



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

k-árboles *m*-dominantes en gráficas
n-conexas

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

Daniel Scognamiglio Moreno



DIRECTOR DE TESIS:
Mat. Laura Pastrana Ramírez
Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2019



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Datos del Alumno

Apellido paterno: Scognamiglio
Apellido materno: Moreno
Nombre(s): Daniel
Teléfono: 0445536751754
Universidad: Universidad Nacional Autónoma
de México
Facultad: Facultad de Ciencias
Número de cuenta: 412049567

Datos del tutor

Grado: Mat.
Apellido paterno: Pastrana
Apellido materno: Ramírez
Nombre(s): Laura

Datos del sidnodal 1

Grado: Dra.
Apellido paterno: Galeana
Apellido materno: Sánchez
Nombre(s): Hortensia

Datos del sinodal 2

Gado: Dr.
Apellido paterno: Rivera
Apellido Materno: Campo
Nombre(s): Eduardo

Datos del sinodal 3

Grado: Mat.
Apellido paterno: Pastrana
Apellido materno: Ramírez
Nombre(s): Laura

Datos del sinodal 4

Grado: Dra.
Apellido paterno: Sánchez
Apellido materno: López
Nombre(s): María del Rocío

Datos del sinodal 5

Grado: M. en C.
Apellido paterno: Benítez
Apellido materno: Bobadilla
Nombre(s): Germán

Datos de la tesis

Título: k -árboles m -dominantes en gráficas n -conexas.
Número de páginas: 140 p.
Año: 2019

Agradecimientos

A mi asesora de tesis Laura Pastrana Ramírez.

A mis sinodales Dra. Hortensia Galeana Sánchez, Dr. Eduardo Rivera Campo, Dra. María del Rocío Sánchez López y M. en C. Gremán Benítez Bobadilla por sus comentarios y sugerencias para la corrección de esta tesis.

A mi compañero y amigo Jorge Fernando Ibarra Corona (Pero bueno FolagoRRR).

A las amistades con las que puedo compartir este logro.

Y por último; a mis padres por su apoyo constante a lo largo de mi formación.

Índice general

Bibliografía	1
1. Conceptos elementales y primeros resultados	10
1.1. Gráfica: definición y ejemplos	10
1.2. Grado y vecindad de un vértice	13
1.3. Algunos tipos de gráficas	15
1.4. Subgráficas	16
1.5. Caminos en gráficas	17
1.6. Gráficas conexas	22
1.7. Algunas operaciones en gráficas	23
1.8. Vértices de corte, aristas de corte y bloques	26
1.9. Árboles	28
1.10. Gráficas hamiltonianas	40
1.11. Conexidad puntual	41
1.12. Independencia.	45
1.13. Teorema Chvátal-Erdős	46
1.14. Dominación en gráficas	48
1.15. Digráficas	49
2. Árboles generadores con grados acotados	53
2.1. Lema de apoyo	54
2.2. Árboles generadores con grado acotado	56
3. k-árboles m-dominantes en gráficas	69
3.1. Definiciones y primeros resultados	70
3.2. k -árboles m -dominantes en gráficas	74
3.3. Aplicación sobre una red de distribución de agua potable	118
Bibliografía	138

Introducción

La teoría de gráficas es la rama de las matemáticas que tiene sus fundamentos en las matemáticas discretas. Esta requiere herramientas de diversas áreas, como combinatoria, álgebra, probabilidad, geometría de polígonos, aritmética y topología. Actualmente ha tenido mayor influencia en el campo de la informática, las ciencias de la computación y telecomunicaciones; debido a la gran cantidad de aplicaciones en la optimización de recorridos, procesos, flujos, algoritmos de búsquedas, entre otros.

Por ejemplo, en la Figura 1, podemos observar como la red ferroviaria de España de 1872 puede ser modelada por una gráfica; en la cual las ciudades son representadas por vértices y las vías férreas por aristas. Observemos que entre todo par de vértices de la gráfica existe una única trayectoria; lo que nos indica que la gráfica es conexa. A estas gráficas se les conoce como árboles.

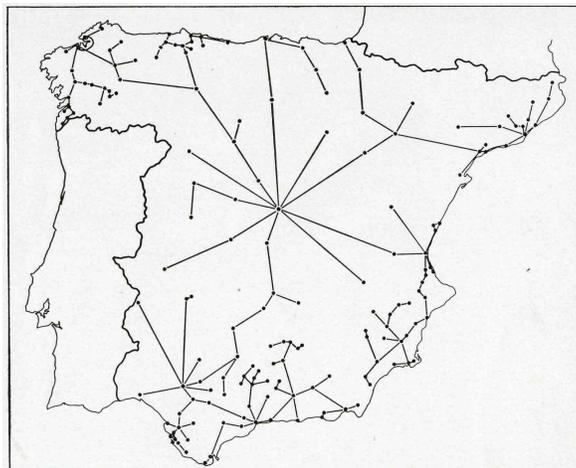


Figura 1: Red ferroviaria de España en 1872

Al conectar todas las ciudades de España con una única trayectoria, se utiliza el mínimo número de aristas, en esto radica la importancia del estudio de los árboles. Un árbol es generador de una gráfica conexa G , si este es subgráfica de G y contiene a todos los vértices de G . Podemos decir que el árbol que aparece en la Figura 1; es un árbol generador de la gráfica conexa de las ciudades principales de España. Hallar un árbol generador en una gráfica conexa ha sido un problema de estudio de mucha relevancia para la teoría de gráficas. Hoy en día sabemos que toda gráfica conexa G tiene un árbol generador.

Una clase especial de árboles son los k -árboles, con k un entero mayor o igual que 2, los cuales son aquellos árboles que tienen grado máximo a lo más igual a k . Lo natural sería preguntarse si toda gráfica tiene un k -árbol generador.

El primer resultado que encuentra un 2-árbol generador aparece en 1971; cuando Chvátal y Erdős dan el resultado siguiente: *Sean $n \geq 1$ un entero y G una gráfica n -conexa. Si $\alpha(G) \leq n + 1$, entonces G tiene una trayectoria hamiltoniana, donde $\alpha(G)$ es el número de independencia; el cual cumple que $\alpha(G) = \text{máx}\{|S| : S \text{ es un conjunto independiente}\}$. Este teorema aparece en el artículo “A note on hamiltonian circuits” [9]. Observemos que una trayectoria hamiltoniana es un 2-árbol generador.*

Posteriormente M. Las Vergnas se preguntó qué condiciones debe tener una gráfica n -conexa G para que tenga un árbol generador con al menos l vértices finales [15].

En 1979; S. Win en el artículo “On a conjecture of Las Vergnas concerning certain spanning trees in graphs” [15] plantea el resultado siguiente como solución a la pregunta anterior: *Sea G una gráfica n -conexa. Si $\alpha(G) \leq n + l - 1$, entonces G tiene un árbol generador de G con l -hojas.*

Más adelante en 1988 Víctor Neumann Lara y Eduardo Rivera Campo presentan los siguientes resultados:

- *Sean G una gráfica n -conexa con número de independencia $\alpha(G)$, s y c dos enteros tales que $3 \leq s$ y $0 \leq c \leq k$. Si $\alpha(G) \leq 1 + k(s - 1) + c$, entonces G tiene un árbol generador con grado máximo a lo más $s + 1$ que contiene a lo más c vértices de grado $s + 1$.*

- Sea G una gráfica n -conexa con número de independencia $\alpha(G)$. Si $\alpha(G) \leq 1 + ns$ para algún entero positivo s , entonces G tiene un árbol generador con grado máximo a lo más $s + 1$.

Estos teoremas son una generalización al enunciado de Chvátal y Erdős, que permiten encontrar un $(s + 1)$ -árbol generador en una gráfica n -conexa con un número de independencia dado. Dichos resultados se encuentran en el artículo “*Spanning tree with bounded degrees*” [13].

Por otro lado, además de tener k -árboles generadores, también contamos con los k -árboles m -dominantes; un k -árbol T m -domina a G , si cumple que T es subgráfica de G y para todo $v \in V(G)$ se tiene que $d_G(v, T) \leq m$.

Broersma postuló que en una gráfica n -conexa con invariante

$$\alpha^{2(m+1)}(G) \leq n + 1$$

contiene una trayectoria P que m -domina a G [5]. Observemos que P es un 2-árbol que m -domina a G . Esto también resulta ser una generalización al resultado propuesto por Chvátal y Erdős [9], pues si se da el caso para $m = 0$ se halla un 2-árbol generador de G .

Luego en 2014, Mikio Kano, Kenta Ozeki, Masao Tsugaki y Guiying Yan averiguaron que se puede hallar un k -árbol m -dominante en una gráfica n -conexa con invariante $\alpha^{2(m+1)}(G) \leq (k - 1)n + 1$. Este resultado aparece en el artículo “*m-dominating k-trees of graphs*” [12] y es presentado como una generalización a los teoremas propuestos por Broersma, V. Neumann Lara y E. Rivera Campo.

En esta tesis nos centraremos en hacer el estudio de los resultados propuestos por Chvátal, Erdős, V. Neumann Lara, E. Rivera Campo, Mikio Kano, Kenta Ozeki, Masao Tsugaki y Guiying Yan.

A lo largo del primer capítulo nos enfocaremos en establecer las definiciones y teoremas que darán sustento al estudio de los k -árboles. A la par de esto se hará la revisión del resultado que aparece en el artículo “*A note on hamiltonian circuits*” [9], donde se obtiene un 2-árbol generador.

En el segundo capítulo se estudiará al $(s + 1)$ -árbol a través del artículo “*Spanning tree with bounded degrees*” [13].

En el tercer capítulo se dará la demostración del teorema para encontrar un k -árbol m -dominante en una gráfica n -conexa que aparece en el artículo “ *m -dominating k -trees of graphs*” [12]. Posteriormente proponemos un algoritmo para encontrar un k -árbol m -dominante, en una gráfica que cumpla las condiciones del teorema probado en este capítulo; deducido a partir de dicha demostración. Por último se da una posible solución al problema de distribución de agua en una red pequeña, usando k -árboles m -dominantes.

Capítulo 1

Conceptos elementales y primeros resultados

Comenzaremos con un poco de historia para visualizar como se produjo el primer acercamiento a lo que hoy se conoce como teoría de gráficas. De igual manera a lo largo de este capítulo sentaremos las definiciones y resultados que darán sustento a los objetivos de estudio de este trabajo.

1.1. Gráfica: definición y ejemplos

En el año de 1736, se le planteó al matemático Leonhard Euler el "Problema de los puentes de Königsberg". El cual consistía en encontrar un paseo dominical, que comenzara y finalizara en el mismo sitio, después de recorrer los siete puentes de la ciudad, sin pasar dos o más veces por ninguno de ellos. En la Figura 1.1 podemos observar como se ve la ciudad dividida en islas y los puentes entre los segmentos de tierra.

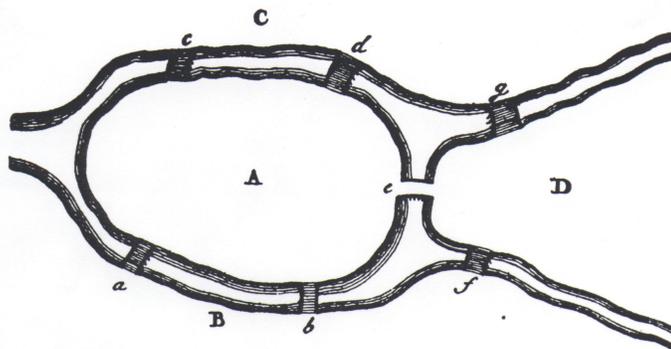


Figura 1.1: Dibujo de la ciudad de Königsberg

Euler realizó un modelo matemático del problema, en el cual considero como puntos a las partes de tierra y como líneas a los puentes entre los puntos, lo que derivó en la representación de la Figura 1.2.

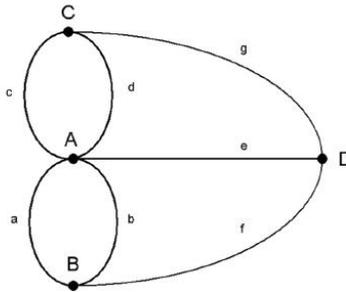


Figura 1.2: Representación propuesta por Euler

Observó que cuando llegamos a uno de los puntos por un puente, solo se puede salir del punto a través de otro puente. En otras palabras, el número de veces que entras en un punto es igual al número de veces que sales de él; es decir, que deben llegar un número par de puentes a cada punto para que cada puente sea atravesado exactamente una vez. Sin embargo, cuatro de los puntos en el problema son tocados por un número impar de puentes, por lo que, el no repetir puentes es imposible.

El trabajo de Euler, el cual fue publicado el 26 de agosto de 1736, es considerado el primero en el campo de la teoría de gráficas.

Este modelo realizado por Euler se conoce como gráfica, por lo que podemos ahora dar nuestra primera definición.

Definición. Una *gráfica* G es un par ordenado $(V(G), A(G))$ donde $V(G)$ es un conjunto finito y no vacío de objetos, al que llamaremos conjunto de vértices de G , y $A(G)$ es un conjunto de pares no ordenados de vértices distintos, al que llamaremos conjunto de aristas de G .

Diremos que una gráfica es simple si en ella no hay aristas múltiples (observe que en la Figura 1.2 entre los vértices A y B hay una arista múltiple) entre dos vértices y no tiene lazos. Como nota señalaremos que para este trabajo trabajaremos con gráficas simples.

Dada una gráfica G , la cardinalidad de $V(G)$ es el *orden* de G y la cardinalidad de $A(G)$ es el *tamaño* de G . El orden de cualquier gráfica es al menos uno.

Dada una gráfica G y dos vértices u y v en G , si $\{u, v\}$ en $A(G)$ diremos que: u y v son *vértices adyacentes*, u y v son los *extremos* de la arista $\{u, v\}$; la arista $\{u, v\}$ *incide* en u e *incide* en v . La forma de denotar la arista $\{u, v\}$ de una gráfica será uv .

Definición. Sean G una gráfica, u un vértice en G y U un subconjunto de vértices de G tal que $u \notin U$. Decimos que u es adyacente a U si u es adyacente a uno o más vértices de U , por lo que podemos decir que existe al menos una uU -arista.

Sean U y B dos subconjuntos de vértices de G , decimos que existe una UB -arista si tenemos un vértice u en U tal que existe al menos una uB -arista.

Ejemplo. Sea $G = (V(G), A(G))$ una gráfica, con $V(G) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ y $A(G) = \{f = x_1x_2, g = x_1x_3, i = x_2x_4, j = x_3x_4, h = x_3x_5\}$.

La *representación geométrica* de una gráfica resulta de dibujar en el plano puntos asociados a los vértices y líneas entre dos puntos si los vértices correspondientes son adyacentes, la Figura 1.3 representa la gráfica del ejemplo anterior.

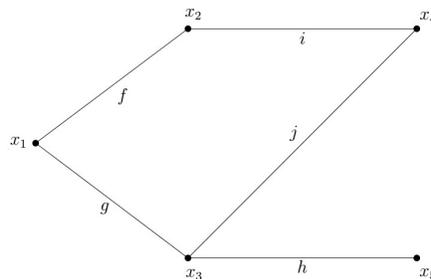


Figura 1.3: Ejemplo de una gráfica

Cuando una gráfica G consiste de un sólo vértice, se dice que G es *trivial*.

Las representaciones que aparecen en la Figura 1.4 son algunos ejemplos de gráficas.

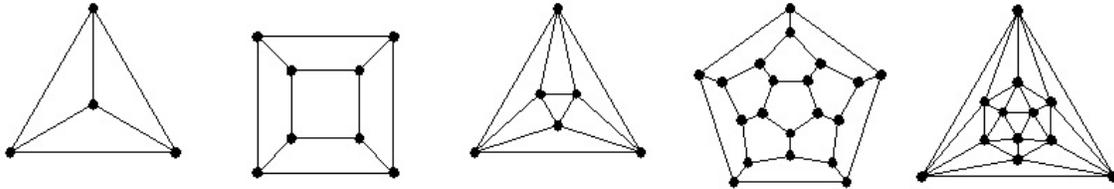


Figura 1.4: Diferentes gráficas

1.2. Grado y vecindad de un vértice

Definición. Sean G una gráfica y v un vértice de G , diremos que el *grado* de v es el número de aristas que inciden en él o también lo podemos ver como el número de vértices adyacentes a él. Lo denotaremos por $\delta_G(v)$.

Notemos que podemos tener en una gráfica vértices con grado cero; es decir, no tienen aristas que incidan en ellos.

Definición. El *grado máximo* $\Delta(G)$ de una gráfica G es:

$$\Delta(G) = \max\{\delta_G(v) \mid v \in V(G)\}.$$

Definición. El *grado mínimo* $\delta(G)$ de un gráfica G es:

$$\delta(G) = \min\{\delta_G(v) \mid v \in V(G)\}.$$

Definición. Dada una gráfica G y un vértice v de G , al conjunto de vértices adyacentes a v se le llama la *vecindad* de v en G y se denota por $N_G(v)$.

Notemos que en una gráfica G para todo vértice v de G , se cumple que:

$$\delta_G(v) = |N_G(v)|.$$

Veamos el primer teorema de esta tesis.

Teorema 1.2.1. *Si G es una gráfica de tamaño q , entonces se cumple que*

$$\sum_{v \in V(G)} \delta_G(v) = 2q.$$

Demostración. Sea G una gráfica de orden p y tamaño q . Haremos la demostración por inducción sobre el tamaño de G . Supongamos que $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$.

Base. Cuando $q = 0$, G no tendrá ninguna arista. Por otro lado, se cumple que para toda i en $\{1, 2, \dots, p\}$ $\delta_G(v_i) = 0$. Por lo que

$$\sum_{v_i \in V(G)} \delta_G(v_i) = 0.$$

Cuando $q = 1$, G tiene exactamente una arista. Por lo tanto, existirán exactamente dos vértices cuyo grado sea igual a uno y el resto tendrá grado cero. Por lo tanto, tenemos que

$$\sum_{v_i \in V(G)} \delta_G(v_i) = 1 + 1 = 2(1) = 2q.$$

Hipótesis de inducción. Sean p' y q' dos números enteros positivos, tales que $1 \leq q' \leq q$ y supongamos que para toda gráfica G' de orden p' y tamaño q' se cumple que para toda i en $\{1, 2, \dots, p'\}$

$$\sum_{v_i \in V(G')} \delta_{G'}(v_i) = 2q'.$$

Paso inductivo. Consideremos una gráfica G de orden p y tamaño q . Ya que $q > 1$ tomemos una arista e en $A(G)$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $e = v_1v_2$. Ahora construiremos una nueva gráfica G' que satisfaga la hipótesis de inducción con $V(G') = V(G)$ y $A(G') = A(G) \setminus e$.

Notemos que el orden de G' es p y su tamaño es $q' = q - 1$. Además tenemos lo siguiente

$$\delta_{G'}(v_1) = \delta_G(v_1) - 1,$$

$$\delta_{G'}(v_2) = \delta_G(v_2) - 1,$$

$$\delta_{G'}(v_i) = \delta_G(v_i) \text{ para toda } i \text{ en } \{3, 4, \dots, p\}.$$

Por hipótesis de inducción y al sustituir las equivalencias previas, tenemos que

$$\sum_{v_i \in V(G')} \delta_{G'}(v_i) = 2q',$$

$$(\delta_G(v_1) - 1) + (\delta_G(v_2) - 1) + \sum_{i=3}^p \delta_G(v_i) = 2q',$$

$$\delta_G(v_1) + \delta_G(v_2) + \sum_{i=3}^p \delta_G(v_i) = 2q' + 2,$$

$$\delta_G(v_1) + \delta_G(v_2) + \sum_{i=3}^p \delta_G(v_i) = 2(q' + 1),$$

$$\sum_{i=1}^p \delta_G(v_i) = 2q.$$

□

1.3. Algunos tipos de gráficas

En esta sección definiremos algunos tipos de gráficas con las que trabajaremos en esta tesis.

Definición. Decimos que una gráfica G es *isomorfa* a una gráfica H si existe $f : V(G) \rightarrow V(H)$ una función biyectiva con regla de correspondencia $f(v) = v'$, tal que $xy \in A(G)$ si y solo si $x'y' \in A(H)$. Y se denota como $G \cong H$.

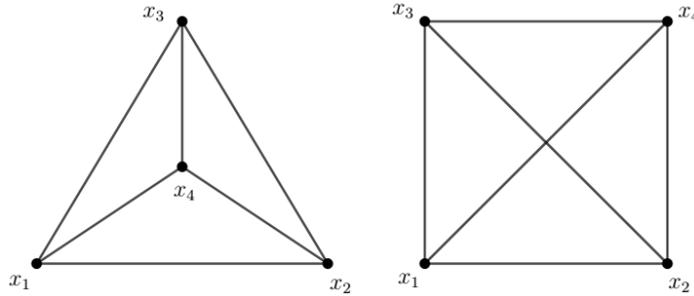


Figura 1.5: Gráficas isomorfas

Definición. Sea G una gráfica. Una *partición* de $V(G)$, está dada por $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ donde cada V_i es un subconjunto de vértices de G , tal que:

- Para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tenemos que $V_i \subseteq V(G)$ y $V_i \neq \emptyset$.
- Para cada par $i \neq j$ con $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, se cumple $V_i \cap V_j = \emptyset$.
- Para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tenemos que $\bigcup_i^n V_i = V(G)$.

Definición. Diremos que G es una *gráfica bipartita* si existe una partición del conjunto de vértices en dos conjuntos de vértices I y U , tal que las aristas de G tienen un extremo en el conjunto de I y otro extremo en el conjunto U .

Definición. Diremos que G es una *gráfica k -regular* si todos los vértices de G tienen grado k .

Si cada par de vértices tiene un arista entre ellos tenemos la siguiente gráfica:

Definición. Una gráfica G se dice que es *completa* si cualquier par de sus vértices son adyacentes; es decir, para todo v en $V(G)$ se tiene que $\delta(v) = p-1$. Se denota por K_n donde n es el número de vértices de G .

Las gráficas de la Figura 1.6 son gráficas completas que a su vez son también gráficas $(p-1)$ -regulares.

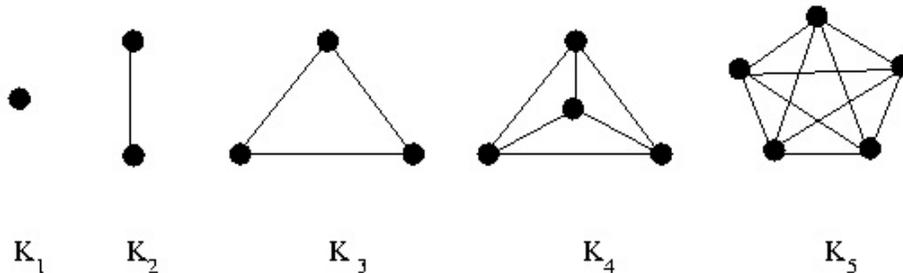


Figura 1.6: Gráficas completas

1.4. Subgráficas

De manera intuitiva, una subgráfica es una gráfica que vive dentro de otra gráfica. Así, tenemos la siguiente definición.

Definición. Dada una gráfica G , diremos que H es una *subgráfica* de G si H cumple que $V(H) \subseteq V(G)$ y $A(H) \subseteq A(G)$. Lo denotamos como $H \leq G$.

Note que toda gráfica G es subgráfica de sí misma.

Si H es subgráfica de G , pero $V(H) \subset V(G)$, decimos que H es una *subgráfica propia* de G .

Adicionalmente, tenemos dos clases especiales de subgráficas con las que trabajaremos.

Definición. Dada una gráfica G y S un subconjunto de los vértices de G , la *subgráfica inducida* por S en G , denotada como $G[S]$ o $\langle S \rangle_G$, tiene por conjunto de vértices a S y dos vértices en $G[S]$ son adyacentes si y solo si son adyacentes en G .

Definición. Sea G una gráfica. H es una *subgráfica generadora* de G si y solo si $V(H) = V(G)$.

A continuación se muestra un ejemplo de una gráfica G (Figura 1.7) y una subgráfica generadora de G .

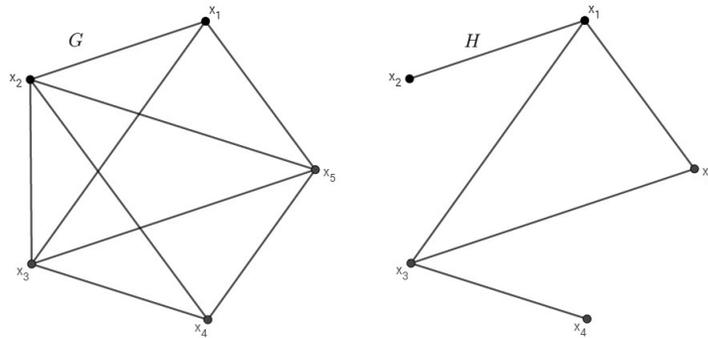


Figura 1.7: Gráfica G y H su subgráfica generadora

1.5. Caminos en gráficas

Definición. Sea G una gráfica. Un *camino*: $C = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$, es una sucesión de vértices de G que cumple que $e_i = x_i x_{i+1}$ en $A(G)$ con $0 \leq i \leq n-1$. Definimos su longitud como n y se denota por $l(C) = n$. Llamaremos un $x_0 x_n$ -camino a un camino que inicia en x_0 y finaliza en x_n .

Definición. Sea G una gráfica, para todo par de vértices distintos de G , decimos que la *distancia en G* de x a y es igual a la mínima longitud de los xy -caminos. Lo denotamos como $d_G(x, y)$.

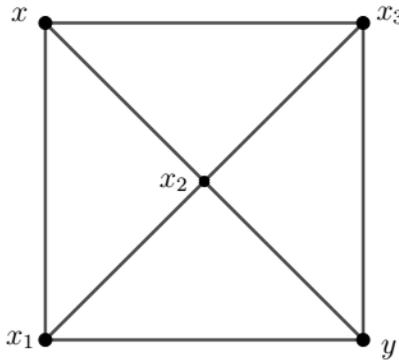


Figura 1.8: $d_G(x, y) = 2$

Para dos subconjuntos de vértices X y Y de G , la distancia de X a Y se define como sigue:

$$d_G(X, Y) = \text{mín}\{d_G(x, y) : x \in X \text{ y } y \in Y\}.$$

Si tenemos que $d_G(X, Y) = 0$, entonces quiere decir $X \cap Y \neq \emptyset$.

Definición. Sea G una gráfica, un camino $C = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0)$ es *cerrado* si el vértice inicial y el vértice final son iguales.

Definición. Sea G una gráfica, un camino en el que no se repiten aristas se llama *paseo*.

Definición. Sea G una gráfica, un camino en el que no se repiten vértices se llama *trayectoria*. Denotaremos a las trayectorias como sigue $P = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_m)$, diremos que P es una (x_0, x_m) -trayectoria. Una *subtrayectoria* de P que va de x_i a x_j , como $P' = (x_i, P, x_j)$; es decir, $(x_i, P, x_j) = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j)$.

Si $P = (u = x_1, x_2, \dots, x_n = v)$ es una (u, v) -trayectoria, entonces $P^{-1} = (v = x_n, x_{n-1}, \dots, x_2, x_1 = u)$ es la (v, u) -trayectoria; es decir, que se recorre la trayectoria P en sentido contrario.

Decimos que dos (u, v) -trayectorias T y Y son *internamente ajenas* cuando se cumple que $V(T) \cap V(Y) = \{u, v\}$; es decir, que comparten únicamente los vértices inicial y final.

$T_1 = (x_1, x_5, x_3)$ y $T_2 = (x_1, x_4, x_3)$ son dos (x_1, x_3) -trayectorias internamente ajenas en la gráfica que muestra en la Figura 1.9, ya que se cumple que: $V(T_1) \cap V(T_2) = \{x_1, x_3\}$.

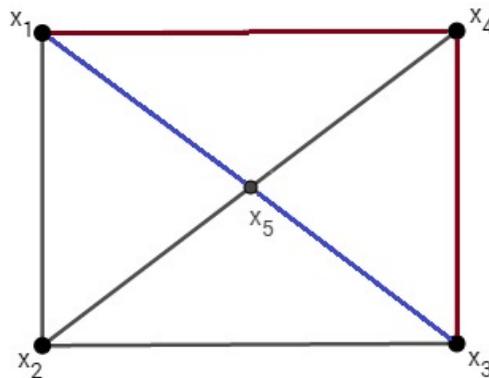


Figura 1.9: Trayectorias internamente ajenas

Definición. Sea G una gráfica, un camino cerrado:

$$P = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = x_1),$$

con $l(P) \geq 3$, que no repite vértices excepto el vértice final y el vértice inicial; es decir, $x_1 = x_n$ lo llamaremos *ciclo*.

Sabiendo estas definiciones, podemos ahora dar los siguientes resultados.

Teorema 1.5.1. Sean G una gráfica, u y v dos vértices distintos de G . Si G tiene un uv -camino de longitud l , entonces G tiene una (u, v) -trayectoria de longitud a lo más l .

Demostración. Sean G una gráfica y $C = (x_0, x_1, \dots, x_{l-1}, x_l)$ un camino en G de longitud l con $x_0 = u$ y $x_l = v$. Por demostrar que tenemos una (u, v) -trayectoria P tal que $l(P) \leq l$. Haremos la demostración sobre el hecho de que la longitud del camino es finita.

Si en C no se repiten vértices, entonces C es una trayectoria de longitud l . Si tenemos que $x_i = x_j$ para i distinto de j , entonces supongamos sin pérdida de generalidad que $i < j$; es decir, podemos ver a C como:

$$C = (x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i = x_j, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j = x_i, x_{j+1}, \dots, x_l),$$

entonces si quitamos los vértices $(x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{j-2}, x_{j-1})$, entonces obtenemos el siguiente camino $C_1 = (x_0, \dots, x_{i-1}, x_i = x_j, x_{j+1}, \dots, x_l)$ tal que $l(C_1) < l$. Si en C_1 no se repiten vértices, entonces es una (x_0, x_l) -trayectoria de longitud menor que l . Supongamos que en C_1 tenemos nuevamente un vértice repetido $x_n = x_m$ con $n < m$:

$$C_1 = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = x_m, x_{n+1}, \dots, x_{m-1}, x_m = x_n, x_{m+1}, \dots, x_l),$$

entonces si quitamos los vértices $(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{m-2}, x_{m-1})$, entonces obtenemos a C_2 un camino tal que

$$C_2 = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = x_m, x_{m+1}, \dots, x_l),$$

por lo que $C_2 \subset C_1 \subset C$. Si C_2 no repite vértices, entonces tenemos una (x_0, x_l) -trayectoria tal que $l(C_1) > l(C_2)$. Si en C_2 se repite un vértice, digamos $x_k = x_p$ con $k < p$, entonces

$$C_2 = (x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k = x_p, x_{k+1}, \dots, x_{p-1}, x_p = x_k, x_{p+1}, \dots, x_l),$$

y al quitar los vértices $(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{p-2}, x_{p-1})$ obtenemos un camino:

$$C_3 = (x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k = x_p, \dots, x_l),$$

tal que $l(C_2) > l(C_3)$ y además $C_3 \subset C_2 \subset C_1 \subset C$.

Como el número de vértices de G es finito y K_2 es una trayectoria, continuando con este procedimiento existe un número positivo ρ tal que encontraremos a $C_\rho = (u = x_0, x_1, \dots, x_{l-1}, x_l = v)$ un camino que ya no repite vértices, por lo tanto, C_ρ es una (u, v) -trayectoria tal que $l(C_\rho) < l$ y $C_\rho \subset \dots \subset C_1 \subset C$.

Por lo tanto, concluimos G tiene una (u, v) -trayectoria de longitud a lo más l , lo que concluye la demostración. \square

Proposición 1.1. *Si $\delta(G) = k$, entonces existe en G una trayectoria de longitud al menos k .*

Demostración. Sea $P = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_m)$ una trayectoria de longitud máxima en G . Por demostrar que $m \geq k$. Afirmamos que $N_G(u_0) \subseteq V(P)$. Si u_0 fuera adyacente a algún $v \in V(G) \setminus V(P)$, entonces se tendría una trayectoria $P' = (v, u_0, u_1, u_2, \dots, u_m)$ de longitud mayor que la trayectoria P , lo que contradice la elección de P . Ahora como $N(u_0) \subseteq V(P)$ tenemos que $\delta(u_0) \leq m$, luego como $k = \delta(G) \leq \delta(u_0) \leq m$, se tiene que P es de longitud al menos k . \square

Lema 1.1. Sean G una gráfica y $\{u, v\}$ un subconjunto de $V(G)$. Si existen P y Q dos (u, v) -trayectorias distintas, entonces G tiene un ciclo.

Demostración. Sean P y Q dos (u, v) -trayectorias. Consideremos a $C = (u, P, v) \cup (v, Q^{-1}, u)$ un camino cerrado.

Por demostrar que C tiene un ciclo.

Haremos la demostración por inducción sobre la longitud de C .

Base de la inducción. $l(C) = 3$.

Como la longitud del camino es igual a 3 entonces tenemos los siguientes dos casos posibles.

Caso 1. El camino cerrado es $C = (u, x, v, u)$, el cual está formado de la siguiente manera: $C = (u, P, v) \cup (v, Q^{-1}, u)$. Como x es adyacente a v tenemos que $x \neq v$.

Caso 2. El camino cerrado es $C = (u, v, y, u)$, el cual está formado de la siguiente manera: $C = (v, P, u) \cup (u, Q^{-1}, v)$. Como v es adyacente a y tenemos que $v \neq y$.

En ambos casos C es un ciclo.

Hipótesis de inducción. Si P' y Q' son dos (u', v') -trayectorias distintas en G y $C' = (u', P', v') \cup (v', Q'^{-1}, u')$ es un camino cerrado tal que $l(C') < n$, entonces C' contiene un ciclo.

Paso inductivo. Sean $\{u, v\}$ un subconjunto de $V(G)$ y $C = (u, P, v) \cup (v, Q^{-1}, u)$ un camino cerrado con $l(C) = n$ donde,

$$P = (u = x_0, x_1, \dots, x_s = v),$$

$$Q = (u = y_0, y_1, \dots, y_m = v) \text{ y } s + m = n.$$

Por demostrar que C contiene un ciclo.

Caso 1. Si P y Q son tales que $V(P) = V(Q)$ y $A(P) \neq A(Q)$, entonces para algún i y j en $\{1, 2, \dots, s\}$ con $i \neq j$ y k en $\{1, 2, \dots, m\}$ tenemos que $x_i = y_k$ y $x_j = y_{k+1}$, entonces podemos obtener el ciclo $(x_i = y_{k+1}, P, x_j = y_k) \cup (y_k, y_{k+1})$.

Caso 2. Si $P \neq Q$, entonces existe un x_i en la secuencia de vértices (x_1, x_2, \dots, x_s) que no está en la secuencia vértices (y_1, y_2, \dots, y_m) o existe un y_i en la sucesión de vértices (y_1, y_2, \dots, y_m) que no está en la secuencia de vértices (x_1, x_2, \dots, x_s) .

Supongamos sin pérdida de generalidad que existe un x_i en la secuencia de vértices (x_1, x_2, \dots, x_s) que no está en la secuencia de vértices (y_1, y_2, \dots, y_m) . Sea $k = \min\{i : x_i \in V(P) \text{ y } x_i \notin V(Q)\}$, entonces tenemos lo siguientes casos:

Caso 2.1. $k \neq 1$.

Para $k = \min\{i : x_i \in V(P) \text{ y } x_i \notin V(Q)\}$, entonces x_{k-1} en $(V(P) \cap V(Q))$, así tenemos las siguientes trayectorias $P' = (x_{k-1}, x_k) \cup (x_k, P, v)$ y $Q' = (x_{k-1}, Q, v)$ las cuales son dos (x_{k-1}, v) -trayectorias distintas y

$$C' = (x_{k-1}, x_k) \cup (x_k, P, v) \cup (v, Q^{-1}, x_{k-1}) = P' \cup (v, Q'^{-1}, x_{k-1}),$$

es un camino cerrado contenido en C .

Entonces $l(C') < l(C) = n$.

Por hipótesis de inducción C' tienen un ciclo γ tal que $\gamma \subseteq C' \subsetneq C$, entonces $\gamma \subset C$.

Caso 2.2. $k = 1$.

Sea $h = \text{máx}\{i : x_i \in V(P) \text{ y } x_i \notin V(Q)\}$, por la elección de h se tiene que x_{h+1} en $(V(P) \cap V(Q))$.

Así tenemos a las trayectorias siguientes:

$$P'' = (u, P, x_h) \cup (x_h, x_{h+1}) \text{ y } Q'' = (u, Q, x_{h+1})$$

las cuales son dos (u, x_{h+1}) -trayectorias distintas.

$$C''' = (u, P, x_h) \cup (x_h, x_{h+1}) \cup (x_{h+1}, Q^{-1}, u) = P'' \cup (x_{h+1}, Q''^{-1}, u),$$

es un camino cerrado contenido en C y por construcción C''' es un ciclo.

Por lo tanto, C contiene un ciclo. □

1.6. Gráficas conexas

Definición. Una gráfica G es *conexa* si y solo si para cualquier par de vértices de G existe una trayectoria que los une.

Decimos que G es una gráfica *inconexa* si G es no conexa.

Son gráficas conexas las gráficas K_n para toda n en \mathbb{N} , los ciclos y las trayectorias de cualquier longitud.

Otras condiciones equivalentes a la definición de gráfica conexa pueden establecerse a través de los siguientes teoremas.

Teorema 1.6.1. Una gráfica G con $|V(G)| \geq 2$ es conexa si y solo si para cualquier partición $\{V_1, V_2\}$ de $V(G)$ existe una V_1V_2 -arista.

Demostración. (\Rightarrow) Sean G una gráfica conexa, $\{V_1, V_2\}$ una partición de $V(G)$, $u \in V_1$ y $w \in V_2$. Como G es conexa existe una (u, w) -trayectoria en G . Sean $P = (u = x_0, x_1, \dots, x_i, \dots, x_n = w)$ dicha trayectoria y x_i el primer vértice de la sucesión x_1, \dots, x_n tal que $x_i \in V_2$, dicho vértice existe ya que $x_n \in V(P) \cap V_2$. Por lo tanto, $x_{i-1} \in V_1$; es decir, tenemos una V_1V_2 -arista.

(\Leftarrow) Demostraremos que G es conexa. Sea $\{u, w\}$ un subconjunto de $V(G)$, por demostrar que existe una (u, w) -trayectoria en G . Sea $\{V_1, V_2\}$ una partición de $V(G)$ tal que $V_1 = \{u\}$ y $V_2 = V(G) - V_1$. Por hipótesis sabemos que existe una arista uz_1 tal que $z_1 \in V_2$. Si $z_1 = w$, entonces tenemos un uw -camino. Si $z_1 \neq w$, entonces tomamos una nueva partición de $V(G)$: $V_1^1 = \{u, z_1\}$ y $V_2^1 = V(G) - V_1^1$. Sabemos

por hipótesis que existe un arista con extremos en V_1^1 y V_2^1 , sea z_2 en V_2^1 , tal que z_2 es un vértice extremo de dicha arista. Si $z_2 = w$ entonces podemos encontrar un uw -camino. Si $z_2 \neq w$, entonces tomamos la partición $\{V_1^2, V_2^2\}$ tal que $V_1^2 = \{u, z_1, z_2\}$ y $V_2^2 = V(G) - V_1^2$. Por hipótesis tenemos una arista con extremos en V_1^2 y en V_2^2 , sea z_3 en V_2^2 uno de los vértices extremo de dicha arista. Si $z_3 = w$, entonces podemos encontrar un uw -camino. Si $z_3 \neq w$, entonces continuando con este procedimiento, como G es finita, entonces para una n en \mathbb{N} , tenemos una partición $\{V_1^n, V_2^n\}$ de $V(G)$ tal que existe una $V_1^n z_n$ -arista con $z_n = w$ y z_n en V_2^n . Por lo tanto, tenemos un uw -camino, y por el Teorema 1.5.1 tenemos una (u, w) -trayectoria.

Por lo tanto, G es una gráfica conexa. \square

Definición. Sea G una gráfica. Las componentes conexas de una gráfica G son las subgráficas de G que son máximas por contención con respecto a la propiedad de ser conexas. Denotaremos por $c(G)$ al número de componentes conexas de G .

Observación. Si G es conexa, entonces $c(G) = 1$. Si $c(G) > 1$, entonces G es inconnexa. Además si G tiene p vértices, entonces $c(G) \leq p$.

1.7. Algunas operaciones en gráficas

Definición. Sea G una gráfica, si $a \in A(G)$, entonces definimos a la gráfica $G - a$ como $V(G - a) = V(G)$ y $A(G - a) = A(G) - \{a\}$.

Análogamente, tenemos la operación de quitar un vértice de la gráfica y se define como sigue.

Definición. Sea G una gráfica, si $v \in V(G)$, entonces definimos a la gráfica $G - v$ como $V(G - v) = V(G) - \{v\}$ y $A(G - v) = A(G) - \{vx \mid x \in N_G(v)\}$.

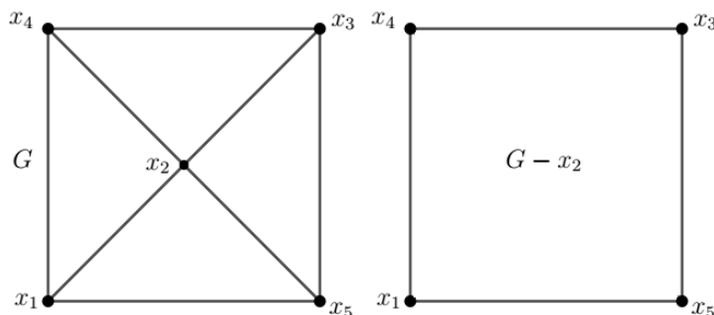


Figura 1.10: Ejemplo de G y $G - x_2$

Definición. Sea G una gráfica y S un subconjunto de vértices de G . Decimos que la gráfica

$$G - S = (V(G) \setminus S, A(G) - \{uv \in A(G) : u \in S \text{ y } v \in V(G) \setminus S\}),$$

esta resulta de restar un subconjunto S de vértices a G .

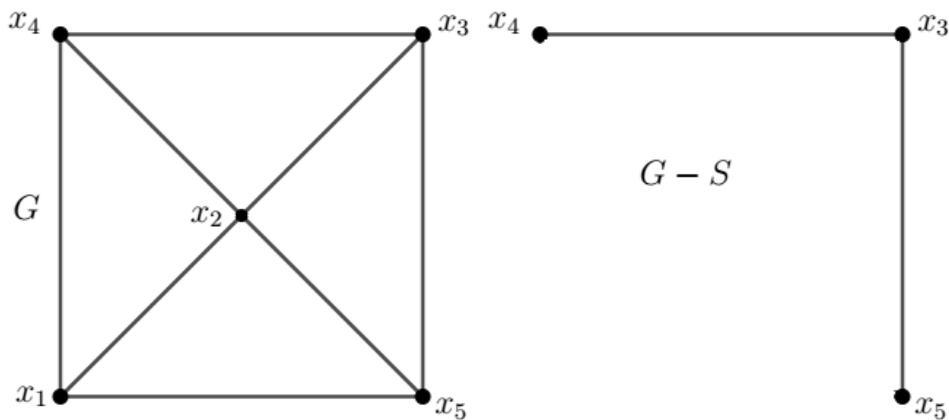


Figura 1.11: Ejemplo de G y $G - S$, donde $S = \{x_1, x_2\}$

Definición. Sea G una gráfica y H una subgráfica de G . Definimos a la gráfica $G - H = (V(G) \setminus V(H), A(G) \setminus (A(H) \cup \{uv \in A(G) : u \in V(H) \text{ y } v \in V(G) \setminus V(H)\}))$, esta resulta de restar una subgráfica H de G .

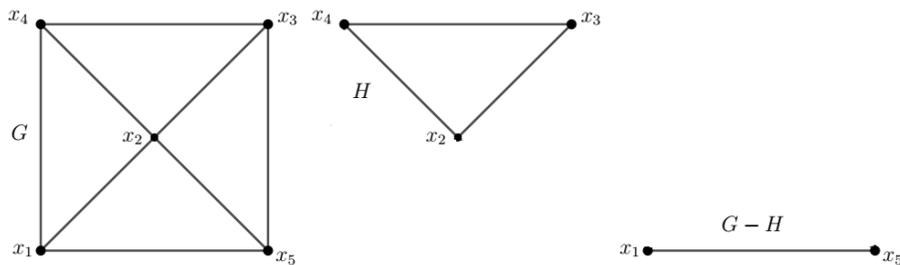


Figura 1.12: Ejemplo de G y $G - H$

Por otro lado, tenemos las operaciones para agregar vértices o aristas según sea necesario, sin embargo, cabe observar que la operación de agregar una arista solo agrega una arista entre dos vértices no adyacentes de G ; es decir, si G es una gráfica y $a \notin A(G)$, entonces la gráfica $G + a$ cumple con:

$$V(G + a) = V(G) \text{ y } A(G + a) = A(G) \cup \{a\},$$

por lo que esta operación solo aplica para gráficas no completas.

Agregar un vértice v a una gráfica G para efectos de esta tesis: consiste en hacer adyacente a dicho vértice a cada uno de los vértices de G ; es decir, $V(G + v) = V(G) \cup \{v\}$ y $A(G + v) = A(G) \cup \{vx : x \in V(G)\}$.

