



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
INGENIERÍA DE SISTEMAS - OPTIMIZACIÓN FINANCIERA

PORTAFOLIOS ROBUSTOS DE CUENTAS MENTALES DE  
CRECIMIENTO ÓPTIMO: UNA PROPUESTA PARA EL MERCADO  
MEXICANO

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
EDGAR RENÉ BENAVIDEZ MARURI

TUTOR PRINCIPAL  
DR. FEDERICO HERNÁNDEZ ÁLVAREZ  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX. MARZO, 2019



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dra. Balderas Cañas Patricia  
Secretario: Dr. Martínez Miranda Elio Agustín  
Vocal: Dr. Hernández Álvarez Federico  
1er. Suplente: M. en I. Rodríguez Rubio Jorge  
2o. Suplente: Dr. Reyes Zárate Francisco Javier

La tesis se realizó en Ciudad Universitaria, CD. MX..

TUTOR DE TESIS:

Dr. Federico Hernández Álvarez

---



*A mis padres.  
Quienes siempre han sido una fuente de inspiración.*



# Reconocimientos

---

Estoy muy agradecido con el jurado de esta tesis por sus importantes aportaciones, y por compartir conmigo sus ideas respecto al esquema del trabajo que presento aquí. Agradezco a la UNAM, por ser el lugar idóneo para aprender. Al Conacyt por el apoyo recibido durante la realización de este trabajo de investigación a través de su Programa Nacional de Posgrados de Calidad.

Agradezco a familiares, hermanos y amigos por su gran apoyo y comprensión. A Leticia, porque “el amor es una escena de lo Dos. Interrumpe la perspectiva del uno y hace surgir el mundo desde el punto de vista del *otro* o de la *diferencia*”.





# Resumen

---

Este trabajo presenta los resultados de un estudio para dos modelos de optimización de portafolios de inversión. Comienza con la optimización de portafolios de cuentas mentales que utilizan el criterio de Das et al.(2010) que se extiende a lo largo del presente estudio a los portafolios robustos de crecimiento óptimo de Rujeerapaiboon et al. (2015) para dar paso a los portafolios robustos de cuentas mentales de crecimiento óptimo. Para cada modelo de optimización se construyen tres subportafolios de cuentas mentales, cada uno asociado con un objetivo y cada objetivo asociado con un nivel de umbral de pérdidas y/o violación. Finalmente se muestra que los subportafolios robustos de cuentas mentales de crecimiento óptimo generan mayor riqueza terminal que los portafolios de cuentas mentales de Das et al.



# Índice general

---

<b>Índice de figuras</b>	<b>IX</b>
<b>Índice de tablas</b>	<b>XI</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Portafolios de Cuentas Mentales</b>	<b>5</b>
1.1. El modelo . . . . .	6
1.2. Portafolio de cuenta mental de frontera eficiente . . . . .	7
1.2.1. Solución intuitiva . . . . .	9
1.2.2. Solución analítica . . . . .	11
1.3. Portafolio de cuenta mental de mínimo VaR . . . . .	16
1.4. Portafolio de cuenta mental de VaR-tangencia . . . . .	17
1.5. Portafolio óptimo de cuenta mental de máxima utilidad . . . . .	18
1.6. Portafolio agregado . . . . .	20
1.7. Análisis de sensibilidad . . . . .	22
<b>2. Portafolios Robustos de Cuentas Mentales de Crecimiento Óptimo</b>	<b>25</b>
2.1. El modelo . . . . .	27
2.2. Portafolio robusto de cuenta mental de crecimiento óptimo de frontera eficiente . . . . .	28
2.3. Portafolio robusto de cuenta mental de crecimiento óptimo de máxima utilidad . . . . .	30
2.4. Inversionista de largo plazo . . . . .	31
2.5. Portafolio agregado . . . . .	31
<b>3. Evidencia Empírica</b>	<b>33</b>
3.0.1. Consideraciones empíricas de la estimación de los parámetros de los modelos . . . . .	35
3.0.2. Portafolios óptimos en la muestra . . . . .	36
3.0.3. Desempeño fuera de la muestra . . . . .	42
<b>Conclusiones</b>	<b>45</b>

## ÍNDICE GENERAL

---

<b>A. Portafolios de Media - Varianza</b>	<b>47</b>
A.1. El modelo . . . . .	47
A.2. Portafolio de frontera eficiente . . . . .	47
A.3. Portafolio óptimo de máxima utilidad . . . . .	52
<b>B. Programas MATLAB</b>	<b>57</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>61</b>

# Índice de figuras

---

1.1. Portafolio óptimo dentro de una cuenta determinada . . . . .	9
1.2. Existencia del portafolio óptimo dentro de una cuenta determinada . . .	23
1.3. Frontera eficiente y portafolios $w_{mvr}$ y $w_{mv}$ . . . . .	24



# Índice de tablas

---

3.1. Subportafolios de la cuenta mental de retiro . . . . .	38
3.2. Subportafolios de la cuenta mental de educación . . . . .	39
3.3. Subportafolios de la cuenta mental de legado . . . . .	40
3.4. Portafolios agregados . . . . .	41
3.5. Desempeño fuera de la muestra . . . . .	43





# Introducción

---

La selección de portafolios de inversión es una de las materias más importantes en finanzas y economía. Se ha estudiado desde el trabajo innovador de Markowitz (1952). Tras el surgimiento de las finanzas conductuales en los últimos años, Shefrin y Statman (2000) desarrollaron la teoría de los portafolios conductuales. Este estudio inició una serie de modelos de portafolios como los de Siebenmorgen y Weber (2003), Nevins (2004), Berkelaar et al. (2004) y De Giorgi (2009). Más notablemente, basados en el enfoque de cuentas mentales de Kahneman and Tversky (1979), un modelo de cuentas mentales fue recomendado por Das et al. (2010). Algunas extensiones de este último enfoque incluyen lo siguiente: delegación a los gestores de portafolios por Alexander y Baptista (2011), riesgo de fondo por Baptista (2012), una incorporación de derivados y rendimientos no normales por Das y Statman (2013), riesgos en el tipo de cambio Jiang et al. (2013) y el riesgo de estimación por Alexander et al. (2017).

Similares a los modelos de portafolios convencionales, los modelos de portafolios conductuales antes mencionados son análogos en el sentido que la mayoría de ellos incluyen tres características principales: rendimiento esperado, medida de riesgo y actitud del inversionista frente al riesgo (también conocida como tolerancia al riesgo y aversión al riesgo). No obstante, el enfoque de Das et al. es estático en el sentido de que no contempla un rebalanceo del portafolio, además, al tener una restricción VaR, la posibilidad de aceptar no más de una probabilidad  $\alpha$  de alcanzar un nivel de umbral de pérdidas  $H$  prepara al portafolio, en teoría, a no perder más allá de  $H$  durante el próximo periodo de tiempo  $t$  (por ejemplo, un año) bajo distribuciones normales con perfecto conocimiento de la distribución conjunta de los activos. Por otro lado, el enfoque de Das et al. se preocupa más por maximizar la utilidad esperada de la riqueza terminal que maximizar el nivel esperado de riqueza terminal.

No rebalancear los portafolios podría alejar la relación riesgo-rendimiento que busca el inversionista, por lo que este aspecto se debe tomar en cuenta cuando se tienen objetivos asociados a una cuenta mental bajo un horizonte de inversión finito largo. Un enfoque que se preocupa por la maximización de la riqueza terminal en un horizonte de inversión finito largo, minimizando la posibilidad de una grave caída en el mercado es el de los portafolios robustos de crecimiento óptimo de Rujeeapaiboon et al. (2015). Inspirados en el criterio de Kelly (de maximizar la media geométrica de los rendimientos) optimizan bajo un conjunto de ambigüedades que contienen todas las

distribuciones cuando el rendimiento de los activos sigue un proceso de ruido blanco débil, los portafolios robustos de crecimiento óptimo están diseñados para tratar con un horizonte de múltiples periodos y la reinversión de capital, además optimizan el tiempo para alcanzar cualquier nivel de objetivo de riqueza, aspectos que deben ser tomados en la optimización de portafolios conductuales.

## Objetivo

A partir del trabajo de Rujeerapaiboon et al. (2015), la presente tesis tiene por objetivo llevar el enfoque de los portafolios robustos de crecimiento óptimo al marco de los portafolios de cuentas mentales con el fin de comparar el criterio de Das et al. (2010) con el de Rujeerapaiboon et al. (2015) desde una perspectiva empírica. Ambos criterios están diseñados para que el inversionista decida el nivel de riesgo al que desea estar expuesto, por lo que el estudio dirá quien alcanzó o está en posibilidades de alcanzar el objetivo asociado a la cuenta mental.

## Motivación

Un colapso del mercado es sinónimo del peor escenario posible de un inversionista que cotiza en un mercado de valores. Por lo tanto, estar preparados para tal situación es un objetivo deseable. El inversionista puede, por supuesto, hacer esto comprando opciones de venta (put) adecuadas, pero estar en una situación tan asegurada es bastante cara. En contraste, en el enfoque de optimización de portafolios del peor escenario es posible que sea indiferente entre la ocurrencia o no de una falla al seguir una estrategia de inversión adecuada de acciones y rebalanceo. Para inversionistas que agrupan sus activos en categorías (cuentas mentales) y cada categoría mantiene una meta de inversión específica y desean estar los más asegurados posible, un enfoque de optimización del peor caso en sus portafolios es el adecuado. El enfoque de los portafolios robustos de crecimiento óptimo además de tener las características mencionadas líneas arriba es un enfoque bajo el peor caso VaR (WCVaR), de ahí la necesidad de llevar dicho enfoque al de las cuentas mentales y dotar de más herramientas a los modelos de portafolios conductuales y la toma de decisiones de inversión.

## Planteamiento del problema

Aunque el enfoque de cuentas mentales de Das et al. al tener una restricción VaR, le brinda al inversionista la posibilidad de aceptar no más de una probabilidad  $\alpha$  de alcanzar un nivel de umbral de pérdidas  $H$  y prepara al portafolio, en teoría, a no perder más allá de  $H$  durante el próximo periodo de tiempo  $t$  (por ejemplo, un año), este requiere perfecto conocimiento de la distribución conjunta de los activos, además

---

de suponerla normal, situación que en la práctica es difícil de estimar dentro de una precisión factible. Por otra parte, aunque el enfoque es estático, si lo llevamos a una estrategia de rebalanceo, la riqueza realizada de varios periodos de inversión tendrá una respuesta no lineal, es decir, capitalización, a las realizaciones de un periodo único. Estos aspectos señalados quedan superados bajo un enfoque de optimización de portafolios robustos de crecimiento óptimo.

## Metodología

Para alcanzar el objetivo, se compararon los dos criterios de optimización considerados en esta investigación, portafolios de cuentas mentales y portafolios robustos de cuentas mentales de crecimiento óptimo, desde una perspectiva empírica. El enfoque es, primero, comparar las características dentro de la muestra de los portafolios óptimos determinados por cada criterio; luego, evaluar el desempeño fuera de la muestra. Los datos fueron obtenidos de la página de Google Finance debido a los costos asociados de obtener datos de PIP o Valmer. Se obtuvieron los precios diarios para diecisiete acciones que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores (BMV), ya que muchas acciones no cuentan con información suficiente en la base de Google Finance y se determinó utilizar únicamente aquellas que tuvieran la información más completa desde el año 2000. Todos los precios están en pesos mexicanos y representan ganancias de capital y dividendos. Finalmente, para aquellas acciones que tuvieron valores nulos entre dos distintas fechas se reemplazó dicho valor por el último precio conocido previo al valor nulo. Con base en estos criterios, se definió la muestra que consiste en rendimientos diarios para diecisiete acciones que cotizan en la BMV. Para la optimización de los portafolios se utilizó el software matemático MATLAB.

## Contribuciones

La contribución de esta tesis es mostrar que bajo el criterio de los portafolios robustos de crecimiento óptimo de Rujeerapaiboon et al. (2015) es posible superar algunos de los supuestos de los portafolios de cuentas mentales de Das et al. (2010) y proporcionar herramientas robustas para la toma de decisiones de inversión.

## Estructura de la tesis

Este trabajo está dividido en tres capítulos. En el primer capítulo se se expone el marco de los Portafolios de Cuentas Mentales de Das et al. (2010) para introducir al tema. El marco se explica de forma breve y matemática, se calculan algunos portafolios interesantes. En la sección 1.1 se presenta el modelo, en la sección 1.2 se expone

el portafolio de cuenta mental de frontera eficiente. Una solución intuitiva y analítica es presentada en las subsecciones 1.2.1 y 1.2.2 respectivamente. Posteriormente se derivan dos portafolios particulares, el portafolio de mínimo VaR y el portafolio de VaR-tangencia, ambos se discuten en las secciones 1.3 y 1.4 respectivamente. Un tercer portafolio es derivado, el portafolio de cuenta mental de máxima utilidad, que se presenta en la sección 1.5. Finalmente, en la sección 1.7 se realiza un análisis de sensibilidad y en la sección 1.6 se presenta el portafolio agregado.

En el capítulo dos, se exponen los portafolios robustos de cuentas mentales de crecimiento óptimo, En la sección 2.1 se introduce el modelo, en la sección 2.2 se discute el portafolio robusto de cuenta mental de crecimiento óptimo de frontera eficiente. En la sección 2.3 se muestra portafolio robusto de cuenta mental de crecimiento óptimo de máxima utilidad. En la sección 2.4 se muestra que pasará en el largo plazo con el portafolio robusto de cuenta mental de crecimiento óptimo. Finalmente, en la sección 2.5 se discute el portafolio agregado.

En el tercer capítulo se expone la comparación empírica de los portafolios descritos los capítulos uno y dos. Finalmente se exponen las conclusiones a la que se llega en esta investigación.

# Portafolios de Cuentas Mentales

---

El núcleo central de los portafolios de cuentas mentales es la selección de una estructura de contabilidad mental de portafolios. Dentro de cada cuenta, el inversionista busca seleccionar el portafolio con un rendimiento esperado máximo sujeto a una restricción que refleje el motivo de la cuenta. Esta restricción evita la probabilidad de que el rendimiento de la cuenta sea inferior o igual a algún umbral de rendimiento que exceda alguna probabilidad umbral.

Una cuenta mental es definida como “el conjunto de operaciones cognitivas utilizadas por individuos y hogares para organizar, evaluar y realizar un seguimiento de las actividades financieras” (Thaler, 1999, p. 183). Traducido en un contexto de portafolios de inversión, los activos se agrupan en categorías y cada categoría mantiene una meta de inversión específica.

En los portafolios de cuentas mentales, la restricción asignada tiene una justificación en el argumento de que la desviación estándar es una medida para la volatilidad, por lo que un portafolio con una desviación estándar alta tiene una alta volatilidad, pero esto es tanto al alza como a la baja. Por otro lado, algunas personas sólo están interesadas en la posibilidad de un riesgo a la baja, por lo que el principio de “seguridad primero” (*safety first*)<sup>1</sup> es aplicable. Finalmente, los inversionistas son mejores en señalar sus umbrales de objetivo y probabilidades de alcanzar umbrales en las cuentas mentales que sus coeficientes de aversión al riesgo en un portafolio de media-varianza; además “están en mejores condiciones para establecer umbrales y probabilidades para el subportafolio de cuenta mental (por ejemplo, jubilación, legado, educación, etc.) que para un portafolio agregado” (Das et al., 2010, p. 315).

El primer trabajo que formalmente puso el enfoque de cuentas mentales en un marco de portafolios de inversión es el de Shefrin y Statman (2000). En su teoría de portafolios conductuales presentan una versión de cuenta mental única, que se basa en la teoría SP/A (Lopes, 1987; Lopes y Oden, 1999), y una versión de cuentas mentales

---

<sup>1</sup>Roy, (1952) postuló el principio de “seguridad primero”, el cual afirma que la riqueza de las personas se encuentra constantemente expuesta a situaciones extremas adversas, por lo cual es lógico que estas personas, influidas por el miedo y la necesidad de seguridad traten de reducir la probabilidad de ocurrencia de una catástrofe financiera

múltiples. En 2010, Das et al. crean un marco de cuentas mentales que integra algunas características de la teoría de portafolios de media-varianza y la teoría de portafolios conductuales. La principal contribución de Das et al. (2010) es que en su entorno, cuando se permiten las ventas en corto, el portafolio que se desprende del análisis de media-varianza con contabilidad mental pertenece a la frontera eficiente de media-varianza, es decir, la contabilidad mental no introduce ineficiencia en el sentido de media-varianza. Si no se permiten las ventas en corto, la optimización del portafolio da como resultado una pérdida de eficiencia de unos pocos puntos básicos.

Otros trabajos que han extendido el marco de las cuentas mentales de Das et al. son: Alexander y Baptista (2011) que consideran un inversionista que delega la gestión de su riqueza a los gestores de portafolios. Baptista (2012) plantea un inversionista que enfrenta el riesgo de fondo (*background risk*, de fuentes tales como ingresos laborales). Jiang et al. (2013) consideran un inversionista que enfrenta el riesgo de tipo de cambio. Das y Statman (2013) incorporan opciones y productos estructurados en los portafolios de cuentas mentales. Alexander et al. (2017) plantean el riesgo de estimación en el marco de cuentas mentales.

En este capítulo se expone el marco de los Portafolios de Cuentas Mentales de Das et al. (2010). El marco se explica de forma breve y matemática apoyándose y haciendo referencia a los portafolios desarrollados en el apéndice A, además se calculan algunos portafolios interesantes. En la sección 1.1 se presenta el modelo, en la sección 1.2 se expone el portafolio de cuenta mental de frontera eficiente. Una solución intuitiva y analítica es presentada en las subsecciones 1.2.1 y 1.2.2 respectivamente. Posteriormente se derivan dos portafolios particulares, el portafolio de mínimo VaR y el portafolio de VaR-tangencia, ambos se discuten en la secciones 1.3 y 1.4 respectivamente. Un tercer portafolio es derivado, el portafolio de cuenta mental de máxima utilidad, que se presenta en la sección 1.5. Finalmente, en la sección 1.7 se realiza un análisis de sensibilidad y en la sección 1.6 se presenta el portafolio agregado..

### 1.1. El modelo

Sea  $N > 2$  el número de activos disponibles. Suponemos que sus rendimientos tienen una distribución normal multivariada<sup>2</sup>. Sea  $\mu$  el vector  $N \times 1$  de sus rendimientos esperados. Su  $n$ -ésima entrada es la rentabilidad esperada del activo  $n$ . Suponemos que  $\mu$  no es proporcional al vector unitario  $1_N$  de tamaño  $N \times 1$ ; por lo que al menos dos activos tienen rendimientos esperados diferentes. Sea  $\Sigma$  la matriz  $N \times N$  de varianzas-covarianzas para los rendimientos de los activos. Su entrada en la fila  $n_1$  y la columna  $n_2$  es la covarianza entre los rendimientos de los activos  $n_1$  y  $n_2$ . Asumimos que  $\text{rang}(\Sigma)$

---

<sup>2</sup>Varios documentos relacionados también asumen que los rendimientos de los activos tienen una distribución normal multivariada. No obstante, los resultados se mantienen de manera más general en el caso en que se supone que los rendimientos de los activos tienen una distribución elíptica multivariable (por ejemplo, distribución  $t$ ) con primeros y segundos momentos finitos.

=  $\mathbf{N}$ <sup>3</sup>.

Un portafolio  $w$  es un vector  $N \times 1$  con  $w'1_N = 1$ ; donde  $1_N = 1$ ; es el vector  $[1, \dots, 1]'$  de tamaño  $N \times 1$ . La  $n$ -ésima entrada de  $w$  representa el peso del activo  $n$  en el portafolio  $w$ , donde un peso positivo (negativo) representa una posición larga (corta)<sup>4</sup>. Sea  $r_w$  el rendimiento aleatorio del portafolio  $w$ . Su rendimiento esperado y desviación estándar son respectivamente:  $E[r_w] = w'\mu$  y  $\sigma[r_w] = \sqrt{w'\Sigma w}$ .

## 1.2. Portafolio de cuenta mental de frontera eficiente

Considere un inversionista quien inicialmente divide su riqueza entre un número exógenamente determinado de cuentas, designado por  $M \geq 2$ . El vector  $M \times 1$  de fracciones de riqueza en las cuentas es exógenamente determinado por  $y \in R_{++}^M$  donde  $y'1_M = 1$  y  $1_M$  es el vector unidad  $M \times 1$ <sup>5</sup>. Entonces, el inversionista coloca la riqueza dentro de cada cuenta entre el mismo conjunto de activos. Sin embargo, la porción de riqueza dentro de una cuenta dada, que el inversionista asigna a un determinado activo, depende posiblemente de la cuenta. El problema económico de optimización de cuentas mentales comprende<sup>6</sup>:

$$\begin{aligned} \max_{w \in R^N} \quad & w'\mu \\ \text{s.a} \quad & P[r_w \leq H_m] \leq \alpha_m, \\ & w'1_N = 1. \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde  $P[\cdot]$  denota la probabilidad,  $H_m \in \mathbb{R}$  es el umbral de rendimiento y  $\alpha_m \in (0, 1/2)$  es la probabilidad del umbral<sup>7</sup>. La primera restricción de (1.1) requiere que la probabilidad de que el rendimiento esperado de la cuenta sea menor o igual que algún rendimiento umbral (por ejemplo -10%) no exceda algún umbral de probabilidad

---

<sup>3</sup>Siguiendo a Black (1972) y Das et al. (2010) al suponer que no existe un activo libre de riesgo. También al asumir información simétrica.

<sup>4</sup>No se descartan la posibilidad de ventas cortas. Sin embargo, en general los resultados también se mantienen si la venta corta está prohibida o restringida, ya que en ambos casos, la frontera eficiente de media-varianza será estrictamente cóncava. No obstante, se presenta una pérdida de eficiencia de algunos puntos base en relación a la solución con ventas en corto permitidas. Al igual que en el portafolio de media-varianza, la solución de forma cerrada no existe.

