



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

“Propuesta para optimizar el inventario y la entrega
de medicamentos en una institución de salud
pública mexicana”

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

ACTUARIA

PRESENTA:

Venus Emperatriz Méndez Salazar

TUTORA:

Patricia Esperanza Balderas Cañas



Ciudad Universitaria, CDMX
2019



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Méndez

Salazar

Venus Emperatriz

56 53 28 36

Universidad Nacional Autónoma de

México

Facultad de Ciencias

Actuaría

310139050

2. Datos del tutor

Dra

Patricia Esperanza

Balderas

Cañas

3. Datos del sinodal 1

Dra

Claudia Orquídea

López

Soto

4. Datos del sinodal 2

M en IO

María del Carmen

Hernández

Ayuso

5. Datos del sinodal 3

M en I

Adrián

Girard

Islas

6. Datos del sinodal 4

Act

Claudia

Villegas

Azcorra

7. Datos del trabajo escrito.

“Propuesta para optimizar el inventario y la entrega de
medicamentos en una institución de salud pública mexicana”

108 p

2019

*Dedicado a
mi familia.*

Índice general

Introducción	1
1. Descripción del objeto de estudio	3
1.1. El Instituto Mexicano del Seguro Social	4
1.2. El Hospital	4
1.3. El Departamento de Abasto	4
1.4. La farmacia	5
2. Elementos teóricos	8
2.1. Optimización	8
2.2. Teoría de inventarios	9
2.2.1. Modelo del Lote Económico EOQ	10
2.2.2. Modelo del Lote Económico EOQ básico sin faltantes	10
2.2.3. Modelo del Lote Económico EOQ básico con faltantes planeados	15
2.2.4. Modelo Estocástico	18
2.3. Teoría de líneas de espera	24
2.3.1. Conceptos relevantes	24
2.3.2. Supuestos del modelo	28
2.3.3. Notación para el Modelo	28
2.3.4. Medidas de Desempeño del Modelo	28
2.3.5. Solución al Número ideal de servidores en el Modelo	39
2.4. Pronósticos	40
2.4.1. Promedios móviles	41
2.4.2. Suavización exponencial simple	44
2.4.3. Suavización exponencial con tendencia (Método de Holt)	45
2.4.4. Suavización exponencial con variación estacional (Método de Winter)	47
2.5. Pruebas de hipótesis	48
2.5.1. Inferencias sobre el valor de la media desconocida	49
2.5.2. Bondad de ajuste	50
2.5.2.1. Prueba de Kolmogorov Smirnov	50
2.6. Distribución beta	51
3. Metodología	54
3.1. Búsqueda de la información	55
3.1.1. Datos para el modelo de Inventarios	55
3.1.2. Datos para el modelo de Líneas de Espera	61
3.1.3. Forma de trabajo actual de la farmacia de la institución	62

3.2.	Aplicación de teoría de inventarios	62
3.2.1.	Construcción de los insumos	62
3.2.1.1.	Obtención de la demanda	62
3.2.1.2.	Obtención de costos	70
3.2.1.3.	Obtención del total de faltantes	71
3.2.1.4.	Obtención de tiempo de retraso	72
3.2.2.	Construcción de los modelos	72
3.2.3.	Resultados	73
3.2.3.1.	Presentación de cada modelo de inventarios	73
3.2.3.2.	Comparación de los modelos de inventarios	75
3.3.	Aplicación de teoría de líneas de espera	79
3.3.1.	Construcción de las tasa asociadas a los tiempos de llegada y de atención	79
3.3.1.1.	Obtención de la tasa media de llegadas	79
3.3.1.2.	Obtención de la tasa media de servicio	81
3.3.2.	Construcción del modelo	81
3.3.3.	Resultados	82
4.	Propuesta	84
4.1.	Sistema de Inventarios	84
4.2.	Sistema de líneas de espera	85
	Conclusiones	86
A.	Obteniendo Q^* y M^* para el modelo EOQ que permite faltantes	88
B.	Procedimiento alternativo para obtener una función de distribución sin considerar la normal	96
C.	Oficio del INAI 1	98
D.	Oficio del INAI 2	99
E.	Oficio del INAI 3	100
F.	Lista de 32 medicamentos	101
G.	Características de la demanda de los medicamentos	102
H.	Costo unitario de los medicamentos, por clave	103
I.	Función de densidad	104
J.	Probabilidad de que j sea mayor o igual a s	105
K.	Razón del suavizamiento exponencial	106
	Bibliografía	108

Introducción

Planteamiento del problema

En la actualidad el sector de salud pública en México enfrenta una problemática compleja con la distribución y existencia de medicamentos; dichos problemas pueden ser ocasionados por varios factores, como los procedimientos ineficaces de registro de medicamentos, la alta demanda de los medicamentos y la gestión ineficiente de los medicamentos en las instituciones entre otros. Este problema se ve reflejado en las distintas instituciones de salud, tanto públicas como privadas. En el siguiente trabajo se estudia específicamente la Unidad Médica de Alta Especialidad (UMAE) Hospital de Gineco-obstetricia número cuatro “Luis Castelazo Ayala” dependiente del Instituto Mexicano del Seguro Social (IMSS), ya que se contaba con la posibilidad de presentarse físicamente en su área de farmacia.

Objetivos

El objetivo general es dar una propuesta de mejora, buscando que se optimice el manejo y control del sistema de inventarios en la farmacia del hospital de algunos de los medicamentos más solicitados por los derechohabientes y la distribución de medicinas en general (atención a los pacientes de manera directa en la ventanilla de la farmacia) y así, no sólo facilitar el trabajo de quienes se encargan de este manejo sino, beneficiar al público usuario al poder aprovechar de forma más eficiente el tiempo que dedican a asistir por sus medicamentos.

Como objetivos específicos se consideran: encontrar los medicamentos que acumulan la mayor demanda para esta farmacia, describir el manejo actual utilizado por la farmacia para inventarios y distribución de medicamentos, definir los costos necesarios para los modelos a implementar, definir el tiempo que los servidores en la farmacia tienen de ocio, hallar el número esperado de clientes que esperan en la fila de la farmacia así como el tiempo esperado que un cliente está formado, implementar tres modelos de inventarios para cada medicamento de los más demandados de manera que, mediante la comparación de ellos, se obtenga el modelo que disminuya más los costos en que se incurre por manejo de inventario, y por último, generar un modelo de líneas de espera para la atención en ventanilla de la farmacia de forma que se minimicen los costos asociados a este rubro.

Preguntas de investigación

- ¿Cómo se maneja actualmente el inventario en la farmacia de la institución?
- ¿Cómo funciona la entrega de medicamentos a la institución?

- ¿Cómo se lleva a cabo el registro de medicamentos demandados en la farmacia de la institución?
- ¿Qué medicamentos cubren el 80% de la demanda total de la farmacia de la institución?
- ¿Cómo se maneja el sistema de líneas de espera de la farmacia de la institución?
- ¿Cuál es el tiempo medio que tarda un paciente en llegar tras de otro a la fila de la farmacia del hospital?
- ¿Cuál es el tiempo medio que tarda en ser atendido un paciente en la ventanilla de la farmacia del hospital?

Estructura por capítulos

En el primer capítulo se presenta la descripción del objeto de estudio, se detallan los antecedentes y la situación actual del Hospital; además, se explica la forma en que la farmacia de la institución administra los medicamentos y la forma en que se atiende a los derechohabientes en su ventanilla.

En el capítulo 2 se presentan los elementos teóricos necesarios para realizar el estudio: optimización, modelo de inventarios, modelo de líneas de espera, pronósticos, pruebas de hipótesis y la forma de utilizar la distribución beta para hacer aproximaciones.

En el capítulo 3, como paso inicial del estudio, se presenta la metodología utilizada: se explica cómo se obtuvo la información necesaria para realizar el trabajo además del procesamiento de estos datos, a continuación se describe los métodos de teoría de inventarios y de líneas de espera aplicados a nuestro problema en específico y, finalmente, se presenta una discusión de los resultados obtenidos en los modelos para así llegar al siguiente capítulo. En particular para los modelos de inventarios, se aplican tres modelos para obtener el costo asociado a cada uno y elegir el que genere el mínimo.

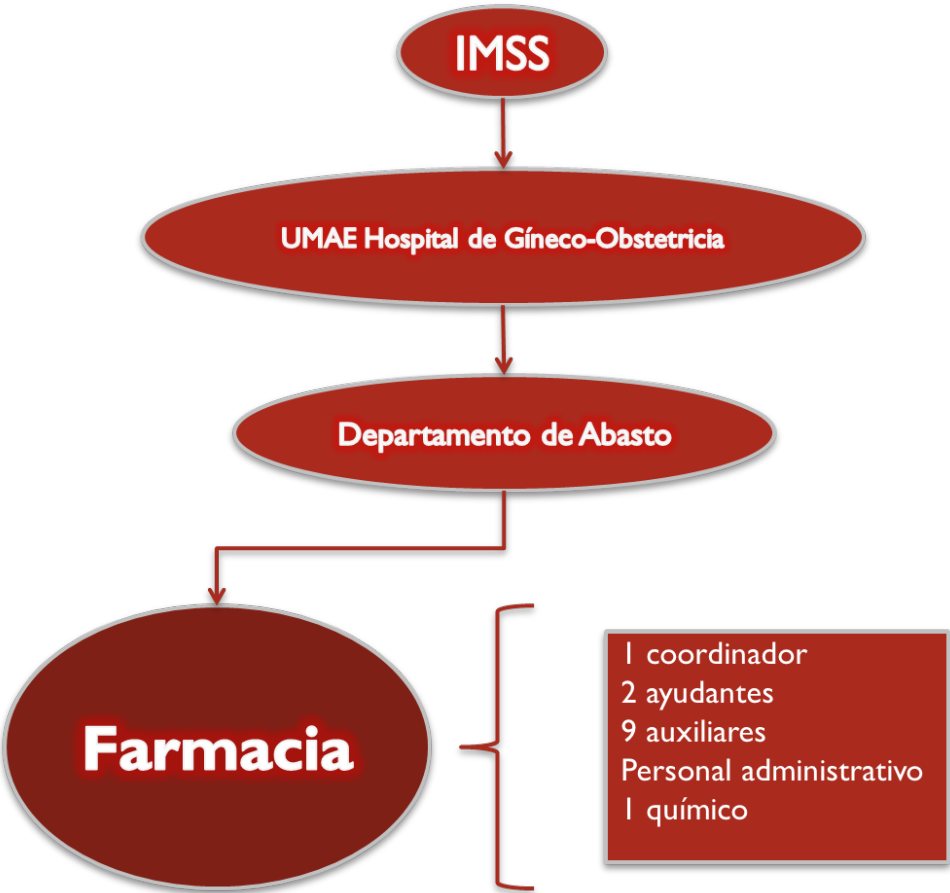
En el capítulo 4, se desarrolla una propuesta con el modelo de inventarios y el modelo de líneas de espera obtenidos.

Por último se muestran las conclusiones a las que se llegó en el proceso.

Capítulo 1

Descripción del objeto de estudio

Se estudió el área de farmacia del Hospital de Gineco-obstetricia Núm. 4 “Luis Castelazo Ayala”, dependiente del Instituto Mexicano del Seguro Social (IMSS). A continuación se describen brevemente la misión y objetivos del IMSS, los antecedentes y funciones del hospital en cuestión y las actividades que realiza la farmacia y su forma de trabajo referente a la administración del inventario y la distribución de medicamentos a los pacientes, así como la dependencia que tiene del Departamento de Abasto del hospital.



1.1. El Instituto Mexicano del Seguro Social

La seguridad social tiene por finalidad garantizar el derecho a la salud, la asistencia médica, la protección de los medios de subsistencia y los servicios sociales necesarios para el bienestar individual y colectivo, así como el otorgamiento de una pensión. El Instituto Mexicano del Seguro Social es una institución para la atención a la salud y la protección social de los mexicanos desde su fundación en 1943; combina la investigación y la práctica médica con la administración de los recursos para el retiro de sus asegurados; con la misión de ser el instrumento básico de la seguridad social, fomenta la salud de la población trabajadora asegurada y de sus familias, de los pensionados y de los estudiantes a través de la provisión de servicios médicos, de guarderías y de prestaciones económicas y sociales previstos en la Ley de Seguridad Social [10].

1.2. El Hospital

El Hospital de Gineco-obstetricia Núm. 4 “Luis Castelazo Ayala”, se constituyó originalmente como un hospital de tercer nivel de atención (empresa social, con funciones de asistencia, enseñanza e investigación; contando con personal especializado y con los medios técnicos para desarrollar actividades de promoción, protección, recuperación y rehabilitación de la salud, con orientación preventiva dirigida a la persona, familia y comunidad, con atención en servicios de emergencia, consulta y hospitalización las 24 horas durante todo el año); el 21 de enero de 2004, se dictó un acuerdo mediante el cual se autoriza la entrada en operación de la Unidad Médica de Alta Especialidad (UMAЕ) Hospital de Gineco-obstetricia “Luis Castelazo Ayala” como órgano de operación administrativa desconcentrada, con autonomía de gestión y con las atribuciones y facultades que el marco normativo institucional le conceden. Es encargado de atender a pacientes con riesgo elevado de presentar complicaciones y se especializa en ofrecer un servicio integral para la mujer sana, embarazada o con algún tipo de afección y en la prevención, diagnóstico y tratamiento de todo tipo de enfermedades ginecológicas, así como al control médico del embarazo [8].

1.3. El Departamento de Abasto

Dentro de la UMAЕ Hospital de Gineco-obstetricia “Luis Castelazo Ayala”, se encuentra el Departamento de Abasto, del cual depende el área de farmacia del hospital y el cual cumple, en particular, las siguientes funciones:

- Verificar y evaluar las solicitudes de compra, analizar su viabilidad y tramitar su adquisición.
- Efectuar la adquisición y suministro de los bienes de consumo.
- Supervisar en la Unidad los procesos de recepción, almacenaje, custodia y distribución de los bienes de consumo.
- Revisar y controlar los niveles de inversión de bienes de consumo en las áreas almacénarias.
- Efectuar un estricto control y registro de los bienes de consumo.

- Operar los sistemas automatizados IMSS-Farmacias e IMSS-Almacén de la Unidad.

1.4. La farmacia

La farmacia IMSS es la unidad almacenaria especializada en proporcionar el suministro de medicamentos a los derechohabientes y servicios de hospital de una Unidad Médica; su misión es apoyar a la actividad clínico-quirúrgica del hospital, añadiendo valor al proceso de atención a los pacientes mediante la utilización eficiente y segura de la farmacoterapia. Algunos de sus objetivos y funciones son las siguientes:

- Hacer que cada paciente reciba el medicamento correcto, en el momento oportuno y en la forma adecuada para el objetivo terapéutico perseguido.
- Contribuir a optimizar los costos de los medicamentos.
- Optimizar los recursos del Servicio de Farmacia.
- Mejorar continuamente la calidad y atención al cliente.
- Participar en la adquisición de medicamentos.
- Conservar, custodiar y dispensar medicamentos [17].

La farmacia hospitalaria de la UMAE Hospital de Gineco-obstetricia número cuatro “Luis Castelazo Ayala” se divide en 4 áreas: del Centro Automatizado de Distribución de Insumos Terapéuticos, de atención al público, de almacenaje de medicamentos y administrativa; dentro de ella laboran un coordinador, dos ayudantes, nueve auxiliares, personal administrativo y un químico.

El suministro de medicamentos es la base del funcionamiento de la farmacia en el hospital; éste inicia con la selección de medicamentos, continuando con los componentes logísticos de programación, adquisición y distribución de los medicamentos.

En particular el sistema que opera la farmacia inicia con el pedido de medicamentos basado en el Sistema de Abasto (SAI); tiene como objetivo integrar todas las acciones e información necesaria para garantizar el abasto de medicamentos y demás insumos necesarios para la operación y emite información que se utiliza para medir la eficacia en el abasto, comportamiento del consumo y mecanismos de control interno de los insumos.

Como primer paso para el reabasto, tras verificar que en el almacén de la farmacia no hay en existencia unidades del medicamento, se hace una consulta mediante un correo electrónico al Almacén Delegacional; en caso de haber existencias en éste, se realiza un traspaso y en caso contrario (después de recibir una respuesta indicando que no se tienen existencias para traspaso o la negativa de suministro) se prosigue con los siguientes pasos:

1. Se avisa al Responsable de Abastecimiento.
2. Se genera la orden en el “Módulo de Control de Compromisos SAI” (ahí se valida si hay presupuesto).

3. Se solicita la autorización de la orden de compra al Director Administrativo.
4. El Director Administrativo firma la “orden de compra de insumos” e instruye para que se adquieran los medicamentos en alguna farmacia abierta al público que otorgue facturas.
5. El responsable de abastecimiento recibe los medicamentos con la factura.
6. Él mismo registra los datos de la compra en el “Módulo de Control de Compromisos SAI”.
7. Además proporciona los medicamentos al personal de farmacia
8. El personal de farmacia registra los medicamentos y verifica el inventario en el SAI-Subsistema Farmacias.
9. Surte la receta individual y lo registra en el SAI-Subsistema Farmacias.
10. El Director Administrativo tramita la reposición del gasto por compra emergente.
11. El Responsable de Abastecimiento elabora un informe de compras emergentes a través del SAI [7].

Así concluyen los apartados de programación y adquisición de los medicamentos. A continuación se describe la forma en la que se realiza la distribución de éstos de la farmacia a los derechohabientes a través de la ventanilla:

La farmacia es atendida por todo el personal que se encuentra ahí, sin embargo al contar con sólo tres ventanillas se considera que hay tres servidores en posibilidades de atender a los pacientes que llegan y se forman en una unifila para esperar su turno. Al estar desocupada al menos una ventanilla, el paciente es atendido, tiempo durante el cual tiene que llenar sus datos en la receta adquirida de su doctor y tras esta acción entrega la receta al dependiente, quien, como se describió anteriormente, verifica que haya unidades en existencia y en caso de una respuesta afirmativa, se desplaza a los estantes correspondientes por el medicamento en cuestión; después el medicamento es entregado de manos del servidor al paciente que lo requirió, finalizando así la atención directa en ventanilla que contempla la distribución de los medicamentos.

Sistema de Abasto Institucional (SAI)

Finalmente, para complementar, se describe a grandes rasgos el Sistema de Abasto Institucional (SAI) que opera en el IMSS:

El “Sistema de Abasto Institucional” tiene como objetivo integrar todas las acciones e información necesaria para garantizar el abasto de medicamentos y demás insumos necesarios para la operación; emite información que se utiliza para medir la eficacia en el abasto, comportamiento del consumo y mecanismos de control interno de los insumos.

Se inició en el año 1999; es operado por el personal de Farmacia, Almacén y Coordinación de Abastecimientos con previa capacitación y puede ser consultado tanto por el personal operativo autorizado de dichas áreas como por la Alta Dirección; se cuenta con un servidor y dos estaciones de trabajo para atención en ventanilla en farmacia, una Terminal en la Dirección,

una en la Administración y la última en la Coordinación de Abastecimientos para consultar el comportamiento de los inventarios, estadísticas de consumo, medicamentos de mayor costo y mayor consumo entre otra información con la cual se toman decisiones y se generan acciones para garantizar el abasto de medicamentos. El almacén cuenta con un servidor conectado a la Red Institucional con el fin de que la información relacionada con el comportamiento de los inventarios, estadística de consumo y necesidades de material de curación y materiales diversos llegue al Almacén Delegacional de manera inmediata [9].

Capítulo 2

Elementos teóricos

Para entender y atacar el problema de la mejora en la eficiencia en la administración de inventarios y la distribución de medicamentos, se hizo uso de la teoría especializada de temas de optimización, como son la teoría de Inventarios y la teoría de Líneas de Espera; en añadido, se estudió teoría referente a pronósticos así como de pruebas de hipótesis y una descripción del uso de la distribución beta para simular un valor aproximado de los distintos datos necesarios para los modelos.

2.1. Optimización

El concepto de optimización es comúnmente usado para reforzar el análisis de toma de decisiones complejas. Su objetivo es maximizar (o minimizar) una función objetivo al involucrar la selección de valores para una serie de variables interrelacionadas buscando cuantificar el desempeño y medir la calidad de la decisión. Si un único aspecto adecuado de un problema puede aislarse y caracterizarse por un objetivo (ganancia o pérdida en un entorno empresarial, velocidad o distancia en un problema físico, retorno esperado en el entorno de inversiones arriesgadas o bienestar social en el contexto de la planificación del gobierno), la optimización puede proporcionar un marco adecuado para el análisis. Como no siempre es posible representar completamente todas las complejidades de las interacciones variables, las limitaciones y los objetivos apropiados cuando se enfrenta a un problema de decisión complejo, una formulación de optimización particular debe considerarse sólo como una aproximación. La optimización debe considerarse como una herramienta de conceptualización y análisis más que como un principio que arroja la solución correcta, pues la habilidad en el modelado, para capturar los elementos esenciales de un problema, y el buen juicio en la interpretación de los resultados son necesarios para obtener conclusiones significativas.

La optimización engloba dos tipos de problemas, la programación lineal y la programación no lineal, éstos a su vez se clasifican en dos distintos grupos, aquellos con restricciones y los que no las tienen.

El problema general de la programación matemática se formula como sigue:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f(x) \\ &\text{sujeto a} \\ &h_i(x) = 0 \text{ con } i = 1, \dots, M \end{aligned}$$

$$g_j(x) \leq 0 \text{ con } j = 1, \dots, P \\ x \in S$$

donde x es un vector n -dimensional: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$; f , h_i y g_j son funciones de valor real de las variables x_1, \dots, x_n , con f la función objetivo del problema y las otras igualdades y desigualdades, las restricciones, y S es un subconjunto del espacio n -dimensional.

Considerando que la farmacia tiene su almacén y, además, puede surtirse del almacén propio del hospital, podemos suponer que no existe restricción del espacio; por otro lado, dada la afirmación de que la demanda se satisface al 100%, se afirma que no hay restricción económica. Por todo lo anterior, este estudio se sustenta con elementos de programación no lineal sin restricciones.

Los problemas de programación lineal sin restricciones tienen la forma:

$$\text{minimizar } f(x)$$

donde x es un vector n -dimensional: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y f es una función de valor real.

En el caso particular de este trabajo, el espacio n -dimensional al que se hace referencia, es el conjunto de los números reales.

Ejemplo: Un problema común es la determinación de la mejor manera de combinar varios activos para maximizar una función de utilidad $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (en unidades monetarias) que depende de las cantidades x_i con $i = 1, 2, \dots, n$ y los precios unitarios de los activos son p_1, p_2, \dots, p_n . Así debe resolverse el problema de

$$\text{maximizar } f(x_1, x_2, \dots, x_n) - p_1x_1 - p_2x_2 - \dots - p_nx_n \\ \text{con } x_i \geq 0$$

Las condiciones necesarias son que las derivadas parciales sean cero, lo que se sigue de las n ecuaciones:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n) = p_i, \text{ con } i = 1, 2, \dots, n.$$

Lo que sirve para afirmar que el valor marginal debido a un pequeño incremento en el i -ésimo activo debe ser igual al precio p_i [14].

2.2. Teoría de inventarios

Un inventario es el número de existencias de bienes mantenidos por una entidad para su uso o para satisfacer la demanda en un futuro. El manejo de inventarios es necesario para cualquier compañía que trate con productos físicos. El propósito de la Teoría de Inventarios es determinar cuándo reabastecer el inventario y la cantidad necesaria y suficiente a pedir para minimizar los costos asociados con mantener dicho inventario y satisfacer la demanda del cliente, evitando el riesgo de no tener inventario suficiente para satisfacer los pedidos.

La administración de inventarios involucra los siguientes pasos:

1. Formular un modelo matemático que describa el comportamiento del manejo de inventarios, enfocándose en los costos asociados.
2. Buscar una política que se adapte al modelo.
3. Implementar un sistema de información computarizado para mantener el registro de los niveles de inventario.
4. Utilizar lo anterior para indicar cuándo y cuánto reabastecer el inventario.

Algunas características generales

Un modelo de inventarios se considera determinista si se requieren las unidades del producto a una tasa constante; es estocástico si no se conoce la cantidad exacta que se pedirá en un determinado lapso de tiempo, sin embargo se conoce la distribución y se hace uso de ella para establecer el total de unidades a pedir en una unidad de tiempo.

Un sistema de inventario es de revisión continua si el nivel de inventario se supervisa todo el tiempo, de modo que pueda colocarse otro pedido en cualquier momento. Debido a que los sistemas de procesamiento de información computarizados ahora se usan de forma amplia para supervisar los niveles de inventarios, los sistemas de revisión continua se han convertido cada vez más en los que se usan para sistemas de tamaño significativo.

Podemos dividir a los productos cuyo inventario se estudia en dos tipos, perecederos o Estocástico; los productos estables son aquellos que pueden venderse por tiempo indefinido, es decir, que al no ser perecederos no tienen un límite de tiempo para estar en inventario.

2.2.1. Modelo del Lote Económico EOQ

El modelo EOQ (modelo de lote económico) tiene como propósito principal elegir la cantidad a ordenar que resulte más económica, se aplica a la situación, que enfrentan, por ejemplo, los comerciantes, en la que los niveles de inventario se reducen con el tiempo y se reabastecen con la llegada de nuevas unidades, y fue introducido en 1913 por Ford W. Harris, un ingeniero de Westinghouse Corporation. Ha sido el modelo de inventario de mayor uso pues es de gran simplicidad y tiene una amplia aplicabilidad, además, aunque sus supuestos son exigentes y en la realidad rara vez se satisfacen completamente, se ha demostrado que lo normal es que proporcionen resultados muy cercanos al óptimo (aún cuando sus supuestos son una aproximación a la realidad). Es un modelo determinista y de revisión continua.

2.2.2. Modelo del Lote Económico EOQ básico sin faltantes

Supuestos del modelo básico sin faltantes con tiempo de entrega mayor a cero

- El pedido es repetitivo, es decir el pedido se hace de una manera regular.
- La demanda tiene una tasa constante

- La orden se puede realizar en cualquier momento o punto en el tiempo.
- El plazo de entrega es constante y mayor a cero.
- La cantidad a ordenar llega en un solo lote, una vez transcurrido el plazo de entrega.
- No se permiten faltantes planeados (No hay inventario negativo).
- El producto se puede almacenar indefinidamente.

Observación: Dado que la farmacia trabaja con medicamentos especializados (en ginecología), no permanecen en inventario por un lapso prolongado, aunado a ello, la caducidad de éstos es de por lo menos un año, por lo que podemos considerar que, para este estudio en particular, el último supuesto siempre se cumple.

Conceptos referentes al modelo

Se presentan a continuación los conceptos que se requieren para la construcción del modelo EOQ básico:

Demanda

La demanda de un producto es el número de unidades que se necesitan sacar del inventario para algún uso durante una unidad de tiempo específica. Para el modelo, se denota con D .

Si la demanda en periodos futuros se puede pronosticar con precisión se emplea una política de inventarios que suponga que la demanda es conocida y que el producto se retira de inventario a tasa constante.

Plazo de entrega

Es el tiempo transcurrido entre el instante en que se hace un pedido y el instante de la recepción del pedido. Se denota con la letra L y hace referencia a una fracción de la unidad de tiempo.

Deseamos elegir la cantidad a pedir y el momento en que lo haremos de manera que el costo asociado a dichas cantidades sea el mínimo posible, por ello, consideramos los costos involucrados en el proceso del manejo del inventario:

Costo de adquisición

Es el costo de reabastecer el inventario, puede ser unitario fijo (asociado con la compra de una sola unidad) o puede existir un descuento por volumen que reduce el costo de compra por unidad, por órdenes más grandes (en el caso de este estudio no existe esa posibilidad para la farmacia en cuestión, según nos informan); se denota c . Normalmente se incluyen los costos de materiales, mano de obra, maquinaria y utilidades del proveedor, y puede incluir los costos de envío.

Costo por ordenar

Costo de preparación para realizar reabastecimiento del inventario por comenzar el surtido nuevo (asociado con hacer un pedido); incluye costos administrativos, procesamiento de compra, recepción de orden, procesamiento de pago, etc. y se denota K , siendo éste el costo inicial. No depende del tamaño del pedido.

Costo por mantener

Se compone de los costos asociados con el mantenimiento de inventarios e involucra los gastos en los que se incurre al mantener una unidad en inventario una unidad de tiempo. Depende de los costos de almacenamiento, impuestos, seguridad, gastos financieros, los asociados a la devaluación de los artículos almacenados o bien su obsolescencia, además de costos de administración, de mano de obra, de capital invertido y sobre todo el costo de oportunidad. Lo denotamos con h .

A continuación se contruye una función de costo que dependerá de las unidades a pedir cada vez que se realiza una nueva orden de reabasto y se buscará la cantidad apropiada que minimice dicha función. Por último, con esa cantidad se establecerá en qué momento realizar la nueva orden, por medio del punto de reorden:

Punto de reorden

Nivel de inventario en el cual se coloca la orden. Nos dice en qué momento, respecto de las unidades de producto en existencia, se deben pedir más. Se denota con R .

Como la demanda decrece a tasa constante, conocer el punto de reorden es equivalente a conocer el momento en el tiempo en que debe hacer un nuevo pedido; siendo el momento en el tiempo en que se debe ordenar R/D unidades de tiempo antes de que acabe el ciclo (es decir $Q/D - R/D$ unidades de tiempo después de realizar la orden).

Solución al modelo EOQ básico sin faltantes

Buscamos minimizar costos, por lo que deseamos construir una función que represente al costo en que se incurre y que dependa de la cantidad a ordenar y del momento en que se ordena, sin embargo, dado que definir el tiempo, en este caso, es equivalente a definir el punto de reorden y este depende de la cantidad en existencia, que a su vez depende de la cantidad inicial, Q , la función que construimos dependerá únicamente de la cantidad a ordenar.

Primero se presentan algunas especificaciones:

Sea Q el número de unidades a pedir en una nueva orden de reabasto; se supone, el nivel de inventario inicial de Q unidades; dado que la demanda por unidad de tiempo es D y se piden Q unidades cada vez (y el nivel de inventario va disminuyendo en el tiempo a una tasa constante hasta que llegue a cero) el número de inicios de ciclo (momentos en que se realiza una orden de pedido) es:

$$\text{Inicios al año} = \frac{D}{Q}.$$

Además, dada la consideración de que el nivel máximo de inventario, en cada uno de los ciclos, es Q (y el mínimo es cero), el nivel promedio de inventario será:

$$\text{Nivel promedio de Inventario} = \frac{\text{nivel máximo} - \text{nivel mínimo}}{2} = \frac{Q}{2}$$

Costo total por unidad de tiempo

Considerando todo lo anterior, se llega a que, por unidad de tiempo, se incurre en los siguientes gastos:

- Costo de adquisición por unidad de tiempo:
 $c * \text{unidades agregadas al año} = cD$
- Costo por ordenar por unidad de tiempo:
 $K * \text{número de inicios anuales} = k \frac{D}{Q}$
- Costo por mantener por unidad de tiempo:
 $h * \text{número promedio de unidades en inventario en un año} = h \frac{Q}{2}$

Luego, el costo total está dado por:

$$TC(Q) = cD + k \frac{D}{Q} + h \frac{Q}{2} \quad (2.1)$$

Obteniendo la cantidad óptima Q^*

Dado que se desea minimizar el costo en que se incurre en un unidad de tiempo ($TC(Q)$), se procede de la manera común; se obtiene la derivada de la función objetivo y se iguala a cero, obteniendo así la cantidad óptima a pedir en una nueva orden de reabasto Q^* :

$$TC'(Q) = (cD + k \frac{D}{Q} + h \frac{Q}{2})' = -k \frac{D}{Q^2} + \frac{h}{2}$$

Luego:

$$TC'(Q) = 0 \iff -k \frac{D}{Q^2} + \frac{h}{2} = 0 \iff \frac{h}{2} = \frac{kD}{Q^2} \iff Q^2 = \frac{2kD}{h}$$

Por tanto

$$Q^* = \sqrt{\frac{2kD}{h}} \quad (2.2)$$

Observamos que $TC''(Q^*) = \frac{2kD}{Q^{*3}} > 0$, por lo que Q^* es un mínimo para la función objetivo $TC(Q)$.

