo unos 450 km de éste. En el caso del sistema Júpiter-Sol, al ser este planeta mucho más grande que la Tierra y disponer de una masa cientos de veces mayor que ésta, el baricentro entre ambos estaría situado en un punto diferente al del sistema Tierra-Sol.

La tabla 1.2 muestra los principales parámetros físicos de los planetas[3].

Campo Central

“ El problema del campo central fue muy importante desde el punto de vista histórico, la solución de Newton al problema del movimiento planetario dio a su teoría un valor universal demostrando una excelente concordancia con las observaciones astronómicas, además, la teoría poseía una gran capacidad predictiva que se probó con la predicción del regreso del cometa Halley” [4].

La fuerza que ejerce el Sol sobre los planetas, y en general sobre cualquier cuerpo cercano a él, es una fuerza central dirigida siempre hacia el Sol y cuyo valor es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre éste y el planeta. Esto siempre se cumple tanto para órbitas circulares como para elípticas (Fig. 1.2).

Tabla 1.2 Algunos parámetros físicos de los planetas del sistema solar

Planeta	Momento magnético dipolar relativo al terrestre	Presión superficial atmosférica (bars)	Radio Medio (km)	Massa x 10 ²³ (kg)	Densidad (g/cm ³)	Periodo de Rotación Sidereal (h)	Periodo Orbital Sidereal (años)	Albedo Geométrico	Aceleración Gravitacional Ecuatorial (m/s ²)	Distancia al Sol (UA)	Excentricidad	Inclinación (grados)
Mercurio	3.8 X 10 ⁻⁴	≈ 10 ⁻¹⁴	2440	3.302	5.427	1407.509	0.2408467	0.106	3.701	0.3870989	0.20563069	7.00487
Venus	< 5 X 10 ⁻⁵	80	6051.84	48.685	5.204	-5832.444	0.6151972	0.65	8.87	0.7233319	0.00677323	3.39471
Tierra	1 ^a	1	6371.01	59.736	5.515	23.93419	1.0000174	0.367	9.780	1.0000001	0.01671022	0.00005
Marte	< 2 X 10 ⁻⁴	5 X 10 ⁻³	3389.92	6.4185	3.9335	24.622962	1.8808476	0.15	3.69	1.5236623	0.09341233	1.85061
Jupiter	1.9 X 10 ⁻⁴	0.3 ^a	69911	18986	1.326	9.92425	11.862615	0.52	23.12	5.2033630	0.04839266	1.30530
Saturno	6.0 X 10 ⁻²	0.5 ^a	58232	5684.6	0.6873	10.65622	29.447498	0.47	8.96	9.5370703	0.05415060	2.48446
Urano	4.9 X 10 ¹	0.3 ^a	25362	868.32	1.318	17.24	84.016846	0.51	8.68	19.191263	0.04716771	0.76986
Neptuno	2.5 X 10 ¹	0.3 ^a	24624	1024.3	1.638	16.11	164.79132	0.41	11.00	30.068963	0.00858587	1.76917

^a tope de las nubes; ^b momento del dipolo magnético terrestre = 7.9 x 10¹⁵ Tm³.

□

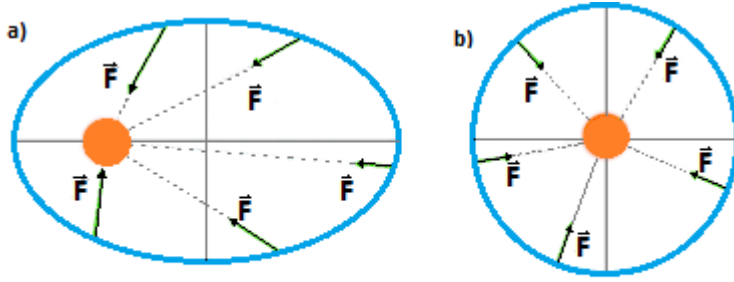


Figura 1.2 Si la órbita es a) elíptica el centro de atracción coincide con uno de los focos, si es b) circular coincide con el centro geométrico de la órbita.

Las fuerzas centrales son fuerzas conservativas, es decir, los planetas mantienen su energía constante en su recorrido alrededor del Sol.

El estudio de la dinámica de una partícula se reduce a conocer la fuerza o el conjunto de fuerzas que actúan sobre ella, para lo cual se establece la ley de fuerzas en cada caso particular, con esto se obtiene una ecuación de movimiento. La solución de la ecuación de movimiento puede llevarse a cabo si se conocen las integrales de movimiento que usualmente están relacionadas con un teorema de conservación. Los teoremas de conservación más generales son: momento lineal, momento angular y la energía [4].

1.3. Momento Angular y Torque

Se define al momento angular y al Torque respecto al origen O de un sistema coordenado como sigue:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \tag{1.3.1}$$

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \tag{1.3.2}$$

Donde \mathbf{p} es el momento lineal y \mathbf{r} el vector de posición medido desde el origen O. Para el caso de un sistema de n partículas;

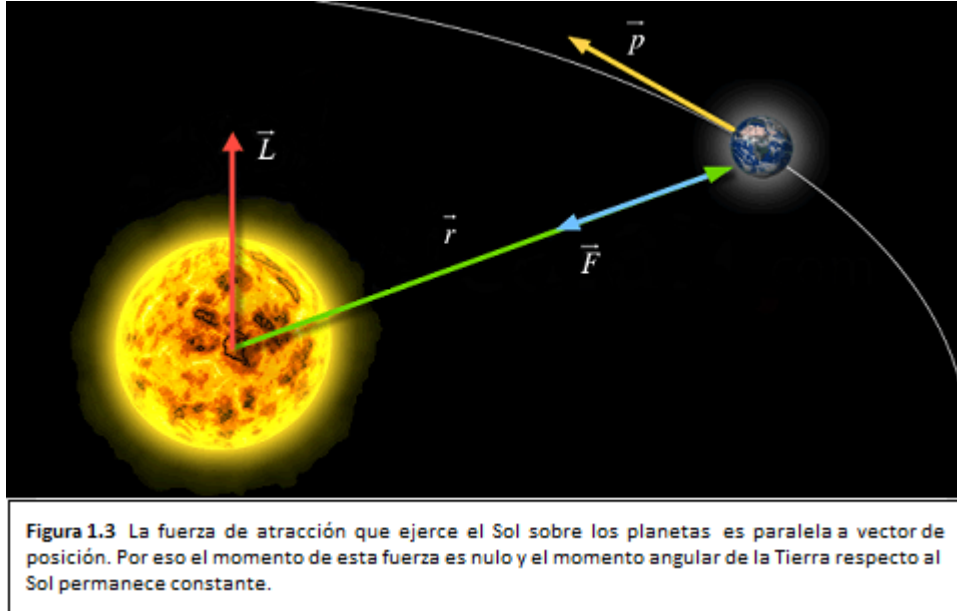
$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \tag{1.3.3}$$

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^e \tag{1.3.4}$$

donde F_i^e es la fuerza externa al sistema de n partículas [4]. En el caso del sistema solar $F_i^e = 0$, lo cual implica que $L = cte$. El momento angular de cada planeta se mantiene

constante en su módulo, dirección y sentido. Lo anterior implica que las órbitas deben estar contenidas en un plano, al cual el momento es perpendicular, como se observa en la Figura 1.3.

La velocidad areolar (el área recorrida por unidad de tiempo), permanece constante de acuerdo con la segunda ley de Kepler.



La variación de momento angular orbital del Sol

Se define al momento angular como:

$$\mathbf{L} = M_s \mathbf{r} \times \mathbf{v} \quad (1.3.5)$$

donde M_s es la masa del Sol, \mathbf{r} la posición y \mathbf{v} la velocidad del Sol en un sistema de referencia centrado en el baricentro. Se sabe que \mathbf{r} y \mathbf{v} son debido a los otros $N - 1$ cuerpos del sistema solar [5].

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= -\frac{1}{M_T} \sum_{j=1}^{N-1} m_j \mathbf{r}_j \\ \mathbf{v} &= -\frac{1}{M_T} \sum_{j=1}^{N-1} m_j \dot{\mathbf{r}}_j \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

donde M_T es la masa total del sistema solar, m_j , \mathbf{r}_j y $\dot{\mathbf{r}}_j$ son la masa, la posición y la velocidad del cuerpo j . De la ecuación (1.3.4) se obtiene

$$T = \frac{dL}{dt} = \frac{\mathbf{L}}{L} \cdot \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (1.3.7)$$

el factor $d\mathbf{L}/dt$ es el vector torque planetario que se define como $\mathbf{\Gamma} = d\mathbf{L}/dt$, de (1.3.6) y (1.3.7) se sigue que;

$$T = \frac{1}{L}(\Gamma_x L_x + \Gamma_y L_y + \Gamma_z L_z) \quad (1.3.8)$$

1.4. Asteroides y Cometas

Los asteroides son fragmentos compuestos de roca, metal o una mezcla de ambos que quedaron luego de la formación del sistema solar, hace unos 4.5 mil millones de años. Pueden ser encontrados orbitando el Sol en un cinturón entre Marte y Júpiter 2.1-4 UA. Hay más de medio millón de asteroides numerados cuyos tamaños van desde los 1000 km de diámetro como el asteroide Ceres (Enero de 1801, Guiseppo Piazzi), hasta los más pequeños que no alcanzan los 100 metros de largo. Los cuerpos $<1m$ suelen llamarse meteoroides. El período orbital de los asteroides que habitan el cinturón varía entre $1/4$ y $1/2$ del periodo orbital de Júpiter que es 11.86 años.

La gigantesca gravedad de Júpiter, los encuentros ocasionales con Marte y posiblemente con otros asteroides provoca el cambio en las órbitas de los asteroides sacándolos del cinturón principal y mandándolos al espacio a través de las órbitas de los otros planetas.

La distribución radial de todos los cuerpos en el cinturón de asteroides no es uniforme, presenta unos huecos llamados huecos de Kirkwood. Los huecos se refiere a que los asteroides cuyos semiejes sean 1.9, 2.06, 2.25, 2.5... son perturbados por resonancias gravitacionales y cambian el valor de su semieje. Los huecos coinciden con las resonancias orbitales de Júpiter, por ejemplo la resonancia 2:5 nos dice que los asteroides dan 5 vueltas al Sol por cada 2 de Júpiter.

Los huecos de Kirkwood [24] se localizan en las siguientes distancias del Sol:

- 1.9 UA (resonancia 2:9)
- 2.06 UA (1:4)
- 2.25 UA (2:7)
- 2.5 UA (1:3)
- 2.706 UA (3:8)
- 2.82 UA (2:5)
- 2.95 UA (3:7)
- 3.27 UA (1:2)
- 3.7 UA (3:5)

Los huecos más significativos están en las resonancias 1:3, 2:5, 3:7 y 1:2.

Se ha clasificado los distintos tipos de asteroides que habitan el cinturón en 8 clases; E: Asteroides de Enstatita, S: condritas ordinarias, M: metálicos, B: carbonosos tipo 2 Pallas, C: carbonáceos tipo 253 Mathilde, T, D y P: carbonáceos. En la Figura 1.4 se observan todos ellos con su respectiva distribución en UA.

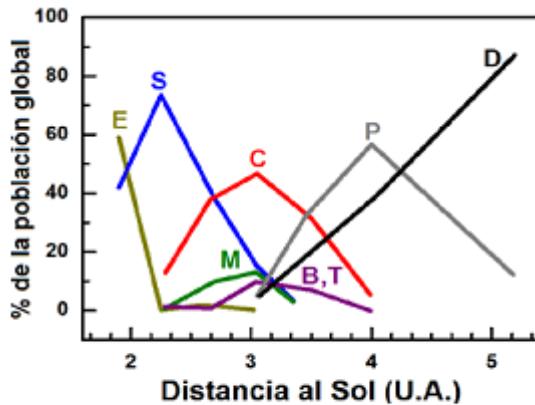


Figura 1.4 Ubicación de la población de los distintos tipos de asteroides que habitan el cinturón.

Meteoroides, Bóolidos, Meteoros y Meteoritas

La diferencia entre una meteorita, un meteorito y un meteoritoide es que el meteoritoide es un objeto de naturaleza asteroidal o cometaria de menos de 1 metro. Cuando un meteoritoide entra a la atmósfera de la Tierra, su interacción con ella provoca que el objeto se caliente, se evapore e ionice, cuando esto pasa, el objeto emite una luz que se llama meteorito, i.e. el meteorito no es el objeto, es la luz que se emite. Si el meteoritoide logra sobrevivir a su interacción con la atmósfera y lo podemos recuperar en la superficie de la Tierra, a esa pieza se le nombra meteorita.

Un bólido es un meteorito muy brillante, caracterizado por parecer una bola de fuego producida por la interacción de la atmósfera terrestre con un meteoritoide, debe tener un brillo mayor al que podemos observar del planeta Venus, Los bólidos NO son objetos, por eso no pueden estallar. La luz de los meteoritos consiste principalmente en radiación del espectro de emisión discreta, líneas que pertenecen en su mayor parte a metales, principalmente al hierro.

“Muchas definiciones recientes de meteoritas, incluida la adoptada por la Unión Astronómica Internacional (UAI), especifican que las meteoritas se originaron como meteoritoides” [23].

No existe un límite aceptado universalmente entre el tamaño de un meteoritoide y de un asteroide. La definición de la UAI de meteoritoide limita vagamente estos objetos a aquellos más pequeños que los asteroides pero más grandes que los átomos o las moléculas. Beech and Steel [23] sugirieron modificar esta definición para incluir solo objetos en el rango de $100\mu\text{m}$ a 10m. Su lógica era que los objetos de menos de $100\mu\text{m}$ eran poco propensos a producir meteoritos durante el paso atmosférico y deberían considerarse polvo, mientras que 10 m era cercano al tamaño mínimo de objetos astronómicamente detectables que podrían llamarse asteroides.

El objeto más pequeño nombrado como una meteorita es Yamato 8333; ésta pesa 12 mg y corresponde a un diámetro de partícula de aproximadamente 2 mm [23].

Para los fines del presente trabajo, he adoptado al igual que [23] 1m como el tamaño mínimo de asteroide (o máximo para meteoritoide). Cabe mencionar que en los datos que se usan en el presente trabajo sólo un dato se sale de este rango que es el dato de Hoba la meteorita más grande conocido de unas 60 toneladas, que tiene unas dimensiones de aproximadamente $3\times 3\times 1\text{m}$.

La mayoría de los meteoroides provienen del cinturón de asteroides entre Marte y Júpiter, y se formaron junto con el sistema solar hace unos 4.5 mil millones de años. Algunos otros vienen de la Luna o Marte, estas rocas de corteza lunar o marciana fueron expulsadas hacia el espacio cuando otro objeto (asteroide o cometa) chocó contra la Luna o Marte con la suficiente fuerza para despegarlos de la superficie lunar o marciana.

Las meteoritas nos dan pistas sobre el origen y la evolución del sistema solar. Por ejemplo las marcianas se distinguen de las rocas de la Tierra y otros tipos de meteoritas por su composición química y mineral, así como por su edad. La identificación de los lunares se basa en sus características químicas y minerales, por comparación con las rocas lunares traídas a la Tierra por las misiones Apolo.

La Antártida es un lugar especial para su recolección. Se han recuperado allí más que en el resto del mundo. Varios son los factores que hacen a la Antártida ideal para encontrarlos. La primera es la facilidad de encontrarlos sobre el hielo. El siguiente factor es el movimiento del hielo que concentra meteoritas que cayeron en diferentes lugares en diferentes momentos. Las meteoritas son encapsuladas en hielo y se mueven con un glaciar, posteriormente son expuestas en la superficie del hielo cuando éste se erosiona gradualmente [28].

El segundo lugar donde se han encontrado más meteoritas es la superficie fuera de los océanos, una causa es sin duda la cantidad de personas que habitan en la superficie y lo fácil que es observar la caída de estos, que posteriormente facilita su recuperación.

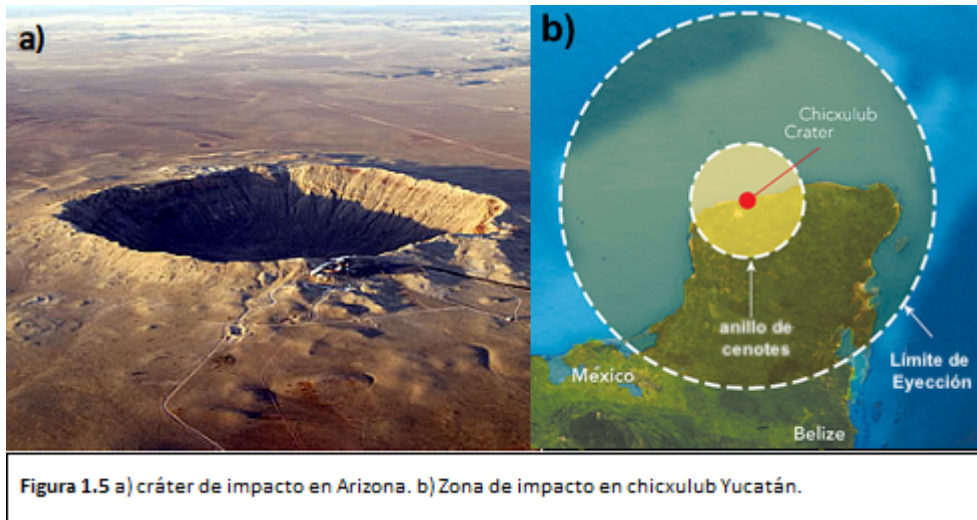
Los océanos son el peor lugar para recuperar meteoritas por el difícil acceso a éste y por la dificultad de ser observados por la población humana. En el presente trabajo se usan datos de impactos fuera de los océanos por el casi nulo registro que se tiene de los mismos en estos sitios.

