



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
MAESTRÍA EN CIENCIAS (FÍSICA)

FENOMENOLOGÍA DE REGGE DE LOS POLOS N^* Y Δ^*

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
LIC. JORGE ANTONIO SILVA CASTRO

TUTOR PRINCIPAL:
DR. CÉSAR FERNÁNDEZ RAMÍREZ
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:
DR. ROELOF BIJKER BIJKER
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

DR. EDUARDO PEINADO
INSTITUTO DE FÍSICA



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*Con todo mi amor y agradecimiento
a mi familia y amigos, en especial
a mis abuelos Jorge y Josefina,
a mis padres Lourdes y Antonio,
a mi hermana Montserrat
y a mi amada Lu.*

ÍNDICE GENERAL

	PÁGINA
AGRADECIMIENTOS	4
RESUMEN	6
ABSTRACT	7
1 INTRODUCCIÓN	1
2 MARCO TEÓRICO	8
2.1 DISPERSIÓN DE PARTÍCULAS Y LA MATRIZ- S	8
2.1.1 PROPIEDADES DE LA MATRIZ- S	10
2.1.2 VARIABLES DE MANDELSTAM PARA LA DISPERSIÓN DE DOS PARTÍCULAS	11
2.1.3 SIMETRÍA DE CRUCE	14
2.2 PROPIEDADES ANALÍTICAS DE LAS AMPLITUDES DE DISPERSIÓN	17
2.2.1 CAUSALIDAD Y ANALITICIDAD	18
2.2.2 RELACIONES DE DISPERSIÓN	21
2.2.3 EXPANSIÓN EN ONDAS PARCIALES	24
2.2.4 PROPIEDADES ANALÍTICAS DE LAS ONDAS PARCIALES	29
2.2.5 RESONANCIAS	33
2.3 TEORÍA DEL MOMENTO ANGULAR COMPLEJO	36
2.3.1 EL LÍMITE DE FROISSART	37
2.3.2 TRANSFORMADA DE SOMMERFELD-WATSON	40
2.3.3 PROYECCIÓN DE GRIBOV-FROISSART Y SIGNATURA	42
2.3.4 TRAYECTORIAS DE REGGE	45
2.4 EJEMPLO ILUSTRATIVO	52
3 DESARROLLO	59
3.1 MOTIVACIÓN FÍSICA	59
3.2 EXTRACCIONES DE LOS POLOS N^* Y Δ^*	61
3.3 MODELOS PARA LAS TRAYECTORIAS PADRE DE REGGE	65
4 RESULTADOS	69
4.1 AJUSTES Y ANÁLISIS DE ERRORES	69
4.2 ANÁLISIS DE LAS TRAYECTORIAS $\frac{1}{2}^+$	70
4.3 ANÁLISIS DE LAS TRAYECTORIAS $\frac{1}{2}^-$	76
4.4 ANÁLISIS DE LAS TRAYECTORIAS $\frac{3}{2}^+$	79
4.5 ANÁLISIS DE LAS TRAYECTORIAS $\frac{3}{2}^-$	81
5 CONCLUSIONES	86
A PRODUCTOS OBTENIDOS	88
BIBLIOGRAFÍA	103

AGRADECIMIENTOS

Learning is an experience. Everything else is just information

A. Einstein

AGRADECIMIENTOS INSTITUCIONALES

En primer lugar agradezco a la Universidad Nacional Autónoma de México por la gran oportunidad que me ha brindado abriéndome sus puertas para realizar mi posgrado, en estos años en que he sido estudiante de maestría me he dado cuenta que nadie exagera al afirmar que es la mejor institución académica del país. Estoy muy orgulloso de haber sido su estudiante y espero poder retribuirle todo lo que ha hecho por mi crecimiento personal y desarrollo profesional.

Del mismo modo agradezco al Posgrado en Ciencias Físicas de la UNAM, pues ha sido a través de él que me incorporé como estudiante de esta casa de estudios. El posgrado, las actividades que programa así como todos los servicios y apoyos que proporcionan a los estudiantes completan y enriquecen nuestra formación brindando las herramientas necesarias para llevar del mejor modo nuestros estudios, innovando constantemente y buscando la excelencia.

Al Instituto de Ciencias Nucleares (ICN) por todas las facilidades y apoyos que me proporcionó durante mis estudios de maestría e incluso antes de ellos, especialmente agradezco a todo el personal académico y administrativo que por su empatía y disposición hicieron mi estancia muy amena dejando grandes recuerdos y experiencias. El apoyo que se nos proporciona a los estudiantes es invaluable y su gran cantidad de actividades así como sus grupos de investigación son admirables. Sin lugar a dudas el ICN, más que un centro de investigación de excelente calidad se ha convertido en un hogar para mí.

Agradezco también a la *Indiana University* y al *Center for Exploration of Energy and Matter* de la misma, ya que durante la corta estancia en que me encontré participando en la *Summer School of Reaction Theory* (2017), tuve la oportunidad de acrecentar mis conocimientos en física y de poder charlar, así como posteriormente colaborar con expertos en el área en la que desarrollé mis estudios de maestría y en la que enfocaré mis estudios doctorales. Esta ha sido una de las experiencias más enriquecedoras que he vivido.

A la Comisión Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo proporcionado a través de la beca de Posgrado 619970, sin la cual me habría resultado imposible realizar mis estudios de maestría.

Este trabajo ha sido parcialmente apoyado por PAPIIT-DGAPA (UNAM, México) por la beca No. IA101717 y por CONACYT (México) a través la beca No. 251817.

AGRADECIMIENTOS PERSONALES

Esta tesis representa un gran paso en el camino de mi formación profesional, ha sido el resultado de un arduo trabajo en el cual he contado con la invaluable ayuda y compañía de personas muy importantes para mí; además me ha permitido adentrarme en un tema apasionante y conocer más de la física, una disciplina que considero fascinante y cautivadora. En este júbilo que llena mi ser deseo expresar mi gratitud

A Dios:

Por permitirme concretar esta gran meta, así como por todas las bendiciones que he recibido a lo largo de mi vida, en especial por la salud y por la familia.

A mi familia:

Por su compañía, comprensión, por sus consejos y por su apoyo incondicional, ustedes son el pilar de mi vida y les debo lo que soy ahora. Principalmente le agradezco a mis padres por todo su amor y sacrificios, por ser mis grandes amigos, por tener siempre una sonrisa en el rostro y los brazos abiertos, en verdad los admiro y amo. A mi hermana a quien le debo tanto y la persona cuya alegría también es la mía, alguien con quien siempre puedo contar y que es un rayo de luz en mi vida. Agradezco a mis tíos que son como unos segundos padres para mí, a mis primos que amo como a hermanos y a mis abuelos que siempre han estado ahí para mí.

Al Doctor César Fernández:

A veces y sin darnos cuenta la vida pone frente a nosotros personas que nunca imaginamos y César es una ellas. Es principalmente por haberle conocido que apliqué para realizar mi maestría en la UNAM, sin duda ha sido crucial tanto como mentor así como amigo, brindándome conocimiento y oportunidades por las cuales le estaré eternamente agradecido. Le agradezco además todas esas horas y días que ha dedicado a este trabajo, a la discusión de diversos temas así como la disposición, interés y esmero tanto a mi formación académica como personal.

A mis tutores y sinodales:

Por el interés mostrado en este trabajo así como sus valiosos comentarios y aportaciones a la construcción del mismo y durante mis estudios de posgrado.

RESUMEN

We are trying to prove ourselves wrong as quickly as possible, because only in that way can we find progress.

R. P. Feynman

En esta tesis, siguiendo el análisis del sector extraño bariónico de [1] se usa la fenomenología de Regge para estudiar el espectro de las resonancias N^* y Δ^* . Para tal fin, se emplean las extracciones de polos de los análisis de ondas parciales de procesos πN y fotoproducción de hadrones. Se evalúa cualitativa y cuantitativamente la importancia de la parte imaginaria de los polos (anchuras) para obtener una determinación consistente de los parámetros de las trayectorias de Regge. Se comparan las diferentes extracciones de polos y se muestra como la fenomenología de Regge puede ser usada para hacer una primera evaluación de la posible naturaleza de los bariones. Esto se realiza, proponiendo una parametrización físicamente motivada para la trayectoria de Regge que captura la contribución del espacio fase a la amplitud de dispersión. Mediante la técnica de *bootstrap* (Monte Carlo) puede realizarse un análisis de errores riguroso. Se encuentra que la mayoría de los estados en las trayectorias padre de Regge son compatibles con la descripción de tres quarks ($3q$) compactos así como también se argumenta, usando los resultados de los análisis y las predicciones de modelos quark, como algunos de los estados presentan una contribución de dinámica de QCD más allá de $3q$.

ABSTRACT

We are trying to prove ourselves wrong as quickly as possible, because only in that way can we find progress.

R. P. Feynman

In this thesis, following the analysis on the strange sector of [1] we use Regge phenomenology to study the spectrum of N^* and Δ^* resonances. We use the pole extractions from partial wave analyses of πN and hadron photoproduction data. We study qualitatively and quantitatively the importance of the imaginary part of the poles (widths) to obtain a consistent determination of the parameters of the Regge trajectories. We compare the different pole extractions and we show how Regge phenomenology can be used to make an initial assessment of the possible nature of a given baryon. In doing so, we propose a physically motivated parameterization for the Regge trajectory which captures the phase space contribution to the scattering amplitude. We use the bootstrap technique (Monte Carlo) to perform a rigorous error analysis. We find that most of the states in the parent Regge trajectories are compatible with compact three quark states ($3q$) and we argue, using the results of our analysis in combination with quark model predictions, that some of the states have dynamical QCD contributions that go beyond a $3q$ picture.

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

*Probably most physicists will agree that we should have an S-matrix, that an S-matrix is a good instrument by which we can describe the results of experiments The S-matrix ... by its analytical properties ... must somehow express causality. This “somehow” of course involves already a lot of difficulties
....*

W. Heisenberg

El objetivo principal de la física es explicar los fenómenos de la naturaleza usando la menor cantidad de principios fundamentales. Pese a la diversidad de fenómenos que nos rodean, todas las interacciones pueden ser reducidas a cuatro fundamentales: la fuerza electromagnética, la fuerza nuclear débil, la fuerza nuclear fuerte y la fuerza gravitacional. Las tres primeras son descritas por el *Modelo Estándar* (SM), mientras que la última es descrita por la *Relatividad General*. Si se considera a la magnitud de la interacción fuerte como unidad, los órdenes relativos de las fuerzas restantes son: 10^{-2} para la electromagnética, 10^{-14} para la fuerza nuclear débil y 10^{-39} para la fuerza gravitacional. Hasta nuestros días no existe una teoría que unifique exitosamente a todas las interacciones. [2, 3]

El Modelo Estándar (SM) es un tipo de *Teoría Cuántica de Campos* (QFT) que se basa en un formalismo consistente con la teoría de la relatividad especial, así como la mecánica cuántica. Sus componentes son el *Modelo Electrodébil* (que unifica a la interacción electromagnética (QED) y a la fuerza nuclear débil) y la *Cromodinámica Cuántica* (QCD) que describe a la fuerza nuclear fuerte.

De acuerdo con el SM los constituyentes fundamentales de la materia son fermiones de espín 1/2 llamados *quarks* y *leptones*; mientras que las fuerzas fundamentales son mediadas por *bosones* de espín 1 conocidos como: fotón para el caso de la interacción electromagnética, las partículas W^+ , W^- y Z^0 para la interacción débil y ocho gluones para el caso de la interacción fuerte. El SM también considera al *bosón de Higgs*, partícula bosónica de espín 0 responsable de un rompimiento espontáneo de simetría electrodébil que hace a los correspondientes bosones masivos [4, 5]. Un breve resumen de las propiedades de estas partículas fundamentales se muestra en la figura F.1.1.

Existen varias diferencias fundamentales entre las características de las interacciones de la QED y QCD. Por ejemplo, la QED es una teoría abeliana mientras que la QCD no, el significado físico de esto es que los fotones no interactúan consigo mismos, mientras que los gluones sí [5, 6]. La interacción en el caso de la QED reduce la energía de sistemas ligados (por ejemplo el átomo de hidrógeno [7]), mientras que en QCD la aumenta, a tal grado que por ejemplo la masa del protón tiene una contribución de más del 95% debida a la interacción de los gluones [8, 9]. En QED las partículas elementales pueden ser observadas experimentalmente (fotones, electrones, positrones, ...) mientras que en QCD debido al

three generations of matter (fermions)			interactions / force carriers (bosons)		
	I	II	III		
mass	$\approx 2.2 \text{ MeV}/c^2$	$\approx 1.28 \text{ GeV}/c^2$	$\approx 173.1 \text{ GeV}/c^2$	0	$\approx 125.09 \text{ GeV}/c^2$
charge	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0
spin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0
	u up	c charm	t top	g gluon	H higgs
	d down	s strange	b bottom	γ photon	
	e electron	μ muon	τ tau	Z Z boson	
	ν_e electron neutrino	ν_μ muon neutrino	ν_τ tau neutrino	W W boson	

Figura F.1.1: Partículas Elementales en el Modelo Estándar.

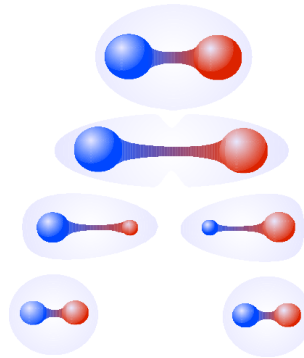


Figura F.1.2: Debido al confinamiento de color, pese a que los quarks puedan estar separados espacialmente, la interacción de la nube gluónica confina al color, de modo que no se observan quarks o gluones libres.

confinamiento de color [10] los quarks y gluones se encuentran confinados en *hadrones* formando *singletes de color* [11] (ver figura F.1.2). El color es una propiedad intrínseca y cuántica de las partículas que interactúan a través de la interacción fuerte y debe su nombre a su analogía con las propiedades de los colores primarios (*rojo*, *verde* y *azul*, así como también *antirrojo*, *antiverde* y *antiazul*) que al mezclarse producen estados *neutros* de color [5, 12].

Debido a que los gluones son los portadores del color (*carga de color*), la mayoría de los números cuánticos de las partículas que interactúan por la interacción fuerte están dados por sus quarks y antiquarks constituyentes [13]. La descripción de las propiedades de los hadrones con un énfasis en el mínimo contenido de quarks de la función de onda de un hadron es llamado genéricamente *el modelo de quarks*. Este existe en diferentes niveles: desde los más simples como la representación casi libre de dinámica de las partículas como estados ligados de quarks y antiquarks; hasta aquellos con descripciones más detalladas de dinámica, ya sea

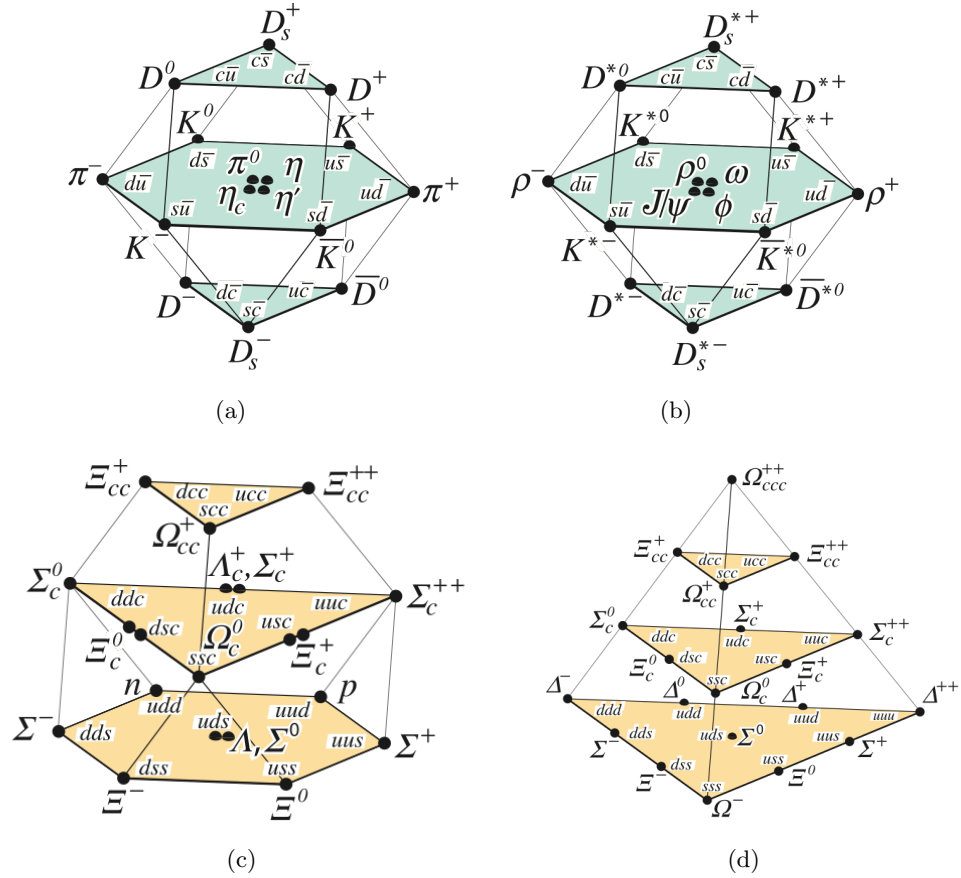


Figura F.1.3: Algunos estados en el modelo de quarks, (a) y (b) representan mesones mientras que (c) y (d) bariones. Figuras extraídas de [13].

a través de modelos o directamente de QCD [13, 14].

Entre los hadrones se destacan los mesones y bariones, los primeros son partículas bosónicas (espín entero) con número bariónico 0, mientras que los segundos son fermiones (espín semientero) con número bariónico 1. El mínimo contenido de la función de onda de un mesón es una pareja quark-antiquark, mientras que para un barión es una triada de quarks [14, 15]. Debido a las simetrías cuánticas de modelo, puede organizarse a estos estados en estructuras como las que se muestran en la figura F.1.3.

Un estado exótico de QCD es una resonancia con números cuánticos que no pueden ser explicados mediante combinaciones de tres quarks en el caso de los bariones o combinaciones quark-antiquark en el caso de los mesones [16]. Por ejemplo, si se observase una resonancia en el proceso $K^+p \rightarrow K^+p$, dado que el protón puede considerarse esencialmente como un estado uud y el K^+ como un estado $u\bar{s}$, tal resonancia tendría extrañeza positiva y su composición mínima sería $uuud\bar{s}$, es decir, sería forzosamente un pentaquark. En el espectro experimental de la reacción $K^+p \rightarrow K^+p$ no se observan estados de este tipo [13]. Otro ejemplo interesante es el de los mesones con excitaciones gluónicas. Por ejemplo, el π_1 . Este estado tendría números cuánticos: espín $J = 1$, momento angular $L = 1$, paridad negativa y conjugación de carga positiva ($J^{PC} = 1^{-+}$). Si se combina un quark y un antiquark en el estado $J = 1, L = 1$ y $P = -$, dicho estado ha de tener conjugación de carga *negativa*. Por tanto, los números

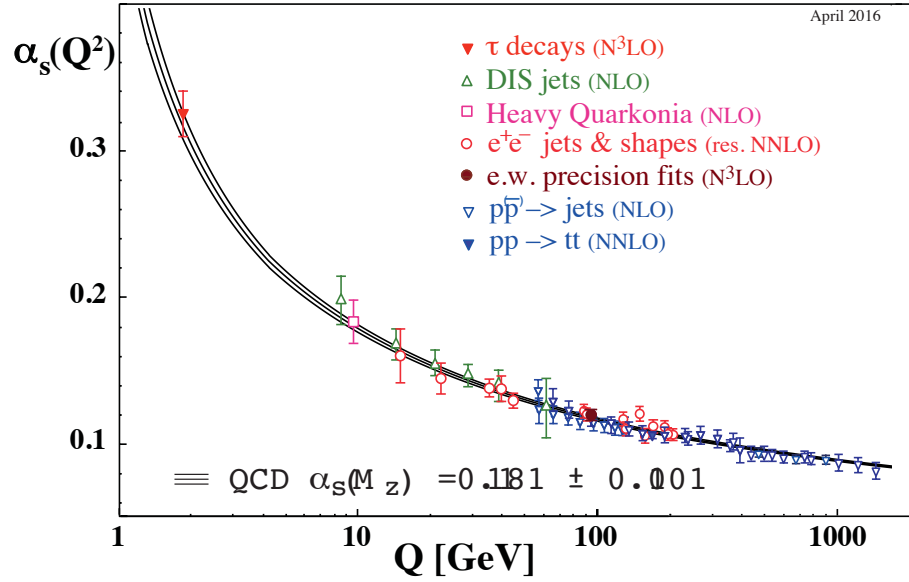


Figura F.1.4: Resumen de las mediciones de α_s , constante de acoplo, como función de la escala energética Q , este comportamiento es conocido como *libertad asintótica* de QCD. Figura extraída de [13].

cuánticos del π_1 son exóticos. La forma más sencilla de tener un estado con dichos números cuánticos es que además de tener un par quark-antiquark exista una excitación gluónica.[17]

Este estado sería lo que se conoce como un híbrido, y se puede describir fenomenológicamente como si el par quark-antiquark estuviera conectado por un tubo de flujo gluones (*flux tube*) que se excita como las cuerdas de una guitarra. Estos estados son interesantes ya que presentarían una contribución dominante de una componente que en los estados no-exóticos está suprimida y por lo tanto proporciona acceso a detalles más sutiles de la interacción, por ejemplo al campo gluónico que es el responsable principal del confinamiento del color. [18]

Otra diferencia sustancial entre QED y QCD es la libertad asintótica, una propiedad de la QCD que disminuye la intensidad de la interacción a medida que la escala energética incrementa, lo que ocasiona que a determinadas escalas energéticas, pueda estudiarse QCD de forma perturbativa mientras que en otras no [6, 19, 20].

Pese a que se dispone de una teoría como la QCD, debido a la forma de la interacción y a la posibilidad de auto-interacciones, realizar cálculos a través de ella es bastante complejo [19] especialmente en el régimen no perturbativo, para el que la *Cromodinámica Cuántica en el Retículo* (LQCD) ha resultado ser la técnica teórica más prometedora para su estudio, sin embargo, requiere de un gran poder de cálculo computacional [21].

Experimentalmente, la forma de estudiar los fenómenos de QCD es a través de procesos de colisiones de partículas. Los estados de colisión pueden clasificarse en *estados ligados* y *resonancias*; los primeros tienen una masa menor a la de sus componentes, por lo que no pueden decaer en ellos, mientras que las resonancias, al tener una masa mayor a la de sus componentes pueden decaer en ellos, esto contribuye introduciendo partes imaginarias en sus masas, lo que está relacionado con sus *anchuras* [3].

De entre los distintos experimentos destaca el estudio del espectro de bariones, en especial el de las resonancias formadas por quarks u y d (ver figura F.1.1) denominadas N^* (isospín $I = 1/2$) y Δ^* (isospín $I = 3/2$), el cual es una de las herramientas principales para estudiar QCD en el régimen no perturbativo y cuyo análisis ha contribuido, entre otras cosas, al descubrimiento del modelo de quarks [22, 23].

La teoría para estudiar los procesos de colisión de partículas se conoce como *teoría de la dispersión* o de la *matriz- S* [24–26], la cual se relaciona con cantidades mensurables como las amplitudes de transición y usa propiedades generales de las mismas así como de las interacciones [27–31]. Dicha teoría tiene presencia en diversas áreas de la física como Mecánica Cuántica no Relativista (NQM) así como en Teoría Cuántica de Campos (QFT), entre otras. De hecho, la mayor parte de los progresos en el estudio de la interacción fuerte se basan en esta teoría [3, 13].

Uno de los pilares de la teoría de la matriz- S es la relación que existe entre la causalidad de los procesos físicos y las propiedades analíticas de las amplitudes de dispersión. La cual entre otras cosas, marca la correspondencia entre las singularidades de las amplitudes y los estados físicos de colisión como lo son los estados ligados y los estados resonantes [24, 31, 32]. La hipótesis de Mandelstam [33, 34] supone que las singularidades de la amplitud, como función compleja de sus variables, se reducen a polos y cortes consecuencia de la imposición de *unitaridad* (conservación de la probabilidad).

La extensión a variable compleja y las propiedades analíticas de las amplitudes de colisión ha permitido describir, analizar y predecir resultados experimentales e incluye no solo al momento o a la energía del sistema de partículas (la cual es una técnica usual en mecánica cuántica [7, 35]) sino también al momento angular [32, 36–43].

Ciertamente las cantidades físicas son variables reales, sin embargo, en muchos casos el uso de cantidades complejas simplifica el modo en que las leyes físicas son expresadas y manipuladas. El momento angular no es la excepción; desde que comenzó a ser tratado como una variable compleja proporcionó nuevas perspectivas a problemas tan estudiados como el átomo de hidrógeno y la dispersión de partículas por un potencial coulombiano [44, 45].

También llamada *Teoría de Regge*, la teoría del momento angular complejo ha permitido entender, por ejemplo, comportamientos como el observado en los gráficos de Chew-Frautschi [46] (momento angular total J vs. masa al cuadrado M^2 , ver figura F.1.5), el cual es uno de los resultados experimentales que motivó a la teoría de cuerdas [47].

De acuerdo con la teoría de Regge las resonancias aparecen como polos en el plano de momento angular complejo. La posición del polo, que cambia como una función de la masa de la resonancia [31, 48] define la denominada *trayectoria de Regge* [32, 42, 43].

La teoría de Regge ha proporcionado un marco teórico [32, 42, 43, 49] importante para el estudio sistemático de las interacciones fuertes de partículas elementales, así como una técnica fenomenológica para su análisis [48, 50] exhibiendo además simetrías como la *simetría de MacDowell* [51–54] así como la clasificación de los estados resonantes de acuerdo a su signatura y para valores de momento angular alternantes [3, 32, 43], como puede apreciarse en la figura F.1.5. Es importante mencionar que las trayectorias de Regge pueden usarse para estudiar los mecanismos responsables de la formación de resonancias [1, 55–57].

En el pasado, los polos de las resonancias no eran calculados y salvo algunas excepciones

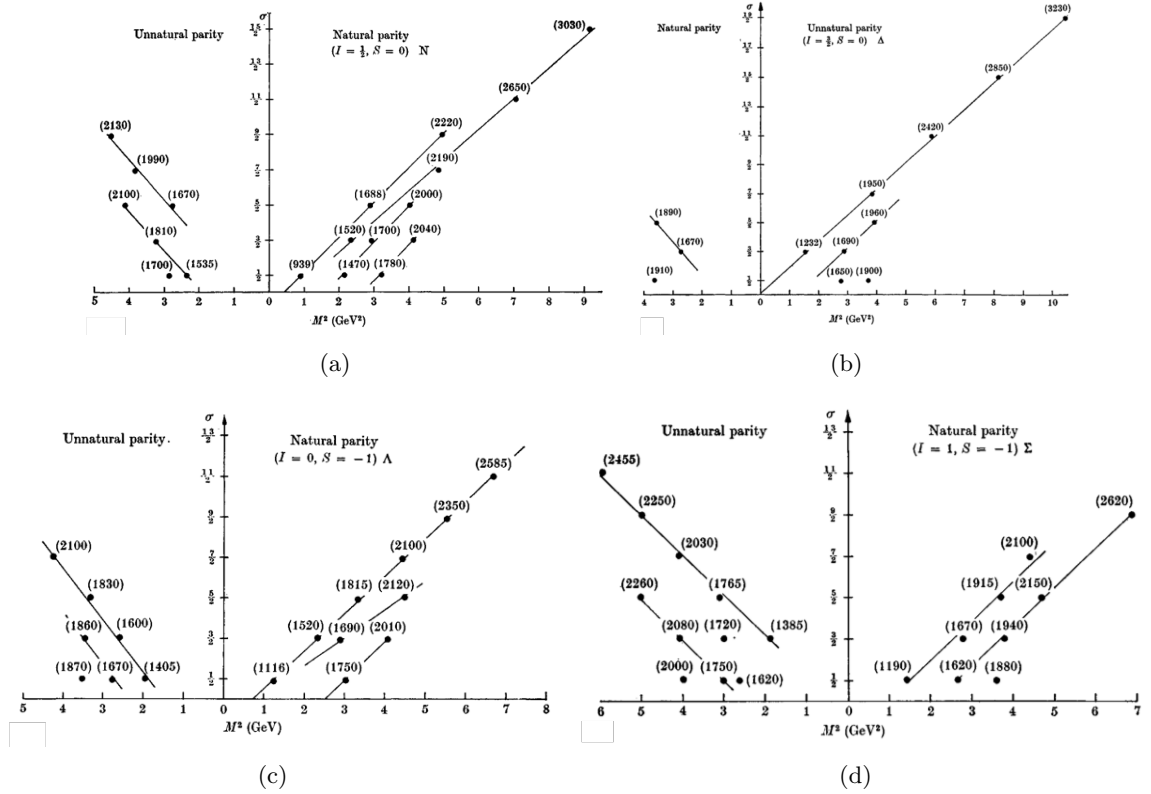


Figura F.1.5: Gráficos de Chew-Frautschi (momento angular total J vs. masa al cuadrado M^2) para algunos estados bariónicos, extraídos de la referencia [42]. Las posiciones de los puntos no corresponden a las extracciones experimentales más recientes ni incluye errores [13].

[58, 59], ajustes a los gráficos de Chew-Frautschi eran la única fuente de información sobre la trayectoria de Regge, donde se observa un comportamiento aproximadamente lineal. Las predicciones de modelos de quarks constituyentes para las masas de los hadrones se adhieren muy bien al comportamiento lineal aproximado tanto para bariones [60–67] como para mesones [67–70]. Modelos de flujo tubular de bariones (*flux tube*) también proporcionan trayectorias aproximadamente lineales [71–73]. Sin embargo, los polos asociados a las resonancias son cantidades complejas, así, su estudio no está completo si solo se consideran los patrones observados en los gráficos de Chew-Frautschi ya que es necesario tomar en cuenta la contribución de las partes imaginarias de los polos.

Los objetivos de este trabajo son:

1. Proporcionar una comparación exhaustiva entre las diferentes extracciones de los polos N^* y Δ^* basada en la fenomenología de Regge.
2. Evaluar el impacto de despreciar la parte imaginaria de los polos en el cálculo de la trayectoria de Regge, en particular en la extracción del parámetro de la pendiente, el cual puede ser comparado con el que se usa en ajustes de alta energía para datos de colisión protón-antiprotón [74].

3. Guiar futuras extracciones de los polos N^* y Δ^* [75–77].

La organización de esta tesis es la siguiente:

Capítulo 2. Se presentan algunos de los principales conceptos y resultados matemáticos que serán empleados en los capítulos posteriores. En particular se aborda la teoría de la colisión elástica de partículas sin espín desde la perspectiva de la matriz- S usando las amplitudes de dispersión. Se hace énfasis en la relación que existe entre la conservación de la probabilidad, la causalidad de los procesos físicos así como la *simetría de cruce* y las propiedades analíticas y estructura de las singularidades de las amplitudes de dispersión. Se muestra además como es posible realizar la continuación analítica de las amplitudes de dispersión en la variable de momento angular a valores complejos lo que conduce a las *trayectorias de Regge* y a la clasificación de los estados de dispersión de acuerdo a su *signatura*. Al final de este capítulo se desarrolla un ejemplo ilustrativo que permita al lector hacer contacto con algunas de las ideas expuestas en el desarrollo del mismo, en particular con la localización y extracción de los polos resonantes.

Capítulo 3. Se comienza describiendo la motivación física para estudiar el espectro de las resonancias bariónicas N^* y Δ^* a través de la teoría de Regge. Además, se presentan los conjuntos de polos a considerar en el análisis, los cuales se obtienen de procesos dispersivos πN así como fotoproducción de hadrones. Se describen además los modelos para analizar el espectro de las resonancias, motivando físicamente las parametrizaciones de las trayectorias de Regge y el como permiten obtener información de contribuciones a los estados con física más allá de la descripción de tres quarks.

Capítulo 4. Se describe la metodología de análisis de las resonancias a través de la técnica de *bootstrap* (Monte Carlo) y se presentan los resultados de los parámetros de los modelos ajustados para cada una de las trayectorias de Regge de las resonancias, así como los análisis y discusiones de los mismos.

Capítulo 5. Por último, se presentan las observaciones finales de este trabajo y de los análisis de las resonancias, así como las conclusiones del mismo.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

... We find ourselves in what Goldberger called the Never-Never Land, where momenta become imaginary, cosines of angles become less than -1 , and so on.

M. Gell-Mann

En este capítulo se presentan algunos de los conceptos y herramientas matemáticas, así como físicas, necesarias para el desarrollo y comprensión de esta tesis. Al final de este capítulo, en la sección 2.4, se desarrolla un ejemplo ilustrativo que permita al lector hacer contacto con algunas de las ideas expuestas y los resultados mostrados.

Los desarrollos en este capítulo son para partículas con espín cero (o sin tomarlo en cuenta) y despreciando los efectos electromagnéticos. Sin embargo, las expresiones matemáticas y resultados a los que se llega bajo estas aproximaciones son el punto de partida para aquellos en donde se incluyen cualidades como el espín [3, 25, 26, 38–40, 42, 48, 78–91].

2.1 DISPERSIÓN DE PARTÍCULAS Y LA MATRIZ- S

La teoría de la dispersión juega un papel muy importante en mecánica cuántica y en particular en la física de altas energías. además, es la principal estrategia para estudiar la materia a niveles fundamentales. [92]

En un experimento típico de dispersión, una partícula de un haz colisiona contra otra de un blanco y como resultado se producen diferentes tipos de partículas que viajan en múltiples direcciones, como se muestra en la figura F.2.1. Así, antes de la interacción se tiene un estado inicial $|i\rangle$ compuesto de dos partículas libres (haz y blanco) y después de la interacción, un estado final $|f\rangle$ que consiste a menudo de múltiples partículas.[42]

Puede mostrarse que la dispersión elástica de una partícula sin espín en un potencial central está determinada completamente por la función $S_l(k) = \exp[2i\delta_l(k)]$, donde $\delta_l(k)$ son denominados los *desfasajes* [7, 93]. De este modo, si la forma del potencial es conocida de

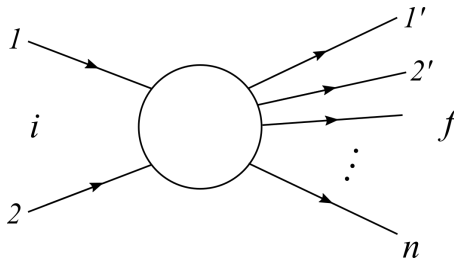


Figura F.2.1: Proceso de dispersión con dos partículas en el estado inicial y n en el estado final.

manera exacta, entonces, resolviendo la ecuación de Schrödinger de forma analítica o numérica puede obtenerse la información completa del sistema de interés. Sin embargo, en la mayoría de los casos no se conoce el potencial de interacción entre las partículas, o bien, puede no existir un potencial como tal [30, 94, 95].

La extensión de la función $S_l(k)$ para procesos dispersivos, se encuentra en el operador de dispersión S , y es tal que sus elementos de matriz S_{ab} cuantifican la transición entre un estado inicial $|a\rangle$ a algún estado final $|b\rangle$, y se define como: [32, 48, 50]:

$$S = I + i(2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_{j \in b} k_j - \sum_{i \in a} p_i \right) T \quad (2.1)$$

donde el operador de identidad I es una representación de la ausencia de interacción, p_i y k_j son el cuadrimento de cada una de las partículas incidentes y salientes respectivamente, T es llamado el operador de reacción y el factor delta que lo acompaña se introduce para considerar la conservación de energía-momento [24].

En este trabajo se considera el sistema natural de unidades $\hbar = c = 1$. Se caracteriza a los estados de partículas individuales $|i\rangle$ por su cuadrimento p y algunos otros números cuánticos como su espín, isospín, etc; los cuales serán denotados de forma genérica por λ . Las componentes del cuadrimento p son (p_0, \mathbf{p}) y se emplea la métrica dada por $p^2 = p_0^2 - \mathbf{p}^2$, donde p_0 denota a la componente energética.

Se normalizan los estados de modo que sean invariantes de Lorentz [42, 48]:

$$\langle i|i'\rangle = \langle p, \lambda | p', \lambda' \rangle = (2\pi)^3 2p_0 \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \delta_{\lambda\lambda'} \quad (2.2)$$

Y los estados de múltiples partículas se construyen como el producto directo de los estados individuales:

$$|p_1, \lambda_1; p_2, \lambda_2; \dots; p_n \lambda_n\rangle = |P_1, P_2, \dots, P_n\rangle = |P_1\rangle \otimes |P_2\rangle \otimes \dots \otimes |P_n\rangle \quad (2.3)$$

Por lo que la normalización y relación de completez se expresan como [48]:

$$\langle P'_1, \dots, P'_n | P_1, \dots, P_n \rangle = \prod_{i=1}^n (2\pi)^3 2p_{0i} \delta^3(\mathbf{p}'_i - \mathbf{p}_i) \delta_{n'n} \quad (2.4a)$$

$$\sum_m \int \prod_{i=1}^m \left[\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \mathbf{p}_i}{2p_{0i}} \right] |P_1, \dots, P_m\rangle \langle P_1, \dots, P_m| = 1 \quad (2.4b)$$

Con base en lo anterior, en términos de sus elementos de matriz $S_{ba} = \langle b|S|a\rangle$, se puede escribir a (2.1) como:

$$S_{ba} = \delta_{ba} + i(2\pi)^4 \delta^4(p^b - p^a) T_{ba} \quad (2.5)$$

donde se ha definido a p^a y p^b como la suma de los cuadrimentos de los estados iniciales y finales respectivamente.

Los operadores S y T son llamados matriz- S y matriz- T respectivamente [24]. Debido a la normalización elegida en la expresión (2.4a), la matriz- T es invariante de Lorentz [40, 41, 48, 80].

2.1.1 PROPIEDADES DE LA MATRIZ-S

Una lista de propiedades importantes que debe satisfacer la matriz- S incluyen [24]:

- (a) El principio de superposición de la mecánica cuántica.
- (b) Los requisitos de la relatividad especial.
- (c) La conservación de la probabilidad.
- (d) La propiedad de corto alcance de las fuerzas.
- (e) La causalidad y la existencia de un tiempo macroscópico.

Y se basan esencialmente en los principios físicos generales, que se cree, satisface cualquier interacción [94]. Además, no fijan la dinámica de los procesos [32].

De las propiedades antes mencionadas para la matriz- S , (a) significa que si $|\psi_a\rangle$ y $|\psi_b\rangle$ son estados físicos, también lo es $|\psi_c\rangle = \alpha |\psi_a\rangle + \beta |\psi_b\rangle$ con $a, b \in \mathbb{C}$. (b) es la invariancia de Lorentz para el proceso de dispersión así como la matriz- S . (c) se traduce en la unitariedad de la matriz- S , es decir, usando las ecuaciones (2.1) y (2.5) se tiene:

$$SS^\dagger = 1 \quad (2.6a)$$

$$T_{ab} - T_{ba}^\dagger = i(2\pi)^4 \sum_n \delta^4(p^b - p^a) T_{bn}^\dagger T_{na} \quad (2.6b)$$

Si la interacción es invariante ante la reflexión temporal, que es el caso de las interacciones fuertes, entonces la matriz- S es simétrica [32] y la unitariedad puede escribirse como:

$$2\Im[T_{ba}] = (2\pi)^4 \sum_n \delta^4(p^b - p^a) T_{nb}^\dagger T_{na} \quad (2.7)$$

donde $\Im[\]$ denota la parte imaginaria y la suma es sobre todos los estados que son permitidos por la conservación de la energía-momento y los números cuánticos relevantes [80].

La propiedad (d) implica que los elementos de la matriz- S son evaluados para los estados *asintóticos* a tiempos $t = \pm\infty$; o de manera más precisa, el estado inicial un largo tiempo antes de que la interacción tenga lugar (es decir largo en comparación con la duración de la interacción, típicamente 10^{-22} s) y el estado final mucho después de que la interacción ocurra [42]. Tales estados asintóticos pueden ser considerados como estados cuánticos de partícula libre. En este sentido, la teoría de la matriz- S es conveniente para el tratamiento de las interacciones fuertes [24].

La propiedad (e) será discutida con un mayor detalle en la sección 2.2, sin embargo, la analiticidad de la amplitud de dispersión está directamente relacionada con la causalidad de los procesos físicos [32, 96, 97].

La probabilidad de transición P_{ba} de $|a\rangle$ a $|b\rangle$ por unidad de tiempo se obtiene al calcular $|S_{ba}|^2$, en términos del operador T resulta [39]:

$$P_{ba} = |\langle b|S|a\rangle|^2 = |(2\pi)^4 \delta^4(p^b - p^a) T_{ba}|^2 = (2\pi)^4 \delta^4(p^b - p^a) V_{st} |T_{ba}|^2 \quad (2.8)$$

donde V_{st} es el volumen del espacio-tiempo, el cual surge de evaluar el cuadrado de la función- δ [32, 39, 41, 80]:

$$\left[\delta^4(p^b - p^a)\right]^2 = \delta^4(p^b - p^a - 0) \lim_{V_{st} \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{V_{st}} d^4x e^{i(p^b - p^a) \cdot x} = \delta^4(p^b - p^a) \frac{V_{st}}{(2\pi)^4} \quad (2.9)$$

Para el cálculo de cantidades medibles como la sección eficaz, el factor de volumen del espacio-tiempo resulta no tener efecto en el cálculo [38, 39, 41, 80, 81], por lo que puede despreciarse dicho factor para obtener así la densidad de probabilidad de la reacción medible [32]:

$$P_{ba} = (2\pi)^4 \delta^4(p^b - p^a) |T_{ba}|^2 \quad (2.10)$$

Por lo anterior, suele definirse a la probabilidad de transición según la ecuación (2.10) despreciando el factor del espacio-tiempo, o normalizándolo a la unidad [3, 32, 42, 43, 48]. En el caso de la mecánica cuántica no relativista [7], también se trata con factores de volumen de este estilo y ocurre que los observables no dependen de dicho factor.

Una técnica importante en el estudio matemático de operadores unitarios es la llamada *transformada de Cayley* que expresa un operador unitario en términos de un operador Hermitiano [3, 26, 98].

En el caso de la teoría de la dispersión S es el operador unitario de interés, cuya transformada de Cayley también llamada matriz- K , está definida como:

$$K = i(1 - S)(1 + S)^{-1} \quad (2.11)$$

La cual existe y puede ser invertida [99] de la siguiente forma:

$$S = (1 + iK)(1 - iK)^{-1} \quad (2.12)$$

La matriz- K sirve entonces para poder expresar la unitariedad de la matriz- S . Fue introducida por Wigner en [100] para el estudio de las resonancias en los procesos nucleares y usado en la física de partículas por primera vez en [101] para el estudio de resonancias en la dispersión Kp .

Concretamente, de la unitariedad de S y T , K es un operador Hermitiano, de la invariancia ante inversiones temporales para S , K es además simétrico, luego, K es un operador real y simétrico, el cual, suele considerarse como una suma de polos y algún polinomio. [3, 26, 98, 102].

2.1.2 VARIABLES DE MANDELSTAM PARA LA DISPERSIÓN DE DOS PARTÍCULAS

Considérese la cinemática de la reacción $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$, como la que se muestra en la figura F.2.2(a). El cuadrimomento de las partículas iniciales 1, 2 se denota por p_1 , p_2 y el de los estados finales 3, 4 por p_3 y p_4 respectivamente.

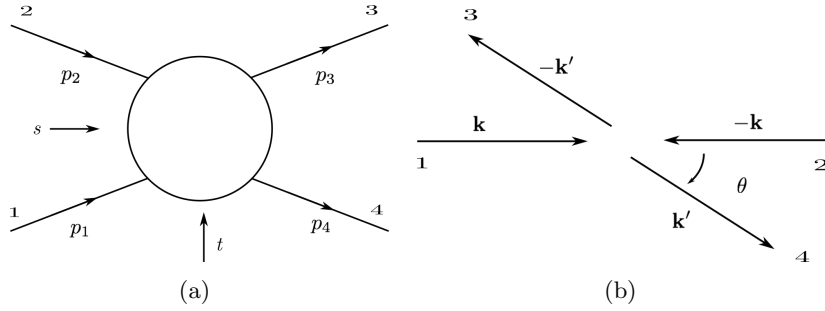


Figura F.2.2: (a) Notación para el cuadrimomento en la reacción $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$. La variable s denota el cuadrado de la energía del centro de masa, y t a la transferencia de momento. (b) Reacción $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ en el sistema del centro de masa, \mathbf{k} representa el momento del centro de masa.

La conservación de la energía-momento total es:

$$p_1 + p_2 - p_3 - p_4 = 0 \quad (2.13)$$

además, las partículas se encuentran en la *capa de masas* en sus estados iniciales y finales, es decir:

$$p_i^2 = m_i^2 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (2.14)$$

Se definen las *variables de Mandelstam* s, t, u como:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 \quad (2.15a)$$

$$t = (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2 \quad (2.15b)$$

$$u = (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2 \quad (2.15c)$$

Dichas variables no son independientes, ya que satisfacen la relación cinemática [103]:

$$s + t + u = \sum_{i=1}^4 m_i^2 \equiv \Sigma \quad (2.16)$$

En el sistema del centro de masa (CM, ver F.2.2(b)), puede entenderse el significado físico de las variables de Mandelstam, en tal sistema $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0$, así:

$$s = (p_{10} + p_{20})^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 = (E_{1c} + E_{2c})^2 = E_c^2 \quad (2.17)$$

representa el cuadrado de la energía total de las partículas, mientras que t y u representan transferencias de momento (se obtienen de la diferencia de los momentos) y son invariantes de Lorentz. [103]

Escribiendo los cuadrimomentos de las partículas en el sistema centro de masas como: $p_1 = (E_1, q_{12}(s))$, $p_2 = (E_2, -q_{12}(s))$, $p_3 = (E_3, q_{34}(s))$, $p_4 = (E_4, -q_{34}(s))$, las variables de

Mandelstam (2.15) están dadas por:

$$s = m_1^2 + m_2^2 + 2[E_1 E_2 + q_{12}^2(s)] \quad (2.18a)$$

$$t = m_1^2 + m_3^2 + 2[E_1 E_3 - q_{12}(s)q_{34}(s) \cos \theta_s] \quad (2.18b)$$

$$u = m_1^2 + m_4^2 + 2[E_1 E_4 + q_{12}(s)q_{34}(s) \cos \theta_s] \quad (2.18c)$$

De modo que la energía es:

$$E_1 = \frac{1}{2\sqrt{s}} [s + m_1^2 - m_2^2], \quad E_2 = \frac{1}{2\sqrt{s}} [s + m_2^2 - m_1^2] \quad (2.19a)$$

$$E_3 = \frac{1}{2\sqrt{s}} [s + m_3^2 - m_4^2], \quad E_4 = \frac{1}{2\sqrt{s}} [s + m_4^2 - m_3^2] \quad (2.19b)$$

Mientras que el cuadrado del módulo del momento (3-momento) está dado por:

$$q_{12}^2(s) = \frac{[s - (m_1 + m_2)^2][s - (m_1 - m_2)^2]}{4s} \quad (2.20a)$$

$$q_{34}^2(s) = \frac{[s - (m_3 + m_4)^2][s - (m_3 - m_4)^2]}{4s} \quad (2.20b)$$

Se define de forma general el momento de pares de partículas de masas m_i, m_j en el sistema centro de masas como [103]:

$$q_{ij}^2(s) = \frac{[s - (m_i + m_j)^2][s - (m_i - m_j)^2]}{4s} = \frac{\lambda(s, m_i^2, m_j^2)}{4s} \quad (2.21)$$

donde:

$$\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2xz \quad (2.22)$$

es llamada la función triangular.

El coseno del ángulo de dispersión, $\cos \theta_s$, en el sistema centro de masas es:

$$\begin{aligned} \cos \theta_s \equiv z_s &= \frac{s^2 + s(2t - \Sigma) + (m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2)}{4s q_{12}(s)q_{34}(s)} \\ &= \frac{s^2 + s(2t - \Sigma) + (m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2)}{\lambda^{\frac{1}{2}}(s, m_1^2, m_2^2)\lambda^{\frac{1}{2}}(s, m_3^2, m_4^2)} \end{aligned} \quad (2.23)$$

donde la suma de las masas, Σ , se ha definido en (2.16).

En el sistema centro de masas, es decir, en el canal-s [103] puede escribirse la sección eficaz total para un estado inicial de dos partículas y un estado final con n partículas como [48]:

$$\sigma = \frac{(2\pi)^4}{4q_{12}(s)\sqrt{s}} \int \prod_j \left[\frac{d^3 \mathbf{p}'_j}{2p_{0j}(2\pi)^3} \right] |\langle p'_1 p'_2 \dots p'_n | T | p_1 p_2 \rangle|^2 \delta^4(p_f - p_1 - p_2) \quad (2.24)$$

donde el factor dentro del producto \prod se origina del volumen del espacio-fase [43] y $q_{12}(s)$

está dado por (2.20a).

2.1.3 SIMETRÍA DE CRUCE

La razón fundamental para introducir las variables de Mandelstam es debido a la propiedad de *cruce*, la cual es un principio fundamental de la física de partículas [3, 25, 104] y está relacionada con lo que en QFT se conoce como la *ley de sustitución* [3, 105]. Dicha ley establece, por ejemplo, que la amplitud que describe el proceso dispersivo $e^- + \pi^+ \rightarrow e^- + \pi^+$ está relacionada con la del proceso de producción $e^- + e^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^-$. Este último proceso se obtiene al intercambiar el π^+ incidente con el e^- emergente. De este modo, el π^+ incidente con cuadrimomento p se convierte en una antipartícula π^- emergente con momento $-p$,

La amplitud de dispersión que describe procesos como el mencionado anteriormente, es una función analítica de las variables de Mandelstam en el plano complejo y por lo tanto, se puede continuar analíticamente a valores no físicos [3, 24, 42] como será discutido en las secciones siguientes.

En un contexto como el de los diagramas dispersivos [24] (ver figura F.2.3) puede separarse a los procesos en dos partes: *las patas externas* que corresponden a la cinemática de la reacción, es decir, a los estados de colisión antes y después de que la interacción tenga lugar; y los procesos dinámicos, que se representan como las *burbujas* centrales en la figura F.2.3. La forma en la que se incide la contribución de las patas externas, por ejemplo, es a través del *factor del espacio fase* que será abordado en las secciones siguientes. Otro tipo de contribuciones cinemáticas ocurren al incluir el espín en la reacción, por ejemplo, usando las *amplitudes de helicidad* en el centro de masa [3, 42, 48]. Una vez que se extraen en los cálculos las contribuciones cinemáticas a la reacción, queda únicamente la dinámica de los procesos vinculada a la interacción, bajo este razonamiento, puede comprenderse porque es que pese a que los desarrollos siguientes no incluyen la contribución del espín, el análisis de la dinámica de los procesos es similar al que se presenta a continuación [3, 25, 26, 38–40, 42, 48, 78–91].

Continuando con el análisis que concierne a este capítulo, puede escribirse la conservación del cuadrimomento (2.13) en las siguientes formas:

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4 \quad (2.25a)$$

$$p_1 + (-p_3) = (-p_2) + p_4 \quad (2.25b)$$

$$p_1 + (-p_4) = p_3 + (-p_2) \quad (2.25c)$$

donde se identifica a la partícula con cuadrimomento $-p$, como la correspondiente antipartícula a la de cuadrimomento p . [3, 25].

Cada una de las ecuaciones (2.25) puede interpretarse como la conservación del momento para las reacciones que se muestran en la figura F.2.3, y representan un canal de reacción diferente, los cuales están relacionados por *cruce*.

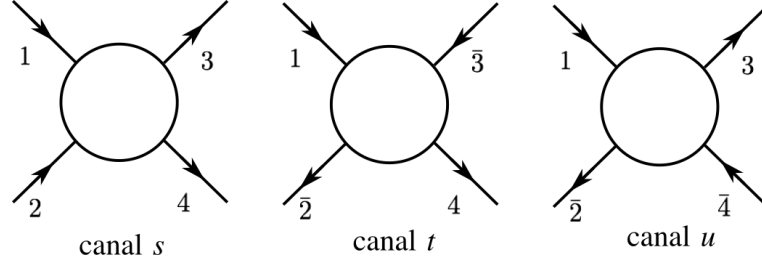


Figura F.2.3: Diferentes canales para la reacción $1+2 \rightarrow 3+4$, la barra denota la antipartícula de la partícula en cuestión.