<sup>5</sup>El supuesto de que el número de cuentas y la fracción de riqueza en cada cuenta son exógenamente dadas sigue a Das et al. (2010). En este trabajo se seguirá lo más estrechamente posible. No obstante, se debe tomar en cuenta que permitir al inversionista determinar endógenamente el número de cuentas y la fracción de riqueza en cada cuenta podría ser inconsistente con la idea de tener múltiples cuentas. De hecho, esta idea se rompe si el inversionista termina asignando el 100% de su riqueza total a una sola cuenta. (Alexander et al. (2017)).

<sup>6</sup>Esto también es equivalente al portafolio que satisface el criterio de seguridad primero de Telser (1955).

<sup>7</sup>Aquí  $H_m$  y  $\alpha_m$  son exógenos. Por lo tanto, dada la estimación de los insumos de optimización, la composición del portafolio dentro de la cuenta  $m$  no depende del nivel de riesgo de estimación (que depende por ejemplo, del número de meses utilizados para determinar estos insumos).



(ejemplo 5%). Se debe tomar en cuenta que la primera restricción de (1.1) es más estricta cuando  $H_m$  es más grande o  $\alpha_m$  es menor.

Asumiendo que los rendimientos tienen distribución normal multivariada, entonces:

$$P[r_w \leq x] \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \equiv \Phi(z),$$

con  $z = \frac{x-r_w}{\sigma_w}$ . Bajo este supuesto podemos simplificar la primera restricción de (3.2) como sigue:

$$\Phi\left(\frac{H_m - E[r_w]}{\sigma[r_w]}\right) \leq \alpha_m \implies \frac{H_m - E[r_w]}{\sigma[r_w]} \leq -z_{\alpha_m}$$

y obtener:

$$E[r_w] \geq H_m + z_{\alpha_m} \sigma[r_w], \quad (1.2)$$

con  $z_{\alpha_m} = -\Phi^{-1}(\alpha_m)$  el cual es la mitad superior de la línea  $(0, H_m)$  con pendiente  $z_{\alpha_m}$ . Esta es la línea de pérdidas esperadas. En esta fórmula,  $z_m$  es el cuantil de la distribución normal estándar con probabilidad  $\alpha$ . Por ejemplo, cuando  $\alpha=0.01$ , el cuantil correspondiente es  $z_{\alpha_m} = -2.33$ . Se debe observar que  $z_{\alpha_m} > 0$  si  $\alpha_m \in (0, 1/2)$ , por lo que la pendiente de la línea de pérdidas esperadas es positiva. También, un incremento en el valor de  $\alpha$  reduce el tamaño de  $z_{\alpha_m}$ . Entonces, un portafolio  $w$  satisface la primera restricción de (1.1) si y sólo si:

$$H_m \leq E[r_w] - z_{\alpha_m} \sigma[r_w]. \quad (1.3)$$

A partir (1.2) y (1.3) podemos observar que el *trade-off* entre riesgo y rendimiento en un portafolio de cuentas mentales incorpora una restricción de tipo Valor en Riesgo (VaR) y para distribuciones normales es lo mismo decir  $VaR_\alpha = H_m$  ya que, fijando cualquier portafolio  $w$ , su VaR al nivel de confianza  $1 - \alpha$  es:

$$V[1 - \alpha, r_w] = z_\alpha \sigma[r_w] - E[r_w], \quad (1.4)$$

donde  $z_{\alpha_m} = -\Phi^{-1}(\alpha_m)$  y  $\Phi(\cdot)$  denota la función de distribución normal estándar acumulada.

El portafolio  $w$  satisface la primera restricción de (1.1) si y sólo si:

$$V[1 - \alpha, r_w] \leq -H_m. \quad (1.5)$$

Se deduce de la ecuación (1.4) que la restricción (1.5) es equivalente a <sup>8</sup>:

---

<sup>8</sup>La medida de riesgo sugerida por Baumol (1963), el "límite inferior de confianza" para un portafolio está dado por  $E[r_w] - \kappa_{\alpha_m} \sigma[r_w]$ , donde  $\kappa \in \mathbb{R}$ , es decir, es igual a menos el VaR para el nivel de confianza apropiado, lo cual parece lo más adecuado. La costumbre sin embargo, es referirse al VaR como un número positivo, dando lugar a la ecuación (1.4). Los resultados que se obtienen en este trabajo se mantienen bajo esta definición con los cambios apropiados de signo.

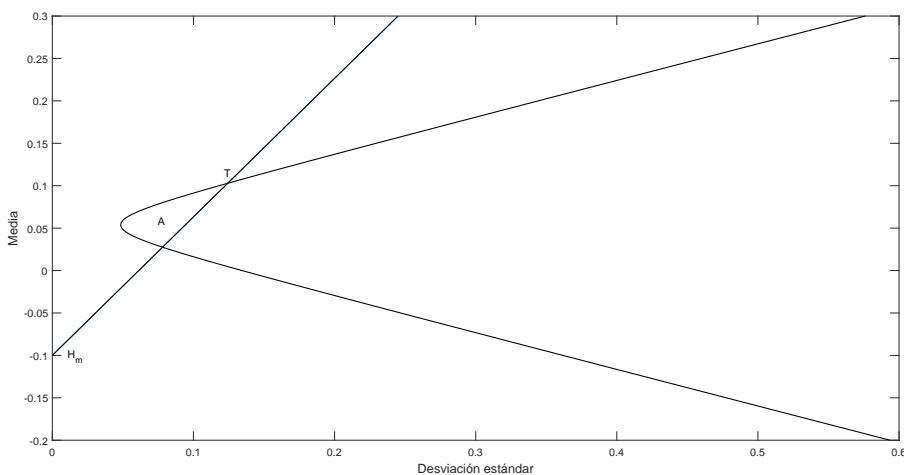
$$E[r_w] \geq H_m + z_{\alpha_m} \sigma[r_w].$$

Por lo tanto, el conjunto de asignaciones que satisfacen la primera restricción de (1.1) tiene una simple representación en el espacio  $(\sigma[r_w], E[r_w])$ . Usando la ecuación (1.3), el portafolio óptimo dentro de la cuenta  $m$  resuelve:

$$\begin{aligned} \max_{w \in R^N} \quad & w' \mu \\ \text{s.a} \quad & E[r_w] \geq H_m + z_{\alpha_m} \sigma[r_w], \\ & w' 1_N = 1, \\ & E[r_w] = w' \mu, \\ & \sigma[r_w] = \sqrt{w' \Sigma w}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

### 1.2.1. Solución intuitiva

Las tres últimas restricciones de (1.6) dan el conjunto de portafolios eficientes, todas las posibles combinaciones de activos riesgosos cuando se gasta la cantidad total. En un espacio  $(\sigma[r_w], E[r_w])$ , éste es el área en el interior de la frontera eficiente. La primera restricción nos da el área debajo de la línea  $E[r_w] = H_m + z_{\alpha_m} \sigma[r_w]$ . El conjunto de todas las restricciones nos da el área  $A$  en la figura 1.1. El objetivo de (1.6) es maximizar el rendimiento esperado, así que tenemos que encontrar el máximo valor de  $E[r_w]$  en el área  $A$ . Es claro que en este caso es el punto  $T$ , el cual es el punto de intersección de la frontera eficiente y la línea de pérdidas esperadas.



**Figura 1.1:** Portafolio óptimo dentro de una cuenta determinada

El punto de intersección  $T$  puede ser fácilmente calculado, usando la fórmula (A.13)

para la frontera eficiente (ver apéndice A) y la línea de pérdidas esperadas. El cálculo del punto de intersección consiste en igualar las dos fórmulas y resolver para  $E[r_w]$  :

$$\frac{1}{d}(cE^2[r_w] - 2bE[r_w] + a) = \left( \frac{H_m - E[r_w]}{z_{\alpha_m}} \right)^2.$$

Usando los parámetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  definidos en (A.8) del apéndice A y debido a que  $d > 0$ , podemos escribir lo anterior como:

$$z_{\alpha_m}^2 (c(E[r_w])^2 - 2bE[r_w] + a) = d(H_m^2 - 2H_mE[r_w] + (E[r_w])^2).$$

Trayendo todos los factores del lado izquierdo obtenemos una ecuación cuadrática de la siguiente forma:

$$(cz_{\alpha_m}^2 - d)(E[r_w])^2 - (2bz_{\alpha_m}^2 - 2dH_m)E[r_w] + az_{\alpha_m}^2 - dH_m^2 = 0.$$

La anterior ecuación cuadrática se resuelve usando la fórmula cuadrática. El discriminante  $D$  es:

$$\begin{aligned} D &= (- (2bz_{\alpha_m}^2 - 2dH_m))^2 - 4((cz_{\alpha_m}^2 - d))(az_{\alpha_m}^2 - dH_m^2) \\ &= 4(adz_{\alpha_m}^2 - 2bdz_{\alpha_m}^2 H_m + cdz_{\alpha_m}^2 H_m^2 - acz_{\alpha_m}^4 + b^2 z_{\alpha_m}^4). \end{aligned}$$

Ya que  $d = ac - b^2$ ,

$$\begin{aligned} D &= 4z_{\alpha_m}^2 (ad - 2bdH_m + cdH_m^2 - z_{\alpha_m}^2) \\ &= 4z_{\alpha_m}^2 (d(a - 2bH_m + cH_m^2 - z_{\alpha_m}^2)). \end{aligned}$$

Aplicando la fórmula cuadrática obtenemos:

$$\begin{aligned} E[r_{w_m}]_{ef} &= \frac{-(- (2bz_{\alpha_m}^2 - 2dH_m)) + \sqrt{4z_{\alpha_m}^2 (d(a - 2bH_m + cH_m^2 - z_{\alpha_m}^2))}}{2(cz_{\alpha_m}^2 - d)} \\ &= \frac{bz_{\alpha_m}^2 - dH_m + z_{\alpha_m} \sqrt{d(a - 2bH_m + cH_m^2 - z_{\alpha_m}^2)}}{cz_{\alpha_m}^2 - d} \\ &= \frac{1/c(bz_{\alpha_m}^2 - dH_m) + z_{\alpha_m} \sqrt{d/c((b/c - H_m)^2 - (z_{\alpha_m}^2 - d/c)/c)}}{z_{\alpha_m}^2 - d/c}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

que es valor del rendimiento en un subportafolio óptimo de cuenta mental.

La desviación estándar es entonces calculada cómo:

$$\begin{aligned}\sigma[r_{w_m}]_{ef} &= \frac{H_m - E[r_w]}{z_{\alpha_m}} \\ &= \frac{z_{\alpha_m}^2 (b/c - H_m) + \sqrt{(d/c)((b/c - H_m)^2 - (z_{\alpha_m}^2 - d/c)/c)}}{z_{\alpha_m}^2 - d/c}.\end{aligned}\quad (1.8)$$

El vector  $w_m$ , las cantidades invertidas en cada activo individual en el subportafolio óptimo de cuenta mental, se puede calcular utilizando la fórmula A.12 del apéndice A para los portafolios de frontera eficiente y obtener:

$$w_{m_{ef}} = g + hE[r_{w_m}]_{ef}.\quad (1.9)$$

y sustituyendo  $E[r_{w_m}]_{ef}$ , obtendremos una larga expresión que no es útil escribir aquí<sup>9</sup>.

### 1.2.2. Solución analítica

Después de revisar una solución intuitiva para el problema planteado en el portafolios de cuentas mentales, en esta sección usaremos un esquemas más analítico para revisar los resultado de la sección anterior. El problema es entonces planteado como:

$$\begin{aligned}\max_{w \in R^N} \quad & w' \mu \\ \text{s.a} \quad & E[r_w] \geq H_m + z_{\alpha_m} \sigma[r_w], \\ & w' 1_N = 1, \\ & E[r_w] = w' \mu, \\ & \sigma[r_w] = \sqrt{w' \Sigma w}.\end{aligned}\quad (1.10)$$

La primera restricción puede ser transformada como:

$$(H_m - E[r_w])^2 \leq (-z_{\alpha_m} \sigma[r_w])^2 \iff H_m^2 - 2H_m E[r_w] + (E[r_w])^2 - z_{\alpha_m}^2 \sigma^2[r_w] \leq 0,$$

y si sustituimos las otras restricciones obtenemos:

$$H_m^2 - 2H_m \mu' w + w' \mu \mu' w - z_{\alpha_m}^2 w' \Sigma w \leq 0 \iff H_m^2 - 2H_m \mu' w + w' \Psi w \leq 0,$$

---

<sup>9</sup>La caracterización de la frontera eficiente estimada por las ecuaciones (1.7) y (1.8) es similar a la caracterización de Alexander et al. (2017)

## 1. PORTAFOLIOS DE CUENTAS MENTALES

---

donde la matriz  $\Psi = \mu\mu' - z_{\alpha_m}^2 \Sigma$  y:

$$\Psi' = (\mu\mu' - z_{\alpha_m}^2 \Sigma)' = (\mu\mu')' - z_{\alpha_m}^2 \Sigma' = \mu\mu' - z_{\alpha_m}^2 \Sigma = \Psi.$$

Para facilitar calculos posteriores, definimos las siguientes constantes:

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \mu' \Psi^{-1} \mu, \\ \hat{b} &= \mu' \Psi^{-1} 1_N = 1'_N \Psi^{-1} \mu, \\ \hat{c} &= 1'_N \Psi^{-1} 1_N, \\ \hat{d} &= \hat{a}\hat{c} - \hat{b}^2. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Hay una relación entre las constantes  $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}$  y las constantes definidas en el apéndice A ( $a, b, c, d$ ) que puede ser definida facilmente. Lo siguiente es valido para la matriz inversa de varianza y covarianzas:

$$\Sigma^{-1} = \Sigma^{-1} \Psi \Psi^{-1} = \Sigma^{-1} (\mu\mu' - z_{\alpha_m}^2 \Sigma) \Psi^{-1} = \Sigma^{-1} \mu\mu' \Psi^{-1} - z_{\alpha_m}^2 \Psi^{-1}.$$

Usando las expresiones de (1.11) para  $\Sigma^{-1}$  tenemos:

$$\begin{aligned} a &= \mu' \Sigma^{-1} \mu = \mu' \Sigma^{-1} \mu\mu' \Psi^{-1} \mu - z_{\alpha_m}^2 \mu' \Psi^{-1} \mu = a\hat{a} - z_{\alpha_m}^2 \hat{a} = \hat{a}(a - z_{\alpha_m}^2). \\ b &= \mu' \Sigma^{-1} 1_N = \mu' \Sigma^{-1} \mu\mu' \Psi^{-1} 1_N - z_{\alpha_m}^2 \mu' \Psi^{-1} 1_N = a\hat{b} - z_{\alpha_m}^2 \hat{b} = \hat{b}(a - z_{\alpha_m}^2). \\ c &= 1'_N \Sigma^{-1} 1_N = 1'_N \Sigma^{-1} \mu\mu' \Psi^{-1} 1_N - z_{\alpha_m}^2 1'_N \Psi^{-1} 1_N = b\hat{b} - z_{\alpha_m}^2 \hat{c}. \end{aligned}$$

Resolvemos el conjunto para obtener las expresiones deseadas, y obtenemos:

$$\begin{cases} \hat{a} = \frac{a}{a - z_{\alpha_m}^2}, \\ \hat{b} = \frac{b}{a - z_{\alpha_m}^2}, \\ \hat{c} = \frac{c z_{\alpha_m}^2 - d}{z_{\alpha_m}^2 (a - z_{\alpha_m}^2)}, \\ \hat{d} = \hat{a}\hat{c} - \hat{b}^2 = \frac{-d}{z_{\alpha_m}^2 (a - z_{\alpha_m}^2)}. \end{cases} \tag{1.12}$$

Entonces el sistema (1.10) puede ser simplificado como:

$$\begin{aligned} \max_{w \in R^N} \quad & w' \mu \\ \text{s.a} \quad & -H_m^2 + 2H_m \mu' w - w' \Psi w \geq 0, \\ & w' 1_N - 1 = 0. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Como las restricciones de (1.13) contienen una desigualdad, utilizamos las condiciones de Kuhn-Tucker. Por lo que para cada desigualdad  $g_i(x) \leq 0$  agregaremos las condiciones:  $\lambda_i g_i(x) = 0$  y  $\lambda_i \leq 0$ . De (1.13) las condiciones de Kuhn-Tucker son:

$$\begin{cases} \mu + 2\lambda_1 H_m \mu - 2\lambda_1 \Psi w + \lambda_2 1_N \leq 0, \\ -H_m^2 + 2H_m \mu' w - w' \Psi w \geq 0, \\ w' 1_N - 1 = 0, \\ -\lambda_1 (H_m^2 + 2H_m \mu' w - w' \Psi w) = 0, \\ \lambda_1 \geq 0. \end{cases} \quad (1.14)$$

Suponga que  $\lambda_1 = 0$

$$\mu + \lambda_2 1_N = 0,$$

a partir del cual no se puede determinar un solución factible de  $\lambda_2$  porque suponemos que  $\mu$  no es un vector constante (por lo que nuestra suposición significa que no es posible que todos los rendimientos esperados sean los mismos, lo cual es bastante plausible). Así que  $\lambda_1 \neq 0$  y de la última condición de (1.14) vemos que  $\lambda_1 < 0$ . La primera condición de (1.14) nos da una expresión para  $w$  :

$$w = (\lambda_3 + H_m) \Psi^{-1} \mu + \lambda_4 \Psi^{-1} 1_N, \quad (1.15)$$

con  $\lambda_3 = \frac{1}{2\lambda_1}$  y  $\lambda_4 = \frac{\lambda_2}{2\lambda_1}$

Usando la expresión para  $w$  en la tercera condición de (1.14) obtenemos una expresión para  $\lambda_4$  :

$$\lambda_4 = \frac{1 - \hat{b}(\lambda_3 + H_m)}{\hat{c}}.$$

Por lo que ahora tenemos un nuevo sistema, a partir del cual calcularemos  $\lambda_3$  :

$$\begin{cases} H_m^2 - 2H_m \mu' w + w' \Psi w = 0, \\ (\lambda_3 + H_m) \Psi^{-1} \mu + \lambda_4 \Psi^{-1} 1_N = w, \\ \frac{1 - \hat{b}(\lambda_3 + H_m)}{\hat{c}} = \lambda_4. \end{cases} \quad (1.16)$$

Primero hallemos una expresión para  $w' \Psi w$  :

$$\begin{aligned} w' \Psi w &= ((\lambda_3 + H_m) \Psi^{-1} \mu + \lambda_4 \Psi^{-1} 1_N) \Psi w \\ &= (\lambda_3 + H_m) \mu w + \lambda_4 1_N w && \text{como } 1_N' w = 1 \\ &= (\lambda_3 + H_m) \mu w + \lambda_4. \end{aligned}$$

Ahora calcularemos para  $\mu' w$

$$\begin{aligned}
\mu'w &= \mu'((\lambda_3 + H_m)\Psi^{-1}\mu + \lambda_4\Psi^{-1}1_N) \\
&= (\lambda_3 + H_m)\mu'\Psi^{-1}\mu + \lambda_4\mu'\Psi^{-1}1_N \\
&= \hat{a}\lambda_3 + \hat{a}H_m + \hat{b}\lambda_4 && \text{sustituimos } \lambda_4 \text{ obtenemos} \\
&= \frac{\hat{d}\lambda_3 + \hat{d}H_m + \hat{b}}{\hat{c}} \\
&= \frac{\hat{d}(\lambda_3 + H_m) + \hat{b}}{\hat{c}}.
\end{aligned}$$

Tenemos entonces una nueva expresión para la primera restricción de (1.16) y resolvemos para  $\lambda_3$ :

$$H_m^2 - 2H_m \left( \frac{\hat{d}(\lambda_3 + H_m) + \hat{b}}{\hat{c}} \right) + (\lambda_3 + H_m) \left( \frac{\hat{d}(\lambda_3 + H_m) + \hat{b}}{\hat{c}} \right) + \left( \frac{1 - \hat{b}\lambda_3 - \hat{b}H_m}{\hat{c}} \right) = 0$$

$$\frac{\hat{c}H_m^2 - \hat{d}H_m^2 + \hat{d}\lambda_3^2 - 2\hat{b}H_m + 1}{\hat{c}} = 0$$

$$\hat{d}\lambda_3^2 = (\hat{d} - \hat{c})H_m^2 + 2\hat{b}H_m - 1$$

$$\lambda_3^2 = \frac{1}{\hat{d}}((\hat{d} - \hat{c})H_m^2 + 2\hat{b}H_m - 1)$$

$$\lambda_3 = \sqrt{\frac{1}{\hat{d}}((\hat{d} - \hat{c})H_m^2 + 2\hat{b}H_m - 1)}$$

$$\lambda_3 = \sqrt{\omega}.$$

Dado que ahora tenemos valores para  $\lambda_3$  y  $\lambda_4$ , calcularemos una nueva expresión para  $w$  usando (1.15):

$$\begin{aligned}
w &= (\lambda_3 + H_m)\Psi^{-1}\mu + \lambda_4\Psi^{-1}1_N \\
&= (\sqrt{\omega} + H_m)\Psi^{-1}\mu + \frac{1}{\hat{c}} \left( 1 - \hat{b}H_m - \hat{b}\sqrt{\omega} \right) \Psi^{-1}1_N \\
&= (\lambda_3 + H_m)\Psi^{-1}\mu + \lambda_4\Psi^{-1}1_N \\
w &= (\sqrt{\omega} + H_m)\Psi^{-1}\mu + \frac{1}{\hat{c}} \left( 1 - \hat{b}H_m - \hat{b}\sqrt{\omega} \right) \Psi^{-1}1_N.
\end{aligned}$$

La expresión deseada para  $E[r_w]$  es entonces.