Teorema 1.7.1. *Sean G una gráfica conexa y a en $A(G)$. Si $a \in \mathcal{C}$ tal que \mathcal{C} es un ciclo de G , entonces $G - a$ es conexa.*

Demostración. Sean G una gráfica conexa y a en $A(G)$ con a en \mathcal{C} tal que \mathcal{C} es un ciclo de G y $a = uv$.

Consideremos a la gráfica $G - a$. Por demostrar que para todo subconjunto $\{x, y\}$ de $V(G - a)$ existe una (x, y) -trayectoria.

Ahora como $V(G - a) = V(G)$, entonces $\{x, y\} \subseteq V(G)$ y como G es conexa sabemos que debe existir al menos una (x, y) -trayectoria

$$P = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

por ello tenemos los siguientes casos.

Caso 1. a no está en P .

Entonces P es una (x, y) -trayectoria en $G - a$.

Caso 2. a está en P

Supongamos sin pérdida de generalidad que para alguna i en $\{1, 2, \dots, n\}$ se cumple que $u = x_i$, $v = x_{i+1}$ y además \mathcal{C} empieza en x_i y termina con la arista $a = x_{i+1}x_i$, entonces encontramos el siguiente xy -camino

$$C = (x, P, u = x_i) \cup (u = x_i, \mathcal{C}, v = x_{i+1}) \cup (v = x_{i+1}, P, y)$$

contenido en $G - a$, el cual por el Teorema 1.5.1 contiene una xy -trayectoria en $G - a$.

Por lo tanto, concluimos que $G - a$ es conexa. \square

1.8. **Vértices de corte, aristas de corte y bloques**

Definición. Dada una gráfica G , un vértice v es *vértice de corte* si cumple que $c(G - v) > c(G)$, por lo que, para una gráfica conexa, v es un vértice de corte de G si la gráfica $G - v$ es inconexa.

Observe que en la Figura 1.13 tenemos un ejemplo donde v es un vértice de corte pues tenemos que $c(G - v) = 2$ y $c(G) = 1$.

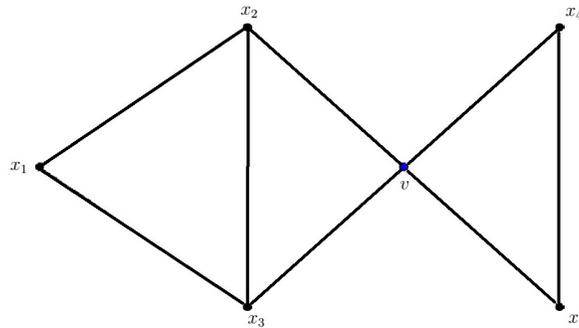


Figura 1.13: v es un vértice de corte

El siguiente teorema establece las condiciones necesarias y suficientes para que un vértice v sea de corte.

Teorema 1.8.1. *Sea G una gráfica conexa. Un vértice v es de corte si y solo si existen dos vértices u y w tal que v está en toda (u, w) -trayectoria de G .*

Demostración. (\Rightarrow) Sean G una gráfica conexa y v un vértice de corte. Como $G - v$ no es conexa, entonces tiene al menos dos componentes conexas. Tomemos a u y w en componentes distintas de $G - v$, entonces no existen (u, w) -trayectorias en $G - v$. Sin embargo, como G es conexa, hay al menos una (u, w) -trayectoria. Por lo tanto, toda trayectoria entre u y w en G debe contener a v .

(\Leftarrow) Sean u y w dos vértices de G . Como por hipótesis sabemos que el vértice v está en toda (u, w) -trayectoria de G , entonces tenemos que en la gráfica $G - v$ no existe trayectoria alguna entre los vértices u y w , lo que implica que $G - v$ es inconexa. Por lo tanto, como G es conexa se sigue que v es vértice de corte en G . \square

Definición. Dada una gráfica G y $a \in A(G)$, se dice que a es una **arista de corte** o un **punto de corte** de G si y solo si $c(G - a) > c(G)$.

Teorema 1.8.2. Sea G una gráfica conexa. Una arista a es un puente de G si y solo si a no pertenece a un ciclo de G .

Demostración. (\Rightarrow) Probaremos por contrapositiva. Supongamos que a está en un ciclo de G . Por demostrar que a no es un puente de G . Como G es conexa y a está en un ciclo de G , por el Teorema 1.7.1 tenemos que $G - a$ es conexa. Por lo tanto, a no es puente de la gráfica G .

(\Leftarrow) Demostraremos por contradicción. Supongamos ahora, que $a = xy$ es una arista de G que no está en un ciclo de G y que a no es un puente, esto quiere decir, que $G - a$ es conexa y por lo tanto existe una (x, y) -trayectoria T en $G - a$. La unión de a y $G - a$ produce el siguiente ciclo $C = (y, x) \cup (x, T, y)$ el cual contiene a a y esto contradice la hipótesis, concluyendo así el teorema.

Observe la Figura 1.14. □

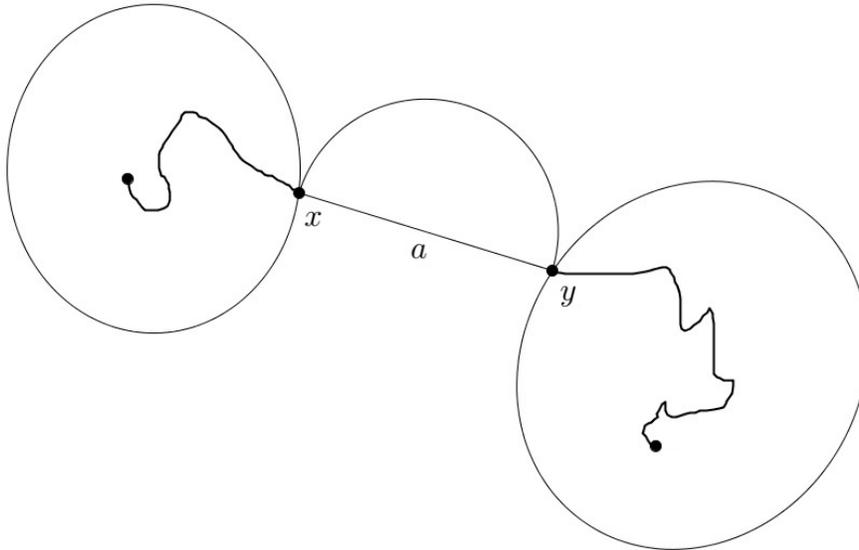


Figura 1.14: a pertenece a un ciclo G

Observación. Al quitar un puente a de una gráfica G quedan exactamente dos componentes conexas distintas en $G - a$.

La existencia de un puente implica la existencia de un vértice de corte si $|V(G)| > 2$, esto se demuestra a continuación.

Teorema 1.8.3. *Sea G una gráfica conexa de orden al menos 3. Si G tiene un puente, entonces G tiene al menos un vértice de corte.*

Demostración. Sean G una gráfica conexa con $|V(G)| > 2$ y $a \in A(G)$ un puente con extremos u y v . Como a es un puente, $G - a$ es inconexa. Por la observación anterior $G - a$ tiene dos componentes conexas H_1 y H_2 , supongamos sin pérdida de generalidad que $u \in V(H_1)$ y $v \in V(H_2)$. Como G tiene al menos 3 vértices, entonces existe w en $V(G - a)$ tal que w es distinto de u y w es distinto de v . Si $w \notin V(H_1)$, entonces en $G - u \subset G - a$ no existen (w, u) -trayectorias. Análogamente, si $w \notin V(H_2)$, entonces en $G - v \subset G - a$ no hay (w, v) -trayectorias, con lo cual concluimos que $G - u$ es inconexa o $G - v$ es inconexa, esto implica que u o v es un vértice de corte de G (Ver Figura 1.15). \square

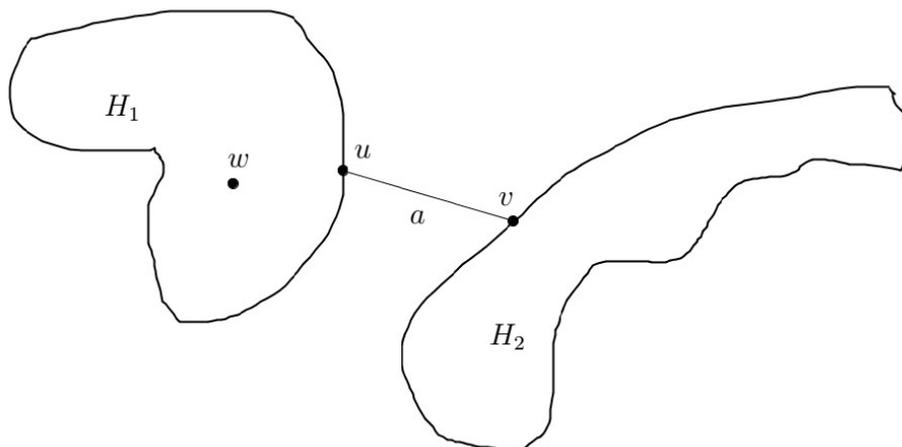


Figura 1.15: G con a un puente en G

Lema 1.2. *Si G es una gráfica conexa, $v \in V(G)$ tal que v es vértice de corte, entonces $\delta_G(v) \geq 2$.*

Demostración. Sea v un vértice de corte y $G_1, G_2, \dots, G_{c(G)}$ las componentes conexas de $G - v$, con $c(G) \geq 2$. En G v es adyacente al menos a un vértice en cada componente conexa de G , pues G es conexa.

Por lo tanto, se cumple que $\delta_G(v) \geq 2$. \square

1.9. Árboles

Los árboles constituyen una de las clases más importantes de las gráficas. Intuitivamente, un árbol es una gráfica que en su trazo se asemeja a un árbol con su ramificación hacia abajo, formalmente su definición es:

Definición. Una gráfica que es conexa y que no tiene ciclos recibe el nombre de *árbol*, y la denotamos con T .

En la Figura 1.16 tenemos un ejemplo de un árbol.

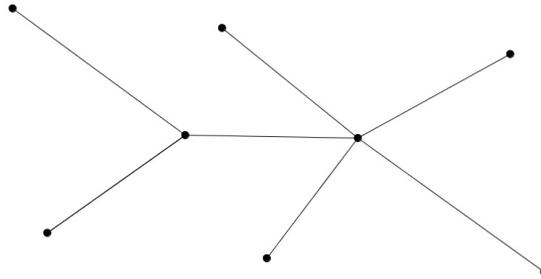


Figura 1.16: Árbol

Los vértices de grado uno de un árbol son llamados *hojas* o *vértices terminales*. Al conjunto de vértices de grado uno de un árbol T lo denotaremos como $Hojas(T)$.

Decimos que B es un *bosque*, si las componentes conexas de la gráfica B son árboles; es decir, B es una gráfica que no tiene ciclos; es decir, B es acíclica.

Los siguientes resultados serán nuestras herramientas para realizar las demostraciones de algunos teoremas que serán revisados en los capítulos siguientes.

Teorema 1.9.1. *Sea G una gráfica conexa, G es un árbol si y solo si toda arista de G es un puente.*

Demostración. (\Rightarrow) Sean G un árbol y a en $A(G)$. Como G no tiene ciclos por definición de árbol, a no está en un ciclo de G y por el Teorema 1.8.2 sabemos que cualquier arista que no pertenece a un ciclo es un puente, entonces a es un puente de G .

(\Leftarrow) Por otro lado, si G es conexa y toda arista a en $A(G)$ es un puente, significa que toda arista de G no está en un ciclo por el Teorema 1.8.2, por lo que G es acíclica y conexa. Por lo tanto, es un árbol. \square

Teorema 1.9.2. *Si T es un árbol con al menos dos vértices, entonces T tiene al menos dos hojas.*

Demostración. Sean T un árbol y $P = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ una trayectoria de longitud máxima.

Afirmamos que el vértice inicial y el vértice final de P son de grado uno.

Si en P el vértice final no es de grado uno; es decir, $\delta_T(u_m) \geq 2$, entonces existe un $w \in V(T)$ tal que $w \neq u_{m-1}$ y w es adyacente a u_m , por ello tenemos los siguientes casos:

Caso 1. $w \notin V(P)$.

En este caso obtenemos la siguiente trayectoria $P' = (u_1, P, u_m) \cup (u_m, w)$ que es de longitud mayor que P , pero esto contradice la elección de P , pues P es de longitud máxima en T .

Caso 2. $w \in V(P)$.

Para algún i en $\{1, 2, 3, \dots, m-2\}$ se tiene que $w = u_i$. Con lo que obtenemos el siguiente ciclo $C = (u_i, P, u_m) \cup (u_m, u_i)$, lo que contradice el hecho de que T es árbol.

Por lo tanto, la afirmación se sostiene para el vértice final de P , de manera análoga se demuestra para el vértice inicial de P .

Por lo tanto, en T tenemos al menos dos hojas. □

Teorema 1.9.3. *Sea T un árbol. Si para un $x \in V(T)$ se tiene que $\delta_T(x) = 1$, entonces $T - x$ es árbol.*

Demostración. Sea x en $V(T)$ tal que $\delta_T(x) = 1$. Por demostrar que $T - x$ es conexa y no tiene ciclos.

Como $T - x \leq T$, entonces $T - x$ no tiene ciclos.

Por demostrar que T es conexa.

Supongamos por contradicción que $T - x$ es inconexa, como T es conexa entonces x es vértice de corte de T , por el Lema 1.2 sabemos que el $\delta_T(x) \geq 2$, lo que contradice la hipótesis, pues $\delta_T(x) = 1$. Por lo tanto, $T - x$ es conexa. □

El siguiente teorema relaciona el orden y el tamaño de un árbol.

Teorema 1.9.4. *Si T es un árbol, entonces $q = p - 1$, donde q es el tamaño de T y p es el orden de T .*

Demostración. Demostraremos por inducción sobre el número de vértices p .

Base de inducción. Si $p = 1$, entonces $T = K_1$ por lo que T no tiene aristas; es decir, $q = 1 - 1 = 0$.

Si $p = 2$, entonces $T = K_2$, por lo que $q = p - 1 = 2 - 1 = 1$.

Hipótesis de inducción. Si T' es un árbol con p' vértices y q' aristas tal que $p' < p$, entonces $q' = p' - 1$ y $p' \geq 1$.

Paso inductivo. Sea T un árbol con p vértices y q aristas tal que con $p > 2$. Por el Teorema 1.9.2 podemos ver que existe un x en $V(T)$ tal que $\delta_T(x) = 1$. Consideremos a $T - x$, por el teorema anterior $T - x$ es un árbol y por hipótesis de inducción tenemos que se cumple que $|A(T - x)| = |V(T - x)| - 1$, entonces

$$q = |A(T)| = |A(T - x)| + 1 = |V(T - x)| - 1 + 1 = |V(T)| - 1 = p - 1.$$

Por lo tanto:

$$q = p - 1.$$

Lo que concluye la demostración. \square

Corolario 1.1. *Si G es un bosque con p vértices y q aristas, entonces $q = p - c(G)$.*

Demostración. Sea G un bosque tal que tiene las siguientes componentes conexas:

$$G_1, G_2, \dots, G_{c(G)}.$$

Para i en $\{1, 2, \dots, c(G)\}$, cada G_i es conexa y acíclica, entonces toda G_i es un árbol. Sabemos ahora por el resultado demostrado en el Teorema 1.9.4 que para i en $\{1, 2, \dots, c(G)\}$ se cumple que $q_i = p_i - 1$, con p_i el número de vértices y q_i el número de aristas de cada componente G_i .

Para obtener el número de aristas del bosque tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} q &= \sum_{i=1}^{c(G)} q_i, \\ \sum_{i=1}^{c(G)} q_i &= \sum_{i=1}^{c(G)} (p_i - 1), \\ \sum_{i=1}^{c(G)} (p_i - 1) &= \sum_{i=1}^{c(G)} p_i - c(G), \\ \sum_{i=1}^{c(G)} p_i - c(G) &= p - c(G). \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que $p - c(G) = q$. \square

Teorema 1.9.5. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. T es un árbol.
2. Entre cualesquiera dos vértices u y v de T existe una única (u, v) -trayectoria en T .
3. T es conexa y para cualquier arista a en $A(T)$ tenemos que $T - a$ es inconexa.
4. T es acíclica y $T + uv$ contiene un único ciclo, para cualesquiera dos vértices no adyacentes u y v en T .

Demostración. Vamos a demostrar el ciclo de implicaciones $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1)$.

Por demostrar que $(1) \Rightarrow (2)$. Sean u y v en los vértices de T , como T es conexa existe una (u, v) -trayectoria. Por demostrar que es única. Demostraremos esta implicación por contradicción. Supongamos por contradicción que existen P_1 y P_2 dos (u, v) -trayectorias distintas en T . Por el Lema 1.1 sabemos que $P_1 \cup P_2$ contiene un ciclo. Esto contradice que T sea árbol. Por lo tanto, entre todo par de vértices en T existe una única trayectoria.

Por demostrar que $(2) \Rightarrow (3)$. Por demostrar que T es conexa. Como entre cualesquiera dos vértices de T existe una única trayectoria, entonces T es conexa. Si xy es cualquier arista de T , entonces por 2 sabemos que xy es la única (x, y) -trayectoria, por lo tanto, en $T - xy$ no existen (x, y) -trayectorias; es decir, $T - xy$ es inconexa.

Por demostrar que $(3) \Rightarrow (4)$. Por demostrar que T es una gráfica acíclica. Supongamos por contradicción que T no es acíclica. Sea $\gamma = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = x_0)$ un ciclo en T , por el Teorema 1.8.2 sabemos que $T - x_1x_2$ es conexa, lo cual contradice (3). Por lo tanto, T es una gráfica acíclica.

Por demostrar que $T + uv$ contiene un ciclo. Como T es conexa, entonces entre cualquier par de vértices no adyacentes u y v en T existe $P = (u, u_1, \dots, u_m, v)$ una (u, v) -trayectoria. Por lo tanto, $C = P \cup (v, u)$ es un ciclo en $T + uv$.

Por demostrar que C es único en $T + uv$. Supongamos por contradicción que C no es único en $T + uv$, entonces implica que existe un ciclo $C' = (u, P', v) \cup (v, u)$, como T no tiene ciclos y $T + uv$ si tiene ciclos, entonces $uv \in A(G)$. Supongamos sin pérdida de generalidad que C' empieza en u y termina con la arista uv . Así, si $P' = (u, C', v)$, entonces como C y C' son distintos se sigue que P' y P son dos (u, v) -trayectorias distintas en T , lo que es una contradicción, ya que P es la única (u, v) -trayectoria en T . Por lo tanto, T tiene un único ciclo.

Por demostrar que $(4) \Rightarrow (1)$. Sea T una gráfica acíclica, tal que, $T + uv$ contiene un único ciclo para cualesquiera u y v dos vértices no adyacentes en T . Por demostrar que T es conexa. Supongamos por contradicción que T no es conexa. Sean x, y dos vértices en componentes conexas distintas de T , entonces no existe ninguna trayectoria entre x y y , lo que implica que en $T + xy$ existe una única (x, y) -trayectoria, por lo que no podemos formar un ciclo, esto contradice la hipótesis que dice que $T + uv$ tienen un ciclo para cualesquiera dos vértices u y v no adyacentes en T . Por lo tanto, T es conexa y así T es árbol. \square

Lema 1.3. *Sea G una gráfica conexa con un único ciclo C , tal que $G \not\cong C$. Si P es una (u, v) -trayectoria contenida en C tal que los vértices de P tienen grado 2 en G , entonces $G - P$ es un árbol.*

Demostración. Sean G una gráfica conexa con un único ciclo C , tal que $G \not\cong C$ y $P = (u = u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_n = v)$ una (u, v) -trayectoria contenida en el ciclo C tal que los vértices de P tienen grado 2 en G .

Observemos que como $G \not\cong C$ y es conexa, entonces existe al menos un vértice z en C tal que $\delta_G(z) \geq 3$.

Haremos la demostración por inducción sobre el número de vértices de P .

Base de inducción. Si $|V(P)| = 1$; es decir, $u = v$ con $\delta_G(u = v) = 2$. Tomemos a w un vértice del ciclo C tal que es adyacente al vértice u . Consideremos a $G' = G - wu$ donde $wu \in A(G)$, entonces como wu esta contenida en C , tenemos que $G - wu$ es conexa y acíclica. Ahora como tenemos que el $\delta_{G'}(u) = 1$, por el Teorema 1.9.3 y como observamos que existe un vértice z tal que $\delta_G(z) \geq 3$ tenemos que $G'' = G' - u$ es un árbol y G'' es isomorfa a $G - P$.

Si $|V(P)| = 2$, entonces tenemos que $P = (u, v)$ con $\delta_G(u) = \delta_G(v) = 2$. Como la arista uv pertenece al ciclo en G , podemos considerar a $G' = G - uv$, entonces obtenemos que G' es conexa y acíclica. Ahora como tenemos que $\delta_{G'}(u) = \delta_{G'}(v) = 1$, entonces por el Teorema 1.9.3 y como observamos que existe un vértice z tal que $\delta_G(z) \geq 3$ tenemos que $G'' = G' - u$ es un árbol y $G''' = G'' - v$ es un árbol y además G''' es isomorfa a $G - P$.

Si $|V(P)| = 3$, entonces $P = (u = u_0, u_1, u_2 = v)$ con $\delta_G(u_i) = 2$ para i en $\{0, 1, 2\}$. Tomemos a $P' = (u = u_0, u_1)$ una subtrayectoria de la trayectoria P , con $|V(P')| = 2$, por el caso anterior tenemos que $G' = G - P'$ es un árbol. Consideremos a $G'' = G' - u_2$, entonces por el Teorema 1.9.3 y como observamos que existe un vértice z tal que $\delta_G(z) \geq 3$ sabemos que G'' es un árbol. Por lo tanto, $G - P$ es un árbol como se puede ver en la Figura 1.17.

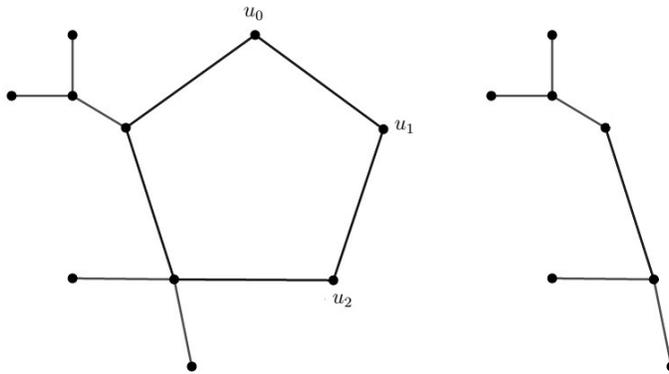


Figura 1.17: $G - P$

Hipótesis de inducción. Si $P' = (u = u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_{n-1} = v)$ es una trayectoria tal que para todo vértice u_i en P con i en $\{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$, se tiene que $\delta_G(u_i) = 2$. Entonces, $G' = G - P$ es un árbol.

Paso inductivo. Sea $P = (u = u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_n = v)$ una trayectoria en G tal que $\delta_G(u_i) = 2$ para toda i en $\{0, 1, 2, \dots, n\}$. Tomemos los primeros n vértices de P , los cuales forman una subtrayectoria P' de P . Por hipótesis de inducción como $|V(P')| = n$ tenemos que $G' = G - P'$ es un árbol y además sabemos que $\delta_{G'}(u_n) = 1$. Por el Teorema 1.9.3 y la observación sabemos que $G'' = G' - u_n$ es un árbol como se muestra en la Figura 1.18. \square

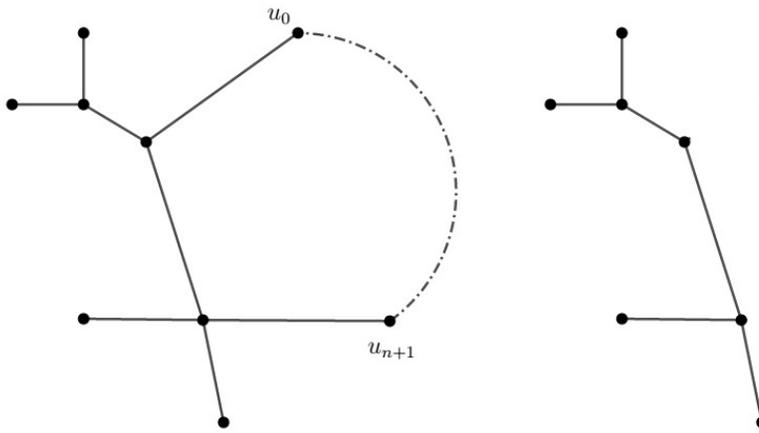


Figura 1.18: $G'' = G' - u_n$

Ahora, conociendo la definición de árbol y los resultados anteriores, definimos una clase particular de árboles con la que trabajaremos más adelante.

Definición. Decimos que T es un k -árbol si el grado máximo en T es k .

Dada una gráfica G conexa, un problema importante es encontrar una subgráfica G' , de modo que G' sea un árbol que contenga todos los vértices de G .

Definición. Decimos que T es un *árbol generador* de una gráfica conexa G , si T es una subgráfica generadora de G que es árbol.

Teorema 1.9.6. *Toda gráfica conexa tiene un árbol generador.*

Demostración. Haremos la demostración por inducción sobre m , donde m es el número de ciclos en G .

Base. Si $m = 0$, entonces G no tiene ciclos y es conexa. Por lo tanto, G es un árbol y cumple que es un árbol generador.

Si $m = 1$, entonces G tiene un ciclo \mathcal{C} . Sea a en $A(\mathcal{C})$ consideremos la gráfica $G - a$. Sabemos por el Teorema 1.8.2 que $G - a$ es conexa y sin ciclos, por lo que cumple con la definición de ser un árbol. Los vértices de $G - a$ son iguales a los de G . Por lo tanto, $G - a$ es un árbol generador de G .

Hipótesis de inducción. Toda gráfica conexa con m' ciclos tal que $m' < m$ tiene un árbol generador.

Paso inductivo. Sean G una gráfica conexa con $m \geq 2$ ciclos y a una arista en un ciclo de G . Consideremos a $G - a$, por el Teorema 1.8.2 $G - a$ es conexa y además $G - a$ tiene un número menor de ciclos que G , por hipótesis de inducción $G - a$ tiene un árbol generador T , por ello tenemos que $V(T) = V(G - a) = V(G)$. Por lo tanto, T es un árbol generador de G . \square

Observemos que por el Teorema 1.9.5, ahora que tenemos el primer resultado sobre árboles generadores, podemos notar que en G una gráfica conexa y T un árbol generador de G , si $a \in A(G) \setminus A(T)$, entonces $T \cup a$ tiene un ciclo y este es único.

Teorema 1.9.7. G es un árbol si y solo si G es acíclica y $q = p - 1$.

Demostración. (\Rightarrow) Como G es un árbol, entonces por definición de árbol G es conexa y acíclica, por el Teorema 1.9.4 tenemos que $q = p - 1$.

(\Leftarrow) Supongamos que G es una gráfica acíclica y $q = p - 1$.

Por demostrar que G es conexa. Supongamos que $G_1, \dots, G_{c(G)}$ son las componentes conexas de G , tal que $c(G) \geq 1$. Note que para cada i en $\{1, 2, \dots, c(G)\}$ G_i es un árbol pues G no tiene ciclos.

Como G es un bosque, entonces por el Corolario 1.1 tenemos que: $q_i = p_i - c(G)$.

Pero sabemos por hipótesis que $q = p - 1$. Por lo tanto, $c(G) = 1$, lo que implica que tenemos una única componente conexa. Así, G es conexa y por la definición de árbol, G es árbol. \square

Lema 1.4. Sean T un árbol de orden $n \geq 2$ y x un vértice de T , entonces

$$c(T - x) = (\delta_T(x) - 1) + 1.$$

Demostración. Sean T un árbol de orden $n \geq 2$ y x un vértice de T . Haremos la demostración por inducción sobre el grado del vértice x .

Base. Si $\delta_T(x) = 1$, entonces sabemos que $T - x$ es un árbol y $c(T - x) = 1$. Por otro lado tenemos:

$$c(T - \{x\}) = 0 + 1 = (1 - 1) + 1 = 1(\delta_T(x) - 1) + 1.$$

Hipótesis de inducción. Si T' es un árbol de orden $n \geq 2$ y x' un vértice de T' , con $\delta_{T'}(x') = r$, entonces

$$c(T - x') = (\delta_{T'}(x') - 1) + 1 = r.$$

Paso inductivo. Sea T un árbol de orden $n \geq 2$ y x un vértice de T tal que $\delta_T(x) = r + 1$ con $r > 1$. Por demostrar que $c(T - x) = (\delta_T(x) - 1) + 1$.

Consideremos a x' un vértice en T que es adyacente a x , quitamos la arista xx' a T . Por el Teorema 1.9.1 sabemos que toda arista de un árbol es un puente y al quitar dicha arista por la Observación 1.8 tenemos dos componentes conexas T' y T'' , las cuales son conexas y acíclicas por lo que son árboles. Supongamos sin pérdida de generalidad que $x' \in V(T')$ y $x \in V(T'')$, entonces $\delta_{T''}(x) = r$ y $\delta_T(x) = \delta_{T''}(x) + 1$.

Así tenemos lo siguiente

$$c(T - x) = c(T'' - x) + 1.$$

Por hipótesis de inducción sabemos que

$$c(T'' - x) = (\delta_{T''}(x) - 1) + 1.$$

Por lo que

$$\begin{aligned} c(T - x) &= c(T'' - x) + 1 \\ &= (\delta_{T''}(x) + 1 - 1) + 1 \\ &= (\delta_T(x) - 1) + 1. \end{aligned}$$

□

Corolario 1.2. Sean T un árbol y x un vértice de T . Si $\delta_T(x) = k$, entonces T tiene al menos k hojas.

Demostración. Sean T un árbol y x un vértice de grado k en T . Por el Lema 1.4 sabemos que

$$c(T - x) = (\delta_T(x) - 1) + 1$$

Como $\delta_T(x) = k$, se tiene que

$$c(T - x) = (k - 1) + 1 = k.$$

Cada componente obtenida de $T - x$ es conexa y acíclica por lo que cada una de ellas es un árbol. Observemos que tenemos dos casos:

Caso 1. Las componentes conexas de $T - x$ son de orden uno. Entonces son hojas de T .

Caso 2. No todas las componentes de $T - x$ son de orden que uno. Entonces para componente de orden al menos dos por el Teorema 1.9.2 sabemos que esta tiene al menos dos vértices de grado uno, por lo que cada una de las componentes de $T - x$ tiene al menos una hoja de T .

Por lo tanto, T tiene al menos k hojas. □

Definición. Sea G una gráfica. Decimos que S un subconjunto de $V(G)$ es un *conjunto independiente*, si para todo par de vértices de S estos no son adyacentes.

Lema 1.5. Sean T un árbol de orden $n \geq 2$ y X un conjunto independiente de vértices en T , entonces

a) el número de hojas de T es igual a $\sum_{v \in W} (\delta_T(v) - 2) + 2$, donde $W = \{v \in V(T) : \delta_T(v) \geq 3\}$,

b) el número de componentes conexas de $T - X$ es $\sum_{x \in X} (\delta_T(x) - 1) + 1$.

Demostración. a) Sean T un árbol y $Hojas(T)$ el conjunto de hojas de T . Haremos la demostración por inducción sobre n el número de vértices T .

Base de inducción. Sea T un árbol de orden 2, entonces el grado de cada vértice de T es igual a 1. Por lo tanto, $W = \emptyset$. Notemos que si $W = \emptyset$, entonces $\sum_{v \in W} (\delta_T(v) - 2) = 0$. Así tenemos que

$$\sum_{v \in W} (\delta_T(v) - 2) + 2 = 0 + 2 = 2.$$

Si T es de orden 3, entonces en T tenemos exactamente un vértice de grado 2 y dos vértices de grado 1. Por lo tanto, nuevamente se cumple $W = \emptyset$ y así tenemos que

$$\sum_{v \in W} (\delta_T(v) - 2) + 2 = 0 + 2 = 2.$$

Sea T un árbol de orden $n = 4$. Tenemos dos casos.

Caso 1. Si T no tiene vértices de grado 3, entonces tenemos que $W = \emptyset$, por lo que T tiene exactamente dos vértices de grado 2 y dos vértices de grado 1, por lo que se cumple

$$\sum_{v \in W} (\delta_T(v) - 2) + 2 = 0 + 2 = 2 = |Hojas(T)|.$$

Caso 2. Si T tiene exactamente 3 vértice de grado uno, entonces tenemos lo siguiente $\sum_{v \in W} (\delta_T(v) - 2) + 2 = (3 - 2) + 2 = 3 = |Hojas(T)|$.

Hipótesis de inducción. Si T' es un árbol de orden $n - 1$ y $W' = \{v \in V(T') : \delta_{T'}(v) \geq 3\}$, entonces $\sum_{v \in W'} (\delta_{T'}(v) - 2) + 2 = |Hojas(T')|$.

Paso inductivo. Sea T un árbol de orden n con $n \geq 5$, por el Teorema 1.9.2 sabemos que T tiene al menos dos hojas. Sabemos por el Teorema 1.9.3 que si a T le quitamos un vértice de grado uno la gráfica obtenida sigue siendo un árbol, entonces tomemos a T' el árbol obtenido a partir de quitar un vértice h de grado uno a T ; es decir, $T' = T - h$. Por demostrar que T cumple con el inciso (a). Supongamos que h es adyacente a un vértice g en T , entonces tenemos tres casos posibles.

Caso 1. Si $\delta_T(g) > 3$, entonces $\delta_{T'}(g) \geq 3$ por lo que $W = W'$, además por hipótesis de inducción tenemos que $|Hojas(T')| = \sum_{v \in W'} (\delta_{T'}(v) - 2) + 2$.

Como en T el vértice h es de grado uno y $T' = T - h$ tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} |Hojas(T)| &= |Hojas(T')| + 1 = \sum_{v \in W'} (\delta_{T'}(v) - 2) + 2 + 1 \\ &= \sum_{v \in W' \setminus \{g\}} (\delta_{T'}(v) - 2) + 2 + 1 + \delta_{T'}(g) - 2, \end{aligned}$$

sabemos que $\delta_{T'}(g) + 1 = \delta_T(g)$ y como tenemos que $\delta_T(g) > 3$ se cumple que $g \in W$. Por lo anterior tenemos que,

$$\begin{aligned} &\sum_{v \in W' \setminus \{g\}} (\delta_{T'}(v) - 2) + 2 + (1 + \delta_{T'}(g)) - 2 \\ &= \sum_{v \in W \setminus \{g\}} (\delta_T(v) - 2) + 2 + \delta_T(g) - 2 = \sum_{v \in W} (\delta_T(v) - 2) + 2. \end{aligned}$$

Caso 2. Si $\delta_T(g) = 3$, entonces $\delta_{T'}(g) = 2$ y $W' = W \setminus \{g\}$ y por hipótesis de inducción tenemos que

$$|Hojas(T')| = \sum_{v \in W'} (\delta_{T'} - 2) + 2.$$

Como en T el vértice h es de grado uno y $T' = T - h$ tenemos lo siguiente

$$|Hojas(T)| = |Hojas(T')| + 1 = \sum_{v \in W'} (\delta_{T'}(v) - 2) + 2 + 1,$$

como $\delta_{T'}(g) = 2$ sumamos el cero siguiente $\delta_{T'}(g) - 2$

$$\begin{aligned} &\sum_{v \in W'} (\delta_{T'}(v) - 2) + 2 + (\delta_{T'}(g) - 2) + 1 \\ &= \sum_{v \in W'} (\delta_{T'}(v) - 2) + 2 + (\delta_{T'}(g) + 1) - 2, \end{aligned}$$

como $\delta_T(g) = 3 = \delta_{T'}(g) + 1$, entonces g esta en W , por lo que tenemos que

$$\begin{aligned} &\sum_{v \in W'} (\delta_{T'}(v) - 2) + 2 + (\delta_{T'}(g) + 1) - 2 \\ &= \sum_{v \in W \setminus \{g\}} (\delta_T(v) - 2) + 2 + \delta_T(g) - 2 = \sum_{v \in W} (\delta_T(v) - 2) + 2. \end{aligned}$$

Caso 3. Si $\delta_T(g) = 2$, entonces $\delta_{T'}(g) = 1$ y como los vértices con los que se está trabajando son de grado menor que 3, W y W' son iguales, además por hipótesis de inducción tenemos que $|Hojas(T')| = \sum_{v \in W'} (\delta_{T'}(v) - 2) + 2$.

Como $\delta_T(g) = 2$, $W' = W$ y como g se convierte en hoja en T' ; tenemos que $\delta_{T'}(g) = 1$, por lo que se cumple lo siguiente

$$|\text{Hojas}(T)| = |\text{Hojas}(T')| = \sum_{v \in W'} (\delta_{T'}(v) - 2) + 2 = \sum_{v \in W} (\delta_T(v) - 2) + 2.$$

Con lo que finalizamos el inciso (a).

b) Sean T un árbol de orden $n \geq 2$ y X un conjunto independiente de vértices en T . Por demostrar que $c(T - X) = \sum_{x \in X} (\delta_T(x) - 1) + 1$.

Haremos la demostración por inducción sobre el número de vértices del conjunto X .

Base. Sean T un árbol de orden $n \geq 2$ y $X = \{x\}$ un conjunto independiente de vértices de T . Por el Lema 1.4 tenemos: $c(T - X) = c(T - \{x\}) = (\delta_T(x) - 1) + 1$.

Hipótesis de inducción. Si T' es un árbol de orden $n \geq 2$ y X' un conjunto independiente de vértices de T' tal que $|X'| = r$, con $r \geq 1$, entonces

$$c(T' - X') = \sum_{x' \in X'} (\delta_{T'}(x') - 1) + 1.$$

Paso inductivo. Sean T un árbol de orden $n \geq 2$ y X un conjunto independiente de vértices de T tal que $|X| = r + 1$, con $r > 1$. Por demostrar que

$$c(T - X) = \sum_{x \in X} (\delta_T(x) - 1) + 1.$$

Sea x un vértice en el conjunto X . Consideremos a $X' = X - \{x\}$ el cual es un conjunto independiente de vértices de T tal que $|X'| = r$, por hipótesis de inducción tenemos que $c(T - X') = \sum_{x' \in X'} (\delta_T(x') - 1) + 1$.

Sea C_x una componente conexa de $T - X'$, tal que x está en C_x . Por lo que:

$$\text{a) } c((T - X') - V(C_x)) = c(T - X') - 1 = (\sum_{x' \in X'} (\delta_T(x') - 1) + 1) - 1.$$

$N_T(X) \subseteq T - X'$, pues X es un conjunto independiente. Así, $\delta_T(x) = \delta_{C_x}(x)$. Por el Lema 1.4 tenemos que:

$$\text{b) } c(C_x - x) = (\delta_T(x) - 1) + 1.$$

Por la hipótesis de inducción, por (a) y (b) y como $X = X' \cup \{x\}$ es un conjunto independiente, tenemos que:

$$\begin{aligned} c(T - X) &= c(T - (X' \cup \{x\})) = c((T - X') - x) = (c(T - X') - 1) + c(C_x - x) \\ &= ((\sum_{x' \in X'} (\delta_T(x') - 1) + 1) - 1) + (\delta_T(x) - 1) + 1 \\ &= \sum_{x' \in X'} (\delta_T(x') - 1) + (\delta_T(x) - 1) + 1 = \sum_{x \in X} (\delta_T(x) - 1) + 1. \end{aligned}$$

□

1.10. Gráficas hamiltonianas

El matemático William Rowan Hamilton inventó un juego, que consistía en recorrer las ciudades más importantes de Europa; sin repetir alguna, volviendo a la ciudad de partida. Este juego se propuso en un dodecaedro regular de madera con veinte clavos (cada uno insertado en una esquina del sólido) y un trozo de cuerda. A cada clavo se le asignó el nombre de una ciudad y el objetivo era encontrar una ruta a través de las aristas del dodecaedro que pasara por todas las ciudades exactamente una vez, y que además terminara en la ciudad que se había iniciado el recorrido. Para recordar que ciudades ya habían sido visitadas, se utilizaba la cuerda para conectar los clavos en el orden correspondiente. La gráfica que representa un dodecaedro en el plano se puede ver en la Figura 1.19.

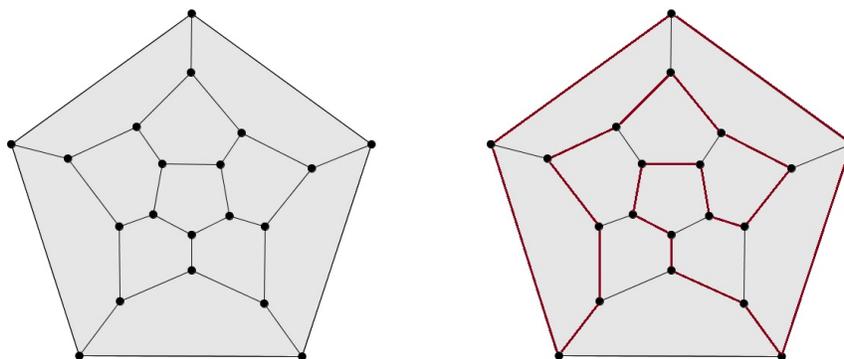


Figura 1.19: Gráfica del dodecaedro y su ciclo hamiltoniano

No se tienen indicios de que el juego haya tenido gran éxito popular, pero en cambio, entre los matemáticos quedó un recuerdo permanente.

Del juego anterior nace la siguiente definición.

Definición. Sea G una gráfica, un *ciclo hamiltoniano* de G es un ciclo que pasa por todos los vértices de G .

Una *gráfica hamiltoniana* es aquella que contiene un ciclo hamiltoniano.

Definición. Sea G una gráfica. P es una *trayectoria hamiltoniana* en G si pasa por todos los vértices de G .

En la Figura 1.19 podemos encontrar un ciclo hamiltoniano del dodecaedro.

A continuación daremos un resultado clásico para las gráficas hamiltonianas.

Teorema 1.10.1. *Si G es hamiltoniana, entonces para cualquier subconjunto propio no vacío S de los vértices de G , $c(G - S) \leq |S|$.*

Demostración. Sean G una gráfica hamiltoniana y S un subconjunto propio de los vértices de G no vacío.

Consideremos a $G - S$ y sean $G_1, G_2, \dots, G_{c(G-S)}$ las componentes conexas de $G - S$. Por demostrar que $c(G - S) \leq |S|$.

Como G es hamiltoniana, entonces G tiene un ciclo \mathcal{C} tal que $V(\mathcal{C}) = V(G)$, por lo que \mathcal{C} pasa por todos los vértices de cada G_i y de S .

Para i en $\{1, 2, \dots, c(G - S)\}$ consideremos a u_i el último vértice de la componente G_i por el que pasa \mathcal{C} , afirmamos que para cada i en $\{1, 2, \dots, c(G - S)\}$ u_i es adyacente a un v_i en S en \mathcal{C} . Si v_i no es adyacente a u_i , entonces u_i es adyacente a un $u'_i \in V(G_i) \cap V(G_{i+1})$, lo que contradice que sean componentes distintas en G . está en una componente conexa distinta a G_i en G . Por lo que, en S hay al menos $c(G - S)$ vértices; pues para cada G_i hay un vértice en S .

Por lo tanto, $c(G - S) \leq |S|$. □

1.11. Conexidad puntual

Definición. Sea G una gráfica, la *conexidad puntual* de G es el mínimo número de vértices que se deben quitar a G para obtener una gráfica inconexa o una gráfica igual a K_1 . Se denota por $\mathcal{K}(G)$.

Como ejemplo tenemos que:

1. Para la gráfica trivial K_1 , $\mathcal{K}(K_1) = 0$.
2. Para la gráfica completa K_n , $\mathcal{K}(K_n) = n - 1$.
3. Para cualquier ciclo \mathcal{C} , $\mathcal{K}(\mathcal{C}) = 2$.
4. Para cualquier árbol T de orden p , con $p > 1$, $\mathcal{K}(T) = 1$.
5. Para toda gráfica inconexa G , $\mathcal{K}(G) = 0$.

Definición. Sea G una gráfica conexa no completa, un *corte puntual* de G es un subconjunto S de $V(G)$, tal que $G - S$ es inconexa.

Observación. Para una gráfica conexa no completa G , con $p \geq 3$ tenemos que $\mathcal{K}(G) = \min\{|S| : S \text{ es un corte puntual}\}$.

Ahora con esta definición podemos dar lugar a la siguiente:

Definición. Una gráfica G es n -conexa si y solo si $\mathcal{K}(G) \geq n$.

Todas las gráficas conexas no triviales son 1-conexas.

Observación 1.1. Observemos que para cualquier gráfica G se cumple que $\mathcal{K}(G) \leq \delta(G)$.

Demostración. Sean G una gráfica y $v \in V(G)$ tal que $\delta_G(v) = \delta(G)$. Consideremos a $S = \{v_1, v_2, \dots, v_{\delta_G(v)}\}$ el conjunto de los vecinos de v , entonces v es un vértice aislado en $G - S$. Por lo tanto, $\mathcal{K}(G) \leq \delta(G)$. \square

Definición. Sean G una gráfica, u y v en $V(G)$ tal que u no es adyacente a v y $S \subseteq V(G)$. Decimos que S es un uv -conjunto separador de G , si se cumple que u y v están en componentes conexas distintas de $G - S$. Decimos que S es un uv -conjunto separador mínimo de G si

$$|S| = \min\{|U| : U \text{ es un } uv\text{-conjunto separador y } uv \notin A(G)\}.$$

Ahora enunciaremos el teorema de Menger y varios resultados que son consecuencia de este, algunos no serán demostrados en esta tesis.