Así pues, los diferentes canales de reacción se escriben como:

$$\text{canal-}s : 1 + 2 \rightarrow 3 + 4, \quad s = (p_1 + p_2)^2 \geq (m_1 + m_2)^2; \quad (2.26a)$$

$$\text{canal-}t : 1 + \bar{3} \rightarrow \bar{2} + 4, \quad t = (p_1 + p_3)^2 \geq (m_1 + m_3)^2; \quad (2.26b)$$

$$\text{canal-}u : 1 + \bar{4} \rightarrow 3 + \bar{2}, \quad u = (p_1 + p_4)^2 \geq (m_1 + m_4)^2 \quad (2.26c)$$

donde la notación $\bar{\alpha}$ hace referencia a la antipartícula de α . Nótese que lo que caracteriza a cada canal es que la correspondiente variable de Mandelstam es positiva [103].

En el canal t , la forma que adquieren la energía, el momento y el ángulo de dispersión debido a la propiedad de cruce son idénticas a las expresiones (2.19), (2.20), (2.23) con las sustituciones $s \rightarrow t$, $t \rightarrow s$, $m_2 \rightarrow m_3$, $m_3 \rightarrow m_2$. Específicamente para el ángulo de dispersión [48, 103]:

$$\begin{aligned} \cos \theta_t \equiv z_t &= \frac{t^2 + t(2s - \Sigma) + (m_1^2 - m_3^2)(m_2^2 - m_4^2)}{4t q_{13}(t)q_{24}(t)} \\ &= \frac{t^2 + t(2s - \Sigma) + (m_1^2 - m_3^2)(m_3^2 - m_4^2)}{\lambda^{\frac{1}{2}}(t, m_1^2, m_3^2)\lambda^{\frac{1}{2}}(t, m_2^2, m_4^2)} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Cinemáticamente la propiedad de cruce que define las reacciones (2.26) parece solo una relación algebraica, sin embargo, tiene gran relevancia en el análisis de la dinámica de los procesos ya que el cálculo de la amplitud en uno de los canales, da acceso a la información de todos los demás [25, 103, 104].¹

La relación (2.16) permite dar una representación geométrica a las variables de Mandelstam. Usando el hecho de que la suma de las distancias de un punto cualquiera en el interior de un triángulo equilátero a sus lados no depende la posición del punto (teorema de Viviani), se eligen s , t y u como tales distancias. Esta representación puede visualizarse en el *plano de Mandelstam* mostrado en la figura F.2.4, donde se representan además las regiones físicas de las reacciones (2.26), las cuales están relacionadas por cruce [103]. Por ejemplo, para el caso de partículas de igual masa m , la región física de la reacción $1 + \bar{3} \rightarrow \bar{2} + 4$ corresponde a $t \geq 4m^2$, $s \leq 0$ y $u \leq 0$.

De forma general, la región física de los diferentes procesos en los canales s , t , u , se obtiene

¹En el caso en que las partículas involucradas en la colisión tengan un espín distinto de cero, existen diferentes amplitudes que en conjunto describen los tres procesos. El principio de cruce conduce a relaciones entre las amplitudes y aquellas que describen los procesos cruzados. Tales procesos no son del interés de este trabajo pero puede consultarse [3, 42] para mayor información.

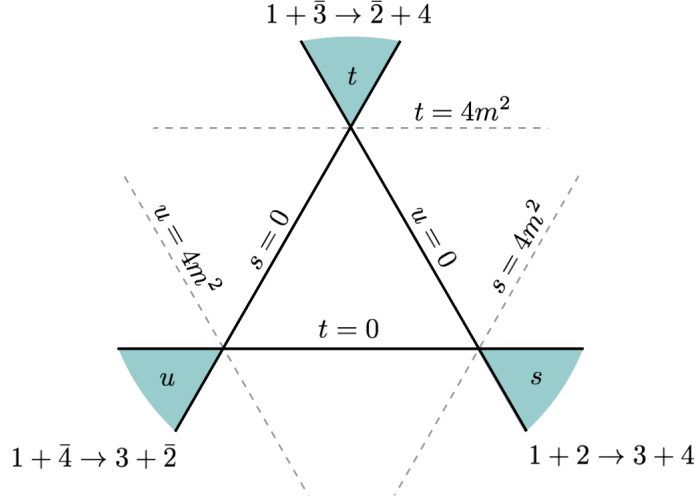


Figura F.2.4: Regiones físicas de las reacciones relacionadas por simetría de cruce en el plano de Mandelstam para partículas de masas iguales. Por ejemplo, para la región física de la reacción $1 + \bar{3} \rightarrow \bar{2} + 4$ corresponde a $t \geq 4m^2$, $s \leq 0$ y $u \leq 0$.

de la función [42]:

$$\begin{aligned} \phi(s, t) = & stu - s(m_1^2 - m_3^2)(m_2^2 - m_4^2) - t(m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2) \\ & + (m_1^2 m_4^2 - m_3^2 m_2^2)(m_1^2 + m_4^2 - m_3^2 - m_2^2) = 0 \end{aligned} \quad (2.28a)$$

$$\begin{aligned} \phi(s, t) = & 4sq_{12}^2(s)q_{34}^2(s) \sin^2 \theta_s = 4tq_{13}^2(t)q_{24}^2(t) \sin^2 \theta_t \\ = & 4uq_{14}^2(u)q_{23}^2(u) \sin^2 \theta_u = 0 \end{aligned} \quad (2.28b)$$

$$\phi(s, t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & m_2^2 & t & m_1^2 \\ 1 & m_2^2 & 0 & m_3^2 & s \\ 1 & t & m_3^2 & 0 & m_4^2 \\ 1 & m_1^2 & s & m_4^2 & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.28c)$$

Estrechamente ligada a la simetría de cruce se encuentra la llamada *hipótesis de Mandelstam* [33, 34] que establece que los procesos (2.26) descritos en los canales s , t , u , están determinados por una única amplitud invariante relativista; que es una función analítica de las variables s , t , u , a excepción de polos y cortes que caracterizan las reacciones en los tres canales [95, 106]. Más detalles al respecto serán discutidos en las secciones siguientes.

La hipótesis de Mandelstam es generalmente aceptada y probada para algunos órdenes en diagramas de Feynman, sin embargo, no se conoce una prueba general para dicha hipótesis [3, 36, 37, 43].

Para el caso de estudio de este capítulo, usando los axiomas de la Teoría Cuántica de Campos puede mostrarse [107] que es posible continuar analíticamente la amplitud de dispersión, para procesos $2 - 2$ del canal s

$$\langle b|T|a\rangle = \langle 3; 4|T|1; 2\rangle = A_{1+2 \rightarrow 3+4}(s, t, u), \quad (2.29)$$

a los canales t y u . En este caso, los procesos en los canales s , t , u se ven como los valores a la frontera en el eje real, de la misma función analítica $A(s, t, u)$.

Para el caso de partículas de la misma masa m lo anterior se escribe como:

$$A(s, t, u) = \begin{cases} A_{1+2 \rightarrow 3+4}(s, t, u), & s \geq 4m^2, \quad t \leq 0, \quad u \leq 0 \\ A_{1+\bar{3} \rightarrow \bar{2}+4}(t, s, u), & t \geq 4m^2, \quad s \leq 0, \quad u \leq 0 \\ A_{1+\bar{4} \rightarrow 3+\bar{2}}(u, t, s), & u \geq 4m^2, \quad t \leq 0, \quad s \leq 0 \end{cases} \quad (2.30)$$

Hay que notar que la función $A(s, t, u)$ depende únicamente de invariantes cinemáticos y no así de los signos de los cuádrimomentos, lo cual da un soporte físico a la simetría de cruce [42].

Puede probarse [32, 42, 48] que para la dispersión elástica de dos partículas sin espín la amplitud es función solo de dos invariantes independientes (se sigue de la ecuación (2.16)) que en este caso se eligen como s y t , es decir, $A(s, t, u) = A(s, t)$.

Una vez que se han removido todas singularidades de origen cinemático [31, 108], las cuales se encuentran codificadas en las expresiones (2.5) y (2.7), se supone de manera general que cualquier singularidad de la amplitud de dispersión tiene un origen dinámico [3, 24, 32, 33, 95, 106]. Por singularidad cinemática se entiende a aquellas que surgen debido a la elección de algún canal o representación en específico, mientras que las dinámicas son independientes de dicha elección [91, 109–113].

Es importante mencionar que la simetría de cruce implica la invariancia CTP (teorema) de la amplitud $A(s, t, u)$ con respecto a la combinación de conjugación de carga C , reflexión espacial P e inversión temporal T [25, 43, 48, 114, 115].

2.2 PROPIEDADES ANALÍTICAS DE LAS AMPLITUDES DE DISPERSIÓN

Las propiedades analíticas de la matriz- S fueron enfatizadas por primera vez en [116] y en [117] para la física de partículas elementales. El comportamiento analítico de las amplitudes de colisión como funciones de la energía y de la transferencia momento juega un papel central para establecer resultados rigurosos en alta energía y proporcionar la base para procedimientos aproximativos. [31, 118]

Antes de tratar las propiedades analíticas de la amplitud de dispersión relativista $A(s, t)$, se hace un recuento de las propiedades de la amplitud no relativista $f(E)$ (donde E es la energía del sistema), en la dispersión potencial, las cuales permiten dar una visión de las propiedades de la amplitud de dispersión $A(s, t)$.

Puede probarse que la amplitud $f(E)$ es una función analítica en el plano complejo ω (donde ω la extensión a variable compleja de la energía E) con un corte a lo largo del eje real que comienza en el umbral dispersivo E_0 hacia el infinito, con la excepción de polos simples (en el eje real) que corresponden a estados ligados (es decir estados de una partícula). La región física de dispersión corresponde al borde superior del corte, donde $E \rightarrow E + i\epsilon$, $\epsilon \rightarrow 0$. La amplitud de dispersión es el valor a la frontera $f(E + i\epsilon)$, $\epsilon \rightarrow 0$, de la amplitud analítica $f(\omega)$ en el eje real. Además la amplitud tiene solo una región física $E > 0$. La continuación

al semiplano inferior ω es llevada a cabo usando el principio de simetría $f(\omega^*) = f^*(\omega)$, o en el borde inferior del corte $f(E - i\epsilon) = f^*(E + i\epsilon)$. La discontinuidad a través del corte se escribe como $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(E + i\epsilon) - f(E - i\epsilon) = 2i\Im[f(E)]$. Además, los polos en la primer hoja de Riemann, fuera del eje real describen ondas crecientes cuya existencia contradice la conservación de la probabilidad y la causalidad. [7, 30, 31, 35, 40, 93–95]

2.2.1 CAUSALIDAD Y ANALITICIDAD

Imponiendo la condición de *causalidad*, es decir, que si la partícula incidente (o paquete de onda) colisiona con el centro de dispersión a un determinado tiempo, entonces la partícula no alcanza la distancia r del centro a menos de que un tiempo r/c , o mayor, haya transcurrido; puede demostrarse que la amplitud de dispersión $A(s, t)$ en el canal s para un valor fijo y real de t , t_0 , es una función analítica regular (también llamada función *holomorfa* [119]) en el semiplano superior complejo de la energía [32, sec. 2.1]. Es decir, en el semiplano superior la función no posee polos, cortes o algún otro tipo de singularidad.

La amplitud en el semiplano inferior complejo de s está igualmente libre de cualquier tipo de singularidad debido a la condición de causalidad para la reacción en el canal u , la cual hace a la amplitud una función regular para $\Im[u] > 0$. [32]

Puede entonces pensarse que el dominio de analiticidad de la función $A(s, t)$ se extiende a la totalidad del plano complejo, sin embargo este no es el caso, para mostrarlo, se ocupa el *principio de reflexión de Schwarz* [3, 119].

El principio de reflexión de Schwarz establece que si Γ es un segmento finito del eje real y D un dominio del plano complejo cuya intersección con el eje real es Γ , entonces cualquier función que sea analítica en D y con parte imaginaria $\Im[f(z)] = 0$ en Γ satisface:

$$f(z^*) = f^*(z) \quad (2.31)$$

donde z, z^* pertenecen a D . Una función $f(z)$ que cumpla (2.31) es llamada una *función analítica real* en D .

Se sigue entonces de (2.31) que si $A(s, t)$ es una función analítica en todo el plano complejo entonces $\Im[A(s, t)]$ sería cero para todo s en el eje real, sin embargo, de la relación de unitaridad (2.7) es claro que la parte imaginaria de la amplitud $A(s, t_0)$ es distinta de cero para valores físicos de s , es decir, reales y $s \geq (m_1 + m_2)^2$. Lo anterior se debe a que la unitaridad es demandada como ley física para tales valores [3].

Consecuentemente, $A(s, t)$ posee algunas singularidades en el plano- s a lo largo del eje real; las cuales, partiendo de las definiciones de las regiones físicas de las variables de Mandelstam (2.26), usando la simetría de cruce y la hipótesis de Mandelstam, corresponden a cortes y polos en el eje real de s [3, 80].

A continuación se describen las características y relaciones que existen entre tales singularidades, considerando un valor de t fijo, t_0 , para mostrar que la amplitud se puede continuar analíticamente entre los semiplanos superior e inferior, es decir, entre el canal s y u . Referencias más completas sobre este tema son [24, 78].

Los valores experimentalmente accesibles en el canal s , para la reacción $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ son:

$$s \geq s_0 = (m_1 + m_2)^2 \quad (2.32)$$

Luego, la relación (2.32) junto con (2.7) implica un corte de la amplitud en el eje real, que comienza en el umbral $s_0 = (m_1 + m_2)^2$ y sigue hacia valores positivos. Este es también llamado el *corte de unitaridad*.

Es importante mencionar que existen otros cortes a lo largo del eje real en el canal s , que comienzan a partir de los umbrales para la producción de nuevas partículas (ver figura F.2.5(b)) y son llamados también canales de reacción [24], que para el caso de masas iguales corresponden a los valores $s = 9m^2, 16m^2, \dots$

Debido a la simetría de cruce existen otros cortes que corresponden a los valores de u para el proceso $1 + \bar{4} \rightarrow 3 + \bar{2}$, en tal canal, los valores físicamente permitidos son:

$$u \geq u_0 = (m_1 + m_4)^2 \quad (2.33)$$

Ya que se ha supuesto un valor fijo t_0 , entonces de la ecuación (2.16), se sigue que los valores $s \leq \tilde{s}_0 = \Sigma - u_0 - t_0$ son igualmente accesibles para s , donde Σ corresponde a (2.16). En el caso de dispersión elástica, $m_1 = m_3, m_2 = m_4$, se tiene $s \leq \tilde{s}_0 = (m_1 - m_2)^2 - t_0$. Debido a la relación de unitaridad para el canal u , esta región se traduce en un corte para el canal s , el cual es llamado también *corte izquierdo* (ver figura F.2.5(b)).

De las características de la dispersión por un potencial previamente discutidas y la hipótesis de Mandelstam, es posible que haya otras singularidades en el eje real entre ambos cortes. Si existen estados estables de una partícula con los números cuánticos del sistema $1 + 2$ y una masa $M_j = \sqrt{s_j}$ tal que $\tilde{s}_0 \leq s_j \leq s_0$ ellos corresponden a polos en dicha región del eje real [80], más aún, puede probarse que se trata de polos simples para la amplitud $A(s, t_0)$ [3].

Debido a la simetría de cruce, si existen estados estables físicamente permitidos en el canal u con masas $M_k = \sqrt{u_k}$, estos se manifiestan como polos para valores de $s = \Sigma - u_k - t_0$ [3, 48] (ver figura F.2.5(b)).

En concordancia con los experimentos [32] y desde la perspectiva de la interacción fuerte, los piones neutros π^0 son las partículas estables más livianas de la teoría, además, no existe un estado ligado de dos piones neutros [13], por lo que en la dispersión elástica de dichas partículas solo existe un polo tanto en el canal s como en el canal u que corresponde al pión. Tal polo se encuentra en $u_k = m_{\pi^0}^2 = m^2$ y $s_j = m_{\pi^0}^2 = m^2$, luego $s_0 = 4m^2$ y $\tilde{s}_0 = -t_0$. En el caso de dispersión frontal $t_0 = 0$.

Finalmente del principio de reflexión de Schwarz, $A(s, t_0)$ es real en el intervalo $\tilde{s}_0 \leq s \leq s_0$ sin los polos antes mencionados, de esta manera, el semiplano superior e inferior están analíticamente conectados en tal región. Puede concluirse entonces que la amplitud $A(s, t)$ es una función analítica en todo el plano complejo, salvo los cortes y los polos antes mencionados [120–124].

En la figura F.2.5(a) se muestra la estructura de las singularidades mencionada anteriormente, en el plano de Mandelstam para la amplitud de dispersión elástica $2 - 2$ de partículas de igual masa a un valor fijo t_0 ; mientras que en la figura F.2.5(b) se muestra la correspondiente estructura de polos y cortes para la amplitud en el plano complejo de s ,

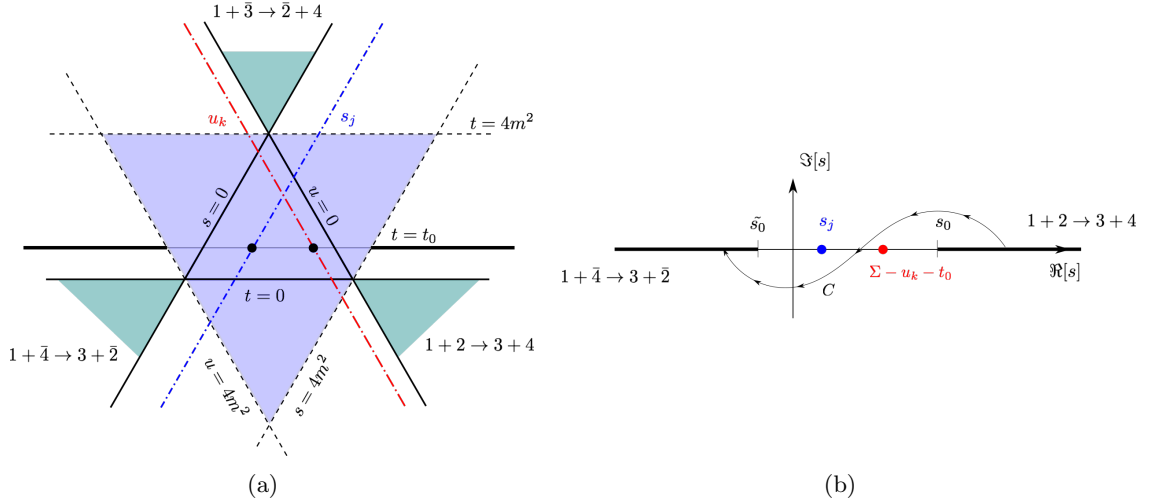


Figura F.2.5: (a) Triángulo de Mandelstam para los canales $s - t - u$ correspondiente a la dispersión de partículas de igual masa, en donde se muestra la posición de un polo en el canal- s para s_j y en el canal- u para u_k . Las líneas punteadas indican la posición del corte en $4m^2$. Las regiones sombreadas en verde son las regiones físicas, mientras que en la región morada al interior de las líneas punteadas la amplitud es real. (b) Estructura analítica de la amplitud en el plano complejo de s para un valor fijo t_0 , donde se muestran los cortes para las reacciones cruzadas y los polos. La curva C permite la continuación analítica entre los procesos del canal- s y del canal- u .

donde se destaca además a la curva C a través de la cual es posible la continuación analítica entre los diferentes canales de reacción.

Hay que notar que para valores de t muy negativos ($t \ll 0$), los polos del canal u pueden moverse en el canal s y es posible que los cortes derecho e izquierdo se superpongan [3], por lo que el efecto de las reacciones en el canal u impacta al canal s [3, 24]. Sin embargo, la continuación analítica entre ambos canales es aún posible mediante la deformación de los contornos de integración, más información puede consultarse en [42, 125].

Ya que la amplitud de dispersión es el valor de la función analítica en el eje real (región donde existen cortes para dicha función), es necesario especificar como se calcula la amplitud física, puesto que el corte implica que la amplitud tiende a valores diferentes según se aproxime por la parte superior o inferior al corte. El convenio más usado, que además tiene fundamento en la teoría de perturbaciones y el convenio de Feynman [24, 32, 41, 43], es considerar a la amplitud física como el límite al eje real desde el semiplano complejo superior, por ejemplo, para el canal- s , lo anterior se expresa como:

$$A_{\text{Fis.}-s} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} A(s + i\epsilon, t, u) \quad (2.34)$$

Mientras que en el canal u

$$A_{\text{Fis.}-u} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} A(s, t, u + i\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} A(s - i\epsilon, t, u) \quad (2.35)$$

lo anterior es debido a la simetría de cruce.

Hecha esta elección, la hoja de Riemann de la amplitud que corresponde a $+i\epsilon$ recibe el nombre de *hoja física* mientras que la otra, $-i\epsilon$, el de *hoja no física*.

En el canal- s puede escribirse usando el principio de reflexión de Schwarz (2.31):

$$A(s + i\epsilon, t) - A(s - i\epsilon, t) = A(s + i\epsilon, t) - A(s + i\epsilon, t)^* = 2i\Im[A(s + i\epsilon, t)] \quad (2.36a)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [A(s + i\epsilon, t) - A(s - i\epsilon, t)] = 2i\Im[A(s, t)] \quad (2.36b)$$

De forma general se define la discontinuidad a lo largo de los cortes para cada uno de los canales s , t , u como:

$$\Im_s[A] \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2i} [A(s + i\epsilon, t) - A(s - i\epsilon, t)] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} D_s(s, t), \quad s > 4m^2 \quad (2.37a)$$

$$\Im_t[A] \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2i} [A(t + i\epsilon, s) - A(t - i\epsilon, s)] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} D_t(t, s), \quad t > 4m^2 \quad (2.37b)$$

$$\Im_u[A] \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2i} [A(u + i\epsilon, t) - A(u - i\epsilon, t)] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} D_u(u, t), \quad u > 4m^2 \quad (2.37c)$$

donde la función D_α , $\alpha = s, t, u$, es denominada la *discontinuidad* a lo largo del respectivo corte y se ha empleado el principio de reflexión de Schwarz (2.31), como en la expresión (2.36).

En resumen y por lo discutido previamente, se suele construir a la amplitud de dispersión $A(s, t)$ en alguno de los canales, por ejemplo s , imponiendo las condiciones de unitaridad, analiticidad y simetría de cruce, de manera que incluya la información de todos los canales, lo anterior, dotándola de polos en el eje real que representen estados ligados y un par de cortes tanto derecho (unitaridad) como izquierdo (que pueden modelarse via la matriz- K). Nótese que estas condiciones no fijan la dinámica de los procesos [32].

Sin embargo, en una situación experimental realista, el corte izquierdo suele despreciarse en los análisis ya que por ejemplo, en la dispersión $\pi\pi$ comienza en cero, muy lejos de la región física. La posición de este corte depende de la reacción [13] y para casos en los que se requiera estudiar su contribución suele hacerse un modelo simple de él [126]. Los análisis subsecuentes para este capítulo no consideran la contribución, o algún modelo, para el corte izquierdo.

Como ocurre en la dispersión por un potencial, el corte izquierdo, junto con la simetría de cruce, está asociado con lo que se denomina *fuerzas de intercambio*, al no ser de interés para el desarrollo de esta tesis se invita al lector interesado a consultar referencias como [3, 32, 40–43, 48, 80] para ahondar en el tema.

2.2.2 RELACIONES DE DISPERSIÓN

Uno de los aspectos más exitosos del comportamiento analítico de las amplitudes de dispersión ha sido el uso de las relaciones de dispersión,² introducidas en el contexto de la teoría cuántica de campos por Gell-Mann, Goldberger y Thirring en [127] y Goldberger en [128].

²Una relación de dispersión es la terminología empleada en física para hacer referencia a la *transformada de Hilbert* [24, 96], tal nombre se debe a razones históricas [116].

Para establecer una relación de dispersión, es necesario mostrar que la amplitud no tiene singularidades en algún dominio simple del plano complejo de la variable de la energía (o del momento). En la forma más simple, este dominio es el plano complejo con un corte a lo largo de parte del eje real. Es necesario además establecer el comportamiento asintótico de la amplitud al infinito [31].

A continuación se discute brevemente el tipo de relaciones de dispersión que serán usadas más adelante en este capítulo.

Sea $f(\omega)$ una función de variable compleja $\omega = u + iv$, que no tiene singularidades dentro de una curva cerrada C en el plano ω . Luego el teorema de Cauchy indica que para z dentro de C

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(\omega)d\omega}{\omega - z} \quad (2.38)$$

donde la integral se evalúa alrededor del contorno C . En particular si la función $f(\omega)$ satisface:

1. $f(\omega)$ no posee singularidades en el plano ω , excepto cuando ω es real y mayor a un cierto valor a .
2. $f(\omega)$ tiende a cero a medida que ω tiende a ∞ .
3. $f(\omega)$ es real para $u \leq a$.

Entonces, la condición 1. implica que la función $f(\omega)$ tiene un corte en el eje real a partir del valor a , lo que significa que f tiende a valores distintos según se evalúe desde la parte superior o inferior del corte, es decir, $f(\omega + i\epsilon) \neq f(\omega - i\epsilon)$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$.

La condición 2. hace posible elegir a C como el límite para radio infinito del contorno que se muestra en la figura F.2.6(a), ya que la contribución de la parte circular de C tiende a cero a medida que el radio tiende a infinito, luego [31]:

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_a^\infty du \frac{f(u + i\epsilon) - f(u - i\epsilon)}{u - z}, \quad \epsilon \rightarrow +0 \quad (2.39)$$

donde se ha elegido como convenio el mismo que para la amplitud de dispersión (2.34)

La condición 3. permite hacer uso del principio de reflexión de Schwartz (2.31), también conocido como la condición de *analiticidad Hermitiana* [3, 50, 80]. Así, la expresión (2.39) puede escribirse como:

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_a^\infty du \frac{\Im[f(u)]}{u - z} \quad (2.40)$$

donde se asume que $\Im[f(u)]$ es finita. La ecuación (2.40) es llamada *Relación de dispersión* para $f(z)$ con cero sustracciones.

En el caso de que el comportamiento asintótico no sea satisfecho por $f(z)$, pero

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right| \rightarrow 0, \quad \text{cuando } |z| \rightarrow \infty \quad (2.41)$$

entonces la función

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (2.42)$$

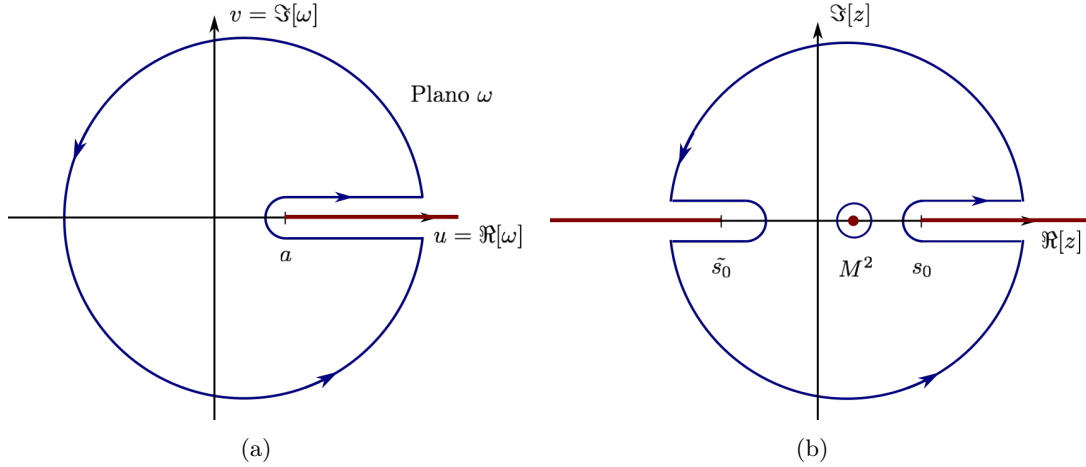


Figura F.2.6: (a) Contorno de integración para (2.39) en el plano complejo ω , la línea roja representa un corte para la función $f(z)$. (b) Contorno de integración para (2.44) que considera un corte izquierdo y uno derecho (rojo) así como un polo en el eje real en M^2 .

satisface las condiciones 1., 2. y 3. y la correspondiente relación de dispersión es

$$f(z) = f(z_0) + \frac{z - z_0}{\pi} \int_a^\infty du \frac{\Im[f(u)]}{(u - z_0)(u - z)} \quad (2.43)$$

que recibe el nombre de relación de dispersión *con una sustracción*, donde z_0 es el punto de sustracción y $f(z_0)$ el parámetro de sustracción [24, 31].

En el caso de que $f(z)$ además del corte derecho en s_0 , tenga un corte izquierdo en $-\tilde{s}_0$, con $\tilde{s}_0 > 0$ y un polo en el eje real en M^2 , entonces el contorno apropiado para usar el teorema de Cauchy es como el que se muestra en la figura F.2.6(b) y la relación de dispersión es para el caso sin sustracciones:

$$f(z) = \frac{\rho}{M^2 - s} + \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^\infty \frac{\Im[f(u)]}{u - z} du + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-\tilde{s}_0} \frac{\Im[f(u)]}{u - z} du \quad (2.44)$$

donde ρ es el residuo del polo en $z = M^2$. Más información puede consultarse en [3, 38, 40, 80, 129] y de manera muy especial [96, 130].

Si ocurre que la función está acotada polinomialmente, es decir:

$$\left| \frac{f(z)}{z^N} \right| \rightarrow 0 \text{ cuando } |z| \rightarrow \infty \quad (2.45)$$

es necesario introducir N' sustracciones para establecer una relación de dispersión, siendo N' el mínimo entero mayor que N . Los detalles y expresiones matemáticas necesarias pueden consultarse por ejemplo en [24, 31, 96, 131, 132].

Es sumamente importante mencionar que la relación entre la causalidad y la analiticidad de la amplitud de dispersión está directamente relacionada con el teorema de Titchmarsh [129, Cap. 2, pp. 119-128], el cual para los fines de interés de este trabajo puede enunciarse como sigue [38, 133]:

Si $f(\omega)$ es una función de cuadrado integrable sobre el eje real ω que satisface alguna de las siguientes condiciones, entonces las satisface a todas ellas:

1. La transformada de Fourier $F(t) = \mathcal{F}[f(\omega)]$ es causal, es decir $F(t) = 0$ para $t < 0$.
2. Al reemplazar ω por $z \equiv x + iy$, la función $f(z)$ es analítica en el semiplano complejo superior ($y > 0$) y tiende a $f(x)$ en por lo menos un segmento del eje real (x) a medida que $y \rightarrow 0^+$. Más aún, la integral $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x + iy)| dx < k$ para algún real k y $y > 0$, es decir, la integral está acotada.
3. La parte real e imaginaria de $F(z)$ son la transformada de Hilbert de cada una, es decir, satisfacen relaciones de dispersión.

Nótese que la introducción de sustracciones relaja la condición de que la función sea cuadrado integrable [40, 41, 80].

2.2.3 EXPANSIÓN EN ONDAS PARCIALES

Debido a la conservación del momento angular, que se sigue de la simetría ante rotaciones de los procesos dispersivos, la condición de unitariedad de las amplitudes de dispersión con un momento angular dado l es diagonal [43]. Más aún, la amplitud de dispersión $A(s, t)$ para cualquiera de los procesos $a + b \rightarrow c + d$ puede expandirse en una serie de ondas parciales que son funciones de uno solo de los invariantes cinemáticos de Mandelstam [3]. De este modo, la dispersión elástica de partículas de espín cero en el canal- s es:³

$$A(s, t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) f_{\ell}(s) P_{\ell}(z) \quad (2.46)$$

donde $P_{\ell}(z)$ es el polinomio de Legendre, $f_{\ell}(z)$ son las *amplitudes parciales* y z es el coseno del ángulo de dispersión definido en (2.23).

Para el caso específico de dispersión de partículas de igual masa m , la ecuación (2.23) se expresa como [43]:

$$z = \cos \theta_s = 1 + \frac{2t}{s - 4m^2} = -1 - \frac{2u}{s - 4m^2} = \frac{u - t}{u + t} \quad (2.47)$$

Las amplitudes parciales $f_{\ell}(s)$ se calculan de la transformada inversa [32]:

$$f_{\ell}(s) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d \cos \theta_s P_{\ell}(\cos \theta_s) A(s, t(\cos \theta_s)) \quad (2.48)$$

cuyo rango de integración en s se obtiene de la condición $-1 \leq \cos \theta_s \leq 1$, que en el caso de partículas de igual masa m , va de $t = -(s - 4m^2)$ a $t = 0$ como se sigue de la ecuación (2.47).

³Para el caso con partículas con espín se usan las amplitudes de helicidad, J en lugar de l y las funciones de rotación, mayor información puede consultarse en [3, 40]

Nótese que en este caso, la condición de ortogonalidad de los polinomios de Legendre se ha elegido como:

$$\begin{aligned} \int \frac{d\Omega_1}{4\pi} P_n(\hat{\mathbf{p}}_1 \cdot \hat{\mathbf{k}}) P_m(\hat{\mathbf{p}}_2 \cdot \hat{\mathbf{k}}) &= \frac{\delta_{mn}}{2n+1} P_n(\hat{\mathbf{p}}_1 \cdot \hat{\mathbf{p}}_2) \\ \int \frac{d\Omega_1}{4\pi} P_n(\cos \theta_1) P_m(\cos \theta_2) &= \frac{\delta_{mn}}{2n+1} P_n(\cos \theta) \end{aligned} \quad (2.49)$$

donde la integral angular sobre la dirección de movimiento está dada por [134]:

$$\int d\Omega_1 = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d(\hat{\mathbf{p}}_1 \cdot \hat{\mathbf{k}}) \quad (2.50)$$

La relación (2.49) se obtiene al hacer uso del teorema de adición de las funciones de Legendre y de la adición de cosenos; la deducción detallada puede consultarse en [134, cap. 3].

El dominio de convergencia de la serie (2.46) recibe el nombre de la *elipse de Lehman-Martin* [3, 118]. Tal elipse tiene focos en el plano complejo de $\cos \theta$ en $\cos \theta = \pm 1$ y su semieje mayor de longitud:

$$b(s) = \sqrt{1 + \frac{(m_1^2 - M_1^2)(m_2^2 - M_2^2)}{k^2[s - (M_1 - M_2)]^2}} \quad (2.51)$$

donde m_1 y m_2 son las masas de las partículas incidentes y k es el momento en el sistema centro de masa. M_1 y M_2 son los estados más pequeños tales que:

$$\langle 0 | j_1(x) | M_1 \rangle \neq 0, \quad \langle 0 | j_2(x) | M_2 \rangle \neq 0 \quad (2.52)$$

donde j_1 y j_2 son los operadores de corriente asociados a las partículas 1 y 2. Para bosones escalares de masas iguales, $M_1 = M_2 = 2m$ [31].

Es importante notar que esta elipse se “encoge” a medida que $s \rightarrow \infty$, de modo que asintóticamente se aproxima a la recta real $-1 < \cos \theta < 1$. El fin del eje mayor corresponde a un punto $t = t_0(s)$ tal que:

$$t_0(s) \sim \frac{C}{s} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } s \rightarrow \infty \quad (2.53)$$

Que es un resultado más débil que $t_0 = m^2$ (o $4m^2$), el cual se espera intuitivamente por simetría de cruce en el canal t para el caso de masas iguales. La aportación de Martin [125, 135] fue mostrar que la elipse para la que $A(s, t)$ es regular puede deformarse a $t_0 \rightarrow m^2$ (o $4m^2$ una vez que el polo ha sido eliminado) [24, 31].

Una de las grandes ventajas de realizar la expansión en ondas parciales es que para valores pequeños de s , se espera que solo unas cuantas ondas parciales contribuyan al cálculo de la amplitud [42]. Otra ventaja es que cada onda parcial satisface su propia ecuación de unitaridad, lo cual se muestra a continuación.

Si para el proceso dispersivo se considera únicamente estados intermedios de dos partículas $|n\rangle = |k_n k'_n\rangle$ como se muestra en la figura F.2.7, entonces la relación de unitaridad (2.7) se expresa como:

$$2\Im[A(s, t)] = (2\pi)^4 \sum_n \int \int \frac{d^3 \mathbf{k}_n}{2k_{0n}(2\pi)^3} \frac{d^3 \mathbf{k}'_n}{2k'_{0n}(2\pi)^3} \delta(k_{0n} + k'_{0n} - \sqrt{s}) \delta^3(\mathbf{k}_n + \mathbf{k}'_n) T_{fn} T_{ni}^* \quad (2.54)$$

La ecuación (2.54) puede escribirse de manera abreviada y usando la notación $\pm i\epsilon$ para indicar la conjugación compleja de la función según el convenio físico, como [32]:

$$A(s + i\epsilon, t) - A(s - i\epsilon, t) = \int \int dt_1 dt_2 K(s, t_1, t_2) A(s + i\epsilon, t_1) A(s - i\epsilon, t_2) \quad (2.55)$$

donde K es el factor Jacobiano de la transformación.

Usando coordenadas esféricas para realizar la integración sobre los elementos de volumen de los momentos:

$$\int d^3 \mathbf{k}_j = \frac{1}{2} \int |\mathbf{k}_j| |d\mathbf{k}_j|^2 d\Omega_{k_j} \quad (2.56)$$

así como la propiedad de la función delta $\delta(ax) = 1/a \delta(x)$, puede realizarse la integración en (2.54), salvo la parte angular:

$$\Im[A(s, t)] = \frac{1}{64\pi^2} \sum_n \frac{2|\mathbf{k}_n|}{\sqrt{s}} \int d\Omega_{\mathbf{k}_n} T_{fn} T_{ni}^* \quad (2.57)$$

Al expandir en ondas parciales la ecuación (2.57) se obtiene

$$\Im[A(s, t)] = \sum_{\ell, \ell'} (\ell + 1)(2\ell' + 1) \sum_n \frac{|\mathbf{k}_n|}{8\pi\sqrt{s}} f_\ell^{fn}(s) f_{\ell'}^{ni}(s)^* \int \frac{d\Omega_{\mathbf{k}_n}}{4\pi} P_\ell(\hat{\mathbf{p}}_b \cdot \hat{\mathbf{k}}_n) P_{\ell'}(\hat{\mathbf{p}}_a \cdot \hat{\mathbf{k}}_n) \quad (2.58)$$

donde los ángulos y sus relaciones, para las respectivas expansiones se muestran las figuras F.2.7(b) y F.2.7(c).

Usando (2.49) puede escribirse (2.58) como

$$\Im[A(s, t)] = \sum_{\ell, n} f_\ell^{fn}(s) f_\ell^{ni}(s)^* (2\ell + 1) \frac{|\mathbf{k}_n|}{8\pi\sqrt{s}} P_\ell(\cos \theta_s) \quad (2.59)$$

donde $\cos \theta_s = \hat{\mathbf{p}}_b \cdot \hat{\mathbf{p}}_a$ y es el mismo que se ha definido en (2.23), o (2.47) para el caso de masas iguales.

Más aún, la ecuación (2.46) entre los estados $|f\rangle$ y $|i\rangle$ se escribe:

$$\Im[A(s, t)] = \Im \left[\sum_{\ell} f_\ell^{fi}(s) (2\ell + 1) P_\ell(\cos \theta_s) \right] \quad (2.60)$$

Al comparar (2.59) y (2.60) se obtiene la condición de unitaridad para cada onda parcial con momento angular ℓ y la aparición del *factor del espacio fase*:

$$\Im[f_\ell^{fi}(s)] = \sum_n \tau_n(s) f_\ell^{fn}(s) f_\ell^{ni} \quad (2.61)$$

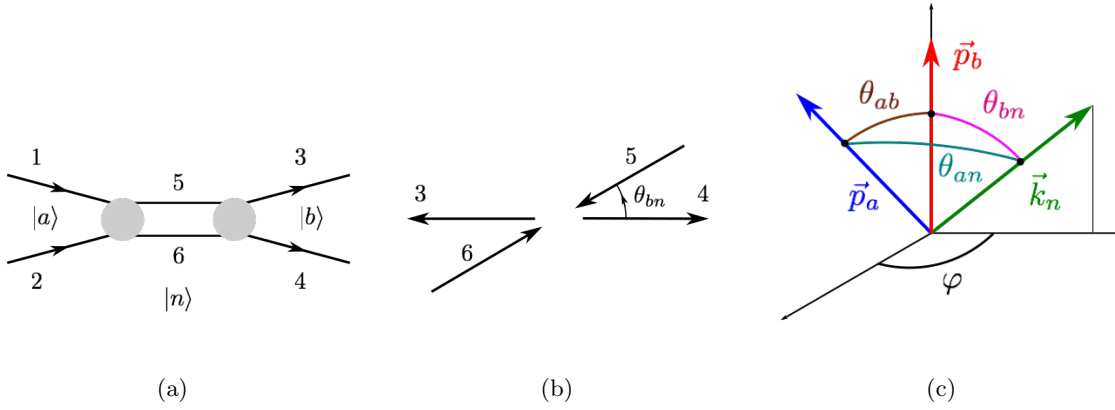


Figura F.2.7: (a) la amplitud $a + 2 \rightarrow 3 + 4$ via el estado intermedio $5 + 6$, es decir, $a \rightarrow b$ via n . (b) Centro de masa de los 3-momentos, así como el ángulo de dispersión θ_{bn} en dicho sistema. (c) Relación entre los ángulos θ_{ab} , θ_{bn} y θ_{an} ; el ángulo φ es medido alrededor del eje \vec{p}_b cuyo origen es el plano que contiene a \vec{p}_a y \vec{p}_b .

donde $\tau_n(s) = \frac{|\mathbf{k}_n|}{8\pi\sqrt{s}}$ es el factor del espacio fase del proceso [32].

Para procesos elásticos, es decir, debajo del primer umbral en el canal- s , la condición de unitariedad y el espacio fase se expresan como:

$$\Im[f_\ell(s)] = \tau(s)f_\ell(s)f_\ell^*(s) \quad (2.62a)$$

$$\tau = \tau(s) = \frac{1}{8\pi} \frac{q(s)}{\sqrt{s}} = \frac{1}{16\pi} \frac{q(s)}{\omega_s} = \frac{\nu(s)}{16\pi} \quad (2.62b)$$

donde $q(s)$ y ω_s representan el momento y la energía en el sistema centro de masas [32, 43], $\nu(s)$ es llamado del factor de velocidad y $\tau(s)$ es denominado el espacio fase en el canal s . Es importante mencionar que el $q(s)$ en la expresión (2.62b) corresponde a q_{12} de (2.21) pues se consideran procesos elásticos.

La ecuación (2.62a) demuestra que la relación de unitariedad es onda parcial a onda parcial, además, cada una de esas relaciones es independiente a las demás, como se mencionó anteriormente.

Como puede verse el espacio fase es un factor que contribuye con singularidades del tipo cinemático a la amplitud de dispersión; es decir, la información del espacio fase se encuentra codificada dentro de las expresiones (2.5) y (2.7).

Por lo que, para extraer las singularidades del espacio fase, puede parametrizarse a la matriz- S [98, 136] como:

$$S = I + 2i\{\rho\}^{1/2}T\{\rho\}^{1/2} \quad (2.63)$$

donde ρ es llamada la matriz del espacio fase, la cual es diagonal por definición [98] y en este caso, T es invariante de Lorentz [102].

En términos de sus elementos de matriz:

$$S_{ba} = \delta_{ba} + 2i \sum_{\gamma\sigma} \rho_{b\gamma}^{1/2} T_{\gamma\sigma} \rho_{\sigma a}^{1/2} = \delta_{ba} + 2i\rho_{ba}T_{ba} \quad (2.64)$$

Para el caso elástico y mono-canal, se tiene entonces que la matriz- S expandida en ondas parciales satisface para cada onda parcial ℓ [32, 43]:

$$S_\ell(s)S_\ell^*(s) = I \quad (2.65a)$$

$$S_\ell(s) = I + 2i\tau(s)f_\ell(s) \quad (2.65b)$$

donde $\tau(s)$ es el correspondiente espacio fase y $f_\ell(s)$ la amplitud de dispersión parcial.

Para procesos elásticos es posible resolver la ecuación (2.62a) como [31]:

$$f_\ell(s) = \frac{\exp[2i\delta_\ell] - 1}{2i\tau(s)} \quad (2.66)$$

donde δ_ℓ es real en la región elástica, también llamado desfase y $\tau(s)$ es el factor del espacio fase. Nótese que esta solución es idéntica a la de la mecánica cuántica no relativista [7, 93], salvo el factor del espacio fase que surge de la normalización relativista de la amplitud [43].

De manera más general, cuando se permiten procesos inelásticos, la función $f_\ell(s)$ puede escribirse como [24, 50]:

$$f_\ell(s) = \frac{\eta_\ell \exp[2i\delta_\ell] - 1}{2i\tau(s)} \quad (2.67)$$

donde δ_ℓ es real y $0 \leq \eta_\ell \leq 1$ es llamado también el coeficiente de inelasticidad; para el caso de dispersión elástica $\eta_\ell = 1$.

Ya sea que existan o no procesos inelásticos, la probabilidad $|S_\ell(s)|^2$ en cada onda parcial no puede exceder a la unidad, lo cual es un requisito de la unitaridad, es decir:

$$|1 + 2i\tau(s)f_\ell(s)|^2 \leq 1 \quad (2.68)$$

lo que en conjunto con las expresiones (2.62a) y (2.67) impone los siguientes límites para las amplitudes parciales:

$$0 \leq |f_\ell(s)|^2 \leq \tau(s)|f_\ell(s)|^2 \leq \Im[f_\ell(s)] = \frac{1 - \eta_\ell \cos(2\delta_\ell)}{2\tau(s)} \leq \frac{1}{\tau(s)} \quad (2.69a)$$

$$\Re[f_\ell(s)] = \frac{\eta_\ell \sin(2\delta_\ell)}{2\tau(s)} \leq \frac{1}{2\tau(s)} \quad (2.69b)$$

donde $\cos(2\delta_\ell)$ y $\sin(2\delta_\ell)$ son funciones reales. El límite superior de las desigualdades se ha obtenido usando $0 \leq \eta_\ell \leq 1$, así como $-1 \leq \cos(2\delta_\ell) \leq 1$ (que implica $0 \leq 1 - \eta_\ell \cos(2\delta_\ell) \leq 2$), $-1 \leq \sin(2\delta_\ell) \leq 1$ y $1 \leq \tau(s)$ (que se sigue de (2.62b)).

Según se considere un proceso totalmente elástico $\eta_\ell \rightarrow 1$, o totalmente inelástico $\eta_\ell \rightarrow 0$ la expresión (2.69) tiene como límites

$$\Im[f_\ell(s)] \leq \begin{cases} \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{2\tau(s)} = 8\pi, & \eta_\ell = 0 \\ \frac{1 - \cos(2\delta_\ell)}{2\tau(s)} \leq \frac{1}{\tau(s)} = \frac{16\pi}{\nu(s)}, & \eta_\ell = 1 \end{cases} \quad (2.70)$$

donde es importante notar que la máxima inelasticidad en una determinada onda parcial corresponde a evaluar el límite a alta energía [43], lo cual se sigue de (2.62b). Es inmediato

notar que para $\eta_\ell = 0$ se tiene $\Re[f_\ell(s)] = 0$ y para $\eta_\ell = 1$ entonces $\Re[f_\ell(s)] \leq \frac{1}{2\tau(s)}$, por lo que en cualquiera de los dos casos la parte imaginaria de $f_\ell(s)$ acota a la parte real.

De igual forma que en la dispersión por un potencial [7], la parte imaginaria de la amplitud de dispersión está vinculada con la sección eficaz total a través del teorema óptico, el cual permite relacionar a las amplitudes parciales de dispersión con cantidades mensurables [3].

Para el caso en el que $|b\rangle = |a\rangle$, la ecuación (2.7) se expresa como:

$$2\Im[\langle a|T|a\rangle] = (2\pi)^4 \sum_n \delta^4(p^n - p^a) |\langle n|T|a\rangle|^2 \quad (2.71)$$

Al comparar (2.71) con (2.24), puede observarse que el lado derecho de la expresión (2.71) es proporcional a la suma de las secciones eficaces del estado $|a\rangle$ a los estados finales, es decir:

$$\sigma_{i \rightarrow n}^{\text{tot}} = \frac{1}{q_{12}(s)\sqrt{s}} \Im[\langle a|T|a\rangle] \quad (2.72)$$

este resultado es conocido como el teorema óptico.

Ya que la amplitud $\langle a|T|a\rangle$ considera a los estados inicial y final idénticos en (2.72), ello significa que se trata con un proceso de dispersión frontal, es decir $t \sim 0$, de modo que el teorema óptico puede escribirse como:

$$\sigma^{\text{tot}} = \frac{1}{q_{12}(s)\sqrt{s}} \Im[A(s, 0)] \quad (2.73)$$

Usando la expansión en ondas parciales (2.46), así como (2.62a) y (2.62b), la ecuación (2.73) se expresa como:

$$\sigma^{\text{tot}} = \frac{1}{q_{12}(s)\sqrt{s}} \sum_\ell (2\ell + 1) \Im[f_\ell(s)] = \sum_\ell (2\ell + 1) \frac{|f_\ell(s)|^2}{8\pi s} \quad (2.74)$$

ya que $P_\ell(\cos\theta = 1) = 1$ para toda ℓ . La expresión (2.74) permite definir a las secciones eficaces totales parciales como:

$$\sigma_\ell^{\text{tot}} = \frac{(2\ell + 1)}{8\pi s} |f_\ell(s)|^2 \quad (2.75)$$

2.2.4 PROPIEDADES ANALÍTICAS DE LAS ONDAS PARCIALES

En las secciones previas se ha discutido la estructura analítica de la función $A(s, t)$. Al realizar la expansión en ondas parciales, puede observarse de la transformada inversa (2.48) que la estructura analítica de las amplitudes parciales esta contenida en el producto conjunto de las funciones de Legendre y la amplitud $A(s, t)$. Antes de tratar con las propiedades de $f_\ell(s)$ se discutirán brevemente algunas de las propiedades de las funciones de Legendre.

Es importante destacar que las funciones de Legendre, que se emplean para poder expresar

a la amplitud $A(s, t)$ en ondas parciales satisfacen la ecuación diferencial [119]:

$$\frac{d}{dz} \left[(1 - z^2) \frac{dP_\ell(z)}{dz} \right] + \ell(\ell + 1)P_\ell(z) = 0 \quad (2.76)$$

donde la variable z es en general compleja. ⁴

La ecuación (2.76) admite soluciones para valores de ℓ además de los enteros, más aún $\ell, z \in \mathbb{C}$, lo cual puede apreciarse mejor al escribir $P_\ell(z)$ en términos de la función hipergeométrica [119, 134, 137, 138]:

$$P_\ell(z) = F \left[-\ell, \ell + 1; 1; \frac{1 - z}{2} \right] \quad (2.77a)$$

$$\begin{aligned} &= \pi^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\ell + \frac{1}{2})}{\Gamma(\ell + 1)} (2z)^\ell F \left[-\frac{\ell}{2}, -\frac{\ell}{2} + \frac{1}{2}; -\ell + \frac{1}{2}; z^{-2} \right] \\ &+ \pi^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(-\ell - \frac{1}{2})}{\Gamma(-\ell)} (2z)^{-\ell-1} F \left[\frac{\ell}{2} + \frac{1}{2}, \frac{\ell}{2} + 1; \ell + \frac{3}{2}; z^{-2} \right] \end{aligned} \quad (2.77b)$$

que es singular en $z = -1$ y ∞ . $P_\ell(z)$ son también llamadas funciones de Legendre de primera especie.

