



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DESCRIPCIÓN DEL DIAGRAMA DE FASE
DE QCD A TRAVÉS DEL MODELO SIGMA
LINEAL ACOPLADO A QUARKS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

PRESENTA:

José Antonio Flores Gutiérrez



DIRECTOR DE TESIS:
Dr. José Alejandro Ayala Mercado

CDMX, México, 2019



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno:

José Antonio

Flores

Gutiérrez

Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ciencias, Física

311061561

2. Datos del tutor:

Dr.

José Alejandro

Ayala

Mercado

3. Datos del sinodal 1

Dra.

Gabriela

Murguía

Romero

4. Datos del sinodal 2

Dr.

Genaro

Toledo

Sánchez

5. Datos del sinodal 3

Dr.

Luis Alberto

Hernández

Rosas

6. Datos del sinodal 4

Dra.

Aurore Marie Pascale Nicole

Courtoy

7. Datos del trabajo escrito

Descripción del diagrama de fase de QCD a través del modelo sigma lineal acoplado a quarks

70 p, 2019

*A pesar de la distancia y del
tiempo ido, sólo puedo dedicar:*

A todos y ninguno...

JULIO A. FREYRE-GONZÁLEZ

Agradecimientos

Este trabajo no hubiera sido posible sin el apoyo y las enseñanzas del Dr. Alejandro Ayala, asimismo quiero agradecer al Dr. Luis Hernández que en varias ocasiones me proporcionó su ayuda de manera muy amable para aclarar mis dudas.

Quiero agradecer a todas las personas que me han acompañado afablemente a lo largo de mi travesía académica y sobre todo a aquellas que se han convertido en mis amigos.

Quiero agradecer profundamente a mis hermanas, Karen y Sandra, por todas sus observaciones para tomar las mejores decisiones, a mi padre, por todo el apoyo que siempre me ha brindado a lo largo de mi vida, pero sobre todo, quiero agradecer a mi madre, que siempre me ha escuchado en los momentos más difíciles y que sus consejos acertados, en las infinitas pláticas que hemos tenido, me han permitido forjar mi carácter y dar lo mejor de mí.

Índice general

1. Introducción	1
2. Aspectos Básicos de QCD	3
2.1. El modelo de quarks	3
2.2. Modelo de partones	5
2.3. Lagrangiano de QCD	7
2.4. Simetrías del lagrangiano de quarks	9
2.5. Libertad asintótica y confinamiento.	15
3. Diagrama de fase de QCD	18
3.1. Introducción al diagrama de fase de QCD	18
3.1.1. El plasma de quarks y gluones	19
3.1.2. Lugares de formación del plasma de quarks y gluones	19
3.2. Transiciones de fase	22
3.2.1. Modelo de Landau	22
3.2.2. Clasificación de las transiciones de fase	25
3.3. Desarrollo histórico del diagrama de fase de QCD	28
3.4. Estructura del diagrama de fase de QCD	30
3.4.1. Parámetros de orden	30
3.4.2. Fases del diagrama	32
3.4.3. Punto crítico	38

4. Descripción del diagrama de fase de QCD	40
4.1. Modelo sigma lineal acoplado a quarks	40
4.1.1. Simetría quirál del modelo sigma lineal acoplado a quarks	41
4.1.2. Rompimiento espontáneo de la simetría quirál	43
4.2. Potencial efectivo del modelo sigma lineal acoplado a quarks	45
4.2.1. Auto-energía	47
4.2.2. Potencial efectivo a alta temperatura	50
4.2.3. Potencial efectivo a baja temperatura	53
4.3. Exploración del diagrama de fase de QCD	57
4.3.1. Constantes de acoplamiento	57
4.3.2. Punto crítico	60
5. Conclusiones	66
Bibliografía	68

Descripción del diagrama de fase de QCD a través del modelo sigma lineal acoplado a quarks

por

José Antonio Flores Gutiérrez

Resumen

La cromodinámica cuántica (QCD), la teoría de la interacción fuerte, predice que la materia fuertemente interactuante a condiciones extremas de temperatura y densidad bariónica, presenta una transición de una fase hadrónica a otra donde los grados de libertad son los quarks y gluones. La descripción de esta transición es estudiada a través de un diagrama de fase. Cabe mencionar que éste es uno de los muchos problemas abiertos de QCD. En el presente trabajo se elaboró un estudio sistemático del diagrama de fase de QCD, considerando los aspectos básicos de la QCD, las características principales del diagrama y terminando con una descripción del diagrama de fase en el plano de temperatura y potencial químico de quarks ($T - \mu_q$) mediante el modelo sigma lineal acoplado a quarks. Para este último paso, se consideró el enfoque de la restauración de la simetría quiral, calculando las correcciones del potencial efectivo a alta y baja temperatura hasta la corrección de un lazo, para los campos bosónicos y fermiónicos. También, se consideró la corrección al potencial efectivo a alta temperatura utilizando los diagramas de anillo, los cuales, toman en cuenta los efectos del apantallamiento del plasma, permitiendo explorar el diagrama más allá de la aproximación de campo medio. Para la descripción del diagrama se fijaron los parámetros físicos como son: los valores pseudo-críticos de temperatura $T_c(\mu_q = 0) \approx (165 - 175)$ MeV, el valor crítico de potencial químico de quarks $\mu_q^c(T = 0) \approx (330 - 350)$ MeV, y la masa de los piones y del bosón sigma en el vacío. Dada esta información, se elaboró un prototipo del diagrama de fase, para el caso de la masa del pión $m_\pi = 0$ y $m_\pi \neq 0$. Finalmente se localizó el punto crítico del diagrama de fase QCD estimándose en la región de baja temperatura entre los valores de $(315 < \mu^{CEP} < 349, 18 < T^{CEP} < 45)$ MeV.

Capítulo 1

Introducción

La física de partículas representa la búsqueda sistemática de los componentes fundamentales que constituyen a la materia así como el estudio de sus interacciones. A lo largo de historia, importantes avances teóricos y experimentales han consolidado una de las teorías más relevantes de la física moderna conocida como el *modelo estándar*, la cual está basada ampliamente en las ideas de simetría y unificación, y cuyo rango de predicción es verdaderamente extraordinario. Sin embargo, a pesar de sus grandes logros, el modelo estándar se muestra como una descripción incompleta de la física fundamental, ya que existe una gran diversidad de fenómenos, los cuales aun permanecen abiertos. Por otra parte, una de las teorías más significativas a lo largo del siglo XX y XXI, que conforman al modelo estándar, es la *Cromodinámica Cuántica* (QCD) que es la encargada de describir la interacción fuerte a través de la dinámica entre los quarks y gluones. Una de las propiedades más notables de la QCD es su restricción a distancias subatómicas, lo que refleja dos consecuencias importantes, *el confinamiento* y *la libertad asintótica*, la primera propiedad establece que a bajas energías la interacción fuerte prohíbe la existencia de quarks libres. Por otro lado, la libertad asintótica indica que a medida que la escala de energía aumenta, la intensidad de la interacción disminuye asintóticamente a cero.

Un tema muy representativo que surgió en el análisis de la QCD durante el siglo XX fue la búsqueda de los posibles distintos estados de la materia desde el punto de vista de sus componentes más elementales de quarks y gluones. De esta manera, la interpretación del incremento

exponencial del espectro de Hagedorn sentó las bases para conjeturar un *diagrama de fase* de la materia fuertemente interactuante en términos de la temperatura T y de la densidad bariónica n_B . Actualmente, el diagrama de fase de QCD es una realidad, ya que diversos estudios a través de colisiones de iones pesados, modelos efectivos y métodos numéricos avalan que en condiciones extremas de temperatura y/o densidad bariónica la materia compuesta de quark y gluones presenta distintas fases.

El estudio del diagrama de fase mediante técnicas de Monte Carlo para teorías de norma basadas en los grupos de simetría $SU(2)$ y $SU(3)$ realizados en 1983 por el grupo de Illinois, mostraron un hecho significativo, ya que indican que *la restauración de la simetría quiral y el desconfinamiento* toman lugar casi a la misma temperatura. No obstante, el conocimiento sobre dichos cálculos está limitado en gran medida a regiones de densidad bariónica casi nula en comparación con la temperatura, y desafortunadamente en la actualidad no existe un argumento sólido que pueda expresar una relación directa entre estos dos conceptos.

Dado los puntos mencionados, el objetivo de esta investigación es realizar un estudio sustancial de las principales características del diagrama de fase de QCD y efectuar una descripción efectiva del mismo a través del *modelo sigma lineal acoplado a quarks* (MSLq) desde el punto de vista de la restauración de la simetría quiral. El presente trabajo está estructurado como sigue, en el capítulo 2, se analizan los aspectos básicos de la cromodinámica cuántica desde su surgimiento a partir del modelo de quarks, pasando por el modelo partones hasta su edificación como una teoría cuántica de campos. Posteriormente, en el mismo capítulo, se realiza un estudio de las simetrías del sector de quarks para motivar el significado del rompimiento de la simetría quiral. En el capítulo 3, se discute de manera general los aspectos principales del diagrama de fase de QCD, el plasma de quarks y gluones y el estudio de las transiciones de fase. En el Capítulo 4, se presenta la descripción del diagrama de QCD a través del estudio de la restauración de la simetría quiral del modelo sigma lineal acoplado a quarks, tomando en cuenta las correcciones de temperatura y potencial bariónico químico del potencial efectivo. Finalmente, en el capítulo 5 se abordan las conclusiones de este trabajo y su panorama a futuro.

Capítulo 2

Aspectos Básicos de QCD

En este capítulo se discute brevemente los aspectos más importantes de la cromodinámica cuántica, desde su surgimiento hasta su formulación como una teoría cuántica de campos de norma. Además, se realiza un estudio de las simetrías del sector de quarks para motivar el análisis del rompimiento de la simetría quiral.

2.1. El modelo de quarks

En la década de 1930, preguntas como ¿Qué mantiene a los protones y neutrones unidos al núcleo y por qué esta fuerza no es perceptible en nuestro entorno diario? Fueron cuestiones que marcaron el surgimiento de la QCD. Con el fin de comprender su historia y desarrollo vale la pena mencionar algunos de los resultados más significativos y observar sus implicaciones. Por lo que hablar del modelo de quarks y del modelo de partones resulta considerable para su estudio sistemático.

En los experimentos de dispersión entre protones y neutrones se encontró que la interacción nuclear fuerte no sólo era de gran intensidad sino también de corto alcance. Por otro lado, la contribución de Heisenberg [1] a este campo fue realmente interesante, ya que al estudiar los núcleos con igual número de masa, notó que éstos presentaban ciertas similitudes en sus niveles de energía y posteriormente esta idea se tradujo en que los protones y neutrones exhibían una

simetría que fue llamada *isoespín*. Otra aportación relevante fue la de Hideki Yuakawa [2] quien propuso la existencia de un bosón pesado que fuera capaz de mediar la fuerza fuerte, a esta partícula la llamó *mesón*. Años después, en la década de 1940, el pión π fue descubierto en los experimentos de rayos cósmicos y de aceleradores de partículas con una masa aproximadamente de 140 MeV y una vida media de 2.6×10^{-8} s. Esta partícula coincidía con las características mencionadas por Yuakawa, por lo que fue considerada como una piedra angular para el entendimiento de la interacción nuclear fuerte. No obstante, la aparición de nuevas partículas con vidas medias muy diferentes extendió el campo de investigación de la interacción fuerte, de tal forma que el modelo de Yukawa era insuficiente para dar cabida a los fenómenos que se exhibían en los experimentos de la época. Entre las nuevas ideas que surgieron para lidiar con esta problemática surgió la clasificación de los decaimientos por interacción fuerte e interacción débil por medio de un número cuántico llamado *extrañeza* [3], denotado por s . Este número tiene la propiedad de conservarse en los decaimientos por interacción fuerte y violarse en los de interacción débil.

En la década 1960, el panorama había cambiado completamente debido al gran conjunto de partículas descubiertas, este hecho fue denominado como *el zoológico de partículas*. Los trabajos de Gell-Mann y Ne'eman [4] fueron fundamentales, ya que gracias a su contribución, los hadrones pudieron ser agrupados de manera efectiva. Los conjuntos de partículas quedaron determinados por medio de los multipletes del grupo $SU(3)$ formados por los números cuánticos de isoespín I e hipercarga Y . Como consecuencia del éxito de este modelo, fue descubierto el barión Ω^- [3] con extrañeza $s = -3$ en 1964. A pesar de su belleza y simetría, el modelo presentaba dificultades para situar a las partículas en representaciones dimensionales mayores del grupo $SU(3)$. La solución a este problema fue dada por Gell-Mann y Zweig [2], quienes postularon un conjunto de tres nuevas partículas que denominaron *quarks*. Éstas correspondían a la representación fundamental de $SU(3)$ y sus nombres fueron *up* (u), *down* (d) y *strange* (s). Finalmente, los *bariones* quedaron determinados por una combinación de tres quarks o antiquarks mientras que los *mesones* por la combinación de un quark y un antiquark. A través de estas tres partículas y el uso de los multipletes, como se muestra en las figuras 2.1 y 2.2, es

posible obtener una gran variedad de hadrones, no obstante, la evidencia experimental de los quarks no había sido comprobada por aquellos años, por lo que es destacable la trascendencia que representó el modelo de quarks para la construcción de los hadrones y sus propiedades mediante el uso de la simetría.

Principales números cuánticos de los quarks						
Quark	Espín	Paridad	Carga eléctrica	s	B	Y = B + s
u	1/2	+1	+2/3	0	1/3	1/3
d	1/2	+1	-1/3	0	1/3	1/3
s	1/2	+1	-1/3	-1	1/3	-2/3
\bar{u}	1/2	-1	-2/3	0	-1/3	-1/3
\bar{d}	1/2	-1	+1/3	0	-1/3	-1/3
\bar{s}	1/2	-1	+1/3	1	-1/3	+2/3

Tabla 2-1: Tabla de valores de las principales números cuánticos de los quarks y antiquarks más ligeros. [3]

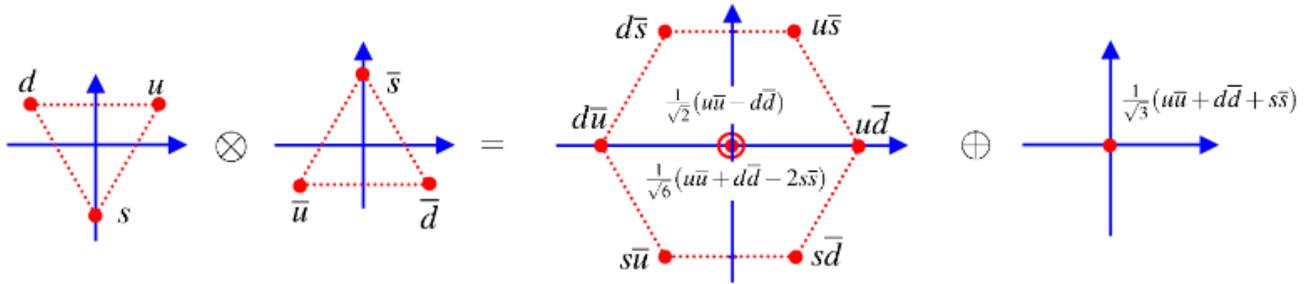


Figura 2-1: [45] Combinación de quarks y antiquarks que forman nueve estados de mesones, que se pueden descomponer en un octete y un singlete, es decir $3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1$.

2.2. Modelo de partones

A finales de la década de 1960, los experimentos de los procesos de dispersión inelástica profunda tuvieron un papel primordial en el entendimiento de la subestructura de los hadrones. De acuerdo a la relación de de Broglie $\lambda = h/p$, cuando el momento de una partícula sobrepasa 1 GeV, estructuras más pequeñas que 1 fm (tamaño del protón) podrían ser examinadas. La cinemática de este tipo de procesos consiste en considerar un electrón muy energético con energía

E y cuadrimomento l , que es dispersado, intercambiando un fotón virtual por la presencia de un nucleón con masa M y cuadrimomento p . Éste último permanece en reposo desde el sistema de referencia del laboratorio. Un diagrama de la cinemática de este proceso se muestra en la figura (2-2).

Por medio de las variables como la energía de transferencia del electrón al sistema hadrónico $\nu = E - E'$ y el cuadrado de momento trasferido que lleva el fotón virtual, $Q^2 = -(l - l')^2$, es posible explorar la fenomenología de la subestructura de los nucleones. Al analizar las secciones eficaces en términos de estas nuevas variables, se observa que las interacciones entre el electrón y el nucleón pueden entenderse de forma efectiva mediante procesos entre un electrón y ciertos constituyentes puntuales, es decir que la interacción no ocurre con el nucleón como un todo sino a través de la interacción de sus constituyentes. Para describir esta situación se particiona el cuadrimomento del nucleón entre sus constituyentes, donde cada uno lleva una fracción x_i con una densidad de probabilidad $f_i(x_i)$, que es llamada función de densidad partónica. Dado el hecho de que las secciones eficaces dependían de las variables adimensionales x , se le conoció a este fenómeno como el *comportamiento de escala*. Asimismo, las observaciones experimentales del comportamiento de escala fue la primera evidencia de una subestructura partónica en los núcleos, dando sentido real al concepto de los quarks.

A pesar del gran éxito del modelo de partones, aun seguía habiendo varias preguntas abiertas -como el caso del problema de espín y estadística, que consistía que dado el decuplete bariónico del modelo de quarks, la función de onda era completamente simétrica en los números cuánticos del espín y sabor-. Si la función de onda era completamente simétrica para fermiones, entonces estaría en contradicción con el principio de exclusión de Pauli. La forma de resolver este problema consistió en considerar un nuevo grado de libertad, llamado *color*, el cual podía tomar tres valores distintos. Asumiendo que el color exhibe un simetría, dada por el grupo $SU(3)$, por tanto, la parte de color de la función de onda de los bariones transforma como un singlete de $SU(3)$. El hecho de que los bariones sean singletes significa que el barión no posee una carga de color, esta observación es vital, ya que implica que este número cuántico permanece escondido dentro de sus constituyentes. Al postular que el color esta confinado en los hadrones, permite

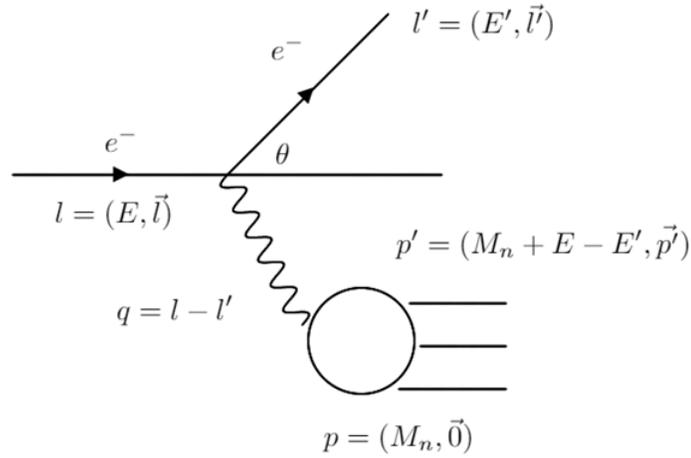


Figura 2-2: Diagrama de un proceso de dispersión inelástica profunda entre un electrón y un nucleón. El estado final queda caracterizado por el cuadrimento l' del electrón dispersado y el cuadrimento p' del sistema hadrónico con masa invariante W .

dar una explicación a la observaciones que muestran la ausencia de quarks libres en la naturaleza. No obstante, una mejor descripción del confinamiento de color aparece en el contexto de la QCD.

2.3. Lagrangiano de QCD

Los siguientes puntos condensados en esta lista fueron algunas de las motivantes para el surgimiento la QCD:

- Los hadrones están compuestos de quarks con carga eléctrica fraccionaria.
- La existencia del número cuántico de color basada en simetría $SU(3)_c$.
- Los quarks son fermiones con espín 1/2.