Teorema. (Menger[5]) Sean G una gráfica, u y v dos vértices no adyacentes de G . Si S es un uv -conjunto separador mínimo de G , entonces la cardinalidad de S es igual al máximo número de (u, v) -trayectorias internamente ajenas en G .

Teorema 1.11.1. [5] Sea G una gráfica de orden $n \geq 2$, G es n -conexa si y solo si para todo par de vértices u y v existen al menos n (u, v) -trayectorias internamente ajenas en G .

Demostración. (\Rightarrow) Sea G una gráfica n -conexa y supongamos por contradicción que existen dos vértices u y v tal que el máximo número de trayectorias internamente ajenas entre ellos en G es l , donde $l < n$. Si uv no está en el conjunto de aristas de G , por el Teorema de Menger tenemos que el número de vértices que separan a u y v es l , por la definición de conexidad puntual tenemos que $\mathcal{K}(G) \leq l$. Por lo que, $\mathcal{K}(G) < n$, lo cual contradice la hipótesis. Si uv está en las aristas de G , entonces el máximo número de (u, v) -trayectorias internamente ajenas en $G - uv$ es $l - 1$. Por el teorema de Menger tenemos que el número de vértices que separan a u y v en $G - uv$ es $l - 1$, por la definición

de conexidad puntual tenemos que $\mathcal{K}(G - uv) \leq l - 1$. Por lo que, $\mathcal{K}(G - uv) < n - 1$. Por lo tanto, existe un subconjunto U de $V(G - uv)$ con cardinalidad menor que $n - 1$ tal que $(G - uv) - U$ es una gráfica inconexa o la gráfica trivial. Por ello al menos una de las siguientes gráficas $G - (U \cup \{u\})$ y $G - (U \cup \{v\})$ es inconexa lo que implica que $\mathcal{K}(G) < n$ lo que también es una contradicción, pues G es n -conexa.

(\Leftarrow) Demostraremos por contradicción. Supongamos que G es una gráfica no trivial tal que no es n -conexa, pero que para todo par de vértices distintos existen al menos n trayectorias internamente ajenas entre ellos. Claramente, G no es completa.

Como G no es n -conexa, entonces $\mathcal{K}(G) < n$. Sea W un conjunto con $\mathcal{K}(G)$ vértices de G ; es decir, $|W| < n$, tal que $G - W$ es inconexa. Tomemos a u y v en componentes distintas de $G - W$. Los vértices u y v son no adyacentes por estar en componentes distintas de $G - W$; por hipótesis hay n trayectorias internamente ajenas entre ellos. Por el teorema de Menger tenemos que, u y v no pueden ser separados por menos de n vértices, lo que es una contradicción puesto que estamos separando a u y a v con W , el cual es cardinalidad menor que n . \square

Lema 1.6. [5] Sean G una gráfica n -conexa, $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ un subconjunto de vértices de G de cardinalidad n y $v \notin V(G)$. Si

$$G' = (V(G) \cup \{v\}, A(G) \cup \{u_i v : u_i \in S\}),$$

entonces G' es n -conexa.

Demostración. Haremos la demostración por inducción sobre n .

Base de inducción. Sea $n = 1$. Como G es 1-conexa, entonces G es conexa. Si $S = \{u_1\}$, entonces por construcción G' es conexa. Por lo tanto, G' es 1-conexa.

Hipótesis de inducción. Si H es una gráfica $(n - 1)$ -conexa, $S \subseteq V(G)$ tal que $|S| = n - 1$ y $v \notin V(G)$, entonces $H' = (V(H) \cup \{v\}, A(H) \cup \{u_i v : u_i \in S\})$ es $(n - 1)$ -conexa.

Paso de inducción. Sean G una gráfica n -conexa con $n > 1$, $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ un subconjunto de vértices de G , $v \notin V(G)$ y $G' = (V(G) \cup \{v\}, A(G) \cup \{u_i v : u_i \in S\})$. Sea $\{x, y\}$ un subconjunto de $V(G')$.

Por demostrar que entre todo par de vértices x y y de G' existen al menos n (x, y) -trayectorias internamente ajenas.

Si $\{x, y\}$ un subconjunto de $V(G)$, entonces G es n -conexa pues tenemos que existen al menos n (x, y) -trayectorias internamente ajenas.

Si v en $\{x, y\}$, entonces supongamos sin pérdida de generalidad que $v = y$. Consideremos los siguientes casos:

Caso 1. $x \notin S$; es decir, $x \in V(G) - S$.

Entonces $xv \notin A(G')$. Por lo que, S es un xv -conjunto separador mínimo de cardinalidad n en G' , entonces por el Teorema de Menger sabemos que en G' existen al menos n (x, v) -trayectorias internamente ajenas.

Caso 2. $x \in S$.

Entonces $xv \in A(G')$. Consideremos el conjunto $S' = S - \{x\}$ y a $G'' = G - xv$. Como G es n -conexa, entonces en particular G es $(n - 1)$ -conexa. Como $G'' \cong H'$, donde $H' = (V(G) \cup \{v\}, A(G) \cup \{u_i v : u_i \in S'\})$, por hipótesis de inducción tenemos que G'' es $(n - 1)$ -conexa, por el Teorema 1.11.1 tenemos al menos $n - 1$ (x, v) -trayectorias internamente ajenas en G'' . Como $xv \in A(G')$, entonces tenemos en G' al menos n (x, v) -trayectorias internamente ajenas.

Por el Teorema 1.11.1 tenemos que G' es n -conexa. □

Teorema 1.11.2. [5] *Si G es una gráfica n -conexa y $\{v, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ un subconjunto con $n + 1$ vértices distintos en G , entonces para $1 \leq i \leq n$ existen (v, v_i) -trayectorias tales que $\{(v, v_i)\text{-trayectorias} : i \in \{1, \dots, n\}\}$ es un conjunto de trayectorias internamente ajenas.*

Demostración. Dada una gráfica G n -conexa y $\{v, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es un conjunto de $n + 1$ vértices distintos en G , podemos construir una nueva gráfica H a partir de G al agregar un nuevo vértice u a G junto con todas las aristas uv_i con i en $\{1, 2, \dots, n\}$; es decir, $H = (V(G) \cup \{u\}, A(G) \cup \{uv_i : i \in \{1, 2, \dots, n\}\})$. Por el lema anterior H es n -conexa. Por el Teorema 1.11.1 sabemos que existen al menos n trayectorias internamente ajenas entre v y u en H , sabemos que u es adyacente a cada v_i con i en $\{1, 2, \dots, n\}$, entonces para cada (v, u) -trayectoria en H tenemos una (v, v_i) -trayectoria con i en $\{1, 2, \dots, n\}$ en G . □

Teorema 1.11.3. [5] *Sea G una gráfica n -conexa con $n \geq 2$, entonces cualesquiera n vértices de G pertenecen a un ciclo común.*

Lema 1.7. *Si G es n -conexa, entonces $G + x$ es $(n + 1)$ -conexa, con $x \notin V(G)$.*

Demostración. Por demostrar que $G + x$ es $(n + 1)$ -conexa. Sean u y v dos vértices de $G + x$. Por demostrar que existen al menos $n + 1$ (u, v) -trayectorias internamente ajenas. Consideremos los siguientes casos:

Caso 1. u y v están en $V(G)$.

Entonces como G es n -conexa, por el Teorema 1.11.1 sabemos que en G existen al menos n (u, v) -trayectorias internamente ajenas. Además por construcción de $G + x$ el vértice x es adyacente a todo vértice de G ; así que entre u y v existe la trayectoria $(u, x) \cup (x, v)$ la cual pasa por x en $G + x$, por ello tenemos entre todo par de vértices de G al menos $n + 1$ trayectorias internamente ajenas en $G + x$.

Caso 2. $u = x$ o $v = x$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $u = x$, tomemos a v_1, v_2, \dots, v_n n vértices de distintos G , tal que para toda i en $\{1, 2, \dots, n\}$ $v_i \neq v$. Por el Teorema 1.11.2 como G es n -conexa hay al menos n (v, v_i) -trayectorias internamente ajenas, denotadas por $T_{v_i v}$ para i en $\{1, 2, \dots, n\}$. Como x es adyacente a todo vértice de G tenemos las siguientes

n trayectorias en $G + x$, para i en $\{1, 2, \dots, n\}$ $(x, v_i) \cup T_{v_i v}$ y con la arista xv tenemos al menos $n + 1$ trayectorias internamente ajenas en $G + x$.

Por lo tanto, $G + x$ es $(n + 1)$ -conexa. \square

1.12. Independencia.

Ya que en los resultados centrales de esta tesis se pide que las gráficas sean n -conexas y además tengan cierta condición de independencia, es necesario presentar las siguientes definiciones.

Recordemos la definición de conjunto independiente. Sea G una gráfica. Decimos que S un subconjunto de $V(G)$ es un *conjunto independiente*, si para todo par de vértices de S estos no son adyacentes.

Teniendo la definición de un conjunto independiente de vértices en G ahora podemos definir el número de independencia como sigue:

Definición. Sea G una gráfica. El *número de independencia* de G , denotado por $\alpha(G)$, es $\alpha(G) = \text{máx}\{|S| : S \text{ es un conjunto independiente en } G\}$. A continuación en la Figura 1.20, se muestra un conjunto independiente $S = \{x_1, x_4, x_9\}$ de G . Observemos que $\{x_1x_9, x_1x_4, x_4x_9\} \not\subseteq A(G)$.

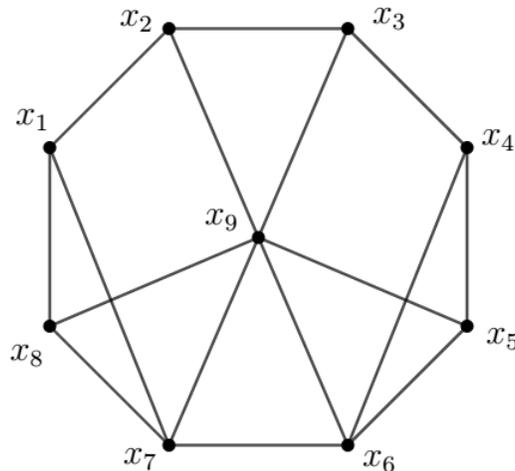


Figura 1.20: $S = \{x_1, x_4, x_9\}$ es un conjunto independiente

1.13. Teorema Chvátal-Erdős

Veamos un teorema que simplificará la demostración del resultado propuesto por Chvátal y Erdős.

Teorema 1.13.1. *Sea G una gráfica con al menos 3 vértices. Si para algún $n \geq 2$, G es n -conexa y no contiene subconjuntos independientes de cardinalidad mayor a n , entonces G tiene un ciclo hamiltoniano.*

Demostración. Sea G una gráfica con al menos 3 vértices, tal que para un $n \geq 2$ entero, G es n -conexa. Como $n \geq 2$ por el Teorema 1.11.3 G tiene al menos un ciclo. Sea \mathcal{C} un ciclo de longitud máxima en G . Por el Teorema 1.11.3 la longitud de \mathcal{C} es mayor o igual que n .

Supongamos que G no contiene ciclos hamiltonianos, entonces hay un vértice x , tal que x no está en el ciclo \mathcal{C} . Ya que G es n -conexa existen n trayectorias internamente ajenas que inician en x y terminan en n vértices de \mathcal{C} (Teorema 1.11.2). Sean x_1, x_2, \dots, x_n los vértices finales de estas trayectorias, denotamos por T_{xx_i} a la (x, x_i) -trayectoria. Para cada i en $\{1, 2, \dots, n\}$ sea y_i el vértice sucesor del vértice x_i en \mathcal{C} , en un orden fijo de los vértices de \mathcal{C} .

Con esto tenemos dos casos posibles:

Caso 1. Existe para un vértice y_i , con i en $\{1, 2, \dots, n\}$ tal que es adyacente a x .

Supongamos sin pérdida de generalidad que \mathcal{C} empieza y termina en x_i . Entonces el ciclo $\mathcal{C}' = (y_i, \mathcal{C} - x_i y_i, x_i) \cup (x_i, T_{x_i x}^{-1}, x) \cup (x, y_i)$ es de longitud mayor a la longitud de \mathcal{C} ya que contiene a los vértices de \mathcal{C} y a x , lo que es una contradicción (ver Figura 1.21).

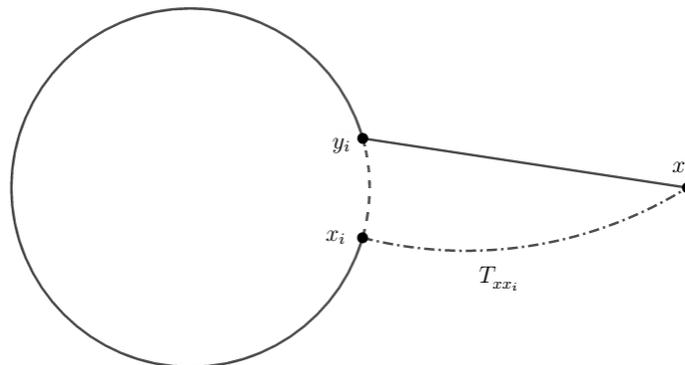


Figura 1.21: \mathcal{C}'

Caso 2. Para toda i en $\{1, 2, \dots, n\}$ se cumple que y_i no es adyacente a x .

Consideremos el conjunto formado por los vértices y_i y el vértice x un subconjunto de cardinalidad $n + 1$ de $V(G)$, por las hipótesis del teorema no puede ser un conjunto independiente, por lo cual existen dos vértices y_i y y_j que son adyacentes en G con $\{i, j\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, $i \neq j$. Tomamos a x_i y x_j los respectivos vértices antecesores de y_i y y_j en \mathcal{C} . Supongamos sin pérdida de generalidad que \mathcal{C} empieza y termina en x_j . Tomemos el ciclo

$$C'' = (x_i, T_{xx_i}^{-1}, x) \cup (x, T_{xx_j}, x_j) \cup (x_j, \mathcal{C}^{-1} - x_j y_j, y_i) \cup (y_i, y_j) \cup (y_j, \mathcal{C} - x_i y_i, x_i)$$

(ver Figura 1.22).

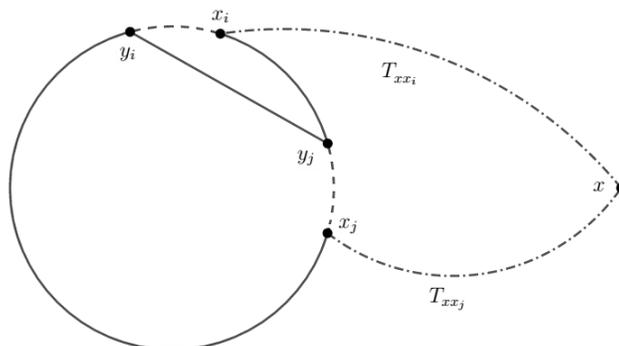


Figura 1.22: C''

El cual es de longitud mayor a la longitud de \mathcal{C} , esto nuevamente es una contradicción.

Por lo tanto, G tiene un ciclo hamiltoniano. \square

Con el teorema recién demostrado podemos ahora revisar el teorema propuesto por Chvátal y Erdős.

Teorema 1.13.2. [9] (Chvátal, P. Erdős 1972) Sean $n \geq 1$ un entero y G una gráfica n -conexa. Si $\alpha(G) \leq n + 1$, entonces G tiene una trayectoria hamiltoniana.

Demostración. Caso 1. G es una gráfica n -conexa y $\alpha(G) < n + 1$.

Como G satisface las hipótesis del Teorema 1.13.1 ya que no tiene conjuntos independientes de más de n vértices, entonces G tiene un ciclo hamiltoniano y por ello G tiene una trayectoria hamiltoniana.

Caso 2. G es una gráfica n -conexa y $\alpha(G) = n + 1$.

Consideremos la gráfica $G + x$ obtenida a partir de G al agregar un nuevo vértice x adyacente a todos los vértices de G . Por el Lema 1.7 $G + x$ es $(n + 1)$ -conexa y no tiene un conjunto independiente de más de $n + 1$ vértices. Por lo que $G + x$ cumple las hipótesis del Teorema 1.13.1 para $n + 1$; pues no puede tener conjuntos independientes de cardinalidad $n + 2$. Por lo tanto, por el Teorema 1.13.1 $G + x$ tiene un ciclo hamiltoniano; por lo cual G tiene una trayectoria hamiltoniana. □

Recordemos que el objetivo de esta tesis es el estudio de los k -árboles en gráficas, para $k = 2$ tenemos que un 2-árbol es una trayectoria. Entonces el Teorema 1.13.2 nos da condiciones para obtener un 2-árbol generador de G .

1.14. Dominación en gráficas

Definición. Sea G una gráfica, $S \subseteq V(G)$ es un *conjunto dominante* de G si para todo v en $V(G) - S$, v es adyacente a algún vértice u , con $u \in S$.

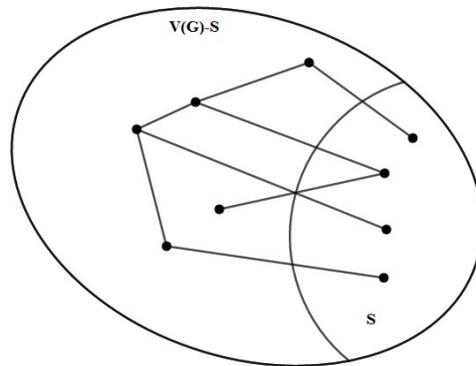


Figura 1.23: Conjunto dominante S

Un conjunto S de G es un conjunto dominante de tamaño mínimo, si S es un conjunto dominante de G y para cualquier otro conjunto dominante S' se verifica que $|S| \leq |S'|$.

Definición. Sean G una gráfica, $m \geq 0$ un entero y X un subconjunto de vértices de G . Entonces el *conjunto m -dominante* de X , denotado por $Dom^m(X)$, se define como el siguiente conjunto de vértices:

$$Dom^m(X) = \{v \in V(G) : d_G(v, X) \leq m\}.$$

Si los vértices de un subconjunto o una subgráfica Y de G están incluidos en $\text{Domi}^m(X)$, entonces decimos que X m -domina Y . Por lo tanto, una H subgráfica de G 0-domina a G si y solo si H es gráfica generadora de G .

Ejemplo. Sea $X = \{x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}\}$ un conjunto 2 dominante de G , entonces $\text{Domi}^2(X) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}\}$.

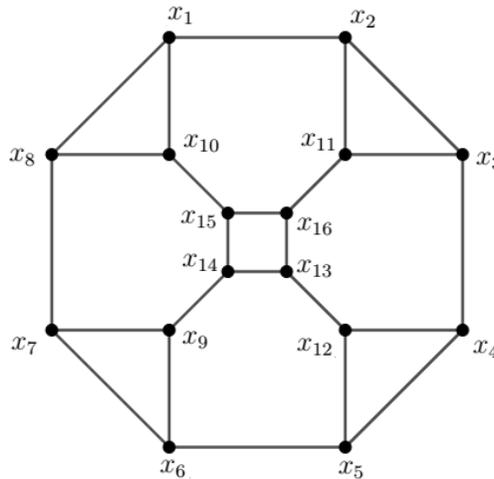


Figura 1.24: $\text{Domi}^2(X)$

1.15. Digráficas

Definición. Una *digráfica* D es un par ordenado $(V(D), F(D))$, donde $V(D)$ es un conjunto finito no vacío de objetos, al que llamaremos conjunto de vértices de D , y $F(D)$ es una colección de pares ordenados de vértices de D , al que llamaremos conjunto de *flechas* de D .

Por como se define $F(D)$ se permiten flechas del tipo (v, v) a las cuales llamaremos *lazos*. Ahora, observemos que entre dos vértices distintos u y v de $V(D)$ podemos tener dos o más flechas entre ellos de la forma (u, v) , en este caso diremos que son *multiflechas* y que la digráfica D es una *multidigráfica*.

Definición. Decimos que una digráfica D es *simple* si no admite lazos ni multiflechas. En esta tesis al hablar de digráficas estaremos haciendo referencia a digráficas simples salvo que se indique lo contrario.

Dada una digráfica D , la cardinalidad de $V(D)$ es el orden de D y la cardinalidad de $F(D)$ es el tamaño de D . El orden de cualquier digráfica es al menos uno.

Definición. Sea D una digráfica, diremos que u es adyacente a v si (u, v) en $F(D)$ o (v, u) en $F(D)$. Si (u, v) en $F(D)$, diremos que u es vértice inicial y v es vértice final de la flecha (u, v) , respectivamente. Con esto para una flecha (u, v) en $F(D)$ decimos que el vértice u es *adyacente hacia* el vértice v , y que el vértice v es *adyacente desde* el vértice u .

La representación geométrica en el plano de una digráfica consiste en poner a los vértices como puntos y a las flechas como un arco que tiene una punta de flecha hacia el vértice final de la flecha, como se muestra en la Figura 1.25.

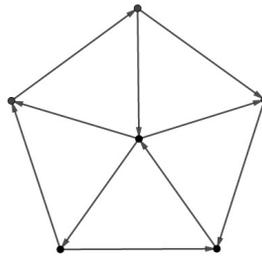


Figura 1.25: Representación geométrica de una digráfica

Definición. Sean D una digráfica y x en $V(D)$. Decimos que $N^+(x)$ es la *vecindad exterior* de x si $N^+(x) = \{v \in V(D) : (x, v) \in F(D)\}$. Decimos que $N^-(x)$ es la *vecindad interior* de x si $N^-(x) = \{v \in V(D) : (v, x) \in F(D)\}$.

Definición. El *ingrado* de un vértice v de la digráfica D es el número de flechas que tienen como vértice final a v y lo denotaremos por $\delta_D^-(v)$. El *exgrado* de un vértice v de la digráfica D es el número de flechas que tienen como vértice inicial al vértice v y se denota por $\delta_D^+(v)$.

Teniendo la definición de ingrado y exgrado de un vértice podemos dar la definición de grado.

Definición. El grado de un vértice v en una digráfica D es la suma del exgrado y el ingrado del vértice, el cual es denotado por $\delta_D(v)$; es decir,

$$\delta_D(v) = \delta_D^+(v) + \delta_D^-(v).$$

Definición. Un *camino dirigido* en una digráfica D es una sucesión de vértices $C = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_n)$ tal que para toda i en $\{0, 1, \dots, n-1\}$ (u_i, u_{i+1}) en $F(D)$ y se define a su longitud como n .

Definición. Un *camino no dirigido* en una digráfica es una sucesión de vértices $C = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ tal que para i en $\{0, 1, \dots, n-1\}$ se cumple que (x_i, x_{i+1}) en $F(D)$ o (x_{i+1}, x_i) en $F(D)$.

Definición. Una *trayectoria dirigida* es un camino dirigido que no repite vértices.

Definición. Un *camino dirigido cerrado* es un camino dirigido que inicia y termina en el mismo vértice.

Definición. Un *ciclo dirigido* $C = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = x_0)$ es un camino dirigido cerrado que no repite vértices, salvo el primero y el último y su longitud es mayor o igual que 2. Un *ciclo no dirigido* es un camino no dirigido cerrado que no repite vértices, salvo por el primero y el último y su longitud es mayor o igual que 2.

Definición. Decimos que una digráfica D es *conexa* si entre todo par de vértices de D existe un camino no dirigido.

Ahora definamos lo que conoceremos como un árbol dirigido en esta tesis.

Definición. A una digráfica que es conexa y no tiene ciclos dirigidos ni ciclos no dirigidos la llamaremos *árbol dirigido*, y la denotaremos por \vec{T} .

Diremos que r es un vértice *raíz* de \vec{T} , si el ingrado de r cumple que $\delta_{\vec{T}}^-(r) = 0$ y además $\delta_{\vec{T}}^+(r) \geq 1$. Decimos que x un vértice de \vec{T} es una *hoja* de \vec{T} si cumple que $\delta_{\vec{T}}^+(x) = \delta_{\vec{T}}^-(x) = 1$.

Definición. Sea \vec{T} un árbol dirigido, diremos que \vec{T} es un *árbol exterior dirigido* si este tiene raíz r y para todo vértice x distinto de la raíz se cumple que $\delta_{\vec{T}}^-(x) = 1$ y $\delta_{\vec{T}}^+(x) \geq 0$.

Por ejemplo en la Figura 1.26, podemos observar un árbol \vec{T} dirigido, donde r es la raíz, se cumple que $\Delta^-(\vec{T}) = 1$ y $\Delta^+(\vec{T}) = 2$. Las flechas se dirigen a los vértices de grado uno saliendo del vértice raíz r ya que se cumple que $\delta_{\vec{T}}^-(r) = 0$, $\delta_{\vec{T}}^+(r) \geq 1$; para $i = 1, 2, \dots, 9$ tenemos que $\delta_{\vec{T}}^-(x_i) = 1$ y $\delta_{\vec{T}}^+(x_i) \geq 0$.

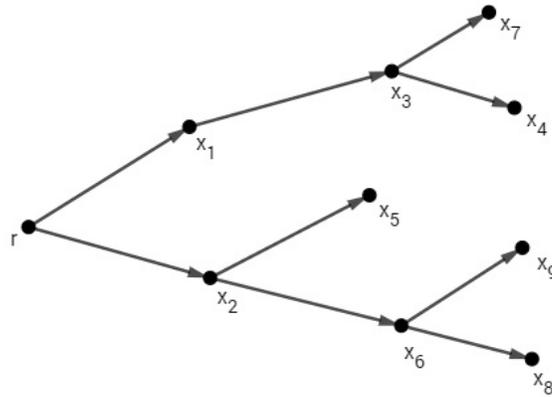


Figura 1.26: \vec{T} árbol exterior dirigido con raíz r

Capítulo 2

Árboles generadores con grados acotados

Examinamos en el capítulo anterior el resultado propuesto por Chvátal y Erdős; el cual nos permite encontrar en una gráfica n -conexa con $\alpha(G) \leq n+1$ un 2-árbol generador. A partir de este teorema M. Las Vergnas se pregunta si toda gráfica n -conexa G con $\alpha(G) \leq n+l-1$ contiene un árbol generador con a lo más l vértices finales.

En 1979 S. Win da una prueba a la pregunta anterior; su resultado establece que toda gráfica n -conexa con número de independencia $\alpha(G) \leq n+c$ contiene un árbol generador con a lo más $c+1$ vértices terminales.

Por otro lado, en 1988 Víctor Neumann Lara y Eduardo Rivera Campo presentan dos resultados que buscan dar una generalización a la propuesta de Chvátal y Erdős. Los cuales son los siguientes:

1. Sea G una gráfica n -conexa con número de independencia $\alpha(G)$. Si $\alpha(G) \leq 1+ns$ para algún entero positivo s , entonces G tiene un árbol generador con grado máximo a lo más $s+1$.

2. Sean G una gráfica n -conexa con número de independencia $\alpha(G)$, s y c dos enteros tales que $3 \leq s$ y $0 \leq c \leq n$. Si $\alpha(G) \leq 1+n(s-1)+c$, entonces G tiene un árbol generador T con grado máximo a lo más $s+1$ y que no contiene más de c vértices de grado $s+1$.

El primer resultado en términos de k -árbol para $k = s+1$ es; *Sea G una gráfica n -conexa con número de independencia $\alpha(G)$. Si $\alpha(G) \leq 1+n(k-1)$*

para algún entero positivo k , entonces G tiene un k -árbol generador. Por lo que en el segundo resultado tendremos un k -árbol generador y que no contiene más de c vértices de grado k , al que denotamos como (k, c) -subárbol generador.

Comenzaremos este capítulo con un lema de apoyo que nos servirá para demostrar los resultados de V. Neumann Lara y E. Rivera Campo.

Será necesario tener presentes los conceptos de árbol exterior dirigido con raíz y las operaciones de agregar y quitar vértices a una gráfica, así como también tener en cuenta los teoremas vistos para árboles y para gráficas n -conexas en el capítulo 1.

2.1. Lema de apoyo

Definición. Sean D una digráfica y $v \in V(D)$, decimos que un vértice v^- de $V(D)$ es un *vértice antecesor* de v si tenemos la flecha (v^-, v) en D .

Para realizar la demostración del resultado principal de este capítulo, es necesario primero revisar el siguiente lema.

Lema 2.1. [13] Sean \vec{T} un árbol exterior dirigido, R y B dos subconjuntos ajenos de $V(T)$ tal que $(R \cup B) \cap (\text{Hojas}(T)) = \emptyset$ y $N^+(R \cup B) \cap R = \emptyset$. Para cada $b \in B$, sean x_b un vértice fijo en $N^+(B)$ y $X(B) = \{x_b : b \in B\}$. Existe una función $\phi : N^+(R) \cup (N^+(B) \setminus X(B)) \rightarrow \text{Hojas}(T) \cup N^-(R)$ que satisface las siguientes condiciones.

1. Si $u \in N^+(R) \cup (N^+(B) \setminus X(B))$, entonces existe $T_{u\phi(u)}$ tal que esta es una $(u, \phi(u))$ -trayectoria dirigida en \vec{T} .
2. Si $T_{u\phi(u)}$ y $T_{v\phi(v)}$ son trayectorias dirigidas ajenas por vértices, entonces $u \neq v$.
3. Si $u \neq v$, entonces al menos uno de los vértices v^- y u^- es un vértice de $T_{\phi(u)\phi(v)}$.
4. El rango de $\phi(N^+(R) \cup (N^+(B) \setminus X(B)))$ es un conjunto independiente en \vec{T} .

Demostración. Sean $Y = \{(b, a) \in F(\vec{T}) : b \in B \text{ y } a \neq x_b\}$. Definimos a \vec{H} como la gráfica tal que $V(\vec{H}) = V(\vec{T}) - R$ y $F(\vec{H}) = F(\vec{T} - R) - Y$ una nueva gráfica obtenida a partir de \vec{T} , por definición de Y y \vec{T} las componentes conexas de \vec{H} son árboles exteriores dirigidos. Más aún, cada vértice $u \in N^+(R) \cup (N^+(B) - X(B))$ es raíz de la componente conexa de \vec{H}_u de \vec{H} ; la cual contiene a u , además los vértices terminales en \vec{H}_u son vértices que están en $\text{Hojas}(T)$ o están en $N^-(R)$, por lo que podemos definir a

$$\phi : N^+(R) \cup (N^+(B) \setminus X(B)) \rightarrow \text{Hojas}(T) \cup N^-(R)$$

tal que para u un vértice en $N^+(R) \cup (N^+(B) \setminus X(B))$ $\phi(u)$ es un vértice en $Hojas(T) \cup N^-(R)$.

Primero veamos que ϕ es función. Por demostrar que si $u = v$, entonces $\phi(u) = \phi(v)$. Supongamos por contradicción que $\phi(u) \neq \phi(v)$, entonces tenemos que $\vec{H}_u \neq \vec{H}_v$, lo que implica que $u \neq v$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, ϕ es función. Veamos que ϕ es inyectiva. Por demostrar que si $\phi(u) = \phi(v)$, entonces $u = v$. Supongamos por contradicción que $u \neq v$, entonces tenemos $\vec{H}_u \neq \vec{H}_v$, lo que implica que $\phi(u) \neq \phi(v)$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, ϕ es inyectiva.

Demostremos la condición 1. Sabemos que entre todo par de vértices de \vec{T} existe una única trayectoria, entonces $T_{u\phi(u)}$ es una trayectoria dirigida en \vec{H}_u , como $\vec{H}_u \subset \vec{T}$, entonces $T_{u\phi(u)}$ es una trayectoria dirigida de \vec{T} .

La condición 2 se satisface pues si tomamos a $u \neq v$ tenemos dos componentes \vec{H}_u y \vec{H}_v tal que $\vec{H}_u \cap \vec{H}_v = \emptyset$, por lo tanto, las trayectorias $T_{u\phi(u)}$ y $T_{v\phi(v)}$ cumplen que $V(T_{u\phi(u)}) \cap V(T_{v\phi(v)}) = \emptyset$; es decir, son ajenas por vértices.

Ahora demostraremos la condición 3. Sean r la raíz de \vec{T} , u y v dos vértices distintos en $N^+(R) \cup (N^+(B) - X(B))$ y $T_{r\phi(u)}$ y $T_{r\phi(v)}$ dos trayectorias dirigidas que inician en la raíz de \vec{T} . Sea $w \in V(T_{r\phi(u)}) \cap V(T_{r\phi(v)})$ tal que $T_{\phi(u)\phi(v)} = T_{w\phi(u)} \cup T_{w\phi(v)}$. Por la condición 2 sabemos que $T_{u\phi(u)}$ y $T_{v\phi(v)}$ son ajenas por vértices, lo que nos da los siguientes casos:

Caso 1. Si $w = \phi(u)$, entonces $v^- \in V(T_{\phi(u)\phi(v)})$.

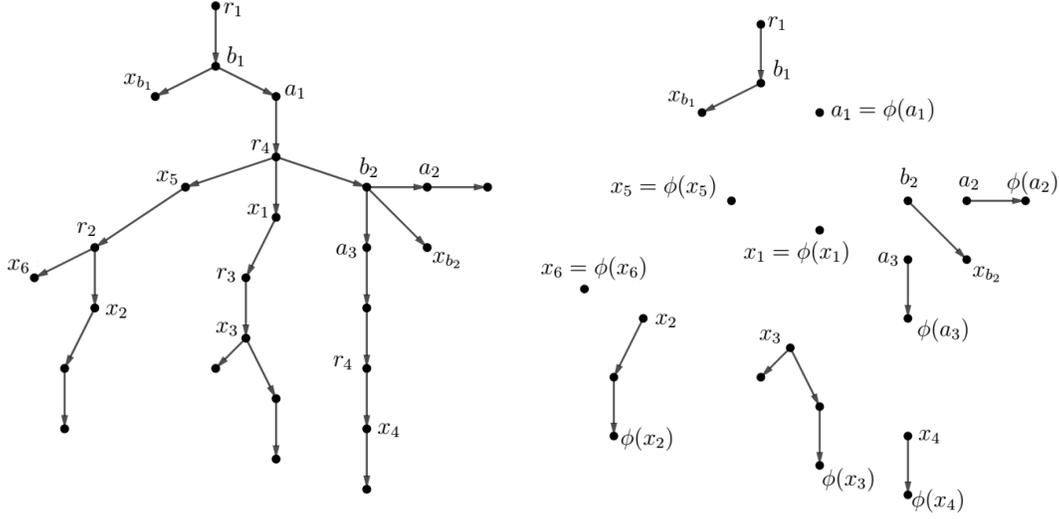
Caso 2. Si $w = \phi(v)$, entonces $u^- \in V(T_{\phi(u)\phi(v)})$.

Caso 3. Si $\phi(v) \neq w$ o $\phi(u) \neq w$, entonces como $\{w\} \subseteq V(T_{r\phi(u)}) \cap V(T_{r\phi(v)})$ tenemos que v^- en $V(T_{w\phi(v)})$ y u^- en $(T_{w\phi(u)})$.

Por lo tanto, la condición 3 se satisface.

Por último demostraremos que se satisface la condición 4. Supongamos por contradicción que $Hojas(T) \cup N^-(R)$ no es un conjunto independiente, entonces tenemos una flecha de $\phi(u)$ a $\phi(v)$ en $F(\vec{T})$. Como $T_{u\phi(u)}$ y $T_{v\phi(v)}$ son ajenas por vértices tenemos que $v = \phi(v)$, por lo tanto, tenemos que $v^- = \phi(v)$. Por construcción sabemos que v^- está en $R \cup B$ y $\phi(v)$ está en $Hojas(T) \cup N^-(R)$ pero por hipótesis tenemos que $(R \cup B) \cap (Hojas(T)) = \emptyset$, por lo que tenemos una contradicción.

Por lo tanto, $Hojas(T) \cup N^-(R)$ es un conjunto independiente. \square



Ejemplo de \vec{T} y \vec{H}

2.2. Árboles generadores con grado acotado

Teorema 2.2.1. [13] Sean G una gráfica n -conexa con número de independencia $\alpha(G)$, s y c dos enteros tales que $3 \leq s$ y $0 \leq c \leq n$. Si $\alpha(G) \leq 1 + n(s - 1) + c$, entonces G tiene un árbol generador con grado máximo a lo más $s + 1$ y que contiene a lo más c vértices de grado $s + 1$.

Demostración. Llamamos a T un $(s + 1, c)$ -subárbol de G , si es un árbol de G que cumple que $\Delta(T) \leq s + 1$ y el número de vértices de grado $s + 1$ es menor o igual a c .

Sea T un $(s + 1, c)$ -subárbol de G con el máximo número de vértices posibles de G .

Si T es un $(s + 1, c)$ -subárbol árbol generador de G , entonces la demostración finaliza.

Supongamos por contradicción que T no es un árbol generador de G , entonces podemos escoger un vértice w de G que no está en T . Para $i \neq j$ con $\{i, j\} \subseteq \{1, 2, \dots, l\}$, sea $P = \{\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_l\}$ la colección máxima de trayectorias de w a T en G , tal que $\Pi_i \cap \Pi_j = \{w\}$ y $|\Pi_i \cap V(T)| = 1$. Para cada i , sea r_i el único vértice de Π_i en T . Supongamos sin pérdida de generalidad, que $\delta_T(r_1) \leq \delta_T(r_2) \leq \dots \leq \delta_T(r_l)$. Por la elección de T , T cumple lo siguiente:

1. El grado máximo de T es $s + 1$.
2. T tiene a lo más c vértices de grado $s + 1$.
3. T tiene el mayor número de vértices posibles bajo las condiciones 1 y 2.

Por (1) tenemos que para todo vértice $u \in V(T)$ se cumple que $\delta_T(u) \leq s + 1$, por lo que tenemos que $\delta_T(r_l) \leq s + 1$. Por otro lado, afirmamos que $s \leq \delta_T(r_1)$. Si $\delta_T(r_1) < s$, entonces T junto con la trayectoria Π_1 sería un T' subárbol de G con más vértices que T que satisface las condiciones (1) y (2), pues tenemos que $\delta_{T'}(r_1) = \delta_T(r_1) + 1 < s + 1$

y $\delta_{T'}(u) = \delta_T(u) \leq s + 1$ para todo vértice u de T' distinto de r_1 lo que constituye una contradicción a la elección de T .

Por el Teorema 1.11.1 sabemos que l es al menos n pues G es n -conexa.

Llamamos R a el conjunto de todos los vértices r_i ; es decir, $R = \{r_1, r_2, \dots, r_l\}$. Sea t el número de vértices en R con grado s en T . Sea $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ el conjunto de vértices en $V(T) - R$ que tienen grado $s + 1$ en T . Como c es el número de vértices de grado $s + 1$ en T tenemos que $c \geq m + l - t$ de lo que podemos obtener $m \leq c - l + t$. Esto nos lleva a dos casos.

Caso 1. Si $t > 0$, entonces $\delta_T(r_1) = s$ y entonces $T \cup \Pi_1$ es un subárbol que tiene grado a lo más $s + 1$. Como T es un $(s + 1, c)$ -subárbol y es máximo en cantidad de vértices de G con grado $s + 1$, por lo que T contiene exactamente c vértices de grado $s + 1$ de lo contrario podemos obtener a $T' = T \cup \Pi_1$ con más vértices de grado $s + 1$, lo que contradice que T sea máximo; por lo tanto, tenemos que $m = c - l + t$.

Caso 2. Si $t = 0$, entonces $\delta_T(r_1) = s + 1$ para $i = 1, 2, \dots, l$, por lo que $c \geq l$, pero sabemos que $l \geq n \geq c$, por lo tanto, $m = l = n$, por lo que B es vacío; es decir, $m = 0$.

Consideremos a \vec{T} el árbol exterior dirigido con raíz r y $B \neq \emptyset$. Observe que como $B \in V(T) - R$, entonces R y B son dos conjuntos ajenos, además $(R \cup B) \cap Hojas(T) = \emptyset$ pues todo vértice de $Hojas(T)$ es de grado uno. Demostraremos ahora que $N^+(R \cup B) \cap R = \emptyset$. Para esto, supongamos que $N^+(R \cup B) \cap R \neq \emptyset$, lo que implica considerar los siguientes dos casos.

Caso 1. Si r_i en $N^+(R) \cap R$, entonces tenemos a (r_j, r_i) una flecha de \vec{T} , por lo que tenemos a $H = T \cup \Pi_i \cup \Pi_j$ con un único ciclo

$$\mathcal{Y} = (r_i, \Pi_i, w) \cup (w, \Pi_j, r_j) \cup (r_j, r_i),$$

ahora bien por el Lema 2.1 $T' = (T - (r_i, r_j)) \cup \Pi_i \cup \Pi_j$ es un árbol de G . Como $\delta_T(r_i) = \delta_{T'}(r_i)$ y $\delta_T(r_j) = \delta_{T'}(r_j)$ implica que T' es un $(s + 1, c)$ -subárbol de G con más vértices que T lo que es una contradicción.

Caso 2. Si r_i en $N^+(B) \cap R$, entonces tenemos a (b_j, r_i) una flecha de \vec{T} , por lo que tenemos a $H = T \cup \Pi_1 \cup \Pi_i$ con un único ciclo

$$\mathcal{Y} = (r_i, \Pi_i, w) \cup (w, \Pi_1, r_1) \cup (r_1, T_{r_1 b_j}, b_j) \cup (b_j, r_1)$$

donde $T_{r_1 b_j}$ es la trayectoria que une a r_1 y a b_j en T , ahora bien por el Lema 2.1 $T' = (T - (b_j, r_i)) \cup \Pi_1 \cup \Pi_i$ es un árbol de G . Como tenemos que $\delta_T(b_j) = \delta_{T'}(b_j) - 1$, $\delta_T(r_1) = \delta_{T'}(r_1) + 1$ y $\delta_T(r_i) = \delta_{T'}(r_i)$ implica que T' es un $(s + 1, c)$ -subárbol de G con más vértices que T , lo que es una contradicción.

Por lo tanto, tenemos que $N^+(R \cup B) \cap R = \emptyset$.

Como $N^+(R \cup B) \cap R = \emptyset$ con R y B dos conjuntos ajenos y además tenemos que $(R \cup B) \cap Hojas(T) = \emptyset$, tomemos a $X(B) = \{x_b \in N^+(B) : b \in B\}$ y

$$\phi : N^+(R) \cup (N^+(B) - X(B)) \longrightarrow N^-(R) \cup Hojas(T)$$

donde $W = N^+(R) \cup (N^+(B) - X(B))$. Por el Lema 2.1 ϕ es una función uno a uno, entonces $|W| = |N^+(R) \cup (N^+(B) - X(B))|$.

Observemos que como \vec{T} es un árbol exterior dirigido con raíz y por el Lema 2.1, no contamos a las flechas en \vec{T} que van de R a B , por lo que el grado de R se reduce en uno. Además para los vecinos de B estamos quitando también a $X(B)$, por lo que el grado de B se reduce en 2. También notemos que como para todo vértice v en \vec{T} tenemos que $\delta_{\vec{T}}^-(v) \leq 1$, entonces $|N^+(R) \cap (N^+(B) - X(B))| = 0$.

Por lo tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
|W| &= |N^+(R)| + |(N^+(B) - X(B))| \\
&= (t(s) + (l - t)(s + 1) + (c - l + t)(s + 1)) \\
&\geq (1 + t(s - 1) + (l - t)s + (c - l + t)(s - 1)) \\
&= 1 + ts - t + ls - ts + (c - l + t)(s - 1) \\
&= 1 + ls - t + l - l + (c - l + t)(s - 1) \\
&= 1 + l(s - 1) + (l - t) + (c - l + t)(s - 1) \\
&\geq 1 + l(s - 1) + c.
\end{aligned}$$

Como tenemos que $l \geq n$, entonces:

$$1 + l(s - 1) + c \geq 1 + n(s - 1) + c.$$

Por lo tanto, $|W| \geq 1 + n(s - 1) + c$

Como $\alpha(G) \leq 1 + n(s - 1) + c$, entonces $W \cup \{w\}$ no puede ser un conjunto independiente, por lo que tenemos una arista dg en $A(G)$ con ambos vértices en $W \cup \{w\}$. Además, como $P = \{\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_l\}$ es el conjunto máximo de trayectorias de w a T , si a es un vértice que está en T y es adyacente a w en G , entonces a está en R pues en caso contrario aw sería una trayectoria de w a T que no está en P . Si $w = d$ o $w = g$, entonces afirmamos que d y g están en W , es decir que, $d \neq w$ y $g \neq w$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $d = w$, entonces tenemos una wW -arista en G . Como W está en los vértices de T y $P = \{\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_l\}$ es el conjunto máximo de trayectorias ajenas de w a T , afirmamos que el vértice g está en W que a su vez está en R , pues en caso contrario wg sería una trayectoria ajena distinta a las Π_i para i en $\{1, 2, \dots, l\}$ que no está en P . Por lo tanto $g \in R \cap W$, pero por el Lema 2.1 tenemos

que $R \cap W \subset R \cap (Hojas(T) \cup N^-(R)) = \emptyset$, lo que implica que $R \cap W = \emptyset$ lo que es una contradicción. Por lo tanto d y g están en W . Por el lema anterior sabemos que W es independiente, por lo tanto, $dg \in A(G) - A(T)$.