Impactos

El impacto de un enorme asteroide o cometa nunca ha sido observado y registrado por la humanidad aunque sabemos que en épocas pasadas ha ocurrido, uno de ellos bien conocido es el impacto en Arizona hace aproximadamente 50 000 años (ver Figura 1.5a). El geólogo Daniel Barringer fue el primero en sugerir, en 1903, que el cráter era producto del impacto con un asteroide. Tiene un diámetro de aproximadamente 1200 metros y casi 170 metros de profundidad. La energía liberada durante el impacto evaporó la mayor parte del asteroide.

Otro evento importante registrado es el cráter de impacto de Chicxulub en la península de Yucatán, hace 65 millones de años, de hecho, la extinción de los dinosaurios, se debió a este impacto (Figura 1.5b). De acuerdo con la Universidad de Texas, se estima que había estado viajando a 20 kilómetros por segundo, aproximadamente 20 veces la velocidad de una bala de un rifle.

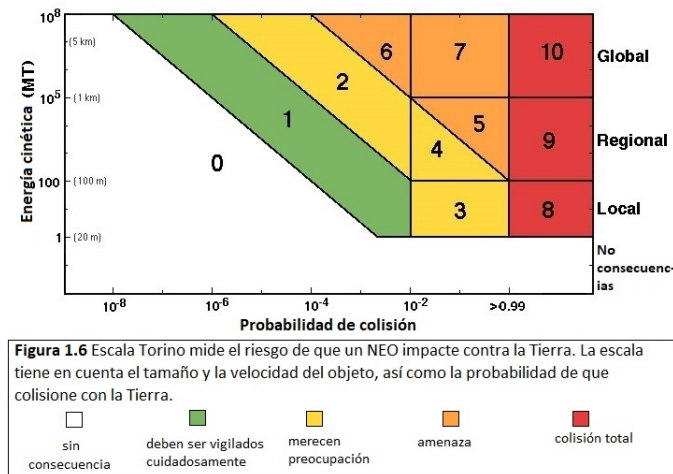
Esta colisión habría liberado una energía equivalente entre 4×10^8 y 4×10^9 megatonnes de TNT [25]. El cráter de impacto inicial es de alrededor de 180 kilómetros de diámetro y 30 kilómetros de profundidad.



Los asteroides o sus fragmentos cayeron en la Tierra en el pasado jugando un papel muy importante, alterando la historia geológica y la evolución de la vida en nuestro planeta. Se calcula que aproximadamente 30 mil meteoroides mayores a 100gr caen cada año sobre la superficie de la Tierra. Una vez al año, de acuerdo a las estimaciones, un asteroide del tamaño de un automóvil colisiona con la atmósfera terrestre.

Probabilidades de impacto contra la Tierra

La probabilidad de morir debido al impacto de un asteroide o de un cometa es de 1 entre 20.000. Según la NASA, un asteroide del tamaño de un campo de fútbol impacta contra la Tierra aproximadamente cada 2,000 años. En 2005 en el MIT el Profesor Richard P. Binzel presentó la escala de Torino, que determina el riesgo de que un objeto cercano a la Tierra (en inglés NEO) impacte contra nuestro planeta. Esta escala combina la probabilidad de impacto y la energía cinética del impacto (ver Figura 1.6).



La escala usa valores de 0 a 10. Un objeto con 0 tiene posibilidad casi nula de causar daño y una enorme probabilidad de impacto que sería por ejemplo el polvo espacial, es decir, demasiado pequeño como para alcanzar a penetrar la atmósfera terrestre. Un valor de 10 indica un riesgo mayúsculo con efectos catastróficos a escala global. El valor asignado entre 0-10 se basa en su probabilidad de colisión y en su energía cinética e

indica qué tan problemática sería la colisión con ese objeto. El objeto que mayor valor ha presentado en la escala es Apophis, un asteroide de 325 metros de dimensión. En 2004 tenía un valor de 2 posteriormente aumento a 4, aunque en 2006 nuevos cálculos en su trayectoria lo situaron en el nivel 0.

En 2011 los objetos con valor más alto de 1 eran los asteroides 2011 AG5(140 metros de diámetro) y 2007 VK184 (130 m de diámetro).

Núcleos Cometarios

Los núcleos cometarios son, junto con los asteroides, los cuerpos más antiguos del sistema solar. Estos cuerpos están formados principalmente de hielo de agua, gases, compuestos orgánicos y compuestos de silicio [3].

Los núcleos cometarios de período corto son los más predecibles ya que les toma menos de 200 años completar una órbita alrededor del Sol. La mayoría viene del Cinturón de Kuiper. El cinturón de Kuiper es un conjunto de cuerpos que orbitan alrededor del Sol a distancias entre 30 y 100 UA (Figura 1.7).

Menos predecibles son los núcleos cometarios de período largo, que provienen de la Nube de Oort (Fig. 1.7) que se extiende hasta 100,000 UA del Sol. A estos cometas les puede tomar alrededor de 30 millones de años terminar un viaje alrededor del Sol. Más de un trillón de núcleos cometarios pueden residir en la Nube de Oort, orbitando el Sol.

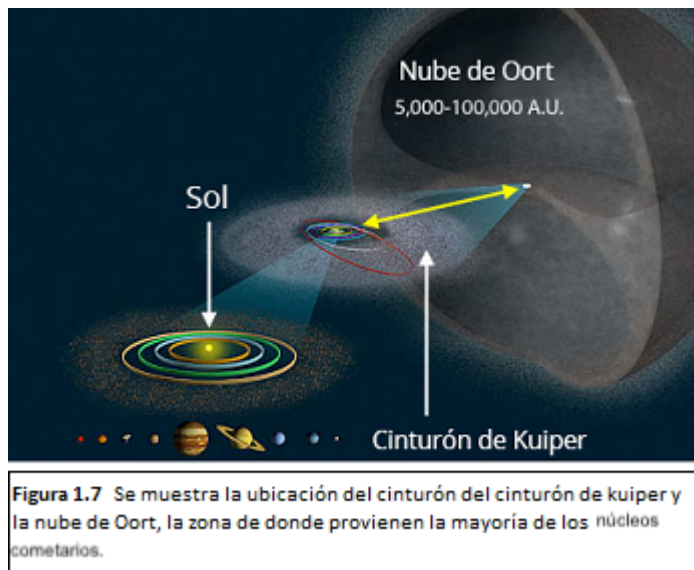


Figura 1.7 Se muestra la ubicación del cinturón del cinturón de kuiper y la nube de Oort, la zona de donde provienen la mayoría de los núcleos cometarios.

Aunque en la Tierra no hemos observado el impacto de un cometa, sí se ha podido observar en otros planetas como el impacto del cometa Shoemaker - Levy 9 (SL9) en Júpiter en julio de 1994. El cometa fue descubierto en marzo de 1993, después de que se dividió en 22 fragmentos a su paso cerca de Júpiter. El tamaño de los restos visibles del SL9 abarcaban un intervalo desde unos cientos de metros hasta un par de kilómetros, lo que sugiere que el cometa original pudo haber tenido un núcleo de hasta 5 km, un poco más grande que el cometa Hyakutake, que se hizo muy brillante al pasar cerca de la Tierra en 1996.

Otro cometa muy conocido es el cometa Halley el cual orbita alrededor del Sol cada 76 años en promedio, aunque su período orbital puede oscilar entre 74 y 79 años. Es uno de los cometas más conocidos y más brillantes del cinturón de Kuiper. Su perihelio, es de

0.6 UA, entre las órbitas de Mercurio y Venus, mientras que su afelio, la mayor distancia al Sol, es de 35.3 UA, cerca de la órbita de Plutón. Fue observado desde el año 240 A.C. El período orbital fue determinado en 1705 por el astrónomo inglés Edmond Halley. Su próxima aparición ocurrirá a mediados de 2061.

CAPITULO 2

2 Funciones de Distribución

Una cantidad variable que expresa el resultado de un experimento aleatorio dado se denominará variable aleatoria o estocástica. Si X denota una variable de este tipo, ésta tomará valores diferentes de manera aleatoria cada vez que se realice el experimento o que suceda el evento de interés. X toma valores en un intervalo. Para trabajar con esta variable, se suele ordenar los valores que toma de menor a mayor. En el presente trabajo X representará la longitud o latitud donde impacta el meteoroides, el intervalo ordenado para la latitud es $[-90,90]$. Las variables aleatorias se clasifican en discretas y continuas:

Discreta: La variable aleatoria X será discreta sólo si puede tomar un número numerable de valores dentro de un intervalo. Por ejemplo, supongamos el experimento consistente en contar los meteoroides que impactan la superficie de la Tierra por año. Si consideramos la variable aleatoria X ="número de impactos por año", los valores que puede tomar esta variable aleatoria son finitos $(0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n)$.

Continua: La variable aleatoria X será continua si los valores asignados pueden tener un infinito de posibilidades, dentro de un intervalo, es decir, puede tomar cualquier valor de \mathbb{R} . Por ejemplo, si consideramos el experimento aleatorio que consistente en medir la altura de la columna de agua en un recipiente y tomamos la variable aleatoria X =altura, esta puede tomar valores entre 0 y $+\infty$.

2.1. Variables Aleatorias Continuas

2.1.1. Función de Distribución de Probabilidad

Denotemos por $P(X=a)$ la probabilidad del suceso correspondiente a que la variable X tome el valor dado de "a". de forma análoga, $P(a < X \leq b)$ representa la probabilidad de que el suceso X tome un valor perteneciente al intervalo $a < X \leq b$. Si conociésemos la probabilidad $P(a < X \leq b)$ para todos los valores entre a y b , tendríamos un conocimiento completo de las probabilidades con que la variable tiende a tomar valores en diferentes partes del dominio de variabilidad. Cuando esto se cumpla, diremos que conocemos la distribución de probabilidad, o simplemente la distribución, de la variable X .

Sea $x \in [a, b]$ un número dado, y consideremos la probabilidad $P(X \leq x)$ de que la variable X tome un valor tal que $X \leq x$, esta probabilidad será función de x . Definiendo

$$F(x) = P(X \leq x) \tag{2.1.1}$$

donde $F(x)$ es la función de distribución (FD) de la variable aleatoria X . Conociendo la función de distribución $F(x)$ para todos los valores de x , la distribución de probabilidad de la variable quedará completamente determinada.

Teorema. Sea F la función de distribución de una variable aleatoria. Entonces se cumple:

- 1.- Para todo $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq F(x) \leq 1$.
- 2.- F es monótona creciente ($x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$).
- 3.- F es continua por la izquierda $\lim_{x \rightarrow x_0^-} F(x) = F(x_0)$
- 4.- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

(2.1.2)

2.1.2. Función de Densidad de Probabilidad (fdp)

Sea X una variable aleatoria continua, se llama función de densidad de probabilidad (fdp) a una función $f(x)$ que permite expresar $F(x)$, la distribución de probabilidad de X , en forma integral:

$$F(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^x f(x)dx$$

(2.1.3)

La función densidad de probabilidad es una función que satisface:

$$a) f(x) \geq 0, \forall x$$

$$b) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$c) F(b) - F(a) = P[a \leq x \leq b] = \int_a^b f(x)dx$$

(2.1.4)

2.1.3. Media, Varianza y Desviación Estándar de las Variables Aleatorias Continuas.

A continuación se tratará el valor esperado (media), la varianza y la desviación estándar como características importantes de las variables aleatorias continuas.

Definición. Sea X una variable aleatoria y continua con $f(x)$ como su fdp, entonces el número, EX , definido por:

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$$

(2.1.5)

se llama valor esperado (media μ) de la variable aleatoria X .

En la definición anterior suponemos que la integral converge absolutamente¹.

¹Se dice que una serie de números reales $\sum_{n \geq 1} x_n$ es absolutamente convergente cuando la serie $\sum_{n \geq 1} |x_n|$ es convergente

Definición. Sea X una variable aleatoria continua con el valor esperado $EX = \mu$ y la fdp $f(x)$, entonces el número D^2X definido por:

$$D^2X = E(X - \mu)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx \tag{2.1.6}$$

Se llama varianza σ^2 (la dispersión) de la variable aleatoria X .

Nuevamente suponemos convergente la integral anterior. El número $\sigma = \sqrt{D^2X}$ se llama, desviación estándar de la variable aleatoria X .

2.1.4. Algunas Funciones de Distribución Continuas

A continuación se enuncian 2 ejemplos de funciones de distribución continuas, la Normal y la Uniforme, existen otras distribuciones como la Beta o la Gamma, aquí no se enunciarán por la nula relevancia en el presente trabajo.

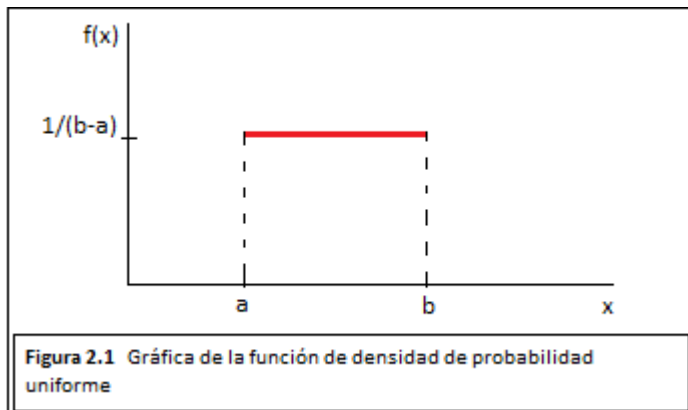
Distribución Uniforme

Supongamos que ocurre un evento en que la variable aleatoria X toma valores de un intervalo finito $[a,b]$, de manera que éstos se encuentran distribuidos igualmente sobre el intervalo. Esto quiere decir que la probabilidad de que la variable X tome un valor en cada subintervalo de igual longitud es la misma.

Definición. Una variable aleatoria X esta distribuida uniformemente sobre el intervalo $[a,b]$ si la función de densidad de probabilidad esta dada por:

$$f(x; a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases} \tag{2.1.7}$$

La función de densidad de probabilidad de una distribución uniforme es constante en el intervalo $[a,b]$ (Figura 2.1).



La función de distribución esta dada por:

$$F(x; a, b) = P(X \leq x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dt \tag{2.1.8}$$

Distribución Normal o Gaussiana

Esta distribución es la de mayor uso de todas las distribuciones continuas de probabilidad y es fundamental en el análisis de datos, ya que muchas muestras estadísticas tienden a esta distribución conforme crece el tamaño de la muestra. Algunos ejemplos son: datos climatológicos como la temperatura, mediciones sobre organismos vivos, mediciones físicas de materiales manufacturados, errores de instrumentación etc. A continuación se proporciona la definición de la función de densidad de probabilidad de la distribución normal. Gauss la citó en un artículo que publicó en 1809, descubierta por DeMoivre en 1733 como una forma límite de la función de probabilidad binomial.

Definición. Una variable aleatoria X se encuentra normalmente distribuida si su función de densidad de probabilidad está dada por:

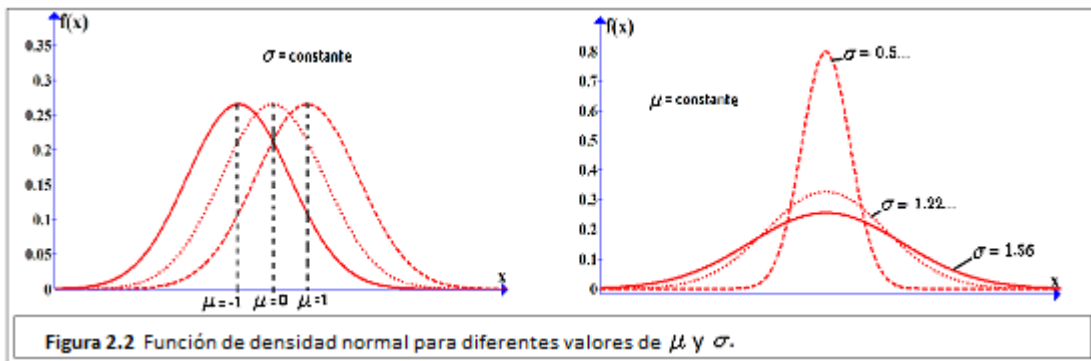
$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] \tag{2.1.9}$$

con $-\infty < x < \infty$, $-\infty < \mu < \infty$ y $\sigma > 0$, donde μ es la media y σ la desviación estandar de X.