Obteniendo el punto de reorden

Se obtiene el punto de reorden para saber en qué momento en el tiempo es conveniente hacer una orden de reabasto. Se consideran 2 casos, cuando la demanda durante el plazo de entrega no excede a la cantidad a ordenar y cuando sí la excede:

Caso 1. Demanda durante el plazo de entrega no excede a Q^*

Dado que L es el plazo de entrega, la demanda en ese periodo está dada por LD , esto significa que $LD \leq Q^*$.

Se desea que la nueva orden llegue justo cuando hay cero unidades en inventarios, por lo que se debe hacer un pedido al final del periodo en que disminuye el inventario LD unidades. En este caso el punto de reorden ocurre cuando el nivel de inventario es igual a LD (al llegar el pedido el nivel de inventario será $LD - LD = 0$).

Así

$$R^* = LD \quad (2.3)$$

Caso 2. Demanda durante el plazo de entrega excede a Q^*

Esto es, $LD > Q^*$.

Dado el supuesto de la cantidad inicial en el inventario es Q^* y que el nivel de inventario va decreciendo, jamás llegará a ser LD , así, el punto de reorden no puede ser nuevamente LD .

Como $LD > Q^*$, se tiene que $L > Q^*/D$, es decir, que el tiempo de retraso es mayor que la longitud del ciclo. Se observa que el tiempo en que se puede poner una nueva orden de manera que llegue cuando el nivel de inventarios es cero, debe ser el tiempo que tarda en disminuir el inventario LD unidades, pero eso ocurre después de LD/Q^* ciclos, es decir, se recorrerá un número de ciclos, representado por la parte entera de LD/Q^* y una fracción de ciclo, tras la cual se realizará la orden, por lo que el punto de reorden se encuentra en el residuo de la proporción LD/Q^* .

Es decir

$$R^* = \text{mod}(LD, Q^*) \quad (2.4)$$

donde " $\text{mod}(x,y)$ " es la función del software "Excel" que genera el residuo de dividir x entre y

En conclusión, debe pedirse Q^* unidades del producto en el momento en que haya R^* unidades en el inventario.

Ejemplo: Tim Madsen es el gerente de compras de Computer Center, una gran tienda de descuento de computadoras. Recientemente añadió la nueva computadora más popular, el modelo Power, a los bienes de la tienda. Las ventas de este modelo son cerca de 13 por semana. Tim compra estas computadoras directo al fabricante a un costo unitario de \$3000, donde cada entrega tarda media semana en llegar. Tim estima que el costo anual de mantener los productos en inventario es de \$600. También estima que el costo administrativo asociado con colocar las órdenes es \$75. Tim desea obtener la política de decisión adecuada para la cantidad a ordenar y el momento en que debe hacerlo [4].

Del problema, resumimos los datos siguientes por año:

- Dado que se venden 13 computadoras por semana, al año la demanda es de $D = 13 * 52 = 676$;
- El costo unitario es $c = 3000$ pesos;
- El tiempo de entrega es de media semana, es decir $L = \frac{1}{52 * 2} = \frac{1}{104}$ de año;
- El costo por ordenar es $K = 75$ pesos;
- El costo por mantener es $h = 600$ pesos.

Por tanto, la cantidad a ordenar es de $Q^* = \sqrt{\frac{2 * 75 * 676}{600}} = 13$, además el punto de reorden es

$$L * D = \frac{1}{104} * 676 \approx 7$$

Es decir, se deben pedir 13 unidades cada vez que se tenga en existencia 7 unidades en inventario. El momento en el tiempo en que se debe ordenar es $R^*/D = 7/676 = 0.0104$ (aproximadamente media semana).

Lo que costaría anualmente

$$TC(Q^*) = 3000(676) + 75 \frac{676}{13} + 600 \frac{13}{2} = 2,035,800 \text{ pesos.}$$

2.2.3. Modelo del Lote Económico EOQ básico con faltantes planeados

Es común que la demanda no se satisfaga a tiempo; cuando esto ocurre hay un desabasto por lo que se incurre en diversos costos; en general se busca que la demanda se satisfaga en su totalidad, sin embargo, hay algunos casos en que tiene sentido permitir cierta cantidad de faltantes planeados a priori, estos casos requieren que los clientes estén dispuestos a aceptar un retraso razonable en el surtido de sus pedidos y en tal caso, la administración esperaría que los costos en los que incurra a causa de esta situación, no sean excesivos. El modelo a estudiar ahora modifica al modelo anterior de manera que se tomen en cuenta dichos costos.

Supuestos del modelo básico con faltantes

- El pedido es repetitivo, es decir el pedido se hace de una manera regular.
- La demanda tiene una tasa constante
- La orden se puede realizar en cualquier momento o punto en el tiempo.
- El plazo de entrega es constante y mayor a cero.
- La cantidad a ordenar llega en un solo lote, una vez transcurrido el plazo de entrega.
- Se permiten faltantes planeados (Puede haber inventario negativo). Los clientes esperan la disponibilidad y la orden se surte en cuanto se cuenta con el producto.
- El producto se puede almacenar indefinidamente.

Conceptos referentes al modelo

A continuación se describen los datos necesarios para la construcción del modelo EOQ con faltantes: se enlistan nuevamente los insumos que requiere el modelo básico y se añade la descripción de uno nuevo.

Demanda

Plazo de entrega

Costo de adquisición

Costo por ordenar

Costo por mantener

Costo por faltantes

Es el costo en que se incurre cuando hay necesidad de retirar una unidad del inventario y no hay en existencia durante una unidad de tiempo, es decir, cuando la demanda de un comprador no puede ser satisfecha en el momento en que se requiere; lo denotamos con la letra p . Considera “pedidos pendientes”, es decir, unidades en espera de recibirse para ser entregadas (para los cuales hay un costo extra por su colocación extemporánea) y puede incluir: costo por pérdida de clientes, costo por pérdida de renombre, y en el caso particular de este trabajo, costo por pérdida de tiempo esperando un medicamento que no está disponible.

Solución al modelo EOQ básico con faltantes

Denotemos $Q - M$ a la cantidad máxima de faltantes planeados; así, se permite un nivel de inventario de $-(Q - M)$. Dado que se hace un pedido de Q unidades cada vez que se tiene un déficit de $M - Q$ unidades, se tendrá un nivel máximo de inventario de $(M - Q) + Q = M$ unidades.

El propósito del modelo es encontrar Q y M para los cuales el costo se minimice.

Costo total por unidad de tiempo

Algunas consideraciones previas

Como el nivel máximo de inventario es M , después de que son requeridas esas M unidades, se llega a un nivel de inventario cero, y como la demanda decrece a tasa constante, el punto donde ocurre esto es el M/D .

Consideramos un ciclo, al periodo comprendido entre cada nueva orden. Dado que la orden ocurre cuando el inventario decrece en $M + (Q - M) = Q$ unidades (el máximo número de existencias más el número máximo de faltantes planeados), se tiene que el punto en que se hace la primera orden es en Q/D (pues la demanda decrece a tasa constante), es decir, el ciclo tiene esa longitud.

El tiempo en que hay faltantes, es el periodo comprendido entre los puntos en que el inventario es cero, y en el que se han pedido $Q - M$ unidades, así, este periodo queda determinado por $Q/D - M/D = \frac{Q - M}{D}$.

Se calcularán los costos por unidad de tiempo, mediante el costo en que se incurre por cada

ciclo, y el número de ciclos que hay en un año (D/Q).

Considerando lo anterior, se llega a que, por unidad de tiempo, se incurre en los siguientes gastos:

- Costo de adquisición por unidad de tiempo:
 c * unidades agregadas al año = cD (análogo al modelo básico)
- Costo por ordenar por unidad de tiempo:
 k * número de inicios anuales = $k \frac{D}{Q}$ (análogo al modelo básico)
- Costo por mantener por unidad de tiempo:
 h * número promedio de unidades en inventario en un ciclo * $\frac{D}{Q} = h * \left(\frac{M}{2} * \frac{M}{D}\right) * \frac{D}{Q} = \frac{M^2 h}{2Q}$
- Costo por faltantes por unidad de tiempo:
 p * unidades faltantes en un ciclo * $\frac{D}{Q} = p * \left(\frac{Q-M}{2} * \frac{Q-M}{D}\right) * \frac{D}{Q} = \frac{(Q-M)^2 p}{2Q}$

Luego, el costo total viene dado por:

$$TC(Q, M) = cD + k \frac{D}{Q} + \frac{M^2 h}{2Q} + \frac{(Q-M)^2 p}{2Q} \quad (2.5)$$

Obteniendo la cantidad óptima Q^*

Dado que se desea minimizar el costo en que se incurre en una unidad de tiempo ($TC(Q, M)$), se procede de la manera común; se obtienen las derivadas parciales de la función objetivo y se igualan a cero (Véase A), obteniendo así la cantidad óptima a pedir en una nueva orden de reabasto Q^* y la cantidad máxima de faltantes permitidos $Q^* - M^*$:

$$Q^* = \left(\frac{h+p}{p}\right)^{1/2} \left(\frac{2kD}{h}\right)^{1/2} \quad (2.6)$$

$$M^* = \left(\frac{p}{h+p}\right)^{1/2} \left(\frac{2kD}{h}\right)^{1/2}$$

Así, el nivel máximo óptimo de faltantes está dado por

$$Q^* - M^* = \left(\frac{h+p}{p}\right)^{1/2} \left(\frac{2kD}{h}\right)^{1/2} - \left(\frac{p}{h+p}\right)^{1/2} \left(\frac{2kD}{h}\right)^{1/2} \quad (2.7)$$

Ejemplo: Reconsidere el problema de la sección anterior. Debido a la popularidad de la computadora Power, Tim Madsen ha comprobado que los clientes están dispuestos a comprar una computadora aun cuando no se tenga en inventario siempre que se les asegure que la tendrán en un periodo razonable. Por lo tanto, ha decidido cambiar del modelo EOQ básico al EOQ con faltantes planeados, con base en un costo por faltantes de 200 dólares por computadora [4].

Ahora tenemos los siguientes datos:

- $D = 676$;
- $c = 3000$;
- $L = \frac{1}{104}$;
- $K = 75$;
- $h = 600$.
- $p = 200$

Por tanto, la cantidad a ordenar es de $Q^* = \sqrt{\frac{2 * 75 * 676}{600} * \frac{600 + 200}{200}} = 26$, además el nivel máximo de faltantes es de $Q^* - M^* = Q^* - \sqrt{\frac{2 * 75 * 676}{600} * \frac{600}{600 + 200}} \approx 15$

Es decir, se deben pedir 13 unidades cada vez que falten en inventario 15 unidades, es decir, se hayan pedido 15 computadoras y no se hayan podido entregar inmediatamente.

Lo que costaría anualmente

$$TC(Q^*, M^*) = 3000(676) + 75 \frac{676}{26} + 600 \frac{126,75}{2 * 26} + 200 \frac{15}{2 * 26} = 2031469,2$$

pesos

2.2.4. Modelo Estocástico

Si se desconoce cuándo los clientes acuden por algún artículo, se tiene una situación de incertidumbre respecto a la demanda de ese nuevo artículo; cuando la demanda cambia conforme el tiempo transcurre, el problema de planeación del inventario asociado, se dice que es dinámico y para estas situaciones, se requiere hacer alguna clase de pronósticos sobre la demanda esperada y la variabilidad que podría presentar.

Una consecuencia importante de tener incertidumbre en la demanda es que se tiene un gran riesgo de incurrir en faltantes, a menos que se maneje cuidadosamente el inventario. Se necesita colocar una orden de reabastecimiento del inventario antes de agotarse, debido principalmente al retraso en el suministro; sin embargo, si se reabastece demasiado inventario demasiado pronto, se paga un costo alto por mantener un inventario grande; por ello, frecuentemente se busca el mejor intercambio entre las consecuencias de tener demasiado y escaso inventario.

Modelo (R,Q)

Está basado en dos variables: R el punto de reorden y Q la cantidad a ordenar. Cada vez que el nivel de inventario baja a R unidades, se coloca una orden de Q unidades para reabastecer el inventario. En este caso, como la demanda no disminuye a tasa constante, debemos sólo considerar las unidades con que contamos, y no el momento en el tiempo, para realizar una nueva orden.

La idea se explica más claramente si se piensa en un sistema de dos contenedores, las unidades totales de inventario se colocan dentro de ellos, la característica del primer contenedor es que tiene capacidad R ; así, del segundo contenedor que tiene el sobrante se comienzan a sacar las unidades según sean demandadas, y la nueva orden se hará cuando este contenedor quede vacío, pudiéndose ocupar las unidades del primer contenedor en el tiempo de entrega.

Supuestos del modelo (R,Q)

- Sólo se modela el comportamiento de un producto estable.
- El nivel de inventario está bajo revisión continua, por lo que su valor actual siempre se conoce.
- Las únicas decisiones que se toman son los valores de R y Q .
- Hay un tiempo de entrega entre colocar la orden y recibirla, L (constante).
- La demanda durante el tiempo de entrega es incierta, pero se conoce su distribución de probabilidad.
- Si ocurre un faltante antes de recibir un pedido, este se vuelve “pedido pendiente” y se surte cuando llega la orden.
- El producto se puede almacenar indefinidamente.

Conceptos referentes al modelo

Para este nuevo modelo se describen a continuación los datos que son requeridos para su construcción, se conservan las definiciones anteriores excepto la de la demanda y se agrega el concepto de nivel de servicio:

Demanda

Para este caso la demanda es aleatoria y se debe contar con su función de distribución, por lo que tendremos ahora que D es una variable aleatoria que tiene una media $E[D]$ y una varianza $var(D)$.

Plazo de entrega

Costo de adquisición

Costo por ordenar

Costo por mantener

Costo por faltantes

Tiempo de entrega

Nivel de servicio

Es la probabilidad deseada por la administración de que no ocurra un faltante entre el tiempo en que se coloca una orden y en que se recibe. Lo denotamos por T .

Solución al modelo estocástico

Inicialmente definimos variables que nos servirán de apoyo en la obtención de los parámetros:

- c_B = Costo generado por cada faltante.
- $OHI(t)$ = Inventario disponible en el tiempo t .
- $B(t)$ = Cantidad de pedidos pendientes en el tiempo t .
- $I(t)$ = Nivel neto de existencias en el tiempo t : $OHI(t) - B(t)$.
- B_R = Variable aleatoria que representa el agotamiento de existencias o pedidos pendientes durante un ciclo, si R es el punto de reabasto.
- D_1 = Variable aleatoria que representa la demanda durante el plazo de entrega L . Si suponemos que las demandas en puntos distintos en el tiempo son independientes, se tiene lo siguiente:

$$E[D_1] = L * E[D]$$

$$\sigma_{D_1} = \sigma_D * \sqrt{L}$$

Además, si D es una variable aleatoria normal, se tiene que D_1 también lo será.

Queremos elegir Q y R que minimicen el costo anual total (excluyendo el precio de compra, pues este no depende de la cantidad a pedir ni del punto de reorden).

Obteniendo Q

Sea $TC(Q, R)$ el costo esperado por unidad de tiempo (sin costo de adquisición) generado al pedir Q unidades en el punto de reorden R . Así, tenemos que:

$$TC(Q, R) = \text{Costo esperado, por unidad de tiempo, por ordenar} + \\ \text{Costo esperado, por unidad de tiempo, por mantener} + \text{Costo, por unidad de tiempo, por faltantes}$$

Suponemos que la cantidad promedio de pedidos pendientes ($B(t)$) es pequeña en relación con el nivel promedio de existencias disponibles (es razonable, pues si ocurren faltantes es por lo general durante una pequeña parte del ciclo), por lo que

$$\text{valor esperado } I(t) \equiv \text{valor esperado } OHI(t)$$

Dado que

Costo esperado, por unidad de tiempo, por mantener = $h * \text{Valor esperado del nivel de existencias disponible}$
y podemos expresar

$$\text{Valor esperado del nivel de existencias disponible en un ciclo} = \\ = \frac{\text{Valor esperado de } I(t) \text{ al inicio del ciclo} + \text{Valor esperado de } I(t) \text{ al final del ciclo}}{2}$$

Además, al final del ciclo el nivel esperado de existencias será igual al nivel de existencias en el punto de reabasto menos la demanda durante el plazo de entrega, es decir

$$\text{valor esperado de } I(t) \text{ al principio del ciclo} = R - E[D_1]$$

Por otro lado al principio del ciclo, el nivel de existencias al final del ciclo aumenta con la llegada de un pedido de tamaño Q , por lo que el valor esperado al inicio del ciclo es:

$$\text{valor esperado de } I(t) \text{ al principio del ciclo} = R - E[D_1] + Q$$

Luego:

$$\text{valor esperado de } I(t) \text{ durante el ciclo} = \frac{Q}{2} + R - E[D_1]$$

Por tanto, podemos obtener el costo por mantener como sigue:

$$\text{Costo esperado, por unidad de tiempo, por mantener} = h * \left(\frac{Q}{2} + R - E[D_1] \right)$$

Para determinar el costo esperado, por unidad de tiempo, por faltantes, tenemos

$$\text{Costo por faltantes anual esperado} = \frac{\text{Costo esperado por faltantes}}{\text{ciclo}} \frac{\text{Ciclos esperados}}{\text{Año}}$$

Además

$$\frac{\text{Costo esperado por faltantes}}{\text{ciclo}} = c_B * E[B_R]$$

Como a la larga la demanda se cumplirá, cada año se hará un promedio de $\frac{E[D]}{Q}$ pedidos. Luego

$$\text{Costo por faltantes esperado, por unidad de tiempo} = \frac{c_B E[B_R] E[D]}{Q}$$

Por último, para obtener el costo por ordenar esperado, por unidad de tiempo:

$$\text{Costo por ordenar, por unidad de tiempo, esperado} = k \frac{\text{Pedidos esperados}}{\text{año}} = \frac{kE[D]}{Q}$$

Así, se concluye que el costo total en que se incurre por unidad de tiempo (sin el costo de adquisición) es:

$$TC(Q, R) = h * \left(\frac{Q}{2} + R - E[D_1] \right) + \frac{c_B E[B_R] E[D]}{Q} + \frac{kE[D]}{Q} \quad (2.8)$$

Se pueden obtener Q^* y R^* tal que minimicen a la función $TC(Q, R)$, mediante:

$$\frac{\partial TC(Q^*, R^*)}{\partial Q} = 0 = \frac{\partial TC(Q^*, R^*)}{\partial R}$$

Sin embargo, en la mayoría de los casos, el valor de Q^* que satisface lo anterior está muy cercano al

$$EOQ = \sqrt{\frac{h+p}{p} \frac{2kD}{h}}$$

Por tanto supondremos en este caso que $Q^* = EOQ$, donde sustituiremos D por $E[D]$ y p por c_B .

Obteniendo R

Si suponemos un valor dado de Q^* , el costo, por unidad de tiempo, esperado por hacer pedidos es independiente de R , por lo que podemos sólo minimizar la suma del costo anual esperado por almacenar los bienes y el costo por faltantes al determinar un valor R que minimice $TC(Q, R)$. Para ello, haremos uso del análisis marginal (al incrementar el punto de reabasto en Δ pequeño, ¿ $TC(Q, R)$ aumenta o disminuye?).

Si aumentamos R a $R + \Delta$:

- El costo por almacenar aumentará:

$$h \left(\frac{Q}{2} + R + \Delta - E[D_1] \right) - h \left(\frac{Q}{2} + R - E[D_1] \right) = h\Delta$$

- El costo por faltantes disminuirá, pues en cualquier ciclo en el que la demanda en el plazo para la entrega es por lo menos R , la cantidad de producto agotado se reducirá en Δ unidades, es decir que los costos por faltantes se reducirán $c_B \Delta$ con una probabilidad $P[D_1 \geq R]$ cada ciclo; y dado que hay un promedio de $\frac{E[D]}{Q}$ ciclos por unidad de tiempo, el costo esperado, por unidad de tiempo, por faltantes, será:

$$\frac{\Delta E[D] c_B P[D_1 \geq R^*]}{Q}$$

Buscamos R^* para el cual el beneficio marginal y el costo marginal sean iguales, pues ahí ocurre un óptimo local de la función de costos, es decir, resolvemos la ecuación para R^* :

$$\frac{\Delta E[D] c_B P[D_1 \geq R^*]}{Q} = h\Delta$$

es decir

$$P[D_1 \geq R^*] = \frac{hQ}{c_B E[D]}$$

Teniendo ya la Q óptima, podemos establecer que el valor de R que satisface la disminución de costos es aquel que cumple con:

$$P[D_1 \geq R^*] = \frac{hQ^*}{c_B E[D]}$$

Observamos que si

$$\frac{hQ^*}{c_B E[D]} > 1$$

no habrá solución, pues el costo de almacenamiento es muy alto en relación con el costo por faltantes. La administración debe establecer el punto de reabastecimiento en el nivel más bajo aceptable.

Sin embargo, el punto de reabastecimiento puede obtenerse a partir de un nivel de servicio que desea la administración. Los pasos a seguir son los siguientes:

1. Elegimos T .

2. Despejar R^* tal que $P[D_1 \leq R^*] = T$

Si la demanda en el tiempo de entrega se distribuye normal $N(\mu, \sigma)$, despejamos R tal que $P[D_1 \leq R] = T$, obteniendo que R es el resultado de evaluar la función inversa de la normal en el punto T . Donde D_1 es la variable aleatoria que representa a la demanda en el tiempo de entrega, por lo que:

$$R = \mu + Z^T \sigma \quad (2.9)$$

donde Z^T es el valor de tablas de una normal estándar asociado a la probabilidad T . Para un desarrollo alternativo véase

Ejemplo: Jed Walker es el gerente de Have a Cow, un restaurante de hamburguesas en el centro. Jed compra toda la carne a Ground Chuck. Jed estima que el costo de mantener anual es de 30 centavos por libra. Cuando se queda sin carne, debe comprarla en el supermercado cercano. Se estima que el alto costo de compra y la molestia que implica tienen un costo de 3 dólares por libra que le falta. Para evitar esta situación, Jed ha decidido tener suficiente inventario de seguridad para que no le falte carne antes de que llegue la entrega, un nivel de 95%. Colocar una orden sólo requiere mandar un fax, por lo que el costo administrativo es despreciable. El contrato de Have a Cow con Ground Chuck es el siguiente: el precio de compra es de 1.49 dólares por libra. Se agrega un costo fijo de 25 dólares por orden, por envío. Se garantiza que llega en 2 días. Jed estima que la demanda de carne estos días tiene distribución normal con media 100 libras y una desviación de 50 libras [4].

Contamos con los siguientes datos:

- La unidad de tiempo es una semana.
- $c_B = 3$
- $h = ,3$
- $c = 1,49$
- $K = 25$
- $E[D_1] = 100$
- $\sigma = 50$
- $E[B_R] = \frac{2}{365}$

Calculamos el costo asociado a comprarle a Ground Chuck:

Obtenemos Q^* :

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 * 25 * (100 * 365 / 2) * 0.3 + 3}{0.3} * \frac{0.3 + 3}{3}} \approx 1829$$

Obtenemos R :

$$R = 100 + Z^{.95} * 200 = 100 + 1.96 * 200 = 198$$

Obtenemos el costo total asociado:

$$.3\left(\frac{1829}{2} + 198 - 100\right) + \frac{3 * (100 * 365/2) * \frac{2}{365}}{1829} + \frac{25 * (100 * 365/2)}{1829} = 553.37$$

Por tanto se deben pedir 1829 libras de carne cuando queden 198 en inventario, y se tendrá un costo asociado de 553.37 dólares.

2.3. Teoría de líneas de espera

Se presentan en la vida cotidiana líneas de espera (compras, depósitos bancarios, envío de correo, etc.) y tener que esperar en ella, además de ser un desperdicio de tiempo para los individuos en la fila, puede generar un problema para la calidad de vida y la eficiencia de la economía de un país, por lo cual se busca que el tiempo de espera en una sea el mínimo posible, sin embargo es necesario tener en cuenta que un servicio más veloz resulta más costoso.

La teoría de líneas de espera se basa en modelos matemáticos que representan la situación para mejorar el desempeño del sistema de colas, encontrando un equilibrio entre el costo asociado al servicio y el costo asociado al tiempo promedio de espera.

Eliminar la espera por completo no es siempre una opción factible, debido a que el costo de instalación y operación del centro de operación puede ser prohibitivo; así, el único recurso es buscar el equilibrio entre el costo de ofrecer un servicio y el de esperar a que lo atiendan. El estudio de las colas tiene que ver con la cuantificación del fenómeno de esperar por medio de medidas de desempeño representativas, como tiempo de espera promedio en la cola y el tiempo de espera promedio para el servicio, además puede incorporarse a un modelo de optimización de costos que busca minimizar la suma de los costo de ofrecer el servicio y el asociado a la espera por parte de los clientes, pues al mismo tiempo el costo de esperar se reduce con el incremento del nivel de servicio.

2.3.1. Conceptos relevantes

Para construir el modelo de colas, requerimos de las siguientes definiciones:

Clientes

Aquellos que hacen uso del sistema de líneas de espera. Llegan de forma individual a recibir un servicio.

En algunos casos pueden no ser personas.

Cola, Fila o Línea de espera

Se forma al incluirse clientes que no pueden ser atendidos inmediatamente.

Puede ser una fila ordinaria o los clientes podrían estar dispersos, sin embargo mantendrían un orden.

Servidores

Quienes proporcionan el servicio o la atención en el sistema.

Puede haber servidores trabajando en serie o en paralelo. Los servidores trabajando en paralelo dan todos el mismo servicio y el cliente sólo requiere pasar con uno para completar su servicio, contrario a los que trabajan en serie, pues el cliente ha de pasar con cada uno a recibir una atención distinta. Si es el caso de servidores en paralelo, denotamos a la cantidad de ellos por s . Puede tratarse de máquinas que realizan un servicio.

Proceso de llegada

Es el instante en que un cliente llega a la fila.

Suponemos que sólo puede haber una entrada al sistema en un instante dado y que es independiente del número de clientes en la cola, en tal caso lo expresamos especificando una distribución de probabilidad que gobierna el tiempo entre llegas sucesivas.

Tiempo entre llegadas

El tiempo que transcurre entre dos llegadas consecutivas.

Para estimar su distribución de probabilidad se hace uso, generalmente, de una distribución exponencial, pues:

- a) La última llegada no influye en las siguientes, por lo que se tiene la propiedad de pérdida de memoria (lo que quiere decir que la probabilidad del tiempo restante desde ahora hasta que ocurra la siguiente llegada es siempre la misma) y la única función de distribución que cumple con dicha propiedad es la exponencial [3].
- b) Existe una alta posibilidad de que lleguen clientes uno tras otro en periodos cortos y en menor medida que ocurra una pausa prolongada entre una llegada y otra, lo que es consistente con la probabilidad alta de valores pequeños y baja de valores muy grandes de la distribución exponencial.

Tasa media de llegadas

Número esperado de llegadas por unidad de tiempo. Se denota por λ . De aquí derivamos que el tiempo esperado entre llegadas es $\frac{1}{\lambda}$.

Modelado del proceso de Llegada

Definimos t_i el tiempo en el cual llega el i -ésimo cliente. Para $i \geq 1$ definimos $T_i = t_{i+1} - t_i$ como el i -ésimo tiempo entre llegadas. Suponemos que las T_i con variables independientes, aleatorias y continuas descritas por la variable aleatoria Λ .

Es importante aclarar que, a causa de fenómenos como horas en que hay una gran cantidad de clientes que llegan, con frecuencia la hipótesis de tiempos estables entre llegadas (la distribución de las llegadas no depende de a hora del día o del día de la semana) no es real, pero podemos aproximar el caso real descomponiendo el día en segmentos y durante cada de los cuales los tiempos entre llegadas pueden ser estables.

Suponga que Λ tiene una función de densidad $\alpha(t)$. Tenemos que para Δt pequeña, se tiene que $P[t \leq \Lambda \leq t + \Delta t] \approx \Delta t \alpha(t)$ (Véase H). Así, podemos calcular la tasa media entre llegadas como

$$\frac{1}{\lambda} = \int_0^{\infty} t \alpha(t) \cdot dt \quad (2.10)$$

El problema importante es escoger Λ de una manera adecuada. Por lo general se hace uso de la función de densidad de una distribución exponencial (dadas a) y b)), y eso se justifica con el *Lema* que se presenta enseguida:

Sabemos que si Λ se distribuye exponencialmente con parámetro λ , $E[\Lambda] = \frac{1}{\lambda}$ y $var(\Lambda) = \frac{1}{\lambda^2}$.

Lema. Propiedad de Amnesia de la Distribución Exponencial.

Si Λ tiene una distribución exponencial, entonces para todo valor no negativo de t y h ,

$$P[\Lambda > t + h | \Lambda > t] = P[\Lambda > h]$$

Demostración

Por 2.10

$$P[\Lambda > h] = \int_h^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \cdot dx = [-e^{-\lambda t}]_h^{\infty} = e^{-\lambda h}$$

Entonces

$$P[\Lambda > t + h | \Lambda > t] = \frac{P[(\Lambda > t + h) \cap (\Lambda > t)]}{P[\Lambda > t]} = \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h} = P[\Lambda > h]$$

Por otro lado, en [3] se prueba que no hay otra función de densidad que cumpla la propiedad de amnesia.

Proceso de salida

Con frecuencia llamado *proceso de servicio*. Es el momento en que el cliente sale del sistema o se cumplió con su servicio.

El modelo supone que no se ve afectado por el número de clientes presentes, así como del servidor que atienda. Depende del tiempo de servicio.

Tiempo de servicio

Es el tiempo transcurrido entre el principio y el fin del servicio.

Para un caso en que se cumplen las condiciones a) y b) de los tiempos de llegada, se utiliza la distribución exponencial.

Tasa media de servicio

Es el número esperado de terminaciones de servicio por unidad de tiempo para un servidor continuamente ocupado (que mientras esté en horario de labores se pueda suponer que habrá un

cliente después). Si lo denotamos con la letra μ , el tiempo de servicio esperado está dado por $\frac{1}{\mu}$. Sea σ la variabilidad en los tiempos de servicio, si σ se aproxima a $\frac{1}{\mu}$, habrá un alto grado de variabilidad, y esa afirmación apoya la decisión de aproximar la distribución de los tiempos de servicio con una distribución exponencial (por la condición b)).