Existen soluciones de (2.76) que son singulares en $z = \pm 1$ y ∞ , llamadas funciones de Legendre de segunda especie [134]:

$$Q_\ell(z) = \pi^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\ell + 1)}{\Gamma(\ell + \frac{3}{2})} (2z)^{-\ell-1} F \left[\frac{\ell}{2} + 1, \frac{\ell}{2} + \frac{1}{2}; \ell + \frac{3}{2}; z^{-2} \right] \quad (2.78)$$

Cuando ℓ es un entero, las funciones $P_\ell(z)$ y $Q_\ell(z)$ están relacionadas por la fórmula de Neumann [134]:

$$Q_\ell(z) = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dz'}{z' - z} P_\ell(z') = (-1)^{\ell+1} Q_\ell(-z), \quad \ell = 0, 1, 2, \dots \quad (2.79)$$

El comportamiento asintótico para las funciones $P_\ell(z)$, $Q_\ell(z)$ para un ℓ fijo, cuando z es muy grande es [42, 79, 134]:

$$P_\ell(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \pi^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\ell + \frac{1}{2})}{\Gamma(\ell + 1)} (2z)^\ell \quad \Re[\ell] \geq -\frac{1}{2} \quad (2.80a)$$

$$P_\ell(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \pi^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(-\ell - \frac{1}{2})}{\Gamma(-\ell)} (2z)^{-\ell-1} \quad \Re[\ell] \leq -\frac{1}{2} \quad (2.80b)$$

$$Q_\ell(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \pi^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\ell + 1)}{\Gamma(\ell + \frac{3}{2})} (2z)^{-\ell-1} \quad (2.80c)$$

ya que para la función hipergeométrica, $F \rightarrow 1$ cuando $z \rightarrow \infty$.

⁴Puede extenderse el dominio de las funciones $P_n(x)$ con $x \in \mathbb{R}$ al plano complejo usando la integral de Schlaefli $P_n(z) = \frac{1}{2^{n+1}\pi i} \oint_C \frac{(z'^2 - 1)^n}{(z' - z)^{n+1}} dz'$, donde el contorno C contiene el punto $z = z'$. Esto se obtiene del teorema de Cauchy y la fórmula de Rodriguez [119, 134, 137].

El comportamiento de $P_\ell(z)$, $Q_\ell(z)$ para z fijo y real cuando $\ell \rightarrow \infty$ es [134]:

$$P_\ell(z) \xrightarrow{|\ell| \rightarrow \infty} (2\pi\ell)^{-\frac{1}{2}} (z^2 - 1)^{-\frac{1}{4}} e^\xi \quad (2.81a)$$

$$\xi \equiv \begin{cases} 2(\Re[\ell] + 1) \log \left[\left(\frac{z+1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{z-1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] & z > 1 \\ 2|\Im[\ell]| \tan^{-1} \left(\frac{1-z}{1+z} \right)^{\frac{1}{2}} & z^2 < 1 \end{cases} \quad (2.81b)$$

$$Q_\ell(z) \xrightarrow{|\ell| \rightarrow \infty} \ell^{-\frac{1}{2}} \exp \left[- \left(\ell + \frac{1}{2} \right) \zeta(z) \right] \quad (2.81c)$$

$$\zeta(z) \equiv \log \left[z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \right] \quad z > 1 \quad (2.81d)$$

Ahora bien, considerando la dispersión de partículas de igual masa y a partir de la transformada inversa para las ondas parciales (2.48), puede observarse que existen dos fuentes para las singularidades de $f_\ell(s)$ [3, 139]. Las primeras ocurren cuando $A(s, t)$ posee singularidades en el plano complejo- s cuyas posiciones sean independientes de t y u . De este modo el corte de $A(s, t)$ a lo largo del eje real, que va desde el umbral físico $4m^2$ hasta $+\infty$, también ocurre para $f_\ell(s)$; similarmente, si $A(s, t)$ tiene un polo para $s = M^2$, dicho polo también aparece en $f_\ell(s)$, a menos de que su residuo sea cero como resultado de la integración sobre $z = \cos \theta_s$. De hecho, puede mostrarse [3, cap. 6] que el residuo del polo en $A(s, t)$ es una constante o un polinomio de Legendre que depende del espín de la partícula asociada. Más aún, se sigue de la propiedad de ortogonalidad de los polinomios de Legendre, que la integración sobre z tiende a un residuo nulo en todas las amplitudes parciales a excepción de aquella cuyo ℓ tenga el mismo valor que el espín de la partícula que originó tal polo [3].

La discontinuidad a lo largo del corte derecho para las amplitudes parciales es, usando (2.48):

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_\ell(s + i\epsilon) - f_\ell(s - i\epsilon) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 [A(s + i\epsilon, t(z)) - A(s - i\epsilon, t(z))] P_\ell(z) dz \\ \Im[f_\ell(s)] &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 D_s(s, t(z)) P_\ell(z) dz \end{aligned} \quad (2.82)$$

de este resultado se sigue que f_ℓ tiene un corte derecho junto con posibles polos en el eje real positivo. Estas singularidades se corresponden de manera directa con las singularidades en el canal- s para $A(s, t)$ [3, 42].

La segunda fuente de singularidades en $f_\ell(s)$ ocurre en valores de s para los que, a medida que z se desplaza sobre su trayectoria de integración que va de -1 a 1 , alguna de las variables t , u adquiere un valor para el que $A(s, t, u)$ es singular. Ya que la serie (2.46) es convergente dentro de la elipse de Martin-Lehmann puede mostrarse [3] que tales singularidades se encuentran en los puntos $z = \pm 1$ para el caso de masas iguales. Por lo previamente discutido y de las expresiones (2.18), (2.20), (2.21), (2.23) y (2.47), las

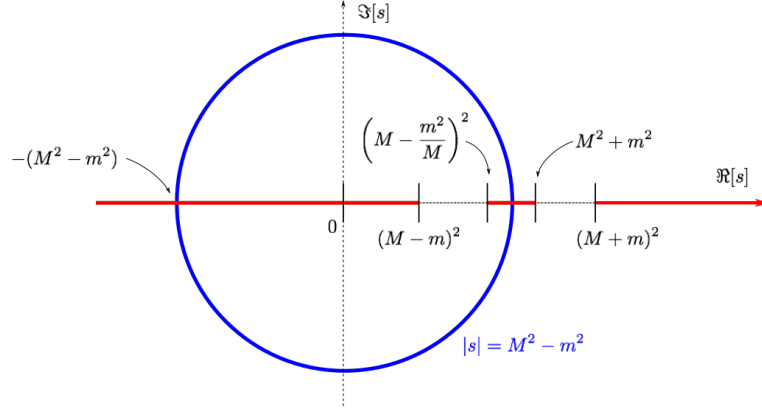


Figura F.2.8: Estructura de las singularidades de las amplitudes parciales $f_\ell(s)$ en el plano complejo s , para la dispersión elástica de partículas de diferentes masas m , M con $M > m$. Las líneas rojas y azul corresponden a cortes de la amplitud. La deducción detallada puede consultarse en [3, 31]

amplitudes $f_\ell(s)$ son singulares para valores de s tales que:

$$1 + \frac{\tilde{t}}{2q^2} = \pm 1 \quad -1 - \frac{\tilde{u}}{2q^2} = \pm 1 \quad (2.83)$$

donde $4m^2 \leq \tilde{t}$, $\tilde{u} \leq \infty$ y $q^2 = \frac{s-4m^2}{4s}$ alrededor del eje negativo de s que va de 0 a $-\infty$. En este caso, la amplitud parcial $f_\ell(s)$ tiene un corte izquierdo.

Cuando la cinemática de los procesos es más complicada, aparecen otras singularidades además de las discutidas. Por ejemplo, para el proceso $a + b \rightarrow a + b$, donde m y M son las respectivas masas de las partículas a y b , tales que $M > m$, además de los cortes derechos e izquierdos existe un corte al rededor de la circunferencia $|s| = M^2 - m^2$, que proviene del canal t , más información puede consultarse en [3, 139]. En la figura F.2.8 se muestra la estructura de las singularidades antes mencionadas.

Debido a que $f_\ell(s)$ es real para un intervalo finito en el plano complejo s , y por lo previamente discutido, $f_\ell(s)$ cumple la analiticidad hermitiana (2.31) ($f^*(s) = f(s^*)$). De este modo puede representarse (2.62a) en términos de la discontinuidad como:

$$\frac{1}{2i}[f_\ell(s + i\epsilon) - f_\ell(s - i\epsilon)] = \tau(s)f_\ell(s + i\epsilon)f_\ell(s - i\epsilon) \quad (2.84)$$

Por consistencia con los desarrollos previos se elige el mismo convenio físico para el factor cinemático del espacio fase $\tau(s)$, es decir $+i\epsilon$, entonces:

$$\frac{1}{2i}[f_\ell(s + i\epsilon) - f_\ell(s - i\epsilon)] = \tau(s + i\epsilon)f_\ell(s + i\epsilon)f_\ell(s - i\epsilon) \quad (2.85)$$

Nótese que en la expresión (2.85) se ha extendido el dominio de $\tau(s)$ a valores complejos de la variable de Mandelstam s . Como se ha discutido previamente $\tau(s)$ es un factor cinemático, por lo que, como función de variable compleja y de acuerdo con la interpretación física de las singularidades, $\tau(s)$ no posee polos [40, 42, 80, 103]. Sin embargo, es posible que $\tau(s)$ posea cortes de origen matemático derivados de la extensión de su dominio. Es inmediato notar que

ya que $\tau(s)$ posee una parte en la que es puramente real (para valores físicos de s) puede aplicarse el principio de reflexión de Schwarz (2.31).

Derivado de este convenio físico, la amplitud parcial en la segunda hoja de Riemann $f_\ell^{II}(s - i\epsilon)$ se relaciona con la de la primera hoja de Riemann $f_\ell(s + i\epsilon)$ como:

$$f_\ell(s + i\epsilon) = f_\ell^{II}(s - i\epsilon) \quad (2.86)$$

Por lo que de la ecuación (2.85) y (2.86) se obtiene:

$$f_\ell(s + i\epsilon) = \frac{f_\ell(s - i\epsilon)}{1 - 2i\tau(s + i\epsilon)f_\ell(s - i\epsilon)} \quad (2.87a)$$

$$f_\ell^{II}(s - i\epsilon) = \frac{f_\ell(s - i\epsilon)}{1 + 2i\tau(s - i\epsilon)f_\ell(s - i\epsilon)} \quad (2.87b)$$

$$f_\ell^{II}(s) = \frac{f_\ell(s)}{1 + 2i\tau(s)f_\ell(s)} \quad (2.87c)$$

donde se ha supuesto que el factor del espacio fase posee un *corte derecho*, de modo que $\tau(s + i\epsilon) = -\tau(s - i\epsilon)$.⁵ Notese que en (2.87c) las funciones del lado derecho de la expresión están escritas en la primer hoja de Riemann.

2.2.5 RESONANCIAS

Una característica llamativa de los datos experimentales en procesos dispersivos es la ocurrencia de ciertos picos o protuberancias cuando las diferentes secciones eficaces son graficadas como función de la energía.

Una manera de interpretar dichos picos, es suponer que cada uno de ellos se debe a una resonancia en una onda parcial en particular, sin embargo, en muchos casos existe un fondo significativo (*background*) en los datos experimentales que no solo se debe a las extracción de los datos, sino también a la dinámica de los procesos involucrados; por lo que tal descripción está excesivamente simplificada. Más aún, suele describirse usando funciones del tipo Breit-Wigner [140], la cual es una aproximación válida únicamente para picos muy prominentes y sin un fondo significativo; sin embargo sus parámetros son dependientes de la energía [13], mientras que las resonancias tienen un carácter universal, por lo que tal descripción es imprecisa. [3, 13, 13, 141–143]

Una de las diferencias principales entre un estado ligado y una resonancia es que un estado ligado de dos partículas tiene una masa menor que la suma de las masas que lo conforman, de modo que no puede decaer de nuevo en sus constituyentes; por otro lado, una resonancia tiene una masa mayor a la de la suma de sus constituyentes de modo que puede decaer y ser inestable [3, 35, 141]. La distinción entre partículas y resonancias como meramente un asunto de estabilidad resulta no ser el más completo, debido a las propiedades de unitaridad y analiticidad del operador de dispersión que requieren del uso de

⁵Si el corte para el espacio fase estuviera a la izquierda, el factor quedaría invariante ante el cambio de $+i\epsilon \rightarrow -i\epsilon$. Tal corte puede manipularse según se requiera en el cálculo puesto que su origen es matemático y está asociado a la cinemática del proceso, sin embargo, se debe ser consistente con la definición de los cortes.

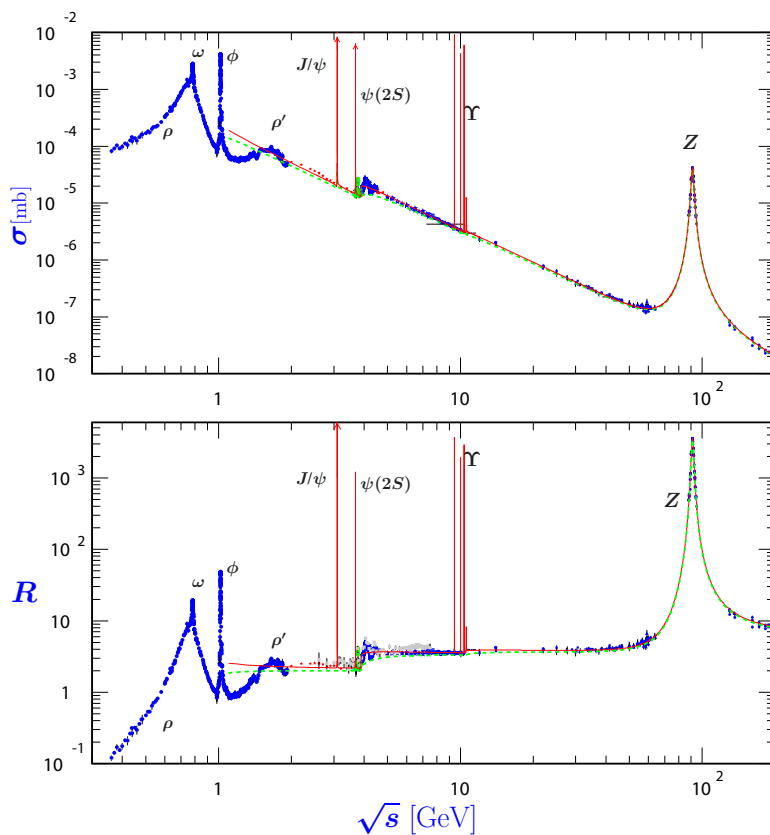


Figura F.2.9: Gráfico extraído de [13] donde se muestran los datos de la sección eficaz de la reacción $e^+e^- \rightarrow \text{hadrones}$ y el radio $R(s) = \sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrones}, s) / \sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-, s)$. $\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrones}, s)$ es la sección eficaz experimental corregida por la radiación de estado inicial y los lazos en los vértices electrón-positrón, $\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-, s)$.

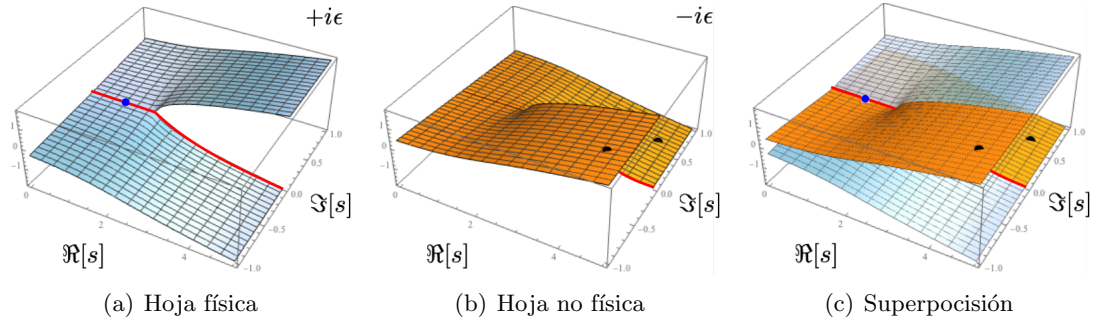


Figura F.2.10: Bosquejo de la parte imaginaria de una amplitud mono-canal típica en el plano complejo de s . Los puntos sólidos negros indican las posiciones permitidas para los polos de las resonancias, mientras que el punto azul un estado ligado. La línea sólida es el eje físico (desplazado por $i\epsilon$ en la hoja física). Ambas hojas están conectadas de manera suave a través de sus discontinuidades.

herramientas más refinadas [13, 25, 81, 104, 106, 144].

Es físicamente razonable esperar que las resonancias están asociadas a polos simples en las amplitudes de canales acoplados [3]. Puede mostrarse que esta es una descripción más adecuada y más aún, que hay una gran similitud entre los polos de las resonancias y los polos de los estados ligados [3, 36, 40, 48]. Por ejemplo, la posición de los polos de las resonancias es independiente del canal en que es estudiada y que los residuos se factorizan como en el caso de los polos de los estados ligados [3].

Como se mostró en la sección 2.2, los únicos polos que son permitidos en la hoja física de la amplitud son los polos de estados ligados, que ocurren en el eje real positivo debajo del primer umbral ⁶, por lo que los polos resonantes deben ocurrir en las hojas no físicas, a las cuales se accede haciendo uso de la continuación analítica a través de los cortes de la amplitud. Usando la simetría de cruce en los diferentes intervalos para cada uno de los umbrales en el canal- s es posible arribar a las distintas hojas de Riemann no-físicas, las cuales se duplican de manera proporcional a la cantidad de umbrales n , es decir, hay 2^n hojas de Riemann [3, 42, 80].

Una comprensión física del por qué los polos de las resonancias deben ocurrir en las hojas de Riemann no físicas surge al considerar la transformada de Fourier de la amplitud resonante como función del tiempo. Ya que para un estado resonante la probabilidad de decaimiento incrementa a medida que el tiempo transcurre, entonces, la dependencia temporal $\exp(-iE_R t)$ demandada que la parte imaginaria de la masa de la resonancia $\Im[E_R]$ sea negativa, de este modo y al no haber polos fuera del eje real en la hoja de Riemann física debido a la causalidad, los polos resonantes se encuentran en las hojas de Riemann no físicas. [3]

Es importante notar que la analiticidad hermitiana (2.31) implica que los polos en el plano complejo ocurren en pares conjugados, luego, una resonancia se asocia a un par de polos en las hojas no-físicas. Por ello es suficiente analizar los polos de las amplitudes de dispersión a un solo lado de los cortes de unitaridad [3].

Al ser f_ℓ una función analítica, $f_\ell(s + i\epsilon)$ tiene los mismos cortes que $f_\ell(s - i\epsilon)$, pero de (2.87b) puede verse que la función adquiere singularidades tipo *polo* donde el denominador es

⁶Recuérdese que los polos arriba del umbral violan la unitaridad, y aquellos en la hoja física fuera del eje real violan la hipótesis de Mandelstam y contradicen el principio de causalidad.

idénticamente nulo, es decir donde:

$$f_\ell(s - i\epsilon) = \frac{1}{2i\tau(s)} \quad (2.88)$$

los cuales son denominados resonancias [32]. Es importante destacar que la posición de esos polos depende de la constante de acoplo de la interacción. Si la constante de interacción es pequeña, lo es igualmente la amplitud de dispersión física. La amplitud puede adquirir el valor finito que es requerido por la condición resonante (2.88) únicamente si la interacción es lo suficientemente *fuerte*. Bajo esta lógica, son los estados resonantes los que proporcionan información esencial sobre la interacción [3, 32, 145–147].

La razón principal del porque no se obtienen singularidades más complejas que polos simples en las hojas de Riemann no físicas, se encuentra en la forma general de la expresión (2.55). Las integraciones sobre t_1, t_2 ocurren sobre intervalos finitos y más aún, el *kernel* de la ecuación

$$\phi(s, t, t_1) = \int dt_2 K(s, t_1, t_2) A(s - i\epsilon, t_2) \quad (2.89)$$

es una función regular ya que está determinada por la amplitud en la hoja física, que como se ha mostrado en la sección 2.2 es una función regular. De hecho, la ecuación (2.55) es una ecuación integral del tipo de Fredholm cuyas soluciones tienen únicamente polos en los puntos donde el determinante de Fredholm es nulo [32, 148, 149].

Es crucial comprender que no todo pico en la amplitud se debe a un estado resonante, por ejemplo en [150], se estudia a través del análisis de amplitudes al estado $Z_c(3900)$ cuyo pico puede provenir de un estado de QCD, un estado virtual o un efecto cinemático, de modo que requiere un mayor estudio para su caracterización.

Es importante destacar que los polos en las hojas de Riemann no físicas (resonancias) están limitados por la teoría y deben obtenerse con estricto apego a los datos experimentales. Sin embargo, la cantidad y posición de ellos no puede determinarse de forma absoluta y general teóricamente debido a lo que se conoce como *polos CDD* (Castillejo-Dalitz-Dyson) [151] que deja completamente libre la cantidad de polos en las hojas de Riemann no físicas [146, 152, 153], de este modo, los análisis de amplitudes requieren de estudios experimentales detallados y de modelos lo más generales posibles, pero en constante perfeccionamiento en apego a los resultados experimentales. Pese a lo anterior, grandes avances en la comprensión de las interacciones así como de la estructura de la materia se han llevado a cabo mediante el análisis de los procesos dispersivos como se ha discutido previamente y como se continuará tratando. Lo anterior puede consultarse por ejemplo, en la nutrida selección bibliográfica de esta tesis.

2.3 TEORÍA DEL MOMENTO ANGULAR COMPLEJO

La teoría del momento angular complejo fue introducida por Watson [154] y Sommerfeld [155] en la discusión de la difracción de ondas de radio alrededor de la superficie de la tierra.

T. Regge [44, 45] probó la analiticidad de las amplitudes de ondas parciales como función del momento angular y aplicó dicho método al estudio de los procesos dispersivos para la

dispersión potencial [31]. Por lo anterior, a la teoría del estudio de las colisiones de partículas y de las amplitudes de dispersión como funciones de la variable de momento angular complejo se denomina *teoría de Regge*.

La amplitud parcial $f_\ell(s)$ satisface en la dispersión potencial una ecuación diferencial explícita que contiene a ℓ como un parámetro, de modo que sus propiedades pueden estudiarse de manera directa cuando ℓ es complejo, como fue mostrado por Regge [44]. Alternativamente, mediante la representación de Mandelstam puede definirse a $f_\ell(s)$ por una integral sobre una función doblemente espectral y estudiar sus propiedades, método usado por Froissart [156] y Gribov [49]. En cualquiera de los dos casos, es necesario establecer la unicidad de dicha continuación analítica $f(\ell, s)$, la cual debe satisfacer $f(\ell, s) = f_\ell(s)$ para $\ell = 0, 1, 2, \dots$.

La aplicación de la teoría del momento angular complejo a la dispersión de partículas a alta energía fue propuesta de manera independiente por Blankenbecler y Goldberger [157] y Chew y Frautschi [158, 159]. La teoría general fue revisada por Chew [78, 160] Gell-Mann [161], Squires [162] Frautschi [163], Omnes y Froissart [37]; más referencias pueden encontrarse en la bibliografía de esta tesis. Para el caso de QFT puede consultarse [164].

2.3.1 EL LÍMITE DE FROISSART

El carácter de las singularidades de $A(s, t)$ ha sido discutido en las secciones previas, así como su dominio analítico, sin embargo, aún no se ha tratado su comportamiento asintótico, el cual, entre otras cosas, es importante para poder establecer relaciones de dispersión.

Si únicamente se considera la representación de Mandelstam [33], la cual es una doble relación de dispersión que permite expresar la hipótesis del mismo nombre y que puede consultarse en [24, 42, 96, 165], es posible que la cantidad de sustracciones tienda a infinito a medida que $t \rightarrow \infty$, por ello es importante establecer el comportamiento asintótico de la amplitud de dispersión.

En la sección 2.2.1 se ha discutido como es que la causalidad de los procesos físicos impone propiedades analíticas para la amplitud. Haciendo uso de la transformada de Fourier inversa de la amplitud de dispersión para un t fijo, se demuestra (ver [32, sec. 2.2.1]) que es necesario imponer a la amplitud un límite polinomial a su crecimiento con la energía para garantizar el desvanecimiento de la respuesta a tiempos finitos y pequeños, pero negativos, es decir:

$$|A(s, t_0)| < |s|^N = |s|^{\alpha(t)} \quad (2.90)$$

donde N es alguna potencia finita y positiva que es función de t , es decir, $N = \alpha(t)$ con $\alpha(t)$ real, positivo y entero [31, 32, 42, 50]. De no ser N una función de t , puede probarse que ello contradice la unitariedad en el canal t [31, 32, 49]. Usando la propiedad de cruce, puede establecerse un límite análogo para un t grande, es decir, $|A(s, t)| < |t|^{N'}$ cuando $t \rightarrow \infty$ y siendo N' función de s [48]. Nótese como lo anterior se relaciona directamente con el teorema de Titchmarsh [129] del que se ha hablado en la sección 2.2.1.

La consecuencia inmediata de (2.90), es que para escribir una relación de dispersión para $A(s, t)$ se requieren de N sustracciones [31], la forma de este N se discute a continuación.

Dentro de la elipse de Martin-Lehmann la serie (2.46) debe ser convergente, si t_0 es la

singularidad más próxima en el eje para $\Im_s[A(s, t)]$ y de (2.47) $z_s = 1 + \frac{t_0}{2q^2}$, entonces para $0 < t_1 < t_0$ la serie es convergente y puede estimarse usando la cota polinomial (2.90) que se asume válida para un $s > s_0$ [43]:

$$\Im[A(s, t)] = \sum_{\ell=0}^{\infty} \Im[f_{\ell}(s)](2\ell + 1)P_{\ell} \left(1 + \frac{t_1}{2q^2} \right) < s^N \quad s > s_0 \quad (2.91)$$

la cual es inmediata ya que para cualquier número complejo z se satisface $|\Re[z]| \leq |z|$ así como $|\Im[z]| \leq |z|$ y de (2.69) $0 \leq \Im[f_{\ell}(s)]$. Debido a esto último, entonces para $s > s_0$:

$$(2\ell + 1)\Im[f_{\ell}(s)]P_{\ell} \left(1 + \frac{t_1}{2q^2} \right) < s^N \quad (2.92)$$

Ya que se ha considerado $t > 0$, entonces $z > 1$ y las funciones de Legendre satisfacen [3, 24, 31, 134]:

$$P_{\ell}(z) > \frac{C}{(2\ell + 1)^{\frac{1}{2}}} \left[1 + (2z - 2)^{\frac{1}{2}} \right]^{\ell} \quad (2.93)$$

donde C es una constante y que se sigue de (2.81a). Luego, para un ℓ grande y $s > s_0$:

$$\Im[f_{\ell}(s)] < \frac{C'}{(2\ell + 1)^{\frac{1}{2}}} \left[1 + \left(\frac{t_1}{q^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{-\ell} s^N \quad (2.94)$$

Ahora, para un ℓ y s grandes se cumple [3, 134]:

$$\left[1 + \left(\frac{t_1}{q^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{-\ell} \sim \exp \left[-\ell \left(\frac{4t_1}{s} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (2.95)$$

Por lo que puede escribirse (2.94) como:

$$\Im[f_{\ell}(s)] < \exp \left[C_1 + N \log s - C_2 \ell s^{-\frac{1}{2}} \right] \quad (2.96)$$

donde C_1 y C_2 son constantes. Se sigue de este resultado que para un ℓ tal que:

$$\ell > \frac{N}{C_2} \sqrt{s} \log s \quad (2.97)$$

las amplitudes parciales decaen exponencialmente conforme incrementa ℓ . Definiendo $L \equiv L(s)$ como:

$$L = C \sqrt{s} \log s \quad (2.98)$$

donde $C > N/C_2$. Entonces:

$$\sum_{\ell=L}^{\infty} (2\ell + 1)\Im[f_{\ell}(s)]P_{\ell}(s) < s^{-M}, \quad \text{cuando } s \rightarrow \infty \quad (2.99)$$

puede elegirse entonces C de tal manera que M sea tan grande como se desee. Como se sigue

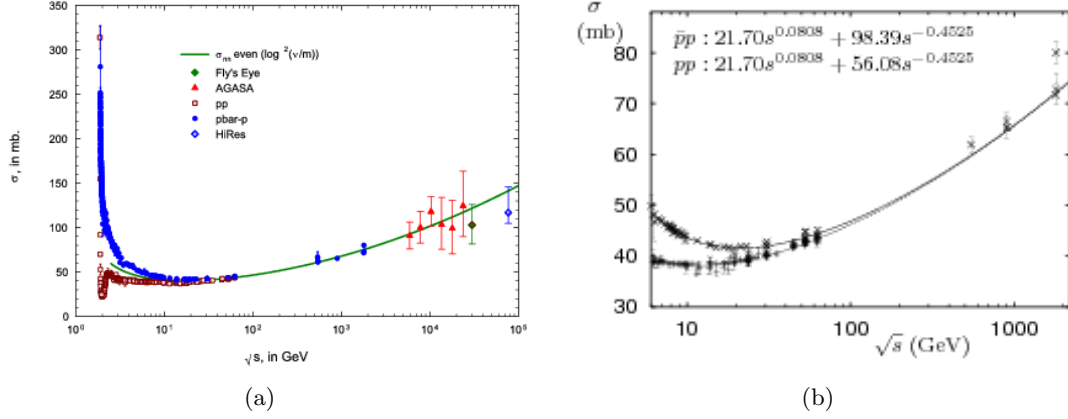


Figura F.2.11: Figuras extraídas de [166, 167]. (a) Muestra un ajuste tipo $\log^2 s$ a la sección eficaz de las reacciones pp y $p\bar{p}$. (b) Muestra un ajuste a la sección eficaz de las reacciones pp y $p\bar{p}$ donde se aprecia el crecimiento asintótico como una potencia de la energía.

de (2.69) la condición (2.99) también aplica para $\Re[f_\ell(s)]$, así:

$$A(s, t) = \sum_{\ell=0}^L (2\ell + 1) f_\ell(s) P_\ell(z) + \sum_{\ell=L}^{\infty} (2\ell + 1) f_\ell(s) P_\ell(z) \quad (2.100a)$$

$$A(s, t) \simeq \sum_{\ell=0}^{L=c\sqrt{s} \log s} (2\ell + 1) f_\ell(s) P_\ell(z), \quad \text{cuando } s \rightarrow \infty \quad (2.100b)$$

Para el caso de dispersión frontal $t = 0$, $P_\ell(1) = 1$ y para valores de s muy grandes:

$$\Im[A(s, t = 0)] = \sum_{\ell=0}^{c\sqrt{s} \log s} \Im[f_\ell(s)] (2\ell + 1) \leq 8\pi \sum_{\ell=0}^L (2\ell + 1) \sim L^2 = Cs(\log s)^2 \quad (2.101)$$

donde se ha empleado el límite de máxima inelasticidad de (2.70).

Al combinar la expresión (2.101) con el teorema óptico (2.72) se tiene el siguiente límite para la sección eficaz [3, 31]:

$$\sigma_{\text{tot}} \leq c(\log s)^2 \quad (2.102)$$

donde c es una constante. Este resultado es conocido como el límite de Froissart. La expresión (2.102) es de gran relevancia, pues permite hacer contacto de manera experimental con las hipótesis y desarrollos previos. En las figuras F.2.11(a) y F.2.11(b), extraídas de las referencias [166, 167] se muestra como los datos experimentales siguen el comportamiento antes descrito para alta energía. En [13] se muestran datos experimentales para una cantidad mayor de reacciones.

Ya que $|P_\ell(z)| \leq 1$ para $-1 \leq z \leq 1$, entonces se sigue de (2.69) y (2.100b) que

$$|\Im[A(s, t)]| \leq |\Im[A(s, 0)]|, \quad 4m^2 - s \leq t \leq 0 \quad (2.103)$$

de modo que para valores en dicha región se requieren a lo más dos sustracciones para

establecer una relación de dispersión de $A(s, t)$. De este modo:

$$\begin{aligned} A(s, t) &= a(t) + b(t)s + \frac{s^2}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{\Im[A(s', t)]}{s'^2(s' - s)} ds' + \frac{s^2}{\pi} \int_{-\infty}^{-t} \frac{\Im[A(s', t)]}{s'^2(s' - s)} ds' \\ &= a'(t) + b'(t)(s + u) + \frac{s^2}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{D_s(s, t)}{s'^2(s' - s)} ds' + \frac{u^2}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{D_u(u, t)}{u'^2(u' - u)} du' \end{aligned} \quad (2.104)$$

es una relación de dispersión válida para t en el rango de (2.103) y se han empleado las relaciones (2.37) y (2.16); $a(t)$ y $b(t)$ son los parámetros de sustracción. Para mostrar que la integral sobre el corte izquierdo en (2.104) es convergente, se requiere usar la propiedad de cruce, como se indica en la segunda línea de (2.104), esto puede consultarse a detalle en [168]. Los límites de integración han sido discutidos en la sección 2.2.1. Nótese que no se han escrito las contribuciones de los polos; en el caso de que los haya puede consultarse [42] para más información.

Como puede apreciarse, la unitaridad impone límites específicos para la cantidad de sustracciones necesarias, así como para la cantidad de ondas parciales significativas a alta energía. Esto fue estudiado inicialmente por Froissart [156] y Gribov [49]. Los resultados son, para s real tal que $s \rightarrow \infty$ [24]:

$$|A(s, \cos \theta = 1)| < c_1 s (\log s)^2 \quad (2.105a)$$

$$|A(s, |\cos \theta| < 1)| < c_2 \frac{s^{\frac{3}{4}} (\log s)^{\frac{3}{2}}}{(\sin \theta)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.105b)$$

donde c_1, c_2 son constantes. A las expresiones (2.105) se les conoce como el límite de Froissart-Martin, ya que la demostración rigurosa usando teoría cuántica de campos fue dada por éste último en [125, 135]. El desarrollo detallado de (2.105) puede consultarse en [3, 31, 32, 42, 43, 48, 147, 169–171].

En relación con la simetría de cruce, Pomeranchuk [172] mostró que si la sección eficaz total es constante a alta energía, entonces las secciones eficaces de la partícula y correspondiente antipartícula son asintóticamente iguales.

2.3.2 TRANSFORMADA DE SOMMERFELD-WATSON

Si se desea tener información acerca de las propiedades analíticas de $A(s, t)$ para t o s fuera de la elipse de Martin-Lehman, un método posible para tal fin es reemplazar la suma en (2.46) por una integral sobre un contorno en el plano complejo de ℓ , el cual se conoce como la *transformada de Sommerfeld-Watson*:

$$A(s, t) = -\frac{1}{2i} \int_C \frac{(2\ell + 1)f(\ell, s)P_\ell(-z_s)}{\sin \pi \ell} d\ell \quad (2.106)$$

donde $z_s = \cos \theta_s$ definido en (2.47) y C es el contorno mostrado en la figura F.2.12(b), el cual incluye a los enteros positivos, al cero y que se elige de modo que evada cualquier singularidad de $A(s, t)$. Nótese que el integrando tiene un polo para cada entero n , cuando la función

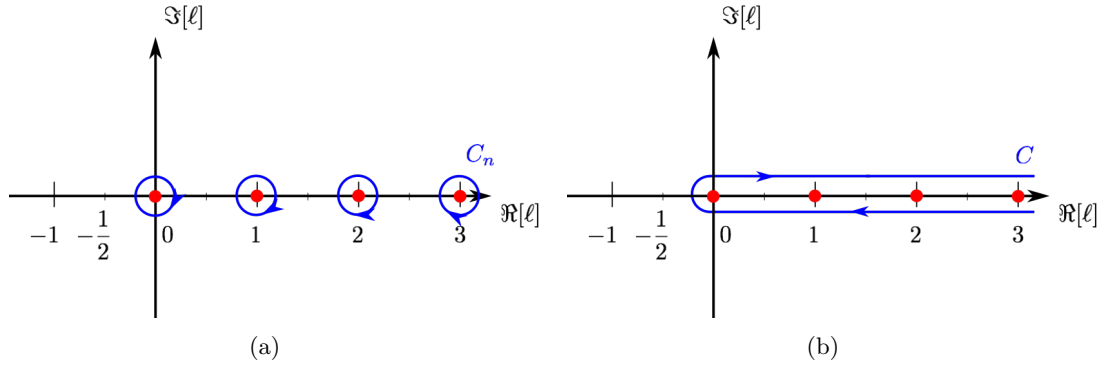


Figura F.2.12: (a) Conjunto de contornos que encierran los polos en el eje real para la transformada de Sommerfeld-Watson, en el plano complejo- ℓ . (b) Deformación de los contornos en una única curva C para realizar la integración en (2.106). El valor $\ell = -1/2$ se destaca debido al comportamiento de las funciones de Legendre en (2.80) y (2.81).

$\sin \pi \ell \xrightarrow{\ell \rightarrow n} (-1)^n (\ell - n)\pi$. El residuo del polo es:

$$\frac{2\pi i P_n(-z_s) A(s, n) (2n + 1)}{(-1)^n \pi} = 2i P_n(z_s) A(s, n) (2n + 1) \quad (2.107)$$

ya que $P_n(-z) = (-1)^n P_n(z)$ [134], por ello se ha considerado $-z_s$ como argumento de P_ℓ en (2.106). La equivalencia entre las expresiones (2.46) y (2.106) puede obtenerse haciendo uso del teorema de Cauchy como puede consultarse en [3].

Puede verse que la expresión (2.106) requiere de una extensión de $f_\ell(s)$, la cual admite solo valores enteros de ℓ , a una función $f(\ell, s)$, donde ℓ puede ser complejo y que debe satisfacer:

$$f(\ell, s) = f_\ell(s), \quad \text{para } \ell = 0, 1, 2, \dots \quad (2.108)$$

Sin embargo, la interpolación (2.108) no es única ya que por ejemplo al añadir a cualquier solución el factor $g(s) \sin \pi \ell$ que es cero para todos los valores enteros de ℓ (2.108) es aún válida. Por razones físicas es necesario establecer la unicidad de dicha extensión [32]; así, es necesario imponer condiciones adicionales para garantizar la unicidad.

Las condiciones que se imponen se siguen del *teorema de Carlson* [173, p. 185] y establece que si $f(z)$ es una función que satisface:

- I. $f(z)$ es analítica en $\Re[z] > K$ donde K es una constante real.
- II. $f(z) < \exp[a|z|]$, donde $a < \pi$ en $\Re[z] > K$.
- III. $f(z) = 0$ para una secuencia infinita $z = N + 1, N + 2, \dots$

entonces $f(z)$ es idénticamente cero. Lo anterior significa que si $f(\ell, s)$ es una función de ℓ que satisface las condiciones I. y II., entonces se encuentra definida de manera única cuando se especifican sus valores en los puntos enteros positivos debajo de un cierto punto inicial N . El punto III. puede no ser claro, pero es clave para probar la unicidad ya que si existen dos funciones $f_1(\ell, s)$, $f_2(\ell, s)$, la diferencia es idénticamente nula [43, 173].

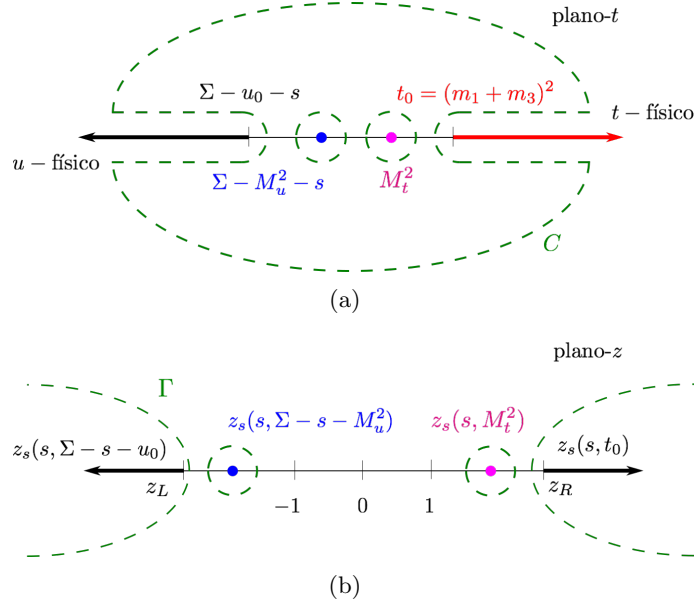


Figura F.2.13: Estructura analítica de la amplitud en los planos complejos de t (a) y z_s (2.23) en (b). En (a) se muestra el contorno de integración C para la relación de dispersión (2.110) mientras que en (b) el contorno Γ se usa en (2.111). Las posiciones de los polos en el plano complejo de z se encuentran fuera del intervalo $-1, 1$ como se sigue de (2.47).

La definición (2.48) ciertamente permite una continuación analítica a valores complejos de ℓ [138], sin embargo, no satisface la condición II. del teorema de Carlson ya que [134, p.162] su comportamiento asintótico en ℓ es:

$$P_\ell(\cos \theta) \simeq \ell^{-1/2} \left(C_1 e^{i\ell\theta} + C_2 e^{-i\ell\theta} \right), \quad -1 < \cos \theta < 1 \quad (2.109)$$

donde C_1 y C_2 son constantes y que se sigue de (2.81a) [134]. Luego, para valores complejos de ℓ con una parte imaginaria muy grande y parte real nula, estas funciones divergen exponencialmente.

Así, si se emplea la ecuación (2.48) para definir $f(\ell, s)$ con un ℓ general, no puede hacerse uso del teorema de Carlson para probar la unicidad.

Existe una definición de $f(\ell, s)$ que no presenta esta clase de dificultad y será abordada en la sección 2.3.3.

2.3.3 PROYECCIÓN DE GRIBOV-FROISSART Y SIGNATURA

Para explotar las propiedades de las funciones de Legendre, conviene escribir una relación de dispersión en términos de la variable z_s (2.23), que para el caso de masas iguales es (2.47).

Si la estructura analítica de la amplitud de dispersión (por simetría de cruce) es como la que se muestra en la figura F.2.13(a), una relación de dispersión que no considera sustracciones es:

$$A(s, t, u) = \frac{g_t}{M_t^2 - t} + \frac{g_u}{M_u^2 - u} + \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{\infty} \frac{D_t(t', s)}{t' - t} dt' + \frac{1}{\pi} \int_{u_0}^{\infty} \frac{D_u(u', t)}{u' - u} du' \quad (2.110)$$

donde los valores t_0 y u_0 corresponden a los mínimos valores posibles para dichas variables de Mandelstam, para el caso de masas iguales estos son $4m^2$, Σ está dada por (2.16) y las discontinuidades por (2.37).

Se ha mostrado que la amplitud se encuentra acotada polinomialmente debido a la condición de causalidad (2.90), y debido la propiedad de cruce esta cota aplica también para un s fijo y un t grande, es decir, $|A(s, t)| < t^{N-\epsilon}$ cuando $|t| \rightarrow \infty$ ($\epsilon \ll 1$ y se introduce solo para comodidad de notación).

En términos de z (2.47) la relación de dispersión que considera las sustracciones necesarias, pero no incluye la contribución de los polos es:

$$A(s, t) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n + \frac{z^N}{\pi} \int_{z_R}^{\infty} \frac{D_t(s, z')}{z'^N(z' - z)} dz' + \frac{z^N}{\pi} \int_{-z_L}^{-\infty} \frac{D_u(s, z')}{z'^N(z' - z)} dz' \quad (2.111)$$

Al reemplazar (2.111) en (2.48) se tiene

$$f_\ell(s) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left[\sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n + \frac{z^N}{\pi} \int_{z_R}^{\infty} \frac{D_t(s, z')}{z'^N(z' - z)} dz' + \frac{z^N}{\pi} \int_{-z_L}^{-\infty} \frac{D_u(s, z')}{z'^N(z' - z)} dz' \right] P_\ell(z) dz \quad (2.112)$$

Por la forma en la que se ha elegido el contorno en la figura F.2.13(b) es de interés el estudio del comportamiento asintótico para establecer la transformada de Sommerfeld-Watson (2.106). A continuación se estudia el comportamiento de (2.112), se elige un $\ell > N$, lo suficientemente grande de modo que por la originalidad de las funciones de Legendre, este no afecte a las ondas parciales $f_\ell(s)$. Usando la fórmula de Neuman (2.79), que en este caso puede escribirse como [134]:

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{z^N}{x^N(x - z)} P_\ell(z) dz = Q_\ell(x), \quad \ell \geq N \quad (2.113)$$

puede expresarse (2.112) como:

$$f_\ell(s) = \frac{1}{\pi} \int_{z_R}^{\infty} Q_\ell(z') D_t(s, z') dz' + \frac{1}{\pi} \int_{-z_L}^{-\infty} Q_\ell(z') D_u(s, z') dz' \quad (2.114)$$

Como las funciones de Legendre de segunda especie satisfacen (2.79) $Q_\ell(-z') = (-1)^{\ell+1} Q_\ell(z')$, entonces (2.114) es equivalente a:

$$f_\ell(s) = \frac{1}{\pi} \int_{z_0}^{\infty} \left[D_t(s, z') + (-1)^\ell D_u(s, -z') \right] dz' \quad (2.115)$$

donde z_0 es el menor entre z_R y z_L , así como $\ell > 0$ [3, 31]. Antes de analizar si esta es una representación adecuada para definir una continuación de $f_\ell(s)$ al plano complejo- ℓ , se discute que ocurre con los términos del tipo polo para $A(s, t)$ en (2.110), que se han omitido en el análisis.

En un polo la contribución a la amplitud $A(s, t)$ es [48]:

$$A(s, t)_{\text{polo}} = \frac{\rho}{M^2 - t'} \quad (2.116)$$

donde M^2 es la posición del polo y ρ es su residuo. Por lo que la contribución a la amplitud parcial es, usando (2.47):

$$f_\ell(s)^{\text{polo}} = \frac{\rho}{2q^2} \left[\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{P_\ell(z')z'}{\left(1 + \frac{M^2}{2q^2}\right) - z'} dz' \right] = \frac{1}{2q^2} Q_\ell \left(1 + \frac{M^2}{2q^2}\right) \quad (2.117)$$

El cual, debido a las propiedades de $Q_\ell(s)$ ya no tiene un comportamiento tipo polo [3, 134]. Es decir, el polo ha desaparecido por la integración en z' , por lo que no es necesario incluirlos ya que dichos términos pueden ser absorbidos en el polinomio sustraído en (2.111).

Hecha la aclaración anterior, puede continuarse con el estudio de (2.115). Para grandes valores de ℓ las funciones de Legendre de segunda especie [134, p.162] satisfacen:

$$Q_\ell(z') \sim \frac{1}{\sqrt{\ell}} \exp \left[- \left(\ell + \frac{1}{2} \right) \xi \right], \quad \xi = \cosh^{-1}[z'], \quad |\ell| \rightarrow \infty \quad (2.118)$$

que se sigue de (2.81c). Claramente ξ es real y positivo para valores igualmente reales y positivos de z' mayores que 1, de modo que $Q_\ell(z')$ es convergente cuando $\ell \rightarrow \infty$ en tanto $\Re[\ell] > \frac{1}{2}$. Sin embargo, en (2.115) el término $(-1)^\ell$, el cual para valores no enteros de ℓ debe escribirse como $\exp[i\pi\ell]$, a medida que $\Im[\ell]$ incrementa el factor se comporta como $\exp[\pi|\ell|]$, luego, no satisface las condiciones del Teorema de Carlson como se anticipó en la sección 2.3.2.

Entonces el modo de enfrentar esta dificultad es separar la continuación analítica en ℓ para valores pares e impares de ℓ en $f_\ell(s)$ definiendo dos amplitudes $f^+(\ell, s)$ y $f^-(\ell, s)$ como sigue:

$$f^\pm(\ell, s) = \frac{1}{\pi} \int_{z_0}^{\infty} [D_t(s, z') \pm D_u(s, z')] Q_\ell(z') dz' \quad (2.119)$$

esta expresión es conocida como la proyección de Gribov-Froissart. Las funciones $f^+(\ell, s)$, $f^-(\ell, s)$ son llamadas las amplitudes parciales con signatura par e impar ($\tau = +$ o $-$) respectivamente. Ambas funciones $f^\pm(\ell, s)$ satisfacen las condiciones del teorema de Carlson [48].

La relación entre las funciones $f^\pm(\ell, s)$ con las amplitudes físicas es:

$$\begin{aligned} f_\ell(s) &= f^+(\ell, s), \quad \text{para } \ell \text{ par} \\ f_\ell(s) &= f^-(\ell, s), \quad \text{para } \ell \text{ impar} \end{aligned} \quad (2.120)$$

Ahora, para poder establecer la transformada de Sommerfeld-Watson se definen las amplitudes $A^\pm(s, t)$ como:

$$A^\pm(s, t) \equiv A^\pm(s, z) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) f^\pm(\ell, s) P_\ell(z) \quad (2.121)$$

las cuales se relacionan con la amplitud física a través de [3, 42]:

$$A(s, z) = \frac{1}{2} [A^+(s, z) + A^+(s, -z) + A^-(s, z) - A^-(s, -z)] \quad (2.122)$$

Reemplazar la suma en (2.121) por una integral de contorno en ℓ es ahora posible via

(2.106) tiene un significado analítico preciso y único debido al teorema de Carlson y a lo previamente discutido.

Es importante mencionar que para el caso de la física de partículas, la signatura es una propiedad cuántica. Si I denota al isospín, η a la naturalidad, J_p al espín, y P a la paridad, entonces $\eta = \tau P$ donde τ es la signatura. Para bariones $\eta = +1$ es la paridad natural si $P = (-1)^{J_p-1/2}$, y $\eta = -1$ es paridad antinatural si $P = -(-1)^{J_p-1/2}$. Así pues, los requerimientos de analiticidad y comportamiento asintótico de las amplitudes parciales como funciones complejas de la variable de momento angular predicen una separación de estados por sus signaturas. En las figuras F.3.3(a) y F.3.3(b), las cuales son conocidas como gráficos de Chew-Frautschi, puede apreciarse esta situación. El comportamiento en las figuras antes mencionadas no suele apreciarse con esa claridad ya que debido a efectos cuánticos [42] existe una degeneración de las trayectorias, mas los tratamientos analíticos siguen requiriendo la separación de los estados por sus signaturas [146, 174, 175].

2.3.4 TRAYECTORIAS DE REGGE

En el caso de la dispersión potencial, se sabe [7, 30, 35, 79, 94] que los estados ligados de la ecuación de Schrödinger para un potencial esféricamente simétrico son clasificadas en familias que se caracterizan por un momento angular creciente y una energía decreciente. Tales familias aparecen como secuencias de polos que ocurren en amplitudes parciales sucesivas $f_\ell(s)$, con $\ell = 0, 1, 2, \dots$ para valores crecientes de s . En la teoría desarrollada por Regge [44], esta secuencia se debe a la presencia de un único polo cuya posición varía de forma continua con ℓ , con la restricción física de que los estados ligados ocurren para valores de ℓ no negativos. La ubicación o trayectoria de dichos polos está dada por una expresión de la forma $\ell = \alpha(s)$. Tal singularidad es llamada un *polo de Regge*.