Tomemos dos vértices u y v en $N^+(R) \cup (N^+(B) - X(B))$ tal que $\phi(u) = d$ y $\phi(v) = g$. Por la condición 3 del Lema 2.1 tenemos un vértice

$$p(d, g) \text{ en } \{u^-, v^-\} \cap V(T_{dg}).$$

Probaremos que a partir de T podemos construir un nuevo árbol T' que contiene a los vértices de T y el vértice w . Para obtener este nuevo árbol T' borraremos algunas aristas de T y uniremos las componentes obtenidas de borrar las aristas de T por medio de la arista dg y algunas de las trayectorias que están en $P = \{II_1, II_2, \dots, II_l\}$.

Queremos que el nuevo árbol T' sea de la forma $(s+1, c)$ -subárbol para llegar a una contradicción, pues T es un $(s+1, c)$ -subárbol con el mayor número de vértices posibles de G . Buscaremos que al momento de quitar y agregar aristas, T' cumpla con tener c vértices de grado $s+1$ y que el grado máximo de T' sea $s+1$. Esto nos lleva a considerar los siguientes casos.

Caso 1. Si se agrega una arista a un vértice $u \in V(T)$ tal que $1 \leq \delta_T(u) < s$, no hay problema pues no se altera el grado máximo ni el número de vértices de grado $s+1$.

Caso 2. Si se agrega una arista a un vértice $u \in V(T)$ tal que $\delta_T(u) = s+1$, entonces deberemos borrar una arista que incida en u para así conservar el grado máximo igual a $s+1$.

Caso 3. Si se agrega una arista a un vértice u que es de grado s en T haremos a $u = r_1$ y que $\delta(p(d, g)) = s+1$, entonces se obtendrá un nuevo vértice de grado $s+1$, por lo que ahora tendremos $c+1$ vértices de grado $s+1$, por lo tanto deberemos quitar una arista que esté en T y que incida en un vértice de grado $s+1$, sin pérdida de generalidad quitaremos una arista que incida en el vértice $p(d, g)$ para así obtener nuevamente c vértices de grado $s+1$.

En cualquiera de los tres casos debemos tener cuidado de obtener nuevamente un árbol.

Por lo tanto, podremos concluir que T' cumplirá con las condiciones de ser $(s+1, c)$ -subárbol de G al igual que T .

Ahora bien analizaremos los casos posibles que se tienen para obtener el árbol T' a partir de T .

Consideremos las siguientes observaciones.

Observación 1. La gráfica $T + dg$ tiene un único ciclo C y además $(T + dg) - ac$ con $ac \in A(C) - dg$ es un árbol.

Demostración. Ya que T es un árbol y $\{d, g\} \subseteq V(T)$ tal que $dg \notin A(T)$, entonces por el Teorema 1.9.5 sabemos que $T + dg$ tiene un único ciclo C . Si tomamos una arista $ac \in A(C) - dg$, entonces $(T + dg) - ac$ es conexa y acíclica puesto que le estamos quitando un arista al único ciclo de $T + dg$, por lo tanto, $(T + dg) - ac$ es un árbol. \diamond

Observación 2. Para cualquier i en $\{1, 2, \dots, l\}$, la gráfica $T \cup \Pi_i$ es un árbol.

Demostración. Como T es un árbol y Π_i es una trayectoria de T a w tal que $T \cap \Pi_i = r_i$, por lo tanto, podemos concluir que $T \cup \Pi_i$ es acíclica y además por el Teorema 1.9.5 concluimos que para toda i en $\{1, 2, \dots, l\}$ $T \cup \Pi_i$ es un árbol. \diamond

Sea h un vértice en $V(T_{dg})$ adyacente a $p(d, g)$ y para cada $\eta \in N^-(R)$ sea $i(\eta)$ tal que $\eta r_{i(\eta)}$ es una flecha en \overline{T} .

Caso 1. Cuando $\{d, g\} \subseteq \text{Hojas}(T)$.

1.1) Si $p(d, g)$ en R , entonces tomemos a $p(d, g) = r_i$ para alguna i en $\{1, 2, \dots, l\}$. Definimos a $T' = ((T + dg) - r_i h) \cup \Pi_i$. Por la observación 1 y 2 sabemos que es un árbol.

Veamos que T' cumpla con ser un $(s + 1, c)$ -subárbol. Sabemos que

$$\delta_{T'}(r_i) = \delta_T(r_i) + 1 - 1 = s + 1,$$

$$\delta_{T'}(d) = \delta_T(d) + 1 = 2,$$

$$\delta_{T'}(g) = \delta_T(g) + 1 = 2 \text{ y}$$

$$\delta_T(h) < \delta_{T'}(h) < s + 1.$$

Por lo tanto, no se afecta la cantidad de vértices de grado $s + 1$. Por lo que T' es un $(s + 1, c)$ -subárbol como se muestra en la Figura 2.1.

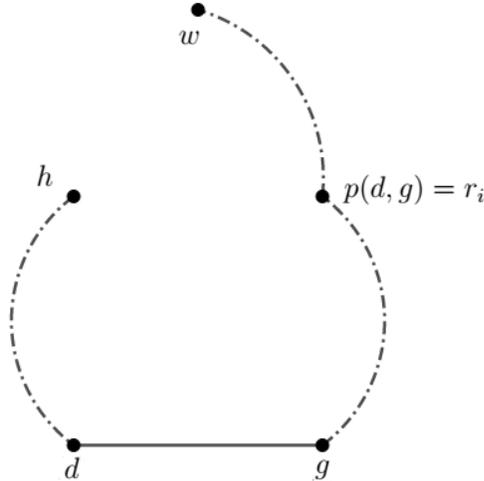


Figura 2.1: T' .

1.2) Si $p(d, g)$ en B , entonces tomemos a $p(d, g) = b_i$ para alguna i en $\{1, 2, \dots, m\}$. Definimos a

$$T' = ((T + dg) - b_i h) \cup \Pi_1.$$

Por las observaciones 1 y 2 cumple con ser un árbol.

Veamos que T' es un $(s + 1, c)$ -sub árbol. Sabemos que para b_i y r_1 se cumple que:

$$\delta_T(b_i) = s + 1 \text{ y } \delta_T(r_1) = s,$$

entonces tenemos por construcción de T' que:

$$\delta_{T'}(r_1) = \delta_T(r_1) + 1,$$

$$\delta_{T'}(b_i) = \delta_T(b_i) - 1 = s,$$

$$\delta_{T'}(d) = \delta_T(d) + 1,$$

$$\delta_{T'}(g) = \delta_T(g) + 1 \text{ y}$$

$$\delta_{T'}(h) < \delta_T(h) < s + 1.$$

Por lo tanto, tenemos c vértices de grado $s + 1$ en T' . Por lo que T' es un $(s + 1, c)$ -subárbol como se muestra en la Figura 2.2.

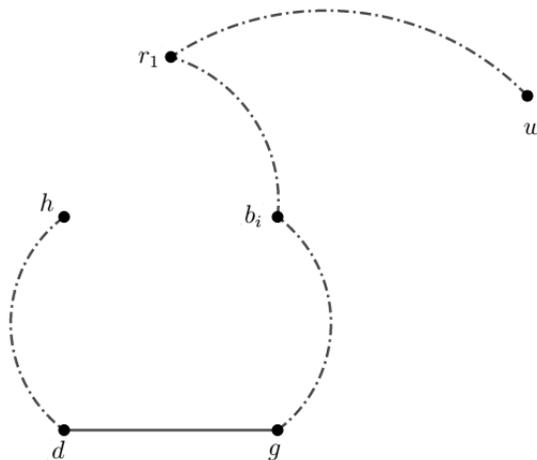


Figura 2.2: T' .

Caso 2. $d \in Hojas(T)$ y $g \in N^-(R)$.

2.1) Si $r_{i(g)}$ en $V(T_{dg})$ y $\delta_T(r_{i(g)}) = s + 1$, entonces definimos a

$$T' = ((T + dg) - gr_{i(g)}) \cup \Pi_{i(g)}.$$

Por las observaciones 1 y 2, T' cumple con ser un árbol.

Veamos que T' es un $(s + 1, c)$ -subárbol. Por construcción de T' tenemos que:

$$\delta_{T'}(r_{i(g)}) = \delta_T(r_{i(g)}) + 1 - 1, \delta_{T'}(d) = \delta_T(d) + 1 = 2 \text{ y } \delta_T(g) < \delta_{T'}(g) < s + 1.$$

Por lo tanto, T' es un $(s + 1, c)$ -subárbol pues no se altera el grado máximo $s + 1$ ni el número de vértices de grado $s + 1$ (Figura 2.3).

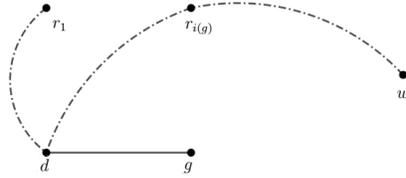


Figura 2.3: T' .

2.2) Si $r_{i(g)} \notin V(T_{dg})$, entonces tenemos que $p(d, g)$ en R o $p(d, g)$ en B .

2.2.a) Si $p(d, g)$ en R , entonces $p(d, g) = r_j$ para alguna j en $\{1, 2, \dots, l\}$. Definimos a $T' = (((T + dg) - r_j h) - gr_{i(g)}) \cup \Pi_j \cup \Pi_{i(g)}$. Por las observaciones 1 y 2 T' es un árbol.

Como $p(d, g) = r_j$ sabemos que $\delta_T(r_j) = s + 1$. Por construcción de T' tenemos que

$$\delta_{T'}(r_j) = \delta_T(r_j) + 1 - 1, \delta_{T'}(d) = \delta_T(d) + 1 = 2, \delta_T(g) < \delta_{T'}(g) < s + 1 \text{ y}$$

$$\delta_{T'}(h) < \delta_T(h) < s + 1.$$

Por lo que nuevamente tenemos c vértices de grado $s + 1$. Por lo tanto, T' es un $(s + 1, c)$ -subárbol como se muestra en la Figura 2.4.

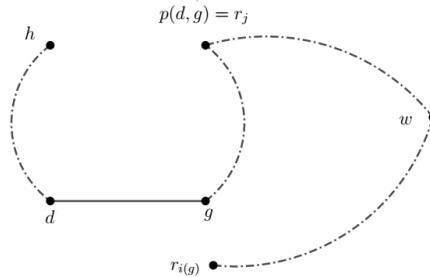


Figura 2.4: T' .

2.2.b) Si $p(d, g)$ en B , entonces tenemos que $p(d, g) = b_j$ para alguna j en $\{1, 2, \dots, m\}$. Definimos a

$$T' = (((T + dg) - b_j h) - gr_{i(g)}) \cup \Pi_1 \cup \Pi_{i(g)}.$$

Por las observaciones 1 y 2 T' es un árbol.

Veamos que T' es un $(s + 1, c)$ -subárbol. Sabemos que para $p(d, g) = b_j$ y r_1 se cumple que $\delta_T(b_j) = s + 1$ y $\delta_T(r_1) = s$. Por construcción de T' tenemos que:

$$\delta_{T'}(b_i) = \delta_T(b_j) - 1 = s,$$

$$\delta_{T'}(r_1) = \delta_T(r_1) + 1 = s + 1,$$

$$\delta_{T'}(d) = \delta_T(d) + 1,$$

$$\delta_T(g) < \delta_{T'}(g) < s + 1 \text{ y}$$

$$\delta_{T'}(h) < \delta_T(h) < s + 1.$$

Por lo que el número de vértices de grado $s + 1$ es igual a c y el grado máximo de T' es $s + 1$. Por lo tanto, T' es un $(s + 1, c)$ -subárbol como se muestra en la Figura 2.5.

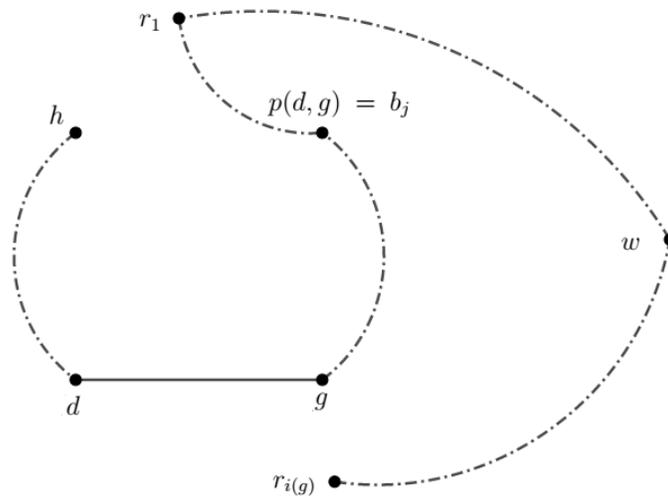


Figura 2.5: T' .

Caso 3. $d \in N^-(R)$ y $g \in Hojas(T)$, en este caso T' se construye de forma análoga al caso 2 al intercambiar a d por g y a g por d .

Caso 4. $d \in N^-(R)$ y $g \in N^-(R)$.

4.1) Si $r_{i(d)}$ y $r_{i(g)}$ están en $V(T_{dg})$, entonces definimos a

$$T' = (((T + dg) - dr_{i(d)}) - gr_{i(g)}) \cup \Pi_{i(d)} \cup \Pi_{i(g)}$$

el cual por las observaciones 1 y 2 y por la definición de las trayectorias del conjunto P es un árbol.

Veamos que T' es un $(s + 1, c)$ -subárbol. Observemos que por la construcción de T' $\delta_{T'}(d) = \delta_T(d) + 1 - 1 < s + 1$ y que $\delta_{T'}(g) = \delta_T(g) + 1 - 1 < s + 1$. Además tenemos que:

$$\delta_{T'}(r_{i(d)}) = \delta_T(r_{i(d)}) + 1 - 1,$$

$$\delta_{T'}(r_{i(g)}) = \delta_T(r_{i(g)}) + 1 - 1,$$

$$\delta_T(g) < \delta_{T'}(g) < s + 1 \text{ y}$$

$$\delta_T(d) < \delta_{T'}(d) < s + 1.$$

Por lo que tenemos c vértices de grado $s + 1$ en T' . Por lo tanto, T' es un $(s + 1, c)$ -subárbol como se muestra en la Figura 2.6.

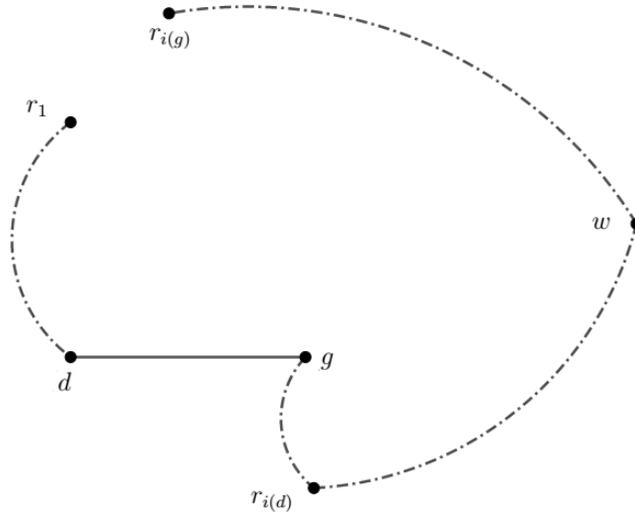


Figura 2.6: T' .

4.2) $r_{i(d)} \notin V(T_{dg})$ y $r_{i(d)} \notin V(T_{dg})$.

4.2.a) Si $p(d, g)$ en R , entonces $p(d, g) = r_q$ para alguna q en $\{1, 2, \dots, l\}$. Definimos a

$$T' = (((T + dg) - r_q h) - gr_{i(g)}) - dr_{i(d)} \cup \Pi_q \cup \Pi_{i(d)} \cup \Pi_{i(g)}.$$

Por las observaciones 1, 2 y la definición de las trayectorias en P sabemos que T' es un árbol.

Veamos que T' es un $(s + 1, c)$ -subárbol. Como $p(d, g)$ en R , entonces

$$\delta_T(r_q) = s + 1.$$

Por construcción de T' tenemos que $\delta_{T'}(r_q) = \delta_T(r_q) + 1 - 1$. También quitamos las aristas $dr_{i(d)}$ y $gr_{i(g)}$, por lo que:

$$\delta_{T'}(dr_{i(d)}) = \delta_T(dr_{i(d)}) + 1 - 1,$$

$$\delta_{T'}(gr_{i(g)}) = \delta_T(gr_{i(g)}) + 1 - 1,$$

$$\delta_{T'}(h) < \delta_T(h) < s + 1,$$

$$\delta_T(d) < \delta_{T'}(d) < s + 1 \text{ y}$$

$$\delta_T(g) < \delta_{T'}(g) < s + 1.$$

De esta manera no se altera el número de vértices de grado $s + 1$. Por lo que concluimos que T' es un $(s + 1, c)$ -subárbol como se muestra en la Figura 2.7.

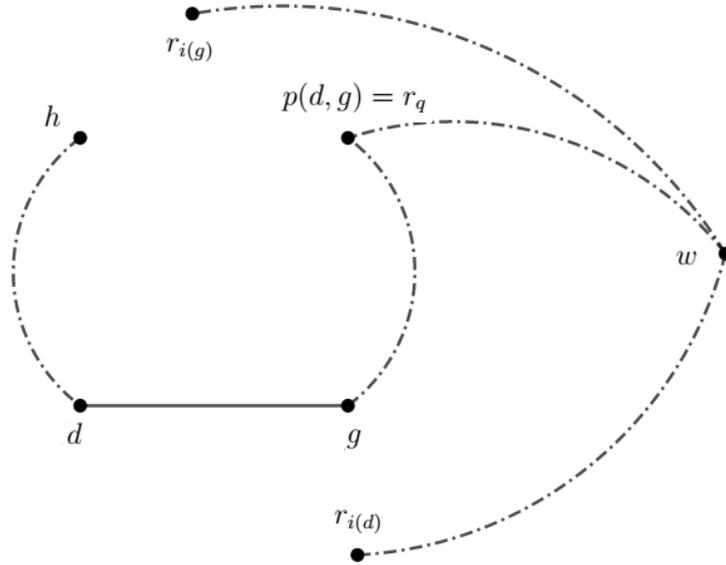


Figura 2.7: T' .

4.2.b) Si $p(d, g)$ en B , entonces tenemos que $p(d, g) = b_q$ para alguna q en $\{1, 2, \dots, m\}$. Definimos a

$$T' = (((T + dg) - b_q h) - gr_{i(g)}) - dr_{i(d)} \cup \Pi_1 \cup \Pi_{i(d)} \cup \Pi_{i(g)}.$$

Por las observaciones 1, 2 y la definición de las trayectorias del conjunto P sabemos que T' es un árbol.

Veamos que T' es un $(s + 1, c)$ -subárbol. Como $p(d, g) = b_q$ en B , b_q cumple que $\delta_T(b_q) = s + 1$ y r_1 es de grado s en T . Por construcción de T' tenemos que $\delta_{T'}(b_q) = \delta_T(b_q)$ y $\delta_{T'}(r_1) = \delta_T(r_1) + 1$, también al quitar las aristas $dr_{i(d)}$ y $gr_{i(g)}$ tenemos que:

$$\delta_{T'}(dr_{i(d)}) = \delta_T(dr_{i(d)}) + 1 - 1,$$

$$\delta_{T'}(gr_{i(g)}) = \delta_T(gr_{i(g)}) + 1 - 1,$$

$$\delta_{T'}(h) < \delta_T(h) < s + 1,$$

$$\delta_T(d) < \delta_{T'}(d) < s + 1 \text{ y}$$

$$\delta_T(g) < \delta_{T'}(g) < s + 1.$$

Por lo tanto, T' es un $(s + 1, c)$ -subárbol como se muestra en la Figura 2.8.

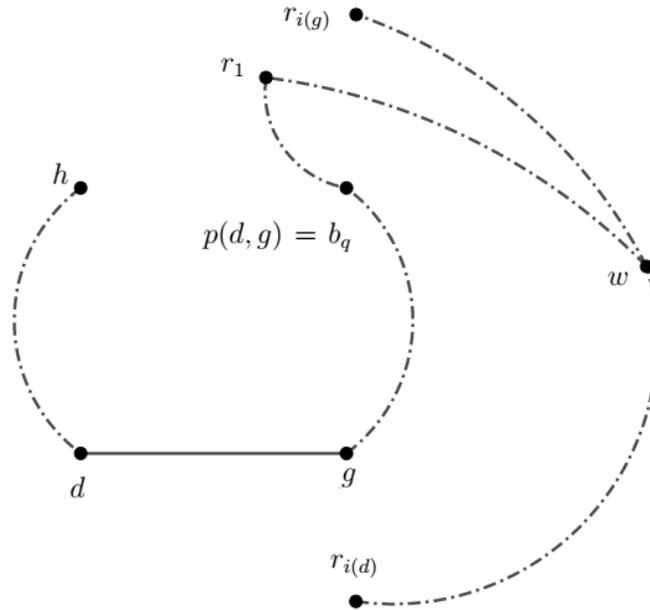


Figura 2.8: T' .

Estos casos cubren todas las combinaciones posibles y en cada uno de los casos obtenemos un T' que es un $(s + 1, c)$ -subárbol de G con más vértices que T , esto contradice la elección de T .

Por lo tanto, T es un $(s + 1, c)$ -subárbol generador. \square

Las condición del teorema anterior son justas en el sentido que para cada n , s y c con $0 < n$, $3 \leq s$ y $0 \leq c \leq n$, la gráfica completa bipartita $F = K_{n, 2+n(s-1)+c}$ es n -conexa, con número de independencia

$$\alpha(G) = 2 + n(s - 1) + c$$

y no tiene un $(s + 1, c)$ -subárbol generador. Como F es una gráfica bipartita completa el subconjunto independiente máximo es el de cardinalidad $2 + n(s - 1) + c$. Lo que nos da dos casos a analizar.

a) Si $c < n$, entonces todo árbol generador de F tiene grado máximo $s + 1$ y además contiene $c + 1$ vértices de grado $s + 1$.

b) Si $c = n$, entonces todo árbol generador de F tiene al menos un vértice de grado mayor que $s + 1$.

Teorema 2.2.2. *Sea G una gráfica n -conexa con número de independencia $\alpha(G)$. Si $\alpha(G) \leq 1 + ns$ para algún entero positivo s , entonces G tiene un árbol generador con grado máximo a lo más $s + 1$.*

Demostración. Por el teorema anterior y el resultado de Chvátal y Erdős solo es necesario hacer la demostración para cuando $s = 2$.

Sea T un árbol de G con grado máximo menor que 4; que contenga la mayor cantidad de vértices posibles de G . Siguiendo el mecanismo de la demostración del teorema anterior, supongamos que T no es un árbol generador de G , por lo que existe un vértice w en $G - T$. Sea $P = \{\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_l\}$ la colección máxima de trayectorias de w a T , tal que para toda $\{i, j\}$ en $\{1, 2, \dots, l\}$, con $i \neq j$ se tiene que $\Pi_i \cap \Pi_j = \{w\}$; para cualquier trayectoria en P se cumple que $|V(T) \cap V(\Pi_i)| = 1$. Para cada i sean r_i el único vértice de Π_i en T y $R = \{r_1, r_2, \dots, r_l\}$ el conjunto de vértices r_i . Por el teorema de Menger sabemos que $l \geq n$ y por la elección de T para toda $i = \{1, 2, \dots, l\}$ $\delta_T(r_i) = 3$.

Sea t el número de vértices en R con grado s en T . Sea $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ el conjunto de vértices en $V(T) - R$ que tienen grado $s + 1$ en T . Si aplicamos el Lema 2.1 para $B = \emptyset$ y tomamos a \vec{T} un árbol exterior dirigido con raíz r_1 . Podemos como en el teorema anterior encontrar una arista $a \in A(G) - A(T)$ con sus extremos en el conjunto $W = \phi[N^+(R)]$. Por ello tenemos nuevamente 4 casos, tal que son análogos a los casos 1, 2, 3 y 4 de la demostración del Teorema 2.2.1 donde en cada uno se encuentra un

T' con más vértices que T , tal que $\delta_{T'}(u) \leq 3$ para toda $u \in V(T')$ y $V(T) \cup \{w\}$ y $V(T) \cup \{w\} \subset V(T')$.

Lo que conduce a una contradicción. Por lo tanto, T es un $(s + 1)$ -árbol generador de G . \square

Las condiciones del Teorema 2.2.2 son justas en el sentido que para cada n y s con $0 < n$ y $3 \leq s$, la gráfica completa bipartita $F = K_{n,2+ns}$ es n -conexa, con número de independencia $\alpha(G) = 2+ns$ y no tiene un $s+1$ -subárbol generador. Como F es una gráfica bipartita completa el subconjunto independiente máximo es el de cardinalidad $2 + ns$. Por lo que todo árbol generador de F tiene al menos un vértice de grado mayor que $s + 1$.

Capítulo 3

k -árboles m -dominantes en gráficas

Después de 26 años de que Víctor Neumann Lara y Edurardo Rivera Campo presentaran el resultado visto en el capítulo 2 que permite encontrar un k -árbol generador. En 2014, Mikio Kano, Kenta Ozeki, Masao Tsugaki y Guiying Yan proponen una generalización para dicho resultado; en cual se obtiene un k -árbol m -dominante. Un k -árbol m -dominante T de G , es una subgráfica de G que es un k -árbol y que además cumple que para todo $v \in V(G)$ se tiene que $d_G(v, T) \leq m$. Este resultado es el siguiente:

Teorema 3.2.1. *Sean $k \geq 2$, $m \geq 0$, $n \geq 1$ tres números enteros positivos y G una gráfica n -conexa. Si $\alpha^{2(m+1)}(G) \leq (k-1)n + 1$, entonces G tiene un k -árbol que m -domina a G .*

Este resultado también generaliza el teorema de Broersma:

Teorema 3.0.1. [5] *Sean $m \geq 0$ y $n \geq 1$ dos números enteros positivos y G una gráfica n -conexa. Si $\alpha^{2(m+1)}(G) \leq n + 1$, entonces G tiene una trayectoria que m -domina a G .*

La demostración de este teorema la podemos encontrar en el artículo “*Existence of Δk -cycles and Δk -paths*” [5]. Observemos que si se obtiene una trayectoria que m -domina a G , podemos decir que encontramos un 2-árbol que m -domina a G .

En este capítulo se da la demostración del Teorema 3.2.1. Posteriormente proponemos un algoritmo para encontrar un k -árbol m -dominante, en una gráfica que cumpla las condiciones del Teorema 3.2.1; deducido a partir de dicha demostración. Por último se da una posible solución al problema de distribución de agua en una red pequeña, usando k -árboles m -dominantes.

Para comenzar este capítulo enunciaremos algunas definiciones necesarias junto con algunos lemas que apoyarán la demostración del teorema central de este capítulo. También debemos tener presentes los resultados vistos para árboles y gráficas n -conexas, así como las definiciones vistas para digráficas y conjuntos dominantes en el capítulo 1.

3.1. Definiciones y primeros resultados

Comenzaremos recordando algunas definiciones y notaciones necesarias para el desarrollo de este capítulo.

Sea T un árbol, denotaremos por $P_T(u, v)$ a la única trayectoria en T que conecta a los vértices u y v en T .

Definición. Sean G una gráfica, $m \geq 0$ un entero y X un subconjunto de vértices de G . Entonces el *conjunto m -dominante* de X , denotado por $Dom^m(X)$, se define como el siguiente conjunto de vértices:

$$Dom^m(X) = \{v \in V(G) : d_G(v, X) \leq m\}.$$

Si los vértices de un subconjunto o una subgráfica Y de G están incluidos en $Dom^m(X)$, entonces decimos que X m -domina a Y . Por lo tanto, una H subgráfica de G 0-domina a G si y solo si H es una gráfica generadora de G .

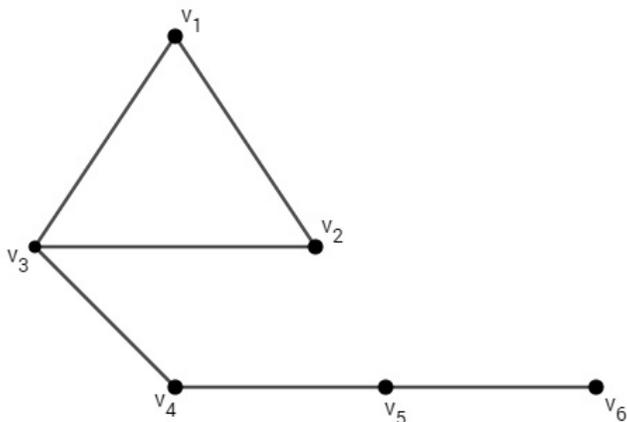
Sean \vec{T} un árbol exterior dirigido y v un vértice en \vec{T} ; decimos que u es vértice sucesor de v si (v, u) en $F(\vec{T})$, el número de sucesores de v es igual a $\delta_{\vec{T}}(v) - 1$. Denotamos al conjunto de vértices sucesores de v como $Hijos(v)$.

Sea G una gráfica. Para un entero $l \geq 2$, el *invariante $\alpha^l(G)$* de una gráfica G se define como sigue:

$$\alpha^l(G) = \text{máx}\{|S| : S \subseteq V(G), d_G(x, y) \geq l \text{ para todo } \{x, y\} \subseteq S, x \neq y\}.$$

Observemos que el número de independendia $\alpha(G)$ es igual a $\alpha^2(G)$.

Veamos un ejemplo para $l = 3$.

Figura 3.1: Gráfica G con $\alpha^3(G)$.

Veamos los casos posibles para calcular $\alpha^3(G)$. Sea $S \subseteq V(G)$ tal que cumple que $d_G(x, y) \geq 3$ para todo $\{x, y\} \subseteq S$ con $x \neq y$ y $|S| = \alpha^3(G)$.

Caso 1. Si el vértice v_1 está en S , entonces $d_G(v_1, v_i) \leq 2$ para i en $\{2, 3, 4\}$, por lo que los vértices v_2 , v_3 y v_4 no pueden estar en S . Además, si v_5 está en S , entonces v_6 no está en S . Es análogo si v_6 está en S por ser adyacente a v_5 .

Caso 2. Si v_2 está en S , entonces $d_G(v_2, v_i) \leq 2$ para i en $\{1, 3, 4\}$, por lo que los vértices v_1 , v_3 y v_4 no pueden estar en S . Además, si v_5 está en S , entonces v_6 no está en S . Es análogo si v_6 está en S por ser adyacente a v_5 .

Caso 3. Si v_3 está en S , entonces $d_G(v_3, v_i) \leq 2$ para i en $\{1, 2, 4\}$, por lo que los vértices v_1 , v_2 y v_4 no pueden estar en S . Además, v_6 está en S ya que es el único vértice que cumple que $d_G(v_3, v_6) \geq 3$.

Caso 4. Si v_4 está en S , entonces v_4 es el único vértice que puede estar en S , pues la $d_G(v_4, v_i) \leq 2$ para i en $\{1, 2, 3, 5, 6\}$.

Caso 5. Si v_5 está en S , entonces $d_G(v_5, v_i) \leq 2$ para i en $\{3, 4, 6\}$, por lo que los vértices v_3 , v_4 y v_6 no pueden estar en S . Además, si v_1 está en S , entonces v_2 no está en S . Es análogo si v_2 está en S por ser adyacente a v_1 .

Caso 6. Si v_6 está en S , entonces $d_G(v_6, v_i) \leq 2$ para i en $\{4, 5\}$, por lo que los vértices v_4 y v_5 no pueden estar en S . Además, si v_1 está en S , entonces v_2 y v_3 no están en S . Es análogo si v_2 o v_3 está en S por estar en el ciclo $C_3 = (v_1, v_2, v_3)$.

En los seis casos obtuvimos que $|S| = 2$, por lo tanto, $\alpha^3(G) = 2$.

Ahora, veamos una serie de lemas que serán necesarios para la demostración del teorema central de este capítulo.

Lema 3.1. Sean $m \geq 1$ un entero, G una gráfica conexa, H un subconjunto de vértices de G , y_1 y y_2 dos vértices distintos de $\text{Domi}^m(H) - H$. Supongamos que existen dos conjuntos de vértices ajenos $S(y_1)$ y $S(y_2)$ de $\langle H \rangle_G$ tal que:

1. Para i en $\{1, 2\}$ se cumple que $d_G(y_i, S(y_i)) = m$ y $d_G(y_i, \langle H \rangle_G - S(y_i)) \geq m + 1$,
2. No existe una $(S(y_1), S(y_2))$ -trayectoria en G tal que sus vértices internos están contenidos en $G - H$, en particular no hay aristas entre $S(y_1)$ y $S(y_2)$, entonces $d_G(y_1, y_2) \geq 2(m + 1)$.

Demostración. Haremos la demostración por contradicción.

Supongamos que $d_G(y_1, y_2) \leq 2m + 1$. Sean P la (y_1, y_2) -trayectoria más corta en G que une a y_1 con y_2 y P'_i la $(y_i, S(y_i))$ -trayectoria más corta en G que une al conjunto $S(y_i)$ con el vértice y_i para i en $\{1, 2\}$. Afirmamos que los vértices interiores de P'_i están contenidos en $G - H$, ya que si esto no pasa tendríamos un vértice $v \in V(\langle H \rangle_G) - S(y_i)$ y por (1), tenemos que $d_G(y_i, \langle H \rangle_G - S(y_i)) \geq m + 1$, lo que contradice que $d_G(y_i, S(y_i)) = m$.

Afirmamos que la (y_1, y_2) -trayectoria pasa por $\langle H \rangle_G$. Supongamos por contradicción que la (y_1, y_2) -trayectoria no pasa por $\langle H \rangle_G$, entonces el camino

$$(S(y_1), P'_1, y_1) \cup (y_1, P, y_2) \cup (y_2, P'_2, S(y_2))$$

contiene a una $(S(y_1), S(y_2))$ -trayectoria, la cual sus vértices internos están contenidos en $G - H$, lo que contradice (2), por lo tanto, P pasa por $\langle H \rangle_G$.

Sean z_1 y z_2 dos vértices en la trayectoria P tal que z_1 es el primer vértice y z_2 el último vértice que están en $\langle H \rangle_G$ y que pertenecen a P , entonces por (1), sabemos que para i en $\{1, 2\}$ se tiene que $d_G(z_i, y_i) \geq m$, por lo que debemos considerar los siguientes casos.

Caso a) $z_1 \neq z_2$. Tenemos que $d_G(y_1, y_2) = d_G(y_1, z_1) + d_G(z_1, z_2) + d_G(z_2, y_2)$, sabemos que $d_G(y_i, z_i) \geq m$ y $d_G(z_1, z_2) \geq 1$, por lo que tenemos que $d_G(y_1, z_1) + d_G(z_1, z_2) + d_G(z_2, y_2) \geq 2m + d_G(z_1, z_2) \geq 2m + 1$, por lo que $d_G(y_1, y_2) \geq 2m + 1$ pero tenemos que $d_G(y_1, y_2) \leq 2m + 1$, por lo tanto, $d_G(y_1, y_2) = 2m + 1$. Esto implica que $d_G(z_1, z_2) = 1$, $d_G(y_1, z_1) = m$ y

$d_G(y_2, z_2) = m$, por lo que por (1) z_1 en $S(y_1)$ y z_2 en $S(y_2)$ con z_1 y z_2 adyacentes en G , lo que contradice la hipótesis (2).

Caso b) Supongamos que $z_1 = z_2$. Tenemos dos subcasos.

Caso b.1) Si z_1 en $S(y_1)$ entonces tenemos el siguiente camino $(z_1, P'_1, y_2) \cup (y_2, P'_2, S(y_2))$ que contiene una $(S(y_1), S(y_2))$ -trayectoria cuyos vértices interiores están en $G - H$, lo que contradice (2).

Caso b.2) Si $z_2 \notin S(y_1)$, entonces $z_1 \in V(\langle H \rangle_G) - S(y_1)$ y por (1) tenemos que $d_G(y_1, z_1) \geq m + 1$. Debido a esto sabemos que $z_2 \notin S(y_2)$, entonces $z_1 \in V(\langle H \rangle_G) - S(y_2)$ y por (1) $d_G(y_1, z_1) \geq m + 1$. Si z_2 estuviera en $S(y_2)$ sería análogo al caso (b.1), por lo tanto, $z_1 = z_2 \notin S(y_1) \cup S(y_2)$, por (1) sabemos que $d_G(y_1, z_1) \geq m + 1$ y $d_G(y_2, z_2) \geq m + 1$. Por lo tanto, tenemos que

$$d_G(y_1, y_2) = d_G(y_1, z_1) + d_G(z_2, y_2) \geq 2(m + 1),$$

lo que nuevamente es una contradicción. \square

Lema 3.2. Sean $m \geq 1$ un entero positivo, G una gráfica conexa, H una subgráfica de G , $y \in \text{Domi}^m(H) - V(H)$ y $w \in V(G) - \text{Domi}^m(H)$ dos vértices. Si existe un conjunto de vértices $S(y) \subseteq V(H)$ tal que

1. $d_G(y, S(y)) = m$ y $d_G(y, \langle H \rangle_G - S(y)) \geq m + 1$; y

2. no existe una $(w, S(y))$ -trayectoria cuyos vértices internos estén contenidos en $G - H$,

entonces $d_G(w, y) \geq 2(m + 1)$.

Demostración. Sea P la (w, y) -trayectoria más corta que une a w con y en G . Por (1), existe una trayectoria P' de longitud m con vértice inicial y y vértice final $y_y \in S(y)$. Además, los vértices internos de P' están contenidos en $G - H$, ya que si tuviera un vértice x en $\langle H \rangle_G - S(y)$ se tiene que $d_G(y, x) \leq m$, lo cual contradice que $d_G(y, \langle H \rangle_G - S(y)) \geq m + 1$. Por lo tanto, los vértices interiores están contenidos en $G - H$.

Afirmamos que la (w, y) -trayectoria pasa por $\langle H \rangle_G$. Supongamos por contradicción que la (w, y) -trayectoria no pasa por $\langle H \rangle_G$, entonces el camino $(w, P, y) \cup (y, P', y_y)$ contiene una $(w, S(y))$ -trayectoria cuyos vértices internos están contenidos en $G - H$, lo que contradice (2). Por lo tanto, P pasa por $\langle H \rangle_G$.

Sean z_1 y z_2 dos vértices en la (w, y) -trayectoria tal que z_1 es el primer vértice de la trayectoria que está en H y z_2 el último vértice de la trayectoria que está en H . Observemos que z_1 está en $\langle H \rangle_G - S(y)$, pues es el primer vértice de la (w, y) -trayectoria que está en H y por (2) sabemos que no existe una $(w, S(y))$ -trayectoria cuyos vértices internos estén en $G - H$.

Entonces tenemos dos casos.

Caso a) $z_1 \neq z_2$. Tenemos que $d_G(w, y) = d_G(w, z_1) + d_G(z_1, z_2) + d_G(z_2, y)$. Como observamos que z_1 en $\langle H \rangle_G - S(y)$, por (1) tenemos que $d_G(w, z_1) \geq m + 1$. Además, como $z_1 \neq z_2$, $d_G(z_1, z_2) \geq 1$ y por (1) tenemos que $d_G(z_2, y) \geq m$. Por lo tanto, $d_G(w, y) \geq 2(m + 1)$.

Caso b) $z_1 = z_2$. Tenemos que $d_G(w, y) = d_G(w, z_1) + d_G(z_1, y)$. Como observamos que z_1 en $\langle H \rangle_G - S(y)$ tenemos que $z_1 = z_2$ en $\langle H \rangle_G - S(y)$. Por (1), $d_G(w, z_1) \geq m + 1$ y $d_G(z_1, y) \geq m + 1$. Por lo tanto, $d_G(w, y) \geq 2(m + 1)$. \square

3.2. k -árboles m -dominantes en gráficas

A continuación, haremos la demostración del teorema para los k -árboles m -dominantes en gráficas n -conexas.

Veremos en la primera parte de dicha demostración que efectivamente el siguiente teorema es una generalización para el teorema de Broersma 3.0.1 y el teorema de árboles generadores con grados acotados propuesto por V. Neumann y E. Rivera 2.2.1.

Teorema 3.2.1. [12] Sean $k \geq 2$, $n \geq 1$, $m \geq 0$ tres enteros positivos y G una gráfica n -conexa. Si $\alpha^{2(m+1)}(G) \leq (k - 1)n + 1$, entonces G tiene un k -árbol que m -domina a G .

Demostración. Observemos que la condición del Teorema 3.2.1 es

$$\alpha^{2(m+1)}(G) \leq (k - 1)n + 1.$$

Si $m = 0$, entonces $\alpha^2(G) \leq (k - 1)n + 1$, como sabemos que $\alpha^2(G)$ es igual al número de independencia tenemos la condición del Teorema 2.2.1 propuesto por V. Neumann y E. Rivera. Como vimos anteriormente se encuentra un $s + 1$ -árbol generador de G , que 0-domina a G .

Si $k = 2$, entonces

$$\alpha^{2(m+1)}(G) \leq n + 1,$$

esta condición es la que se tiene en el Teorema 3.0.1 propuesto por Broersma; en el que se encuentra una trayectoria m -dominante en G ; la cual es un 2-árbol que m -domina a G .

Por lo tanto, supongamos que $m \geq 1$ y $k \geq 3$.

Sea G una gráfica n -conexa que satisface la condición del Teorema 3.2.1.

Demostraremos por contradicción, supongamos que G no tiene un k -árbol que m -domine a G .

Como G es n -conexa, por la Observación 1.1 tenemos que $n \leq \mathcal{K}(G) \leq \delta(G)$, por lo que el grado mínimo en G es al menos n ; por esto y por la Proposición 1.1 sabemos que en G tenemos una trayectoria de longitud al menos $n - 1$. La cual es un 2-árbol.

Sea T' un k -árbol de G , que no m -domina a G , por lo anterior $|V(T')| \geq n$.

Como T' no m -domina a G , existe un vértice w en $G - \text{Dom}^m(T')$. Ahora como G es n -conexa por el Teorema 1.11.2 sabemos que existen en G al menos n (w, T') -trayectorias distintas, a las cuales denotaremos de la siguiente forma Q_1, Q_2, \dots, Q_n tal

que para i en $\{1, 2, \dots, n\}$ cada Q_i conecta a w con v_i un vértice de T' , para toda $i \neq j$ se tiene que $Q_i \cap Q_j = \{w\}$ y para toda i se cumple que $Q_i \cap T' = \{v_i\}$, denotemos por $V^* = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ al conjunto de vértices v_i en T' .

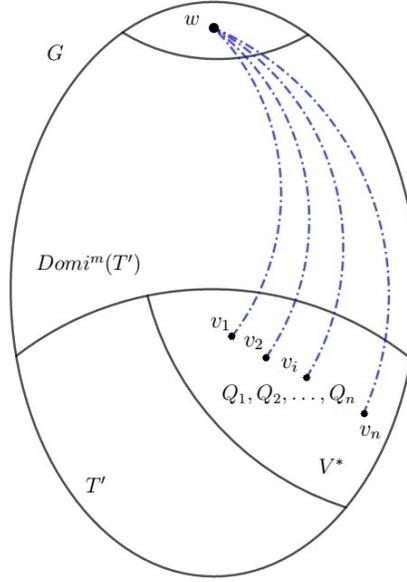


Figura 3.2: Visualización de las (w, V^*) -trayectorias en G

Sean D_1, D_2, \dots, D_l las componentes conexas obtenidas de la gráfica $T' - V^*$ y $\mathfrak{D} = \{D_1, D_2, \dots, D_l\}$.

Definimos a $\vartheta_{T'}(D_i) = \{v \in V^* : v \in N_{T'}(D_i)\}$ para cada D_i en \mathfrak{D} . Por ello $\vartheta_{T'}(D_i)$ consiste de vértices de V^* que son adyacentes a D_i en T' .

Sean

$\mathfrak{D}_1^{T'} = \mathfrak{D}_1 = \{D \in \mathfrak{D} : |\vartheta_{T'}(D)| = 1\}$, $\mathfrak{D}_2^{T'} = \mathfrak{D}_2 = \{D \in \mathfrak{D} : |\vartheta_{T'}(D)| = 2\}$ y $\mathfrak{D}_{\geq 3}^{T'} = \mathfrak{D}_{\geq 3} = \{D \in \mathfrak{D} : |\vartheta_{T'}(D)| \geq 3\}$.

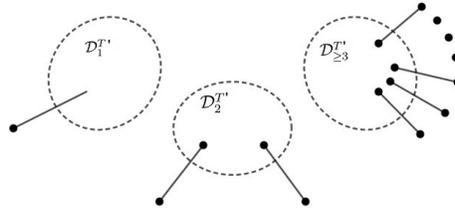


Figura 3.3: $\mathfrak{D}_1^{T'}$, $\mathfrak{D}_2^{T'}$ y $\mathfrak{D}_{\geq 3}^{T'}$

Como no existe confusión abreviamos la notación \mathfrak{D}_*^T como \mathfrak{D}_* .

De todos los k -árboles posibles que no m -dominan a G tomemos a T un k -árbol, $w \notin \text{Domi}^m(T)$ un vértice y n (w, T) -trayectorias Q_1, Q_2, \dots, Q_n tal que:

- (a) $|\text{Domi}^m(T)|$ sea máximo,
- (b) $|\mathfrak{D}_1^T \cup \mathfrak{D}_{\geq 3}^T|$ sea mínimo, sujeto a (a),
- (c) $|\text{Hojas}(\overline{T})|$ sea mínimo, sujeto a (b), y
- (d) $|V(T)|$ sea tan pequeño como sea posible, sujeto a (c).

Por la elección de T por (a), podemos obtener la siguiente afirmación.

Afirmación 3.2.1. $\delta_T(v) = k$ para todo $v \in V^*$.