Suponemos que los tiempos de servicio se rigen por variables aleatorias S tal que el tiempo para un cliente es independiente del tiempo para otro y tiene una función de distribución $s(t)$. Se cumple que:

$$\frac{1}{\mu} = \int_0^{\infty} t s(t) \cdot dx$$

Factor de Utilización

Representa la función promedio que utiliza cada servidor para atender a los clientes. Se denota y calcula como sigue: $\rho = \lambda / (s\mu)$.

Con el fin de que el servicio sea manejable, se requiere que $\rho < 1$; esto es, $\lambda < s\mu$, es decir, que lleguen menos clientes de los que se pueden atender.

Número de clientes en la cola

El número de clientes que esperan el servicio.

Número de clientes en el sistema

Clientes en la cola y quienes reciben el servicio.

Capacidad de la cola

El número máximo de clientes que pueden permanecer en la cola. Por convención se suponen infinitas, en caso contrario, si está llena y un cliente llega, se va sin recibir el servicio.

Disciplina de la cola

Método que se usa para determinar el orden en que se seleccionan clientes de la cola para ser atendidos. La más común es *Primero en llegar – Primero en servir (PLPS)*, sin embargo, existen otros como la selección aleatoria, algunos procedimientos con prioridades o inclusive *Último en llegar – Primero en servir*.

Método para unirse a la cola

Depende de la cantidad de filas que haya, puede ser un sistema con una sola cola, o uno con múltiples, y en tal caso cuando un cliente llega, habría un método para la elección de fila, con restricciones del mismo cliente o de la empresa.

2.3.2. Supuestos del modelo

- Los tiempos entre llegadas son independientes e idénticamente distribuidos (i.i.d.) de acuerdo con una función de distribución especificada.
- Todos los clientes que entran al sistema de colas permanecen ahí hasta que termina el servicio.
- El sistema de colas tiene un número especificado de servidores.
- Cada cliente es atendido de forma individual por cualquiera de los servidores.
- Los tiempos de servicio son i.i.d. de acuerdo con una distribución de probabilidad especificada.

2.3.3. Notación para el Modelo

Considerando los supuestos del modelo, Kendall (1951) inventó la siguiente notación para definir el tipo de sistema de colas con que se está trabajando: $1/2/3/4/5/6$, donde:

1. Proceso de llegada.
Para este estudio: M , es decir tiempos entre llegadas i.i.d. exponenciales.
2. Tiempos de servicio.
En este caso: M , tiempos de servicio i.i.d. exponenciales.
3. Número de servidores en paralelo.
Para este trabajo: tres.
4. Disciplina de la cola.
Se usa PLPS.
5. Número máximo de clientes en el sistema.
Se considera infinito.
6. Tamaño de la población de la que vienen los clientes.
Se considera infinito.

Así, se tiene el caso de un modelo $M/M/3/PLPS/\infty/\infty$.

2.3.4. Medidas de Desempeño del Modelo

Se mide el desempeño del modelo a través de cuántos clientes suelen esperar en el sistema y cuánto tiempo suelen esperar.

Los sistemas de servicios comerciales, que se relacionan más con lo que busca este trabajo, tienden a dar más importancia a la segunda medida, pues es más relevante mantener a los clientes satisfechos.

Las dos medidas se expresan en términos de sus valores esperados, y es importante hacer la distinción entre si los clientes se encuentran esperando en la cola o están esperando en cualquier parte del sistema (en la cola o siendo atendidos), en el segundo caso un cliente que se encuentra en el sistema pero siendo atendido, no tendrá tanta insatisfacción como uno que está en la cola.

Proceso de Nacimiento y Muerte

Definimos el *Estado* del sistema en el tiempo t como el número de personas presentes en cualquier sistema de cola en el tiempo t . Es de nuestro interés la cantidad $P_{ij}(t)$, la probabilidad de que haya j personas en el sistema de cola en el tiempo t dado que en el tiempo 0 había i personas, que, como una probabilidad de transición de t pasos de una Cadena de Markóv (la probabilidad de que después de t transiciones una cadena de Markóv esté en el estado j , dado que la cadena empezó en el estado i), tenderá a un límite π_j , independiente del estado inicial i , al que se le denomina *Estado Estable* o *Probabilidad de equilibrio del estado j* . Para un sistema de colas, π_j representa la fracción del tiempo en que hay j clientes presentes.

Para t pequeña, el valor de $P_{ij}(t)$ dependerá de i ; la pregunta a responder es qué tan grande debe ser t para que $P_{ij}(t)$ sea independiente del estado inicial; sin embargo, esta pregunta es difícil de contestar. El comportamiento de $P_{ij}(t)$ antes de alcanzar el Estado Estable se llama *Comportamiento Transitorio* de sistema de cola, y para la mayoría de los sistemas de cola, es muy difícil el análisis de este comportamiento, por lo cual se supone que un sistema de cola ha alcanzado el estado estable (lo que se puede hacer siempre que t sea grande), permitiéndonos trabajar con las π_j en vez de las P_{ij} .

Un **Proceso de nacimiento y muerte** es un proceso estocástico continuo en el tiempo para el que el estado del sistema en cualquier tiempo es un entero no negativo. Para un proceso de nacimiento y muerte, es fácil determinar las π_j (si es que existen). Algunas definiciones pertinentes son:

- $o(t)$ es cualquier función que cumpla con: $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$.
- λ_j es la tasa de natalidad en el estado j .
- μ_j es la tasa de mortalidad del estado j .
Se debe cumplir que $\mu_0 = 0$.

El movimiento de un proceso de nacimiento y muerte en el estado j en el tiempo t está gobernado por las siguientes Leyes:

1. Con probabilidad $\lambda_j \Delta t + o(\Delta t)$ sucede un nacimiento entre los tiempos t y $t + \Delta t$.
Un nacimiento aumenta en 1 el estado (j) del sistema (alcanzando $j + 1$). En el caso del sistema de colas un nacimiento es simplemente una llegada.
2. Con probabilidad $\mu_j \Delta t + o(\Delta t)$ sucede una muerte entre el tiempo t y el tiempo $t + \Delta t$.
Una muerte disminuye en 1 el estado (j) del sistema (para llegar a $j - 1$). En el caso del sistema de colas una muerte es simplemente el término del servicio.
3. Los nacimientos y muertes son independientes entre sí.

Con estas tres leyes, puede demostrarse que la probabilidad de que se tenga un evento (nacimiento o muerte) entre los tiempos t y $t + \Delta t$ es $o(\Delta t)$.

Para la construcción de las probabilidades de Estado Estable (π_j) basta relacionar de manera adecuada para Δt pequeño a $P_{ij}(t + \Delta t)$ con $P_{ij}(t)$. Notamos que para $t \geq 1$ se pueden dividir en cuatro las formas en que el estado sea j cuando el tiempo sea $t + \Delta t$:

Si el estado en el tiempo t es:

- (i) $j-1$ (ii) $j+1$ (iii) j (iv) cualquier otro estado

Se muestran a continuación las probabilidades asociadas:

Caso	Estado en el tiempo t	Probabilidad de la sucesión
(i)	$j+1$	$P_{i,j-1}(t)(\lambda_{j-1}\Delta t + o(\Delta t))$
(ii)	$j-1$	$P_{i,j+1}(t)(\mu_{j+1}\Delta t + o(\Delta t))$
(iii)	j	$P_{i,j}(t)(1 - \lambda_j\Delta t - \mu_j\Delta t - 2o(\Delta t))$
(iv)	Otro estado	$o(\Delta t)$

Se cumple que la suma de las probabilidades asociadas a todas las posibilidades anteriores es la probabilidad del estado j en el tiempo $t + \Delta t$, por lo que

$$\begin{aligned}
P_{i,j}(t + \Delta t) &= P_{i,j-1}(t)(\lambda_{j-1}\Delta t + o(\Delta t)) \text{ (i)} \\
&+ P_{i,j+1}(t)(\mu_{j+1}\Delta t + o(\Delta t)) \text{ (ii)} \\
&+ P_{i,j}(t)(1 - \lambda_j\Delta t - \mu_j\Delta t - 2o(\Delta t)) \text{ (iii)} \\
&+ o(\Delta t) \text{ (iv)} \\
&= P_{i,j}(t) + \Delta t(\lambda_{j-1}P_{i,j-1}(t) + \mu_{j+1}P_{i,j+1}(t) - P_{i,j}(t)\mu_j - P_{i,j}(t)\lambda_j) \\
&+ o(\Delta t)(P_{i,j-1}(t) + P_{i,j+1}(t) + 1 - 2P_{i,j}(t)) \\
&= P_{i,j}(t) + \Delta t(\lambda_{j-1}P_{i,j-1}(t) + \mu_{j+1}P_{i,j+1}(t) - P_{i,j}(t)\mu_j - P_{i,j}(t)\lambda_j) + o(\Delta t)
\end{aligned}$$

\Rightarrow

$$P_{i,j}(t + \Delta t) - P_{i,j}(t) = \Delta t(\lambda_{j-1}P_{i,j-1}(t) + \mu_{j+1}P_{i,j+1}(t) - P_{i,j}(t)\mu_j - P_{i,j}(t)\lambda_j) + o(\Delta t)$$

Luego, dividiendo ambos lados entre Δt y haciendo que ésta tienda a cero, vemos que para toda i y $j \geq 1$, se tiene que

$$P'_{i,j}(t) = \frac{\partial P_{i,j}(t)}{\partial t} = \lambda_{j-1}P_{i,j-1}(t) + \mu_{j+1}P_{i,j+1}(t) - P_{i,j}(t)\mu_j - P_{i,j}(t)\lambda_j$$

Para t grande y cualquier estado inicial i , $P_{i,j}(t)$ no cambia mucho y se puede decir que es constante. Luego, para un Estado Estable (t grande) se cumple que $P'_{ij} = 0$, $P_{i,j-1}(t) = \pi_{j-1}$, $P_{i,j}(t) = \pi_j$ y $P_{i,j+1}(t) = \pi_{j+1}$, por lo que al sustituirlo en la ecuación se obtiene que:

$$0 = \lambda_{j-1}\pi_{j-1} + \mu_{j+1}\pi_{j+1} - \mu_j\pi_j - \lambda_j\pi_j$$

\Rightarrow

$$\lambda_{j-1}\pi_{j-1} + \mu_{j+1}\pi_{j+1} = \pi_j(\mu_j + \lambda_j) \text{ con } j = 1, 2, \dots$$

Por lo que para $j = 0$, se tiene que

$$\mu_1\pi_1 = \pi_0\lambda_0$$

En este momento, se hace la siguiente observación: *En cualquier tiempo que observemos un proceso de nacimiento y muerte, debe cumplirse que para cada estado j , el número de veces que hemos entrado al estado j difiere cuando mucho en 1 del número de veces que hemos dejado el estado j .* Intuitivamente esto sugiere que para t grande, $j = 0, 1, 2, \dots$ y para cualesquiera condiciones iniciales se cumplirá:

$$\frac{\text{Núm. esperado de salidas del estado } j}{\text{unidad de tiempo}} = \frac{\text{Núm. esperado de entradas en el estado } j}{\text{unidad de tiempo}}$$

Si se supone que el sistema se ha asentado en el estado estable, sabemos que pasa una fracción π_j del tiempo en el estado j . Ahora, dado que para $j \geq 1$ sólo podemos dejar al estado j pasando al estado $j + 1$ o al $j - 1$, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\text{Núm. esperado de salidas del estado } j}{\text{unidad de tiempo}} &= \pi_j(\lambda_j + \mu_j) \\ \frac{\text{Núm. esperado de entradas en el estado } j}{\text{unidad de tiempo}} &= \pi_{j-1}\lambda_{j-1} + \pi_{j+1}\mu_{j+1} \end{aligned}$$

Y aplicando la igualdad:

$$\pi_j(\lambda_j + \mu_j) = \pi_{j-1}\lambda_{j-1} + \pi_{j+1}\mu_{j+1} \text{ para } j = 1, 2, \dots$$

Además, si $t = 0$, $\mu_0 = \pi_{-1} = 0$, por lo que

$$\pi_0\lambda_0 = \pi_1\mu_1$$

A estas ecuaciones se les conoce como *Ecuaciones de balance de flujo* o *Ecuaciones de conservación de flujo* para un proceso de nacimiento y muerte. La primera representa que la rapidez a la que se tienen transiciones de entrada a cualquier estado i debe ser igual a la rapidez a la que se tienen transiciones de salida del estado i ; de lo contrario la probabilidad se “acumularía” en algún estado y no existiría un estado estable.

Resolvamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \pi_0\lambda_0 &= \pi_1\mu_1 && \text{si } j = 0 \\ \pi_1(\lambda_1 + \mu_1) &= \pi_0\lambda_0 + \pi_2\mu_2 && \text{si } j = 1 \\ \pi_2(\lambda_2 + \mu_2) &= \pi_1\lambda_1 + \pi_3\mu_3 && \text{si } j = 2 \end{aligned}$$

⋮

$$\pi_j(\lambda_j + \mu_j) = \pi_{j-1}\lambda_{j-1} + \pi_{j+1}\mu_{j+1} \quad \text{j-ésima ecuación}$$

Para $j = 0$, tenemos que

$$\pi_1 = \frac{\pi_0\lambda_0}{\mu_1}$$

Sustituyendo en $j = 1$

$$\lambda_0\pi_0 + \mu_2\pi_2 = \frac{(\lambda_1 + \mu_1)\pi_0\lambda_0}{\mu_1}$$

es decir

$$\mu_2 \pi_2 = \frac{\pi_0(\lambda_0 \lambda_1)}{\mu_2}$$

por lo que

$$\pi_2 = \frac{\pi_0(\lambda_0 \lambda_1)}{\mu_1 \mu_2}$$

Podríamos continuar así, y definiendo $c_j = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_j}$, obtener que

$$\pi_j = \pi_0 c_j$$

Como en cualquier momento debemos estar en algún estado, las probabilidades de estado estable deben sumar 1:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$$

Luego

$$1 = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_0 c_j = \pi_0 \sum_{j=0}^{\infty} c_j = \pi_0 (1 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j)$$

Y si $\sum_{j=1}^{\infty} c_j$ es finita, obtenemos que

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j}$$

Y así, podemos obtener las π_j con $j = 0, 1, 2, \dots$

Aplicación al modelo

Los sistemas de líneas de espera con tiempos entre llegadas y de servicio exponenciales pueden modelarse como procesos de nacimiento y muerte.

Para describir el modelo en cuestión por medio de un proceso de nacimiento y muerte, comenzamos por describirlo para el caso de que $s = 1$, es decir, sólo hay un servidor en el sistema.

Este sistema tiene tiempos entre llegadas exponenciales, la tasa media de llegadas por unidad de tiempo es λ y hay un solo servidor con tiempos de servicio exponenciales de tasa media μ .

Si el estado en el tiempo t es j , entonces la propiedad de amnesia de la distribución exponencial quiere decir que la probabilidad de un nacimiento durante el intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$ no dependerá de cuánto tiempo ha estado el sistema en el estado j y por tanto se puede determinar

como si acabara de ocurrir una llegada en el tiempo t ; entonces la probabilidad de que se tenga un nacimiento durante $[t, t + \Delta t]$ es

$$\int_0^{\Delta t} \lambda e^{-\lambda t} \cdot dt$$

Según el desarrollo en series de Taylor es:

$$e^{-\lambda t} = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

Así, la probabilidad de que suceda un nacimiento durante $[t, t + \Delta t]$ es $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$, por lo que podemos concluir que la tasa de natalidad en el estado j simplemente es la tasa de llegadas λ . Para determinar la tasa de mortalidad cuando el tiempo es t , observe que si el estado es cero cuando el tiempo es t , entonces no hay nadie siendo atendido por el servidor y, por lo tanto, no se puede completar un servicio entre t y Δt y así, $\mu_0 = 0$; si el estado es $j \geq 1$ cuando el tiempo es t , entonces sabemos que hay exactamente un cliente con el servidor (pues sólo hay uno), y por la propiedad de amnesia de la distribución exponencial significa entonces que la probabilidad de que un cliente termine sus trámites entre t y $t + \Delta t$ está expresada por

$$\int_0^{\Delta t} \mu e^{-\mu t} \cdot dt = 1 - e^{-\mu t} = \mu \Delta t + o(\Delta t)$$

Así, $\mu_j = \mu$ cuando $j \geq 1$.

Este sistema se puede modelar mediante un proceso de nacimiento y muerte con parámetros:

- $\lambda_j = \lambda$, con $j = 0, 1, 2, \dots$
- $\mu_0 = 0$
- $\mu_j = \mu$, con $j = 1, 2, 3, \dots$

A continuación se deducen las probabilidades de Estado Estable:

De las ecuaciones de las π_j con los parámetros actuales, se tiene que:

$$\pi_1 = \frac{\lambda \pi_0}{\mu}, \pi_2 = \frac{\lambda^2 \pi_0}{\mu^2}, \dots, \pi_j = \frac{\lambda^j \pi_0}{\mu^j}$$

es decir

$$\pi_1 = \pi_0 \frac{\lambda}{\mu}, \pi_2 = \pi_0 \frac{\lambda^2}{\mu^2}, \dots, \pi_j = \pi_0 \frac{\lambda^j}{\mu^j}$$

Luego, bajo la suposición de que $0 \leq \rho < 1$, como $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$, tenemos que

$$1 = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = \pi_0 \frac{\lambda^0}{\mu^0} + \pi_0 \frac{\lambda}{\mu} + \dots + \pi_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\mu^2} + \dots \right) = \pi_0 (\rho + \rho^2 + \dots)$$

Definimos $S = \rho + \rho^2 + \dots$, se tiene que $\rho S = \rho^2 + \rho^3 + \dots$, y así

$$S = \frac{1}{1 - \rho}$$

Por lo que en la ecuación anterior, se tiene que

$$\pi_0 = 1 - \rho$$

y así

$$\pi_j = (1 - \rho)\rho^j, \text{ con } 0 \leq j < \infty$$

Ahora, consideremos las medidas de desempeño:

- **L -Número esperado de clientes en el sistema**
- **L_q -Número esperado de clientes en la cola**
- **L_s -Número esperado de clientes en el servicio (ventanilla)**
- **W -Tiempo de espera esperado en el sistema**
- **W_q -Tiempo de espera esperado en la cola**
- **W_s -Tiempo de espera esperado en el servicio**

Se observan algunas relaciones:

- La única diferencia entre W y W_q es el tiempo que pasa el cliente en servicio, y dado que $1/\mu$ es la tasa media de servicio, se tiene que $W = W_q + 1/\mu$.
- Como cada cliente está o en la cola o en la ventanilla, se cumple que:
 - $L = L_q + L_s$
 - $W = W_q + W_s$
- En 1961, John D. C. Little desarrolló la primera prueba rigurosa de una relación importante entre las medidas de desempeño (fórmula de Little):
 - $L = \lambda W$
 - $L_q = \lambda W_q$
 - $L_s = \lambda W_s$

Intuitivamente, la relación se explica dado que si un cliente que en ese instante terminó su servicio observa la cola, verá L clientes en promedio; y dada la disciplina de la cola, los L clientes llegaron durante el tiempo de espera de este cliente en la cola (W en promedio); puesto que λ es el número promedio de llegadas por unidad de tiempo, λW es el número de llegadas esperado mientras el cliente espera en la línea del sistema; por tanto se concluye la fórmula. De la misma forma se cumple $L_q = \lambda W_q$ y $L_s = \lambda W_s$.

- De las relaciones anteriores, fácilmente se obtiene que $L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$

Para estas medidas se requiere que el sistema esté en condición de estado estable. Suponemos que el sistema está en estado estable, por lo que $\rho < 1$.

- El número promedio de clientes presentes en el sistema está dado por:

$$L = \sum_{i=0}^{\infty} j\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} j\rho^j(1-\rho) = (1-\rho) \sum_{i=0}^{\infty} j\rho^j$$

Si definimos $S' = \rho + 2\rho^2 + 3\rho^3 + \dots$, se tiene que $\rho S' = \rho^2 + 2\rho^3 + 3\rho^4 + \dots$, por lo que

$$S' = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

De donde

$$L = (1-\rho) \frac{\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda/\mu}{1-\lambda/\mu} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

- Para deducir L_q , observe que si hay 0 o 1 clientes en el sistema, no habrá nadie en la cola, sin embargo, para $j \geq 1$ personas, habrá $j-1$ esperando en la cola. Así, el número promedio de clientes en la cola será:

$$L_q = \sum_{i=1}^{\infty} (j-1)\pi_j = \sum_{i=1}^{\infty} j\pi_j - \sum_{i=1}^{\infty} \pi_j = L - (1 - \pi_0) = L - (1 - (1-\rho)) = L - \rho$$

Por lo que

$$L_q = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\mu\lambda - \lambda(\mu-\lambda)}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

- El número esperado de clientes en la ventanilla se obtiene de:

$$\begin{aligned} L_s &= 0\pi_0 + 1(\pi_1 + \pi_2 + \dots) = -\pi_0 + \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \dots = -\pi_0 + (\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \dots) = \\ &= -\pi_0 + 1 = -(1-\rho) + 1 = \rho = \frac{\lambda}{\mu} \end{aligned}$$

- El tiempo de espera que pasa un cliente en el sistema está dado por

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{\frac{\lambda}{\mu-\lambda}}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

- El tiempo de espera que pasa un cliente en la fila se calcula como sigue

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

- Por tanto el tiempo de espera esperado en la ventanilla es

$$W_s = W - W_q = \frac{1}{\mu-\lambda} - \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{\mu-\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{1}{\mu}$$

Ejemplo: Los clientes llegan a un sistema de colas con tasa media de llegadas de 2 clientes por minuto (el tiempo se distribuye exponencial). Los tiempos de servicio tienen distribución exponencial con media de 0.75 minutos. Existe un único servidor. Se desea conocer la probabilidad de estado estable de que haya justo un cliente en el sistema, además del factor de utilización, así como el número esperado de clientes en la fila y el tiempo promedio que pasará un cliente en el sistema.

Sabemos que $\lambda = 2$, $\mu = \frac{1}{1/4} = 4$, por tanto el factor de utilización resulta ser de $\rho = \frac{2}{4} = 0.5$. Luego, sabemos que la probabilidad de que haya un cliente exactamente en el sistema, está dado por $\pi_1 = (1 - \rho) * \rho = (1 - 0.5) * 0.5 = 0.25$.

Por otro lado, por las fórmulas vistas anteriormente, $L_q = \frac{2^2}{4 * (4 - 2)} = 0.5$ y $W = \frac{1}{4 - 2} = 0.5$, así concluimos que número de clientes esperado en la fila es de 1/2 y el tiempo promedio que esperará un cliente en el sistema es de 0.5 minutos [24].

Ahora, consideremos la situación en que hay una sola cola de clientes esperando servicio en las s ventanillas o servidores, además, hay $j \leq s$ clientes que se encuentran siendo atendidos. Observe que si hay j servidores ocupados, el servicio se terminó con una frecuencia de $\mu + \mu + \dots + \mu = j\mu$, y siempre que hayan j clientes, habrá $\min\{j, s\}$ servidores ocupados, por lo que $\mu_j = \min\{j, s\}\mu$. De esta forma, se concluye que el sistema $M/M/s/PLPS/\infty/\infty$ se puede modelar con un proceso de nacimiento y muerte con parámetros:

- $\lambda_j = \lambda$, con $j = 0, 1, \dots$
- $\mu_j = j\mu$, con $j = 0, 1, \dots, s$
- $\mu_j = s\mu$, con $j = 1 + s, 2 + s, \dots$

y

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu} \quad (2.11)$$

Sustituyéndose en las ecuaciones mencionadas para un servidor, se obtiene que:

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{s-1} \frac{(s\rho)^i}{i!} + \frac{(s\rho)^s}{s!(1-\rho)}} \quad (2.12)$$

$$\pi_j = \frac{(s\rho)^j \pi_0}{j!} \text{ para } j = 1, 2, \dots, s \quad (2.13)$$

$$\pi_j = \frac{(s\rho)^j \pi_0}{s!s^{j-s}} \text{ para } j = s + 1, s + 2, \dots \quad (2.14)$$

De nuevo, buscamos que $\rho < 1$, es decir que la rapidez de llegadas sea mayor que la rapidez máxima posible del servicio.

Se puede mostrar (Véase I) que la probabilidad de estado estable de que todas las ventanillas estén ocupadas es

$$P[j \geq s] = \frac{(s\rho)^s \pi_0}{s!(1-\rho)}$$

Y se presentan los resultados en la tabla para el sistema de colas $M/M/s/PLPS/\infty/\infty$:

ρ	s=2	s=3	s=4	s=5	s=6	s=7
.1	.02	.00	.00	.00	.00	.00
.2	.07	.02	.00	.00	.00	.00
.3	.14	.07	.04	.02	.00	.00
.4	.23	.14	.09	.06	.04	.03
.5	.33	.24	.17	.13	.10	.08
.55	.39	.29	.23	.18	.14	.11
.6	.45	.35	.29	.24	.20	.17
.65	.51	.42	.35	.30	.26	.21
.7	.57	.51	.43	.38	.34	.30
.75	.64	.57	.51	.46	.42	.39
.8	.71	.65	.60	.55	.52	.49
.85	.78	.73	.69	.65	.62	.60
.9	.85	.83	.79	.76	.74	.72
.95	.92	.91	.89	.88	.87	.85

Además:

$$L_q = \frac{P[j \geq s]\rho}{1-\rho} \quad (2.15)$$

Por lo que

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{P[j \geq s]}{s\mu - \lambda} \quad (2.16)$$

Por otro lado

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu} \quad (2.17)$$

y se sabe que

$$W_s = \frac{1}{\mu} \quad (2.18)$$

Por lo que

$$L = L_q + L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{P[j \geq s]\rho}{1-\rho} + \frac{\lambda}{\mu} \quad (2.19)$$

y

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{L_q}{\lambda} + \frac{\lambda/\mu}{\lambda} = \frac{L_q}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{P[j \geq s]}{s\mu - \lambda} + \frac{1}{\mu} \quad (2.20)$$

Así, para obtener las medidas de desempeño, se comienza por buscar $P[j \geq s]$ en la tabla y se usan las ecuaciones anteriores.

Si nos interesa la distribución de probabilidad de estado estable, usamos la ecuación de π_0 tras

buscar la probabilidad en la tabla.

Ejemplo: Con los datos del ejemplo anterior, lo resolvemos para dos y tres servidores.

Tenemos que $\lambda = 2$ y $\mu = 4$.

Para el primer caso, $s = 2$, y por tanto, el factor de utilización resulta ser de $\rho = \frac{2}{2*4} = 0.25$.
Calculamos primero, π_0 con (2.12):

$$\begin{aligned}\pi_0 &= \frac{1}{1 + s\rho + \frac{(s\rho)^s}{s!(1-\rho)}} \\ &= \frac{1}{1 + 2 * .25 + \frac{(2 * .25)^2}{2!(1 - .25)}} \\ &= \frac{6}{10}\end{aligned}$$

Luego, según (2.13), la probabilidad de que haya un cliente exactamente en el sistema, está dado por

$$\pi_1 = s\rho\pi_0 = 2 * .25 * \frac{6}{10} = \frac{3}{10}$$

Por otro lado, por las fórmulas (2.15) y (2.20), y la tabla de probabilidades:

$$\begin{aligned}L_q &= \frac{P[j \geq s]\rho}{1 - \rho} = \frac{.105 * .25}{1 - .25} = 0.35 \\ W &= \frac{P[j \geq s]}{s\mu - \lambda} + \frac{1}{\mu} = \frac{.105}{2*4 - 2} + \frac{1}{4} = 0.2675\end{aligned}$$

Así, concluimos que el número de clientes esperado en la fila es de 0.35 y el tiempo promedio que esperará un cliente en el sistema es de 0.2675 minutos.

Para el caso en que $s = 3$ el factor de utilización es $\rho = \frac{2}{3*4} = \frac{1}{6}$.

$$\begin{aligned}\pi_0 &= \frac{1}{1 + s\rho + \frac{(s\rho)^2}{2} + \frac{(s\rho)^s}{s!(1-\rho)}} \\ &= \frac{1}{1 + 3 * \frac{1}{6} + \frac{(3 * \frac{1}{6})^2}{2} + \frac{(3 * \frac{1}{6})^3}{3!(1 - \frac{1}{6})}} \\ &= \frac{20}{33}\end{aligned}$$

Entonces, la probabilidad de que haya un cliente exactamente en el sistema, está dado por

$$\pi_1 = s\rho\pi_0 = 3 * \frac{1}{6} * \frac{20}{33} = \frac{10}{33}$$

y

$$L_q = \frac{P[j \geq s]\rho}{1 - \rho} = \frac{\frac{1}{66} * \frac{1}{6}}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{1}{330}$$

$$W = \frac{P[j \geq s]}{s\mu - \lambda} + \frac{1}{\mu} = \frac{\frac{1}{66}}{3 * 4 - 2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

Así, concluimos que el número de clientes esperado en la fila es de $\frac{1}{330}$ y el tiempo promedio que esperará un cliente en el sistema es de 0.1 minutos.

Es claro que entre más servidores haya, el tiempo promedio de espera es menor.

2.3.5. Solución al Número ideal de servidores en el Modelo

Es importante definir un número adecuado de servidores para un sistema de colas; proporcionar demasiados provoca costos excesivos, en cambio tener pocos ocasiona una espera excesiva por parte de los clientes.

Las consecuencias de hacer esperar a los clientes se pueden expresar como un **costo de espera**. Estamos interesados en minimizar el costo total asociado. Definimos

- CT = Costo total esperado por unidad de tiempo.
- CS = Costo esperado del servicio por unidad de tiempo.
- CW = Costo de espera esperado por unidad de tiempo.

Así, el objetivo es Minimizar $CT = CS + CW$.

Cuando cada servidor cuesta lo mismo, $CS = s * C_s$, con C_s el costo de un servidor por unidad de tiempo.

Cuando el tiempo de espera es proporcional a la cantidad de la espera, este costo puede expresarse como $CW = L * C_w$, donde C_w es el costo de espera por unidad de tiempo para cada cliente en el sistema de colas. Entonces, después de estimar C_s y C_w , la meta es elegir el valor de s que minimice:

$$CT = s * C_s + L * C_w \quad (2.21)$$

Tras seleccionar el modelo de colas que se ajuste, se puede obtener varios valores de L asociados a cada s , considerando que el aumento de s produce una disminución de L , y bajo la restricción del factor de utilización, obtener un número s de servidores que optimice el modelo.

Ejemplo: Con los datos del ejemplo anterior y suponiendo los costos por esperar de \$2 el minuto y por el servicio de \$1.50, lo resolvemos para uno, dos y tres servidores y por medio de una comparación, se obtiene el número de servidores que minimiza el costo asociado.

Se tiene que $\lambda = 2$, $\mu = 4$, $C_s = 1.5$ y $C_w = 2$

Para un servidor:

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{2}{4 - 2} = 1$$

Entonces

$$CT_1 = 1 * 1.5 + 1 * 2 = 3.5$$

Para dos servidores:

$$L = \frac{P[j \geq s]\rho}{1 - \rho} + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{.105 * .25}{1 - .25} + \frac{2}{4} = .535$$

Entonces

$$CT_2 = 2 * 1.5 + .535 * 2 = 4.07$$

Para tres servidores:

$$L = \frac{P[j \geq s]\rho}{1 - \rho} + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{1}{66} * \frac{1}{6}}{1 - \frac{1}{6}} + \frac{2}{4} = \frac{67}{330}$$

Entonces

$$CT_3 = 3 * 1.5 + \frac{67}{330} * 2 = 4.9061$$

Dados estos costos, se concluye que lo más conveniente es tener únicamente un servidor, pues el costo es el mínimo posible (no se puede tener un número negativo de servidores). Además, en este caso, observamos que, a pesar de que la eficiencia del sistema es mayor con más servidores, si se asocia un costo alto al servicio (respecto del de espera), la mejor decisión es tener el mínimo número de servidores.