Por ejemplo, para la dispersión de Coulomb la amplitud parcial puede ser evaluada de manera explícita y tiene la forma [24, 35, 79, 176]:

$$f(\ell, k) = \frac{1}{2i} \left[\frac{\Gamma(\ell + 1 - ie^2/2k)}{\Gamma(\ell + 1 + ie^2/2k)} - 1 \right] \quad (2.123)$$

donde e es la carga del electrón y la energía $E = k^2$. Puede verse entonces que $f(\ell, s)$ es regular a excepción de un conjunto de polos dados por:

$$\ell + 1 + \frac{ie^2}{2k} = -n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.124)$$

esto determina la *trayectoria de Regge* $\alpha_n(k)$ como:

$$\ell = \alpha_n(k) = -n - 1 + \frac{ie^2}{2k} \quad (2.125)$$

la cual, al adquirir valores enteros, ℓ corresponde a un valor físico del momento angular ℓ_0 y

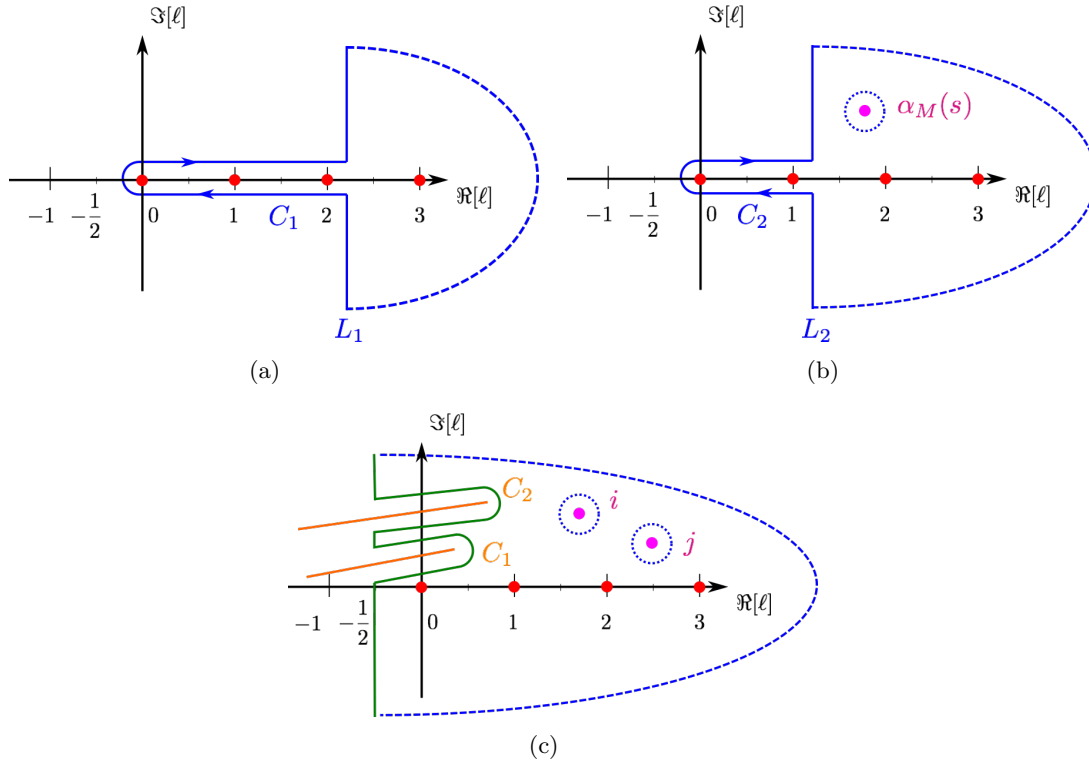


Figura F.2.14: Deformación de los contornos de integración para la transformada de Sommerfeld-Watson (2.106). (a) Es para un $L_1 > \ell_M(s)$, (b) para la contribución de un polo en (2.129) y (c) para las contribuciones de polos y cortes en (2.135).

representa un estado ligado en un potencial atractivo de Coulomb, es decir:

$$E_{\ell_0} = k^2 = -\frac{e^4}{4(\ell_0 + n + 1)^2} \quad (2.126)$$

que corresponden a los niveles energéticos del potencial de Coulomb [7, 35, 176]. Puede probarse que resultados similares se obtienen para potenciales de Yukawa [44, 45].

Para estudiar estas situaciones, como se ha hecho repetidas veces en este capítulo se analiza el comportamiento de las integrales sobre dominios complejos de ℓ para contornos deformados analizando sus propiedades analíticas y asintóticas. En este caso, para la transformada de Sommerfeld-Watson (2.106).

Suponga que $A^\pm(s, \ell)$ es una función analítica de ℓ a través del semiplano derecho de ℓ en donde posee solo singularidades aisladas ⁷ y sea $\ell_M(s)$ el N del teorema de Carlson para el cual si $\Re[\ell] > \ell_M(s)$ está completamente determinada por sus valores a los enteros. Luego, para ℓ mayores que $\ell_M(s)$ la amplitud no posee singularidades en el plano complejo de ℓ .

Supóngase que ahora se desplaza el contorno C de F.2.12(b) al contorno C_1 de F.2.14(a) con una línea paralela al eje imaginario en $\Re[\ell] = L_1$ y un semicírculo al infinito. Siendo $L_1 > \ell_M(s)$, entonces, en este desplazamiento no hay singularidades de $A^\pm(s, \ell)$ de modo que

⁷En [43, sec.2.3] puede encontrarse la justificación de dicha hipótesis basada en las propiedades de las funciones de Legendre. Puede consultarse también [3, 24, 31, 32, 42, 50] para mayor información relacionada con la deformación de los contornos que se hace más adelante.

$\int_C = \int_{C_1}$. La contribución del semi-círculo se desvanece pues [134]:

$$\left| \frac{P_\ell(-z_\ell)}{\sin \pi \ell} \right| < \frac{1}{\sqrt{\ell}} \frac{\exp \left[\left| \Im[\theta] \Re[\ell] + (\pi - \Re[\theta]) \Im[\ell] \right| \right]}{\exp \left[\pi \left| \Im[\ell] \right| \right]} \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} 0 \quad (2.127)$$

lo que implica que la representación es válida en una región mayor a la elipse de Lehmann [3].

Supóngase ahora que se mueve el contorno como en F.2.14(b) a C_2 y la singularidad líder que se encuentra (es decir, la que está más a la derecha en el semiplano derecho de ℓ) es un polo en $\ell = \alpha_M(s)$ con residuo $\beta_M(s)$, por lo que

$$A^\pm(s, \ell) \sim \frac{\beta_M(s)}{\ell - \alpha_M(s)}, \quad \text{cuando } \ell \rightarrow \alpha_M(s) \quad (2.128)$$

Por lo que la integración sobre C_2 via (2.106) adquiere la forma:

$$\begin{aligned} A^\pm(s, t) = & -\frac{1}{2i} \int_{C_2} (2\ell + 1) A^\pm(s, \ell) \frac{P_\ell(-z_s)}{\sin \pi \ell} d\ell \\ & - \pi [2\alpha_M(s) + 1] \beta_M(s) \frac{P_{\alpha_M(s)}(-z_s)}{\sin \pi \alpha_M(s)} \end{aligned} \quad (2.129)$$

donde se ha exhibido la contribución del polo.

Analizando el comportamiento asintótico de la expresión (2.129) al escribir $P_\ell(z)$ en términos de funciones hipergeométricas como en (2.77) y (2.80), entonces:

$$P_\alpha(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} z^{|\alpha + \frac{1}{2}| - \frac{1}{2}}, \quad \alpha \neq \text{entero negativo} \quad (2.130)$$

en particular se comprende de (2.80a) porque el contorno se extiende en el eje real para valores mayores que $\Re[\ell] > \frac{1}{2}$ en la figura F.2.14(c), ya que se está deformando el contorno hacia valores más pequeños de ℓ en el eje real.

Ya que $\Re[\alpha_M(s)] > L_2$ el segundo término en (2.129) domina asintóticamente si $\Re[\alpha_M(s)] > -\frac{1}{2}$ y se tiene:

$$A^\pm(s, t) \xrightarrow{z_s \rightarrow \infty} (z_s)^{\Re[\alpha_M(s)]} \quad (2.131)$$

Puesto que $\alpha_M(s)$ es la singularidad más a la derecha en el plano complejo de ℓ , puede identificársele [3] como:

$$\Re[\alpha_M(s)] = \ell_M(s) \quad (2.132)$$

Por otro lado, si la singularidad que se encuentra al deformar el contorno es un corte en $\alpha_c(s)$, la amplitud puede calcularse usando el contorno F.2.14(c) usando (2.106) como:

$$A^\pm(s, t) = -\frac{16\pi}{2i} \int_{C_3} (2\ell + 1) A^\pm(s, \ell) \frac{P_\ell(-z_s)}{\sin \pi \ell} d\ell \quad (2.133)$$

cuyo comportamiento asintótico es [3, 32, 43, 48]:

$$A^\pm \xrightarrow{z_s \rightarrow \infty} (z_s)^{\Re[\alpha_c(s)]} \quad (2.134)$$

además de factores logarítmicos. Debido a (2.130) puede minimizarse la contribución de la trayectoria vertical de integración en F.2.14(c) moviendo el contorno detrás de $\Re[\ell] - \frac{1}{2}$ [42]. De este modo, la amplitud se calcula como:

$$\begin{aligned} A^\pm(s, t) &= \frac{1}{2i} \int_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty} (2\ell + 1) A^\pm(s, \ell) \frac{P_\ell(-z_s)}{\sin \pi \ell} d\ell \\ &\quad - \sum_{i \text{ polos}} \pi [2\alpha_i(s) + 1] \beta_i(s) \frac{P_{\alpha_i(s)}(-z_s)}{\sin \pi \alpha_i(s)} \\ &\quad - \sum_{i \text{ cortes}} \frac{1}{2i} \int_{C_j} (2\ell + 1) A^\pm(s, \ell) \frac{P_\ell(-z_s)}{\sin \pi \ell} d\ell \end{aligned} \quad (2.135)$$

donde el primer término es denominado *integral de fondo* y que se desvanece a medida que $z_s \rightarrow \infty$ debido a (2.130) dejando una suma de *Polos de Regge* y *Cortes de Regge* representando la parte divergente de la amplitud (en z_s o t). [24, 31, 32, 42, 43]

Es importante mencionar que la dispersión potencial no presenta cortes, sino que solamente tiene polos como fue encontrado por Regge [44, 45] y Bottino *et al.* [177]. En el caso relativista se muestra que de hecho existen cortes [178, 179] derivados de iteraciones en diagramas de Feynman en teoría de perturbaciones [24, 31]. Un estudio importante sobre los cortes y singularidades está en [180] donde Gribov y Pomeranchuk muestran que una paradoja que surge por un polo en $\ell = -1$ puede ser resuelta por la acumulación de polos que originan una singularidad esencial [31, 147].

Los polos en el plano complejo de ℓ originan a polos en $A^\pm(s, t)$ en el plano complejo- s para valores de $s (= s_R)$ tales que $\alpha_i(s) = \text{entero}$, ya que $\sin[\pi \alpha_i(s)] \rightarrow 0$ [42] cuando $s \rightarrow s_R$. La función $\alpha_i(s)$ es conocida como *Trayectoria de Regge*. El límite de Froissart requiere que $\alpha_i(s) \leq 1$ para $s \leq 0$ para todas las trayectorias.

En lo sucesivo y por ser de interés para el resto del capítulo, se considera que solo existen polos para la trayectoria, la contribución de los cortes puede encontrarse en [42].

Una única trayectoria de Regge $\alpha(s)$ contribuye a la amplitud con [42, 43]:

$$A_R^\pm(s, t) = \pi [2\alpha(s) + 1] \beta(s) \frac{P_{\alpha(s)}(-z_s)}{\sin \pi \alpha(s)} \quad (2.136)$$

La correspondiente discontinuidad en el canal- t se obtiene al considerar:

$$\Im[P_\alpha(z)] = \begin{cases} -P_\alpha(-z) \sin \pi \alpha & z < -1 \\ 0 & z \leq 1 \end{cases} \quad (2.137)$$

de este modo:

$$D_{Rt}^\pm(s, t) = \pi [2\alpha(s) + 1] \beta(s) P_{\alpha(s)}(z) \quad z_s > 1 \quad (2.138)$$

Usando (2.138) y la relación [134]:

$$\int_1^\infty P_\alpha(z)Q_\ell(z)dz = \frac{1}{(\ell - \alpha)(\ell - \alpha + 1)} \quad (2.139)$$

puede calcularse:

$$\begin{aligned} f_{\ell R}^\pm(s) &= \frac{1}{\pi} \int_{z_s(s, t_0)}^\infty Q_\ell(z) D_{Rt}^\pm(s, t) dz \\ &= \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \pi [2\alpha(s) + 1] \beta(s) P_{\alpha(s)}(z) Q_\ell(z) dz \\ &= \frac{[2\alpha(s) + 1] \beta(s)}{[\ell - \alpha(s)][\ell + \alpha(s) + 1]} \end{aligned} \quad (2.140)$$

la cual surge al considerar la separación en firmas para (2.119) y el cambio en los límites de integración ($1 < z_s < z_s(s, t_0)$) se debe a que la región adicional se cancela junto con la *integral de fondo* en (2.135) de manera asintótica, como puede consultarse en [42].

La parte par de la función $A(s, t)$ está contenida en A^+ mientras que la impar en A^- , por lo que la contribución a la amplitud física usando (2.136) es [3, 42]:

$$A(s, t) = -\pi [2\alpha(s) + 1] \beta(s) \frac{P_\alpha(-z_s) \pm P_\alpha(z_s)}{\sin \pi \alpha(s)} \quad (2.141)$$

Ya que las funciones de Legendre satisfacen: [134]:

$$P_\alpha(-z) = e^{i\pi\alpha} P_\alpha(z) - \frac{2}{\pi} \sin \pi \alpha Q_\alpha(z) \quad (2.142)$$

puede escribirse (2.141) como:

$$A(s, t) = -\pi [2\alpha(s) + 1] \beta(s) \left\{ \left[1 \pm e^{-i\pi\alpha(s)} \right] \frac{\sin \pi \alpha(s)}{P_\alpha(-z_s)} \mp \frac{2}{\pi} Q_\alpha(-z_s) \right\} \quad (2.143)$$

donde el factor $[1 \pm e^{-i\pi\alpha(s)}]$ es llamado el factor de signatura. su presencia significa que una trayectoria dada contribuye con un polo a la amplitud física para enteros alternantes que son pares para la signatura positiva e impares para la signatura negativa. Es importante notar que el término Q_α no es singular ya que de (2.78) y (2.80c) $Q_\alpha \sim z^{-\alpha-1}$, de modo que no es significativo asintóticamente.

Para encontrar la contribución de un polo de Regge a la amplitud parcial se usa [134]:

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_\alpha(-z) P_\ell(z) dz = \frac{1}{\pi} \frac{\sin \pi \alpha}{(\alpha - \ell)(\alpha + \ell + 1)}, \quad \ell \text{ entero y cualquier } \alpha \quad (2.144)$$

Por lo que al emplearlo la relación (2.136) se tiene [160]:

$$\begin{aligned}
 f_\ell^\pm(s) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_\ell(z_s) A_R^\pm(s, t) dz_s \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_\ell(z') \pi [2\alpha(s) + 1] \beta(s) \frac{P_{\alpha(s)}(-z_s)}{\sin \pi \alpha(s)} P_\ell(z_z) dz_s \\
 &= \frac{[2\alpha(s) + 1] \beta(s)}{[\ell - \alpha(s)] [\alpha(s) + \ell + 1]}
 \end{aligned} \tag{2.145}$$

la cual surge de considerar la división en signaturas para (2.48).

Un análisis de las propiedades de $\alpha(s)$ y $\beta(s)$ puede encontrarse en [3, 24, 31, 42, 43, 48, 50]. Usualmente se espera que $\alpha(s)$ sea una función analítica real de s con un corte derecho que comienza en el umbral de la reacción en el canal- s , s_0 . Así, puede separarse $\alpha(s)$ en sus partes real e imaginaria para un s real:

$$\begin{aligned}
 \alpha(s) &= \alpha_R(s) + i\alpha_I(s) \\
 \alpha_I(s) &= 0 \quad \text{para } s < s_0, \text{ } s \text{ real}
 \end{aligned} \tag{2.146}$$

Si s_R es tal que $\alpha_R(s_R) = \ell$ un entero y expandiendo α_R en la región de s_R :

$$\alpha(s) = \ell + \alpha'_R(s_R)(s - s_R) + \dots + i\alpha_I(s_R) \tag{2.147}$$

Combinando las expresiones (2.140) y (2.147):

$$f_\ell^\pm(s) = \frac{\beta(s_R)}{\alpha'(s_R)(s_R - s) - i\alpha_I(s_R)}, \quad s \cong s_R \tag{2.148}$$

Si se escribe $s = E^2$, donde E es la energía total en el centro de masas y $s_R = M^2$ entonces:

$$f_\ell^\pm(s) \sim \frac{\beta(M^2)}{2M\alpha'_R(M^2)} \frac{1}{(M - E) - i \frac{\alpha_I(M^2)}{\alpha'_R(M^2)2M}} \tag{2.149}$$

que corresponde a una resonancia del tipo Breit-Wigner [42, 81] con masa M y anchura $\Gamma = \frac{\alpha_I(M^2)}{\alpha'_R(M^2)M}$. Para $s < s_0$, con $\alpha_I = 0$ (2.146) se tiene un polo de Regge para un estado ligado.

De aquí puede verse que un estado ligado y un polo resonante son estados cuya única diferencia en la teoría de Regge es que el primero ocurre si la trayectoria pasa por el entero apropiado (según la signatura) con s debajo del umbral, mientras que el segundo ocurre por arriba del umbral. Es decir, una misma trayectoria puede contener un estado ligado de espín cero y una resonancia de espín dos. [36–38]

De forma general, en la teoría relativista de Regge las partículas asociadas con una función dada $\alpha_n(s)$ tienen los mismos números cuánticos internos (número bariónico, isospín, paridad, extrañeza, etc.) pero tienen espines que difieren en unidades de dos [31, 50].

Ciertamente el límite de Froissart para $s \leq 0$ requiere que las trayectorias satisfagan $\alpha(s) \leq 1$, como se mencionó anteriormente, sin embargo para $s > 0$ pueden alcanzarse valores de momento angular mayores para partículas a enteros alternantes.

Una de las hipótesis principales en este capítulo es que toda singularidad de la amplitud tiene un origen dinámico, por lo que cualquier contribución cinemática debe extraerse para que el desarrollo sea congruente. En el caso de las amplitudes parciales con signatura definida, dadas por (2.119), puede escribirse [43]:

$$f_\ell^\pm(t) = \frac{1}{\pi} \int Q_\ell(z) A_1^\pm(z, t) \quad (2.150a)$$

$$f_\ell^\pm(t) = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} Q_\ell \left(1 + \frac{2s}{t - 4m^2} \right) A_1^\pm(s, t) \frac{2ds}{t - 4m^2} \quad (2.150b)$$

donde

$$A_1^\pm(z, t) = D_t(s, z) \pm D_u(s, z) \quad (2.151)$$

con las discontinuidades definidas en (2.37) y usadas ya en (2.119).

Ya que las funciones de Legendre de segunda especie se comportan cerca del umbral como [43, 134]:

$$Q_\ell(z) \propto \frac{1}{z^\ell + 1} \simeq \left(\frac{t - 4m^2}{2s} \right)^{\ell+1}, \quad t - 4m^2 \rightarrow 0 \quad (2.152)$$

Entonces:

$$f_\ell^\pm(t) \propto (t - 4m^2)^\ell \int A_1^\pm(s, t) \frac{d(2s)}{(2s)^{\ell+1}} \quad (2.153)$$

el cual es, para ℓ entero, el comportamiento usual [3, 31, 42, 43] de las ondas parciales cerca del umbral $(t - 4m^2)^\ell = (2q(t))^{2\ell}$.

Por lo previamente discutido, conviene extraer este factor cinemático definiendo una nueva función $\phi_\ell^\pm(t)$:

$$f_\ell^\pm(t) \equiv (t - 4m^2)^\ell \phi_\ell^\pm(t) \quad (2.154)$$

La función $\phi_\ell^\pm(t)$ está dada por:

$$\phi_\ell^\pm(t) = \frac{1}{(t - 4m^2)^\ell} \frac{1}{\pi} \int Q_\ell \left(1 + \frac{2s}{t - 4m^2} \right) A_1^\pm(s, t) \frac{2ds}{t - 4m^2} \quad (2.155a)$$

$$= \frac{2}{\pi(4m^2 - t)^{\ell+1}} \int_{4m^2}^{\infty} Q_\ell \left(\frac{2s}{4m^2 - t} - 1 \right) A_1^\pm(s, t) ds \quad (2.155b)$$

Por medio de estas funciones ϕ_ℓ^\pm , la condición de unitaridad (2.62a) se expresa, para un ℓ entero o complejo como [32, 43]:

$$\frac{1}{2i} [\phi_\ell(t + i\epsilon) - \phi_\ell(t - i\epsilon)] = C_\ell \phi_\ell(t + i\epsilon) \phi_\ell(t - i\epsilon) \quad (2.156a)$$

$$C_\ell \equiv \tau(t - 4m^2)^\ell \quad (2.156b)$$

Una de las características más notables del espectro hadrónico es que sus trayectorias de Regge son aproximadamente lineales (ver F.1.5). Esto fue mostrado por Chew y Frautschi

[158] al graficar el espín de las resonancias J_p vs. la masa de las mismas al cuadrado M^2 , donde en la aproximación de anchuras estrechas (~ 0) corresponde a una trayectoria de Regge. Los patrones que muestran los gráficos de Chew-Frautschi pueden usarse para guiar los análisis de ondas parciales. Por ejemplo, huecos en las trayectorias sugieren la existencia de estados.

La linealidad aproximada de las trayectorias de Regge es una de las indicaciones fenomenológicas más fuertes del confinamiento de quarks [10]⁸, y de este modo se espera que estados que pertenecen a trayectorias lineales estén conectados a las predicciones de modelos quarks [181, 182].

Como se discutió en la sección 2.2.5 la física resonante introduce partes imaginarias, las cuales están constreñidas por la unitaridad y analiticidad y están asociadas al decaimiento de las resonancias [59]. Consecuentemente, las trayectorias de Regge son mapeos del plano complejo de la energía, el plano- s , al plano complejo del momento angular, el plano- J .

Específicamente, ya que una resonancia es caracterizada por su energía compleja s_p y su espín J_p , la trayectoria de Regge es una función compleja tal que $\alpha(s) = (\Re[J(s_p)], \Im[J(s_p)]) = (J_p, 0)$. Así, en el caso general de anchuras finitas, el gráfico de Chew-Frautschi debe ser interpretado como una relación entre $\Re[s_p]$ vs. $\Re[J] = J_p$. Es crucial notar que, al no usar la aproximación de anchuras estrechas, el gráfico de Chew-Frautschi no provee una descripción completa de la trayectoria de Regge. Al analizar gráficos bidimensionales uno puede estudiar relaciones adicionales, por ejemplo $\Im(s_p)$ vs. $\Re[J] = J_p$ [1], para caracterizar de manera completa los gráficos de la superficie $\Re[\alpha(s)]$ como una función compleja de s .

Una simetría adicional, que se satisfacen las amplitudes de dispersión con signatura definida es conocida como la *simetría de MacDowell* [51] que impone que el parámetro de la pendiente de las trayectorias de Regge para trayectorias con mismo isospín (I), pero naturalidad (η) y signatura (τ) opuestas son iguales, es decir, la pendiente de una trayectoria $I_{(\tau)}^{\eta}$ es la misma para la $I_{(-\tau)}^{-\eta}$. La demostración de lo anterior esta fuera de los intereses de este trabajo por lo que se dirige al lector interesado a referencias como [3, 42, 53].

2.4 EJEMPLO ILUSTRATIVO

Considérese para este ejemplo un proceso de dispersión 2 – 2 elástico y mono-canal, donde las masas de las partículas incidentes son m_1, m_2 y sus respectivos cuadrimentos p_1, p_2 . La matriz de dispersión está dada de manera genaral por (2.65b), debido a las hipótesis previas y considerando solo la onda- s ($\ell = 0$) se expresa como:

$$S(s) = I + 2i\tau(s)t(s) \quad (2.157)$$

Como se discutió previamente, el factor del espacio fase permite extraer las singularidades *cinemáticas*, siendo $t(s)$ una función que considera únicamente singularidades dinámicas. De manera general el factor del espacio fase está dado por (2.62b) junto con (2.20a), sin embargo, si se considera un régimen energético en el que pueda desprejarse la diferencia ($m_1 - m_2$)

⁸Como puede consultarse en [10], se llega a esta conclusión al observar el comportamiento del potencial de interacción entre un par de quark-antiquark.

respecto de la variable s , entonces el factor del espacio fase puede aproximarse como

$$\tau(s) \simeq \frac{1}{q_0} \sqrt{s - (m_1 + m_2)^2} = \frac{1}{q_0} \sqrt{s - s_{th}} \quad (2.158)$$

donde q_0 es un parámetro. Para fines de este cálculo considérese $m_1 = 140\text{MeV}$, $m_2 = 1192\text{MeV}$ y $q_0 = 1\text{GeV}$.

En el formalismo de la matriz- K , discutido en la sección 2.1.1, puede escribirse a la amplitud $t(s)$ que cumpla la condición de unitaridad como:

$$t(s) = \frac{1}{K^{-1}(s) - i\rho(s)} \quad (2.159)$$

donde $\rho(s)$ es la continuación analítica del espacio fase y $K(s)$ es una función real que suele considerarse como una suma de polos y algún polinomio [98, 136].

Por lo anterior, es necesario calcular la continuación analítica del espacio fase al dominio complejo, esto se logra usando relaciones de dispersión y escribiendo $\Im[\rho(s)] = \tau(s)$. Nótese que al establecer una relación de dispersión se dota de una estructura analítica a la función, la cual no es necesariamente la misma que se obtiene de extender el dominio de su argumento a valores complejos.

Debido al comportamiento asintótico de $\tau(s)$:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \sqrt{s - s_{th}} \rightarrow +\infty \quad (2.160a)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{s - s_{th}}}{s} \rightarrow 0 \quad (2.160b)$$

es necesario realizar una sustracción. De este modo la relación de dispersión se sigue de (2.43) junto con (2.158):

$$\begin{aligned} i\rho(s) &= b(s_{th}) + \frac{s - s_{th}}{\pi} \int_{s_{th}}^{\infty} ds' \frac{\tau(s')}{(s' - s)(s' - s_{th})} \\ &= \frac{s - s_{th}}{\pi} \int_{s_{th}}^{\infty} ds' \frac{\sqrt{s' - s_{th}}}{(s' - s)(s' - s_{th})} \end{aligned} \quad (2.161)$$

donde $b(s_{th})$ es la constante de sustracción, que en este es igual a cero ya que la sustracción se está llevando a cabo en s_{th} . La integral anterior se calcula de manera numérica usando el software de *Mathematica*. Nótese que no se han considerado contribuciones de polos en la relación de dispersión ya que el factor del espacio fase es de origen cinemático.

En la figura F.2.15(a) puede verse que la parte real de $i\rho(s)$ es continua para $s + i\epsilon$ y $s - i\epsilon$ con s real; mientras que la imaginaria de $i\rho(s)$ tiene un corte que comienza en el umbral s_{th} , como se aprecia en la figura F.2.15(b).

Una pregunta que puede surgir es si la continuación analítica reconstruye a $\tau(s)$, en la figura F.2.15(c) puede verse que con el convenio físico, la parte imaginaria de $i\rho(s)$ coincide con $\tau(s)$.

Por otro lado en la figura F.2.15(d) se muestra la parte real de $i\rho(s)$ para un s complejo, la cual coincide tanto para $s + i\epsilon$ como para $s - i\epsilon$. En F.2.15(e) la hoja de Riemann física

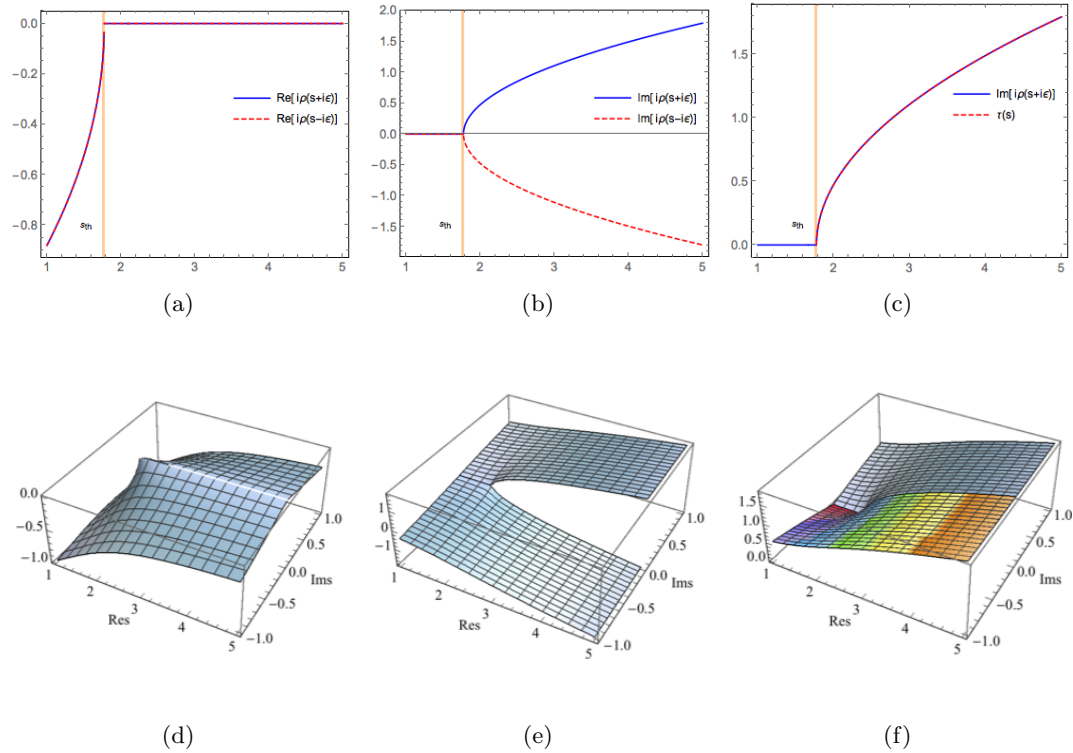


Figura F.2.15: Gráficos de la continuación analítica del espacio fase para el ejemplo ilustrativo de la ecuación (2.161) (a) Muestra que la parte real de $i\rho(s)$ es continua para $s+i\epsilon$ y $s-i\epsilon$ con $s \in \mathbb{R}$, (b) la discontinuidad de la parte imaginaria para $s+i\epsilon$ y $s-i\epsilon$ con $s \in \mathbb{R}$; (c) muestra como la parte imaginaria de $i\rho(s)$ con el convenio físico reconstruye a $\tau(s)$ de la ecuación (2.158). En (d) muestra la parte real de $i\rho(s)$ tanto para $s+i\epsilon$ como $s-i\epsilon$ permitiendo a s ser complejo, en (d) la hoja de Riemann física de la parte imaginaria de $i\rho(s)$ con s complejo; y en (f) se muestra como es que la hoja de Riemann física (superficie azul) se conecta con la hoja no física (superficie multicolor). Más detalles en la discusión de la sección 2.4.

de la parte imaginaria de $i\rho(s)$ y en la figura F.2.15(f) como es que la hoja física se conecta con la no física. Por todo lo anterior se sigue que es posible usar el principio de reflexión de Schwarz para $\rho(s)$ como en los desarrollos de la sección 2.2.4.

Supóngase además, que la amplitud está dominada por un solo polo, como ocurre en los modelos tipo Breit-Wigner [81]. Un modelo simple para $K(s)$ es entonces:

$$K(s) = \frac{g^2}{M^2 - s} \quad (2.162)$$

donde g es una constante asociada al decaimiento de la resonancia y M es un parámetro que determina la posición del polo, generalmente llamado la masa de Breit-Wigner por su analogía con la forma de la distribución con el mismo nombre [81].

Al reemplazar (2.162) en (2.159) se obtiene:

$$t(s) = \frac{g^2}{M^2 - s - ig^2\rho(s)} \quad (2.163)$$

Para tener contacto con funciones del tipo Breit-Wigner, se define en este caso

$$g^2 = \frac{\Gamma}{2} \quad (2.164)$$

donde Γ es conocida como la anchura de Breit-Wigner; para fines de cálculo se considera $\Gamma = 0.4$.

Por lo que al reemplazar (2.164) en (2.163), la amplitud se escribe entonces como:

$$t^I(s) = \frac{\frac{\Gamma}{2}}{M^2 - s - i\rho(s)\frac{\Gamma}{2}} \quad (2.165)$$

donde el superíndice es para destacar que esta es la amplitud escrita en la primer hoja de Riemann. En la figura F.2.16 se muestra la estructura analítica de la amplitud en la primer hoja de Riemann definida por la ecuación (2.165). Nótese como la amplitud solo posee singularidades del tipo corte y no polos, esto es acorde con lo discutido en la sección 2.2.

Como se ha mostrado, el $\rho(s)$ de este ejemplo cumple con las hipótesis hechas para deducir la expresión (2.87c), por lo que la amplitud en la segunda hoja de Riemann es entonces:

$$t^{II}(s) = \frac{t^I(s)}{1 + 2i\rho(s)t^I(s)} = \frac{\frac{\Gamma}{2}}{M^2 - s + i\rho(s)\frac{\Gamma}{2}} \quad (2.166)$$

En la figura F.2.17 se muestra la estructura analítica de la amplitud escrita en la segunda hoja de Riemann y definida por la ecuación (2.166). Nótese como en las figuras F.2.17(d) y F.2.17(e) la amplitud en la primer hoja de Riemann (superficie azul) se conecta de forma analítica con la de la segunda hoja de Riemann (superficie multicolor) según lo discutido en la sección 2.2. Obsérvese además la aparición de los polos en la segunda hoja de Riemann en las figuras F.2.17(d) y F.2.16(b).

La búsqueda de los polos para las amplitudes implica de resolver cada una de las siguientes

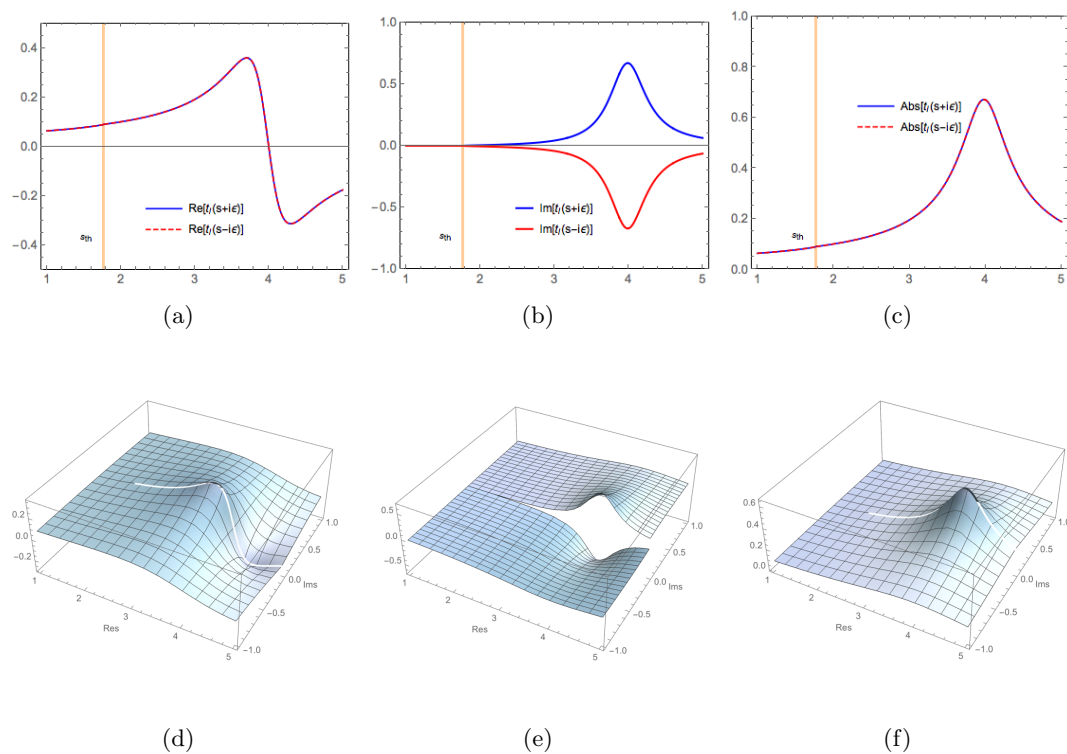


Figura F.2.16: Estructura analítica de la amplitud de dispersión en la primer hoja de Riemann definida en la ecuación (2.165). (a), (b) y (c) son para $\Im[s] = 0$. En (a) puede observarse como la parte real de $t^I(s)$ es continua para $s + i\epsilon$ y $s - i\epsilon$, en (b) que la parte imaginaria de $t^I(s)$ es discontinua para $s + i\epsilon$ y $s - i\epsilon$, mientras que en (c) el valor absoluto de $t^I(s)$ para $s + i\epsilon$ y $s - i\epsilon$. En (d) se muestra la parte real de $t^I(s)$ tanto para $s + i\epsilon$ como $s - i\epsilon$ permitiendo a s ser complejo, en (d) la hoja de Riemann física de la parte imaginaria de $t^I(s)$ con s complejo, donde puede apreciarse el corte de unitariedad discutido en la sección 2.2; y en (f) se muestra el valor absoluto de $t^I(s)$ para s complejo, nótese la ausencia de polos. Más detalles en la discusión de la sección 2.4.

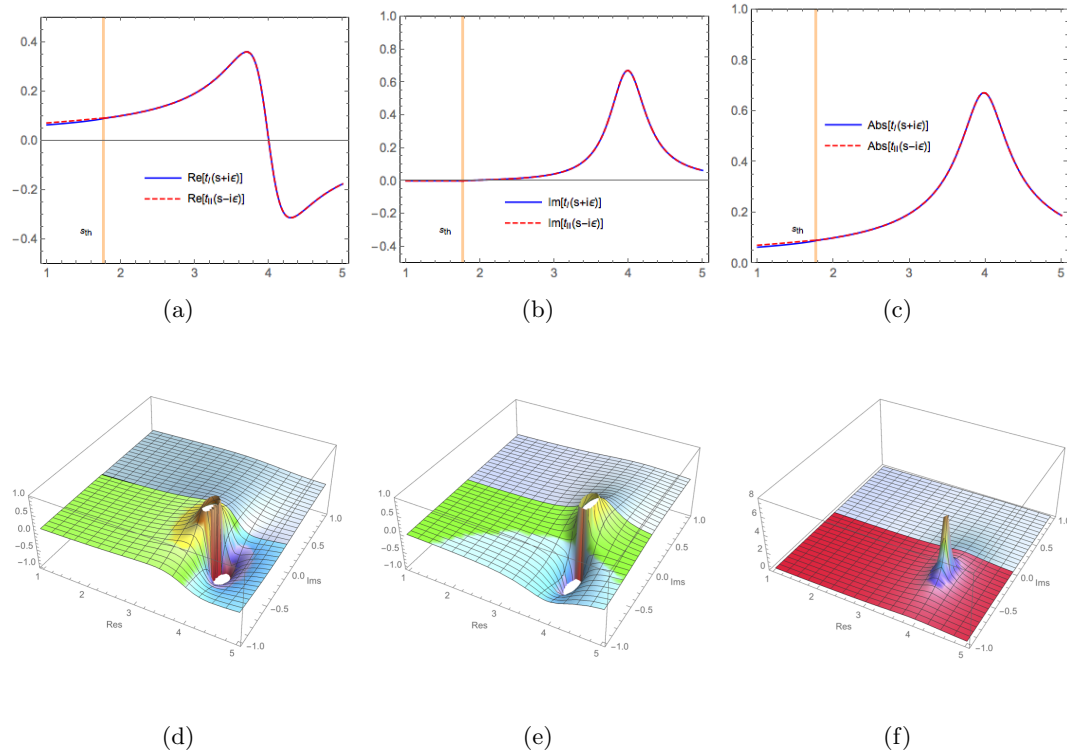


Figura F.2.17: Estructura analítica de la amplitud de dispersión en la segunda hoja de Riemann definida en la ecuación (2.166). (a), (b) y (c) son para $\Im[s] = 0$. En (a) puede observarse como la parte real de $t^{II}(s)$ es continua para $s+i\epsilon$ y $s-i\epsilon$ por encima del umbral (naranja), este efecto se debe a que no se ha incluido en el análisis las contribuciones del corte izquierdo de la amplitud como se discutió en 2.2; en (b) se observa que la parte imaginaria de $t^{II}(s)$ es continua para $s+i\epsilon$ y $s-i\epsilon$, mientras que en (c) el valor absoluto de $t^{II}(s)$ para $s+i\epsilon$ y $s-i\epsilon$. En (d) se muestra la parte real de $t^{II}(s)$ tanto para $s+i\epsilon$ (azul) como $s-i\epsilon$ (multicolor) permitiendo a s ser complejo, nótese la conexión entre ambas superficies y la aparición de los polos; en (d) la parte imaginaria de $t^{II}(s)$ con s complejo, tanto para $s+i\epsilon$ (azul) como $s-i\epsilon$ (multicolor), nótese la aparición de los polos en la hoja no física $s-i\epsilon$; en (f) se muestra el valor absoluto de $t^{II}(s)$ para s complejo, nótese la prominente singularidad. Más detalles en la discusión de la sección 2.4.

ecuaciones

$$\text{1}^{\text{er}}\text{hoja de Riemann} \quad M^2 - s_{sp} - i\rho(s)\frac{\Gamma}{2} = 0 \quad (2.167a)$$

$$\text{2}^{\text{da}}\text{hoja de Riemann} \quad M^2 - s_{sp} + i\rho(s)\frac{\Gamma}{2} = 0 \quad (2.167b)$$

que se obtienen de igualar los denominadores de las funciones $t^I(s)$ (2.165) y $t^{II}(s)$ (2.166) a cero, donde se denota a s_{sp} como el valor del polo.

Para tales valores los parámetros de los polos que se obtienen son:

$$\text{1}^{\text{er}}\text{hoja de Riemann} \quad \text{sin polos} \quad (2.168a)$$

$$\text{2}^{\text{da}}\text{hoja de Riemann} \quad \text{polos en: } s = 3.98 \pm 0.29771i \quad (2.168b)$$

que como se discutió en la sección 2.2.5, los polos ocurren en pares conjugados para la amplitud.

CAPÍTULO 3

DESARROLLO

There is a large experimental program on production of S particles by nuclear collisions and by photons, scattering, and interactions of those mesons with nuclei, etc. But just between us theoretical physicists: What do we do with all these data? We cant do anything. We are facing a very serious problem. Perhaps the results of all experiments will produce some idiotic surprises, and some dope will be able to calculate everything from some simple rule. What we are doing can be compared with those complicated models invented to explain the hydrogen spectra which turned out to satisfy very simple regularities.

Richard P. Feynman

3.1 MOTIVACIÓN FÍSICA

Los estados de excitación del nucleón, conocidos como N^* (isospín $I = 1/2$) y Δ^* ($I = 3/2$), son los bariones *más simples* ya que están *compuestos* principalmente por quarks u y d (que son los más ligeros de la teoría). Han sido estudiados experimentalmente desde 1950 [183] donde la resonancia conocida como $\Delta(1232)$ fue la primera en ser observada.

El estudio de este espectro ha contribuido, entre otras cosas al descubrimiento del modelo de quarks por Gell-Mann [22] y Zweig [23], ha sido crítico para el descubrimiento de los grados de libertad de color [184] y además ha proporcionado gran información sobre la interacción fuerte [14, 19]; ya que provee una conexión entre la Cromodinámica Cuántica (QCD) y los experimentos en el régimen bajo y medio de las interacciones fuertes, donde debido a la libertad asintótica no es posible un tratamiento perturbativo de QCD [185].

El modelo de quarks predice una gran cantidad de estados hadrónicos, lo que condujo a un gran esfuerzo experimental para buscar dichos estados [14, 64, 186]. Sin embargo, de la gran cantidad de estados predichos por tal modelo, solo una fracción de ellos ha sido observado experimentalmente [13].

La búsqueda de los estados *faltantes*, así como el análisis de la estructura resonante de los mismos ha sido estudiado por diferentes métodos. Por muchos años la dispersión elástica y de intercambio de carga en procesos πN fue la principal fuente de información en el estudio de las resonancias N^* y Δ^* [187–189]. Comparado no solo con las predicciones de modelos quark, sino también con las simulaciones de LQCD [190–195] el número de resonancias observadas en procesos πN es pequeño, situación que ha sido denominada como *el problema de las resonancias perdidas* [196]. Por lo anterior, se han diseñado experimentos que permitan estudiar este espectro de manera detallada y más completa [197], ya que una de las posibles explicaciones al problema anterior es que dichas resonancias pueden sufrir

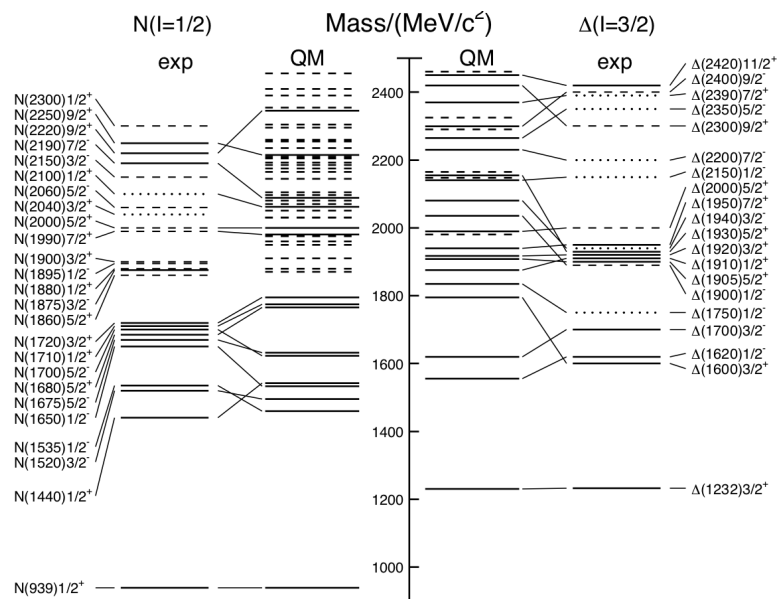


Figura F.3.1: Espectro de excitación del nucleón. Se comparan las posiciones de los estados identificados experimentalmente con aquellas predichas por un modelo de quarks relativista. Las que se encuentran a la izquierda tienen isospín $I = 1/2$, también denominados estados N , mientras que las que están a la derecha tienen isospín $I = 3/2$, conocidas también como estados Δ . Figura extraída de [13].

decaimientos secuenciales, en lugar de los que se pueden observar directamente en reacciones πN .

Entre los experimentos antes mencionados destacan los de fotoproducción [198–202] en los cuales se usa un haz de fotones que colisiona contra algún hadrón, por ejemplo γp . Una de las principales ventajas de los procesos de fotoproducción de hadrones es que al involucrar fotones, las condiciones experimentales pueden ser mejor controladas y se pueden realizar mediciones más precisas. Ejemplos de experimentos de este tipo se llevan a cabo en ELSA, JLab y MAMI [203], entre otros.

El objetivo de la espectroscopia hadrónica es entender el origen y estructura de las resonancias, por ejemplo, establecer si una resonancia puede clasificarse como un estado compacto de tres quarks ($3q$), como es predicho por el modelo de quarks o si tiene otras componentes hadrónicas. Lo anterior es generalmente hecho a través del análisis de ondas parciales con resonancias que son parametrizadas de forma independiente para ajustar los datos. Tales análisis no incluyen restricciones globales impuestas por la teoría de Regge que conectan ondas parciales a través de la analiticidad en el plano de momento angular complejo [32, 42, 43]. La posición del polo, que cambia como función de la masa de la resonancia y define la llamada *trayectoria de Regge*, puede ser usada para estudiar los mecanismos microscópicos responsables de la formación de las resonancias [1, 55–57].

Por lo anterior, y siguiendo el análisis del sector de bariones con extrañeza [204] se usa la teoría de Regge para estudiar el espectro de bariones N^* y Δ^* .

Los objetivos de este análisis son: (i) proporcionar una comparación comprensiva de las diferentes extracciones de polos de las resonancias N^* y Δ^* con base en la fenomenología de

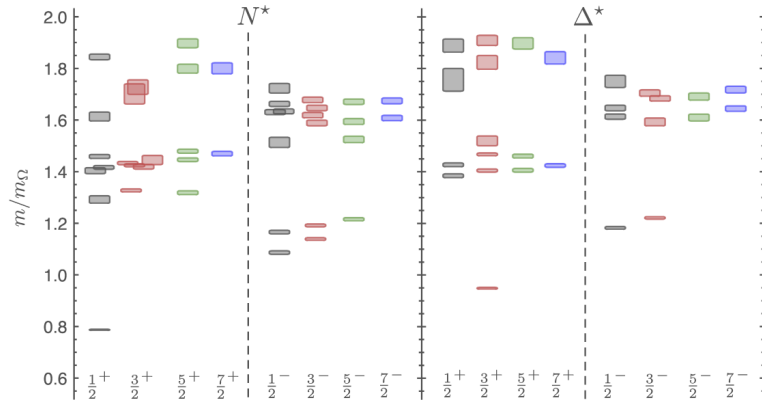


Figura F.3.2: Espectro de nucleones N^* y deltas Δ^* obtenido por *Cromodinámica Cuántica en el Retículo* (LQCD) para redes donde $m_\pi = 396$ MeV en unidades de la masa calculada de Ω de la referencia [190]. Las etiquetas horizontales corresponden a espín y paridad J^P . Figura extraída de [13].

Regge; (ii) evaluar el impacto de despreciar la parte imaginaria de los polos en el cálculo de la trayectoria de Regge, en particular en la extracción del parámetro de la pendiente que puede ser comparado con el que se usa en ajustes de alta energía para los datos protón-antiprotón [74]; y (iii) guiar las futuras extracciones de los polos N^* y Δ^* [75–77].

3.2 EXTRACCIONES DE LOS POLOS N^* Y Δ^*

Para un espín y paridad dada las posiciones de los polos de las resonancias s_p son extraídas de amplitudes de ondas parciales continuadas analíticamente fuera del eje real de la energía a las hojas de Riemann no físicas.

En el eje real las amplitudes de las ondas parciales son ajustadas a los datos de la dispersión mesón-nucleón y fotoproducción de mesones. Este procedimiento trae consigo incertidumbres asociadas a los datos experimentales (sistemáticos y estadísticos), el modelo de análisis de ondas parciales en sí mismo, y la continuación analítica al plano complejo de energía.

Las diferencias entre los modelos reflejan algunas de estas incertidumbres y dependencias de modelo. En las tablas C.3.1-C.3.4, se enlistan los polos que en principio conforman las trayectorias *principales* (padres), es decir las trayectorias de Regge conformadas por los estados de menor masa N^* y Δ^* para cada asignación de espín-paridad.

Las trayectorias de Regge se clasifican de acuerdo a su isospín I , naturalidad η ($\eta = +1$, si $P = (-1)^{J_p-1/2}$, y $\eta = -1$, paridad antinatural, si $P = -(-1)^{J_p-1/2}$, donde P es la paridad y J_p es el espín de la resonancia) y la signatura τ ($\eta = \tau P$). Los números cuánticos se usan para identificar una trayectoria como $I_{(\tau)}^\eta$; por ejemplo, la trayectoria que contiene al nucleón $N(939)$ corresponde a $I_{(\tau)}^\eta = \frac{1}{2}_{(+)}^+$.

Fenomenológicamente se observa que las trayectorias *líder* que difieren únicamente por la signatura son (al menos) degeneradas, es decir, las signaturas impares ($\tau = -$) y pares ($\tau = +$) tienen la misma trayectoria. Para trayectorias sub-líderes generalmente no se dispone de suficiente información para distinguir ambas signaturas.[42]

Cuadro C.3.1: Resumen de las posiciones de los polos M_p, Γ_p en MeV para estados $I^\eta = \frac{1}{2}^+$ donde $M_p = \Re \sqrt{s_p}$ y $\Gamma_p = -2 \Im \sqrt{s_p}$. I denota al isospín, η a la naturalidad, J_p al espín, y P a la paridad. Naturalidad y paridad están relacionadas por $\eta = \tau P$ donde τ es la signatura. Para bariones, $\eta = +1$, es la paridad natural, si $P = (-1)^{J_p-1/2}$, y $\eta = -1$, paridad antinatural, si $P = -(-1)^{J_p-1/2}$.