Estas propiedades resultaron esenciales para considerar que la interacción fuerte estaba descrita por una teoría cuántica de campos basada en la simetría local $SU(3)_c$. El índice inferior " c " se refiere a la carga de color que puede aparecer en tres tipos: rojo, verde y azul, los cuales reciben estos nombres en semejanza a la teoría del color de la luz. En este formalismo, los quarks son

considerados como los campos de materia que son transformados de acuerdo a la representación fundamental. El grupo de simetría $SU(3)_c$ está descrito por los generadores T^α , que satisfacen la relación de conmutación

$$[T^\alpha, T^\beta] = if^{\alpha\beta\sigma} T_\sigma. \quad (2-1)$$

Donde las constantes de estructura $f^{\alpha\beta\sigma}$ se identifican con los índices $\alpha, \beta, \sigma = 1, \dots, 8$. Los generadores de la representación fundamental están dados por las matrices de Gell-Mann λ^α que cumplen la siguientes relaciones

$$\begin{aligned} T_{fund}^\alpha &= \frac{1}{2} \lambda^\alpha, \\ [T_{fund}^\alpha T_{fund}^\beta] &= \frac{1}{2} \delta^{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (2-2)$$

De igual manera, en este formalismo, los mediadores de la interacción fuerte están asociados a los campos gluónicos, los cuales son transformados de acuerdo a la representación adjunta. Los generadores en esta representación son expresados en términos de las constantes de estructura y satisfacen las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} (T_{adj}^\alpha)^{\beta\sigma} &= -f^{\alpha\beta\sigma} T_\sigma, \\ [T_{adj}^\alpha T_{adj}^\beta] &= 3\delta^{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (2-3)$$

Finalmente, dados todos los puntos mencionados previamente, el lagrangiano de QCD puede escribirse como

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_{i=1}^{N_f} \bar{\psi}_i^a (i\gamma^\mu (\partial_\mu \delta^{ab} + g_s A_\mu^{ab}) - m_i \delta^{ab}) \psi_i^a - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^\alpha G_\alpha^{\mu\nu}. \quad (2-4)$$

El campo de norma gluónico $G_{\mu\nu}^\alpha$ se expresa en términos de los potenciales A_μ^α como $G_{\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha + g_s f^{\alpha\beta\sigma} A_\mu^\beta A_\nu^\sigma$, donde $A_\mu^{\alpha\beta} = A^{\sigma\mu} (T_{Adj}^\sigma)^{ab}$, con $a, b = 1, 2, 3$ y $\alpha, \beta, \sigma = 1, \dots, N_c^2 - 1$. La constante de acoplamiento entre los campos y la masa desnuda de los diferentes tipos de quarks (sabores) se denota con g_s y m_i respectivamente, y el número de sabores queda

determinado por N_f . Es importante señalar que hasta el momento en la naturaleza sólo se han detectado seis sabores que son: el quark *up* (u), *down* (d), *strange* (s), *charm* (c), *bottom* (b) y *top* (t), cuyas masas difieren significativamente entre cada uno. En la tabla (2-2) se muestra sus valores correspondientes.

Quark	Masa
u	2.2 MeV
d	4.7 MeV
s	96 MeV
c	1.28 GeV
b	4.18 GeV
t	173.1 GeV

Tabla 2-2: Masas de los quarks encontrados hasta el momento. [7]

A pesar de la gran diferencia de masa entre cada uno de los quarks, es notable identificar que las masas de los quarks *u*, *d* y *s* pueden considerarse casi con el mismo valor cuando se compara con la masa usual de un barión, que resulta ser alrededor de 1 GeV. Por tanto, con esta idea en mente, vale la pena destacar la simetrías que surgen con esta aproximación.

2.4. Simetrías del lagrangiano de quarks

Las simetrías juegan un papel fundamental en el estudio de los fenómenos físicos, por ejemplo, las simetrías tanto locales como globales imponen ciertas constricciones en la estructura de las teorías físicas. Teniendo esta idea en mente, vale la pena realizar un análisis de la relevancia de la simetría axial y vectorial de sabor en el lagrangiano del sector de quarks, las cuales sirven como motivantes para el estudio de la simetría quiral.

El lagrangiano a considerar está definido como

$$\mathcal{L}_q = \sum_{i=1}^{N_f} \bar{\psi}_i (i\gamma^\mu (\partial_\mu + g_s A_\mu) - m) \psi_i, \quad (2-5)$$

donde se toma en cuenta la misma masa para los distintos sabores y no se hace alusión a el índice de la carga de color α . Este lagrangiano es particularmente invariante ante las transformaciones

globales del grupo de simetría $SU(N_f)$ que se expresan como

$$\begin{aligned}
\psi_i &\rightarrow \psi'_i = e^{-i\theta^A (T^A)_i^j} \psi_j \\
\bar{\psi}_i &\rightarrow \bar{\psi}'_i = \bar{\psi}_j e^{i\theta^A (T^A)^j_i} \\
A_\mu &\rightarrow A'_\mu = A_\mu,
\end{aligned} \tag{2-6}$$

donde $A = 1, \dots, N_f^2 - 1$. Los cambios infinitesimales de la simetría quedan determinados como

$$\begin{aligned}
\delta\psi &= -i\delta\theta^A (T^A)_i^j \psi_j \\
\delta\bar{\psi} &= \bar{\psi}_j i\delta\theta^A (T^A)^j_i \\
\delta A_\mu &= 0.
\end{aligned} \tag{2-7}$$

Aplicando el teorema de Noether se obtienen la corrientes conservadas especificadas por la expresión

$$j^A_\mu(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_q}{\partial(\partial_\mu \psi_i)} \delta\psi_i = \bar{\psi}(x) \gamma_\mu (T^A)_i^j \psi_j(x), \tag{2-8}$$

donde la corriente j^A_μ satisface la ecuación de continuidad

$$\partial^\mu j^A_\mu = \frac{\partial}{\partial t} j^A_0 + \nabla \cdot j^A_s = 0, \tag{2-9}$$

y el índice s corre como $s = 1, 2, 3$. Dada esta corriente conservada se puede definir la carga conservada como la integral sobre espacio de la parte temporal de corriente,

$$Q^A \equiv \int d^3x j^A_0. \tag{2-10}$$

Las cargas conservadas también son los generadores del álgebra del grupo $SU(N_f)$, las cuales satisfacen la relación de conmutación

$$[Q^A, Q^B] = if^{ABC} Q^C, \tag{2-11}$$

donde $A, B, C = 1, \dots, N_f^2 - 1$.

Un hecho interesante es que las cargas son independientes del tiempo y por tanto conmutan con el hamiltoniano, $[H, Q^A] = 0$. Esto significa que el hamiltoniano comparte su base de eigenestados con estos operadores. Por otra parte, al introducir los estados de quarks $|\vec{p}, i\rangle$ de una partícula, donde \vec{p} es el momento del quark e i es el índice que etiqueta a los distintos sabores de quarks, se puede comprobar la invariancia del vacío ante las cargas conservadas,

$$Q^A |0\rangle = |0\rangle, \quad (2-12)$$

esto implica que

$$Q^A |\vec{p}, i\rangle = (T^A)_i^j |\vec{p}, j\rangle. \quad (2-13)$$

De la ecuación (2-13) se puede inferir que los distintos estados de los quarks en la representación fundamental de los multipletes tienen la misma masa, igual a m . Esta forma de realizar la simetría se le conoce como el *modo de Wigner-Weyl*. Por contraste, si se permite que las masas entre los quarks sea distinta, entonces el lagrangiano se convierte en

$$\mathcal{L}_q = \sum_{i=1}^{N_f} \bar{\psi}_i (i\gamma^\mu (\partial_\mu + g_s A_\mu) - m_i) \psi_i. \quad (2-14)$$

No obstante, en comparación con la corriente en el caso anterior, el término de masa rompe con la simetría de manera explícita, este hecho se refleja en la ecuación de continuidad de la corriente como

$$\partial^\mu j_\mu^A = -i \sum_{i,j}^{N_f} (m_i - m_j) \bar{\psi}_i (T^A)_i^j \psi_j \neq 0. \quad (2-15)$$

Finalmente con este análisis podemos deducir que si se toman en cuenta a los sabores más ligeros, u, d, s , la simetría de sabor se puede considerar de manera aproximada para el caso de $SU(2)$ y $SU(3)$.

En forma similar al estudio anterior, al introducir las transformaciones axiales de sabor, las cuales incluyen a la matriz $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$, los campos transforman como

$$\begin{aligned}
\psi_i &\rightarrow \psi'_i = e^{-i\theta^A (T^A)_i^j \gamma_5} \psi_j \\
\bar{\psi}_i &\rightarrow \bar{\psi}'_i = \bar{\psi}_j e^{i\gamma_5 \theta^A (T^A)^j_i} \\
A_\mu &\rightarrow A'_\mu = A_\mu,
\end{aligned} \tag{2-16}$$

y los cambios infinitesimales quedan dados por la expresiones

$$\begin{aligned}
\delta\psi &= -i\delta\theta^A (T^A)_i^j \gamma_5 \psi_j \\
\delta\bar{\psi} &= \bar{\psi}_j i\gamma_5 \delta\theta^A (T^A)^j_i \\
\delta A_\mu &= 0.
\end{aligned} \tag{2-17}$$

Dado estas transformaciones, si se supone la condición anterior de masas iguales, el lagrangiano \mathcal{L}_q de la ecuación (2-5) no permanece invariante, es decir,

$$\delta\mathcal{L}_q = 2m\delta\theta^A \psi_i (T^A)_i^j \gamma_5 \psi_j, \tag{2-18}$$

esto implica que la corriente axial no satisface la ecuación de continuidad, $\partial^\mu j_{5\mu}^A \neq 0$. De tal modo que para permitir la invariancia de las transformaciones axiales, la masa de los quarks debe ser considerada como cero. Tomando en cuenta este hecho, el lagrangiano de quarks \mathcal{L}_q queda invariante ante las transformaciones de sabor y axiales, de forma que las corrientes conservadas respectivamente son:

$$\begin{aligned}
j^A_\mu(x) &= \bar{\psi}(x) \gamma_\mu (T^A)_i^j \psi_j(x) \\
j^A_{5\mu}(x) &= \bar{\psi}(x) \gamma_\mu (T^A)_i^j \gamma_5 \psi_j(x)
\end{aligned} \tag{2-19}$$

y las cargas conservadas asociadas quedan especificadas como

$$\begin{aligned} Q^A &= \int d^3x j^A_0(x) \\ Q^A_5 &= \int d^3x j^A_5(x). \end{aligned} \tag{2-20}$$

Al verificar las relaciones de conmutación de las cargas axiales se observa que no forman un álgebra, es decir

$$\begin{aligned} [Q^A_5, Q^B_5] &= if^{ABC} Q_C \\ [Q^A, Q^B_5] &= if^{ABC} Q_{5C}. \end{aligned} \tag{2-21}$$

No obstante, definiendo las cargas

$$\begin{aligned} Q^A_R &= \frac{1}{2}(Q^A + Q^A_5) \\ Q^A_L &= \frac{1}{2}(Q^A - Q^A_5) \end{aligned} \tag{2-22}$$

se obtiene que cumplen la siguientes relaciones de conmutación

$$\begin{aligned} [Q^A_L, Q^B_L] &= if^{ABC} Q_{LC} \\ [Q^A_R, Q^B_R] &= if^{ABC} Q_{RC} \\ [Q^A_L, Q^B_R] &= 0. \end{aligned} \tag{2-23}$$

Estos nuevos operadores se conocen como *cargas quirales* y cada operador satisface el álgebra de $SU(N_f)$. El grupo de simetría definido por el producto directo $SU(N_f)_L \otimes SU(N_f)_R$, etiquetados por una parte izquierda L y derecha R , se conoce como la *simetría quiral*. Es importante mencionar que esta simetría no es exacta en la naturaleza, ya que si lo fuera, las cargas conmutarían con el hamiltoniano y los estados serían no masivos.

Los mecanismos para violar una simetría pueden considerarse de dos tipos: *explícito* y *espontánea*, el primero tipo está caracterizado por los términos que contiene el lagrangiano que

rompen la simetría de manera explícita, por ejemplo, el término de masa en el caso de la simetría quiral. Para el caso del rompimiento espontáneo, el lagrangiano permanece invariante respecto a la simetría, pero el estado base (el vacío) la rompe. La pérdida de la invariancia del vacío se revela a través de los términos de un campo cuantizado que adquieren valores de expectación distintos de cero. De esta forma podemos asociar el rompimiento espontáneo de la simetría quiral que se manifiesta mediante

$$Q_5^A |0\rangle \neq |0\rangle, \quad (2-24)$$

lo cual significa que las cargas axiales producen nuevos estados pseudoescalares

$$Q_5^A |0\rangle = |A, -\rangle, \quad (2-25)$$

con $A = 1, \dots, N_f^2 - 1$. El rompimiento espontáneo de la simetría esta estrechamente ligado con el *teorema de Goldstone*, que dice que siempre que una simetría continua se rompe de forma espontánea, aparecen nuevas partículas escalares sin masa llamadas bosones de Goldstone. Aplicando este teorema, los estados creados por el operador de carga aplicado al vacío, son los bosones de Goldstone. Es relevante señalar que el rompimiento de la simetría involucra a la parte axial mientras que la parte de sabor se mantiene y se realiza en el modo de Wigner-Weyl, esto es

$$SU(N_f)_L \otimes SU(N_f)_R \rightarrow SU(N_f)_V. \quad (2-26)$$

Al considerar el caso de $N_f = 2$ para los sabores más ligeros u y d , el rompimiento espontáneo de simetría quiral puede considerarse de forma aproximada, sin embargo, esto implica igualmente la existencia de campos pseudoescalares que pueden ser identificados con los piones $\vec{\pi} = (\pi^+, \pi^0, \pi^-)$ -donde el compañero quiral de los piones es el bosón sigma, cuya paridad difiere en signo de éstos, como se muestra en la figura (2-3)-. El hecho que la simetría quiral pueda relacionarse de forma aproximada radica debido a la diferencia de masas entre los piones y el bosón sigma, ya que por el contrario, si no se rompiera y se realizaría la simetría en modo

Wigner-Weyl, sus masas entre estos bosones no debería ser tan grande como se observa.

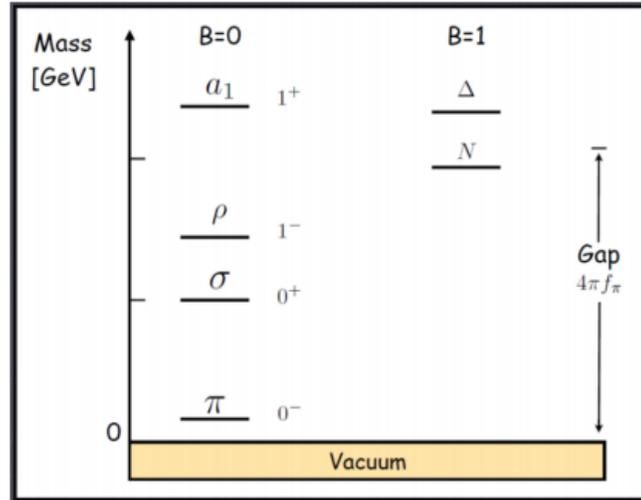


Figura 2-3: Representación de los dobletes de paridad para los mesones y bariones más ligeros.

2.5. Libertad asintótica y confinamiento.

Los gluones como los fotones son los bosones de norma de las teorías de QCD y QED, respectivamente, ambos tienen propiedades muy similares, como ser no masivos, con espín 1 y eléctricamente neutros. Sin embargo, los gluones a diferencia de los fotones tienen carga de color, lo cual se traduce en que pueden emitir o absorber otros gluones y por tanto, pueden crear nuevos campos gluónicos alrededor de ellos. Asimismo, se puede notar que en comparación con los campos electromagnéticos que se debilitan cuando la distancia aumenta, en el caso de los campos gluónicos ocurre lo contrario. A causa de esto, se observa que a una distancia del orden del tamaño de un hadrón, $\sim 10^{-15}$ m, la interacción de color es verdaderamente fuerte, lo que no impide el uso de la teoría de perturbaciones a estas escalas, además implica la imposibilidad de observar quarks aislados. A este fenómeno se le conoce como *confinamiento*, que en otras palabras significa, que la tendencia de mantener la simetría $SU(3)_c$ resulta en la ausencia de carga de color en los hadrones mientras sus componentes cambian sus colores, lo cual deriva en el confinamiento.

La intensidad de la interacción fuerte esta caracterizada por el corrimiento de la constante de acoplamiento de QCD,

$$\alpha = \frac{g_s^2}{4\pi} \quad (2-27)$$

donde, g_s es la constante de norma del grupo $SU(3)_c$. La evolución de la constante de acoplamiento de QCD está determinada por la ecuación

$$\alpha(Q^2) = \frac{\alpha_s(\tilde{\mu}_s)^2}{1 + b_1\alpha_s(\tilde{\mu}_s^2)\ln(Q^2/\tilde{\mu}_s^2)}, \quad (2-28)$$

donde Q^2 es el cuadrado del momento transferido del proceso, $\tilde{\mu}_s$ es la escala de energía ultravioleta de renormalización y $b_1 = \frac{1}{12}(11N_c - 2N_f)$ es el primer coeficiente asociado a la función beta al nivel de un lazo. La gráfica de la dependencia de la constante se observa en la figura (2-4). Esta ecuación muestra dos hechos importantes: cuando Q incrementa, la constante de acoplamiento decrece, a este fenómeno se le conoce como *libertad asintótica*, el cual permite que en los procesos donde el momento transferido es grande sea posible utilizar la teoría de perturbaciones. Por el contrario, cuando Q^2 está por debajo de 1 GeV^2 se le conoce como el régimen no perturbativo, donde la constante de acoplamiento incrementa significativamente. Este hecho está asociado al fenómeno del confinamiento, lo cual puede verse reflejado en la formación de hadrones.

Como conclusión de este capítulo podemos notar que las propiedades de simetría y confinamiento de la QCD nos proporcionan información relevante de los límites de la teoría. De esta manera, en el siguiente capítulo se observa como estos conceptos se convierten en los guías para la comprensión de los sistemas fuertemente interactuantes a condiciones extremas de temperatura y densidad bariónica finita.

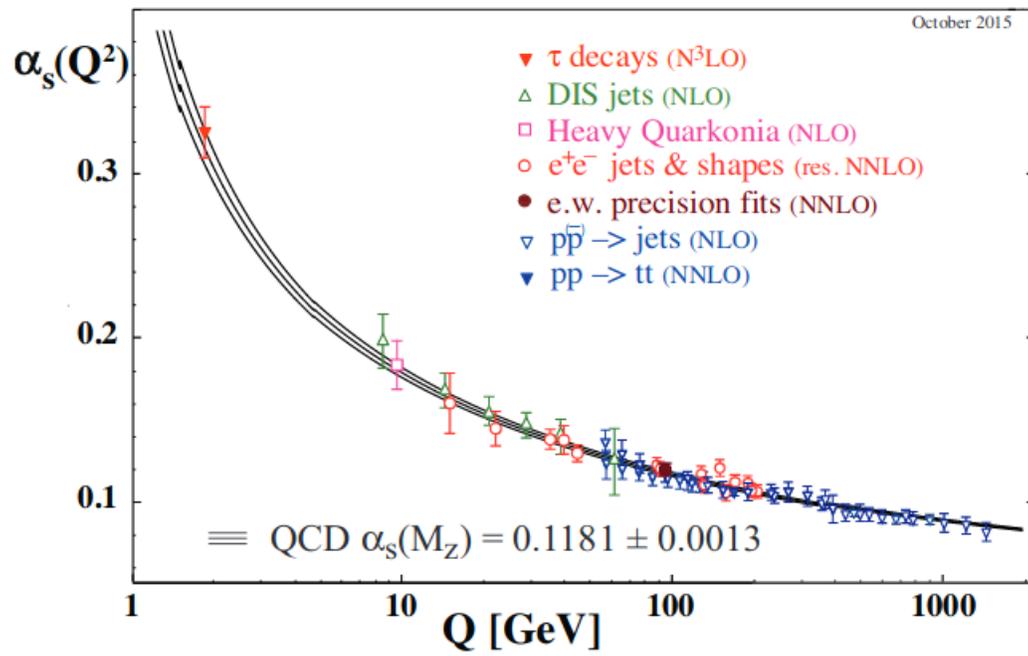


Figura 2-4: Resumen de las mediciones de α_s como función de la escala de energía Q . [6]

Capítulo 3

Diagrama de fase de QCD

En este capítulo se estudiará el panorama general del diagrama de fase de QCD, abarcando sus características principales como es la descripción de sus fases, los parámetros de orden y los resultados presentados en diversos modelos.

