UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

APLICACIÓN DE MOMENTO EN GEOMETRÍA SIMPLÉCTICA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

OSCAR ARISTIDEZ MARTINEZ SALAS

DIRECTOR DE TESIS

DR. ALEJANDRO BETANCOURT DE LA PARRA

2019

Ciudad Universitaria, CDMX.

Datos del alumno
Martinez
Salas
Oscar Aristidez
55 20 88 58 55
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
304124693

Datos del Tutor
Dr.
Alejandro
Betancourt
De la Parra

Datos Sinodal 1
Dr.
Héctor Fidencio
Sánchez
Morgado

Datos Sinodal 2
Dr.
Pierre Michel
Bayard

Datos Sinodal 3
Dr.
Oscar Alfredo
Palmas
Velasco

Datos Sinodal 4
M en C
Berenice
Zavala
Jiménez

Datos del trabajo escrito
Aplicación de momento en geomería simpléctica
70 páginas
2019

Agradecimientos:
A mis maestros,
por todas sus enseñanzas.
A mis sinodales,
por sus consejos y sugerencias.
Dr. Oscar Palmas.
Dr. Héctor Sánchez.
Dr. Pierre Bayard.
M. en C. Berenice Zavala.
Y especialmente, al
Dr. Alejandro Betancourt,
por su tiempo, enseñanzas,
y aceptar dirigir este trabajo.

Índice general

Introducción

El presente trabajo tiene como objeto el teorema de **reducción o cociente simpléctico**. Para lo cual los primeros capítulos se centrarán en definir algunos de los conceptos, así como resultados sobre ellos que a la postre serán las herramientas que nos permitirán trabajar y llevar a buen puerto muestro trabajo.

Como se mencionó en el párrafo anterior, el capítulo primero se compone de los conceptos básicos de la geometría diferencial, tales como *variedades suaves, difeomorfismos, espacio tangente* etc. así como algunos de los operadores diferenciales de primer orden sobre dichas variedades, a saber, *conexiones* principalmente la *conexión de Levi-Civita* y *la derivada exterior.* También será importante definir algunos conceptos sobresalientes sobre álgebra exterior, campos vectoriales y formas diferenciales.

Para el segundo capítulo comenzaremos a adentrarnos en los conceptos básicos de la geometría simpléctica, esto es, lo que una variedad simpléctica significa, algunas características importantes sobre su estructura, a su vez de un resultado muy importante que identifica localmente a las variedades simplécticas llamado teorema de **Darboux**.

Con las herramientas con las que ya contamos de los capítulos anteriores, estaremos ya en condiciones a partir del tercer capítulo de definir lo que son las acciones suaves, y dentro de éstas las que nos interesarán son las llamadas **acciones simplécticas** y más en particular un subgrupo de éstas, las **acciones hamiltonianas**, que serán aquellas que relacionarán campos vectoriales de la variedad con operadores diferenciales y de esta forma nos darán la pauta para introducir el concepto de **aplicación de momento**, punto central de nuestro trabajo.

Finalmente, la aplicación de momento nos da pie para llegar al teorema de **reducción simpléctica**; este resultado se debe a los trabajos del matemático canadiense *Jerrold Marsden* y del estadounidense *Alan Weinstein*, dicho teorema asegura la construcción de variedades simplécticas a partir de un espacio cociente; para dicho espacio cociente la aplicación de momento juega un rol fundamental. Por último y para corroborar los resultados obtenidos presentaremos algunos ejemplos que ilustren el teorema.

Una vez que hemos aclarado la composición secuencial del trabajo, se hace importante introducir al lector en los antecedentes más relevantes sobre la geometría simpléctica.

El "nacimiento" de la geometría simpléctica está fuertemente relacionado con la mecánica clásica. Su forma moderna, como una rama de la geometría diferencial, ha surgido como consecuencia de los múltiples avances y desarrollos "recientes", lo cual le ha otorgado un campo propio e independiente dentro de las matemáticas. El estudio de la topología simpléctica en general está estrechamente ligado con otras áreas de las matemáticas, entre los que sobresalen, la *geometría algebraica y compleja, el álgebra homológica, la teoría de representaciones* así como también otras áreas de la física como lo pueden ser *la teoría de cuerdas* y por supuesto *la mecánica clásica y cuantica.*

Como tal el término "simpléctica" dentro del campo de las matemáticas fue introducido por el matemático Weyl en el año 1939; cabe señalar que los inicios de la geometría simpléctica, si bien no son muy antiguos tiene su origen mucho antes de dicho año; aclarado lo cual, el término surge al consideredar la raíz latina de la palabra *complex*, (compleja).

Por mencionar algunos de los más destacados hitos que dieron forma a la concepción actual de la geometría simpléctica, comenzaremos a ubicarnos a principios del siglo XIX con los trabajos de Lagrange sobre mecánica celeste, el siguiente paso lo encontramos con Hamilton y su introducción de la mecánica hamiltoniana, pero su formulación actual tiene su base en los trabajos de Arnold y Weinstein en los años 60 y 70, respectivamente; posteriormente con el trabajo de Donaldson en los años 90 se ha dado forma a la moderna concepción de la geometría simpléctica.

Capítulo 1

Conceptos Preliminares

A lo largo de este capítulo nos enfocaremos a revisar y dar una noción general de los conceptos que usaremos para poder abordar los resultados principales de la tesis.

1.1. Variedades Suaves

Lo primero será abordar lo que será nuestro objeto de trabajo a lo largo de los consecuentes capítulos, dichos objetos serán las variedades, esto es, conjuntos topológicos los cuales localmente los podemos pensar como muy parecidos al euclidiano, un espacio con el cual del cálculo ya tenemos más familiarizado y a su vez del cual ya tenemos herramienta suficiente para trabajar, así concretamente definimos una variedad (topológica).

Definición 1.1.1 *Una variedad M de dimensión n es un espacio topológico (que supondremos conexo en este trabajo) que tiene las siguientes propiedades:*

1.- Es Hausdorff. Es decir, para cualesquiera dos puntos distintos en M, p y q existen subconjuntos abiertos U_p, $U_q \subset M$ de p y q respectivamente, tal que $U_p \cap U_q = \emptyset$.

2.- Es segundo numerable. Esto es, existe una base numerable para la topología de M.

3.- Cada punto $p \in M$ tiene una vecindad U_p que es homeomorfa a un abierto $V \subset \mathbb{R}^n$.

En tal caso se denota a la variedad como M^n para hacer referencia que la dimensión de la variedad es precisamente n.

Podemos resumir las tres condiciones anteriores de la siguiente manera; para cada $p \in M$ y para cada subconjunto abierto U_p de M, que contiene a p, existe un subconjunto $V \subset \mathbb{R}^n$ y un homeomorfismo $\gamma : U_p \longrightarrow V$, con lo cual decimos que M es localmente euclidiano.

Hacer notar que, aunque lo anterior nos haga ver localmente a M^n como $\mathbb{R}^n$, en general pueden ser muy distintos (topológicamente), es por lo cual que su estudio se hace a través de los abiertos y los homeomorfismos, que a continuación definimos formalmente.

En lo sucesivo usaremos solo M para denotar una variedad de dimensión n y no así M^n, a menos que sea necesario.

Definición 1.1.2 *Dada una variedad M a la pareja (U_p, γ) se le llama carta coordenada sobre M, donde $\gamma : U_p \longrightarrow V$ es un homeomorfismo de $U_p \subset M$ a $V \subset \mathbb{R}^n$.*

Con lo cual cada punto $p \in M$ está contenido en el dominio de alguna carta (U_p, γ), así todo M queda cubierto por los dominios de un conjunto de cartas denominada *atlas*.

Definición 1.1.3 *Un atlas para un variedad M, es una familia $\{(U_\alpha, \gamma_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ de cartas, tales que los dominios U_α cubren a M.*

Con $\mathcal{I}$ un conjunto de índices no necesariamente finito.

Dada una variedad M y $\{(U_\alpha, \gamma_\alpha),\ (U_\beta, \gamma_\beta)\}$, dos cartas tales que se satisface, $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, la función composición $\gamma_\beta \circ \gamma_\alpha^{-1} : \gamma_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \gamma_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ es denominada la **función de transición** de γ_α a γ_β.

Para poder hacer uso de los conceptos de cálculo necesitamos introducir en este momento el concepto de difeomorfismo, que es una herramienta poderosa y que junto con las cartas nos permitirán extraer información importante de las variedades.

Definición 1.1.4 *Dados dos subconjuntos abiertos $U \subset \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^m$, una función $f : U \longrightarrow V$ se dice de clase C^p, si todas sus derivadas parciales de orden p existen y son continuas. Así mismo decimos que f es C^∞ si es de clase C^p para toda p.*

A las funciones de clase C^∞ se les conoce como suaves.

Con esto en mente podemos introducir el concepto de **difeomorfismo** como aquella función que es invertible, suave y con inversa suave.

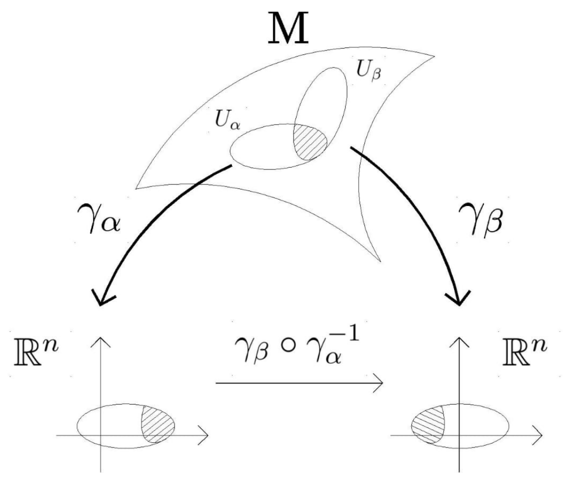


Figura 1.1: Función de transición.

Una de las propiedades que más será de utilidad acerca de las funciones suaves es aquella que nos asegura que la composición de éstas sigue siendo una función suave, con lo cual podemos pasar de un subconjunto abierto a otro a través de composiciones sin perder la suavidad.

Proposición 1.1.1 *La composición de funciones de clase C^p es de clase C^p.*

Esta proposición se puede ver como una consecuencia de la regla de cadena para una funciones de clase C^p.

Cabe destacar que la composición y el producto de difeomorfismos es nuevamente un difeomorfismo, lo cual podríamos pensar otorga a los difeomorfismos estructura algebraica de grupo, esto es relevante tener en mente para construcciones futuras.

Relacionando los definiciones anteriores, podemos pedir una característica más a los mapeos de transición, lo cual nos permite pasar de una carta a otra de manera "suave", es decir, que el cálculo que pretendamos hacer sobre la variedad sea el cálculo que sabemos hacer en $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.1.5 *Dadas dos cartas $\{(U_\alpha, \gamma_\alpha),\ (U_\beta, \gamma_\beta)\}$ se dice son compatibles C^∞ siempre que $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ o el mapeo de transición sea un difeomorfismo.*

Un atlas en el que cualesquiera 2 cartas son compatibles lo llamaremos suave y lo denotaremos por $\mathcal{A}$; ahora una sutileza podría consistir en estar trabajando con cartas las cuales podrían no pertenecer a un mismo atlas, para evitar los inconvenientes que esto podría ocasionar definimos una nuevo atlas, el cual consiste de todas las cartas que son compatibles entre sí.

Definición 1.1.6 *Un atlas $\mathcal{A}$ para una variedad M es maximal si no está propiamente contenido en cualquier otro atlas suave, visto en otra forma, si cualquier carta compatible con alguna de sus cartas también está contenida en él.*

Definición 1.1.7 *Una estructura suave o diferenciable sobre una variedad M consiste de un atlas suave maximal $\mathcal{A}$.*

Con lo cual estamos finalmente en condiciones de definir el que será nuestro principal objeto de estudio.

Definición 1.1.8 *Una variedad diferenciable consiste de una variedad topológica M equipada con una estructura suave $\mathcal{A}$, esto es, un pareja $(M, \mathcal{A})$.*

Como la intención es poder hacer uso de las herramientas del cálculo en espacios euclidianos, con la construcción de variedad diferenciable estamos mucho más cerca de lograrlo. Lo primero es considerar funciones de valor real con dominio en la variedad, así si γ es una carta de la variedad entonces diremos que la función $f \circ \gamma^{-1}$ será la expresión de f en **coordenadas locales**, la cual es una del tipo ya conocido del cálculo de $\mathbb{R}^n$, ya que si la carta $\gamma : U \subset M \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ y $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ entonces $f \circ \gamma^{-1} : \gamma(U) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

Así las cosas, diremos que una función f de valor real con dominio en una variedad M es suave, si su expresión en coordenadas locales $f \circ \gamma^{-1}$ es de clase C^∞ para cada carta en M. Para facilitar la notación al conjunto de funciones suaves de valor real sobre la variedad M la denotaremos por $C^\infty(M)$.

Un aspecto importante es que junto con las operaciones naturales de suma y producto de funciones suaves, $C^\infty(M)$ forma un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

1.2. Funciones Suaves

El paso siguiente consiste en extender la idea de suavidad a funciones entre variedades, para lo cual consideremos una función continua F que toma su dominio en una variedad M y cuya imagen está contenida en otra variedad N, es decir, $F : M \longrightarrow N$. Diremos que F es **suave**, si para cada $p \in M$, existen

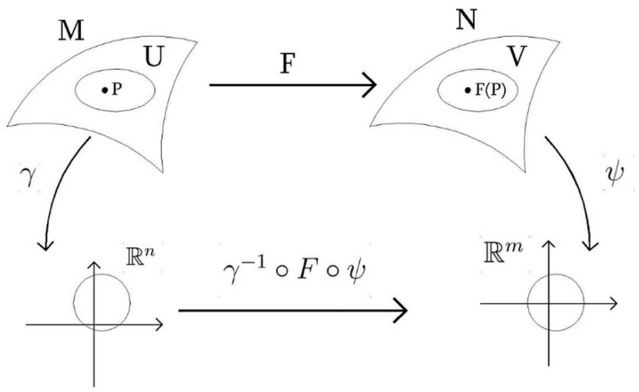


Figura 1.2: Función suave.

cartas suaves (U, γ) de M conteniendo a p y (V, ψ) de N conteniendo a $F(p)$, de tal manera que $F(U) \subset V$ y la función $\psi \circ F \circ \gamma^{-1}$ es suave.

Notar que M y N no tienen necesariamente porque ser de la misma dimensión, y que dado que las vecindades dependen del punto p podemos pensar la suavidad como un concepto local.