Name	$N(939)$	$N(1520)$	$N(1680)$	$N(2190)$	$N(2220)$
Status	****	****	****	****	****
$I_{(\tau)}^\eta J_p^P$	$\frac{1}{2}_{(+)}^+ 1/2^+$	$\frac{1}{2}_{(-)}^+ 3/2^-$	$\frac{1}{2}_{(+)}^+ 5/2^+$	$\frac{1}{2}_{(-)}^+ 7/2^-$	$\frac{1}{2}_{(+)}^+ 9/2^+$
CMB	939(1), 0	1510(5), 114(10)	1667(5), 110(10)	2100(50), 400(160)	2160(80), 480(100)
JüBo	939(1), 0	1509(5), 98(3)	1666(4), 81(2)	2084(7), 281(6)	2207(89), 659(140)
BnGa	939(1), 0	1507(3), 111(5)	1676(6), 113(4)	2150(25), 325(25)	2150(35), 440(40)
SAID(SE)	939(1), 0	1512(2), 113(6)	1678(4), 113(3)	2132(24), 550(25)	2173(7), 445(21)
SAID(ED)	939(1), 0	1515(2), 109(4)	1674(3), 114(7)	2060(11), 521(16)	2177(4), 464(9)
KH80	939(1), 0	1506(2), 115(3)	1674(3), 129(4)	—	2127(27), 380(29)
KA84	939(1), 0	1506(2), 116(4)	1672(3), 132(5)	—	2139(6), 390(7)

En este trabajo se usan siete conjuntos de polos que se extraen de los siguientes análisis:

- (i) **CMB**: Parámetros de los polos del análisis de ondas parciales πN Carnegie-Mellon-Berkeley de [188, 205] como se cita en el PDG [13].
- (ii) **JüBo**: Parámetros de los polos del análisis de ondas parciales de [203] usando el modelo de canales acoplados Jülich-Bonn 2017. El espectro de las resonancias se obtiene de un análisis combinado de la fotoproducción de η , π y $K\Lambda$ del protón en conjunto con las reacciones $\pi N \rightarrow \pi N$, ηN , $K\Lambda$ y $K\Sigma$.
- (iii) **BnGa**: Parámetros de los polos del análisis de ondas parciales multicanal de Bonn-Gatchina en [206, 207], obtenidos de la dispersión elástica de los datos de πN y las reacciones inelásticas foto-inducidas.
- (iv) **SAID(SE)**: Parámetros de los polos obtenidos en [208] de un ajuste de ondas parciales monoenergéticas SAID-GW WI08, de la dispersión elástica πN [209] usando el enfoque Laurent+Pietarinen (LP).
- (v) **SAID(ED)**: Polos extraídos de [208] del análisis de ondas parciales dependiente de la energía SAID-GW WI08 de la dispersión elástica πN [209] usando el enfoque LP.
- (vi) **KH80**: Polos extraídos de [210] del análisis de ondas parciales Karlsruhe-Helsinki KH80 [211] de la dispersión elástica πN empleando el enfoque LP.
- (vii) **KA84**: Polos extraídos de [210] del análisis de ondas parciales Karlsruhe KA84 [212, 213] de la dispersión elástica πN empleando el enfoque LP.

Otras extracciones de polos se encuentran en la literatura, ellos incluyen la extracción del gráfico de la velocidad de las amplitudes $\pi N \rightarrow \pi N$ de Höhler [214]; los parámetros de los polos SAID dados en [208] obtenidos del análisis de ondas parciales SAID-GW WI08 de la dispersión elástica πN [209]; la extracción de polos de la Kent State University (KSU) en [215] usando una parametrización multicanal de las amplitudes de dispersión πN ; la extracción de

Cuadro C.3.2: Resumen de las posiciones de los polos, M_p, Γ_p en MeV para estados $I^\eta = \frac{1}{2}^-$. La notación es la misma que en la tabla C.3.1.

Name	$N(1720)$	$N(1675)$	$N(1990)$	$N(2250)$
Status	****	****	**	****
$I_{(\tau)}^\eta J_p^P$	$\frac{1}{2}^- 3/2^+$	$\frac{1}{2}^- 5/2^-$	$\frac{1}{2}^- 7/2^+$	$\frac{1}{2}^- 9/2^-$
CMB	1680(30), 120(40)	1660(10), 140(10)	1900(30), 260(60)	2150(50), 360(100)
JüBo	1689(4), 191(3)	1647(8), 135(9)	2152(12), 225(20)	1910(53), 243(73)
BnGa	1670(25), 430(100)	1655(4), 147(5)	1970(20), 250(20)	2195(45), 470(50)
SAID(SE)	1668(24), 303(58)	1661(1), 147(2.4)	2157(62), 261(104)	2283(10), 304(31)
SAID(ED)	1659(11), 303(19)	1657(3), 139(5)	—	2224(5), 417(10)
KH80	1677(5), 184(9)	1654(2), 125(4)	2079(13), 509(23)	2157(17), 412(51)
KA84	1685(5), 178(9)	1656(1), 123(3)	2065(14), 526(9)	2187(7), 396(25)

Cuadro C.3.3: Resumen de las posiciones de los polos M_p, Γ_p en MeV para estados $I^\eta = \frac{3}{2}^+$. La notación es la misma que en la tabla C.3.1.

Name	$\Delta(1700)$	$\Delta(1905)$	$\Delta(2200)$	$\Delta(2300)$
Status	****	****	***	**
$I_{(\tau)}^\eta J_p^P$	$\frac{3}{2}^+ 3/2^-$	$\frac{3}{2}^+ 5/2^+$	$\frac{3}{2}^+ 7/2^-$	$\frac{3}{2}^+ 9/2^+$
CMB	1675(25), 220(40)	1830(40), 280(60)	2100(50), 340(80)	2370(80), 420(160)
JüBo	1667(28), 305(45)	1733(47), 435(264)	2290(132), 388(204)	—
BnGa	1685(10), 300(15)	1800(6), 290(15)	—	—
SAID(SE)	1646(11), 203(17)	1831(7), 329(17)	—	—
SAID(ED)	1652(10), 248(28)	1814(5), 273(9)	—	—
KH80	1643(9), 217(18)	1752(5), 346(8)	—	—
KA84	1616(5), 280(9)	1790(5), 293(12)	—	—

Cuadro C.3.4: Resumen de las posiciones de los polos M_p, Γ_p en MeV para estados $I^\eta = \frac{3}{2}^-$. La notación es la misma que en la tabla C.3.1.

Name	$\Delta(1232)$	$\Delta(1930)$	$\Delta(1950)$	—	$\Delta(2420)$
Status	****	***	****	—	****
$I_{(\tau)}^\eta J_p^P$	$\frac{3}{2}^- 3/2^+$	$\frac{3}{2}^- 5/2^-$	$\frac{3}{2}^- 7/2^+$	$\frac{3}{2}^- 9/2^-$	$\frac{3}{2}^- 11/2^+$
CMB	1210(1), 100(2)	1890(50), 260(60)	1890(15), 260(40)	—	2360(100), 420(100)
JüBo	1215(4), 97(2)	1663(43), 263(76)	1850(37), 259(61)	1783(86), 244(194)	—
BnGa	1210.5(1.0), 99(2)	—	1888(4), 245(8)	—	—
SAID(SE)	1211(0), 100(2)	1845(31), 174(40)	1888(3), 234(6)	—	—
SAID(ED)	1211(2), 98(3)	1969(23), 248(36)	1878(4), 227(6)	1955(24), 911(24)	2320(13), 442(23)
KH80	1211(2), 98(3)	1848(28), 321(24)	1877(3), 223(5)	—	2454(15), 462(58)
KA84	1210(2), 100(2)	1844(36), 334(26)	1878(3), 246(7)	—	2301(7), 533(17)

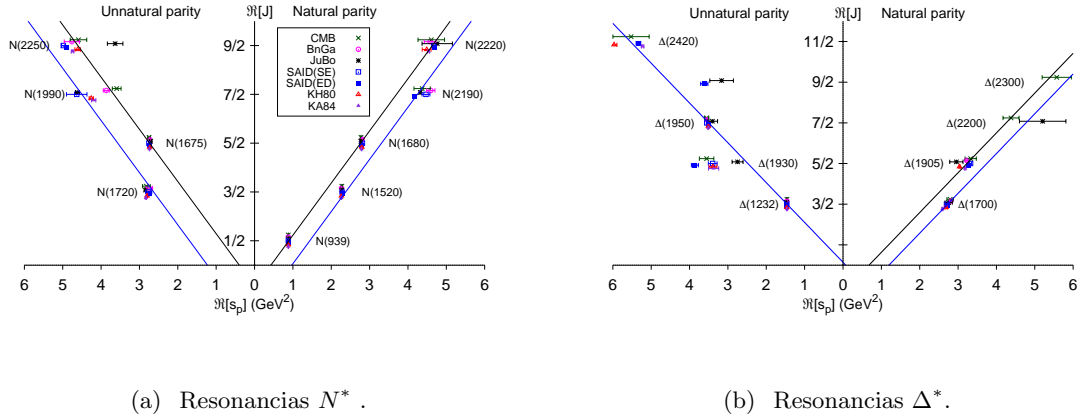


Figura F.3.3: Gráficos de Chew–Frautschi para las trayectorias líder de Regge de las resonancias N^* y Δ^* en las tablas C.3.1, C.3.2, C.3.3 y C.3.4. Las líneas sólidas negras (azules) son ajustes lineales a los puntos de datos con signatura positiva (negativa) (ver la sección 3.2 para más información). Todas las curvas comparten la misma pendiente como lo requiere la simetría de MacDowell [51]. No se muestra un ajuste para los estados $\frac{3}{2}^+$ ya que la posición del polo Δ $9/2^-$ no es confiable como se discute en la sección 4. Para que pueda distinguirse la información de los puntos e incertidumbres, la posición de los polos está desplazada de su valor $\Re[J] = J_p$ real.

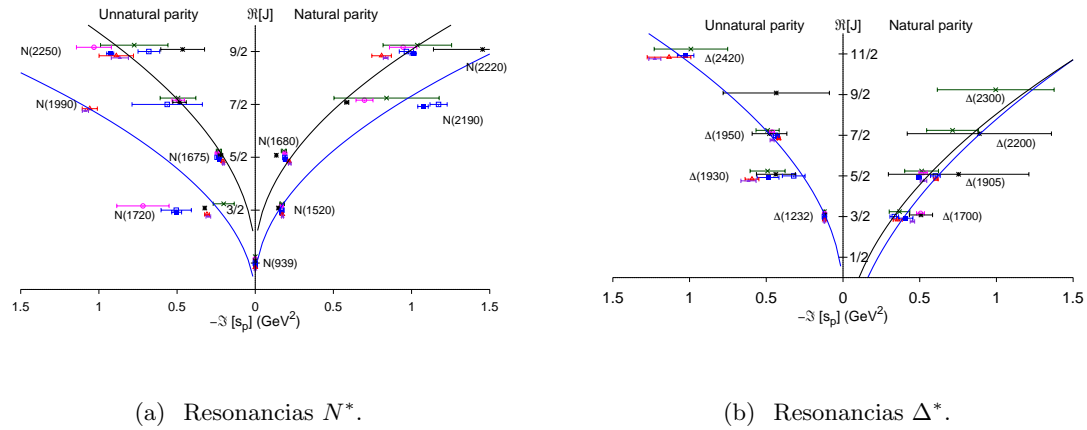


Figura F.3.4: Gráficos de $(\Im[s_p], \Re[J] = J_p)$ introducidos en [1] para las trayectorias líder de Regge de las resonancias N^* y Δ^* en las tablas C.3.1, C.3.2, C.3.3 y C.3.4. Las líneas sólidas negras (azules) son ajustes del tipo raíz cuadrada a los puntos de datos con signatura positiva (negativa) (ver la sección 3.2 para más información). No se muestra un ajuste para los estados $\frac{3}{2}^+$ ya que la posición del polo Δ $9/2^-$ no es confiable como se discute en la sección 4. Para que pueda distinguirse la información de los puntos e incertidumbres, la posición de los polos está desplazada de su valor $\Re[J] = J_p$ real como en la figura F.3.3. El polo de Δ $9/2^-$ de SAID(ED) en la trayectoria con la paridad antinatural tiene un valor de $\Im[s_p]$ muy grande, por lo que no se muestra en el gráfico F.3.4(b).

polos del Pittsburgh-Argonne National Lab (P-ANL) en [216]; el análisis de canales acoplados del grupo Giessen de la producción y fotoproducción de η en [217]; el análisis de amplitudes del Argonne National Lab-Osaka (ANL-O) $\pi N \rightarrow \pi N$, ηN , $K\Lambda$, $K\Sigma$ y $\gamma N \rightarrow \pi N$, ηN , $K\Lambda$, $K\Sigma$ data [218]; y el análisis Zagreb en [219] basado en una aproximación multicanal de CMB.

Höhler, SAID, KSU, P-ANL, Giessen y ANL-O no proporcionan incertidumbres en sus extracciones de polos y el análisis del grupo Zagreb únicamente estudia el espectro N^* , de ese modo, se escoge no incluirlos en el trabajo. De igual manera, no se incluyen en el trabajo las extracciones de polos suprimidas dentro de los mismos modelos de las reacciones.

En la figura F.3.3 se muestran los gráficos de Chew-Frautschi ($\Re[s_p]$, $\Re[J] = J_p$) para las resonancias N^* y Δ^* , en la figura F.3.4 se muestran los gráficos ($\Im[s_p]$, $\Re[J] = J_p$) introducidos en [1]. Estas figuras proporcionan una descripción cualitativa del espectro, puede observarse un comportamiento lineal en ($\Re[s_p]$, J_p) y un comportamiento tipo raíz cuadrada en ($\Im[s_p]$, J_p). Tal comportamiento fue igualmente observado en el espectro de hiperones [1].

Para destacar la tendencia lineal de los polos en la figura F.3.3 se muestran ajustes lineales $J_p = a + b\Re[s_p]$ para cada uno de los gráficos de Chew-Frautschi de $\frac{1}{2}(\pm)$, $\frac{3}{2}(\pm)$ y $\frac{3}{2}(+)$ con una pendiente común b , como lo requiere la simetría de MacDowell [51].

Nótese que en la figura F.3.3 no se muestra un ajuste para para los estados $\frac{3}{2}(+)$ ya que la extracción del polo $\Delta 9/2^-$ no es confiable como se discutirá en la sección 4.

Para destacar el comportamiento tipo raíz cuadrada de los polos en los gráficos ($\Im[s_p]$, J_p) se muestran ajustes de la forma $J_p = c + d\sqrt{-\Im[s_p]}$ para cada uno de los conjuntos de estados $\frac{1}{2}(\pm)$, $\frac{3}{2}(\pm)$ y $\frac{3}{2}(+)$ en la figura F.3.4, donde c y d son parámetros libres.

Es importante destacar que los ajustes a los datos en los gráficos de ($\Re[s_p]$, J_p) y ($\Im[s_p]$, J_p) son realizados de manera independiente. Por esta razón no se proporciona más información a cerca de esos ajustes *ingenuos*, ya que solo son cálculos exploratorios para remarcar las tendencias lineales y tipo raíz cuadrada de los polos en los gráficos.

Un análisis cuantitativo de las trayectorias de Regge debe ser realizado con un modelo que ajuste la parte real e imaginaria de los polos de manera simultánea como será hecho en el análisis de la sección siguiente, por lo que se deja el resto de la discusión de los gráficos F.3.3 y F.3.4 para la sección 4 donde se presentará el análisis cuantitativo del espectro.

3.3 MODELOS PARA LAS TRAYECTORIAS PADRE DE REGGE

En lo sucesivo, la hipótesis central de este trabajo es que el comportamiento de raíz-cuadrada mostrado en la figura F.3.4 es el que lidera el comportamiento de las singularidades como implica la unitaridad [220]. Esto se deriva del hecho de que los canales dominantes de dos cuerpos, es decir, aquellos con mayor peso para la mayoría de las secciones eficaces, dan la parte imaginaria proporcional al momento relativo $q \sim \sqrt{s - s_t}$, donde s el invariante de masa al cuadrado de dos cuerpos y s_t es el umbral.

La contribución de estados finales de múltiples cuerpos pueden ser absorbidos de manera efectiva en los parámetros de los polos.

Cerca de un polo de Regge las amplitudes de ondas parciales son proporcionales a [42]:

$$t_\ell(s) \propto \frac{1}{\ell - \alpha(s)}, \quad (3.1)$$

donde $\alpha(s)$ es la trayectoria de Regge y ℓ es el momento angular total de la onda parcial que coincide con el espín J_p de la resonancia. Esto puede compararse con la amplitud de Breit-Wigner cerca del polo s_p bajo la aproximación de la dispersión elástica de dos cuerpos, que ha sido usada en el ejemplo ilustrativo de la sección 2.4:

$$t_\ell(s) \propto \frac{g^2}{M^2 - s - i g^2 \rho(s, s_t)}, \quad (3.2)$$

donde se recuerda al lector que M es real y suele llamársele la masa de Breit-Wigner. El decaimiento de la resonancias está determinado por g^2 , que puede ser usado para definir el acoplo a los canales abiertos [3, 42] y $\rho(s, s_t)$ es el factor del espacio fase.

Se hace hincapié en que tanto la ecuación (3.1) como (3.2) están escritas en la segunda hoja de Riemman en el plano complejo de la variable s , donde como se discutió en la sección 2.2.1 es donde los polos resonantes de la amplitud ocurren.

Con la determinación de $\rho(s, s_t)$ que es analítico entre el eje real para $s > s_{th}$ se encuentran polos de $t_\ell(s)$ localizados en el semiplano inferior de la variable s que están analíticamente conectados a la región física en $s + i\epsilon$.

La profundidad de un polo en el plano complejo depende de dos factores, la dinámica de QCD y el espacio fase. La dependencia del espacio fase $\rho(s, s_t)$ es explícitamente contruida mediante la unitaridad como se discutió en la sección 2.2.4, mientras que la dinámica de QCD está contenida en los parámetros M y g [3].

En el polo s_p , las ecuaciones (3.1) y (3.2) deben ser iguales puesto que son formas de parametrizar al polo [48], de ese modo:

$$\ell - \alpha(s_p) = \frac{M^2}{g^2} - \frac{s_p}{g^2} - i\rho(s_p, s_t) = 0. \quad (3.3)$$

Esta ecuación es usada para relacionar la parte imaginaria de la trayectoria de Regge con los parámetros de decaimiento de la resonancia.

Sin pérdida de generalidad, es posible parametrizar la trayectoria de Regge como [1, 221, 222]:

$$\alpha(s) = \alpha_0 + \alpha' s + i \gamma \phi(s, s_t), \quad (3.4)$$

donde α_0 , α' y γ son constantes reales, y $\phi(s, s_t)$ contiene la información a cerca de el decaimiento de la resonancia. La pendiente α' es con frecuencia relacionada con la tensión de una cuerda confinada en modelos de *flujo tubular* (*flux tube models*) [71–73] y en el rango de las interacciones fuertes en modelos de Veneziano [223].

El comportamiento tipo raíz cuadrada en la figura F.3.4 sugiere que $\rho(s, s_t)$ es la componente dominante de $\phi(s, s_t)$. Como se mencionó anteriormente, la posición del polo en el plano complejo, depende de la dinámica de QCD y el espacio fase, por lo que ambos contribuyen a la forma funcional de $\phi(s, s_t)$.

Como primera aproximación puede modelarse $\gamma\phi(s, s_t) = \rho(s, s_t)$ y ajustar la trayectoria en la ecuación (3.4) en los polos $s = s_p$ a $\Re[\alpha(s_p)] = \Re[J] = J_p$ y $\Im[\alpha(s_p)] = \Im[J] = \Im[J_p] = 0$ obteniendo de este modo $\alpha_0, \alpha', \gamma$ y s_t .

Hay que notar que el parámetro α_0 es adimensional, la pendiente α' tiene unidades de GeV^{-2} , s_t actúa como un umbral efectivo y tiene unidades de GeV^2 . De este modo, $\phi(s, s_t)$ tiene la contribución de la posición de los polos explícitamente incorporada, así, cualquier diferencia con la forma funcional de la trayectoria real de Regge se debe a una contribución adicional a la dinámica de QCD.

Por otra parte, las incertidumbres sistemáticas de los modelos asociadas a la descripción del espacio fase lejos del umbral pueden estudiarse considerando diferentes modelos para $\phi(s, s_t)$. En particular, para este trabajo se usa:

$$i\phi_0(s, s_t) = 0, \quad (3.5a)$$

$$i\phi_I(s, s_t) = i\sqrt{s - s_t}, \quad (3.5b)$$

$$i\phi_{II}(s, s_t) = i\beta(s, s_t) + 2i\tau(s, s_t), \quad (3.5c)$$

donde

$$\begin{aligned} i\beta(s, s_t) &= \frac{s - s_t}{\pi} \int_{s_t}^{\infty} \frac{\tau(s', s_t)}{s' - s_t} \frac{ds'}{s' - s} \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{s - s_t}{\sqrt{s(s_t - s)}} \arctan \sqrt{\frac{s}{s_t - s}}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

es la continuación analítica del espacio fase de dos cuerpos $\tau(s, s_t) = \sqrt{1 - s_t/s}$ al plano complejo de s .

Se sigue de la ecuación (3.4), que γ tiene unidades de GeV^{-1} para el modelo I y es adimensional en el modelo II. El modelo 0 es la dependencia lineal habitual que ignora la existencia de la parte imaginaria de los polos resonantes. A pesar de que la esencia física es ignorada en tal modelo, se ajusta a $\Re[s_p]$ por completez y para proporcionar un comparativo a modelos previos.

Nótese que una vez que la anchura de un polo es tomada en cuenta es claro que una trayectoria de Regge no puede ser lineal. Trayectorias de Regge lineales ocurren únicamente para resonancias de anchura cero, es decir, resonancias calculadas como estados ligados en el modelo de quarks constituyentes, o la *torre* de estados en la amplitud de Veneziano [224].

Los modelos I y II incorporan la naturaleza resonante de los polos añadiendo una parte imaginaria a $\alpha(s)$ de un modo simple. El modelo I es el enfoque habitual añadiendo la parte imaginaria a $\alpha(s)$ que ha sido usado para tomar en cuenta efectos de unitaridad en amplitudes del tipo Veneziano [225–227].

El modelo II es el que tiene una mayor motivación física (ver las secciones 2.2 y 2.2.4) y está guiado por la relación que existen entre las ecuaciones (3.1) y (3.2), $\beta(s, s_t)$ es la continuación analítica del espacio fase en la aproximación dispersiva de Chew-Mandelstam [220], y $\phi(s, s_t)$ es la continuación analítica de $\beta(s, s_t)$ a la segunda hoja de Riemann, como lo impone la unitaridad [32, 42, 43].

Sin embargo, se realizan cálculos para los tres modelos en aras de ser exhaustivos y para

fines de comparación.

La hipótesis de interpretar la naturaleza de las resonancias en términos de las trayectorias de Regge es que un estado que se encuentra localizado en una trayectoria lineal de Regge en el gráfico de Chew-Frautschi *en conjunto* con un comportamiento del tipo raíz cuadrada en el gráfico $(\Im [s_p], J_p)$ sería mayormente un candidato a estado compacto de $3q$.

Por lo tanto, la mayor parte de la anchura, es decir, la contribución a $\phi(s, s_t)$, se deberá al espacio fase. Esta es en principio una aproximación cualitativa a la naturaleza de los estados que necesita una confirmación más detallada a través de un análisis cuantitativo. Este análisis cualitativo es llevado a cabo ajustando los polos a los modelos en la ecuación (3.5).

Si los estados son realmente estados de $3q$, los polos deben adherirse muy bien a los modelos propuestos de la trayectoria de Regge discutidos con anterioridad, es decir, el espacio fase domina la determinación de que tan profundo es un polo en el plano complejo y existe solo una pequeña brecha para dinámica adicional de de QCD.

Si el polo resonante no es del todo descrito por los modelos propuestos, esta es una indicación de que una dinámica adicional debida a QCD es importante, señalando que el estado tiene una contribución física más allá de la imagen de un estado compacto de $3q$.

En resumen, el modelo en el que se procede para el análisis cuantitativo es como se describe a continuación:

- I Se ajustan los polos para una trayectoria dada por los modelos.
- II En promedio la descripción anterior debe ser aproximadamente correcta debido a los comportamientos lineal y tipo raíz cuadrada.
- III Los modelos propuestos para la trayectoria de Regge solo consideran la contribución del espacio fase, de modo que son incompletos.
- IV Desviaciones de los modelos se asocian a la física ausente en ellos, es decir, dinámica adicional de QCD, que se interpretan como física más allá de estados compactos de $3q$.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS

When you are solving a problem, don't worry. Now, after you have solved the problem, then that's the time to worry.

R. P. Feynman

4.1 AJUSTES Y ANÁLISIS DE ERRORES

El modo en que se realiza los ajustes y determinación de los parámetros α_0 , α' , γ y s_t en la ecuación (3.4), para las trayectorias de Regge de los modelos definidos en la sección 3.3 se describe a continuación:

1. Se generan pseudo-datos para las posiciones de los polos M_p y Γ_p (ver la leyenda de la tabla C.3.1) dadas en las tablas C.3.1, C.3.2, C.3.3 y C.3.4, de acuerdo con distribuciones Gaussianas cuyas anchuras corresponden a las incertidumbres reportadas en las referencias [188, 203, 205–208, 210], lo que permite obtener un espectro remuestreado y acorde a los datos experimentales.
2. Se minimiza la distancia al cuadrado d^2 entre la trayectoria de Regge $\alpha(s)$ evaluada en la posición de un polo complejo s_p y el momento angular J ,

$$d^2 = \sum_{\text{polos}} \{ [\Re[J] - \Re[\alpha(s_p)]]^2 + [\Im[J] - \Im[\alpha(s_p)]]^2 \}. \quad (4.1)$$

con $\Re[J] = J_p$ y $\Im[J] = \Im[J_p] = 0$ para los polos de las resonancias remuestreados, a través de un método de mínimos cuadrados y usando MINUIT [228] para realizar los ajustes.

3. El proceso se repite 10^4 veces, proporcionando suficiente estadística para determinar el valor de los parámetros y sus incertidumbres. La estimación en los errores de los parámetros es usando la técnica de *bootstrap* (Monte Carlo) [229–231]. El valor esperado de cada parámetro es calculado como la media de las 10^4 muestras y la incertidumbre por la desviación estándar.

Es importante mencionar que el valor de s_t debe ser compatible con su interpretación como un umbral efectivo en la región de la resonancia. Esto es usado como un criterio para seleccionar los mínimos con un significado físico entre los distintos mínimos locales que puedan aparecer en los ajustes.

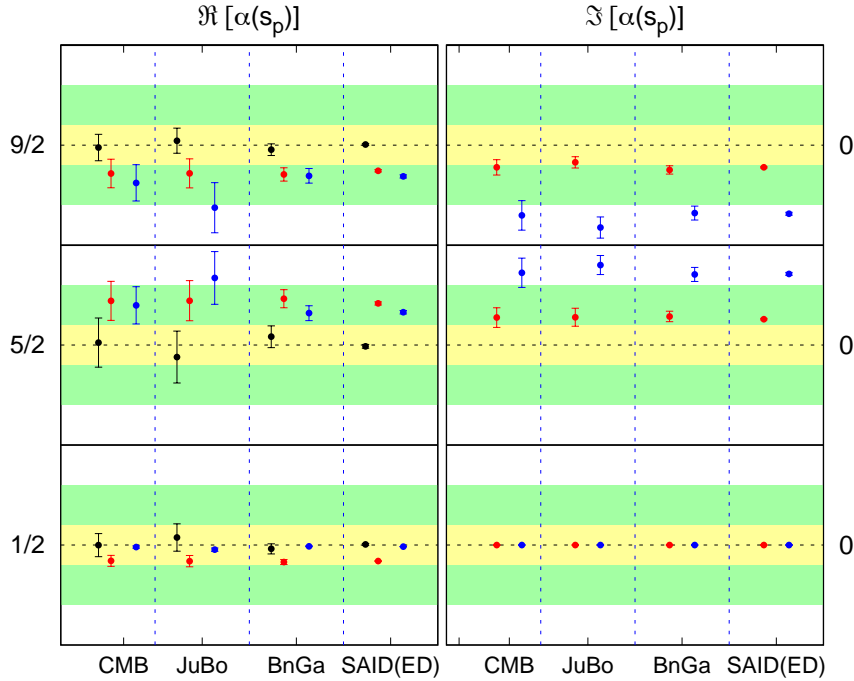


Figura F.4.1: Test de consistencia (ver sección 4.1 y 4.2) para los polos $I_{(\tau)}^{\eta} = \frac{1}{2}_{(+) }^+$ de las extracciones CMB, JüBo, BnGa, y SAID(ED). El gráfico de la izquierda muestra $\Re[\alpha(s_p)]$ (ver tabla C.3.1 y sección 4.2 para su definición) calculada en los polos (s_p) de las resonancias para los modelos 0 (negro), I (rojo) y II (azul). El resultado debe ser igual al correspondiente momento angular $\Re[J] = J_p$ (eje vertical) para una resonancia dada. El gráfico de la derecha muestra el mismo cálculo para $\Im[\alpha(s_p)]$, que debe ser igual a $\Im[J] = \Im[J_p] = 0$. En este último caso no se muestra al modelo 0 ya que $\Im[\alpha(s_p)] = 0$ por definición (ver 3.3). Las bandas amarillas (verdes) representan una desviación de hasta 0.1 (desde 0.1 a 0.3) del valor en la etiqueta en el eje vertical. La banda blanca representa una desviación de 0.3 a 0.5.

El método así descrito permite propagar las incertidumbres de los polos a los parámetros considerando todas las correlaciones [229–231]. Los errores sistemáticos asociados a la dependencia del modelo no son considerados en las extracciones de los polos, de ese modo, se toman las diferencias entre los modelos como una indicación de dichas incertidumbres. Los resultados de cada uno de los ajustes se presentan en las tablas C.4.1–C.4.13.

4.2 ANÁLISIS DE LAS TRAYECTORIAS $\frac{1}{2}^+$

En el análisis del espectro hadrónico se acostumbra elegir a la trayectoria padre $I^{\eta} = \frac{1}{2}^+$ aquella que contiene los estados mostrados en la tabla C.3.1 y aquellos con un mayor espín de estar disponibles. Esta trayectoria contiene dos trayectorias de Regge cercanamente degeneradas que corresponden a los estados con signatura par e impar.

La degeneración aparece cuando las *fuerzas de intercambio* son débiles y ambas trayectorias se sobreponen [42]. Este es el caso para las trayectorias Λ y Σ en [1], pero no es el caso para los estados $I^{\eta} = \frac{1}{2}^+$ como sugiere la figura F.3.3(a), donde la degeneración está rota y las

Cuadro C.4.1: Parámetro α_0 obtenido para las trayectorias $\frac{1}{2}^+$ y los modelos 0, I y II.

$I_{(\tau)}^{\eta}$	Polos	$\alpha_0^{(0)}$	$\alpha_0^{(I)}$	$\alpha_0^{(II)}$
$\frac{1}{2}^+$ $\frac{1}{2}(+)$	CMB	-0.4(1)	0.3(2)	0.3(3)
	JüBo	-0.3(1)	0.6(1)	0.9(3)
	BnGa	-0.46(5)	0.20(7)	0.1(2)
	SAID(SE)	-0.42(1)	0.25(3)	0.22(6)
	SAID(ED)	-0.41(1)	0.29(2)	0.30(3)
	KH80	-0.50(4)	-0.1(2)	-0.2(1)
	KA84	-0.48(1)	0.05(3)	-0.09(3)
$\frac{1}{2}^+$ $\frac{1}{2}(-)$	CMB	-0.6(1)	-0.8(3)	-3.5(7)
	JüBo	-0.71(3)	-0.79(4)	-1.53(6)
	BnGa	-0.44(7)	-0.53(7)	-1.5(5)
	SAID(SE)	-0.53(7)	-0.9(1)	-4.6(3)
	SAID(ED)	-0.86(4)	-1.25(6)	-5.54(3)

Cuadro C.4.2: Parámetro α' obtenido para las trayectorias $\frac{1}{2}^+$.

$I_{(\tau)}^{\eta}$	Polos	$\alpha'^{(0)}$	$\alpha'^{(I)}$	$\alpha'^{(II)}$
$\frac{1}{2}^+$ $\frac{1}{2}(+)$	CMB	1.06(7)	0.85(6)	0.9(1)
	JüBo	1.00(8)	0.72(6)	0.8(1)
	BnGa	1.07(3)	0.87(3)	1.04(6)
	SAID(SE)	1.04(1)	0.85(1)	0.99(1)
	SAID(ED)	1.036(4)	0.84(1)	0.97(1)
	KH80	1.10(2)	0.98(6)	1.14(5)
	KA84	1.08(1)	0.93(1)	1.10(1)
$\frac{1}{2}^+$ $\frac{1}{2}(-)$	CMB	0.94(7)	0.95(9)	1.6(2)
	JüBo	0.97(1)	0.98(1)	1.23(2)
	BnGa	0.85(3)	0.86(3)	1.15(6)
	SAID(SE)	0.89(3)	0.92(3)	2.0(1)
	SAID(ED)	1.03(2)	1.06(2)	2.27(2)

Cuadro C.4.3: Parámetros γ y s_t obtenidos para las trayectorias $\frac{1}{2}^+$.

$I_{(\tau)}^{\eta}$	Polos	$\gamma^{(I)}$	$\gamma^{(II)}$	$s_t^{(I)}$	$s_t^{(II)}$
$\frac{1}{2}^+$ $\frac{1}{2}(+)$	CMB	0.49(7)	0.66(7)	2.4(2)	1.04(9)
	JüBo	0.62(8)	0.67(5)	2.65(5)	1.3(1)
	BnGa	0.46(3)	0.65(4)	2.4(1)	0.96(3)
	SAID(SE)	0.46(2)	0.64(2)	2.44(3)	0.98(1)
	SAID(ED)	0.48(1)	0.65(1)	2.46(3)	1.00(1)
	KH80	0.39(3)	0.65(3)	1.8(4)	0.91(1)
	KA84	0.41(1)	0.64(1)	2.06(7)	0.92(1)
$\frac{1}{2}^+$ $\frac{1}{2}(-)$	CMB	0.5(2)	1.9(5)	2.3(4)	2.9(6)
	JüBo	0.39(1)	0.95(3)	2.17(2)	2.34(1)
	BnGa	0.38(3)	1.0(1)	2.17(3)	2.42(4)
	SAID(SE)	0.72(5)	3.0(2)	2.39(2)	2.79(2)
	SAID(ED)	0.82(3)	3.15(5)	2.40(1)	2.78(3)

Cuadro C.4.4: $\Delta\alpha_0 \equiv \alpha_0(\tau = +) - \alpha_0(\tau = -)$ para las trayectorias $\frac{1}{2}^+$ y cada uno de los tres modelos. Las incertidumbres se calculan añadiendo los errores en cuadratura.

Polos	Modelo 0	Modelo I	Modelo II
CMB	0.2(1)	1.1(4)	3.8(8)
JüBo	0.4(1)	1.4(1)	2.4(3)
BnGa	-0.02(9)	0.7(1)	1.6(5)
SAID(SE)	0.11(7)	1.2(1)	4.8(3)
SAID(ED)	0.45(4)	1.54(6)	5.84(7)

trayectorias con signatura $\tau = +$ (la trayectoria del nucleón con los estados $N(939)$, $N(1680)$ y $N(2220)$) y con signatura $\tau = -$ (con los estados $N(1520)$ y $N(2190)$) tienen diferentes parámetros. En particular, en la figura F.3.3(a) es aparente que α_0 debe ser diferente para cada una de las signaturas. Por lo anterior, en este trabajo tratamos ambas signaturas de manera separada. De igual manera, la figura sugiere que ambas trayectorias deben compartir aproximadamente el mismo parámetro de la pendiente α' [42] y un α_0 diferente que codifica la información del rompimiento de la degeneración, es decir de las fuerzas de intercambio [3, 32, 40–43, 48, 80].

La inspección de los polos con paridad natural en las figuras F.3.3(a) y F.3.4(a) destaca los acuerdos y desacuerdos entre las extracciones de polos. Todas las extracciones coinciden razonablemente en el valor de $\Re[s_p]$ para todos los estados, sin embargo, difieren o tienen grandes incertidumbres para las anchuras de $N(2190)$, y $N(2220)$. Nótese que las extracciones de BnGa y SAID(SE) de $N(2190)$ lo separan de la trayectoria recta esperada mostrada en F.3.3(a). Lo anterior es interesante ya que se espera que las trayectorias $I^\eta = \frac{1}{2}^+$ y $\frac{1}{2}^-$ tengan el mismo parámetro de pendiente α' [42] y la posición de $N(2190)$ está en desacuerdo con dicha espectación.

Considerando la descripción cualitativa de ambas figuras F.3.3(a) y F.3.4(a), solamente Jübo y CMB proveen una extracción que se ajusta con la posición esperada del polo dentro de las incertidumbres, a pesar de que los errores de CMB son grandes. Para $N(2220)$ todos los análisis coinciden para $\Re[s_p]$ pero difieren bastante con respecto a la anchura.¹

La comparación entre las trayectorias de Regge ajustadas por los modelos propuestos y las resonancias *en* la posición de los polos s_p $\alpha(s)$ vs. J_p es proporcionada por los *test de consistencia* como se describen en [1]. Específicamente, una vez que se tienen los parámetros de los ajustes puede usárseles para calcular el valor de la trayectoria de Regge en la posición de los polos, por lo tanto, para una resonancia cuya posición del polo es s_p y con espín J_p , debe recobrase $\Re[\alpha(s_p)] = \Re[J] = J_p$ y $\Im[\alpha(s_p)] = \Im[J] = \Im[J_p] = 0$. Lo que proporciona una comparación directa de $\alpha(s)$ (tanto para su parte real como imaginaria) a los polos permitiendo evaluar visualmente la calidad del ajuste, comparando J_p en los polos. La condición $\Im[\alpha(s)] = 0$ es particularmente rigurosa y contiene una de las restricciones físicas más relevantes. Más aún, el gráfico del test de consistencia constituye la figura adecuada para comparar los resultados de los ajustes para los polos.

¹Se recuerda al lector que a medida que la profundidad de un polo en el plano complejo es mayor, también son mayores las incertidumbres sistemáticas asociadas con los modelos y a la continuación analítica a las hojas de Riemann no físicas.

Los tests de consistencia para trayectorias con solo dos polos no proporcionan ninguna información debido a que se encuentran sobre-ajustadas (cuatro puntos experimentales, dos masas y dos anchuras, ajustados con cuatro parámetros). Por lo tanto, solo se calculan los test de consistencia para trayectorias con más de dos polos. Las incertidumbres de los polos y de los parámetros son propagadas en el cálculo de $\alpha(s)$.

Una comparación cualitativa puede obtenerse de los gráficos de las superficies complejas mencionadas en la sección 2.3.4 y que pueden por ejemplo mostrar el espacio de parámetros compatibles con la física de los modelos propuestos, aunque no aporten información cuantitativa.

En la figura F.4.2 se proporciona la comparación antes mencionada entre los polos de BnGa y JuBo (puntos negros) y la superficie $\Re[\alpha(s)]$ ajustada por el modelo II (superficie multicolor) para la trayectoria $\frac{1}{2}^+_{(+)}$ [N(939), N(1680), y N(2220)]. Las incertidumbres no se muestran en el gráfico de $\Re[\alpha(s)]$.

Regresando al análisis cuantitativo, en la figura F.4.1 se muestra el test de consistencia para $I^\eta = \frac{1}{2}^+_{(+)}$ para CMB, JüBo, BnGa y SAID(ED) que proporcionan una comparación más nítida. Los test de consistencia para SAID(SE), KH80 y KA84 son redundantes. Los test de consistencia para $I^\eta = \frac{1}{2}^+_{(-)}$ no se muestran ya que se encuentran sobre-ajustados y no proporcionan ninguna información.

El test de consistencia $I^\eta = \frac{1}{2}^+_{(+)}$ proporciona instinto mostrando como los polos se desvían de los modelos propuestos. Si se ignora el modelo 0 que no incluye la física resonante, el modelo no dispersivo (*I*) proporciona, en promedio, un test de consistencia mejor que el modelo dispersivo (*II*) para todas las extracciones de polos. Sin embargo, la descripción del modelo (*I*) para $N(1680)$ $J_p^P = 5/2^+$ y $N(2220)$ $9/2^+$ no describe apropiadamente al nucleón $N(939)$ $1/2^+$. Lo anterior es un indicador de que existe tensión entre los modelos y las parametrizaciones de la trayectoria.

El estado $N(2220)$ posee grandes incertidumbres para todas las extracciones de polos y su peso en la determinación de la trayectoria de Regge es menor que el nucleón y el estado $N(1680)$ cuyos errores son menores. Además, todas las extracciones de polos están de acuerdo bastante bien con respecto a la posición del polo $N(1680)$. Por lo tanto, esta es una fuerte indicación de que la aproximación $\gamma\phi(s, s_t) = \rho(s, s_t)$ no es válida para $N(1680)$, lo cual es una señal considerable de una contribución de física más allá de un estado de compacto de $3q$.

Hay que destacar que modelos de quarks constituyentes tienen problemas reproduciendo la masa de dicho estado y usualmente la sobrestiman. [62, 64, 65]

Las diferencias son más notorias si se comparan los ajustes de los conjuntos de polos para los tres modelos. Los parámetros de los ajustes se muestran en las tablas C.4.1-C.4.3. Como se mencionó anteriormente el parámetro s_t representa un umbral efectivo para el espacio fase, de modo que su valor debe ser consistente con su interpretación física, es decir, $s_t \sim (m_\pi + m_N)^2 \simeq 1.17 \text{ GeV}^2$. Esto es usado como criterio para seleccionar los mínimos con significado físico de entre los diferentes mínimos locales que aparecen en los ajustes, así como para evaluar la calidad de los diferentes parámetros de Regge.

Para la trayectoria $\frac{1}{2}^+_{(+)}$, todos los s_t en la tabla C.4.3 son razonables para el modelo II (entre 0.92 y 1.3 GeV^{-2}). Esto proporciona una mejor motivación física para el modelo II

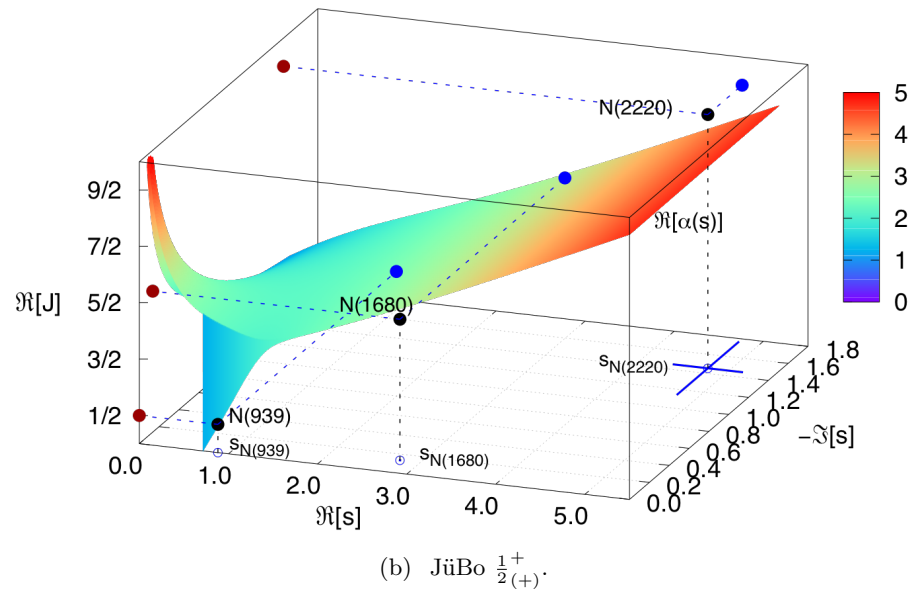
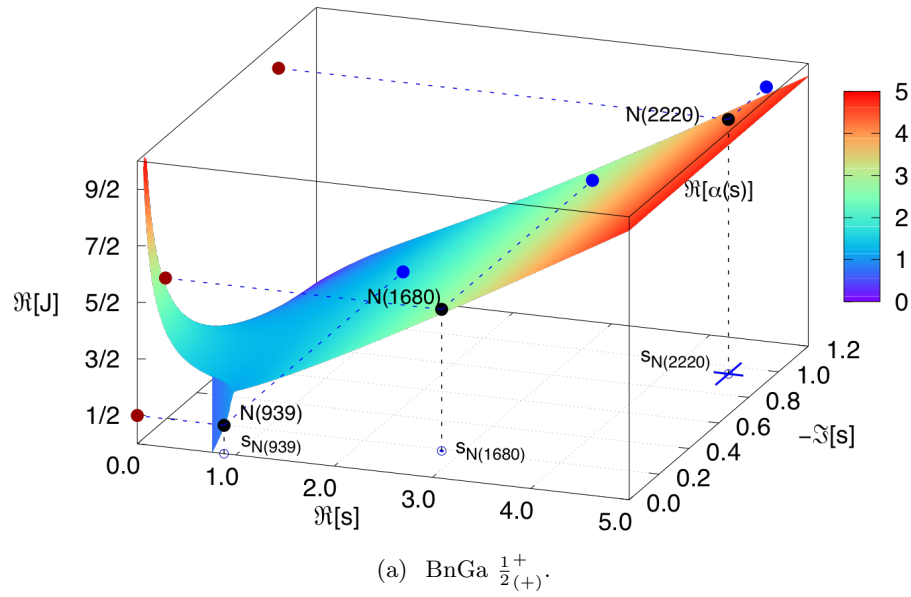


Figura F.4.2: $\Re[\alpha(s)]$ ajustado a $\frac{1}{2}^+_{(+)}$ para las extracciones de polos de (a) BnGa y (b) JüBo, usando el modelo II. Los círculos negros representan la posición de la resonancia en el espacio $(\Re[s], \Im[s], \Re[J])$, las circunferencias azules proporcionan la posición de los polos s_p (con incertidumbres) y los círculos azules y rojos proporcionan las proyecciones de las posiciones de las resonancias (puntos negros) en los planos $(\Im[s], \Re[J])$ y $(\Re[s], \Re[J])$, es decir, los gráficos de Chew-Frautschi y $(\Im[s], \Re[J])$ mostrados en las figuras F.3.3(a) y F.3.4(a).

comparado con el I. De este modo se consideran a los parámetros del modelo II como más confiables.

Para la trayectoria $\frac{1}{2}_{(-)}^+$ se disponen únicamente de dos estados para estimar los parámetros de la trayectoria, de ese modo, no es posible probar, junto con la información de la trayectoria $\frac{1}{2}_{(+)}^+$ que tan bien los estados se ajustan a la hipótesis $\gamma\phi(s, s_t) = \rho(s, s_t)$. Ambos modelos proporcionan valores muy grandes para s_t que van desde 2.17 hasta 2.9, por lo que la extracción del parámetro de la pendiente no es tan confiable como en el caso de la trayectoria $\frac{1}{2}_{(+)}^+$.

El parámetro de la pendiente α' une las resonancias de baja energía con la física dispersiva de alta energía, por ejemplo, en los procesos de aniquilación nucleón-antinucleón, ya que conduce al intercambio de la amplitud de un Reggeón bajo la aproximación del intercambio de un solo polo [42]. El valor de dicho Reggeón es obtenido de un ajuste lineal a los gráficos de Chew-Frautschi usando el modelo 0 o estimándolo de la dispersión protón-antiprotón como $\alpha' \simeq 0.98 \text{ GeV}^{-2}$ [74].

Para la trayectoria $\frac{1}{2}_{(+)}^+$ se encuentra que la extracción de α' se encuentra de los ajustes realizados en este trabajo, es bastante consistente entre las diferentes extracciones de polos. Restringiendo el análisis al modelo II se estima la pendiente como:

$$\alpha'_{\frac{1}{2}_{(+)}^+} = 0.99 \pm 0.12 \text{ GeV}^{-2}, \quad (4.2)$$

donde el mejor valor y la incertidumbre han sido obtenidas promediando entre los siete *bootstrap* para α' en la tabla C.4.2. Esos valores no son muy diferentes de aquellos obtenidos con el modelo 0, $\alpha' \simeq 1 \text{ GeV}^{-2}$ y despreciando que las anchuras no tienen un gran impacto en α' . De igual manera estos resultados están de acuerdo con lo que se espera de modelos quark algebraicos [62, 63] ($\alpha' = 1.07 \pm 0.02 \text{ GeV}^{-2}$) y modelos relativistas [65] ($\alpha' \simeq 1 \text{ GeV}^{-2}$), a pesar de que no incluyen la dinámica [232] presente en las trayectorias reales de Regge.

Las trayectorias $\frac{1}{2}^{\pm}$ deben tener la misma pendiente [42], de modo que una vez que se tienen los parámetros de la trayectoria $\frac{1}{2}_{(+)}^+$ estos pueden usarse como un punto de referencia y evaluar las parámetros extraídos de las otras trayectorias.

Respecto a la pendiente de la trayectoria $\frac{1}{2}_{(-)}^+$, todas las extracciones de polos coinciden para el modelo I y son consistentes con la pendiente de $\frac{1}{2}_{(+)}^+$. Sin embargo, se encuentran grandes diferencias para el modelo II. Las únicas extracciones de polos que proporcionan una descripción convincente para los tres modelos de la trayectoria son BnGa y Jübo, es decir, $\sqrt{s_t} \simeq 1.45\text{-}1.55 \text{ GeV}$, que es más cercano al valor esperado de $\sqrt{s_t} \sim m_\pi + m_p \simeq 1.08 \text{ GeV}$ respecto a los otros modelos y $\alpha' \sim 1 \text{ GeV}^{-2}$, cercano al que se ha extraído de la trayectoria $\frac{1}{2}_{(+)}^+$. A pesar de que JüBo tiene una pendiente mayor a la esperada para el modelo II.

El estado $N(1520)$ está muy bien determinado [13] y todas las extracciones de polos coinciden en sus parámetros, de modo que para tener un mejor conocimiento de esta trayectoria de Regge y una evaluación de la naturaleza de estos estados basada en la fenomenología de Regge requiere una mejor determinación de los estados $N(2190)$ y el estado $N 11/2^-$.

Como se esperaba, α_0 es diferente para las dos firmas (Tabla C.4.1). Considerando $\frac{1}{2}_{(+)}^+$ la trayectoria, los valores de α_0 son muy similares para los modelos I y II a través de

los diferentes conjuntos de polos y diferentes del modelo 0. Aquí es donde puede apreciarse el impacto de incluir la naturaleza resonante de los estados en la extracción de los parámetros. Sin embargo, los valores de α_0 para la trayectoria $\frac{1}{2}_{(-)}^+$ cambian considerablemente de una extracción de polos a otra. Esto se debe principalmente a las discrepancias entre los modelos para la extracción de la anchura de $N(2190)$.

En la tabla C.4.4 se proporciona la diferencia $\Delta\alpha_0 = \alpha_0(\tau = +) - \alpha_0(\tau = -)$, para cada uno de los modelos de las extracciones de polos, como un modo de cuantificar el rompimiento de la degeneración. El hecho de que cada una de las extracciones de polos proporcione un valor diferente para $\Delta\alpha_0$ muestra que la intensidad de las fuerzas de intercambio son diferentes entre ellos. Tales fuerzas están relacionadas con el corte izquierdo [42, 48] de las amplitudes y no son muy bien conocidas. Así, el rango de valores de $\Delta\alpha_0$ cuantifica la magnitud de las incertidumbres asociadas a esta dependencia de modelo particular.

Inspeccionando la tabla C.4.4, es notable que $\Delta\alpha_0$ para BnGa en el modelo 0 es negativo, lo cual se asocia a la diferencia en la extracción del parámetro de la pendiente α' (1.07(3) y 0.85(3) en la tabla C.4.2). Una vez que se han introducido las anchuras en el análisis, $\Delta\alpha_0$ se vuelve positivo (como se espera de la figura F.3.3(a)) y las pendientes se tornan compatibles dentro de los errores (0.87(3) y 0.86(3) para el modelo I y 1.04(6) y 1.15(6) para el modelo II). Esto muestra nuevamente como la importancia de incluir las anchuras en los análisis y, más aún como su inclusión conduce a una estimación más consistente tanto para α_0 y el parámetro de la pendiente α' .

La mejor estimación encontrada en el análisis para el parámetro α_0 , usando la misma técnica que para α' y en el modelo II es

$$\alpha_{0, \frac{1}{2}_{(+)}^+} = 0.21 \pm 0.38. \quad (4.3)$$

Los parámetros γ y s_t son

$$\gamma_{\frac{1}{2}_{(+)}^+} = 0.651 \pm 0.040; \quad s_{t, \frac{1}{2}_{(+)}^+} = 1.02 \pm 0.13 \text{ GeV}^2, \quad (4.4)$$

donde el umbral efectivo está cercano a su valor esperado de $(m_\pi + m_p)^2 \simeq 1.17 \text{ GeV}^2$.