3.1. Introducción al diagrama de fase de QCD

La QCD, la teoría de la interacción fuerte, como se discutió en el capítulo anterior tiene dos propiedades importantes. Por una parte, la imposibilidad de observar partículas con carga de color de manera aislada se conoce como el confinamiento y la propiedad que muestra que a distancias muy pequeñas la intensidad de la interacción tiende asintóticamente a cero se conoce como la libertad asintótica. No obstante, a través de resultados experimentales y modelos teóricos [28] se ha determinado que a densidades de energía de alrededor de 30 a 100 veces las encontradas en la materia nuclear o a temperaturas por encima de los 3 mil millones de grados centígrados, los núcleos atómicos se encuentran disueltos en sus componentes más elementales. De esta forma surge del concepto de *desconfinamiento*. Planteada esta idea se sugiere principalmente que la materia compuesta de quarks y gluones presenta transiciones de fase.

3.1.1. El plasma de quarks y gluones

De forma clásica, el plasma está caracterizado por ser un gas completamente o parcialmente ionizado. Al elevar la temperatura a alrededor de 20 a 40 MeV [9] ocurre que la energía cinética de los núcleos comienza a ser superior a la barrera de Coulomb y en consecuencia, los efectos nucleares empiezan a ser relevantes. Sin embargo, al incrementar la temperatura a alrededor de 150 a 200 MeV [10] sucede que los núcleos se disocian en sus componentes más elementales de quarks y gluones, por lo que las barreras entre los hadrones desaparecen y comienza formarse un estado denso conocido como el *plasma de quarks y gluones* (QGP). Una de las propiedades típicas del QGP creado a estas escalas de temperaturas es que el número de quarks y antiquarks resulta muy similar, es decir, $n_q \approx n_{\bar{q}}$.

Igualmente, existe otra forma de producir este estado de la materia fuertemente interactuante y es por medio del incremento de la densidad bariónica. Esto puede entenderse de la siguiente forma: si se considera una gran cantidad de hadrones los cuales son comprimidos adiabáticamente, manteniendo una temperatura $T \sim 0$, entonces, los hadrones comenzarán a traslaparse unos a otros hasta disolverse, formando así el plasma de quarks y gluones. La densidad crítica ρ_c para llevar a cabo este proceso es varias veces superior a la densidad nuclear $\rho_{nuclear} \sim 0.16 \text{ fm}^{-3}$. Además, se estipula que en la producción del QGP en estas condiciones ocurre que $n_q \gg n_{\bar{q}}$. En la figura 3.1 se muestra una comparación entre las dos formas de producción del QGP.

3.1.2. Lugares de formación del plasma de quarks y gluones

Basado en lo anterior, se especula que el plasma de quarks y gluones pudo y puede encontrarse en al menos los siguientes lugares: el universo temprano, el centro de las estrellas compactas y en los estados iniciales de las colisiones de iones pesados relativistas.

En el estudio del universo temprano, las soluciones de Friedmann a las ecuaciones de Einstein, muestran que el universo tuvo una expansión desde una *singularidad* a un tiempo cero. Este punto inicial fue denominado *Big Bang* [8]. El escenario de la expansión del universo ha sido comprobada por medio de la ley de Hubble y por el descubrimiento de la radiación de

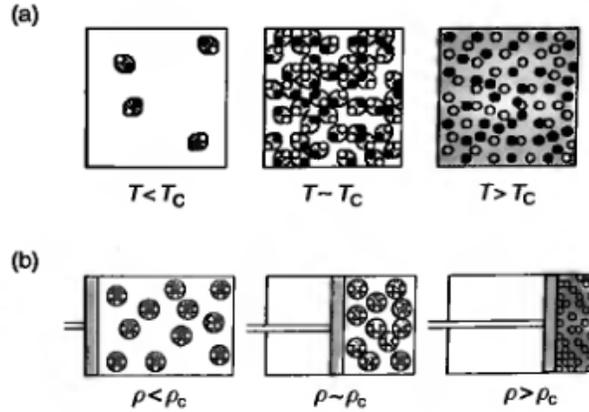


Figura 3-1: (a) Formación de QGP a temperatura T finita y densidad bariónica $\rho_B \approx 0$. (b) Formación de QGP con densidad bariónica ρ_B finita y $T \approx 0$ [8].

fondo. Por otro lado, si se considera una extrapolación del retroceso de la expansión del universo hasta los instantes iniciales a un tiempo aproximadamente entre 10^{-5} y 10^{-4} s después del Big Bang, se infiere que la materia y radiación pudieron haber estado a una temperatura entre 150 y 200 MeV [10], en un estado que se conoce como *la bola de fuego primordial*. Como consecuencia se teoriza la existencia a la transición del QGP. En La figura (3-2) se muestra un gráfico donde se identifican algunas de las transiciones de fase más relevantes que se cree que ocurrieron durante el universo temprano en función del tiempo.

En los centros de las estrellas compactas, como es el caso de las estrellas de neutrones, se especula que podría encontrarse el plasma de quarks y gluones a densidades altas. Se establece que si la densidad central de estas estrellas alcanza entre 5 y 10 veces la densidad nuclear $\rho_{nuclear} \sim 0.16 \text{ fm}^{-3}$. Existe gran posibilidad que los neutrones estén disueltos en sus constituyentes de quarks y gluones a bajas temperaturas.

En las colisiones de iones pesados se utilizan elementos como oro Au o plomo Pb y son acelerados hasta energías relativistas, ($\bar{p}^2 \approx m^2$) o ultra relativistas ($\bar{p}^2 \gg m^2$). En estos regímenes, los iones pesados sufren una contracción debido a las contribuciones relativistas que son más perceptibles a mayor energía. Si se considera el caso cuando la energía cinética por nucleón es aproximadamente de 100 GeV, vista desde el sistema de referencia del centro de masa, entonces los núcleos colisionados tienden a pasar unos sobre otros produciendo materia en la

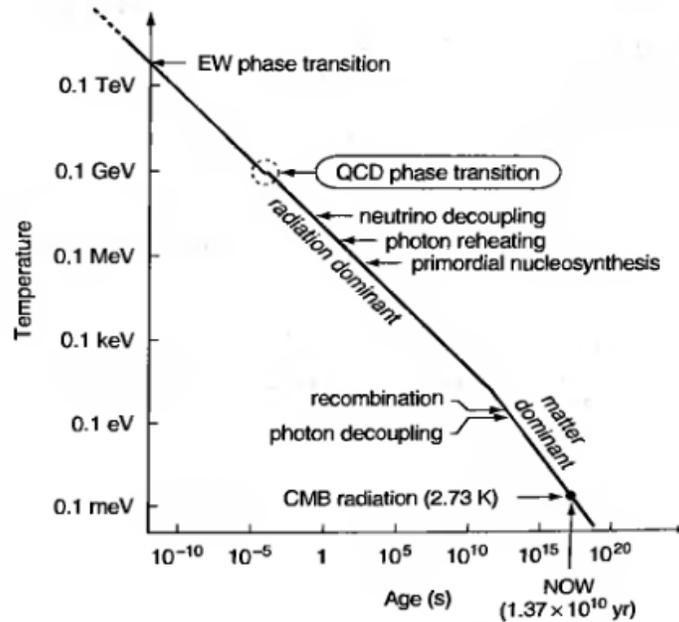


Figura 3-2: Gráfico de la temperatura de la evolución del universo en función del tiempo que muestra las principales transiciones de fase que se creen que ocurrieron en el universo temprano[8].

región donde se interpusieron a una temperatura muy alta con una baja densidad bariónica. Los colisionadores como el *Large Hadron Collider* (LHC) en el CERN y *The Relativistic Heavy Ion Collider* (RHIC) en BNL, realizan este tipo de procesos. Por el contrario, cuando la energía cinética por nucleón, vista desde el sistema del centro de masa, es aproximadamente entre 1 y 10 GeV, los núcleos colisionados tienden a sobreponerse unos a otros y en este caso la densidad bariónica aumenta. En la figura (3-3) se muestran ejemplificados estos dos procesos de producción del plasma de quarks y gluones en colisiones de iones pesados. Por otro lado, reconstruyendo los vestigios de las partículas que dejaron a su paso después de la colisión, es posible retroceder a la formación inicial del QGP y así identificar sus propiedades. En las figuras (3-4) se muestran las señales esenciales de la presencia de un medio, en función de la densidad de energía $\epsilon \sim dE^T/dy$, que se obtienen en las colisiones de iones pesados relativistas.

Finalmente, los resultados tanto teóricos como experimentales muestran que el QGP no es un simple gas ideal compuesto de quarks y gluones libres, sino un sistema fuertemente interactuante parecido a un fluido relativista, por lo que modelos hidrodinámicos y de transporte suelen ser

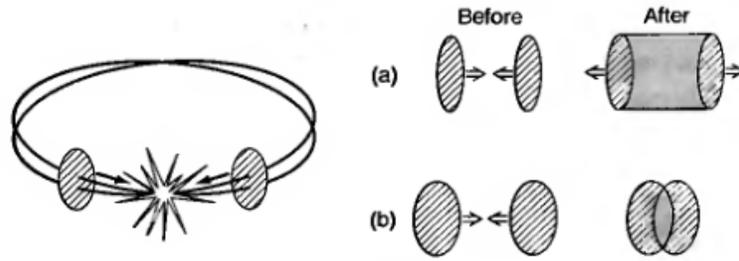


Figura 3-3: (a) Formación de QGP en colisión de iones pesados a alta temperatura y baja densidad bariónica. (b) Formación de QGP a mayor densidad bariónica en colisiones menos energéticas [8].

utilizados para su descripción efectiva [11].

3.2. Transiciones de fase

Antes de iniciar con el análisis del diagrama de fase de QCD, vale la pena mencionar de manera general la importancia de las transiciones de fase y su relación con las simetrías, ya que estos dos conceptos son fundamentales para realizar el estudio detallado del diagrama.

3.2.1. Modelo de Landau

La importancia del rompimiento de la simetría tiene consecuencias sustanciales en distintas áreas de la física como materia condensada, física de partículas elementales o teoría cuántica de campos. Una de las primeras personas en notar la influencia de este concepto fue Lev Landau con su teoría de la física estadística de las transiciones de fase [22].

Landau consideró el modelo de Ising en dos dimensiones, el cual consiste en un sistema de un imán cuyos estados están determinados por las dos posibles direcciones de sus espines. Se observa que a temperaturas altas, la probabilidad de encontrar un espín apuntando en cualquiera de las dos direcciones es la misma y la *magnetización* M , que es el promedio espacial del momento magnético, es cero. En este mismo caso, el sistema presenta una simetría global como se muestra en la imagen (3-5), ya que al invertir la dirección de todos los espines, la probabilidad de encontrar un espín en alguna dirección preferencial y la magnetización permanecen invariantes.

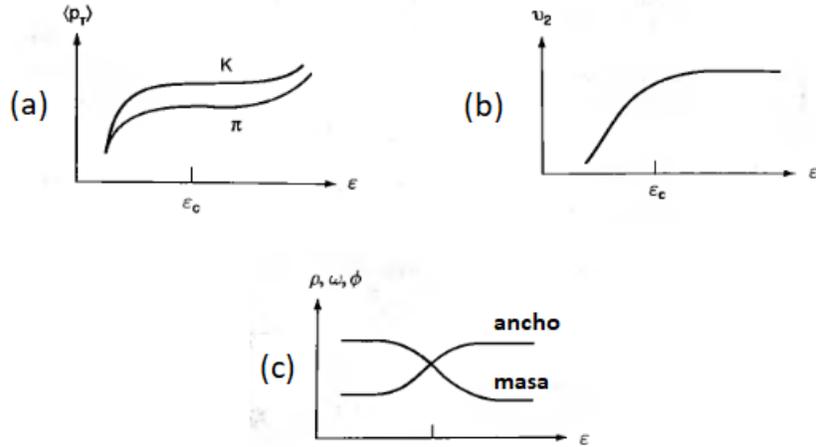


Figura 3-4: (a) Incremento en el promedio del momento transverso de los hadrones debido a un salto en la densidad de entropía en la transición de fase. (b) Incremento en el flujo elíptico de hadrones debido a la termalización temprana de una configuración inicial anisotrópica. (c) Modificación de las masas y ancho de los mesones vectoriales ligeros debido al restablecimiento de la simetría quiral [8].

En contraste, al disminuir la temperatura por debajo de un valor crítico T_c , se percibe que los espines quedan completamente alineados en una sola dirección y como resultado la magnetización $M \neq 0$. A este cambio abrupto en el estado del sistema donde se exhiben propiedades muy diferentes se le conoce como *transición de fase*. No obstante, al realizar la rotación de los espines en estas condiciones, la magnetización cambia de $M \rightarrow -M$, lo cual resulta en un *rompimiento de la simetría* como se muestra en la figura (3-6).

Las ideas de Landau para entender el modelo de Ising eran relacionar los conceptos de transición de fase con el de rompimiento de una simetría. Para esto consideró que dado que los sistemas en equilibrio termodinámico trata de minimizar su energía interna U y maximizar su entropía S , la energía libre de Helmholtz, $F = U - TS$, debía ser el potencial termodinámico adecuado para determinar los estados en equilibrio que minimizan la energía libre del sistema. En este análisis, Landau expresó la energía libre F en función de la magnetización M como

$$F = F_0 + aM^2 + bM^4, \quad (3-1)$$

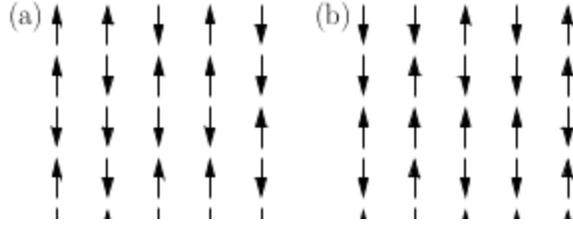


Figura 3-5: A una temperatura $T > T_c$, el sistema presenta la misma probabilidad de encontrar un espín en cualquiera de las direcciones y magnetización $M = 0$ (a). Si se invierte la dirección de los espines del imán las propiedades mencionadas permanecen invariantes [22].

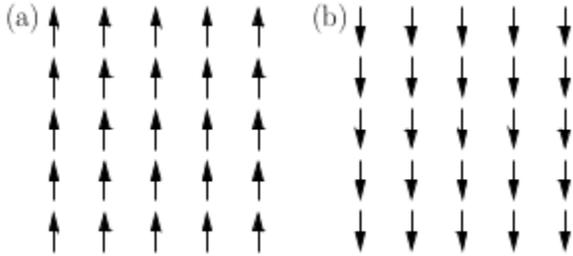


Figura 3-6: (a) A una temperatura $T < T_c$, los espines queda alienados en la misma dirección. (b) Al invertir la dirección de los espines la magnetización M cambia, lo cual muestra el rompimiento de la simetría [22].

dada esta expresión, Landau pudo realizar un estudio del modelo de Ising cerca de la transición para los casos cuando $M = 0$ para $T > T_c$ (fase desordenada) y cuando $M \neq 0$ para $T_c > T$ (fase ordenada).

A través de considerar los coeficientes $a = a_0(T - T_c)$, con a_0 constante y b independiente de la temperatura, Landau determinó los mínimos del sistema mediante la expresión

$$\frac{\partial F}{\partial M} = a_0(T - T_c)M + 4bM^3 = 0, \quad (3-2)$$

ya que al definir el parámetro a en términos de la temperatura, es posible caracterizar los siguientes casos: para $a > 0$, el mínimo de la energía coincide cuando $M = 0$, lo cual corresponde con la predicción a alta temperatura $T > T_c$ y para $a < 0$, la energía libre presenta dos

mínimos degenerados dados por $M = \pm M_0$. Estos dos valores corresponden a las dos direcciones privilegiadas que puede tomar el sistema. En la figura (3-7) se muestra un gráfica de la energía libre para los distintos casos de temperatura previamente discutidos.

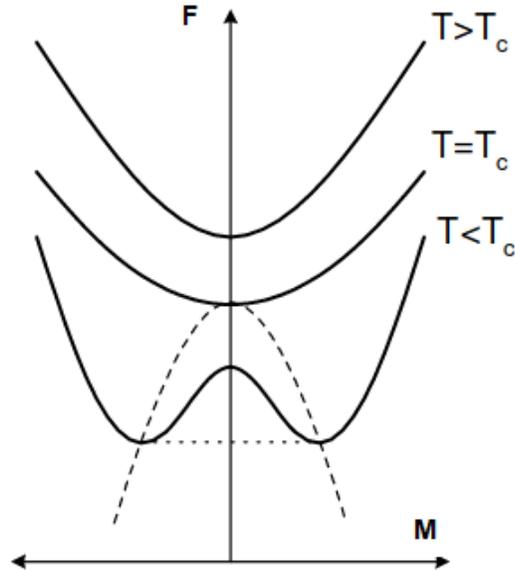


Figura 3-7: En esta gráfica se presenta la dependencia de la energía libre con respecto a la magnetización M para los distintos casos de temperatura, $T > T_c$, $T = T_c$ y $T_c > T$. Además se puede observar la evolución de la energía libre de tener un mínimo a desarrollar dos mínimos degenerados debido a la disminución de la temperatura [43].

3.2.2. Clasificación de las transiciones de fase

Debido a la complejidad en el estudio de las transiciones de fase que se presentan en diversos fenómenos de la naturaleza, existen varias clasificaciones que permiten realizar descripciones efectivas, es por ello que por simplicidad y eficacia, para el desarrollo de este trabajo, se utiliza el enfoque de Ehrenfest.

Para comenzar con la clasificación, primero suponemos que existen D constantes de acoplamiento, K_1, \dots, K_D , que bien podrían ser campos externos o variables termodinámicas como la magnetización o la temperatura, las cuales establecen el espacio fase del sistema. Después,

se define a la energía libre, $F[K_1, \dots, K_D]$, como una función analítica de las constantes de acoplamiento en casi todas las regiones del espacio. Dadas estas consideraciones, se determinan las *fronteras* del diagrama de fase como los lugares geométricos, donde la energía libre, $F[K_1, \dots, K_D]$ no es una función analítica, cuyas regiones podrían ser puntos, líneas, planos o superficies. Para clasificar los tipos de transición de una fase que ocurren de una fase a otra se realiza a través de las discontinuidades de las derivadas de la energía libre $F[K_1, \dots, K_D]$ con respecto a alguna de las constantes de acoplamiento K_i . Por ejemplo, si la primera derivada de la energía libre

$$\frac{\partial F}{\partial K_i} \quad (3-3)$$

es una función discontinua a lo largo de una frontera, ya sea para una constante K_i o alguna otra, entonces la transición se le conoce como una *transición de primer orden*. Para este caso, las primeras derivadas están relacionadas con las variables termodinámicas como la entropía o la magnetización. Por otro lado, si ocurre que todas las derivadas $\partial F/\partial K_i$ son continuas a lo largo de las fronteras, pero

$$\frac{\partial^2 F}{\partial K_i^2} \quad (3-4)$$

es una función discontinua para alguna o más derivadas, entonces se dice que es una *transición de segundo orden*, donde comúnmente, las segundas derivadas están relacionadas con el calor específico o la susceptibilidad magnética.

Recordando el enfoque de Landau de vincular el rompimiento de la simetría con la transición de fase en el modelo de Ising, la variable crucial que permite realizar este análisis es la magnetización M , ya que a través de ésta es posible caracterizar la fase desordenada ($T > T_c$) de la fase ordenada ($T_c > T$). A este tipo de variables que permiten especificar las distintas fases se conocen como *parámetros de orden*. Por tanto, se puede también escribir la energía libre como una función que depende de las constantes de acoplamiento K_1, \dots, K_D y el parámetro de orden η , es decir, $F[K_1, \dots, \eta]$, donde la clasificación de las transiciones de fase y las simetrías se siguen cumpliendo. De esta forma podemos concluir que el modelo de Ising en dos dimensiones explicado previamente presenta una transición de segundo orden, ya que al considerar las

segundas derivadas de la energía libre, que en este caso sería el calor específico, se observa que la función es discontinua como se muestra en la figura (3-8).