Una forma más usada es la función de densidad de probabilidad normal estandarizada de variable aleatoria Z. Donde Z esta definida como $Z = (X - \mu)/\sigma$ y está determinada por:

$$f(z) = P[Z \leq (x - \mu)/\sigma] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(x-\mu)/\sigma} \exp \left(-\frac{z^2}{2} \right) dz \tag{2.1.10}$$

En la figura 2.2 se proporcionan varias gráficas de la función de densidad de probabilidad Normal.



La función de distribución está dada por:

$$F(x; \mu, \sigma) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dt \tag{2.1.11}$$

para el caso de la función de distribución normal estandarizada está determinada por:

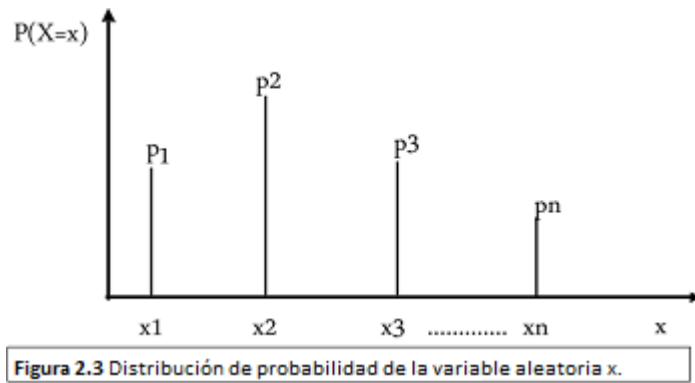
$$F(z) = P(Z \leq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right] dt \tag{2.1.12}$$

2.2. Variable Aleatoria Discreta

Desde el punto de vista del cálculo de probabilidades podemos considerar una variable aleatoria discreta como dada, si se conocen los distintos valores x_k de la variable aleatoria X y las llamadas probabilidades individuales $p_k = P(X = x_k)$, con las cuales la variable aleatoria X adquiere estos valores. Se caracteriza una variable aleatoria discreta X , que acepta los valores x_k con las probabilidades p_k , por la tabla de distribución siguiente:

Tabla 2			
x_1	x_2	x_3 x_n
p_1	p_2	p_3 p_n

o gráficamente (fig.2.3).



2.2.1. Función de Distribución Acumulada

La función de distribución acumulada hasta un punto se obtiene acumulando el valor de la función de densidad de probabilidad $f(x)$ para todos los valores del recorrido (dominio) menores o iguales al punto en cuestión.

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \leq x) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + \dots + P(X = x_i) \\ &= f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \dots + f(x_i) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Sea X una variable aleatoria discreta con la tabla de distribuciones (tabla 2). Entonces se cumplen las siguientes proposiciones:

1.-

$$p_k \geq 0, \sum_k p_k = 1$$

2.-

$$F(x) = \sum_{x_k < x} p_k$$

3.- La función de distribución acumulada F es una función escalonada que posee en los lugares x_k saltos p_k .

(2.2.2)

2.2.2. Media, Varianza y Desviación Estándar de las Variables Aleatorias Discretas

Definición 1. Sea X una variable aleatoria discreta que toma los valores x_k con la probabilidades p_k . Entonces el número EX definido por

$$EX = \sum_{x_k} x_k p_k \tag{2.2.3}$$

se llama valor esperado de la variable aleatoria X .

El valor esperado de una variable aleatoria discreta es: $\mu = media$ pesada de todos los valores x_k de X , empleándose como peso de todo valor x_k , la probabilidad individual correspondiente p_k .

Definición 2. Sea X una variable aleatoria discreta con el valor esperado EX , que toma los valores x_k con sus respectivas probabilidades $p_k = P(X = x_k)$. Entonces el número D^2X definido por:

$$D^2X = E(X - EX)^2 = \sum_k (x_k - EX)^2 p_k \tag{2.2.4}$$

se llama varianza de la variable aleatoria X .

El número $\sigma = \sqrt{D^2X}$ se llama desviación estándar (o desviación típica) de la variable aleatoria X .

2.2.3. Algunas Funciones de Distribución Discretas

Se examinarán brevemente 2 funciones de distribución de probabilidad discretas. Estas son: binomial y Poisson aunque existen otras, no se abordarán puesto que no se requiere para el desarrollo del presente trabajo.

Distribución Binomial

Definición. Sea X una variable aleatoria que representa el número de éxitos en n ensayos y sea p la probabilidad de éxito en cualquiera de éstos. Si la variable aleatoria X toma valores $0, 1, 2, 3, \dots, n$ se denomina distribuida binomialmente con los parámetros n y p , si se cumple que:

$$f(x) = P(X = x) = \left(\frac{n!}{x!(n-x)!} \right) p^x (1-p)^{n-x} \quad (2.2.5)$$

Teorema. Sea X una variable aleatoria distribuida binomialmente con los parámetros n y p . Entonces se cumple que:

$$\begin{aligned} a) & EX = np \\ b) & D^2X = np(1-p) \\ c) & \sigma = \sqrt{np(1-p)} \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

La distribución de probabilidad acumulada se define como:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^x f(k) \quad (2.2.7)$$

Distribución de Poisson

Definición. Sea λ un número positivo arbitrario. Una variable aleatoria X , que puede tomar valores $0, 1, 2, 3, \dots, n$ se dice que sigue una distribución de Poisson (Fig.2.4) con el parámetro λ , si se cumple que:

$$f(x) = P(X \leq x) = \frac{\exp(-\lambda)\lambda^x}{x!} \quad (2.2.8)$$

Teorema. Sea X una variable aleatoria con distribución de Poisson con $\lambda > 0$. Entonces se cumple que:

$$\begin{aligned} EX &= \lambda \\ D^2X &= \lambda \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

La función de distribución acumulada correspondiente es:

$$F(X) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^x f(k) \quad (2.2.10)$$

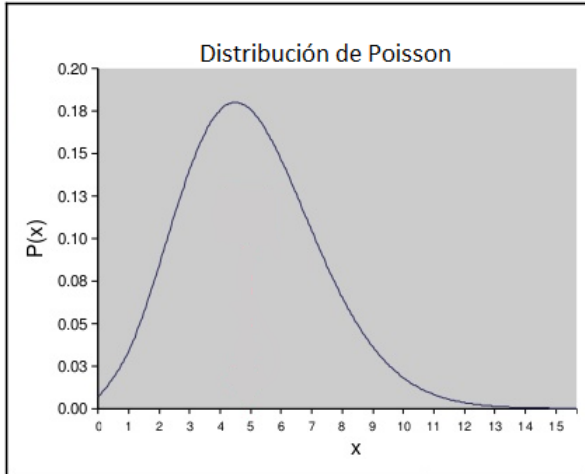


Figura 2.4 Distribución de Poisson con $\lambda = 5$

CAPITULO 3

3 Transformada de Fourier

En 1807, Jean Baptiste Joseph Fourier afirmó que cualquier forma de onda (señal) periódica podía representarse como una suma infinita de ondas sinusoidales de diversas frecuencias, posteriormente se amplió esta idea a funciones no periódicas que cambian en el tiempo, a esto se le conoce como: la Transformada de Fourier (TF).

Las señales se encuentran por todos lados a nuestro alrededor, biológicas (presión, electrocardiograma etc.), señales climáticas, variaciones de la economía, señales de radio, por mencionar algunas. La mayoría de estos fenómenos físicos pueden describirse mediante una señal en el dominio del tiempo y espacio.

Una señal se puede definir como una función de una o más variables que tiene información acerca de la naturaleza del comportamiento de un fenómeno físico. Por ejemplo, el sonido se representa matemáticamente como una función del tiempo, mientras que una fotografía se representa matemáticamente como una función del color respecto a dos variables espaciales. Si la función depende de una sola variable, se dice que es una señal unidimensional, cuando la función es de dos o más variables, se dice que es una señal multidimensional, la variable puede tener una representación matemática continua o discreta. Generalmente las señales son representadas en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia. A la representación de la energía de la señal en función de la frecuencia se le denomina espectro de la señal. Además de las características mencionadas, las señales cuentan con otras más.

En la teoría de sistemas lineales es fundamental la representación de una señal en términos de exponenciales complejas o funciones trigonométricas reales. Esto es debido a que la exponencial compleja es una auto función de cualquier sistema lineal e invariante en el tiempo, mientras que para la senoide es otra senoide de la misma frecuencia, con fase y amplitud determinadas por el sistema.

El espectro de una señal nos enseña como es esa señal en el dominio frecuencial. La respuesta en frecuencia de un sistema aporta el conocimiento de cómo se comporta ese sistema para diferentes condiciones iniciales. Por ejemplo es muy útil el conocer la respuesta en frecuencias de un canal de telecomunicaciones para poder determinar la máxima frecuencia que puede transmitir sin provocar distorsiones de la señal, de modo que ésta sea recibida y reconstruida con total garantía. Otro ejemplo puede ser el análisis de la voz. Transformando la señal de voz en sus componentes frecuenciales podemos distinguir las diferencias entre las voces de distintas personas y determinar las palabras que están diciendo. Esto es muy útil para reconocimiento e identificación de voz.

A continuación abordaremos la Transformada de Fourier, así como algunas de sus propiedades, que nos serán útiles para el análisis de series de tiempo. La Transformada inversa de Fourier no se menciona por el nulo uso que se le da en el presente trabajo.

3.1. Señales

Las Señales son cantidades físicas variables en el tiempo por medio de las cuales se puede transmitir información. La representación matemática (el modelo matemático) de una señal corresponde a la noción de función de una o varias variables. Las señales son representadas por $y = f(t)$, donde t es la variable independiente e y la variable dependiente. Las señales pueden ser continuas (analógica) si la variable t es continua o discreta (digital) si solo está determinada para ciertos valores $y = f(t_n)$. La frecuencia ν es una medida para indicar el número de repeticiones de cualquier fenómeno o suceso periódico en la unidad de tiempo, por tanto $\nu = \frac{1}{T}$ donde T es el período.

Las señales que tienen frecuencias fijas en todo tiempo se denominan señales estacionarias, así que no se necesita saber en qué instante de tiempo existen esas componentes de frecuencia.

Una función periódica se puede definir como:

$$f(t) = f(t + nT), n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

siendo T el período.

Series de Fourier

Joseph Fourier encontró que una función periódica $f(t)$ se puede representar como una suma infinita de términos en senos y cosenos, a esta suma se le conoce como la serie de Fourier, mientras que para funciones no periódicas la representación se da por medio de una integral llamada: la Transformada de Fourier que se describe en la sección 3.2.

Sea $f(t)$ una función periódica de período T , la cual se puede expresar como serie de Fourier, es decir que:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n \sen\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \right] \tag{3.1.1}$$

donde los coeficientes están dados por:

$$\begin{cases} a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt \\ a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt \\ b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sen\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt \end{cases} \tag{3.1.2}$$

con $n \geq 1$

3.2. Transformada de Fourier

Las series de Fourier permiten tratar varios problemas que involucran funciones periódicas, ahora se busca extender este análisis cuando las funciones no son periódicas para asociarles un espectro de frecuencias.

La Transformada de Fourier (TF), $F(\omega)$, de la función $f(t)$ se define como:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \tag{3.2.1}$$

donde $f(t)$ es una función absolutamente integrable y continua a pedazos en todo intervalo finito perteneciente a t , para $-\infty < \omega < \infty$. La condición de suficiencia para que $F(\omega)$ exista es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dx < \infty \tag{3.2.2}$$

Es decir, que $f(t)$ sea de cuadrado sumable. Funciones que no vayan asintóticamente a cero cuando t tiende a ∞ y $-\infty$ en general no tienen transformada de Fourier.

La transformada de Fourier $F(\omega)$ y la función $f(t)$ son ambas en general complejas. $F[f(t)] = F_{\mathbb{R}}(\omega) + iF_i(\omega)$ de modo que esto puede escribirse como:

$$\begin{aligned} F[f(t)] &= F(\omega) = |F(\omega)| e^{i\Theta(\omega)} \\ |F(\omega)| &= \sqrt{F_{\mathbb{R}}^2 + F_i^2} = \text{amplitud o magnitud espectral} \\ \Theta &= \text{fase espectral} \\ |F|^2 &= F_{\mathbb{R}}^2 + F_i^2 = \text{espectro de potencia} \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

si $f(t)$ es real la TF es particularmente simple;

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (\cos(\omega t) - i\text{sen}(\omega t)) dt \\ F_{\mathbb{R}}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t) dt \\ F_i(\omega) &= - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\text{sen}(\omega t) dt \end{aligned}$$

Transformada Discreta de Fourier (TDF)

Para poder encontrar el equivalente discreto de la TF debemos transformar la variable continua t por la variable discreta nt . Para un vector de coeficientes reales, $x[n] = [x_0, x_1, \dots, x_{N-1}]$, su TDF, es el vector N -dimensional $X[k] = [X_0, X_1, \dots, X_{N-1}]$ tal que;

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-\frac{2\pi i}{N}kn} \tag{3.2.4}$$

con $0 \leq k \leq N - 1$

La expresión anterior es la Transformada rápida de Fourier (por sus siglas en inglés FFT) que usa Matlab. La FFT es un algoritmo que reduce el tiempo de cálculo de n^2 pasos a $n \log_2(n)$, el único requisito es que el número de puntos o datos tiene que ser

potencia de 2 (ya no se requiere en las versiones actuales de la FFT). El algoritmo es debido a Danielson-Lanczos, 1942.

Propiedades de la Transformada de Fourier

Algunas propiedades de la Transformada de Fourier que se desprenden de su definición, son las siguientes:

1.-La TF es una aplicación lineal.

$$F[af(t) + bg(t)](\omega) = aF[f(t)](\omega) + bF[g(t)](\omega)$$

2.-si $f(t)$ es absolutamente integrable se cumplen las siguientes relaciones.

a) Cambio de escala

$$F[f(at)](\omega) = \frac{1}{|a|} F[f(t)]\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

b) Traslación

$$F[f(t - a)](\omega) = e^{-i\omega a} F[f(t)](\omega)$$

c) Traslación de la variable transformada

$$F[f(t)](\omega - a) = F[e^{iat} f(t)](\omega)$$

d) Transformada de la derivada: Si $f(t)$ y $f'(t)$ son integrables, entonces

$$F[f'(t)](\omega) = i\omega F[f(t)](\omega)$$

e) Derivada de la transformada:

$$F[f(t)]'(\omega) = F[-itf(t)](\omega)$$

(3.2.5)

Algunos Ejemplos de Señales

En la Figura 3.1 se muestran dos señales en el dominio del tiempo. Para encontrar el espectro de frecuencias de cada señal se puede usar la TF. Estas señales tienen una sola componente de frecuencia 4 y 7 Hz respectivamente.

La TF entrega la información en frecuencia de la señal, pero no indica el instante de tiempo en el que aparece; esta información no es necesaria cuando la señal es estacionaria. Las señales cuyo contenido de frecuencia no cambia en el tiempo se denominan señales estacionarias; por ejemplo, la siguiente señal $x(t) = \cos(2\pi \cdot t) + \cos(2\pi \cdot 3t) + \cos(2\pi \cdot 5t) + \cos(2\pi \cdot 8t)$ es una señal estacionaria cuyas frecuencias 1,3,5 y 8 Hz. están presentes en cualquier instante.

En la Figura 3.2a) se muestra esta señal, y en 3.2b) su TF. En 3.2b) se observa una simetría, puesto que el espectro de frecuencias de una señal es simétrico y por lo tanto la segunda mitad es redundante. Ésta simetría es debido a que $x(t)$ es real por tanto su TF es simétrica conjugada ($|F(\omega)| = |F(-\omega)|$). Ésta propiedad de simetría permite calcular la magnitud de los puntos de un período completo, con sólo calcular los $N/2 + 1$ primeros puntos, siempre y cuando el origen de la TF este centrado en el punto $(N/2, N/2)$. Para conseguir este movimiento del origen en la TF, se aplica la propiedad de translación.