Definición 1.2.1 *Dadas dos variedades suaves M y N, una función de la forma $F : M \longrightarrow N$ es un difeomorfismo si es suave, invertible y cuya inversa es también suave.*

En tal caso decimos que M y N son difeomorfas. Un resultado de cálculo que se extiende naturalmente para variedades nos asegura que si dos variedades son difeomorfas entonces son de la misma dimensión. Así podemos pensar el ser "difeomorfos" como una relación de equivalencia sobre la clase de todas las variedades. Notar que particularmente un difeomorfismo es un homeomorfismo.

Definición 1.2.2 *Dada una variedad suave M^n, un subconjunto $S \subset M$ se dice subvariedad suave de dimensión r $(r \leq n)$, si para cada $q \in S$ existe una carta (U, γ) de la forma $\gamma : U \longrightarrow V$, en la que se satisface que:*

$$x \in U \quad y \quad \gamma(U \cap S) = V \cap \mathbb{R}^r.$$

Con $\mathbb{R}^r \subseteq \mathbb{R}^n$.

Podemos observar que una subvariedad suave S de una variedad suave M es nuevamente una variedad suave. Y para la cual podemos dar un atlas explícitamente dado por las cartas $\gamma : U \cap S \longrightarrow V \cap \mathbb{R}^r$, en donde (U, γ) son las cartas para M.

Una observación importante es que la imagen de una variedad bajo un encaje[1] es una subvariedad.

Un concepto de suma importancia y que nos permitirá extraer más herramienta del cálculo, es el de espacio tangente. Su importancia radica en que nos permite darle sentido a la idea de derivada sobre variedades suaves, la cual nos dirá mucho sobre el comportamiento de estas, así para cada punto $p \in M$ consideremos un tipo particular de "curvas", $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$, es decir funciones cuyo dominio se encuentra en un intervalo contenido en $\mathbb{R}$ y cuya imagen esté sobre la variedad; y las cuales además satisfacen que $\alpha(0) = p$. Bajo estas condiciones se tiene una relación de equivalencia en el conjunto de curvas, esto es, dadas dos curvas α_1 y α_2 que satisfacen las condiciones anteriores diremos que son equivalentes si existe una carta (U, γ) con $p \in U$ tal que $(\gamma \circ \alpha_1)'(0) = (\gamma \circ \alpha_2)'(0)$. A la clase de estas curvas las denotaremos por $[\alpha]$. Con lo cual damos una primera definición de espacio tangente dado por, $T_pM = \{[\alpha] \mid \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M, \quad \alpha(0) = p\}$.

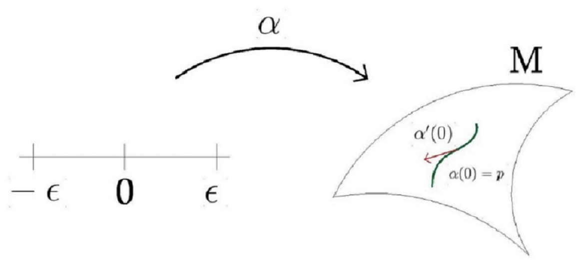


Figura 1.3: Curvas en el espacio tangente.

Lo bonito de esta definición es su trasfondo e intuición geométrica, es decir, nos permite pensar cómo se ven los vectores tangentes a las curvas, o de otra forma, su diferencial, el problema o desventaja radica en que dicha definición depende de las cartas que se consideren, esto es, de un sistema coordenado a su vez; la complejidad radica en asignarle la estructura de espacio vectorial al

[1]ver apéndice A.

espacio tangente en cada punto de la variedad, para cual introducimos otra noción de espacio tangente “más general” la cual nos permitirá dotar al espacio tangente una estructura abstracta de espacio vectorial sobre cada punto de la variedad.

Definición 1.2.3 *Dada una variedad M y un punto en ella $p \in M$, un vector tangente a M en p, es una función de valor real $v : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$, la cual satisface:*

i) Linealidad sobre $\mathbb{R}$. Esto es

$$v(af + bg) = av(f) + bv(g), \text{ para } a, b \in \mathbb{R}.$$

ii) Leibniz. Esto es

$$v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g), \text{ para } f, g \in C^\infty(M).$$

Por tanto, en cada punto $p \in M$ llamamos el **espacio tangente** al conjunto de vectores tangentes a M en p, es decir T_pM.

Las operaciones usuales de suma y multiplicación por un escalar hacen del espacio tangente un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Para poder definir una noción de derivada parcial de una función $f \in C^\infty(M)$ habrá que usar cartas. Así, dada una carta $\gamma = (x^1, ..., x^n)$ sobre un punto $p \in M$, la **derivada parcial** de f respecto a x^i sobre p queda expresada por:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial(f \circ \gamma^{-1})}{\partial u^i}(\gamma(p)). \tag{1.1}$$

Con $u^1, ..., u^n$ las coordenadas en $\mathbb{R}^n$

Como se puede observar esta definición sí depende de la carta que se elija, lo que en principio podría representar un inconveniente, el cual lo resolvemos de la siguiente manera: Dadas dos cartas $\gamma = (x^1, ..., x^n)$ y $\zeta = (y^1, ..., y^n)$ sobre un punto $p \in M$, las derivadas parciales de $f \in C^\infty(M)$ respecto a ellas, se relacionan mediante:

$$\frac{\partial f}{\partial y^i}(p) = \frac{\partial(\gamma \circ \zeta^{-1})}{\partial u^i}(\zeta(p))\frac{\partial f}{\partial x^i}(p). \tag{1.2}$$

Con lo cual, para cada $p \in M$ y una carta sobre él, γ, se tiene una función de la forma:

$$\partial_i|_p = \frac{\partial}{\partial x^i}|_p : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Teorema 1.2.1 *Dada una carta $\gamma = (x^1, ..., x^n)$ sobre un punto $p \in M$, las funciones ∂_i son una base para el espacio tangente T_pM.*

La demostración se puede consultar en [10].

Particularmente y gracias al teorema anterior podemos destacar que las dimensiones de M y de T_pM son las mismas.

Ahora, dada $f : M \longrightarrow N$ fijémonos en una función que envía elementos de T_pM, es decir, "curvas" $\alpha'(0)$, a "curvas" en $T_{f(p)}N$ en la forma $(f \circ \alpha)'(0)$, y además que dicha función es tal que no depende de la curva que se eliga, ya que si dos curvas α y β son tales que $\alpha'(0) = \beta'(0)$, entonces se tiene que $(f \circ \alpha)'(0) = (f \circ \beta)'(0)$. En abstracto, dado un elemento $v \in T_pM$, entonces $v_f : C^\infty(N) \longrightarrow \mathbb{R}$, la cual envía un $g \in C^\infty(N)$ a $v(g \circ f)$, es un vector tangente a N sobre el punto $f(p)$.

Dicho lo cual introducimos la siguiente definición.

Definición 1.2.4 *Sean M y N variedades, $f : M \longrightarrow N$ una función suave, para cada $p \in M$ la función dada por:*

$$df_p : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$$

que envía cada $v \in T_pM$ a $v_f \in T_{f(p)}N$ es llamada la diferencial de f en p.

Notar que si $g \in C^\infty(N)$ entonces la función composición $(g \circ f) \in C^\infty(M)$ y por tanto $v(g \circ f)$ está de hecho bien definida.

Definición 1.2.5 *Dada una función suave entre variedades $f : M \longrightarrow N$, un punto $q \in N$ se dice* **valor regular** *de f si se cumple que $df_p : T_pM \longrightarrow T_qN$ es suprayectiva en cada p de tal forma que $f(p) = q$.*

El siguiente teorema es de gran utilidad y que nos da criterios para ver si un cierto subconjunto de una variedad es subvariedad fijándonos en sus valores regulares.

Teorema 1.2.2 *(***Imagen Inversa.***)*

Sea $f : M \longrightarrow N$ una función suave entre variedades y q un valor regular, entonces la imagen inversa $f^{-1}(q)$ es una subvariedad de M y además la $dim\, f^{-1}(q) = dim\, M - dim\, N$.

Proposición 1.2.1 *Sea $f : M \longrightarrow N$ una función suave entre variedades, q un valor regular y Q la imagen inversa de q. Entonces el kernel de la derivada $df_p : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$ en cualquier $p \in Q$ es igual al espacio tangente a Q, esto es, $ker\, df_p = T_pQ$.*

Demostración. La demostración se puede consultar en [5].

Ahora definimos un nuevo conjunto dado por la unión disjunta de todos los espacios tangentes.

Definición 1.2.6 *El haz tangente de M, denotado por TM está dado por:*

$$TM = \coprod_{p \in M} T_pM = \{(p, v), \,|\, p \in M, \, v \in T_pM\}.$$

De manera análoga se puede definir un **haz cotangente** en función del espacio cotangente como $T^*M = \{(p, \theta), \,|\, p \in M, \, \theta \in T_p^*M\}$.

Una observación es que el haz tangente tiene estructura de variedad, además si la dimension de la variedad es n entonces la dimensión del haz TM será $2n$.

Dichos haces son los dos primeros ejemplos que podemos ver de haces vectoriales y para los cuales, las construcciones del álgebra lineal para espacios vectoriales siguen siendo válidas.

Por último daremos una noción de lo que son los campos vectoriales en variedades, para lo cual nos valdremos de la noción de haz tangente, recordemos del cálculo que un campo vectorial era una función suave que para cada punto en un subconjunto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ le asigna un vector en $\mathbb{R}^m$, ahora para hacer la analogía en variedades necesitaremos valernos de los vectores en TM, por lo cual un campo vectorial en variedades envía elementos de una variedad a elementos en su haz tangente.

Definición 1.2.7 *Un campo vectorial X sobre una variedad M es una función $X : M \longrightarrow TM$ que asigna a cada punto $p \in M$ un vector tangente $X(p) \in T_pM$.*

Al conjunto de campos vectoriales suaves sobre una variedad M lo denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$.

Podemos pensar a los campos vectoriales de una manera *geométrica*, y esto es por medio de las curvas integrales. Así, dada un variedad M una **curva integral** de un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ es una curva suave $\gamma : I \longrightarrow M$, con $I \subset \mathbb{R}$ tal que

$$\gamma'(t) = X_{\gamma(t)}, \quad \forall t \in I.$$

Si $0 \in I$ se dice que el punto $\gamma(0)$ es el punto inicial de γ.

El inconveniente surge que para poder encontrar curvas integrales se debe resolver un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. En efecto, para que $\gamma(t) = (\gamma^1(t), ..., \gamma^n(t))$ sea una curva integral de un campo $X = (X^1, ..., X^n)$

la condición $\gamma'(t) = X_{\gamma(t)}$ se convierte en el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{aligned} \tfrac{d\gamma^1}{dt} &= X^1(\gamma^1(t), ..., \gamma^n(t)) \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ \tfrac{d\gamma^n}{dt} &= X^n(\gamma^1(t), ..., \gamma^n(t)). \end{aligned}$$

Al ser los componentes X^i del campo X funciones suaves podemos suponer la existencia y unicidad del sistema.

Teorema 1.2.3 *Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$. Para cada $p \in M$, existe un intervalo I que contiene al O y una curva suave $\gamma : I \longrightarrow M$ que es una curva integrable de X comenzando en p.*

La demostración se puede consultar en [7].

Supongamos que $\gamma : I \longrightarrow M$ es una curva integrable para $X \in \mathfrak{X}(M)$ entonces las siguientes curvas también son curvas integrales para X.

I. La curva dada por $\gamma(at)$, donde $at \in I$.

II. La curva dada por $\gamma(t+b)$, con $t+b \in I$.

Consideremos ahora en cada $p \in M$ que el campo X tiene una curva integrable comenzando en p y definida para toda $t \in \mathbb{R}$ denotada por $\Phi^p : \mathbb{R} \longrightarrow M$. En cada t definamos una nueva función dada por $\Phi_t : M \longrightarrow M$ la cual envia cada $p \in M$ a un nuevo punto a lo largo del momento t de la curva integral comenzando en p, esto es, se tiene la relación $\Phi_t(p) = \Phi^p(t)$. Agrupando lo anterior se tiene que la función $\Phi^p(t+s)$ también es una curva integral para X comenzando en el punto $q = \Phi^p(s)$, por tanto y suponiendo la unicidad de las curvas integrales se tiene $\Phi^q(t) = \Phi^p(t+s)$. Lo cual nos arroja para las funciones Φ_t la igualdad $\Phi_t \circ \Phi_s(p) = \Phi_{t+s}(p)$, más aún, debido a que también se tiene la igualdad $\Phi_0(p) = \Phi^p(0)$ podemos pensar en una acción de grupos dada por $\Phi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$.

Así, definimos un **flujo** en M como una acción continua izquierda sobre M, es decir, una función $\Phi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$, la cual satisface

$$\Phi(t, \Phi(s,p)) = \Phi(t+s, p), \quad \Phi(0,p) = p, \quad \text{con } t, s \in \mathbb{R} \text{ y } p \in M.$$

Como consecuencia tenemos que la función $\Phi_t : M \longrightarrow M$ es de hecho un homeomorfismo, y si el flujo es suave entonces Φ_t resulta un difeomorfismo.

1.3. Haces Vectoriales

Definición 1.3.1 *Un haz vectorial (de rango p) es una terna* (E, M^n, π) *donde* E *y* M *son variedades y* $\pi : E \longrightarrow M$ *es sobre de manera que se satisface:*

1. *Para cada* $p \in M$*, el conjunto* $E_p := \pi^{-1}(p)$ *llamado* **la fibra** *de* E *sobre* p*, sea un espacio vectorial de dimensión* r*. Aquí hay que hacer la observación que* $\dim E = n + r$*.*

2. **Trivialidad Local**. *Para cada* $p \in M$*, existe* U *vecindad de* p*, tal que* $\pi^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{R}^n$ *mediante* $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^n$ *en donde* φ *satisface* $\varphi_U(U_p) = (p, x)$*, para* $U_p \in E_p$*.*

3.- **Compatibilidad.** *Dados* U *y* V *que trivialicen* E*, existe una función* $\varphi_{UV} : U \cap V \longrightarrow GL(\mathbb{R}^r)$ *tal que* $\varphi_V(V_p) = (p, \varphi_{UV}(p)(x))$ *donde* $\varphi_V(V_p) = (p, x)$*.*

Cuando las variedades E y M son suaves, la función π es suave, y en tal caso E se denomina **haz vectorial suave**. Bajo estas condiciones E es llamado el **espacio total del haz**, M **la base** y π **la proyección**.