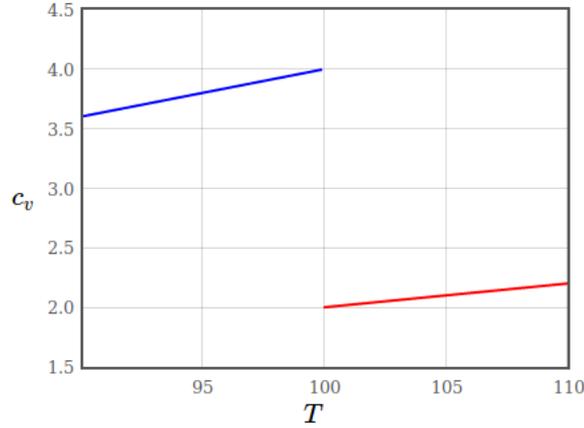


Figura 3-8: Gráfica del calor específico con respecto a la temperatura. Se muestra una discontinuidad donde el salto tiene un valor aproximado de $2a^2T_c/b$ [44].

Es relevante notar que algunos fenómenos físicos como la transición de sólido a líquido pueden ocurrir transiciones de fase de primer orden asociadas a algún rompimiento de una simetría del sistema. Usando el enfoque de Landau, estos tipos de sistemas puede describirse de manera efectiva mediante la energía libre cerca del comportamiento crítico como una serie de potencias dada por la expresión

$$F = \eta_0 + a_0(T - T_c)\eta^2 - \frac{1}{2}|b|\eta^4 + \frac{1}{3}c\eta^6, \quad (3-5)$$

donde el sistema comienza para el caso de $T > T_c$ y $T = T_c$ presenta únicamente un mínimo global en $\eta = 0$, aunque para el caso $T < T_c$, se manifiesta un rompimiento de la simetría, el cual se ve reflejado en la presencia de dos mínimos en $\pm\eta$. La evolución del comportamiento de la energía libre en la figura (3-9) con respecto al parámetro de orden para distintas temperaturas muestra la presencia de una transición de fase de primer orden.

Finalmente, cabe mencionar que la relación entre rompimiento espontáneo de la simetría y el concepto de transición de fase están íntimamente ligados, el estudio de esta correspondencia resulta una guía para el análisis del diagrama de fase de QCD.

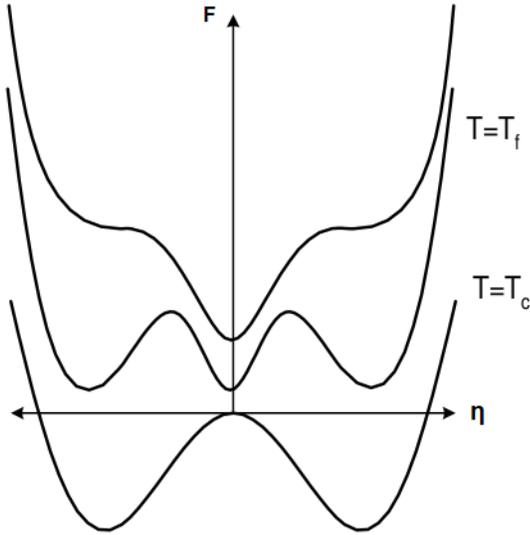


Figura 3-9: Gráfica de la evolución de la energía libre con respecto al parámetro de orden η para una transición de sólido a líquido para distintas temperaturas, donde muestra la presencia de una transición de fase de primer orden [43].

3.3. Desarrollo histórico del diagrama de fase de QCD

La historia del diagrama de fase de QCD tiene sus comienzos en 1975 cuando Cabibbo y Parisi publicaron el artículo [23], donde proponían que el espectro exponencial de Hagedorn [?] - el cual consiste, que el número de hadrones con una masa menor a m que crece exponencialmente con respecto a m - podría ser interpretado como un desconfinamiento, ya que la densidad de energía de las partículas diverge a una temperatura finita T_H . De esta forma, Cabibbo y Parisi dedujeron que la materia fuertemente interactuante debía presentar dos fases, una donde los grados de libertad son hadrones y otra donde sus constituyentes son los nuevos grados de libertad. Ambas fases quedaron representadas en un diagrama de fase con una temperatura crítica asociada a una transición de fase de segundo orden, como se muestra en la figura (3-10).

Este primer prototipo del diagrama en el plano de densidad bariónica y temperatura ρ_B - T está basado en el análisis de un gas de resonancia de hadrones a temperatura finita, donde la densidad de estados $\rho(m)$, que en su mayoría son mesones, es proporcional a e^{m/T_H} y $T_H \sim 0.19$

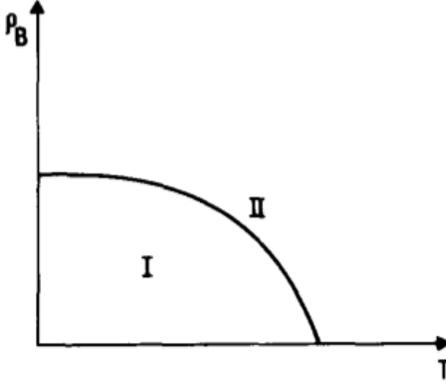


Figura 3-10: Primer diagrama de fase de QCD hecho por Cabibbo y Parisi en el plano $T - \rho_B$ [23].

GeV es la *temperatura de Hagedorn* [18]. En esta expresión la densidad presenta un crecimiento exponencial, el cual está balanceado por el factor de Boltzmann $e^{-m/T}$ en la función de partición y cuando $T > T_H$, entonces la materia se encuentra disuelta en sus constituyentes. Por otra parte, al considerar la densidad de los estados bariónicos $\rho_B \sim e^{m/T_B^H}$, y balanceando este término por el factor de Boltzmann $e^{-m-\mu_B/T}$, se obtiene que la temperatura $T = (1-\mu_B/m)T_B^H$ y al tomar el límite $T = 0$ se encuentra el valor crítico del potencial químico bariónico $\mu_{Bc} \sim 1$ GeV.

Con el paso del tiempo el diagrama sufrió diversas variaciones de las que se destacan principalmente las realizadas por Gordon Baym en 1982 [25] y 1983 [24], como se muestran en la figura (3-11). En una primera instancia, el diagrama de fase de QCD estaba caracterizado por dos líneas separadas que representan el desconfinamiento y la restauración de la simetría quiral en el plano temperatura T - ρ_B , donde no existían suficientes argumentos teóricos para diferenciar una de otra. En la segunda variación, se observa un diagrama definido por una sola línea, mostrando que el desconfinamiento y la restauración de la simetría quiral toman lugar casi a la misma temperatura para teorías de norma con simetrías $SU(2)$ y $SU(3)$, este cambio en el diagrama fue expuesto en el *Plan a Largo Plazo de la Física Nuclear* por la NSAC en 1983 [28]. La evolución del diagrama como se muestra en la imagen (3-11), se debe principalmente al mejoramiento del procesamiento de calculo para realizar simulaciones por medio de las técnicas

de *lattice Monte Carlo* [27]. Asimismo, la deducción de una sola frontera en el diagrama sólo es válida para valores pequeños de la densidad bariónica comparados con la temperatura.

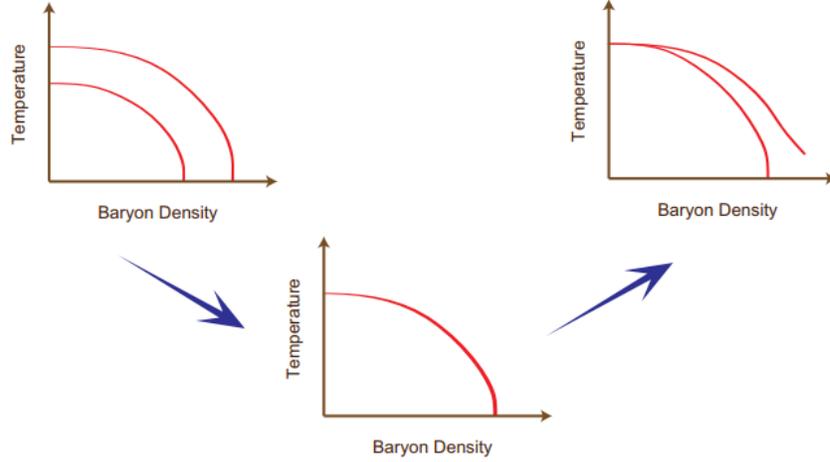


Figura 3-11: Evolución del diagrama de fase de QCD considerando los avances de las técnicas de Monte Carlo [42].

3.4. Estructura del diagrama de fase de QCD

Los parámetros de orden, como se comentó en la sección 3.2, proporcionan valiosa información que caracterizan a las fases de un sistema y están estrechamente ligados con el rompimiento o restauración de alguna de sus simetrías. De manera que, en esta sección se discute algunos de los principales parámetros de orden que permiten realizar una descripción efectiva del diagrama de fase de QCD.

3.4.1. Parámetros de orden

En límite quiral donde se toma en cuenta que los quarks ligeros (up y down) no tienen masa, el lagrangiano de QCD es invariante ante las transformaciones $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$, como se discutió en la sección 2.4. A pesar de esto, el estado base del lagrangiano rompe la simetría quiral espontáneamente. Esto significa que $SU(2)_L \otimes SU(2)_R \rightarrow SU(2)_V$, donde $SU(2)_V$ es la simetría de sabor vectorial. Al considerar una temperatura $T \gg \Lambda_{QCD}$, se conjetura que

ocurre la restauración de la simetría quiral, por lo que se puede esperar una transición de fase de un estado del vacío con simetría rota a otro con la simetría restablecida. No obstante, en el caso real, el vacío de QCD puede considerarse como un medio fluctuante responsable de la generación de la masa de los quarks y debido a la libertad asintótica los quarks tienden a disminuir su masa a condiciones extremas de temperatura o densidad bariónica [30]. A menudo para realizar el estudio del rompimiento espontáneo de una simetría se recurre a la utilización de un campo escalar bosónico, no obstante, el lagrangiano dado por la expresión (2-5), para el caso de quarks no masivos, no contiene ningún campo escalar, por tanto el operador escalar más simple que pueda proporcionar información acerca del vacío es el *condensado de quarks*, el cual resultará ser un parámetro de orden para analizar la restauración de la simetría quiral, dicho parámetro se define como

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = \frac{\partial f}{\partial m} \quad (3-6)$$

donde f es la densidad de energía libre y m la masa de alguno de los quarks ligeros. En el caso del límite quiral, $m = 0$, el condensado de quarks se convierte en un verdadero parámetro de orden que indica la restauración o rompimiento de la simetría cuando

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}\psi \rangle = 0 &\rightarrow \text{Simetría restaurada} \\ \langle \bar{\psi}\psi \rangle \neq 0 &\rightarrow \text{Simetría rota.} \end{aligned} \quad (3-7)$$

Dado que los quarks tienen masa, estrictamente el condensado de quarks no resulta ser un parámetro de orden, pero puede considerarse de manera aproximada para la clasificación de las transiciones fases del diagrama. Asimismo, a través de la susceptibilidad quiral es posible determinar la temperatura crítica la cual se define como

$$\chi = \frac{\partial \langle \bar{\psi}\psi \rangle}{\partial m}. \quad (3-8)$$

Desde otro punto de vista, la variable que permite describir el desconfinamiento es el *Loop de Polyakov* [34], definido como

$$L = P e^{ig \int_c dx^\mu A_\mu}, \quad (3-9)$$

donde, P es el ordenamiento normal a lo largo de la trayectoria, g la constante de acoplamiento y A_μ es el campo de norma. Al considerar el valor promedio térmico de la traza, $Tr \langle L \rangle$, se obtiene

$$Tr \langle L \rangle \propto \exp(-\Delta F_q/T), \quad (3-10)$$

donde ΔF_q es la diferencia de energía libre de la teoría de norma entre un quark estático-aislado y la energía libre de un sistema de norma. El valor de expectación de la traza define el parámetro de orden del desconfinamiento de la carga de color, donde se obtienen los siguientes casos:

$$\begin{aligned} Tr \langle L \rangle = 0 &\rightarrow \text{fase confinada} \\ Tr \langle L \rangle \neq 0 &\rightarrow \text{fase desconfiada.} \end{aligned} \quad (3-11)$$

Debido a que estos dos parámetros son de naturaleza distinta, se podría esperar que los valores críticos que indican la presencia de una transición de fase fueran diferentes, pero como se comentó al inicio, las simulaciones de lattice QCD muestran resultados que coinciden de manera similar. Finalmente, cabe mencionar que estos dos parámetros de orden han sido los más relevantes en el estudio del diagrama de fase de QCD, sin embargo existen otros, los cuales también proporcionan información de las fases, como es el caso de la susceptibilidad de número de quarks extraños χ_s , el cual es un parámetro más relacionado en el contexto de las colisiones de iones pesados.

3.4.2. Fases del diagrama

Hasta el momento se ha estudiado que la materia compuesta de quarks y gluones presenta al menos dos fases que dependen de las condiciones de temperatura y densidad. También se

han introducido algunos parámetros de orden que permiten caracterizar estas fases. Ahora se discutirá la transición de una fase a la otra, es decir, si esta transición resulta ser de manera continua o abrupta.

¿Transición de fase de segundo orden o crossover?

Los argumentos de criticalidad estudiados previamente están en relación con las discontinuidades de alguna de las derivadas de la energía libre o con el rompimiento de alguna simetría. Un *crossover* puede entenderse como una transición suave entre dos fases separadas al cambiar ciertos parámetros. Igualmente, no está asociado con un cambio de simetría o alguna discontinuidad en la energía libre, por lo que no es considerado como una transición de fase. El crossover aparece muy a menudo en la naturaleza [31], donde ocurre usualmente en sistemas que cambian su comportamiento al pasar de un acoplamiento débil a uno fuerte. Un ejemplo es el fenómeno de transición del agua a vapor, donde por medio de la derivada de la densidad $d\rho/dT$ y la capacidad calorífica a presión constante C_p , se puede definir la temperatura de transición. Si se considera el caso donde la presión $P < P_c$, con $P_c = 20.064$ MPa, la transición es de primer orden, para el caso $P = P_c$, la transición es de segundo orden y para $P > P_c$, la transición es un crossover. En el crossover las funciones $d\rho/dT$ y C_p muestran picos pronunciados a distintas temperaturas como se observa en la figura (3-12). Este comportamiento ilustra que no está definida una temperatura crítica T_c de manera única como ocurre en las transiciones de fase. Por otro lado, un problema común en la descripción de los sistemas con crossover surge en la dificultad de tratar de modelar o proporcionar las ecuaciones de su comportamiento, por lo que los métodos numéricos resultan de gran utilidad.

El desarrollo de la QCD a temperatura finita ha progresado significativamente debido a los avances de *lattice QCD* (LQCD), tanto en la manera de mejorar la discretización de las mallas como en los avances de simulación de los algoritmos y por supuesto debido al incremento del procesamiento de cálculo a través de los recursos computacionales. En general existen distintas elecciones de los *parámetros y acciones* para realizar los cálculos de simulación numérica a temperatura finita, cabe mencionar que la mayoría de los resultados se han obtenido a *po-*

tencial bariónico químico, $\mu_B \sim 0$, donde esta variable se puede entender como la medida del desequilibrio entre la materia y la antimateria [?].

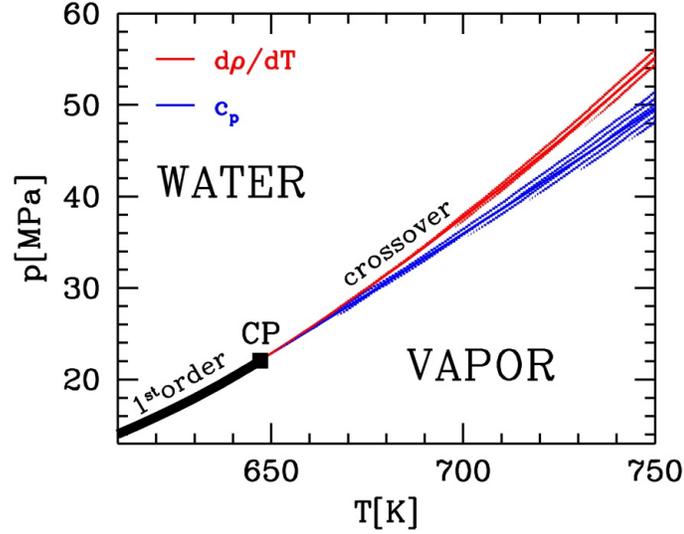


Figura 3-12: Ejemplo del diagrama de fase del agua donde se identifica de una transición por crossover [31].

Un resultado bastante significativo para la descripción del diagrama de fase utilizando LQCD, es el presentado por Y. Aoki, Z. Fodor, S.D. Katz y K.K. Szabó [31], donde realizan un estudio de la temperatura crítica del diagrama de fase con densidad de potencial bariónico $\mu_B = 0$. En este trabajo utilizaron las masas físicas de los quarks up, down y strange y una malla de $N_t = 4, 6, 8, 10$ para obtener una extrapolación continua. Por medio de la susceptibilidad quiral, la susceptibilidad de número de quarks extraños y el loop de Polyakov se presentan distintas temperaturas críticas definidas en sus intervalos correspondientes, indicando la presencia de un crossover, como se muestra en la figura (3-13). Se observa la dependencia de la temperatura en la región de transición para las variables de la susceptibilidad quiral renormalizada $m^2 \Delta \chi_{\bar{\psi}\psi} / T^4$, la susceptibilidad de quarks extraños χ_s / T y el loop de Polyakov renormalizado denotado por P_R . Los colores de los puntos rojo, azul, verde y lila representan los distintos espacios de la malla, las barras verticales sombreadas indican la temperaturas críticas y sus incertidumbres, donde el primer número en el paréntesis representa el error y el segundo número representa el error total de la determinación de la escala y por último la línea naranja muestra el límite quiral

determinado por la tres normalizaciones como función de la temperatura y sus incertidumbres [31]. Cabe mencionar que para una transición de fase real, el pico en la susceptibilidad quiral debería volverse muy estrecho en límite continuo, lo que implicaría una única temperatura crítica, de igual manera, para el caso de la susceptibilidad y el loop de Polyakov, la temperatura crítica única estaría asociada a los puntos de inflexión de sus respectivas curvas. Sin embargo el sistema presenta fuertes indicios de un crossover donde la temperatura de transición no está únicamente determinada, oscilando entre un rango de 155 ± 28 MeV.

Otras colaboraciones han reportado datos similares de temperaturas pseudocríticas como es el caso de MILC [32], la cual reportó una temperatura $T_c = 169(12)(4)$ MeV, la colaboración Wuppertal-Budapest [10] obtuvo $T_c = 147(2)(3)$, y la colaboración RBC-Bielefeld [33] reportó $T_c = 192(7)(4)$. Las diferencias entre los resultados obtenidos pueden deberse a los distintos algoritmos utilizados para realizar las simulaciones. Cabe aclarar que para el caso de $\mu_B \neq 0$, las simulaciones presentan complicaciones debido al problema de signo [34], aunque han habido algunas extensiones exitosas en las técnicas de lattice que examinan dicha región, no obstante es un tema abierto.

Por tanto, la criticalidad necesaria para una transición de segundo orden requiere utilizar los parámetros del confinamiento o la restauración de la simetría quiral de forma ideal, ya que en ambos casos los parámetros de orden resultan ser aproximados lo que se ve reflejado en la transición de crossover.