3 Transformada de Fourier

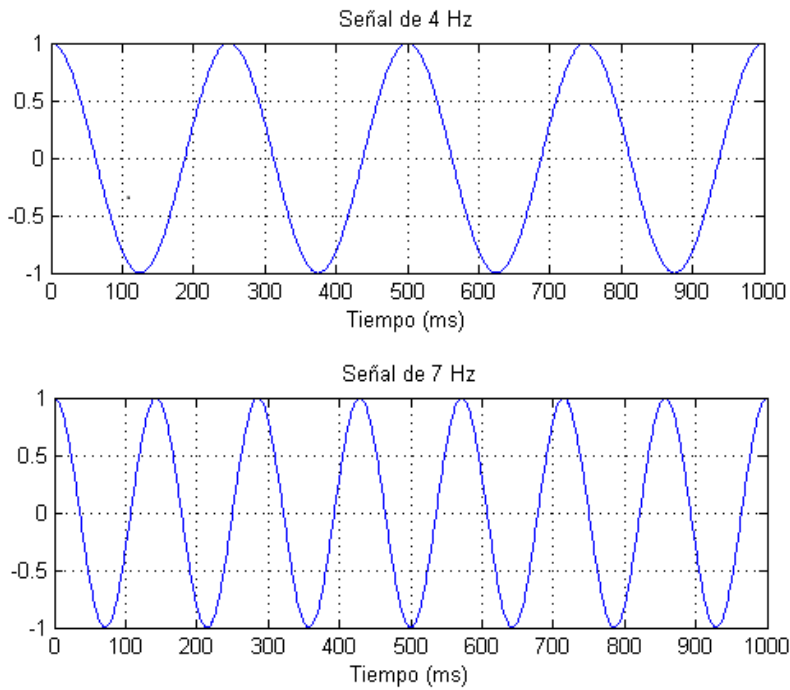
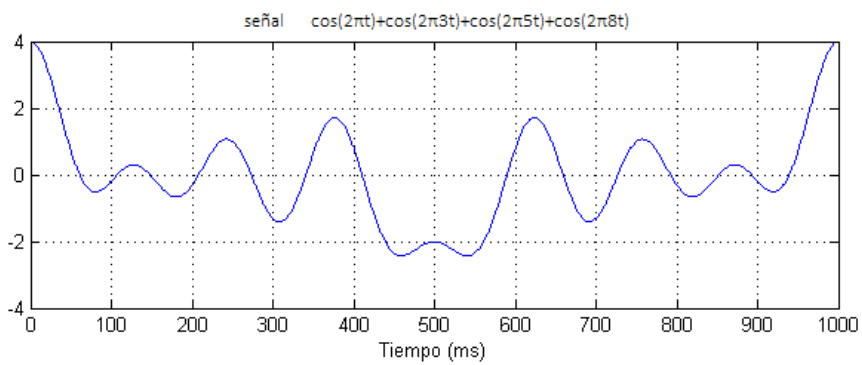
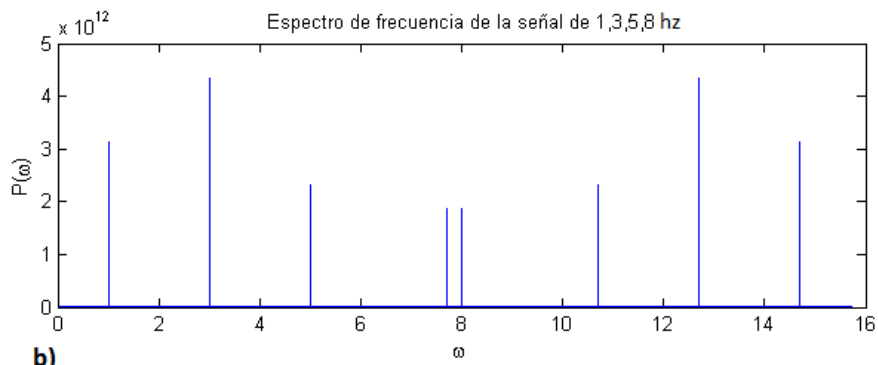


Figura 3.1 Señales con frecuencia de 4 y 7 Hz respectivamente



a)



b)

Figura 3.2 Señal estacionaria a) con su espectro de frecuencia b) calculado con la Transformada de Fourier.

La Figura 3.3a muestra una señal que no es estacionaria, posee 3 frecuencias distintas en 3 intervalos de tiempo distintos. Se observa que al calcular la TF ésta nos devuelve las frecuencias 1,3 y 5 Hz, pero no nos dice en que tiempo ocurre cada frecuencia, eso se debe a que la TF sólo proporciona el contenido espectral de la señal y no el intervalo de tiempo al cual ocurre dicha frecuencia. Ésta es la razón por la cual la TF no es una técnica adecuada para señales no estacionarias.

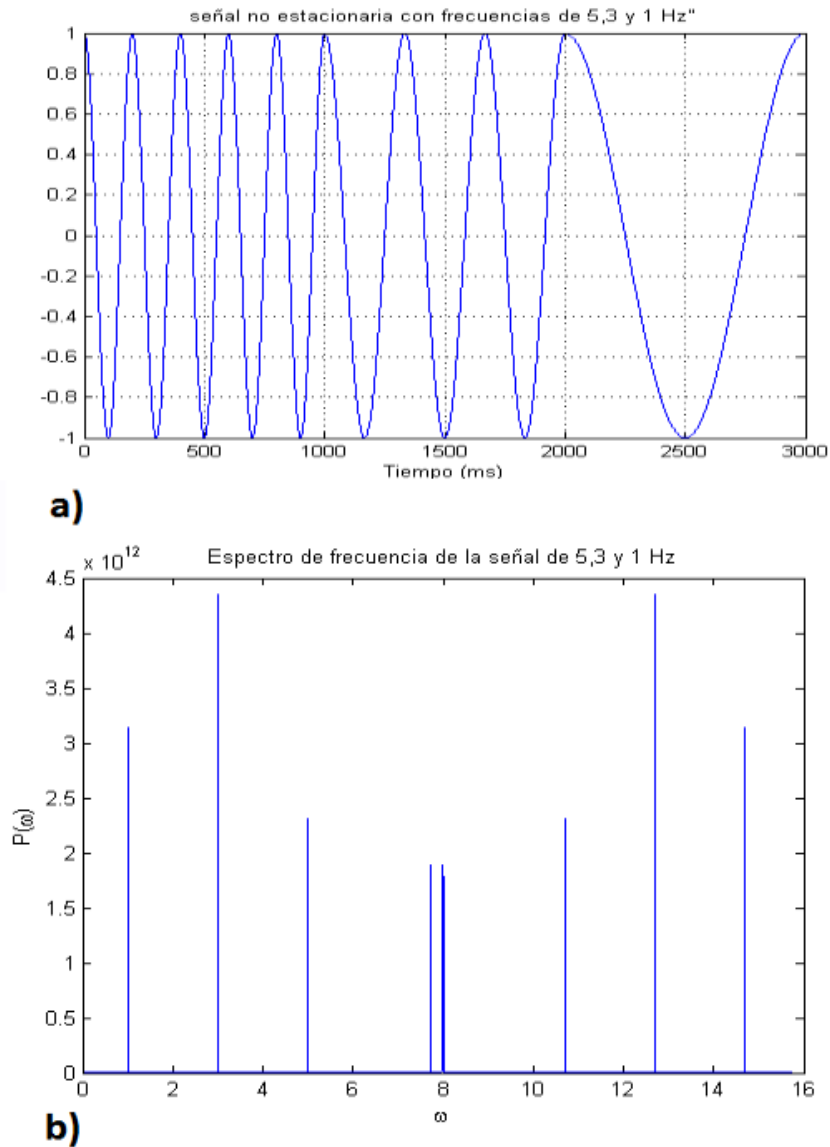


Figura 3.3 a) muestra una señal no estacionaria con su respectivo espectro de frecuencias **b)**.

3.3. Transformada de Fourier Con Ventanas

Como ya se mencionó, la TF es una herramienta bastante exitosa para el análisis de señales estacionarias. Sin embargo ésta no puede ser aplicada con el fin de obtener información precisa de cuándo las diferentes componentes de frecuencia hacen su aparición en la señal. Para resolver el problema, Denis Gabor (1946) adaptó la transformada utilizando un procedimiento llamado ventaneado, que consiste en dividir una señal $x(t)$ en pequeños segmentos a través del tiempo de forma que se pueda asumir que, para cada segmento, la señal es estacionaria y así calcular la TF de cada uno de ellos. La señal se divide mediante una ventana temporal $g(t)$, cuyo ancho corresponde a la longitud del segmento en los que se divide la señal total. Se multiplica la señal total por la ventana temporal que tiene un valor definido dentro del intervalo de la ventana y un valor nulo fuera de él.

Se define la TF en tiempos cortos STFT para la señal $x(t)$ como:

$$X_g(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)g(t - \tau)e^{-i2\pi\omega t} dt \quad (3.3.1)$$

se sume que $g(t)$ esta bien localizada.

Función ventana $g(t)$

El hablar de la resolución en tiempo-frecuencia de la STFT es hablar de la selección de la ventana temporal. Si la ventana es estrecha se analizarán segmentos de la señal pequeños que permiten tener buena resolución en tiempo pero una mala resolución en frecuencia, ya que sólo se observarán las frecuencias de las componentes de frecuencia igual y mayores al inverso del tamaño de la ventana. Si la ventana seleccionada es muy ancha se tendrá una buena resolución en frecuencia pero una mala resolución en tiempo, si es de ancho infinito regresamos nuevamente a la TF.

Principio de incertidumbre de Heisenberg

Un defecto de la STFT es el no poder dar una alta resolución en tiempo y frecuencia de manera simultánea. El problema se basa en el principio de incertidumbre de Heisenberg, el cual establece que es imposible conocer una representación exacta tiempo-frecuencia de una señal; es decir, no podemos saber qué valor de frecuencia existe en un instante de tiempo determinado, sólo se puede conocer qué componentes de frecuencia existen dentro de un intervalo de tiempo dado.

Cada ventana se localiza en un rectángulo centrado en el punto (τ, ω) con dimensiones $\Delta t \Delta \omega$. La relación ideal entre Δt y $\Delta \omega$ [6] está limitada y satisface;

$$\Delta t \Delta \omega \geq \frac{1}{2}$$

La igualdad en la expresión anterior se da cuando la ventana $g(t)$ es una ventana de Gauss y la STFT se conoce como la Transformada de Gabor. Así, Gabor propuso a la función Gaussiana como la función ventana $g(t)$ y demostró que la TF de una ventana Gaussiana continúa siendo Gaussiana. La función de la Figura 3.4 está definida como:

$$g(t) = \frac{1}{s} \exp\left(-\frac{\pi t^2}{s^2}\right)$$

(3.3.2)

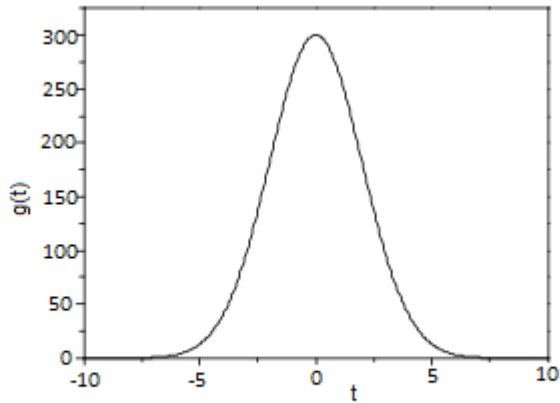


Figura 3.4 Función ventana $g(t)$

Existen muchas funciones ventanas como por ejemplo: Rectangular, Hann, Hamming, Blackman, Triangular, Bartlett, Kaiser etc. Con la STFT se logra una mejor localización de la aparición de una singularidad en una señal. Pero solo se conocerá en qué intervalo de tiempo se produce la singularidad, debido a que la localización depende del ancho de la función ventana. Además, los eventos no podrán ser resueltos si aparecen muy cerca unos de otros, ya que no será posible distinguir diferentes comportamientos dentro de una misma amplitud de ventana. Una herramienta matemática que permite resolver este problema es la Transformada Wavelet, que se abordará en el siguiente capítulo.

CAPITULO 4

4 Análisis Wavelet

Como ya se vio, la TF puede determinar todas las frecuencias presentes en una señal, sin embargo no se puede saber en qué instante de tiempo están presentes en la señal, es decir, la señal está representada en el dominio de la frecuencia, pero no al mismo tiempo en el dominio del tiempo. Para señales estacionarias no es necesario conocer el instante de tiempo en el que se presenta una frecuencia, es decir, todas las frecuencias son constantes en el tiempo.

El Análisis de Wavelets no sólo nos da las frecuencias principales, sino que nos indica cuándo ocurren y cuál es su duración. Mientras que el análisis de Fourier descompone una señal en funciones de senos de varias frecuencias, el análisis de wavelets descompone una señal en versiones escaladas móviles de la Wavelet madre original. En el análisis Wavelet no se supone que la señal sea periódica, lo que hace posible estudiar señales que exhiben cambios bruscos o discontinuidades. La Transformada Wavelet fue diseñada originalmente para estudiar señales no estacionarias. Es capaz de revelar aspectos importantes de los datos como tendencias, puntos de quiebre, discontinuidades en las derivadas, y auto-similaridad, lo que proporciona una adecuada herramienta para el análisis de fenómenos transitorios, no estacionarios, variables en el tiempo y aquellos que presenten discontinuidades.

La Transformada Wavelet ha sido usada por numerosos estudios en geofísica por ejemplo: la convección tropical, el Niño, frentes fríos atmosféricos, señales sísmicas, la dispersión de ondas oceánicas, estructuras coherentes en fluidos turbulentos [7], estudio de las periodicidades de la actividad geomagnética solar[1]. También se ha utilizado para la caracterización de latidos cardíacos[8], etc.

Una wavelet es una onda pequeña, pudiera pensarse como la Figura 4.1a, aunque en realidad es como la que se muestra en la Fig. 4.1b con duración limitada y energía concentrada en el tiempo alrededor de un punto.

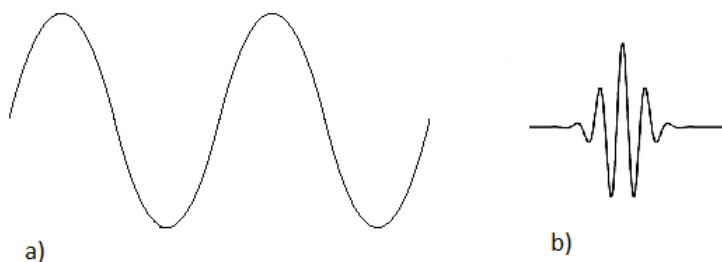


Figura 4.1 a) señal seno b) Wavelet Daubechies

A continuación definiremos la Transformada Wavelet continua y la Transformada Wavelet discreta, la Transformada Wavelet inversa no se abordará por el nulo uso que se le da en el presente trabajo.

4.1. Transformada Wavelet

El espacio métrico en el que esta definida la Transformada Wavelet (TW) es $L^2[-\infty, +\infty]$ de Hilbert. El espacio H de Hilbert es un espacio vectorial con elementos en \mathbb{C} . Se define para H una métrica y un producto interno como sigue. Sean f y $g \in H$, el producto interno (escalar) entre f y g se define por:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x)g(x)dx \quad (4.1.1)$$

con f^* el conjugado de f , si $f \in \mathbb{C}$, entonces se satisface:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < \infty \quad (4.1.2)$$

este espacio, con esta métrica, recibe el nombre de espacio $L[-\infty, +\infty]$ de Hilbert.

Definiendo Wavelets

Sea ψ una función de valores complejos que satisface las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt &= 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt &< \infty \\ 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega &< \infty \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

donde Ψ es la Transformada de Fourier de ψ . La primer condición implica promedio nulo, la segunda, energía finita de la función ψ , la tercera es una condición de admisibilidad, lo que quiere decir que la función $\psi(t)$ esté bien localizada en el tiempo, es decir, que la función oscile alrededor de un eje con promedio cero (primera condición), esto implica que, si $\Psi(\omega)$ es suave entonces $\Psi(0) = 0$. La función ψ es una función madre Wavelet.

La TW de una función $f(t)$ a una escala s y una posición τ , es la descomposición de $f(t)$ en un conjunto de funciones $\psi_{s,\tau}(t)$, que forman una base y son llamadas «Wavelets» que se define como:

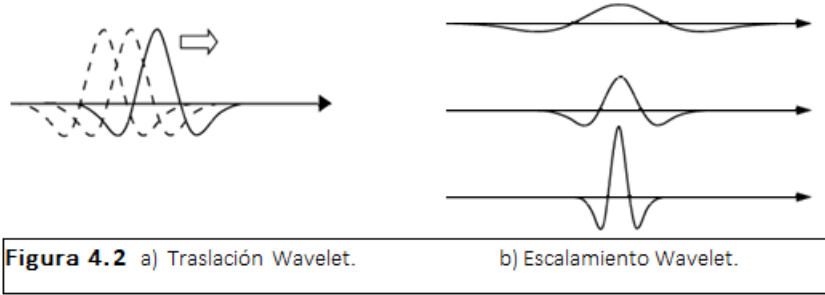
$$W_f(s, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi_{s,\tau}^*(t)dt \quad (4.1.4)$$

Las Wavelets son generadas a partir de la traslación y cambio de escala de una misma función Wavelet $\psi(t)$, llamada «Wavelet madre», que cumple las condiciones (4.1.3), y se define como:

$$\psi_{s,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}}\psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) \quad (4.1.5)$$

donde s es el factor de escala, y τ es el factor de traslación (fig 4.2).