Demostración. Supongamos por contradicción que $\delta_T(v) \leq k - 1$ para algún vértice $v \in V^*$.

Tomemos a Q la trayectoria más corta que une a w con T , dicha trayectoria existe por la n -conexidad de G . Como $v \in V^*$ tenemos que la trayectoria Q cumple lo siguiente $Q \cap T = \{v\}$, por ello la gráfica $T + Q$ es un árbol, como $\delta_{T+Q}(v) \leq k$ y el grado máximo en $T + Q$ es a lo más k , entonces $T + Q$ es un k -árbol (observemos la Figura 3.4). Entonces $\text{Domi}^m(T) \cup \{w\} \subseteq \text{Domi}^m(T + Q)$ lo que contradice a (a), pues $|\text{Domi}^m(T)|$ es máximo.

Por lo tanto, $\delta_T(v) = k$ para todo $v \in V^*$. \diamond

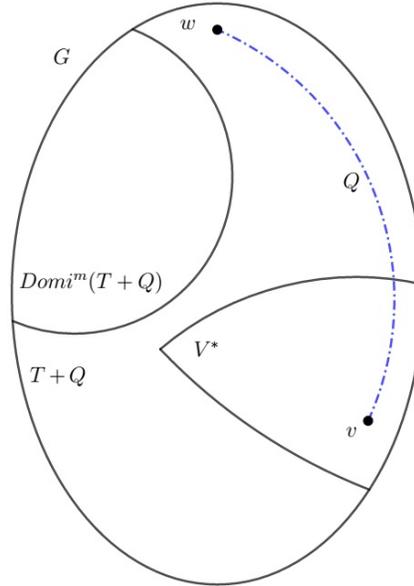


Figura 3.4: $T + Q$

Afirmación 3.2.2. (i) Todo par de vértices en V^* son no adyacentes en T .

(ii) $|\mathfrak{D}| = (k - 1)n + 1$ y $|\mathfrak{D}_1^T| = (k - 2)n + \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_{\geq 3}^T} (|\vartheta_T(\mathfrak{D})| - 2) + 2$.

Demostración. (i) Supongamos por contradicción que dos vértices v_a y v_b de V^* son adyacentes en T . Observemos que las trayectorias Q_a y Q_b que conectan a w con v_a y v_b respectivamente, forman un ciclo $Q_a \cup Q_b \cup v_a v_b$. Por lo que en la gráfica $T' = T + Q_a + Q_b - v_a v_b$ tenemos un único ciclo y se aumenta en uno el grado de los vértices v_a y v_b , por el Teorema 1.9.5 al quitar la arista $v_a v_b$ se rompe el ciclo único de T' y se reduce el grado en uno en ambos vértices. Por lo tanto, T' es una gráfica acíclica, conexa y de grado máximo k , por lo que T' es un k -árbol de G que satisface $\text{Dom}^m(T) \cup \{w\} \subseteq \text{Dom}^m(T')$ lo que es contradice a (a). Por lo tanto, se cumple (i).

(ii) Por (i) sabemos que V^* es un conjunto independiente de T , del Lema 1.5 (ii) se tienen que:

$$c(T - V^*) = \sum_{v \in V^*} (\delta_T(v) - 1) + 1$$

y de la Afirmación 3.2.1 tenemos que para todo $v \in V^*$ $\delta_T(v) = k$, entonces $c(T - V^*) = |\mathfrak{D}| = (k - 1)n + 1$.

Por otro lado, si contraemos cada una de las componentes de \mathfrak{D} a un único vértice y lo hacemos adyacente con V^* se obtiene un árbol de componentes conexas $T_{\mathfrak{D}}$ a partir de T . Entonces $V(T_{\mathfrak{D}}) = V^* \cup \mathfrak{D}_1^T \cup \mathfrak{D}_2^T \cup \mathfrak{D}_{\geq 3}^T$, donde cada componente de \mathfrak{D}_1^T ; por definición, corresponde a una hoja de $T_{\mathfrak{D}}$.

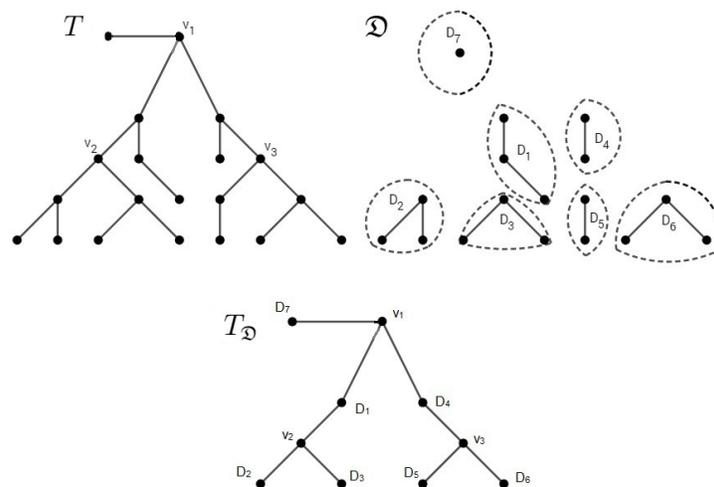


Figura 3.5: Ejemplo de un árbol T , componentes conexas \mathfrak{D} y el árbol de componentes conexas $T_{\mathfrak{D}}$

Por el Lema 1.5 el número de hojas de $T_{\mathfrak{D}}$ es:

$$|\text{Hojas}(T_{\mathfrak{D}})| = \sum_{v \in W} (\delta_T(v) - 2) + 2, \quad W = \{v \in V(T) : \delta_T(v) \geq 3\}.$$

Por la Afirmación 3.2.1 sabemos que para todo v vértice en V^* $\delta_T(v) = k$, como $k \geq 3$ y $\mathfrak{D}_{\geq 3}^T$; tenemos que:

$$\begin{aligned} |\mathfrak{D}_1^T| &= \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_{\geq 3}^T} (\delta_T(\mathfrak{D}) - 2) + 2 \\ &= (k - 2)n + \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_{\geq 3}^T} (\delta_T(\mathfrak{D}) - 2) + 2 \\ &= (k - 2)n + \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_{\geq 3}^T} (|\vartheta_T(\mathfrak{D})| - 2) + 2. \diamond \end{aligned}$$

Afirmación 3.2.3. *Para todo vértice x de grado 1 en T , existe un vértice y_x en $\text{Dom}^m(T)$ tal que $d_G(y_x, x) = m$ y $d_G(y_x, T - x) \geq m + 1$.*

Demostración. Sean x una hoja de T y $W = \{y \in V(G) : d_G(y, x) = m\}$.

Supongamos por contradicción que $W = \emptyset$ o $d_G(y, T - x) \leq m$ para toda $y \in W$. Si $W = \emptyset$, entonces no existe algún vértice y_x en $\text{Dom}^m(T)$, por lo que se cumple que $\text{Dom}^m(T) = \text{Dom}^m(T - x)$.

Como x es una hoja de T , $x \notin V^*$. Por demostrar que $\langle \{x\} \rangle$ no es una componente conexa en \mathfrak{D} . Supongamos por contradicción que si es una componente conexa de \mathfrak{D} . Sean v_i el vértice en V^* tal que x es adyacente a v_i y Q_i la (w, v_i) -trayectoria, entonces $T' = (T - x) + Q_i$ es un k -árbol en G pues se tiene que $\delta_{T'}(v_i) = \delta_T(v_i) + 1 - 1$, como se muestra en la Figura 3.6, con $\text{Dom}^m(T) \cup \{x\} \subseteq \text{Dom}^m(T')$, esto contradice a (a), por lo que $\langle \{x\} \rangle$ no es una componente conexa en \mathfrak{D} .

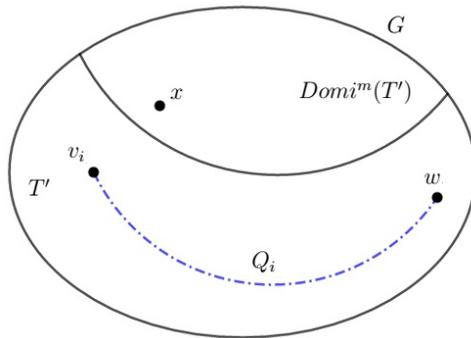


Figura 3.6: $T' = T - x + Q_i$

Supongamos que $x \in \mathfrak{D}_l$ con $1 \leq l \leq n$. Entonces por el Teorema 1.9.3 sabemos que $T - x$ es un k -árbol, como en G no tenemos un k -árbol que m -domine a G , entonces tenemos un vértice $w \notin \text{Dom}^m(T - x)$. Tomemos a Q_1, Q_2, \dots, Q_n las $(w, T - x)$ -trayectorias y $\{\mathfrak{D}_l - \{x\}\} \cup \{\mathfrak{D}_i : 1 \leq i \leq n, i \neq l\}$ el conjunto de las componentes de $(T - x) - V^*$. Por lo tanto, $|\mathfrak{D}_1^T \cup \mathfrak{D}_{\geq 3}^T| = |\mathfrak{D}_1^{T-x} \cup \mathfrak{D}_{\geq 3}^{T-x}|$, $|\text{Hojas}(T)| > |\text{Hojas}(T - x)|$ y $|V(T)| > |V(T) - \{x\}|$, lo que contradice (c) y (d). Por lo tanto, existe un y_x en W tal que $d_G(y_x, T - x) \geq m + 1$. \diamond

De la Afirmación 3.2.3, se obtiene la siguiente afirmación.

Afirmación 3.2.4. *Para todo par de hojas distintas x_1 y x_2 de T se tiene que $y_{x_1} \neq y_{x_2}$.*

Demostración. Supongamos por contradicción que $y_{x_1} = y_{x_2}$ con $x_1 \neq x_2$.

Por la Afirmación 3.2.3 tenemos que $d_G(y_{x_1}, x_1) = m$ y $d_G(y_{x_2}, x_2) = m$. Además $d_G(y_{x_1}, x_1) \geq m + 1$, como $x_2 \in V(T) - x_1$, $d_G(y_{x_1} = y_{x_2}, x_2) \geq m + 1$, lo que es una contradicción pues $d_G(y_{x_2}, x_2) = m$.

Por lo tanto, $y_{x_1} \neq y_{x_2}$ (observemos la Figura 3.7). \diamond

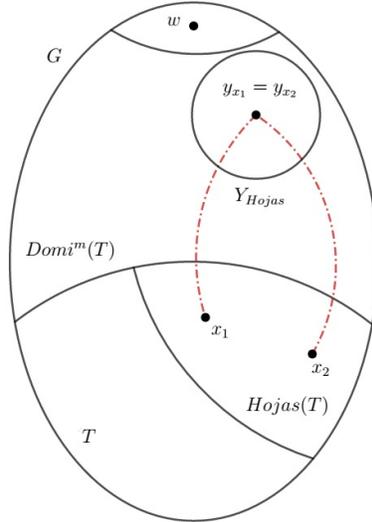


Figura 3.7: $d_G(y_{x_1}, x_1) = m$ y $d_G(y_{x_2}, x_2) = m$

Sea $Y_{\text{Hojas}} = \{y_x : x \in \text{Hojas}(T)\}$, para cada $y \in Y_{\text{Hojas}}$ definimos a $S(y)$ como $S(y) = \{x \in \text{Hojas}(T) : y_x = y\}$; el cual por la afirmación anterior consiste de un vértice $x \in \text{Hojas}(T)$.

Por la elección de T y la condición (a) obtenemos la siguiente afirmación.

Afirmación 3.2.5. *Para todo vértice $y \in Y_{\text{Hojas}}$ no existe P una $(w, S(y))$ -trayectoria en G , tal que los vértices internos de P estén contenidos en $G - T$.*

Demostración. Supongamos por contradicción que existe P una $(w, S(y))$ -trayectoria cuyos vértices interiores estén contenidos en $G - T$. Sabemos que como $w \in V(G) - \text{Dom}^m(T)$, entonces podemos obtener a $T' = T + P$. Por demostrar que T' es un k -árbol. Como $P \cap T = \{x\}$, pues los vértices interiores de P están contenidos en $G - T$, $\delta_{T'}(x) = 2$ y el grado de los vértices en P es menor o igual que 2, entonces T' es un k -árbol. Además T' cumple que $|\text{Dom}^m(T)| < |\text{Dom}^m(T')|$, lo que es una contradicción a (a).

Por lo tanto, los vértices internos de la $(w, S(y))$ -trayectoria no pueden estar contenidos en $G - T$. \diamond

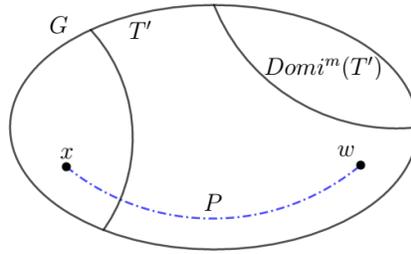


Figura 3.8: $T' = T + P$

Afirmación 3.2.6. *Para todo par de vértices distintos y_1 y y_2 en $Y_{\text{Hojas}} \cup \{w\}$ se cumple que $d_G(y_1, y_2) \geq 2(m + 1)$.*

Demostración. Como y_1 y y_2 están en $Y_{\text{Hojas}} \cup \{w\}$ tenemos dos casos:

Caso 1) Si $y_1 = w$, entonces por la Afirmación 3.2.5 sabemos que no existe una $(w, S(y))$ -trayectoria cuyos vértices interiores estén contenidos en $G - T$ y de la Afirmación 3.2.3 sabemos que $d_G(w, T - S(y)) \geq m + 1$, por ello se tienen las condiciones del Lema 3.2, por lo tanto, $d_G(y_1 = w, y_2) \geq 2(m + 1)$.

Caso 2) Si y_1 y y_2 son dos vértices en Y_{Hojas} , entonces veremos que se cumplen las condiciones (i) y (ii) del Lema 3.2.

Primero veamos que para i en $\{1, 2\}$. Sea $S(y_i) = \{x_i\}$, entonces por la Afirmación 3.2.3 $d_G(y_i, x_i) = m$ y $d_G(y_i, T - x_i) \geq m + 1$. Por lo que se cumple (i) del Lema 3.2.

Ahora veamos que se cumple la condición (ii) del Lema 3.2. Por demostrar que no existe en G una (x_1, x_2) -trayectoria cuyos vértices interiores estén contenidos en $G - T$. Supongamos por contradicción que existe P una (x_1, x_2) -trayectoria cuyos vértices interiores están contenidos en $G - T$.

Veamos primero que para $1 \leq i \leq n$ P no intersecta a Q_i . Supongamos por contradicción que Q_i intersecta a P . Sea u el primer vértice de P que intersecta a Q_i , entonces podemos obtener la siguiente trayectoria $(x_1, P, u) \cup (u, Q_i, w)$.

La cual es una $(w, S(y))$ -trayectoria tal que sus vértices interiores están contenidos en $G - T$, lo que es una contradicción a la Afirmación 3.2.5.

Ahora observemos que por el Teorema 1.9.5 existe en T , una única (x_1, x_2) -trayectoria, a la que llamaremos P' , lo que implica los siguientes casos $P' \cap V^* = \emptyset$ o $P' \cap V^* \neq \emptyset$.

Caso 2.1) Si $P' \cap V^* \neq \emptyset$, entonces existe al menos un v_a en $P' \cap V^*$; tal que en la gráfica $T - V^*$ se tienen que para i en $\{1, 2\}$ existen D_1, D_2 en \mathfrak{D} ; tal que x_i en D_i . Entonces $T + P$ contiene un único ciclo C que pasa por el vértice v_a de V^* . Sean e una arista de C que incide en el vértice v_a , por el Teorema 1.9.5 $T + P - e$ es conexa y acíclica.

Consideremos a la trayectoria Q_a que une a T con el vértice v_a . Tomemos a $T' = T + P + Q_a - e$, el cual por lo anterior es un árbol. Por demostrar que T' es una k -árbol. Por definición de V^* sabemos que $Q_a \cap T = \{v_a\}$, por lo que $\delta_T(v_a) = k$ y en T' se agrega la trayectoria Q_a y se quita la arista e , entonces se cumple que $\delta_{T'}(v_a) = \delta_T(v_a) = k$, por lo tanto, T' es un k -árbol como se puede ver en la Figura 3.9. Como T' es un k -árbol que $Dom^m(T) \cup \{w\} \subseteq Dom^m(T')$ se contradice la condición (a). Pues $Dom^m(G) \subset Dom^m(T')$, lo que implica que $|Dom^m(T)| < |Dom^m(T')|$.

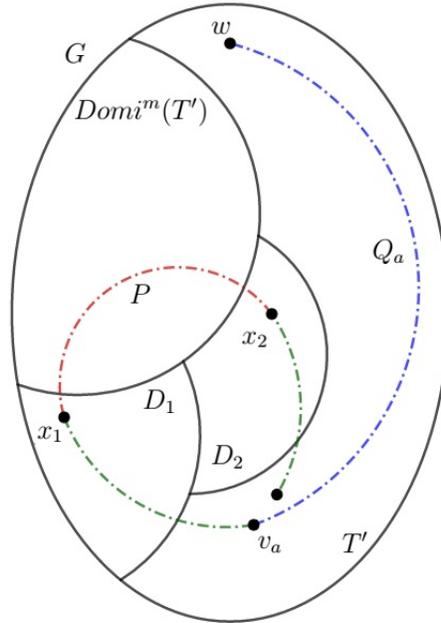


Figura 3.9: $T' = T + P + Q_a - e$

Caso 2.2) Si $P' \cap V^* = \emptyset$, entonces existe una componente conexa $D \in \mathfrak{D}$ tal que $\{x_1, x_2\} \subseteq V(D)$. Entonces la gráfica $D + P$ contiene un ciclo C formado por P y P' . Ahora construiremos a T' un k -árbol a partir de $T + P$ al borrar una arista en C que incide en un vértice de grado al menos 3 en T , dicho vértice existe pues x_1 y x_2 no son adyacentes, por lo que P' tiene al menos tres vértices. Tomemos a x un vértice en P' con $x \neq x_1$ y $x \neq x_2$, así se cumple que $\delta_T(x) \geq 3$ pues se tiene la (x, V^*) -trayectoria. Como e incide en v con $\delta_T(x) \geq 3$ y se cumple que $\delta_{T'}(x) \geq 2$, T' es un k -árbol, como se muestra en la Figura 3.10. Sea $D' = D + P - e$. Sabemos que $w \notin \text{Dom}^m(T')$, por ello se tiene que $|\text{Dom}^m(T)| \leq |\text{Dom}^m(T')|$. Si se tiene que $|\text{Dom}^m(T)| < |\text{Dom}^m(T')|$, entonces se contradice a (a). Si se tiene que $|\text{Dom}^m(T)| = |\text{Dom}^m(T')|$, entonces como las Q_1, Q_2, \dots, Q_n son (w, T') -trayectorias y que $\mathfrak{D}' = (\mathfrak{D} - \{D\}) \cup \{D'\}$ es el conjunto de componentes conexas de $T' - V^*$, se cumple que $|\mathfrak{D}| = |\mathfrak{D}'|$. Por lo tanto, tenemos que $|\mathfrak{D}_1^T \cup \mathfrak{D}_{\geq 3}^T| = |\mathfrak{D}_1^{T'} \cup \mathfrak{D}_{\geq 3}^{T'}|$ y $|\text{Hojas}(T)| > |\text{Hojas}(T')|$. Esto último contradice a (c).

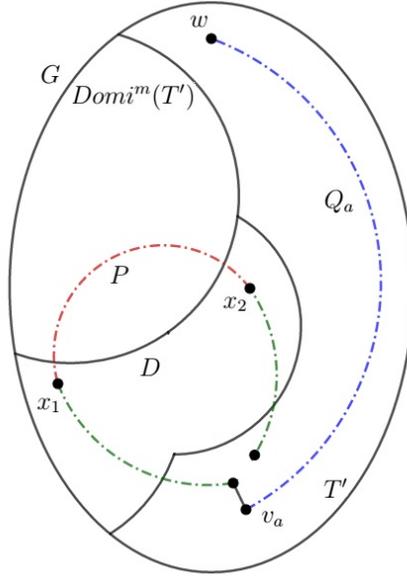


Figura 3.10: $T' = T + P + Q_a - e$

Por lo tanto, no existe en G una (x_1, x_2) -trayectoria cuyos vértices estén contenidos en $G - T$. Así tenemos que también se cumple el inciso (ii) del Lema 3.2.

Por lo tanto, por el Lema 3.2 se cumple que $d_G(y_1, y_2) \geq 2(m + 1)$. \diamond

Afirmación 3.2.7. *Existe una componente D^* en \mathfrak{D}_1 tal que para todo $x \in V(D^*)$ se cumple que $\delta_T(x) \leq k - 1$.*

Demostración. Supongamos por contradicción que para todo $x \in V(D)$ no existe $D \in \mathfrak{D}_1$ tal que $\delta_T(x) \leq k - 1$. Entonces, toda componente $D \in \mathfrak{D}_1$ tiene al menos un vértice de grado igual a k en T . Por el Corolario 1.2, D tiene al menos k hojas de T , pues existe un vértice x en D tal que $\delta_T(x) = k$, como $D \in \mathfrak{D}_1$, entonces tenemos al menos $k - 1$ hojas de T en D .

De la Afirmación 3.2.6 sabemos que para $\{y_1, y_2\} \subseteq Y_{Hojas}$ $d_G(y_1, y_2) \geq 2(m + 1)$, por lo que $\alpha^{2(m+1)}(G) \geq |Y_{Hojas}|$.

De la Afirmación 3.2.4 sabemos que para cada x_1 y x_2 hojas distintas de T se tiene que $y_1 \neq y_2$, por lo que $|Y_{Hojas}| = |Hojas(T)|$.

Ahora, como sabemos que $Hojas(T) \cap V(D) \subseteq Hojas(T)$, se tiene que

$$|Hojas(T)| \geq \sum_{D \in \mathfrak{D}_1} |Hojas(T) \cap V(D)|.$$

Como D tiene al menos $k - 1$ hojas de T tenemos que

$$\sum_{D \in \mathfrak{D}_1} |Hojas(T) \cap V(D)| \geq |\mathfrak{D}_1|(k - 1).$$

De la Afirmación 3.2.2 sabemos que $|\mathfrak{D}_1| = (k - 2)n + 2$, entonces

$$|\mathfrak{D}_1|(k - 1) \geq ((k - 2)n + 2)(k - 1)$$

$$((k - 2)n + 2)(k - 1) \geq (n + 2)(k - 1) \geq (k - 1)n + 2.$$

Por lo que, $\alpha^{2(m+1)}(G) \geq (k - 1)n + 2$.

Lo que es una contradicción a la hipótesis para $\alpha^{2(m+1)}(G)$ del Teorema 3.2.1. \diamond

De las afirmaciones anteriores, podemos suponer sin pérdida de generalidad, que $D^* = D_1$ y $\{v_1\} = \vartheta_T(D_1)$. Ahora veamos a T como un árbol con raíz en v_1 . Para cada $D \in \mathfrak{D}$, sean r_D la raíz de la componente D y $r_D^- = v_D$ en V^* el vértice antecesor de r_D , donde la raíz de D no tiene vértice antecesor en D ; es decir,

$$d_G(v_1, r_D) < d_G(v_1, x) \text{ con } x \in D \setminus \{r_D\}.$$

Como $V^* \subseteq T - D_1$ tenemos que el orden de $T - D_1$ es mayor o igual que n . Como G es n -conexa, por el Teorema 1.11.2 sabemos que existen al menos n $(D_1, T - D_1)$ -trayectorias R_1, R_2, \dots, R_n en G tal que toda trayectoria R_i conecta un vértice de D_1 con $T - D_1$, por el Teorema 1.11.2 para $i \neq j$ los vértices finales de R_i y R_j son distintos en $T - D_1$.

Observación. Los vértices interiores de cada R_i están contenidos en $G - T$.

Demostración. Supongamos por contradicción que $R_i \cap (T - D_1) \neq \emptyset$. Sabemos que como T es árbol, por el Teorema 1.9.5 existe una única trayectoria entre todo par de vértices de T . Entonces $T + R_i$ contiene un único ciclo. Sea x el primer vértice de R_i en la intersección. Si quitamos una arista adyacente a x en T obtenemos a $T' = T + R_i - xx^-$, la cual es una gráfica acíclica y conexa, como podemos observar en la Figura 3.11. Como en D_1 todos los vértices son de grado a lo más $k - 1$ al agregarle la trayectoria R_i a lo más obtendríamos un nuevo vértice de grado k en T' , por lo tanto, T' es un k -árbol que cumple que $|Dom^m(T)| = |Dom^m(T')|$. Por otro lado al unir la trayectoria R_i a D_1 tenemos que en T' D_1 en \mathfrak{D}_2 . Por lo que $|\mathfrak{D}_1^{T'} \cap \mathfrak{D}_{\geq 3}^{T'}| < |\mathfrak{D}_1^T \cap \mathfrak{D}_{\geq 3}^T|$, lo que contradice a (b). \diamond

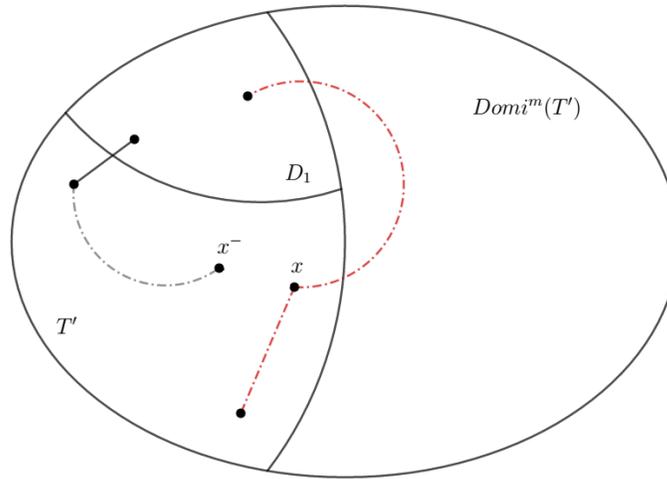


Figura 3.11: $T' = T + R_i - xx^-$

En particular, $R_i \cap R_j \subseteq V(D_1)$ y para toda i en $\{1, 2, \dots, n\}$ $|R_i \cap D_1| = 1$. Observemos que puede suceder que algún R_c consista de una arista $r_{D_1}v_1$. Para $1 \leq i \leq n$, sea U^* el conjunto de los vértices finales de R_i , los cuales están contenidos en $T - D_1$, por lo que $|U^*| = n$.

Afirmación 3.2.8. *No existe una (w, D_1) -trayectoria tal que sus vértices interiores están contenidos en $G - T$. En particular, para toda $1 \leq i$ y $j \leq n$ tenemos que $V(Q_i) \cap V(R_j) \subseteq \{v_i\}$.*

Demostración. Supongamos por contradicción que existe Q una (w, D_1) -trayectoria tal que sus vértices interiores están contenidos en $G - T$. Sea $T' = T + Q$ como se muestra

en la Figura 3.12. Como los vértices interiores de Q están en $G - T$ $|Q \cap T| = 1$ y para todo $v \in D_1$ el grado de v es a lo más $k - 1$ (Afirmación 3.2.7), entonces T' es un k -árbol que satisface que $\text{Domi}^m(T) \cup \{w\} \subseteq \text{Domi}^m(T')$, lo que es una contradicción a (a). Pues $\text{Domi}^m(G) \subset \text{Domi}^m(T')$, lo que implica que $|\text{Domi}^m(T)| < |\text{Domi}^m(T')|$.

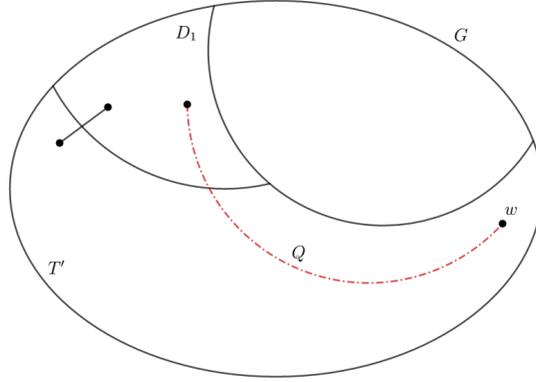
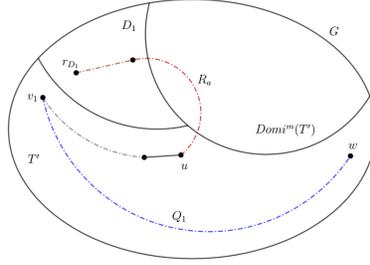


Figura 3.12: $T' = T + Q$

Observemos que para toda $1 \leq i$ y $j \leq n$ tenemos que $V(Q_i) \cap V(R_j) \subseteq \{v_i\}$. Supongamos por contradicción que $|V(Q_i) \cap V(R_j)| \geq 2$, entonces tenemos una (w, D_1) -trayectoria formada por $(v, R_j, x) \cup (x, Q_i, w)$ para $v \in D_1$ y con $x \neq v_i$ el primer vértice de R_j en la intersección con Q_i , lo que es una contradicción a la Afirmación 3.2.8, pues la (w, D_1) -trayectoria obtenida tiene vértices contenidos en $G - T$. Por lo tanto, $V(Q_i) \cap V(R_j) \subseteq \{v_i\}$. \diamond

Afirmación 3.2.9. Para todo $u \in U^*$ se cumple que $\delta_T(u) = k$.

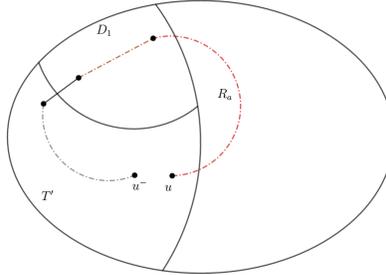
Demostración. Supongamos por contradicción que para algún $u \in U^*$ se cumple que $\delta_T(u) \leq k - 1$. Sea R_a la trayectoria que conecta a D_1 con u para $1 \leq a \leq n$. Por la afirmación 3.2.1 sabemos que para toda $v \in V^*$ $\delta_T(v) = k$, por lo que $u \neq v_1$, pues $\delta_T(u) \leq k - 1$. Tomemos a $T' = (T + Q_1 + R_a) - v_1 r_{D_1}$. Por demostrar que T' es un k -árbol. Por la Afirmación 3.2.7 sabemos que todo vértice en D_1 es de grado a lo más $k - 1$, por lo que al agregar la trayectoria R_a se tiene a lo más un nuevo vértice de grado a lo más k . Ahora, por la Afirmación 3.2.1 sabemos que $\delta_T(v_1) = k$, por lo que al agrega la trayectoria Q_1 tenemos que el grado de v_1 es $k + 1$, pero también estamos quitando la arista $v_1 r_{D_1}$, por lo tanto, tenemos que $\delta_{T'}(v_1) = k$. Por la construcción de R_a y por la Afirmación 3.2.8 sabemos que $R_a \cap Q_1 \subseteq \{v_i\}$ y que no existe una (w, D_1) -trayectoria que tenga vértices interiores en $G - T$; T' es conexa y acíclica, como podemos observar en la Figura 3.13.

Figura 3.13: $T' = (T + Q_1 + R_a) - v_1 r_{D_1}$

Por lo tanto, T' es un k -árbol tal que $\text{Domi}^m(T) \cup \{w\} \subseteq \text{Domi}^m(T')$, esto contradice a (a). \diamond

Afirmación 3.2.10. Para toda $D \in \mathfrak{D}_{\geq 3} = \mathfrak{D}_{\geq 3}^T$, se tiene que $U^* \cap \vartheta_T(D) \subseteq \{v_D\}$.

Demostración. Supongamos por contradicción que para alguna $D \in \mathfrak{D}_{\geq 3}$ existe un vértice $u \in U^* \cap (\vartheta_T(D) - \{v_D\})$. Sea R_a la trayectoria que conecta a D_1 con u para $1 \leq a \leq n$. Sea $T' = (T + R_a) - uu^-$ una nueva gráfica y consideremos a la componente $D'_1 = D_1 + (R_a - \{u\})$. Por el Teorema 1.9.5 T' es conexa y acíclica y por la Afirmación 3.2.7 para $x \in D_1$ $\delta_T(x) \leq k - 1$, entonces para $x \in D'_1$ se cumple que $\delta_{T'}(x) \leq k$, por lo tanto T' es un k -árbol como se muestra en la Figura 3.14.

Figura 3.14: $T' = (T + R_a) - uu^-$

Por la elección de T , por (a), $w \notin \text{Domi}^m(T')$. Sabemos por la Afirmación 3.2.8 que las (w, T') -trayectorias Q_1, Q_2, \dots, Q_n cumplen que $R_a \cap Q_i \subseteq \{v_i\}$ para i en $\{1, 2, \dots, n\}$ y D'_1, D_2, \dots, D_l son componentes conexas de $T' - V^*$. Por lo tanto, tenemos que $|\text{Domi}^m(T)| \leq |\text{Domi}^m(T')|$. Si se tiene que $|\text{Domi}^m(T)| < |\text{Domi}^m(T')|$, entonces se contradice (a). Si se cumple que $|\text{Domi}^m(T)| = |\text{Domi}^m(T')|$ y como se tiene que, $|\vartheta_{T'}(D'_1)| = |\vartheta_T(D_1)| + 1 = 2$, $|\vartheta_{T'}(D)| = |\vartheta_T(D)| - 1 \geq 2$ y $|\vartheta_{T'}(D_i)| = |\vartheta_T(D_i)|$ para todo D_i en $\mathfrak{D} - \{D_1, D\}$,

entonces $|\mathfrak{D}_1^T \cup \mathfrak{D}_{\geq 3}^T| < |\mathfrak{D}_1^{T'} \cup \mathfrak{D}_{\geq 3}^{T'}|$, lo que es una contradicción a (b). \diamond

Afirmación 3.2.11. $|V^* \cup U^*| \geq |V^*| + \sum_{D \in \mathfrak{D}_{\geq 3}} (\vartheta_T(D) - 1)$.

Demostración. Primero debemos construir un nuevo árbol a partir de T al que llamaremos T^* . Quitemos de T todas las componentes de \mathfrak{D}_1 , como $\vartheta_T(D) = 1$ para $D \in \mathfrak{D}_1$ tenemos que $T' = T - \mathfrak{D}_1$ es conexa y acíclica, como se muestra en la siguiente Figura 3.15.

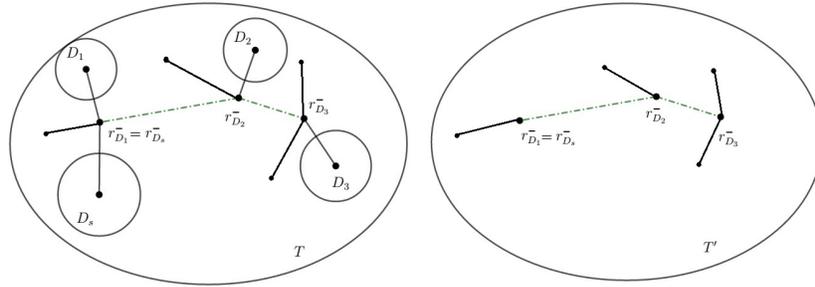


Figura 3.15: $T' = T - \mathfrak{D}_1$ con $\{D_1, D_2, D_3, \dots, D_s\} \subseteq \mathfrak{D}_1$

Sea $|\mathfrak{D}_2| = l$. Para toda componente D_i en \mathfrak{D}_2 consideramos a $T'' = T' - \mathfrak{D}_2 \cup S$ con $S = \bigcup_{D_i \in \mathfrak{D}_2} r_{D_i}^- s_{D_i}$ el conjunto de aristas entre los vértices $\{r_{D_i}^-, s_{D_i}\} \subseteq \vartheta_T(D_i)$ para toda i en $\{1, 2, \dots, l\}$, como tenemos una arista que une a $r_{D_i}^-$ con s_{D_i} para cada componente en \mathfrak{D}_2 , T'' es conexa y acíclica, como se observa en la siguiente Figura 3.16.

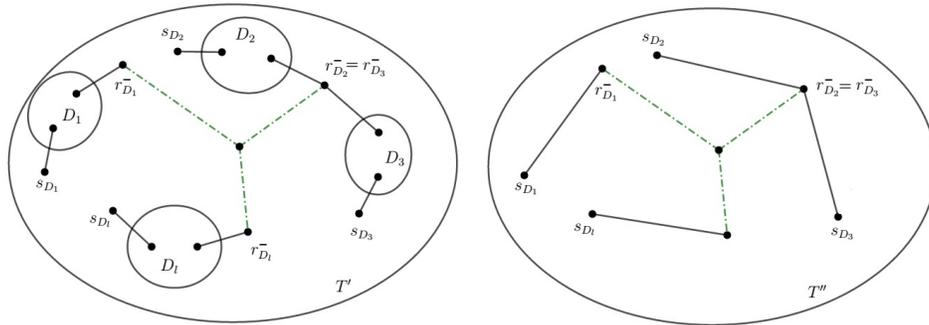


Figura 3.16: $T'' = T' - \mathfrak{D}_2 \cup S$ donde $S = \bigcup_{D_i \in \mathfrak{D}_2} r_{D_i}^- s_{D_i}$ es el conjunto de aristas entre los vértices $\{r_{D_i}^-, s_{D_i}\} \subseteq \vartheta_T(D_i)$ para toda i en $\{1, 2, \dots, l\}$

Sea $|\mathfrak{D}_{\geq 3}| = p$. En el árbol T'' para toda i en $\{1, 2, \dots, p\}$ contraemos a cada componente D_i en $\mathfrak{D}_{\geq 3}$ a un vértice d_i tal que tenemos las aristas $d_i v_j$ con v_j en $\vartheta_T(D_i)$ que cumplen que $|\vartheta_T(D_i)| = \delta_{T^*}(d_i)$ para toda i en $\{1, 2, \dots, p\}$. Llamamos a este nuevo árbol como T^* , por construcción T^* es conexa y acíclica como se muestra en la siguiente Figura 3.17.

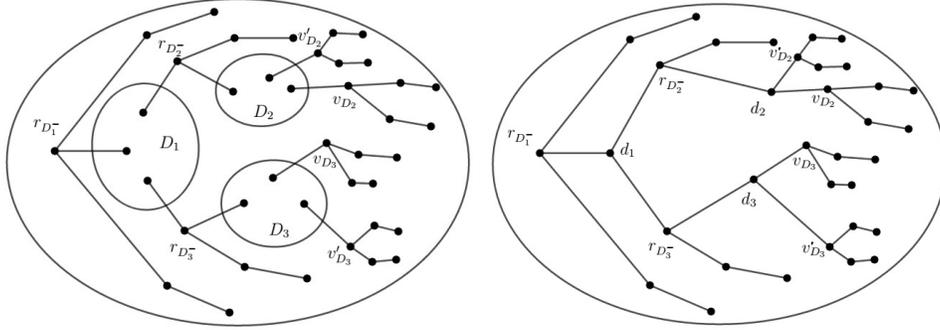


Figura 3.17: T^* donde $\{v_{D_2}, v'_{D_2}, v_{D_3}, v'_{D_3}\} \subseteq V^*$

Usemos la misma notación del conjunto de componentes $\mathfrak{D}_{\geq 3}$ para conjunto de vértices d_i . Entonces el conjunto de vértices de T^* es $V^* \cup \mathfrak{D}_{\geq 3}$. Consideremos a T^* como un árbol con raíz en v_1 . Entonces para todo vértice d_i , tenemos $|\vartheta_T(d_i)| - 1$ vértices hijos de d_i en T^* . Por la Afirmación 3.2.10, estos vértices hijos de d_i están contenidos en $V^* - (U^* \cap V^*)$. Como $|U^*| = |V^*| = n$, tenemos que:

$$|U^* - (V^* \cap U^*)| = |V^* - (U^* \cap V^*)| \geq \sum_{D \in \mathfrak{D}_{\geq 3}} (\vartheta_T(D) - 1).$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$|V^* \cup U^*| = |V^*| + |U^* - (V^* \cap U^*)| \geq |V^*| + \sum_{D \in \mathfrak{D}_{\geq 3}} (\vartheta_T(D) - 1). \diamond$$

Ahora, para facilitar la demostración es necesario introducir notación adicional. Denotamos por $P[s, t]$ una trayectoria en T que conecta a dos vértices s y t y por:

1. $P(s, t)$ a la subtrayectoria de $P[s, t]$ tal que $\{s, t\} \not\subseteq V(P(s, t))$.
2. $P[s, t)$ a la subtrayectoria de $P[s, t]$ tal que $s \in V(P[s, t))$ y $t \notin V(P[s, t))$.
3. $P(s, t]$ a la subtrayectoria de $P[s, t]$ tal que $s \notin V(P(s, t])$ y $t \in V(P(s, t])$.

Para cada $D \in \mathfrak{D}_2$, sea $\vartheta_T(D) = \{v_D = r_{\bar{D}}, s_D\}$, donde r_D es la raíz de D .

Si $D \in \mathfrak{D}_2$ posee alguna de las siguientes tres propiedades, entonces D será llamada **componente pseudotrayectoria**:

- (e) $r_D = s_D^-$, $D = \{r_D\}$ y $\delta_T(s_D^- = r_D) = 2$.
 - (f) D es una trayectoria, $r_D \neq s_D^-$ y $\delta_T(r_D) = \delta_T(s_D^-) = 2$.
 - (g) Existe un vértice z_D en $P[r_D, s_D^-]$ tal que z_D en U^* y $\delta_T(z) = 2$ para todo vértice $z \in P(z_D, s_D^-]$, donde $P(z_D, s_D^-] = \emptyset$ si $r_D = s_D^-$.
- Sea $D_2^P = \{D \in \mathfrak{D}_2 = \mathfrak{D}_2^T : D \text{ es componente pseudotrayectoria}\}$.

Afirmación 3.2.12. Si $D \in D_2^P$, entonces existe un vértice x_D en $P[r_D, s_D^-]$ que satisface las siguientes dos propiedades, donde $P(x_D, s_D^-] = \emptyset$.

- (i) $\delta_T(z) = 2$ para todo vértice $z \in P[x_D, s_D^-]$.
- (ii) $\text{Dom}^m(P[x_D, s_D^-]) \subseteq \text{Dom}^m(T - P[x_D, s_D^-])$.

Demostración. Si $\delta_T(s_D^-) = 2$, entonces tomemos $x_D = s_D^-$, por lo que $\delta_T(z) = 2$ para toda $z \in P[x_D, s_D^-] = \{s_D^-\}$; es decir, que se cumple (i).

Como $P(x_D, s_D^-] = \emptyset$, entonces $\text{Dom}^m(P[x_D, s_D^-]) \subseteq \text{Dom}^m(T - P(x_D, s_D^-))$. Por lo tanto, se cumple (ii).

Observemos que si $D \in D_2^P$ tal que cumple con (e), entonces tenemos que $\delta_T(s_D^-) = 2$ y si $D \in D_2^P$ tal que cumple con (f), entonces $\delta_T(s_D^-) = 2$.

Por lo que asumimos que D satisface (g) y como $P[x_D, s_D^-] = \emptyset$ tenemos que $z_D = s_D^-$. Tomemos a $Q_{r_D^-}$ la (r_D^-, w) -trayectoria, Q_{s_D} la (s_D, w) -trayectoria y R_{z_D} la (D_1, z_D) -trayectoria. Por la Afirmación 3.2.8 se cumple que $R_{z_D} \cap Q_{r_D^-} = \emptyset$ y $R_{z_D} \cap Q_{s_D} = \emptyset$. Consideremos a $T' = (T + Q_{r_D^-} + Q_{s_D}) - r_D^- r_D$, por el Teorema 1.9.5 es conexa y acíclica, por lo que es un árbol. Además, observemos que como $\{r_D^-\} \subseteq V^*$ y en T' se agregan las trayectorias $Q_{r_D^-}$ y Q_{s_D} y se quita la arista $r_D^- r_D$, se tiene que, $\delta_{T'}(r_D^-) = k$ y $\delta_{T'}(s_D) = k + 1$. Ahora consideremos a $T'' = (T' + R_{z_D}) - s_D s_D^-$, el cual nuevamente por el Teorema 1.9.5 es un árbol. Finalmente debemos demostrar que T'' es un k -árbol; como z_D en U^* por la Afirmación 3.2.9; $\delta_T(z_D) = k$, por otro lado tenemos que $\delta_{T''}(z_D) = \delta_T(z_D) + 1 - 1 = k + 1 - 1 = k$, $\delta_{T''}(s_D) = \delta_{T'}(s_D) - 1 = k$ y por la Afirmación 3.2.7 tenemos que para todo vértice $x \in D_1$ $\delta_T(x) \leq k - 1$, por lo que $\delta_{T''}(x) \leq k$. Por lo tanto, T'' es un k -árbol como se muestra en la Figura 3.18, que $\text{Dom}^m(T) \cup \{w\} \subseteq \text{Dom}^m(T'')$, lo que es una contradicción a (a). \diamond

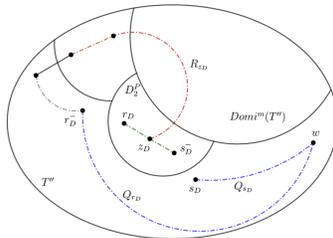


Figura 3.18: $T'' = (T' + R_{z_D}) - s_D s_D^-$

Para cada $D \in D_2^P$, tomemos un vértice x_D en $P[x_D, s_D^-]$ tal que satisfice las propiedades de la Afirmación 3.2.12 de modo que el orden de $P[x_D, s_D^-]$ sea tan grande como sea posible.