Transición de fase de primer orden

Dada la dificultad de explorar el diagrama de fase a densidad bariónica $\mu_B \neq 0$, existen distintos modelos efectivos que proporcionan información sobre estas regiones. Uno de los primeros estudios fue realizado por Asakawa y Yazaki [36] en 1983 quienes utilizaron el modelo *Nambu-Jona-Lasinio* (NJL) para el caso de $T = 0$ y $\mu_B \neq 0$. Dicho modelo fue propuesto inicialmente para estudiar la masa de los nucleones en términos de la autoenergía de campos fermiónicos, cuando aun no existía un desarrollo significativo de la QCD. En este trabajo se analiza el restablecimiento de la simetría quiral y se propone utilizar la aproximación de campo

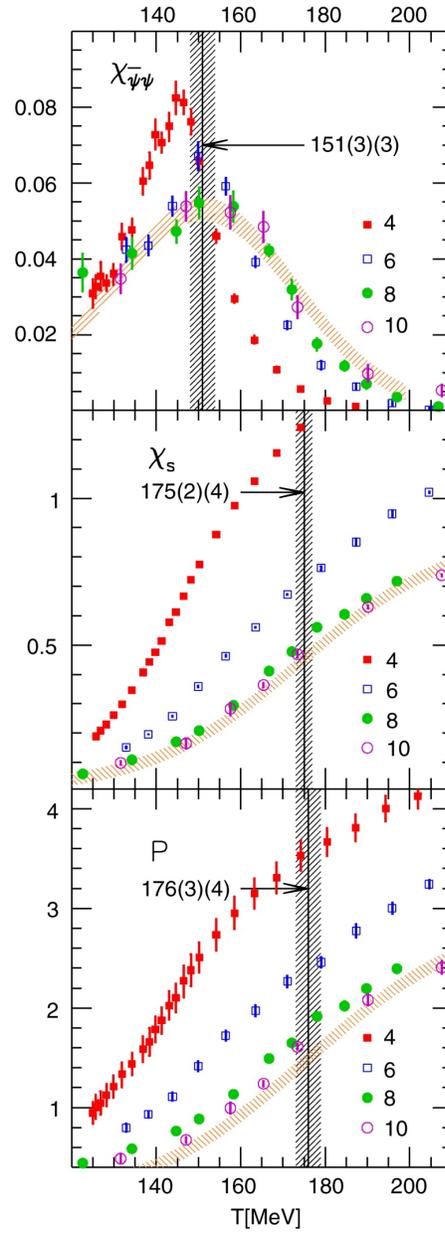


Figura 3-13: La primera gráfica muestra la región de la temperatura crítica utilizando la susceptibilidad quiral, la segunda gráfica se observa la región de la temperatura crítica identificada para la susceptibilidad de quarks extraños y la tercera gráfica exhibe la región de la temperatura crítica utilizando el loop de Polyakov [31].

medio. Esta aproximación consiste que para un sistema de muchos cuerpos se considera una partícula reaccionando al comportamiento promedio de todas las demás. La desventaja de utilizar el modelo NJL es que no es renormalizable ni provee información del desconfinamiento. En este

trabajo, Asakawa y Yazaki, mostraron que el sistema presenta una transición de primer orden donde el parámetro de orden se definió en términos del condensado quiral, con una densidad de potencial bariónico crítico $\mu_B^c \approx 440$ MeV. En la gráfica (3-14) se muestra la gráfica de la energía libre con respecto al parámetro de orden para distintos valores del potencial bariónico químico, en la cual se exhibe el comportamiento de una transición de primer orden.

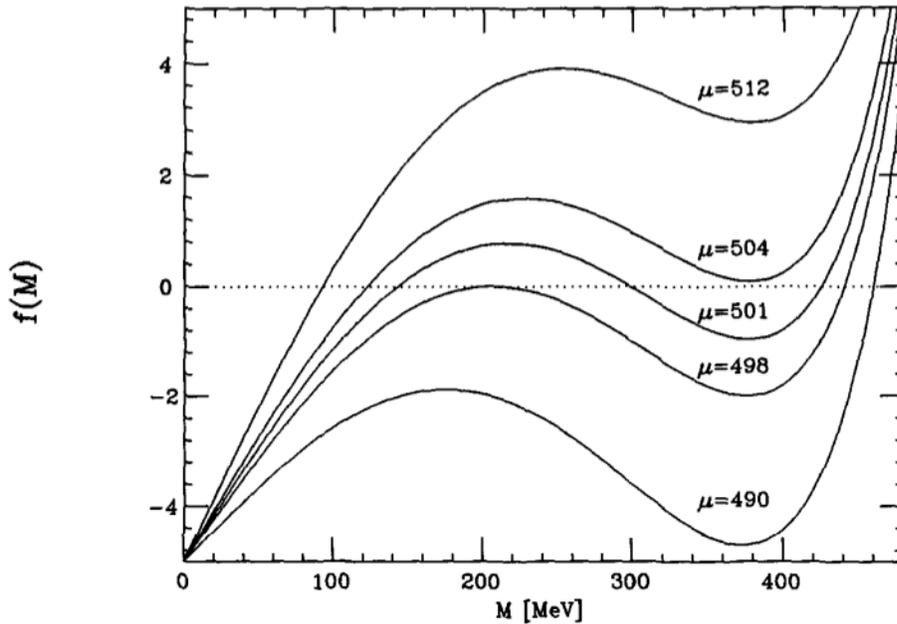


Figura 3-14: En esta gráfica se muestra la evolución del potencial para distintos valores de μ_B a $T = 0$, donde se resalta la evolución del potencial, mostrando la presencia de una transición de primer orden [36].

En el artículo titulado *On the Phase Diagram of QCD*, escrito por M.A Halasz, A.d. Jackson, R.E. Shrock, M.A. Stephanov y J.J.M Verbaarschot [35], se presenta un análisis del diagrama de fase de QCD con dos quarks de sabor sin masa en el plano $T-\mu_B$ utilizando principalmente el *modelo de matrices aleatorias* para describir la restauración de la simetría quiral a temperatura y potencial bariónico finito. En éste se elabora un diagrama de fase esquemático como se muestra en la figura (3-15), donde a potencial bariónico finito con temperatura $T \sim 0$, el diagrama de fase muestra una transición de fase de primer orden.

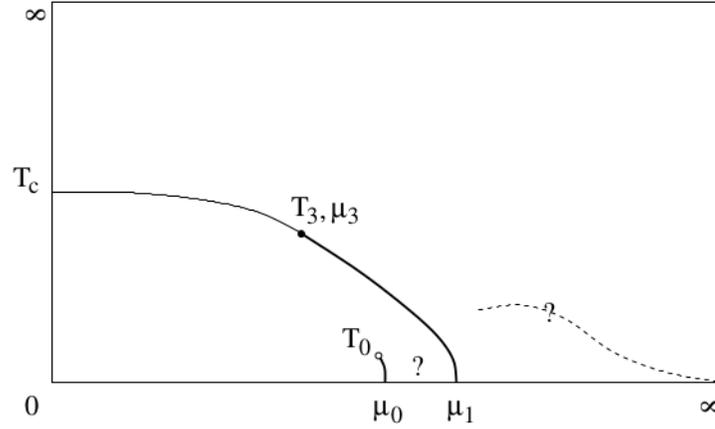


Figura 3-15: Descripción del diagrama de fase de QCD con dos quarks de sabor sin masa en el plano $T-\mu_B$ utilizando modelo de matrices aleatorias [35].

3.4.3. Punto crítico

Puesto que en el diagrama la transición de fase no se extiende hasta el eje de potencial bariónico μ_B , implica que debe existir un punto en el diagrama que exhiba el comienzo de la fase de crossover y el final de la línea de transición de fase de primer orden, a dicho punto se le conoce como el *punto crítico terminal* (CEP). En la figura (3-16) se muestra un modelo del diagrama de fase en el plano $T-\mu_B$, donde se conjetura la posible localización del punto crítico terminal.

En el estudio del diagrama de fase de QCD, la localización del CEP es de gran importancia debido a que proporciona valiosa información con respecto a las fases de materia fuertemente interactuante en condiciones extremas. Por tal motivo, diversos experimentos se han unido a la búsqueda, estudiando las colisiones de iones pesados en un rango de $7.7 \text{ GeV} < \sqrt{S_{NN}} < 200 \text{ GeV}$. Desde el punto de vista teórico existen una variedad de técnicas que buscan localizar el CEP, como son las reglas de suma de energía, métodos de renormalización funcional, holografía, ecuaciones de Schwinger-Dyson, entre otras. Por otro lado, en la tabla (3-17) se exhiben algunos posibles valores del CEP para diversos modelos efectivos.

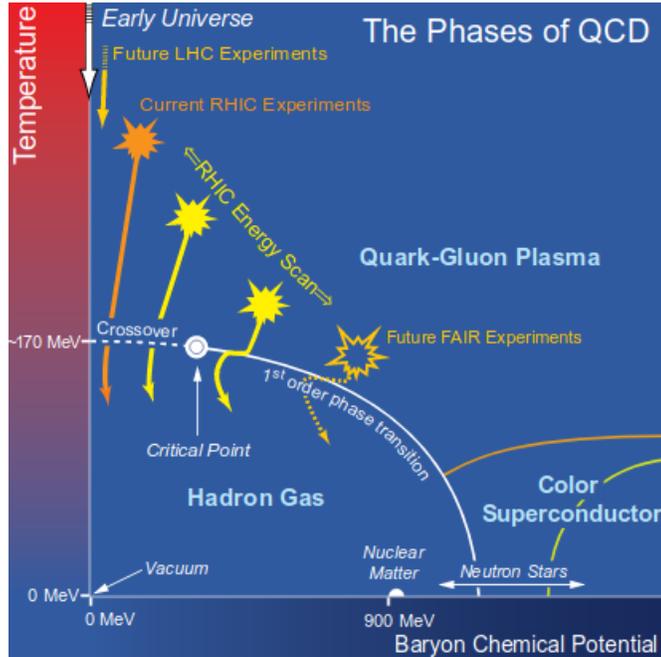


Figura 3-16: Diagrama esquemático de fase de QCD. Las líneas sólidas determinan las fronteras entre las fases, el punto crítico queda identificado por los círculos. Se muestran posibles trayectorias del análisis del QGP para distintos aceleradores. [37].

T_{CEP}	μ_{CEP}
$0.85 T_c$	$1.11 T_c$
69.9 MeV	319.1 MeV
5.1 MeV	286.7 MeV
145-155 MeV	$> 2 T_{CEP}$
112 MeV	204 MeV
119-162 MeV	84-86 MeV
38 MeV	245 MeV
	> 133.3 MeV
< 130 MeV	> 133.3 MeV
18-45 MeV	315-349 MeV

Figura 3-17: En esta tabla se muestran los valores del CEP obtenidos para distintos modelos [38].

Capítulo 4

Descripción del diagrama de fase de QCD

En este capítulo se presenta la descripción del diagrama de fase de QCD a través del modelo sigma lineal acoplado a quarks mediante el estudio de la restauración de la simetría quiral a temperatura y densidad finita. Para este análisis se utilizan las correcciones del potencial efectivo a baja y alta temperatura, además se considera los diagramas de anillo para la contribución del apantallamiento del plasma en el potencial efectivo a alta temperatura. Para fijar las constantes de acoplamiento se utilizan los parámetros físicos como las masas de los bosones sigma y de los piones en el vacío, la temperatura crítica a potencial bariónico nulo y el potencial bariónico crítico a temperatura cero. Finalmente se propone una región posible de localización del punto crítico terminal y se esquematiza varios prototipos del diagrama de fase de QCD, para los casos cuando la masa del pión $m_\pi = 0$ y $m_\pi \neq 0$.

4.1. Modelo sigma lineal acoplado a quarks

El *modelo sigma lineal* surgió en la década de 1960 para describir la simetría quiral en los sistemas donde interaccionaban los piones y nucleones [39]. No obstante, este modelo efectivo permite realizar un análisis de la simetría quiral de la materia fuertemente interactuante a bajas

energías, donde comúnmente la QCD presenta dificultades.

El lagrangiano del modelo sigma lineal acoplado a quarks (MSLq) está dado por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\vec{\pi})^2 + \frac{a^2}{2}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2) - \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2)^2 + i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - g\bar{\psi}(\sigma + i\gamma_5\vec{\tau}\cdot\vec{\pi})\psi, \quad (4-1)$$

donde ψ es un doblete de isoespín SU(2), σ es un singlete de isoespín y $\vec{\pi}$ es un triplete de isoespín. La constante de acoplamiento bosónica y fermiónica quedan determinadas por λ y g respectivamente. Por último, el término de masa viene dado por la constante a .

4.1.1. Simetría quiral del modelo sigma lineal acoplado a quarks

Como se discutió en la sección 2.4, la construcción de la simetría quiral se puede realizar mediante el producto directo de los grupos $SU(2)_L$ y $SU(2)_R$. Por consiguiente, en esta sección se comprueba que el lagrangiano del MSLq resulta invariante ante estas transformaciones y por lo tanto ante la simetría quiral. Para esto, primero se observa que el lagrangiano no involucra quarks masivos, por lo que es posible representarlos en la proyección quiral espinorial, es decir

$$\begin{aligned} \psi_L &= \frac{(1 + \gamma_5)}{2}\psi \\ \psi_R &= \frac{(1 - \gamma_5)}{2}\psi. \end{aligned} \quad (4-2)$$

Esta representación permite verificar la invariancia de la simetría izquierda (L) y derecha (R) del lagrangiano en una forma más sencilla. Por otro lado, También, es conveniente reescribir los términos de los campos bósónicos a través de la matriz campos mesónicos [40] definida como

$$\Sigma \equiv \sigma + i\vec{\tau}\cdot\vec{\pi}, \quad (4-3)$$

donde $\tau = (\tau^1, \tau^2, \tau^3)$ son las matrices de Pauli. Considerando esta matriz, se puede escribir por ejemplo el término de energía cinética de los bosones como:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4}[\partial_\mu \Sigma \partial^\mu \Sigma^\dagger] \\
&= \frac{1}{4}[\partial_\mu(\sigma + i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi})\partial^\mu(\sigma - i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi})] \\
&= \frac{1}{4}[\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \partial_\mu \vec{\pi} \partial^\mu \vec{\pi} + i\partial_\mu \vec{\sigma} \vec{\tau} \cdot \partial^\mu \vec{\pi} - i\partial_\mu \vec{\sigma} \vec{\tau} \cdot \partial^\mu \vec{\pi}] \\
&= \frac{1}{2}((\partial_\mu \sigma)^2 + (\partial_\mu \vec{\pi})^2),
\end{aligned} \tag{4-4}$$

por tanto el lagrangiano puede escribirse como:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{4}[\partial_\mu \Sigma \partial^\mu \Sigma^\dagger] + \frac{1}{4}a^2[\partial_\mu \Sigma \partial^\mu \Sigma^\dagger] - \frac{1}{16}\lambda^2[\partial_\mu \Sigma \partial^\mu \Sigma^\dagger] \\
&+ \bar{\psi}_L i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L + \bar{\psi}_R i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_R - g(\bar{\psi}_L \Sigma \bar{\psi}_R + \bar{\psi}_R \Sigma^\dagger \bar{\psi}_L).
\end{aligned} \tag{4-5}$$

Dada esta representación del lagrangiano del MSLq, es posible aplicar las transformaciones izquierda y derecha, y de esta forma, verificar la invariancia de la simetría quiral, $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$. Las transformaciones para los espinores y la matriz mesónica quedan expresadas como

$$\begin{aligned}
\psi_{L,R} &\rightarrow \psi'_{L,R} = U_{L,R} \psi_{L,R} \\
\Sigma &\rightarrow U_L \Sigma U_R^\dagger
\end{aligned} \tag{4-6}$$

donde U_L, U_R son matrices arbitrarias de $SU(2)_L$ y de $SU(2)_R$ respectivamente, las cuales están definidas como

$$U_{L,R} = \exp(-i\vec{\alpha}_{L,R} \cdot \vec{\tau}/2). \tag{4-7}$$

Utilizando estas transformaciones y sustituyéndolas en la expresión (4-5), el lagrangiano del MSLq permanece invariante.

En conclusión, en esta sección se mostró que el lagrangiano es invariante ante la simetría quiral, no obstante surge la pregunta si el estado base del lagrangiano es invariante ante estas transformaciones, lo cual lleva a la discusión que se desarrolla en la siguiente sección.

4.1.2. Rompimiento espontáneo de la simetría quiral

El estudio del rompimiento y restablecimiento de la simetría quiral en el MSLq resulta primordial, ya que a partir de estos conceptos podemos identificar las transiciones de fase en el diagrama de QCD. Para estudiar el rompimiento espontáneo de la simetría quiral debe ocurrir que el campo sigma desarrolle un valor de expectación v . Esta variable define el parámetro de orden para analizar las transiciones de fase en el diagrama de QCD. Una vez teniendo en cuenta lo anterior, se procede a redefinir el campo sigma de la siguiente manera

$$\sigma \rightarrow \sigma + v. \quad (4-8)$$

Posteriormente se sustituye el nuevo campo en el lagrangiano de la expresión (4-1), obteniendo la siguiente resultado

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)^2 - \frac{1}{2}(3\lambda v^2 - a^2)\sigma^2 - \frac{1}{2}(\partial_\mu \vec{\pi})^2 + \frac{a^2}{2}v^2 \\ & - \frac{1}{4}(\lambda v^2 - a^2)\vec{\pi}^2 - \frac{\lambda}{4}v^4 + i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - gv\bar{\psi}\psi + \mathcal{L}_I^b + \mathcal{L}_I^f, \end{aligned} \quad (4-9)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I^b = & -\frac{\lambda}{4}[(\sigma^2 + (\pi^0)^2)^2 + 4\pi^+\pi^-(\sigma^2 + (\pi^0)^2) + \pi^+\pi^-] \\ \mathcal{L}_I^f = & -g\bar{\psi}(\sigma + i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi})\psi. \end{aligned} \quad (4-10)$$

Dada la ecuación (4-10) notamos que los términos de masa del campo σ , de los tres piones $\vec{\pi}$ y de los fermiones ψ quedan especificados por las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} m_\sigma^2 &= 3\lambda v^2 - a^2 \\ m_\pi^2 &= \lambda v^2 - a^2 \\ m_f &= gv. \end{aligned} \quad (4-11)$$

La ecuación (4.11) determina las interacciones entre los campos correspondientes después del rompimiento de la simetría.

Por otra parte, el potencial clásico o también conocido como la contribución a nivel árbol queda expresada como

$$V^{cl}(v) = -\frac{a^2}{2}v^2 + \frac{\lambda}{4}v^4, \quad (4-12)$$

donde el valor de expectación del vacío del bosón sigma proporciona la información del rompimiento de la simetría a través de los extremos del potencial clásico. En este caso, al derivar la expresión (4-12) e igualar a cero, los valores que extremizan el potencial quedan determinados por la ecuación

$$\frac{dV^{cl}}{dv}(v_0) = v_0(-a^2 + \lambda v_0^2) = 0, \quad (4-13)$$

puesto que la simetría se rompe espontáneamente, $v_0 \neq 0$, entonces sólo se considera los términos que representan los mínimo, sin embargo, sin pérdida de generalidad y por simplicidad, se tomará en cuenta el término positivo de la expresión

$$v_0 = \sqrt{\frac{a^2}{2}}. \quad (4-14)$$

Se puede notar que al sustituir el mínimo en la ecuación (4-11), la masa de los piones resulta ser cero, $m_\pi = 0$, lo cual corresponde a lo predicho por el teorema de Goldstone, ya que al romperse la simetría por cada generador, se forman nuevas partículas no masivas, que para este caso corresponden a los tres piones. Por otra parte, la masa del bosón sigma queda como $m_\sigma = 2a^2$ y al tomar la segunda derivada del potencial clásico se obtiene que la curvatura del potencial

$$\frac{d^2V^{cl}}{dv^2}(v) = 3\lambda v^2 - a^2 = m_\sigma^2, \quad (4-15)$$

corresponde a la masa al cuadrado del potencial sigma. Es importante enfatizar que esta propiedad se mantiene aún en la correcciones cuánticas.

4.2. Potencial efectivo del modelo sigma lineal acoplado a quarks

Hasta el momento se ha estudiado el rompimiento de la simetría quiral del MSLq sin abarcar las correcciones cuánticas y térmicas. Por consiguiente, para el estudio de las transiciones de fase es necesario considerar una teoría térmica de campos cuánticos, la cual puede interpretarse como combinación entre mecánica estadística y una teoría cuántica de campos. En este formalismo, el *potencial efectivo*, $V(\phi)_{ef}$, resulta ser una herramienta fundamental para el estudio de fenómenos térmicos, ya que a partir de él, se obtiene la energía libre del sistema.

Para el análisis de la restauración de la simetría quiral, en este trabajo se han incluido las correcciones a un *lazo*, tanto para bosones y fermiones, y las contribuciones de los diagramas de *anillo* que toman en cuenta los efectos de apantallamiento del plasma. Para asegurar que las correcciones cuánticas de la temperatura y de densidad finita se mantengan, es necesario agregar los contra terminos δa^2 y $\delta \lambda$ a las constantes a^2 y λ respectivamente, por lo que en el potencial efectivo a nivel clásico de la ecuación (4-12) queda como

$$V^{cl}(v) = -\frac{(a^2 + \delta a^2)}{2}v^2 + \frac{(\lambda + \delta \lambda)}{4}v^4. \quad (4-16)$$

Estos contra términos aseguran que la transición de fase, a una temperatura crítica T_c para $\mu_B = 0$, sea de segundo orden y de primer orden para el caso de una densidad bariónica crítica μ_B^c y una temperatura $T = 0$.