2.4. Pronósticos

Cualquier institución interesada en el manejo de productos necesita prever la cantidad de movimientos que habrá de dichos productos en el futuro.

Un pronóstico es un valor estimado de un evento desconocido en el momento actual. Como aplicación principal en este escrito, se considera a la demanda, subestimarla puede conducir a pérdidas económicas o clientes insatisfechos, en cambio, sobreestimarla puede resultar costoso debido a precios de manejo de inventarios mayores o capacidad de almacenamiento innecesaria, razón por la cual es importante contar con un buen procedimiento para obtener las predicciones. El tipo de métodos de pronósticos que nos interesa es aquel basado en datos históricos, los cuales son usados para arrojar los datos futuros, a éstos se les denomina *métodos de pronósticos estadísticos*.

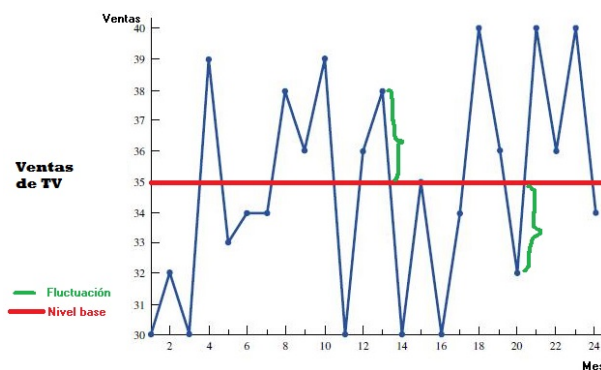
El objetivo de su análisis es, mediante la descripción del comportamiento teórico de los datos conocidos, obtener una estimación confiable y precisa de lo que sucederá en un futuro de cierto fenómeno en estudio. Es un tanto erróneo hablar de pronosticar *el* valor de la siguiente observación en una serie de datos, pues es imposible tener precisión al emitir dicho valor dado que depende de circunstancias fuera de nuestro control; en tal caso se considera que el valor es una *variable aleatoria*, por lo que tiene una distribución de probabilidad y por tanto se desea que tal valor fuera la media de la distribución, lo que equivale a minimizar el error promedio del pronóstico. Así, el objetivo de los métodos de pronóstico es estimar la media de la distribución de probabilidad del siguiente valor de la serie de datos lo mejor posible.

A pesar de que no se pueden saber a ciencia cierta los resultados en un futuro, se han desarrollado técnicas para dar una aproximación al resultado deseado; cuando se dispone de datos históricos un método de predicción estadístico por extrapolación es muy útil pues éste arroja los valores futuros de una serie de datos a partir de valores pasados, suponiendo que las tendencias y comportamientos del pasado continuarán en los periodos futuros. En este punto, es importante hacer la aclaración de que la disponibilidad de buenos datos es crucial para el uso de dichos métodos.

Dados $x_1, x_2, \dots, x_t, \dots$ valores observados, donde x_t es el valor de esa que se observa durante el periodo t , existen diversos métodos de pronósticos por extrapolación, útiles en distintos tipos de datos; en el presente trabajo se hará uso de cuatro de ellos. Para elegir el método más adecuado para predecir la demanda se cuenta con una medida de confiabilidad (por supuesto hay otras), la llamada *Desviación Absoluta Media*, **MAD**, dada por el promedio de los errores, donde los errores son obtenidos como la diferencia entre los datos observados (x_t) y los datos obtenidos con el pronóstico al tiempo t , f_t . En tanto menor sea la MAD, el pronóstico es más adecuado.

2.4.1. Promedios móviles

El método de promedios móviles es apropiado para una serie de datos moderadamente estable, donde algunos de los últimos datos se consideran significativos para el pronóstico del siguiente valor. De manera formal, trabaja bien si $x_t = b - \varepsilon_t$, donde b es el nivel base de la serie y ε_t es la fluctuación aleatoria en el periodo t con respecto al nivel base, sin presentar tendencia, variación estacional ni ciclicidad:



El número de valores incluido en el promedio móvil, N , refleja el grado de estabilidad anticipada en la serie de datos.

Se define

$$f_{t+1} = \text{media de } x_t, x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_{t-N+2}, x_{t-N+1} \quad (2.22)$$

el pronóstico para el periodo $t + 1$ que se hace después de observar x_t , donde N es un parámetro dado. Tras obtener el promedio móvil con distintos valores de N , el número de periodos usados para calcular el promedio móvil, se elige el que minimice la MAD.

Casos particulares de éste método son:

1. Pronóstico del último valor:
Para cada pronóstico, tomamos el inmediato anterior solamente. Adecuado para una serie de datos inestable.
2. Promedio para pronósticos:
El pronóstico es el promedio de todos los datos anteriores. Para una serie de datos estable.

Ejemplo: Se desea determinar el número de clientes que entrará a un banco cada día, se sabe que en los últimos seis días (después de un feriado) se ha tenido lo siguiente:

DÍA	CLIENTES	DÍA	CLIENTES	DÍA	CLIENTES
1	431	3	615	5	701
2	432	4	459	6	491

A continuación se presenta la solución para distintos valores de N .

Para $N = 1$:

DÍA	CLIENTES	PRONÓSTICO f_t	ERROR
1	431		
2	432	431	$ 432 - 431 = 1$
3	615	432	$ 615 - 432 = 183$
4	459	615	156
5	701	459	242
6	491	701	210
7		491	
8		491	
9		491	

Así, tenemos que $MAD_1 = \frac{1 + 183 + 156 + 242 + 210}{5} = 158.4$

Para $N = 2$:

DÍA	CLIENTES	PRONÓSTICO f_t	ERROR
1	431		
2	432		
3	615	$\frac{431+432}{2} = 432$	$ 615 - 432 = 183$
4	459	$\frac{432+615}{2} = 524$	$ 459 - 524 = 65$
5	701	537	164
6	491	580	89
7		596	
8		544	
9		570	

Así, $MAD_2 = 125.25$

Para $N = 3$:

DÍA	CLIENTES	PRONÓSTICO f_t	ERROR
1	431		
2	432		
3	615		
4	459	$\frac{431+432+615}{3} = 493$	$ 459 - 493 = 34$
5	701	$\frac{432+615+459}{3} = 502$	199
6	491	592	101
7		550	
8		581	
9		541	

Por lo que $MAD_3 = 111.33$

Para $N = 4$:

DÍA	CLIENTES	PRONÓSTICO f_t	ERROR
1	431		
2	432		
3	615		
4	459		
5	701	$\frac{431+432+615+459}{4} = 484$	217
6	491	552	61
7		567	
8		555	
9		579	

Luego, $MAD_4 = 139$

Para $N = 5$:

DÍA	CLIENTES	PRONÓSTICO f_t	ERROR
1	431		
2	432		
3	615		
4	459		
5	701		
6	491	$\frac{431+432+615+459+701}{5} = 528$	37
7		540	
8		561	
9		550	

Entonces $MAD_5 = 37$

Por tanto se elige $N = 5$, es decir el pronóstico más adecuado es el promedio de cinco días anteriores. Siendo 540, 561 y 550 los números más probables de clientes que llegarán en los días posteriores.

2.4.2. Suavización exponencial simple

El método de suavización exponencial simple es adecuado para una serie de datos entre algo inestable a más bien estable, donde la serie de datos fluctúa con respecto de un nivel base, no presenta tendencia, variaciones estacionales o ciclicidad. Para ver por qué se le llama *suavización exponencial* véase J.

Se define

$$A_t = \alpha x_t + (1 - \alpha)A_{t-1} \quad (2.23)$$

el pronóstico del valor de la serie de datos durante cualquier periodo futuro después de observar x_t , donde α es la **constante de suavizado** que satisface $0 < \alpha < 1$, y sea

$$A_0 = x_2 \quad (2.24)$$

el valor observado del periodo inmediatamente posterior al periodo uno. Así, se tiene que $f_{t+1} = A_t$ y el error está dado por $e_t = |x_t - A_{t-1}| = |x_t - f_t|$.

Observación: Se necesita ajustar el valor de la constante de suavizado, α , entre cero y uno para que refleje el grado de estabilidad anticipada, pues ésta “empareja” las variaciones en una serie de datos al no darle el peso total a la última observación. Para valores mayores de ésta, se da más peso a la observación más reciente.

Aun cuando la serie de datos no fluctúe con respecto a un nivel base constante (es decir, si $x_t = m_t + \varepsilon_t$ con $m_t = m_{t-1} + \delta_t$ y ε_t y δ_t son términos con media cero e independientes del error), este método puede dar buenos pronósticos.

Ejemplo: Siguiendo con el ejemplo anterior, se obtiene la solución según el método de suavizamiento exponencial.

Con $\alpha = 0.5$

DÍA	CLIENTES	A_t	PRONÓSTICO f_t	ERROR
0		432		
1	431	$0.5 \cdot 432 + (1 - 0.5) \cdot 431 = 432$	432	1
2	432	$0.5 \cdot 432 + (1 - 0.5) \cdot 432 = 432$	432	0
3	615	$0.5 \cdot 432 + (1 - 0.5) \cdot 615 = 523$	432	183
4	459	491	523	64
5	701	596	491	210
6	491	544	596	105
7			544	

Entonces $MAD = 93.83$

Tras minimizar la MAD (con “Solver”), obtenemos que el α adecuado es $\alpha = 0.17590673577955$, con una MAD asociada de $MAD = 73.5$, lo que claramente es menor a la calculada con el α anterior. Obteniéndose lo siguiente:

DÍA	CLIENTES	A_t	PRONÓSTICO f_t	ERROR
0		432		
1	431	432	432	1
2	432	432	432	0
3	615	464	432	183
4	459	463	464	5
5	701	505	463	238
6	491	503	505	14
7			503	

Por tanto, el valor más probable de clientes que llegarán es de 503.

2.4.3. Suavización exponencial con tendencia (Método de Holt)

El método de Holt es adecuado para una serie de datos donde la media de la distribución tiene una tendencia hacia arriba o hacia abajo (lineal) y sin variación estacional ni ciclicidad, es decir, una serie que puede modelarse como $x_t = a + bt + \varepsilon_t$, siendo a el nivel base al iniciar el periodo uno, b la tendencia por periodo y ε_t el error para el periodo t .

Se construirán auxiliares para el pronóstico.

$$L_t = \alpha x_t + (1 - \alpha)(L_{t-1} + T_{t-1}) \quad (2.25)$$

$$T_t = \beta(L_t - L_{t-1}) + (1 - \beta)T_{t-1} \quad (2.26)$$

donde:

- α y β son constantes de atenuación que varían entre cero y uno, y éstas deben elegirse de tal manera que minimicen la MAD (si tanto los valores de α como de β no son menores a 0.5 entonces es probable que haya comportamiento cíclico o variación estacional).

- L_t es el promedio ponderado entre una estimación del nivel base dado por la observación del periodo actual y $L_{t-1} + T_{t-1}$.
 $L_{t-1} + T_{t-1}$ es una estimación del nivel base del periodo t basado en periodos anteriores.
- T_t el promedio ponderado entre una estimación de la tendencia basado en el periodo actual y expresada por el aumento de la base atenuada del periodo $t - 1$ hasta el periodo t .
- T_{t-1} la estimación anterior de la tendencia.

Para comenzar el método, requerimos de:

$$L_0 = \text{primera observación del último periodo} \quad (2.27)$$

$$T_0 = \text{aumento promedio del lapso anterior} \quad (2.28)$$

Finalmente el pronóstico es

$$f_{t+k} = L_t + kT_t \quad (2.29)$$

donde k es el número de periodos por delante del tiempo t que se quiere pronosticar.

Ejemplo: Siguiendo con el ejemplo anterior, se obtiene la solución según el método de Holt (como queremos el número de clientes esperado para el día, siguiente, el pronóstico es para el periodo inmediatamente siguiente, y por ello $k = 1$).

Como suposición adicional, ya que no hay lapsos definidos (como un año es un conjunto de 12 meses), diremos que en nuestro conjunto de datos, hay dos lapsos de tres periodos cada uno.

Con $\alpha = \beta = 0.5$

DÍA	CLIENTES	AUMENTO	L_t	T_t	PRONÓSTICO f_t	ERROR
0			459	$\frac{1+183-156}{3} = 9$		
1	431	432-431=1	$0.5*431 + (1-0.5)*(459+9) = 450$	$0.5*(450-459) + (1-0.5)*9 = 0$	$459+9=468$	37
2	432	615-432=183	$0.5*432 + (1-0.5)*(450+0) = 441$	$0.5*(441-450) + (1-0.5)*0 = -4$	$450+0=450$	18
3	615	-156	526	40	436	179
4	459	242	512	13	566	107
5	701	-210	613	57	526	175
6	491	-491	581	12	671	180
7			297	-136	593	

Entonces $MAD = 116$

Ahora, con una minimización de la MAD , obtenemos que las constantes de atenuación deben ser $\alpha = 0.0453267141$ y $\beta = 0.012261343$, con una MAD asociada de 80.17. De lo que se generó:

DÍA	CLIENTES	AUMENTO	L_t	T_t	PRONÓSTICO f_t	ERROR
0			459	9		
1	431	1	467	9	468	37
2	432	183	474	9	476	44
3	615	-156	9	40	483	132
4	459	242	9	13	499	40
5	701	-210	9	57	506	195
6	491	-491	9	12	524	33
7			508	9	532	

Entonces habrá 532 clientes al día siguiente.

2.4.4. Suavización exponencial con variación estacional (Método de Winter)

El método de Winter se utiliza para predecir series de datos en las que se encuentren presentes la tendencia y variación estacional.

En lo siguiente α , β y k tienen el mismo significado que para el método anterior. Ahora, L_t , T_t y s_t se actualizan de la siguiente manera:

$$L_t = \alpha \frac{x_t}{s_{t-c}} + (1 - \alpha)(L_{t-1} + T_{t-1}) \quad (2.30)$$

$$T_t = \beta(L_t - L_{t-1}) + (1 - \beta)T_{t-1} \quad (2.31)$$

$$s_t = \gamma \frac{x_t}{L_t} + (1 - \gamma)s_{t-c} \quad (2.32)$$

con

- γ constante de atenuación entre cero y uno.
- c el número de periodos en la duración de periodo estacional ($c = 12$ para datos mensuales)
- s_t una estimación de un factor estacional multiplicativo para el periodo t , que se obtiene después de observar x_t .
- $\frac{x_t}{s_{t-c}}$ (sin variación estacional) es una estimación de la base obtenida a partir del periodo actual.

Para las estimaciones iniciales de base, tendencia y factores estacionales, utilizando datos de dos ciclos en que se presenta el comportamiento estacional se construyen:

$$T_0 = \frac{(\text{promedio durante el segundo ciclo}) - (\text{promedio durante el primer ciclo})}{c} \quad (2.33)$$

$$L_0 = (\text{promedio durante el segundo ciclo}) \frac{c+1}{2} + \frac{2c-1}{2} T_0 \quad (2.34)$$

$$s_{-k} = \frac{\frac{\text{la observación } c-k \text{ del primer ciclo}}{\text{ventas promedio durante el primer ciclo}} + \frac{\text{la observación } c-k \text{ del segundo ciclo}}{\text{ventas promedio durante el segundo ciclo}}}{2} \quad (2.35)$$

$$\text{con } k \in 0, 1, \dots, c-1$$

Al final, se tiene que el pronóstico para el mes $t+k$ es

$$f_{t+k} = (L_t + kT_t)s_{t+k-c} \quad (2.36)$$

Observación: Como se usan 3 constantes de atenuación, es difícil encontrar la combinación que minimice la MAD, y aunque los valores de α y β deben ser menores a 0.5, no es raro que el mejor valor de γ sea mayor a ese número, pues el factor estacional se actualiza durante con poca

frecuencia (sólo $\frac{1}{c}$ de los periodos), por lo que se debe dar un mayor peso a cada observación, siendo aceptable $\gamma > 0.5$.

Ejemplo: Ahora vemos a solución del ejemplo anterior con el método de Holt-Winter (con las mismas consideraciones de antes $K = 1, c = 3$)

En primer lugar, vamos a construir los S_{-j} , para $j \in \{0, 1, \dots, c - 1\}$:

$$s_{-2} = \frac{\frac{431}{3} + \frac{459}{3}}{2} = 0.85$$

$$s_{-1} = \frac{\frac{432}{3} + \frac{701}{3}}{2} = 1.08$$

$$s_{-1} = \frac{\frac{615}{3} + \frac{491}{3}}{2} = 1.07$$

Con $\alpha = \beta = \gamma = 0.5$

DÍA	LAPSO	CLIENTES	L_t	T_t	S_t	PRONÓSTICO f_t	ERROR
0			$\frac{431+432+615}{3} * \frac{3+1}{2} + \frac{(2*3-1)*19.22}{2} = 1033.39$	$\frac{459+701+491}{3} - \frac{431+432+615}{3} = 19.22$			
1	1	431	$.5 * \frac{431}{3} + (1-.5) * (1033.39 + 19.22) = 778.52$	$.5 * (778.82 - 1033.39) + (1-.5) * 19.22 = -117.82$	$0.5 * \frac{431}{3} + (1-.5) * .85 = .7$		
2	1	432	$.5 * \frac{432}{3} + (1-.5) * (778.52 - 117.82) = 531.22$	$.5 * (531.22 - 778.52) + (1-.5) * 117.82 = -1182.56$	$0.5 * \frac{432}{3} + (1-.5) * 1.08 = .94$		
3	1	615	461.64	-126.07	1.2		$(461.64 - 126.07) * 1.2 = 245$
4	2	459	436.39	-75.66	0.95		317
5	2	701	506.31	-2.87	1.23		433
6	2	491	481.11	-14.04	1.05		480
7	3						574

Entonces $MAD = 197.75$

Al minimizar la MAD , se obtuvo que, con $\alpha = 0.438873$, $\beta = 0.014153413526$ y $\gamma = 0.7215435$, $MAD = 88.75$, con los siguientes datos:

DÍA	LAPSO	CLIENTES	L_t	T_t	S_t	PRONÓSTICO f_t	ERROR
0			1033.39	19.22			
1	1	431	812.03	15.82	0.62		
2	1	432	640.84	13.17	0.79		
3	1	615	619.17	12.68	1.01	406	209
4	2	459	590.31	12.09	0.80	497	38
5	2	701	624.12	12.4	1.11	611	90
6	2	491	558.51	11.29	0.93	509	18
7	3					632	

Por tanto, el número esperado de clientes será 632.

2.5. Pruebas de hipótesis

Cuando las personas toman decisiones, inevitablemente lo hacen con base en las creencias que tienen en relación al mundo que les rodea; llevan en la mente cierta imagen de la realidad, piensan que algunas cosas son verdaderas y otras falsas y actúan en consecuencia. Una proposición adelantada tentativamente como una verdad posible es llamada **hipótesis**. A continuación se

estudia la forma en que dichas proposiciones son comprobadas de manera sistemática.

El proceso que se seguirá se denomina **prueba de hipótesis**; requiere de la confrontación de creencias con evidencia, para así tomar la decisión de conservar dichas creencias como razonables o rechazarlas por insostenibles.

Método

1. Formular hipótesis opuestas.
Mutuamente exclusivas y colectivamente exhaustivas. La primera hipótesis se denomina **hipótesis nula** (H_0); lo que se piensa que es cierto, y la segunda, denominada **hipótesis alternativa** (H_1), se refiere a aseveraciones que contradicen la sabiduría convencional. En caso de aceptarse esta última, se requiere llevar a cabo una acción.
2. Seleccionar estadístico de prueba.
El cual es calculado de una sola muestra aleatoria simple, tomada de una población de interés, para establecer la verdad o falsedad de la hipótesis nula.
3. Derivar la regla de decisión.
Especifica por adelantado (para cualquier valor del estadístico de prueba) si la hipótesis nula se acepta o se rechaza.
4. Calcular el estadístico de prueba y confrontarlo con la regla de decisión.

La estrategia básica en las pruebas de hipótesis es tratar de apoyar la hipótesis alternativa “contradiendo” la hipótesis nula. Se “contradice” a la hipótesis nula si los datos de la muestra son poco creíbles dada H_0 y sumamente verosímiles dada H_1 [23].

2.5.1. Inferencias sobre el valor de la media desconocida

Se considera una muestra aleatoria de n datos. Se cuenta con la media muestral μ_0 , así como la desviación estándar muestral σ . ¿Se puede concluir que la media μ es distinta de μ_0 con un nivel de significancia de α ?

Se establecen las dos hipótesis opuestas:

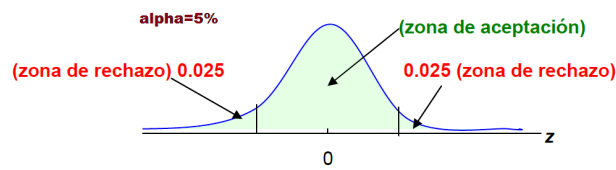
$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Dada el signo de igualdad, se usará una prueba de dos colas.

El estadístico de prueba es el valor de z para \bar{X} , como se desconoce σ , la desviación estándar muestral s proporciona un buen estimador para σ y por tanto:

$$z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \quad (2.37)$$



Ahora, dada la región de rechazo, se deriva la regla de decisión: rechazar H_0 si $z < -Z_{\alpha/2}$ o si $z > Z_{\alpha/2}$; donde $Z_{\alpha/2}$ es la probabilidad obtenida de la tabla de la distribución Normal estándar.

Si el valor de z cae fuera de la zona de rechazo, se concluye que no hay evidencia estadística de que μ sea diferente de μ_0 ; es decir, la evidencia para aceptar H_0 es estadísticamente con una significancia de $(1 - \alpha)\%$ [19].

2.5.2. Bondad de ajuste

Una prueba de bondad de ajuste usualmente envuelve el análisis de una muestra aleatoria de alguna distribución desconocida con objeto de probar la hipótesis nula de que la distribución desconocida $F(x)$ es de hecho conocida y corresponde a una distribución específica. Esto es la hipótesis nula define una distribución $F^*(x)$. La forma lógica de comparación de la muestra aleatoria con la distribución propuesta $F(x)$ es su distribución empírica $S(x)$. El problema reside entonces en determinar el tipo de prueba que mida la discrepancia entre $S(x)$ y $F^*(x)$ [19].

2.5.2.1. Prueba de Kolmogorov Smirnov

Introducida por Kolmogorov en 1933. Se sugirió tomar como base la mayor distancia entre ambas funciones como una medida; trata las observaciones individuales separadamente y así no pierde necesariamente información al combinar categorías.

Se tiene una muestra aleatoria X_1, X_2, \dots, X_n que se supone asociada con una distribución $F^*(x)$. Hipótesis:

$$H_0: \forall x \in (-\infty, \infty) F(x) = F^*(x)$$

$$H_1: \exists x \in (-\infty, \infty) F(x) \neq F^*(x)$$

Sea $S(x)$ la distribución empírica basada en la muestra X_1, X_2, \dots, X_n . La estadística de prueba para cada tipo de hipótesis es T_1 , la cual se define:

1. Sea T_1 la mayor distancia vertical entre $S(x)$ y $F^*(x)$.

$$T_1 = \text{Sup}\{|F^*(x) - S(x)|\}$$
2. Sea $T_1(+)$ la mayor distancia vertical positiva con $F^*(x)$ por arriba de $S(x)$.

$$T_1(+) = \text{Sup}\{(F^*(x) - S(x))\}$$
3. Sea $T_1(-)$ la mayor distancia vertical negativa con $F^*(x)$ por abajo del $S(x)$.

$$T_1(-) = \text{Sup}\{(F^*(x) - S(x))\}$$

$$S(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq x(1) \\ j/n & \text{si } x(j) \leq x \leq x(j+1) \\ 1 & \text{si } x(n) \leq x \end{cases}$$

Los valores de T^+ y T^- se obtienen con la regla:

$$T^+ = \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \frac{j}{n} - F(y(j)) \right\} \quad (2.38)$$

$$T^- = \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ F(y(j)) - \frac{j-1}{n} \right\} \quad (2.39)$$

Se rechaza H_0 al nivel de significancia $\alpha\%$ si la estadística T_1 , $T_1(+)$ ó $T_1(-)$ excede el valor del percentil $(1 - \alpha)\%$.

Procedimiento:

1. Se especifica la función acumulativa teórica, es decir, la distribución acumulativa esperada conforma a H_0 .
2. Se disponen los puntajes observados en una distribución acumulativa, comparando los valores de $S(x)$ con los de $F(x)$.
3. En cada valor de las distribuciones acumulativas, se sustrae $F(x)$ de $S(x)$ y con el valor desplazado de $S(x)$.
4. En la tabla de Kolmogorov se encuentra la probabilidad (de dos colas) asociada con la ocurrencia conforme a H_0 de valores tan grandes como el valor observado de T . Si esa probabilidad tiene un valor igual o menor que el estadístico calculado, se rechaza H_0 . De no contarse con dichas tablas, se calcula el siguiente valor que hace el papel de la probabilidad:

$$D = \sqrt{-\ln(\alpha/2)/(2n)} \quad (2.40)$$

2.6. Distribución beta

La distribución beta es muy flexible y es comúnmente usada para representar la variabilidad sobre un rango fijo; en una de sus más importantes aplicaciones se usa para representar la incertidumbre en la probabilidad de ocurrencia de un evento. Su valor reside en que proporciona una densidad positiva en un intervalo de longitud finita y en la amplia variedad de formas que puede asumir cuando se varían los parámetros α y β : Si son iguales es simétrica, si alguno tiene valor uno y el otro es mayor la distribución tiene forma de "J", en caso de que α sea mayor, la mayoría de los datos están más cerca del valor máximo, y en caso contrario más cerca del mínimo [15].

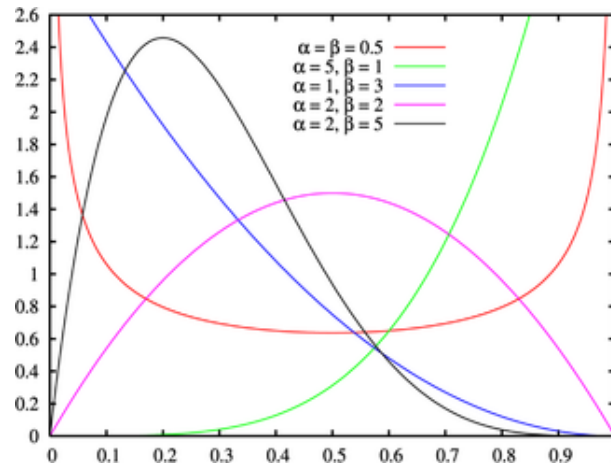
La función beta desplazada, se obtiene multiplicando la distribución beta por un factor y desplazando los resultados de algunos parámetros de ubicación para permitir que el rango de resultados se expanda más de sus límites, cero y uno.

Esta distribución, abreviadamente $\beta(A, B, \alpha, \beta)$, ($\alpha > 0, \beta > 0$), tiene por función de densidad:

$$f_X(x) = \frac{(x-A)^{\alpha-1} * (B-x)^{\beta-1}}{\beta(\alpha, \beta) * (B-A)^{\alpha+\beta-1}}$$

donde $\beta(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha) * \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$ es la denominada "Función Beta"

Cuando $A = 0$ y $B = 1$, se tiene la función de distribución beta estándar.



Aproximaciones por el "Método Beta"

Se usan tres tipos de estimaciones para obtener información básica de la distribución de probabilidad:

- **Estimación más probable (m)**
- **Estimación optimista (o)**: En las condiciones más favorables.
- **Estimación pesimista (p)**: En las condiciones más desfavorables.

Las estimaciones optimista y pesimista se encuentran en los extremos de lo que es posible; mientras que la estimación más probable proporciona el punto más alto de la distribución de probabilidad.

Por la descripción de la distribución, se supone que la forma de la distribución de probabilidad es una distribución beta.

Definimos

μ = Media de la distribución de probabilidad beta

σ^2 = Varianza de la distribución de probabilidad beta

En particular para la distribución beta casi todos los datos se encuentran dentro del siguiente intervalo: $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$, es decir que en este caso la diferencia entre la observación mayor y la menor es $|p - o| = 6\sigma$, por lo que una expresión aproximada para la varianza es:

$$\sigma^2 = \left(\frac{p - o}{6} \right)^2$$

De la misma forma, obtenemos que una expresión aproximada para la media es:

$$\mu = \frac{o + 4m + p}{6}$$

La media (μ) no necesariamente coincide con el dato más probable (m), pues la posibilidad de valores *mucho* más grande "empuja" la media hacia arriba, pero μ por lo general está bastante cerca de m .

Para cualquier distribución beta, su media y su varianza están dadas por las expresiones:

$$\mu = A + (B - A) \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

$$\sigma^2 = \frac{(B - A)^2 \alpha \beta}{(\alpha + \beta)^2 (\alpha + \beta + 1)}$$

De esta manera, mediante la resolución de un sistema de ecuaciones, llegamos a que los valores de α y β dependientes de la media y la varianza, están dados por las siguientes expresiones:

$$\alpha = - \frac{(A - \mu) * (\mu^2 + \sigma^2 + B * A - \mu(A + B))}{(A - B) * \sigma^2} \quad (2.41)$$

$$\beta = \frac{(A + 2B) * \mu^2 - 2A * B * \mu + B^2 * (A - \mu) + \sigma^2 * (B - \mu) - \mu^3}{(A - B) * \sigma^2} \quad (2.42)$$

Ejemplo: Tomemos el caso en que se debe realizar una actividad, se quiere saber el tiempo estimado que tardará llevar a cabo dicha actividad y se sabe que las estimaciones optimista, más probable y la pesimista son: $o = 6$, $m = 9$ y $p = 18$ (en horas).