$$\begin{aligned}
 E[r_w] &= \mu'w \\
 &= (\sqrt{\omega} + H_m)\mu'\Psi^{-1}\mu + \frac{1}{\hat{c}} \left(1 - \hat{b}H_m - \hat{b}\sqrt{\omega}\right) \mu'\Psi^{-1}\mathbf{1}_N \\
 &= \frac{1}{\hat{c}} \left(\hat{b} + \hat{d}(H_m + \sqrt{\omega})\right) \\
 &= \frac{\hat{b}}{c} + \frac{\hat{d}H_m}{\hat{c}} + \frac{\hat{d}}{\hat{c}} \sqrt{\frac{1}{\hat{d}} \left((\hat{d} - \hat{c})H_m^2 + 2\hat{b}H_m - 1\right)} \\
 &= \frac{\hat{b}}{c} + \frac{\hat{d}H_m}{\hat{c}} + \frac{1}{\hat{c}} \sqrt{\hat{d}((\hat{d} - \hat{c})H_m^2 + 2\hat{b}H_m - 1)}. \tag{1.17}
 \end{aligned}$$

Al sustituir las expresiones de (1.12) obtenemos:

$$\begin{aligned}
 E[r_{w_m}]_{ef} &= \frac{bz_{\alpha_m}^2 - dH_m + z_{\alpha_m} \sqrt{d(a - 2bH_m - cH_m^2 - z_{\alpha_m}^2)}}{cz_{\alpha_m}^2 - d} \\
 &= \frac{1/c(bz_{\alpha_m}^2 - dH_m) + z_{\alpha_m} \sqrt{(d/c) \left((b/c - H_m)^2 - (z_{\alpha_m}^2 - d/c)/c\right)}}{z_{\alpha_m}^2 - d/c}. \tag{1.18}
 \end{aligned}$$

La expresión para la desviación estándar es:

$$\sigma[r_{w_m}]_{ef} = \frac{z_{\alpha_m}(b/c - H_m) + \sqrt{(d/c) \left((b/c - H_m)^2 - (z_{\alpha_m}^2 - d/c)/c\right)}}{z_{\alpha_m}^2 - d/c}. \tag{1.19}$$

Podemos concluir entonces que los resultados de este enfoque analítico son idénticos a los resultados de la sección anterior. Para comparar esta frontera con la frontera eficiente de media-desviación estándar, primero invertiremos la función (1.17) (escribir  $H_m$  como una función de  $E[r_w]$ ). Esto es:

$$H_m = E[r_w] - \sqrt{\frac{1}{\hat{d}} \left((\hat{d} - \hat{c})(E[r_w])^2 + 2\hat{b}E[r_w] - \hat{a}\right)}.$$

El segundo paso es sustituir las constantes  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$ ,  $\hat{c}$  y  $\hat{d}$  por las constantes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  del apéndice A. Usamos (1.12) para esto y obtenemos.

$$\begin{aligned}
 H_m &= E[r_w] - z_{\alpha_m} \sqrt{\frac{1}{d} (c(E[r_w])^2 - 2bE[r_w] + a)} \\
 &= E[r_w] - z_{\alpha_m} \sqrt{\frac{1}{c} + \frac{(E[r_w] - b/c)^2}{d/c}}. \tag{1.20}
 \end{aligned}$$



El último paso es transformar esta ecuación en el marco de media-desviación estándar. Ya que la restricción (1.3) es una igualdad cuando se alcanza el óptimo, podemos sustituir por  $H_m$  y obtener:

$$E[r_w] - z_\alpha \sigma[r_w] = E[r_w] - z_{\alpha_m} \sqrt{\frac{1}{c} + \frac{(E[r_w] - b/c)^2}{d/c}}.$$

Entonces la frontera eficiente de un subportafolio óptimo de cuenta mental en un marco de media-desviación estándar está dada por:

$$\sigma[r_{w_m}]_{ef} = \sqrt{\frac{1}{c} + \frac{(E[r_w] - b/c)^2}{d/c}}.$$

Así que podemos concluir que minimizar la varianza (desviación estándar) es lo mismo que minimizar la probabilidad de no alcanzar el nivel de umbral en un subportafolio de cuenta mental, cuando los rendimientos tienen distribución normal multivariada.

### 1.3. Portafolio de cuenta mental de mínimo VaR

Ya que el marco de portafolios de cuentas mentales incorpora una restricción tipo VaR, podemos determinar el subportafolio de mínimo VaR que es la asignación con el VaR mínimo <sup>10</sup>. Ya que hemos obtenido la fórmula (1.20), sólo tenemos que poner la derivada de esta función igual a cero y resolver para  $E[r_w]$ . Con lo cual obtenemos:

$$\frac{\partial H_m}{\partial E[r_w]} = 1 - \frac{z_{\alpha_m}(E[r_w] - b)/(d/c)}{\sqrt{1/c + (E[r_w] - d/c)^2/(d/c)}}.$$

Resolviendo para  $E[r_w]$  resulta en el rendimiento esperado del subportafolio de cuenta mental con mínimo VaR:

$$E[r_{w_m}]_{mvr} = \frac{b}{c} + \sqrt{\frac{d^2/c^3}{z_{\alpha_m}^2 - d/c}}. \quad (1.21)$$

La desviación estándar es calculada como:

$$\sigma[r_{w_m}]_{mvr} = \sqrt{\frac{z_{\alpha_m}^2/c}{z_{\alpha_m}^2 - d/c}}. \quad (1.22)$$

---

<sup>10</sup>Este portafolio es un tipo especial de portafolio eficiente de media-varianza desarrollado por Alexander y Baptista (2002), donde muestran que, en teoría, el portafolio de mínima varianza es un caso especial de la estrategia de mínimo VaR obtenida en el límite cuando  $z \rightarrow 0$ . El portafolio de mínima varianza es el portafolio con la combinación que tiene varianza mínima de todas las combinaciones posibles

El correspondiente valor de  $H_{m_{mvr}}$  es calculado usando, (1.20), lo que nos da:

$$H_{m_{mvr}} = \frac{b}{c} - \sqrt{\frac{z_{\alpha_m}^2 - d/c}{c}}. \quad (1.23)$$

La asignación de activos  $w_{m_{mvr}}$  al subportafolio de mínimo umbral de pérdidas se calcula utilizando ??, la asignación en la frontera eficiente de media-varianza, que resulta en:

$$w_{m_{mvr}} = \sqrt{\frac{1/c^3}{z_{\alpha_m}^2 - d/c}} \Sigma^{-1} \left( \sqrt{\frac{z_{\alpha_m}^2 - d/c}{1/c}} - b \right) 1_N + c\mu. \quad (1.24)$$

## 1.4. Portafolio de cuenta mental de VaR-tangencia

Debido a la restricción tipo VaR en los portafolios de cuentas mentales, también podemos derivar el subportafolio de VaR-tangencia que es el portafolio donde la línea que atraviesa el origen es tangente a la frontera eficiente del subportafolio de cuenta mental en el espacio  $(\sigma[r_w], E[r_w])$  y coincide con la línea de pérdidas esperada. Esto representa el portafolio con la máxima relación media/VaR, es decir, con el máximo valor para la media por unidad VaR. En el portafolio de tangencia, la pendiente de la recta tangente debe ser igual a la pendiente de la frontera eficiente. Entonces:

$$\frac{\Delta H_{m_{tv}}}{\Delta E[r_w]_{tv}} = \frac{\partial H_m}{\partial E[r_w]} \Big|_{E[r_w]_{ef} = E[r_w]_{tv}}.$$

Usando la fórmula (1.20), obtenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{E[r_w]_{tv} - z_{\alpha_m} \sqrt{\frac{1}{c} + \frac{(E[r_w]_{tv} - b/c)^2}{d/c}} - 0}{E[r_w]_{tv} - 0} = 1 - \frac{z_{\alpha_m} (E[r_w]_{tv} - b)/(d/c)}{\sqrt{1/c + (E[r_w]_{tv} - d/c)^2/(d/c)}} \Big|_{E[r_w]_{ef} = E[r_w]_{tv}}.$$

La solución a esta ecuación es:

$$E[r_{w_m}]_{tv} = \frac{a}{b}. \quad (1.25)$$

Este resultado es el mismo resultado que el portafolio de tangencia en un marco de media-desviación estándar de Markowitz.

La desviación estándar está dada por:

$$\sigma[r_{w_m}]_{tv} = \frac{\sqrt{a}}{b}, \quad (1.26)$$

por su parte, el correspondiente valor de  $H_{m_{tv}}$  es:

$$H_{m_{tv}} = -\frac{\sqrt{a}}{b}(\sqrt{a} + z_{\alpha_m}), \quad (1.27)$$

y la asignación  $w_{m_{tv}}$  es la misma que la asignación en un portafolio de tangencia de media-desviación estándar (véase apéndice A ).

## 1.5. Portafolio óptimo de cuenta mental de máxima utilidad

Das et al. (2010), encuentran que, si existe el portafolio óptimo dentro de la cuenta  $m$ , entonces coincide con el portafolio óptimo de un inversionista hipotético con una cuenta única que tiene la misma función de utilidad objetivo en un portafolio de media-varianza de Markowitz, a saber:

$$U = E[r_w] - \frac{1}{2}\gamma_m \text{Var}[r_w], \quad (1.28)$$

para algún coeficiente de aversión al riesgo  $\gamma_m > 0$ , al que también se refieren como coeficiente implícito de aversión al riesgo ya que, usando la ecuación (A.15) y (1.28), tenemos que para:

$$\max_{E[r_w]_{\gamma_m} \in R} E[r_w] - \frac{\gamma_m}{2} \left[ \frac{1}{c} + \frac{(E[r_w] - b/c)^2}{d/c} \right], \quad (1.29)$$

la condición de primer orden para que  $E[r_w]_{\gamma}$  resuelva (1.29) es  $1 - \gamma_m \frac{E[r_w]_{\gamma} - b/c}{d/c} = 0$ . Por lo tanto,  $\frac{d/c}{E[r_w]_{\gamma} - b/c} = \gamma_m$ . Lo que significa que el tamaño de  $\gamma_m$  depende de los valores de  $E[r_w]$ ,  $b/c$  y  $d/c$ .

De manera que, el problema del portafolio de cuenta mental que maximiza la función (1.29) será como sigue:

$$\begin{aligned} & \max_{w \in R^N} w' \mu \\ \text{s.a} \quad & P[r_w \leq H_m] \leq \alpha_m, \\ & w' 1_N = 1. \end{aligned} \quad (1.30)$$

ya que la primera restricción en (1.30) es una igualdad cuando el óptimo es alcanzado, tenemos la solución a la aversión al riesgo implícita  $\gamma$  del inversionista y los pesos óptimos  $w(\gamma)$  incorporados en las siguientes ecuaciones:

$$\text{resolver}_{\gamma} \quad w(\gamma)' \mu - z_{\alpha_m} [w(\gamma)' \Sigma w(\gamma)]^{1/2} = H_m, \quad (1.31)$$

donde

$$w(\gamma) = \frac{1}{\gamma} \Sigma^{-1} \left[ \mu + 1_N \left[ \frac{\gamma - b}{c} \right] \right], \quad (1.32)$$

que es la solución para el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \max_{w \in \mathbb{R}^N} \quad & w' \mu - \frac{\gamma_m}{2} w' \Sigma w, \\ \text{s.a} \quad & w' 1_N = 1. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Por lo tanto, el objetivo del inversionista será elegir el mejor portafolio en el espacio  $(\sigma[r_w], E[r_w])$  que satisfaga la primera restricción de (1.30). Recordando que los pesos óptimos  $w(\gamma)$  están dados por la ecuación (1.32) que es la solución al problema de optimización de Markowitz cuando este se expresa en terminos del parámetro de aversión al riesgo (Ver apéndice A). Al ser sustituidos los pesos óptimos en la primera restricción de (1.30) se obtiene una ecuación que se puede resolver para la aversión al riesgo implícita del inversionista para cada cuenta mental en particular.

De tal forma que, resolvemos la ecuación no lineal (1.31) en la variable  $\gamma$  contenida en la función  $w(\gamma)$  que viene de una solución numérica al problema de maximización (1.33). Luego verificamos si la ecuación (1.31) se mantiene. Si no, movemos  $\gamma$  en la dirección apropiada y resolvemos. Se busca eficientemente sobre  $\gamma$  y la convergencia se logra rápidamente. Si no hay convergencia, esto implica que los insumos utilizados en (1.30) son inviables.

En consecuencia, cuando un inversionista especifica sus preferencias de cuentas mentales para cada subportafolio a través del par de parámetros  $(H_m, \alpha_m)$ , está indicando implícitamente cuáles son sus preferencias de riesgo ( $\gamma$ ) sobre el conjunto dado de selección de portafolios  $(\mu, \Sigma)$ . Por lo tanto, podemos escribir la aversión al riesgo implícita para cada cuenta mental como una función de asignación  $\gamma(\mu, \Sigma; H_m, \alpha_m)$ .

Hallada la aversión al riesgo implícita que resuelve (1.31) podemos verificar los resultados de  $H_m$  como expresión de  $\gamma$  y  $z_{\alpha_m}$ . Usando la fórmula (1.20) junto con las (A.26) y (A.27) del apéndice A obtenemos:

$$H_{m\alpha} = \frac{b}{c} + \frac{d}{c\gamma} - z_{\alpha_m} \sqrt{\frac{1}{c} + \frac{d}{c\gamma^2}}. \quad (1.34)$$

De (1.34) y (1.19) podemos obtener una expresión para  $\sigma[r_{w_m}]$  en términos de  $\gamma$  y  $z_{\alpha_m}$  como sigue:

$$\begin{aligned}\sigma[r_{w_m}]_\gamma &= \frac{\frac{-z_{\alpha_m}d}{c\gamma} + z_{\alpha_m}^2 \sqrt{\frac{1}{c} + \frac{d}{c\gamma^2}} + \sqrt{\frac{d}{c} \left[ \left( \frac{d}{c\gamma} - z_{\alpha_m} \sqrt{\frac{1}{c} + \frac{d}{c\gamma^2}} \right)^2 - \frac{z_{\alpha_m}^2 - d/c}{c} \right]}}{z_{\alpha_m}^2 - d/c} \\ &= \frac{\frac{-z_{\alpha_m}d}{c\gamma} + z_{\alpha_m}^2 \sqrt{\frac{1}{c} + \frac{d}{c\gamma^2}} + \frac{d}{c} \sqrt{\left[ \frac{z_{\alpha_m}}{\gamma} - \sqrt{\frac{1}{c} + \frac{d}{c\gamma^2}} \right]^2}}{z_{\alpha_m}^2 - d/c}.\end{aligned}\quad (1.35)$$

El rendimiento de cada subportafolio de cuenta mental es entonces calculado como:

$$E[r_{w_m}]_\gamma = \frac{\frac{bz_{\alpha_m}^2}{c} - \frac{d}{c} \left( b + dc\gamma - z_{\alpha_m} \sqrt{\frac{1}{c} + \frac{d}{c\gamma^2}} \right) + \frac{dz_{\alpha_m}}{c} \sqrt{\left[ \frac{z_{\alpha_m}}{\gamma} - \sqrt{\frac{1}{c} + \frac{d}{c\gamma^2}} \right]^2}}{z_{\alpha_m}^2 - d/c}.\quad (1.36)$$

Es claro que uno de los beneficios del marco de cuentas mentales es que, las preferencias de riesgo se especifican mejor cuando los inversionistas encuentran difícil especificar sus niveles de aversión al riesgo, incluso cuando quieren o deban especificar su nivel de aversión al riesgo en unidades de varianza, ya que la varianza ofrece a los inversionistas poco significado intuitivo. Los inversionistas podrán especificar mejor su nivel de aversión al riesgo en unidades de umbrales para cada uno de los subportafolios de cuentas mentales y las probabilidades de no alcanzarlos si quiere seguir el marco de media-varianza bajo distribuciones normales.

## 1.6. Portafolio agregado

Las combinaciones de portafolios eficientes en un marco de media-varianza resultan en un portafolio agregado eficiente<sup>11</sup> y dado que, los portafolios de cuentas mentales de (Das et al., 2010) son matemáticamente equivalente a los portafolios de media-varianza, la combinación de los subportafolios óptimos de cuentas mentales también dan como resultado un portafolio agregado que se encuentra en la frontera eficiente de media-varianza.

Ya que el inversionista inicialmente divide su riqueza entre un número exógenamente determinado de cuentas, designado por  $M \geq 2$  y el vector  $MX1$  de fracciones de riqueza en las cuentas es exógenamente determinado por  $y \in R_{++}^M$  donde  $y'1_M = 1$  y  $1_M$  es el vector unidad  $MX1$ ; si los portafolios óptimos dentro de las cuentas existen, entonces el portafolio agregado  $w_a$  existe y está dado por<sup>12</sup>:

<sup>11</sup>Ver Sharpe et al. (1999), Huang y Litzenberger (1988)

<sup>12</sup>Ver apéndice A para ver la derivación de la fórmula

$$\begin{aligned}
w_a &= \sum_{m=1}^M y_m w_m \\
&= \sum_{m=1}^M y_m (g + h E[r_{w_m}]_{ef}) \\
&= g + h \sum_{m=1}^M y_m E[r_{w_m}]_{ef}.
\end{aligned} \tag{1.37}$$

donde:

$$g = \frac{1}{d} [a(\Sigma^{-1} \mathbf{1}_N) - b(\Sigma^{-1} \mu)] \text{ y } h = \frac{1}{d} [c(\Sigma^{-1} \mu) - b(\Sigma^{-1} \mathbf{1}_N)].$$

El rendimiento esperado del portafolio agregado es:

$$E[r_{w_a}] = \sum_{m=1}^M y_m E[r_{w_m}]_{ef}, \tag{1.38}$$

y su desviación estándar está dada por:

$$\sigma[r_{w_a}] = \sqrt{\frac{1}{c} + \frac{(E[r_{w_a}] - b/c)^2}{d/c}}. \tag{1.39}$$

Al ver las ecuaciones (1.37), (1.38) y (1.39) podemos observar que, el tamaño del rendimiento esperado  $E[r_{w_a}]$  y la desviación estándar  $\sigma[r_{w_a}]$  dependen de las fracciones de la riqueza en las cuentas, los umbrales (que afectan a  $E[r_{w_a}]$ ) por  $m = 1, \dots, M$  y los insumos para el problema de optimización.

Ya que  $w_a$  se encuentra en una frontera eficiente de media- varianza, este resuelve:

$$\begin{aligned}
\max_{w \in R^N} \quad & w' \mu - \frac{\gamma_a}{2} w' \Sigma w, \\
\text{s.a} \quad & w' \mathbf{1}_N = 1.
\end{aligned} \tag{1.40}$$

para alguna  $\gamma_a$ . Nos referiremos a  $w_a$  como el coeficiente de aversión al riesgo implícito para el portafolio agregado, el cual está dado por:

$$\gamma_a = \frac{d/c}{E[r_{w_a}] - b/c}. \tag{1.41}$$

A través de las ecuaciones (1.38), (1.39) y (1.41) podemos ver que el tamaño de  $\gamma_a$  depende de las fracciones de riqueza en las cuentas, de los umbrales de las cuentas y de los insumos para el problema de optimización. No obstante, dado que los pesos del portafolio no son linealmente proporcionales al coeficiente de aversión al riesgo implícito  $\gamma_a$  (ver ecuación (1.32), el coeficiente de aversión al riesgo implícito en el

portafolio agregado es diferente del promedio ponderado de los coeficientes de aversión al riesgo de los subportafolios de cuentas mentales.

## 1.7. Análisis de sensibilidad

En esta sección se describirá que pasa con los portafolios de cuentas mentales cuando los parámetros relevantes no son los adecuados. Los parámetros relevantes en esta sección son  $\alpha_m$  y  $H_m$ . Se observa que la solución óptima no se encuentra cuando estos parámetros no cumplen ciertos requerimientos.

Recordemos que para una tasa de rendimiento  $r_w$  con distribución normal multivariada tenemos  $V[1 - \alpha, r_w] = z_{\alpha_m} \sigma[r_w] - E[r_w]$ . Por lo tanto, hay dos efectos sobre el VaR cuando nos movemos a lo largo de la frontera eficiente: (i) el efecto desviación estándar, que se produce a través del término  $z_{\alpha_m} \sigma[r_w]$  y (ii) el efecto media, que se produce a través del término  $E[r_w]$ . Por lo tanto, si la probabilidad del umbral  $\alpha_m$  no es lo suficientemente baja para que el efecto de la desviación estándar sobrepase el efecto media, entonces el problema del portafolio de cuenta mental no tiene solución. Esto implica que se debe tener cuidado al elegir la probabilidad del umbral  $\alpha_m$  para calcular el VaR de una manera que tenga sentido. Es decir, el conjunto de portafolios que satisface la restricción VaR consiste en todos los portafolios que se ubiquen en o sobre una línea con intercepto  $-H$  y pendiente  $z_{\alpha_m}$  en el espacio de media-varianza. Recordando que  $z_{\alpha_m}$  se define como  $-\Phi^{-1}(\alpha_m)$

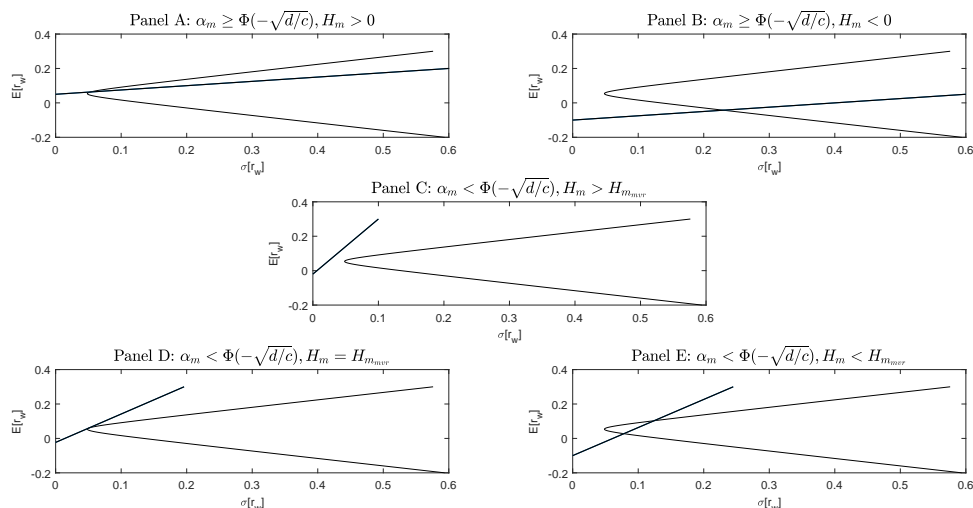
El portafolio óptimo dentro de la cuenta  $m$  existe si y sólo si, la probabilidad del umbral  $\alpha_m$  es lo suficientemente baja y el umbral del rendimiento  $H_m$  es suficientemente pequeño.