Por otra parte, para incluir las correcciones cuánticas de temperatura y densidad finita, se considera el potencial bosónico y el potencial fermiónico con las correcciones a un lazo, dentro del formalismo de tiempo imaginario. Por consiguiente, la contribución del potencial bosónico con la corrección a un lazo está dada por la expresión

$$V^{(1)b}(v, T) = T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln D(\omega_n, \vec{k})^{1/2} \quad (4-17)$$

donde

$$D(\omega_n, \vec{k}) = \frac{1}{\omega_n^2 + k^2 + m_b^2} \quad (4-18)$$

es el propagador de los bosones libres con masa, m_b y $\omega_n = 2n\pi T$ es la *frecuencia de Matsubara* para los campos bosónicos. En contraste, la contribución del potencial fermiónico con la corrección a un lazo en el formalismo de tiempo imaginario y la adición del potencial químico de quarks esta dado por

$$V^{(1)f}(v, T, \mu_b) = -T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [\ln S(\tilde{\omega}_n - i\mu_b, \vec{k})^{-1}], \quad (4-19)$$

donde

$$S(\tilde{\omega}_n, \vec{k}) = \frac{1}{\gamma_0 \tilde{\omega}_n + \not{k} + m_f} \quad (4-20)$$

es el propagador fermiones con masa m_f y $\tilde{\omega}_n = (2n+1)\pi T$ es la frecuencia de Matsubara para los campos fermiónicos. Realizando las sumas de Matsubara, la cuales se pueden revisar en la referencia [15], la corrección a un lazo del potencial bosónico queda expresada como

$$V^{(1)b}(v, T) = \frac{1}{2\pi^2} \int dk k^2 \left[\frac{\sqrt{k^2 + m_b^2}}{2} + T \ln(1 - e^{-\sqrt{k^2 + m_b^2}/T}) \right]. \quad (4-21)$$

Se puede notar que el potencial está compuesto de dos piezas, una referente a la contribución del vacío y la segunda a una corrección térmica. Por otro lado, realizando las sumas de Matsubara en el caso fermiónico, las cuales también se pueden consultar en la referencia [15], la corrección a un lazo del potencial fermiónico, queda dada por

$$V^{(1)f}(v, T, \mu_b) = -\frac{1}{\pi^2} \int dk k^2 \left[\frac{\sqrt{k^2 + m_f^2}}{2} - T \ln(1 - e^{-(\sqrt{k^2 + m_b^2} - \mu_b)/T}) - T \ln(1 - e^{-(\sqrt{k^2 + m_b^2} + \mu_b)/T}) \right], \quad (4-22)$$

donde igual que en el caso bosónico, se tiene una parte correspondiente a la contribución del vacío y la contribución térmica. Es importante resaltar que la parte térmica, o también llamada la parte de materia, tiene una contribución del potencial químico de quarks que considera los quarks y antiquarks.

4.2.1. Auto-energía

Para poder describir la restauración de la simetría quiral de MSLq, es necesario incluir la auto-energía de bosones, que representan las correcciones térmicas y de densidad en la teoría. Para esto, es importante incluir las contribuciones de los diagramas de Feynman de lazo que corresponden por los campos bosónicos y fermiónicos que se muestran en la figura (4-1).

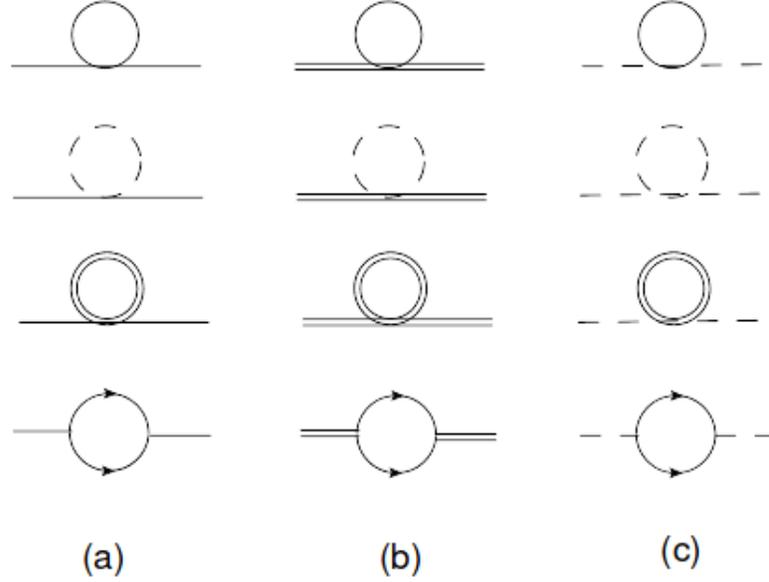


Figura 4-1: Diagramas de Feynman de la contribución a un lazo de las auto-energías bosónicas. La líneas continuas representan los campos sigmas, las líneas punteadas denotan los piones cargados y las líneas dobles son los piones neutros, por último los quarks quedan representados por las flechas [38].

La auto-energía, considerando los diagramas se puede escribir como

$$\Pi(T, \mu_q) = \sum_{i=\sigma, \pi^0, \pi^\pm} \Pi_i(T) + \sum_{j=u, d} \Pi_j(T, \mu_q) \quad (4-23)$$

donde su cálculo se realiza de manera muy similar que en la corrección del potencial bosónico a un lazo. En el caso de los bosones se tiene

$$\Pi_i(T) = \lambda \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \ln D(\omega_n, \vec{k})^{1/2}, \quad (4-24)$$

donde sólo se considera el término de materia, por tanto queda

$$\begin{aligned}\Pi_i(T) &\approx T\lambda \int \frac{d^3k}{(2\pi)^2} \frac{n_B(\omega)}{\omega} \\ \Pi_i(T) &= \frac{\lambda}{2\pi^2} \int dk \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + m_i^2}} n_B(\sqrt{k^2 + m_i^2}),\end{aligned}\quad (4-25)$$

donde λ es la constante de acoplamiento entre los bosones, $i = \sigma, \pi^0, \pi^\pm$ y $n_B(w) = 1/(e^{w\beta} - 1)$ es la función de ocupación bosónica, luego calculando las integrales se obtienen las siguientes auto-energías

$$\Pi_\sigma(T) = \frac{\lambda}{4} \left[12I\left(\sqrt{m_\sigma^2 + \Pi_\sigma}\right) + 4I\left(\sqrt{m_{\pi^0}^2 + \Pi_{\pi^0}}\right) + 8I\left(\sqrt{m_{\pi^\pm}^2 + \Pi_{\pi^\pm}}\right) \right] \quad (4-26)$$

$$\Pi_{\pi^\pm}(T) = \frac{\lambda}{4} \left[4I\left(\sqrt{m_\sigma^2 + \Pi_\sigma}\right) + 4I\left(\sqrt{m_{\pi^0}^2 + \Pi_{\pi^0}}\right) + 16I\left(\sqrt{m_{\pi^\pm}^2 + \Pi_{\pi^\pm}}\right) \right] \quad (4-27)$$

$$\Pi_{\pi^0}(T) = \frac{\lambda}{4} \left[4I\left(\sqrt{m_\sigma^2 + \Pi_\sigma}\right) + 12I\left(\sqrt{m_{\pi^0}^2 + \Pi_{\pi^0}}\right) + 8I\left(\sqrt{m_{\pi^\pm}^2 + \Pi_{\pi^\pm}}\right) \right], \quad (4-28)$$

donde

$$I(x) = \frac{1}{2\pi^2} \int dk \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + x}} n_B(\sqrt{k^2 + x}). \quad (4-29)$$

Dadas las auto-energías anteriores, se considera aproximación $m_i^2 + \Pi_i = 0$, que indica que la masa de los bosones es nula alrededor de la transición. Por lo que las auto-energías quedan expresadas como

$$\Pi_\sigma(T) = \Pi_{\pi^\pm}(T) = \Pi_{\pi^0}(T) = \frac{\lambda T^2}{6} [24I(0)] \quad (4-30)$$

$$= \frac{6\lambda}{2\pi^2} \int dk k \frac{1}{e^{k/T} - 1} = \frac{\lambda T^2}{6} \quad (4-31)$$

Por el contrario, para el caso de la auto-energía de los fermiones, el cálculo resulta algo similar,

puesto que la expresión

$$\begin{aligned}\Pi_j(T, \mu_q) &= -g^2 T \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} [S(\tilde{\omega}_n - i\mu_q, k, m_f) \ln(S(\tilde{\omega}_n - i\mu_q - \tilde{\omega}_m, k - \vec{p}, m_f))] \\ &= -4g^2 T \int \frac{dk^3}{(2\pi)^3} \frac{\beta}{\omega} \left(\frac{1}{2} - n(\omega - \mu_q) - n(\omega + \mu_q) \right).\end{aligned}$$

Como en el caso de los bosones, sólo se toma en cuenta el término de materia, es decir

$$\begin{aligned}\Pi_j(T, \mu_q) &\approx 4g^2 \int \frac{dk^3}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega} \left(n(\omega - \mu_q) - n(\omega + \mu_q) \right) \\ &= 4g^2 \int \frac{dk^3}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{m_j^2 + k^2}} \left(n_B(\omega - \mu_q) - n_B(\omega + \mu_q) \right),\end{aligned}\quad (4-32)$$

donde, g es la constante de acoplamiento de los quarks y los índices corren como $i = u, d$. Considerando la aproximación $m_f = 0$ cerca de la transición, entonces la integral queda como

$$\Pi_j(T, \mu_q) = -N_c g^2 \frac{T^2}{\pi^2} [Li_2(-e^{-\mu_q/T}) + Li_2(-e^{\mu_q/T})],\quad (4-33)$$

donde la función Li_2 es la función *polilogarítmica de orden 2*. Finalmente la contribución total de auto-energía queda determinada como

$$\Pi(T, \mu_q) = -N_c N_f g^2 \frac{T^2}{\pi^2} [Li_2(-e^{-\mu_q/T}) + Li_2(-e^{\mu_q/T})] + \frac{\lambda T^2}{2}\quad (4-34)$$

Calculado la auto-energía es posible obtener la contribución de los diagramas de anillo que permiten realizar una descripción del sistema más allá del campo medio. Esta aproximación queda especificada por

$$V^{anillo}(m_b, T, \mu_q) = \frac{T}{2} \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^2} \ln(1 + \Pi(m_b, T, \mu_q) D(\omega_n)).\quad (4-35)$$

Es importante mencionar que en la aproximación de alta temperatura, el modo de Matsubara más bajo resulta ser el más dominante, este hecho queda especificado en la referencia [15]. Por tanto, no es necesario calcular los otros modos de la expresión (4-35), entonces la contribución

de los diagramas de anillo queda como

$$V^{anillo}(m_b, T, \mu_q) = \frac{T}{4\pi^2} \int dk k^2 \left[\ln(k^2 + m_b^2 + \Pi(T, \mu_q)) - \ln(k^2 + m_b^2) \right]. \quad (4-36)$$

Al calcular la integral se obtiene

$$V^{anillo}(m_b, T, \mu_q) = \frac{T}{12\pi} (m_b^3 - (m_b^2 + \Pi(T, \mu_q))^{3/2}). \quad (4-37)$$

Finalmente, con las contribuciones tomadas en cuenta en esta sección es posible calcular los potenciales efectivos para las aproximaciones de alta y baja temperatura.

4.2.2. Potencial efectivo a alta temperatura

Para trabajar en el régimen de alta temperatura se hace la consideración de $T \gg m_b$ y $T \gg \mu_q$. También, debido a los avances de lattice mostrados en [32] y [33], se ha encontrado que la restauración de la simetría quiral ocurre en este régimen. Teniendo en cuenta esto, se considera la expresión (4-21), cuya ecuación se obtuvo debido a la contribución del vacío y de materia. Por tanto, para calcular el término de vacío es necesario *regularizar y renormalizar* para fijar una escala en la teoría. Para realizar este cálculo primero se emplea la regularización dimensional y después se utiliza el resultado de la integral [38]:

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 - m_b^2)^n} = i(-1)^n \frac{(m_b^2)^{2-\epsilon-n} \Gamma(n-2+\epsilon)}{(4\pi)^{2-\epsilon} \Gamma(n)}, \quad (4-38)$$

donde $D = d - 2\epsilon$. Si se asignan los valores $d = 3$ y $n = -1/2$, se puede escribir la contribución de vacío como

$$V_{vac}^{(1)b} = \frac{\tilde{\mu}^{3-d}}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \sqrt{k^2 + m_b^2}, \quad (4-39)$$

donde $\tilde{\mu}$ es la escala de normalización. Evaluando la integral queda

$$V_{vac}^{(1)b} = -\frac{m_b^4}{32\pi^2} \Gamma(\epsilon - 2) \left(\frac{4\pi\tilde{\mu}^2}{m_b^2} \right)^\epsilon, \quad (4-40)$$

y tomando el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$, se obtiene

$$V_{vac}^{(1)b} = -\frac{m_b^4}{64\pi^2} \left[\ln \left(\frac{4\pi\tilde{\mu}^2}{m_b^2} \right) - \gamma_E + \frac{3}{2} + \frac{1}{\epsilon} \right]. \quad (4-41)$$

En este caso, se utilizó el esquema de normalización mínimo (MS), donde $\tilde{\mu} = ae^{-1/2}$. Por consecuente, la expresión de la contribución del vacío queda como

$$V_{vac}^{(1)b} = -\frac{m_b^4}{64\pi^2} \left[\ln \left(\frac{4\pi a^2}{m_b^2} \right) - \gamma_E + \frac{1}{2} \right]. \quad (4-42)$$

Para el cacular la contribución de materia de los bosones, se toma en cuenta solo la siguiente expresión de la ecución (4-21)

$$V_{mat}^{(1)b} = \frac{T}{2\pi^2} \int dk k^2 \ln \left(1 - e^{-\sqrt{k^2+m_b^2}/T} \right), \quad (4-43)$$

donde se considera la aproximación $m_b/T \ll 1$. De esta forma, es posible realizar una aproximación en Taylor de los términos de m_b/T

$$V_{mat}^{(1)b} = -\frac{m_b^4}{64\pi^2} \ln \left(\frac{m_b^2}{(4\pi T)^2} \right) - \frac{\pi^2 T^4}{90} + \frac{m_b^2 T^2}{24} - \frac{m_b^3 T}{12\pi}. \quad (4-44)$$

Finalmente, la contribución al potencial efectivo por parte de los campos bosónicos queda dada por

$$V_{AT}^{(1)b} = -\frac{m_b^4}{64\pi^2} \left[\ln \left(\frac{4\pi a^2}{m_b^2} \right) - \gamma_E + \frac{1}{2} \right] - \frac{m_b^4}{64\pi^2} \ln \left(\frac{m_b^2}{(4\pi T)^2} \right) - \frac{\pi^2 T^4}{90} + \frac{m_b^2 T^2}{24} - \frac{m_b^3 T}{12\pi}. \quad (4-45)$$

Para el caso de la contribución de los fermiones se utiliza la expresión (4.22) y se toman las mismas consideraciones que en el caso de los bosones, es decir el término del vacío se regulariza dimensionalmente y se usa el esquema de normalización MS. En consecuencia, esta contribución puede ser calculada, no obstante, notando que esta expresión difiere por un factor de -4 en comparación a la contribución del vacío de los bosones, entonces la contribución fermiónica del

vacío queda dado por

$$V_{vac}^{(1)f} = -\frac{m_f^4}{16\pi^2} \left[\ln \left(\frac{4\pi a^2}{m_f^2} \right) - \gamma_E + 1 \right]. \quad (4-46)$$

Para la contribución de materia, se utiliza la aproximación de $m_f/T \ll 1$ y $\mu_q/T \ll 1$ y de la misma manera que en el caso de los bosones, se procede a realizar una expansión en serie de Taylor de los primeros términos, por lo que la contribución de materia queda expresada como

$$\begin{aligned} & \frac{m_f^4}{16\pi^2} \left[\ln \left(\frac{m_f^2}{(4\pi T)^2} \right) - \psi^0 \left(\frac{1}{2} + \frac{i\mu}{2\pi T} \right) - \psi^0 \left(\frac{1}{2} - \frac{i\mu}{2\pi T} \right) \right] \\ & - 8m_f^2 T^2 \left[Li_2(-e^{\mu_q/T}) + Li_2(-e^{-\mu_q/T}) \right] + 32T^4 \left[Li_4(-e^{\mu_q/T}) + Li_4(-e^{-\mu_q/T}) \right] \end{aligned} \quad (4-47)$$

donde Li_4 es la función polilogarítmica de orden cuatro y ψ^0 es la función digamma. Finalmente, la expresión para la contribución de los fermiones queda especificada por

$$\begin{aligned} V_{AT}^{(1)f} &= \frac{m_f^4}{16\pi^2} \left[\ln \left(\frac{4\pi a^2}{m_f^2} \right) - \gamma_E + \frac{1}{2} \right] + \frac{m_f^4}{16\pi^2} \left[\ln \left(\frac{m_f^2}{(4\pi T)^2} \right) - \psi^0 \left(\frac{1}{2} + \frac{i\mu}{2\pi T} \right) - \psi^0 \left(\frac{1}{2} - \frac{i\mu}{2\pi T} \right) \right] \\ & - 8m_f^2 T^2 \left[Li_2(-e^{\mu_q/T}) + Li_2(-e^{-\mu_q/T}) \right] + 32T^4 \left[Li_4(-e^{\mu_q/T}) + Li_4(-e^{-\mu_q/T}) \right]. \end{aligned} \quad (4-48)$$

En resumen, la expresión del potencial efectivo a alta temperatura debido a las contribuciones mencionadas queda determinada por

$$\begin{aligned} V_{AT}^{ef}(v, T, \mu_q) &= -\frac{(a^2 + \delta a^2)}{2} v^2 + \frac{(\lambda + \delta \lambda)}{4} v^4 \\ & + \sum_{b=\sigma, \pi} \left\{ -\frac{m_b^4}{64\pi^2} \left[\ln \left(\frac{4\pi a^2}{m_b^2} \right) - \gamma_E + \frac{1}{2} \right] - \frac{m_b^4}{64\pi^2} \ln \left(\frac{m_b^2}{(4\pi T)^2} \right) - \frac{\pi^2 T^4}{90} + \frac{m_b^2 T^2}{24} \right. \\ & \left. - \frac{T}{12\pi} (m_b^2 - (m_b^2 + \Pi(T, \mu_q))^{3/2}) \right\} \\ & + \sum_{f=u, d} \left\{ \frac{m_f^4}{16\pi^2} \left[\ln \left(\frac{a^2}{4\pi T^2} \right) - \gamma_E + \frac{1}{2} - \psi^0 \left(\frac{1}{2} + \frac{i\mu}{2\pi T} \right) - \psi^0 \left(\frac{1}{2} - \frac{i\mu}{2\pi T} \right) \right] \right. \\ & \left. - 8m_f^2 T^2 \left[Li_2(-e^{\mu_q/T}) + Li_2(-e^{-\mu_q/T}) \right] + 32T^4 \left[Li_4(-e^{\mu_q/T}) + Li_4(-e^{-\mu_q/T}) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4-49)$$

Con este potencial es posible realizar el análisis del diagrama de fase a alta temperatura, ya

que por medio de las correcciones de materia permiten restablecer la simetría quiral y de esta forma determinar la transición entre la fase hadrónica y la fase del plasma de quarks y gluones.