Afirmación 3.2.13. *Si $D \in D_2^P$, entonces existe un vértice y_D tal que:*

$$d_G(y_D, P[x_D, s_D^-]) = m \text{ y } d_G(y_D, T - P[x_D, s_D^-]) \geq m + 1.$$

Demostración. Sea $W = \{y \in V(G) : d_G(y, P[x_D, s_D^-]) = m\}$. Supongamos por contradicción que o bien $W = \emptyset$ o que para toda $y \in W$ tenemos que $d_G(y, T - P[x_D, s_D^-]) \leq m$. Tomemos a $Q_{r_D^-}$ la (r_D^-, w) -trayectoria y Q_{s_D} la (s_D, w) -trayectoria.

Primero, supongamos que D que cumple con la condición (e). Consideremos a $T + Q_{r_D^-} + Q_{s_D}$, la cual contiene un único ciclo, por el Teorema 1.9.5 $T' = T + Q_{r_D^-} + Q_{s_D} - s_D^-s_D$ es un árbol, como se muestra en la Figura 3.19. Como $\delta_{T'}(r_D = s_D^-) = \delta_T(r_D = s_D^-) - 1 = 2 - 1$, entonces por el Teorema 1.9.3 $T'' = T' - (r_D = s_D^-)$ es un árbol, como podemos observar en la Figura 3.19. Además, se cumple que $\delta_{T'}(r_D^-) = \delta_T(r_D^-) + 1 - 1$ y $\delta_{T'}(s_D) = \delta_T(s_D) + 1 - 1$, por lo que T'' es un k -árbol que satisfice $\text{Dom}^m(T) \cup \{w\} \subseteq \text{Dom}^m(T'')$, lo que contradice a (a).

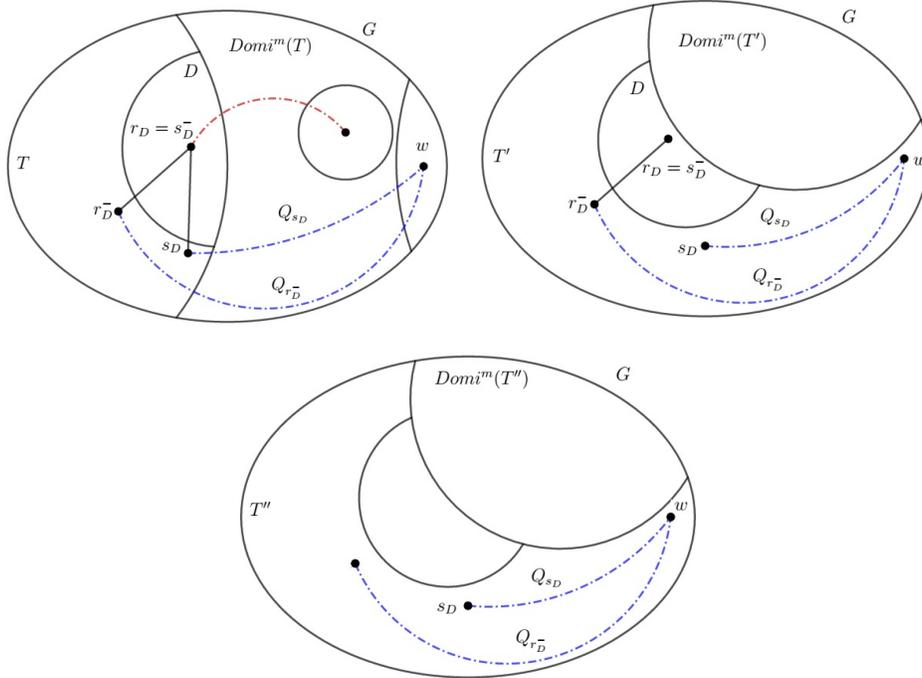


Figura 3.19: T , $T' = T + Q_{r_D^-} + Q_{s_D}$ y $T'' = T' - (r_D = s_D^-)$

Ahora supongamos que D satisface la condición (f). Si $x_D \neq r_D$, entonces el vértice $x_{\bar{D}}$ cumple que $\delta_T(x_{\bar{D}}) = 2$ pues D es una trayectoria y satisface las propiedades (i) y (ii) de la Afirmación 3.2.12, lo que contradice la elección de x_D pues tenemos que $|V(P[x_{\bar{D}}, s_{\bar{D}}])| > |V(P[x_D, s_{\bar{D}}])|$. Por lo tanto, $x_D = r_D$. Tomemos a $T' = (T + Q_{r_{\bar{D}}} + Q_{s_D}) - P[r_D, s_{\bar{D}}]$. Sabemos que como $\{r_{\bar{D}}, s_D\} \subseteq V^*$ y como $P[r_D, s_{\bar{D}}] \cong D$ se cumple que para todo v en $V(P[r_D, s_{\bar{D}}])$ $\delta_T(v) = 2$ $\delta_{T'}(r_{\bar{D}}) = \delta_T(r_{\bar{D}}) + 1 - 1$ y $\delta_{T'}(s_D) = \delta_T(s_D) + 1 - 1$, por lo tanto, T' es un k -árbol (ver Figura 3.20) que satisface $\text{Dom}^m(T) \cup \{w\} \subseteq \text{Dom}^m(T')$, lo que contradice a (a).

Finalmente supongamos que D satisface la condición (g). Si $x_D \notin \text{Hijos}(z_D)$, entonces el vértice $x_{\bar{D}}$ cumple que $\delta_T(x_{\bar{D}}) = 2$; pues todo v en la subtrayectoria $V(P(z_D, s_{\bar{D}}))$ cumple que $\delta_T(v) = 2$, por lo que $x_{\bar{D}}$ satisface las propiedades de la Afirmación 3.2.12, lo que contradice la elección de x_D , pues tenemos que $|V(P[x_{\bar{D}}, s_{\bar{D}}])| > |V(P[x_D, s_{\bar{D}}])|$. Por lo tanto, $x_D \in \text{Hijos}(z_D)$. Tomemos a R_{z_D} la (z_D, D_1) -trayectoria. Consideremos a $T' = (T + Q_{r_{\bar{D}}} + Q_{s_D}) - r_{\bar{D}}r_D$, por el teorema 1.9.5 T' es un árbol (ver Figura 3.20) y además tenemos que $\delta_{T'}(r_{\bar{D}}) = \delta_T(r_{\bar{D}}) + 1 - 1$ y $\delta_{T'}(s_D) = \delta_T(s_D) + 1$. Tomemos a $T'' = (T + R_{z_D}) - P[x_D, s_{\bar{D}}]$, el cual por el Lema 1.3 es un árbol como se muestra en la Figura 3.20, ya que T'' tiene un único ciclo y tenemos que todo $x \in V(P[x_D, s_{\bar{D}}])$ se cumple que $\delta_T(x) = 2$. Sabemos que $\delta_{T''}(s_D) = \delta_{T'}(s_D) - 1 = k$ y por la Afirmación 3.2.7 tenemos que para todo vértice $x \in D_1$ $\delta_T(x) \leq k - 1$, por lo que $\delta_{T''}(x) \leq k$. Por lo tanto, T'' es un k -árbol que $\text{Dom}^m(T) \cup \{w\} \subseteq \text{Dom}^m(T'')$, lo que contradice a (a).

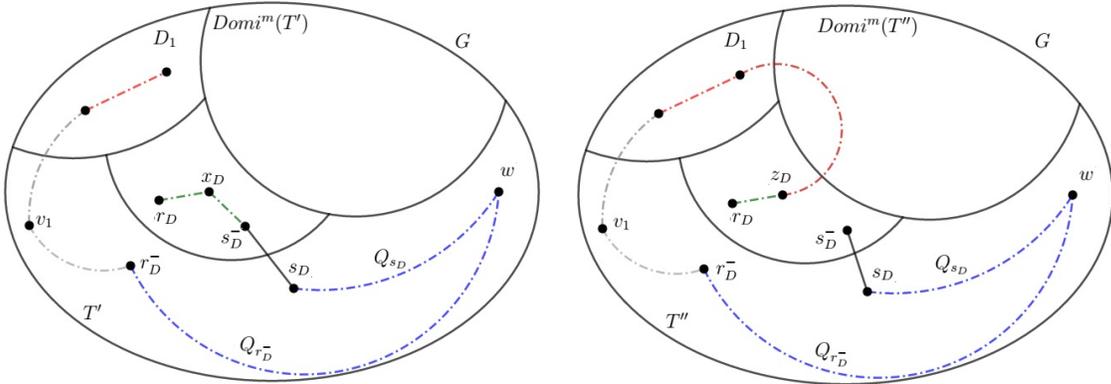


Figura 3.20: $T' = (T + Q_{r_{\bar{D}}} + Q_{s_D}) - r_{\bar{D}}r_D$ y $T'' = (T + R_{z_D}) - P[x_D, s_{\bar{D}}]$

Por lo tanto, existe y_D en W tal que $d_G(y_D, P[x_D, s_{\bar{D}}]) = m$ y $d_G(y_D, T - P[x_D, s_{\bar{D}}]) \geq m + 1$. \diamond

Sea $Y_{Tray} = \{y_D : D \in \mathfrak{D}_2^P\}$. Para cada $y \in Y_{Tray}$, tomamos a $D \in \mathfrak{D}_2^P$ tal que $y_D = y$ y sea $S(y) = V(P[x_D, s_D^-])$.

Afirmación 3.2.14. $Y_{Hojas} \cap Y_{Tray} = \emptyset$ y para $\{D_1, D_2\} \subseteq \mathfrak{D}_2^P$ se tiene que $y_{D_1} \neq y_{D_2}$.

Demostración. Supongamos por contradicción que $Y_{Hojas} \cap Y_{Tray} \neq \emptyset$. Sea y el vértice en $Y_{Hojas} \cap Y_{Tray}$. Por definición de Y_{Tray} para $y \in Y_{Tray}$ existe un $S(y) = V(P[x_D, s_D^-])$, por la Afirmación 3.2.12 para todo vértice z en $V(P[x_D, s_D^-])$ se cumple que $\delta_T(z) = 2$, por la Afirmación 3.2.13 sabemos que $d_G(y, P[x_D, s_D^-]) = m$ y $d_G(y, T - P[x_D, s_D^-]) \geq m + 1$. Como $y \in Y_{Hojas}$ por definición de Y_{Hojas} y por la Afirmación 3.2.3 existe un vértice x en $Hojas(T)$ tal que $d_G(y, x) = m$ y $d_G(y, T - x) \geq m + 1$. Veamos los siguientes dos casos:

Caso 1) Si D cumple (f) o (g), entonces se tiene lo siguiente: Como $x \in Hojas(T)$ se cumple que $x \notin V(P[x_D, s_D^-])$. Por lo tanto, $x \in T - V(P[x_D, s_D^-])$. Por la Afirmación 3.2.3 tenemos que $d_G(y, T - P[x_D, s_D^-]) \leq d_G(y, x) = m$, lo que es una contradicción.

Caso 2) Si D cumple (e), entonces se tiene lo siguiente: Como $x \in Hojas(T)$ se cumple que $x \neq r_D$. Por lo tanto, $x \in T - r_D$. Entonces por la Afirmación 3.2.3 tenemos que $d_G(y, T - r_D) \leq d_G(y, x) = m$, lo que es una contradicción.

Por lo tanto,

$$Y_{Hojas} \cap Y_{Tray} = \emptyset.$$

Por demostrar que $y_{D_1} \neq y_{D_2}$ para $\{D_1, D_2\} \subseteq \mathfrak{D}_2^P$. Supongamos por contradicción que $y_{D_1} = y_{D_2}$ para $D_1 \neq D_2$. Nuevamente tenemos dos casos:

Caso 1) Si D cumple (f) o (g), entonces se cumple lo siguiente:

Como $\{y_{D_1} = y_{D_2}\} \subseteq Y_{Tray}$, por la Afirmación 3.2.13

$$d_G(y_{D_1}, T - P[x_{D_1}, s_{D_1}^-]) \geq m + 1$$

y como tenemos que $V(P[x_{D_2}, s_{D_2}^-]) \subseteq T - V(P[x_{D_1}, s_{D_1}^-])$ llegamos a una contradicción pues $d_G(y_{D_1}, P[x_{D_2}, s_{D_2}^-]) = m$.

Caso 2) Si D cumple (e), entonces se tiene lo siguiente:

Por la Afirmación 3.2.13 tenemos que $d_G(y_{D_1}, r_D) \geq m + 1$; pero se cumple que $V(P[x_{D_2}, s_{D_2}^-]) \subseteq T - r_D$, lo que es una contradicción pues sabemos que $d_G(y_{D_1}, P[x_{D_2}, s_{D_2}^-]) = m$.

Por lo tanto $y_{D_1} \neq y_{D_2}$. \diamond

Afirmación 3.2.15. Para $y \in Y_{\text{Tray}}$ los siguientes enunciados son verdaderos:

(i) No existe una $(w, S(y))$ -trayectoria cuyos vértices interiores estén contenidos en $G - T$.

(ii) No existe una $(D_1, S(y))$ -trayectoria cuyos vértices interiores estén contenidos en $G - T$.

Demostración. (i) Por demostrar que no existe una $(w, S(y))$ -trayectoria cuyos vértices interiores estén contenidos en $G - T$. Supongamos por contradicción que existe Q una $(w, S(y))$ -trayectoria cuyos vértices interiores están contenidos en $G - T$. Tomemos a $D \in \mathfrak{D}_2^P$ y una trayectoria (s_D, w) -trayectoria Q_{s_D} , tal que $y_D = y$ y $s_D \in Q_{s_D}$.

Afirmamos que la componente D cumple la condición (g) ya que si satisface (e) o (f) se tiene que $T + Q$ es un k -árbol, ver la Figura 3.21, donde se cumple que $\text{Domi}^m(T) \cup \{w\} \subseteq \text{Domi}^m(T + Q)$ y esto es una contradicción a (a).

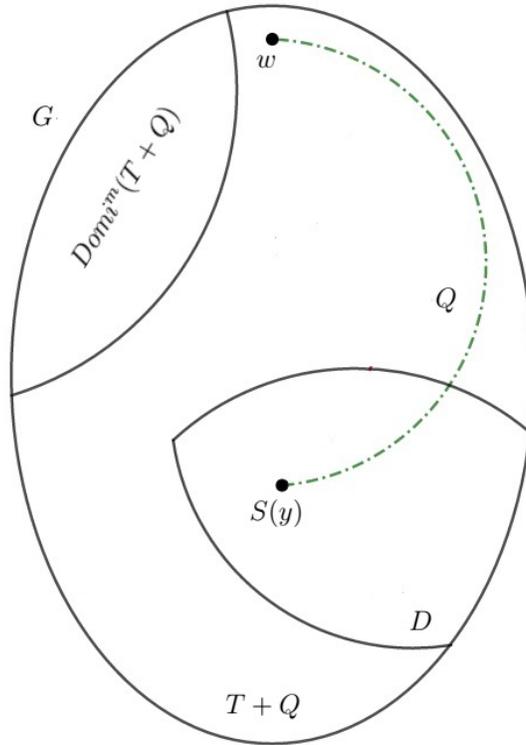


Figura 3.21: $T + Q$

Sea z el vértice final de la trayectoria Q tal que está en $S(y)$. Tomemos un vértice w_0 en $Q \cap Q_{s_D}$ tal que es el vértice de $Q \cap Q_{s_D}$ más cercano a z en Q . Consideremos a

$T' = (T + Q_{s_D} + Q[w_0, z]) - P(z, s_D^-]$. Por la Afirmación 3.2.12, la elección de w_0 , por el Teorema 1.9.5 y el Lema 1.3 T' es conexa y acíclica, por lo tanto, T' es un árbol, observemos la Figura 3.22. Como $\delta_{T'}(s_D) = \delta_T(s_D) + 1 - 1$ y $\delta_{T'}(s_D) = \delta_T(s_D) + 1 = 2 + 1$, entonces el grado máximo en T' es k . Por lo tanto, T' es un k -árbol que cumple que $\text{Dom}^m(T) \cup \{w\} \subseteq \text{Dom}^m(T')$, lo que contradice a (a).

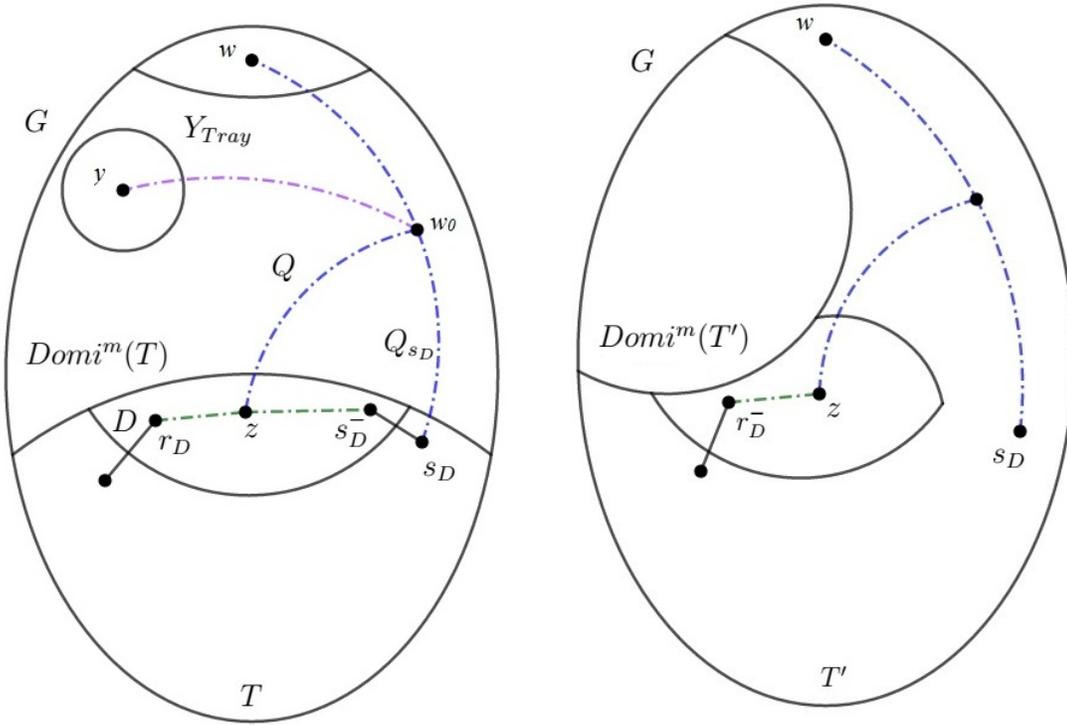
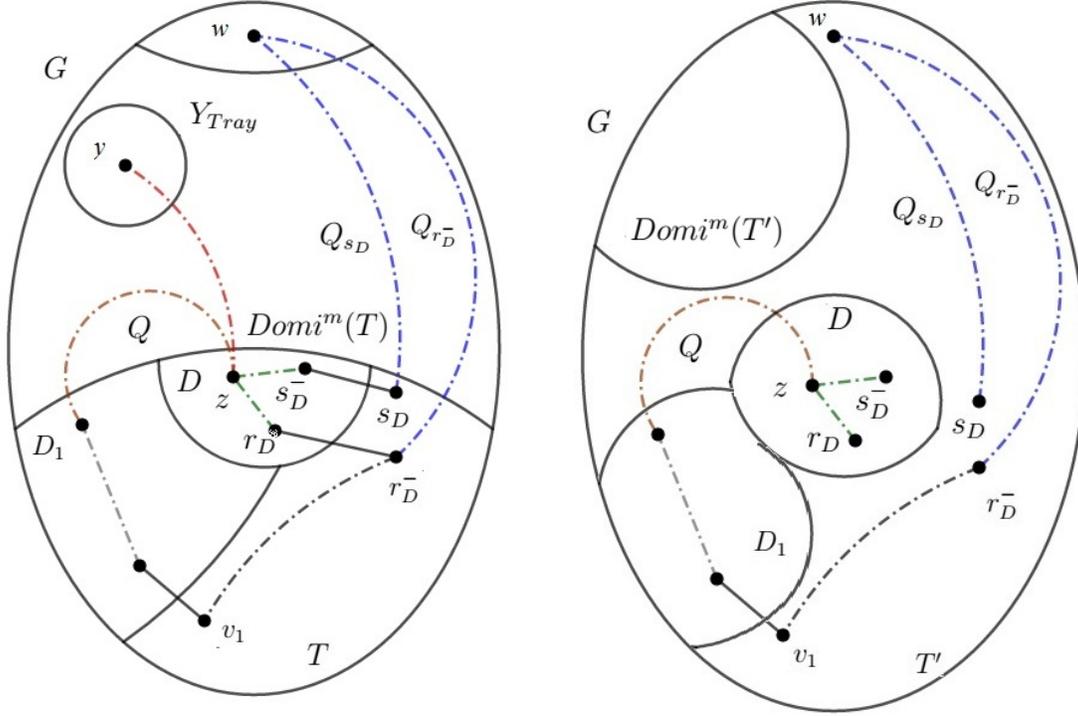


Figura 3.22: $T' = (T + Q_{s_D} + Q[w_0, z]) - P(z, s_D^-]$

(ii) Supongamos por contradicción que existe Q una $(D_1, S(y))$ -trayectoria cuyos vértices interiores están contenidos en $G - T$. Tomemos a $D \in \mathfrak{D}_2^P$ y las trayectorias $Q_{r_D^-}$ y Q_{s_D} , tal que $y_D = y$, r_D^- en $Q_{r_D^-}$ y s_D en Q_{s_D} . Notemos que por la Afirmación 3.2.8 Q no intersecciona a $Q_{r_D^-}$ ni a Q_{s_D} . Consideremos a $T' = (T + Q_{r_D^-} + Q_{s_D} + Q) - r_D^-r_D - s_Ds_D^-]$, el cual por el Teorema 1.9.5 y el Lema 1.3 es conexa y acíclica, por lo tanto, T' es un árbol, veamos la Figura 3.23. Como $\delta_{T'}(s_D) = \delta_T + 1 - 1$, $\delta_{T'}(r_D^-) = \delta_T(r_D^-) + 1 - 1$ y por la Afirmación 3.2.7 sabemos que $\delta_T(x) \leq k + 1$ para todo vértice $x \in D_1$, por lo que se tiene que $\delta_{T'}(x) \leq k$ para todo $x \in V(T')$. Por lo tanto, T' es un k -árbol tal que $\text{Dom}^m(T) \cup \{w\} \subseteq \text{Dom}^m(T')$, lo que contradice a (a). \diamond


 Figura 3.23: $T' = (T + Q_{r_{\bar{D}}} + Q_{s_D} + Q) - r_{\bar{D}}r_D - s_Ds_{\bar{D}}$

Afirmación 3.2.16. Para dos vértices distintos $\{y_1, y_2\} \subseteq Y_{Hojas} \cup Y_{Tray} \cup \{w\}$, se cumple que $d_G(y_1, y_2) \geq 2(m+1)$.

Demostración. Para i en $\{1, 2\}$, si y_i en $Y_{Hojas} \cup Y_{Tray}$, entonces $d_G(y_i, S(y_i)) = m$ y por las Afirmación 3.2.3 sabemos que si y_i en Y_{Hojas} , entonces tenemos que $d_G(y_i, T - S(y_i)) \geq m+1$. Por la afirmación 3.2.13 para i en $\{1, 2\}$, si y_i en Y_{Tray} tenemos que $d_G(y_i, T - S(y_i)) \geq m+1$.

Supongamos que $y_1 = w$. Por la Afirmación 3.2.5 sabemos que si y_2 en Y_{Hojas} , entonces no existe una $(w, S(y_2))$ -trayectoria tal que sus vértices estén contenidos en $G - T$ y por la Afirmación 3.2.15 si y_2 en Y_{Tray} , entonces no existe una $(w, S(y_2))$ -trayectoria tal que sus vértices estén contenidos en $G - T$. Por lo anterior tenemos las condiciones (i) y (ii) del Lema 3.2, por lo que se tiene que $d_G(w, y_2) \geq 2(m+1)$.

Por lo tanto, supongamos que $\{y_1, y_2\} \subseteq Y_{Hojas} \cup Y_{Tray}$. Por lo visto al inicio de esta demostración ya contamos con la condición (i) del Lema 3.1, por lo que basta con probar que no existe una $(S(y_1), S(y_2))$ -trayectoria tal que sus vértices interiores estén contenidos en $G - T$; la cual es la condición (ii) del Lema 3.1. Por lo que debemos considerar los siguientes tres casos:

Caso (a) $\{y_1, y_2\} \subseteq Y_{Hojas}$. Este caso ya se demostró en la Afirmación 3.2.6.

Caso (b) y_1 en Y_{Hojas} y y_2 en Y_{Tray} .

Tomemos un vértice $x \in Hojas(T)$ y una componente $D \in \mathfrak{D}_2^P$ de modo que $S(y_1) = \{x\}$ y $S(y_2) = V(P[x_D, s_D^-])$. Supongamos por contradicción que existe una $(S(y_1), S(y_2))$ -trayectoria Q tal que sus vértices interiores están contenidos en $G - T$. Sea z el vértice final de Q en $S(y_2)$. Tomemos ahora a $Q_{r_D^-}$ y a Q_{s_D} dos trayectorias tales que $r_D^- \in Q_{r_D^-}$ y $s_D \in Q_{s_D}$. Por la Afirmación 3.2.8, sabemos que Q no interseca a $Q_{r_D^-}$ ni a Q_{s_D} .

Supongamos en primer lugar que $x \in V(D)$. Si D satisface (e) o (f), D no tiene vértices de grado uno en T , entonces D satisface la propiedad (g). Tomemos la $(D_1, T - D_1)$ -trayectoria R_{z_D} tal que $z_D \in R_{z_D}$. Por la Afirmación 3.2.8, R_{z_D} no interseca a $Q_{r_D^-}$ ni a Q_{s_D} . Por la Afirmación 3.2.15, R_{z_D} tampoco interseca a Q . Consideremos a $T' = (T + Q_{r_D^-} + Q_{s_D} + Q + R_{z_D}) - P(z_D, s_D) - r_D^-r_D - z_Dz^*$; donde z_Dz^* es una arista de la trayectoria $P_T(z_D, x)$. Por el Lema 1.3 y el teorema 1.9.5, T' es un árbol como se muestra en la Figura 3.24. Como tenemos que $\delta_{T'}(z_D) = \delta_T(z_D) + 1 = 2 + 1$, $\delta_{T'}(r_D^-) = \delta_T(r_D^-) + 1 - 1$, $\delta_{T'}(s_D) = \delta_T(s_D) + 1 - 1$ y por la Afirmación 3.2.7 sabemos que para todo vértice $v \in D_1$ se tiene que $\delta_T(v) \leq k - 1$, por lo que, se tiene que $\delta_{T'}(v) \leq k$ para todo $v \in V(T')$. Por lo tanto, T' es un k -árbol que cumple que $Dom^m(T) \cup \{w\} \subseteq Dom^m(T')$, lo que contradice a (a).

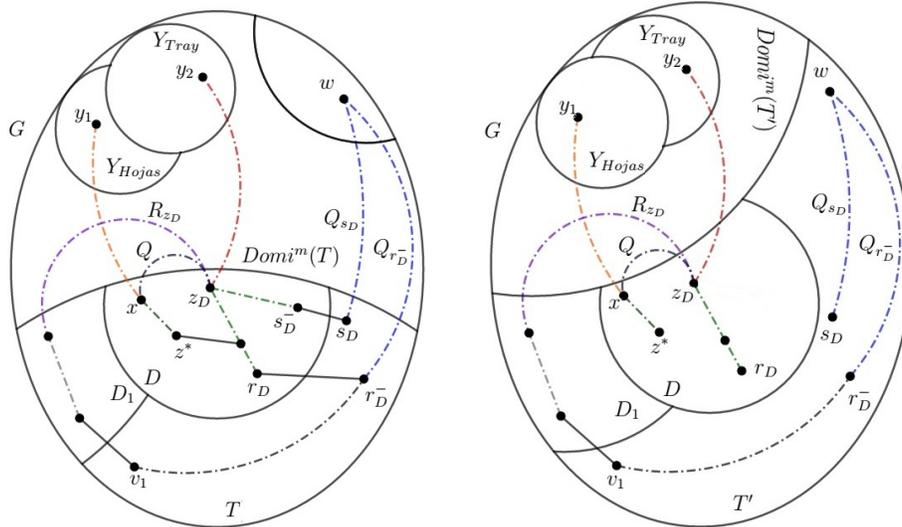


Figura 3.24: $T' = (T + Q_{r_D^-} + Q_{s_D} + Q + R_{z_D}) - P(z_D, s_D) - r_D^-r_D - z_Dz^*$

Supongamos ahora que $x \notin V(D)$, entonces construimos a T' a partir de T de la siguiente manera $T' = (T + Q_{r_D^-} + Q_{s_D} + Q) - P(z_D, s_D) - r_D^- r_D$, el cual por el Lema 1.3 y el Teorema 1.9.4 es un árbol, como se observa en la Figura 3.25. Además tenemos que:

$$\delta_{T'}(z_D) = \delta_T(z_D) + 1 = 2 + 1,$$

$$\delta_{T'}(r_D^-) = \delta_T(r_D^-) + 1 - 1$$

$$\text{y } \delta_{T'}(s_D) = \delta_T(s_D) + 1 - 1.$$

Por lo tanto, T' es un k -árbol tal que $\text{Dom}^m(T) \cup \{w\} \subseteq \text{Dom}^m(T')$, lo que contradice a (a).

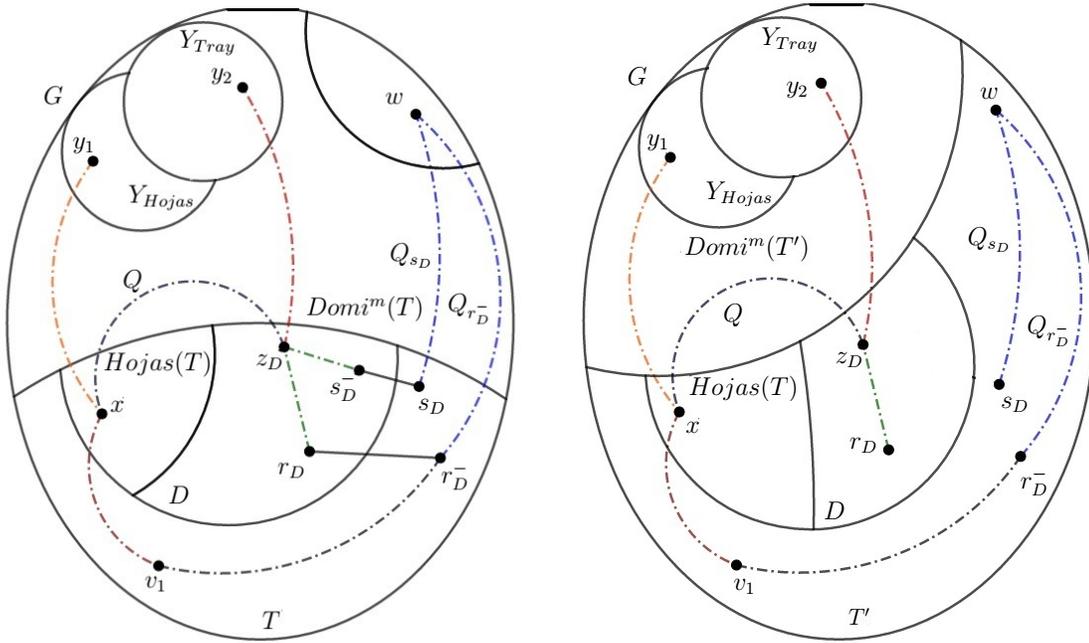


Figura 3.25: $T' = (T + Q_{r_D^-} + Q_{s_D} + Q) - P(z_D, s_D) - r_D^- r_D$

Caso (c) $\{y_1, y_2\} \subseteq Y_{\text{Tray}}$.

Tomemos dos componentes $\{D_a, D_b\} \subseteq \mathfrak{D}_2^P$, tal que $y_{D_a} = y_1$ y $y_{D_b} = y_2$ y a $Q_{s_{D_a}}$, $Q_{s_{D_b}}$ y $Q_{r_{D_a}^-}$ tres trayectorias tales que s_{D_a} en $Q_{s_{D_a}}$, s_{D_b} en $Q_{s_{D_b}}$ y $r_{D_a}^-$ en $Q_{r_{D_a}^-}$.

Primero supongamos por contradicción que existe Q una $(S(y_1), S(y_2))$ -trayectoria tal que sus vértices internos están contenidos en $G - T$. Sean z_a en $S(y_a)$ y z_b en $S(y_b)$ dos vértices tal que son vértices finales de Q . Si D_a satisface (e) o (f), entonces consideremos a

$$T' = T + Q_{s_{D_a}} + Q_{r_{D_a}^-} + Q_{s_{D_b}} + Q - P(z_b, s_{D_b}) - s_{D_a} s_{D_a}^- - r_{D_a}^- r_{D_a}$$

el cual por el Lema 1.3 y el Teorema 1.9.5 es un árbol, como se observa en la Figura 3.26. Además cumple que:

$$\delta_{T'}(s_{D_a}) = \delta_T(s_{D_a}) + 1 - 1,$$

$$\delta_{T'}(s_{D_b}) = \delta_T(s_{D_b}) + 1 - 1$$

$$\text{y } \delta_{T'}(r_{D_a}^-) = \delta_T(r_{D_a}^-) + 1 - 1.$$

Por lo tanto, T' es un k -árbol que cumple que $\text{Dom}^m(T) \cup \{w\} \subseteq \text{Dom}^m(T')$, lo que contradice a (a).

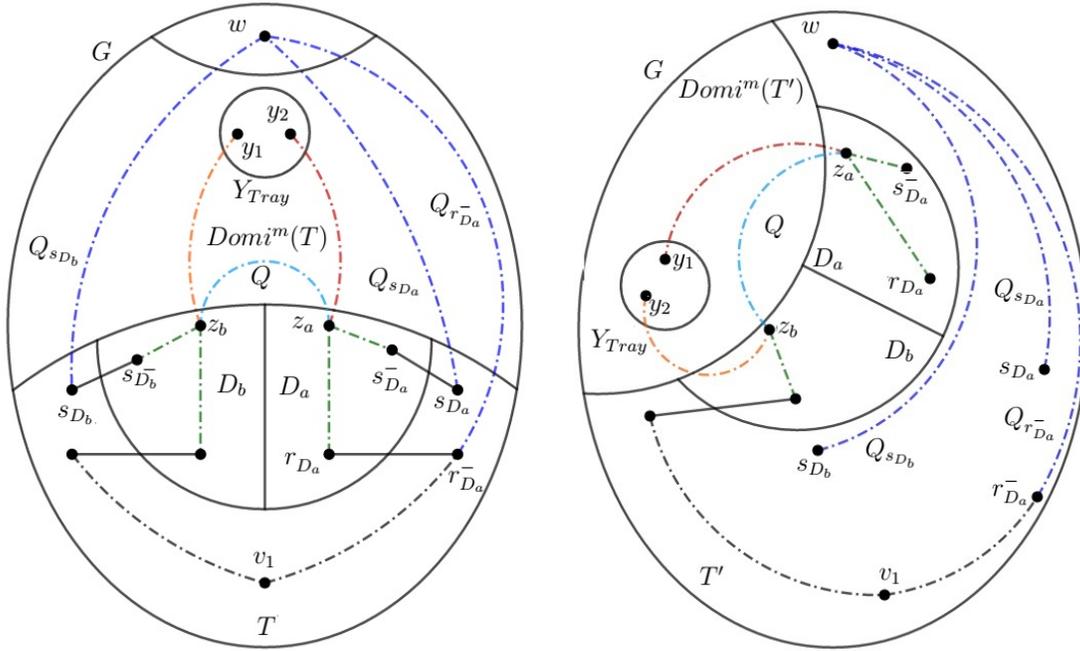


Figura 3.26: $T' = T + Q_{s_{D_a}} + Q_{r_{D_a}^-} + Q_{s_{D_b}} + Q - P(z_b, s_{D_b}) - s_{D_a} s_{D_a}^- - r_{D_a}^- r_{D_a}$

Supongamos ahora que D_a y D_b satisfacen (g). Tomemos a Q una trayectoria tal que $|V(P(z_a, s_{D_a}))| + |V(P(z_b, s_{D_b}))|$ sea tan pequeña como sea posible.

Consideremos un vértice $u \in \text{Dom}^m(P(z_a, s_{D_a}) \cup P(z_b, s_{D_b}))$ tal que $u \notin \text{Dom}^m(T - (P(z_a, s_{D_a}) \cup P(z_b, s_{D_b})))$, dicho vértice existe pues tenemos la trayectoria que une a Y_{Tray} con T . Sabemos que existe una $(u, P(z_a, s_{D_a}))$ -trayectoria cuyos vértices interiores están contenidos en $(G - T) \cup P(z_b, s_{D_b})$ o existe una $(u, P(z_b, s_{D_b}))$ -trayectoria cuyos vértices interiores están contenidos en $(G - T) \cup P(z_a, s_{D_a})$. Por lo que, $V(P[u, s_{D_a}]) \subset V(P[z_a, s_{D_a}])$ o $V(P[u, s_b]) \subset V(P[z_b, s_{D_b}])$, lo que implica que existe una $(P(z_a, s_{D_a}), P(z_b, s_{D_b}))$ -trayectoria $(u, P[u, z_a], z_a) \cup (z_a, Q, z_b)$ o $(u, P[u, z_b], z_b) \cup (z_b, Q, z_a)$ cuyos vértices interiores están contenidos en $G - T$, lo que contradice el hecho de que Q sea tan pequeña como sea posible. Por lo tanto, por la Afirmación 3.2.12 (ii) tenemos que $\text{Dom}^m(P(z_a, s_{D_a})) \cup P(z_b, s_{D_b}) \subseteq \text{Dom}^m(T - (P(z_a, s_{D_a}) \cup P(z_b, s_{D_b})))$.

Consideremos a

$$T' = T + Q_{D_a} + Q_{D_b} + Q_{r_{D_a}^-} + Q - P(z_b, s_{D_b}) - P(z_{D_a}, s_{D_a}) - r_{D_a}^- r_{D_a},$$

por el Lema 1.3 y el Teorema 1.9.5 T' es un árbol. Además se cumple que $\delta_{T'}(s_{D_a}) = \delta_T(s_{D_a}) + 1 - 1$, $\delta_{T'}(s_{D_b}) = \delta_T(s_{D_b}) + 1 - 1$, $\delta_{T'}(r_{D_a}^-) = \delta_T(r_{D_a}^-) + 1 - 1$ y por el hecho anterior concluimos que T' es un k -árbol tal que $\text{Dom}^m(T) \cup \{w\} \subseteq \text{Dom}^m(T')$; observemos la Figura 3.27, lo que contradice a (a).

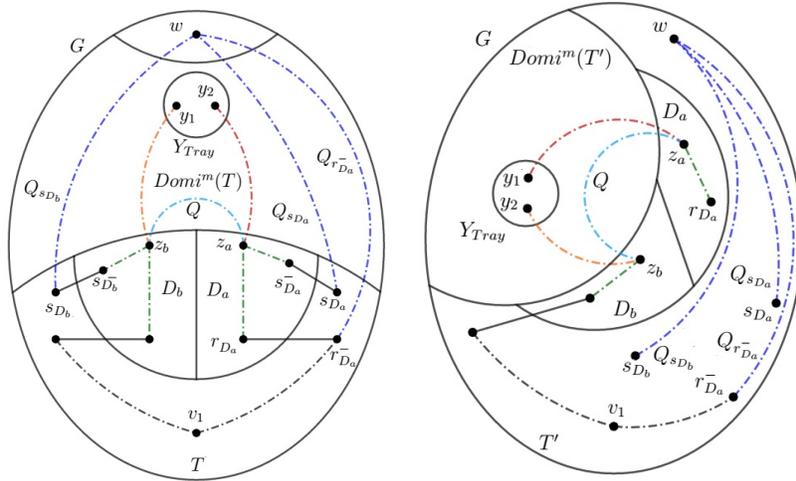


Figura 3.27: $T' = T + Q_{D_a} + Q_{D_b} + Q_{r_{D_a}^-} + Q - P(z_b, s_{D_b}) - P(z_{D_a}, s_{D_a}) - r_{D_a}^- r_{D_a}$

Por lo tanto, para los casos (a), (b) y (c) tenemos que se cumple el inciso (ii) del Lema 3.1.

Por lo tanto, para dos vértices distintos $\{y_1, y_2\} \subseteq Y_{Hojas} \cup Y_{Tray} \cup \{w\}$, se cumple que $d_G(y_1, y_2) \geq 2(m+1)$. \diamond

Afirmación 3.2.17. (i) Si $D \in \mathfrak{D}_2^P$, entonces $|Hojas(T) \cap V(D)| \geq (k-2)|U^* \cap V(D)|$.
(ii) Si $D \in \mathfrak{D}_2 - \mathfrak{D}_2^P$, entonces $|Hojas(T) \cap V(D)| \geq (k-2)|U^* \cap V(D)| + 1$.
(iii) $|Hojas(T) \cap \bigcup_{D \in \mathfrak{D}_1} V(D)| \geq (k-2)|U^* \cap \bigcup_{D \in \mathfrak{D}_1} V(D)| + (k-2)|V^*| + \sum_{D \in \mathfrak{D}_{\geq 3}} (|\vartheta_T(D)| - 2) + 2$.
(iv) Si $D \in \mathfrak{D}_{\geq 3}$, entonces $|Hojas(T) \cap V(D)| \geq (k-2)|U^* \cap V(D)| + |\vartheta_T(D)| + 2$.

Demostración. Observemos lo siguiente:

(I) Por un lado tenemos que:

$$Hojas(T) \cap V(D) = \{v \in V(T) : \delta_T(v) = 1\} \cap \{V(D)\} = \{v \in V(D) : \delta_T(v) = 1\}.$$

Por otro lado tenemos que:

$$\begin{aligned} Hojas(T) \cap Hojas(D) &= \{v \in V(T) : \delta_T(v) = 1\} \cap \{v \in V(D) : \delta_D(v) = 1\} \\ &= \{v \in V(D) : \delta_T(v) = 1 \text{ y } \delta_D(v) = 1\} = \{v \in V(D) : \delta_T(v) = 1\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $Hojas(T) \cap V(D) = Hojas(T) \cap Hojas(D)$.

(II) Por el Lema 1.5 sabemos que:

$$\begin{aligned} |Hojas(D)| &= \sum_{v \in W} (\delta_D(v) - 2) + 2, \text{ donde } W = \{v \in V(D) : \delta_D(v) \geq 3\}, \\ &= \sum_{v \in W} (\delta_D(v) - 2) + 2 = \sum_{v \in V(D)} \text{máx}\{\delta_D(v) - 2, 0\} + 2 \\ &= \sum_{v \in V(D) \setminus U^*} \text{máx}\{\delta_D(v) - 2, 0\} + 2 + \sum_{v \in V(D) \cap U^*} \text{máx}\{\delta_D(v) - 2, 0\}. \end{aligned}$$

Ahora, procedamos a la demostración de cada inciso.

(i) Sea $D \in \mathfrak{D}_2^P$. Si D cumple con (e) o (f), entonces

$$U^* \cap V(D) = \emptyset \text{ y } Hojas(T) \cap V(D) = \emptyset,$$

por lo tanto, tenemos que:

$$0 = |Hojas(T) \cap V(D)| \geq (k-2)|U^* \cap V(D)| = 0.$$

Si D cumple con (g), entonces existe un vértice $z \in V(D) \cap U^*$, por lo que tenemos que $V(D) \cap U^* \neq \emptyset$. Por la observación (I) tenemos que:

$$|Hojas(T) \cap V(D)| = |Hojas(T) \cap Hojas(D)|.$$

Además sabemos que:

Si $s_{\bar{D}}$ en $Hojas(D)$, entonces $\delta_T(s_{\bar{D}}) = 2$, por lo que $s_{\bar{D}} \notin Hojas(T)$.

Tenemos dos casos; r_D en $Hojas(D)$ o $r_D \notin Hojas(D)$.

Si r_D en $Hojas(D)$, entonces $\delta_T(r_D) = 2$; por lo tanto, $r_D \notin Hojas(T)$.

Por la observación (I) y (II) tenemos que:

$$|Hojas(T) \cap Hojas(D)| = |Hojas(D)| - 2 \geq \sum_{v \in V(D) \cap U^*} \max\{\delta_D(v) - 2, 0\} + 2,$$

por lo que $|Hojas(T) \cap V(D)| \geq \sum_{v \in V(D) \cap U^*} (\delta_T(v) - 2) = (k - 2)|U^* \cap V(D)|$.

Si $r_D \notin Hojas(D)$, entonces $\delta_T(r_D) \geq 3$, por lo tanto, $r_D \notin Hojas(T)$.

Por la observación (b) tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} |Hojas(T) \cap V(D)| &= |Hojas(D)| - 1 = \sum_{v \in V(D) \cap U^*} \max\{\delta_D(v) - 2, 0\} + 1 \\ &\geq \sum_{v \in V(D) \cap U^*} \max\{\delta_T(v) - 2, 0\} + 1 - 10 \geq \sum_{v \in V(D) \cap U^*} (\delta_T(v) - 2) = (k - 2)|U^* \cap V(D)|. \end{aligned}$$

(ii) Sea $D \in \mathfrak{D}_2 - \mathfrak{D}_2^P$.

Si D es una trayectoria con $r_D = s_{\bar{D}}$ y como para todo $v \in U^*$ se cumple que $\delta_T(v) \geq 3$, entonces $U^* \cap V(D) = \emptyset$ ó $|U^* \cap V(D)| = \{r_D\}$.