Las Wavelets generadas de la función madre $\psi(t)_{s,\tau}$ tienen diferente escala s y ubicación τ , pero todas tienen la misma forma. Siempre se utilizan factores de escala $s > 0$, si $s > 1$ las Wavelets se dilatan, y se contraen cuando $s < 1$. Para valores s grandes corresponden frecuencias de menor tamaño, valores s pequeños corresponden a frecuencias de mayor rango. Con la Transformada Wavelet se obtiene información localizada en el dominio del tiempo de $f(t)$ si $s < 1$, y la información de $\hat{f}(\omega)$ localizada en el dominio de la frecuencia si $s > 1$.



“La TW maneja un plano de tiempo escala, pero también puede ser de tiempo frecuencia, para esto se recurre al Teorema de Parseval¹ y de esta manera es posible definir la TW en el dominio de la frecuencia” [9].

$$W_f(s, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \sqrt{s} \bar{\psi}^*(s\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (4.1.6)$$

Para poder introducir el término de escala y frecuencia, se define una constante c , que permite realizar un cambio de variable de una escala s a una frecuencia ω :

$$s \rightarrow \omega = \frac{c}{s} \quad (4.1.7)$$

Con este cambio de variable es posible observar que la TW localiza de forma simultánea la señal $f(t)$ en el dominio del tiempo como su espectro $\hat{f}(\omega)$ en el dominio de la frecuencia [10].

Transformada Wavelet Discreta

Para una señal discreta $\{x_n\}$, la Transformada Wavelet Discreta se define como:

$$W_n(s) = \sqrt{\frac{\delta t}{s}} \sum_{n'=0}^{N-1} x_n \psi^* \left(\frac{(n-n')\delta t}{s} \right) \quad (4.1.8)$$

¹dice que el total de potencia o energía en una señal se obtiene por la integración sobre todo el tiempo y sobre las frecuencias, y en ambos dominios está relacionado con el cuadrado de la amplitud.

Normalización

Para asegurar que la TW en cada escala s es directamente comparable a cada una y a las transformadas de otras series de tiempo, la función wavelet en cada escala s esta normalizada para tener energía unitaria [7].

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(sw_k) &= \left(\frac{2\pi s}{dt}\right)^{1/2} \hat{\psi}_0(sw_k) \\ \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}_0(w')|^2 dw' &= 1 \\ w_k &= \begin{cases} \frac{2\pi k}{Ndt} & k \leq \frac{N}{2} \\ -\frac{2\pi k}{Ndt} & k > \frac{N}{2} \end{cases}\end{aligned}\tag{4.1.9}$$

done $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ es el índice de frecuencia, ψ_0 es la Wavelet madre y $\hat{\psi}_0$ su Transformada de Fourier. Usando estas normalizaciones, en cada escala s se tiene que:

$$\sum_{k=0}^{N-1} |\hat{\psi}_0(w')|^2 = N\tag{4.1.10}$$

4.2. Ejemplos de Funciones Wavelet Madre

Un punto importante en el Análisis Wavelet es la selección de la función $\psi(t)$. Existen varios factores que deben ser considerados, Ortogonal o no-ortogonal, Real o compleja, Anchura, Forma [7].

Wavelet Haar

Sea $\phi(t)$ un pulso cuadrado definido como:

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{cualquier otra} \end{cases}$$

definiendo la siguiente función $\psi(t) = \phi(2t) - \phi(2t - 1)$ obtenemos:

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < t \leq 1/2 \\ -1 & \text{si } 1/2 < t \leq 1 \\ 0 & \text{cualquier otra} \end{cases}\tag{4.2.1}$$

La función $\phi(t)$ es la función de escala Haar y $\psi(t)$ es la Wavelet Haar. Esta función es ortogonal a sus traslaciones y dilataciones, es decir, a la familia $\psi_{m,n}(t) = 2^{-m/2}\psi(2^{-m}t - n)$ con $m, n \in \mathbb{Z}$. Algunas de ellas se observan en la Figura 4.3.

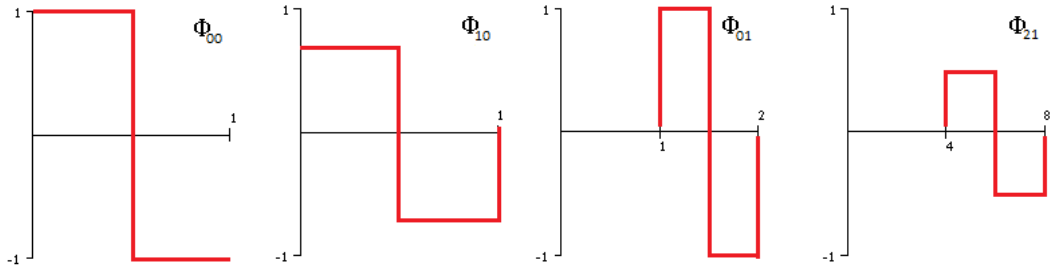


Figura 4.3 Función madre Haar Φ_{10} , Φ_{01} , Φ_{21}

Wavelet Meyer

Es una Wavelet ortogonal propuesta por Yves Meyer (fig 4.4c). Primero se define la TF $\Phi(\omega)$ de una función de escala $\phi(t)$ como:

$$\Phi(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\omega| \leq \frac{2}{3}\pi \\ \cos \left[\frac{\pi}{2} \nu \left(\frac{3}{4\pi} |\omega| - 1 \right) \right] & \text{si } \frac{2}{3}\pi \leq |\omega| \leq \frac{4}{3}\pi \\ 0 & \text{cualquier otra} \end{cases} \quad (15)$$

donde ν es una función suave, que satisface las siguientes condiciones:

$$\nu(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

con una propiedad adicional $\nu(t) + \nu(1 - t) = 1$.

$$\Psi(\omega) = e^{i\omega/2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \Phi(\omega + 2\pi(2l + 1)) \Phi(\omega/2) = e^{i\omega/2} [\Phi(\omega + 2\pi) + \Phi(\omega - 2\pi)] \Phi(\omega/2) \quad (4.2.2)$$

entonces ψ se obtiene tomando la Transformada Inversa de Fourier de $\Psi(\omega)$.

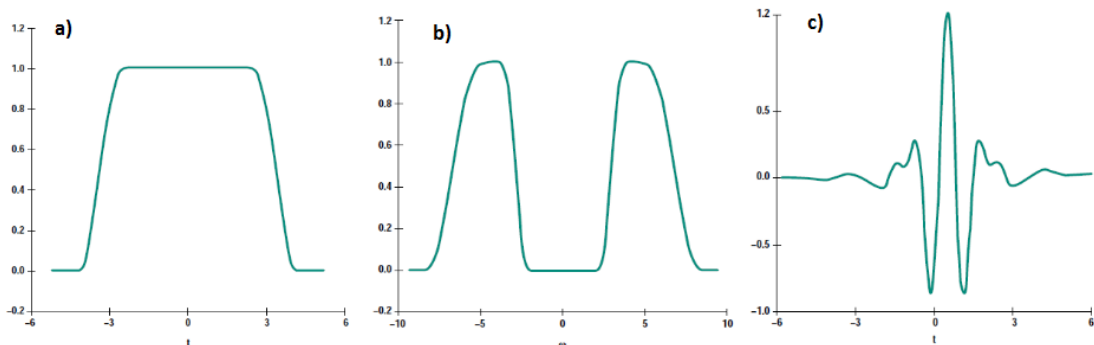


Figura 4.4 a) $\phi(t)$ TF de la función de escalamiento para la base Meyer. b) $\Psi(\omega)$ TF de la Meyer wavelet. c) $\psi(t)$ Meyer wavelet.

Wavelet Daubechies

Sea $\{a_k; k \in \mathbb{Z}\}$ una progresión que satisface las siguientes 4 condiciones para todos los $N \geq 2$:

- 1) $a_k = 0$ si $k < 0$ o $k > 2N$
- 2) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k a_{k+2m} = \delta_{0m}$ para todos los enteros m
- 3) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k = \sqrt{2}$
- 4) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta^k k^m = 0$, $0 \leq m \leq N - 1$ donde $\beta_k = (-1)^k a_{-k+1}$
 si $N=1$ entonces $a_0 = a_1 = 1$
 y sea $\phi(t)$ una solución de la ecuación funcional:

$$\phi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \sqrt{2} \phi(2t - k)$$

se tiene entonces la función:

$$\psi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_k \sqrt{2} \phi(2t - k)$$

(4.2.3)

En la Figura 4.5 se muestra la Daubechies escalando la función ϕ y la correspondiente Wavelet ψ para $N=2$.

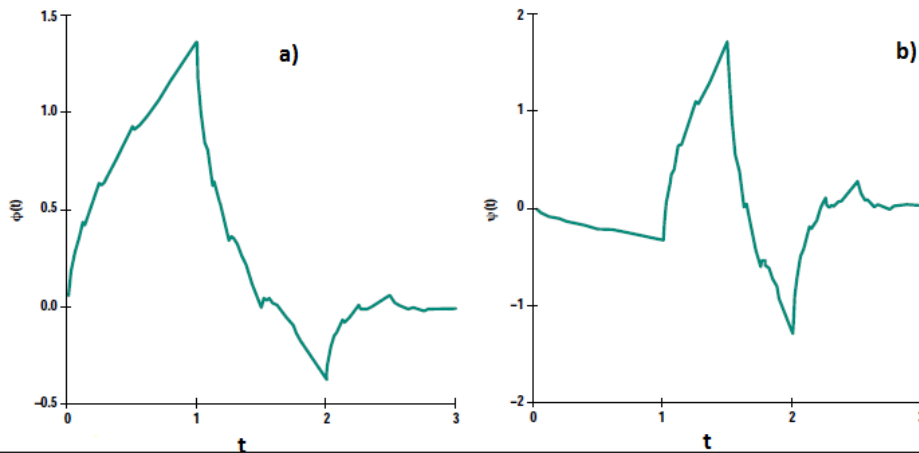


Figura 4.5 a) Escalado para $N=2$. b) Daubechies wavelet para $N=2$.

Wavelet Morlet

La Morlet Wavelet se define como:

$$\psi(t) = \pi^{-1/4} \left(e^{-iw_0 t - e^{w_0^2/2}} \right) e^{-t^2/2}$$

(4.2.4)

tomando $w_0 \geq 5$, el segundo término exponencial es despreciable [11], usualmente está definida como:

$$\psi(t) = \pi^{-1/4} e^{iw_0 t} e^{-\frac{t^2}{2}} \quad (4.2.5)$$

En el presente trabajo se usa la Morlet Wavelet que consiste en una onda plana compleja modulada por una Gaussiana (segundo factor exponencial Ec.4.2.5). Donde $w_0 = 6$ es la frecuencia adimensional, $\pi^{-1/4}$ es el factor de normalización. Un aspecto importante de esta Wavelet es su fase (escalar) $\tan^{-1}[Im\{W_n(s)\}/Re\{W_n(s)\}]$ que resulta adecuada para la detección de singularidades. La razón de elegir la función 4.2.5 es que se usa muy a menudo para obtener una alta exactitud en las frecuencias que componen la señal. En la Figura 4.6 se muestra esta función.

La Transformada de Fourier de 4.2.5 es:

$$\hat{\psi}(w) = \pi^{-1/4} e^{-(w-w_0)^2/2} \quad (4.2.6)$$

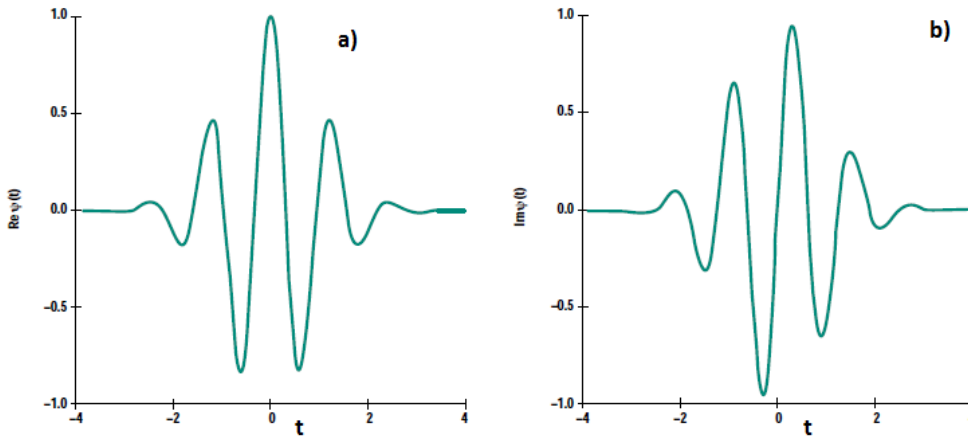


Figura 4.6 a) parte real de la Morlet wavelet con $w_0=5$. b) parte Imaginaria con $w_0=5$

4.3. Espectro de Potencias de Wavelet

Se define el espectro de potencia Wavelet para el caso continuo y discreto respectivamente como:

$$|W_f(s, \tau)|^2 \rightarrow |W_n(s)|^2 \quad (4.3.1)$$

Para Wavelet Madre se define también la fase como:

$$\tan^{-1} \left(\frac{Im(W_n(s))}{Re(W_n(s))} \right) \quad (4.3.2)$$

Para poder comparar distintos espectros Wavelet de señales distintas, el espectro Wavelet se normaliza por el factor σ^2/N , donde σ es la varianza y N el número total de datos. En el eje de las abscisas se representa el tiempo de duración de la señal, en el de las ordenadas, los períodos (o su inversa, las frecuencias) y el valor de las potencia Wavelet se representa por áreas en distintos colores que van del azul (módulo pequeño) al rojo (mayor módulo), (Figura 4.7).

Un corte vertical a través de un gráfico Wavelet es una medida del espectro local, el espectro Wavelet de tiempo promediado sobre un cierto período es;

$$\overline{W}_n^2(s) = \frac{1}{n_a} \sum_{n=n_1}^{n_2} |W_n(s)|^2 \tag{4.3.3}$$

donde es asignado arbitrariamente al punto medio de n_1 y n_2 y $n_a = n_2 - n_1 + 1$ es el número de puntos que están en el promedio. El caso extremo es cuando el promedio está sobre todo el espectro local Wavelet, lo cual da el espectro global Wavelet, el espectro global Wavelet es el promedio en el tiempo de cada nivel de resolución [7] definido como:

$$\overline{W}_n^2(s) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |W_n(s)|^2 \tag{4.3.4}$$

Cono de influencia

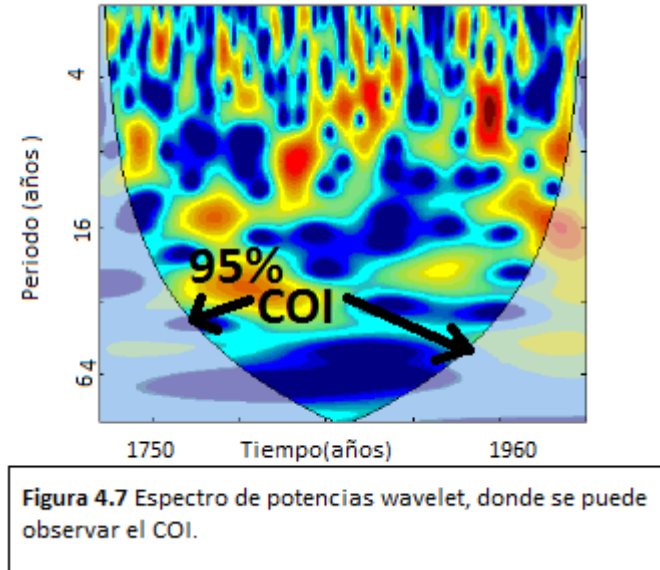


Figura 4.7 Espectro de potencias wavelet, donde se puede observar el COI.

El cono de influencia (COI) es la región en la que los espectros de potencia Wavelet se distorsionan debido a la influencia de los puntos finales de longitud finita de la señal (ver Fig. 4.7). Esto debido a que la señal o serie de tiempo con la que trabajamos es finita. Por lo que la solución a estos efectos es rellenar el final de la serie de tiempo con ceros, antes de hacer la TW y entonces removerlos posteriormente [7].

El cono que se observa representa el intervalo de confianza del 95 % (dentro del cono). El valor de los períodos corresponde, aunque no de forma estricta, a las frecuencias del espectro de Fourier.