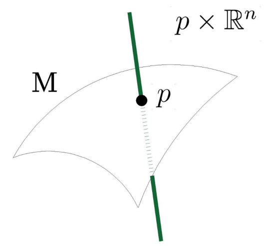


Figura 1.4: Haz trivial

Definición 1.3.2 *Una sección de un haz vectorial* (E, M, π) *es una función suave* $\sigma : M \longrightarrow E$ *de tal forma que* $\pi(\sigma(p)) = p$*,* $\forall p \in M$*.*
De lo cual $\sigma(p)$ *es un elemento de* E_p *para cada* $p \in M$*.*

Es decir, para cada punto $p \in M$ se tiene que:

$$\sigma : p \mapsto v \in E_p.$$

Nuevamente, cuando se trate de variedades suaves, y por tanto de haces vectoriales suaves diremos que la sección es suave, y dado que en este trabajo

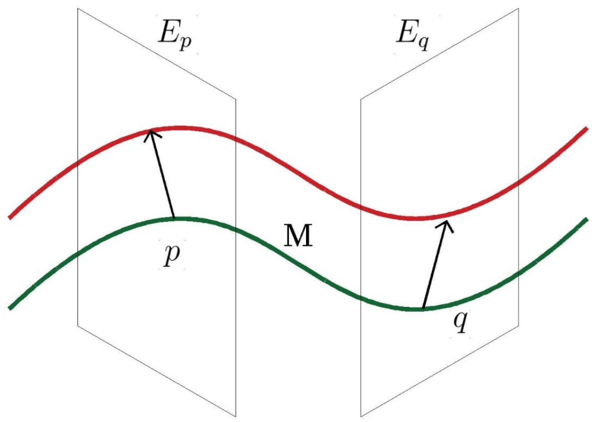


Figura 1.5: Secciones.

solo trabajaremos con las de este tipo, en lo sucesivo omitiremos el término "suave" para no cargar y abusar tanto la palabra.

Podemos, de hecho notar la existencia de una sección canónica, la sección cero dada por $\sigma_0(p) = 0_p \in T_pM$.

Destaquemos 2 ejemplos de secciones.

1) Una función suave se puede ver como una sección del haz trivial $M \times \mathbb{R}$.

2) Todo campo vectorial $X : M \longrightarrow TM$ es una sección del haz tangente.

Dado un haz vectorial (E, M, π), el conjunto de secciones de E forma un espacio vectorial de dimensión infinita bajo la suma puntual y la multiplicación escalar, es decir,

$$(\lambda\sigma_1 + \mu\sigma_2)(p) = \lambda\sigma_1(p) + \mu\sigma_2(p), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Dicho espacio vectorial lo denotaremos por $\Gamma(E)$. Dos propiedades que podemos destacar sobre secciones son:

1.- Producto por funciones suaves de valor real. Si $f \in C^\infty(M)$ y $\sigma \in \Gamma(E)$ entonces una nueva sección estará dada por $(f\sigma)(p) = f(p)\sigma(p)$.

2.- Si $f, g \in C^\infty(M)$ y $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma(E)$ entonces, $f\sigma_1 + g\sigma_2 \in \Gamma(E)$.

1.4. Conexiones

Empezaremos esta sección definiendo conexiones sobre haces vectoriales en general para luego enfocarnos en aquellas sobre el haz tangente.

Definición 1.4.1 *Dado un haz vectorial* (E, M, π) *una conexión es una función*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$$
$$(X, \sigma) \mapsto \nabla_X \sigma$$

que satisface:

C1.- **Linealidad sobre** $C^\infty(M)$ *en* X

$$\nabla_{fX_1+gX_2}\sigma = f\nabla_{X_1}\sigma + g\nabla_{X_2}\sigma \quad \textit{con } f, g \in C^\infty(M).$$

C2.- **Linealidad de los reales en la sección.**

$$\nabla_X(\lambda\sigma_1 + \mu\sigma_2) = \lambda\nabla_X\sigma_1 + \mu\nabla_X\sigma_2 \quad \textit{con } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

C3.- **Regla de Leibniz sobre el producto**

$$\nabla_X(f\sigma) = f\nabla_X\sigma + (Xf)\sigma \quad \textit{con } f \in C^\infty(M).$$

En tal caso, $\nabla_X\sigma$ es llamada la **derivada covariante** de σ en la dirección de X. Notar en este punto que una conexión en realidad es un operador de carácter local sobre la variedad, dado que para extraer mayor información necesitamos algo de carácter global, en principio podría parecer existir un inconveniente, para lo cual la siguiente proposición nos ofrece la solución, asegurándonos que será suficiente conocer el valor de la sección y el campo vectorial “cerca” o en un punto $p \in M$ (carácter local), para calcular el valor global de la derivada covariante.

Proposición 1.4.1 *Dada una conexión* ∇ *sobre un haz vectorial* (E, M, π)*, si* $X \in \mathfrak{X}(M)$*,* $\sigma \in \Gamma(E)$ *y* $p \in M$*, entonces* $\nabla_X\sigma(p)$ *depende solo de los valores de* σ *en una vecindad de* p *y el valor de* X *en* p*.*

La demostración se puede consultar en [8].

Para facilitar la notación escribimos en tal caso $\nabla_{X_p}\sigma$, así, podemos ahora pensar a la derivada covariante como una derivada direccional de la sección σ en la dirección del vector X_p.

Damos el paso ahora a considerar conexiones sobre el haz tangente a una variedad. Así, una conexión sobre TM, es de la forma:

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M).$$

En la cual, dados 2 campos vectoriales $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ les asocia un nuevo campo vectorial dado por $\nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M)$ que satisface las propiedades *1, 2 y 3*.

Definición 1.4.2 *Un marco local para TM consiste de n campos vectoriales suaves $(E_1, ..., E_n)$ definidos sobre algún conjunto abierto U de tal forma que $(E_1|_p, ..., E_n|_p)$ es una base para T_pM en cada punto $p \in U$.*

De igual forma, para un marco asociamos su *comarco dual*, dado por $(\varphi^1, ..., \varphi^n)$ consistiendo de 1-formas para las cuales $\varphi^i(E_j) = \delta^i_j$.

Como ejemplos básicos tenemos el marco coordenado dado por $\{\partial_i\}$ y su comarco dual $\{dx_i\}$.

En efecto, considerando un marco $(E_1, ..., E_n)$ definido en una vecindad U de $p \in M$, si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ los podemos expresar de la forma:

$$X = \sum_{i=1}^{n} f_i E_i, \quad Y = \sum_{j=1}^{n} g_j E_j \quad f_i, g_j \in C^\infty(U).$$

De lo cual una conexión quedaría expresada en la forma:

$$\nabla_X Y = \sum_{i=1}^{n} f_i \nabla_{E_i} Y. \tag{1.3}$$

Y para cada campo en el marco por propiedades de la conexión se vería en la forma:

$$\nabla_{E_i} Y = \nabla_{E_i}(\sum_{j=1}^{n} g_i E_j) = \sum_{j=1}^{n} (g_j \nabla_{E_i} E_j + E_i(g_j) E_j).$$

A partir de ahora usaremos solo el marco coordenado, es decir, para TM una base $(\partial_1, ..., \partial_n)$ con $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ y así podemos calcular $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma^k_{ij} \partial_k$.

Considerando que en principio $\nabla_{\partial_i} \partial_j$ es combinación lineal de $(\partial_1, ..., \partial_n)$, se sigue que una conexión la podemos pensar como una colección de n^3 funciones Γ^k_{ij} llamadas **símbolos de Christoffel**.

En $\mathbb{R}^n$ un campo Y es de la forma $Y = (Y^1, ..., Y^n)$ con Y^i funciones en $\mathbb{R}$, por lo cual si X es un campo en $\mathbb{R}^n$, $\nabla_X Y = (D_X Y^1, ..., D_X Y^n)$, teniendo que en $\mathbb{R}^n$, $D_X f = \langle gradf, X \rangle$.

Otra manera de entender una conexión y que puede llegar a ser más útil es como una función de la forma:

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M).$$

Observando que $\mathfrak{X}^*(M) = \Gamma(T^*M)$, con lo cual la expresión queda finalmente dada por

$$\nabla : \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(T^*M \otimes TM).$$

Y así definir una conexión de la forma siguiente.

Definición 1.4.3 *Dado un haz vectorial suave (E, M, π). Una conexión es una función de la forma.*

$$\nabla : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(T^*M \otimes E).$$

Y en la que se cumple:

1.- **Lineal.** $\nabla(\sigma_1 + \lambda\sigma_2) = \nabla\sigma_1 + \lambda\nabla\sigma_2 \qquad \sigma_i \in \Gamma(E),\ \lambda \in \mathbb{R}.$

2.- **Leibniz.** $\nabla(f\sigma) = f\nabla\sigma + df \otimes \sigma \qquad f \in C^\infty(M),\ \sigma \in \Gamma(E).$

Lo que nos propondremos ahora será dar una expresión explícita para la conexión. Así, si tenemos una conexión en TM

$$(\nabla_X^{TM}\Theta)Y := X(\Theta(Y)) - \Theta(\nabla_X^{TM}Y), \quad X, Y \in \Gamma(TM),\ \Theta \in \Gamma(T^*M)$$

con

$$\Theta(X) = \langle \Theta, X \rangle$$

esto es

$$X(\Theta(Y)) = (\nabla_X\Theta)(Y) + \Theta(\nabla_X Y),$$

o bien

$$X(\langle \Theta, Y \rangle) = \langle \nabla_X \Theta, Y \rangle + \langle \Theta, \nabla_X Y \rangle.$$

Finalmente, si σ es una sección tal que $\sigma \in C^\infty(T^*M \otimes T^*M)$, entonces para $X \in \Gamma(TM)$ la conexión $(\nabla_X\sigma)(Y, Z)$ queda expresada en la forma:

$$(\nabla_X\sigma)(Y, Z) = X(\sigma(Y, Z)) - \sigma(\nabla_X Y, Z) - \sigma(Y, \nabla_X Z).$$

Más en general, si $\sigma \in C^\infty(\otimes^r TM) \otimes (\otimes^s T^*M)$, $\sigma(X^1, ..., X^r, \Theta_1, ..., \Theta_s)$, entonces la conexión se extiende en la forma:

$$(\nabla_Y\sigma)(X^1, ..., X^r, \Theta_1, ..., \Theta_s) = Y(\sigma(X^1, ..., X^r, \Theta_1, ..., \Theta_s))$$

$$-\sigma(\nabla_Y X^1, X^2, ..., X^r, \Theta_1, ..., \Theta_s) - \sigma(X^1, \nabla_Y X^2, ..., X^r, \Theta_1, ..., \Theta_s) - ...+$$
$$+\sigma(X^1, ..., X^r, \nabla_Y \Theta_1, ..., \Theta_s) + ... + \sigma(X^1, ..., X^r, \Theta_1, ..., \nabla_Y \Theta_s).$$

Un ejemplo para aclarar ideas, pongamos r=1, s=2, y así tenemos $\sigma(X, Y, \Theta)$ con conexión dada por:

$$(\nabla_Z \sigma)(X, Y, \Theta) = Z(\sigma(X, Y, \Theta)) - \sigma(\nabla_Z X, Y, \Theta) - \sigma(X, \nabla_Z Y, \Theta) + \sigma(X, Y, \nabla_Z \Theta).$$

En general, hasta ahora hemos logrado dar construcciones que nos permiten en cierta forma ver variedades suaves, que en principio pueden ser muy abstractas, como espacios que localmente se parecen al euclidiano, más aún donde la herramienta del cálculo sigue siendo valedera.
Una herramienta que nos hace falta dentro de nuestras variedades es poder calcular distancias, esto es, “medir” y lo cual haremos en el espacio tangente a la variedad.

Definición 1.4.4 *Una métrica riemanniana en una variedad suave M es una sección $g \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M)$ de tal forma que:*

1. $g(X, X) \geq 0$ *para cualquier* $X \in \Gamma(TM)$.
2. $g(X, Y) = g(Y, X) \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM)$.

Con base en la definición anterior, una **variedad riemanniana** consta de un par (M, g) en donde M es una variedad suave y g una métrica riemanniana.

Ahora, para encontrar una **conexión canónica** además de las propiedades *C1, C2 y C3* pediremos dos propiedades más, a saber,

C4.- **Libre de torsión.**

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] = \mathcal{L}_X Y.$$

C5.- **Compatibilidad con la métrica.** Dada una métrica g se satisface:

$$\nabla g = 0.$$

El punto C5 lo podemos pensar como que la conexión ∇ y la métrica g se “relacionan bien”, esto es, primero se tiene:

$$\nabla g \in C^\infty(T^*M \otimes T^*M \otimes T^*M).$$

$$\nabla g(X, Y, Z) = (\nabla_X g)(Y, Z).$$

Luego, partiendo de la hipótesis $\nabla_X g(Y,Z) = 0$, y de la definición de conexión:

$$\nabla_X g(Y,Z) = X(g(Y,Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z).$$

Se tiene entonces:

$$\begin{aligned}\nabla g = 0 &\Longleftrightarrow \nabla g(X,Y,Z) = 0,\ \forall X,Y,Z \in T^*M \\ &\Longleftrightarrow X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).\end{aligned}$$

Con la cual definimos formalmente lo que es la compatibilidad métrica.

Definición 1.4.5 *Dada una conexión ∇ definida en un haz vectorial (E,M,π) y g una métrica en E, decimos que la conexión es compatible con la métrica si y solo si, para todos X,Y,Z se tiene la equivalencia:*

$$X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

Teorema 1.4.1 *Dada una variedad riemanniana (M,g) existe una única conexión que satisface $C1 - C5$, llamada la conexión de Levi-Civita.*

La demostración se puede consultar en [8].

1.5. Álgebra Exterior

Dado un espacio vectorial real V, un **k-tensor** sobre V es una función sobre el producto cartesiano $T : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k\,veces} \longrightarrow \mathbb{R}$, la cual es k-lineal, o en otras palabras lineal para cada $j = 1,...,k$, esto es;

$$T(v_1,...,v_j + \lambda v_j',...,v_k) = T(v_1,...,v_j,...,v_k) + \lambda T(v_1,...,v_j',...,v_k).$$

Cabe hacer la mención que el conjunto de 1-tensores es el espacio dual de V, para $\mathbb{R}^k$ un ejemplo de 2-tensor es el conocido producto punto, y un k-tensor el determinante de tomar k vectores. Como la suma y multiplicación escalar de funciones multilineales sigue siendo multilineal el conjunto de k-tensores forma un espacio vectorial, luego podemos definir una operación para multiplicar tensores de la siguiente manera, dado un r-tensor T y un s-tensor S, definimos el **producto tensorial** $T \otimes S$ el cual es un $(r+s)$-tensor dado por:

$$T \otimes S(v_1,...,v_r,v_{r+1},...,v_{r+s}) = T(v_1,...,v_r)S(v_{r+1},...,v_{r+s}).$$

Notar que en general el producto tensorial es una operación no conmutativa, es decir , $T \otimes S \neq S \otimes T$.