Aplicando las fórmulas descritas anteriormente para la los parámetros para la distribución beta:

$$\sigma^2 = \left(\frac{18 - 6}{6} \right)^2 = 4,$$

$$\mu = \frac{6 + 4 * 9 + 18}{6} = 10,$$

$$\alpha = - \frac{(6 - 10) * (10^2 + 4 + 18 * 6 - 10(6 + 18))}{(6 - 18) * 4} = \frac{7}{3} \text{ y}$$

$$\beta = \frac{(6 + 2 * 18) * 4^2 - 2 * 6 * 18 * 10 + 18^2 * (6 - 10) + 4 * (18 - 10) - 10^3}{(6 - 18) * 4} = \frac{14}{3}$$

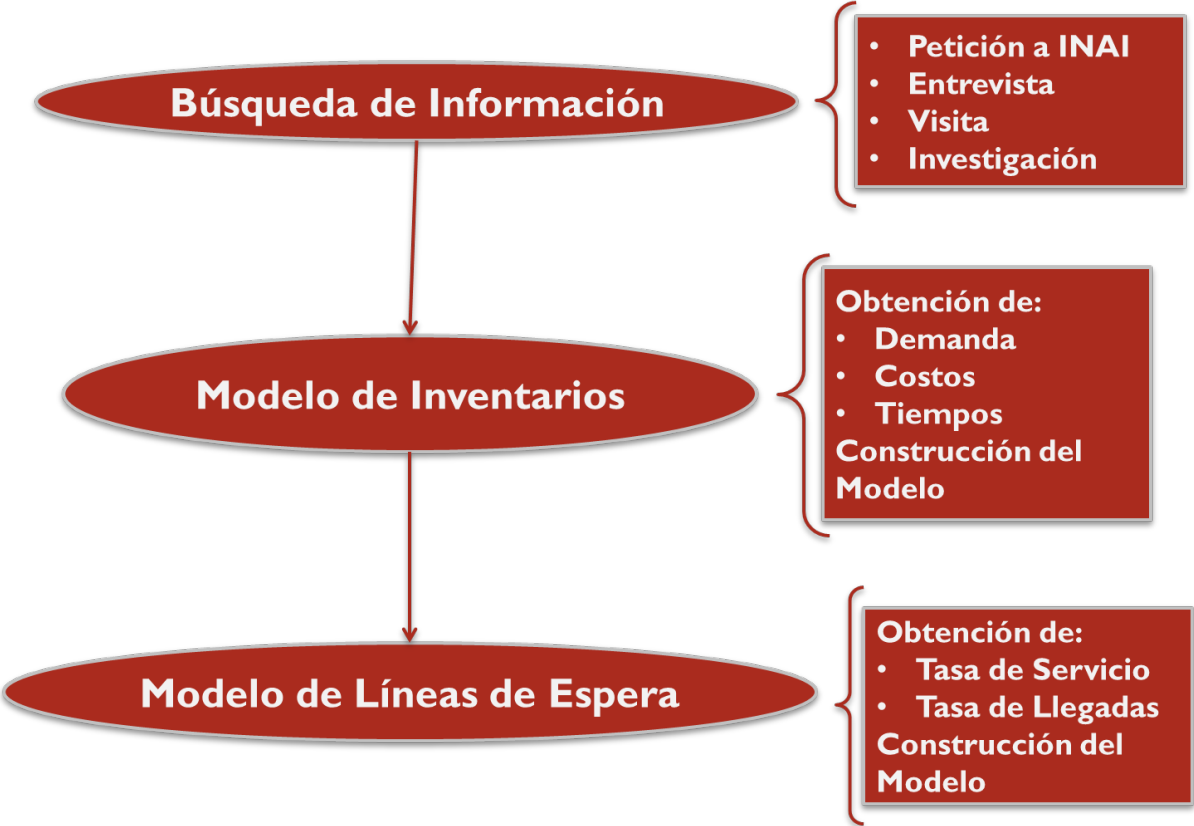
y la función “INV.BETA.N(ALEATORIO(), α , β , o , p)”*, obtenemos una simulación de una función de distribución Beta: 7.50055606367277. Así, se concluye que el tiempo estimado en que se terminará de realizar la actividad es de siete horas y media.

*El aleatorio genera un dato entre cero y uno que se asocia a la probabilidad de la simulación [4].

Capítulo 3

Metodología

A continuación se describe la manera en que se consiguió y se procesó la información para dar paso a la construcción de los modelos tanto de inventarios como de líneas de espera. Como paso inicial se describe la búsqueda de la información necesaria para generar los insumos de los modelos, a continuación se detalla la forma en que se procesó la información para obtener dichos insumos y por último se exponen los modelos elaborados.



3.1. Búsqueda de la información

Como primer paso se definió la información necesaria para satisfacer los requerimientos de cada modelo. Se recurrió a distintas fuentes y a continuación se muestran los resultados obtenidos.

3.1.1. Datos para el modelo de Inventarios

Los insumos de los modelos utilizados son: datos para estimar la demanda, costos y tiempos involucrados en los modelos.

Demanda

Se hizo una petición, por medio del Instituto Nacional de Acceso a la Información (INAI), al Instituto Mexicano del Seguro Social (IMSS), en específico al Hospital de Gineco-obstetricia número cuatro “Luis Castelazo Ayala” con respecto a su área de farmacia (Véase B).

Se obtuvieron en un archivo de “Excel” datos de la demanda diaria de los 211 medicamentos que trabajan, de los años 2014, 2015, 2016 y del mes de enero hasta el mes de marzo de 2017 (Figura 3.1).

	B	D	E	F	G
1	DESCRIPCION	FECHA_REG	CANTIDAD	PRE_UNIT	IMPORTE
2	DANAZOL CAPSULA O COMPRIMIDO CADA CAPSU	02/06/2014 01:36:32 a.m.	4	85.7	342.8
3	PIROXICAM CAPSULA O TABLETA CADA CAPSULA	02/06/2014 01:36:32 a.m.	1	2.12	2.12
4	DANAZOL CAPSULA O COMPRIMIDO CADA CAPSU	02/06/2014 01:36:44 a.m.	1	85.7	85.7
5	METRONIDAZOL OVULO O TABLETA VAGINAL CAD	02/06/2014 12:37:25 p.m.	1	4.02	4.02
6	AMOXICILINA -ACIDO CLAVULANICO TABLETA CAD	02/06/2014 12:37:43 p.m.	1	18.99	18.99
7	PARACETAMOL TABLETA CADA TABLETA CONTIEI	02/06/2014 12:40:25 p.m.	2	2.45	4.9
8	METILDOPA TABLETA CADA TABLETA CONTIENE	02/06/2014 12:40:47 p.m.	1	11.65	11.65
9	HIDRALAZINA TABLETA CADA TABLETA CONTIENE	02/06/2014 12:40:47 p.m.	3	6.91	20.73
10	AMPICILINA TABLETA O CAPSULA CADA TABLETA	02/06/2014 12:41:13 p.m.	1	7.65	7.65
11	DICLOFENACO CAPSULA O GRAGEA DE LIBERACI	02/06/2014 12:41:13 p.m.	1	4.19	4.19
12	PARACETAMOL TABLETA CADA TABLETA CONTIEI	02/06/2014 12:43:04 p.m.	2	2.45	4.9
13	CLINDAMICINA CAPSULA CADA CAPSULA CONTIEI	02/06/2014 12:43:04 p.m.	2	14.79	29.58
14	ANASTROZOL TABLETA CADA TABLETA CONTIENE	02/06/2014 12:43:41 p.m.	1	918.5	918.5
15	COMPLEJO B CADA TABLETA, COMPRIMIDO O CA	02/06/2014 12:45:50 p.m.	1	3.7	3.7
16	PIROXICAM CAPSULA O TABLETA CADA CAPSULA	02/06/2014 12:45:50 p.m.	1	2.12	2.12
17	CALCIO COMPRIMIDO EFERVESCENTE CADA CON	02/06/2014 12:46:03 p.m.	3	17.03	51.09
18	CALCITRIOL CAPSULA DE GELATINA BLANDA CAD	02/06/2014 12:46:03 p.m.	1	9.8	9.8
19	ACIDO ALENDRONICO TABLETA O COMPRIMIDO C.	02/06/2014 12:46:03 p.m.	1	12.79	12.79
20	ERITROMICINA CAPSULA O TABLETA CADA CAPSI	02/06/2014 12:46:12 p.m.	2	20.75	41.5
21	DESOGESTREL Y ETINILESTRADIOL TABLETA CAD	02/06/2014 12:46:15 p.m.	2	16.09	32.18
22	DANAZOL CAPSULA O COMPRIMIDO CADA CAPSU	02/06/2014 12:46:24 p.m.	4	85.7	342.8
23	NISTATINA OVULO O TABLETA VAGINAL CADA OVI	02/06/2014 12:46:39 p.m.	1	3.38	3.38

Figura 3.1: Parte de la información recibida sobre medicamentos.

Hoja de “Excel” que muestra la información que fue enviada por el INAI. Se muestran por orden: descripción del medicamento que se pide en la receta, fecha en que se hace el registro de la receta en la farmacia, unidades que se piden de medicamento en cuestión, su precio unitario y el costo total por receta.

Costo unitario de adquisición

De la petición al INAI antes mencionada se obtuvo el costo unitario de cada medicamento. Para este costo se consideró, además, el costo de transporte de medicamentos (por cada unidad de medicamento) desde los distintos almacenes que surten al instituto hasta el hospital. Dado que no se proporcionó información sobre el costo de transporte en que incurre la institución,

se calculó de manera indirecta mediante una búsqueda de costos por transporte en general resultando ser de \$2600 por viaje [21]. Se observó que no es un sólo medicamento el que se transporta, por lo que en los datos de demanda se contabilizó cuántos medicamentos hicieron falta simultáneamente y con ello se obtuvo la cantidad aproximada de medicamentos que debía llevar el transporte, se obtuvieron tres datos para hacer una simulación con una distribución beta (estimación más probable, optimista y pesimista): se agrupó mensualmente la demanda de los medicamentos mediante una tabla dinámica (Figura 3.2) y posteriormente se contaron los datos que eran cero por mes (Figura 3.3) obteniéndose la cantidad de meses en que hizo falta dicho medicamento, pues por ser de uso ginecológico no necesariamente un dato cero implica que no fue requerido, pero que no se pudo entregar por no tenerlo en inventario. De esas cuentas, se obtuvieron el número promedio de ceros en un mes, el número mínimo y el máximo, para así generar las estimaciones necesarias para hacer la aproximación a una distribución beta descrita en el capítulo 2 sección 6: $m = 55$ (media), $o = 63$ (optimista), $p = 46$ (pesimista).

	A	B	C	D	E	AP	AQ	AR	AS	AT	AU	BJ	BK	BL	BM	BN	BX	BY	BZ	CG	CH	CI	CM	CP	CQ
1																									
2																									
3	Suma de Etiquetas																								
Etiquetas	ACEN	ACICI	ACID	ACID	CALC	CAPT	CARB	CASE	CELE	CIPRO	DESM	DESO	DEXA	DEXM	DEXT	ENAL	ENOX	ENOX	ESTR	FENA	FENO	FUMA	GLIB	GONA	
5 2014/01	2	3		16	53	20	13	2		434		206	47			16	164		11	27			125		
6 2014/02		2		3	39	6	10			363		150	21			4	25	126		10	15			110	
7 2014/03	1	4		10	76	16	30	2		372		230	23			2	19	129		15	23			110	9
8 2014/04	4	2		7	46	13	16	2		411		239	14			1	9	134		5	40			131	2
9 2014/05	3	3	1	5	36	43	26			405	1	188	8			1	11	81		6	26			122	3
10 2014/06	3	4		6	68	21	27	3		359	1	169	39				10	148		5	30	1		133	
11 2014/07	6	3	1	5	57	11	30	2		590		257	9				12	199		14	27			145	
12 2014/08	6	3	1	4	83	13	20	7		410	1	257	22				17	183		6	26			131	
13 2014/09	9	6		4	80	13	19	12		546	1	251	70			3	14	266		10	25			161	
30 2016/02	2	4		24	46	14	2			573		157	18			9	18	126		9	13			98	
31 2016/03	4	4	2	15	84	8	11			534		172	26			6	31	215		20	22			144	1
32 2016/04	11	2		6	42	7	9			390		132	17			2	33	210		14	29			122	1
33 2016/05	4	3		13	17	4	8			350		109	22			4	16	312		21	15			120	2
34 2016/06	2	8	2	6	12	2	9			400		115	6				6	507		25	22			159	
35 2016/07	2	1	2	3	42	6	15			285		152	8			1	16	294		25	21			137	10
36 2016/08	2	10		10	63	4	27			279		185	17			2	24	412		30	28			168	2
37 2016/09		2	1	7	41	13	8			341		174	22				30	201	15	19	26			158	4
38 2016/10	2	1	1	13	42	4	30			330		161	15				25	408		20	11			175	2
39 2016/11	6	1	1	21	56	4	22			362		156	11			2	31	309		27	12			149	4
40 2016/12	4	2	1	19	34	3	27			369		180	13				23	244		34	22			95	1
41 2017/01	3	3	3	13	34	8	21			393		164	24				17	246		23	25			29	2
42 2017/02	2	2		11	26	4	17			450		138	6			2	32	260		4	26			36	11
43 2017/03	1	4	3	17	30	6	13			2	350		144	16			18	181		22	32			2	3
44 Total gen	159	130	33	524	1946	600	659	61	2	18015	7	6825	803	1	92	833	7781	15	543	1051	3	4622	50	49	
45																									
46																									

Figura 3.2: Obtención de medicamentos a transportar (primer paso)

Tabla dinámica que muestra la cantidad de medicamento que fue demandada durante cada mes:

Se realizó una tabla dinámica para sumar la demanda de cada medicamento (se recuerda que los datos eran diarios), para contar con la cifra por mes. En el renglón 4 se muestra el nombre del medicamento y la columna A muestra los meses de los años de los que se tuvo la información (las celdas que tienen valor cero, por las especificaciones del software, no dejan visible el número).

Figura 3.3: Obtención de medicamentos a transportar (segundo paso)

Hoja de “Excel” que muestra de la columna B a DB los medicamentos con que cuenta el hospital y en la columna DC el total de datos ceros que hubo en el mes correspondiente. Todas las celdas que anteriormente no tenían valor dentro de la tabla, se cambian por un valor cero, y se destacan en la imagen. Se suman las celdas que tienen cero de cada región. Por otro lado, en las columnas DD y DE se calculan como se mencionó anteriormente las estimaciones requeridas para realizar la aproximación a la función de distribución beta (el promedio para $m = 55$, el mínimo para $p = 46$ y el máximo para $o = 63$).

Como el costo debe ser unitario, también se aproximó (no se contaba con el dato certero) el número de unidades que se almacenan de cada tipo de medicamento, para éste se obtuvieron los siguientes datos: 500, 350, 400, 300, 200, 350, 500 [9] (según la página de internet, en ese momento se contaban con ese número de unidades de algunos de los medicamentos), se calcularon la media, el mínimo y el máximo de estos datos, por lo que las estimaciones para poder realizar una aproximación a la función de distribución beta fueron los siguientes: $m = 371$, $o = 500$, $p = 350$.

Costo por ordenar

Para este costo sólo se consideró el gasto administrativo que genera el proceso de orden en caso de no haber un medicamento en existencia en la farmacia: “Compra Emergente” [7]. Este costo está dado por los salarios de las personas involucradas en el manejo de inventario de medicamentos tanto en la farmacia como en el departamento de abasto [12], según el procedimiento de compra emergente que se describió en el capítulo 1, sección 4:

1. Auxiliar de Almacén (quien avisa al Director Administrativo): \$ 4,187.60 mensuales
2. Coordinador de Almacén (genera la orden para verificar el presupuesto): \$ 5,979.12 mensuales
3. Químico Clínico Jefe de Sección (registra los medicamentos y revisa el inventario): \$ 8,454.42 mensuales
4. Oficial de Servicios Administrativos (es el Director Administrativo, quien se encarga de los trámites externos) : \$ 5,067.00 mensuales

Costo por mantener

Para este costo se consideró el costo de la renta por el espacio que ocupa cada medicamento, así como el salario del oficial de almacén que cuidaría los medicamentos. Para ello se hizo otra petición al INAI (Véase C y D) obteniéndose como respuesta las dimensiones del espacio destinado a almacenar los medicamentos (126 m^2 de área por 2.43 m de altura), además se investigó el costo por metro cuadrado de un alquiler: Se dividió el costo de la renta de una bodega (\$41,100) entre su área (300 m^2) [5]. Por otro lado, se consiguió el salario del Oficial de almacén (\$ 5,067.00 mensuales) [12].

Costo por faltantes

Este costo consideró el tiempo que pierden los derechohabientes en la fila esperando sus medicamentos, la cantidad de medicamentos faltantes y un salario mínimo diario (\$80.04 para la zona única [18]) para cuantificar en términos económicos esa pérdida de tiempo, así como el salario de quien atiende (Oficial de farmacia), \$5970.9 [12]. Gracias al modelo de líneas de espera se calculó el tiempo de espera en el sistema, resultando ser de 0.04 horas. Asimismo se consideró el tiempo que tardan en ser atendidos ($0.04 - 0.00027 = 0.04$ horas). Por otro lado, se consideró el costo por transporte de las personas al hospital, se utilizó como mínimo \$5.00 para quien vive cerca del hospital, además se investigó una tarifa del transporte máxima de \$142.00 obteniendo dicha tarifa de una empresa independiente de transporte [22].

Cantidad de faltantes

Para considerar la cantidad de medicamentos faltantes, dado que el hospital no tenía forma de cuantificar este dato, se realizó una visita al hospital para contabilizarlos personalmente:

En primer lugar se decidió acudir tres días (durante todo el día) a la institución para contabilizar los medicamentos que faltaran, de manera que se obtuvieran tres datos que permitieran hacer uso de una distribución beta y aproximar una cifra de la cantidad de faltantes; para elegir qué días acudir (de lunes a viernes), se le asignó a cada día un número del uno al cinco y mediante una simulación de una variable aleatoria uniforme $1, \dots, 5$ (la función = *ALEATORIO.ENTRE*(1,5) de “Excel”); se eligió el número 3, por lo que la visita fue de miércoles a viernes.

Posteriormente se cuestionó a los pacientes si habían obtenido todos sus medicamentos y en caso de que la respuesta fuera negativa se registró cuál medicamento era el faltante y se contabilizó las unidades por medicamento que faltaron en cada día, obteniéndose: 10, 2, 5, 2, 7, 1, 10, 6, 3, por lo que las estimaciones para el uso de la distribución beta fueron: $m = 5$, $o = 1$, y $p = 10$.

Tiempo de abastecimiento

Considerando que tampoco se pudo proporcionar información en este rubro, se procedió a calcularlo por medio de la demanda:

Primero, se notó que en el rubro de demanda (obtenida mediante el INAI) se presentaban datos cero consecutivos por cierto periodo, y derivado de las observaciones hechas en la visita se infirió (por la manera en que se atiende en la farmacia) que la razón de ello no necesariamente era que no se requiriera ese medicamento en esos días y sí, en cambio, que no había existencia de

dicho medicamento; por tales motivos, se contabilizaron los ceros consecutivos dada la agrupación mensual hecha anteriormente (ver 3.2) para obtener el total de medicamentos a transportar, se contaron los ceros consecutivos que había de cada medicamento *Figura 3.4*) y se obtuvieron 421 datos mensuales *Figura 3.5*), los cuales arrojaron los siguientes valores: el mínimo fue 1, el máximo 38, y el más probable fue 2; como eran datos mensuales, se multiplicaron por los 20 días laborales que tiene un mes, obteniéndose: $o = 20$, $p = 760$ y $m = 40$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
1	1	1	1	1	38	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3	1	1		optimista	20
2	1	1	6	1	9	2	1	1	1	1	1	14	1	12	1	1	1	3	1	1		pesimista	760
3	1	1	8	1	10	2	1	1	1	1	1	19	1	2	3	1	1	10	1	1		probable	40
4	1	1	21	1	13	2	2	1	1	1	1	1	2	2	5	1	1	20	1				
5	1	1	2	2	1	3	2	1	1	1	1	1	1	27	5	1	1	1	3				
6	1	1	13	1	29	3	2	1	4	2	1	2	1	1	1	1	2	1	17				
7	1	1	20	1	1	4	2	1	1	2	1	18	1	1	2	3	3	1	1				
8	1	3	2	1	1	4	2	2	1	2	2	1	2	1	4	3	4	4	1				
9	2	5	2	1	1	4	3	2	1	3	3	1	2	1	22	3	5	9	1				
10	2	15	2	2	1	1	4	3	1	3	3	4	4	1	1	4	1	23	3				
11	3	15	9	2	1	1	1	1	1	4	3	26	1	1	1	1	1	1	23				
12	4	23	17	4	1	1	1	1	1	3	30	5	1	1	2	4	7	1	7	1			
13	5	6	1	25	2	2	1	1	1	1	7	17	1	1	6	9	1	28	1				
14	1	11	1	1	6	2	1	1	1	1	3	1	1	2	22	10	2	1	3				
15	1	20	11	5	1	3	2	2	1	1	34	1	1	7	1	1	2	1	9				
16	1	1	17	5	2	1	4	2	1	1	3	1	1	8	1	1	2	2	20				
17	1	1	1	7	1	2	4	2	1	2	36	2	2	17	3	21	1	16	2				
18	2	1	15	16	1	3	3	2	2	2	4	2	3	9	5	1	2	20	2				
19	2	1	2	1	4	5	5	11	20	5	14	3	3	28	15	1	5	8	2				
20	3	1	24	1	26	21	10	11	1	19	19	3	3	5	21	1	25	9	3				
21	4	3	1	1	13	6	18	3	1	1	1	18	6	9	19	1	1	18	3				
22	5	25	6	18	24	32	1	34	1	1	27	1	1	32	19	2	1	6	4				

Figura 3.5: Obtención de unidades de Medicamentos (segundo paso)

Hoja de “Excel” que muestra agrupados los datos a los que hace referencia la hoja anterior, de los cuales se obtuvieron el valor mínimo, el máximo y el promedio.

Horizonte de planeación

De la entrevista realizada al personal de la farmacia, se obtuvo que los días que labora son de lunes a viernes, por lo que se consideró un horizonte de planeación anual de 250 días.

3.1.2. Datos para el modelo de Líneas de Espera

Los insumos de este modelo son: Tiempos entre llegadas de pacientes a la farmacia, datos sobre el tiempo que tarda cada servidor en atender a cada paciente y el número de servidores que atienden a los derechohabientes en ventanilla.

Tiempo entre llegadas

Para estos tiempos, del archivo recibido tras la primera petición al INAI se obtuvieron los registros del momento en que la receta entraba al sistema, es decir, el momento en que iniciaba el servicio; dado que no era elevado el número de pacientes que se acumulaban (se sabe por la observación de la visita al hospital) se consideró que ese fue el momento en que entraron al sistema de líneas de espera. De estos datos, al calcularse la diferencia entre cada par de tiempos consecutivos, se consiguió tener el tiempo entre llegadas (en horas).

Tiempo de atención

De la visita al hospital, se cronometró el tiempo en que se atendía a un paciente. Además, se cuestionó a los pacientes el número de medicamentos que fue a recibir. Con lo anterior, y para hacer homogénea la información y tener un tiempo por unidad, se dividió el tiempo entre la cantidad de medicamentos requeridos.

Número de servidores en el sistema

Al visitar la farmacia y observar el modo de atención al paciente en ventanilla, se advirtió que a pesar de que no se encontraban todo el tiempo en una ventanilla determinada y ser más personas laborando dentro de la farmacia que podían distribuir los medicamento (al haber sólo tres ventanillas), se contaba con tres servidores que atendían a los pacientes.

3.1.3. Forma de trabajo actual de la farmacia de la institución

Aunado a lo anterior, en base a la visita al hospital mencionada anteriormente, se observó la forma en que funciona su farmacia, como se detalló en la descripción del objeto de estudio del capítulo 1.

3.2. Aplicación de teoría de inventarios

3.2.1. Construcción de los insumos

Para la obtención de la demanda, en primer lugar, dada la magnitud de la información, se ordenaron los medicamentos respecto a la cantidad demandada de cada uno de ellos (porcentaje del total de la demanda del horizonte de estudio), con el propósito de seleccionar aquellos que representaron el 80 % (en específico el 80.53 %) de la demanda total en la farmacia del hospital; los cuales representan, además, el 15.17 % de todos los medicamentos que maneja la farmacia. Tales medicamentos sólo se enlistan (*Véase E*) y se hace la aclaración de que a partir de este momento se muestra el procedimiento realizado exclusivamente con un medicamento (el de clave 010.000.0101.00) y al final únicamente se señala el resultado obtenido de cada modelo de inventarios propuesto para cada uno de los 32 medicamentos especificados.

3.2.1.1. Obtención de la demanda

Aplicación de los métodos de pronósticos

Se hace uso de los datos de la demanda del medicamento de los tres primeros años (2014, 2015 y 2016) para aplicar la metodología pertinente de pronósticos y así obtener el pronóstico de demanda para el año 2017 mediante el uso de la herramienta “Excel”.

Como primera consideración, se listaron los días del año futuro 2017, excluyendo fines de semana (pues la farmacia sólo labora entre semana) y los futuros días no laborales [16].

Se aplicaron cuatro metodologías de pronósticos, cada uno de los cuales tiene asociado una MAD, y mediante a comparación de las cuatro se consideró la menor para cada medicamento; además se aplicó una prueba de hipótesis para verificar su suposición de que la demanda de cada

medicamento sigue una función de distribución; se usa una significancia de 95% y de 98% y la tabla de la Normal arroja un valor de 1,96 y de 2,325 respectivamente.

Como paso inicial, para un mejor manejo de la información, se agrupó la demanda en forma semanal.

Aplicación de Promedios móviles

Se aplicó una plantilla de “Excel” creada para el pronóstico de promedios móviles, a continuación se muestra dicha plantilla, donde también se puede apreciar la MAD asociada:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	ID	Día	Demanda	Pronóstico	Error			K	7
2	1	2014/1	25					MAD	9.7533
3	2	2014/2	37						
4	3	2014/3	45						
5	4	2014/4	38						
6	5	2014/5	37						
7	6	2014/6	61						
8	7	2014/7	47						
9	8	2014/8	47	41	5.57				
10	9	2014/9	47	45	2.43				
11	10	2014/10	40	46	6.00				

Figura 3.6: Promedios Móviles y su MAD

Plantilla de “Excel” que permite obtener un pronóstico según el método de promedios móviles. En las columnas A y B se aprecian los datos de orden y tiempo para la demanda del medicamento 010.000.0101.00, la columna C muestra la cantidad del medicamento que fue demandado en la semana correspondiente, en la columna D se calcula el pronóstico según la ecuación 2.22 (el valor estimado para la demanda en esa semana según esta metodología; por ejemplo, si queremos saber qué demanda habrá para la semana 8 dado que los datos de la demanda en las semanas anteriores son las observadas en la columna C, calculamos su promedio, se estima que habrá una demanda de 41 unidades del medicamento) y en la E la diferencia en valor absoluto del pronóstico y el dato real; por último, en las columnas H e I se obtiene la MAD asociada (el promedio de los valores de la columna E) y se muestra el valor de K (el número de observaciones que se utiliza para calcular el promedio móvil).

Se procedió a hacer una prueba de hipótesis para verificar si los errores calculados fueron cero (Figura 3.7).

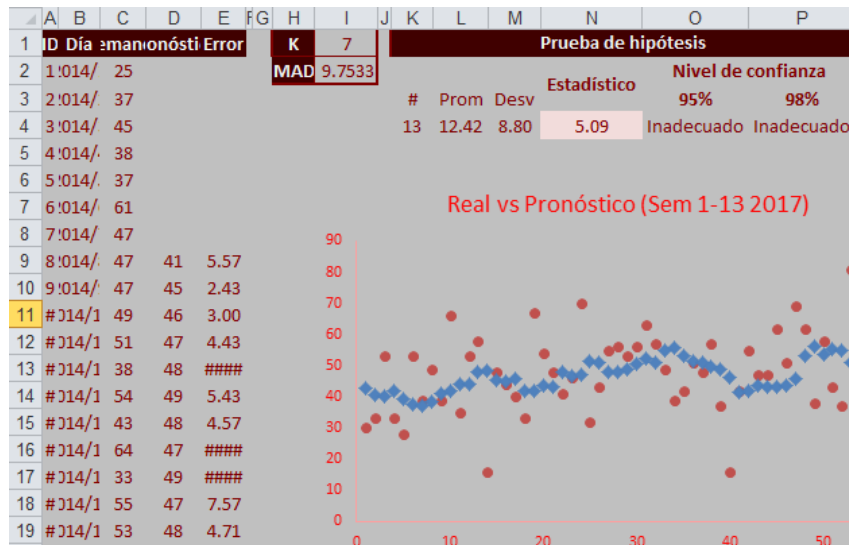


Figura 3.7: Prueba de hipótesis de que la media de los errores es cero

Se muestra la misma información sobre el pronóstico y se añaden los cálculos para realizar la prueba de hipótesis para asegurarnos de que la suma de errores es cero a partir de la columna K: Los primeros tres números son el total de datos con que se cuenta, su promedio y su desviación estándar, el estadístico se calcula mediante la fórmula 2.37 y bajo el nivel de confianza se hace la comparación del estadístico calculado con el de tablas como se explica en la sección 2.5.1, en caso de cumplir la desigualdad se observa “Media 0” y en caso contrario “Inadecuado”.

Como siguiente paso, se calculó la demanda prevista para el año 2017, considerando la demanda histórica de enero hasta marzo y los pronósticos obtenidos para el periodo comprendido entre los meses abril y diciembre (columna R de la Figura 3.8).

Por último, dado que el número K fue arbitrario, hubo de elegirse de manera correcta su valor (el que minimice la MAD), y esto se logró usando la función “Solver” del software “Excel” (Figura 3.8).

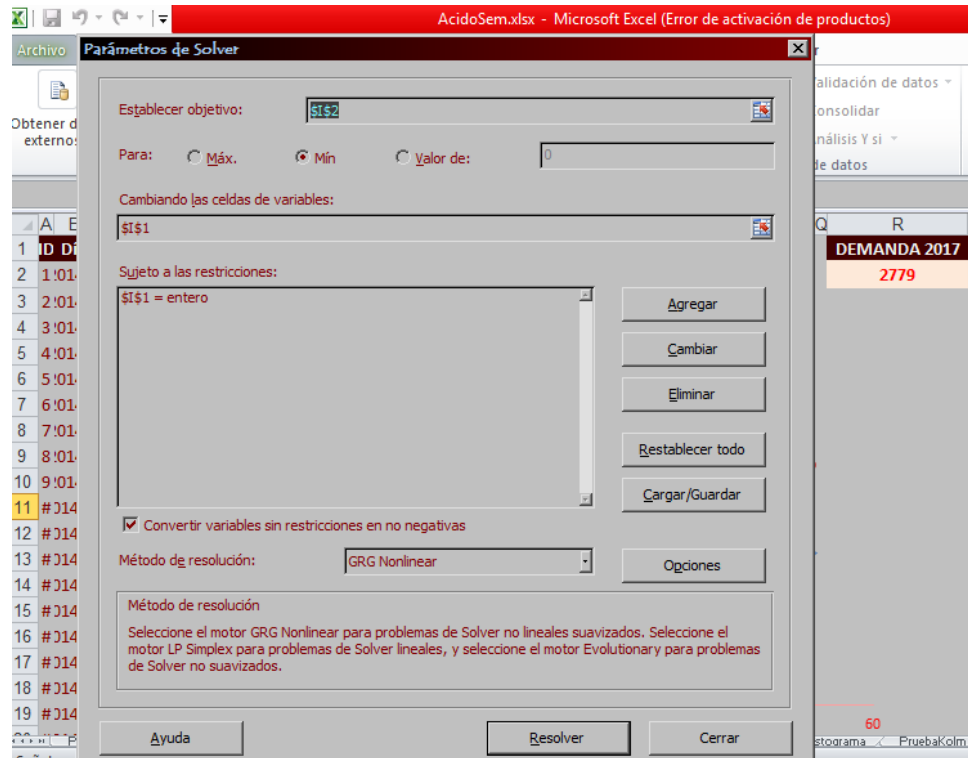


Figura 3.8: Plantilla de “Solver” para obtener K

Se muestran la ventana de la herramienta “Solver” y la demanda calculada para el 2017. La ventana de “Solver” modifica a la celda que contiene al número de observaciones que utiliza el pronóstico (K) para minimizar la MAD, como restricción tiene que K debe ser entero.