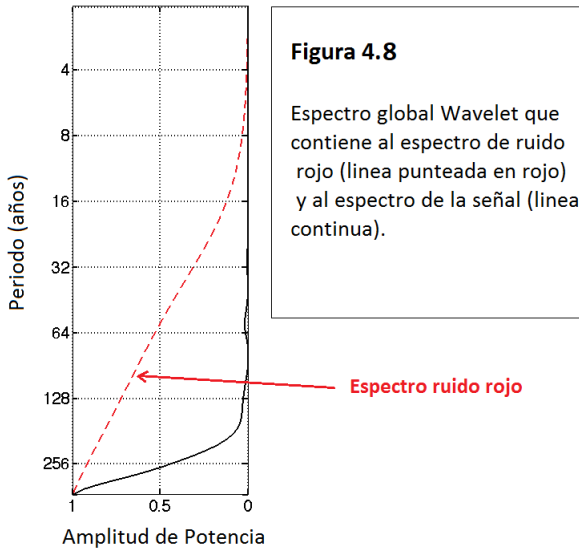
Un modelo simple [12] para el ruido rojo es el proceso autoregresivo invariante de primer orden o proceso de Markov², se define como:

$$x_n = \alpha x_{n-1} + z_n \tag{4.3.5}$$

donde α es la autocorrelación lag-1³ asumida, si $\alpha = 0$ se obtiene un espectro de ruido blanco, $x_0 = 0$, y z_n es obtenida a partir del ruido blanco gaussiano de (4.3.5), que después de la normalización, es:

$$P_k = \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(2\pi k/N)} \tag{4.3.6}$$

donde $k = 0, 1, \dots, N/2$ es el índice de frecuencia y N es el número de puntos. Este espectro de ruido rojo permite obtener una confianza del 95 % en el espectro global Wavelet. Si un pico en el espectro de potencia wavelet esta por arriba del espectro de ruido rojo tendrá el 95 % de confianza. La Figura 4.8 muestra el espectro de ruido rojo dentro de un espectro global Wavelet.



4.4. Incertidumbres

Todo dato capturado u obtenido por cualquier medio debería ir acompañado de un valor cuantitativo que nos de una idea de su calidad, es decir, de un parámetro que caracterice la dispersión de los valores que podrían atribuirse al mismo. Este parámetro, que llamaremos la incertidumbre, es una estimación del rango de valores que contiene

² $p_k = \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(2\pi k/N)}$ con $k = 0, 1, 2, \dots, N/2$ si $\alpha = 0$ se tiene el espectro del ruido blanco, para cualquier otro valor de α es ruido rojo.

³si $k = -1$ tenemos un lag-1 [12]. $\overline{x_n x_{n-k}} / \overline{x_n^2} = \alpha^k$

el valor verdadero de la cantidad medida. Representa la probabilidad de que el valor verdadero esté dentro de un rango de valores indicado.

Un método general para determinar la incertidumbre en una función $z(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es la diferencia δz que está dada por;

$$\delta z = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\delta z}{\delta x_i} \right| \delta x_i \quad (4.4.1)$$

donde δx_i es la incertidumbre asociada a cada x_i .

Para la propagación de incertidumbre con caracter estadístico tenemos que la desviación estándar σ_z es;

$$\sigma_z = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\delta z}{\delta x_i} \right)^2 (\sigma_i)^2} \quad (4.4.2)$$

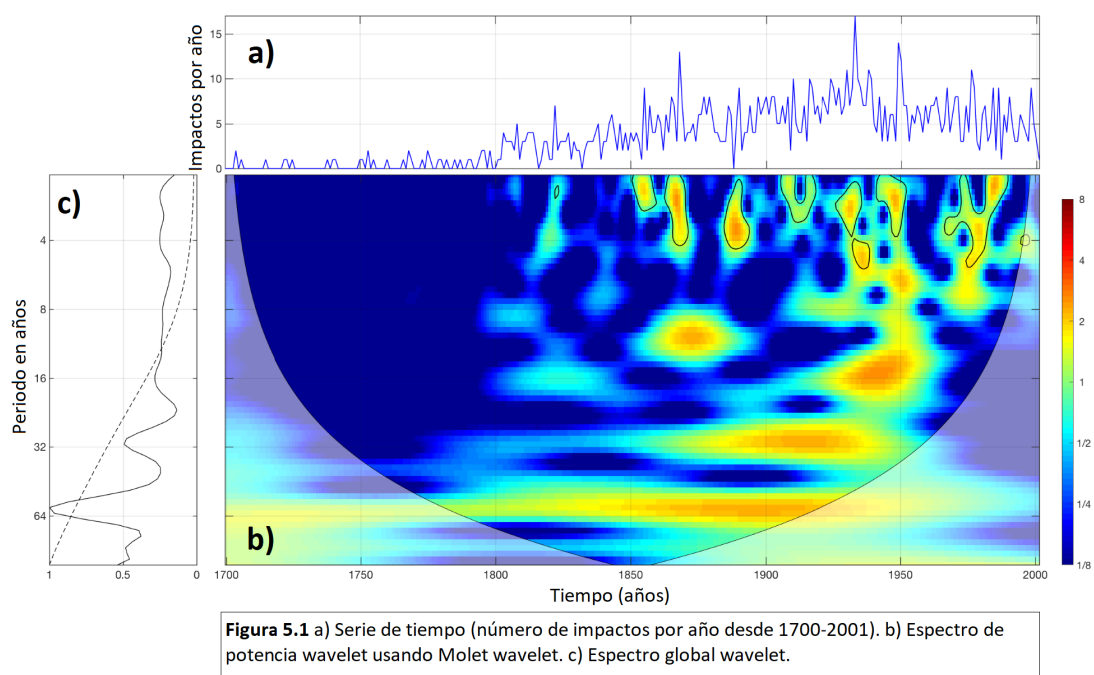
donde $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ son las respectivas desviaciones estándar en las medidas de las magnitudes x_1, x_2, \dots, x_n .

La incertidumbre asociada a los picos en el espectro global Wavelet (periodicidades encontradas), es la mitad del ancho del pico, que cruza por la mitad de la altura del mismo, asumiendo que el pico tiene forma aproximada a una Gaussiana [13].

Resultados

Análisis Wavelet de los impactos

Los datos utilizados para el Análisis Wavelet fueron tomados de la base de datos del Museo de Historia Natural de Londres. El museo cuenta con alrededor de 30 mil registros de meteoritas que se han encontrado sobre la superficie de la Tierra (no se tienen datos de impactos sobre el océano), de los cuales 1170 fueron vistos al caer entre 465A.C-2001D.C. El algoritmo utilizado en matlab para el análisis Wavelet es una variante del desarrollado por C. Torrence y G. Compo [7] (el cambio radica en la salida gráfica de los resultados). La función madre que se usa es la Morlet Wavelet.



La Figura 5.1a representa la serie de tiempo de número de impactos anuales registrados, del año 1700-2001 DC. Aunque se tenían datos desde el 430 A.C, sólo se tomaron a partir del año 1700 DC, ya que antes de esta fecha son casi nulos los registros de impactos, lo cual originaba que las periodicidades encontradas estuvieran por debajo de la línea de confianza (ruido rojo).

En la Figura 5.1b se muestra el espectro de potencia Wavelet de los datos (en azul periodos de menor potencia, en rojo los de mayor potencia). Se muestra tiempo contra período en años. La curva que se aprecia es el COI con un 95% de información confiable. La Figura 5.1c (curva punteada) muestra su espectro global Wavelet con su respectivo ruido rojo.

La Figura 5.2 muestra un acercamiento de la Figura 5.1c y presenta el espectro global Wavelet de la serie de tiempo de impactos. Las unidades del eje de las ordenadas son arbitrarias.

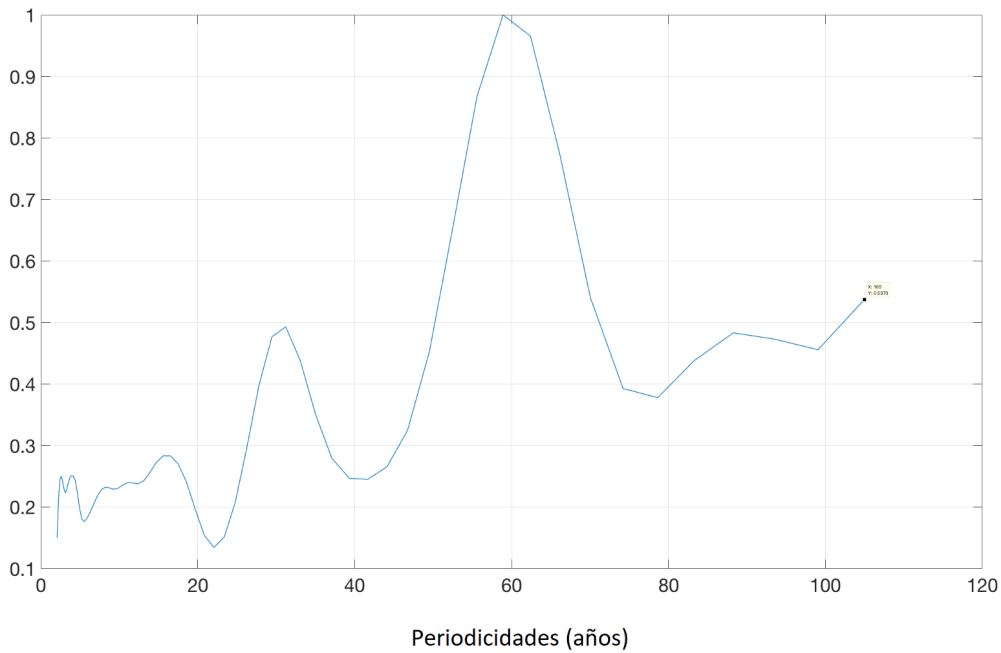


Figura 5.2 Espectro global wavelet.

Las periodicidades encontradas en el gráfico 5.2 se muestran en la Tabla 2, su incertidumbre asociada fue encontrada usando el criterio de la sección 4.4.

Tabla 2. periodicidades número de impactos por año

Períodos (años)
2.60 ± 0.26
3.9 ± 0.44
8.26 ± 0.32
11.69 ± 0.38
16.53 ± 2.22
31.2 ± 3.65
58.9 ± 8.75

Tabla 3. Distancias en unidades astronómicas asociadas a cada periodicidad encontrada en la tabla 2 usando la 3ra ley de Kepler.

T (años)	a (UA)
2.6 ± 0.26	1.89 ± 0.12
3.9 ± 0.44	2.47 ± 0.18
8.26 ± 0.32	4.08 ± 0.10
11.69 ± 0.38	5.15 ± 0.11
16.53 ± 2.22	6.48 ± 0.58
31.2 ± 3.65	9.91 ± 0.77
58.9 ± 8.75	15.13 ± 1.49

Utilizando la tercera ley de Kepler obtenemos una distancia asociada a para cada

período T (Tabla 3), la incertidumbre de la distancia a fue calculada usando la ecuación 4.4.1. El cálculo de a es con el propósito de asociar a cada periodo T una distancia a y con ello poder ubicar algún posible cuerpo del sistema solar que se encuentre a esa distancia. Las periodicidades resaltadas en color rojo (ver Tabla 2) identifican a periodicidades fuera del criterio de confianza. Las periodicidades 8.26 y 11.69 apenas son apreciables.

Acontinuación se presenta el Wavelet del momento angular y del torque del baricentro solar. Los datos fueron tomados de; Solar System Dynamics Group, Horizons On-Line Ephemeris System [32,33], tomando promedios anuales de los datos para el intervalo 0-2015 en años.

En la Figura 5.3a se presenta la serie de tiempo (en años) para el momento angular del baricentro solar en ($g \cdot cm^2/s$) para el intervalo en años 0-2015. En 5.3b aparece el Wavelet de la serie de tiempo y en 5.3c su respectivo espectro global. La Figura 5.4 es un Zoom de la Figura 5.3c.

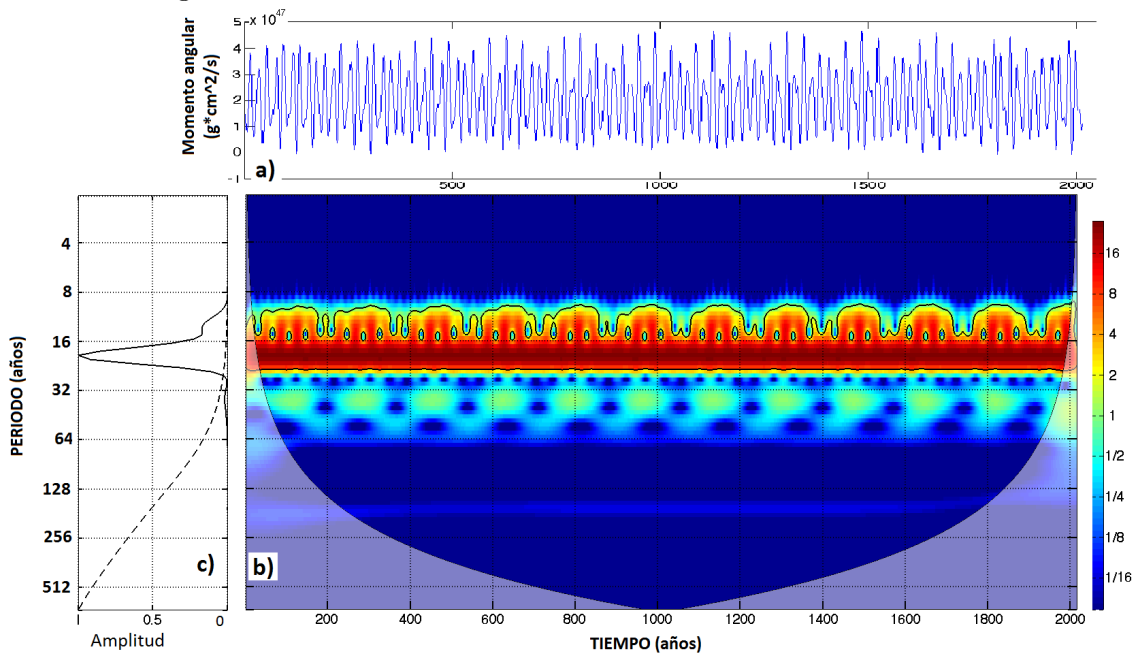


Figura 5.3 a) serie de tiempo de la variación del momento angular desde $t=0$. b) espectro de potencias wavelet calculado para la serie de tiempo 6a. c) espectro global wavelet.

Resultados

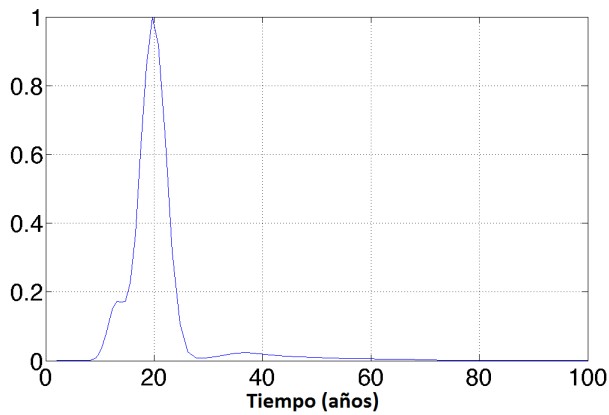


Figura 5.4 Espectro de potencia global wavelet

Las periodicidades encontradas en la Figura 5.4 son:

períodos
13.12 ± 1.08
19.66 ± 2.4

En la Figura 5.5a se presenta la serie de tiempo (en años) para el torque del baricentro solar en dL/dt . En 5.5b su respectivo Wavelet y en 5.5c su espectro global. La Figura 5.6 es la misma Figura que 5.5c con zoom donde se aprecian mejor las periodicidades encontradas.

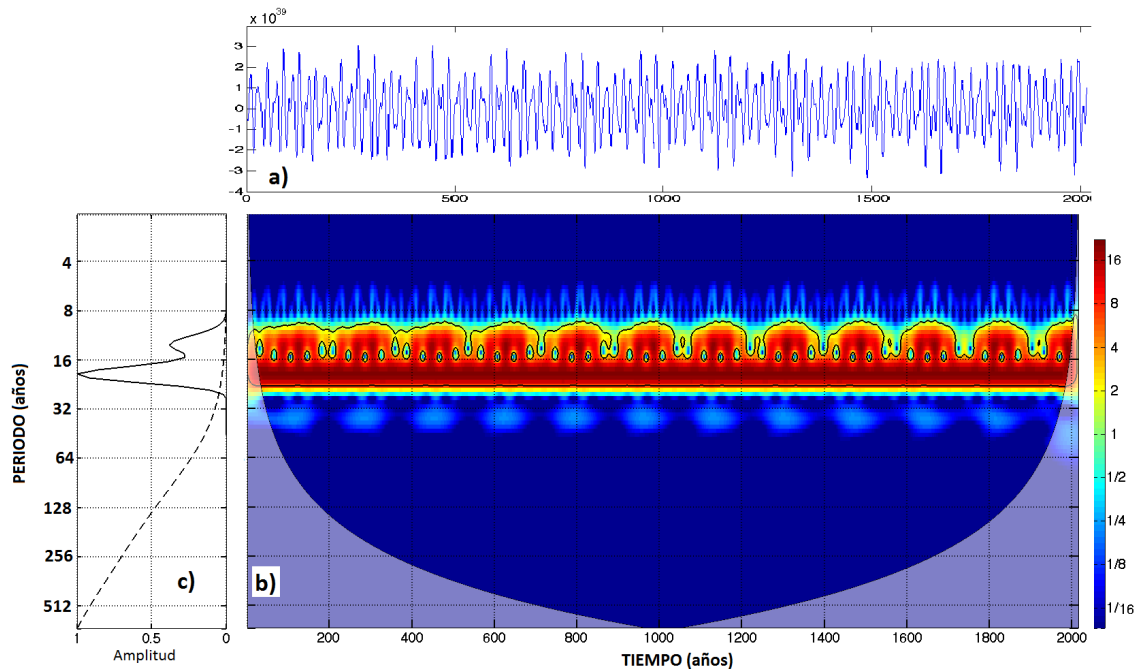


Figura 5.5 a) serie de tiempo de la variación del torque desde $t=0$. b) espectro de potencias wavelet de la serie de tiempo 7a). c) espectro global wavelet.