Al conjunto de los k-tensores los denotaremos por $T^k(V)$ y denotamos la suma directa de todos estos espacios por $T(V^*) = \mathbb{R} \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus ...$ cuya suma directa nunca es finita.

Los tensores en los que estamos interesados son algunos tensores particulares llamados **alternantes**, y son aquellos que satisfacen

$$T(v_1, ..., v_i, v_{i+1}, ..., v_k) = -T(v_1, ..., v_{i+1}, v_i, ..., v_k),$$

es decir, aquellos en los cuales el signo del valor del tensor T cambia cuando se intercambian dos entradas adyacentes v_i, v_{i+1}; como consecuencia de lo anterior, podemos notar que todo tensor alternante es tal que satisface,

$$T(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_k) = 0, \quad \textbf{si} \quad v_i = v_j.$$

Al conjunto de tensores alternantes de orden k, lo denotaremos por $\Lambda^k V^*$ el cual, dado que suma y múltiplos escalares de los tensores alternantes permanece alternante, forma un subespacio vectorial de $T(V^*)$.

Dado que nuestro interés se centrará en los tensores del tipo alternante lo relevante ahora será ver que dado un tensor arbitrario siempre lo podemos hacer alternante de la siguiente manera; si T es un k-tensor, definimos el tensor Alt(T) mediante:

$$Alt(T) = \frac{1}{k!} \sum_{\alpha \in S_k} sgn(\alpha) T^{\alpha}.$$

Donde S_k denota el grupo de permutaciones en el conjunto $\{1, ..., k\}$ y $\alpha \in S_k$, retomando del álgebra que una permutación se dice par o impar según su descomposición como producto ya sea de un número par o impar de transposiciones, así tenemos que el signo de una permutación $sgn(\alpha)$ será 1 o -1, según la paridad de α. Así, para un k-tensor y una permutación arbitraria $\alpha \in S_k$ el tensor T^{α} está dado por:

$$T^{\alpha}(v_1, ..., v_k) = T(v_{\alpha(1)}, ..., v_{\alpha(k)}).$$

Destaquemos de lo anterior dos observaciones importantes, primero que un tensor alternante será aquel que satisfaga

$$T^{\alpha} = sgn(\alpha) T \quad \forall \alpha \in S_k.$$

Y segundo, para todo tensor se satisface que $(T^{\alpha})^{\beta} = T^{\alpha \circ \beta}$.

Con lo cual, tenemos que el tensor $Alt(T)$ será siempre alternante, ya sea que T lo sea o no.

Una anotación importante antes de continuar es que si la dimensión del espacio vectorial V es n, y $k > n$ entonces todos los k-tensores alternantes serán iguales a 0. Denotamos por $\Lambda(V)$ a la suma directa dada por $\Lambda(V) = \mathbb{R} \oplus \Lambda^1(V) \oplus \Lambda^2(V) \oplus ... \oplus \Lambda^n(V)$. Observar que esta suma directa sí es necesariamente finita, ya que el grado máximo que puede tener una forma alternante es la dimensión del espacio vectorial.

La finalidad de usar el tensor $Alt(T)$ surge para dar respuesta al inconveniente que, dado que estaremos trabajando con tensores alternantes y con el producto tensorial, la cuestión es que el producto tensorial de tensores alternantes no tiene por qué ser alternante, y para lo cual definimos un nuevo operador llamado **producto cuña** de la siguiente manera; para un k-tensor T y un s-tensor S, el tensor $T \wedge S \in \Lambda^{k+s}(V^*)$ dado por $T \wedge S = Alt(T \otimes S)$.

Algunas propiedades importantes sobre el producto cuña y que no demostraremos aquí por no ser propiamente del interés de este trabajo son:

1) Es un operador lineal, esto es, se distribuye sobre la suma y la multiplicación escalar.

2) Es asociativo, esto es, para tensores T, S, R.

$$(T \wedge S) \wedge R = T \wedge (S \wedge R),$$

3) Es **grado-conmutativo**, $T \wedge S = (-1)^{ks} S \wedge T$.

Como caso particular y relevante es que para operadores lineales de la forma $\alpha,\ \beta \in \Lambda^1(V^*)$ se tiene que :

$$\alpha \wedge \beta = \frac{1}{2}(\alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha) \in T(V).$$

Así, $\Lambda(V)$ la podemos pensar como el subálgebra de $T(V)$ generada por el producto cuña $(\wedge)$. Es decir, $\Lambda(V)$ está generada por los elementos de la forma:

$$\Lambda(V) = V_1,\ V_1 \wedge V_2,\ V_1 \wedge V_2 \wedge V_3, ...,\ V_1 \wedge .... \wedge V_n.$$

Y en general

$$\Lambda(V) = \mathbb{R} \oplus \Lambda^1(V) \oplus \Lambda^2(V) \oplus \Lambda^3(V) \oplus \cdots \oplus \Lambda^n(V).$$

En función de esta descomposición se dice que $\Lambda(V)$ es un álgebra **graduada**.

Dado V un espacio vectorial de dimensión n y una base (e_i), $i \in \{1, ...n\}$. Una base para $\Lambda(V)$ estará dada por:

$$\{e^{i_1} \wedge ... \wedge e^{i_r} \mid i_1 \leq i_r \; y \; 1 \leq r \leq n\}.$$

Por ejemplo, $\Lambda^2(V) = \langle\{e^i \wedge e^j \mid i \leq j\}\rangle = \langle e^1 \wedge e^2, e^1 \wedge e^3, ..., e^2 \wedge e^4, ...\rangle$.

Con lo cual, dado $\alpha \in \Lambda(V)$ lo podemos escribir como:

$$\alpha = \sum \alpha_{i_1,...,i_r}(x) e^{i_1} \wedge ... \wedge e^{i_r}.$$

con grado de α denotado por $deg\,\alpha = r$. Como se mencionó párrafos anteriores el grado máximo que pude tener $\alpha \in \Lambda(V)$ es n, la dimensión del espacio vectorial, pues si tuviera un producto con más elementos $e^{i_1} \wedge ... \wedge e^{i_{n+1}}$, necesariamente $i_j = i_k$ para algún j y k, y por lo cual $e^{i_1} \wedge ... \wedge e^{i_{n+1}} = 0$.

Aplicando lo anterior a variedades, tomemos TM y T^*M los haces tangentes y cotangentes respectivamente, ahora podemos fijarnos en $\Lambda(T^*M)$ y aplicando la construcción anterior para cada punto $p \in M$ tenemos;

$$\Lambda(T^*M) = \coprod_{p \in M} \Lambda(T_p^*M)$$

Lo cual se descompone como $\Lambda(T^*M) = \mathbb{R} \oplus \Lambda^1(T^*M) \oplus ... \oplus \Lambda^n(T^*M)$.

Luego, para una variedad M tenemos la base $(\partial_i)_{1 \leq i \leq n}$ para TM y la base dual $(dx^i)_{1 \leq i \leq n}$ de T^*M de lo cual, una base para $\Lambda(T^*M)$ está dada por:

$$\{dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_r} \mid i_1 \leq ... \leq i_r, \; 0 \leq r \leq n\}.$$

Definición 1.5.1 *Una forma diferencial α de grado r (r-forma), es una sección del haz $\Lambda^r(T^*M)$.*

$$\begin{aligned} \alpha : M &\longrightarrow \Lambda^r(T^*M) \\ p &\mapsto \alpha_p \in \Lambda^r(T_x^*M). \end{aligned}$$

En coordenadas locales, α se ve como:

$$\alpha_p = \sum \alpha_{i_1,...,i_r}(p) dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_r},$$

donde $\alpha_{i_1,...,i_r}$ son funciones reales en M.

Así, una r-forma se puede pensar como una función multilineal y alternante, esto es, $\alpha(X^1, ..., X^r) = \sum \alpha_{i_1,...,i_r} dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_r}(X^1, ..., X^r)$, de donde la última expresión queda explícitamente para dos elementos como

$$dx \wedge dy(X^1, X^2) = \frac{1}{2}(dx \otimes dy - dy \otimes dx)(X^1, X^2)$$

$$= \frac{1}{2}(dx(X^1)dy(X^2) - dy(X^1)dx(X^2)).$$

El conjunto de r-formas sobre una variedad se denota por $\Omega^r(M)$.

Cabe destacar que dadas dos r-formas α y β estas se pueden sumar puntualmente, es decir, $(\alpha + \beta)(p) = \alpha(p) + \beta(p)$, cuya suma resulta una nueva r-forma, otra observación es que las 0-formas son funciones de valor real sobre M.

Para una r-forma $\alpha \in \Omega^r(M)$, el operador $\nabla\alpha$ está definido y asi podemos definir un nuevo operador diferencial.

Definición 1.5.2 *Dada una r-forma (α), se define el operador diferencial $d\alpha = Alt(\nabla\alpha)$ llamado la derivada exterior. $d : \Omega^r(M) \longrightarrow \Omega^{r+1}(M)$. Y queda expresado de manera explícita por:*

$$d\alpha(X^1, ..., X^{r+1}) = \sum(-1)^i(\nabla_{X_i}\alpha)(X^1, ..., \hat{X}^i, ..., X^r)$$

$$= -(\nabla_{X_1}\alpha)(X^2, X^3, ...)+(\nabla_{X_2}\alpha)(X^1, X^3, ...)-...$$

En donde la notación $\hat{X}^i$ significa que omitimos el i-ésimo término.

El operador derivada exterior es considerado una *derivada* ya que satisface las siguientes propiedades:

1. **Linealidad**. Para dos formas α, β se cumple.

$$d(\alpha + \beta) = d\alpha + d\beta.$$

2. **Regla del producto de Leibniz**.

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge d\beta.$$

Siendo α una r-forma.

3. $d^2 = d \circ d : \Omega^r(M) \longrightarrow \Omega^{r+2}(M)$ se anula, es decir;

$$d(d\alpha) = 0, \ \forall\alpha \in \Omega^r(M).$$

1.6. Cohomología de De Rham

En esta sección veremos una breve introducción a la teoría de Cohomología de De Rham, para lo cual comenzaremos con la idea en conjuntos de dimensión 2 y 3, para esto recordemos como están definidos ciertos operadores diferenciables. Así, consideremos un subconjunto U de $\mathbb{R}^2$, una función suave $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, es decir, f es de la forma; $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$, con lo cual el operador gradiente y el rotacional están dados por:

$$grad(f) = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}), \quad rot(f_1, f_2) = \frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial x}.$$

Es decir, si consideramos al conjunto de funciones suaves $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, por $C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$ tenemos que el gradiente y rotacional son de la forma

$$grad : C^\infty(U, \mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(U, \mathbb{R}^2).$$

$$rot : C^\infty(U, \mathbb{R}^2) \longrightarrow C^\infty(U, \mathbb{R}).$$

Dada la forma en cómo operan y que ambos son lineales se cumple que la composición está bien definida y además se satisface que $rot \circ grad = 0$, lo cual implica que el núcleo del rotacional contiene la imagen del gradiente, es decir:

$$im(grad) \subseteq ker(rot).$$

Es por tanto posible considerar el espacio vectorial cociente dado por estos dos subespacios de la manera:

$$ker(rot)/im(grad).$$

El cual denotaremos por $H^1(U)$ y que queda expresamente definido por los elementos de la forma $\alpha + im(grad)$, $\alpha \in ker(rot)$.

En analogía como se definió H^1 se define $H^0(U) = ker(grad)$.

Ahora, dando el paso a subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ para una función suave cuyo dominio sea $U \in \mathbb{R}^3$, vista en la forma $f(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))$ se tienen los operadores diferenciales y lineales

$$grad : C^\infty(U, \mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(U, \mathbb{R}^3), \quad grad(f) = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}).$$

$$rot : C^\infty(U, \mathbb{R}^3) \longrightarrow C^\infty(U, \mathbb{R}^3), \quad rot(f_1, f_2, f_3) = (\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}).$$

$$div : C^\infty(U, \mathbb{R}^3) \longrightarrow C^\infty(U, \mathbb{R}), \quad div(f_1, f_2, f_3) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}.$$

Con lo cual nuevamente podemos notar que $rot \circ grad = 0$ y $div \circ rot = 0$, así pues, definimos nuevamente $H^0(U)$ y $H^1(U)$ como en el caso anterior, e introducimos un nuevo conjunto dado por:

$$H^2(U) = ker(div)/im(rot).$$

Antes de dar al salto al caso general para conjuntos de dimensión mayor, recordemos que dada un forma α, $d(d\alpha) = 0$ y supongamos que $d\beta = 0$ para alguna forma β, la pregunta es, ¿cuándo ocurre que $\beta = d\alpha$? Primero, si $\beta = d\alpha \Longrightarrow d\beta = 0$, pero si $d\beta = 0$, ¿será necesariamente cierto que $\beta = d\alpha$? La respuesta es, en general no, depende de la topología de M [2].

Definición 1.6.1 *Una r-forma β es cerrada si $d\beta = 0$.*

Definición 1.6.2 *Una r-forma β es exacta si $\beta = d\alpha$.*

Observación. Podemos notar toda forma exacta es cerrada.

Definición 1.6.3 *El p-ésimo grupo de cohomología de DeRham es el espacio vectorial cociente dado por:*

$$H^p_{dR} = \frac{ker\ d : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{p+1}(M)}{im\ d : \Omega^{p-1}(M) \longrightarrow \Omega^p(M)} = \frac{formas\ cerradas}{formas\ exactas}.$$

Podemos notar ahora que los casos vistos para $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ resultan casos particulares y consistentes con la definición arriba mencionada.

[2] Escapa de los propósitos primarios del presente trabajo, pero la condición depende de conjuntos llamados *estrella*

Capítulo 2

Geometría Simpléctica

En el capítulo anterior se introdujeron las nociones más básicas y generales de la geometría riemanniana, esto era, una variedad diferenciable M junto con un tensor g llamado métrica, el cual permitía medir distancias y ángulos dentro de dicha variedad M. En razón de lo anterior, el propósito del presente capítulo será abordar otra "geometría", para lo cual el diferenciador principal será una 2-forma antisimétrica y no degenerada denominada **forma simpléctica** Ω la cual, en analogía con el caso riemanniano, acompañada con una variedad M y el estudio de lo que podríamos pensar como sus "isometrías", esto es, los morfismos en M que preserven la forma Ω será la geometría simpléctica.