Si $U^* \cap V(D) = \emptyset$, entonces tenemos lo siguiente:

$$|Hojas(T) \cap V(D)| \geq (k - 2)|U^* \cap V(D)| + 1.$$

Si $U^* \cap V(D) = \{r_D\}$, entonces debemos considerar la gráfica $T' = T + Q_{r_{\bar{D}}} + Q_{s_D} + R_z - r_{\bar{D}}r_D - s_Ds_{\bar{D}}$, la cual por el Teorema 1.9.5 es un árbol, como se muestra en la Figura 3.28. Además como $r_{\bar{D}}$ en $Q_{r_{\bar{D}}}$, s_D en Q_{s_D} y $z = r_D$ en R_z tenemos que $\delta_{T'}(r_{\bar{D}}) = \delta_T(r_{\bar{D}}) + 1 - 1$ y $\delta_{T'}(s_D) = \delta_T(s_D) + 1 - 1$ por lo que T' es un k -árbol tal que $Dom^m(T) \cup \{w\} \subseteq Dom^m(T')$, lo que es una contradicción (a). Por lo tanto, el caso para $U^* \cap V(D) = \{r_D\}$ no es posible.

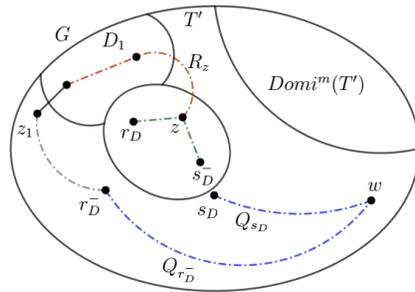


Figura 3.28: $T' = T + Q_{r_{\bar{D}}} + Q_{s_D} + R_z - r_{\bar{D}}r_D - s_Ds_{\bar{D}}$

Si D no es trayectoria, entonces existe un vértice z en $P[r_D, s_D)$ tal que $\delta_T(z) \geq 3$. Entonces, todo vértice de $P(z, s_D)$ tiene grado igual a 2 en T . Si $z \in U^*$, entonces D satisface la condición (g), por lo que se cumple que $D \in \mathfrak{D}_2^P$, lo que contradice el hecho de que $D \in \mathfrak{D}_2 - \mathfrak{D}_2^P$. Por lo tanto, $z \notin U^*$.

Por la Afirmación 3.2.9 sabemos que para todo vértice u en U^* se cumple que $\delta_T(u) = k$ y además por la observación (I) y (II) obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} |Hojas(D)| &= \sum_{v \in V(D)} \max\{\delta_D(v) - 2, 0\} + 2 \\ &\geq \sum_{v \in V(D)} \max\{\delta_T(v) - 2, 0\} = |Hojas(T) \cap V(D)| \\ &\geq \sum_{v \in V(D) \cap U^*} \max\{\delta_T(v) - 2, 0\} + \delta_T(z) - 2 \geq (k - 2)|U^* \cap V(D)| + 1. \end{aligned}$$

(iii) Para demostrar este inciso construyamos un nuevo árbol $T_{\mathfrak{D}_{\geq 3}}$ a partir del árbol T como a continuación sigue: Reemplacemos cada una de las componentes D de \mathfrak{D}_2 por una arista que une a su respectivo r_D^- con s_D . Contraemos cada una de las componentes de $\mathfrak{D}_{\geq 3}$ en un vértice, siguiendo la misma construcción realizada en la Afirmación 3.2.11. Entonces el número de hojas de T contenidas en $\bigcup_{D \in \mathfrak{D}_1} D$ es igual al número de hojas de $T_{\mathfrak{D}_3}$; es decir, $|Hojas(T) \cap \bigcup_{D \in \mathfrak{D}_1} D| = |Hojas(T_{\mathfrak{D}_{\geq 3}})|$. Como todo vértice $D \in \mathfrak{D}_{\geq 3}$ tiene grado igual a $|\vartheta_T(D)|$ en $T_{\mathfrak{D}_3}$, por el Lema 1.5 y la observación (I) tenemos que:

$$|Hojas(T) \cap \bigcup_{D_1 \in \mathfrak{D}_1} V(D)| = |Hojas(T_{\mathfrak{D}_3})| = \sum_{v \in T_{\mathfrak{D}_{\geq 3}}} \max\{\delta_D(v) - 2, 0\} + 2.$$

Para todo $v \in V^* \cup U^* \cup \bigcup_{D \in \mathfrak{D}_{\geq 3}} V(D)$ tenemos que $\delta_{T_{\mathfrak{D}_{\geq 3}}}(v) \geq 3$, por lo que:

$$\begin{aligned} &\sum_{v \in T_{\mathfrak{D}_{\geq 3}}} \max\{\delta_D(v) - 2, 0\} + 2 \geq \\ &\sum_{v \in V^*} (\delta_T(v) - 2) + \sum_{v \in U^* \cap \bigcup_{D \in \mathfrak{D}_1} D} (\delta_T(v) - 2) + \sum_{D \in \mathfrak{D}_{\geq 3}} (|\vartheta_T(D)| - 2) + 2 \\ &\geq (k - 2)|V^*| + (k - 2)|U^* \cap \bigcup_{D \in \mathfrak{D}_1} V(D)| + \sum_{D \in \mathfrak{D}_{\geq 3}} (|\vartheta_T(D)| - 2) + 2. \end{aligned}$$

(iv) Sea $D \in \mathfrak{D}_{\geq 3}$. Consideremos a $D' = T[V(D) \cup \vartheta_T(D)]$, entonces el número de hojas de T contenidas en D es igual al número de hojas contenidas en D' menos $|\vartheta_T(D)|$; es decir,

$$|Hojas(T) \cap V(D)| = |Hojas(D' \setminus \vartheta_T(D))|.$$

Por lo tanto, del Lema 1.5 y de lo anterior se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}
|Hojas(D')| &= \sum_{v \in V(D')} \max\{\delta_{D'}(v) - 2, 0\} + 2 - |\vartheta_T(D)| \\
&\geq \sum_{v \in V(D)} \max\{\delta_D(v) - 2, 0\} + 2 - |\vartheta_T(D)| + 2 \\
&\geq \sum_{v \in V(D) \cap U^*} (\delta_T(v) - 2) - |\vartheta_T(D)| + 2 = (k-2)|U^* \cap V(D)| - |\vartheta_T(D)| + 2. \diamond
\end{aligned}$$

Afirmación 3.2.18. $|Hojas(T)| \geq |\mathfrak{D}| - |\mathfrak{D}_2^P|$.

Demostración. Por la Afirmación 3.2.17 incisos (i) y (ii) sabemos que:

$$\left| \bigcup_{D \in \mathfrak{D}_2} (Hojas(T) \cap V(D)) \right| \geq (k-2)|U^* \cap \bigcup_{D \in \mathfrak{D}_2} V(D)| + |\mathfrak{D}_2| - |\mathfrak{D}_2^P|.$$

Por la Afirmación 3.2.17 inciso (iii) sabemos que:

$$\left| \bigcup_{D \in \mathfrak{D}_1} (Hojas(T) \cap V(D)) \right| \geq (k-2)|U^* \cap \bigcup_{D \in \mathfrak{D}_1} V(D)| - \sum_{D \in \mathfrak{D}_{\geq 3}} (|\vartheta_T(D)| - 2) + 2.$$

Por la Afirmación 3.2.17 inciso (iv) sabemos que:

$$\left| \bigcup_{D \in \mathfrak{D}_{\geq 3}} (Hojas(T) \cap V(D)) \right| \geq (k-2)|U^* \cap \bigcup_{D \in \mathfrak{D}_{\geq 3}} V(D)| - \sum_{D \in \mathfrak{D}_{\geq 3}} |\vartheta_T(D)| + 2|\mathfrak{D}_{\geq 3}|.$$

Sabemos que:

$$\begin{aligned}
|Hojas(T)| &\geq \left| \bigcup_{D \in \mathfrak{D}_1} (Hojas(T) \cap V(D)) \right| + \left| \bigcup_{D \in \mathfrak{D}_2} (Hojas(T) \cap V(D)) \right| + \\
&\quad + \left| \bigcup_{D \in \mathfrak{D}_{\geq 3}} (Hojas(T) \cap V(D)) \right|.
\end{aligned}$$

Sustituyendo se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
|Hojas(T)| &\geq (k-2)|U^* \cap \bigcup_{D \in \mathfrak{D}_2} V(D)| + |\mathfrak{D}_2| - |\mathfrak{D}_2^P| + (k-2)|U^* \cap \bigcup_{D \in \mathfrak{D}_1} V(D)| + (k-2)|V^*| + \\
&+ \sum_{D \in \mathfrak{D}_{\geq 3}} (\vartheta_T(D) - 2) + 2 + (k-2)|U^* \cap \bigcup_{D \in \mathfrak{D}_{\geq 3}} V(D)| - \sum_{D \in \mathfrak{D}_{\geq 3}} |\vartheta_T(D)| + 2|\mathfrak{D}_{\geq 3}|. \quad (3.1)
\end{aligned}$$

Sabemos que:

$$(k-2)|U^* \cap \bigcup_{D \in \mathfrak{D}_2} V(D)| + (k-2)|U^* \cap \bigcup_{D \in \mathfrak{D}_1} V(D)| +$$

$$\begin{aligned} &+(k-2)|U^* \cap \bigcup_{D \in \mathfrak{D}_{\geq 3}} V(D)| + (k-2)|V^*| \geq \\ &\geq (k-2)|U^* \cup V^*|. \end{aligned}$$

Además tenemos que:

$$\sum_{D \in \mathfrak{D}_{\geq 3}} (|\vartheta_T(D)| - 2)|\mathfrak{D}_{\geq 3}| = \sum_{D \in \mathfrak{D}_{\geq 3}} (|\vartheta_T(D)| - 2).$$

Por lo que de la ecuación 3.1 y de lo anterior obtenemos:

$$|Hojas(T)| \geq (k-2)|V^* \cup U^*| + |\mathfrak{D}_2| - |\mathfrak{D}_2^P| + 2. \quad (3.2)$$

Por la Afirmación 3.2.11 sabemos que:

$$(k-2)|V^* \cup U^*| \geq (k-2)|V^*| + (k-2) \sum_{D \in \mathfrak{D}_{\geq 3}} (|\vartheta_T(D)| - 1).$$

Por lo que de la ecuación 3.2 obtenemos lo siguiente:

$$|Hojas(T)| \geq (k-2)|V^*| + (k-2) \sum_{D \in \mathfrak{D}_{\geq 3}} (\vartheta_T(D) - 1) + |\mathfrak{D}_2| - |\mathfrak{D}_2^P| + 2. \quad (3.3)$$

Como $\sum_{D \in \mathfrak{D}_{\geq 3}} (|\vartheta_T(D)| - 1 - 1) + |\mathfrak{D}_{\geq 3}| = \sum_{D \in \mathfrak{D}_{\geq 3}} (|\vartheta_T(D)| - 1)$, entonces al sustituir $|V^*| = n$ y lo anterior en la ecuación 3.3 tenemos lo siguiente:

$$|Hojas(T)| \geq (k-2)n + \sum_{D \in \mathfrak{D}_{\geq 3}} (|\vartheta_T(D)| - 2) + |\mathfrak{D}_{\geq 3}| + |\mathfrak{D}_2| - |\mathfrak{D}_2^P| + 2. \quad (3.4)$$

De la Afirmación 3.2.2 parte (ii) sabemos que:

$$|\mathfrak{D}_1| = (k-2)n + \sum_{D \in \mathfrak{D}_{\geq 3}} (|\vartheta_T(D)| - 2) + 2,$$

por lo que de la ecuación 3.4 tenemos lo siguiente:

$$|Hojas(T)| \geq |\mathfrak{D}_1| + |\mathfrak{D}_{\geq 3}| + |\mathfrak{D}_2| - |\mathfrak{D}_2^P|. \quad (3.5)$$

Además sabemos que $|\mathfrak{D}| \geq |\mathfrak{D}_1| + |\mathfrak{D}_{\geq 3}| + |\mathfrak{D}_2|$.

Por lo tanto, de la ecuación 3.5 obtenemos que $|Hojas(T)| \geq |\mathfrak{D}| - |\mathfrak{D}_2^P|$. \diamond

De la afirmación 3.2.16 tenemos lo siguiente $\alpha^{2(m+1)}(G) \geq |Y_{Hojas} \cup Y_{Tray} \cup \{w\}|$.

Por la Afirmación 3.2.14 sabemos que $Y_{Hojas} \cap Y_{Tray} = \emptyset$

$$|Y_{Hojas} \cup Y_{Tray} \cup \{w\}| = |Y_{Hojas}| + |Y_{Tray}| + 1.$$

Por la Afirmación 3.2.4 sabemos que para dos vértices x_1 y x_2 distintos en $Hojas(T)$ tenemos que $y_{x_1} \neq y_{x_2}$ en Y_{Hojas} , por lo que tenemos que $|Y_{Hojas}| = |Hojas(T)|$. Nuevamente por la Afirmación 3.2.14 sabemos que para $D_1 \neq D_2$ en \mathfrak{D}_2^p tenemos dos vértices y_{D_1} y y_{D_2} distintos en Y_{Tray} , por lo que $|Y_{Tray}| = |\mathfrak{D}_2^p|$. Por lo que, tenemos que

$$|Y_{Hojas}| + |Y_{Tray}| + 1 = |Hojas(T)| + |\mathfrak{D}_2^p| + 1.$$

Por la Afirmación 3.2.18 sabemos que

$$|Hojas(T)| \geq |\mathfrak{D}| - |\mathfrak{D}_2^p|,$$

así tenemos que

$$|Hojas(T)| + |\mathfrak{D}_2^p| + 1 \geq |\mathfrak{D}| - |\mathfrak{D}_2^p| + |\mathfrak{D}_2^p| + 1 = |\mathfrak{D}| + 1.$$

De la Afirmación 3.2.2 sabemos que: $|\mathfrak{D}| + 1 = (k - 1)n + 2$.

Por lo tanto, $\alpha^{2(m+1)}(G) \geq (k - 1)n + 2$.

Por hipótesis del Teorema 3.2.1 tenemos que $\alpha^{2(m+1)}(G) \leq (k - 1)n + 1$.

Por lo que $(k - 1)n + 1 \geq \alpha^{2(m+1)}(G) \geq (k - 1)n + 2$,

$$(k - 1)n + 1 \geq (k - 1)n + 2.$$

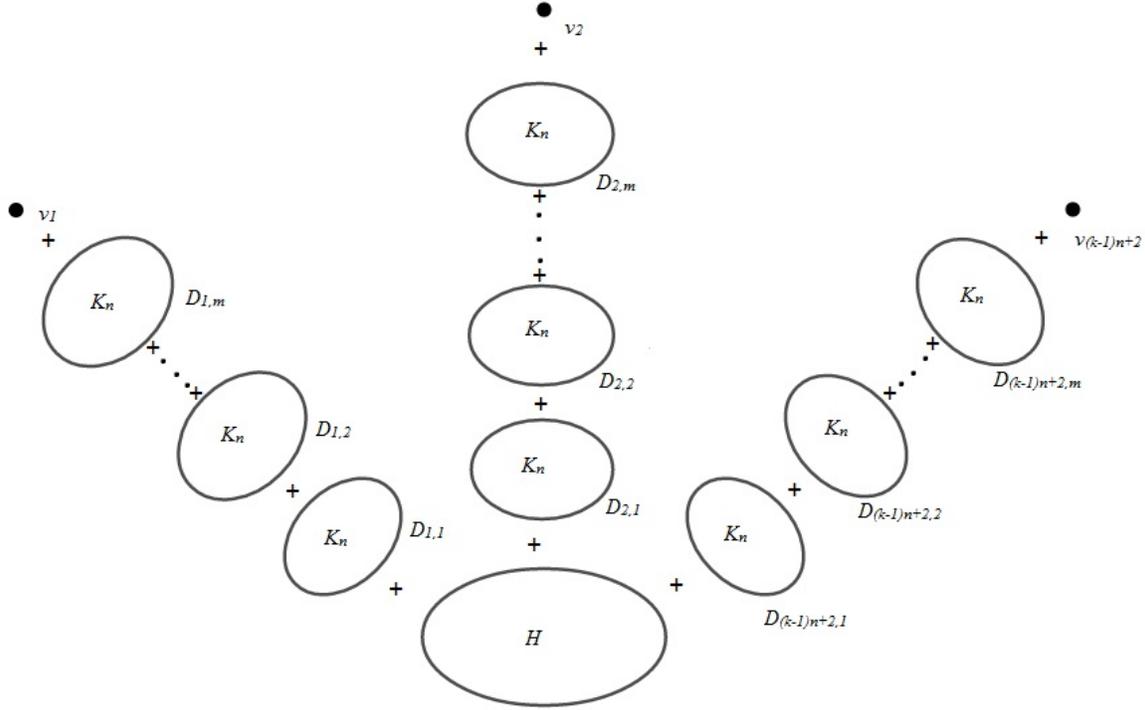
Esto es una contradicción.

Por lo tanto, G tiene un k -árbol que m -domina a G . □

Probaremos que efectivamente las condiciones del Teorema 3.2.1 son justas en el entendido de que existe una familia de gráficas G que satisface la condición $\alpha^{2(m+1)}(G) = (k - 1)n + 2$, pero no tiene un k -árbol que m -domina a G .

Para esto construiremos una gráfica G como sigue a continuación:

Sean $k \geq 2$, $m \geq 1$ y $n \geq 1$ tres enteros positivos, tomemos a $D_{i,1}, D_{i,2}, \dots, D_{i,m}$ como las copias de gráficas completas de orden n , donde $1 \leq i \leq (k - 1)n + 2$, tal que para cada $1 \leq i \leq (k - 1)n + 2$ y $1 \leq j \leq m - 1$ unimos todos los vértices de $D_{i,j}$ con todos los vértices de $D_{i,j+1}$; es decir, $D_{i,j} + D_{i,j+1}$. Para cada $1 \leq i \leq (k - 1)n + 2$, agregamos v_i un nuevo vértice y lo unimos a todos los vértices de $D_{i,m}$. Añadimos H una gráfica de orden n , tal que para cada $1 \leq i \leq (k - 1)n + 2$ hacemos adyacente a cada vértice de H con cada vértice de $D_{i,1}$. Con esto obtenemos G la gráfica deseada como se muestra en la siguiente Figura.

Figura 3.29: Construcción de G

Ahora notemos que G es una gráfica n -conexa. Demostraremos que para todo par de vértices en G existen al menos n trayectorias internamente ajenas entre dicho par de vértices.

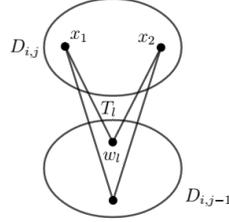
Sean x_1 y x_2 dos vértices de G . Consideremos los siguientes casos:

Caso 1) Si $\{x_1, x_2\} \subseteq H$ o $\{x_1, x_2\} \subseteq D_{i,j}$ para i en $\{1, 2, \dots, (k-1)n+2\}$ y j en $\{2, \dots, m\}$.

Caso 1.1) Si $\{x_1, x_2\} \subseteq H$, entonces podemos construir las n trayectorias internamente ajenas entre x_1 y x_2 pasando por $D_{1,1}$ como a continuación se muestra: como $|D_{1,1}| = n$ tomemos a z_l en $D_{1,1}$ y construimos la trayectoria $T_l = (x_1, z_l, x_2)$ para l en $\{1, 2, \dots, n\}$.

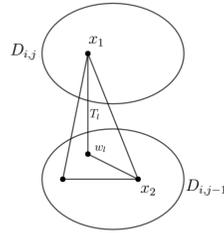
Caso 1.2) Si $\{x_1, x_2\} \subseteq D_{i,j}$ para j en $\{2, 3, \dots, n\}$, entonces como todos los vértices de $D_{i,j}$ son adyacentes a los vértices de $D_{i,j-1}$ y $|D_{i,j-1}| = n$, tomemos a w_l en $D_{i,j-1}$ para l en $\{1, 2, \dots, n\}$ y construimos las n (x_1, x_2) -trayectorias internamente ajenas de la forma siguiente: $T_l = (x_1, w_l, x_2)$. Para $j = 1$ sabemos por la construcción de G que todos los vértices de H son adyacentes a todos

los vértices de la componente $D_{i,1}$ y tenemos que $|D_{i,1}| = n$, entonces tomemos a h_l en $V(H)$ con l en $\{1, 2, \dots, n\}$ y construimos las n (x_1, x_2) -trayectorias internamente ajenas de la siguiente forma: $T_l = (x_1, h_l, x_2)$.

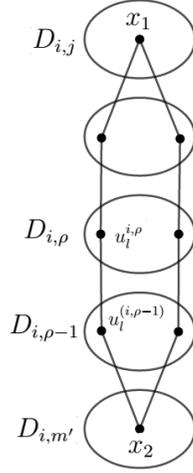


Caso 2) Si x_1 está en $D_{i,j}$ y x_2 está en $D_{i,l}$ para i y l en $\{1, 2, \dots, (k-1)n+2\}$, con i fijo y $l \neq i$, entonces consideremos los siguientes subcasos:

Caso 2.1) Si $x_1 \in V(D_{i,j})$ y $x_2 \in V(D_{i,j-1})$ para i en $\{1, 2, \dots, (k-1)n+2\}$ y j en $\{2, 3, \dots, m\}$, entonces como x_1 es adyacente a cada uno de los n vértices de $D_{i,j-1}$ y como $D_{i,j-1}$ es completa tenemos que x_2 es adyacente a todos los vértices en $V(D_{i,j-1}) \setminus \{x_2\}$, por lo que tenemos n (x_1, x_2) -trayectorias internamente ajenas.



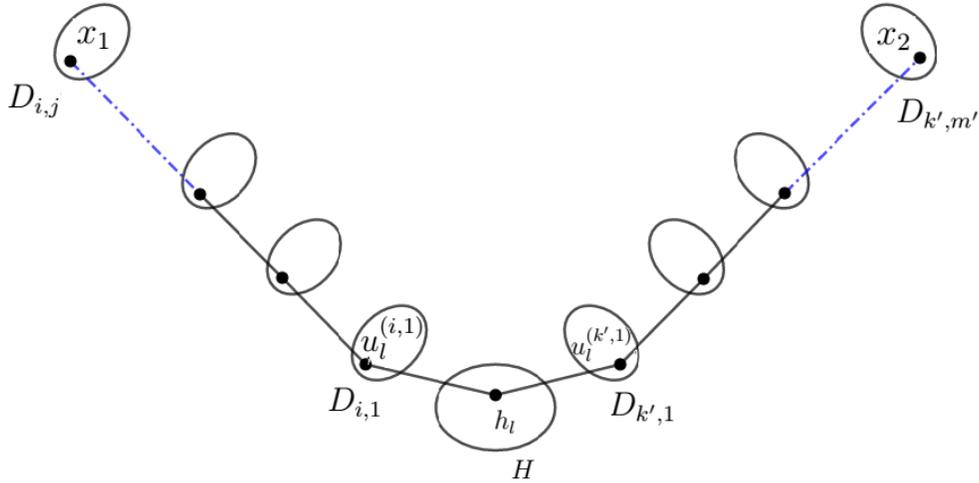
Caso 2.2) Si $x_1 \in V(D_{i,j})$ y $x_2 \in V(D_{i,m'})$ para i en $\{1, 2, \dots, (k-1)n+2\}$ y $\{m', j\}$ en $\{1, 2, \dots, m\}$, con $j \neq m'$, $j-1 \neq m'$ y $j > m'$, entonces tomemos a $u_l^{(i,\rho)}$ en $V(D_{i,\rho})$ para toda $m' < \rho < j$ con l en $\{1, 2, \dots, n\}$, como $u_l^{(i,\rho)}$ es adyacente a $u_l^{(i,\rho-1)}$ con $u_l^{(i,\rho-1)} \in V(D_{i,\rho-1})$, podemos construir n (x_1, x_2) -trayectorias internamente ajenas como sigue $(x_1, u_l^{(i,j-1)}, u_l^{(i,j-2)}, \dots, u_l^{(i,m'+1)}, x_2)$, para toda i en $\{1, 2, \dots, (k-1)n+2\}$, j en $\{1, 2, \dots, m\}$, $m' < \rho < j$ y l en $\{1, 2, \dots, n\}$.



Caso 3) Si $x_1 \in V(D_{i,j})$ y $x_2 \in V(D_{k',m'})$ para $\{i, k'\} \subseteq \{1, 2, \dots, (k-1)n+2\}$ y $\{m', j\} \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$, con $i \neq k'$ y $j \neq m'$, entonces por el caso (2) encontramos al menos n $(x_1, u_l^{i,1})$ -trayectorias, por otro lado tenemos n $(x_2, u_l^{k',1})$ -trayectorias para l en $\{1, 2, \dots, n\}$. Como los vértices de H son adyacentes a todos los vértices de $D_{i,1}$ y $D_{k',1}$ tomemos a h_l un vértice en H con l en $\{1, 2, \dots, n\}$, que es adyacente a $u_l^{(i,1)}$ y a $u_l^{(k',1)}$. Por lo tanto, tenemos n (x_1, x_2) -trayectorias internamente ajenas en G obtenidas de la siguiente manera:

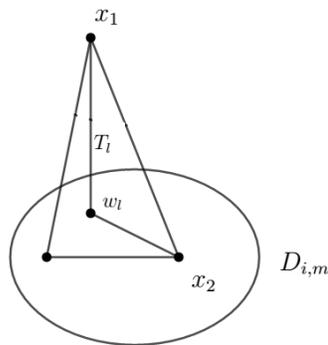
$$(x_1, u_l^{(i,j-1)}, u_l^{(i,j-2)}, \dots, u_l^{(i,1)}, h_l) \cup (h_l, u_l^{(k',1)}, \dots, x_2),$$

para toda l en $\{1, 2, \dots, n\}$, $\{i, k'\}$ en $\{1, 2, \dots, (k-1)n+2\}$ y $\{m', j\}$ en $\{1, 2, \dots, m\}$, con $i \neq k'$ y $j \neq m'$.

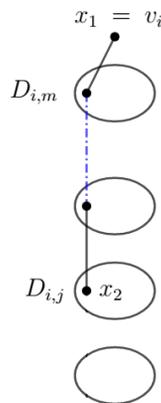


Caso 4) $x_1 = v_i$ y $x_2 \in V(D_{i,j})$ con i en $\{1, 2, \dots, (k-1)n+2\}$ y j en $\{1, 2, \dots, m\}$.

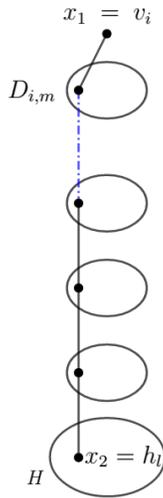
Caso 4.1) Si $x_1 = v_i$ y $x_2 \in V(D_{i,j})$ para $j = m$, entonces como el vértice v_i es de grado n podemos construir como en el caso (2.1) las n (v_i, x_2) -trayectorias internamente ajenas.



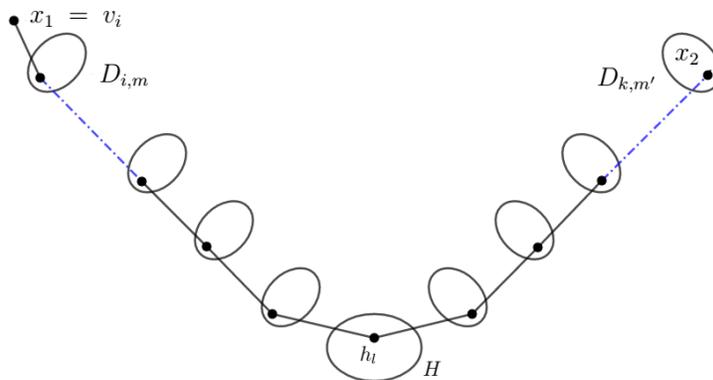
Caso 4.2) Si $x_1 = v_i$ y $x_2 \in V(D_{i,j})$ con i en $\{1, 2, \dots, (k-1)n+2\}$ y j en $\{1, 2, \dots, m-1\}$, entonces como el vértice v_i es de grado n podemos construir como en el caso (2.2) las n (v_i, x_2) -trayectorias internamente ajenas.



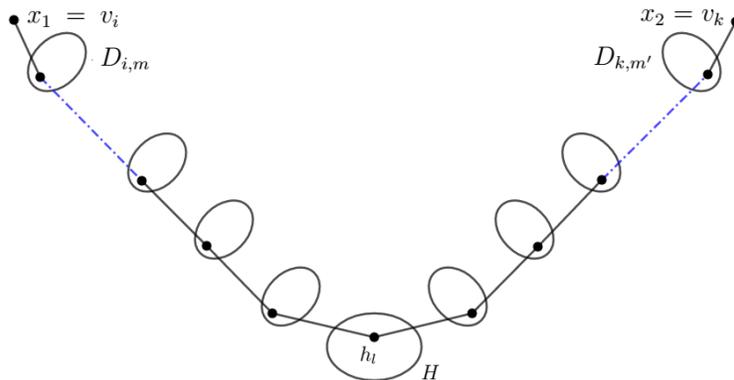
Caso 5) Si $x_1 = v_i$ y $x_2 = h_l$ en $V(H)$ con i en $\{1, 2, \dots, (k-1)n+2\}$ y l en $\{1, 2, \dots, n\}$, entonces como el vértice v_i es de grado n podemos construir como en el caso (3) las n (v_i, h_l) -trayectorias internamente ajenas.



Caso 6) Si $x_1 = v_i$ y $x_2 \in V(D_{k,m'})$ para $\{i, k\}$ en $\{1, 2, \dots, (k-1)n+2\}$ y $\{m', j\} \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$, con $i \neq k'$ y $j \neq m'$, entonces como el vértice v_i es de grado n podemos construir como en los casos (3) y (5) las n (v_i, x_2) -trayectorias internamente ajenas pasando por H .



Caso 7) Si $x_1 = v_i$ y $x_2 = v_k$ para $\{i, k\} \subseteq \{1, 2, \dots, (k-1)n+2\}$ con $i \neq k'$, entonces como el vértice v_i es de grado n podemos construir como en los casos (3) y (5) las n (v_i, v_k) -trayectorias internamente ajenas pasando por H .



Por los casos anteriores concluimos que G es n -conexa.

Lema 3.3. La gráfica bipartita $K_{n,(k-1)n+2}$ no tiene un k -árbol generador.

Demostración. Supongamos por contradicción que $K_{n,(k-1)n+2}$ tiene un k -árbol generador T . Como T es árbol se cumple que $|A(T)| = p - 1$ y como $p = (k-1)n+2+n$, entonces $|A(T)| = (k-1)n+2+n-1 = (k)n+1$.

Ya que $K_{n,(k-1)n+2}$ es una gráfica bipartita, tenemos una partición $P = (V_1, V_2)$ de $V(K_{n,(k-1)n+2})$ tal que $|V_1| = n$ y $|V_2| = (k-1)n+2$. Como T es k -árbol generador tenemos que $V_1 \subseteq V(T)$, por lo que se tiene que $\delta_{T[V_1]}(x) \leq k$ para todo x en $T[V_1]$, entonces $|A(T)| \leq (k)n$. Por lo tanto, $|A(T)| = (k)n+1 \leq (k)n$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $K_{n,(k-1)n+2}$ no tiene un k -árbol generador. \square

Veamos que G no tiene un k -árbol m -dominante. Supongamos por contradicción que G tiene un k -árbol m -dominante T . Para que T sea m -dominante se debe cumplir que existe un x_j en $D_{1,j}$ para toda j en $\{1, 2, \dots, (k-1)n+1\}$ que esta en $V(T)$, supongamos por contradicción que no existe un vértice x_j en $D_{1,j}$ que este en $V(T)$, entonces $d_G(v_j, T) > m$ lo que contradice que T m -domine a G ó T es inconexa. Como no existen aristas entre $D_{j,1}$ y $D_{j-1,1}$ para toda j en $\{2, 3, \dots, (k-1)n+1\}$, entonces es necesario para que T sea conexa tener al menos una arista de cada $D_{1,j}$ a H para toda j en $\{1, 2, \dots, (k-1)n+1\}$. Como el número de vértices de H es igual a n y por lo visto anteriormente son necesarias al menos $(k-1)n+1$ aristas entre H y las $D_{j,1}$ para j en $\{2, 3, \dots, (k-1)n+1\}$, tenemos como subgráfica de G a la gráfica bipartita

$K_{n,(k-1)n+2}$, la cual por el lema anterior no tiene un k -árbol generador. Por lo tanto, G no tiene un k -árbol m -dominante.

Por otro lado, recordemos que:

$$\alpha^l(G) = \text{máx}\{|S| : S \subseteq V(G) \text{ } d_G(x, y) \geq l \text{ con } x \neq y \text{ y } \{x, y\} \subseteq S\}.$$

Afirmamos que: $\alpha^{2(m+1)}(G) = \text{máx}\{|v_i : 1 \leq i \leq (k-1)n+2\}| = (k-1)n+2$.

Recordemos que los vértices v_i en $V(G)$, son los vértices adyacentes a los vértices de la componente $D_{i,m}$, con i en $\{1 \leq i \leq (k-1)n+2\}$. Sea $S = \{v_i : 1 \leq i \leq (k-1)n+2\}$. Para los vértices v_i en S , como se tiene que $d_G(v_i, H) = m+1$ para cada uno de ellos, entonces si tomamos dos a dos estos vértices resulta que se tiene $d_G(v_i, v_{i-1}) \geq 2(m+1)$ y además tenemos exactamente $(k-1)n+2$ vértices v_i . Ahora como cada una de las $D_{i,j}$ son completas, entonces tenemos que: $\alpha^{2(m+1)}(G) = |S|$.

Con esto se prueba que efectivamente las condiciones del Teorema 3.2.1 son justas.

A partir de la demostración del Teorema 3.2.1 se puede deducir un algoritmo a seguir para obtener un k -árbol m dominante en una gráfica n -conexa que cumple con las hipótesis del Teorema 3.2.1.

A continuacion presentamos dicho algoritmo:

Paso 1) Sea G una gráfica n -conexa que cumple que $\alpha^{2(m+1)}(G) \leq (k-1)n+1$. Tomar un árbol T tal que $T \leq G$ y $|V(T)| = n$.

Paso 2) Si T m -domina a G , entonces el proceso finaliza. Si T no m -domina a G , entonces existe un vértice w en $V(G) - \text{Dom}^m(T)$. Tomar las Q_1, Q_2, \dots, Q_n (w, T) -trayectorias internamente ajenas tales que para toda i en $\{1, 2, \dots, n\}$ $\{v_i\} = V(Q_i) \cap V(T)$ y $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} = V^*$ (conjuntos definidos en la demostración del Teorema 3.2.1). Ir al paso siguiente.

Paso 3) Si $\delta_T(v_i) \leq k-1$ para algún v_i en V^* , entonces considerar el siguiente árbol:

$$T' \sim T + Q_i$$

e ir al paso 2 (Afirmación 3.2.1). Si esto no se cumple, entonces para todo vértice v_i en V^* $\delta_T(v_i) = k$ con i en $\{1, 2, \dots, n\}$. Ir al paso siguiente.

Paso 4) Si existe una arista $v_i v_j$ en $A(T)$ con $v_i \neq v_j$, entonces considerar el árbol:

$$T' \sim T + Q_{v_i} + Q_{v_j} - v_i v_j$$

e ir al paso 2 (Afirmación 3.2.2). Si esto no se cumple, entonces para todo $\{i, j\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ con $i \neq j$ $v_i v_j \notin A(T)$. Ir al paso siguiente.

Paso 5) Si para un vértice x en $Hojas(T)$ se cumple que $Dom_i^m(T) = Dom_i^m(T - x)$ y x es adyacente a algún v_i en $V(T)$, entonces considerar el árbol siguiente:

$$T' \sim T - x + Q_{v_i}$$

e ir al paso 2 (Afirmación 3.2.3). Si esto no se cumple, entonces para todo vértice x en $Hojas(T)$ x no es adyacente a algún vértice v_i con i en $\{1, 2, \dots, n\}$ ó $Dom_i^m(T) \supseteq Dom_i^m(T - x)$. Ir al siguiente paso.

Paso 6) Si $x \in Hojas(T)$, y_x en $Dom_i^m(T) - V(T)$ con $d_G(y_x, w) \leq m$ y P es una (x, w) -trayectoria ó una (x, y_x) -trayectoria con $V(P) \setminus \{x\} \subseteq V(G) - V(T)$, entonces considerar el árbol:

$$T' \sim T + P$$

e ir al paso 2 (Afirmación 3.2.5). Si esto no se cumple, entonces para todo vértice x en $Hojas(T)$, y_x en $Dom_i^m(T) - V(T)$ se cumple que $d_G(y_x, w) > m$ ó no existe P una (x, w) -trayectoria ó una (x, y_x) -trayectoria con vértices interiores contenidos en $G - T$. Ir al paso siguiente.

Paso 7) Si $x \in Hojas(T)$ y $Dom_i^m(T - x) = Dom_i^m(T)$, entonces considerar el árbol siguiente:

$$T' \sim T - x$$

e ir al paso 2 (por la Afirmación 3.2.3). Si esto no se cumple, entonces tomar a $Y_{Hojas} = \{y_x : x \in Hojas(T)\}$ y $S(y) = \{x \in Hojas(T) : y_x = y\}$. Ir al paso siguiente.

Paso 8) Si para $\{x_1, x_2\} \subseteq Hojas(T)$ existe P una (x_1, x_2) -trayectoria con vértices interiores en $G - T$, P' la (x_1, x_2) -trayectoria en T y $e \in A(P')$ tal que e incide en un vértice v_a en V^* para alguna a en $\{1, 2, \dots, n\}$, entonces considerar el árbol siguiente:

$$T' \sim T + P + Q_a - e$$

e ir al paso 2 (por la Afirmación 3.2.6). Si esto no se cumple, entonces $P' \cap V^* = \emptyset$. Ir al paso siguiente.

Paso 9) Si para $\{x_1, x_2\} \subseteq Hojas(T)$ existe P una (x_1, x_2) -trayectoria con vértices interiores en $G - T$, P' la (x_1, x_2) -trayectoria en T , $P' \cap V^* = \emptyset$ y $e \in A(P')$

una arista que incide en un vértice en P' de grado mayor o igual que 3, entonces considerar el árbol siguiente:

$$T' \sim T + P - e$$

e ir al paso 2 (por la Afirmación 3.2.6). Si esto no se cumple, entonces tomar a: $\mathfrak{D}_1 = \{D \in \mathfrak{D} : |\vartheta_T(D)| = 1\}$, $\mathfrak{D}_2 = \{D \in \mathfrak{D} : |\vartheta_T(D)| = 2\}$ y $\mathfrak{D}_{\geq 3} = \{D \in \mathfrak{D} : |\vartheta_T(D)| \geq 3\}$ los conjuntos de componentes conexas de $T - V^*$ donde $\vartheta_T(D)$ es el conjunto de vecinos de D en T (conjuntos definidos en la demostración del Teorema 3.2.1). Tomar a D_1 una componente de $T - V^*$ tal que $\vartheta_T(D_1) = \{v_1\}$ y $\Delta_T([D_1]) \leq k - 1$. Tomar a R_1, R_2, \dots, R_n las $(D_1, T - D_1)$ -trayectorias con vértices interiores en $G - T$ y vértices finales $\{u_1, u_2, \dots, u_n\} = U^*$ (dos conjuntos definidos en la demostración del Teorema 3.2.1). Ir al paso siguiente.

Paso 10) Si existe P una (w, D_1) -trayectoria, entonces considerar al árbol:

$$T' \sim T + P$$

e ir al paso 2 (Afirmación 3.2.8). Si esto no se cumple, entonces no existe una (w, D_1) -trayectoria. Tomar a r_D el vértice raíz de la componente D , r_D^- el vértice antecesor en T del vértice r_D , s_D^- el vértice final de la componente D , s_D el vértice sucesor en T del vértice s_D^- y Q_1 la (v_1, w) -trayectoria. Ir al paso siguiente.

Paso 11) Si $\delta_T(u) < k$, para algún vértice $u \in U^*$ y R_a es una $(D_1, T - D_1)$ -trayectoria, entonces considerar el siguiente árbol:

$$T' \sim (T + R_a + Q_1) - r_{D_1} r_{D_1}^-$$

e ir al paso 2 (Afirmación 3.2.9). Si esto no se cumple, entonces $\delta_T(u) = k$ para todo vértice $u \in U^*$. Ir al paso siguiente.

Paso 12) Si para $D \in \mathfrak{D}_{\geq 3}$ existe un vértice $u \in U^* \cap \vartheta_T(D - r_D^-)$, entonces considerar el árbol siguiente:

$$T' \sim T + R_a - uu^-$$

e ir al paso 2 (por Afirmación 3.2.10). Si esto no se cumple, entonces $|\mathfrak{D}_1 \cup \mathfrak{D}_{\geq 3}|$ es mínimo y tomar a $D \in \mathfrak{D}_2^p$ una componente pseudotrectoria (conjunto definido como en el Teorema 3.2.1). Ir al paso siguiente.

Paso 13) Si $D \in \mathfrak{D}_2^p$, entonces considerar los siguientes casos:

- 13.1) Si $D \in \mathfrak{D}_2^p$ cumple que $r_D = s_D^-$ y $D = \{r_D\}$ (de acuerdo con la propiedad (e) de la demostración del Teorema 3.2.1), entonces considerar el siguiente árbol:

$$T' \sim T + Q_{r_D^-} + Q_{s_D} - r_D$$

e ir al paso 2 (Afirmación 3.2.12).

- 13.2) Si $D \in \mathfrak{D}_2^p$ cumple que D es una trayectoria con $r_D \neq s_D^-$ (de acuerdo con la propiedad (f) de la demostración del Teorema 3.2.1), entonces considerar el árbol siguiente:

$$T' \sim T + Q_{r_D^-} + Q_{s_D} - P[r_D, s_D^-]$$

e ir al paso 2 (Afirmación 3.2.12).

- 13.3) Si $D \in \mathfrak{D}_2^p$ cumple que existe un vértice z_D en $P(r_D, s_D^-]$, tal que para todo vértice $z \in P(z_D, s_D^-]$ se tiene que $\delta_T(z) = 2$ (de acuerdo con la propiedad (g) de la demostración del Teorema 3.2.1), entonces considerar el siguiente árbol:

$$T' \sim T + Q_{r_D^-} + Q_{s_D} + R_{z_D} - r_D, r_D^-, s_D s_D^-$$

e ir al paso 2 (Afirmación 3.2.12).

Si esto no se cumple, entonces tomar a $W = \{y \in V(G) : d_G(y, P[x_D, s_D^-]) = m\}$. Ir al paso siguiente.

Paso 14) Si

$$W = \emptyset \text{ ó } d_G(y, T - P[x_D, s_D^-]) \leq m$$

para toda $y \in W$, entonces considerar los siguientes casos:

- 14.1) Si $D \in \mathfrak{D}_2^p$ cumple que $r_D = s_D^-$ y $D = \{r_D\}$ (de acuerdo con la propiedad (e) de la demostración del Teorema 3.2.1), entonces considerar el siguiente árbol:

$$T' \sim T + Q_{r_D^-} + Q_{s_D} - D$$

e ir al paso 2 (Afirmación 3.2.13).

- 14.2) Si $D \in \mathfrak{D}_2^p$ cumple que D es una trayectoria con $r_D \neq s_D^-$ (de acuerdo con la propiedad (f) de la demostración del Teorema 3.2.1), entonces considerar el siguiente árbol:

$$T' \sim T + Q_{r_D^-} + Q_{s_D} - P[r_D, s_D^-],$$

e ir al paso 2 (Afirmación 3.2.13).

- 14.3) Si $D \in \mathfrak{D}_2^p$ cumple que existe un vértice z_D en $P(r_D, s_D^-]$, tal que para todo vértice $z \in P(z_D, s_D^-]$ se tiene que $\delta_T(z) = 2$ (de acuerdo con la propiedad (g) de la demostración del Teorema 3.2.1), entonces considerar el siguiente árbol:

$$T' \sim T + Q_{r_D^-} + Q_{s_D} + R_{z_D} - P(z_D, s_D) - r_D r_D^-,$$

e ir al paso 2 (Afirmación 3.2.13).

Si esto no se cumple, entonces tomar a Q una $(w, S(y))$ -trayectoria con vértices interiores en $G - T$, donde $S(y) = V(P[x_D, s_D^-])$. Ir al paso siguiente.

- Paso 15) Si $D \in \mathfrak{D}_2^p$ y existe Q una $(w, S(y))$ -trayectoria con vértices interiores en $G - T$ para $S(y) \subseteq D$, entonces considerar los siguientes casos:

- 15.1) Si $D \in \mathfrak{D}_2^p$ cumple que $r_D = s_D^-$ y $D = \{r_D\}$ (de acuerdo con la propiedad (e) de la demostración del Teorema 3.2.1), entonces considerar el árbol:

$$T' \sim T + Q$$

e ir al paso 2 (Afirmación 3.2.15).

- 15.2) Si $D \in \mathfrak{D}_2^p$ cumple que D es una trayectoria con $r_D \neq s_D^-$ (de acuerdo con la propiedad (f) de la demostración del Teorema 3.2.1), entonces considerar el árbol:

$$T' \sim T + Q$$

e ir al paso 2 (Afirmación 3.2.15).