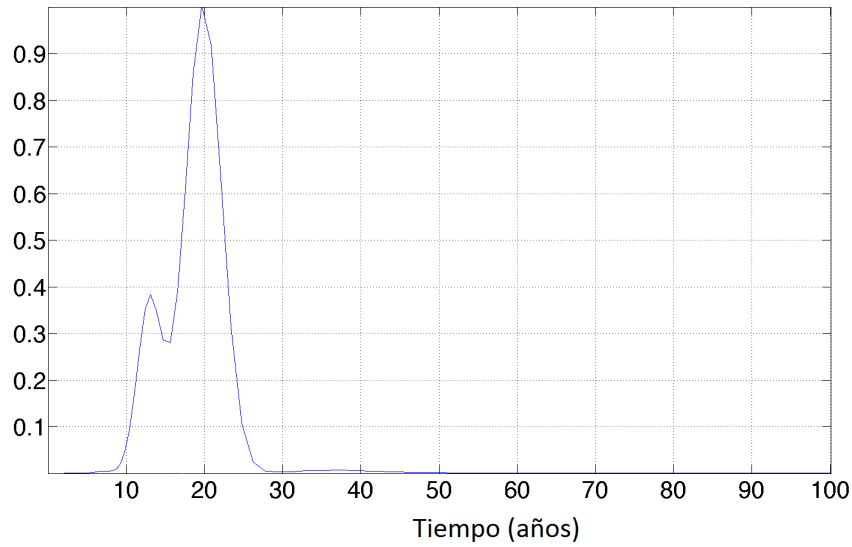


Figura 5.6 Epectro de potencia global wavelet

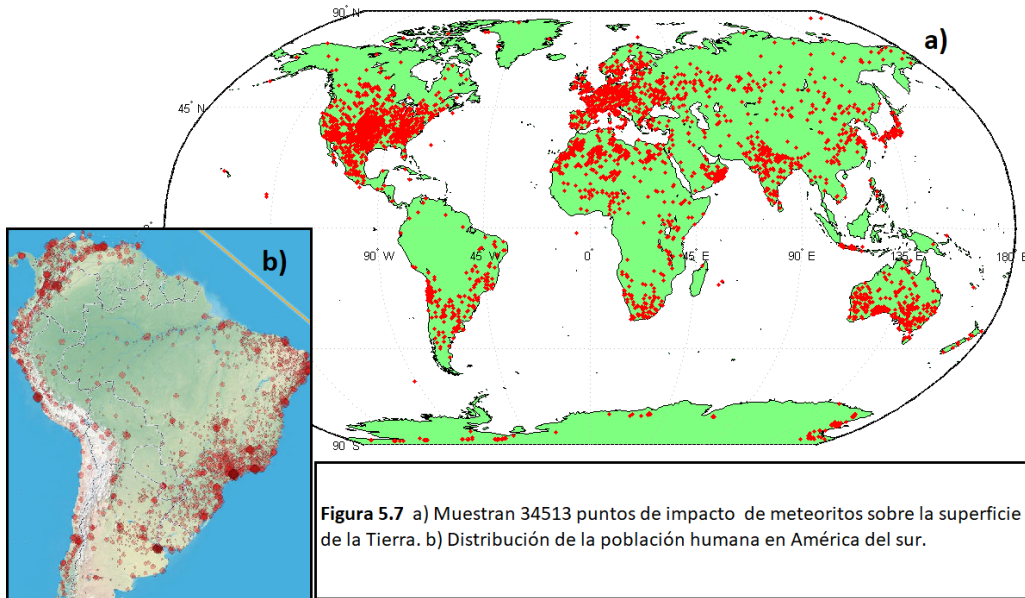
las periodicidades de la Figura 5.6 son:

períodos
13.12 ± 0.38
19.66 ± 2.15

Distribución de los impactos sobre la Tierra

Los datos usados para generar los siguientes gráficos fueron tomados de la Sociedad Internacional de Meteorología y Ciencias Planetarias [34,35]. Son 34513 datos (latitud y longitud) de meteoritas o cráteres encontrados desde el año 2300A.C. Estas meteoritas encontradas van desde unos cuantos gramos hasta las 60 toneladas de la meteorita Hoba (unos 2.7m).

En la Figura 5.7a se muestran los 34513 impactos registrados en la superficie de la Tierra.



En la Figura 5.7a podemos observar que en América del Sur hay una zona con muy pocos registros de caídas, algo muy similar a lo que ocurre en la Figura 5.7b con la población humana, esto hace notar uno de los factores que influyen en el registro de los impactos. Más adelante se analiza este resultado.

Partiendo de los datos anteriores (latitud y longitud de cada impacto) se realizó una distribución para la latitud (Fig 5.8) y otra para la longitud (Fig. 5.9). Calculando la Función de Densidad de Probabilidad Estimada (FDPE) y su respectiva Función de Distribución Acumulada (FDA) en cada caso. “x” positivas representa Norte ó Este, valores negativos representa Sur u Oeste según sea el caso latitud o longitud.

Resultados

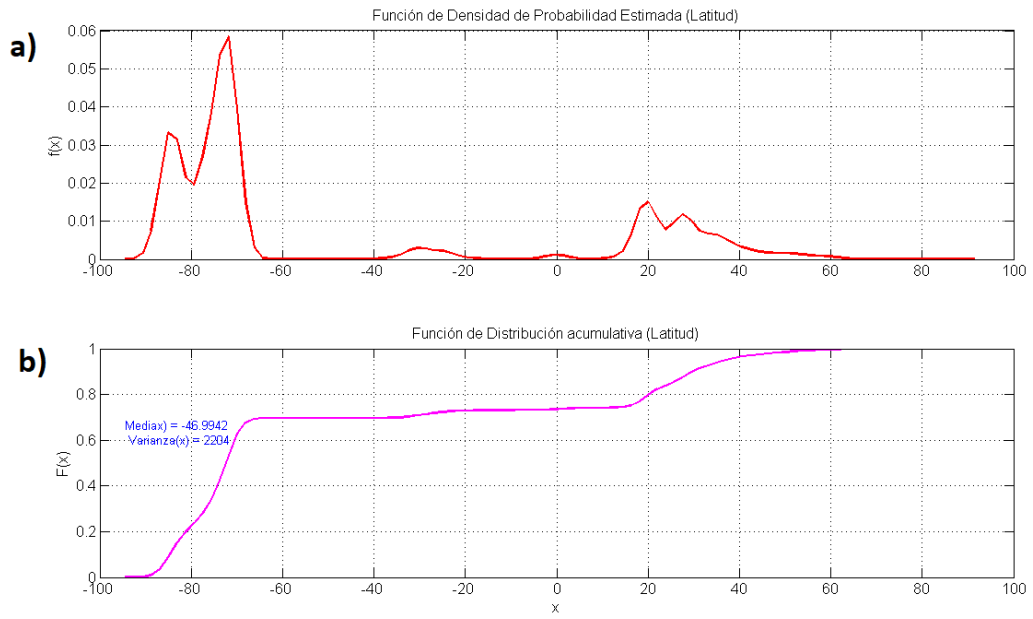


Figura 5.8 a) función densidad de probabilidad. b) función de distribución acumulativa. funciones correspondientes a la Latitud.

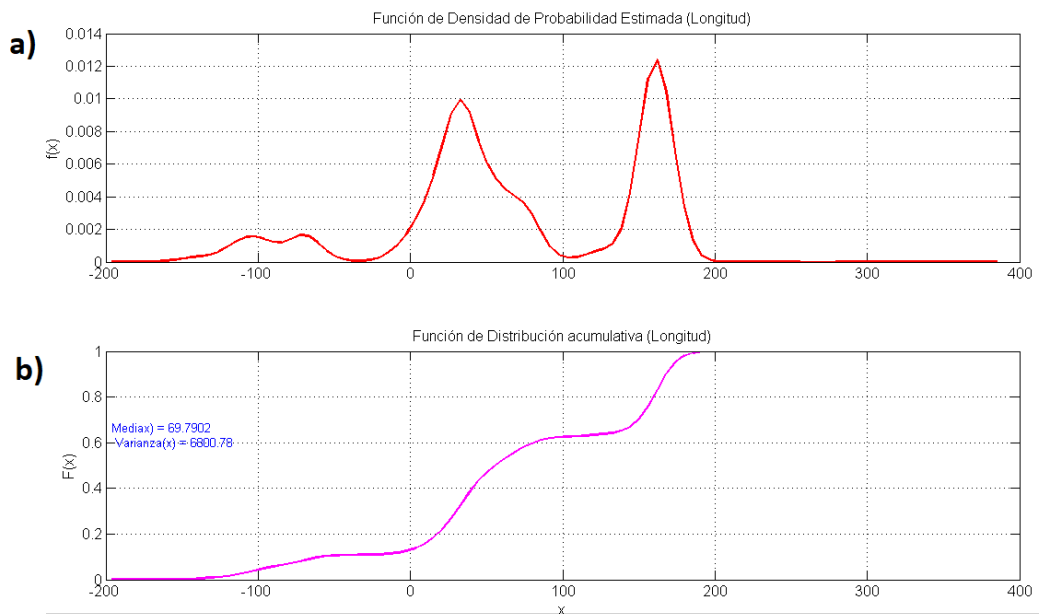


Figura 5.9 a) función de densidad de probabilidad. b) función de distribución acumulativa. Las dos funciones corresponden a la Longitud.

Los máximos registrados para la Latitud y Longitud de los 34513 se muestran en la Tabla 4.

Tabla 4	
Latitud	Longitud
-84.98°	-102.2°
-71.85°	-72.85°
20.06°	32.87°
27.56°	162°

El registro de las meteoritas en la superficie de la Tierra (Fig. 5.7a) esta influenciada por la distribución de la población humana. Para poder apreciar este hecho procederemos a eliminar los datos de la Antártida (alrededor de 24 mil), ya que la Antártida es una zona poco poblada y la mayoría de las meteoritas registradas de esa zona. A continuación se grafican los datos que sobran al quitar los de la Antártida tanto para latitud como para longitud.

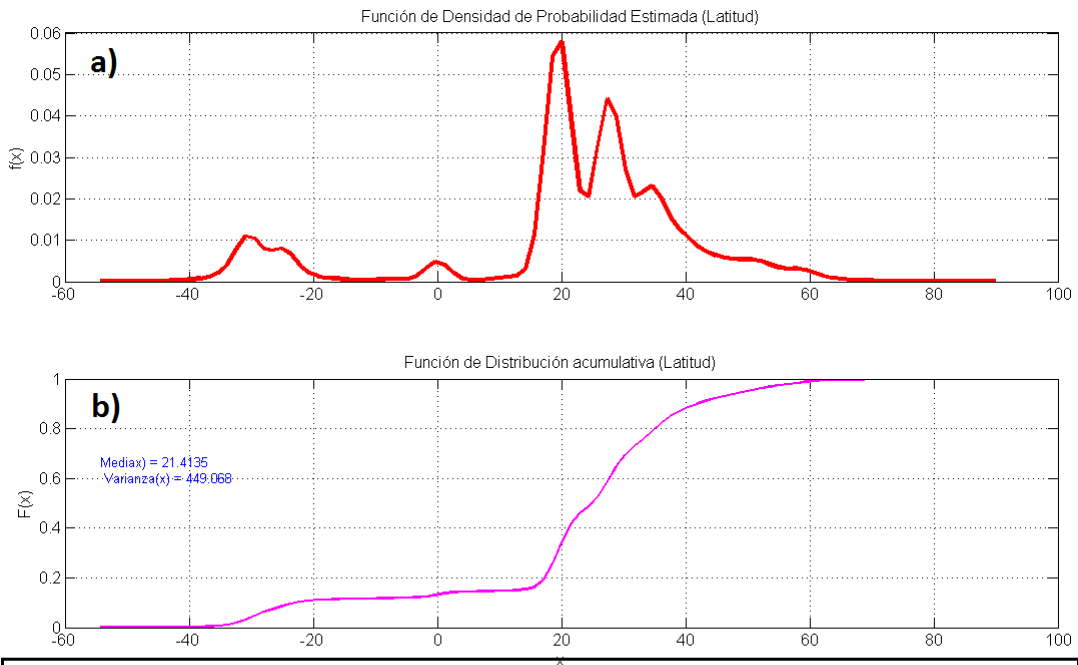


Figura 5.10 Funciones para Latitud sin considerar impactos en la Antártida, valores positivos en x representan el norte, valores negativos el sur. a) Función densidad de probabilidad. b) Función de distribución acumulativa.

La Figura 5.10 y 5.11 muestran la Función de Densidad de Probabilidad y la Función de Distribución Acumulada de 10487 meteoritas, para latitud y longitud respectivamente.

Los máximos encontrados en los gráficos 5.10 y 5.11 se muestran en la Tabla 5.

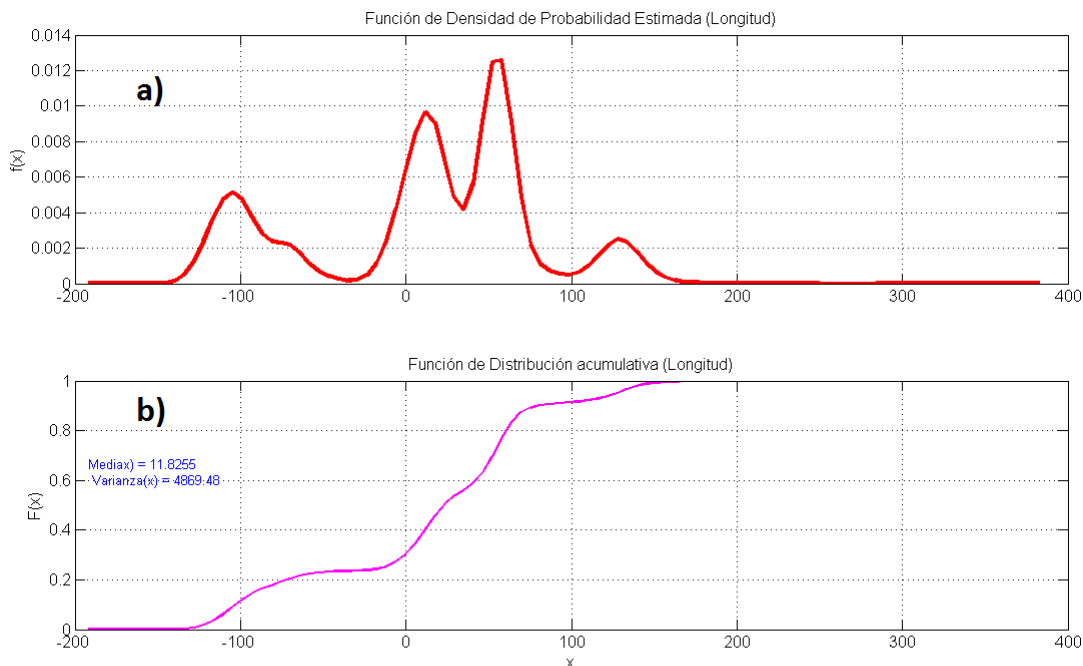


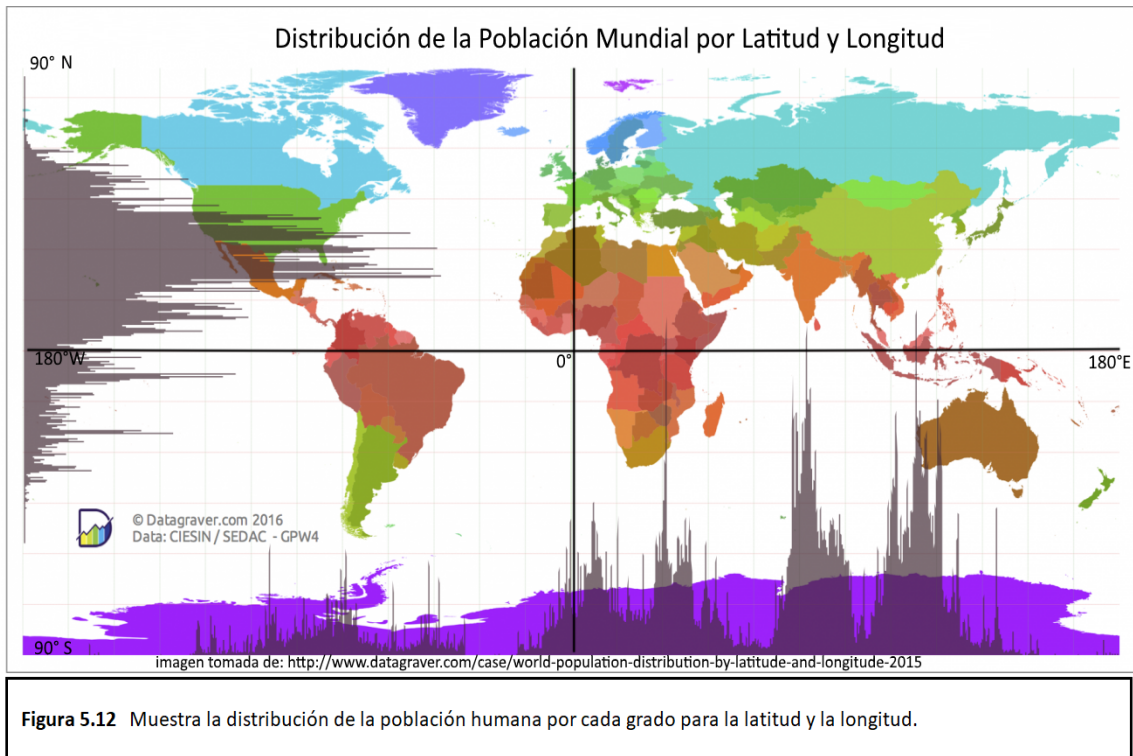
Figura 5.11 Funciones para Longitud sin considerar impactos en la Antártida. valores positivos en x representan el este, valores negativos el oeste. a)Función de densidad de probabilidad. b) Función de distribución acumulativa.