4.2.3. Potencial efectivo a baja temperatura

Para determinar las contribuciones de los campos bosónicos y fermiónicos para el potencial efectivo a baja temperatura, se consideran las aproximaciones $T \sim 0$ y μ_q finito, donde el potencial químico bariónico es tres veces el potencial químico de quarks, es decir, $\mu_B = 3\mu_q$. Para el caso de la contribución de los campos bosónicos se incorpora un potencial químico bosónico μ_b , el cual está asociado con la energía necesaria para agregar o remover un bosón en el sistema. Este potencial está relacionado a la descripción de densidades altas, que proporciona la información sobre la conservación del número de bosones, puesto que en el caso cuando el potencial químico de quarks es aproximadamente del orden de la masa del pión, aparece un exceso de piones, a diferencia del caso de alta temperatura, esta contribución por el potencial químico de bosones se relaciona en el contexto de densidades altas en el estudio de las estrellas de neutrones [?]. Por consiguiente, la contribución a un lazo de los campos bosónicos a baja temperatura queda expresada como

$$V_{BT}^{(1)b}(v, T, \mu_b) = T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln D(\omega_n - i\mu_b, \vec{k})^{1/2}, \quad (4-50)$$

donde

$$D(\omega_n - i\mu_b, \vec{k}) = \frac{1}{(\omega - i\mu_b)^2 + k^2 + m_b^2}. \quad (4-51)$$

Realizando las sumas de las frecuencias de Matsubara en la expresión (4-50), se obtiene

$$V_{BT}^{(1)b}(v, T, \mu_b) = \frac{1}{2\pi^2} \int dk k^2 \left[\frac{\sqrt{k^2 + m_b^2}}{2} + 2T \ln(1 - e^{-\sqrt{k^2 + m_b^2} - \mu_b/T}) \right]. \quad (4-52)$$

A diferencia del caso a alta temperatura, en esta aproximación no es necesario separar los términos de vacío y materia, ya que la región de interés es a $T \sim 0$. Por tanto, La estrategia consiste en desarrollar una expansión en serie de Taylor de la contribución a potencial de los

campos bosónicos alrededor de $T = 0$ [41], es decir

$$V_{BT}^{(1)b}(v, T, \mu_b) = \int_{(\mu_b - m_b)/T}^{\infty} V_0^b(v, \mu_b + xT) h_B(x) dx, \quad (4-53)$$

donde $h_B(x)$ es la primera derivada de la distribución de Bose-Einstein y $V_0^b(v, \mu_b + xT)$ es la contribución a un loop de los campos bosónicos a $T = 0$. Asimismo, la expresión explícita de $V_0^{(1)b}(v, \mu_b)$ [38] es

$$V_0^{(1)b}(v, \mu_b) = -\frac{m_b^4}{64\pi^2} \left[\ln \left(\frac{4\pi a^2}{\left(\mu_b + \sqrt{\mu_b^2 - m_b^2} \right)^2} \right) - \gamma_E + \frac{1}{2} \right] + \frac{\mu_b \sqrt{\mu_b^2 - m_b^2}}{96\pi^2} (2\mu_b^2 - 5m_b^2). \quad (4-54)$$

La expansión en serie de Taylor del potencial se realiza cuando el límite $T = 0$ y con $\mu_b \rightarrow \mu_b + xT$, por lo que la expresión (4-54) queda determinada como

$$\begin{aligned} V_{BT}^{(1)b}(v, T, \mu_b) &= \int_{(\mu_b - m_b)/T}^{\infty} V_0^{(1)b}(v, \mu_b + xT) h_B(x) dx \\ &= V_0^{(1)b}(v, \mu_b + xT)|_{T=0} \int_{(\mu_b - m_b)/T}^{\infty} h_B(x) dx \\ &\quad + \frac{\partial^2(V_0^{(1)b}(v, \mu_b + xT))}{\partial(xT)^2} \Big|_{T=0} \int_{(\mu_b - m_b)/T}^{\infty} x^2 h_B(x) dx \\ &\quad + \frac{\partial^4(V_0^{(1)b}(v, \mu_b + xT))}{\partial(xT)^4} \Big|_{T=0} \int_{(\mu_b - m_b)/T}^{\infty} x^4 h_B(x) dx + \dots \end{aligned} \quad (4-55)$$

Donde,

$$\begin{aligned} \int_{(\mu_b - m_b)/T}^{\infty} h_B(x) dx &= 1 \\ \int_{(\mu_b - m_b)/T}^{\infty} x^2 h_B(x) dx &= \frac{\pi^2 T^2}{12} \\ \int_{(\mu_b - m_b)/T}^{\infty} x^4 h_B(x) dx &= \frac{7\pi^4 T^4}{1260}. \end{aligned} \quad (4-56)$$

Finalmente, la contribución a un lazo debido a los campos bosónicos se determina como

$$V_{BT}^{(1)b} = V_0^{(1)b}(v, \mu_b)|_{T=0} + \frac{\pi^2 T^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial T^2} V_0^{(1)b}(v, \mu_b)|_{T=0} + \frac{7\pi^4 T^4}{1260} \frac{\partial^4}{\partial T^4} V_0^{(1)b}(v, \mu_b)|_{T=0}. \quad (4-57)$$

Por otro lado, para calcular la contribución a un lazo para los campos fermiónicos, se toma en cuenta la expresión (4-22) y se realiza un proceso similar como en el caso de los bosones, es decir, se desarrolla una serie de potencias alrededor de $T = 0$ [41] para la expresión

$$V^{(1)f}(v, T, \mu_q)_{BT} = \int_{(\mu_q - m_f)/T}^{\infty} V_0^f(v, \mu_q + xT) h_F(x) dx, \quad (4-58)$$

donde $h_F(x)$ es la primera derivada de la distribución de Fermi-Dirac y $V_0^f(v, \mu_q + xT)$ es la contribución a un lazo al potencial para un campo fermiónico cuando $T = 0$, cuya expresión [38] es

$$V_0^{(1)f}(v, \mu_q) = \frac{m_f^4}{16\pi^2} \left[\ln \left(\frac{4\pi a^2}{\left(\mu_q + \sqrt{\mu_q^2 - m_f^2} \right)^2} \right) - \gamma_E + \frac{1}{2} \right] + \frac{\mu_q \sqrt{\mu_q^2 - m_f^2}}{24\pi^2} (2\mu_q^2 - 5m_f^2). \quad (4-59)$$

Realizando la expansión a $T = 0$ y con $\mu_b \rightarrow \mu_b + xT$, la expresión se escribe como

$$\begin{aligned} V^{(1)f}(v, T, \mu_q)_{BT} &= \int_{(\mu_q - m_f)/T}^{\infty} V_0^{(1)f}(v, \mu_q + xT) h_F(x) dx \\ &= V_0^{(1)f}(v, \mu_q + xT)|_{T=0} \int_{(\mu_q - m_f)/T}^{\infty} h_F(x) dx \\ &\quad + \frac{\partial^2 (V_0^{(1)f}(v, \mu_q + xT))}{\partial (xT)^2} \Big|_{T=0} \int_{(\mu_q - m_f)/T}^{\infty} x^2 h_F(x) dx \\ &\quad + \frac{\partial^4 (V_0^{(1)f}(v, \mu_q + xT))}{\partial (xT)^4} \Big|_{T=0} \int_{(\mu_q - m_f)/T}^{\infty} x^4 h_F(x) dx + \dots \end{aligned} \quad (4-60)$$

Donde

$$\begin{aligned}
\int_{(\mu_b - m_b)/T}^{\infty} h_F(x) dx &= 1 \\
\int_{(\mu_b - m_b)/T}^{\infty} x^2 h_F(x) dx &= \frac{\pi^2 T^2}{6} \\
\int_{(\mu_b - m_b)/T}^{\infty} x^4 h_F(x) dx &= \frac{7\pi^4 T^4}{360}.
\end{aligned} \tag{4-61}$$

En consecuencia, la contribución a un lazo debido a los campos fermiónicos queda como

$$V_{BT}^{(1)f} = V_0^{(1)f}(v, \mu_q)|_{T=0} + \frac{\pi^2 T^2}{6} \frac{\partial^2}{\partial T^2} V_0^{(1)f}(v, \mu_q)|_{T=0} + \frac{7\pi^4 T^4}{360} \frac{\partial^4}{\partial T^4} V_0^{(1)f}(v, \mu_q)|_{T=0}. \tag{4-62}$$

En suma, al utilizar las expresiones (4.16), (4.56) y (4.61) se puede escribir el potencial efectivo a baja temperatura como

$$\begin{aligned}
V_{BT}^{eff}(v, T, \mu_q, \mu_b) &= -\frac{(a^2 + \delta a^2)}{2} v^2 + \frac{(\lambda + \delta \lambda)}{4} v^4 \\
&- \sum_{b=\sigma, \bar{\pi}} \left\{ \frac{m_b^4}{64\pi^2} \left[\ln \left(\frac{4\pi a^2}{\left(\mu_b + \sqrt{\mu_b^2 - m_b^2} \right)^2} \right) - \gamma_E + \frac{1}{2} \right] \right. \\
&+ \left. \frac{\mu_b \sqrt{\mu_b^2 - m_b^2}}{96\pi^2} (2\mu_b^2 - 5m_b^2) - \frac{T^2 \mu_b}{12} \sqrt{2\mu_b^2 - 5m_b^2} - \frac{\pi^2 T^4 \mu_b}{180} \frac{(2\mu_b^2 - 3m_b^2)}{(\mu_b^2 - m_b^2)^{3/2}} \right\} \\
&+ N_c \sum_{f=u,d} \left\{ \frac{m_f^4}{16\pi^2} \left[\ln \left(\frac{4\pi a^2}{\left(\mu_q + \sqrt{\mu_q^2 - m_f^2} \right)^2} \right) - \gamma_E + \frac{1}{2} \right] \right. \\
&+ \left. \frac{\mu_q \sqrt{\mu_q^2 - m_f^2}}{24\pi^2} (2\mu_q^2 - 5m_f^2) - \frac{T^2 \mu_q}{6} \sqrt{\mu_q^2 - m_f^2} - \frac{7\pi^2 T^4 \mu_q}{360} \frac{(2\mu_q^2 - 3m_f^2)}{(\mu_q^2 - m_f^2)^{3/2}} \right\}. \tag{4-63}
\end{aligned}$$

Con la expresión del potencial efectivo a baja temperatura es posible explorar el diagrama de fase de QCD cerca del valor crítico del potencial químico bariónico. De esta manera, es posible realizar un estudio de las transiciones de fase del diagrama de QCD a través de los potenciales efectivos a alta y baja temperatura.

4.3. Exploración del diagrama de fase de QCD

Para realizar el análisis de la restauración de la simetría quiral a través de las aproximaciones de los potenciales efectivos, primero se examina el comportamiento de los potenciales efectivos cerca de los valores mínimos como se muestran en las figuras (4-2) y (4-3), que además proporcionan la información de las transiciones de fase. y teniendo esta información sobre

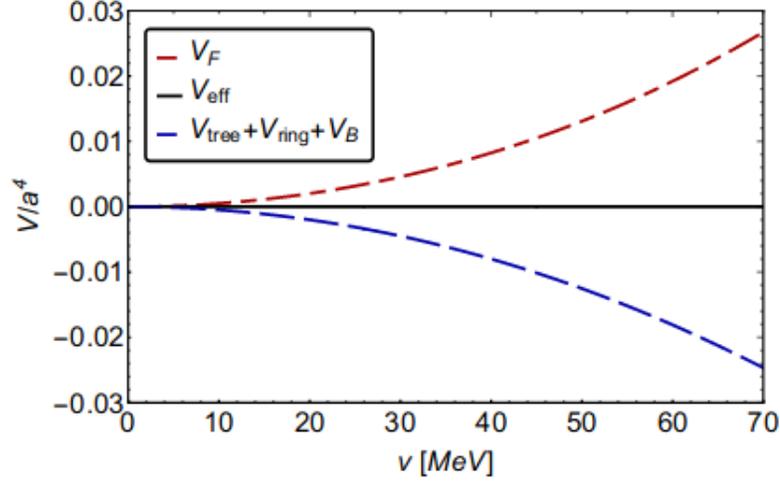


Figura 4-2: Análisis de la contribución bosónica y fermiónica del potencial efectivo cerca del mínimo a $v = 0$. La suma de los potenciales provoca que el potencial efectivo sea plano, lo cual representa la presencia de una transición de fase de segundo orden [38]

las transiciones de fase en las distintas aproximaciones, es posible realizar una exploración del diagrama, no obstante, primero es necesario determinar los parámetros del MSLq.

4.3.1. Constantes de acoplamiento

Entonces para determinar los parámetros del MSLq, en principio, se consideran las tres constantes de acoplamiento que son: el término de masa, a^2 , la constante acoplamiento de los campos fermiónicos, g , y la constante de acoplamiento de los campos bosónicos, λ . Sin embargo, para mantener las propiedades generales del potencial efectivo es necesario agregar los contra términos δa^2 y $\delta \lambda$, por lo que en realidad existen cinco parámetros libres a determinar. Para obtener el valor de la constante a^2 , notamos que de las ecuaciones en (4-11), la constante a^2 se

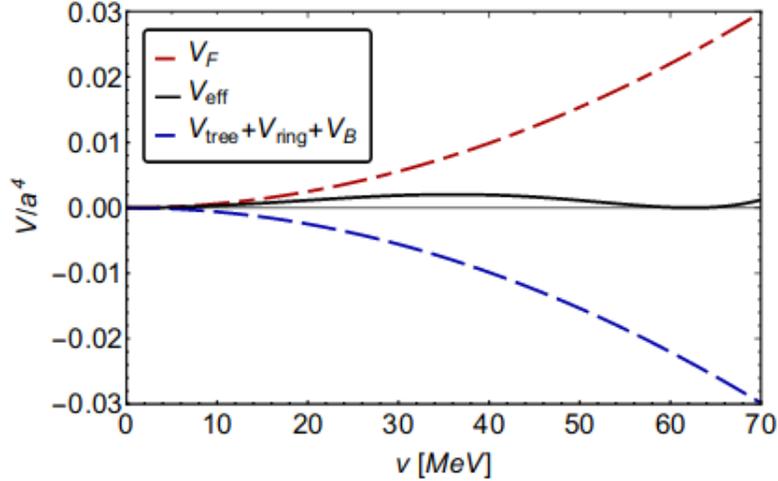


Figura 4-3: Contribución bosónica y fermiónica al potencial efectivo cerca del mínimo a $v = 0$, para la aproximación a baja temperatura. La suma de los potenciales genera dos mínimos degenerados cerca de la transición que el potencial, lo cual es un reflejo de la presencia de una transición de fase de primer orden [38].

puede obtener en función de las masas de los bosones en el vacío como

$$a = \sqrt{\frac{m_\sigma^2 - 3m_\pi^2}{2}}. \quad (4-64)$$

No obstante, también es posible utilizar el límite quiral para determinar a^2 , considerando como nula la masa de los piones, $m_\pi = 0$, en la expresión (4-64). Por otra parte, para obtener los valores de las constantes g y λ , éstos se determinan a través de un sistema de ecuaciones que utiliza la siguiente información. Primeramente, mediante los datos obtenidos por LQCD que indican que la transición cuando $\mu_q = 0$ resulta un crossover para $2 + 1$ sabores ligeros de quarks, donde la temperatura crítica $T_c \approx 150$ MeV y para dos sabores ligeros es $T_c \approx 170$ MeV, de esta forma, se puede fijar una región efectiva para la temperatura crítica, T_0^c , entre 165 y 175 MeV. Luego, debido a que el mínimo de potencial efectivo es cero en la transición de segundo orden, como se muestra la figura (4-2), y la masa de los piones es nula en la transición, entonces se obtiene la siguiente ecuación

$$m_\pi^2(v = 0, T = T_0^c, \mu_q = 0) = -a^2 + \Pi(T_0^c, \mu_q = 0) = 0. \quad (4-65)$$

Para el caso de la aproximación a baja temperatura, se considera el análisis sobre el límite de la temperatura de Hagedorn con potencial químico bariónico finito, el cual especifica el valor crítico de la curva de transición que intersecta el eje del potencial químico bariónico en el caso cuando $T \approx 0$. Dicho valor crítico es $\mu_B^c = 3\mu_q^c \approx 1$ GeV (masa típica de los bariones). De la misma manera, se puede fijar una región efectiva para el potencial químico de quarks entre 330 y 350 MeV. En esta región a baja temperatura, la transición de fase es de primer orden como se muestra en figura (4-3) y asimismo, como la masa del pión es cero en la transición, por consiguiente se obtiene la siguiente expresión

$$m_\pi^2(v = v_1, T = 0, \mu_q = \mu_q^c) = -a^2 + \Pi(0, \mu_q = \mu_q^c) = 0, \quad (4-66)$$

donde v_1 es el segundo mínimo degenerado que no es cero, el cual es también una incógnita a determinar en el sistema de ecuaciones. Finalmente, las otras condiciones restantes para fijar todos los parámetros son

$$\frac{\partial V_{BT}^{ef}}{\partial v}(v = 0, T = 0, \mu_q = \mu_q^c) = 0, \quad (4-67)$$

$$\frac{\partial V_{BT}^{ef}}{\partial v}(v = v_1, T = 0, \mu_q = \mu_q^c) = 0, \quad (4-68)$$

$$V_{BT}^{ef}(v = 0, T = 0, \mu_q = \mu_q^c) = V_{BT}^{ef}(v = v_1, T = 0, \mu_q = \mu_q^c). \quad (4-69)$$

Estas tres condiciones nuevamente reflejan que la transición es de primer orden cuando $T = 0$ y el potencial tiene dos mínimos degenerados.

Dado el sistema de cinco ecuaciones especificado por las expresiones (4.65), (4.65), (4.67), (4.68) y (4.69), se obtiene un conjunto de valores para las constantes λ , g , v_1 , y los contra términos δa^2 y $\delta \lambda$. Resolviendo el sistema numéricamente, se elige el conjunto de parámetros que son positivos, ya que el MSLq requiere que sus constantes de acoplamiento sean positivas.

4.3.2. Punto crítico

Para el estudio del diagrama en el caso que el parámetro de masa a^2 se obtiene a través de las masas de los bosones en el vacío, se utiliza las siguientes condiciones, para la consideración cuando $\mu_q = 0$ se fija una temperatura crítica máxima de $T_{Ma}^c = 175$ MeV y una mínima de $T_{Mi}^c = 165$ MeV. Igualmente, para $T = 0$, se utiliza $\mu_{qMa}^c = 350$ MeV como valor crítico máximo del potencial químico de quarks y $\mu_{qMi}^c = 330$ MeV como su valor mínimo. Dado estos valores críticos y resolviendo el sistema de ecuaciones de la sección 4.3.1, se obtienen los siguientes valores expresados en la tabla (4-1).

Caso cuando $m_\pi \neq 0$		
Potencial químico de quarks μ_q	λ	g
$0.5\mu_b = \mu_q$	$0.99 < \lambda < 1.10$	$1.50 < g < 1.59$
$\mu_b = \mu_q$	$0.77 < \lambda < 0.86$	$1.53 < g < 1.63$
$2\mu_b = \mu_q$	$0.45 < \lambda < 0.49$	$1.59 < g < 1.68$

Tabla 4-1: Tabla de valores de las constantes de acoplamiento [38].

Para el caso del límite quiral se consideran los mismos valores críticos de temperatura y potencial químico de quarks con la única diferencia de que la masa de los piones, $m_\pi = 0$, por lo que al resolver el sistema de ecuaciones de los parámetros de acoplamiento quedan especificados en la tabla (4-2).

Caso cuando $m_\pi = 0$		
Potencial químico de bosones μ_q	λ	g
$0.5\mu_b = \mu_q$	$1.15 < \lambda < 1.30$	$1.74 < g < 1.85$
$\mu_b = \mu_q$	$1.02 < \lambda < 1.13$	$1.78 < g < 1.89$
$2\mu_b = \mu_q$	$0.58 < \lambda < 0.64$	$1.84 < g < 1.96$

Tabla 4-2: Tabla de valores de las constantes de acoplamiento [38] .

Finalmente, determinados los parámetros, se procede a trazar el diagrama de fase QCD como se muestra en las figuras (4.4), (4.5) y (4.6), para el caso de $m_\pi \neq 0$. De la misma forma, se traza el diagrama de fase para el caso de $m_\pi = 0$ que aparece en las figuras (4.7), (4.8) y (4.9). Para ambas consideraciones, se observa que para en el régimen de alta temperatura existe

una transición de fase de segundo orden representada por la franja roja, de la misma manera, en el caso de baja temperatura, se muestra una transición de primer orden representada por la franja azul, y el área intermedia de color verde corresponde a la aproximación de Padé [38]. Finalmente, la localización del punto crítico terminal, tanto para el caso de $m_\pi \neq 0$ y $m_\pi = 0$, queda etiquetado por el área de color negro que se encuentra entre la transición de fase de segundo orden y la transición de fase de primer orden en el régimen de baja temperatura, cuyo valor limita para el eje de la temperatura entre $18 < T_{CEP} < 45$ MeV y para el eje del potencial químico de quarks $315 < \mu_{CEP} < 349$.