Pese a que en general, tanto la geometría riemanniana como la simpléctica tienen definida una 2-forma en su haz tangente, presentan múltiples diferencias, como que la dimensión para el caso simpléctico está más restringida, a saber, aquellas de dimensión par y que más adelante veremos a detalle del porqué.

2.1. Álgebra Simpléctica

Como se mencionó en el párrafo anterior, la geometría simpléctica es el estudio de variedades equipadas con una 2-forma antisimétrica y no degenerada, más aún, que sea cerrada, lo cual es una característica puntual de la forma simpléctica, lo que nos lleva a comenzar por nociones en espacios vectoriales simplécticos.

Así, para las definiciones siguientes consideremos V un espacio vectorial de dimensión finita n.

Definición 2.1.1 *Dado un espacio vectorial V una forma simpléctica es una forma bilineal $\Omega : V \times V \longrightarrow R$ con las características siguientes:*

1.- **Antisimétrica**.

$$\Omega(u,v) = -\Omega(v,u) \quad \forall u,v \in V,$$

o equivalentemente $\Omega(u,u) = 0 \quad \forall u \in V$.

2.- **No degenerada**. *Si*

$$\Omega(u,v) = 0 \quad \forall u \in V,$$

entonces $v = 0$.

Definición 2.1.2 *Dado un espacio vectorial V y una forma simpléctica Ω, a la pareja (V,Ω) se le denomina espacio vectorial simpléctico.*

Consideremos un espacio vectorial simplectico (V,ω), dada una base $(e_1,...,e_n)$ de V, ésta tendrá una matriz cuadrada asociada y para economizar la notación sus elementos serán $\Omega_{ij} = \Omega(e_i,e_j)$. Recordemos que si V^* es el dual de V y $(e_1^*,...,e_n^*)$ su base, entonces la forma Ω queda expresada en la forma:

$$\Omega = \sum_{i<j} \Omega_{ij}\, e_i^* \wedge e_j^*. \tag{2.1}$$

Teorema 2.1.1 (Forma estándar de una forma bilineal antisimétrica.) *Sea V un espacio vectorial con $dim(V) = 2n+k$ y Ω una forma bilineal antisimétrica definida en él, entonces existe una base $(e_1,...,e_n,u_1,...,u_n,f_1,...,f_k)$ de V tal que:*

$$\Omega(f_1,v) = 0 \quad \forall v \in V.$$
$$\Omega(e_i,e_j) = 0 = \Omega(u_i,u_j) \quad \forall i,j.$$
$$\Omega(e_i,u_j) = \delta_{ij}.$$

Demostración.
La prueba consiste básicamente en el proceso de Gram-Schmidt.
Primero consideremos el conjunto de elementos ortogonales a V, esto es, $U = \{u \in V \mid \Omega(u,v) = 0, \forall v \in V\}$ y un espacio complementario W a U en V,

$$V = U \oplus W.$$

Sea $(f_1,...,f_k)$ una base de U. Luego al ser U y W subespacios complementarios, $\forall e_1 \in W\backslash\{0\}\ \exists u_1 \in W\backslash\{0\}$ tal que $\Omega(e_1,u_1) \neq 0$. Supongamos que $\Omega(e_1,u_1) = 1$.
Ahora definamos $W_1 = span\{e_1,u_1\}$ y su complemento "ortogonal" en W;

$W_1^{\perp} = \{w \in W \mid \Omega(w,v) = 0 \; \forall v \in W_1\}$.
Esto último define una suma directa $W = W_1 \oplus W_1^{\perp}$. En efecto, sea $v \in W_1 \cap W_1^{\perp}$, es decir, $v = ae_1 + bu_1$. Así

$$\Omega(v, e_1) = 0 = \Omega(v, u_1).$$

Además,

$$\Omega(v, e_1) = \Omega(ae_1 + bu_1, e_1) = \Omega(ae_1, e_1) + \Omega(bu_1, e_1) = -b.$$

$$\Omega(v, u_1) = \Omega(ae_1 + bu_1, u_1) = \Omega(ae_1, u_1) + \Omega(bu_1, u_1) = a.$$

Con lo cual

$$b = a = 0, \text{ y en consecuencia } v = 0.$$

Por tanto

$$W_1 \cap W_1^{\perp} = 0.$$

Veamos que $W = W_1 \oplus W_1^{\perp}$. Consideremos $v \in W$ con $\Omega(v, e_1) = a$ y $\Omega(v, u_1) = b$, así v lo podemos poner como:

$$v = v + au_1 - au_1 + be_1 - be_1 = (-au_1 + be_1) + (v + au_1 - be_1).$$

Notemos que la expresión dentro del primer paréntesis pertenece a W_1.

Para ver que la segunda expresión pertenece a $W_1^{\perp}$, operemos dicha expresión con $e_1 \in W_1$ y veamos que efectivamente es 0, así,

$$\Omega(v + au_1 - be_1, e_1) = \Omega(v, e_1) + \Omega(au_1, e_1) - \Omega(be_1, e_1) = a - a - 0 = 0.$$

Prosiguiendo el proceso, sea $e_2 \in W_1^{\perp} \backslash \{0\}$, entonces $\exists u_2 \in W_1^{\perp}$ de tal forma que $\Omega(e_2, u_2) \neq 0$. Supongamos nuevamente que $\Omega(e_2, u_2) = 1$. Consideremos el conjunto $W_2 = span\{e_2, u_2\}$ y repitamos nuevamente el proceso, el cual dado que la dimensión es finita en algún punto se detendrá, obteniendo:

$$V = U \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_n.$$

Una suma ortogonal simpléctica de $W_i's$ de bases $\{e_i, u_i\}$ y con $\Omega(e_i, u_i) = 1$.

Lo cual concluye la demostración. ■

De lo anterior podemos observar que, debido a que la dimensión k del subespacio U es fija, es por tanto un invariante, además como $dim(V) = 2n + k$ por lo anterior n es también un invariante al igual que $2n$, al menor $2n$ se le denomina **rango**.

Dado el espacio vectorial V y la forma bilineal Ω, podemos dar un morfismo entre V y su dual V^*, dado en la forma siguiente:

$$V \longrightarrow V^*$$

$$v \mapsto \Omega(v, \cdot).$$

En vista de lo anterior, podemos observar que el núcleo de dicha transformación consistirá de los elementos en V ortogonales a todo V, es decir, los elementos del subespacio U definido en la demostración anterior. Dado que la forma Ω es simpléctica, en particular, no degenerada se satisface que dicho núcleo sea el elemento 0, de lo cual $U = \{0\}$, y por tanto llegamos a que $dim(V) = 2n$. Consecuencias importantes de lo anterior es, primero, que todo espacio simpléctico tiene dimensión par. Y segundo, por teorema **2.1.1** todo espacio vectorial simpléctico (V, Ω) tiene una base $e_1, ..., e_n, u_1, ..., u_n$ tal que satisface:

$$\Omega(e_i, u_j) = \delta_{ij} \quad \text{y} \quad \Omega(e_i, e_j) = \Omega(u_i, u_j) = 0$$

y además si $u = (x_1, ..., x_{2n})$, $v = (y_1, ..., y_{2n})$ son elementos en V, entonces;

$$\Omega(u, v) = [x_1, ..., x_{2n}] \begin{bmatrix} 0 & Id \\ -Id & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_{2n} \end{bmatrix}.$$

2.1.1. Subespacios de un Espacio Vectorial Simpléctico

En lo sucesivo y a menos que se indique lo contrario supondremos que estamos trabajando en un espacio vectorial simpléctico (V, Ω). Así, dado un subespacio $W \subset V$ podemos hacer distinciones sobre dicho subespacio en función de su complemento ortogonal, o de forma análoga, por la restricción de Ω en V, así distinguimos:

1.- W se dice **simpléctico** si $\Omega|_W$ es no degenerada, dicho de otra forma $W \cap W^{\perp} = 0$.

2.- W se dice **isotrópico** si $\Omega|_W \equiv 0$, equivalentemente $W \subset W^{\perp}$.

3.- W se dice **coisotrópico** si su ortogonal simpléctico es isotrópico, equivalentemente $W^{\perp} \subset W$.

4.- W se dice **lagrangiano** si es coisotrópico e isotrópico, esto es, $W^{\perp} = W$.

Proposición 2.1.1 *Sea (V, Ω) un espacio vectorial simpléctico y sea $W \subset V$. Entonces se satisfacen las siguientes afirmaciones:*

1. $dim(V) = dim(W) + dim(W^{\perp})$.

2. $(W^{\perp})^{\perp} = W$.

Demostración.
1. Primero, tenemos que al ser V simpléctico el morfismo $V \longrightarrow V^*$ definido previamente es un isomorfismo. Luego $W^{\perp}$ lo podemos ver como el anulador de W sobre V, así las cosas $W^{\perp}$ tendrá la dimensión complementaria de W en V, y con lo cual,

$$dim(V) = dim(W) + dim(W^{\perp}).$$

2. Sea $v \in W$, luego $v \in (W^{\perp})^{\perp}$, ahora $\Omega(v, w) = 0 \ \forall w \in W^{\perp}$, y dado que $v \neq W^{\perp}$ se concluye que $(W^{\perp})^{\perp} = W$. ■

Un subespacio W es simpléctico si y solo si su ortogonal $W^{\perp}$ es simpléctico, lo cual se deduce de $(W^{\perp})^{\perp} = W$. Además si W es isotrópico $W \subset W^{\perp}$ y dado que $dim(W) + dim(W^{\perp}) = dim(V)$ se tiene que necesariamente la dimensión del subespacio será menor o igual a la mitad del espacio total V, es decir, $dim(W) \leq n$ con $dim(V) = 2n$. Análogamente si W es coisotrópico entonces su dimensión será mayor o igual a n y si el subespacio es lagrangiano su dimensión será exactamente n, ya que es isotrópico y coisotrópico a la vez.

Como ya hemos mencionado parte del estudio de la geometría simpléctica son sus morfismos, damos por tanto el paso a definir isomorfismos dentro de los espacios vectoriales simplécticos.

Definición 2.1.3 *Un simplectomorfismo φ entre dos espacios vectoriales simplécticos (V_1, Ω_1) y (V_2, Ω_2) es un isomorfismo lineal:*

$$\varphi V_1 \xrightarrow{\simeq} V_2$$

de tal forma que $\varphi^*\Omega_2 = \Omega_1$.

Recordando que $\varphi^*\Omega_2$ está dado por $\varphi^*\Omega_2(u, v) = \Omega_2(\varphi(u), \varphi(v))$. En dado caso que un simplectomorfismo exista entre dos espacios vectoriales simplécticos estos se dicen simplectomorfos.

2.2. Variedades Simplécticas

Dado que nuestros propósitos se centran en el estudio de variedades, lo que nos interesará ahora es introducir una forma simpléctica ω a un variedad suave M, esto es, una forma que para cada punto $p \in M$, la función $\omega_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ sea antisimétrica sobre el espacio tangente a M y además ω sea cerrada en el sentido de las formas diferenciales, recordando del capítulo anterior, significa que $d\omega = 0$, donde d es la derivada exterior.

Definición 2.2.1 *Una 2-forma ω se dice simpléctica si ω es cerrada y para cada $p \in M$, ω_p es simpléctica.*

Destaquemos que debido a que la dimensión del espacio tangente y la dimensión de la variedad son la misma, el que la forma ω sea simpléctica nos dice que T_pM tiene dimensión par y por tanto también M tiene dimensión par.

Definición 2.2.2 *Una variedad simpléctica es un par (M, ω) con M una variedad y ω una forma simpléctica.*

Ejemplo 1. El ejemplo más elemental de variedad simpléctica lo constituye $\mathbb{R}^{2n}$ con la forma simpléctica estándar o canónica

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i.$$

Análogo a como se definió un simplectomorfismo para espacios vectoriales simplécticos, también se puede definir una noción similar de simpléctomorfismo para variedades.

Definición 2.2.3 *Un simplectomorfismo entre dos variedades simplécticas (M, ω_1) y (N, ω_2) es un difeomorfismo $\varphi : M \longrightarrow N$ de tal forma que preserva la estructura simpléctica, es decir,*

$$\varphi^* \omega_2 = \omega_1.$$

Dados φ y ϕ dos simplectomorfismos entre variedades se tiene:

- $(\varphi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \varphi^*$.
- $(\varphi^{-1})^* = (\varphi^*)^{-1}$.
- $Id^* = Id$.

Definición 2.2.4 *Dada una variedad simpléctica (M, ω) al conjunto de todos sus simplectomorfismos se le llama grupo simpléctico de la variedad y se denota por*[1] *$Symp(M)$.*

Recordando que dado un espacio simpléctico el único invariante con que contábamos era la dimensión, trasladando esto hacia las variedades se transforma en una propiedad local, es decir, localmente dos variedades simplécticas de misma dimensión se ven muy "muy parecidas", lo cual se expresa mejor con el teorema de Darboux.

[1] En la literatura también suele aparecer como $Sp(M)$.

Teorema 2.2.1 (Darboux.)
Sea (M, ω) *una variedad simpléctica de dimensión* $2n$ *y* $p \in M$*, entonces existe una carta coordenada* $(U, x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n)$ *centrada en* p *de tal forma que:*

$$\omega|_U = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i.$$

La demostración se puede consultar en [1].

El teorema anterior nos dice que localmente sobre una vecindad U de la variedad la forma simpléctica se ve como la forma estándar o canónica, es decir, todas las variedades simplécticas de la misma dimensión serán localmente simplectomorfas, lo cual resulta muy conveniente, ya que además sobre esa vecindad debido a la forma canónica podemos considerar a la variedad como $\mathbb{R}^{2n}$, reafirmando que esto solo se puede hacer a modo local, no válido globalmente. A la carta como en el teorema 2.2.1 se le suele llamar **carta de Darboux** o también coordenadas simplécticas o estándar.

Lo anterior nos arroja una de las mayores diferencias entre las geometrías simpléctica y la riemanniana, ya que para el caso riemanniano existe un invariante local dado por la *curvatura*, en tal caso se puede probar que dos variedades con distintas curvaturas no pueden ser localmente isométricas. En contraste para el caso simpléctico por el teorema de Darboux, -como ya mencionamos en el párrafo anterior- todas las variedades con la misma dimensión son localmente simplectomorfas, es decir, no existe manera de definir invariantes locales análogos a la curvatura; en función de lo cual muchas veces es considerada como **topología simpléctica**, ya que los invariantes serán necesariamente globales.