4.3 ANÁLISIS DE LAS TRAYECTORIAS $\frac{1}{2}^-$

En la tabla C.3.2 se muestran los estados más bajos para cada espín compatibles con la trayectoria de Regge $\frac{1}{2}^-$ a excepción del estado $N(1535) J_p^P = 1/2^-$ que pertenece a una *trayectoria hija*.²

Del mismo modo que para la trayectoria $\frac{1}{2}^+$, se tienen dos trayectorias cercanamente degeneradas con signaturas opuestas. Sin embargo, el gráfico $(\Im[s_p], J_p)$ en la figura F.3.4(a) provee información conflictiva acerca del estado $N(1720) 3/2^+$. Las grandes anchuras obtenidas

²La teoría de Regge no restringe el número de las trayectorias, según los números cuánticos que caractericen a los estados en una determinada trayectoria de Regge, se denomina *trayectoria padre* (líder) a aquella con los estados de menor masa y *trayectoria hija(s)* a aquella(s) con estados de iguales números cuánticos pero de masas mayores [32, 42, 43, 224]

Cuadro C.4.5: Parámetro α_0 obtenido para las trayectorias $\frac{1}{2}^-$.

$I_{(\tau)}^\eta$	Polos	$\alpha_0^{(0)}$	$\alpha_0^{(I)}$	$\alpha_0^{(II)}$
$\frac{1}{2}^-_{(+)}$	CMB	-0.4(3)	-0.7(3)	-3(2)
	JüBo	-4(1)	-4(1)	-7(3)
	BnGa	-0.1(2)	-0.5(2)	-6(1)
	SAID(SE)	0.25(3)	0.16(4)	-0.5(2)
	SAID(ED)	0.01(3)	-0.21(3)	-2.3(1)
	KH80	-0.4(1)	-0.6(1)	-4(1)
	KA84	-0.19(3)	-0.41(5)	-3.0(5)
$\frac{1}{2}^-_{(-)}$	CMB	-6(1)	-6(2)	-9(2)
	JüBo	-1.7(1)	-1.8(1)	-2.1(1)
	BnGa	-3.6(5)	-3.0(6)	-3.0(6)
	SAID(SE)	-1.5(4)	-1.5(4)	-0.38(3)
	KH80	-2.2(1)	-2.9(2)	-10.2(4)
	KA84	-2.5(1)	-3.2(2)	-11.2(4)

Cuadro C.4.6: Parámetro α' obtenido para las trayectorias $\frac{1}{2}^-$.

$I_{(\tau)}^\eta$	Polos	$\alpha'^{(0)}$	$\alpha'^{(I)}$	$\alpha'^{(II)}$
$\frac{1}{2}^-_{(+)}$	CMB	1.1(1)	1.1(1)	1.8(5)
	JüBo	2.3(5)	2.3(5)	3(1)
	BnGa	0.97(7)	0.99(7)	2.1(2)
	SAID(SE)	0.81(1)	0.82(1)	1.03(4)
	SAID(ED)	0.91(1)	0.93(1)	1.46(2)
	KH80	1.04(3)	1.07(4)	1.8(2)
	KA84	0.98(1)	0.99(1)	1.6(1)
$\frac{1}{2}^-_{(-)}$	CMB	2.6(4)	2.6(4)	3.4(5)
	JüBo	1.13(3)	1.13(3)	1.28(4)
	BnGa	1.8(2)	1.6(2)	1.9(2)
	SAID(SE)	1.1(1)	1.1(1)	1.18(1)
	KH80	1.32(4)	1.37(4)	3.2(1)
	KA84	1.40(5)	1.50(5)	3.5(1)

Cuadro C.4.7: Parámetros γ y s_t obtenidos para las trayectorias $\frac{1}{2}^-$.

$I_{(\tau)}^\eta$	Polos	$\gamma^{(I)}$	$\gamma^{(II)}$	$s_t^{(I)}$	$s_t^{(II)}$
$\frac{1}{2}^-_{(+)}$	CMB	0.6(2)	3(1)	2.6(2)	3.0(3)
	JüBo	1.0(4)	2(1)	2.2(5)	2.5(4)
	BnGa	0.70(9)	3.2(4)	2.73(4)	3.4(1)
	SAID(SE)	0.34(3)	0.9(1)	2.44(7)	2.7(1)
	SAID(ED)	0.56(1)	1.84(5)	2.69(2)	3.07(2)
	KH80	0.67(8)	1.14(5)	2.72(4)	3.1(1)
	KA84	0.59(3)	1.8(2)	2.71(2)	3.0(1)
$\frac{1}{2}^-_{(-)}$	CMB	1.4(5)	3(1)	2.6(4)	2.7(3)
	JüBo	0.31(4)	0.8(1)	1.3(4)	2.3(1)
	BnGa	0.6(1)	1.3(1)	1.02(4)	1.1(1)
	SAID(SE)	0.3(1)	0.63(2)	0.8(1)	1.52(1)
	KH80	1.2(1)	5.0(2)	2.84(3)	3.31(3)
	KA84	1.3(1)	5.5(2)	2.92(2)	3.31(2)

por los modelos BnGa, SAID(SE) y SAID(ED), $\Gamma_p \sim 300 - 430$ MeV, podrían posicionar este estado en una trayectoria hija, la extracción de CMB es compatible con que $N(1720)$ ($\Gamma_p = 120$ MeV) pertenece a la trayectoria padre, mientras que JüBo, KH80, y KA84 ($\Gamma_p \sim 185$ MeV) se encuentran entre ambas posibilidades.

Si se miran otras extracciones de polos que no se han considerado para nuestro análisis se observa que SAID obtiene 334 MeV [208], similar a BnGa, SAID(SE) y SAID(ED). Otras extracciones de polos están cercanas a las extracciones de JüBo, KH80 y KA84, es decir, Höhler 187 MeV [214], KSU 175 MeV [215], y Zagreb 233 MeV [219]; mientras que otros obtienen anchuras menores compatibles con el resultado de CMB, como lo son P-ANL 94 MeV [216], Giessen 118 MeV [217], y ANL-O 70 MeV [218]. Notamos entonces que las discrepancias entre las extracciones de polos, en conjunto con los modelos de quark constituyentes que predicen distintos estados $3/2^+$ en el rango de energía de la $N(1720)$ [61, 62, 64, 65] hace posible que los diferentes análisis de amplitudes estén reportando no solo un estado resonante, sino un polo efectivo que da cuenta de una imagen más complicada. Más aún, la reciente extracción de ANL-O encuentra dos estados con masas 1703 y 1763 MeV y anchuras de 70 y 159 MeV respectivamente [218].

Por lo anterior es necesaria una investigación más detallada en este rango energético para establecer la masa y anchura de este (estos) estado(s) con mayor precisión antes de discutir su naturaleza. Por consiguiente, se concluye de este análisis que $N(1720)$ es un miembro de la trayectoria padre de Regge $\frac{1}{2}^-_{(-)}$.

Por el contrario de las resonancias $\frac{1}{2}^+$, los estados de $\frac{1}{2}^-$ que pertenecen a la trayectoria principal de Regge no se encuentran tan bien caracterizados lo que incide sobre cualquier conclusión al respecto de la estructura interna de los mismos que pueda derivarse de los ajustes. En este punto, la fenomenología de Regge puede usarse de manera más efectiva como una guía para mejorar los análisis y las extracciones de polos mas que para dilucidar la naturaleza de las resonancias.

Las figuras F.3.3 y F.3.4 hacen aparente cuan diferente son los polos de una extracción a

otra. Existe un consenso solo para el estado $N(1675) 5/2^-$, lo cual es un reto directo para los estados de cuatro estrellas $N(1720)$ y $N(2250)$ en el PDG [13].

Se han ajustado dos trayectorias $1/2_{(-)}^-$ (estados $N(1675)$ y $N(2250)$) y $1/2_{(-)}^-$ (estados $N(1720)$ y $N(1990)$); los parámetros de los análisis se muestran en las tablas C.4.5–C.4.7.

Para la trayectoria $1/2_{(+)}^-$, ninguna de las extracciones de polos proporciona un resultado compatible con la interpretación de s_t . Además la simetría de Mac-Dowell [42, 51] impone que las pendientes para $1/2_{(+)}^+$ y $1/2_{(-)}^-$ ($1/2_{(-)}^+$ y $1/2_{(+)}^-$) deben ser iguales; de ese modo debería obtenerse $\alpha' \sim 1 \text{ GeV}^{-2}$ para estar de acuerdo con lo que se mostró en la sección 4.2, sin embargo, tal condición es cumplida únicamente por SAID(ED) para los tres modelos pese a que $s_t = 2.7 \text{ GeV}^2$ es mayor al esperado. Respecto a la signatura negativa, solo BnGa y SAID(ED) están cercanos a $s_t \sim 1.2 \text{ GeV}^2$. Si además se considera la pendiente esperada, la única extracción de polos que proporciona parámetros razonables es SAID(ED). Finalmente, JüBo proporciona un valor más grande para $s_t = 2.3$ y una ligeramente mayor, pero razonable pendiente.

Como se mencionó, ambas trayectorias se encuentran sobreajustadas, por lo que no se muestra un test de consistencia.

En resumen, ninguna de las extracciones de polos proporciona una descripción convincente de la trayectoria $1/2^-$ pero existe una posibilidad razonable de que el estado $N(1720)$ pertenezca a la trayectoria padre. Este estado es el compañero de doblete de $N(1680)$ que se ha identificado en la sección 4.2 como un estado más allá de la descripción de un estado compacto de $3q$. Esto hace que la $N(1720)$ sea un candidato ideal para buscar dinámica adicional, y explica porque podría estar desplazado del patrón esperado y puede ser erróneamente identificado como un miembro de la trayectoria hija. Este estado muestra de igual manera como la inclusión de las anchuras y los patrones en el gráfico $(\Im[s_p], J_p)$ permite identificar mucho mejor si un estado pertenece a la trayectoria líder o a una secundaria.

Se destaca que una mejor determinación del estado $N(1720)$ permitirá una mejor caracterización de la naturaleza del mismo.

4.4 ANÁLISIS DE LAS TRAYECTORIAS $\frac{3}{2}^+$

Esta es la trayectoria padre menos conocida, con dos estados bien establecidos $-\Delta(1700)$ y $\Delta(1905)-$ y únicamente CMB y JüBo reportan resonancias adicionales. Por lo tanto, no pude obtenerse mucha información de esta trayectoria.

Comparando todas las extracciones para $\Delta(1700)$ y $\Delta(1905)$ se observa en las figuras F.3.3(b) y F.3.4(b) que $\Re[s_p]$ está razonablemente establecida para ambas resonancias, pero la anchura presenta grandes incertidumbres.

Si se considera el estado $7/2^-$ de CMB y JüBo así como $9/2^+$ en la figura F.3.3(b), es aparente un rompimiento de la degeneración.

Por lo anterior, en primer lugar se ajusta la trayectoria $\frac{3}{2}^+$ considerando que no existe un rompimiento de la degeneración para todas las extracciones de polos y de igual manera se ajustan $\frac{3}{2}_{(+)}^+$ para JüBo y $\frac{3}{2}_{(\pm)}^+$ para CMB. los resultados se encuentran en las tablas C.4.8–

Cuadro C.4.8: Parámetro α_0 obtenido para la trayectoria $\frac{3}{2}^+$.

$I_{(\tau)}^\eta$	Polos	$\alpha_0^{(0)}$	$\alpha_0^{(I)}$	$\alpha_0^{(II)}$
$\frac{3}{2}^+$	CMB	-1.2(4)	-1.3(4)	-1.6(6)
	JüBo	-1.3(2)	-1.0(2)	-1.0(3)
	BnGa	-5.7(6)	-5.7(6)	-6.0(8)
	SAID(SE)	-2.7(3)	-3.2(3)	-7(1)
	SAID(ED)	-3.4(3)	-3.5(3)	-4.5(6)
	KH80	-5.9(6)	-7.2(8)	-22.7(2)
	KA84	-2.9(2)	-3.0(2)	-3.5(1)
$\frac{3}{2}^+$ $\frac{3}{2}(+)$	CMB	-0.5(5)	-0.5(4)	-1.2(6)
$\frac{3}{2}^+$ $\frac{3}{2}(-)$	CMB	-2.1(4)	-2.2(5)	-4(1)
	Jübo	1.0(7)	-1.2(6)	-1.8(9)

Cuadro C.4.9: Parámetro α' obtenido para la trayectoria $\frac{3}{2}^+$.

$I_{(\tau)}^\eta$	Polos	$\alpha'^{(0)}$	$\alpha'^{(I)}$	$\alpha'^{(II)}$
$\frac{3}{2}^+$	CMB	1.0(1)	1.0(1)	1.2(2)
	JüBo	1.0(1)	1.01(4)	1.0(1)
	BnGa	2.5(2)	2.5(2)	2.7(3)
	SAID(SE)	1.6(1)	1.6(1)	1.38(8)
	SAID(ED)	1.8(1)	1.8(1)	2.2(2)
	KH80	2.7(2)	2.9(2)	7.6(1)
	KA84	1.7(1)	1.7(1)	2.00(2)
$\frac{3}{2}^+$ $\frac{3}{2}(+)$	CMB	0.9(1)	0.9(1)	1.1(2)
$\frac{3}{2}^+$ $\frac{3}{2}(-)$	CMB	1.3(1)	1.3(1)	1.9(4)
	Jübo	0.9(2)	0.9(2)	1.1(3)

Cuadro C.4.10: Parámetros γ y s_t obtenidos para las trayectorias $\frac{3}{2}^+$.

$I_{(\tau)}^\eta$	Polos	$\gamma^{(I)}$	$\gamma^{(II)}$	$s_t^{(I)}$	$s_t^{(II)}$
$\frac{3}{2}^+$	CMB	0.5(1)	1.2(3)	2.0(6)	2.3(4)
	JüBo	0.5(2)	1.1(3)	2.0(2)	2.5(4)
	BnGa	0.9(1)	1.8(3)	0.9(2)	1.4(5)
	SAID(SE)	1.0(1)	3.0(5)	2.5(1)	2.8(1)
	SAID(ED)	0.7(1)	1.6(3)	1.3(7)	2.1(4)
	KH80	2.4(3)	9.4(1)	2.7(1)	2.94(2)
	KA84	0.6(1)	1.4(1)	0.8(5)	1.8(2)
$\frac{3}{2}^+$ $\frac{3}{2}(+)$	CMB	0.4(1)	1.3(4)	1.7(5)	2.7(4)
$\frac{3}{2}^+$ $\frac{3}{2}(-)$	CMB	0.6(2)	2.0(1)	1.9(6)	2.7(3)
	Jübo	0.6(3)	1.3(6)	2.5(1)	2.5(3)

Cuadro C.4.11: Parámetro α_0 obtenido para las trayectorias $\frac{3}{2}^-$.

$I_{(\tau)}^\eta$	Pole set	$\alpha_0^{(0)}$	$\alpha_0^{(I)}$	$\alpha_0^{(II)}$
$\frac{3}{2}^+_{(+)}$	JüBo	-8(8)	-11(10)	-9(12)
	SAID(ED)	13(9)	-75(1)	34.3(8)
$\frac{3}{2}^-_{(-)}$	CMB	0.1(2)	-0.1(4)	-0.4(5)
	JüBo	-0.02(8)	-0.1(1)	-1.1(6)
	BnGa	0.10(1)	0.05(1)	-0.45(4)
	SAID(SE)	0.10(1)	0.06(1)	-0.39(3)
	SAID(ED)	-0.03(3)	-0.9(3)	-0.43(5)
	KH80	0.28(3)	0.25(3)	0.13(4)
	KA84	-0.07(1)	-2.1(3)	-0.51(3)

C.4.10.

Al asumir que no existe rompimiento de la degeneración en $3/2^+$, el parámetro α_0 no provee información física relevante, además, el parámetro s_t está altamente correlacionado con α_0 , por lo que no es posible usar su valor para evaluar la calidad de los parámetros extraídos. Así es claro que la degeneración es una mala aproximación para extraer los parámetros de Regge, por lo que no se realizan test de consistencia para esta trayectoria.

Nótese que CMB y JüBo proporcionan una pendiente razonable $\alpha' \simeq 1 \text{ GeV}^{-2}$. Una vez que se considera el rompimiento de la degeneración JüBo (CMB) proporciona un parámetro de la pendiente consistente para la trayectoria $\frac{3}{2}^-_{(-)}$ ($\frac{3}{2}^-_{(+)}$) con $\alpha' \simeq 1 \text{ GeV}^{-2}$. Sin embargo, CMB proporciona un parámetro de la pendiente bastante grande para $\frac{3}{2}^-_{(-)}$.

La imagen general hace a la extracción de Jübo para $\frac{3}{2}^+$ la más consistente pese a sus grandes barras de error para $\frac{3}{2}^-_{(-)}$ ($\frac{3}{2}^-_{(+)}$).

4.5 ANÁLISIS DE LAS TRAYECTORIAS $\frac{3}{2}^-$

En esta trayectoria existen dos resonancias clasificadas con cuatro estrellas en el PDG [13], $\Delta(1232)$, $\Delta(1950)$ y $\Delta(2420)$; todas ellas con signatura par. Las dos primeras son obtenidas para todas las extracciones de polos y están de acuerdo tanto en la masa como en la anchura. El estado de mayor masa es obtenido por los análisis CMB, SAID(ED), KH80, KA84. SAID(ED) y KA84 son compatibles para $\Re[s_p]$ (véase la figura F.3.3(b)), mientras que KH80 está en desacuerdo con dicho resultado. Si se observa $\Im[s_p]$ en la figura F.3.4(b), SAID(ED) y KH80 difieren mientras que la extracción de KH80 se sobrepone a ambas debido a su gran incertidumbre. La extracción de CMB para este polo está de acuerdo con los otros tres conjuntos de polos dentro de sus incertidumbres.

Se realizan ajustes para las signaturas par e impar y los resultados se presentan en las tablas C.4.11–C.4.13. Nótese que los parámetros para la trayectoria $\frac{3}{2}^-_{(+)}$ están completamente fuera de los esperados en el formalismo de Regge y la s_t que se obtiene no tiene sentido físico, es decir, $s_t \gg (m_p + m_\pi)^2$. Las razones se esclarecen si se observa la figura F.3.3(b), la posición del polo $9/2^-$ obtenido por JüBo y SAID(ED) tiene un valor muy pequeño de $\Re[s_p]$ dada la posición de $\Delta(1930)$. Además en el caso de SAID(ED), $\Im[s_p]$ es muy grande. De este

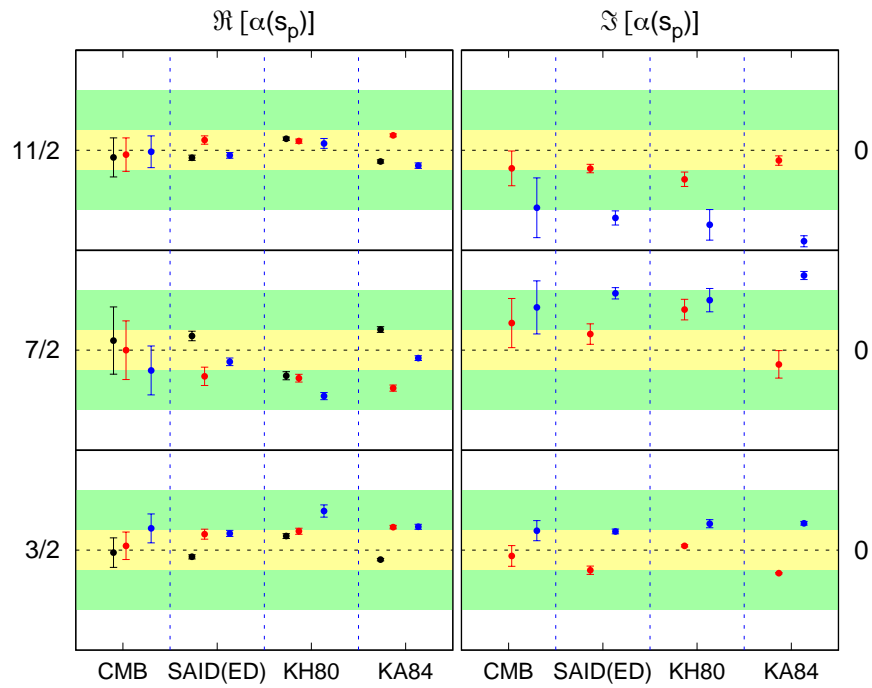


Figura F.4.3: Test de consistencia para los polos $\frac{3}{2}^-$ de las extracciones CMB, SAID(ED), KH80 y KA84. La notación es la misma que en la figura F.4.1. Ver sección 4.5 para la definición de la trayectoria.

Cuadro C.4.12: Parámetro α' obtenido para las trayectorias $\frac{3}{2}^-$.

$I_{(\tau)}^{\eta}$	Pole set	$\alpha'^{(0)}$	$\alpha'^{(I)}$	$\alpha'^{(II)}$
$\frac{3}{2}^+$	JüBo	4(3)	4(3)	5(4)
	SAID(ED)	-3(2)	8.0(2)	-4.1(3)
$\frac{3}{2}^-$	CMB	0.97(8)	1.0(1)	1.2(2)
	JüBo	1.03(5)	1.04(5)	1.4(2)
	BnGa	0.95(1)	0.95(1)	1.19(1)
	SAID(SE)	0.953(4)	0.958(4)	1.17(1)
	SAID(ED)	1.02(1)	1.18(5)	1.23(2)
	KH80	0.87(1)	0.87(1)	1.00(2)
	KA84	1.04(1)	1.36(5)	1.28(1)

Cuadro C.4.13: Parámetros γ y s_t obtenidos para la trayectoria $\frac{3}{2}^-$.

$I_{(\tau)}^n$	Pole set	$\gamma^{(I)}$	$\gamma^{(II)}$	$s_t^{(I)}$	$s_t^{(II)}$
$\frac{3}{2}_{(+)}^-$	JüBo	4(4)	4(5)	3(3)	4(5)
	SAID(ED)	28.(2)	-8(1)	6.6(1)	10(2)
$\frac{3}{2}_{(-)}^-$	CMB	0.5(1)	0.9(2)	1.6(3)	1.5(1)
	JüBo	0.35(7)	0.9(3)	1.34(9)	1.7(2)
	BnGa	0.29(1)	0.67(2)	1.34(1)	1.54(1)
	SAID(SE)	0.28(1)	0.63(2)	1.32(1)	1.52(1)
	SAID(ED)	0.70(9)	0.98(3)	2.8(3)	1.49(1)
	KH80	0.39(3)	0.80(6)	1.39(2)	1.40(1)
	KA84	1.2(1)	1.16(2)	3.5(2)	1.48(1)

modo, la posición de este polo no es confiable tanto para su masa como para su anchura, como sugiere la gran incertidumbre para la anchura en Jübo, por lo que no pueden derivarse mayores conclusiones.

Respecto a la trayectoria $\frac{3}{2}_{(-)}^-$ (la trayectoria de la Δ), el umbral efectivo está en conflicto con el esperado solo en el modelo I en los polos de SAID(ED) y KA84. Para el resto de los conjuntos de polos y para el modelo II se obtienen valores razonables. Las pendientes son cercanas a la unidad como se había anticipado y solo el parámetro α_0 muestra grandes variaciones entre los diferentes modelos.

Pueden compararse los parámetros de Regge obtenidos con aquellos usados en ajustes de alta energía de aniquilación protón-antiprotón donde la trayectoria de la Δ $\alpha_{\Delta}(s) = -0.37 + 0.98 s$ (s en GeV^2) es una de las contribuciones principales [74]. Nótese que la pendiente es cercana a la unidad y que el parámetro α_0 concuerda con el que se ha obtenido para $\frac{3}{2}_{(-)}^-$ usando del modelo II. De este modo, el modelo II proporciona un resultado compatible con la información de alta energía y la mejor determinación de los parámetros.

Consecuetemente y como se hizo en la sección 4.2, puede estimarse α' para los valores del modelo II en la tabla C.4.12 como:

$$\alpha'_{\frac{3}{2}_{(-)}^-} = 1.21 \pm 0.15 \text{ GeV}^2 \quad (4.5)$$

donde puede observarse que la pendiente es compatible dentro de las barras de errores con el que se ha obtenido para la trayectoria $\frac{1}{2}_{(+)}^+$ en la sección 4.2.

El resto de los parámetros para el modelo II son:

$$\begin{aligned} \alpha_{0, \frac{3}{2}_{(-)}^-} &= -0.45 \pm 0.44; \\ \gamma_{\frac{3}{2}_{(-)}^-} &= 0.86 \pm 0.22; \\ s_{t, \frac{3}{2}_{(-)}^-} &= 1.52 \pm 0.12 \text{ GeV}^2, \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde el umbral efectivo está ligeramente desplazado de su valor esperado $(m_{\pi} + m_p)^2 \simeq 1.17 \text{ GeV}^2$.

Las figuras F.3.3(b) y F.3.4(b) muestran claramente un comportamiento lineal y tipo raíz cuadrada respectivamente, para la trayectoria $\frac{3}{2}^-$ sugiriendo cualitativamente que tales estados presentan una estructura de $3q$ compactos.

La figura F.4.4 proporciona una comparación entre los polos de CMB y SAID(ED) (puntos negros) y la superficie ajustada $\Re[\alpha(s)]$ (superficie multicolor) para la trayectoria $\frac{3}{2}^-$ [$\Delta(1232)$, $\Delta(1950)$, y $\Delta(2420)$]. Las incertidumbres no se muestran en el gráfico para $\Re[\alpha(s)]$. Como en el caso de la trayectoria $\frac{1}{2}^+$ el test de consistencia en la figura F.4.3 proporciona una imagen más detallada.

Obsérvese como en el test de consistencia F.4.3 las desviaciones son claras y únicamente CMB proporciona un acuerdo aproximado entre la teoría y los datos, principalmente por sus grandes incertidumbres. Considerando que CMB se superpone con las extracciones de polos de otros análisis, su desviación de la trayectoria de los modelos en la ecuación (3.5) señala los efectos de una física más allá de un estado compacto $3q$, incluso para el estado bastante bien estudiado $\Delta(1232)$.

Es importante señalar que los polos de la trayectoria $\frac{3}{2}^-$ están lo suficientemente bien conocidos como para ser sensibles a efectos más allá de estados compactos de $3q$.

Estas conclusiones no serían posibles sin el test de consistencia, ya que el gráfico de la superficie $\Re[\alpha(s)]$ en F.4.4 simplemente no aporta información al respecto, aunque permita mostrar como es que se construyen los gráficos F.3.3 y F.3.4.

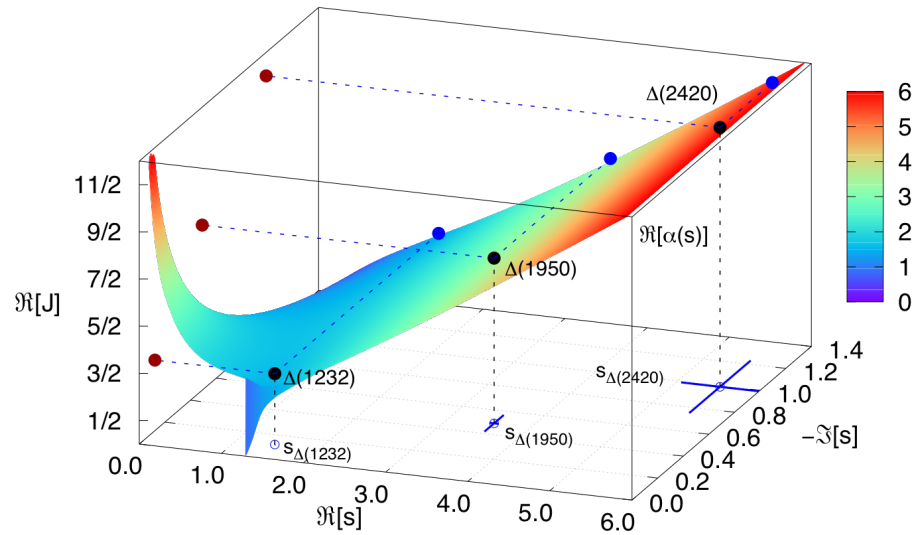
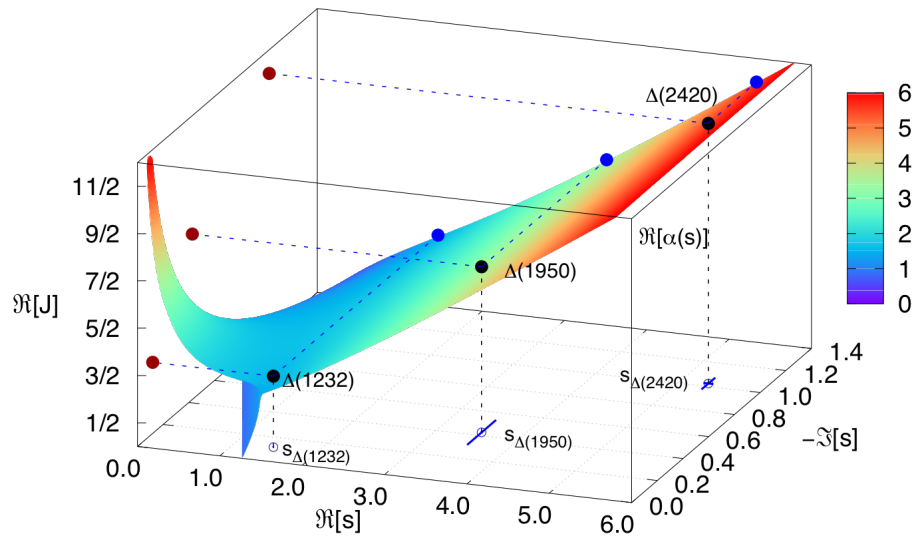
(a) CMB $\frac{3}{2}^-$.(b) SAID(ED) $\frac{3}{2}^-$.

Figura F.4.4: $\Re[\alpha(s)]$ ajustado a $\frac{3}{2}^-$ para las extracciones de polos de (a) CMB y (b) SAID(ED), usando el modelo II. Los círculos negros representan la posición de la resonancia en el espacio $(\Re[s], \Im[s], \Re[J])$, las circunferencias azules proporcionan la posición de los polos s_p (con incertidumbres) y los círculos azules y rojos proporcionan las proyecciones de las posiciones de las resonancias (puntos negros) en los planos $(\Im[s], \Re[J])$ y $(\Re[s], \Re[J])$, es decir, los gráficos de Chew-Frautschi y $(\Im[s], \Re[J])$ mostrados en las figuras F.3.3(b) y F.3.4(b).

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

Las palabras tienen más sentido del que nosotros les damos al usarlas; por consiguiente, un libro entero debe significar mucho más que lo que su autor cree.

L. Carroll

Se ha estudiado la estructura del espectro N^* y Δ^* desde la perspectiva de Regge y la teoría del momento angular complejo siguiendo el trabajo hecho para los bariones del sector extraño en [1]. Se han considerado siete extracciones de polos [188, 203, 205–208, 210] y se ha tomado en cuenta en los análisis que los polos son cantidades complejas, yendo más allá de los estudios tradicionales que se concentran únicamente en los gráficos de Chew-Frautschi $(\Re[s_p], J_p)$ y ajustes lineales para dichos gráficos. Para tal fin, se han estudiado los gráficos $(\Im[s_p], J_p)$ introducidos en [1].

Se han encontrado grandes discrepancias entre las diferentes extracciones de polos, en particular para las anchuras, pero un patrón similar al que se encuentra en el sector extraño, donde los gráficos de Chew-Frautschi siguen el bien conocido comportamiento lineal aproximado, mientras que los gráficos de $(\Im[s_p], J_p)$ muestran un comportamiento tipo raíz cuadrada.

La hipótesis de trabajo ha sido que el comportamiento tipo raíz cuadrada apreciado en la figura F.3.4 se debe a la contribución del espacio fase a la amplitud de dispersión [220], que es proporcional al momento $q \sim \sqrt{s - s_t}$.

El espacio fase es la principal contribución a la profundidad de los polos en el plano complejo, Mayores desviaciones pueden señalar una componente importante de física más allá de estados compactos de $3q$, es decir, dinámica adicional de QCD.

Bajo esta hipótesis un estado que presenta una trayectoria lineal en el gráfico de Chew-Frautschi y un comportamiento tipo raíz cuadrada en $(\Im[s_p], J_p)$ debe ser mayormente un estado compacto de $3q$.

Además del análisis cualitativo de los gráficos, se han realizado análisis cuantitativos modelando las trayectorias de Regge ajustando los polos y comprobando la consistencia de los resultados.

Los resultados soportan las conclusiones cualitativas y además dan una señal mensurable de física más allá de la imagen de un estado compacto de $3q$ para $N(1680)$, $N(1720)$ y algunos miembros de la trayectoria $\frac{3}{2}^-_{(-)}$. Estos últimos se conocen lo suficientemente bien, de modo que el análisis hecho es sensible a efectos más allá de estados compactos de $3q$.

Se ha encontrado que la degeneración de intercambio se encuentra rota en el sector sin extrañeza, contrario al sector extraño. Este rompimiento de la degeneración muestra la importancia de las fuerzas de intercambio en la determinación del espectro bajo de bariones sin extrañeza. Sin embargo, la fenomenología de Regge sirve como una guía para la

búsqueda de resonancias, particularmente como un medio para explorar si los ajustes de los datos experimentales están complementados incluyendo a las resonancias cercanas a las posiciones esperadas en los gráficos de Chew-Frautschi y $(\Im[s_p], J_p)$.

Los parámetros de las trayectorias de Regge $\frac{1}{2}_{(+)}^{+}$ (nucleón) y $\frac{3}{2}_{(-)}^{-}$ (Δ) pueden ser bien establecidos de los polos. Se estima $\alpha' = 0.99 \pm 0.12 \text{ GeV}^{-2}$ para la trayectoria del nucleón y $\alpha' = 1.21 \pm 0.15 \text{ GeV}^{-2}$ para la Δ . Se hace notar que ambas pendientes son compatibles dentro del rango de sus incertidumbres. Este rango es consistente con α' obtenida de los gráficos de Chew-Frautschi y con lo que es predicho por modelos de quark constituyentes, así como los ajustes de alta energía para la aniquilación protón-antiprotón.

APÉNDICE A

PRODUCTOS OBTENIDOS

Regge phenomenology of the N^* and Δ^* poles

J. A. Silva-Castro,^{1,*} C. Fernández-Ramírez,^{1,†} M. Albaladejo,^{2,3} I. V. Danilkin,⁴
 A. Jackura,^{5,6} V. Mathieu,² J. Nys,⁷ A. Pilloni,² A. P. Szczepaniak,^{2,5,6} and G. Fox⁸
 (Joint Physics Analysis Center)

¹*Instituto de Ciencias Nucleares, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México 04510, Mexico*

²*Theory Center, Thomas Jefferson National Accelerator Facility, Newport News, VA 23606, USA*

³*Departamento de Física, Universidad de Murcia, E-30071 Murcia, Spain*

⁴*Institut für Kernphysik & PRISMA Cluster of Excellence, Johannes Gutenberg Universität, D-55099 Mainz, Germany*

⁵*Center for Exploration of Energy and Matter, Indiana University, Bloomington, IN 47403, USA*

⁶*Physics Department, Indiana University, Bloomington, IN 47405, USA*

⁷*Department of Physics and Astronomy, Ghent University, Belgium*

⁸*School of Informatics and Computing, Indiana University, Bloomington, IN 47405, USA*

We use Regge phenomenology to study the structure of the poles of the N^* and Δ^* spectrum. We employ the available pole extractions from partial wave analysis of meson scattering and photoproduction data. We assess the importance of the imaginary part of the poles (widths) to obtain a consistent determination of the parameters of the Regge trajectory. We compare the several pole extractions and we show how Regge phenomenology can be used to gain insight in the internal structure of baryons. We find that the majority of the states in the parent Regge trajectories are compatible with a mostly compact three-quark state picture.

I. INTRODUCTION

The baryon spectrum is one of the main tools for investigation of the nonperturbative QCD phenomena. In particular, the low-lying non-strange sector containing the N^* and Δ^* resonances, which is accessible in pion-nucleon scattering and photoproduction experiments, is a primary source of insights into the quark model. The goal of baryon spectroscopy is to understand the origin and structure of resonances, *e.g.* to establish if a given resonance can be classified as compact three quark ($3q$) state, as predicted by the quark model or that it has other hadronic components. This is often done through partial wave analyses, with resonances appearing in individual partial waves that are independently parametrized to fit the data. Such analyses miss global constraints imposed by the Regge theory that connect partial waves through analyticity in the angular momentum plane [1–3]. According to Regge theory, resonances appear as poles in the angular momentum plane. The pole location, which changes as a function of the resonance mass and defines the so-called Regge trajectory, can be used to study the microscopic mechanisms responsible for resonance formation [4–7].

The most noticeable feature of the hadron spectrum is that its Regge trajectories are approximately linear as shown by Chew and Frautschi [8]. The patterns implied by the Chew-Frautschi plot can be used to guide partial wave analyses. For example, gaps in the trajectories hint to missing states. The approximate linearity of Regge trajectories is one the strongest phenomenological indications of confinement [9] and therefore states be-

longing to linear trajectories are expected to be closely connected to quark model predictions [10, 11]. Resonance decays, modify trajectories and introduce imaginary parts. These are constrained by unitarity, analyticity and are related to resonance widths [12]. Consequently, Regge trajectories are a mapping of the complex energy plane, the s -plane, onto the complex angular momentum, the J plane. The linear curves that are shown on the Chew-Frautschi plots are the projections of the actual Regge trajectories onto the $(\Re[s], \Re[J])$ plane, and as such do not contain information about the imaginary part of the pole, *i.e.* the resonance width. In the past, resonance poles were often not computed and, with a few exceptions [13, 14], fits to the Chew-Frautschi plots gave the only information about the Regge trajectory. Constituent quark model predictions for hadron masses adhere nicely to the approximately linear behavior both in the baryon [15–22] and the meson [22–25] sectors. Flux tube models of baryons also provide linear trajectories [26–28].

In this article, following the analysis of the strange baryon sector [6] we use Regge phenomenology to study the N^* and Δ^* spectra. Resonance pole masses and widths are nowadays more prominently featured in the Particle Data Group (PDG) tables [29]. This is because, in the last years, amplitude analyses have become more sophisticated enabling for extraction of resonance poles from the experimental data. We fit complex Regge trajectories to the spectra obtained by several partial wave analyses [30–36] of meson scattering and photoproduction data. The objectives of this article are: (i) to provide a comprehensive comparison of the different N^* and Δ^* pole extractions based on Regge phenomenology; (ii) to assess the impact of neglecting the imaginary part of the poles in the computation of the Regge trajectory, in particular in the extraction of the slope parameter that can be compared to the one used in fits to the high energy

* jorge.silva@correo.nucleares.unam.mx

† cesar.fernandez@nucleares.unam.mx

proton-antiproton data [37]; and (iii) to guide future N^* and Δ^* pole extractions [38–40]. The paper is organized as follows. In Sec. II we review the N^* and Δ^* spectra available in the literature that will be used in our analysis. In Sec. III we describe the phenomenological models used to fit the spectrum and in Sec. IV we explain the fitting procedure, present the results and discuss the statistical analysis. Conclusions are given in Sec. V.

II. N^* AND Δ^* POLE EXTRACTIONS

For a given spin and parity, resonance pole positions s_p are extracted from partial wave amplitudes analytically continued off the real energy axis to the unphysical Riemann sheet. On the real axis the partial wave amplitudes are fitted to the data on meson-nucleon scattering and meson photoproduction. This procedure carries uncertainties associated to the experimental data (systematic and statistical), the partial wave analysis model itself, and the analytic continuation to the complex energy plane. The differences among models in the pole extractions reflect on some of these uncertainties and model dependencies. In Tables I-IV we list the poles that, in principle, conform the leading (parent), *i.e.* the trajectory composed by the lowest mass states for each spin-parity assignment, N^* and Δ^* Regge trajectories, classified according to isospin I , naturality η ($\eta = +1$ if $P = (-1)^{J_p-1/2}$ and $\eta = -1$ if $P = -(-1)^{J_p-1/2}$ where P is the parity and J_p is the spin of the resonance), and signature τ ($\eta = \tau P$). The quantum numbers identify a given $I_{(\tau)}^{\eta}$ trajectory, *e.g.* the trajectory which contains $N(939)$ (the nucleon) corresponds to $I_{(\tau)}^{\eta} = \frac{1}{2}_{(+)}$. Phenomenologically, it is observed that the leading Regge trajectories that differ only by signature are (almost) degenerate, *i.e.* odd ($\tau = -$) and even ($\tau = +$) signatures have the same trajectory. For subleading trajectories there is often not enough information to disentangle both signatures. We use seven sets of resonance poles extracted from the following analyses:

- (i) **CMB**: Pole parameters from the Carnegie-Mellon-Berkeley πN partial wave analysis of [30, 31] as quoted by the PDG [29];
- (ii) **JüBo**: Pole parameters from [32] using the Jülich-Bonn 2017 coupled-channel model. The resonance spectrum is obtained from a combined analysis of η , π and $K\Lambda$ photoproduction off the proton together with the reactions $\pi N \rightarrow \pi N$, ηN , $K\Lambda$ and $K\Sigma$;
- (iii) **BnGa**: Pole parameters given in [33, 34] from the Bonn-Gatchina multichannel partial wave analysis of πN elastic scattering data and pion and photo-induced inelastic reactions;
- (iv) **SAID(SE)**: Pole parameters obtained in [35] from a fit to the single-energy SAID-GW WI08 par-

tial waves of πN elastic scattering [41] using the Laurent+Pietarinen (LP) approach;

- (v) **SAID(ED)**: Poles extracted in [35] from the energy-dependent SAID-GW WI08 partial waves of πN elastic scattering [41] also using the LP approach;
- (vi) **KH80**: Pole extracted in [36] from the Karlsruhe-Helsinki KH80 [42] partial wave analysis of πN elastic scattering employing the LP approach; and
- (vii) **KA84**: Pole extracted in [36] from the Karlsruhe KA84 [43, 44] partial wave analysis of πN elastic scattering employing the LP approach.

Other pole extractions are available in the literature. These include, the speed plot extraction from $\pi N \rightarrow \pi N$ amplitudes by Höhler [45]; the SAID pole parameters given in [35] obtained from the SAID-GW WI08 partial wave analysis of πN elastic scattering [41]; the Kent State University (KSU) pole extraction in [46] using a multichannel parametrization of πN scattering amplitudes; the Pittsburgh-Argonne National Lab (P-ANL) pole extraction in [47]; the Giessen group coupled-channel analysis of η production and photoproduction data on the proton [48]; the Argonne National Lab-Osaka (ANL-O) amplitude analysis of $\pi N \rightarrow \pi N$, ηN , $K\Lambda$, $K\Sigma$ and $\gamma N \rightarrow \pi N$, ηN , $K\Lambda$, $K\Sigma$ data [49]; and the Zagreb analysis in [50] based on the CMB coupled-channel approach; Höhler, SAID, KSU, P-ANL, Giessen and ANL-O do not provide uncertainties in their pole extractions and the Zagreb group analysis only studies the N^* spectrum, hence, we choose not to include them in our work. Also, we do not include superseded pole extractions within the same reaction models.

In Fig. 1 we show the Chew-Frautschi plots ($\Re[s_p], \Re[J] = J_p$) for the N^* and Δ^* resonances, and Fig. 2 displays the ($\Im[s_p], \Re[J] = J_p$) plots introduced in [6]. These figures provide a qualitative description of the spectrum. We note the spectrum exhibits the approximate linear behavior in ($\Re[s_p], J_p$) and the square root-like behavior in ($\Im[s_p], J_p$). This was also observed in the spectrum of the hyperons [6]. We defer the discussion of the plots to Sec. IV, where we present the quantitative analysis of the spectrum.

III. MODELS FOR THE PARENT REGGE TRAJECTORIES

In what follows the working hypothesis is that the square-root-like behavior displayed in Fig. 2 is the leading singularity of the trajectories as implied by unitarity [51]. This stems from the fact that the leading two-body decay channels, *i.e.* those that account for most of the cross section, give the imaginary part proportional to the relative momentum $q \sim \sqrt{s - s_t}$, where s is the two-body invariant mass squared and s_t is the threshold. Contribution from multi-body final states can effectively be absorbed

Table I. Summary of pole positions M_p, Γ_p in MeV for $I^\eta = \frac{1}{2}^+$ states where $M_p = \Re \sqrt{s_p}$ and $\Gamma_p = -2 \Im \sqrt{s_p}$. I stands for isospin, η for naturality, J_p for spin, and P for parity. Naturality and parity are related by $\eta = \tau P$ where τ is the signature. For baryons, $\eta = +1$, natural parity, if $P = (-1)^{J_p-1/2}$, and $\eta = -1$, unnatural parity, if $P = -(-1)^{J_p-1/2}$.

Name	$N(939)$ ****	$N(1520)$ ****	$N(1680)$ ****	$N(2190)$ ****	$N(2220)$ ****
Status					
$I_{(\tau)}^\eta J_p^P$	$\frac{1}{2}_{(+)}^+ 1/2^+$	$\frac{1}{2}_{(-)}^+ 3/2^-$	$\frac{1}{2}_{(+)}^+ 5/2^+$	$\frac{1}{2}_{(-)}^+ 7/2^-$	$\frac{1}{2}_{(+)}^+ 9/2^+$
CMB	939(1), 0	1510(5), 114(10)	1667(5), 110(10)	2100(50), 400(160)	2160(80), 480(100)
JüBo	939(1), 0	1509(5), 98(3)	1666(4), 81(2)	2084(7), 281(6)	2207(89), 659(140)
BnGa	939(1), 0	1507(3), 111(5)	1676(6), 113(4)	2150(25), 325(25)	2150(35), 440(40)
SAID(SE)	939(1), 0	1512(2), 113(6)	1678(4), 113(3)	2132(24), 550(25)	2173(7), 445(21)
SAID(ED)	939(1), 0	1515(2), 109(4)	1674(3), 114(7)	2060(11), 521(16)	2177(4), 464(9)
KH80	939(1), 0	1506(2), 115(3)	1674(3), 129(4)	—	2127(27), 380(29)
KA84	939(1), 0	1506(2), 116(4)	1672(3), 132(5)	—	2139(6), 390(7)

Table II. Summary of pole positions M_p, Γ_p in MeV for $I^\eta = \frac{1}{2}^-$ states. Notation as in Table I.

Name	$N(1720)$ ****	$N(1675)$ ****	$N(1990)$ **	$N(2250)$ ****
Status				
$I_{(\tau)}^\eta J_p^P$	$\frac{1}{2}_{(-)}^- 3/2^+$	$\frac{1}{2}_{(+)}^- 5/2^-$	$\frac{1}{2}_{(-)}^- 7/2^+$	$\frac{1}{2}_{(+)}^- 9/2^-$
CMB	1680(30), 120(40)	1660(10), 140(10)	1900(30), 260(60)	2150(50), 360(100)
JüBo	1689(4), 191(3)	1647(8), 135(9)	2152(12), 225(20)	1910(53), 243(73)
BnGa	1670(25), 430(100)	1655(4), 147(5)	1970(20), 250(20)	2195(45), 470(50)
SAID(SE)	1668(24), 303(58)	1661(1), 147(2.4)	2157(62), 261(104)	2283(10), 304(31)
SAID(ED)	1659(11), 303(19)	1657(3), 139(5)	—	2224(5), 417(10)
KH80	1677(5), 184(9)	1654(2), 125(4)	2079(13), 509(23)	2157(17), 412(51)
KA84	1685(5), 178(9)	1656(1), 123(3)	2065(14), 526(9)	2187(7), 396(25)

into model parameters. Near a Regge pole, partial wave amplitudes are proportional to

$$t_\ell(s) \propto \frac{1}{\ell - \alpha(s)}, \quad (1)$$

where $\alpha(s)$ is the Regge trajectory and ℓ is the total angular momentum of the partial wave. This can be compared to the Breit-Wigner amplitude close to the s_p pole under the approximation of elastic two-body scattering,¹

$$t_\ell(s) \propto \frac{g^2}{M^2 - s - i g^2 \rho(s, s_t)}, \quad (2)$$

where M is real, sometimes referred to as the Breit-Wigner mass. Resonance decay is determined by g^2 , which can be used to define coupling to open channels and $\rho(s, s_t)$ which is the phase space factor. With the determination of $\rho(s, s_t)$ that is analytical across the real axis for $s > s_t$ one finds poles of $t_\ell(s)$ located on the lower

half s -plane that are analytically connected to the physical region at $s + i\epsilon$. How deep a pole is in the complex plane depends on two factors, the dynamics of QCD and the phase space. The phase space dependence $\rho(s, s_t)$ is explicitly built in through unitarity and QCD dynamics are hidden in the parameters, M and g . At the pole s_p , Eqs. (1) and (2) have to be equal, hence

$$\ell - \alpha(s_p) = \frac{M^2}{g^2} - \frac{s_p}{g^2} - i\rho(s_p, s_t) = 0. \quad (3)$$

This equation is used to relate the imaginary part of the Regge trajectory to resonance decay parameters. Without loss of generality, we can parametrize the Regge trajectory as [6, 52, 53]

$$\alpha(s) = \alpha_0 + \alpha' s + i\gamma\phi(s, s_t), \quad (4)$$

where α_0 , α' and γ are real constants, and $\phi(s, s_t)$ contains information about resonance decay. The slope α' is often related to the tension of the confining string in flux tube models [26–28] and to the range of the strong interaction in Veneziano models [54]. The square-root-like behavior in Fig. 2 hints that $\rho(s, s_t)$ is the dominant component of $\phi(s, s_t)$. Hence, as a first approximation, we can model $\gamma\phi(s, s_t) = \rho(s, s_t)$, and fit the trajectory

¹ We note that both Eqs. (1) and (2) are written in the second Riemann sheet of the complex s plane, where the resonant poles in the amplitude appear.

Table III. Summary of pole positions M_p, Γ_p in MeV for $I^\eta = \frac{3}{2}^+$ states. Notation as in Table I.

Name	$\Delta(1700)$	$\Delta(1905)$	$\Delta(2200)$	$\Delta(2300)$
Status	****	****	***	**
$I_{(\tau)}^\eta J_p^P$	$\frac{3}{2}_{(-)}^+ 3/2^-$	$\frac{3}{2}_{(+)}^+ 5/2^+$	$\frac{3}{2}_{(-)}^+ 7/2^-$	$\frac{3}{2}_{(+)}^+ 9/2^+$
CMB	1675(25), 220(40)	1830(40), 280(60)	2100(50), 340(80)	2370(80), 420(160)
JüBo	1667(28), 305(45)	1733(47), 435(264)	2290(132), 388(204)	—
BnGa	1685(10), 300(15)	1800(6), 290(15)	—	—
SAID(SE)	1646(11), 203(17)	1831(7), 329(17)	—	—
SAID(ED)	1652(10), 248(28)	1814(5), 273(9)	—	—
KH80	1643(9), 217(18)	1752(5), 346(8)	—	—
KA84	1616(5), 280(9)	1790(5), 293(12)	—	—

Table IV. Summary of pole positions M_p, Γ_p in MeV for $I^\eta = \frac{3}{2}^-$ states. Notation as in Table I.