Seguindo a Alexander y Baptista (2002) para que un subportafolio de cuenta mental tenga solución debe cumplir los siguiente lemas:

- i) Cuando  $\alpha_m \geq \Phi(-\sqrt{d/c})$ , o equivalentemente  $z_{\alpha_m} \leq \sqrt{d/c}$ <sup>1</sup> (observe que  $\sqrt{d/c}$  es la pendiente asintótica de la representación de los portafolios en la frontera de media-varianza en el espacio  $(\sigma[r_w], E[r_w])$ ), el portafolio óptimo dentro de la cuenta  $m$  no existe, independientemente del rendimiento del umbral (Panel A y B, Figura 1.2).
- ii) Cuando  $\alpha_m < \Phi(-\sqrt{d/c})$ , o equivalentemente  $z_{\alpha_m} > \sqrt{d/c}$ , y  $H_m > H_{m_{mvr}}$ , el portafolio óptimo dentro de la cuenta  $m$  no existe (Panel C, Figura 1.2).
- iii) Cuando  $\alpha_m < \Phi(-\sqrt{d/c})$  y  $H_m = H_{m_{mvr}}$ , el portafolio óptimo dentro de la cuenta  $m$  existe y se localiza donde la línea de pérdidas es tangente a la curva (Panel D, Figura 1.2).
- iv) Cuando  $\alpha_m < \Phi(-\sqrt{d/c})$  y  $H_m < H_{m_{mvr}}$ , el portafolio óptimo dentro de la cuenta  $m$  existe y se encuentra donde la línea de pérdidas cruza la mitad superior de la frontera eficiente (Panel E, Figura 1.2).

---

<sup>1</sup>Ver derivación en el apéndice apéndice A



**Figura 1.2:** Existencia del portafolio óptimo dentro de una cuenta determinada

Ahora examinaremos las implicaciones económicas que surgen del uso de los portafolios de cuentas mentales con la restricción VaR que se ha venido manejando. Asumiendo que el portafolio óptimo dentro de la cuenta  $m$  coincide con el portafolio óptimo de un inversionista hipotético con una cuenta única, la pregunta que nos hacemos es: ¿Cómo cambia el portafolio óptimo dentro de la cuenta mental  $m$  de un inversionista cuando ha usado previamente la varianza y decide usar la restricción VaR de los portafolios de cuentas mentales.

En primer lugar, consideramos el caso de un agente altamente averso al riesgo cuyo portafolio óptimo, de acuerdo con el criterio de media-varianza, se encuentra en la frontera eficiente y relativamente cercano al portafolio de mínima varianza (es decir, este se localiza entre  $w_{m_{\text{vr}}}$  y  $w_{mv}$ , ver figura 1.3, donde el primero portafolio es el portafolio con la combinación que tiene varianza mínima de todas las combinaciones posibles). A menos que el nivel de confianza en el que el agente calcule el VaR sea extremadamente alto, su portafolio óptimo según el criterio de media-varianza es inviable en el portafolio óptimo dentro de la cuenta mental. Por lo tanto, el portafolio óptimo del inversionista según el criterio de los portafolios de cuentas mentales, se encuentra en la frontera eficiente de media-varianza pero encima del portafolio óptimo del inversionista según el criterio de media-varianza. En consecuencia, la desviación estándar del portafolio óptimo aumenta si el inversionista decide usar los portafolios de cuentas mentales con restricción VaR.

En segundo lugar, consideremos el caso de un agente ligeramente averso al riesgo. En contraste con el caso anterior, el portafolio óptimo del inversionista según el criterio de media-varianza es eficiente dentro de la cuenta mental, incluso a un nivel de confianza relativamente pequeño. Por lo tanto, un agente ligeramente averso al riesgo que decide utilizar los portafolios de cuentas mentales con VaR como medida de riesgo relevante

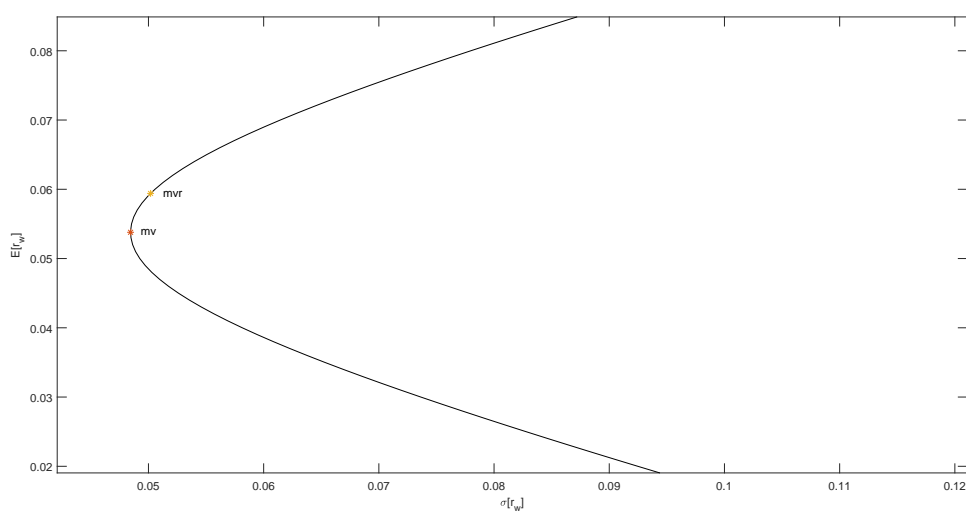


## 1. PORTAFOLIOS DE CUENTAS MENTALES

---

puede elegir un portafolio que coincida con su portafolio óptimo de acuerdo con un criterio de media-varianza. Dependiendo de la especificación de las preferencias del inversionista  $(\alpha_m, H_m)$ , la desviación estándar del portafolio óptimo del inversionista puede disminuir, permanecer o aumentar.

Como se observa, el grado de aversión al riesgo y las preferencias del inversionista  $(\alpha_m, H_m)$  van a definir el comportamiento del portafolio óptimo cuando se cambia de un marco de media-varianza a uno de cuentas mentales. No obstante, los portafolios de cuentas mentales no parecen utilizables para inversionistas con un alto grado de aversión al riesgo acostumbrados al marco de media-varianza.



**Figura 1.3:** Frontera eficiente y portafolios  $w_{mvr}$  y  $w_{mv}$

# Portafolios Robustos de Cuentas Mentales de Crecimiento Óptimo

---

Hasta ahora hemos asumido que los rendimientos de los activos se distribuyen normalmente. Esto hizo que el análisis de media-varianza los portafolios de cuentas mentales fuera directo, porque la probabilidad de alcanzar un nivel de umbral está completamente determinada por su media y desviación estándar. Lamentablemente, no es realista suponer que los rendimientos del portafolio se distribuyen normalmente. Algunos estudios muestran que en realidad la distribución de los activos tiene colas más gruesas, por lo que un rendimiento inusual (una grave caída del mercado) ocurre más a menudo en la realidad que cuando la distribución normal se utiliza para modelar.<sup>13</sup>

Por otra parte, el enfoque de Das et al. (2010) es estáticos. Esto es preocupante, ya que, siguiendo a Roll (1973) “dados los rendimientos temporalmente independientes, se puede demostrar que una cantidad de portafolios eficientes de media-varianza traen la ruina completa después de una secuencia infinita de reinversiones”. En el enfoque de Das et al., la posibilidad de aceptar no más de una probabilidad  $\alpha$  de alcanzar un nivel de umbral de pérdidas  $H_m$ , prepara al portafolio a no perder más allá de  $H_m$  durante el próximo periodo de tiempo  $t$  (por ejemplo, un año) bajo distribuciones normales, además requiere perfecto conocimiento de la distribución conjunta de los activos.

Si bien los portafolios de cuentas mentales de Das et al. permiten al inversionista expresar sus preferencias de riesgo en términos de la probabilidad de incurrir en una pérdida, la riqueza realizada de varios periodos de inversión tendrá una respuesta no lineal, es decir, capitalización, a las realizaciones de un periodo único. Por ejemplo, un inversionista de 50 años quiere que en su cuenta de retiro de \$800,000 crezca a \$1,917,247 cuando tenga 65 años lo que implica un rendimiento anual compuesto de 6 por ciento durante los 15 años restantes. Por lo que a menudo, los inversionistas se preocupan más por maximizar el nivel esperado de riqueza terminal que maximizar la utilidad esperada de la riqueza terminal.

---

<sup>13</sup>Para una discusión más amplia, ver: Cootner (1964), Mandelbrot (1998), Cont (2001), Véhel y Walter (2002).

## 2. PORTAFOLIOS ROBUSTOS DE CUENTAS MENTALES DE CRECIMIENTO ÓPTIMO

---

Para inversionistas que se preocupan por la maximización de la riqueza terminal en un horizonte de inversión finito largo, minimizando la posibilidad de una grave caída en el mercado, otro criterio tiene que ser contemplado. Uno de estos criterios, el cual está preocupado por la tasa de crecimiento de la riqueza, es el criterio de Kelly (1956)<sup>14</sup>.

Los portafolios de inversión administrados bajo el criterio de Kelly se les conoce como portafolios de crecimiento óptimo (*Growth-Optimal Portfolios*), los cuales están diseñados para tener la máxima rentabilidad esperada durante el próximo período de rebalanceo.

El primer trabajo que incorporó la estrategia de Kelly en un marco de portafolios de inversión es el de Latané(1959) en el que sostiene que para un inversionista que busca maximizar la riqueza terminal (asumiendo una secuencia de opciones inciertas y combinadas), una estrategia óptima es seleccionar el portafolio que maximiza el rendimiento medio geométrico. Posteriormente, vinieron otros trabajos como el de Breiman(1961) en el que afirma que la maximización del rendimiento medio geométrico minimiza el tiempo esperado para alcanzar asintóticamente un objetivo monetario  $V$  preasignado, ya que  $V$  tiende a infinito. Hakansson(1971) por su parte, sostiene que la maximización del rendimiento medio geométrico es miope, ya que la composición del portafolio solo depende de la distribución de los rendimientos durante el próximo período de rebalanceo. Hakansson y Miller(1975) muestran que los inversionistas que maximizan el rendimiento medio geométrico nunca se exponen a la ruina. Algoet y Cover(2011) encuentran que el supuesto que requiere la maximización de la media geométrica, independencia de los rendimientos, puede relajarse. Ethier (2004) muestra que la maximización del rendimiento medio geométrico maximiza la mediana de la fortuna de un inversionista, finalmente Dempster et al. (2008) sostienen que la maximización de la media geométrica crea valor incluso en el caso en que todos los activos negociables se vuelvan poco útiles.

Con todos los trabajos realizados sobre portafolios de crecimiento óptimo, pareciera que para cualquier inversionista con un horizonte de inversión suficientemente largo, la estrategia de Kelly es superior. Incluso Markowitz fue un partidario temprano, dedicando a la estrategia todo un capítulo de su libro Selección de Portafolios: Diversificación Eficiente de Inversiones (1959). Sin embargo, la estrategia tiene algunos problemas prácticos: De Santiago y Estrada (2011) muestran que los portafolios que maximizan la media geométrica están empíricamente menos diversificados y son más volátiles que los portafolios que maximizan el criterio de Sharpe, el cual maximiza la utilidad esperada de la riqueza terminal. Rubinstein(1991) muestra que puede llevar 208 años tener un 95 % de confianza en que una estrategia de Kelly supere una estrategia totalmente en efectivo, y 4700 años en un 95 % de certeza de que supere una estrategia totalmente en acciones.

Un horizonte de 208 años y especialmente de 4700 años, tiene poca o nula aplicabilidad para casi todos los inversionista. Una solución a este inconveniente es la de

---

<sup>14</sup>En la teoría de la probabilidad y la selección de portafolios intertemporales, el criterio Kelly, la estrategia Kelly, la fórmula Kelly o la apuesta Kelly es una fórmula utilizada para determinar el tamaño óptimo de una serie de apuestas. En particular, maximiza la tasa de crecimiento esperada y la mediana de la riqueza terminal. Fue descrito por J. L. Kelly, Jr., un investigador de los Laboratorios Bell, en 1956.

Rujeerapaiboon et al. (2015) en la que proponen una solución “robusta” para portafolios de mezcla fija (es decir, aquellos que se rebalancan a un conjunto fijo de pesos al final de cada periodo) y horizontes finitos. Específicamente buscan superar el peor de los casos de la tasa de crecimiento geométrico (donde “el peor de los casos” está definido por un cierto umbral de probabilidad), bajo un conjunto de ambigüedades que contiene todas las distribuciones bajo las cuáles el rendimiento de los activos están correlacionados en serie y tienen momentos de primero y segundo orden idénticos en el periodo (es decir, el rendimiento de los activos sigue un proceso de ruido blanco débil).

A partir del trabajo de Rujeerapaiboon et al. (2015), este capítulo tiene por objetivo llevar el enfoque de los portafolios robustos de crecimiento óptimo al marco de los portafolios de cuentas mentales. El criterio se expone en forma breve y matemática. En la sección 2.1 se introduce el modelo, en la sección 2.2 se discute el portafolio robusto de cuenta mental de crecimiento óptimo de frontera eficiente. En la sección 2.3 se muestra portafolio robusto de cuenta mental de crecimiento óptimo de máxima utilidad. En la sección 2.4 se muestra que pasaría en el largo plazo con el portafolio robusto de cuenta mental de crecimiento óptimo. Finalmente, en la sección 2.5 se discute el portafolio agregado.

## 2.1. El modelo

Sea  $N > 2$  el número de activos disponibles. Suponemos que  $(\tilde{r}_{t,n})_{t=1}^T$ , donde  $t = 1, \dots, T$ , es el rendimiento del activo  $n$  entre los períodos  $t$  y  $t + 1$  y sigue un proceso de ruido blanco en sentido débil, gobernado por cualquier distribución dentro de  $\mathbb{P}$ . En la práctica, sin embargo, se sabe que  $\mathbb{P}$  pertenece a un conjunto de ambigüedad  $\mathcal{P}$ , que contiene todas las distribuciones del rendimiento. Sea  $\mu$  el vector  $N \times 1$  de sus rendimientos esperados. Su  $n$ -ésima entrada es la rentabilidad esperada del activo  $n$ . Suponemos que  $\mu$  no es proporcional al vector unitario  $1_N$  de tamaño  $N \times 1$ ; por lo que al menos dos activos tienen rendimientos esperados diferentes. Sea  $\Sigma$  la matriz  $N \times N$  de varianzas-covarianzas para los rendimientos de los activos. Su entrada en la fila  $n_1$  y la columna  $n_2$  es la covarianza entre los rendimientos de los activos  $n_1$  y  $n_2$ . Asumimos que  $\text{rang}(\Sigma) = N$ .

Un portafolio  $w$  es una estrategia de mezcla fija (o proporciones constantes) que se rebalancia a un conjunto de pesos preseleccionados al comienzo de cada período. Es además un vector  $N \times 1$  con  $w'1_N = 1$ ; donde  $1_N = 1$ ; es el vector  $[1, \dots, 1]'$  de tamaño  $N \times 1$ . La  $n$ -ésima entrada de  $w$  representa el peso del activo  $n$  en el portafolio  $w$ , donde un peso positivo (negativo) representa una posición larga (corta). La tasa de crecimiento del portafolio está dado por  $\hat{\varphi}_{mT}(w) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \log(1 + w' \tilde{r}_{mt})$ .

## 2.2. Portafolio robusto de cuenta mental de crecimiento óptimo de frontera eficiente

Considere un inversionista quien inicialmente divide su riqueza entre un número exógenamente determinado de cuentas, designado por  $M \geq 2$ . El vector  $MX1$  de fracciones de riqueza en las cuentas es exógenamente determinado por  $y \in R_{++}^M$  donde  $y'1_M = 1$  y  $1_M$  es el vector unidad  $MX1$ <sup>15</sup>. Entonces, el inversionista coloca la riqueza dentro de cada cuenta entre el mismo conjunto de activos que se rebalancen a un conjunto de pesos preseleccionados en el comienzo de cada período. Sin embargo, la porción de riqueza dentro de una cuenta dada, que el inversionista asigna a un determinado activo, depende posiblemente de la cuenta. El problema económico de optimización de cuentas mentales comprende:

$$\min_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}} \mathbb{P}\text{-VaR}_\epsilon(\tilde{\varphi}_{mT}(w)).$$

El cual es reformulado como:

$$\begin{aligned} & \max_{\varphi \in \mathbb{R}} \varphi_m \\ \text{s.a.} \quad & \mathbb{P}[\tilde{\varphi}_{mT}(w) \geq \varphi_m] \geq 1 - \epsilon_m, \quad \forall \mathbb{P} \in \mathcal{P}, \\ & \tilde{\varphi}_{mT}(w) = \left[ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left( w' \tilde{r}_{wt} - \frac{1}{2} (w' \tilde{r}_{wt})^2 \right) \right] \\ & w'1_N = 1. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Por lo tanto, el inversionista evalúa la estrategia de mezcla fija  $w$  en vista del peor caso de Valor en Riesgo (WVaR)<sup>16</sup> de la riqueza terminal del portafolio. La primera restricción de (2.1) requiere que la probabilidad de que la tasa de crecimiento del portafolio desde  $t = 1, \dots, T$  sea mayor o igual al VaR del peor caso con una certeza de  $1 - \epsilon$ . La segunda restricción es una aproximación por expansión de Taylor de la tasa de crecimiento del portafolio, definida en la sección 2.1, como el logaritmo natural de la media geométrica de los rendimientos absolutos, que es equivalente a la media

---

<sup>15</sup>El supuesto de que el número de cuentas y la fracción de riqueza en cada cuenta son exógenamente dadas sigue a Das et al. (2010). En este trabajo se seguirá lo más estrechamente posible. No obstante, se debe tomar en cuenta que permitir al inversionista determinar endógenamente el número de cuentas y la fracción de riqueza en cada cuenta podría ser inconsistente con la idea de tener múltiples cuentas. De hecho, esta idea se rompe si el inversionista termina asignando el 100% de su riqueza total a una sola cuenta (Alexander et al. (2017)).

<sup>16</sup>Propuesto por Ghaoui et al. (2003), argumentan que los datos financieros enfrentan errores y es posible que el VaR calculado sea menor que el verdadero. Debido a esta razón, ellos (al igual que Bertsimas y Popescu (2000)) creen que el coeficiente de desviación estándar en el modelo VaR no es válido y se tiene en cuenta un límite superior para este coeficiente. De hecho, considerando una media determinada y la varianza-covarianza de los rendimientos de los activos, ofrecieron una nueva medida de riesgo conservadora con una aproximación pesimista del VaR nombrado como el peor caso de Valor en Riesgo (WVaR).

aritmética de los rendimientos logarítmicos. Por lo tanto, el objetivo de maximizar la riqueza terminal será equivalente a maximizar la tasa de crecimiento. Finalmente la tercera restricción significa que todo el capital asignado a la cuenta será invertido.

Asumiendo que la matriz de covarianzas  $\Sigma$  es estrictamente positiva definida y que para todo  $w$  óptimo tenemos que  $1 - w'\mu > \sqrt{\frac{\epsilon}{(1-\epsilon)T}} \|\Sigma^{1/2}w\|$ ; el problema (2.1) puede ser reducido a una programación cónica de segundo orden (PCSO). El primer supuesto asegura que el portafolio robusto de crecimiento óptimo para un  $T$  y  $\epsilon$  particular sea único y el segundo supuesto delinea el conjunto de momentos para los cuales la aproximación cuadrática de la tasa de crecimiento del portafolio es sensible. A medida que la tasa exacta de crecimiento  $\hat{\varphi}_{mt}(w)$  esté aumentando y sea cóncava en  $w'\tilde{r}_{wt}$ , su peor caso VaR debe estar aumentando en  $w'\mu$  y disminuyendo en  $w'\Sigma w$ . El segundo supuesto asegura que el VaR del peor caso de la tasa de crecimiento aproximada  $\tilde{\varphi}_{mt}(w)$  hereda estas propiedades de monotonicidad y también aumenta en  $w'\mu$  y  $w'\Sigma w$ <sup>17</sup>.

Para reducir el problema (2.1) a un PCSO, primero se aprovecha una propiedad de proyección para conjuntos ambiguos basados en momentos para reformular el problema aproximado del peor caso de VaR en términos de los rendimientos del portafolio  $w'\tilde{r}_{mt}$  como las variables aleatorias fundamentales. El problema del peor caso de VaR resultante es equivalente a un problema de programación semidefinido (PSD) cuyo tamaño se escala con  $T$ , no con  $n$ . A continuación se aprovecha la simetría de permutación temporal de este PSD para demostrar que la matriz variable que aparece en las restricciones PSD solo tiene cuatro grados de libertad. Esta idea puede usarse para mostrar que el PSD involucra esencialmente solo seis variables de decisión diferentes. Sin embargo, las matrices en las desigualdades matriciales todavía tiene una dimensión del orden de  $T$ . Finalmente, al diagonalizar explícitamente estas matrices, se puede mostrar que las restricciones PSD admiten una reformulación equivalente en términos de solo nueve restricciones escalares tradicionales. En resumen, se puede mostrar que el problema del peor caso de VaR (2.1) es equivalente a una programación convexa no lineal con seis variables y nueve restricciones. Resolviendo analíticamente las condiciones de optimización de Karush-Kuhn-Tucker de esta programación no lineal, tenemos <sup>18</sup>:

$$\text{WVaR}_{\epsilon_m}(\tilde{\varphi}'_{mT}(w)) = \frac{1}{2} \left( 1 - \left( 1 - w'\mu + \sqrt{\frac{1-\epsilon_m}{\epsilon_m T}} \|\Sigma^{1/2}w\| \right)^2 - \frac{T-1}{\epsilon T} w'\Sigma w \right). \quad (2.2)$$

---

<sup>17</sup>Es importante resaltar que ambos supuestos se satisfacen fácilmente en la mayoría de las situaciones de interés práctico, incluso si  $T=1$ . El primer supuesto se cumple siempre que no exista un activo libre de riesgo, mientras que el segundo supuesto se satisface automáticamente cuando  $\mu$  y  $\Sigma$  son lo suficientemente pequeños, lo que siempre se puede aplicar al acortar los intervalos de rebalanceo. De hecho, el segundo supuesto se mantiene incluso para los intervalos anuales de rebalanceo si las medias y las desviaciones estándar de los rendimientos de los activos caen dentro de sus rangos típicos reportados en la sección 8 de Luenberger (1998) (Rujeerapaiboon et al. (2015)).