Aplicación de Suavizamiento exponencial

Para este método se diseñó una plantilla de “Excel” con la que se obtuvo el pronóstico de suavizamiento exponencial, en la Figura 3.9 se muestra dicha plantilla y se puede apreciar la MAD asociada.

	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Día	Demanda	Pronostico	Error			α=	0.160945859
2	2014/1	25	37	12.00	4		MAD	9.7626
3	2014/2	37	35	1.93	65			
4	2014/3	45	35	9.62	0			
148	2016/42	56	50	6.31	13			
149	2016/43	63	51	12.30	5			
150	2016/44	57	53	4.32	32			
151	2016/45	49	53	4.38	31			
152	2016/46	39	53	13.67	14			

Figura 3.9: Suavizamiento Exponencial y su MAD

Plantilla de “Excel” que permite obtener un pronóstico con el método suavizamiento exponencial. En la columna D se calcula el pronóstico según las ecuaciones 2.23 y 2.24, y en la E los errores para calcular la MAD del método; por último, en las columnas H e I se obtiene la MAD asociada y se muestra el valor de α (el ponderador entre la observación real y el pronóstico anterior descrito en la sección 2.4.2).

A continuación se realizó una prueba de hipótesis para verificar si los errores calculados fueron cero.

Como siguiente paso, se calculó la demanda prevista para el año 2017 y por último, hubo de elegirse de manera correcta el valor de α en la Figura 3.10 (usando “Solver”):

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	
1	Día	Demanda	Pronostico	Error		α=	0.160945859	Adecuado	Prueba de hipótesis				DEMANDA 2017						
2	2014/1	25	37	12.00	4	MAD	9.7626												
3	2014/2	37	35	1.93															
4	2014/3	45	35	9.62															
5	2014/4	38	37	1.07															
6	2014/5	37	37	0.10															
7	2014/6	61	37	23.92															
8	2014/7	47	41	6.07															
9	2014/8	47	42	5.09															
10	2014/9	47	43	4.27															
11	2014/10	49	43	5.58															
12	2014/11	51	44	6.68															
13	2014/12	38	45	7.39															
14	2014/13	54	44	9.80															
15	2014/14	43	46	2.78															
16	2014/15	64	45	18.67															
17	2014/16	33	48	15.34															
18	2014/17	55	46	9.13															
19	2014/18	53	47	5.66															

Figura 3.10: Plantilla de “Solver” para obtener los parámetros

Se muestran la ventana de la herramienta “Solver” y la demanda calculada para el 2017. La ventana de “Solver” modifica a la celda que contiene al parámetro α para minimizar la MAD, como restricción $0 < \alpha < 1$.

Aplicación de Suavizamiento exponencial con tendencia

Se realizaron en una hoja de “Excel” los cálculos necesarios para el pronóstico de suavizamiento exponencial con tendencia y en la Figura 3.11 se muestran, además se aprecia la MAD asociada. Después se hizo la prueba de hipótesis para verificar si la media de los errores calculados era cero.

Al final se calculó la demanda futura para el año 2017 de la misma forma que en los anteriores métodos y hubo de elegirse de manera correcta el valor de α y β usando “Solver”. (Figura ??).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	ID	Día	Demanda	Aux	Lt	Tt	Pronostico	Error			$\alpha=$	0.180028
2	0				31	0					$\beta=$	0.000000
3	1	2014/1	25	12	30	0	31	6	15		MAD=	9.9723
4	2	2014/2	37	8	31	0	30	7	9			
5	3	2014/3	45	-7	34	0	31	14	13			
108	106	2016/1	49	4	38	0	36	13	10			
109	107	2016/2	53	-8	41	0	38	15	21			
110	108	2016/3	45	-3	42	0	41	4	37			
111	109	2016/4	42	-16	42	0	42	0	98			
112	110	2016/5	26	21	39	0	42	16	38			
113	111	2016/6	47	-11	41	0	39	8	5			

Figura 3.11: Suavizamiento Exponencial con Tendencia y su MAD

Hoja de "Excel" para obtener un pronóstico de la demanda con el método de Holt. La columna D es un cálculo auxiliar que se refiere a la diferencia entre la demanda de la semana siguiente y la actual, las columnas E, F y G se generan con las fórmulas 2.25-2.29, y en la H se obtienen los errores para calcular la MAD del método; por último en las columnas K y L se muestra el valor de α y β (ponderadores descritos en la sección 2.4.3) y se obtiene la MAD asociada.

Aplicación de Suavizamiento exponencial con ciclicidad

Para este último método de pronósticos, se siguieron los mismos pasos que en los anteriores. Primero el proceso para obtener los pronósticos por semana por medio de suavizamiento exponencial con ciclicidad (Figura 3.12), luego la prueba de hipótesis para verificar que la media de los errores es cero y por último el cálculo de la demanda para el 2017, así como la determinación de los parámetros adecuados para minimizar la MAD del método.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	ID	Día	Demanda	Lt	Tt	Pronostico	Error							$\alpha=$	0.995444
2	0			38.09	-0.12					S-i				$\beta=$	0.009038
3	1	2014/1	25	39.33	-0.11	25	0.08	0	S-52	0.64	1			MAD=	0.0571
4	2	2014/2	37	34.83	-0.15	37	0.14	0	S-51	1.06	2				
5	3	2014/3	45	40.95	-0.10	45	0.14	0	S-50	1.10	3				
6	4	2014/4	38	34.65	-0.15	38	0.14	0	S-49	1.10	4				
7	5	2014/5	37	41.37	-0.09	37	0.11	0	S-48	0.89	5				
8	6	2014/6	61	55.62	0.04	61	0.03	0	S-47	1.10	6				
9	7	2014/7	47	42.52	-0.08	47	0.02	0	S-46	1.11	7				
80	78	2015/26	48	57.69	0.09	48	0.00	0							
81	79	2015/27	65	46.79	-0.01	65	0.05	0							
82	80	2015/28	49	53.47	0.05	49	0.02	0							
83	81	2015/29	37	37.07	-0.10	37	0.03	0							
84	82	2015/30	47	40.77	-0.07	47	0.10	0							

Figura 3.12: Suavizamiento Exponencial con Ciclicidad y su MAD

Hoja de "Excel" para obtener un pronóstico de la demanda con el método de Winter. Las columnas E, F y G se generan con las fórmulas 2.30, 2.31, 2.33, 2.34 y 2.36, en la G se obtienen los errores para calcular la MAD del método, en las columnas J, K y L se muestran los S_i obtenidos con las fórmulas 2.32 y 2.32; por último en las columnas N y O se muestra el valor de α y β (ponderadores descritos en la sección 2.4.4) y se obtiene la MAD asociada.

Comparación de los métodos de pronósticos

Enseguida fueron comparados los métodos de pronósticos para elegir el que tenía la mejor MAD (la más pequeña), como se muestra en la Figura 3.13

Método de pronóstico	MAD	DEMANDA 2017
Promedio Movil	9.7533	
Suavizamiento Exponencial	9.7626	
S. Exponencial con Tendencia	9.9723	
S. Exponencial con Estacionalidad por semana	0.0571	Mejor método
S. Exponencial con Estacionalidad por mes	15.4294	

Figura 3.13: Comparación de los métodos de pronósticos

Se enlistan los distintos métodos usados con su MAD correspondiente, en la siguiente columna se señala el que tuvo la menor. En la siguiente columna se muestra la demanda que se obtuvo con ese método, solamente si cumplió el requisito de la prueba de hipótesis, de lo contrario, se considera que los métodos no son adecuados, por lo que se procede con una técnica distinta.

Aplicación de función de distribución

Al realizar el histograma de la demanda, se observa una distribución normal, como lo muestra la Figura 3.14, por lo que se realizó una prueba de bondad de ajuste (Figura 3.15) bajo la suposición de que la demanda se distribuye de tal manera.

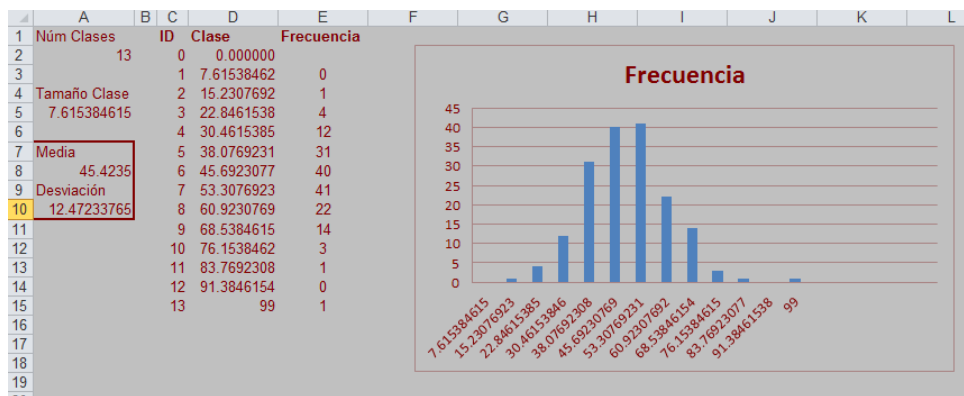


Figura 3.14: Histograma de la demanda normal

Construcción del histograma de las demandas por semana del medicamento 010.000.0101.00. En la primera columna se muestran el número de clases del histograma, el tamaño de dichas clases y el promedio y desviación estándar de las demandas semanales, en la columna D se encuentra el inicio del intervalo de clase y en la siguiente columna la cantidad de datos que se encuentra en ese intervalo. Finalmente se muestra el histograma asociado, el cual podemos notar que tiene la forma de una distribución normal.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		mu	45.42352941		max	min		n	170
2		sigma	12.47233765		0.047623	-0.043836		alpha	5%
3	j	x	j/n	F(x)	j/n-F(x _j)	(j-1)/n-F(x _j)		D	0.104162
4	1	11	0.005882353	0.002890155	0.002992		EstadísticoP	0.047623	
5	2	16	0.011764706	0.009159585	0.002605	-0.003277		Es normal.	
6	3	16	0.017647059	0.009159585	0.008487	0.002605			
7	4	19	0.023529412	0.017063381	0.006466	0.000584			
8	5	20	0.029411765	0.020755308	0.008656	0.002774			
9	6	23	0.035294118	0.036099519	-0.000805	-0.006688			
10	7	24	0.041176471	0.042927174	-0.001751	-0.007633			
11	8	25	0.047058824	0.050762379	-0.003704	-0.009586			
12	9	26	0.052941176	0.059696232	-0.006755	-0.012637			
13	10	26	0.058823529	0.059696232	-0.000873	-0.006755			

Figura 3.15: Prueba de bondad de Ajuste para la demanda

En la Figura 3.15 se muestran los cálculos para una prueba de hipótesis de bondad de ajuste según se indica en la sección 2.5.2. En la parte superior al inicio se encuentran los datos de la media y la desviación estándar, la columna A sólo numera los datos, mientras que en la columna B se enlistan dichos datos de la demanda en orden ascendente, en la columna C se muestra el resultado de dividir cada dato de la columna A entre el total de datos y en las columnas. En las columnas E y F se calculan datos auxiliares para obtener los datos de las celdas E2 y F2 con las fórmulas 2.38 y 2.39, por último, en las columnas H e I se calcula el estadístico de prueba (celda I4, dependiente de E2 y F2) y se compara con el obtenido por medio de la fórmula 2.40 (celda I3), para mostrar que efectivamente, con un nivel de confianza de 95%, se distribuyen normalmente los datos de la demanda.

Teniendo los datos de la media (45.42) y la desviación estándar (12.47) de la demanda semanal, se realizaron simulaciones de una normal con esas características durante todas las semanas del periodo en estudio (Véase la Figura 3.16). La demanda total para el 2017 se calculó con la suma de la demanda real de todas las semanas del periodo de enero a marzo y la suma de las simulaciones realizadas para las semanas del periodo de abril a diciembre de 2017, siendo esta 2522.

ID	Día	Demanda	Pronóstico	DEMANDA 2017
1	2014/1	25	58	2522
2	2014/2	37	42	
3	2014/3	45	55	
4	2014/4	38	52	
5	2014/5	37	44	
6	2014/6	61	61	
7	2014/7	47	42	
8	2014/8	47	=INV.NORM	
9	2014/9	47	54	
10	2014/10	49	26	
11	2014/11	51	45	

Figura 3.16: Cálculo de la demanda mediante simulaciones

En la figura se observan, en las primeras dos columnas, la identificación de la demanda mostrada en la columna C, y en la columna D, las simulaciones de una normal con la media y la desviación calculadas anteriormente según la fórmula

“INV.NORM(ALEATORIO(),*Media,Desviación estándar*)”, que devuelve el inverso de la distribución normal acumulada para la media y desviación estándar especificadas, donde el aleatorio se refiere a la probabilidad asociada al valor de esa simulación. Además, del lado derecho se observa la demanda anual para 2017.

A continuación se presentan los datos obtenidos para el medicamento que estamos analizando, y en los anexos se muestra para cada uno de los 32 medicamentos en el estudio (*Véase F*):

ID	CLAVE	DEMANDA DET.	MEDIA SEM.	DESV. SEM.
1	010.000.0101.00	2574	45.42	12.47

3.2.1.2. Obtención de costos

A continuación se detalla cómo se obtuvo cada costo requerido para los modelos de inventarios.

Costo de adquisición

Este costo c considera tanto el precio que tiene cada medicamento, como el costo por transporte de una unidad de medicamento.

El costo unitario del medicamento ejemplo es de \$1.05.

Se presentan en el anexo G los costos unitarios de los demás medicamentos.

Para calcular el costo del transporte, el costo total por el transporte de un lote, que se consideró de \$2600.00, se dividió entre el número total de medicamentos que se transportaban y esta cantidad a su vez, se dividió entre la cantidad de unidades de cada medicamento:

Para obtener el número total de medicamentos que se transportaban, tras el cálculo de los tres datos necesarios para la función de distribución beta, se hizo una simulación del número de medicamentos por transporte; se obtuvo un valor de 52 medicamentos por lote.

En añadido, para determinar las unidades por medicamento que se transportan cada vez, tras el cálculo de los tres datos necesarios para la función de distribución beta, se hizo una simulación del número de medicamentos por transporte; obtuvo un valor de 366 unidades de medicamento.

Concluyéndose que el costo por transporte es de $\frac{2600/52}{366} = 0.1366$.

Por último, se calculó el costo total unitario c , que es la suma de ambos costos: \$1.1866.

Costo por ordenar

Se incluyen sólo los costos administrativos; sumándose los salarios mensuales \$ 4,187.60, \$5,979.12, \$8,454.42 y \$5,067.00. Se supone que el proceso de ordenar, según la descripción al inicio, toma un total de media hora en cuanto a trabajo realizado por el personal, por lo que la suma de los salarios (\$23,688.14), se dividió entre 30 para hacerlo diario y luego entre 16 (considerando un día laboral de 8 horas) para tomar el costo por media hora, resultando ser de \$49.35, por último se multiplicó por la aproximación de las veces que se realizaba una nueva orden al año (esto es, el número total de días laborales, 250, dividido entre los días en que tarda en llegar el pedido -el tiempo $L = 37$ descrito más adelante-); resultando ser $k = \$333.4479$.

Costo por mantener

Con la misma simulación del número de unidades de cada medicamento, al multiplicarlo por 211 (el número total de medicamentos que maneja la farmacia), se obtiene una aproximación del número total de unidades de medicamento que se encuentran almacenadas en el área de almacén de la farmacia, 75,116. Además, el espacio del almacén es de $1,894.65 m^2$; y la renta por metro cuadrado se obtuvo de \$26.32 al mes. Luego, la renta por unidad de medicamento al año resultó ser de $(26.32 * 1,894.65 / 75,116) * 12 = \$0.54 * 12 = 7.9652$

Por otro lado, se consideró el salario de quien se encarga de cuidar el almacén por cada unidad de medicamento; esto es, el salario mensual \$5,067 se multiplicó por 12 para hacerlo anual y este a su vez se dividió entre el número total de unidades en almacén, por lo que el costo asignado a esta parte fue de \$0.8095.

Por tanto el costo total asociado a h (por mantener) fue de \$8.7746.

Costo por faltantes

Para el gasto en transporte en que incurre un derechohabiente, se simuló una variable aleatoria con una función de distribución beta de límites 5 (considerando que viven muy cerca y pueden con el pasaje mínimo) y 142 y con un valor más probable ponderado con .75 a 5 (pues se consideró más probable una menor distancia) y .25 para 142, por lo que el valor más probable fue de 39.25, y el resultado de la simulación 23.99.

Por otro lado, el salario de quien atiende \$5,970.90 se consideró por hora dividiéndolo entre 20 (días laborales en un mes) y luego entre 8 (horas laborales en el día), resultando ser de 37.3181; luego, este se multiplicó por la fracción de hora promedio que tarda en atender a un paciente (obtenido del modelo de líneas de espera), por lo que el costo del tiempo perdido de quien atiende es de \$1.4927. Además se calculó el salario mínimo por hora y la fracción de hora que el paciente pasa en el sistema de líneas de espera para calcular el costo asociado al tiempo perdido por el paciente, se obtuvo de \$0.4029.

Por tanto el costo asociado a tener faltantes se calculó con las suma de todos, fue de $p = \$25.8937$.

3.2.1.3. Obtención del total de faltantes

Las unidades por medicamento que faltaron en cada día que se obtuvieron fueron: 10, 2, 5, 2, 7, 1, 10, 6, 3; por lo que se obtuvieron parámetros para una distribución beta:

- medida optimista: 1 medicamento faltante.
- medida pesimista: 10 medicamentos faltantes.
- medida más probable: $\frac{10 + 2 + 5 + 2 + 2 + 7 + 1 + 10 + 6 + 3}{9} \approx 5$ medicamentos faltantes.

Se calculó la media de la distribución, para así obtener que $E[B_R] = 5$.

3.2.1.4. Obtención de tiempo de retraso

Este tiempo, denominado L , se obtuvo mediante la aplicación de una distribución beta: se simula una variable aleatoria beta con extremos 20 y 760; y con una medida más probable de 40, obteniéndose como resultado de la simulación 37.

3.2.2. Construcción de los modelos

Como primera instancia, se realizó una plantilla de “Excel” en la que se recabaron todos los datos necesarios, lo que se muestra a continuación:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1											
2	Demanda determinista	2574	Dat Dist Bet							Transporte	46.9931635
3	Esperanza de la Demanda semanal	45.42	#Med en Trans	Cost Trans						Salario oficial de farmacia por hora	37.318125
4	Esperanza de la Demanda anual	2271	Optimista	63	Pesimista	142				tiempo de atención	0.04
5	Esperanza de la Demada entre pedido	34.4090909	Pesimista	46	Optimista	5				Salario Mín (hora)	10.005
6	DesvEst Demanda semanal	12.47	Probable	55	Probable	39.25				tiempo que espera (hrs)	0.04027159
7	DesvEst Demanda entre pedido	10.8537418	Media	54.8333333	Media	50.6666667				p	48.8888057
8			Var	8.02777778	Var	521.361111					
9			alpha	4.14967094	alpha	2.33333333					
10	Costo unitario	1.05	beta	3.83648823	beta	4.66666667			E[B_R]	5	
11	Costo transporte total	2600	#Unid Cada Med	Tiemp Retr							
12	Número de medicamentos en transporte	55	Optimista	500	Pesimista	760				medicamentos en almacen	77226
13	Cantidad de cada tipo de medicamento	457	Pesimista	350	Optimista	20				medida de almacen	1894.65
14	Costo transporte unidad	0.10344142	Probable	371	Probable	40				medida de almacen por unidad (m2)	0.02453384
15	c	1.15344142	Media	389	Media	156.666667				costo de "renta"	137
16			Var	625	Var	15211.1111				total de almacen	40.333626
17			alpha	1.540864	alpha	0.81644391				salario de seguridad anual	5067
18	Sueldos		beta	4.385536	beta	3.60430116				total de salario	0.78735141
19	Coordinador de almacén	5979.12	Faltantes Posibles							h	41.1209774
20	Auxiliar de Almacén	4187.6	Optimista	1							
21	Químico clínico jefe de sección	8454.42	Pesimista	10							
22	Oficial de Servicios Administrativos	5067	Probable	5							
23	k	186.932923	Media	5.16666667						Verificar que L esté en el rango	66
24			Var	2.25						L	66
25			alpha	4.26977595							
26			beta	3.68084134							
27											

Figura 3.17: Plantilla de Datos

La parte central recaba los datos requeridos para cada una de las veces en que se requirió el uso de la función de distribución beta a lo largo de la sección 3.2.1, en las celdas que tienen “alpha” y “beta”, se aplicaron las fórmulas 2.41 y 2.42 con el uso de todos los datos anteriores, para así poder hacer una simulación de una variable aleatoria beta, ya que “Excel” requiere de esos parámetros para generar una simulación.

El primer recuadro de la izquierda muestra los datos obtenidos sobre la distribución de la demanda del medicamento como se describió en la sección 3.2.1.1.

En el segundo y el tercer recuadro del lado izquierdo y el primero y el tercero del lado derecho presentan los datos generados sobre los costos requeridos como se detalla en la sección 3.2.1.2. En la celda K10 se muestra el promedio de unidades faltantes según se explica en la sección 3.2.1.3.

Por último en la celda K24 se observa el tiempo de espera entre que se ordena el pedido y se recibe, calculado según la sección 3.2.1.4.

Observaciones

1. Dado que:

- Considerando que el pronóstico de la demanda fue lo más acertado posible, se tiene que la demanda puede suponerse determinista y repetitiva.

- Además por la forma estricta en que se realiza el orden de compra puede suponerse que el plazo de entrega es constante y el orden se puede realizar en cualquier momento.
- Por otro lado, el orden llega de un sólo proveedor cada vez, por lo que la cantidad que se ordena llega toda a la vez.
- En este caso, si se desea que los pacientes tengan su medicamento en cuanto lo requieran, no se permiten faltantes en inventario.

Se considera que se cumplen los supuestos del modelo EOQ básico, por lo que se permite aplicar dicho modelo.

2. De la misma forma y suponiendo que no representa un gran problema no tener el medicamento en existencia por un corto periodo, se cumplen los supuestos del modelo EOQ con faltantes planeados, por lo que también se permite usar este modelo.
3. Si suponemos que la demanda del medicamento no tiene tasa constante, considerando que se conoce su función de distribución, podemos hacer uso del modelo EOQ estocástico, pues se cumple, además de las condiciones hechas en los anteriores incisos, lo siguiente:
 - El inventario se registra y se revisa en un sistema computarizado, por lo que se considera un sistema de revisión continua.
 - La demanda de medicamento no permite que éstos permanezcan en inventario por más de un año y la caducidad de éstos supera el año, por tanto se piensa que los medicamentos son un producto no perecedero, es decir, estable.

Así, finalmente se definieron las políticas para cada uno de los tres modelos, información que se detalla, mediante el uso de las ecuaciones **2.1-2.9**, en seguida.

3.2.3. Resultados

A continuación se detallan los resultados que genera cada modelo y se hace una comparación para elegir aquel cuya política incurre en un menor costo, bajo la consideración de los datos generados por el modelo y algunos otros aspectos subjetivos como:

1. Las reacciones de los pacientes ante la falta de medicamentos (si es amplio el periodo en que habrá faltantes y los pacientes no lo aceptan fácilmente, no es tan conveniente el modelo que permite faltantes, aún cuando mostrara el costo más bajo).
2. La complejidad de la explicación del modelo (Será utilizado por personal de farmacia, por lo que hay que tomar en cuenta la explicación que se les presentará).
3. La facilidad de manejo al implementar el modelo (Si es muy complejo trabajar con el modelo, podría dejar de emplearse, por lo que se preferiría en mayor medida el modelo básico).

3.2.3.1. Presentación de cada modelo de inventarios

Se obtuvo la política de decisión para el modelo EOQ básico, así como el costo asociado.

Modelo EOQ básico

	A	C	D	E	F	G	H	I	J	
5	Modelo EOQ básico con periodo de entrega mayor a cero									
7	Datos					Resultados				
8	D =	2574	Demanda Anual		Costo por Ordenar =	\$3,145.31				
9	K =	\$ 186.93	Costo por Ordenar		Costo por Mantener =	\$3,145.31				
10	h =	\$ 41.12	Costo por Mantener		Costo Variable =	\$6,290.63				
11	L =	66	Tiempo de entrega (días)		Costo total =	\$6,291.78				
12	WD =	250	Días hábiles al año							
14	Decisión									
15	Q =	153	Cantidad a Ordenar							
16	R =	68	Punto de Reorden							

Figura 3.18: Modelo EOQ Básico

Considerando los datos requeridos por el modelo EQO básico (en el primer recuadro), en la parte inferior se calcula la cantidad a ordenar y el punto de reorden según las fórmulas 2.2 y 2.3, resultando ser:

$$EOQ = 153$$

$$R = 68$$

Lo que quiere decir que deben ordenarse 153 unidades cada que queden 68 unidades en inventario, o equivalentemente, cada $68/2574 \approx 0.0264$ años (aproximadamente 7 días).

Del lado derecho, en la celda I11, se obtiene el costo total, asociado a las cantidades anteriores, con la fórmula 2.1:

$$CT = \$6291.78$$

Modelo EOQ con faltantes

De la misma manera se obtuvieron las políticas de decisión para el modelo EOQ con faltantes planeados: Dados los datos requeridos por el modelo EQO con faltantes planeados (recuadro

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
5	Modelo EOQ con faltantes planeados										
7	Datos						Resultados				
8	D =	2574	Demanda Anual		Costo anual por Ordenar =	\$2,318.06					
9	K =	\$186.93	Costo por Ordenar		Costo anual por Mantener =	\$1,255.25					
10	h =	\$41.12	Costo por Mantener		Costo anual por Faltantes =	\$1,062.81					
11	p =	\$48.89	Costo por Faltantes		Costo Variable anual =	\$4,636.12					
12							Costo total =	\$4,637.27			
13	Decision										
14	Q =	208	Cantidad a Ordenar								
15	Q-M =	95	Faltantes Máximos								
16	M =	113	Nivel Máximo de Inventario								

Figura 3.19: Modelo EOQ Faltantes

de la izquierda), se calcula la cantidad a ordenar y el número de faltantes permitidos según las fórmulas 2.6 y 2.7, el resultado fue:

$$EOQ = 208$$

$$Q^* - M^* = 95$$

Lo que quiere decir que deben ordenarse 208 unidades cada que falten 95 unidades en inventario, o equivalentemente, cada $113/2574 \approx 0.0439$ años (aproximadamente 11 días).

Del lado derecho, se muestra el costo total obtenido con la fórmula 2.5:

$$CT = \$4637.27$$

Modelo EOQ estocástico

Bajo la consideración de que se desea tener una probabilidad de 0.8 de no incurrir en faltantes durante el periodo de espera se obtuvo lo siguiente:

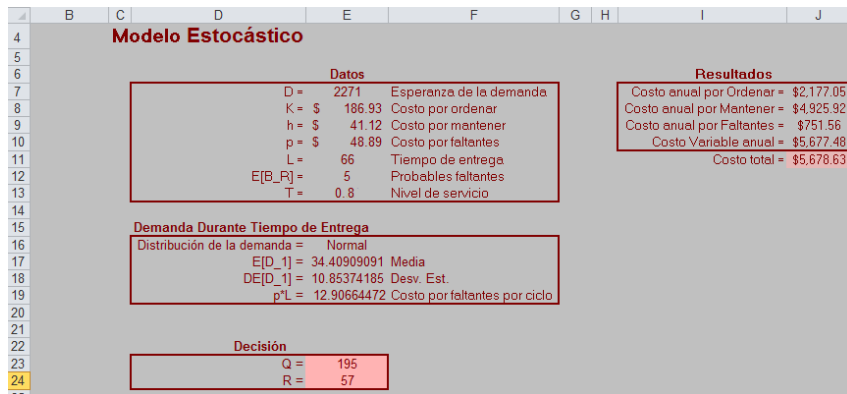


Figura 3.20: Modelo estocástico

Para el modelo EQO estocástico, se presentan los datos necesarios en el recuadro primero, además en el cuadro inmediato inferior se muestran los datos de la demanda en el periodo de espera y con ellos se calcula la cantidad a ordenar y el punto de reorden según las fórmulas 2.2 (como se explica en la sección 2.2.3 y 2.9, se tiene que:

$$EOQ = 195$$

$$R = 57$$

Lo que quiere decir que deben ordenarse 195 unidades cada que queden 57 unidades en inventario.

Del lado derecho, se muestra el costo total obtenido con la fórmula 2.8:

$$CT = \$5678.63$$

3.2.3.2. Comparación de los modelos de inventarios

Mediante una comparación de los tres modelos aplicados, se observa que el modelo que obtuvo un menor costo fue el que permite faltantes, sin embargo, dado que la proporción de faltantes

respecto de la cantidad a ordenar no es menor que 0.2, se descarta este modelo, por lo que se elige el que tiene el siguiente mínimo costo, el modelo estocástico, con un costo total de \$5678.63.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2									
3		010.000.0101.00	Cost Var	Cost Tot	Cant Ord	Reorden	Falt	Prop Falt	N Serv
4		EOQ básico	\$6,290.63	\$6,291.78	153	68	0		
5		EOQ faltantes	\$4,636.12	\$4,637.27	208	-95	95	0.4577	
6		Estocástico	\$5,677.48	\$5,678.63	195	57	0		0.98
7									
8									
9									
10									
11	Por lo tanto	Estocástico	es el modelo adecuado para usar;						
12	con un costo asociado de	\$5,678.63							
13									

Figura 3.21: Comparación de los modelos para inventarios

Se muestran los resultados de los costos, la cantidad a ordenar (EOQ), el punto de reorden, los faltantes permitidos, la proporción de faltantes respecto de la cantidad a ordenar y el nivel de servicio. En el renglón 11 se elige el modelo con un menor costo total, se incluye una fórmula que, en caso de que se elija el que permite faltantes, revisa si la proporción de faltantes respecto del EOQ es menor que 0.2. Por último, en el renglón 12 se observa el costo asociado a ese modelo.