Name	$\Delta(1232)$	$\Delta(1930)$	$\Delta(1950)$	—	$\Delta(2420)$
Status	****	***	****	—	****
$I_{(\tau)}^\eta J_p^P$	$\frac{3}{2}_{(-)}^- 3/2^+$	$\frac{3}{2}_{(+)}^- 5/2^-$	$\frac{3}{2}_{(-)}^- 7/2^+$	$\frac{3}{2}_{(+)}^- 9/2^-$	$\frac{3}{2}_{(-)}^- 11/2^+$
CMB	1210(1), 100(2)	1890(50), 260(60)	1890(15), 260(40)	—	2360(100), 420(100)
JüBo	1215(4), 97(2)	1663(43), 263(76)	1850(37), 259(61)	1783(86), 244(194)	—
BnGa	1210.5(1.0), 99(2)	—	1888(4), 245(8)	—	—
SAID(SE)	1211(0), 100(2)	1845(31), 174(40)	1888(3), 234(6)	—	—
SAID(ED)	1211(2), 98(3)	1969(23), 248(36)	1878(4), 227(6)	1955(24), 911(24)	2320(13), 442(23)
KH80	1211(2), 98(3)	1848(28), 321(24)	1877(3), 223(5)	—	2454(15), 462(58)
KA84	1210(2), 100(2)	1844(36), 334(26)	1878(3), 246(7)	—	2301(7), 533(17)

in Eq. (4) at the poles $s = s_p$ to $\Re[\alpha(s_p)] = \Re[J] = J_p$ and $\Im[\alpha(s_p)] = \Im[J] = \Im[J_p] = 0$ obtaining $\alpha_0, \alpha', \gamma$ and s_t . The parameter α_0 is dimensionless, the slope α' has units of GeV^{-2} , s_t acts as an effective threshold that has units of GeV^2 . The systematic uncertainties of the model associated with the description of the phase space factor far away from the threshold can be studied by considering different models for $\phi(s, s_t)$. In particular we use,

$$i\phi_0(s, s_t) = 0, \quad (5a)$$

$$i\phi_I(s, s_t) = i\sqrt{s - s_t}, \quad (5b)$$

$$i\phi_{II}(s, s_t) = \beta(s, s_t) + 2i\tau(s, s_t), \quad (5c)$$

where

$$\begin{aligned} i\beta(s, s_t) &= \frac{s - s_t}{\pi} \int_{s_t}^{\infty} \frac{\tau(s', s_t)}{s' - s_t} \frac{ds'}{s' - s} \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{s - s_t}{\sqrt{s(s_t - s)}} \arctan \sqrt{\frac{s}{s_t - s}}, \end{aligned} \quad (6)$$

is the analytic continuation of the two-body phase space² $\tau(s, s_t) = \sqrt{1 - s_t/s}$ to the complex s plane. It follows that in Eq. (4), γ has units of GeV^{-1} for model I and is dimensionless in model II. Model 0 is the customary linear dependency that ignores the existence of the imaginary part of the resonance poles. Although essential physics is ignored in such model, we fit it to $\Re[s_p]$ for completeness and to provide a comparison to previous works. We note that once the width of the resonance pole is taken into account it is clear that a Regge trajectory cannot be linear. Linear Regge trajectories can only happen for zero-width resonances, *e.g.* resonances computed as bound states in a constituent quark model, or the tower of states in the Veneziano amplitude [55]. Models I and II do incorporate such physics by adding an imaginary part to $\alpha(s)$ in a simple way. Model I is a customary approach to add the imaginary part to $\alpha(s)$ which has been used to account for unitarity effects in Veneziano-type amplitudes [56–58]. Model II is the most physically motivated as it is guided by the relation between Eqs. (1) and (2), $\beta(s, s_t)$ is the analytic continuation of the phase space,

² We assume elastic two-body scattering, and hence, all poles are considered to be in the second Riemann sheet. That is also the reason why we fit an effective threshold s_t instead of using the actual physical thresholds.

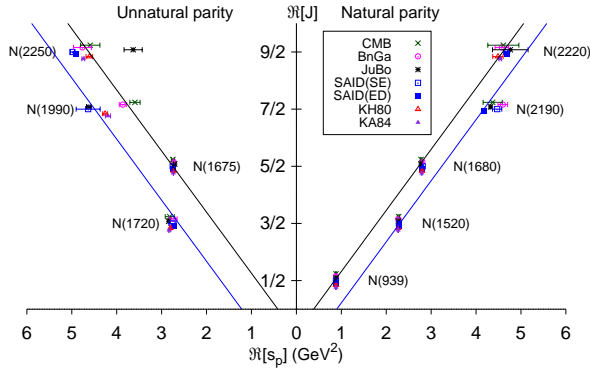
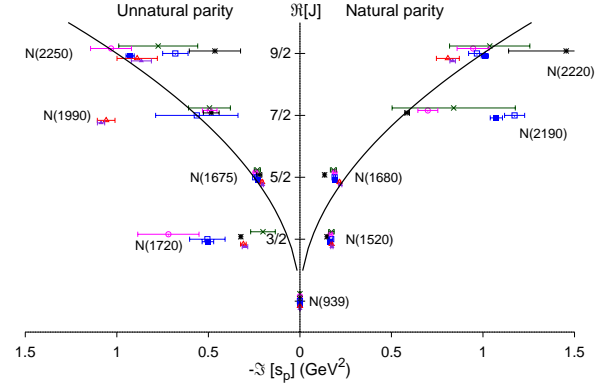
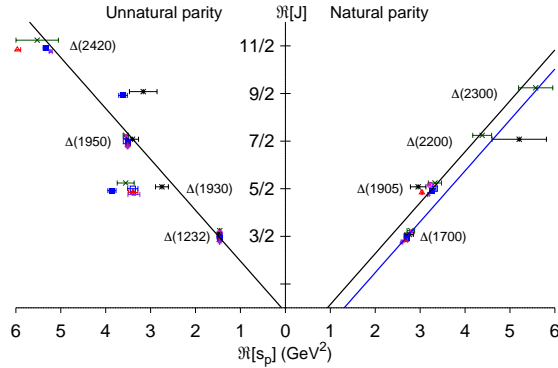
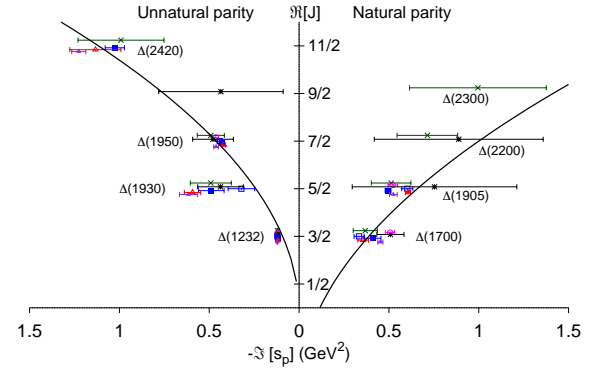
(a) N^* resonances.(a) N^* resonances.(b) Δ^* resonances.(b) Δ^* resonances.

Figure 1. Chew–Frautschi plots for the leading N^* and Δ^* Regge trajectories in Tables I–IV. Solid black (blue) lines guide the eye through the $\tau = +$ ($\tau = -$) trajectories (see Sec. IV B for details). All the lines share the same slope. In order to make the plots readable, the poles are slightly displaced from the correct $\Re[J] = J_p$ value.

Chew–Mandelstam dispersive approach [51], and $\phi(s, s_t)$ is the analytic continuation of $\beta(s, s_t)$ to the second Riemann sheet, as dictated by unitarity. However, we will compute the three models for the sake of completeness and comparison purposes.

Our hypothesis to interpret the nature of the resonances in terms of the Regge trajectory is that a state that is located on a linear trajectory in the Chew–Frautschi plot *and* a square-root-like behavior in $(\Im[s_p], J_p)$ plot would be mostly a compact $3q$ state. Hence, most of the width, *i.e.* the contribution to $\phi(s, s_t)$, would be due to the phase space. If it is so, the poles should adhere nicely to our Regge trajectory mod-

Figure 2. $(\Im[s_p], \Re[J] = J_p)$ plots introduced in [6] for the leading N^* and Δ^* Regge trajectories in Tables I–IV. Lines are displayed to guide the eye. The different pole sets are labeled as in Fig. 1. In order to make the plots readable, the poles are slightly displaced from the correct $\Re[J] = J_p$ value as in Fig. 1. SAID(ED) $\Delta 9/2^-$ pole in the unnatural parity trajectory has a very large $\Im[s_p]$ value and it is not shown in plot (b).

els. If the resonance pole is not well described by our models, it is an indication that additional QCD dynamics are important, signaling that the state has significant physics beyond the compact $3q$ picture.

IV. RESULTS

A. Fits and error analysis

To determine the parameters α_0 , α' , γ and s_t in Eq. (4) for a given pole extraction we use the least-squares method by minimizing the distance squared d^2 between the trajectory $\alpha(s)$ evaluated at the complex pole position s_p and the angular momenta J ,

$$d^2 = \sum_{poles} \{ [\Re[J] - \Re[\alpha(s_p)]]^2 + [\Im[J] - \Im[\alpha(s_p)]]^2 \}.$$

with $\Re[J] = J_p$ and $\Im[J] = \Im[J_p] = 0$ for the resonance poles. The value of s_t should be compatible with its interpretation as an effective threshold in the resonance region. This is used as the criterion to select the physically meaningful minimum if several local minima appear in the fits. We estimate the errors in the parameters through the bootstrap technique [59–61]. In doing so, we perform 10^4 fits to pseudodata generated according to the pole uncertainties. The expected value of each parameter is computed as the mean of the 10^4 samples and the uncertainty is given by the standard deviation. This method is described in detail in [6, 62] and allows to propagate the uncertainties from the poles to the parameters accounting for all the correlations. The systematic errors associated with model dependence in the amplitude analyses are not considered in the pole extractions, hence, we take the differences among models as an indication of such uncertainties. The fit results are provided and discussed in Sec. IV B. As an additional test of our results we perform consistency checks as described in [6]. Specifically, once we have the fit parameters we can use them to compute the value of the Regge trajectory at the pole positions, hence, for a resonance with pole position s_p and spin J_p we should recover $\Re[\alpha(s_p)] = \Re[J] = J_p$ and $\Im[\alpha(s_p)] = \Im[J] = \Im[J_p] = 0$. The latter condition is particularly stringent. Consistency checks for trajectories with only two poles do not provide any information because they are overfitted, (four experimental points, two masses and two widths, fitted with four parameters). Hence we only compute the consistency checks for trajectories with more than two poles. The uncertainties in the poles and the parameters are propagated to the calculation of $\alpha(s)$.

B. Regge trajectories

1. $\frac{1}{2}^+$ Regge trajectory

In Regge analyses of the hadron spectrum it is customary to consider as the $I^\eta = \frac{1}{2}^+$ parent trajectory the one containing the states in Table I and higher spins if available. This trajectory contains two nearly degenerate Regge trajectories corresponding to odd and even signatures. The degeneracy appears when the exchange forces

Table V. Parameter α_0 obtained for $\frac{1}{2}^+$ trajectories and models 0, I and II.

$I_{(\tau)}^\eta$	Pole set	$\alpha_0^{(0)}$	$\alpha_0^{(I)}$	$\alpha_0^{(II)}$
$\frac{1}{2}^+$ $\frac{1}{2}(+)$	CMB	-0.4(1)	0.3(2)	0.3(3)
	JüBo	-0.3(1)	0.6(1)	0.9(3)
	BnGa	-0.46(5)	0.20(7)	0.1(2)
	SAID(SE)	-0.42(1)	0.25(3)	0.22(6)
	SAID(ED)	-0.41(1)	0.29(2)	0.30(3)
	KH80	-0.50(4)	-0.1(2)	-0.2(1)
	KA84	-0.48(1)	0.05(3)	-0.09(3)
$\frac{1}{2}^+$ $\frac{1}{2}(-)$	CMB	-0.6(1)	-0.8(3)	-3.5(7)
	JüBo	-0.71(3)	-0.79(4)	-1.53(6)
	BnGa	-0.44(7)	-0.53(7)	-1.5(5)
	SAID(SE)	-0.53(7)	-0.9(1)	-4.6(3)
	SAID(ED)	-0.86(4)	-1.25(6)	-5.54(3)

Table VI. Parameter α' obtained for $\frac{1}{2}^+$ trajectories.

$I_{(\tau)}^\eta$	Pole set	$\alpha'^{(0)}$	$\alpha'^{(I)}$	$\alpha'^{(II)}$
$\frac{1}{2}^+$ $\frac{1}{2}(+)$	CMB	1.06(7)	0.85(6)	0.9(1)
	JüBo	1.00(8)	0.72(6)	0.8(1)
	BnGa	1.07(3)	0.87(3)	1.04(6)
	SAID(SE)	1.04(1)	0.85(1)	0.99(1)
	SAID(ED)	1.036(4)	0.84(1)	0.97(1)
	KH80	1.10(2)	0.98(6)	1.14(5)
	KA84	1.08(1)	0.93(1)	1.10(1)
$\frac{1}{2}^+$ $\frac{1}{2}(-)$	CMB	0.94(7)	0.95(9)	1.6(2)
	JüBo	0.97(1)	0.98(1)	1.23(2)
	BnGa	0.85(3)	0.86(3)	1.15(6)
	SAID(SE)	0.89(3)	0.92(3)	2.0(1)
	SAID(ED)	1.03(2)	1.06(2)	2.27(2)

Table VII. Parameters γ and s_t obtained for $\frac{1}{2}^+$ trajectories.

$I_{(\tau)}^\eta$	Pole set	$\gamma^{(I)}$	$\gamma^{(II)}$	$s_t^{(I)}$	$s_t^{(II)}$
$\frac{1}{2}^+$ $\frac{1}{2}(+)$	CMB	0.49(7)	0.66(7)	2.4(2)	1.04(9)
	JüBo	0.62(8)	0.67(5)	2.65(5)	1.3(1)
	BnGa	0.46(3)	0.65(4)	2.4(1)	0.96(3)
	SAID(SE)	0.46(2)	0.64(2)	2.44(3)	0.98(1)
	SAID(ED)	0.48(1)	0.65(1)	2.46(3)	1.00(1)
	KH80	0.39(3)	0.65(3)	1.8(4)	0.91(1)
	KA84	0.41(1)	0.64(1)	2.06(7)	0.92(1)
$\frac{1}{2}^+$ $\frac{1}{2}(-)$	CMB	0.5(2)	1.9(5)	2.3(4)	2.9(6)
	JüBo	0.39(1)	0.95(3)	2.17(2)	2.34(1)
	BnGa	0.38(3)	1.0(1)	2.17(3)	2.42(4)
	SAID(SE)	0.72(5)	3.0(2)	2.39(2)	2.79(2)
	SAID(ED)	0.82(3)	3.15(5)	2.40(1)	2.78(3)

are weak and, then, both trajectories overlap [1]. This was the case for both Λ and Σ trajectories in [6] but it is not the case for the $\frac{1}{2}^+$ states as it is apparent in Fig. 1(a), where the degeneracy is broken and signature $\tau = +$ (the nucleon trajectory with $N(939)$, $N(1680)$, and $N(2220)$ states) and $\tau = -$ ($N(1520)$ and $N(2190)$ states) trajectories have different parameters. In particular, from Fig. 1(a) it is apparent that α_0 has to be different for each signature. Hence, we treat both trajectories separately. We expect both fits to share approximately the same slope parameter α' [1] and a different α_0 that encodes information on the breaking of the degeneracy, *i.e.* on the exchange forces.

The inspection of the natural parity poles in Figs. 1(a) and 2(a) highlights the agreements and disagreements among the pole extractions. All the extractions reasonably agree for $\Re[s_p]$ for all the states poles but either disagree or have very large uncertainties for $N(2190)$ and $N(2220)$ widths. We note how BnGa and SAID(SE) extractions of $N(2190)$ separate from the expected straight line depicted in Fig. 1(a). This is interesting because $I_{(\tau)}^\eta = \frac{1}{2}_{(+)}$ and $\frac{1}{2}_{(-)}$ trajectories are expected to have the same slope α' [1], and the position of $N(2190)$ for both extractions is at odds with this expectation. Considering both Figs. 1(a) and 2(a), only JüBo and CMB provide a $N(2190)$ extraction that conforms to the expected position of the pole within uncertainties, although the CMB error is very large. For $N(2220)$ all the analyses coincide on $\Re[s_p]$ but differ wildly regarding the width.³

Figure 3 shows the consistency checks for $\frac{1}{2}_{(-)}$ for CMB, JüBo, BnGa and SAID(ED) which provide a sharper comparison. The consistency checks for SAID(SE), KH80 and KA84 are redundant and we do not show them. The $\frac{1}{2}_{(-)}$ consistency checks are not shown because they are overfitted and do not provide any information. The $\frac{1}{2}_{(+)}$ does provide insight, showing how the poles deviate from the proposed model. If we ignore model 0, which misses the resonant physics, the nondispersive model (I) provides, on average, a better consistency check than the dispersive one (II) for all the extractions. However, this better description of $N(1680) J_p^P = 5/2^+$ and $N(2220) 9/2^+$ states is achieved by spoiling the agreement with the nucleon $N(939) 1/2^+$. These are clear indications that there is tension between the states and our trajectory parametrization. The $N(2220)$ has large uncertainties for all the extractions and its weight on the determination of the Regge trajectory is smaller than the nucleon and the $N(1680)$ states, which have small errors. Besides, all the extractions agree fairly well regarding the pole position of the $N(1680)$.

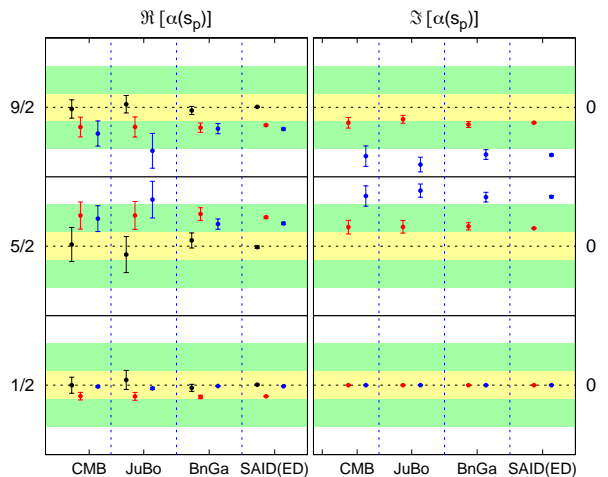


Figure 3. Consistency checks (see Sec. IV A) for $I_{(\tau)}^\eta = \frac{1}{2}_{(+)}$ poles from CMB, JüBo, BnGa, and SAID(ED) extractions. The left plot shows $\Re[\alpha(s_p)]$ (see Table I and Sec. IV B 1 for their definition), computed at the poles of the resonances (s_p) for models 0 (black), I (red) and II (blue). The result should be equal to the corresponding angular momentum $\Re[J] = J_p$ (vertical axis) for a given resonance. The right plots depict the same calculation for $\Im[\alpha(s_p)]$, which should be equal to $\Im[J] = \Im[J_p] = 0$. In this latter case we do not show model 0 because $\Im[\alpha(s_p)] = 0$ by definition. The yellow (green) bands represent up to 0.1 (from 0.1 to 0.3) deviation from the label in the vertical axis. The white band represents from 0.3 to 0.5 deviation.

Hence, there is a strong indication that the approximation of $\gamma\phi(s, s_t) = \rho(s, s_t)$ is not valid for the $N(1680)$, signaling a sizeable contribution from physics beyond the compact $3q$ picture. We note that constituent quark models have problems reproducing the mass of this state and they usually overestimate it [17, 19, 20].

These differences are more apparent if we compare the fits to the pole sets with the three models. We provide the fit parameters in Tables V–VII. First, the value of s_t represents an effective threshold for the phase space and its fitted value should be consistent with such interpretation, *i.e.* $s_t \sim (m_\pi + m_N)^2 \simeq 1.17 \text{ GeV}^2$. This is used as a criterion to select the physically meaningful minimum if several local minima appear in the fits, and to partly assess the quality of the Regge parameters. For the $\frac{1}{2}_{(+)}$ trajectory, all s_t in Table VII are reasonable for model II (between 0.92 and 1.3 GeV^2) while they are larger for model I (between 1.8 and 2.65 GeV^2). This asserts the better physical motivation of model II compared to model I. Therefore, we consider the parameters provided by model II as more reliable. For $\frac{1}{2}_{(-)}$ we only have two states to estimate the trajectory parameters, however it is enough to test, together with the information on $\frac{1}{2}_{(+)}$, how well the states conform to the $\gamma\phi(s, s_t) = \rho(s, s_t)$ hypothesis. Both models provide a large value for s_t ranging from 2.17 to 2.9, hence the slope extraction is

³ We remind the reader that the deeper in the complex plane the pole is, the larger the systematic uncertainties associated to the models and to the analytic continuation into the unphysical Riemann sheets.

Table VIII. $\Delta\alpha_0 \equiv \alpha_0(\tau = +) - \alpha_0(\tau = -)$ for the $\frac{1}{2}^+$ trajectories and the three models. Uncertainties obtained adding errors in quadrature.

Pole set	Model 0	Model I	Model II
CMB	0.2(1)	1.1(4)	3.8(8)
JüBo	0.4(1)	1.4(1)	2.4(3)
BnGa	-0.02(9)	0.7(1)	1.6(5)
SAID(SE)	0.11(7)	1.2(1)	4.8(3)
SAID(ED)	0.45(4)	1.54(6)	5.84(7)

not as reliable as for the $\frac{1}{2}^+$ trajectory.

The slope parameter α' links low-lying resonances and high-energy scattering physics, *e.g.* nucleon-antinucleon annihilation, as it drives the Reggeon exchange amplitude under the single pole exchange approximation [1]. Its value is usually taken from linear fits to the Chew-Frautschi plot using model 0 or estimated from proton-antiproton scattering as $\alpha' \simeq 0.98 \text{ GeV}^{-2}$ [37]. For $\frac{1}{2}^+$ we find that the α' extraction is very consistent across the pole extractions. Restricting ourselves to model II, we can estimate the slope as

$$\alpha'_{\frac{1}{2}^+} = 0.99 \pm 0.12 \text{ GeV}^{-2},$$

where the best value and the uncertainty have been computed averaging through a bootstrap the seven α' in Table VI. These values are not very different from the ones obtained with model 0, $\alpha'^{(0)} \simeq 1 \text{ GeV}^{-2}$, and neglecting the widths does not have a large impact in α' . These results are also in agreement with what is expected from algebraic [17, 18] ($\alpha' = 1.07 \pm 0.02 \text{ GeV}^{-2}$) and relativistic [20] ($\alpha' \simeq 1 \text{ GeV}^{-2}$) quark models, despite the fact that they miss dynamics [63] that are present in the actual Regge trajectories. The $\frac{1}{2}^{\pm}$ trajectories should have the same slope [1], hence once we have a robust determination from the $\frac{1}{2}^+$ we can use it to benchmark and assess the parameters extracted from other trajectories.

Regarding the $\frac{1}{2}^-$ slope, all pole extractions agree for model I and are consistent with $\frac{1}{2}^+$. However, we find large differences for model II. The only extractions that provide a consistent picture throughout the three models of the trajectory are BnGa and JüBo, *i.e.* $\sqrt{s_t} \simeq 1.45 - 1.55 \text{ GeV}$ is closer to the expected value of $\sqrt{s_t} \sim m_\pi + m_p \simeq 1.08 \text{ GeV}$ than the other pole sets and $\alpha' \sim 1 \text{ GeV}^{-2}$ close to the extracted value from $\frac{1}{2}^+$ trajectory. Although JüBo has model II slope slightly larger than expected. The $N(1520)$ state is very well established and all the pole extractions agree. Hence, a better knowledge of this trajectory and an assessment on the nature of its states based on Regge phenomenology requires a better determination of the $N(2190)$ state and the $N 11/2^-$ state.

As expected, α_0 is different for the two signatures (Table V). Considering $\frac{1}{2}^+$, the values of α_0 are very similar for models I and II across the different pole sets and different from model 0. Here we appreciate the impact in the trajectory parameter extraction due to the inclusion of the resonant nature of the states. However, the values of α_0 for $\frac{1}{2}^-$ change a lot from model to model and from pole extraction to pole extraction. This is mostly due to the discrepancies among models in the extraction of the width of $N(2190)$. In Table VIII we provide the difference $\Delta\alpha_0 = \alpha_0(\tau = +) - \alpha_0(\tau = -)$, for each model and pole extraction as a way to quantify the degeneracy breaking. The fact that each amplitude analysis provides a different value for $\Delta\alpha_0$ shows that the strength of the exchange forces are different among them. These forces are related to the left-hand cut of the amplitudes and are not well known. Hence, the range of values for $\Delta\alpha_0$ quantifies the magnitude of the uncertainties associated to this particular model dependency. Inspecting Table VIII it is noticeable that $\Delta\alpha_0$ for BnGa and model 0 is negative. This is related to the difference in the extraction of the slope parameter α' (1.07(3) and 0.85(3) in Table VI). However, if we introduce the widths in the analysis, $\Delta\alpha_0$ becomes positive (as expected from Fig. 1(a)) and the slopes become compatible within errors (0.87(3) and 0.86(3) for model I and 1.04(6) and 1.15(6) for model II). This again shows the importance of including the width in the analysis, and, moreover, how its inclusion leads to a better and more consistent estimation of both α_0 and the slope parameter α' . Our best estimation of α_0 , using the same technique as for α' and model II, is

$$\alpha_{0, \frac{1}{2}^+} = 0.21 \pm 0.38.$$

The two remaining parameters are

$$\gamma_{\frac{1}{2}^+} = 0.651 \pm 0.040; \quad s_{t, \frac{1}{2}^+} = 1.02 \pm 0.13 \text{ GeV}^2,$$

with the effective threshold close to the expected value of $(m_\pi + m_p)^2 \simeq 1.17 \text{ GeV}^2$.

2. $\frac{1}{2}^-$ Regge trajectory

In Table II we provide the lowest-lying states for each spin J_p compatible with the $\frac{1}{2}^-$ Regge trajectory except for the $N(1535)$ ($J_p^P = 1/2^-$) which belongs to a daughter trajectory. As for $\frac{1}{2}^+$ trajectory, we have two nearly degenerate trajectories with opposite signatures. However, the $(\Im[s_p], J_p)$ plot in Fig. 2(a) provides conflicting information about the $N(1720) 3/2^+$ state. The large widths obtained by BnGa, SAID(SE) and SAID(ED), $\Gamma_p \sim 300 - 430 \text{ MeV}$, would place this state in the daughter trajectory. However, CMB is compatible with $N(1720)$ ($\Gamma_p = 120 \text{ MeV}$) belonging to the parent trajectory, and JüBo, KH80, and KA84 ($\Gamma_p \sim 185 \text{ MeV}$) are in between both possibilities. If we look into the

Table IX. Parameter α_0 obtained for $\frac{1}{2}^-$ trajectories.

$I_{(\tau)}^\eta$	Pole set	$\alpha_0^{(0)}$	$\alpha_0^{(I)}$	$\alpha_0^{(II)}$
$\frac{1}{2}_{(+)}^-$	CMB	-0.4(3)	-0.7(3)	-3(2)
	JüBo	-4(1)	-4(1)	-7(3)
	BnGa	-0.1(2)	-0.5(2)	-6(1)
	SAID(SE)	0.25(3)	0.16(4)	-0.5(2)
	SAID(ED)	0.01(3)	-0.21(3)	-2.3(1)
	KH80	-0.4(1)	-0.6(1)	-4(1)
	KA84	-0.19(3)	-0.41(5)	-3.0(5)
$\frac{1}{2}_{(-)}^-$	CMB	-6(1)	-6(2)	-9(2)
	JüBo	-1.7(1)	-1.8(1)	-2.1(1)
	BnGa	-3.6(5)	-3.0(6)	-3.0(6)
	SAID(SE)	-1.5(4)	-1.5(4)	-0.38(3)
	KH80	-2.2(1)	-2.9(2)	-10.2(4)
	KA84	-2.5(1)	-3.2(2)	-11.2(4)

Table X. Parameter α' obtained for $\frac{1}{2}^-$ trajectories.

$I_{(\tau)}^\eta$	Pole set	$\alpha'^{(0)}$	$\alpha'^{(I)}$	$\alpha'^{(II)}$
$\frac{1}{2}_{(+)}^-$	CMB	1.1(1)	1.1(1)	1.8(5)
	JüBo	2.3(5)	2.3(5)	3(1)
	BnGa	0.97(7)	0.99(7)	2.1(2)
	SAID(SE)	0.81(1)	0.82(1)	1.03(4)
	SAID(ED)	0.91(1)	0.93(1)	1.46(2)
	KH80	1.04(3)	1.07(4)	1.8(2)
	KA84	0.98(1)	0.99(1)	1.6(1)
$\frac{1}{2}_{(-)}^-$	CMB	2.6(4)	2.6(4)	3.4(5)
	JüBo	1.13(3)	1.13(3)	1.28(4)
	BnGa	1.8(2)	1.6(2)	1.9(2)
	SAID(SE)	1.1(1)	1.1(1)	1.18(1)
	KH80	1.32(4)	1.37(4)	3.2(1)
	KA84	1.40(5)	1.50(5)	3.5(1)

other pole extractions that we do not consider in our analysis, we see that SAID obtains 334 MeV [35], similar to BnGa, SAID(SE) and SAID(ED). Other pole sets are closer to the JüBo, KH80 and KA84 extractions, *e.g.* Höhler 187 MeV [45], KSU 175 MeV [46], and Zagreb 233 MeV [50]; while others obtain smaller widths compatible with the CMB result *e.g.* P-ANL 94 MeV [47], Giessen 118 MeV [48], and ANL-O 70 MeV [49]. We note that the discrepancies among pole extractions, together with constituent quark models predicting several $3/2^+$ states in the $N(1720)$ energy range [16, 17, 19, 20] make possible that what the different amplitude analysis are reporting is not just one resonant state but an effective pole that accounts for a more complicated picture. Moreover, the recent ANL-O pole extraction finds two states with masses 1703 and 1763 MeV and widths 70 and 159 MeV respectively [49]. Further research on this

Table XI. Parameters γ and s_t obtained for $\frac{1}{2}^-$ trajectories.

$I_{(\tau)}^\eta$	Pole set	$\gamma^{(I)}$	$\gamma^{(II)}$	$s_t^{(I)}$	$s_t^{(II)}$
$\frac{1}{2}_{(+)}^-$	CMB	0.6(2)	3(1)	2.6(2)	3.0(3)
	JüBo	1.0(4)	2(1)	2.2(5)	2.5(4)
	BnGa	0.70(9)	3.2(4)	2.73(4)	3.4(1)
	SAID(SE)	0.34(3)	0.9(1)	2.44(7)	2.7(1)
	SAID(ED)	0.56(1)	1.84(5)	2.69(2)	3.07(2)
	KH80	0.67(8)	1.14(5)	2.72(4)	3.1(1)
	KA84	0.59(3)	1.8(2)	2.71(2)	3.0(1)
$\frac{1}{2}_{(-)}^-$	CMB	1.4(5)	3(1)	2.6(4)	2.7(3)
	JüBo	0.31(4)	0.8(1)	1.3(4)	2.3(1)
	BnGa	0.6(1)	1.3(1)	1.02(4)	1.1(1)
	SAID(SE)	0.3(1)	0.63(2)	0.8(1)	1.52(1)
	KH80	1.2(1)	5.0(2)	2.84(3)	3.31(3)
	KA84	1.3(1)	5.5(2)	2.92(2)	3.31(2)

energy range is necessary to establish mass and width of the state(s) with precision before discussing its (their) nature. In what follows, we include $N(1720)$ in our calculations as a member of the parent $\frac{1}{2}_{(-)}^-$ trajectory.

Contrary to $\frac{1}{2}^+$ resonances, $\frac{1}{2}^-$ states that belong to the leading Regge trajectory are not that well known, what predates any conclusion on the internal structure of the states that we can derive from fits. At this stage, Regge phenomenology can be used more effectively as a guide to improve amplitude analyses and pole extraction than to elucidate the nature of the resonances.

Figures 1 and 2 make apparent how different are the poles from one extraction to another. There is consensus only on the $N(1675) 5/2^-$ state. This is a direct challenge to the four-star status of $N(1720)$ and $N(2250)$ resonances in the PDG [29]. We fit two trajectories $\frac{1}{2}_{(+)}^-$ ($N(1675)$ and $N(2250)$ states) and $\frac{1}{2}_{(-)}^-$ ($N(1720)$ and $N(1990)$ states). The obtained fit parameters are provided in Tables IX–XI. For the $\frac{1}{2}_{(+)}^-$, none of the pole extractions provides a good result for s_t . Besides, MacDowell symmetry [1, 64] imposes that the slopes for $\frac{1}{2}_{(+)}^+$ and $\frac{1}{2}_{(-)}^-$ ($\frac{1}{2}_{(-)}^+$ and $\frac{1}{2}_{(+)}^-$) should be equal. Hence, we should obtain $\alpha' \sim 1 \text{ GeV}^{-2}$ to agree with the results in Sec. IV B 1, a condition only SAID(SE) fulfills for the three models, despite the fact that its $s_t = 2.7 \text{ GeV}^2$ is larger than expected. Regarding negative signature, only BnGa and SAID(ED) are close to $s_t \sim 1.2 \text{ GeV}^2$. If we also consider the expected slope, the only pole extraction that provides reasonable parameters is SAID(ED). Finally, JüBo provides a higher $s_t = 2.3$ and a slightly large but reasonable slope. We do not provide plots with the consistency check as both trajectories are overfitted.

In summary, none of the pole sets provides a convincing picture of the $\frac{1}{2}^-$ trajectory and there is a reasonable pos-

Table XII. Parameter α_0 obtained for $\frac{3}{2}^+$ trajectory.

$I_{(\tau)}^n$	Pole set	$\alpha_0^{(0)}$	$\alpha_0^{(I)}$	$\alpha_0^{(II)}$
$\frac{3}{2}^+$	CMB	-1.2(4)	-1.3(4)	-1.6(6)
	JüBo	-1.3(2)	-1.0(2)	-1.0(3)
	BnGa	-5.7(6)	-5.7(6)	-6.0(8)
	SAID(SE)	-2.7(3)	-3.2(3)	-7(1)
	SAID(ED)	-3.4(3)	-3.5(3)	-4.5(6)
	KH80	-5.9(6)	-7.2(8)	-22.7(2)
	KA84	-2.9(2)	-3.0(2)	-3.5(1)
$\frac{3}{2}^+$ ₍₊₎	CMB	-0.5(5)	-0.5(4)	-1.2(6)
$\frac{3}{2}^+$ ₍₋₎	CMB	-2.1(4)	-2.2(5)	-4(1)
	Jübo	1.0(7)	-1.2(6)	-1.8(9)

Table XIII. Parameter α' obtained for $\frac{3}{2}^+$ trajectory.

$I_{(\tau)}^n$	Pole set	$\alpha'^{(0)}$	$\alpha'^{(I)}$	$\alpha'^{(II)}$
$\frac{3}{2}^+$	CMB	1.0(1)	1.0(1)	1.2(2)
	JüBo	1.0(1)	1.01(4)	1.0(1)
	BnGa	2.5(2)	2.5(2)	2.7(3)
	SAID(SE)	1.6(1)	1.6(1)	1.38(8)
	SAID(ED)	1.8(1)	1.8(1)	2.2(2)
	KH80	2.7(2)	2.9(2)	7.6(1)
	KA84	1.7(1)	1.7(1)	2.00(2)
$\frac{3}{2}^+$ ₍₊₎	CMB	0.9(1)	0.9(1)	1.1(2)
$\frac{3}{2}^+$ ₍₋₎	CMB	1.3(1)	1.3(1)	1.9(4)
	Jübo	0.9(2)	0.9(2)	1.1(3)

sibility that $N(1720)$ actually belongs to the parent trajectory. This state is a doublet partner of the $N(1680)$, which we identified in Sec. IV B 1 as a state with physics beyond the compact $3q$ picture. This makes $N(1720)$ a prime candidate to look for additional dynamics, and explains why it might be displaced from the expected pattern and can be missidentified as a member of a daughter trajectory. This state also shows how the inclusion of the width and the patterns in the $(\Im[s_p], J_p)$ allows to better identify if a state is in the leading trajectory or in a sub-leading one. Again, a better determination of this state would allow further investigation on its nature.

3. $\frac{3}{2}^+$ Regge trajectory

This is the least known parent trajectory, with two well established states $-\Delta(1700)$ and $\Delta(1905)$ — and only CMB and JüBo reporting additional resonances. Hence, not much information can be obtained from this trajectory. Comparing all the extractions for $\Delta(1700)$ and $\Delta(1905)$ we see in Figs. 1(b) and 2(b) that $\Re[s_p]$ is reasonably established for both but the width presents large uncertain-

Table XIV. Parameters γ and s_t obtained for $\frac{3}{2}^+$ trajectory.

$I_{(\tau)}^n$	Pole set	$\gamma^{(I)}$	$\gamma^{(II)}$	$s_t^{(I)}$	$s_t^{(II)}$
$\frac{3}{2}^+$	CMB	0.5(1)	1.2(3)	2.0(6)	2.3(4)
	JüBo	0.5(2)	1.1(3)	2.0(2)	2.5(4)
	BnGa	0.9(1)	1.8(3)	0.9(2)	1.4(5)
	SAID(SE)	1.0(1)	3.0(5)	2.5(1)	2.8(1)
	SAID(ED)	0.7(1)	1.6(3)	1.3(7)	2.1(4)
	KH80	2.4(3)	9.4(1)	2.7(1)	2.94(2)
	KA84	0.6(1)	1.4(1)	0.8(5)	1.8(2)
$\frac{3}{2}^+$ ₍₊₎	CMB	0.4(1)	1.3(4)	1.7(5)	2.7(4)
$\frac{3}{2}^+$ ₍₋₎	CMB	0.6(2)	2.0(1)	1.9(6)	2.7(3)
	Jübo	0.6(3)	1.3(6)	2.5(1)	2.5(3)

ties. If we consider the CMB and JüBo $7/2^-$ state and CMB $9/2^+$ in Fig. 1(b) a degeneracy breaking is hinted. Hence, we first fit the $\frac{3}{2}^+$ trajectory without considering the degeneracy breaking for all the pole extractions and we also fit $\frac{3}{2}^+$ ₍₊₎ for JüBo and $\frac{3}{2}^+$ _(±) for CMB. We provide the parameters in Tables XII–XIV. Because we assume degeneracy in $\frac{3}{2}^+$ fits, the α_0 parameter provides no information. Also, the value of s_t is highly correlated with α_0 , so it is not possible to use its value as a way to assess the quality of the extracted parameters. It is clear that degeneracy is a bad approximation to obtain the Regge parameters. Hence, we do not provide consistency checks for this trajectory as they do not provide insight. We note that CMB and JüBo provide a reasonable slope $\alpha' \simeq 1 \text{ GeV}^{-2}$. JüBo (CMB) provides a consistent slope parameter for $\frac{3}{2}^-$ ($\frac{3}{2}^+$) once degeneracy breaking is considered with $\alpha' \simeq 1 \text{ GeV}^{-2}$. However, CMB provides a very large slope for $\frac{3}{2}^-$. The overall picture, makes the JüBo extraction of $\frac{3}{2}^+$ the most consistent one, although with very large error bars.

4. $\frac{3}{2}^-$ Regge trajectory

In this trajectory there are three four-star resonances, namely $\Delta(1232)$, $\Delta(1950)$ and $\Delta(2420)$, all of them with even signature. The first two are obtained by all the pole extractions and agree on both mass and width. The higher mass state is found by CMB, SAID(ED), KH80, and KA84 analyses. SAID(ED) and KA84 agree on $\Re[s_p]$, see Fig. 1(b), while KH80 is at odds with their result. If we look into $\Im[s_p]$, Fig. 2(b), SAID(ED) and KH80 disagree, while KA84 extraction overlaps both of them due to its large uncertainty. The CMB extraction of this pole has large uncertainties too and agrees with the other three pole sets within errors.

We perform fits to the odd and even signatures. The fit parameters are reported in Tables XV–XVII. The pa-

Table XV. Parameter α_0 obtained for $\frac{3}{2}^-$ trajectories.

$I_{(\tau)}^{\eta}$	Pole set	$\alpha_0^{(0)}$	$\alpha_0^{(I)}$	$\alpha_0^{(II)}$
$\frac{3}{2}^-_{(+)}$	JüBo	-8(8)	-11(10)	-9(12)
	SAID(ED)	13(9)	-75(1)	34.3(8)
$\frac{3}{2}^-_{(-)}$	CMB	0.1(2)	-0.1(4)	-0.4(5)
	JüBo	-0.02(8)	-0.1(1)	-1.1(6)
	BnGa	0.10(1)	0.05(1)	-0.45(4)
	SAID(SE)	0.10(1)	0.06(1)	-0.39(3)
	SAID(ED)	-0.03(3)	-0.9(3)	-0.43(5)
	KH80	0.28(3)	0.25(3)	0.13(4)
	KA84	-0.07(1)	-2.1(3)	-0.51(3)

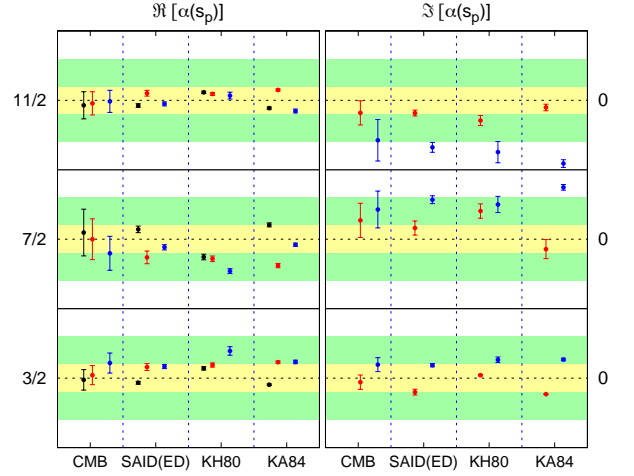
Table XVI. Parameter α' obtained for $\frac{3}{2}^-$ trajectories.

$I_{(\tau)}^{\eta}$	Pole set	$\alpha'^{(0)}$	$\alpha'^{(I)}$	$\alpha'^{(II)}$
$\frac{3}{2}^-_{(+)}$	JüBo	4(3)	4(3)	5(4)
	SAID(ED)	-3(2)	8.0(2)	-4.1(3)
$\frac{3}{2}^-_{(-)}$	CMB	0.97(8)	1.0(1)	1.2(2)
	JüBo	1.03(5)	1.04(5)	1.4(2)
	BnGa	0.95(1)	0.95(1)	1.19(1)
	SAID(SE)	0.953(4)	0.958(4)	1.17(1)
	SAID(ED)	1.02(1)	1.18(5)	1.23(2)
	KH80	0.87(1)	0.87(1)	1.00(2)
	KA84	1.04(1)	1.36(5)	1.28(1)

rameters for $\frac{3}{2}^-_{(+)}$ are completely at odds with the Regge expectation and the obtained s_t are not physically sensible, *i.e.* $s_t \gg (m_p + m_\pi)^2$. The reasons are obvious if we inspect Fig. 1(b), the position of the $9/2^-$ pole obtained by JüBo and SAID(ED) has a very low $\Re[s_p]$ value given the position of $\Delta(1930)$. Also, in the case of SAID(ED), $\Im[s_p]$ is too large. Hence, the position of this pole is completely unreliable, both in mass and width, as the large uncertainties in the JüBo width hint and no

Table XVII. Parameters γ and s_t obtained for $\frac{3}{2}^-$ trajectory.

$I_{(\tau)}^{\eta}$	Pole set	$\gamma^{(I)}$	$\gamma^{(II)}$	$s_t^{(I)}$	$s_t^{(II)}$
$\frac{3}{2}^-_{(+)}$	JüBo	4(4)	4(5)	3(3)	4(5)
	SAID(ED)	28.(2)	-8(1)	6.6(1)	10(2)
$\frac{3}{2}^-_{(-)}$	CMB	0.5(1)	0.9(2)	1.6(3)	1.5(1)
	JüBo	0.35(7)	0.9(3)	1.34(9)	1.7(2)
	BnGa	0.29(1)	0.67(2)	1.34(1)	1.54(1)
	SAID(SE)	0.28(1)	0.63(2)	1.32(1)	1.52(1)
	SAID(ED)	0.70(9)	0.98(3)	2.8(3)	1.49(1)
	KH80	0.39(3)	0.80(6)	1.39(2)	1.40(1)
	KA84	1.2(1)	1.16(2)	3.5(2)	1.48(1)

Figure 4. Consistency checks for $\frac{3}{2}^-$ poles from CMB, SAID(ED), KH80 and KA84 extractions. Notation as in Fig. 3. See Sec. IV B 4 for trajectory definition.

further conclusions can be derived.

Regarding the $\frac{3}{2}^-_{(-)}$ (the Δ trajectory), the effective threshold is at odds with the expected value only for model I in SAID(ED) and KA84 poles. For the rest of pole sets and for model II we obtain reasonable values. The slopes are close to unity as expected and only the α_0 value shows a large variation among models and pole sets. We can compare our Regge parameters to those used in fits to high energy proton-antiproton annihilation, where Δ Regge trajectory $\alpha_\Delta(s) = -0.37 + 0.98 s$ (s in GeV^2) is one of the main contributions [37]. We note that the slope is close to unity and that the α_0 parameter agrees with the one we obtain for $\frac{3}{2}^-_{(-)}$ using model II. Hence, model II provides the result compatible with the high energy information and our most reliable determination of the parameters. Consequently, as we did in Sec. IV B 1, we can estimate α' from model II values in Table XVI as

$$\alpha'_{\frac{3}{2}^-_{(-)}} = 1.21 \pm 0.15 \text{ GeV}^2.$$

We note that this slope is compatible within errors with the one obtained from the $\frac{1}{2}^+$ trajectory in Sec. IV B 1. The remaining parameters are

$$\begin{aligned} \alpha_{0, \frac{3}{2}^-_{(-)}} &= -0.45 \pm 0.44; \\ \gamma_{\frac{3}{2}^-_{(-)}} &= 0.86 \pm 0.22; \\ s_{t, \frac{3}{2}^-_{(-)}} &= 1.52 \pm 0.12 \text{ GeV}^2, \end{aligned}$$

with the effective threshold slightly above the expected value of $(m_\pi + m_p)^2 \simeq 1.17 \text{ GeV}^2$.

Figures 1(b) and 2(b) show a clear linear and square-root-like pattern for the $\frac{3}{2}^-$ trajectory hinting that these states are compact $3q$ structures. However, the consistency check in Fig. 4 provides a sharper image. The

deviations are clear and only CMB provides an approximate agreement between theory and data, mostly due to the large uncertainties. Considering that CMB overlaps with the pole extractions by other analyses, its deviation from the trajectory models in Eq. (5) signals the effects of beyond compact $3q$ physics, even for the well-studied $\Delta(1232)$ state. The $\frac{3}{2}^-_{(-)}$ poles are known well enough to be sensitive to these beyond compact $3q$ effects.

V. SUMMARY AND CONCLUSIONS

We have studied the structure of the N^* and Δ^* spectra from the perspective of Regge and complex angular momentum theory following the work done for the strange baryon sector in [6]. We have considered seven pole extractions [30–36]. In our analysis we have taken into account the fact that poles are complex quantities, and we go beyond the standard studies that focus only in the Chew-Frautschi plot ($\Re[s_p], J_p$) and linear trajectory fits to said plot. In doing so, we also study the ($\Im[s_p], J_p$) plots introduced in [6]. We find many discrepancies among the pole extractions, in particular for the widths, but a clear pattern, similar to the one in the strange sector, appears where the Chew-Frautschi plots follow the well-known approximate linear behavior, while the ($\Im[s_p], J_p$) plots show a square-root-like behavior.

Our working hypothesis has been that the square-root-like behavior appreciated in Fig. 2 is due to the contribution of the phase space to the scattering amplitude [51], which is proportional to the momentum $q \sim \sqrt{s - s_t}$. The phase space is the main contribution to how deep in the complex plane the poles are. Major deviations from that pattern would signal an important component of beyond compact $3q$ physics, *i.e.* additional QCD dynamics. Under this hypothesis, a state that presents a linear trajectory in the Chew-Frautschi plot *and* a square-root-like behavior would be mostly a compact $3q$ state. Besides the qualitative analysis of the plots, we performed a quantitative one, modeling the Regge trajectories, fitting the poles and cross checking the consistency of the results. The results support the qualitative conclusions but also signal sizable physics beyond the compact $3q$ picture for the $N(1680)$, the $N(1720)$ and some of the mem-

bers of the $\frac{3}{2}^-_{(-)}$ trajectory. The last poles are known well enough that our analysis is sensitive to beyond compact $3q$ effects.

We find that exchange degeneracy is very clearly broken in the nonstrange sector, contrary to the strange sector. This degeneracy breaking shows the importance of exchange forces in the determination of the low-lying nonstrange baryon spectrum. We also find that the $\frac{1}{2}^-$ and $\frac{3}{2}^+$ trajectories are poorly known and Regge phenomenology cannot provide insight on the internal structure of the baryons. However, Regge phenomenology serves as a guide for resonance searches. Particularly, as a way to explore if the fits to the experimental data are improved by including resonances close to the expected positions in both Chew-Frautschi and ($\Im[s_p], J_p$) plots.

The parameters of the $\frac{1}{2}^+$ (nucleon) and $\frac{3}{2}^-_{(-)}$ (Δ) Regge trajectories can be well established from the poles. We estimate $\alpha' = 0.99 \pm 0.12 \text{ GeV}^{-2}$ for the nucleon trajectory and $\alpha' = 1.21 \pm 0.15 \text{ GeV}^{-2}$ for the Δ . We note that both slopes are compatible within errors. This range is consistent with α' obtained from fits to the Chew-Frautschi plots, with what is predicted by constituent quark models and with fits to high energy proton-antiproton annihilation.

ACKNOWLEDGMENTS

JASC and CFR thank Roelof Bijker for useful comments. This work was supported by PAPIIT-DGAPA (UNAM, Mexico) under grant No. IA101717, CONACYT (Mexico) under grants No. 251817 and No. 619970, the U.S. Department of Energy under grants No. DE-AC05-06OR23177 and No. DE-FG02-87ER40365, Research Foundation – Flanders (FWO), U.S. National Science Foundation under award numbers PHY-1415459 and PHY-1513524, Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades (Spain) grant No. FPA2016-77313-P, and Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) through the Collaborative Research Center [The Low-Energy Frontier of the Standard Model (SFB 1044)] and the Cluster of Excellence [Precision Physics, Fundamental Interactions and Structure of Matter (PRISMA)].