<sup>18</sup>La demostración a la solución de este problema no se muestra en el presente trabajo debido a la extensión del mismo. Para una mayor explicación ver apéndice A y B de Rujeerapaiboon et al. (2015)

## 2. PORTAFOLIOS ROBUSTOS DE CUENTAS MENTALES DE CRECIMIENTO ÓPTIMO

---

Entonces, si el conjunto de portafolios admisibles se caracteriza por un número finito de restricciones lineales, el problema de optimización de portafolios del peor caso VaR (2.1) se reduce a un PCSO tratable cuyo tamaño es independiente del horizonte de inversión. A partir de aquí, nos referimos al optimizador único de este PCSO como el portafolio robusto de crecimiento óptimo para cada cuenta mental, a pesar de que maximiza sólo una aproximación de la tasa de crecimiento real.

Observe en (2.2) que, el peor caso de VaR aumenta en el rendimiento medio del portafolio  $w$  y disminuye en la varianza  $w'\Sigma w$  del portafolio siempre que  $w$  satisfaga  $1 - w'\mu > \sqrt{\frac{\epsilon}{(1-\epsilon)T}} \|\Sigma^{1/2}w\|$ . Por lo tanto, cualquier portafolio que maximice el peor caso de VaR es eficiente en el sentido de media-varianza, ya que el peor caso de VaR se calcula únicamente sobre la base de la información de media y varianza.

### 2.3. Portafolio robusto de cuenta mental de crecimiento óptimo de máxima utilidad

En el problema de cuentas mentales Das et al. (2010) los inversionistas eligen libremente entre todos los portafolios eficientes de media-varianza basados en su preferencias de riesgo, expresados en un umbral de rendimiento  $H_m$  y la probabilidad del umbral  $\alpha$ , es decir, resuelven  $w(\gamma)'\mu - z_{\alpha_m} [w(\gamma)'\Sigma w(\gamma)]^{1/2} = H_m$  con  $\gamma \geq 0$  como una función de asignación  $\gamma(\mu, \Sigma; H_m, \alpha_m)$ . Por el contrario, un inversionista robusto de crecimiento óptimo elige el portafolio eficiente de media-varianza único adaptado a su horizonte de inversión  $T$  y la probabilidad de violación  $\epsilon$ . Podemos así definir una función  $\gamma(T, \epsilon)$  con la propiedad de que el portafolio robusto de crecimiento óptimo adaptado a  $T$  y  $\epsilon$  coincide con la solución de media-varianza en el parámetro de aversión al riesgo  $\gamma(T, \epsilon)$ .

Al comparar las condiciones de optimalidad de un portafolio de media-varianza y el problema de optimización de portafolios robustos de crecimiento óptimo, se puede mostrar que:

$$\gamma(T, \epsilon_m) = \sqrt{\frac{1 - \epsilon_m}{\epsilon_m T}} \cdot \frac{1}{\|\Sigma^{1/2}w\|} + \frac{T - 1}{\epsilon_m T \left(1 - w'\mu + \sqrt{\frac{1 - \epsilon_m}{\epsilon_m T}} \|\Sigma^{1/2}w\|\right)}, \quad (2.3)$$

donde  $w$  denota el portafolio robusto de crecimiento óptimo, que depende de  $T$  y  $\epsilon$  y sólo se puede calcular numéricamente. Desde el punto de vista del análisis de media-varianza, un inversionista robusto de crecimiento óptimo será menos averso al riesgo a medida que  $\epsilon$  o  $T$  aumente. De hecho, se puede usar el segundo supuesto, antes mencionado, para demostrar que el peor caso VaR esta aumentando (lo que indica que  $\gamma(T, \epsilon_m)$  está disminuyendo) en  $\epsilon$  y  $T$ . Rujeerapaiboon et al. (2015) destacan que los portafolios robustos de crecimiento óptimo pueden perder eficiencia de media-varianza cuando el conjunto de ambigüedades de la distribución del rendimiento de los activos

ya no se describe en términos de momentos exactos de primer y segundo orden.

## 2.4. Inversionista de largo plazo

En su trabajo, Rujeeapaiboon et al. (2015), muestran que en el límite de los horizontes de inversión muy largos, el peor caso de VaR (2.2) se reduce a:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \text{WVaR}_{\epsilon_m}(\tilde{\varphi}'_{mT}(w)) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1 - w'\mu)^2 - \frac{1}{2\epsilon}w'\Sigma w. \quad (2.4)$$

que puede verse como la diferencia entre la aproximación de segundo orden de Taylor de la tasa de crecimiento del portafolio en el escenario nominal,  $\log(1 + w'\mu)$ , y una prima de riesgo, que es inversamente proporcional a la probabilidad de violación  $\epsilon$ .

## 2.5. Portafolio agregado

Las combinaciones de portafolios eficientes en un marco de media-varianza resultan en un portafolio agregado eficiente<sup>19</sup> y dado que, los portafolios robustos de crecimiento óptimo son matemáticamente equivalente a los portafolios de media-varianza, la combinación de los subportafolios óptimos de cuentas mentales también dan como resultado un portafolio agregado que se encuentra en la frontera eficiente de media-varianza. Por lo tanto, las conclusiones a las que se llega, son las mismas que las de la sección 1.6

---

<sup>19</sup>Ver Sharpe et al. (1999), Huang y Litzenberger (1988)





## Evidencia Empírica

---

En esta sección se comparan los dos criterios de optimización considerados en esta investigación, portafolios de cuentas mentales y portafolios robustos de cuentas mentales de crecimiento óptimo, desde una perspectiva empírica. El enfoque es, primero, comparar las características dentro de la muestra de los portafolios óptimos determinados por cada criterio; luego, evaluar el desempeño fuera de la muestra.

Los datos fueron obtenidos de la página de Google Finance<sup>20</sup> debido a los costos asociados de obtener datos de PIP o Valmer. Se obtuvieron los precios diarios para diecisiete acciones que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores (BMV), ya que muchas acciones no cuentan con información suficiente en la base de Google Finance y se determinó utilizar únicamente aquellas que tuvieran la información más completa desde el año 2000. Todos los precios están en pesos mexicanos y representan ganancias de capital y dividendos. Finalmente, para aquellas acciones que tuvieron valores nulos entre dos distintas fechas se reemplazó dicho valor por el último precio conocido previo al valor nulo. Con base en estos criterios, se definió la muestra que consiste en rendimientos diarios<sup>21</sup> para las diecisiete acciones que cotizan en la BMV.

Para el ejercicio se consideraron dos inversionistas de 50 años <sup>20</sup> cada uno con 1 millón de pesos. Cada uno asignó su dinero a tres subportafolios de cuentas mentales, cada uno asociado a un objetivo. Ambos asignan \$800,000 a una cuenta que busca obtener un ahorro extra para su retiro, \$150,000 a una cuenta de educación de sus hijos y \$50,000 a la cuenta de un legado que esperan dejar a sus hijos. Los inversionistas tienen otros activos, incluida una casa y pagos futuros de seguridad social. Además, los inversionistas siguen trabajando y mantienen sus fondos y cajas de ahorros para el retiro. Tienen la intención de jubilarse a los 65 años y se estima que su esperanza de vida será de 75 años.

Ambos inversionistas quieren que su cuenta de retiro tenga un rendimiento compuesto anual de 6 % durante los 15 años restantes, lo que implica que al final crezca de

---

<sup>20</sup><https://www.google.com/finance>

<sup>21</sup>Definido como:  $r(t) = \log(P(t)/P(t-1))$  donde P es precios.

<sup>20</sup>Siguiendo el ejercicio de Das et al.(2011) en donde suponen un inversionista de 50 años quien utiliza las cuentas mentales para optimizar sus portafolios.

### 3. EVIDENCIA EMPÍRICA

---

\$800,000 a \$1,917,247. El horizonte para la cuenta de educación es más corto, sólo tres años, y quieren que esa cuenta tenga un rendimiento compuesto anual del 8 %, por lo que buscan que la cuenta crezca a \$188,957. El horizonte de inversión para la cuenta de legado es largo, 25 años, pero tienen una ambiciosa aspiración; quieren un rendimiento compuesto anual del 12 %, lo que implica que la cuenta crezca de \$50,000 a \$850,000.

El primer inversionista prefiere expresar su actitud al riesgo al especificar la probabilidad de incurrir en una pérdida y la cantidad de pérdida. En cuanto al portafolio de cuenta mental de jubilación, no quiere demasiado riesgo, específicamente, él está dispuesto a aceptar no más de 3 % de probabilidad de perder más del 7 % de su subportafolio de jubilación durante el próximo año. En cuanto al portafolio de cuenta mental de educación prefiere aceptar no más de 7 % de probabilidad de perder más del 3 % del subportafolio durante el próximo año. Finalmente, en el subportafolio de legado está dispuesto a aceptar considerablemente más riesgo, él está dispuesto a aceptar una probabilidad no más de 12 % de perder más del 10 % de sus fondos durante el próximo año.

El segundo inversionista asume que una burbuja puede estar presente en el mercado, que puede conducir a catástrofes. Por lo que busca encontrar una estrategia que se comporte mejor si el peor escenario se presenta. Además prefiere expresar su actitud al riesgo al especificar la probabilidad de violación de alcanzar el máximo nivel de rentabilidad bajo un ambiente de incertidumbre. En cuanto al portafolio de cuenta mental de jubilación, no quiere demasiado riesgo, específicamente, él está dispuesto a aceptar no más de 3 % de probabilidad de violación de no alcanzar la máxima rentabilidad posible en su subportafolio de jubilación durante el próximo período de rebalanceo. En cuanto al portafolio de cuenta mental de educación prefiere aceptar no más de 7 % de probabilidad de violación de no alcanzar la máxima rentabilidad posible en el subportafolio durante el próximo período de rebalanceo. Finalmente, en el subportafolio de legado está dispuesto a aceptar considerablemente más riesgo, él está dispuesto a aceptar una probabilidad no más de 12 % de no alcanzar la máxima rentabilidad posible en el subportafolio durante el próximo período de rebalanceo.

Finalmente, ambos inversionistas al evaluar su tolerancia al riesgo y los costos involucrados en el rebalanceo del portafolio (45 puntos base) <sup>21</sup> deciden seguir una estrategia de rebalanceo por año. Por lo que cada portafolio de cuenta mental será rebalanceado anualmente siguiendo al motivo de la cuenta <sup>22</sup>.

---

<sup>21</sup>Este porcentaje se determinó siguiendo los gastos de administración del iShares IPC MidCap Total Return TRAC de BlackRock

<sup>22</sup>Esta estrategia de rebalanceo es conocida como “*time-only*”, donde el portafolio se rebalancea cada día, mes, trimestre o año, y así sucesivamente, independientemente de cuánto o que tan poco la asignación de activos del portafolio se ha desviado de su objetivo; la única variable que se tiene en cuenta es el tiempo. La determinación de la frecuencia con la que se rebalancea el portafolio depende en gran medida de la tolerancia al riesgo del inversionista, la correlación de los activos y los costos involucrados en el rebalanceo.

---

### 3.0.1. Consideraciones empíricas de la estimación de los parámetros de los modelos

Debido a que los portafolios de Das et al. involucran una restricción tipo VaR, esto conduce a un problema de optimización de portafolios de riesgo-rendimiento no convexo y no diferencial donde el número de óptimos locales aumenta exponencialmente con el número de activos (Danielsson et al., 2008; Gaivoronski y Pug, 2005; Kolm et al., 2014; Wozabal et al., 2010). De hecho, Benati y Rizzi (2007) muestran que la optimización del problema del portafolio de media-VaR conduce a un problema NP-no convexo que es computacionalmente intratable. Además, la no convexidad del VaR desalienta la diversificación (como se observa en el ejercicio realizado en este trabajo). En otras palabras, el VaR de un portafolio con dos activos puede ser mayor que la combinación de los VaR de cada activo en el portafolio.

Sin embargo, dado que el VaR es la medida de riesgo estándar de la industria basada en cuantiles, utilizada predominantemente, existe la necesidad de algoritmos eficientes que minimicen el VaR mientras se obtiene el máximo rendimiento. En la literatura, hay diferentes enfoques para medir el VaR para investigar la optimización de portafolios (Charpentier y Oulidi, 2009; Ghaoui et al., 2003; Goh et al., 2012; Natarajan et al., 2008). Aunque ha habido un trabajo considerable relacionado con la optimización de portafolios con varias medidas de riesgo (Balbás et al., 2010; Kolm et al., 2014; Krokholm et al., 2013; Mansini et al., 2007), es notable que el número de los estudios del VaR histórico no paramétrico en el contexto de media-VaR sigue siendo relativamente pequeño. Gilli y Këllezli (2002) y Gilli et al. (2006) proponen un método de aceptación de umbral para maximizar el rendimiento de un portafolio bajo el VaR y las restricciones de déficit esperadas. Dallagnol et al. (2009) emplean un algoritmo genético (GA) y optimización de enjambre de partículas (PSO) para un problema de selección de portafolio de media-VaR utilizando el cálculo de simulación histórica. Alfaro-Cid et al. (2010) realizan una comparación entre la media de la varianza y el enfoque de media-VaR utilizando un algoritmo genético multi-objetivo. Sin embargo, estos modelos a menudo han simplificado el problema donde las restricciones prácticas no se tienen en cuenta.

En el caso de los portafolios de óptimo de Rujeerapaiboon et al., cuando necesitamos encontrar una expresión explícita para los valores óptimos cuando estamos considerando el peor caso para los parámetros inciertos, podremos reducir los problemas a un problema cónico de segundo orden (SOCP).

La programación cónica de segundo orden es una clase de problema que se encuentra entre la programación lineal y la programación semidefinida (SDP). Los SOCP se pueden resolver de manera mucho más eficiente que los SDP, por lo que, si se puede escribir un SDP como SOCP, será preferible. Los SOCP incluyen muchos más problemas de optimización, como la programación cuadrática, problemas con restricciones hiperbólicas y problemas que involucran sumas y máximas de normas, como se muestra en Lobo et al. (1998). Para resolver un SOCP, hay algunos métodos de puntos interiores disponibles. Estos métodos se implementan en software de computadora como SEDUMI y SDPT3. Para el presente trabajo se utilizó el paquete SDPT3, que un optimizador que

### 3. EVIDENCIA EMPÍRICA

---

usa el poder de MATLAB, para resolver los problemas que se abordan en el presente trabajo. Para facilitar la implementación de SDPT3 (Toh, et. al. (1999)) en MATLAB se utilizó el programa Yalmip (Löfberg (2004)).

#### 3.0.2. Portafolios óptimos en la muestra

El punto de partida de una comparación empírica de los portafolios de cuentas mentales y los portafolios robustos de cuentas mentales de crecimiento óptimo es considerar primero las características de los portafolios generados para cada criterio. En este caso, los portafolios se generaron para las diecisiete acciones seleccionadas bajo los criterios mencionados anteriormente. Además, para evitar obtener conclusiones posiblemente sesgadas por las condiciones en un punto único en el tiempo, los portafolios se muestran para cada período de rebalanceo. Las tablas 3.1 a 3.3 informan los resultados relevantes. En todos los casos, los portafolios de cuentas mentales se obtienen de las expresiones en 1.1 y los portafolios robustos de cuentas mentales de crecimiento óptimo de las expresiones en 2.1; también, en todos los casos, las entradas de los problemas de optimización (rendimientos esperados, varianzas y covarianzas) se calculan usando todos los datos disponibles en el momento de cada estimación.

La tabla 3.1 se centra en la cuenta mental de retiro, el panel A muestra la composición de todos los portafolios y el panel B resume sus características. Como se observa en la tabla 3.1, los portafolios generados por el criterio de Das et al. (D) están sustancialmente menos diversificados que los generados por el criterio de Rujeerapaiboon et al. (R) durante el periodo 2007-2012, los portafolios R contienen al menos el doble de activos que los portafolios D. Y, como también muestra la tabla, la menor diversificación de los portafolios D los hace mucho más volátiles que los portafolios R.

Por diseño, los portafolios D tienen un rendimiento medio esperado anualizado más alto que los portafolios R y ambas características se reflejan en las cifras de la tabla 3.1. El mayor rendimiento esperado de los portafolios D se traduce en niveles sustancialmente más altos de riqueza terminal esperada. Las últimas dos líneas del cuadro muestran el rendimiento medio geométrico<sup>23</sup> y la riqueza terminal esperada de \$800,000 invertidos en el primer año y capitalizados anualmente de acuerdo al rendimiento medio geométrico y el portafolio óptimo del momento. Como las cifras muestran claramente, las diferencias son sustanciales, la riqueza terminal esperada de los portafolios D (en relación con los portafolios R) son en promedio 50 por ciento más altos para un periodo de tenencia de un año.

Los resultados para la cuenta de retiro en la tabla 3.1 son confirmados y fortalecidos por los resultados para la cuenta mental de educación en la tabla 3.2. Como se muestra, los portafolios D (en relación con los portafolios R) están menos diversificados y son más volátiles; al mismo tiempo tienen rendimientos y riqueza terminal esperada más altas.

La principal diferencia entre las tablas expuestas 3.1 y 3.2, es que los portafolios D

---

<sup>23</sup>Calculado como  $\exp(\ln(1 + \mu_p) - \frac{\sigma_p^2}{2(1 + \mu_p)^2}) - 1$

---

y los portafolios R se amplifican en el caso de los portafolios de educación en relación con los analizados anteriormente para los portafolios de retiro. Para ilustrar, en el caso de los portafolios de educación, los portafolios D tienen (en relación con los portafolios R) en promedio el doble de volatilidad, no obstante, en cuanto a la riqueza terminal esperada, ambas tienen en promedio el doble de riqueza terminal esperada en un año.

Finalmente, las tablas 3.3 y 3.5 muestran los resultados de los portafolios de legado y agregados donde, de nuevo los resultados confirman y fortalecen los de las tablas anteriores. Uno de los resultados interesantes de los portafolios de legado es la concentración extrema de los portafolios D, que contienen sólo dos clases de activos durante el periodo 2008-2012, alcanzado a cuatro activos como máximo en 2013 y 2015. Los portafolios R en cambio, contienen al menos diez clases de activos a excepción de 2008. El resto de las características relativas de los portafolios D y R en los portafolios de legado y agregado son cuantitativamente diferentes, pero cualitativamente iguales, como las discutidas anteriormente para los portafolios de retiro y educación.

Tabla 3.1: Subportafolios de la cuenta mental de retiro

Esta tabla muestra los portafolios óptimos de la cuenta mental de retiro y algunas de sus características. Las optimizaciones se realizan para cada año en función de los datos disponibles en cada momento. Los portafolios D se obtienen de las expresiones (1.1) y los portafolios R de las expresiones (2.1) para un  $\alpha$  y  $\epsilon$  igual 0.05. El panel A muestra el peso de cada activo en los portafolios óptimos y el panel B muestra algunas de sus características, incluyendo el número de activo en cada portafolio ( $n$ ), el rendimiento medio aritmético anualizado ( $\mu_p$ ), volatilidad ( $\sigma_p$ ), rendimiento medio geométrico anualizado ( $g_p$ ) y la riqueza terminal de \$800,000 invertidos en 2008 que se reinvierten con ganancias todos los años de acuerdo al portafolio óptimo del momento.