Capítulo 3

Acciones y Campos Simplécticos y Hamiltonianos

La intención de este capítulo es considerar las acciones en variedades, en especial aquellas que "preservan" la estructura simpléctica. Para ello habrá de ser necesario enfatizar lo que se entiende por conservar la estructura y así enfocarnos en los campos que tengan dicha propiedad, dichos campos vectoriales se conocen como hamiltonianos y una vez que restrinjamos las acciones a estos campos ver que como resultado podemos construir nuevas variedades simplécticas.

3.1. Grupo de difeomorfismos de 1-parámetro

En general el grupo de difeomorfismos, el cual denotaremos por Diff(M) es un objeto que tiene su complejidad, ya que podríamos preguntarnos la relación entre su topología[1] y la de M, la variedad misma, estudio no trivial. Dadas sus características Diff(M) es un grupo de Lie de dimensión infinita y que más adelante detallaremos con mayor precisión.

Definición 3.1.1 *Un subgrupo de difeomorfismos a un parámetro es una familia de difeomorfismos* $\varphi_t : M \longrightarrow M$, $t \in \mathbb{R}$ *tal que:*

1. $\varphi_0 = Id$.
2. $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$.

[1]En [3] se da explícitimente la topología que se le otorga a Diff(M).

Como consecuencia de las 2 propiedades anteriores se tiene que $\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$.

Con lo cual tenemos que la siguiente función:

$$(\mathbb{R}, +) \longrightarrow (Diff(M), \circ)$$
$$t \longrightarrow \varphi_t$$

es un homomorfismo de grupos.

Con lo anterior, cada subgrupo de 1-parámetro de difeomorfismos determina un campo vectorial dado de la siguiente manera.

Dado $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ definimos X campo vectorial como:

$$X : M \longrightarrow TM$$
$$X(p) : \frac{d}{dt}_{|t=0} \varphi_t(p), \quad p \in M.$$

Decimos que X es el campo asociado al grupo de difeomorfismos (φ_t). Análogamente, dado un campo vectorial X en una variedad compacta M define (bajo ciertas condiciones) un grupo de difeomorfismos φ_t.

Dado X, podemos fijarnos en el flujo $\Phi : M \times \mathbb{R} \longrightarrow M$ con M compacta, el cual ya vimos proviene de buscar las soluciones $\gamma(t)$ al sistema:

$$(*) = \begin{cases} \gamma'(t) = X(\gamma(t)) \\ \gamma(0) = p \end{cases}$$

Y así $\Phi(p,t) = \gamma_p(t)$, donde $\gamma_p(t)$ es solución de $(*)$.
Finalmente se puede definir $\varphi_t(p) := \Phi(p,t)$, el cual satisface las siguientes aseveraciones.

1.- φ_t es difeomorfismo porque las curvas integrales no se intersectan (esto debido a la existencia y unicidad de las soluciones del sistema).

2.- φ_0 es la identidad.

3.- $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$, nuevamente esto viene de la existencia y unicidad.

En este caso diremos que (φ_t) es el grupo asociado al campo vectorial X.

Así las cosas tenemos que, dado un grupo de difeomorfismos sobre una variedad el grupo genera un campo vectorial sobre la misma variedad, o inversamente dado un campo vectorial éste define un grupo de difeomorfismos, que como se mencionó se necesita pedirle algunas condiciones adicionales.

Definición 3.1.2 *El pullback de un campo vectorial Y bajo un difeomorfismo φ es el campo definido por:*

$$(\varphi^* Y)(p) = d\varphi^{-1}(Y(\varphi(p))).$$

Dado que $Y(\varphi(p)) \in T_{\varphi(p)}M$ con la composición por la derivación de φ^{-1} tenemos que el pullback es un elemento en el espacio tangente a M en p, es decir un elemento en T_pM.

Definición 3.1.3 *La derivada de Lie de un campo Y en la dirección de X está dado por:*

$$\mathcal{L}_X Y := \frac{d}{dt}_{t=0} \varphi_t^* Y.$$

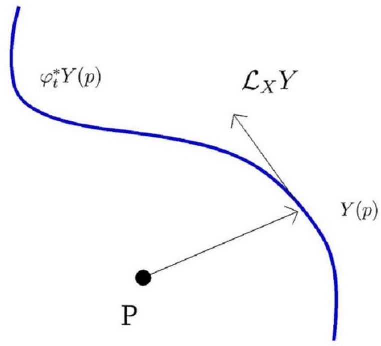


Figura 3.1: Derivada de Lie

Donde φ_t es el grupo de difeomorfismos asociado a X.

En general se puede definir una derivada de Lie para cualquier objeto al que se le pueda aplicar pullback, a saber.

Tensores $(\varphi^* T)(X^1, ...X^r) := T(d\varphi(X^1), ..., d\varphi(X^r))$.

Funciones $\varphi^* f := f(\varphi(\cdot)) = f \circ \varphi$.

Formas $(\varphi^* \alpha)(X^1, ...X^r) := \alpha(d\varphi(X^1), ..., (d\varphi(X^r))$.

Con $\mathcal{L}_X T = \frac{d}{dt}_{t=0} \varphi_t^* T$ para tensores.

Antes de enunciar algunas de las propiedades interesantes y de las que nos auxiliaremos más adelante es conveniente definir otro operador diferencial, llamado *derivada interior*, dicho operador juega un rol importante dentro de las propiedades que nos interesan.

Definición 3.1.4 *Dado X, campo vectorial se define la derivada o producto interior como:*

$$\iota_X : \Omega^{p+1}(M) \longrightarrow \Omega^p(M).$$
$$(\iota_X \alpha)(Y^1, ..., Y^p) = \alpha(X, Y^1, ..., Y^p).$$

Se le dice derivación por que satisface:

$$\iota_X(\alpha \wedge \beta) = \iota_X\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \iota_X\beta.$$
$$Con\ \alpha \in \Omega^k(M).$$

Con esto ahora estamos en mejores condiciones de enunciar propiedades importantes, una de las cuales relaciona los 3 tipos de operadores diferenciales con los cuales contamos hasta ahora, ésta nos afirma que la derivada de Lie de una forma diferencial en la dirección de un campo X se puede expresar como la suma de los otros 2 operadores diferenciales, es decir como la suma de la derivada interior con la exterior.

Propiedades.

1.- $\mathcal{L}_X f = X(f) = df(X) = g(grad\ f,\ X\ )$ para $f \in C^\infty(M)$.

2.- $\mathcal{L}_X Y = [X\ ,Y]$ para $Y \in \mathfrak{X}(M)$.

3.- **Leibniz.** $\mathcal{L}_X(T \otimes S) = \mathcal{L}_X T \otimes S + T \otimes \mathcal{L}_X S$, para tensores T, S.

4.- **Cartan.** $\mathcal{L}_X\alpha = d\iota_X\alpha + \iota_X d\alpha$, para $\alpha \in \Omega^p(M)$.

5.- **Leibniz Versión 2.** $\mathcal{L}_X T(Y^1, ..., Y^r) = X(T(Y^1, ..., Y^r)) - T(\mathcal{L}_X Y^1, ..., Y^r) - ... - T(Y^1, ..., \mathcal{L}_X Y^r) = X(T(Y^1, ..., Y^r)) - \sum_i T(Y^1, ...[X,\ Y^i], ..., Y^r)$.

La propiedad 4 es muy importante y es la llamada **fórmula de Cartan**, la cual queda expresada de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}_X\alpha = d\iota_X\alpha + \iota_X d\alpha. \tag{3.1}$$

Proposición 3.1.1 *Sea* (M, g, ∇)*, con* M *una variedad diferenciable,* g *una métrica en* M *y* ∇ *la conexión de Levi-Civita, entonces,*

$$\mathcal{L}_X g(Y, Z) = g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X) \qquad X, Y, Z \in \Gamma(TM).$$

Demostración.

De la propiedad 5 se sigue que:

$$\mathcal{L}_X g(Y, Z) = X(g(Y, Z)) - g([X, Y], Z) - g(Y, [X, Z])$$

a su vez tenemos que $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$, así la igualdad anterior se transforma en

$$X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z) - g(Y, \nabla_X Z - \nabla_Z X),$$

agrupando términos y teniendo en cuenta que $(\nabla_X g)(Y, Z) = 0$, llegamos a $\mathcal{L}_X g(Y, Z) = g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X)$ lo cual concluye la demostración. ■

Definición 3.1.5 *Dada una variedad riemanniana (M, g), decimos que un campo vectorial X es de Killing si $\mathcal{L}_X g = 0$. Es decir, si los difeomorfismos φ_t son isometrías.*

Observación. A dicho grupo de isométrias se les denomina $I(M, g)$. En una variedad riemanniana compacta dicho grupo $I(M, g)$ es un grupo de Lie de dimensión finita.[3]

3.2. Grupos y Álgebras de Lie

Un grupo de Lie es un grupo G que además tiene una estructura diferenciable, por ende G debe tener una operación asociada que sea el enlace entre la estructura de grupo y variedad.

Definición 3.2.1 *Un grupo de Lie es una variedad G, equipada con una estructura de grupo, en la que las operaciones del grupo*

$$G \times G \to G, \quad (g,\ h) \mapsto gh,$$

y

$$G \to G, \qquad g \mapsto g^{-1}$$

son funciones suaves.

Observación. Para los própositos del presente trabajo solo se considerarán grupos de Lie dimensionalmente finitos.

Definición 3.2.2 *Un subgrupo de Lie es un subgrupo de G (en el sentido del álgebra) que además es una subvariedad inmersa*[2] *de G.*

Un caso particular de los subgrupos son aquellos denominados cerrados, así decimos que un subgrupo H es **cerrado** si es un subgrupo en el sentido algebraico de un grupo de Lie G y además en el sentido topológico H es cerrado.

Un resultado importante sobre estos últimos subgrupos y del que nos auxiliaremos, ya que será este tipo de subgrupos el que nos interese, nos asegura que si un subgrupo H (en el sentido del álgebra) es cerrado como subespacio topológico de G, entonces H es una subvariedad encajada de G.

[2] Apéndice A.

Teorema 3.2.1 *Todo subgrupo cerrado H de un grupo de Lie G, es subvariedad encajada.*

La utilidad del teorema anterior radica en que si lo que desea es verificar que algo es un subgrupo de Lie, podemos omitir revisar la topología con detalle, será suficiente con asegurarse que es un subgrupo algebraico y cerrado, con lo cual será necesariamente una subvariedad encajada.

Ejemplos:

(1) $G = \mathbb{R}$. Con la suma usual como operación.

(2) $G = O(n) =$ {El grupo de transformaciones lineales ortogonales de $\mathbb{R}^n$}.

(3) $G = GL(n, \mathbb{R})$. Con la multiplicación de matrices como operación.

Definición 3.2.3 *Un K-espacio vectorial $\mathfrak{g}$ es llamado un álgebra de Lie si tiene definido un corchete de Lie, esto es, un mapeo bilineal $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ tal que se satisface:*

1.- $[X, X] = 0, \ \forall X \in \mathfrak{g}$. **(Antisimetría.)**

2.- $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0 \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$. **(Identidad de Jacobi.)**

De igual manera resulta interesante considerar grupos de Lie vistos como grupos de matrices pero con coeficientes complejos, ya que muchas veces es más conveniente trabajar con estos tipos de números. Algunos de los más comunes son:

1. $U(n) = \{a \in GL(n, \mathbb{C}) \mid a^*a = I_n\}$.
2. $SU(n) = \{a \in U(n) \mid det_{\mathbb{C}}(a) = 1\}$.

Recordando que a^* es la transpuesta conjugada de la matriz a.

Denotando por e a la identidad en G, y para cada $g \in G$ denótese por L_g a la transformación definida por

$$L_g : G \to G, \quad h \mapsto gh,$$

a la cual llamaremos traslación izquierda, análogamente se puede definir una traslación derecha denotada por R_g.

Como consecuencia de las propiedades de las operaciones del grupo, en particular de la asociatividad tenemos que para las traslaciones izquierdas (y derechas) se cumple que:

$$L_g \circ L_h = L_{gh}.$$

Proposición 3.2.1 *Sea G un grupo de Lie, la función L_g (y R_g) es un difeomorfismo.*

Demostración. La idea para la prueba es notar que $L_{g^{-1}}$ es inversa tanto izquierda como derecha de L_g, esto dada la multiplicación del grupo, por tanto la inversa existe y es suave, luego L_g es un difeomorfismo. ■

Un campo $X \in \mathfrak{X}(G)$ se dice invariante por la izquierda (análogamente se define un invariante por la derecha) si $L_{g*}X = X,\ (R_{g*}X = X)\ \forall g \in G$.

La siguiente proposición nos asegura algunas propiedades de los campos invariantes izquierdos que nos permitirán dar una generalización sobre la estructura algebraica de dichos campos.

Proposición 3.2.2 *La suma y el corchete de Lie de 2 campos vectoriales invariantes por la izquierda es invariante por la izquierda.*

Demostración. Si X, Y son campos invariantes por la izquierda entonces $L_{g*}[X,Y] = [L_{g*}X, L_{g*}Y] = [X,Y], \forall g \in G$. ■

Por tanto el conjunto de los campos vectoriales invariantes por la izquierda en G es un subespacio vectorial de $\mathfrak{X}(G)$. Más aún, dicho conjunto forma un algebra de Lie $\mathfrak{g}$ para un grupo G.

Así el álgebra de Lie de un grupo G es el álgebra $\mathfrak{g}$ dada por el conjunto de los campos invariantes por la izquierda junto con el corchete definido anteriormente.

Si ahora consideramos el mapeo, $\Psi : G \times T_eG \longrightarrow TG$ dado por

$$\Psi(g, X) = L_{g*}(X).$$

Y dado que $L_{g*}(X)$ induce un isomorfismo de $\mathfrak{g}$ al espacio tangente T_gG tenemos que el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd} G \times T_eG \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "\pi_1"'] & TG \arrow[d, "\pi"] \\ G \arrow[r, "id"'] & G \end{tikzcd}$$

Con π_1 la proyección sobre el primer factor y π la proyección de TG hacia G.

Ahora, consideremos el espacio tangente a G en el punto e, el cual por tener G estructura de variedad suave es un espacio vectorial e isomorfo al conjunto de campos invariantes izquierdos bajo las aplicaciones:

$$\mathfrak{g} \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} T_eG$$

Donde φ está dado por $\varphi(X) := X_e$, para $X \in \mathfrak{g}$; y $\psi(\xi) := X$, con $X_g := L_{g*}\xi$, para $\xi \in T_eG$.