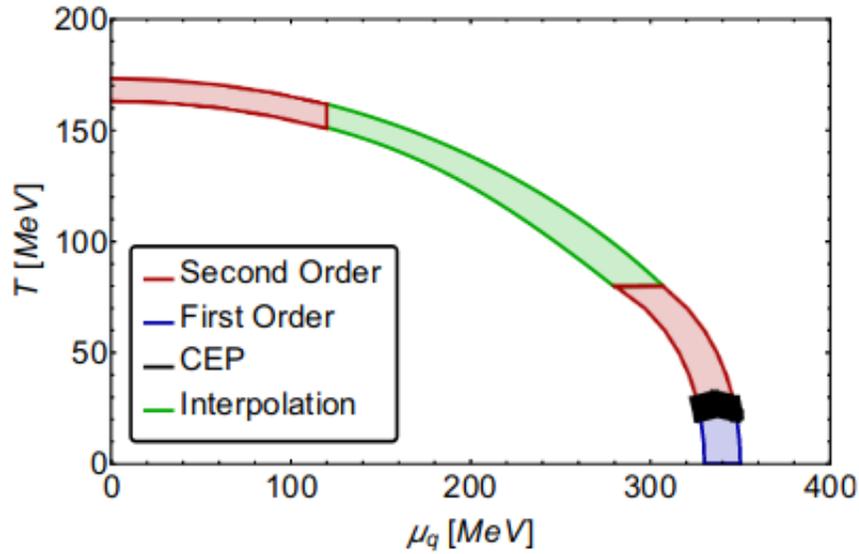


Figura 4-4: Diagrama de fase de QCD para el caso de $m_\pi \neq 0$ y de potencial químico bosónico $0.5\mu_b = \mu_q$. El área de color roja representa la transición de fase de segundo orden y la de azul la de primer orden, el área de color verde representa la región intermedia realizada por la interpolación de las aproximaciones de alta y baja temperatura, y el área de color negro representa la región del punto crítico [38].

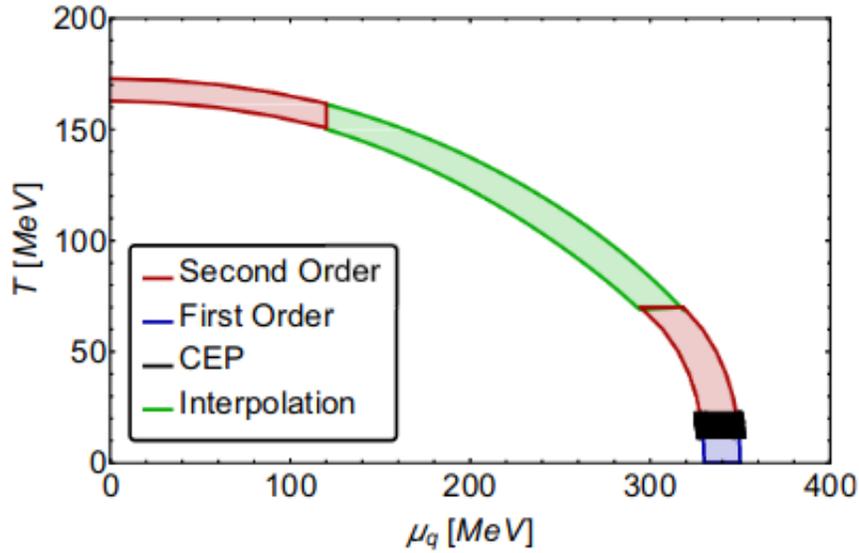


Figura 4-5: Diagrama de fase de QCD para el caso de $m_\pi \neq 0$ y de potencial químico bosónico $\mu_b = \mu_q$. El área de color roja representa la transición de fase de segundo orden y la de azul la de primer orden, el área de color verde representa la región intermedia realizada por la interpolación de las aproximaciones de alta y baja temperatura, y el área de color negro representa la región del punto crítico [38].

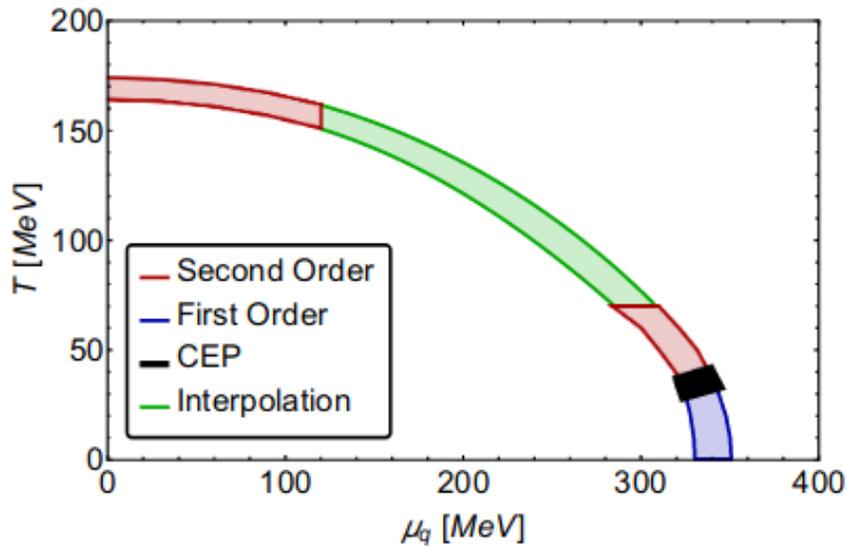


Figura 4-6: Diagrama de fase de QCD para el caso de $m_\pi \neq 0$ y de potencial químico bosónico $2\mu_b = \mu_q$. El área de color roja representa la transición de fase de segundo orden y la de azul la de primer orden, el área de color verde representa la región intermedia realizada por la interpolación de las aproximaciones de alta y baja temperatura, y el área de color negro representa la región del punto crítico [38].

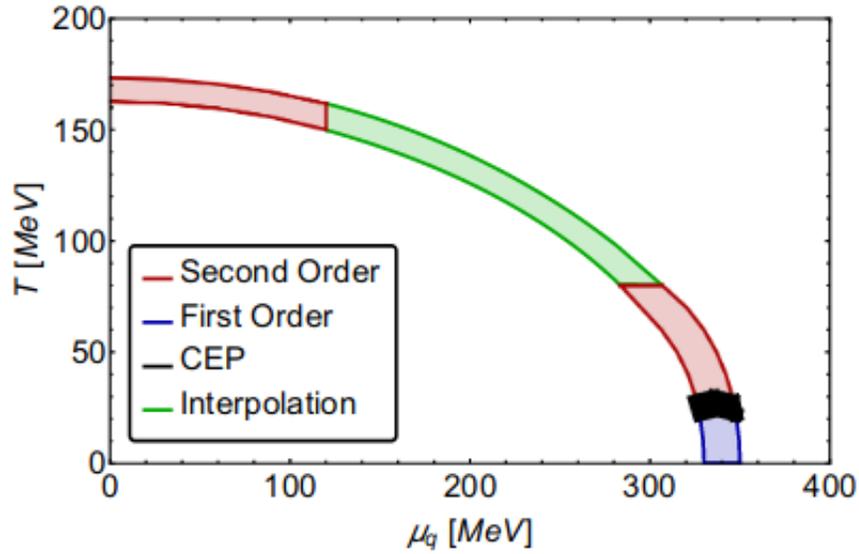


Figura 4-7: Diagrama de fase de QCD para el caso de $m_\pi = 0$ y de potencial químico bosónico $0.5\mu_b = \mu_q$. El área de color roja representa la transición de fase de segundo orden y la de azul la de primer orden, el área de color verde representa la región intermedia realizada por la interpolación de las aproximaciones de alta y baja temperatura, y el área de color negro representa la región del punto crítico [38].

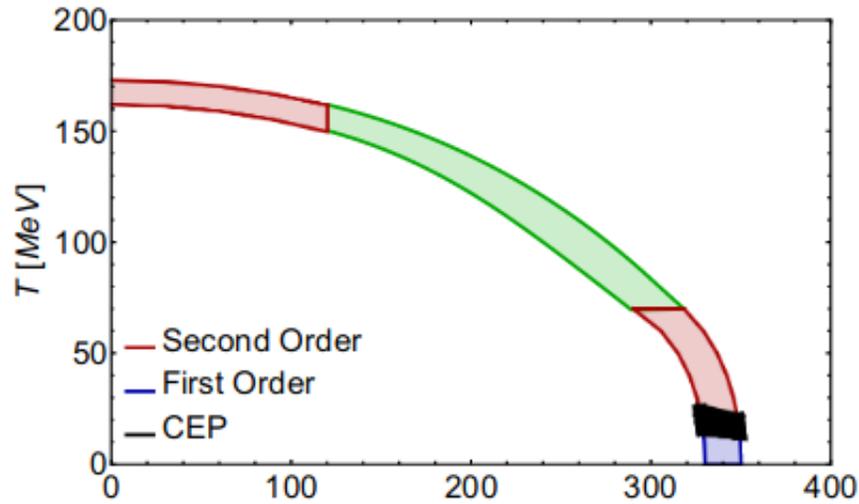


Figura 4-8: Diagrama de fase de QCD para el caso de $m_\pi = 0$ y de potencial químico bosónico $\mu_b = \mu_q$. El área de color roja representa la transición de fase de segundo orden y la de azul la de primer orden, el área de color verde representa la región intermedia realizada por la interpolación de las aproximaciones de alta y baja temperatura, y el área de color negro representa la región del punto crítico [38].

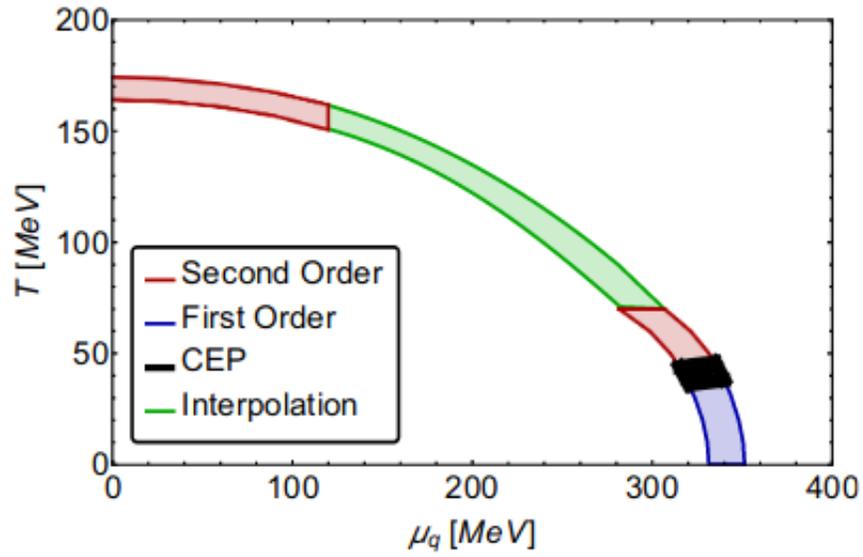


Figura 4-9: Diagrama de fase de QCD para el caso de $m_\pi = 0$ y de potencial químico bosónico $2\mu_b = \mu_q$. El área de color roja representa la transición de fase de segundo orden y la de azul la de primer orden, el área de color verde representa la región intermedia realizada por la interpolación de las aproximaciones de alta y baja temperatura, y el área de color negro representa la región del punto crítico [38].

En resumen, la descripción del diagrama de fase de QCD junto con la localización del punto crítico terminal representa dos de los problemas principales en el entendimiento de la materia fuertemente interactuante. En este análisis se presentó un estudio del diagrama de fase desde el punto de vista de la restauración de la simetría quiral a través de el MSLq, no obstante, este estudio presenta algunas limitaciones como por ejemplo: que no contempla mecanismos que permitan explicar con toda precisión las líneas de transición debido al desconfinamiento o la identificación de todos los valores del potencial químico de quarks para delimitar líneas de transición de manera continua. A pesar de esto, el MSLq resulta ser un modelo efectivo y eficaz que corrobora análisis previos y proporciona valiosa información para la descripción del diagrama de fase de QCD y la localización punto crítico terminal.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo se presentó una investigación sustancial del diagrama de fase de QCD a través de un análisis sistemático que consistió primeramente en el estudio de aspectos básicos de la QCD, resaltando principalmente la simetría quiral en el sector de quarks, después se realizó un análisis de las características más relevantes que conforman al diagrama de fase de QCD, para luego finalmente efectuar su descripción efectiva mediante el MSLq, basada en la restauración de la simetría quiral. Para ésta última parte, se consideró la aproximación a alta y baja temperatura del potencial efectivo hasta la corrección a un lazo para los campos bosónicos y fermiónicos. Además, se agregó la corrección de los diagramas de anillo para la aproximación a alta temperatura que toma en cuenta los efectos de apantallamiento del plasma, los cuales permite estudiar el diagrama de fase más allá del campo medio.

Si bien, los resultados presentados por LQCD muestran que para el caso del potencial químico de quarks $\mu_B = 0$, la transición de la fase hadrónica a la fase del plasma de quarks y gluones, se presenta por medio de un crossover, con una temperatura pseudo-crítica $T_c \sim 150 - 170$ MeV, entonces esto nos brinda información física precisa para realizar una descripción efectiva del diagrama a través del MSLq. De la misma manera la consideración del valor crítico del potencial químico de quarks $\mu_q \sim 330 - 350$ MeV y la estimación de las masa desnuda de los piones y del bosón sigma, contribuyen significativamente a este análisis. Por otra parte, dadas las constantes de acoplamiento del modelo que fueron λ , asociada a la interacción entre

los bosones y g , la constante de acoplamiento para la interacción con los fermiones, donde se consideraron los casos de $m_\pi \neq 0$ y $m_\pi = 0$, permitieron trazar el diagrama de fase de QCD. Los diagramas efectivos muestran la identificación de las transiciones de fase, por ejemplo, en el caso de $\mu_q \sim 0$ se observó la presencia de una transición de fase de segundo orden, la cual corresponde como una buena aproximación del crossover para los resultados propuestos por LQCD, ya que la realización de una descripción analítica de un crossover resulta bastante compleja. Por otro lado, para el caso $T \sim 0$, el modelo muestra la presencia de una transición de primer orden, lo cual concuerda con los distintos modelos efectivos del diagrama de fase.

Es importante enfatizar que actualmente la descripción del diagrama de fase de QCD en este régimen continúa siendo un problema abierto, por lo que, los modelos efectivos resultan ser las mejores herramientas. Por otra parte, debido a que no existe una misma transición de fase a lo largo de todo el diagrama, debería encontrarse un punto crítico, el cual corresponde con la finalización de la transición de primer orden y el inicio de la fase de crossover, o para este modelo, la transición de segundo orden. El punto crítico terminal del diagrama de fase se encontró en la región de baja temperatura para los valores de ($315 < \mu^{CEP} < 349, 18 < T^{CEP} < 45$) MeV. Por otro lado, este trabajo es la continuación de los estudios hechos del diagrama de fase en [16] y [38].

Finalmente, uno de los caminos a seguir para continuar con la descripción del diagrama de fase de QCD podría ser la consideración de las correcciones de temperatura y de densidad para las constantes de acoplamiento del modelo, ya que a partir de esta información se podría realizar una mejor caracterización de las líneas de transición del diagrama de de fase de QCD.

Bibliografía

- [1] B. Palash, *An Introduction Course of Particle Physics* (CRC Press, Estados Unidos, 2015).
- [2] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles* (WILEY-VCH, Alemania, 2008).
- [3] I. Günther, M. Schemling, *Quantum Chromodynamics* (Oxford University Press, Reino Unido, 2008).
- [4] O. Greenberg, *American Journal of Physics*, Estados Unidos **50**, 1074 (1982).
- [5] T. Bhattacharya, *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 082001 (2014).
- [6] M. Tanabashi *et al.* (Particle Data Group), *Phys. Rev. D* **98**, 030001 (2018).
- [7] C. Patrignani *et al.* (Particle Data Group), *Chin. Phys. C*, **40**, 100001 (2016).
- [8] T. Hatsuda, *et al.* *Quark-Gluon Plasma* (Cambridge University Press, Reino Unido, 2005).
- [9] M. Boyarkin, *Advanced Particle Physics Vol. II* (CRC Press, Estados Unidos, 2011).
- [10] S. Borsányi. *et al.*, *J. High Energy Phys.* **1009** (073) (2010)
- [11] F. Panigota, A. Malgorzata, *Reviews in Physics* 1, 154-171 (2016).
- [12] A. Barducci, R. Casalbuoni, S. De curtis, R. Gato and G. Pettini, *Phys. Lett. B* **231**, 463 (1989); *Phys. Rev. D* **41**, 1610 (1990).
- [13] C. Patrignani, *et al.* (Particle Data Group), *Chin. Phys. C* **40**, 100001 (2016).
- [14] C. O. Dib, O. R. Espinosa, *Nucl. Phys. B* **612**, 492-518 (2001).

- [15] M. Le Bellac, *Thermal Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1996).
- [16] A. Ayala, C. A. Bashir, J. J. Cobos-Martinez, S. Hernandez-Ortiz, A. Raya, Nucl. Phys. B **897**, 77-86 (2015).
- [17] Y. Maezawa, S. Aoki, S. Ejiri, T. Hatsuda, N. Ishii, K. Kanaya, N. Ukita, J. Phys. G **34**, S651 (2007).
- [18] R. Hagedorn, Nuovo Cim. Suppl. **3** (1965) 147.
- [19] R. Hagedorn, Nuovo Cim. A **56** (1968) 1027.
- [20] A. Ayala, L. Hernández, S. Hernández Ortíz, e-print arXiv: 1710.09007 [hep-ph].
- [21] F. Gelis, e-print arXiv: 1211.3327v2 [hep-ph].
- [22] T. Lancaster, J. Blundell. *Quantum Field Theory for Gifted Amateurs* (Oxford University press, Reino Unido, 2014).
- [23] N. Cabibbo G. Parisi, Phys. Rev. Lett. B **59**, 67 (1975).
- [24] G. Baym, Quark Matter Formation and Heavy Ion Collisions, Proc. Bielefeld Workshop, edited by M. Jacob and H. Satz (World Scientific, Singapore, (1982).
- [25] G. Baym, Nucl. Phys. A **698**, XXIII (2001)
- [26] J. Rafelski, *Melting Hadrons, Boiling Quarks – From Hagedorn Temperature to Ultra-Relativistic Heavy-Ion Collisions at CERN* (Springer Open, Estados Unidos).
- [27] J. B. Kogut, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **50**, 393 (1983).
- [28] A Long Range Plan For Nuclear Science, DOE/NSF Nuclear Science Advisory Committee, 1983, https://science.energy.gov/~media/np/nsac/pdf/docs/lrp_1983.pdf, (2019).
- [29] K. Fukushima, T. Hatsuda e-print arXiv: 1005.4814v2 [hep-ph].
- [30] M. Stephanov e-print arXiv: hep-ph/0402115v1 [hep-ph].

- [31] Y. Aoki, *et al.*, Phys. Rev. Lett. B **643**, (2006).
- [32] C. Bernard, *et al.*, MILC Collaboration, Phys. Rev. D**71** (2005) 34504.
- [33] M. Cheng, *et al.*, Phys. Rev. D**71** (2006) 43.
- [34] A. Ayala, Phys. Phys. Conf. **761** 012066 (2016).
- [35] M. Stephanov *et al.*, Phys. Rev. D **58**, 096007 (1998).
- [36] M. Asakawa and K. Yazaki, Nucl. Phys. A **504**, 668 (1989).
- [37] DOE/NSF Nuclear Science Advisory Committee, The Frontiers of Nuclear Science, Long Range Plan (2018), e-print arXiv:0809.3137.
- [38] A. Ayala, L. Hernández, S. Hernández Ortíz, e-print arXiv:1710.09007 [hep-ph].
- [39] M. Gell-Mann and M. Levy, Nuovo Cim. **16**, 705 (1960).
- [40] J. Donoghue, E. Golowich, B. Holstein *Dynamics of the Standard Model* (Cambridge University press, Reino Unido, 2002).
- [41] C. O. Dib, O. R. Espinosa, Nucl. Phys. B **612**, 492-518 (2001).
- [42] K. Fukushima, e-print arXiv:0806.0292, [hep-ph].
- [43] D. Cross, http://www.cmp.caltech.edu/~mcc/BNU/Notes2_2.pdf, (2019).
- [44] https://lampx.tugraz.at/~hadley/ss2/landau/second_order.php, (2019).
- [45] M.Thomson, https://www.hep.phy.cam.ac.uk/~thomson/lectures/partIIIparticles/Handout7_2009.pdf, (2019).