Latitud	Longitud
-30.9°	-104.7°
-0.3°	11.4°
20°	57.9°
27.3°	127.6°

La Figura 5.12 muestra la distribución de la población mundial por latitud y longitud del año 2015. La intención de este gráfico es comparar la distribución de los lugares donde se han encontrado meteoritas con la distribución de población alrededor de toda la superficie del planeta. El gráfico fue generado con datos de Socioeconomic Data and Applications Center (SEDAC) [31]. Es un conjunto cuadrículado con un recuento de personas por cada 1 km^2 en la superficie de la Tierra. Las líneas oscuras representan la cantidad total de personas en esa latitud (eje vertical) o longitud (eje horizontal). El intervalo de cuadrícula es de 15° para latitud y longitud.

Si analizamos la distribución de hallazgos y caídas (Figura 5.10a) con la distribución de población (Figura 5.12) en latitud, el máximo de los impactos se ubica a 20°N (ver Tabla 5) y en la población en aproximadamente 22.5°N . En la figura 5.10b podemos ver que entre 15° y 40°N se tiene aproximadamente el 75 % de todos los impactos registrados, en la figura 5.12 no se tiene un gráfico de FDA pero no cuesta mucho ver esta tendencia. Para la longitud ocurre algo similar, en la figura 5.11a existe un máximo en 104.7°W (ver Tabla 5) y en la figura 5.12 se ubica en 101°W aproximadamente, los otros máximos que se observan en 5.11a no se ubican tan cerca de los máximos en 5.12. La zona que rodea

los máximos 11.4° , 57.9° y 127.6° E en 5.11a es visible en 5.12. En 5.12 aparece una zona entre 82° y 91° E que no es visible en 5.11a. Esa zona puede deberse a un aumento rápido de población que no coincide con una acelerada caída de meteoroides pues los registros usados van desde el 2300A.C. La FDA en 5.11b acumula el 65 % de impactos entre 0° y 70° E no muy apreciable en 5.12 pero tampoco la diferencia es muy notoria. Con lo anterior se puede observar la clara influencia de la distribución de la población sobre la superficie de la Tierra en el registro de meteoritas.



Discusión de Resultados

- Partiendo de los resultados de la tabla 3 sugiero que las periodicidades 2.6 ± 0.26 y 3.9 ± 0.44 están relacionadas con las resonancias orbitales de Kirkwood 2:9 y 1:3 a 1.9UA. y 2.5UA. respectivamente. La periodicidad de 8.26 ± 0.32 no está bien definida como las 2 anteriores, pero sí cumple el criterio de confianza (por encima de la línea punteada fig. 5.1c) sugiero podría estar asociada al borde externo del cinturón de asteroides que está a 4 UA. Lo que propongo es que algunas de las meteoritas que caen a la Tierra tienen su origen en estas resonancias, ya que constantemente están entrando a ellas asteroides perturbados por los planetas menores mas grandes del cinturón y de ahí son sacados hacia el interior del sistema solar por Júpiter[30].
- Si bien la periodicidad de 11.69 ± 0.38 años no está bien definida, al estar dentro del criterio de confianza hace necesario buscar su posible origen. Lo que propongo es que esta periodicidad está vinculada directamente al período orbital de Júpiter, que es de 11.8 años aproximadamente, ya que Júpiter por su gran masa daría tirones gravitacionales sobre el cinturón de asteroides haciendo que éstos abandonen su órbita (resonancias orbitales de Kirkwood). Cabe recalcar que 11.69 ± 0.38 concuerda perfectamente con el periodo de traslación de Júpiter (tercera ley de Kepler) Tabla 3.
- Las periodicidades 16.53 ± 2.22 y 31.2 ± 3.65 son picos bien definidos pero están fuera del criterio de confianza, con lo cual no es necesario aclarar su posible origen, aunque cabe señalar que según [2] y la tabla 3 la periodicidad 31.2 ± 3.65 podría estar asociada al período orbital Saturno.
- La periodicidad de 58.9 ± 8.75 es reportada en [29] es atribuida a la actividad solar.
- La modulación de la caída de las meteoritas sobre la superficie de la Tierra por efectos gravitacionales de Júpiter es apreciable en las periodicidades 13.12 y 19.66 encontradas en el momento angular y el torque. Éstas han sido reportadas en [17]. Posiblemente asociadas al periodo sinodal entre Júpiter-Saturno y Júpiter-Urano. En estas dos periodicidades podemos apreciar el gran efecto gravitacional que ejerce Júpiter sobre los cuerpos en el sistema solar. Esto nos da una razón más para plantear que 11.69 está asociada a efectos gravitacionales de Júpiter y no al ciclo solar de Schwabe.
- La Tabla 4 (latitud) muestra dos máximos muy pronunciados en -84.98°S y -71.85°S . Estos picos acumulan alrededor del 60 % de todos las meteoritas halladas (ver Figura 5.8), esto se debe a que los hallazgos se ubican sobre la Antártida lo cual hace que sea muy fácil encontrarlos como se menciona en la sección 1.4. Para la longitud encontramos el primer pico prominente en 32.87°E el area bajo este pico representa el 52 % de los hallazgos, mientras que en 162°E representa alrededor del 36 % (ver Figura 5.9). Lo anterior podría representar tanto la distribución de la población como el interés por estudiar los fenómenos naturales.

- Quitando los hallazgos de la Antártida, la distribución de éstos es como se muestra en las Figuras 5.10 y 5.11. Para la latitud se tienen dos máximos muy pronunciados uno en 20°N y otro en 27.3°N en estos dos picos se acumulan alrededor del 57 % de caídas, alcanzando la media a partir de 21.41°N . La distribución de las caídas en la longitud también se ve modificada al quitar las caídas en la Antártida Fig. 5.11. Los máximos 11.4°E y 57.9°E acumulan alrededor del 69 % de todas las caídas registradas.

Si bien la distribución (espacial) de caídas sobre la superficie de la Tierra se sabe que debe ser aleatoria [18,19] podemos observar en las Figuras 5.10 y 5.11 zonas en las que pareciera que es más probable una caída. Lo que ocurre es que el registro de las coordenadas de caída está muy condicionado a la distribución de la población mundial, de ahí que se registren más caídas donde la población es más densa, esto lo sugiero después de comparar la distribución de la población mundial en la Figura 5.12 con las figuras 5.10 y 5.11, Otro ejemplo más se observa en América del sur en la Figura 5.7b. Para poder observar la aleatoriedad se requerirían los datos de caídas del océano, lo cual es casi imposible por el prácticamente nulo registro que se tiene.

Otra de las razones para creer que la distribución de caídas, según los registros, está condicionada por la densidad de población humana se aprecia en el análisis wavelet de la Figura 5b donde se observa que las frecuencias mayores comienzan a notarse a partir de 1750 que es justamente cuando la población humana tuvo un crecimiento muy notorio en el período de la revolución industrial en Europa, dando origen a un mayor registro de caídas por año. La tendencia a la aleatoriedad (espacial) se observa cuando se incluyen los registros de meteoros observados desde el espacio, donde se puede registrar la entrada de objetos a la atmósfera [19]. De todo lo anterior podemos decir que no es posible identificar zonas donde la probabilidad de caída de meteoritas sea mayor o menor.

Conclusiones

- Los resultados encontrados en el presente trabajo muestran que las periodicidades 2.6 ± 0.26 y 3.9 ± 0.44 de impactos de meteoroides con la Tierra, son muy similares a las periodicidades que tienen objetos que caen en las resonancias orbitales de Kirkwood (2:9 y 1:3), por lo que podría sugerirse que la periodicidad en las colisiones podría estar asociada con la salida de cuerpos de las zonas cercanas a dichas resonancias.
- El registro de las coordenadas de caída de las meteoritas se ven influenciadas por la distribución de la población humana. Usando únicamente coordenadas no es posible conocer las zonas que tienen más probabilidad de que caiga un objeto.
- Al aplicar el análisis Wavelet se pudo observar que las caídas no son aleatorias en tiempo, ya que las periodicidades encontradas son cantidades que de alguna forma se asocian a fenómenos gravitacionales dentro del Sistema Solar. Si fuera completamente aleatoria en tiempo no se habrían obtenido periodicidades. Es habitual asumir que la caída (espacial) de meteoritas es aleatoria [18], en el presente trabajo no fue posible mostrarlo usando sus coordenadas de caída, ya que los registros de éstas se ven influenciadas por la distribución de la población humana sobre la superficie de la Tierra.
- Es bien conocida la complejidad matemática que presenta el estudio de la dinámica de n cuerpos, ya sea en una formulación newtoniana, lagrangiana o hamiltoniana, sin embargo, el presente trabajo nos enseña que es posible saltarnos esa complejidad ya que si hubiese usado mecánica clásica para tratar de encontrar los cuerpos que perturban el cinturón de asteroides hubiese sido extremadamente complejo. El Análisis Wavelet abre nuevas oportunidades para entender la Dinámica compleja presente en nuestro Sistema Solar así como la del Universo mismo.

Referencias

- [1] Y.P Singh, Badruddin. Prominent short-mid, and long-term periodicities in solar and geomagnetic activity: wavelet analysis. ScienceDirect 2014.
- [2] Milan Palus, Jurgen Kurths, Udo Schwarz. The solar activity cycle is weakly synchronized with the solar inertial motion. ScienceDirect. 2007.
- [3] Mendoza Ortega B. E. Introducción a la Física Espacial. UNAM 2013.
- [4] Y. Mulia Enrique. Mecánica analítica. UNAM 2007.
- [5] G. Cionco, Pablo Abuin. On planetary torque signals and sub-decadal frequencies in the discharges of large rivers. ScienceDirect May 2015.
- [6] S. Mallat. A Wavelet Tour of Signal Processing. 2a ed. Academic Press 1999. pp. 69-72.
- [7] C. Torrence and P. Compo. A Practical Guide to Wavelet Analysis. University of Colorado January 1998.
- [8] Orozco N. Alejandro, Muñoz G. Pablo. Selection of mother wavelet to characterize 5 kinds of heartbeats using the discrete wavelet transform. Universidad del Quindío 2012.
- [9] N. Natalia. M. Diana Orozco. El uso de la transformada wavelet discreta en la reconstrucción de señales senosoidales. Universidad Tecnológica de Pereira 2008.
- [10] A. Fuentes, P. Faudez, procesamiento digital de señales acústicas utilizando wavelets. Instituto de Matemáticas UACH.
- [11] Foufoula-Georgiou E. and P. Kumar. Wavelets in Geophysics. Academic Press 1994.
- [12] D. L. Gilman, F. J. Fuglister, J. M. Mitchell. On the Power Spectrum of Red Noise. Journal of the Atmospheric December 1962. Vol. 20.
- [13] Mendoza B., V.M. Velasco y J.F Valdés-Galicia. Mid-Term Periodicities in the Solar Magnetic Flux. Solar Physics Springer 2006.
- [14] A. Grinsted, J.C. Moore, S.Jevrejeva. Application of the cross wavelet transform and wavelet coherence to geophysical time series November. Nonlinear Processes in Geophysics 2004 11:561-566.
- [15] Charvátová. The prominent 1.6-years periodicity in solar motion due to the inner planets. Annales Geophysicae 2007
- [16] Z. Zhang, J. Moore. Intrinsic feature extraction in the COI of wavelet power spectra of climatic signals. University of Lapland, Finland dept of Earth Sciencies.

- [17] Velasco V. M., Cordero Guadalupe. The variability of meteoroid falling. ELSEVIER Planetary and Space Science. UNAM 2016.
- [18] C. de la Fuente Marcos. Recent multi-kiloton impact events: are they truly random?, Royal Astronomical Society. 2014.
- [19] Velasco V. M. and M. Dolores. Orbital Resonances and Spatial Variations in the Brightest Fireballs. UNAM 2017.
- [20] Mendoza B., Velasco V.M. y J.F Valdés-Galicia. Mid-Term Periodicities in the Solar Magnetic Flux. Solar Physics Springer 2006.
- [21] Gamage N. and W. Blumen. Comparative analysis of low-level cold fronts: Wavelet, Fourier, and Empirical Orthogonal Function Decompositions. University of Colorado 1993.
- [22] Bill Cooke. A Timeline of Meteoric Descent. NASA. 2013.
- [23] Alan E. Rubin y N. Grossman. Meteorite and Meteoroid: New comprehensive definitions. The Meteoritical Society 2009.
- [24] Kleomenis Tsiganis, Harry Varvoglis. Stable Chaos versus Kirkwood Gaps in the Asteroid Belt: A Comparative Study of Mean Motion Resonances. University of thessaloniki 2002.
- [25] Virgil L. Sharpton, Luis E. Marín. The Cretaceous-Tertiary Impact Crater and the Cosmic Projectile That Produced It. Annals of the New York Academy of Sciences. Diciembre 2006.
- [26] David E. Bernal-Neira, Luisa F. Rodriguez. Rotación Diferencial del Sol. Universidad de los Andes.
- [27] Xochitl B. Cano, Primož Kajdic. El Sol, Nuestra Estrella. UNAM. octubre 2009
- [28] Marilyn Lindstrom, Jacly Allen. Exploring Meteorite Mysteries A Teacher´s Guide with Activities for Earth and Space Sciences. NASA. agosto 1997.
- [29] Velasco V. M., Mendoza B., y J.F. Valdes-Galicia. The 120-yrs solar cycle of the Cosmogenic Isotopes. Instituto de Geofísica UNAM. 2008.
- [30] Norma I. Morales S. La Contribución de los Planetas Enanos y Cuerpos Menores del Cinturón de Asteroides a la Población de Objetos Cercanos a la Tierra. Facultad de Ciencias UNAM. 2018.

Referencias Electronicas

- [31] Robert S. Chen. Socioeconomic Data and Applications Center. [23 agosto 2017]. <<http://sedac.ciesin.columbia.edu/data/set/gpw-v4-population-count>>
- [32] Jon Giorgini, Jet Propulsion Laboratory. Solar System Barycenter Ephemeris. [10 junio, 2017]. <<https://landscheidt.wordpress.com/6000-year-ephemeris/>>
- [33] Ryan S. Park, NASA. Solar System Dynamics. [17 febrero 2017].<<https://ssd.jpl.nasa.gov/?horizons>>

Referencias

- [34] Candace Kohl Jones. meteoritessize. [3 diciembre 2016]. <https://fusiontables.google.com/DataSource?docid=1vHSvjNgCII6kRhFXPHhvESnnYx_ShToJWtWdjm8#rows:id=1>
- [35] Candace Kohl Jones. THE METEORITICAL SOCIETY. [1 diciembre 2016]. <<http://www.lpi.usra.edu/meteor/metbull.php>>