Se tiene la estructura de espacio vectorial tanto en los campos invariantes izquierdos como en T_eG, y además de un isomorfismo entre ambos. Equipado con el corchete de Lie $[\cdot\,,\cdot\,]$ para campos vectoriales hacemos tanto la identificación de T_eG como de los campos invariantes izquierdos con $\mathfrak{g}$, el álgebra de Lie para el grupo G.

Ejemplos

(1) $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) := Lie\ GL_n(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$.

(2) $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) := SL_n(\mathbb{R}) = \{X \in M_n(\mathbb{R}),\ \text{traza } X = 0\ \}$.

Veamos un ejemplo que permita visualizar de lo que estamos hablando: Tomemos a $O(n) \subseteq GL(n, \mathbb{R}) = \{AA^T = Id\}$ un grupo de Lie, para construir su álgebra de Lie, es decir, el T_eG, análogo a cuando se hacía con variedades, tomemos curvas en $O(n)$ tal que $A(t) \in O(n)$ y $A(0) = Id$

Así $A(t)A(t)^T = Id$, y derivando

$$\begin{aligned} A'(t)A(t)^T + A(t)(A(t)^t)' = 0 = A'(0)\, Id + Id\,(A(0)^T)' \\ = A'(0) + A'(0)^T = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, $A' + (A')^T = 0$, con lo cual el grupo de las matrices antisimétricas es el álgebra de Lie del grupo de Lie $O(n)$.

Así las cosas, lo que nos interesará será poder pasar del grupo al álgebra, ya que conocer la estructura del álgebra nos da información sobre el grupo. Y dado que podemos ver al álgebra de Lie como el espacio tangente en la identidad $\mathfrak{g} \cong T_eG$.

Definición 3.2.4 *Dado un grupo de Lie G con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, la función que asocia al campo $X \in \mathfrak{g}$ el valor del grupo de difeomorfismo de 1-parámetro φ_t asociada a X es llamada la función exponencial y la denotamos por exp.*

Así, $exp(tX) = \varphi(p, t)$.

En la sección de acciones suaves se profundizará en la relevancia de esta función *exp* y la utilidad de bajar del álgebra al grupo de Lie.

Proposición 3.2.3 *La función exponencial* $exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$ *es suave.*

La demostración se puede consultar en [6].

3.3. Campos Simplécticos y Hamiltonianos

A partir de ahora consideraremos estar trabajando solo con variedades simplécticas, es decir, un par (M, ω), así, como para ser consistentes con la notación $\mathfrak{X}(M)$ denotará al espacio de todos los campos suaves en M. La intención primordial de esta sección será definir los conceptos de campo simpléctico y hamiltoniano y la relación que guardan entre sí, esto dado que nuestro interés es aplicar a este tipo de campos las acciones. Los campos simplécticos se refieren a aquellos que preservan la estructura simpléctica, en otras palabras, un campo vectorial simpléctico X es aquel para el que se satisface $\mathcal{L}_X\omega = 0$, y veremos que a su vez, los hamiltonianos tienen una restricción más, es decir, están contenidos en los simplécticos, son por tanto un caso particular de estos.

Como la forma ω es no degenerada, la aplicación dada por $X \longrightarrow \iota_X\omega$ define un isomorfismo entre los campos vectoriales en M y las 1-formas, esto es, $\mathfrak{X}(M) \longrightarrow \Omega^1(M)$, así si $\iota_X\omega$ es una 1-forma cerrada diremos que X es simpléctico, más aún si $\iota_X\omega$ es exacta, entonces se dice X es hamiltoniano.

Definición 3.3.1 *Un campo vectorial* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *sobre* M *se dice simpléctico si preserva la forma simplectica* ω*, esto es,* $\mathcal{L}_X\omega = 0$.

En concordancia con la definición anterior, tenemos que son equivalentes las siguientes aseveraciones para un campo simpléctico:

1. $\mathcal{L}_X\omega = 0$.
2. El flujo φ_t de X preserva la forma ω. Si dicho flujo está definido globalmente obtenemos una familia de simplectomorfismos.
3. $\iota_X\omega$ es una forma cerrada.

Definición 3.3.2 *Un campo Hamiltoniano* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *es tal que satisface:*

$$\iota_X\omega = df \text{ para alguna función } f \in C^\infty(M).$$

A dicha función f se le llama **función hamiltoniana**.

Al conjunto de campos simplécticos se les denota por $Symp(M, g)$, mientras que al conjunto de campos hamiltonianos por $Ham(M, g)$.

Veamos la analogía con el caso de variedades. Sea $(M,\, g)$ una variedad riemanniana con g la métrica en M y $grad\,(f)$ el gradiente de f, se tiene que dado $f \in C^{\infty}(M)$

$$df(X) = g(\mathrm{grad}\, f,\ X), \quad df(\cdot) = g(\mathrm{grad}\, f\ ,\ \cdot\ )$$

así

$$df \in \Omega^1(M).$$

Luego, $\mathrm{grad}\, f \subset \Gamma(TM)$ y considerando la base canónica, $(\partial_1, ..., \partial_n)$ se tiene que:

$$\mathrm{grad}\, f = \sum_{i,\,j} g^{i\,j}(\partial_i\, f)\partial_j = \sum g^{i\,j}(\frac{\partial}{\partial x^i} f)\,\frac{\partial}{\partial x^j}$$

Ahora, si consideramos la estructura de variedad simpléctica $(M,\, \omega)$ con ω la forma simpléctica en M, para $f \in C^{\infty}(M)$ tenemos:

$$df(Y) = \omega(X_f,\, Y\,),\ \forall\, Y \quad df = \omega(X_f, \cdot\,),$$

$$\text{con } \omega(\,Y\,, \cdot\,) = \iota_Y \omega = \iota(Y)\omega.$$

Donde ι_X denota el producto interior aplicado en el campo Y.

Y así, X_f es un campo Hamiltoniano y $Ham(M) \subset \Gamma(TM)$, luego considerando la base $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_n})$ se tiene

$$X_f = \sum_{i,\,j} (\frac{\partial f}{\partial x^i})\frac{\partial}{\partial y^j} - (\frac{\partial f}{\partial y^i})\frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Podemos pensar que la construcción de un campo hamiltoniano en el caso simpléctico tiene como análogo el $grad\,(f)$ en el caso riemanniano, ya que si tomamos una métrica g en M, con la aplicación $\vartheta : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \Omega^1(M)$ dada por $X \mapsto \iota_X(g)$, definimos un "gradiente" por $grad\,(f) = \vartheta^{-1}(df)$.

Por tanto se tiene que, en cuanto a los campos, el conjunto de los hamiltonianos están contenidos en el conjunto de los simplécticos que a su vez está contenido en el conjunto de los campos en M, los cuales están asociados con los difeomorfismos en M a través del campo inducido por el flujo, es decir,

$$Ham(M, \omega) \subset Symp(M, \omega) \subset \mathfrak{X}(M)$$

para el caso simpléctico.

Para el caso euclidiano se tiene la relación

$$I(M,g) = \{\varphi \mid \varphi^* g = g\} \subset Diff(M).$$

Los campos simplécticos son en ocasiones considerados como "localmente hamiltonianos". La idea surge si miramos a través de la cohomología de De Rham, ya que si $H^1_{dR} = 0$ entonces las formas cerradas resultan exactas y por ende el campo simpléctico es también hamiltoniano.

3.4. Acciones Suaves

Como en el caso del álgebra de grupos existe el análogo de acción[3]. Si ahora consideramos el grupo como uno de Lie, y si el conjunto sobre el que actúa es una variedad diferenciable, la idea de la acción es "básicamente" la misma, solo que nos permite trabajar y extraer resultados interesantes sobre las variedades diferenciables dependiendo del grupo de Lie sobre el cual este actúa.

Definición 3.4.1 *Consideremos M una variedad. Una acción de un grupo de Lie G sobre M es un homomorfismo de grupos. Y lo denotamos por $G \circlearrowleft M$.*

$$\psi : G \longrightarrow Diff(M).$$

$$g \mapsto \psi_g.$$

Usualmente se escribe $g \cdot p$ en referencia a la acción $\psi_g(p)$, $\forall g \in G$ y $p \in M$ y en tal caso de se llama una **acción izquierda**.

Para los propósitos del presente trabajo nos enfocaremos exclusivamente en las acciones izquierdas, análogas a éstas se pueden definir acciones derechas.

Así la función evaluada asociada con una acción $\psi : G \longrightarrow Diff(M)$ queda determinada por :

$$ev_\psi : M \times G \longrightarrow M.$$

$$(p,g) \mapsto \psi_g(p).$$

Definición 3.4.2 *Decimos que la acción ψ es suave si ev_ψ es una función suave.*

[3]ver apéndice B.

Para $X \in \mathfrak{g}$ sea la función,

$$\mathbb{R} \to G.$$

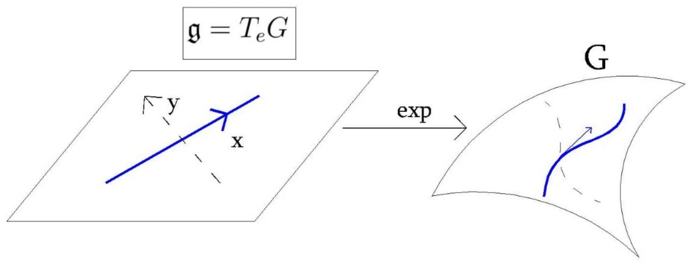
$$exp(tX) = e^{tX}.$$

Dicha función nos permite pasar del álgebra al grupo.

$$\mathfrak{g} \xrightarrow{exp} G\,,$$

con $exp\,(tX) = \varphi_t$.

La cual por **proposición 3.2.3** es una acción suave considerando como el grupo de Lie a los reales ($\mathbb{R}$) sobre la variedad.



Para $X \in \mathfrak{g}$ se define el generador infinitesimal de la acción de G en M, con respecto a X al campo vectorial $\tilde{X}$ dado por:

$$\tilde{X} = \frac{d}{dt}_{|t=0}(exp\,tX \cdot p). \tag{3.2}$$

3.5. Representación de Grupos

A lo largo de esta sección veremos 2 tipos de representaciones, la representación adjunta y la representación coadjunta, las cuales suelen ser muy usuales en los conceptos primarios de la geometría simpléctica, y que para nuestros propósitos servirán para dar sentido y desarrollo a la idea de aplicación de momento.

Definición 3.5.1 *Una representación de un grupo de Lie G, es un homomorfismo*

$$\rho : G \longrightarrow GL(V)$$

para algún espacio vectorial V.

Equivalentemente podemos ver la representación sobre un espacio vectorial V como una acción $G \circlearrowleft V$ por isomorfismos, con G un grupo de Lie.

Observación. Se dice que la representación es **fiel** si ρ es inyectiva.

Un resultado que relaciona un álgebra en abstracto con un álgebra matricial y del que nos auxiliaremos se debe al matemático Igor Dmitrievitch Ado, y cuya demostración data de 1935, la cual no incluiremos en el presente trabajo dado que no tiene relación con nuestros intereses y a su vez requiere de herramientas que escapan al entendimiento con el cual contamos actualmente.

Teorema 3.5.1 (Ado) *Toda álgebra de Lie abstracta $\mathfrak{g}$ es isomorfa a un álgebra de matrices.*

Para todo grupo de Lie G podemos considerar la acción por conjugación $G \circlearrowleft G$, es decir:

$$C : G \longrightarrow Diff(G)$$
$$g \mapsto C_g$$

con $C_g : G \longrightarrow G$ dada por:

$$C_g(h) = ghg^{-1} = L_g \circ R_{g^{-1}}(h), \; \forall h \in G$$

la cual cumple que $C_g(e) = e$, y para cada C si tomamos la derivada en e el elemento neutro tenemos:

$$dC_g = (C_g)_*(e) : T_eG \longrightarrow T_eG.$$

Como vimos previamente, podemos identificar el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ con T_eG, el espacio tangente en la identidad, es decir $(C_g)_* : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$.

Definición 3.5.2 *La representación adjunta de G es la función*

$$Ad : G \longrightarrow GL(\mathfrak{g}), \quad Ad(g) := (C_g)_*.$$

Por otro lado si tomamos la derivada en el elemento neutro de G se tiene $d_eAd = ad$ y es tal

$$ad : \mathfrak{g} \longrightarrow End(\mathfrak{g})$$

dada expresamente por $ad(X)(Y) = \frac{d}{dt}|_{t=0}Ad(exp(tX))Y$, con $X, Y \in \mathfrak{g}$. Dicha función es llamada la representación adjunta del algebra de Lie.

Proposición 3.5.1 *Si* $X, Y \in \mathfrak{g}$*, entonces* $ad(X)Y = [X, Y]$.

La demostración se puede consultar en [1].

Proposición 3.5.2 *La función* $Ad : G \longrightarrow GL(\mathfrak{g})$ *es una representación lineal.*

Demostración.

Primeramente para cada $g \in G$, tenemos que $C_g = L_g \circ R_{g^{-1}}$, que por **proposición 1.1.1** es un difeomorfismo, y que satisface $C_g(e) = e$. Así las cosas, $Ad(g) = (C_g)_* : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ es un isomorfismo y por tanto pertenece a $GL(\mathfrak{g})$.
Ahora, claramente se satisface que $C_g \circ C_h = C_{gh}$, luego por regla de la cadena tenemos que $(C_g)_*(e) \circ (C_h)_*(e) = (C_{gh})_*(e)$; por tanto $Ad(g)Ad(h) = Ad(gh)$, con lo cual Ad es un homeomorfismo.
Lo siguiente es probar que Ad es una función suave, para lo cual vemos a $C : G \times G \longrightarrow G$ como $C(g, h) = ghg^{-1}$ y entonces C es composición de mapeos suaves, por tanto suave. ■

Con todo lo anterior, dado G, un grupo de Lie podemos definir otra representación como una acción del grupo sobre el dual del álgebra, es decir, $G \circlearrowleft \mathfrak{g}^*$ definida por:

$$Ad^* : G \longrightarrow GL(\mathfrak{g}^*), \quad \text{donde } Ad^*(g)\xi \in \mathfrak{g}^*$$

en la cual usando el siguiente emparejamiento natural queda determinada explícitamente como:

$$\langle Ad^*(g)\xi \ , \ X\rangle = \langle \xi \ , Ad(g^{-1})X\rangle, \ \xi \in \mathfrak{g}^* \ y \ X \in \mathfrak{g}. \tag{3.3}$$

De donde el emparejamiento $\langle \cdot, \cdot \rangle$ está dado por:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

$$\langle \xi, X\rangle \mapsto \xi(X).$$

Así la parte derecha de la igualdad en (3,3) está definida por $\xi(Ad(g^{-1})X)$, con lo cual $\xi(Ad(g^{-1}) \cdot) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Definición 3.5.3 *A la función* Ad^* *se le llama la representación coadjunta de* G *y es tal que:*

$$Ad^* : G \longrightarrow GL(\mathfrak{g}^*)$$

$$g \mapsto Ad^*_g.$$

3.6. Acciones Hamiltonianas y Aplicación de Momento

Entre las acciones suaves por un grupo de Lie G en una variedad simpléctica (M, ω) aquellas que cumplen que para cada $g \in G$ y $p \in M$ el difeomorfismo dado por $p \mapsto g \cdot p$ es un simplectomorfismo, es decir, el campo vectorial generado por el grupo de difeomorfismos es un campo simpléctico se les llama acciones simplécticas.