Los datos obtenidos para cada uno de los otros 31 medicamentos en estudio, con un nivel de servicio de 98 % se presentan a continuación (el mejor modelo para el medicamento correspondiente se señala en negritas):

	Modelo	Q	R	Falt	Cost. Var.	Cost. Tot.
010.000.0104.00						
	EOQ B	897	631	0	6937.22	6939.31
	EOQ F	950	-103	103	6549.85	6551.95
	Estocástico	951	361	0	4723.72	4725.81
010.000.0566.00						
	EOQ B	515	187	0	4545.31	4557.08
	EOQ F	568	-102	102	4119.25	4131.03
	Estocástico	573	160	0	3338.58	3350.35
010.000.0570.00						
	EOQ B	539	0	0	4189.31	4195.85
	EOQ F	581	-80	80	3889.84	3896.38
	Estocástico	580	175	0	4251.62	4258.16
010.000.1006.00						
	EOQ B	252	67	0	2097.20	2114.34
	EOQ F	264	-23	23	2002.62	2019.76
	Estocástico	260	31	0	2194.10	2508.24
010.000.1206.00						
	EOQ B	270	135	0	2245.41	2249.68
	EOQ F	308	-70	70	1973.15	1977.42
	Estocástico	312	42	0	1496.43	1500.71
010.000.1233.00						
	EOQ B	376	76	0	3094.20	3097.42
	EOQ F	396	-39	39	2938.24	2941.46
	Estocástico	392	68	0	1859.54	1862.75

	Modelo	Q	R	Falt	Cost. Var.	Cost. Tot.
010.000.1308.01						
	EOQ B	251	5	0	2101.13	2105.92
	EOQ F	269	-36	36	1956.07	1960.86
	Estocástico	262	44	0	1768.92	1793.71
010.000.1506.00						
	EOQ B	207	40	0	1748.46	1984.99
	EOQ F	219	-24	24	1648.06	1884.59
	Estocástico	198	26	0	3297.42	3533.95
010.000.1511.00						
	EOQ B	132	11	0	1097.32	1221.21
	EOQ F	146	-25	25	997.41	41121.30
	Estocástico	135	15	0	2141.76	2265.65
010.000.1521.00						
	EOQ B	180	140	0	1467.05	1480.16
	EOQ F	209	-54	54	1264.50	1277.60
	Estocástico	695	145	0	3974.57	3987.67
010.000.1561.00						
	EOQ B	324	30	0	2464.07	2468.20
	EOQ F	354	-58	58	2254.96	2259.09
	Estocástico	354	53	0	2053.39	2057.52
010.000.1566.00						
	EOQ B	256	196	0	2099.12	2102.63
	EOQ F	309	-96	96	1741.88	1745.39
	Estocástico	300	40	0	1881.13	1884.65
010.000.1701.00						
	EOQ B	180	117	0	1509.66	1512.28
	EOQ F	196	-31	31	1385.59	1388.21
	Estocástico	214	30	0	1626.12	1628.74
010.000.1911.00						
	EOQ B	765	466	0	6527.06	6545.52
	EOQ F	820	-107	107	6085.60	6104.06
	Estocástico	575	194	0	3376.06	3394.52
010.000.1926.00						
	EOQ B	200	196	0	1697.12	1707.71
	EOQ F	215	-27	27	1585.73	1596.32
	Estocástico	203	25	0	1726.27	1736.85
010.000.1929.00						
	EOQ B	362	254	0	3183.63	3191.39
	EOQ F	391	-57	57	2943.79	2951.55
	Estocástico	366	85	0	4400.06	4408.61
010.000.1956.00						
	EOQ B	424	50	0	3596.73	3599.18
	EOQ F	530	-191	191	2877.73	2880.18
	Estocástico	525	127	0	3275.79	3278.24
010.000.2133.00						
	EOQ B	295	219	0	2335.44	2350.31
	EOQ F	337	-78	78	2047.20	2062.07
	Estocástico	332	58	0	2478.09	2442.96

	Modelo	Q	R	Falt	Cost. Var.	Cost. Tot.
010.000.2154.00						
	EOQ B	524	113	0	4058.44	4219.07
	EOQ F	579	-105	105	3672.18	3832.81
	Estocástico	505	158	0	2842.15	3002.78
010.000.2230.00						
	EOQ B	153	48	0	1361.81	1380.84
	EOQ F	184	-56	56	1134.10	1153.12
	Estocástico	170	21	0	1438.32	1457.35
010.000.3044.00						
	EOQ B	151	110	0	1285.82	1413.58
	EOQ F	163	-23	23	1193.69	1321.37
	Estocástico	122	15	0	2379.22	2497.98
010.000.3407.00						
	EOQ B	231	192	0	1779.89	1786.12
	EOQ F	250	-36	36	1648.04	1654.27
	Estocástico	244	30	0	1640.59	1646.83
010.000.3417.00						
	EOQ B	415	129	0	3502.17	3506.48
	EOQ F	435	-40	40	3338.67	3342.98
	Estocástico	416	97	0	5300.33	5304.64
010.000.3504.00						
	EOQ B	393	356	0	3057.59	3075.34
	EOQ F	436	-80	80	2760.91	2778.66
	Estocástico	408	79	0	2145.87	2163.62
010.000.3505.00						
	EOQ B	180	40	0	1530.93	1547.16
	EOQ F	221	-75	75	1246.10	1262.33
	Estocástico	220	27	0	1630.78	1647.01
010.000.4186.00						
	EOQ B	388	320	0	3022.95	3024.92
	EOQ F	445	-106	106	2636.43	2638.45
	Estocástico	443	133	0	2572.94	2594.91
010.000.4223.00						
	EOQ B	378	1	0	3015.15	3140.62
	EOQ F	431	-99	99	2646.48	2771.95
	Estocástico	1323	484	0	6382.25	6507.72
010.000.4224.00						
	EOQ B	355	202	0	3142.48	3374.57
	EOQ F	383	-54	54	2913.91	3146.00
	Estocástico	324	84	0	2434.72	2666.80
010.000.4255.00						
	EOQ B	342	84	0	2828.18	2831.32
	EOQ F	357	-29	29	2712.86	2716.01
	Estocástico	348	95	0	4031.20	6034.34
010.000.4304.00						
	EOQ B	316	130	0	2589.72	2713.00
	EOQ F	333	-33	33	2458.94	2582.72
	Estocástico	315	55	0	1979.93	2103.70
010.000.5165.00						
	EOQ B	222	153	0	1741.87	1749.51
	EOQ F	253	-59	59	1525.89	1533.53
	Estocástico	237	34	0	1901.78	1909.41

3.3. Aplicación de teoría de líneas de espera

Como paso inicial se obtienen las tasas requeridas por el modelo.

3.3.1. Construcción de las tasa asociadas a los tiempos de llegada y de atención

3.3.1.1. Obtención de la tasa media de llegadas

Verificando que se cumplen los supuestos para que sea un proceso Poisson:

- Considerando que el tiempo entre la llegada de un paciente y otro depende exclusivamente de las condiciones individuales de cada paciente (el momento en que van a consulta, el tiempo en que son atendidos, si van inmediatamente a farmacia,...), se hace la suposición de que los tiempos entre llegadas son independientes.
- Dado lo anterior y que la función de distribución exponencial es la única con la propiedad de amnesia, se hace la suposición de que los tiempos se distribuyen exponencial, en la Figura 3.22 se muestra una hoja de “Excel” que contiene la construcción del histograma de los tiempos entre llegadas y la obtención de su media. Se realizó una prueba de hipótesis para verificar dicha suposición (Véase Figura 3.23) y como su media fue de 0.1482 horas (8.892 minutos), se tiene que la tasa media de llegadas es: $\frac{1}{\lambda} = 25$ pacientes por hora.

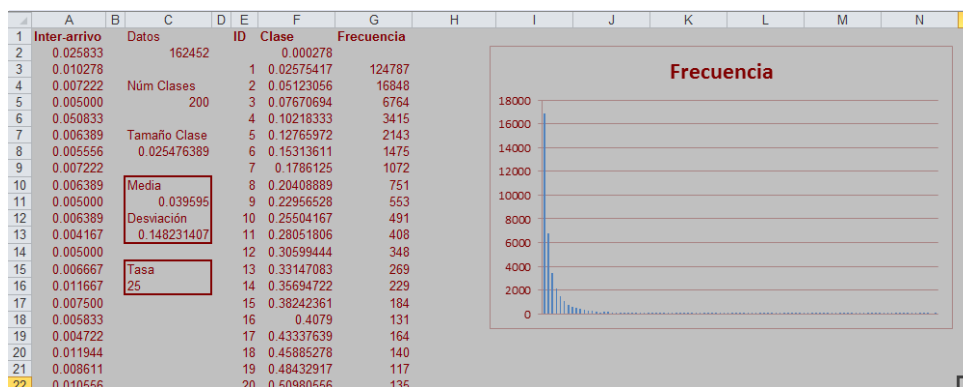


Figura 3.22: Tasa media de llegadas

La Figura 3.22 muestra lo siguiente:

- La columna A contiene todos los tiempos entre llegadas que se calcularon en la sección de búsqueda de la información para el modelo de líneas de espera
- La columna C contiene los siguientes datos en orden de aparición:
 - El total de datos con que se cuenta
 - El número de clases que se usan para la construcción del histograma
 - El tamaño de cada clase
 - El promedio de los datos

- La desviación estándar de los datos
- La tasa de llegadas obtenida de la media de los datos
- En la columna E numeramos las clases
- En la columna F se encuentra el límite superior de la cada una de las clases obtenidas
- Por último, la columna G muestra el número de datos que se encuentra en cada clase
- El histograma describe la forma de una distribución exponencial asociada a los datos.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1					max	min			
2					0.077402	-0.005366		alpha	5%
3	j	x	j/n	F(x)	j/n-F(x _j)	(j-1)/n-F(x _j)		D	0.081017544
4	1	0.016666667	0.003558719	2.0892458016E-01	-0.205366		EstadísticoP	0.077401743	
5	2	0.016666667	0.007117438	2.0892458016E-01	-0.201807	-0.205366		Es Exponencial	
6	3	0.016666667	0.010676157	2.0892458016E-01	-0.198248	-0.201807			
7	4	0.016666667	0.014234875	2.0892458016E-01	-0.194690	-0.198248			
8	5	0.016666667	0.017793594	2.0892458016E-01	-0.191131	-0.194690			
9	6	0.016666667	0.021352313	2.0892458016E-01	-0.187572	-0.191131			
10	7	0.016666667	0.024911032	2.0892458016E-01	-0.184014	-0.187572			
11	8	0.016666667	0.028469751	2.0892458016E-01	-0.180455	-0.184014			
12	9	0.016666667	0.03202847	2.0892458016E-01	-0.176896	-0.180455			
13	10	0.016666667	0.035587189	2.0892458016E-01	-0.173337	-0.176896			
14	11	0.016666667	0.039145907	2.0892458016E-01	-0.169779	-0.173337			
15	12	0.016666667	0.042704626	2.0892458016E-01	-0.166220	-0.169779			
16	13	0.016666667	0.046263345	2.0892458016E-01	-0.162661	-0.166220			
17	14	0.016666667	0.049822064	2.0892458016E-01	-0.159103	-0.162661			

Figura 3.23: Prueba de hipótesis para la distribución de los tiempos entre llegadas

En la Figura 3.23 se muestran los cálculos para una prueba de hipótesis de bondad de ajuste según se indica en la sección 2.5.2. La columna A sólo numera los datos, mientras que en la columna B se enlistan dichos datos de los tiempos entre llegadas en orden ascendente, en la columna C se muestra el resultado de dividir cada dato de la columna A entre el total de datos y en las columnas. En las columnas E y F se calculan datos auxiliares para obtener los datos de las celdas E2 y F2 con las fórmulas 2.38 y 2.39, por último, en las columnas H e I se calcula el estadístico de prueba (celda I4, dependiente de E2 y F2) y se compara con el obtenido por medio de la fórmula 2.40 (celda I3), para mostrar que efectivamente, con un nivel de confianza de 95 %, se distribuyen exponencialmente los datos de los tiempos entre llegadas.

Así, como los tiempos entre llegadas pequeños tienen una probabilidad cercana a cero de ocurrir, la probabilidad de que existan dos o más llegadas en un periodo corto se considera tendiente a cero.

- Ya que se observó que por la mañana (al abrir la farmacia), la afluencia de pacientes es grande, esto porque los pacientes esperan, incluso desde el día anterior para dirigirse a la farmacia, eligiendo un horario próximo, y por la tarde (al cerrarse) pocos pacientes asisten, retirándose a sus hogares a una hora con poco tránsito; se toma en cuenta un periodo de estudio de las 9:00 a.m. a las 15:00, que es donde los pacientes llegan regularmente. Por tales razones, se puede suponer que, el número de llegadas en intervalos de una longitud determinada, en el periodo a considerar, es proporcional al tamaño de dichos intervalos.

Puesto que se cumple lo anterior, se tiene que la distribución que siguen los tiempos entre llegadas es una exponencial con parámetro $\lambda = 0,1482$ y que se puede aplicar un proceso poisson para modelar la fila.

3.3.1.2. Obtención de la tasa media de servicio

De manera análoga a la sección anterior se comprobó que los tiempos de servicio se distribuían exponencial, se obtuvo la media de ellos (0.0769 horas ó 4.734 minutos) para así obtener la tasa media de servicio, que resultó ser de $\frac{1}{\mu} = 13$ pacientes por hora. En la Figura 3.24 se muestra una hoja de “Excel” que contiene la obtención del promedio de los tiempos de servicio:

	A	B	C	D
1	TiempoAtención			
2	0.097222222		Media	
3	0.101111111		0.0789	
4	0.050972222		Desviación	
5	0.093888889		0.025747453	
6	0.100833333			
7	0.054007937			
8	0.096527778		Tasa	
9	0.096666667			
10	0.106944444			13

Figura 3.24: Cálculo de la tasa media de servicio

- La columna A contiene todos los tiempos que tardó cada servicio obtenidos en la sección de búsqueda de la información para el modelo de líneas de espera
- La columna C contiene los siguientes datos en orden de aparición:
 - El promedio de los datos
 - La desviación estándar de los datos
 - La tasa de servicio obtenida de la media de los datos

3.3.2. Construcción del modelo

Observación

Considerando que:

1. Las distribuciones de los tiempos de espera y de servicio son exponenciales.
2. Los pacientes son atendidos conforme llegan.
3. No hay límite definido para la población de la que llegan los pacientes a ser atendidos.
4. El número de personas en la fila no está restringido.

5. Con la ecuación 2.11 se obtuvo que $\rho = \frac{\lambda}{s\mu} = \frac{13}{3*25} < 1$

Puede modelarse la línea de espera de la farmacia de manera satisfactoria con un modelo $M/M/3/PLPS/\infty/\infty$.

Mediante el uso de las tasas calculadas, los costos para los modelos de inventarios referentes a costos por atención y por espera y las fórmulas 2.12-2.21, se obtuvieron los resultados que se detallan a continuación.

3.3.3. Resultados

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Modelo para sistema M/M/s/PLPS/Inf/Inf								
2									
3			Datos				Resultados		
4			$\lambda =$	13	(tasa de llegada)		$L =$	1	
5			$\mu =$	25	(tasa de servicio)		$L_q =$	0	
6			$s =$	3	(número de servidores)		$W =$	0.04027159	
7							$W_q =$	0.00027159	
8							$\rho =$	0.17333333	
9							$P_0 =$	0.59398352	
10							$P_1 =$	0.30887143	
11							$P_2 =$	0.08030657	
12							$P_3 =$	0.01391981	
13							$P_4 =$	0.00241277	
14			$C_s =$	37.31813	(costo/servidor/unidad de tiempo)		$P_5 =$	0.00041821	
15			$C_w =$	10.005	(costo de espera/unidad de tiempo)		$P_6 =$	7.249E-05	
16			Costo de servicio =	111.9544			$P_7 =$	1.2565E-05	
17			Costo por esperar =	5.237924			$P_8 =$	2.1779E-06	
18			Costo total =	117.1923					
19									
20									

Figura 3.25: Modelo de Líneas de espera

En la Figura 3.25 se muestra una plantilla de “Excel” que mediante el uso de las tasas obtenidas en el capítulo anterior y las ecuaciones 2.11-2.21, así como los costos asociados al salario del servidor y el salario mínimo que se asignó a los pacientes en la sección de búsqueda de la información para los modelos de inventarios, genera los datos siguientes:

- El número esperado de pacientes en el sistema de líneas de espera de la farmacia es 1, es decir, que en una hora habrá un paciente que debe ser atendido por los servidores.
- El tiempo medio que pasa cada paciente en el sistema de líneas de espera de la farmacia es de 0.0403 horas.
- El número esperado de pacientes en la fila es 0, por tanto en una hora se espera que no haya pacientes en la fila, lo que implica que cada paciente que llega será atendido inmediatamente por alguno de los tres servidores.
- El tiempo medio de espera de cada paciente en la fila es de 0.00027 horas.
- La probabilidad de que haya cero pacientes en el sistema de líneas de espera es de 0.5939, lo que quiere decir que hay una probabilidad mayor a un medio de que los servidores estén ociosos.
- El costo asociado al servicio resultó ser de \$111.95 y el costo asociado a la espera del paciente de \$5.24, por tanto el costo total en que se incurre es de \$117.19.

Dada la plantilla anterior, se hizo variar el número s de servidores, de manera que el costo total en que se incurre fuera mínimo; y mediante una aplicación de la herramienta “Solver”, se obtuvo que el número óptimo es de un servidor, pues el costo disminuye a \$48.15688, además el nivel de eficiencia resulta ser de 0.52 que es lo más cercano posible a la unidad:

Ahora, en la Figura 3.26 se muestra la plantilla de “Excel” modificando a la anterior con un solo servidor, obteniéndose que:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Modelo para sistema M/M/s/PLPS/Inf/Inf							
2								
3			Datos				Resultados	
4		$\lambda =$	13	(tasa de llegada)		$L =$	1	
5		$\mu =$	25	(tasa de servicio)		$L_q =$	1	
6		$s =$	1	(número de servidores)		$W =$	0.08333333	
7						$W_q =$	0.04333333	
8						$\rho =$	0.52	
9						$P_0 =$	0.48	
10						$P_1 =$	0.2496	
11						$P_2 =$	0.129792	
12						$P_3 =$	0.06749184	
13						$P_4 =$	0.03509576	
14		$C_s =$	37.31813	(costo/servidor/unidad de tiempo)		$P_5 =$	0.01824979	
15		$C_w =$	10.005	(costo de espera/unidad de tiempo)		$P_6 =$	0.00948989	
16		Costo de servicio =	37.31813			$P_7 =$	0.00493474	
17		Costo por esperar =	10.83875			$P_8 =$	0.00256607	
18		Costo total =	48.15688					
19								
20								

Figura 3.26: Modelo de Líneas de espera con 1 servidor

- El número esperado de pacientes en el sistema de líneas de espera de la farmacia es 1, es decir, que en una hora habrá un paciente que debe ser atendido por los servidores
- El tiempo medio que pasa cada paciente en el sistema de líneas de espera de la farmacia es de 0.083 horas.
- El número esperado de pacientes en la fila es 1, por tanto en una hora se espera que haya un paciente, lo que implica que cada paciente que llega será atendido tras el término del que se encuentre siendo atendido.
- El tiempo medio de espera de cada paciente en la fila es de 0.043 horas.
- La probabilidad de que haya cero pacientes en el sistema de líneas de espera es de 0.48, lo que quiere decir que hay una probabilidad menor a un medio de que los servidores estén ociosos.
- El costo asociado al servicio resultó ser de \$37.32 y el costo asociado a la espera del paciente de \$10.84, por tanto el costo total en que se incurre es de \$48.16 que es el mínimo posible.

Capítulo 4

Propuesta

4.1. Sistema de Inventarios

En cuanto a la administración del inventario, se llegó a las siguientes consideraciones para cada medicamento:

Clave	Propuesta
010.000.0101.00	Pedir 481 unidades cuando queden 154 unidades en inventario
010.000.0104.00	Pedir 951 unidades cuando queden 361 unidades en inventario
010.000.0566.00	Pedir 573 unidades cuando queden 160 unidades en inventario
010.000.0570.00	Pedir 581 unidades cuando falten 80 unidades en inventario
010.000.1006.00	Pedir 264 unidades cuando falten 23 unidades en inventario
010.000.1206.00	Pedir 312 unidades cuando queden 42 unidades en inventario
010.000.1233.00	Pedir 392 unidades cuando queden 68 unidades en inventario
010.000.1308.01	Pedir 262 unidades cuando queden 44 unidades en inventario
010.000.1506.00	Pedir 219 unidades cuando falten 24 unidades en inventario
010.000.1511.00	Pedir 146 unidades cuando falten 25 unidades en inventario
010.000.1521.00	Pedir 180 unidades cuando queden 140 unidades en inventario
010.000.1561.00	Pedir 354 unidades cuando queden 53 unidades en inventario
010.000.1566.00	Pedir 300 unidades cuando queden 40 unidades en inventario
010.000.1701.00	Pedir 196 unidades cuando falten 31 unidades en inventario
010.000.1911.00	Pedir 575 unidades cuando queden 194 unidades en inventario
010.000.1926.00	Pedir 215 unidades cuando falten 27 unidades en inventario
010.000.1929.00	Pedir 391 unidades cuando falten 57 unidades en inventario
010.000.1956.00	Pedir 525 unidades cuando queden 127 unidades en inventario
010.000.2133.00	Pedir 295 unidades cuando queden 219 unidades en inventario
010.000.2154.00	Pedir 505 unidades cuando queden 158 unidades en inventario
010.000.2230.00	Pedir 153 unidades cuando queden 48 unidades en inventario

Clave	Propuesta
010.000.3044.00	Pedir 163 unidades cuando falten 23 unidades en inventario
010.000.3407.00	Pedir 244 unidades cuando queden 30 unidades en inventario
010.000.3417.00	Pedir 435 unidades cuando falten 40 unidades en inventario
010.000.3504.00	Pedir 408 unidades cuando queden 79 unidades en inventario
010.000.3505.00	Pedir 180 unidades cuando queden 40 unidades en inventario
010.000.4186.00	Pedir 443 unidades cuando queden 133 unidades en inventario
010.000.4223.00	Pedir 378 unidades cuando quede 1 unidad en inventario
010.000.4224.00	Pedir 324 unidades cuando queden 84 unidades en inventario
010.000.4255.00	Pedir 357 unidades cuando falten 29 unidades en inventario
010.000.4304.00	Pedir 315 unidades cuando queden 55 unidades en inventario
010.000.5165.00	Pedir 222 unidades cuando queden 153 unidades en inventario

4.2. Sistema de líneas de espera

Dados los resultados que muestran que hay una eficiencia mucho mejor cuando sólo se trabaja con un servidor, algunas consideraciones laborales que exceden a este estudio como el hecho de que no se pueden hacer cambios bruscos en las actividades de los trabajadores por motivos sindicales y que se hace necesario contar con algún suplente por situaciones inesperadas, se exhorta a cambiar el sistema actual de tres servidores a uno en que se cuente con dos servidores en las ventanillas del área de farmacia del hospital para volver más eficiente la entrega de medicamentos a los derechohabientes en tanto no es exageradamente afectada la situación del personal que labora ahí.

Conclusiones

Se considera que se cumplió el objetivo buscado, es decir, obtener modelos adecuados que ayudaran a dar una solución al problema planteado de las deficiencias en la forma de administrar y distribuir los medicamentos en la farmacia del hospital en estudio favoreciendo tanto a los servicios de administración, como a los derechohabientes que hacen uso de éste sistema.

Se observa que dentro de la descripción del sistema y la metodología se respondieron las preguntas de investigación planteadas al inicio de este escrito:

- El proceso de “Compra Emergente” describe cómo se maneja y se registra el inventario en la farmacia, así como la forma en la que se abastece.
- En el anexo *D* se indican los 32 medicamentos que cubren el 80 % de la demanda total de la farmacia de la institución.
- Respecto al sistema actual de líneas de espera de la farmacia, se encuentra en la sección “La Farmacia” del capítulo “Descripción del objeto de estudio”.
- Por último la construcción de los insumos muestra los tiempos de servicio y de llegada (8.892 minutos entre llegadas y 4.734 minutos de servicio).

Dentro de las limitaciones al estudio, se considera la falta de información completa, lo que derivó en la necesidad de obtener la información (los datos) por medios indirectos.

Por otro lado cabe destacar que el problema de la deficiencia en el manejo de inventarios de medicamentos, así como en su distribución afecta a un sector mayor que sólo en el hospital en cuestión, por lo que es importante considerar dicho problema a nivel país; situación que está fuera del alcance de este estudio.

Dado que sólo se trabajó con 32 medicamentos, se hace énfasis en que es importante considerar los medicamentos restantes por ser requeridos también en este hospital (aunque en menor medida según lo observado).

Además, se sugiere implementar un método para cuantificar el nivel de medicamentos faltantes en un día, pues actualmente no queda registrado ese dato cuando se hace el pedido de medicamentos en la farmacia.

Se observó que en el número de total de medicamentos diarios entregados, había datos cero, los que podían representar que no se requirió ese día o que no había en existencia. De ser el

segundo caso, el dato que se usó para la demanda no es confiable, además de que no se verifica correctamente el porcentaje de demanda de medicamentos que se cubre en el hospital al día.

Respecto al sistema de líneas de espera, se consideró que los servidores eran tres, sin embargo hay más personal dentro del área de farmacia que no necesariamente está ocupado; tomando en cuenta los resultados obtenidos, tres servidores es un exceso, por lo que podría llegarse a la conclusión de que hay un derroche innecesario de personal que podría emplearse en otras áreas del hospital y así eficientar el funcionamiento del hospital en general; situación que también resulta estar fuera del alcance del presente estudio.

Como perspectiva del tema, otra manera de enfocar los problemas planteados sería la simulación; contando con los datos proporcionados del sistema en cuestión referentes a los modelos de inventarios y de líneas de espera en este estudio, podrían aplicarse métodos de este tipo y hacer diferentes aproximaciones de la realidad en el hospital.

Apéndice A

Obteniendo Q^* y M^* para el modelo EOQ que permite faltantes

Para obtener Q^* y M^* que minimizan la función $TC(Q, M)$, procedemos a resolver lo siguiente:

$$\frac{\partial TC(Q, M)}{\partial Q} = 0 = \frac{\partial TC(Q, M)}{\partial M}$$

1. Para la primera derivada tenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial TC(Q, M)}{\partial Q} \\ &= -\frac{kD}{Q^2} - \frac{M^2 h}{2Q^2} + \frac{p}{2} \frac{2(Q-M)Q - (Q-M)^2}{Q^2} \\ &= -\frac{kD}{Q^2} - \frac{M^2 h}{2Q^2} + \frac{p(Q-M)}{2} \frac{2Q - (Q-M)}{Q^2} \\ &= -\frac{kD}{Q^2} - \frac{M^2 h}{2Q^2} + \frac{p(Q-M)}{2} \frac{Q+M}{Q^2} \\ &= -\frac{kD}{Q^2} - \frac{M^2 h}{2Q^2} + \frac{p}{2} \frac{Q^2 - M^2}{Q^2} \\ &= \frac{-2kD - M^2 h + p(Q^2 - M^2)}{Q^2} \end{aligned}$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} 0 &= -2kD - M^2 h + p(Q^2 - M^2) \\ &= -2kD - M^2 h + pQ^2 - pM^2 \\ &= -2kD - M^2(h + p) + pQ^2 \end{aligned}$$

\Rightarrow

$$Q^2 = \frac{2kD + M^2(h + p)}{p} \tag{A.1}$$

2. Para la segunda derivada:

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial TC(Q, M)}{\partial M} \\
 &= \frac{2Mh}{2Q} - \frac{2(Q-M)p}{2Q} \\
 &= \frac{Mh - Qp + Mp}{Q} \\
 &= \frac{M(p+h) - Qp}{Q}
 \end{aligned}$$

\Rightarrow

$$M = Q \frac{p}{p+h} \quad (\text{A.2})$$

Ahora, sustituyendo A.2 en A.1, tenemos que:

$$Q^2 = \frac{2kD \left(\frac{Qp}{p+h} \right)^2 (h+p)}{p} = \frac{2kD}{p} + \frac{pQ^2}{p+h}$$

\Rightarrow

$$\frac{2kD}{p} = Q^2 \left(1 - \frac{p}{p+h} \right) = Q^2 \left(\frac{(p+h) - p}{p+h} \right) = Q^2 \left(\frac{h}{p+h} \right)$$

\Rightarrow

$$Q^2 = \frac{2kD(p+h)}{ph}$$

\Rightarrow

$$Q = \sqrt{\frac{2kD(p+h)}{ph}}$$

\Rightarrow (en A.2)

$$M = \frac{p}{p+h} \sqrt{\frac{2kD(p+h)}{ph}}$$

90 APÉNDICE A. OBTENIENDO Q^* Y M^* PARA EL MODELO EOQ QUE PERMITE FALTANTES

⇒

$$\begin{aligned} M &= \frac{p}{p+h} \sqrt{\frac{2kD(p+h)}{ph}} \\ &= \sqrt{\frac{2kD(p+h)}{ph} \left(\frac{p}{p+h}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{2kDp}{(p+h)h}} \end{aligned}$$

⇒

$$\begin{aligned} Q^* &= \left(\frac{h+p}{p}\right)^{1/2} \left(\frac{2kD}{h}\right)^{1/2} \\ M^* &= \left(\frac{p}{h+p}\right)^{1/2} \left(\frac{2kD}{h}\right)^{1/2} \end{aligned}$$

Veamos ahora que son mínimos: Calculamos el Hessiano, revisamos que su determinante evaluado en el punto (Q^*, M^*) es positivo y $\frac{\partial^2 TC(Q^*, M^*)}{\partial Q^2} > 0$.