	2007		2008		2009		2010		2011		2012		2013		2014		2015		2016	
	PCM	PRCM	PCM	PRCM	PCM	PRCM	PCM	PRCM	PCM	PRCM	PCM	PRCM	PCM	PRCM	PCM	PRCM	PCM	PRCM	PCM	PRCM
Panel A: Pesos del portafolio (%)																				
AC	-	24.08	-	32.68	-	40.77	-	41.82	-	33.38	9.34	34.07	10.13	32.49	18.97	33.1	24.7	33.22	28.09	32.27
ALFAA	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1.33	10.44	1.61	5.34	1.3	5.27	1.37	-	-
ALSEA	21.29	1.34	16.48	1.03	8.05	1.17	6.4	1.27	6.78	1.28	8.74	1.54	8.09	1.77	7.31	1.8	7.44	2.02	5.45	2.09
AMXL	0.94	5.6	-	-	-	1.29	-	2.62	-	2.57	-	1.43	-	3.09	-	4.96	-	3.29	-	4.57
ARA	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
ASURB	-	17.09	-	13.98	-	12.75	-	10.7	-	12.57	8.32	15.24	16.16	15.75	21.35	16.5	26.24	17.25	26.09	17.91
BIMBOA	-	3.42	-	0.67	-	3.04	-	4.32	-	5.46	-	5.98	8.23	6.18	7.23	5.83	11.25	6.21	10.02	5.92
CEMEXCPO	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
ELEKTRA	36.73	21.46	83.52	24.76	68.84	14.11	38.46	10.6	73.22	13.42	20.6	4.33	12.66	4.03	14.58	4.76	7.8	3.87	3.86	3.57
GCARSOA1	-	2.28	-	-	-	-	1.31	-	-	-	-	-	0.78	-	1.87	-	1.75	-	2.43	-
GFINBURO	-	2.88	-	6.15	-	3.57	-	5.17	-	4.67	-	7.15	0.53	6.06	0.69	6.04	-	5.11	0.14	4.85
GFNORTEO	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
GMEXICOB	41.05	0.77	-	-	22.64	-	34.96	-	9.73	-	20.99	-	11.37	-	9.31	-	4.43	-	8.17	-
KIMBERA	-	5.71	-	4.57	-	9.23	-	9.4	-	10.06	-	9.26	-	8.91	-	7.5	-	8.89	1.01	8.61
KOFL	-	7.9	-	9.25	0.46	10.45	18.86	9.97	10.27	12.4	32	13.02	21.61	12.42	13.34	11.31	11.13	11.22	11.88	11.42
SAREB	-	1.43	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
SORIANAB	-	6.04	-	6.92	-	3.63	-	4.14	-	4.2	-	6.65	-	7.67	-	6.9	-	7.55	2.87	8.8
Panel B: Características del portafolio																				
n	4	13	2	9	4	10	5	10	4	10	6	11	10	11	10	11	9	11	11	10
$\mu_p$ anualizado (%)	66.87	33.05	57.46	23.79	49.18	24.13	41.16	23.26	45.48	24.01	33.61	24.14	27.93	21.3	24.89	19.84	22.77	18.86	20.97	17.81
$\sigma_p$ anualizado (%)	45.51	14.85	39.79	16.49	34.76	17.06	29.89	16.43	32.51	17.38	25.29	16.6	21.84	16.53	19.99	16.25	18.71	15.99	17.61	15.83
$g_p$ anualizado (%)	53.21	29.96	45.37	18.87	38.48	18.96	31.79	18.29	35.39	18.64	25.50	19.22	20.76	15.94	18.22	14.38	16.44	13.36	14.93	12.20
RT (miles de pesos)	\$1,225.64	\$1,039.69	\$1,781.75	\$1,235.88	\$2,467.30	\$1,470.17	\$3,251.67	\$1,739.04	\$4,402.58	\$2,063.28	\$5,525.27	\$2,459.76	\$6,672.14	\$2,851.92	\$7,887.58	\$3,261.94	\$9,184.13	\$3,697.80	\$10,555.66	\$4,148.95

Fuente: Elaboración propia

Nota: Debido al redondeo algunas operaciones pueden no coincidir

**Tabla 3.2:** Subportafolios de la cuenta mental de educación

Esta tabla muestra los portafolios óptimos de la cuenta mental de educación y algunas de sus características. Las optimizaciones se realizan para cada año en función de los datos disponibles en cada momento. Los portafolios D se obtienen de las expresiones (1.1) y los portafolios R de las expresiones (2.1) para un  $\alpha$  y  $\epsilon$  igual 0.08. El panel A muestra el peso de cada activo en los portafolios óptimos y el panel B muestra algunas de sus características, incluyendo el número de activo en cada portafolio ( $n$ ), el rendimiento medio aritmético anualizado ( $\mu_p$ ), volatilidad ( $\sigma_p$ ), rendimiento medio geométrico anualizado ( $g_p$ ) y la riqueza terminal de \$150,000 invertidos en 2008 que se reinvierten con ganancias todos los años de acuerdo al portafolio óptimo del momento.

	2007		2008		2009		2010		2011		2012		2013		2014		2015		2016	
	D	R	D	R	D	R	D	R	D	R	D	R	D	R	D	R	D	R	D	R
Panel A: Pesos del portafolio (%)																				
AC	-	21.09	-	26.14	-	37.86	-	39.89	-	31.91	-	33.28	-	30.94	9.70	32.17	15.95	32.71	18.89	31.65
ALFAA	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2.09	12.74	3.02	5.82	2.32	5.75	2.42	-	-
ALSEA	26.39	1.72	21.56	1.27	16.66	1.51	10.14	1.62	12.77	1.64	11.29	2.01	10.88	2.35	9.87	2.39	10.64	2.70	8.85	2.75
AMXL	-	9.76	-	-	-	2.49	-	2.47	-	2.64	-	-	-	1.56	-	3.86	-	1.04	-	2.26
ARA	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
ASURB	-	16.65	-	13.18	-	12.15	-	9.26	-	11.59	1.30	15.50	14.23	16.24	22.11	17.49	29.55	18.77	31.76	19.69
BIMBOA	-	3.12	-	0.47	-	3.19	-	4.62	-	5.49	-	6.10	6.02	6.94	5.41	6.64	10.95	7.42	9.85	6.99
CEMEXCPO	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
ELEKTRA	29.58	26.26	78.44	32.38	70.78	18.47	35.84	12.99	87.23	18.12	24.62	5.54	15.63	4.93	18.50	5.93	9.16	4.52	2.77	3.69
GCARSOA1	-	2.72	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0.27	-	1.95	0.07	1.57	0.21	3.25	0.33
GFINBURO	-	0.32	-	5.55	-	2.21	-	4.52	-	3.56	-	6.93	-	5.82	-	5.79	-	4.34	-	4.02
GFNORTEO	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
GMEXICOB	44.02	3.24	-	-	12.56	0.46	51.12	2.67	-	-	26.83	0.23	16.17	-	13.46	-	6.94	-	14.49	1.80
KIMBERA	-	1.25	-	2.40	-	6.85	-	7.40	-	8.28	-	7.46	-	7.71	-	5.79	-	7.99	-	7.35
KOFL	-	7.99	-	10.70	-	11.68	2.90	11.06	-	13.84	35.96	14.63	24.06	13.51	13.17	11.83	9.48	11.53	10.14	11.65
SAREB	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
SORIANAB	-	5.89	-	7.91	-	3.11	-	3.52	-	2.94	-	6.22	-	6.96	-	5.73	-	6.35	-	7.83
Panel B: Características del portafolio																				
n	3	12	2	9	3	11	4	11	2	10	5	11	8	11	9	12	9	12	8	12
$\mu_p$ anualizado (%)	70.53	37.24	58.14	28.09	51.17	26.15	44.92	24.72	48.75	25.75	36.08	24.80	30.17	21.91	26.66	20.41	24.28	19.48	23.07	18.51
$\sigma_p$ anualizado (%)	53.76	15.98	44.94	17.68	39.98	17.62	35.53	16.86	38.25	17.86	29.24	16.79	25.03	16.71	22.53	16.43	20.84	16.19	19.98	16.06
$g_p$ anualizado (%)	52.93	34.04	43.31	23.18	37.90	20.99	33.04	19.75	36.02	20.41	26.17	19.88	21.58	16.56	18.85	14.95	17.00	13.98	16.06	12.90
RT (miles de pesos)	\$229.39	\$201.06	\$328.74	\$247.68	\$453.32	\$299.68	\$603.10	\$358.86	\$820.34	\$432.08	\$1,035.03	\$517.97	\$1,258.39	\$603.74	\$1,495.61	\$693.99	\$1,749.82	\$791.04	\$2,030.75	\$893.11

Fuente: Elaboración propia

Nota: Debido al redondeo algunas operaciones pueden no coincidir



**Tabla 3.3:** Subportafolios de la cuenta mental de legado

Esta tabla muestra los portafolios óptimos de la cuenta mental de legado y algunas de sus características. Las optimizaciones se realizan para cada año en función de los datos disponibles en cada momento. Los portafolios D se obtienen de las expresiones (1.1) y los portafolios R de las expresiones (2.1) para un  $\alpha$  y  $\epsilon$  igual 0.12. El panel A muestra el peso de cada activo en los portafolios óptimos y el panel B muestra algunas de sus características, incluyendo el número de activo en cada portafolio ( $n$ ), el rendimiento medio aritmético anualizado ( $\mu_p$ ), volatilidad ( $\sigma_p$ ), rendimiento medio geométrico anualizado ( $g_p$ ) y la riqueza terminal de \$50,000 invertidos en 2008 que se reinvierten con ganancias todos los años de acuerdo al portafolio óptimo del momento.

	2007		2008		2009		2010		2011		2012		2013		2014		2015		2016	
	D	R	D	R	D	R	D	R	D	R	D	R	D	R	D	R	D	R	D	R
Panel A: Pesos del portafolio (%)																				
AC	-	15.14	-	18.33	-	34.26	-	37.44	-	30.08	-	32.03	-	28.85	-	30.98	-	31.79	-	30.73
ALFAA	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2.26	-	4.42	-	3.33	-	3.31	-	-	-
ALSEA	43.40	2.18	36.62	1.56	36.15	1.91	33.49	2.07	39.43	2.06	34.98	2.59	34.40	3.08	32.64	3.12	35.90	3.55	34.89	3.59
AMXL	-	14.23	-	0.26	-	3.08	-	2.22	-	1.70	-	-	-	-	-	1.89	-	-	-	-
ARA	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
ASURB	-	15.14	-	12.16	-	11.17	-	7.41	-	10.13	-	15.37	-	16.64	-	18.61	34.46	20.45	25.35	21.85
BIMBOA	-	1.67	-	0.12	-	3.34	-	4.99	-	5.40	-	5.79	-	7.68	-	7.48	-	8.59	-	8.13
CEMEXCPO	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
ELEKTRA	4.21	31.29	63.38	41.35	63.85	23.76	-	16.01	60.57	23.85	29.45	6.97	22.44	6.01	36.79	7.37	11.76	5.26	-	3.79
GCARSOA1	-	1.80	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0.06	-	0.62	-	0.78	-	1.09
GFINBURO	-	-	-	4.83	-	0.49	-	3.70	-	2.05	-	6.45	-	5.36	-	5.28	-	3.19	-	2.85
GFNORTEO	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
GMEXICOB	52.39	6.15	-	-	-	2.86	66.51	6.15	-	2.16	35.58	2.25	39.41	1.37	30.58	1.37	17.88	0.34	39.77	4.06
KIMBERA	-	-	-	-	-	3.70	-	4.86	-	5.88	-	4.66	-	5.93	-	3.47	-	6.52	-	5.59
KOFL	-	7.65	-	12.37	-	13.18	-	12.42	-	15.60	-	16.43	3.75	14.80	-	12.46	-	11.72	-	11.87
SAREB	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
SORIANAB	-	4.74	-	9.01	-	2.26	-	2.72	-	1.11	-	5.20	-	5.79	-	4.05	-	4.51	-	6.46
Panel B: Características del portafolio																				
n	3	10	2	9	2	11	2	11	2	11	3	11	4	12	3	13	4	12	3	11
$\mu_p$ anualizado (%)	82.67	41.12	60.18	33.17	55.26	28.97	52.15	26.60	50.31	28.22	42.34	25.74	38.70	22.79	35.56	21.28	32.57	20.19	31.90	19.38
$\sigma_p$ anualizado (%)	83.12	17.35	63.97	19.53	59.79	18.71	57.15	17.63	55.57	18.82	48.80	17.19	45.71	17.10	45.71	16.82	40.49	16.52	39.91	16.46
$g_p$ anualizado (%)	50.08	37.69	34.42	28.02	30.99	23.66	28.82	21.51	27.54	22.75	21.99	20.75	19.46	17.37	15.73	15.76	15.22	14.64	14.76	13.71
RT (miles de pesos)	\$75.04	\$68.85	\$100.87	\$88.14	\$132.12	\$109.00	\$170.19	\$132.44	\$217.07	\$162.56	\$264.81	\$196.29	\$316.34	\$230.39	\$366.11	\$266.69	\$421.83	\$305.73	\$484.11	\$347.64

Fuente: Elaboración propia

Nota: Debido al redondeo algunas operaciones pueden no coincidir

**Tabla 3.4:** Portafolios agregados

Esta tabla muestra los portafolios agregados de las cuentas mentales y algunas de sus características. Las optimizaciones se realizan para cada año en función de los datos disponibles en cada momento. Los portafolios D y R se obtienen de las expresiones (1.37), (1.38) y (1.39). El panel A muestra el peso de cada activo en los portafolios óptimos y el panel B muestra algunas de sus características, incluyendo el número de activo en cada portafolio ( $n$ ), el rendimiento medio aritmético anualizado ( $\mu_p$ ), volatilidad ( $\sigma_p$ ), rendimiento medio geométrico anualizado ( $g_p$ ) y la riqueza terminal de \$1,000,000 invertidos en 2008 que se reinvierten con ganancias todos los años de acuerdo al portafolio óptimo del momento.

	2007		2008		2009		2010		2011		2012		2013		2014		2015		2016	
	D	R	D	R	D	R	D	R	D	R	D	R	D	R	D	R	D	R	D	R
Panel A: Pesos del portafolio (%)																				
AC	-	23.18	-	30.98	-	40.01	-	41.31	-	32.99	7.47	33.85	8.10	32.08	16.63	32.85	22.15	33.07	25.31	32.10
ALFAA	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1.49	10.26	1.96	5.15	1.55	5.08	1.62	-	-
ALSEA	23.16	1.44	18.25	1.09	10.75	1.26	8.32	1.36	9.31	1.37	10.43	1.66	9.82	1.92	8.96	1.95	9.34	2.20	7.43	2.26
AMXL	0.75	6.66	-	0.01	-	1.56	-	2.58	-	2.54	-	1.14	-	2.71	-	4.64	-	2.79	-	4.00
ARA	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
ASURB	-	16.93	-	13.77	-	12.58	-	10.32	-	12.30	6.85	15.29	15.06	15.87	20.40	16.75	27.15	17.64	26.90	18.37
BIMBOA	-	3.29	-	0.61	-	3.08	-	4.40	-	5.46	-	5.99	7.49	6.37	6.60	6.03	10.64	6.51	9.49	6.19
CEMEXCPO	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
ELEKTRA	34.03	22.67	81.75	26.73	68.88	15.25	36.14	11.23	74.69	14.65	21.65	4.64	13.59	4.26	16.28	5.07	8.20	4.04	3.50	3.60
GCARSOA1	-	2.32	-	-	-	-	1.05	-	-	-	-	-	0.66	0.00	1.79	0.04	1.64	0.07	2.43	0.10
GFINBURO	-	2.35	-	5.99	-	3.21	-	5.00	-	4.37	-	7.08	0.42	5.99	0.55	5.96	-	4.90	0.11	4.63
GFNORTEO	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
GMEXICOB	42.06	1.41	-	-	20.00	0.21	38.96	0.71	7.78	0.11	22.60	0.15	13.49	0.07	11.00	0.07	5.48	0.02	10.70	0.47
KIMBERA	-	4.76	-	4.02	-	8.60	-	8.87	-	9.58	-	8.76	-	8.58	-	7.04	-	8.64	0.81	8.27
KOFL	-	7.90	-	9.62	0.37	10.77	15.52	10.26	8.22	12.78	30.99	13.43	21.08	12.70	12.65	11.45	10.33	11.29	11.03	11.48
SAREB	-	1.14	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
SORIANAB	-	5.95	-	7.17	-	3.48	-	3.98	-	3.86	-	6.51	-	7.47	-	6.58	-	7.22	2.30	8.54
Panel B: Características del portafolio																				
n	4	13	2	10	4	11	5	11	4	11	6	12	10	13	10	13	9	13	11	12
$\mu_p$ anualizado (%)	68.21	34.08	57.70	24.90	49.78	24.68	42.27	23.65	46.21	24.48	34.42	24.32	28.80	21.47	25.69	20.00	23.49	19.02	21.83	17.99
$\sigma_p$ anualizado (%)	48.48	15.10	41.48	16.77	35.93	17.19	31.34	16.53	33.70	17.50	26.56	16.64	23.05	16.57	21.09	16.29	19.65	16.04	18.49	15.88
$g_p$ anualizado (%)	53.15	30.98	44.73	20.01	38.54	19.52	32.29	18.68	35.59	19.13	25.74	19.40	21.10	16.12	18.53	14.54	16.75	13.52	15.45	12.39
RT (miles de pesos)	\$1,530.08	\$1,309.60	\$2,211.36	\$1,571.69	\$3,052.74	\$1,878.85	\$4,024.97	\$2,230.33	\$5,439.99	\$2,657.93	\$6,825.11	\$3,174.01	\$8,246.87	\$3,686.05	\$9,749.30	\$4,222.62	\$11,355.78	\$4,794.56	\$13,070.52	\$5,389.70

Fuente: Elaboración propia

Nota: Debido al redondeo algunas operaciones pueden no coincidir

#### 3.0.3. Desempeño fuera de la muestra

El rendimiento medio, la volatilidad, el rendimiento medio geométrico y la riqueza terminal de los portafolios descritos en la sección anterior, son todas magnitudes esperadas. En otras palabras, son las características esperadas de cada portafolio dado el desempeño histórico de los activos incluidos en ellos. Sin embargo, es útil explorar el comportamiento real de los portafolios seleccionados para el criterio de Das et al. y Rujerapaiboon et. al. Este es el tema abordado en esta sección. La tabla 3.5 resume los resultados relevantes del análisis.

El panel A de la tabla 3.5 resume el desempeño de una inversión de \$800,000 mil pesos en los portafolios óptimos de retiro, determinados en diciembre de 2007, que se mantuvieron pasivamente hasta diciembre de 2008 y rebalanceado en ese punto del tiempo, continuando con dinámica de rebalanceo anual hasta diciembre de 2016, es decir, cada portafolio se capitalizó conforme al portafolio rebalanceado para cada año.

Tal como se esperaba, dados los resultados del análisis previo dentro de la muestra, los portafolios D tienen un riesgo más alto que los portafolios R. Este resultado se aplica a todos los portafolios de cuentas mentales considerados, a saber, portafolios de retiro, educación y legado, a estos últimos se consideró una inversión inicial de \$150,000 y \$50,000 mil pesos respectivamente (panel B y C). Los mismos resultados aplica para los portafolios agregados.

La mayor volatilidad de los portafolios D, sin embargo, no logra compensar mayores rendimientos que los portafolios R. Aunque los portafolios D están diseñados para producir mayores rendimientos que los portafolios R, esto no se logra fuera de la muestra en la mayoría de los casos considerados. Por otro lado, los portafolios R, diseñados para maximizar el rendimiento geométrico, superan a los portafolios D en términos de riqueza terminal en la mayoría de los casos. Observe que, el inversionista que sigue el criterio de Rujerapaiboon et.al. (2015) alcanzan el objetivo asociado a la cuenta de retiro cinco años después del inicio de inversión (2012) y el objetivo asociado a la cuenta de educación se cumple a los dos años (2009), no obstante, el objetivo de la cuenta de legado aún no se cumple debido a la ambiciosa aspiración y el horizonte de inversión. Por su parte, al inversionista que sigue el criterio de Das et.al. (2010) le tomó un año más en alcanzar el objetivo de la cuenta de educación y en cuanto a las otras dos cuentas aún no logra alcanzar los objetivos, no obstante, debido al horizonte de inversión aún está en posibilidad de lograrlo.

En conclusión, el bajo rendimiento esperado y la riqueza terminal obtenida por los portafolios R, es un recordatorio útil de que el criterio utilizado en los portafolios R no garantiza un rendimiento superior en términos de crecimiento, simplemente maximiza la probabilidad de que el crecimiento y que la riqueza terminal sean mayores que las obtenidas por cualquier otra estrategia.

**Tabla 3.5:** Desempeño fuera de la muestra

Esta tabla muestra, para las cuentas mentales de retiro, educación y legado, el rendimiento fuera de la muestra de los portafolios óptimos definidos ex-ante como aquellos que maximizan la relación (D) de acuerdo a las expresiones de (1.1) y la relación (R) según las expresiones de (2.1). El panel A resume el rendimiento de \$800,000 invertidos en los portafolios óptimos de retiro formados con información histórica hasta 2007 y pasivamente retenidos hasta diciembre de 2008, posteriormente se capitalizaron anualmente de acuerdo al portafolio del óptimo del momento. El panel B resume el rendimiento de una inversión de \$150,000 en el portafolio de educación y el panel C de una inversión de \$50,000 en el portafolio de retiro, ambos bajo las mismas condiciones descritas para el portafolio de legado. Las medidas de desempeño incluyen el rendimiento medio aritmético ( $\mu_p$ ), la volatilidad ( $\sigma_p$ ), la riqueza terminal de la inversión para cada año (RT) y el cambio porcentual anual de la riqueza terminal.