-
- [1] P. D. B. Collins, *An Introduction to Regge Theory and High-Energy Physics*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics (Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 2009).
 - [2] V. N. Gribov, *The theory of complex angular momenta: Gribov lectures on theoretical physics*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics (Cambridge University Press, 2007).
 - [3] V. N. Gribov, *Strong interactions of hadrons at high energies: Gribov lectures on Theoretical Physics*, edited by Y. L. Dokshitzer and J. Nyiri (Cambridge University Press, 2012).
 - [4] J. T. Londergan, J. Nebreda, J. R. Peláez, and A. Szczepaniak, *Phys. Lett.* **B729**, 9 (2014), [arXiv:1311.7552 \[hep-ph\]](#).
 - [5] J. A. Carrasco, J. Nebreda, J. R. Peláez, and A. P. Szczepaniak, *Phys. Lett.* **B749**, 399 (2015), [arXiv:1504.03248 \[hep-ph\]](#).
 - [6] C. Fernández-Ramírez, I. V. Danilkin, V. Mathieu, and A. P. Szczepaniak, *Phys. Rev.* **D93**, 074015 (2016), [arXiv:1512.03136 \[hep-ph\]](#).
 - [7] J. R. Peláez and A. Rodas, *Eur. Phys. J.* **C77**, 431 (2017),

- arXiv:1703.07661 [hep-ph].
- [8] G. F. Chew and S. C. Frautschi, *Phys. Rev. Lett.* **8**, 41 (1962).
- [9] J. Greensite, *Lect. Notes Phys.* **821**, 1 (2011).
- [10] G. C. Rossi and G. Veneziano, *Nucl. Phys.* **B123**, 507 (1977).
- [11] L. Montanet, G. C. Rossi, and G. Veneziano, *Phys. Rept.* **63**, 149 (1980).
- [12] V. N. Gribov, *Sov. Phys. JETP* **15**, 873 (1962), [*Nucl. Phys.*40,107(1963)].
- [13] R. Fiore, L. L. Jenkovszky, V. Magas, F. Paccanoni, and A. Papa, *Eur. Phys. J.* **A10**, 217 (2001), arXiv:hep-ph/0011035 [hep-ph].
- [14] R. Fiore, L. L. Jenkovszky, F. Paccanoni, and A. Prokudin, *Phys. Rev.* **D70**, 054003 (2004), arXiv:hep-ph/0404021 [hep-ph].
- [15] H. Nakkagawa, K. Yamawaki, and S. Machida, *Prog. Theor. Phys.* **48**, 939 (1972).
- [16] R. Bijker, F. Iachello, and A. Leviatan, *Annals Phys.* **236**, 69 (1994), arXiv:nucl-th/9402012 [nucl-th].
- [17] R. Bijker, F. Iachello, and A. Leviatan, *Annals Phys.* **284**, 89 (2000), arXiv:nucl-th/0004034 [nucl-th].
- [18] E. Ortiz-Pacheco, R. Bijker, and C. Fernández-Ramírez, (2018), arXiv:1808.10512 [nucl-th].
- [19] S. Capstick and N. Isgur, *Phys. Rev.* **D34**, 2809 (1986).
- [20] U. Loring, B. C. Metsch, and H. R. Petry, *Eur. Phys. J.* **A10**, 395 (2001), arXiv:hep-ph/0103289 [hep-ph].
- [21] A. Inopin and G. S. Sharov, *Phys. Rev.* **D63**, 054023 (2001), arXiv:hep-ph/9905499 [hep-ph].
- [22] A. Tang and J. W. Norbury, *Phys. Rev.* **D62**, 016006 (2000), arXiv:hep-ph/0004078 [hep-ph].
- [23] S. Godfrey and N. Isgur, *Phys. Rev.* **D32**, 189 (1985).
- [24] M. Koll, R. Ricken, D. Merten, B. C. Metsch, and H. R. Petry, *Eur. Phys. J.* **A9**, 73 (2000), arXiv:hep-ph/0008220 [hep-ph].
- [25] D. Ebert, R. N. Faustov, and V. O. Galkin, *Phys. Rev.* **D79**, 114029 (2009), arXiv:0903.5183 [hep-ph].
- [26] N. Isgur and J. E. Paton, *Phys. Rev.* **D31**, 2910 (1985).
- [27] M. G. Olsson, S. Veseli, and K. Williams, *Phys. Rev.* **D53**, 4006 (1996), arXiv:hep-ph/9501323 [hep-ph].
- [28] C. Semay, F. Buisseret, N. Matagne, and F. Stancu, *Phys. Rev.* **D75**, 096001 (2007), arXiv:hep-ph/0702075 [hep-ph].
- [29] M. Tanabashi *et al.* (Particle Data Group), *Phys. Rev.* **D98**, 030001 (2018).
- [30] R. E. Cutkosky, C. P. Forsyth, R. E. Hendrick, and R. L. Kelly, *Phys. Rev.* **D20**, 2839 (1979).
- [31] R. E. Cutkosky, C. P. Forsyth, J. B. Babcock, R. L. Kelly, and R. E. Hendrick, in *Baryon 1980. Proceedings, 4th International Conference on Baryon Resonances, Toronto, Canada, July 14-16, 1980* (1980) p. 19.
- [32] D. Rönchen, M. Döring, and U. G. Meißner, *Eur. Phys. J.* **A54**, 110 (2018), arXiv:1801.10458 [nucl-th].
- [33] A. V. Anisovich, R. Beck, E. Klempt, V. A. Nikonov, A. V. Sarantsev, and U. Thoma, *Eur. Phys. J.* **A48**, 15 (2012), arXiv:1112.4937 [hep-ph].
- [34] V. Sokhoyan *et al.* (CBELSA/TAPS), *Eur. Phys. J.* **A51**, 95 (2015), [Erratum: *Eur. Phys. J.*A51,187(2015)], arXiv:1507.02488 [nucl-ex].
- [35] A. Švarc, M. Hadžimehmedović, H. Osmanović, J. Stahov, and R. L. Workman, *Phys. Rev.* **C91**, 015207 (2015), arXiv:1405.6474 [nucl-th].
- [36] A. Švarc, M. Hadžimehmedović, R. Omerović, H. Osmanović, and J. Stahov, *Phys. Rev.* **C89**, 045205 (2014), arXiv:1401.1947 [nucl-th].
- [37] J. Van de Wiele and S. Ong, *Eur. Phys. J.* **A46**, 291 (2010), arXiv:1004.2152 [nucl-th].
- [38] J. Nys, V. Mathieu, C. Fernández-Ramírez, A. N. Hiller Blin, A. Jackura, M. Mikhasenko, A. Pilloni, A. P. Szczepaniak, G. Fox, and J. Ryckebusch (JPAC), *Phys. Rev.* **D95**, 034014 (2017), arXiv:1611.04658 [hep-ph].
- [39] V. Mathieu, J. Nys, A. Pilloni, C. Fernández-Ramírez, A. Jackura, M. Mikhasenko, V. Pauk, A. P. Szczepaniak, and G. Fox, *EPL* **122**, 41001 (2018), arXiv:1708.07779 [hep-ph].
- [40] V. Mathieu, J. Nys, C. Fernández-Ramírez, A. N. Hiller Blin, A. Jackura, A. Pilloni, A. P. Szczepaniak, and G. Fox (JPAC), *Phys. Rev.* **D98**, 014041 (2018), arXiv:1806.08414 [hep-ph].
- [41] R. L. Workman, R. A. Arndt, W. J. Briscoe, M. W. Paris, and I. I. Strakovsky, *Phys. Rev.* **C86**, 035202 (2012), arXiv:1204.2277 [hep-ph].
- [42] G. Höhler, *Pion Nucleon Scattering. Part 2: Methods and Results of Phenomenological Analyses*, edited by H. Schopper, Landolt-Bornstein (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1983).
- [43] R. Koch, *Z. Phys.* **C29**, 597 (1985).
- [44] R. Koch, *Nucl. Phys.* **A448**, 707 (1986).
- [45] G. Höhler, *Proceedings of the 5th International Symposium on Meson-Nucleon Physics and the Structure of the Nucleon, Vol. II, Boulder, Colorado, September 6-10, 1993*, πN Newsletter **9**, 1 (1993).
- [46] M. Shrestha and D. M. Manley, *Phys. Rev.* **C86**, 055203 (2012), arXiv:1208.2710 [hep-ph].
- [47] T. P. Vrana, S. A. Dytman, and T. S. H. Lee, *Phys. Rept.* **328**, 181 (2000), arXiv:nucl-th/9910012 [nucl-th].
- [48] V. Shklyar, H. Lenske, and U. Mosel, *Phys. Rev.* **C87**, 015201 (2013), arXiv:1206.5414 [nucl-th].
- [49] H. Kamano, S. X. Nakamura, T. S. H. Lee, and T. Sato, *Phys. Rev.* **C88**, 035209 (2013), arXiv:1305.4351 [nucl-th].
- [50] M. Batinic, S. Ceci, A. Svarc, and B. Zauner, *Phys. Rev.* **C82**, 038203 (2010).
- [51] G. F. Chew and S. Mandelstam, *Phys. Rev.* **119**, 467 (1960).
- [52] C. B. Chiu, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **22**, 255 (1972).
- [53] S. Mandelstam, *Phys. Rev.* **166**, 1539 (1968).
- [54] G. Veneziano, *Nuovo Cim.* **A57**, 190 (1968).
- [55] A. P. Szczepaniak and M. R. Pennington, *Phys. Lett.* **B737**, 283 (2014), arXiv:1403.5782 [hep-ph].
- [56] A. I. Bugrij, G. Cohen-Tannoudji, L. L. Jenkovszky, and N. A. Kobylinsky, *Fortsch. Phys.* **21**, 427 (1973).
- [57] L. L. Jenkovszky, *Sov. J. Nucl. Phys.* **21**, 334 (1975), [*Yad. Fiz.*21,645(1975)].
- [58] M. Shi, I. V. Danilkin, C. Fernández-Ramírez, V. Mathieu, M. R. Pennington, D. Schott, and A. P. Szczepaniak, *Phys. Rev.* **D91**, 034007 (2015), arXiv:1411.6237 [hep-ph].
- [59] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing*, 3rd ed. (Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2007).
- [60] B. Efron and R. Tibshirani, *An Introduction to the Bootstrap*, Chapman & Hall/CRC Monographs on Statistics & Applied Probability (Taylor & Francis, 1994).
- [61] J. Landay, M. Döring, C. Fernández-Ramírez, B. Hu, and R. Molina, *Phys. Rev.* **C95**, 015203 (2017), arXiv:1610.07547 [nucl-th].

[62] D. Molina, M. De Sanctis, and C. Fernández-Ramírez, *Phys. Rev.* **D95**, 094021 (2017), [arXiv:1703.08097 \[hep-ph\]](#).
[63] C. Fernández-Ramírez and A. Relaño, *Phys. Rev. Lett.*

98, 062001 (2007), [arXiv:hep-ph/0701111 \[hep-ph\]](#).
[64] S. W. MacDowell, *Phys. Rev.* **116**, 774 (1959).

BIBLIOGRAFÍA

- [1] C. Fernández-Ramírez, I. V. Danilkin, V. Mathieu, and A. P. Szczepaniak, “Understanding the Nature of $\Lambda(1405)$ through Regge Physics,” *Phys. Rev.*, vol. D93, no. 7, p. 074015, 2016.
- [2] O. M. Boyarkin, *Introduction to Physics of Elementary Particles*. Contemporary Fundamental Physics, Nova Science Publishers, illustrated edition ed., 2007.
- [3] A. D. Martin and T. D. Spearman, *Elementary Particle Theory*. North-Holland Publishing Company-Amsterdam, 1970.
- [4] S. Braibant, G. Giacomelli, and M. Spurio, *Particles and Fundamental Interactions: An Introduction to Particle Physics*. Undergraduate Lecture Notes in Physics, Springer Netherlands, 2 ed., 2012.
- [5] M. Thomson, *Modern Particle Physics*. Cambridge University Press, 2013.
- [6] Y. V. Kovchegov and E. Levin, *Quantum Chromodynamics at High Energy*. Cambridge Monographs on Particle Physics, Nuclear Physics and Cosmology 33, Cambridge University Press, 2012.
- [7] J. J. Sakurai and J. Napolitano, *Modern Quantum Mechanics*. Pearson, 2nd, international ed., 2014.
- [8] A. Walker-Loud, “Viewpoint: Dissecting the mass of the proton.” <https://physics.aps.org/articles/v11/118>, Nov 2018. Online; accessed 25 Nov 2018.
- [9] Y. Yang, J. Liang, Y. Bi, Y. Chen, T. Draper, K. Liu, and Z. Liu, “Proton mass decomposition from the qcd energy momentum tensor,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 121, p. 212001, Nov 2018.
- [10] J. Greensite, “An introduction to the confinement problem,” *Lect. Notes Phys.*, vol. 821, pp. 1–211, 2011.
- [11] G. S. Bali, K. Schilling, and C. Schlichter, “Observing long color flux tubes in SU(2) lattice gauge theory,” *Phys. Rev.*, vol. D51, pp. 5165–5198, 1995.
- [12] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*. Wiley-VCH, 2nd ed., 2008.
- [13] M. Tanabashi *et al.*, “Review of Particle Physics,” *Phys. Rev.*, vol. D98, no. 3, p. 030001, 2018.
- [14] V. V. Anisoich, M. N. Kobrinsky, J. Nyiri, and Y. M. Shabelski, *Quark Model and High Energy Collisions*. World Scientific, 2nd ed ed., 2004.
- [15] U. Mosel, *Fields, Symmetries, and Quarks*. Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2 ed., 1999.
- [16] J. Collins, *Foundations of Perturbative QCD*. Cambridge Monographs on Particle Physics, Nuclear Physics and Cosmology volume 32, Cambridge University Press, 1 ed., 2011.
- [17] F. E. Close, “Gluonic hadrons,” *Reports on Progress in Physics*, vol. 51, no. 6, p. 833, 1988.
- [18] S. L. Olsen, “QCD Exotics,” *Hyperfine Interact.*, vol. 229, no. 1-3, pp. 7–20, 2014.
- [19] B. L. Ioffe, V. S. Fadin, and L. N. Lipatov, *Quantum Chromodynamics: Perturbative and Nonperturbative Aspects*. Cambridge Monographs on Particle Physics, Nuclear Physics and Cosmology, CUP, 2010.
- [20] J. F. Donoghue, E. Golowich, and B. R. Holstein, *Dynamics of the Standard Model*. CUP, draft 2ed. ed., 2014.
- [21] F. Knechtli, M. Günther, and M. Peardon, *Lattice Quantum Chromodynamics: Practical Essentials*. SpringerBriefs in Physics, Springer Netherlands, 1 ed., 2017.
- [22] M. Gell-Mann, “A schematic model of baryons and mesons,” *Physics Letters*, vol. 8, no. 3, pp. 214 – 215, 1964.
- [23] G. Zweig, “An SU(3) model for strong interaction symmetry and its breaking. Version 2,” in *Developments in the quark theory of hadrons, vol. 1, 1964 - 1978* (D. Lichtenberg and S. P. Rosen, eds.), pp. 22–101, 1964.
- [24] R. J. Eden, P. V. Landshoff, D. I. Olive, and J. C. Polkinghorne, *The Analytic S-Matrix*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1966.
- [25] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An introduction to quantum field theory*. Frontiers in Physics, Addison-Wesley Pub. Co, 1995.
- [26] J. R. Taylor, *Scattering Theory: Quantum Theory of Nonrelativistic Collisions*. Wiley, 1972.
- [27] W. Heisenberg, “Die beobachtbaren größen in der theorie der elementarteilchen,” *Zeitschrift für Physik*, vol. 120, pp. 513–538, Jul 1943.
- [28] W. Heisenberg, “Die beobachtbaren größen in der theorie der elementarteilchen. ii,” *Zeitschrift für Physik*, vol. 120, pp. 673–702, Nov 1943.
- [29] J. A. Wheeler, “On the mathematical description of light nuclei by the method of resonating group structure,” *Phys. Rev.*, vol. 52, pp. 1107–1122, Dec 1937.
- [30] A. M. Perelomov and Y. B. Zeldovich, *Quantum Mechanics: Selected topics*. Selected Topics Series, World Scientific, 1998.
- [31] R. J. Eden, *High Energy Collisions of Elementary Particles*. Cambridge University Press, 1967.
- [32] V. N. Gribov, *Strong interactions of hadrons at high energies: Gribov lectures on Theoretical Physics*. Cambridge University Press, 2012.
- [33] S. Mandelstam, “Determination of the pion-nucleon scattering amplitude from dispersion relations and unitarity. general theory,” *Phys. Rev.*, vol. 112, pp. 1344–1360, Nov 1958.
- [34] S. Mandelstam, “Analytic properties of transition amplitudes in perturbation theory,” *Phys. Rev.*, vol. 115, pp. 1741–1751, Sep 1959.

- [35] P. G. Burke and C. J. Joachain, *Theory of Electron-Atom Collisions: Part 1: Potential Scattering*. Physics of Atoms and Molecules, Springer US, 1 ed., 1995.
- [36] R. Omnes, *Introduction to Particle Physics*. Wiley, 1971.
- [37] R. Omnes and M. Froissart, *Mandelstam Theory and Regge Poles. An Introduction for Experimentalists*. Frontiers in Physics, W.A. Benjamin, 1963.
- [38] H. Muirhead, *The Physics of Elementary Particles*. Pergamon Press Ltd., 1965.
- [39] H. Muirhead, *Notes on Elementary Particle Physics*. Pergamon Press, 1 ed., 1971.
- [40] Y. V. Novozhilov and D. ter Haar, *Introduction to Elementary Particle Theory*. Pergamon Press, 1 ed., 1975.
- [41] G. Kallen, *Elementary Particle Physics*. Addison-Wesley Publishing Company, 1 ed., 1964.
- [42] P. D. B. Collins, *An Introduction to Regge Theory and High-Energy Physics*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 2009.
- [43] V. N. Gribov, *The theory of complex angular momenta: Gribov lectures on theoretical physics*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 2007.
- [44] T. Regge, "Introduction to complex orbital momenta," *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, vol. 14, pp. 951–976, Dec 1959.
- [45] T. Regge, "Bound states, shadow states and mandelstam representation," *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, vol. 18, pp. 947–956, Dec 1960.
- [46] T. Kanki, "Chew-frautschi plot and string structure of baryons," *Lettere al Nuovo Cimento (1971-1985)*, vol. 15, pp. 463–467, Mar 1976.
- [47] A. Cappelli, E. Castellani, F. Colomo, and P. D. Vecchia, *The Birth of String Theory*. Cambridge University Press, 2012.
- [48] P. D. B. Collins and E. J. Squires, *Regge poles in Particle Physics*. Springer Tracts in Modern Physics 45, Springer Berlin Heidelberg, 1968.
- [49] V. N. Gribov, "Analytic properties of the partial wave amplitudes and the asymptotic behavior of the scattering amplitude," *Sov. Phys. JETP*, vol. 15, p. 873, 1962. [Nucl. Phys.40,107(1963)].
- [50] R. J. Eden, "Regge poles and elementary particles," *Reports on Progress in Physics*, vol. 34, 9 1971.
- [51] S. W. MacDowell, "Analytic Properties of Partial Amplitudes in Meson-Nucleon Scattering," *Phys. Rev.*, vol. 116, pp. 774–778, 1959.
- [52] T. Kanki, "Macdowell symmetry," *Progress of Theoretical Physics*, vol. 40, no. 5, pp. 1125–1130, 1968.
- [53] Y. Georgelin, "Generalized macdowell symmetry as a consequence of CT invariance," *Phys. Rev. D*, vol. 1, pp. 1782–1785, Mar 1970.
- [54] A. Pilloni, J. Nys, M. Mikhasenko, M. Albaladejo, C. Fernandez-Ramrez, A. Jackura, V. Mathieu, N. Sherrill, T. Skwarnicki, and A. P. Szczepaniak, "What is the right formalism to search for resonances? II. The pentaquark chain," *Eur. Phys. J.*, vol. C78, no. 9, p. 727, 2018.
- [55] J. T. Londergan, J. Nebreda, J. R. Peláez, and A. Szczepaniak, "Identification of non-ordinary mesons from the dispersive connection between their poles and their Regge trajectories: The $f_0(500)$ resonance," *Phys. Lett.*, vol. B729, pp. 9–14, 2014.
- [56] J. A. Carrasco, J. Nebreda, J. R. Peláez, and A. P. Szczepaniak, "Dispersive calculation of complex Regge trajectories for the lightest f_2 resonances and the $K^*(892)$," *Phys. Lett.*, vol. B749, pp. 399–406, 2015.
- [57] J. R. Peláez and A. Rodas, "The non-ordinary Regge behavior of the $K_0^*(800)$ or κ -meson versus the ordinary $K_0^*(1430)$," *Eur. Phys. J.*, vol. C77, no. 6, p. 431, 2017.
- [58] R. Fiore, L. L. Jenkovszky, V. Magas, F. Paccanoni, and A. Papa, "Analytic model of Regge trajectories," *Eur. Phys. J.*, vol. A10, pp. 217–221, 2001.
- [59] R. Fiore, L. L. Jenkovszky, F. Paccanoni, and A. Prokudin, "Baryonic regge trajectories with analyticity constraints," *Phys. Rev.*, vol. D70, p. 054003, 2004.
- [60] H. Nakkagawa, K. Yamawaki, and S. Machida, "Quark-orbital regge trajectories," *Prog. Theor. Phys.*, vol. 48, pp. 939–963, 1972.
- [61] R. Bijker, F. Iachello, and A. Leviatan, "Algebraic models of hadron structure. 1. Nonstrange baryons," *Annals Phys.*, vol. 236, pp. 69–116, 1994.
- [62] R. Bijker, F. Iachello, and A. Leviatan, "Algebraic models of hadron structure. 2. Strange baryons," *Annals Phys.*, vol. 284, pp. 89–133, 2000.
- [63] E. Ortiz-Pacheco, R. Bijker, and C. Fernández-Ramírez, "Hidden charm pentaquarks: mass spectrum, magnetic moments, and photocouplings," 2018.
- [64] S. Capstick and N. Isgur, "Baryons in a Relativized Quark Model with Chromodynamics," *Phys. Rev.*, vol. D34, p. 2809, 1986.
- [65] U. Loring, B. C. Metsch, and H. R. Petry, "The Light baryon spectrum in a relativistic quark model with instanton induced quark forces: The Nonstrange baryon spectrum and ground states," *Eur. Phys. J.*, vol. A10, pp. 395–446, 2001.
- [66] A. Inopin and G. S. Sharov, "Hadronic Regge trajectories: Problems and approaches," *Phys. Rev.*, vol. D63, p. 054023, 2001.
- [67] A. Tang and J. W. Norbury, "Properties of Regge trajectories," *Phys. Rev.*, vol. D62, p. 016006, 2000.
- [68] S. Godfrey and N. Isgur, "Mesons in a Relativized Quark Model with Chromodynamics," *Phys. Rev.*, vol. D32, pp. 189–231, 1985.

- [69] M. Koll, R. Ricken, D. Merten, B. C. Metsch, and H. R. Petry, “A Relativistic quark model for mesons with an instanton induced interaction,” *Eur. Phys. J.*, vol. A9, pp. 73–94, 2000.
- [70] D. Ebert, R. N. Faustov, and V. O. Galkin, “Mass spectra and Regge trajectories of light mesons in the relativistic quark model,” *Phys. Rev.*, vol. D79, p. 114029, 2009.
- [71] N. Isgur and J. E. Paton, “A Flux Tube Model for Hadrons in QCD,” *Phys. Rev.*, vol. D31, p. 2910, 1985.
- [72] C. Semay, F. Buisseret, N. Matagne, and F. Stancu, “Baryonic mass formula in large $N(c)$ QCD versus quark model,” *Phys. Rev.*, vol. D75, p. 096001, 2007.
- [73] M. G. Olsson, S. Veseli, and K. Williams, “Fermion confinement by a relativistic flux tube,” *Phys. Rev.*, vol. D53, pp. 4006–4012, 1996.
- [74] J. Van de Wiele and S. Ong, “Regge description of two pseudoscalar meson production in antiproton-proton annihilation,” *Eur. Phys. J.*, vol. A46, pp. 291–298, 2010.
- [75] J. Nys, V. Mathieu, C. Fernández-Ramírez, A. N. Hiller Blin, A. Jackura, M. Mikhasenko, A. Pilloni, A. P. Szczepaniak, G. Fox, and J. Ryckebusch, “Finite-energy sum rules in eta photoproduction off a nucleon,” *Phys. Rev.*, vol. D95, no. 3, p. 034014, 2017.
- [76] V. Mathieu, J. Nys, A. Pilloni, C. Fernández-Ramírez, A. Jackura, M. Mikhasenko, V. Pauk, A. P. Szczepaniak, and G. Fox, “Analyticity Constraints for Hadron Amplitudes: Going High to Heal Low Energy Issues,” *EPL*, vol. 122, no. 4, p. 41001, 2018.
- [77] V. Mathieu, J. Nys, C. Fernández-Ramírez, A. N. Hiller Blin, A. Jackura, A. Pilloni, A. P. Szczepaniak, and G. Fox, “Structure of Pion Photoproduction Amplitudes,” *Phys. Rev.*, vol. D98, p. 014041, 2018.
- [78] G. F. Chew, *S-Matrix Theory of Strong Interactions: A Lecture Note and Reprint Volume*. Frontiers in Physics, W.A. Benjamin, 1961.
- [79] R. G. Newton, *Scattering Theory of Waves and Particles*. Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2 ed., 1982.
- [80] W. S. C. Williams, *An Introduction to Elementary Particles*. Pure and Applied Physics 12, Academic Press Inc, 2nd ed., 1971.
- [81] M. Maggiore, *A Modern Introduction to Quantum Field Theory*. Oxford Master Series in Physics, Oxford University Press, 2004.
- [82] Joint Physics Analysis Center, M. Mikhasenko, A. Pilloni, J. Nys, M. Albaladejo, C. Fernández-Ramírez, A. Jackura, V. Mathieu, N. Sherrill, T. Skwarnicki, and A. P. Szczepaniak, “What is the right formalism to search for resonances?,” *Eur. Phys. J. C*, vol. 78, no. 3, p. 229, 2018.
- [83] M. Jacob and G. C. Wick, “On the general theory of collisions for particles with spin,” *Annals of Physics*, vol. 7, no. 4, pp. 404 – 428, 1959.
- [84] S. Prelovsek, U. Skerbis, and C. B. Lang, “Operators for scattering of particles with spin,” *PoS*, vol. LATTICE2016, p. 098, 2016.
- [85] F. Calogero, J. M. Charap, and E. J. Squires, “The continuation in total angular momentum of partial-wave scattering amplitudes for particles with spin,” *Annals of Physics*, vol. 25, no. 3, pp. 325 – 339, 1963.
- [86] B. E. Y. Svensson, “On the kinematic singularities of helicity amplitudes for multi-particle processes,” *Nuclear Physics B*, vol. 15, no. 1, pp. 93 – 117, 1970.
- [87] G. Cohen-Tannoudji, A. Morel, and H. Navelet, “Kinematical singularities, crossing matrix and kinematical constraints for two-body helicity amplitudes,” *Annals of Physics*, vol. 46, no. 2, pp. 239 – 316, 1968.
- [88] J. M. Charap and E. J. Squires, “On complex angular momentum in many-channel potential-scattering problems, i,” *Annals of Physics*, vol. 20, no. 1, pp. 145 – 156, 1962.
- [89] J. M. Charap and E. J. Squires, “On complex angular momentum in many-channel potential-scattering problems, ii,” *Annals of Physics*, vol. 21, no. 1, pp. 8 – 28, 1963.
- [90] J. M. Charap and E. J. Squires, “On complex angular momentum in many-channel potential-scattering problems, iii,” *Annals of Physics*, vol. 25, no. 2, pp. 143 – 154, 1963.
- [91] Y. Hara, “Analyticity properties of helicity amplitudes and construction of kinematical singularity-free amplitudes for any spin,” *Phys. Rev.*, vol. 136, pp. B507–B514, Oct 1964.
- [92] D. Belkic, *Principles of Quantum Scattering Theory*. Series in atomic and molecular physics, Institute of Physics, 1 ed., 2004.
- [93] L. de la Peña, *Introducción a la Mecánica Cuántica*. Ediciones científicas universitarias, Fondo de Cultura Económica, México, 3 ed., 2014.
- [94] A. Bohm, *Quantum Mechanics: Foundations and Applications*. Texts and Monographs in Physics, Springer Berlin Heidelberg, 1986.
- [95] H. J. W. Muller-Kirsten, *Introduction to Quantum Mechanics: Schrödinger Equation and Path Integral*. World Scientific Publishing Company, ws ed., 2006.
- [96] H. M. Nussenzveig, *Causality and Dispersion Relations*. Mathematics in Science and Engineering 95, Academic Press, 1972.
- [97] R. J. Eden and P. V. Landshoff, “The problem of causality in s-matrix theory,” *Annals of Physics*, vol. 31, no. 2, pp. 370 – 390, 1965.
- [98] S. U. Chung, J. Brose, R. Hackmann, E. Klempt, S. Spanier, and C. Strassburger, “Partial wave analysis in K matrix formalism,” *Annalen Phys.*, vol. 4, pp. 404–430, 1995.

BIBLIOGRAFÍA

- [99] A. Z. Capri, *Nonrelativistic Quantum Mechanics*. World Scientific, 3 ed., 2002.
- [100] E. P. Wigner, “Resonance reactions and anomalous scattering,” *Phys. Rev.*, vol. 70, pp. 15–33, Jul 1946.
- [101] R. H. Dalitz and S. F. Tuan, “The phenomenological representation of k-nucleon scattering and reaction amplitudes,” *Annals of Physics*, vol. 10, no. 3, pp. 307 – 351, 1960.
- [102] S. U. Chung, “Spin Formalisms,” 1971.
- [103] E. Byckling and K. Kajantie, *Particle Kinematics*. John Wiley & Sons, 1972.
- [104] T. Lancaster and S. J. Blundell, *Quantum field theory for the gifted amateur*. Oxford University Press, 1 ed., 2014.
- [105] J. M. Jauch and F. Rohrlich, *The theory of photons and electrons*. Theoretical and Mathematical Physics, Springer-Verlag, 2 revised ed., 1980.
- [106] R. Blankenbecler, M. L. Goldberger, N. N. Khuri, and S. B. Treiman, “Mandelstam representation for potential scattering,” *Annals of Physics*, vol. 10, no. 1, pp. 62 – 93, 1960.
- [107] J. Bros, H. Epstein, and V. Glaser, “A proof of the crossing property for two-particle amplitudes in general quantum field theory,” *Communications in Mathematical Physics*, vol. 1, pp. 240–264, Sep 1965.
- [108] P. Goddard, “The Guiding Influence of Stanley Mandelstam, from S-Matrix Theory to String Theory,” *Int. J. Mod. Phys.*, no. A32, no. 12, p. 1740013, 2017.
- [109] J. Franklin, “Kinematic singularities of partial-wave scattering amplitudes,” *Phys. Rev.*, vol. 152, pp. 1437–1441, Dec 1966.
- [110] N. Johannesson, “Kinematic singularities in multi-particle processes derived from basic properties of spinor amplitudes,” *Nuclear Physics B*, vol. 28, no. 1, pp. 51 – 60, 1971.
- [111] L. C. Wang, “General method of constructing helicity amplitudes free from kinematic singularities and zeros,” *Phys. Rev.*, vol. 142, pp. 1187–1194, Feb 1966.
- [112] G. C. Fox, “Methods for constructing invariant amplitudes free from kinematic singularities and zeros,” *Phys. Rev.*, vol. 157, pp. 1493–1502, May 1967.
- [113] K. Hepp, “On the analyticity properties of the scattering amplitude in relativistic quantum field theory,” *Helvetica Physica Acta (Switzerland)*, vol. 37, 1 1964.
- [114] A. W. Martin and J. L. Uretsky, “One-nucleon exchange in pion-nucleon scattering,” *Phys. Rev.*, vol. 135, pp. B803–B809, Aug 1964.
- [115] S. Bert, “Causality and dispersion relations and the role of the S-matrix in the ongoing research,” *Found. Phys.*, vol. 42, pp. 1481–1522, 2012.
- [116] H. A. Kramers, *Die Grundlagen der Quantentheorie: Quantentheorie des Elektrons Lind del’ Strahlung: Hand-und lahrbuch del’ Chemischen Physik*, vol. 1. Akademische Verlagsgesellschaft, 1938.
- [117] W. Heisenberg, “Der mathematische rahmen der quantentheorie der wellenfelder,” *Zeitschrift für Naturforschung A*, vol. 1, p. 608622, Dec 1946.
- [118] H. Lehmann, “Analytic properties of scattering amplitudes as functions of momentum transfer,” *Il Nuovo Cimento Series 10*, vol. 10, 11 1958.
- [119] G. B. Arfken, H. J. Weber, and F. E. Harris, *Mathematical Methods for Physicists, Seventh Edition: A Comprehensive Guide*. Academic Press, 7 ed., 2012.
- [120] S. Adhikari, *Dynamical Collision Theory and its Applications*. Elsevier Science, 1991.
- [121] L. P. Kok, J. M. Greben, and F. A. van der Ploeg, “On the left-hand cut in potential scattering,” *Annals of Physics*, vol. 79, no. 2, pp. 386 – 406, 1973.
- [122] J. Dille, “Threshold behavior of partial-wave amplitudes,” *Il Nuovo Cimento A (1965-1970)*, vol. 50, pp. 837–849, Aug 1967.
- [123] Y. S. Jin and K. Kang, “Zeros of the partial-wave scattering amplitude,” *Phys. Rev.*, vol. 152, pp. 1227–1233, Dec 1966.
- [124] G. Altarelli and L. D. Lella, *Proton-Antiproton Collider Physics*. Advanced Series on Directions in High Energy Physics, WS, 1989.
- [125] A. Martin, “Extension of the axiomatic analyticity domain of scattering amplitudes by unitarity-i,” *Il Nuovo Cimento A (1965-1970)*, vol. 42, pp. 930–953, Apr 1966.
- [126] C. Fernández-Ramírez, A. N. H. Blin, and A. Pilloni, “Pentaquark photoproduction,” *J. Phys. Conf. Ser.*, vol. 876, no. 1, p. 012007, 2017.
- [127] M. Gell-Mann, M. L. Goldberger, and W. E. Thirring, “Use of causality conditions in quantum theory,” *Phys. Rev.*, vol. 95, pp. 1612–1627, Sep 1954.
- [128] M. L. Goldberger, “Use of causality conditions in quantum theory,” *Phys. Rev.*, vol. 97, pp. 508–510, Jan 1955.
- [129] E. C. Titchmarsh, *Introduction to the theory of Fourier integrals*. Oxford University Press, 2 ed., 1948.
- [130] G. Barton, *Introduction to Dispersion Techniques in Field Theory*. Lecture Notes and Supplements in Physics, W A. Benjamin, INC. New York, 1965.
- [131] T. Kitazoe and T. Ogimoto, “Subtraction of dispersion relation in multi-channel scattering,” *Progress of Theoretical Physics*, vol. 29, no. 2, pp. 275–278, 1963.
- [132] Y. S. Jin and A. Martin, “Number of subtractions in fixed-transfer dispersion relations,” *Phys. Rev.*, vol. 135, pp. B1375–B1377, Sep 1964.
- [133] E. W. Weisstein, *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics, Second Edition*. Chapman & Hall/CRC, 2 ed., 2002.
- [134] A. Erdelyi, *Higher transcendental functions*, vol. 1. Krieger Pub Co, 1953.

- [135] A. Martin, “Extension of the axiomatic analyticity domain of scattering amplitudes by unitarity.—ii,” *Il Nuovo Cimento A (1965-1970)*, vol. 44, pp. 1219–1244, Aug 1966.
- [136] C. Fernández-Ramírez, “Amplitude analysis of $\bar{K}N$ scattering,” *J. Phys. Conf. Ser.*, vol. 730, no. 1, p. 012010, 2016.
- [137] S. S. Bayin, *Mathematical methods in science and engineering*. Wiley-Interscience, 2006.
- [138] Y. I. Azimov, “Angular Functions with Complex Angular Momenta,” *Sov. J. Nucl. Phys.*, vol. 4, pp. 469–475, 1967.
- [139] J. Kennedy and T. D. Spearman, “Singularities in partial-wave amplitudes for two ingoing and two outgoing particles,” *Phys. Rev.*, vol. 126, pp. 1596–1602, May 1962.
- [140] S. Ceci, M. Korolija, and B. Zauner, “Model independent extraction of the pole and Breit-Wigner resonance parameters,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 111, p. 112004, 2013. [Erratum: *Phys. Rev. Lett.*, 111, no. 15, 159902 (2013)].
- [141] R. H. Dalitz and R. G. Moorhouse, “What is resonance?,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, vol. 318, no. 1534, pp. 279–298, 1970.
- [142] G. Puppi, *Old and New Problems in Elementary Particles. A volume dedicated to Gilberto Bernardini in his sixtieth birthday*. Elsevier Science, 1968.
- [143] G. Calucci, L. Fonda, and G. C. Ghirardi, “Correspondence between unstable particles and poles in s -matrix theory,” *Phys. Rev.*, vol. 166, pp. 1719–1723, Feb 1968.
- [144] R. Blankenbecler, M. L. Goldberger, S. W. MacDowell, and S. B. Treiman, “Singularities of scattering amplitudes on unphysical sheets and their interpretation,” *Phys. Rev.*, vol. 123, pp. 692–699, Jul 1961.
- [145] J. H. a. V. I. Kukulín, V. M. Krasnopolsky, *Theory of Resonances: Principles and Applications*. Reidel Texts in the Mathematical Sciences 3, Springer Netherlands, 1 ed., 1989.
- [146] D. Atkinson, *Strong Interaction Physics: Heidelberg-Karlsruhe International Summer Institute in Theoretical Physics (1970)*. Springer Tracts in Modern Physics 57, Springer Berlin Heidelberg, 1971.
- [147] T. W. Preist and L. L. J. V. (eds.), *Particle Interactions at High Energies: Scottish Universities Summer School 1966*. Scottish Universities Summer School, Springer US, 1 ed., 1974.
- [148] L. Faddeev, *40 years in Mathematical Physics*. World scientific series in 20th century mathematics, vol. 2, World Scientific, 1995.
- [149] J. J. Kelly, *Graduate Mathematical Physics, with MATHEMATICA Supplements*. Wiley-VCH, 2007.
- [150] A. Pilloni, C. Fernandez-Ramirez, A. Jackura, V. Mathieu, M. Mikhasenko, J. Nys, and A. P. Szczepaniak, “Amplitude analysis and the nature of the $Z_c(3900)$,” *Phys. Lett.*, vol. B772, pp. 200–209, 2017.
- [151] L. Castillejo, R. H. Dalitz, and F. J. Dyson, “Low’s scattering equation for the charged and neutral scalar theories,” *Phys. Rev.*, vol. 101, pp. 453–458, Jan 1956.
- [152] M. I. Krivoruchenko, “Remarks on the origin of Castillejo-Dalitz-Dyson poles,” *Phys. Rev.*, vol. C82, p. 018201, 2010.
- [153] J. Weiss, “Cdd poles and the long-range character of potentials,” *Czechoslovak Journal of Physics B*, vol. 17, pp. 848–855, Oct 1967.
- [154] G. N. Watson, “The Diffraction of Electric Waves by the Earth,” *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, vol. 95, pp. 83–99, Oct. 1918.
- [155] A. Sommerfeld, *Partial differential equations in physics*. Pure and Applied Mathematics: A Series of Monographs and Textbooks, Vol. 1, Academic Press, 1949.
- [156] M. Froissart, “Asymptotic behavior and subtractions in the mandelstam representation,” *Phys. Rev.*, vol. 123, pp. 1053–1057, Aug 1961.
- [157] R. Blankenbecler and M. L. Goldberger, “Behavior of scattering amplitudes at high energies, bound states, and resonances,” *Phys. Rev.*, vol. 126, pp. 766–786, Apr 1962.
- [158] G. F. Chew and S. C. Frautschi, “Regge Trajectories and the Principle of Maximum Strength for Strong Interactions,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 8, pp. 41–44, 1962.
- [159] G. F. Chew and S. C. Frautschi, “Principle of equivalence for all strongly interacting particles within the s -matrix framework,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 7, pp. 394–397, Nov 1961.
- [160] G. F. Chew, “ S -matrix theory of strong interactions without elementary particles,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 34, pp. 394–401, Jul 1962.
- [161] M. Gell-Mann, “Applications of Regge poles,” in *High-energy physics. Proceedings, 11th International Conference, ICHEP’62, Geneva, Switzerland, Jul 4-11, 1962*, pp. 533–542, 1962.
- [162] E. J. Squires, *Complex Angular Momenta and Particle Physics*. W.A. Benjamin, 1963.
- [163] S. C. Frautschi, *Regge Poles and S-Matrix Theory*. Frontiers in Physics, Benjamin, 1963.
- [164] J. Bros and G. A. Viano, “Complex Angular Momentum in General Quantum Field Theory,” *Annales Henri Poincare*, vol. 1, pp. 101–172, 2006.
- [165] I. T. Todorov and D. T. Haar, *Analytic Properties of Feynman Diagrams in Quantum Field Theory*. Monographs in Natural Philosophy, Elsevier Ltd, Pergamon Press, 1 ed., 1971.
- [166] Y. I. Azimov, “Froissart Bounds for Amplitudes and Cross Sections at High Energies,” 2012.
- [167] M. M. Block, “Hadronic Cross sections: From cyclotrons to colliders to cosmic rays,” in *Proceedings, 16th International Symposium on Very High Energy Cosmic Ray Interactions (ISVHECRI 2010): Batavia, Illinois, USA, June 28-July 2, 2010*, 2010.
- [168] Y. S. Jin and A. Martin, “Number of subtractions in fixed-transfer dispersion relations,” *Phys. Rev.*, vol. 135, pp. B1375–B1377, Sep 1964.
- [169] V. Barone and E. Predazzi, *High-Energy particle diffraction*. Texts and monographs in physics, Springer, 1 ed., 2002.

- [170] N. N. Bogolubov, A. A. Logunov, A. I. Oksak, and I. Todorov, *General principles of quantum field theory*. Mathematical Physics and Applied Mathematics, Springer, 1 ed., 1989.
- [171] O. Nachtmann, *Elementary Particle Physics: Concepts and Phenomena*. Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1 ed., 1990.
- [172] I. Y. Pomeranchuk, “Equality of the Nucleon and Antinucleon Total Interaction Cross Section At High Energies,” *Sov. Phys. JETP*, vol. 34, no. 3, pp. 499–401, 1958.
- [173] E. C. Titchmarsh, *The Theory of Functions*. Oxford University Press, USA, 2 ed., 1939.
- [174] A. B. Kaidalov, “Regge poles in QCD,” pp. 603–636, 2001.
- [175] E. H. S. Burhop, *High Energy Physics*. Pure and Applied Physics 25, Part 5, Academic Press Inc, 1972.
- [176] G. Baym, *Lectures On Quantum Mechanics*. Lecture Notes and Supplements in Physics, The Benjamin / Cummings Publishing Company, CRC, 1 ed., 1969,2018.
- [177] A. Bottino, A. M. Longoni, and T. Regge, “Potential scattering for complex energy and angular momentum,” *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, vol. 23, pp. 954–1004, Mar 1962.
- [178] S. Mandelstam, “Cuts in the angular-momentum plane - i,” *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, vol. 30, pp. 1127–1147, Nov 1963.
- [179] S. Mandelstam, “Cuts in the angular-momentum plane - ii,” *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, vol. 30, pp. 1148–1162, Nov 1963.
- [180] V. N. Gribov and I. Y. Pomeranchuk, “Regge poles and landau singularities,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 9, pp. 238–242, Sep 1962.
- [181] G. C. Rossi and G. Veneziano, “A Possible Description of Baryon Dynamics in Dual and Gauge Theories,” *Nucl. Phys.*, vol. B123, pp. 507–545, 1977.
- [182] L. Montanet, G. C. Rossi, and G. Veneziano, “Baryonium Physics,” *Phys. Rept.*, vol. 63, pp. 149–222, 1980.
- [183] H. L. Anderson, E. Fermi, E. A. Long, and D. E. Nagle, “Total cross sections of positive pions in hydrogen,” *Phys. Rev.*, vol. 85, pp. 936–936, Mar 1952.
- [184] O. W. Greenberg, “Discovery of the Color Degree of Freedom in Particle Physics: a Personal Perspective,” in *Particle physics on the eve of LHC. Proceedings, 13th Lomonosov Conference on Elementary Particle Physics, Moscow, Russia, August 23-29, 2007*, pp. 11–19, 2008.
- [185] N. Isgur, “Why N*s are important,” in *In *Newport News 2000, Excited nucleons and hadronic structure* 403-422*, pp. 403–422, 2000.
- [186] M. Ronniger and B. C. Metsch, “Effects of a spin-flavour dependent interaction on the baryon mass spectrum,” *Eur. Phys. J.*, vol. A47, p. 162, 2011.
- [187] G. Höhler, “Pion nucleon scattering. part 1: Tables of data · 0 introduction: Datasheet from landolt-börnstein - group i elementary particles, nuclei and atoms · volume 9b1: “pion nucleon scattering. part 1: Tables of data” in springermaterials (<https://dx.doi.org/10.1007/10201153.1>.)” Copyright 1982 Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [188] R. E. Cutkosky, C. P. Forsyth, R. E. Hendrick, and R. L. Kelly, “Pion - Nucleon Partial Wave Amplitudes,” *Phys. Rev.*, vol. D20, p. 2839, 1979.
- [189] R. A. Arndt, W. J. Briscoe, I. I. Strakovsky, and R. L. Workman, “Extended partial-wave analysis of piN scattering data,” *Phys. Rev.*, vol. C74, p. 045205, 2006.
- [190] R. G. Edwards, J. J. Dudek, D. G. Richards, and S. J. Wallace, “Excited state baryon spectroscopy from lattice QCD,” *Phys. Rev.*, vol. D84, p. 074508, 2011.
- [191] R. G. Edwards, N. Mathur, D. G. Richards, and S. J. Wallace, “Flavor structure of the excited baryon spectra from lattice QCD,” *Phys. Rev.*, vol. D87, no. 5, p. 054506, 2013.
- [192] C. B. Lang and V. Verduci, “Scattering in the πN negative parity channel in lattice QCD,” *Phys. Rev.*, vol. D87, no. 5, p. 054502, 2013.
- [193] C. B. Lang, L. Leskovec, M. Padmanath, and S. Prelovsek, “Pion-nucleon scattering in the Roper channel from lattice QCD,” *Phys. Rev.*, vol. D95, no. 1, p. 014510, 2017.
- [194] A. L. Kiratidis, W. Kamleh, D. B. Leinweber, Z.-W. Liu, F. M. Stokes, and A. W. Thomas, “Search for low-lying lattice QCD eigenstates in the Roper regime,” *Phys. Rev.*, vol. D95, no. 7, p. 074507, 2017.
- [195] C. W. Andersen, J. Bulava, B. Hörz, and C. Morningstar, “Elastic $I = 3/2p$ -wave nucleon-pion scattering amplitude and the $\Delta(1232)$ resonance from $N_f=2+1$ lattice QCD,” *Phys. Rev.*, vol. D97, no. 1, p. 014506, 2018.
- [196] R. Koniuk and N. Isgur, “Where Have All the Resonances Gone? An Analysis of Baryon Couplings in a Quark Model With Chromodynamics,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 44, p. 845, 1980.
- [197] V. D. Burkert, “Nucleon Resonance Physics,” *Few Body Syst.*, vol. 57, no. 10, pp. 873–882, 2016.
- [198] B. A. Kniehl, “Theoretical aspects of hadron photoproduction,” in *Proceedings, Ringberg Workshop on New Trends in HERA Physics 1997: Ringberg Castle, Tegernsee, Germany, May 25-30, 1997*, pp. 260–269, 1997.
- [199] V. Crede and W. Roberts, “Progress towards understanding baryon resonances,” *Rept. Prog. Phys.*, vol. 76, p. 076301, 2013.
- [200] I. G. Aznauryan *et al.*, “Studies of Nucleon Resonance Structure in Exclusive Meson Electroproduction,” *Int. J. Mod. Phys.*, vol. E22, p. 1330015, 2013.
- [201] E. Klempt and J.-M. Richard, “Baryon spectroscopy,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 82, pp. 1095–1153, 2010.
- [202] S. D. Gupta and A. N. Mitra, “Quark model for photoproduction of baryons,” *Phys. Rev.*, vol. 156, pp. 1581–1584, Apr 1967.

- [203] D. Rönchen, M. Döring, and U. G. Meißner, “The impact of $\mathbf{K}^+\mathbf{A}$ photoproduction on the resonance spectrum,” *Eur. Phys. J.*, vol. A54, no. 6, p. 110, 2018.
- [204] C. Fernández-Ramírez, I. V. Danilkin, D. M. Manley, V. Mathieu, and A. P. Szczepaniak, “Coupled-channel model for $\bar{K}N$ scattering in the resonant region,” *Phys. Rev.*, vol. D93, no. 3, p. 034029, 2016.
- [205] R. E. Cutkosky, C. P. Forsyth, J. B. Babcock, R. L. Kelly, and R. E. Hendrick, “Pion - Nucleon Partial Wave Analysis,” in *Baryon 1980. Proceedings, 4th International Conference on Baryon Resonances, Toronto, Canada, July 14-16, 1980*, p. 19, 1980.
- [206] A. V. Anisovich, R. Beck, E. Klempt, V. A. Nikonov, A. V. Sarantsev, and U. Thoma, “Properties of baryon resonances from a multichannel partial wave analysis,” *Eur. Phys. J.*, vol. A48, p. 15, 2012.
- [207] V. Sokhoyan *et al.*, “High-statistics study of the reaction $\gamma p \rightarrow p 2\pi^0$,” *Eur. Phys. J.*, vol. A51, no. 8, p. 95, 2015. [Erratum: *Eur. Phys. J.*A51,187(2015)].
- [208] A. Švarc, M. Hadžimehmedović, H. Osmanović, J. Stahov, and R. L. Workman, “Pole structure from energy-dependent and single-energy fits to GWU-SAID πN elastic scattering data,” *Phys. Rev.*, vol. C91, no. 1, p. 015207, 2015.
- [209] R. L. Workman, R. A. Arndt, W. J. Briscoe, M. W. Paris, and I. I. Strakovsky, “Parameterization dependence of T matrix poles and eigenphases from a fit to πN elastic scattering data,” *Phys. Rev.*, vol. C86, p. 035202, 2012.
- [210] A. Švarc, M. Hadžimehmedović, R. Omerović, H. Osmanović, and J. Stahov, “Poles of Karlsruhe-Helsinki KH80 and KA84 solutions extracted by using the Laurent-Pietarinen method,” *Phys. Rev.*, vol. C89, no. 4, p. 045205, 2014.
- [211] G. Höhler, *Pion Nucleon Scattering. Part 2: Methods and Results of Phenomenological Analyses*. Landolt-Bornstein, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1983.
- [212] R. Koch, “Improved πN Partial Waves Consistent With Analyticity and Unitarity,” *Z. Phys.*, vol. C29, p. 597, 1985.
- [213] R. Koch, “A Calculation of Low-Energy πN Partial Waves Based on Fixed t Analyticity,” *Nucl. Phys.*, vol. A448, pp. 707–731, 1986.
- [214] G. Höhler, “Determination of πN resonance pole parameters,” *πN Newsletter*, vol. 9, p. 1, 1993.
- [215] M. Shrestha and D. M. Manley, “Multichannel parametrization of πN scattering amplitudes and extraction of resonance parameters,” *Phys. Rev.*, vol. C86, p. 055203, 2012.
- [216] T. P. Vrana, S. A. Dytman, and T. S. H. Lee, “Baryon resonance extraction from πN data using a unitary multichannel model,” *Phys. Rept.*, vol. 328, pp. 181–236, 2000.
- [217] V. Shklyar, H. Lenske, and U. Mosel, “ η -meson production in the resonance-energy region,” *Phys. Rev.*, vol. C87, no. 1, p. 015201, 2013.
- [218] H. Kamano, S. X. Nakamura, T. S. H. Lee, and T. Sato, “Nucleon resonances within a dynamical coupled-channels model of πN and γN reactions,” *Phys. Rev.*, vol. C88, no. 3, p. 035209, 2013.
- [219] M. Batinić, S. Ceci, A. Švarc, and B. Zauner, “Poles of the Zagreb analysis partial-wave T matrices,” *Phys. Rev.*, vol. C82, p. 038203, 2010.
- [220] G. F. Chew and S. Mandelstam, “Theory of low-energy pion pion interactions,” *Phys. Rev.*, vol. 119, pp. 467–477, 1960.
- [221] C. B. Chiu, “Evidence for regge poles and hadron collision phenomena at high energies,” *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, vol. 22, pp. 255–316, 1972.
- [222] S. Mandelstam, “Dynamics Based on Rising Regge Trajectories,” *Phys. Rev.*, vol. 166, pp. 1539–1552, 1968.
- [223] G. Veneziano, “Construction of a crossing - symmetric, Regge behaved amplitude for linearly rising trajectories,” *Nuovo Cim.*, vol. A57, pp. 190–197, 1968.
- [224] A. P. Szczepaniak and M. R. Pennington, “Application of the Veneziano Model in Charmonium Dalitz Plot Analysis,” *Phys. Lett.*, vol. B737, pp. 283–288, 2014.
- [225] A. I. Bugrij, G. Cohen-Tannoudji, L. L. Jenkovszky, and N. A. Kobylinsky, “Dual amplitudes with mandelstam analyticity,” *Fortsch. Phys.*, vol. 21, pp. 427–506, 1973.
- [226] L. L. Jenkovszky, “Dual Properties of DAMA,” *Sov. J. Nucl. Phys.*, vol. 21, p. 334, 1975. [Yad. Fiz.21,645(1975)].
- [227] M. Shi, I. V. Danilkin, C. Fernández-Ramírez, V. Mathieu, M. R. Pennington, D. Schott, and A. P. Szczepaniak, “Double-Regge Exchange Limit for the $\gamma p \rightarrow K^+ K^- p$ Reaction,” *Phys. Rev.*, vol. D91, no. 3, p. 034007, 2015.
- [228] F. James and M. Roos, “Minuit: A System for Function Minimization and Analysis of the Parameter Errors and Correlations,” *Comput. Phys. Commun.*, vol. 10, pp. 343–367, 1975.
- [229] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing*. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 3 ed., 2007.
- [230] B. Efron and R. Tibshirani, *An Introduction to the Bootstrap*. Chapman & Hall/CRC Monographs on Statistics & Applied Probability, Taylor & Francis, 1994.
- [231] J. Landay, M. Döring, C. Fernández-Ramírez, B. Hu, and R. Molina, “Model Selection for Pion Photoproduction,” *Phys. Rev.*, vol. C95, no. 1, p. 015203, 2017.
- [232] C. Fernández-Ramírez and A. Relaño, “Spectral-fluctuations test of the quark-model baryon spectrum,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 98, p. 062001, 2007.