- 15.3) Si $D \in \mathfrak{D}_2^p$ cumple que existe un vértice z_D en $P(r_D, s_D^-]$, tal que para todo vértice $z \in P(z_D, s_D^-]$ se tiene que $\delta_T(z) = 2$ (de acuerdo con la propiedad (g) de la demostración del Teorema 3.2.1), entonces para w_0 el primer vértice en $Q_{s_D} \cap Q$ considerar el árbol:

$$T' \sim T + Q_{s_D} + Q[w_0, z] - P(z, s_D)$$

e ir al paso 2 (Afirmación 3.2.15).

Si esto no se cumple, entonces existe Q una $(D_1, S(y))$ -trayectoria con vértices interiores en $G - T$, donde $S(y) = V(P[x_D, s_D^-])$. Ir al paso siguiente.

- Paso 16) Si $D \in \mathfrak{D}_2^p$ y existe Q una $(D_1, S(y))$ -trayectoria con vértices interiores en $G - T$ para $S(y) \subseteq D$, entonces considerar el árbol:

$$T' \sim T + Q_{r_D^-} + Q_{s_D} + Q - r_D r_D^- - s_D^- s_D$$

e ir al paso 2 (Afirmación 3.2.15). Si esto no se cumple, entonces ir al paso siguiente.

Paso 17) Si $D \in \mathfrak{D}_2^p$, Q una $(S(y_1), S(y_2))$ -trayectoria con vértices interiores contenidos en $G - T$, $\{S(y_1), S(y_2)\} \subseteq D$ y $S(y_1) \neq S(y_2)$, entonces considerar los siguientes casos:

17.1) Si $\{y_1, y_2\} \subseteq Y_{Hojas}$, entonces se procede como en el paso 8.

17.2) Si y_1 en Y_{Hojas} y y_2 en Y_{Tray} , entonces considerar los siguientes subcasos:

17.2.a) Si $S(y_1)$ en $Hojas(T) \cap D$, $S(y_1) = x$ y D cumple que existe un vértice z_D en $P(r_D, s_D^-]$, tal que para todo vértice $z \in P(z_D, s_D^-]$ se tiene que $\delta_T(z) = 2$ (de acuerdo con la propiedad (g) de la demostración del Teorema 3.2.1), entonces considerar el árbol:

$$T' \sim (T + Q_{r_D^-} + Q_{s_D} + R_{z_D} + Q) - P(z_D, s_D) - r_D^- r_D - z_D z^*,$$

donde z^* en $P(z_D, x)$. Ir al paso 2 (Afirmación 3.2.16).

17.2.b) Si $S(y_2)$ en $Hojas(T)$ y además $S(y_2) \notin V(D)$, entonces considerar el árbol:

$$T' \sim (T + Q_{r_D^-} + Q_{s_D} + Q) - P(z_D, s_D) - r_D^- r_D$$

e ir al paso 2 (Afirmación 3.2.16).

17.3) Si $\{y_1, y_2\} \subseteq Y_{Tray}$, entonces considerar lo siguiente:

17.3.a) Si D_a en \mathfrak{D}_2^p y además cumple que $r_D = s_D^-$ y $D = \{r_D\}$ ó cumple que D es una trayectoria con $r_D \neq s_D^-$ (de acuerdo con las propiedades (e) ó (f) de la demostración del Teorema 3.2.1), entonces considerar el árbol:

$$T' \sim (T + Q_{r_{D_a}^-} + Q_{s_{D_a}} + Q_{s_{D_b}} + Q) - P(z_{D_b}, s_{D_b}) - r_{D_a}^- r_{D_a} - s_{D_a} s_{D_a}^-$$

e ir al paso 2 (Afirmación 3.2.16).

17.3.b) Si $\{D_a, D_b\} \subseteq \mathfrak{D}_2^p$ y además existe un vértice z_{D_a} en $P(r_{D_a}, s_{D_a}^-]$, tal que para todo vértice $z \in P(z_{D_a}, s_{D_a}^-]$ se tiene que $\delta_T(z) = 2$ y existe un vértice z_{D_b} en $P(r_{D_b}, s_{D_b}^-]$, tal que para todo vértice $z \in P(z_{D_b}, s_{D_b}^-]$ se tiene que $\delta_T(z) = 2$ (de acuerdo con la propiedad (g) de la demostración del Teorema 3.2.1) cumplen con la propiedad (g), entonces considerar el árbol T' siguiente:

$$(T + Q_{r_{D_a}^-} + Q_{s_{D_a}} + Q_{s_{D_b}} + Q) - P(z_{D_a}, s_{D_a}) - P(z_{D_b}, s_{D_b}) - r_{D_a}^- r_{D_a}$$

e ir al paso 2 (Afirmación 3.2.16).

Si esto no se cumple, entonces tomar a $D \in \mathfrak{D}_2 - \mathfrak{D}_2^p$ una componente conexa de $T - V^*$; que es una trayectoria con $r_D = s_D^-$. Ir al paso siguiente.

Paso 18) Si $D \in \mathfrak{D}_2 - \mathfrak{D}_2^p$ es una trayectoria con $r_D = s_D^-$, D contiene una hoja de T y $U^* \cap D = \{r_D\}$, entonces consideramos a:

$$T' \sim (T + Q_{r_D^-} + Q_{s_D} + R_{r_D}) - r_D^- r_D - s_D^- s_D.$$

e ir al paso 2 (Afirmación 3.2.17).

Con este último paso del algoritmo cubrimos todas las posibilidades para encontrar un k -árbol m -dominante en una gráfica G n -conexa que cumpla las hipótesis del Teorema 3.2.1.

3.3. Aplicación sobre una red de distribución de agua potable

En esta sección implementaremos el algoritmo a una gráfica. La cual la obtendremos a partir de un problema en una red de distribución de agua potable.

Deseamos mejorar la distribución de agua potable en el cuadro central del centro histórico de la ciudad de Oaxaca de Juárez (Figura 3.30). Para lograr esto se desea que en todos los puntos de la red el agua llegue con una presión mínima establecida. Con este objetivo se busca implementar la infraestructura necesaria sobre un ramal principal, en el cual se tenga alta presión y estaciones de rebombeo para satisfacer la demanda de una presión mínima en todos los puntos de la red. En nuestro cuadro la topografía es plana.



Figura 3.30: Red de distribución de agua potable.

Dicho cuadro de la ciudad tiene configuración de una reja, entonces puede ser modelado por una gráfica G , donde los vértices representan las intersecciones de las cuadras y las aristas las tuberías a lo largo de las calles, como se muestra en la Figura 3.31.

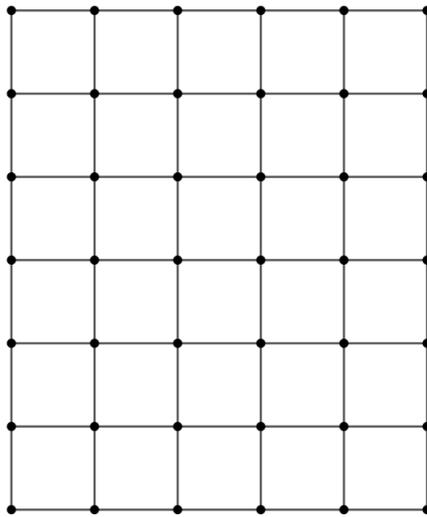


Figura 3.31: Gráfica obtenida a partir de la red de distribución de agua potable.

Para garantizar que el servicio llegue con una presión mínima deseada es necesario entender lo siguiente:

- Para mantener una presión mínima en todos los puntos es necesario identificar los vértices candidatos a ser estaciones de rebombeo, los cuales deberán estar localizados sobre el ramal de alta presión.
- A partir de la salida del agua del ramal de alta presión, la presión comienza a disminuir, de acuerdo con el "Manual de Agua Potable, alcantarillado y saneamiento" sabemos que a distancia 2 del ramal de alta presión se tiene la presión mínima deseada [8], por lo que los puntos de la red deberán estar a distancia menor o igual que 2 del ramal de alta presión.

Entonces encontrar el ramal de alta presión se traduce en buscar en G una subgráfica que sea conexa y sin ciclos, tal que la distancia de los vértices de G a la subgráfica obtenida sea menor o igual a 2, lo que permite tener una presión mínima en todos los vértices de G .

Por lo anterior una posible solución es encontrar un árbol que 2-domine a la gráfica G . Pues la 2-dominación nos determina la distancia máxima en la que la presión mínima del agua se tiene, entendiendo que al exceder dicha distancia se tendrá una presión menor a la presión mínima deseada. Cualquier vértice del árbol solución será candidato a ser una estación de rebombeo.

Se puede obtener una solución usando el resultado visto en este capítulo, el cual nos permite encontrar un k -árbol que 2-domine a G , observemos que al variar el valor de k es posible encontrar varias soluciones de las cuales escogeremos la que tenga menos vértices de G .

De acuerdo con el Teorema 3.2.1 sabemos que para que G tenga un k -árbol 2-dominante, G debe cumplir la condición $\alpha^{2(m+2)}(G) \leq (k-1)n + 1$.

Observemos que como G es conexa y no tiene vértices de corte, tenemos que $\mathcal{K}(G) \geq 2$, por lo que G es 2-conexa, por lo tanto, $n = 2$. Como buscamos que se 2-domine a G tenemos que $m = 2$. Por último como el grado máximo de G es igual a 4, entonces podemos encontrar tres posibles soluciones para los valores k en $\{2, 3, 4\}$.

Encontraremos para $m = 2$ cual es el valor de $\alpha^{2(2+1)}(G) = \alpha^6(G)$. Por la definición del invariante tenemos que:

$$\alpha^{2(2+1)}(G) = \max\{|S| : S \subseteq V(G), d_G(x, y) \geq 2(2+1) \text{ para } \{x, y\} \subseteq S\},$$

entonces debemos encontrar el subconjunto máximo de vértices S que cumpla que todo par de vértices de S estén a distancia mayor o igual que 6.

Sea $S \subseteq V(G)$ tal que $S = \{x_1, x_2, x_4\}$ como se muestra en la Figura 3.32.

3.3. APLICACIÓN SOBRE UNA RED DE DISTRIBUCIÓN DE AGUA POTABLE 121

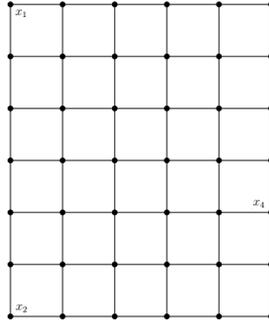


Figura 3.32: $S = \{x_1, x_2, x_4\}$.

Afirmamos que entre todo par de vértices de S tenemos que $d_G(x_i, x_j) \geq 6$ con $i \neq j$ y $\{i, j\} \subseteq \{1, 2, 4\}$. Podemos observar que:

$$d_G(x_1, x_2) = 6, d_G(x_1, x_4) = 9 \text{ y } d_G(x_2, x_4) = 7.$$

Por lo que, $\alpha^6(G) \geq 3$.

Supongamos que existe un $S' \subseteq V(G)$ tal que $|S'| = \alpha^6(G) > 3$. Si x_1 en S' , entonces sea $N_{\leq 5}(x_1)$ la vecindad del vértice x_1 que está a distancia menor o igual que 5 de x_1 ; por lo que los vértices de $N_{\leq 5}(x_1)$ no pueden estar en S' . Consideremos a $G' = G \setminus N_{\leq 5}(x_1)$ como se muestra en la Figura 3.33. Sabemos que $|V(G)| = 42$ y $|N_{\leq 5}(x_1)| \leq 21$. Entonces:

$$|V(G')| \leq |V(G)| - 21, |V(G')| \leq 21.$$

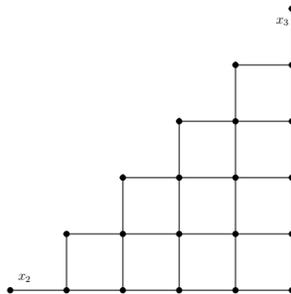


Figura 3.33: $G' = G \setminus N_{\leq 5}(x_1)$.

Tomemos a x_2 y x_3 dos vértices de G' , los cuales por la configuración de G' son candidatos a estar en S' . Supongamos sin pérdida de generalidad x_2 en S' , entonces sea $N_{\leq 5}(x_2)$ la vecindad del vértice x_2 que está a distancia menor o igual que 5 de x_2 ; por lo que los vértices de $N_{\leq 5}(x_2)$ no pueden estar en S' . Consideremos la gráfica $G'' = G' \setminus N_{\leq 5}(x_2)$ como se muestra en la Figura 3.34. Sabemos que $|V(G')| \leq 21$ y $|N_{\leq 5}(x_2)| \leq 15$. Entonces $|V(G'')| \leq |V(G')| - 15$, $|V(G'')| \leq 6$.

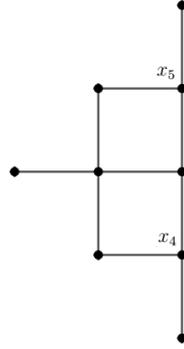


Figura 3.34: $G'' = G' \setminus N_{\leq 5}(x_2)$.

Tomemos a x_4 y x_5 dos vértices de G'' , los cuales por la configuración de G'' son candidatos a estar en S' . Supongamos sin pérdida de generalidad que x_4 en S' , entonces sea $N_{\leq 5}(x_4)$ la vecindad del vértice x_4 que está a distancia menor o igual que 5 de x_4 ; por lo que los vértices de $N_{\leq 5}(x_4)$ no pueden estar en S' . Pero como todo vértice de G'' está a distancia menor que 5 de x_4 , entonces no es posible tomar otro vértice que esté en S' . Por lo tanto, si x_1 en S' , entonces $|S'| = 3$.

Si $x_1 \notin S'$, entonces para todo par de vértices $\{y, z\} \subseteq V(G - x_1)$ tenemos que $d_G(z, y) \leq 10$, como la distancia máxima en G es 11, entonces con dos vértices u y v tal que $d_{G-x_1}(u, v) \geq 6$ tendríamos que el resto de los vértices de G están a distancia menor o igual que 5 de u o de v . Por lo tanto, $|S'| = 2$.

Por lo tanto, $\alpha^6(G) = 3$.

Ahora podemos proceder con las soluciones donde observaremos que la condición del Teorema 3.2.1 se cumple para los tres valores de k antes de poder aplicar el algoritmo.

3.3. APLICACIÓN SOBRE UNA RED DE DISTRIBUCIÓN DE AGUA POTABLE¹²³

Solución 1.- Veamos la solución para $m = 2$, $n = 2$ y $k = 2$. Como vimos anteriormente se tiene lo siguiente para la condición del Teorema 3.2.1 $\alpha^{2(2+1)}(G) = \alpha^6(G) = 3 \leq (2 - 1)2 + 1 = 3$, por lo tanto, G tiene un 2-árbol 2-dominante, el cual lo encontraremos mediante el algoritmo.

Paso 1) Tomamos a T un árbol de orden 2 en G como se muestra en la Figura 3.35.

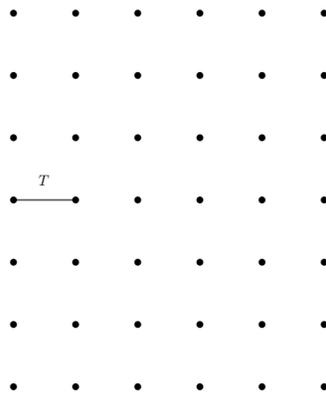


Figura 3.35: T de orden 2.

Paso 2) Como T no 2-domina a G , entonces existe un vértice w en $V(G) - \text{Domi}^2(T)$ y consideremos a $V^* = \{v_1, v_2\}$ tal que $V^* \subset V(T)$ como se muestra en la Figura 3.36.

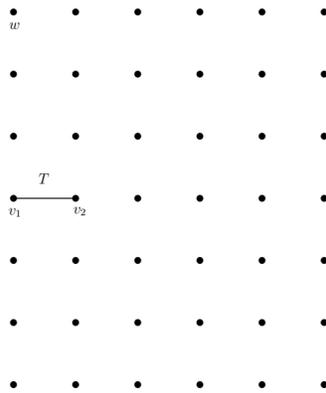


Figura 3.36: T de orden 2.

Paso 3) Como $\delta_T(v_1) = \delta_T(v_2) = 1$, entonces tomemos a Q_2 la (v_2, w) -trayectoria y consideremos a $T_1 \sim T + Q_2$, como se muestra en la Figura 3.37, el cual es un 2-árbol pues se tiene que $\Delta_G(T_1) = 2$.

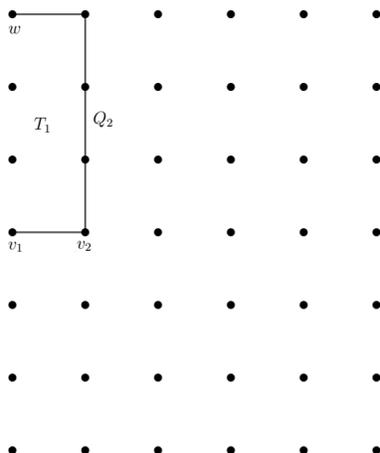


Figura 3.37: $T_1 \sim T + Q_2$.

Paso 2) Como T_1 no 2-domina a G , entonces existe un vértice w_1 en $V(G) - \text{Dom}^2(T_1)$ y consideramos a $V_1^* = \{v_1^1, v_2^1\}$ tal que $V_1^* \subset V(T_1)$ como se muestra en la Figura 3.38.

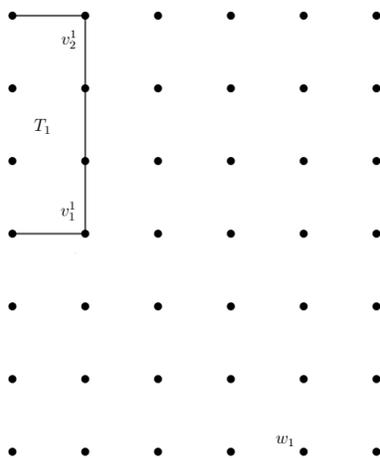


Figura 3.38: T_1 .

3.3. APLICACIÓN SOBRE UNA RED DE DISTRIBUCIÓN DE AGUA POTABLE 125

Paso 3) Como $\delta_{T_1}(v_1^1) = \delta_{T_1}(v_2^1) = 2$, entonces pasamos al paso siguiente.

Paso 4) Como $v_1^1 v_2^1 \notin A(T_1)$, entonces debemos pasar al paso siguiente.

Paso 5) Como v_2^1 es adyacente a una hoja de T_1 , podemos considerar el siguiente 2-árbol $T_2 \sim T_1 - x + Q_2$, como se muestra en la Figura 3.39, donde Q_2 es una (v_2^1, w_1) -trayectoria.

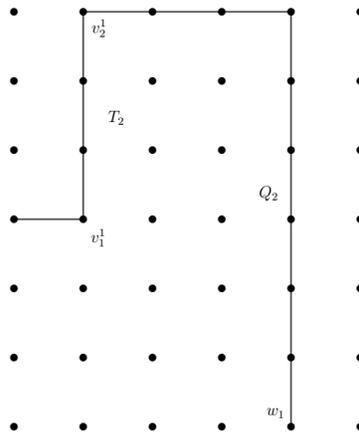


Figura 3.39: $T_2 \sim T_1 - x + Q_2$.

Paso 2) Como T_2 no 2-domina a G , entonces existe un vértice w_2 en $V(G) - \text{Domi}^2(T_2)$ y consideremos a $V_2^* = \{v_1^2, v_2^2\}$ tal que $V_2^* \subset V(T_2)$ como se muestra en la Figura 3.40.

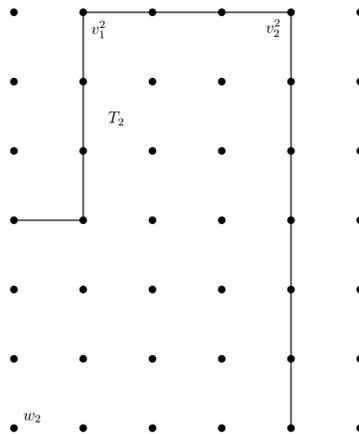


Figura 3.40: T_2 .

- Paso 3) Como $\delta_{T_2}(v_1^2) = \delta_{T_2}(v_2^2) = 2$, entonces pasamos al paso siguiente.
- Paso 4) Como $v_1^2 v_2^2 \notin A(T_2)$, entonces debemos pasar al paso siguiente.
- Paso 5) Como ninguna hoja de T_2 es adyacente a algun vértice de V^* , entonces pasamos al paso siguiente.
- Paso 6) Como $Dom^2(T_2 - x) \subset Dom^2(T_2)$ con $x \in Hojas(T_2)$, entonces consideramos el 2-árbol siguiente:

$$T_3 \sim T_2 + P,$$

como se muestra en la Figura 3.41, donde P es una (x, w_2) -trayectoria tal que $x \in Hojas(T_2)$.

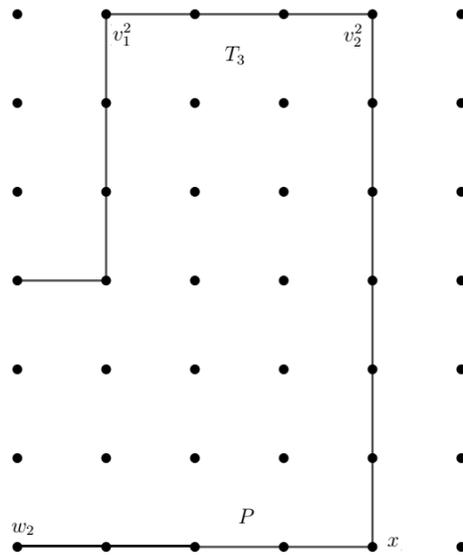


Figura 3.41: $T_3 \sim T_2 + P$.

- Paso 2) Como T_3 es un 2-árbol que 2-domina a G ; el proceso termina.

Entonces T_3 es el 2-árbol que 2-domina a G , por lo que se garantiza que el servicio de distribución de agua potable mantiene la presión mínima para todos los usuarios, pues en cada vertice del ramal se coloca una bomba de agua.

3.3. APLICACIÓN SOBRE UNA RED DE DISTRIBUCIÓN DE AGUA POTABLE 127

Solución 2.- Veamos la solución para $m = 2$, $n = 2$ y $k = 3$. Como vimos anteriormente se tiene lo siguiente para la condición del Teorema 3.2.1: $\alpha^{2(2+1)}(G) \leq (3 - 1)2 + 1$, por lo que $\alpha^6(G) = 3 < 5$. Por lo tanto, G tiene un 3-árbol 2-dominante, el cual lo encontraremos mediante el algoritmo.

Paso 1) Tomamos a T un árbol de orden 2 en G como se muestra en la Figura 3.42.

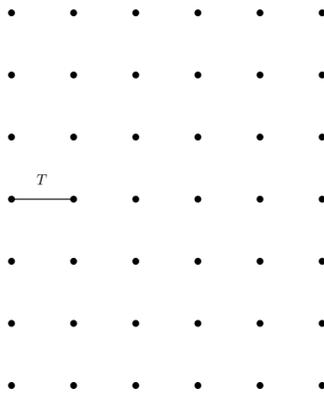


Figura 3.42: T de orden 2.

Paso 2) Como T no 2-domina a G , entonces existe un vértice w en $V(G) - \text{Domi}^2(T)$ y consideremos a $V^* = \{v_1, v_2\}$ tal que $V^* \subset V(G)$ como se muestra en la Figura 3.43.

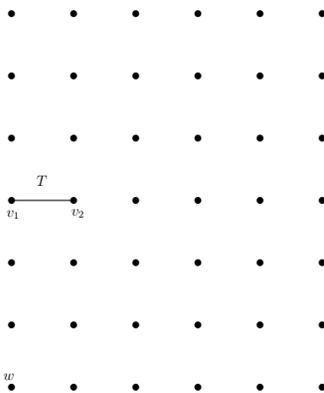


Figura 3.43: T .

Paso 3) Como $\delta_T(v_1) = \delta_T(v_2) = 1$, entonces tomemos a Q_2 la (v_2, w) -trayectoria y consideremos a $T_1 \sim T + Q_2$ como se muestra en la Figura 3.44, el cual es un 2-árbol pues se tiene que $\Delta_G(T_2) = 2$.

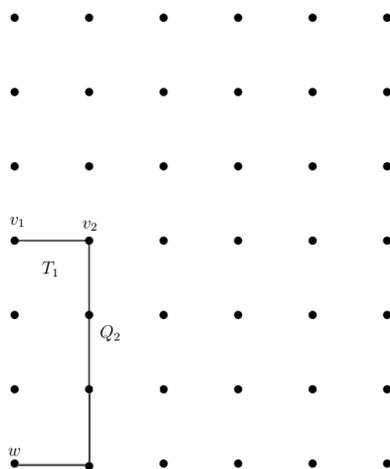


Figura 3.44: $T_1 \sim T + Q_2$.

Paso 2) Como T_1 no 2-domina a G , entonces existe un vértice w_1 en $V(G) - \text{Dom}^2(T_1)$ y consideremos a $V_1^* = \{v_1^1, v_2^1\}$ tal que $V_1^* \subset V(T_1)$ como se muestra en la Figura 3.45.

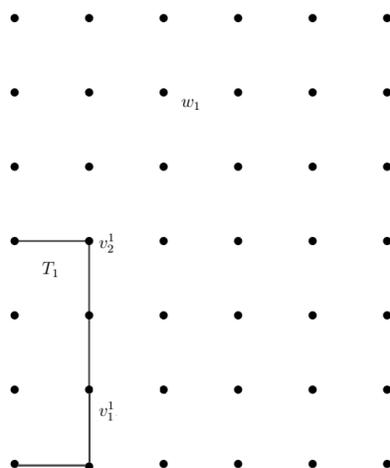


Figura 3.45: T_1 .

3.3. APLICACIÓN SOBRE UNA RED DE DISTRIBUCIÓN DE AGUA POTABLE 129

Paso 3) Como $\delta_{T_1}(v_1^1) = \delta_{T_1}(v_2^1) = 2 < 3$, entonces tomemos a Q_2 la (v_2^1, w_1) -trayectoria y consideremos a $T_2 \sim T_1 + Q_2$ como se muestra en la Figura 3.46, el cual es un 3-árbol pues se tiene que $\Delta_G(T_2) = 3$.

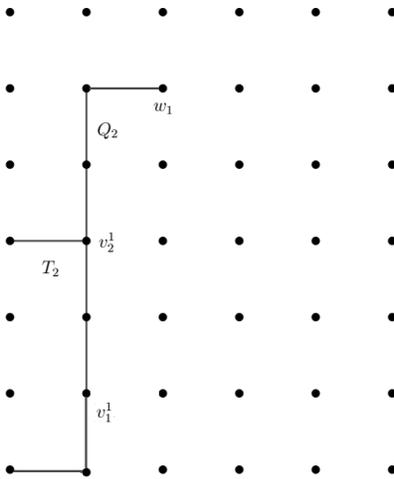


Figura 3.46: $T_2 \sim T_1 + Q_2$.

Paso 2) Como T_2 no 2-domina a G , entonces existe un vértice w_2 en $V(G) - \text{Dom}^2(T_2)$ y consideremos a $V_2^* = \{v_1^2, v_2^2\}$ tal que $V_2^* \subset V(T_2)$ como se muestra en la Figura 3.47.

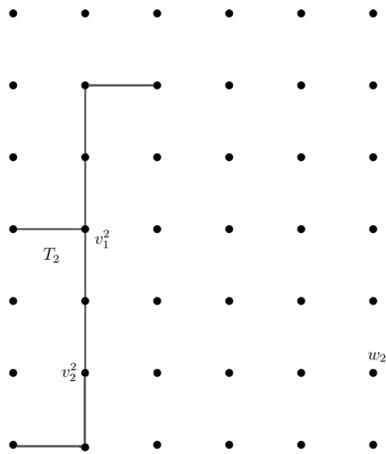


Figura 3.47: T_2 .

Paso 3) Como $\delta_{T_2}(v_1^2) = 3$ y $\delta_{T_2}(v_2^2) = 2 < 3$, entonces tomemos a Q_2 la (v_2^2, w_2) -trayectoria y consideremos a $T_3 \sim T_2 + Q_2$, como se muestra en la Figura 3.48, el cual es un 3-árbol pues se tiene que $\Delta_G(T_2) = 3$.

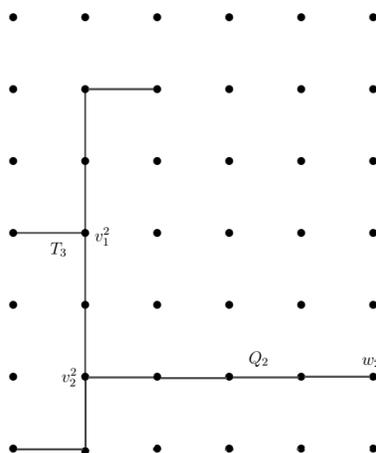


Figura 3.48: $T_3 \sim T_2 + Q_2$.

Paso 2) Como T_3 no 2-domina a G , entonces existe un vértice w_3 en $V(G) - \text{Dom}^2(T_3)$ y consideremos a $V_3^* = \{v_1^3, v_2^3\}$ tal que $V_3^* \subset V(T_3)$ como se muestra en la Figura 3.49. Además tenemos un vértice y_x en Y_{Hojas} que cumple $d_G(y_x, w) \leq 2$.

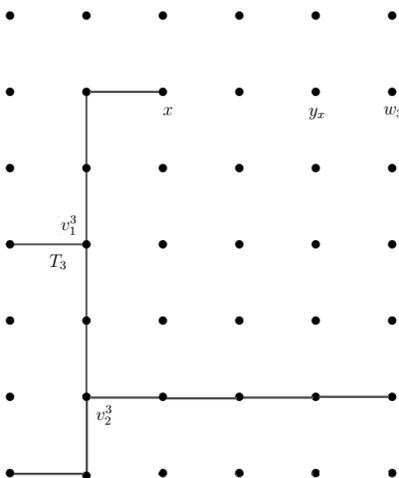


Figura 3.49: T_3 .

3.3. APLICACIÓN SOBRE UNA RED DE DISTRIBUCIÓN DE AGUA POTABLE 131

- Paso 3) Como $\delta_{T_3}(v_1^3) = 3$ y $\delta_{T_3}(v_2^3) = 3$, entonces pasamos al paso siguiente.
- Paso 4) Como $v_1^3 v_2^3 \notin A(T_3)$, entonces pasamos al paso siguiente.
- Paso 5) Como $xv_i^3 \notin A(T_3)$ para $i \in \{1, 2\}$ y alguna $x \in Hojas(T_3)$, entonces pasamos al paso siguiente.
- Paso 6) Como $Dom_i^2(T_3 - \{x\}) \subset Dom_i^2(T_3)$ con $x \in Hojas(T_3)$, entonces existe un vértice y_x en Y_{Hojas} que cumple $d_G(y_x, w) \leq 2$, por lo que por el paso 6 del algoritmo tomamos a P la (x, y_x) -trayectoria y consideremos a:

$$T_4 \sim T_3 + P$$

como se muestra en la Figura 3.50, el cual es un 3-árbol pues se tiene que $\Delta_G(T_4) = 3$.

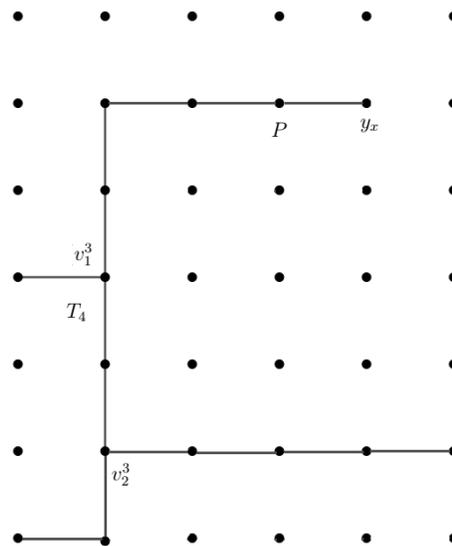


Figura 3.50: $T_4 \sim T_3 + P$.

- Paso 2) Como T_4 2-domina a G ; el proceso termina.

Entonces T_4 es un 3-árbol que 2-domina a G , garantizando que de este modo la presión mínima se mantenga en todos los vértices de G , pues se coloca una bomba de agua en cada vértice del ramal.

Solución 3.- Veamos la solución para $m = 2$, $n = 2$ y $k = 4$. Como vimos anteriormente se tiene lo siguiente para la condición del Teorema 3.2.1 $\alpha^{2(2+1)}(G) \leq (4 - 1)2 + 1$, $\alpha^6 = 3 < 7$. Por lo tanto, G tiene un 4-árbol 2-dominante, el cual lo encontraremos mediante el algoritmo.

Paso 1) Tomamos a T un árbol de orden 2 en G como se muestra en la Figura 3.51.

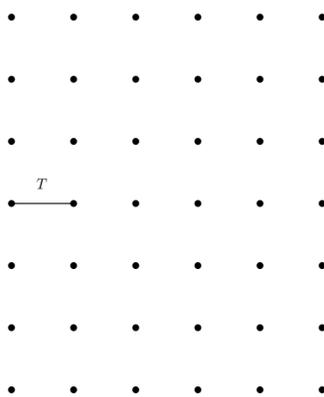


Figura 3.51: T de orden 2.

Paso 2) Como T no 2-domina a G , entonces existe un vértice w en $V(G) - \text{Dom}^2(T)$ y consideremos a $V^* = \{v_1, v_2\}$ tal que $V^* \subset V(T)$ como se muestra en la Figura 3.52.

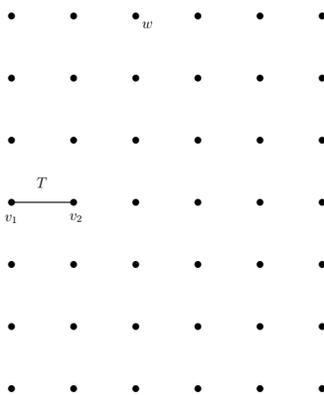


Figura 3.52: T .

3.3. APLICACIÓN SOBRE UNA RED DE DISTRIBUCIÓN DE AGUA POTABLE 133

Paso 3) Como $\delta_T(v_1) = \delta_T(v_2) = 1$, entonces tomamos a Q_2 la (v_2, w) -trayectoria y consideramos a $T_1 \sim T + Q_2$ un árbol como se muestra en la Figura 3.53.

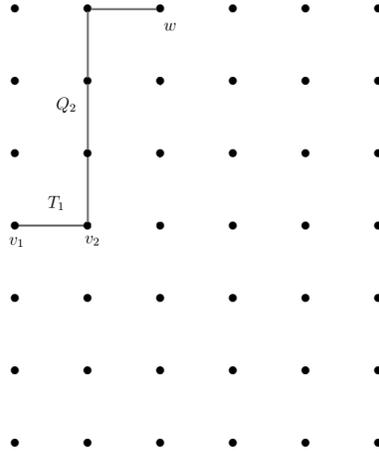


Figura 3.53: $T_1 \sim T + Q_2$.

Paso 2) Como T_1 no 2-domina a G , entonces existe un vértice w_1 en $V(G) - \text{Dom}^2(T_1)$ y consideremos a $V_1^* = \{v_1^1, v_2^1\}$ tal que $V_1^* \subset V(T_1)$ como en la Figura 3.54.

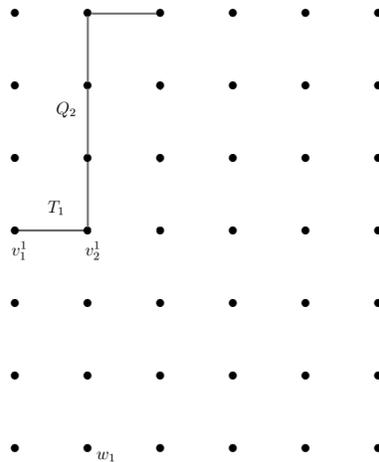


Figura 3.54: T_1 .

Paso 3) Como $\delta_T(v_1^1) = 1$ y $\delta_T(v_2^1) = 2$, entonces tomamos a Q_2 la (v_2^1, w_1) -trayectoria y consideramos a $T_2 \sim T_1 + Q_2$ un árbol como se muestra en la Figura 3.55.

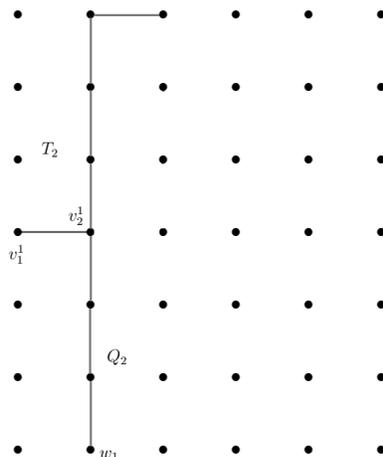


Figura 3.55: $T_2 \sim T_1 + Q_2$.

Paso 2) Como T_2 no 2-domina a G , entonces existe un vértice w_2 en $V(G) - \text{Dom}^2(T_2)$ y consideremos a $V_2^* = \{v_1^2, v_2^2\}$ tal que $V_2^* \subset V(T_2)$ como se muestra en la Figura 3.56.

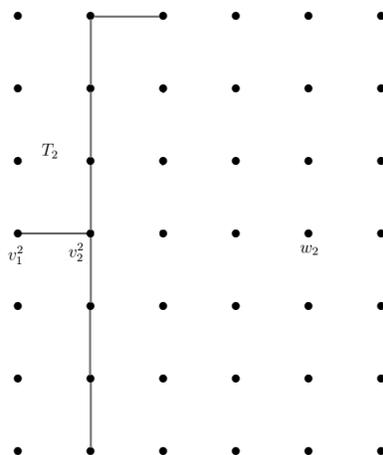


Figura 3.56: T_2 .

Paso 3) Como $\delta_{T_3}(v_2^3) = 4$ ya no podemos agregarle una arista adicional sin exceder el grado máximo deseado para el árbol y por otro lado tenemos que $\delta_{T_3}(v_1^3) = 2$, entonces tomamos a $T_4 \sim T_3 + Q_1$ un árbol como se muestra en la Figura 3.59.

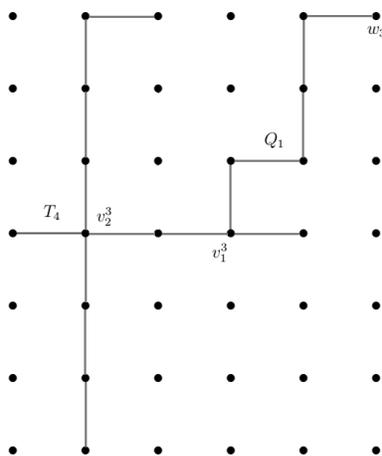


Figura 3.59: $T_4 \sim T_3 + Q_1$.

Paso 2) Como T_4 no 2-domina a G , entonces existe un vértice w_4 en $V(G) - \text{Dom}^2(T_4)$ y consideremos a $V_4^* = \{v_1^4, v_2^4\}$ tal que $V_4^* \subset V(T_4)$ como se muestra en la Figura 3.60.

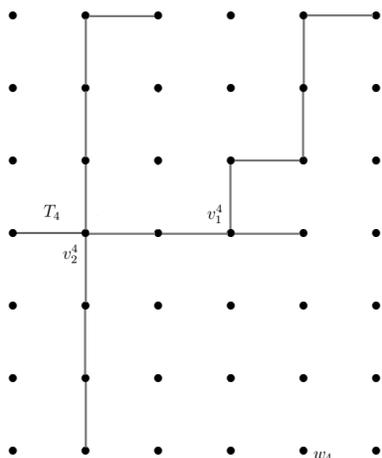


Figura 3.60: T_4 .

Paso 3) Como $\delta_{T_4}(v_2^4) = 4$, no es posible agregar una trayectoria que incida en v_2^4 sin exceder el grado máximo deseado, por otro lado $\delta_{T_4}(v_1^4) = 3$, entonces tomamos a $T_5 \sim T_4 + Q_1$ un árbol como se muestra en la Figura 3.61.

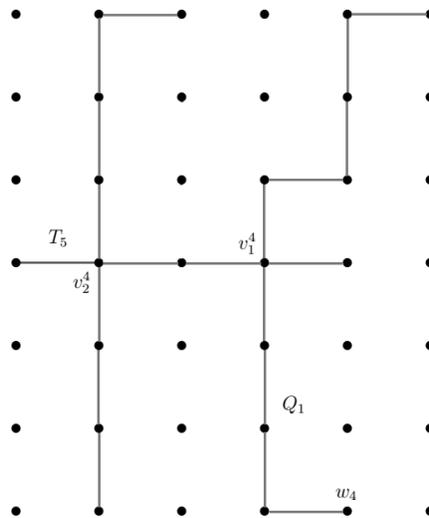


Figura 3.61: $T_5 \sim T_4 + Q_1$.

Paso 2) Como T_5 2-domina a G ; el proceso termina.

Entonces T_5 es un 4-árbol que 2-domina a G , con lo que se garantiza que la presión mínima se mantenga en todos los vértices de la gráfica G , pues se coloca una bomba de agua en cada vértice del ramal.

De las soluciones 1, 2 y 3 obtuvimos árboles que 2-dominan a G , por lo que se distribuye el agua con la presión mínima deseada en todos los puntos de nuestra gráfica G . Observemos que en la primera solución el 2-árbol encontrado tiene 18 vértices de G , en la segunda el 3-árbol tiene 15 y por último el 4-árbol tiene 21, por lo que el 3-árbol es la solución que se recomienda por ser la que tiene menos vértices de G . Sabiendo esto colocaremos una bomba en cada vértice del ramal de alta presión para garantizar la distribución mínima en toda la red.

Conclusiones

A lo largo de esta tesis estudiamos a los k -árboles como subgráficas de gráficas n -conexas con ciertas condiciones de independencia. Primero observamos que para encontrar un 2-árbol generador en una gráfica n -conexa esta debía cumplir que $\alpha(G) \leq n + 1$.

Seguido de esto, examinamos en el capítulo 2, que para tener un k -árbol generador de una gráfica n -conexa, esta debe cumplir que; $\alpha(G) \leq 1 + n(k - 1)$.

Posteriormente a lo largo del capítulo 3, notamos que para encontrar un k -árbol m -dominante en una gráfica n -conexa; esta satisface que; $\alpha^{2(m+1)}(G) \leq (k - 1)n + 1$.

Finalmente, de la prueba del capítulo 3 se construyó un algoritmo para encontrar un k -árbol m -dominante en una gráfica n conexa con $\alpha^{2(m+1)}(G) \leq (k - 1)n + 1$; queda por analizar si este algoritmo es eficiente. Luego, dimos una posible solución al problema de distribución de agua en una red pequeña, queda por resolver; si el k -árbol m -dominante encontrado es una solución óptima.

Algunos puntos por estudiar a futuro son:

- ¿Cómo podemos encontrar un k -árbol m -dominante de cardinalidad mínima?
- ¿Cuántos k -árboles m -dominantes distintos hay en G una gráfica n -conexa con $\alpha^{2(m+1)}(G) \leq (k - 1)n + 1$ para una misma k ?

Bibliografía

- [1] BIGGS, N. LLOYD, E. WILSON, R.,(1986) *Graph Theory*, 1736–1936, Oxford University Press.
- [2] BOLLOBÁS, B. RIORDAN, O.M. (2003), *Mathematical results on scale-free random graphs in "Handbook of Graphs and Networks"*. (S. Bornholdt and H.G. Schuster (eds)), Wiley VCH, Weinheim, 1st ed.
- [3] BONDY, J.A. MURTY, U.S.R. (2008) *Graph Theory*, Springer, ISBN 978-1-84628-969-9.
- [4] BONDY, J. A. MURTY U.S.R. (1982) *Graph Theory With Applications*. Department of Combinatorics and Optimization, University of Waterloo, Ontario, Canada.
- [5] BROERSMA H. J. (1988), *Existence of Δk -cycles and Δk -paths*, J. Graph Theory 12 499-507.
- [6] CHARTRAND, G. (1985) *Introductory Graph Theory*, Dover, ISBN 0-486-24775-9. Graphs and Digraphs, Fifth Edition.
- [7] CHARTRAND G. LINDA L. PING Z. *Graphs and Digraphs*, October 19, 2010 by Chapman and Hall/CRC Textbook - 598 Pages - 340 B/W ISBN 9781439826270 - CAT# K11263 H.J.
- [8] COMISIÓN NACIONAL DEL AGUA, *Manual de Agua Potable, Alcantarillado y Saneamiento*, Diciembre 2007.
- [9] CHVÁTAL V. ERDÖS P. *A note on hamiltonian circuits*, Discrete Math. 2 (1972) 111-113.
- [10] DIESTEL, REINHARD, *Graph Theory Electronic Edition 2010*. <http://diestel-graph-theory.com/>
- [11] GOLDFEDER, ILÁN A. *Una introducción a la Teoría de las Gráficas (Versión preliminar)*. <http://www.matem.unam.mx/ilan/>

- [12] MIKIO K. KENTA O. MASAO T. GUIYING Y., *m-dominating k-trees of graphs*. Discrete Mathematics 339 (2016) 729–736
- [13] NEUMANN-LARA, V. RIVERA-CAMPO, E. *Spanning tree with bounded degrees*, Combinatorica 11 (1991) 55-61.
- [14] TUTTE, W.T. (2001), Graph Theory, Cambridge University Press, p. 30, ISBN 978-0-521-79489-3.
- [15] WIN, S. *On a conjecture of Las Vergnas concerning certain spanning trees in graphs*. Resultate der Mathematik, 2, 215-224.