	2008		2009		2010		2011		2012		2013		2014		2015		2016		2017	
	D	R	D	R	D	R	D	R	D	R	D	R	D	R	D	R	D	R	D	R
Panel A: Subportafolios de cuenta mental de retiro																				
$\mu_p$ anualizado (%)	-1.54	3.35	26.71	36.48	9.02	20.45	52.13	21.78	-24.45	33.43	-5.69	-2.57	3.58	5.38	6.35	7.74	6.29	4.82	18.91	17.54
$\sigma_p$ anualizado (%)	40.89	23.26	47.07	22.88	23.87	14.16	32	23.61	51.45	13.66	17.4	16.1	14.09	13.6	14.13	13.19	5.82	4.49	13.21	12.15
RT (miles de pesos)	\$724.90	\$805.20	\$849.20	\$1,128.20	\$903.30	\$1,370.30	\$1,445.20	\$1,656.20	\$983.80	\$2,291.70	\$915.70	\$2,205.20	\$939.70	\$2,305.50	\$991.10	\$2,468.80	\$1,053.80	\$2,588.30	\$1,261.10	\$3,059.80
Cambio porcentual de RT	-9.38	0.65	17.15	40.1	6.36	21.46	60	20.86	-31.92	38.37	-6.92	-3.78	2.61	4.55	5.47	7.08	6.32	4.84	19.68	18.22
Panel B: Subportafolios de cuenta mental de educación																				
$\mu_p$ anualizado (%)	-12.99	6.39	28.48	33.56	3.79	18.51	44.33	24.77	-32.91	29.63	-5.24	-2.59	1.8	5.26	4.74	7.83	7.38	4.47	17.54	17.63
$\sigma_p$ anualizado (%)	41.89	25.24	45.72	24.83	23.03	14.23	33.69	23.82	66.08	15.08	18.79	16.12	14.92	13.6	14.59	13.3	6.9	4.06	13.83	12.34
RT (miles de pesos)	\$120.70	\$154.90	\$144.80	\$209.80	\$146.50	\$249.90	\$215.60	\$311.10	\$123.20	\$413.60	\$114.90	\$397.90	\$115.70	\$415.50	\$120.00	\$445.30	\$128.90	\$465.30	\$152.00	\$550.40
Cambio porcentual de RT	-19.53	3.27	19.98	35.46	1.14	19.12	47.18	24.48	-42.87	32.95	-6.74	-3.8	0.7	4.42	3.74	7.17	7.41	4.49	17.96	18.3
Panel C: Subportafolios de cuenta mental de legado																				
$\mu_p$ anualizado (%)	-66.71	9.76	34	30.2	0.87	16.95	-12.85	28.45	2.83	24.94	13.92	-3.13	5.94	5.17	0.52	7.87	12.82	4.42	14.58	17.78
$\sigma_p$ anualizado (%)	50.31	27.7	43.38	27.94	21.34	14.59	29.16	24.26	38.86	17.33	22.84	16.01	16.78	13.6	19	13.5	12.16	3.96	17.26	12.62
RT (miles de pesos)	\$22.60	\$53.10	\$28.90	\$69.00	\$28.50	\$80.80	\$24.10	\$104.30	\$22.90	\$131.80	\$25.60	\$126.10	\$26.80	\$131.60	\$26.50	\$141.00	\$29.90	\$147.30	\$34.10	\$174.50
Cambio porcentual de RT	-54.79	6.12	28.06	29.96	-1.4	17.21	-15.73	29.01	-4.79	26.38	11.93	-4.29	4.63	4.33	-1.27	7.18	12.91	4.44	13.93	18.43
Panel D: Portafolios agregados																				
$\mu_p$ anualizado (%)	-5.69	4.12	27.12	35.69	8.05	19.99	49.75	22.55	-25.18	32.45	-5.23	-2.60	3.43	5.35	6.02	7.76	6.56	4.75	18.64	17.56
$\sigma_p$ anualizado (%)	41.10	23.68	46.62	23.29	23.55	14.14	31.90	23.60	52.72	13.96	17.54	16.06	14.13	13.57	14.15	13.19	6.07	4.39	13.20	12.17
RT (miles de pesos)	\$868.23	\$1,013.22	\$1,022.94	\$1,406.95	\$1,078.29	\$1,700.99	\$1,684.92	\$2,071.60	\$1,129.94	\$2,837.14	\$1,056.23	\$2,729.21	\$1,082.16	\$2,852.61	\$1,137.60	\$3,055.11	\$1,212.55	\$3,200.87	\$1,447.20	\$3,784.67
Cambio porcentual de RT	-13.18	1.32	17.82	38.86	5.41	20.90	56.26	21.79	-32.94	36.95	-6.52	-3.80	2.45	4.52	5.12	7.10	6.59	4.77	19.35	18.24

Fuente: Elaboración propia

Nota: Debido al redondeo algunas operaciones pueden no coincidir



## Conclusiones

---

Esta tesis presenta los resultados de un estudio para dos modelos de optimización de portafolios de inversión. Comienza con la optimización de portafolios de cuentas mentales que utilizan el criterio de Das et al.(2010) que se extiende a lo largo de la presente investigación al criterio de Rujeerapaiboon et al. (2015). Finalmente, se presenta una comparación empírica de ambos criterios utilizando cotizaciones diarias para diecisiete acciones que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores (BMV).

Los principales argumentos y resultados de este trabajo se pueden resumir de la siguiente manera:

Desde una perspectiva teórica, el criterio de Das et al.(2010), para portafolios de cuentas mentales es consistente con la maximización de la utilidad esperada, por otro lado, en el criterio de Rujeerapaiboon et al. (2015), los portafolios óptimos son cuasi-óptimos para las funciones de utilidad isoelásticas con parámetros relativos de aversión al riesgo  $\gamma \gtrsim 1$  (Rujeerapaiboon et al., 2015). El criterio de Das et al.(2010) es consistente con el criterio de Seguridad Primero de Telser y tiene detrás una restricción tipo VaR; mientras que el criterio de Rujeerapaiboon et al. (2015) es más cercano al criterio de Seguridad Primero de Roy y tiene de fondo una restricción WVaR. Finalmente, en el criterio de Das et al.(2010) es necesario conocer la distribución de los rendimientos de los activos mientras que en el de Rujeerapaiboon et al. (2015) es posible optimizar bajo un conjunto de ambigüedades que contienen todas las distribuciones cuando el rendimiento de los activos sigue un proceso de ruido blanco débil.

Desde una perspectiva empírica, el análisis en la muestra arroja que los portafolios bajo el criterio de Das et al.(2010), están menos diversificados, tienen un rendimiento medio más alto (aritmético y geométrico) y una mayor volatilidad que los portafolios de Rujeerapaiboon et al. (2015). En el análisis fuera de la muestra, a su vez, se observa que mientras los portafolios robustos de crecimiento óptimo logran su objetivo de maximizar la riqueza terminal, a menudo los portafolios de cuentas mentales de Das et al.(2010) no logran su objetivo de maximizar los rendimientos ajustados al riesgo.

El inversionista que sigue el criterio de Rujeerapaiboon et al., (2015) alcanza el objetivo asociado a la cuenta de retiro cinco años después del inicio de inversión (2012) y el objetivo asociado a la cuenta de educación se cumple a los dos años (2009), no obstante, el objetivo de la cuenta de legado aún no se cumple debido a la ambiciosa aspiración y el horizonte de inversión. Por su parte, al inversionista que sigue el criterio

de Das et al.(2010) le tomó un año más en alcanzar el objetivo de la cuenta de educación y en cuanto a las otras dos cuentas aún no logra alcanzar los objetivos, no obstante, debido al horizonte de inversión aún está en posibilidad de lograrlo. Se concluye que el portafolio que convino durante el periodo de análisis es aquel que hubiera seguido la estrategia de Rujeerapaiboon et al., (2015)

Es cierto, como sostienen Das et al. que su criterio es intuitivo para inversionistas no profesionales, no obstante, estos inversionistas pueden correr el riesgo de una catrofe financiera, como se observa en la presente investigación, por otro lado, al tener de fondo una restricción VaR se requiere gran poder de computo para alcanzar un óptimo. A su vez, los portafolios robustos de crecimiento óptimo tienen varias características deseables: están diseñados para tratar con un horizonte de múltiples periodos y la reinversión del capital; maximizan el tiempo para alcanzar cualquier nivel objetivo de riqueza; empíricamente tienden a lograr fuera de la muestra, su objetivo de maximizar el crecimiento del capital invertido y es fácil de implementar (Ver apice B). Por lo que es importante que sea tomado en cuenta por las finanzas conductuales para su mayor desarrollo.

Hay dos aspectos importantes para estas conclusiones. En primero lugar, el presente análisis supone que se puede esperar que en el futuro (al menos para el siguiente año) persista una aproximación de los patrones de rendimiento histórico del mercado de acciones, los rendimientos promedios, la volatilidad y baja correlación de rendimientos. En segundo lugar, el análisis supone que los portafolios poseen un grupo ampliamente diversificado de activos líquidos con precios de mercado fácilmente disponibles. No obstante, futuros trabajos pueden estar relacionados con la identificación de ciclos financieros y económicos como lo propuestos por García(2012), Malfavón (2013) y de la Torre(2016); o pronósticos como los de Nava (2014), para superar el primer supuesto. En cuanto al segundo supuesto, el acceso a plataformas de negociación e información financiera permitirá contar con información más sólida y completa que dará la posibilidad de una mayor diversificación.

Finalmente se debe tomar en cuenta que se utilizó la base de datos de Google Finance debido a los costos asociados de obtener datos de PIP o Valmer o alguna plataforma como Bloomberg. Por lo que una extensión a esta tesis sería replicar la metodología utilizada en bases de datos como las mencionadas.

# Portafolios de Media - Varianza

---

## A.1. El modelo

Sea  $N > 2$  el número de activos disponibles. Suponemos que sus rendimientos tienen una distribución normal multivariada<sup>1</sup>. Sea  $\mu$  el vector  $N \times 1$  de sus rendimientos esperados. Su  $n$ -ésima entrada es la rentabilidad esperada del activo  $n$ . Suponemos que  $\mu$  no es proporcional al vector unitario  $1_N$  de tamaño  $N \times 1$ ; por lo que al menos dos activos tienen rendimientos esperados diferentes. Sea  $\Sigma$  la matriz  $N \times N$  de varianzas-covarianzas para los rendimientos de los activos. Su entrada en la fila  $n_1$  y la columna  $n_2$  es la covarianza entre los rendimientos de los activos  $n_1$  y  $n_2$ . Asumimos que  $\text{rang}(\Sigma) = N$ <sup>2</sup>.

Un portafolio  $w$  es un vector  $N \times 1$  con  $w'1_N = 1$ ; donde  $1_N = 1$ ; es el vector  $[1, \dots, 1]'$  de tamaño  $N \times 1$ . La  $n$ -ésima entrada de  $w$  representa el peso del activo  $n$  en el portafolio  $w$ , donde un peso positivo (negativo) representa una posición larga (corta)<sup>3</sup>. Sea  $r_w$  el rendimiento aleatorio del portafolio  $w$ . Su rendimiento esperado y desviación estándar son respectivamente:  $E[r_w] = w'\mu$  y  $\sigma[r_w] = \sqrt{w'\Sigma w}$ .

## A.2. Portafolio de frontera eficiente

Considere un inversionista quien tiene una riqueza inicial y desea invertir en un portafolio con la menor cantidad de riesgo posible sujeto a un rendimiento esperado.

---

<sup>1</sup>Varios documentos relacionados también asumen que los rendimientos de los activos tienen una distribución normal multivariada. No obstante, los resultados se mantienen de manera más general en el caso en que se supone que los rendimientos de los activos tienen una distribución elíptica multivariable (por ejemplo, distribución  $t$ ) con primeros y segundos momentos finitos.

<sup>2</sup>Seguindo a Black (1972) y Das et al. (2010) al suponer que no existe un activo libre de riesgo. También al asumir información simétrica.

<sup>3</sup>No se descartan la posibilidad de ventas cortas. Sin embargo, los resultados también se mantienen si la venta corta está prohibida o restringida, ya que en ambos casos, la frontera eficiente de media-varianza será estrictamente cóncava. No obstante, la solución de forma cerrada no existe.



El problema canónico de optimización de Media-Varianza comprende:

$$\begin{aligned} \min_{w \in \mathbb{R}^N} \quad & w' \Sigma w \\ \text{s.a} \quad & w' \mu = E[r_w], \\ & w' 1_N = 1. \end{aligned} \tag{A.1}$$

La primera restricción requiere un nivel fijo de rendimiento esperado que debe ser cubierto por el nivel mínimo de la varianza del portafolio. La segunda restricción requiere que toda la riqueza se invierta. La solución conocida a este problema es:

$$\min_{w, \lambda_1, \lambda_2} L = w' \Sigma w + \lambda_1 (w' \mu - E[r_w]) + \lambda_2 (w' 1_n - 1), \tag{A.2}$$

donde  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son dos constantes positivas. Las condiciones de primer orden son:

$$\left. \begin{aligned} 2\Sigma w + \lambda_1 \mu + \lambda_2 1_N &= 0, \\ w' \mu - E[r_w] &= 0, \\ w' 1_n - 1 &= 0. \end{aligned} \right\} \tag{A.3}$$

Donde 0 es un vector  $N$  de ceros. Puesto que  $\Sigma$  es una matriz definida positiva, se deduce que las condiciones de primer orden son necesarias y suficientes para un óptimo global. Usando álgebra matricial, el sistema de ecuaciones lineales formado por (A.3) es representado como:

$$\begin{bmatrix} 2\Sigma & \mu & 1_N \\ \mu' & 0 & 0 \\ 1'_N & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ E[r_w] \\ 1 \end{bmatrix},$$

ó

$$A \lambda_x = B,$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 2\Sigma & \mu & 1_N \\ \mu' & 0 & 0 \\ 1'_N & 0 & 0 \end{bmatrix}, \lambda_x = \begin{bmatrix} w \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 0 \\ E[r_w] \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La solución para  $\lambda_x$  es entonces:

$$\lambda_x = A^{-1} B. \tag{A.4}$$

El primer elemento de  $\lambda_x$  son los pesos del portafolio  $w$  para el portafolio óptimo de frontera eficiente con rendimiento esperado  $E[r_w]_{ef}$ . Si  $E[r_w]_{ef}$  es mayor o igual que el rendimiento esperado en el portafolio de frontera eficiente de mínima varianza,<sup>4</sup>

---

<sup>4</sup>También conocido como portafolio global de mínima varianza. Llamado así debido a que es la es

entonces  $w$  es un portafolio eficiente.

### Derivación alternativa

Considere las condiciones de primer orden para el problema de optimización. Tomamos la primera condición de (A.3) para resolver  $w$ :

$$w = -\frac{1}{2}M\Sigma^{-1}\lambda, \quad (\text{A.5})$$

con  $M = [\mu \ 1_N]$  y  $\lambda = [\lambda_1 \ \lambda_2]'$ .

Para poder encontrar los valores para  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , premultiplicamos (A.5) por  $\mu'$  y usando la segunda condición de (A.3) tenemos:

$$E[r_w] = \mu'w = -\frac{1}{2}\lambda_1\mu'\Sigma^{-1}\mu - \frac{1}{2}\lambda_2\mu'\Sigma^{-1}1_N. \quad (\text{A.6})$$

Similarmente, pre-multiplicamos (A.5) por  $1_N$  y usando la tercera condición de (A.3) tenemos:

$$1 = 1_N'w = -\frac{1}{2}\lambda_11_N'\Sigma^{-1}\mu - \frac{1}{2}\lambda_21_N'\Sigma^{-1}1_N. \quad (\text{A.7})$$

Ahora tenemos dos ecuaciones lineales (A.6) y (A.7) que involucran a  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , las cuales se escriben en forma matricial como:

$$-\frac{1}{2} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E[r_w] \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

donde:  $a = \mu'\Sigma^{-1}\mu$ ,  $b = \mu'\Sigma^{-1}1_N = 1_N'\Sigma^{-1}\mu$ , y  $c = 1_N'\Sigma^{-1}1_N$ .  
Sea

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = M'\Sigma^{-1}M = V \text{ y } E = \begin{bmatrix} E[r_w] \\ 1 \end{bmatrix},$$

podemos escribir (A.8) como:

$$-\frac{1}{2}V\lambda = E \quad (\text{A.9})$$

La solución para  $\lambda = [\lambda_1 \ \lambda_2]'$  es:

$$\lambda = -2V^{-1}E, \quad (\text{A.10})$$

donde:

---

la combinación que tiene varianza mínima de todas las combinaciones posibles.

$$V^{-1} = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} c & -b \\ -b & a \end{bmatrix} \text{ y } d \equiv \det(V) = ac - b^2.$$

Ya que hemos asumido que  $\Sigma$  es definida positiva, la matriz inversa  $\Sigma^{-1}$ <sup>5</sup> es también definida positiva. Esto significa que  $x'\Sigma^{-1}x > 0$  para todos los vectores  $x_{(NX1)}$ , por lo que  $a > 0$  y  $c > 0$ . Pero también, de acuerdo a la desigualdad de Cauchy-Schwarz<sup>6</sup>,  $ac - b^2 > 0$  como se muestra a continuación:

$$(b\mu - a1_N)'\Sigma^{-1}(b\mu - a1_N) = bba - abb - abb + aac = a(ac - b^2) = ad > 0,$$

y como  $a > 0$ , sabemos que  $d > 0$ . Se debe observar que:

- i) Cuando los activos en el portafolio tienen el mismo rendimiento esperado,  $ac - b^2 = 0$ .
- ii) Si en el portafolio hay al menos dos activos con rendimientos esperados diferentes, el rendimiento esperado de todos los activos en el portafolio no es idéntico, entonces  $ac - b^2 > 0$ .

Sustituyendo (A.10) en (A.5) tenemos una expresión explícita para los pesos del portafolio eficiente:

$$w_{ef} = \phi_1 \Sigma^{-1} \mu + \phi_2 \Sigma^{-1} 1_N, \quad (\text{A.11})$$

donde

$$\phi_1 = \frac{cE[r_w] - b}{d} \text{ y } \phi_2 = \frac{a - bE[r_w]}{d}.$$

También podemos expresar (A.11) como<sup>7</sup>:

$$w_{ef} = g + hE[r_w], \quad (\text{A.12})$$

donde:

---

<sup>5</sup> $\Sigma^{-1}$  existe porque se ha asumido que  $\sigma_i^2 > 0$  para todo  $i$  y  $\rho_{ij} > -1$  para todo  $i$  y  $j$ .

<sup>6</sup>Para obtener información más detallada sobre la desigualdad de Cauchy-Schwarz, vease Mood et al. (1975).

<sup>7</sup>Conocido como Teorema de Separación de dos fondos. Tobin (1958) afirma que cuando los inversionistas sólo se preocupan por la media y la varianza de la distribución de los rendimientos y en presencia de un activo libre de riesgo, los consumos óptimos pueden ser cubiertos por un portafolio de riesgo y el activo libre de riesgo. También muestra que el supuesto de media-varianza es coherente con las preferencias de von Neumann-Morgenstern con funciones de utilidad cuadrática. Por su parte, Black (1972) demuestra que bajo las preferencias de media-varianza, incluso en ausencia del activo libre de riesgo, los resultados de la separación de mantienen. Finalmente, la aversión al riesgo de un inversionista sólo afecta a las proporciones de la riqueza que invierte en ambos fondos. Pero la asignación de la riqueza entre los diferentes activos de riesgo no depende de las preferencias del inversionista.

$$g = \frac{1}{d}[a(\Sigma^{-1}1_N) - b(\Sigma^{-1}\mu)] \text{ y } h = \frac{1}{d}[c(\Sigma^{-1}\mu) - b(\Sigma^{-1}1_N)].$$

De (A.12) podemos decir que  $g$  es el vector de pesos del portafolio correspondiente a un portafolio de frontera que tiene una tasa de rendimiento esperada nula y que  $g + h$  es el vector de pesos del portafolio con una tasa de rendimiento esperada igual a 1. Para ver esto, primero sustituimos cero por  $E[r_w]$  en la solución (A.12) y obtenemos:

$$w = g + h \cdot 0 = g$$

y sustituimos 1 por  $E[r_w]$  y obtenemos:

$$w = g + h \cdot 1 = g + h.$$

Con la definición de  $V$ , la expresión para la varianza de un portafolio es:

$$\sigma^2[r_w]_{ef} = w'\Sigma w = \frac{1}{d}(c(E[r_w])^2 - 2bE[r_w] + a), \quad (\text{A.13})$$

la desviación estándar es entonces:

$$\sigma[r_w]_{ef} = \sqrt{\frac{1}{d}(c(E[r_w])^2 - 2bE[r_w] + a)}. \quad (\text{A.14})$$

Las relaciones (A.13) y (A.14) definen el conjunto de portafolios eficientes, el cual es una parábola en el espacio  $(\sigma^2[r_w], E[r_w])$  con vertice  $(\frac{b}{c}, \frac{1}{c})$  o una hipérbola en el espacio  $(\sigma[r_w], E[r_w])$ <sup>8</sup> como se muestra a continuación:

$$\sigma^2[r_w] = \frac{c(E[r_w])^2 - 2bE[r_w] + a}{d} = \frac{c(E[r_w])^2 - 2bE[r_w] + d/c + b^2/c}{d},$$

mediante la división del lado izquierdo por  $1/c$  y del lado derecho por  $c/c^2$  tenemos:

$$\frac{\sigma^2[r_w]}{1/c} = \frac{(E[r_w])^2 - 2b/cE[r_w] + d/c^2 + b^2/c^2}{d/c^2} = \frac{(E[r_w] - b/c)^2}{d/c^2} + 1,$$

con lo cual obtenemos la formula de la siguiente hipérbola:

$$\frac{\sigma^2[r_w]}{1/c} - \frac{(E[r_w] - b/c)^2}{d/c^2} = 1,$$

las pendientes de las dos asíntotas son  $\pm\sqrt{\frac{d}{c}}$  y el centro de la hipérbola es  $(0, \frac{b}{c})$ , entonces la asíntota está dada por:

<sup>8</sup> Siguiendo a Merton (1972).

$$E[r_w]_{ef} = \frac{b}{c} \pm \sqrt{\frac{d}{c}} \sigma[r_w].$$

Alternativamente, la relación (A.13) puede ser escrita como:

$$\sigma^2[r_w]_{ef} = \frac{1}{c} + \frac{(E[r_w] - b/c)^2}{d/c}, \quad (\text{A.15})$$

y la desviación estándar como<sup>9</sup>:

$$\sigma[r_w]_{ef} = \sqrt{\frac{1}{c} + \frac{(E[r_w] - b/c)^2}{d/c}}. \quad (\text{A.16})$$

### A.3. Portafolio óptimo de máxima utilidad

La portafolios de media-varianza también supone diferentes tipos de preferencias para los inversionistas y el objetivo de estos es maximizar su función de utilidad, donde la utilidad está dada por:

$$U = E[r_w] - \frac{1}{2} \gamma \text{Var}[r_w]. \quad (\text{A.17})$$

Así, la utilidad es una función del rendimiento esperado, la varianza y el parámetro de aversión absoluta al riesgo ( $\gamma$ ) y como su nombre lo indica, es una medida de aversión al riesgo de los inversionistas. Esto se verifica con facilidad, ya que en la función de utilidad, el parámetro que indica el riesgo, la varianza, aumenta cuando  $\gamma$  es mayor. Y debido a una mayor aversión al riesgo, resulta en una menor utilidad. El parámetro de aversión al riesgo absoluto se supone positivo, porque todos los inversionistas se asumen aversos al riesgo.