1. Primero calculamos las cuatro parciales:

a)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 TC(Q, M)}{\partial Q^2} &= \frac{\partial}{\partial Q} \left(\frac{-2kD - M^2h + pQ^2 - pM^2}{Q^2} \right) \\ &= \frac{2pQ^*Q^2 - 2Q^*(-2kD - M^2h + pQ^2 - pM^2)}{Q^4} \\ &= \frac{2pQ^2 - 2(-2kD - M^2h + pQ^2 - pM^2)}{Q^3} \\ &= \frac{4kD + 2M^2(h+p)}{Q^3} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 TC(Q, M)}{\partial M^2} &= \frac{\partial}{\partial M} \left(\frac{M(p+h) - Qp}{Q} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial M} \left(M \frac{p+h}{Q} - p \right) \\ &= \frac{p+h}{Q} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 TC(Q, M)}{\partial Q, \partial M} &= \frac{\partial}{\partial M} \left(\frac{-2kD - M^2h + pQ^2 - pM^2}{Q^2} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial M} \left(M^2 \frac{-(h+p)}{Q^2} + \frac{pQ^2 - 2kD}{Q^2} \right) \\
&= \frac{-2M(h+p)}{Q^2}
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 TC(Q, M)}{\partial M, \partial Q} &= \frac{\partial}{\partial Q} \left(\frac{M(p+h) - Qp}{Q} \right) \\
&= \frac{-pQ - 1(M(p+h) - Qp)}{Q^2} \\
&= \frac{-M(p+h)}{Q^2}
\end{aligned}$$

2. Ahora evaluamos en el punto (Q^*, M^*) cada una de las parciales:

a)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 TC(Q, M)}{\partial Q^2}(Q^*, M^*) &= \frac{4kD + 2M^{*2}(h+p)}{Q^{*3}} \\
&= \frac{4kD + 2\sqrt{\frac{2kDp}{(p+h)h}}^2 (h+p)}{\sqrt{\frac{2kD(p+h)}{ph}}^3} \\
&= \frac{4kD + 2\frac{2kDp}{(p+h)h}(h+p)}{\sqrt{\frac{2kD(p+h)}{ph}}^3} \\
&= \frac{4kD + \frac{4kDp}{h}}{\sqrt{\frac{2kD(p+h)}{ph}}^3} \\
&= 4\frac{kDh + kDp}{h\sqrt{\frac{2kD(p+h)}{ph}}^3} \\
&= \frac{4kD(h+p)}{h\sqrt{\frac{2kD(p+h)}{ph}}^3} \\
&= \frac{4kD(h+p)}{h\frac{(2kD(p+h))^{3/2}}{(ph)^{3/2}}} \\
&= \frac{4kD(h+p)h^{1/2}p^{3/2}}{4 * 2^{1/2}(kD(p+h))^{3/2}} \\
&= p\sqrt{\frac{hp}{2kD(p+h)}}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 TC(Q, M)}{\partial M^2}(Q^*, M^*) &= \frac{p+h}{Q^*} \\
&= \frac{p+h}{\sqrt{\frac{2kD(p+h)}{ph}}} \\
&= \sqrt{\frac{(p+h)^2}{\frac{2kD(p+h)}{ph}}} \\
&= \sqrt{\frac{ph(p+h)}{2kD}}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 TC(Q, M)}{\partial Q \partial M}(Q^*, M^*) &= \frac{-2M^*(h+p)}{Q^{*2}} \\
&= \frac{-2\sqrt{\frac{2kDp}{(p+h)h}}(h+p)\sqrt{\frac{2kD(p+h)}{ph}}}{\frac{kD}{ph}} \\
&= \frac{-(2kDp)^{1/2}}{((p+h)h)^{1/2}} \\
&= -\frac{(2kDp)^{1/2} ph}{((p+h)h)^{1/2} kD} \\
&= -p\sqrt{\frac{ph}{2kD(p+h)}}
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 TC(Q, M)}{\partial M \partial Q}(Q^*, M^*) &= \frac{-M^*(p+h)}{Q^{*2}} \\
&= \frac{-\sqrt{\frac{2kDp}{(p+h)h}}(p+h)}{\sqrt{\frac{2kD(p+h)}{ph}}^2} \\
&= \frac{-\sqrt{\frac{2kDp}{(p+h)h}}}{\frac{2kD}{ph}} \\
&= -\frac{(2kDp)^{1/2}}{\frac{((p+h)h)^{1/2}}{2kD}} \\
&= -\frac{ph(2kDp)^{1/2}}{((p+h)h)^{1/2}2kD} \\
&= -p\sqrt{\frac{ph}{2kD(p+h)}}
\end{aligned}$$

3. Notamos que, dado que cada parámetro del modelo es positivo y de la raíz tomamos únicamente el valor positivo, se cumple que

$$\frac{\partial^2 TC(Q^*, M^*)}{\partial Q^2} > 0$$

4. Por último, comprobamos la positividad del determinante:

$$\begin{aligned}
 \det(H(Q^*, M^*)) &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 TC(Q, M)}{\partial Q^2}(Q^*, M^*) & \frac{\partial^2 TC(Q, M)}{\partial Q \partial M}(Q^*, M^*) \\ \frac{\partial^2 TC(Q, M)}{\partial M \partial Q}(Q^*, M^*) & \frac{\partial^2 TC(Q, M)}{\partial M^2}(Q^*, M^*) \end{pmatrix} \\
 &= \det \begin{pmatrix} p \sqrt{\frac{hp}{2kD(p+h)}} & -p \sqrt{\frac{ph}{2kD(p+h)}} \\ -p \sqrt{\frac{ph}{2kD(p+h)}} & \sqrt{\frac{ph(p+h)}{2kD}} \end{pmatrix} \\
 &= p \sqrt{\frac{hp}{2kD(p+h)}} \sqrt{\frac{ph(p+h)}{2kD}} - p^2 \sqrt{\frac{ph}{2kD(p+h)}} \sqrt{\frac{ph}{2kD(p+h)}} \\
 &= p \sqrt{\frac{hp}{2kD(p+h)} \frac{ph(p+h)}{2kD}} - p^2 \sqrt{\frac{ph}{2kD(p+h)} \frac{ph}{2kD(p+h)}} \\
 &= p \frac{ph}{2kD} - p^2 \frac{ph}{2kD(p+h)} \\
 &= \frac{p^2 h}{2kD} \left(1 - \frac{p}{h+p}\right)
 \end{aligned}$$

Como $\frac{p}{h+p} < 1$, $1 - \frac{p}{h+p} > 0$ y dado que cada parámetro del modelo es positivo, se tiene que $\frac{p^2 h}{2kD} > 0$, por lo que $\det(H(Q^*, M^*)) > 0$

De esta manera se cumple que Q^* y M^* minimizan a la función de costo.

Apéndice B

Procedimiento alternativo para obtener una función de distribución sin considerar la normal

Continuamos trabajando sólo con el primer medicamento de la lista. Construimos una función de distribución acumulada, con base en las frecuencias de los datos: los ordenamos de menor a mayor y obtenemos la frecuencia acumulada de los datos, a partir de ello, asociamos un número entre cero y uno proporcional a la frecuencia acumulada, que tomaremos como la probabilidad de que la variable aleatoria que representa a la demanda sea menor o igual al número de Demanda observado:

	A	B	C	D	E
1	Id	Demanda	Frecuencia	Frecuencia Acumulada	Probabilidad
2	1	11	1	1	0.005882353
3	2	16	2	3	0.017647059
4	3	19	1	4	0.023529412
5	4	20	1	5	0.029411765
29	28	47	8	98	0.576470588
30	29	48	6	104	0.611764706
31	30	49	7	111	0.652941176
32	31	50	2	113	0.664705882
33	32	51	4	117	0.688235294
34	33	52	4	121	0.711764706
35	34	53	8	129	0.758823529
36	35	54	4	133	0.782352941
37	36	55	6	139	0.817647059
38	37	56	5	144	0.847058824
39	38	57	2	146	0.858823529
40	39	58	4	150	0.882352941
45	44	64	2	160	0.941176471
46	45	65	1	161	0.947058824
51	50	81	1	169	0.994117647
52	51	99	1	170	1

Figura B.1: Construcción de la probabilidad asociada a la distribución de la demanda

Se muestra una parte de la tabla en que asociamos la frecuencia (columna C) y la probabilidad (columna E).

A continuación con la función condicional anidada de “Excel”, construimos una función inversa de la acumulada, en la que dependiendo de un valor que represente a la probabilidad, nos dará como resultado, el valor de demanda observado que se le asocia:

Id	Demanda	Frecuencia	Frecuencia Acumulada	Probabilidad
1	11	1	1	0.005882353
2	16	2	3	0.017647059
3	19	1	4	0.023529412
4	20	1	5	0.029411765
29	47	8	98	0.576470588

Fórmula en la barra de fórmulas: `=SI(J5<=E2,B2,SI(J5<=E3,B3,SI(J5<=E4,B4,SI(J5<=E5,B5,SI(J5<=E6,B6,SI(J5<=E7,B7,SI(J5<=E8,B8,SI(J5<=E9,B9,SI(J5<=E10,B10))))))))`

Función de distribución acumulada inversa

El valor de la función asociado a la probabilidad 0.02 : 16

Figura B.2: Construcción de la función de distribución de probabilidad asociada a la distribución de la demanda

Se muestra la fórmula para obtener la demanda a partir de la probabilidad, por ejemplo, para una probabilidad 0.02, la demanda asociada será de 16 unidades.

Dado que para nuestro modelo, pedimos un nivel de servicio $T=0.98$, elegiremos 69:

Id	Demanda	Frecuencia	Frecuencia Acumulada	Probabilidad
1	11	1	1	0.005882353
2	16	2	3	0.017647059
3	19	1	4	0.023529412
4	20	1	5	0.029411765
29	47	8	98	0.576470588
30	48	6	104	0.611764706
31	49	7	111	0.652941176
39	57	2	146	0.858823529
40	58	4	150	0.882352941
45	64	2	160	0.941176471
46	65	1	161	0.947058824
47	66	2	163	0.958823529
48	67	2	165	0.970588235
49	69	2	167	0.982352941
50	70	1	168	0.988235294
51	81	1	169	0.994117647
52	99	1	170	1

Función de distribución acumulada inversa

El valor de la función asociado a la probabilidad 0.98 : 69

Figura B.3: Elección del dato que nos interesa

Al buscar el valor asociado a 0.98, encontramos que la demanda que satisface ser menor o igual a esa probabilidad es 69 unidades.

Por último, dado que necesitamos la demanda asociada sólo al lapso de espera L , multiplicamos por la fracción del año al que esta se refiere, que para el caso de este medicamento, es de $50/66$. Por lo que la demanda en el periodo de espera será: $69 \cdot 50/66$ que es aproximadamente 52 unidades. Por tanto, el momento adecuado para poner una nueva orden, será cada vez que queden, en inventario, 52 unidades de ese medicamento.

Apéndice C

Oficio del INAI 1

Oficio de respuesta a la petición de la demanda diaria de medicamentos en el área de farmacia.



UNIDAD DE TRANSPARENCIA



Ciudad de México, 12 de octubre de 2016

C. SOLICITANTE PRESENTE

Me refiero a la solicitud de información pública con número de folio **0064102579016**, presentada ante este Instituto Mexicano del Seguro Social (IMSS) a través de la Plataforma Nacional de Transparencia, mediante la cual se requiere:

"Datos estadísticos a cerca de demanda de medicamentos, así como de tiempos de atención de pacientes, se detalla en el documento anexo." (Sic)

Al respecto, con fundamento en lo establecido en los artículos 61, fracciones II y V, 123, 126, 133, 134, 135 y 136 de la Ley Federal de Transparencia y Acceso a la Información Pública (LFTAIP), esta Unidad de Transparencia solicitó a la **Unidad Médica de Alta Especialidad (UMAE) Hospital de Gineco-Obstetricia No. 4**, se pronunciara al respecto.

Es el caso, que la citada UMAE, pone a su disposición en archivo electrónico (se adjunta al presente) la información solicitada.

En caso de duda o aclaración respecto de la presente solicitud, favor de comunicarse con Guillermo Peña Álvarez, Jefe del Área de Información Pública al teléfono 52382700 Ext. 12286 o al correo electrónico guillermo.pena@imss.gob.mx

Sin otro particular, se reitera el compromiso de este Instituto Mexicano del Seguro Social con la transparencia y el acceso a la información.

ATENTAMENTE

**UNIDAD DE TRANSPARENCIA
INSTITUTO MEXICANO DEL SEGURO SOCIAL**

Elaboró: Luz María Hernández Alanís.

Apéndice D

Oficio del INAI 2

Oficio de respuesta a la petición de las medidas de cada área de la farmacia, del proceso de pedido de medicamentos y unidades que se transportan.



UNIDAD DE TRANSPARENCIA



Abril 05 de 2017

C. SOLICITANTE PRESENTE

Me refiero a la solicitud de información pública con número de folio **0064100888117**, presentada ante este Instituto Mexicano del Seguro Social (IMSS) a través de la Plataforma Nacional de Transparencia Gobierno Federal, mediante la cual requiere:

"Mis peticiones siguientes son a la UMAE Hospital de Gineco-Obstetricia Núm. 4 Luis Castelazo Ayala 1. Medidas en metros (largo, ancho, alto) del lugar donde almacenan medicamentos en la farmacia del hospital 2. Costo en que se incurre por concepto de transporte de medicamentos hasta la farmacia del hospital 3. Periodo (Cada cuánto o en qué fechas) en que se hace un nuevo pedido de medicamentos (Desglosado por medicamento)." (sic)

Al respecto, con fundamento en lo establecido en los artículos artículos 61, fracciones II y V, 123, 126, 133, 134, 135 y 136 de la Ley Federal de Transparencia y Acceso a la Información Pública (LFTAIP), esta Unidad de Transparencia solicitó a la UMAE Gineco Obstetricia Siglo XXI su pronunciamiento al respecto.

Es el caso que la UMAE le indica a usted lo siguiente:

"Se indica en atención al primer punto, que la farmacia es considerada un área circular, por lo que resulta inaccesible proporcionar las medidas de largo y ancho, ya que sólo aplica para áreas poligonales. No obstante, se tiene un área de 158.36 m². y una altura de 2.43 mts. Lo cual nos da un volumen de 384.83 m³. Con relación al punto número 2, se indica que el proveedor entrega directamente en la farmacia de tal forma que esta Unidad Médica, no realiza pagos por el concepto de transporte de medicamentos. En atención al tercer punto, se informa que dependiendo del nivel de inversión se genera la orden de reposición del medicamento que se valla consumiendo. Lo cual se parametriza conforme al sistema SAI (Sistema de Abasto Institucional) que está programado para 28 días. Los pedidos de medicamento se realizan en función del comportamiento de su consumo." (sic)

En caso de duda o aclaración respecto de la presente solicitud, favor de comunicarse con Jaqueline García Rodríguez del Área de Información Pública al teléfono 52382700 Ext. 12286, o al correo electrónico jaqueline.garcia@imss.gob.mx o bien con Ignacio Casas Pineda, Jefe del Área de Información Pública, Ext. 12286, correo electrónico ignacio.casas@imss.gob.mx.

Sin otro particular, se reitera el compromiso de este Instituto Mexicano del Seguro Social con la transparencia y el acceso a la información.

ATENTAMENTE

UNIDAD DE TRANSPARENCIA
INSTITUTO MEXICANO DEL SEGURO SOCIAL
Elaboró: Jaqueline García Rodríguez

Apéndice E

Oficio del INAI 3

Oficio de respuesta a la petición de la demanda diaria de medicamentos en el área de farmacia.



UNIDAD DE TRANSPARENCIA



Ciudad de México, 06 de junio de 2017

C. SOLICITANTE PRESENTE

Me refiero a la solicitud de información pública con número de folio **0064101465317**, presentada ante este Instituto Mexicano del Seguro Social (IMSS) a través de la Plataforma Nacional de Transparencia, mediante la cual se requiere:

"Solicito al IMSS en su unidad: Hospital Luis Castelazo Ayala, en específico al área de farmacia, la siguiente información: 1. División de la zona de la farmacia (es decir, en qué partes se divide, por ejemplo: área de atención al cliente, de almacenaje, de administración, etc.) y cuánto mide cada zona, muy importante, cuánto mide el área en que se almacenan los medicamentos. 2. ¿qué empresa es el proveedor de medicamentos para el área de farmacia? 3. El costo en que incurre el hospital por el concepto de pago a dicho proveedor. 4. Al realizar el pedido de medicamentos, ¿de cuánto es el lote? 5. ¿cuál es el mecanismo mediante el cual se reciben los medicamentos del proveedor, cómo se almacenan y cuál es el procedimiento que se sigue para la entrega a los pacientes que lo requieren? 6. ¿qué porcentaje del presupuesto asignado al IMSS (al hospital en específico, se destina a conceptos relacionados con los medicamentos (especificar cómo y en qué rubros).". (Sic)

Al respecto, con fundamento en lo establecido en los artículos 61, fracciones II y V, 123, 126, 133, 134, 135 y 136 de la Ley Federal de Transparencia y Acceso a la Información Pública (LFTAIP), esta Unidad de Transparencia solicitó a la **Unidad Médica de Alta Especialidad (UMAE) Hospital de Gineco-Obstetricia No. 4**, se pronunciara al respecto.

Es el caso, que la citada UMAE, da respuesta a su solicitud en los siguientes términos:

1.- El área de farmacia se divide en las siguientes áreas:

- Área del Centro Automatizado de Distribución de Insumos Terapéuticos 13.95 m2.
- Área de atención al público 5.28 m2.
- Área de almacenaje de medicamentos 126.31 m2.
- Área administrativa 12.82 m2.

2.- Se tienen diferentes proveedores que surten diferentes medicamentos los cuales firman contrato en nivel central, toda vez que las licitaciones son consolidadas.

3.- El costo depende de la cantidad de claves que se le hayan asignado en su contrato derivado de su participación en la licitación.

4.- Los lotes dependen de la entrega del proveedor.

5.- Se realiza la recepción de acuerdo al Manual de Procedimiento Administrativo para Farmacias con Sistema Automatizado y Manual 1082-003-001 en actividad, etapa I (recepción de medicamentos en farmacia), etapa III (surtido de medicamentos al derechohabiente por parte de farmacia).

Apéndice F

Lista de 32 medicamentos

Se enlistan los 32 medicamentos (con su descripción [6]) que acumulan el 80 % de la demanda que tuvo el hospital en el periodo del cual se tiene información, mostrando el porcentaje que representa cada uno de ellos de tal demanda.

ID	CLAVE	DESCRIPCIÓN	DEM
1	010.000.0101.00	ACIDO FÓLICO: 20 tabletas	1.99%
2	010.000.0104.00	PARACETAMOL: 10 tabletas	5.65%
3	010.000.0566.00	METILDOPA: 30 tabletas	3.64%
4	010.000.0570.00	HIDRALAZINA: 20 tabletas	7.53%
5	010.000.1006.00	CALCIO: 12 comprimidos	1.79%
6	010.000.1206.00	BUTILHIOSCINA: 10 grageas	0.85%
7	010.000.1233.00	RANITIDINA: 20 grageas	0.81%
8	010.000.1308.01	METRONIDAZOL: 30 tabletas	1.36%
9	010.000.1506.00	ESTRÓGENOS CONJUGADOS: 1 Envase con 43 g.	1.95%
10	010.000.1511.00	CIPROTERONA-ETINILESTRADIOL: 21 grageas	1.00%
11	010.000.1521.00	CLORMADINONA: 10 tabletas	0.92%
12	010.000.1561.00	METRONIDAZOL: 10 óvulos	2.49%
13	010.000.1566.00	NISTATINA: 12 óvulos	2.51%
14	010.000.1701.00	FUMARATO FERROSO: 50 tabletas	1.19%
15	010.000.1911.00	NITROFURANTOINA: 40 cápsulas	2.09%
16	010.000.1926.00	DICLOXACILINA: 20 cápsulas	1.12%
17	010.000.1929.00	AMPICILINA: 20 tabletas	5.17%
18	010.000.1956.00	AMIKACINA: 1 ampolleta	6.29%
19	010.000.2133.00	CLINDAMICINA: 16 tabletas	3.40%
20	010.000.2154.00	ENOXAPARINA: 2 jeringas	2.47%
21	010.000.2230.00	AMOXCILINA-A. CLAVULÁNICO: 12 tabletas	1.15%
22	010.000.3044.00	MEDROXIPROGESTERONA: 10 tabletas	0.83%
23	010.000.3407.00	NAPROXENO: 30 tabletas	1.38%
24	010.000.3417.00	DICLOFENACO: 20 grageas	5.71%
25	010.000.3504.00	LEVONOG. Y ETINILESTR.: 21 grageas	2.32%
26	010.000.3505.00	DESOGESTREL Y ETINILESTR.: 21 tabletas	1.76%
27	010.000.4186.00	MESALAZINA: 30 grageas	1.59%
28	010.000.4223.00	NADROPARINA: 2 jeringas	1.30%
29	010.000.4224.00	ENOXAPARINA: 2 jeringas	2.01%
30	010.000.4255.00	CIPROFLOXACINO: 8 tabletas	4.65%
31	010.000.4304.00	TOLTERODINA: 14 tabletas	1.51%
32	010.000.5165.00	METFORMINA: 30 tabletas	2.08%

Cuadro F.1: Medicamentos

Apéndice G

Características de la demanda de los medicamentos

Tabla que resume las características de la demanda de cada uno de los 32 medicamentos.

ID	CLAVE	DEMANDA A.	MEDIA SEM.	DESV. SEM.
1	010.000.0101.00	2574	45.42	12.47
2	010.000.0104.00	6306	126.16	37.25
3	010.000.0566.00	4080	82.77	28.58
4	010.000.0570.00	8604	171.42	55.68
5	010.000.1006.00	2097	40.75	24.36
6	010.000.1206.00	910	18.67	6.96
7	010.000.1233.00	944	18.4	6.65
8	010.000.1308.01	1645	30.98	14.15
9	010.000.1506.00	24.88	40.48	12.4
10	010.000.1511.00	1331	22.72	10.58
11	010.000.1521.00	1158	255.21	18.95
12	010.000.1561.00	2849	56.64	13.32
13	010.000.1566.00	3071	58.02	15.65
14	010.000.1701.00	1147	27.19	11.62
15	010.000.1911.00	4855	47.66	31.99
16	010.000.1926.00	1434	25.47	8.9
17	010.000.1929.00	6722	117.61	36.59
18	010.000.1956.00	7288	143.11	49.51
19	010.000.2133.00	3997	77.38	25.08
20	010.000.2154.00	3703	56.34	41.77
21	010.000.2230.00	1537	26.12	12.39
22	010.000.3044.00	1705	18.86	10.36
23	010.000.3407.00	1652	31.49	9.91
24	010.000.3417.00	7124	129.93	32.73
25	010.000.3504.00	3023	52.89	19.88
26	010.000.3505.00	2031	40.15	15.23
27	010.000.4186.00	2900	57.36	46.39
28	010.000.4223.00	2959	57.1	26.98
29	010.000.4224.00	3211	45.77	29.95
30	010.000.4255.00	5570	105.97	47.54
31	010.000.4304.00	1922	34.48	13.44
32	010.000.5165.00	2585	44.94	18.21

Cuadro G.1: Demanda

Abreviaturas: DEMANDA A.: demanda pronosticada anual; MEDIA SEM.: media estimada de la distribución normal asociada a la demanda semanal; DESV. SEM.: desviación estándar estimada de la distribución normal asociada a la demanda semanal.

Apéndice H

Costo unitario de los medicamentos, por clave

ID	CLAVE	COSTO	ID	CLAVE	COSTO
1	010.000.0101.00	1.05	17	010.000.1929.00	7.62
2	010.000.0104.00	1.97	18	010.000.1956.00	2.32
3	010.000.0566.00	11.65	19	010.000.2133.00	14.74
4	010.000.0570.00	6.41	20	010.000.2154.00	160.5
5	010.000.1006.00	17.03	21	010.000.2230.00	18.9
6	010.000.1206.00	4.16	22	010.000.3044.00	127.65
7	010.000.1233.00	3.1	23	010.000.3407.00	6.1
8	010.000.1308.01	4.67	24	010.000.3417.00	4.19
9	010.000.1506.00	236.4	25	010.000.3504.00	17.64
10	010.000.1511.00	123.77	26	010.000.3505.00	16.09
11	010.000.1521.00	12.99	27	010.000.4186.00	1.83
12	010.000.1561.00	4.01	28	010.000.4223.00	125.37
13	010.000.1566.00	3.38	29	010.000.4224.00	231.96
14	010.000.1701.00	2.49	30	010.000.4255.00	3.03
15	010.000.1911.00	18.34	31	010.000.4304.00	123.67
16	010.000.1926.00	10.46	32	010.000.5165.00	7.51

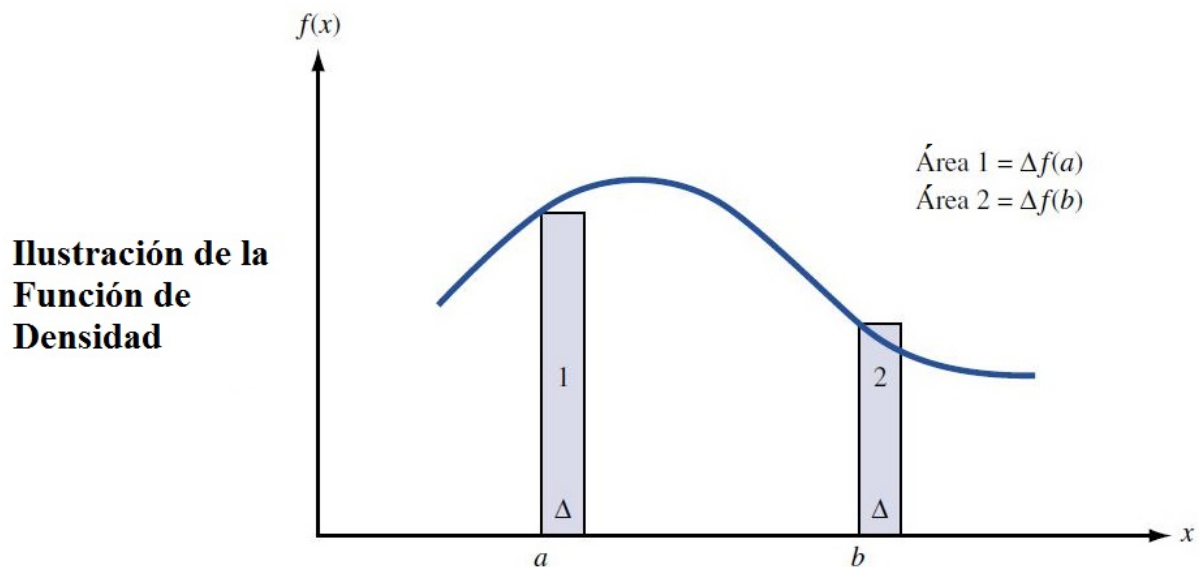
Cuadro H.1: Costos unitarios

Apéndice I

Función de densidad

Sea $f(x)$ la función de densidad de una variable aleatoria X , es decir, la que asocia a cada valor posible de X su probabilidad de ocurrencia. Puede interpretarse, f , como sigue: para Δ pequeña, se tiene que $P[x \leq \Lambda \leq x + \Delta] \approx \Delta f(t)$.

En la siguiente figura se muestra la razón:



La gráfica representa a f , por lo que es claro que se cumple lo siguiente:

$$\text{Área 1} = P[a \leq \Lambda \leq a + \Delta] \approx \Delta f(a)$$

$$\text{Área 2} = P[b \leq \Lambda \leq b + \Delta] \approx \Delta f(b)$$

Además, para una variable aleatoria X con función de densidad $f(x)$ como se muestra en la figura, los valores de X cerca de a son mucho más probables que los valores de X cerca de b [24].

Apéndice J

Probabilidad de que j sea mayor o igual a s

Como

$$\pi_j = \frac{(s\rho)^j \pi_0}{s! s^{j-s}} \text{ para } j = s+1, s+2, \dots$$

La probabilidad de que j sea mayor o igual a s está dada por la suma de las π_j , es decir:

$$\begin{aligned} P[j \geq s] &= \sum_{j=s}^{\infty} \frac{(s\rho)^j \pi_0}{s! s^{j-s}} \\ &= \frac{s^s \pi_0}{s!} \sum_{j=s}^{\infty} \rho^j \\ &= \frac{s^s \pi_0}{s!} \sum_{j=s}^{\infty} \rho^{j-s} \rho^s \\ &= \frac{s^s \pi_0}{s!} \rho^s \sum_{j=s}^{\infty} \rho^{j-s} \\ &= \frac{s^s \pi_0}{s!} \rho^s \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \\ &= \frac{s^s \pi_0}{s!} \rho^s \frac{1}{1-\rho} \\ &= \frac{(s\rho)^s \pi_0}{s!(1-\rho)} \end{aligned}$$

Apéndice K

Razón del suavizamiento exponencial

Calcularemos A_t .

Considerando $A_{t-1} = \alpha x_{t-1} + (1 - \alpha)A_{t-2}$, se tiene que:

$$\begin{aligned} A_t &= \alpha x_t + (1 - \alpha)[\alpha x_{t-1} + (1 - \alpha)A_{t-2}] \\ &= \alpha x_t + \alpha(1 - \alpha)x_{t-1} + (1 - \alpha)^2 A_{t-2} \end{aligned}$$

Ahora, dado que $A_{t-2} = \alpha x_{t-2} + (1 - \alpha)A_{t-3}$, se concluye que

$$A_t = \alpha x_t + \alpha(1 - \alpha)x_{t-1} + \alpha(1 - \alpha)^2 x_{t-2} + (1 - \alpha)^3 A_{t-3}$$

De tal manera, continuando con el proceso, se obtiene:

$$A_t = \alpha x_t + \alpha(1 - \alpha)x_{t-1} + \alpha(1 - \alpha)^2 x_{t-2} + \dots + \alpha(1 - \alpha)^k x_{t-k} + \dots$$

Como $\alpha + \alpha(1 - \alpha) + \alpha(1 - \alpha)^2 + \dots + \alpha(1 - \alpha)^k + \dots = 1$, en la última ecuación se observa que si realizamos el procedimiento un número infinito de veces, el promedio atenuado actual es un promedio ponderado de todas las observaciones del pasado.

El peso que se da a la observación de k periodos en el pasado disminuye en forma exponencial, por un factor de $(1 - \alpha)$. Mientras mayor sea el valor de α , se da más peso a las observaciones más recientes. Si el valor que minimiza la MAD es mayor a 0.5, entonces es probable que haya tendencia, variaciones estacionales o comportamiento cíclico.

Bibliografía

- [1] Devore, Jay L.: *Probabilidad y Estadística para ingeniería y ciencias*. Thomson, 1998.
- [2] Estadística Útil: *Prueba de bondad de ajuste distribución Poisson*, Enero 2017. URL{<https://www.youtube.com/watch?v=XcoPpq7XRf0r>}.
- [3] Feller, W.: *An Introduction to Probability Theory and its Applications*. John Wiley and Sons, Inc., Publishers, 1957.
- [4] Hillier, Frederick S. y Gerald J. Lieberman: *Introducción a la Investigación de Operaciones*. Mc Graw Hill, 2010.
- [5] Inmuebles24: *Inmuebles24*, Octubre 2017. URL{http://www.inmuebles24.com/propiedades/bodegas-en-renta-olivar-de-los-padres-52531834.html?utm_source=Mitula&utm_medium=CPC&utm_campaign=Mitula&ocultarDatos=true}.
- [6] Instituto Mexicano del Seguro Social: *Cuadro Básico de Medicamentos*.
- [7] Instituto Mexicano del Seguro Social: *Procedimiento para la compra emergente de bienes de consumo en las Unidades Médicas*.
- [8] Instituto Mexicano del Seguro Social: *UMAE Hospital de Gineco Obstetricia no. 4 Luis Castelazo Ayala*.
- [9] Instituto Mexicano del Seguro Social: *EL SISTEMA DE ABASTO INSTITUCIONAL (SAI)*, Mayo 2017. URL{<http://www.portal-imss.galeon.com/Imagenes/sistemas/SAI.html>}.
- [10] Instituto Mexicano del Seguro Social: *IMSSPORTAL*, Mayo 2017. URL{<https://www.imss-portal.org/category/seguridad-social-imss/>}.
- [11] Instituto Mexicano del Seguro Social: *PORTAL DE COMPRAS DEL IMSS*, Enero 2017. URL{<http://compras.imss.gob.mx/>}.
- [12] Instituto Mexicano del Seguro Social y Sindicato Nacional de Trabajadores del Seguro Social: *Contrato Colectivo de Trabajo 2005-2017*.
- [13] Kenett, Ron S. y Shelemyahu Zack: *Estadística Industrial Moderna*. Thomson, 2000.
- [14] Luendberger, David G. y Yung Ye: *Linear and Nonlinear Programming*. Springer, 2016.
- [15] Mun, Johnathan: *SIMULADOR DE RIESGO, Manual de Usuario en Español*. Real Options Valuation, Inc., 2011.

- [16] Secretaría de Gobernación: *Diario Oficial de la Federación, Días Inhábiles*.
- [17] Secretaría de Salud: *Modelo Nacional de Farmacia Hospitalaria*.
- [18] Secretaría del Trabajo y Previsión Social y Comisión Nacional de los Salarios Mínimos: *Salarios Mínimos vigentes a partir del 1 de enero de 2017*.
- [19] Sánchez Villarreal, Francisco: *NOTAS DEL CURSO DE ESTADÍSTICA NO PARAMÉTRICA, Estadística II*. Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ciencias, 2015.
- [20] Taha, Hamdy A.: *Investigación de Operaciones*. Pearson, 2011.
- [21] TRANSPORTES AVANCARGA: *RUTAS Y TARIFAS*, Mayo 2017. URL{<http://www.paginasprodigy.com.mx/avancarga/pagina123490.html>}.
- [22] UBER: *Estimado de tarifas Uber*, Mayo 2017. URL{<https://www.uber.com/es-MX/fare-estimate/>}.
- [23] Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Contaduría y Administración: *Estadística II –Guía de estudio–*.
- [24] Winston, Wayne L.: *Investigación de Operaciones*. Thompson, 2005.