El portafolio óptimo para un inversionista es el portafolio con la máxima utilidad. La función de utilidad puede escribirse como:

$$U = w' \mu - \frac{1}{2} \gamma w' \Sigma w. \quad (\text{A.18})$$

Graficamente, el portafolio con la máxima utilidad se obtiene desplazando la curva tan alto como sea posible. La curva de utilidad es la curva que muestra las posibles combinaciones de media y desviación estándar que dan como resultado la misma utilidad<sup>10</sup>. Debido a la ecuación anterior, la curva está dada por:

---

<sup>9</sup>La caracterización de la frontera eficiente estimada por las ecuaciones A.11 y A.16 es similar a la caracterización de la frontera eficiente en ausencia de activo libre de riesgo de Huang y Litzenberger (1988).

<sup>10</sup>Para un explicación más amplia ver Levy y Markowitz (1979).

$$E[r_w] = U - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2[r_w]. \quad (\text{A.19})$$

La cual es una parábola en el espacio  $(\sigma^2[r_w], E[r_w])$ .

En orden de calcular el portafolio óptimo de máxima utilidad, se debe maximizar la utilidad sujeta a la restricción presupuestaria:

$$\begin{aligned} \max_{w \in R^N} \quad & w'\mu - \frac{1}{2}\gamma w'\Sigma w \\ \text{s.a} \quad & w'1_N = 1. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\left. \begin{aligned} \mu - \gamma\Sigma w + \lambda 1_N &= 0, \\ w'1_N - 1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.21})$$

Usando álgebra matricial, el sistema de ecuaciones lineales formado por A.21 es representado como:

$$\begin{bmatrix} \gamma\Sigma & 1_N & -\mu \\ 1'_N & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \lambda \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ó

$$A_{opt}\lambda_{opt} = B_{opt},$$

donde

$$A_{opt} = \begin{bmatrix} \gamma\Sigma & 1_N & -\mu \\ 1'_N & 0 & 0 \end{bmatrix}, \lambda_{opt} = \begin{bmatrix} w \\ \lambda \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } B_{opt} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La solución para  $\lambda_{opt}$  es entonces:

$$\lambda_{opt} = A_{opt}^{-1}B_{opt}. \quad (\text{A.22})$$

El primer elemento de  $\lambda_{opt}$  son los pesos del portafolio  $w$  para el portafolio óptimo de máxima utilidad con rendimiento esperado  $E[r_w]_{opt}$  y aversión al riesgo  $\gamma_{opt}$ . Si  $E[r_w]_{opt}$  es mayor o igual que el rendimiento esperado en el portafolio de frontera eficiente de mínima varianza, entonces  $w$  es un portafolio eficiente.

Para obtener una solución más explícita considere las condiciones de primer orden para el problema de optimización. Usando la primera condición de A.21 resolvemos para  $w$ :

$$w = \frac{\Sigma^{-1}\mu}{\gamma} + \frac{\lambda\Sigma^{-1}1_N}{\gamma}. \quad (\text{A.23})$$

Para poder encontrar el valor de  $\lambda$ , premultiplicamos [A.23](#) por  $1'_N$  y usando la segunda condición de [A.21](#) obtenemos:

$$1 = 1'_N w = \frac{1'_N \Sigma^{-1} \mu}{\gamma} + \frac{1'_N \Sigma^{-1} 1_N \lambda}{\gamma}.$$

Aplicamos los elementos  $b$  y  $c$  de la matriz  $V$ , los cuales fueron definidos en sesiones previas y obtenemos:

$$1 = \frac{b}{\gamma} + \frac{c\lambda}{\gamma}.$$

La solución para  $\lambda$  es:

$$\lambda = \frac{\gamma - b}{c}. \quad (\text{A.24})$$

Sustituyendo [A.24](#) en [A.23](#) obtenemos una expresión explícita para los pesos del portafolio óptimo de máxima utilidad:

$$w_{opt} = \frac{1}{\gamma} \Sigma^{-1} \left[ \mu + 1_N \left[ \frac{\gamma - b}{c} \right] \right], \quad (\text{A.25})$$

que son las cantidades que un inversionista debe invertir en cada activo si desea maximizar su utilidad.

Esta solución óptima para  $w_{opt}$  es un vector  $N \times 1$  y es fácilmente implementado debido a que es una solución analítica. En esta versión del problema de portafolios de media-varianza de Markowitz, especificamos  $\gamma$ , mientras que en el problema estándar especificamos  $E[r_w]$ . Por su puesto, hay una correspondencia de uno a otro.

Podemos trazar la frontera eficiente de media-varianza eligiendo diferentes valores para  $\gamma > 0$  y resolver el problema. Conociendo el coeficiente de aversión al riesgo  $\gamma$  para cada inversionista implica el punto de frontera que maximiza la utilidad de media-varianza.

Los valores correspondientes para  $E[r_w]_{opt}$  y  $\sigma^2[E_w]_{opt}$  son:

$$E[r_w]_{opt} = \frac{b}{c} + \frac{d}{c\gamma}, \quad (\text{A.26})$$

y

$$\sigma^2[r_w]_{opt} = \frac{1}{c} + \frac{d}{c\gamma^2}. \quad (\text{A.27})$$

La desviación estándar para el portafolio óptimo  $w_{opt}$  es:

$$\sigma[r_w]_{opt} = \sqrt{\frac{1}{c} + \frac{d}{c\gamma^2}}. \quad (\text{A.28})$$





---

# Programas MATLAB

---

Este apéndice muestra los programas de MATLAB utilizados en este trabajo para calcular los portafolios óptimos que usan PCSO/PSD. El paquete SDPT3 debe instalarse en la computadora para resolver el PCSO/PSD. El paquete YALMIP debería estar instalado para implementar con éxito el paquete SDPT3. El paquete dailyDataSuite debe estar instalado para obtener las cotizaciones diarias a través de Google Finance. Con estos paquetes instalados, los siguientes programas deberían funcionar.

```
1 close all; clc;
2 format short
3 %%
4 % Se define la carpeta de trabajo
5 % path= 'C:\Users\Edgar Ren Benavidez\Documents\MATLAB'
6 % cd 'C:\Users\Edgar Ren Benavidez\Documents\MATLAB'
7 % addpath(genpath('C:\Users\Edgar Ren Benavidez\Documents\MATLAB'));
8 %
9 % A través de la página de MathWorks se descargó el toolbox
10 % dailyDataSuite que permitiera descargar las cotizaciones diarias a
11 % través de Google Finance y se guarda en la carpeta de trabajo.
12 % url: https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/43627-...
13 %     download-daily-data-from-google-and-yahoo--finance
14 %%
15 % Se abre un archivo lst que contiene los nombres de las acciones que
16 % conforman el portafolio.
17 Asset = textscan(fopen('portafolio.lst'), '%s');
18 fclose('all');
19 Asset=Asset{1};
20
21 % Fecha del día de hoy de los precios de las acciones a descargar con
22 % formato de la salida (24) que representa las fechas.
23 %endDate=datestr(now,24);
24 endDate='31/12/2017';
25
26 % Se descargan las cotizaciones diarias a través de google finance
27 [data,dividends]=getGoogleDailyData(Asset,'01/01/2000', endDate,...
28     'dd/mm/yyyy');
```

## B. PROGRAMAS MATLAB

---

```
29
30 % Se crean los objetos de series de tiempo financieras con los ...
    precios de
31 % cierre ajustados.
32 stock={};
33 for i=1:length(Asset)
34     for part = fieldnames(data)
35         for bone = fieldnames(data.(part{i}))
36             t = ~isnan(data.(part{i}).(bone{7}));
37             a =data.(part{i}).(bone{7})(t);
38             data.(part{i}).(bone{7}) = a(cumsum(t));
39             quotes = fints(data.(part{i}).(bone{1}), ...
40                 data.(part{i}).(bone{7}),part{i}, [],Asset{i});
41             stock{i}=quotes;
42         end
43     end
44 end
45
46 % Fusionar multiples objetos de series de tiempo financieras
47 quotes = merge(stock{:}, 'DateSetMethod', 'Intersection');
48 % Convertir a matriz, incluyendo sin vector de fechas
49 quomat = fts2mat(quotes,0);
50 % Conveter las series de tiempo de cotizaciones a series de rendimientos
51 returns = tick2ret(quomat, [], 'Continuous');
52 % Lista de los nombre de los activos
53 Asset=Asset';
54 % Vector de rendimientos medios
55 mu = mean(returns, 'omitnan');
56 % Matriz de covarianzas
57 sigma = cov(returns,1, 'partialrows');
58 %Borrar variables temporales
59 clearvars a ans bone i part t;
```

```
1 function [w] = rgop(T, mu, sigma, epsilon)
2 %% Esta funcion determina el portafolio robusto de crecimiento optimo
3 % Parametos de entrada:
4 %     T         - numero de periodos en el tiempo
5 %     mu        - el vector de rendimientos medios de los activos
6 %     sigma     - la matriz de covarianzas de los rendimientos de los
7 %               activos
8 %     epsilon   - probabilidad de violacion
9 % Parametros de salida:
10 %     w         - portafolio robusto de crecimiento optimo
11 %%
12 % Descargar script que facilita la instalacion de algunos toolboxes
13 % urlwrite('http://www.tbxmanager.com/tbxmanager.m','tbxmanager.m');
14 % tbxmanager
15 % savepath
16 %
17 % Se instalan alguno toolboxes usando tbxmanager
18 % tbxmanager install yalmip sedumi
19 %
```

---

```

20 % Descargar sdpt3
21 % urlwrite('http://www.math.nus.edu.sg/~Emattohkc/SDPT3-4.0.zip')
22 % unzip('SDPT3-4.0.zip','SDPT3-4.0')
23 % addpath(genpath([pwd filesep 'SDPT3-4.0']));
24 % savepath
25 % Instalar sdpt3
26 % Installmex(1)
27 % Iniciar sdpt3
28 % startup
29 % sqlpdemo
30 %%
31 startup
32 n      = length(mu);           % define numero de activos
33 w      = sdpvar(n,1);         % pesos del portafolio
34 rp     = w'*mu;               % media del portafolio
35 sigmap = sqrt(w'*sigma*w);    % desviacion estandar del portafolio
36 constraints = [w ≥ 0];        % evitar la venta en corto
37 constraints = [constraints, sum(w) == 1]; % restriccion presupuestaria
38 % el peor caso de valor en riesgo
39 wcvar = 1/2*(1 - (1 - rp + sqrt((1-epsilon)/epsilon/T)*sigmap)^2 -...
40         ((T-1)/epsilon/T)*sigmap^2);
41 % maximizar WCVaR
42 ops = sdpsettings('solver','sdpt3','verbose',0);
43 solvesdp(constraints, -wcvar, ops);
44 % pesos del portafolio
45 w = double(w);
46
47 r_p=mu'*w;
48 S_p=(sqrt(w'*sigma*w));
49 end

```

---



## Bibliografía

---

- Alexander, G. J. y Baptista, A. M. (2002). Economic Implications of Using a Mean-VaR Model for Portfolio Selection: A Comparison with Mean-Variance Analysis. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 26(7):1159–1193.
- Alexander, G. J. y Baptista, A. M. (2011). Portfolio Selection with Mental Accounts and Delegation. *Journal of Banking & Finance*, 35(10):2637–2656.
- Alexander, G. J., Baptista, A. M., y Yan, S. (2017). Portfolio Selection with Mental Accounts and Estimation Risk. *Journal of Empirical Finance*, 41:161–186.
- Alfaro Cid, E., Baixauli Soler, J. S., y Fernandez Blanco, M. O. (2010). Minimizing value-at-risk in a portfolio optimization problem using a multiobjective genetic algorithm.
- Algoet, P. H. y Cover, T. M. (2011). Asymptotic Optimality and Asymptotic Equipartition Properties of Log-Optimum Investment. In *The Kelly Capital Growth Investment Criterion: Theory and Practice*, pages 157–179. World Scientific.
- Balbás, A., Balbás, B., y Balbás, R. (2010). Capm and apt-like models with risk measures. *Journal of Banking & Finance*, 34(6):1166–1174.
- Baptista, A. M. (2012). Portfolio Selection with Mental Accounts and Background Risk. *Journal of banking & Finance*, 36(4):968–980.
- Baumol, W. J. (1963). An Expected Gain-Confidence Limit Criterion for Portfolio Selection. *Management science*, 10(1):174–182.
- Benati, S. y Rizzi, R. (2007). A mixed integer linear programming formulation of the optimal mean/value-at-risk portfolio problem. *European Journal of Operational Research*, 176(1):423–434.
- Berkelaar, A. B., Kouwenberg, R., y Post, T. (2004). Optimal portfolio choice under loss aversion. *Review of Economics and Statistics*, 86(4):973–987.
- Black, F. (1972). Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing. *The journal of business*, 45(3):444–455.

## BIBLIOGRAFÍA

---

- Breiman, L. (1961). Optimal Gambling Systems for Favorable Games. In *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Volume 1: Contributions to the Theory of Statistics*, pages 65–78, Berkeley, Calif. University of California Press.
- Charpentier, A. y Oulidi, A. (2009). Estimating allocations for value-at-risk portfolio optimization. *Mathematical Methods of Operations Research*, 69(3):395.
- Cont, R. (2001). Empirical Properties of Asset Returns: Stylized Facts and Statistical Issues. *Quantitative Finance*, 1(2):223–236.
- Cootner, P. (1964). The Random Character of Stock Market Price.
- Dallagnol, V., van den Berg, J., y Mous, L. (2009). Portfolio management using value at risk: A comparison between genetic algorithms and particle swarm optimization. *International Journal of Intelligent Systems*, 24(7):766–792.
- Daniélsson, J., Jorgensen, B. N., de Vries, C. G., y Yang, X. (2008). Optimal portfolio allocation under the probabilistic var constraint and incentives for financial innovation. *Annals of Finance*, 4(3):345–367.
- Das, S., Markowitz, H., Scheid, J., y Statman, M. (2010). Portfolio Optimization with Mental Accounts. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 45(2):311–334.
- Das, S., Markowitz, H., Scheid, J., y Statman, M. (2011). Portfolios for Investors Who Want to Reach Their Goals While Staying on the Mean–Variance Efficient Frontier. *The Journal of Wealth Management*, 14(2):25–31.
- Das, S. R. y Statman, M. (2013). Options and Structured Products in Behavioral Portfolios. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 37(1):137–153.
- De Giorgi, E. G. et al. (2009). *Goal-based investing with cumulative prospect theory and satisficing behavior*. Department of Economics, Univ.
- de la Torre, H. J. C. (2016). Identificación de Ciclos Financieros en Tiempo Real para el IPC Mediante la Red Neuronal Artificial LVQ . Tesis de Maestría, UNAM, Facultad de Ingeniería, <http://132.248.9.195/ptd2016/septiembre/515007408/Index.html>.
- De Santiago, R. y Estrada, J. (2011). Geometric Mean Maximization: Expected, Observed, and Simulated Performance. *Observed, and Simulated Performance*.
- Dempster, M., Evstigneev, I. V., y Schenk-Hoppe, K. R. (2008). Financial Markets. The Joy of Volatility. *Quantitative Finance*, 8(1):1–3.
- Ethier, S. N. (2004). The Kelly System Maximizes Median Fortune. *Journal of Applied Probability*, 41(4):1230–1236.
- Gaivoronski, A. A. y Pflug, G. (2005). Value-at-risk in portfolio optimization: properties and computational approach. *Journal of risk*, 7(2):1–31.

- García, G. E. K. (2012). Estudio de Ciclos Económicos Utilizando Análisis en Tiempo y Frecuencia de Series de Tiempo en el Caso de México. Tesis de Maestría, UNAM, Facultad de Ingeniería, <http://132.248.9.195/ptd2012/noviembre/098051267/Index.html>.
- Ghaoui, L. E., Oks, M., y Oustry, F. (2003). Worst-Case Value-at-Risk and Robust Portfolio Optimization: A Conic Programming Approach. *Operations research*, 51(4):543–556.
- Gilli, M. y Küllezi, E. (2002). A global optimization heuristic for portfolio choice with var and expected shortfall. In *Computational methods in decision-making, economics and finance*, pages 167–183. Springer.
- Gilli, M., Küllezi, E., y Hysi, H. (2006). A data-driven optimization heuristic for downside risk minimization.
- Goh, J. W., Lim, K. G., Sim, M., y Zhang, W. (2012). Portfolio value-at-risk optimization for asymmetrically distributed asset returns. *European Journal of Operational Research*, 221(2):397–406.
- Hakansson, N. H. (1971). Capital Growth and the Mean-Variance Approach to Portfolio Selection. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 6(1):517–557.
- Hakansson, N. H. y Miller, B. L. (1975). Compound-Return Mean-Variance Efficient Portfolios Never Risk Ruin. *Management Science*, 22(4):391–400.
- Huang, C. y Litzenberger, R. (1988). *Foundations for Financial Economics*. North-Holland.
- Jiang, C., Ma, Y., y An, Y. (2013). International Portfolio Selection with Exchange Rate Risk: A Behavioural Portfolio Theory Perspective. *Journal of Banking & Finance*, 37(2):648–659.
- Kahneman, D. y Tversky, A. (1979). Prospect theory: An analysis of decision under risk. *Econometrica*, 47(2):263–291.
- Kelly Jr, J. L. (1956). A New Interpretation of Information Rate. *Bell System Technical Journal*, page 917–926.
- Kolm, P. N., Tütüncü, R., y Fabozzi, F. J. (2014). 60 years of portfolio optimization: Practical challenges and current trends. *European Journal of Operational Research*, 234(2):356–371.
- Krokhmal, P., Zabarankin, M., y Uryasev, S. (2013). Modeling and optimization of risk. In *Handbook Of The Fundamentals Of Financial Decision Making: Part II*, pages 555–600. World Scientific.
- Latane, H. A. (1959). Criteria for Choice Among Risky Ventures. *Journal of Political Economy*, 67(2):144–155.



## BIBLIOGRAFÍA

---

- Levy, H. y Markowitz, H. M. (1979). Approximating Expected Utility by a Function of Mean and Variance. *The American Economic Review*, 69(3):308–317.
- Löfberg, J. (2004). Yalmip : A toolbox for modeling and optimization in matlab. In *In Proceedings of the CACSD Conference*, Taipei, Taiwan.
- Lopes, L. L. (1987). Between Hope and Fear: The Psychology of Risk. *Advances in experimental social psychology*, 20:255–295.
- Lopes, L. L. y Oden, G. C. (1999). The Role of Aspiration Level in Risky Choice: A Comparison of Cumulative Prospect Theory and SP/A Theory. *Journal of mathematical psychology*, 43(2):286–313.
- Luenberger, D. G. (1998). *Investment Science*. Oxford University Press.
- Malfavón, R. Y. (2013). Estudio de Cambios Estructurales Asociados a Puntos de Inflexión en Series Financieras . Tesis de Maestría, UNAM, Facultad de Ingeniería, <http://132.248.9.195/ptd2013/noviembre/0704874/Index.html>.
- Mandelbrot, B. B. y Stewart, I. (1998). Fractals and Scaling in Finance. *Nature*, 391(6669):758–758.
- Mansini, R., Ogryczak, W., y Speranza, M. G. (2007). Conditional value at risk and related linear programming models for portfolio optimization. *Annals of operations research*, 152(1):227–256.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *Journal of Finance*, 7(1):77–91.
- Markowitz, H. (1959). Return in the long run. In *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments, 2nd ed*, pages 116–128. Cowles Foundation Monograph No .16, New York.
- Merton, R. C. (1972). An Analytic Derivation of the Efficient Portfolio Frontier. *Journal of financial and quantitative analysis*, 7(4):1851–1872.
- Mood, Alexander M., G. F. A. B. D. C. (1975). *Introduction to the Theory of Statistics*. New York: McGraw Hill.
- Natarajan, K., Pachamanova, D., y Sim, M. (2008). Incorporating asymmetric distributional information in robust value-at-risk optimization. *Management Science*, 54(3):573–585.
- Nava, P. L. R. (2014). Implementación del Filtro de Kalman para Pronosticar los Rendimientos del Índice de Precios y Cotizaciones . Tesis de Maestría, UNAM, Facultad de Ingeniería, <http://132.248.9.195/ptd2014/mayo/512007124/Index.html>.
- Nevins, D. (2004). Goals-based investing: Integrating traditional and behavioral finance. *The Journal of Wealth Management*, 6(4):8–23.

- Popescu, I. y Bertsimas, D. (2000). *Moment Problems via Semidefinite Programming: Applications in Probability and Finance*. INSEAD.
- Roll, R. (1973). Evidence on the “Growth-Optimum” Model. *The Journal of Finance*, 28(3):551–566.
- Roy, A. D. (1952). Safety First and the Holding of Assets. *Econometrica: Journal of the econometric society*, pages 431–449.
- Rubinstein., M. (1991). Continuously Rebalanced Investment Strategies. Research Program in Finance Working Papers RPF-205, University of California at Berkeley.
- Rujeerapaiboon, N., Kuhn, D., y Wiesemann, W. (2015). Robust Growth-Optimal Portfolios. *Management Science*, 62(7):2090–2109.
- Sharpe, W. F., Alexander, G. J., y Bailey, J. V. (1999). *Investments*, volume 6. Prentice-Hall Upper Saddle River, NJ.
- Shefrin, H. y Statman, M. (2000). Behavioral Portfolio Theory. *Journal of financial and quantitative analysis*, 35(2):127–151.
- Siebenmorgen, N., Weber, M., et al. (2003). A behavioral model for asset allocation. *Financial Markets and Portfolio Management*, 17(1):15–42.
- Telser, L. G. (1955). Safety First and Hedging. *The Review of Economic Studies*, 23(1):1–16.
- Thaler, R. H. (1999). Mental Accounting Matters. *Journal of Behavioral decision making*, 12(3):183.
- Tobin, J. (1958). Liquidity Preference as Behavior Towards Risk. *The review of economic studies*, 25(2):65–86.
- Toh, K.-C., Todd, M. J., y Tütüncü, R. H. (1999). Sdpt3—a matlab software package for semidefinite programming. *Optimization methods and software*, 11(1-4):545–581.
- Véhel, J. L. y Walter, C. (2002). *Les Marchés Fractals*. Puf.
- Wozabal, D., Hochreiter, R., y Pflug, G. C. (2010). A difference of convex formulation of value-at-risk constrained optimization. *Optimization*, 59(3):377–400.