Definición 3.6.1 *Sea $(M,\, \omega)$ una variedad simpléctica. Una acción simpléctica es una acción suave ψ que preserva la forma ω, es decir:*

$$\psi : G \longrightarrow Sympl(M, \omega) \subset Diff(M).$$

$$\psi_g^*(\omega) = \omega, \quad \textit{para toda } g \in G, \textit{ y } \varphi_g \in Sympl(M, \omega).$$

Se dice entonces que G actúa por simplectomorfismos.

Las acciones que nos interesarán serán aquellas que generen campos hamiltonianos.

Definición 3.6.2 *Una acción simpléctica ψ de $G = \mathbb{R}$ sobre (M, ω) se dice hamiltoniana si el campo vectorial X dado por la acción es hamiltoniano, esto es, tal que $dH = \iota_X \omega$ para alguna función $H \in C^\infty(M)$.*

El próposito ahora es introducir una definición de acción hamiltoniana más general, es decir, cuando el grupo que actúa no sea $\mathbb{R}$ sino un grupo de Lie en general. Para dicho próposito se precisa de una aplicación de momento, esto es, una función que haga las veces de la función hamiltoniana.

Sea G un grupo de Lie, y dada la estructura de espacio vectorial en $\mathfrak{g}$, consideremos $\mathfrak{g}^*$ el espacio dual de $\mathfrak{g}$, asi $\mathfrak{g}^* = \{\xi \in C^\infty(\mathfrak{g}) \,|\, \xi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}\}$, las funciones lineales de valor real que toman elementos en $\mathfrak{g}$, las cuales por el álgebra lineal también tienen estructura de espacio vectorial con las operaciones naturales para funciones reales.

Sea ψ una acción simpléctica sobre M.

Definición 3.6.3 *Diremos que la acción ψ es hamiltoniana si existe una función $\mu : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ tal que*

- •) *Si para cada $X \in \mathfrak{g}$ denotamos por $\mu^X : M \longrightarrow \mathbb{R}$, la función definida por*

$$\mu^X(p) := \langle \mu(p),\, X \rangle$$

De donde:

$$\langle \mu(p),\, X \rangle = \mu(p)(X).$$

•) *Si $\tilde{X}$ es el generador infinitesimal sobre M correspondiente a X dado por la ecuación* **(3.2)** *entonces*

$$d\mu^X = \iota_{\tilde{X}}\omega, \textit{ implica que } d\langle \mu(p),\, X\rangle = \iota_{\tilde{X}}\omega. \tag{3.4}$$

La función μ es G-equivariante con respecto a la acción coadjunta en $\mathfrak{g}^*$.

Ya que $\langle \mu\,, X\rangle \in C^\infty$ se tiene que $\langle \mu\,, X\rangle = \mu^X$ corresponde a la **función hamiltoniana** en analogía con la definición anterior de acción hamiltoniana.

Del punto 2 anterior; el que la función μ sea G-equivariante con respecto a la acción coadjunta nos dice que se cumple la siguiente igualdad

$$\mu(g\cdot p) = Ad^*(g)(\mu(p)). \tag{3.5}$$

lo cual nos arroja el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\text{acción en M}"'] & \mathfrak{g}^* \arrow[d, "Ad^*(\mathfrak{g})"] \\ M \arrow[r, "\mu"'] & \mathfrak{g}^* \end{tikzcd}$$

Bajo las condiciones arriba mencionadas se define:

Definición 3.6.4 *A la función $\mu : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ de la definición* **3.6.3** *que hace posible la igualdad*

$$\iota_{\tilde{X}}\omega = d\mu^X \tag{3.6}$$

se le conoce como **aplicación de momento.**

Agrupando las definiciones anteriores decimos que la cuadrupla (M, ω, G, μ) es un **G-espacio hamiltoniano**.

Observación a destacar es que en general, dada una acción simpléctica no existen aplicaciones de momento para ella.

Similarmente como en el álgebra abstracta de grupos será necesario introducir una definición de órbita para cada punto en nuestra variedad por medio de la acción, y ésta deberá adecuarse a la noción de acción en el sentido suave.

Definición 3.6.5 *Dada una variedad M y un grupo de Lie G, sea una acción $\psi : G \longrightarrow Diff(M)$. La órbita de G a través de $p \in M$ está dada por*

$$G(p) = \{\psi_g(p) \mid g \in G\}$$

Definición 3.6.6 *Para cada $p \in M$ el estabilizador de p es el subgrupo*

$$G_p := \{g \in G \,|\, \psi_g(p) = p\}.$$

Se dice que la acción de G sobre M es:

I.- **Transitiva.** Si existe una sola órbita.

II.- **Libre.** Si el estabilizador de cada uno de los puntos es el elemento neutro.

II.- **Localmente libre.** Si cada estabilizador es discreto.

Con esto en mente podemos ahora definir una relación de equivalencia dada de la siguiente manera:

Para p, $q \in M$ decimos que p se relaciona con q ($p \sim q$) si y solo si p y q pertenecen a la misma órbita. Bajo esta equivalencia ($M/\sim$), se define el **espacio de órbitas** M/G y una proyección natural π llamada **proyección orbital** mediante:

$$\begin{aligned} \pi : M &\longrightarrow M/G \\ p &\mapsto G(p) \end{aligned}$$

Capítulo 4

Reducción Simpléctica

Con todo lo anterior ya estamos en condiciones para una de las construcciones más importantes y el paso inmediato anterior al resultado que da sentido a este trabajo.

4.1. Reducción Simpléctica

En lo sucesivo y para todo lo que hagamos se supondrá tener como hipótesis una variedad simpléctica (M, ω) compacta y sin frontera, así como $G \circlearrowleft M$ una acción simpléctica y libre.

Así, bajo las condiciones anteriores estamos ya en posición de poder enunciar un teorema relevante dentro de la geometría simpléctica y del que se desprende el propósito primordial del presente trabajo.

Teorema 4.1.1 (Marsden-Weinstein) *Sea (M, ω) una variedad simpléctica y compacta, G un grupo de Lie, $G \circlearrowleft M$ una acción simpléctica y libre con aplicación de momento μ. Si ξ es un valor regular de μ, entonces $\mu^{-1}(\xi)$ es subvariedad de M y existe una forma simpléctica $\tilde{\omega}_\xi$ tal que $(\mu^{-1}(\xi)/G, \tilde{\omega}_\xi)$ es simpléctica y $\pi^*\omega_\xi = i^*\omega$, donde;*
$\pi : \mu^{-1}(\xi) \longrightarrow \mu^{-1}/G$ es la proyección e $\quad i : \mu^{-1}(\xi) \longrightarrow M$ la inclusión.

Definición 4.1.1 *La reducción (cociente) simpléctico de (M, ω) está dada por:*

$$(\mu^{-1}(\xi)/G, \, \tilde{\omega}_\xi).$$

A tal cociente se le denota por $M//_\xi \, G$.

La demostración del teorema consistirá del siguiente proceso, para el cual será necesario primero hacer uso de un lema que nos auxilie, así como consecuencias que se desprenderán de él.

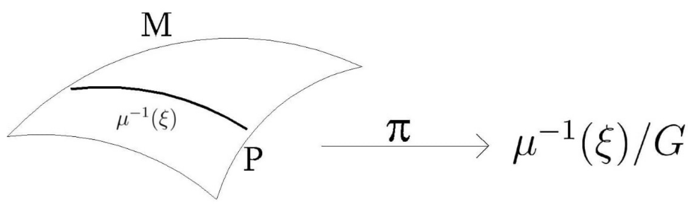
1.- Dada $\mu : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$. Si $\xi \in \mathfrak{g}^*$ es un valor regular, entonces $\mu^{-1}(\xi)$ es una subvariedad de M. (Teorema de la Imagen Inversa).

2.- Como $\mu^{-1}(\xi) \in M$, la acción de G en M se restringe a $\mu^{-1}(\xi)$, es decir, $\mu^{-1}(\xi)$ es una variedad con una acción simpléctica.

3.- Bajo las condiciones anteriores podemos considerar el espacio cociente $\mu^{-1}(\xi)/G$.

En la que para cada $p \in M$ sea la clase de equivalencia dada por:

$$[p] = \{q \in \mu^{-1}(\xi) \mid q = g \cdot p \quad \textit{para algún } g \in G\}.$$



4.- Existe un único $\tilde{\omega}_\xi$ en $\mu^{-1}(\xi)/G$ tal que:

$$\pi^*\tilde{\omega}_\xi = i^*\omega_M = \omega_M|_{\mu^{-1}(\xi)}, \ \textit{con } i : \mu^{-1}(\xi) \longrightarrow M.$$

Lo cual queda expresado con el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
(M, \omega) \arrow[r] & (\mu^{-1}(\xi),\, i^*\omega_M) \arrow[d, "\pi"] \\
& (\mu^{-1}(\xi)/G,\, \tilde{\omega}_\xi)
\end{tikzcd}$$

El que $\mu^{-1}(\xi)$ sea una subvariedad como se mencionó en el punto 1 anterior se lo debemos al teorema de la imagen inversa, por lo cual será suficiente mostrar que $(\mu^{-1}(\xi)/G,\, \tilde{\omega}_\xi)$ es simpléctica y que efectivamente existe una forma simpléctica ω_ξ que satisface $\pi^*\omega_\xi = i^*\omega$.

Recordemos que, dado un espacio vectorial V y un subconjunto U de V, un **aniquilador** de U es una función $f \in V^*$ de tal forma que $f(U) = 0$.

Ahora, dado un punto $p \in M$ y su estabilizador, sea $\mathfrak{g}_p$ su álgebra de Lie, luego la derivada de la aplicación de momento en el punto p, es tal que $d\mu_p : T_pM \longrightarrow \mathfrak{g}^*$.

Luego, de la aplicación de momento tenemos; $\mu : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$, en la que para cada $p \in M$

$$\langle \mu_p, X\rangle = \mu_p(X) \in \mathbb{R}.$$

Con esto en mente y considerando las igualdades dadas por:

$$d\langle \mu_p, X\rangle = \iota_{\bar{X}_p}\omega = \omega(\bar{X}_p, \ )$$

tenemos que la evaluación en un $v \in T_pM$ está dada por:

$$\langle d\mu_p(v), X\rangle = \omega(\bar{X}_p, v).$$

Con lo anterior se tiene que los elementos del núcleo para los cuales se cumplen estas condiciones serán aquellos en el complemento simpléctico del espacio tangente de la órbita de p, es decir, $(T_p\mathcal{O}_p)^{\omega_p}$, esto por la forma no degenerada de la forma simpléctica ω_p; y su imagen por los elementos en el dual del álgebra $\xi \in \mathfrak{g}^*$ para los cuales se satisface que: $\langle \xi, X\rangle = 0, \forall X \in \mathfrak{g}_p$, es decir, el aniquilador del álgebra $\mathfrak{g}_p$.

Si tenemos en cuenta que la acción de G es libre sobre $\mu^{-1}(\xi)$ se tienen las siguientes implicaciones:

I. ξ es un valor regular de la aplicación de momento μ.

II. $\mu^{-1}(\xi)$ es una variedad cerrada de M, cuya codimensión es igual a la dimensión de G.

Además.

III. El espacio tangente a $\mu^{-1}(\xi)$ en p es igual al núcleo de $d\mu_p$, esto es, $T_p\mu^{-1}(\xi) = ker\ d\mu_p,\ p \in \mu^{-1}(\xi)$. (Proposición 1.2.1)

IV. El espacio tangente a $\mu^{-1}(\xi)$ en p, $T_p\mu^{-1}(\xi)$ y el espacio tangente a la órbita en el mismo punto $T_p\mathcal{O}_p$ son espacios complemento-ortogonal simplécticos en T_pM. Más aún, en este caso el espacio tangente a la órbita a través de $p \in \mu^{-1}(\xi)$ es un subespacio isotrópico de T_pM y de lo cual, órbitas en $\mu^{-1}(\xi)$ son subespacios isotrópicos.

A su vez la acción es localmente libre en p si y solo si:

- $d\mu_p$ es suprayectiva.
- $\Longleftrightarrow p$ es un punto regular de μ.

Proposición 4.1.1 *Sea (V, ω) un espacio vectorial simpléctico. Sea I un subespacio isotrópico de V, es decir, $\omega|_I \equiv 0$. Entonces ω induce una forma simpléctica canónica Ω sobre el espacio cociente I^ω/I.*

Demostración. La idea de la demostración consiste en que dados 2 elementos $\{u, v\}$ en el complemento simpléctico de I, considerar sus representantes en el espacio cociente, I^ω/I $\{[u], [v]\}$ y finalmente definir una forma simpléctica Ω dada por:

$$\Omega([u], [v]) = \omega(u, v)$$

veamos que esta nueva forma simpléctica está bien definida;

Sea $w, z \in I$ dos elementos arbitrarios; así,

$$\omega(u + w, v + z) = \omega(u, v) + \omega(u, z) + \omega(w, v) + \omega(w, z)$$

como $u, v \in I^\omega$ y $w, z \in I$, bajo ω se tiene:

$$\omega(u, z) = \omega(w, v) = \omega(w, z) = 0.$$

Con lo cual $\omega(u + w, v + z) = \omega(u, v)$, y por tanto:

$$\Omega([u], [v]) = \omega(u + w, v + z) \quad \forall w, z \in I,$$

luego Ω está bien definida.

Ahora, veamos que es no degenerada.

Sea $u \in I^\omega$ tal que $\omega(u, w) = 0, \forall w \in I^\omega$. Luego u está en el complemento simpléctico del complemento simpléctico de I, $u \in (I^\omega)^\omega$, lo cual implica que el representante de u es nulo, es decir, $[u] = 0$. ■

Teorema 4.1.2 *Si un grupo de Lie compacto G actúa libremente sobre una variedad M, entonces M/G es una variedad y la función $\pi : M \longrightarrow M/G$ es un haz principal.*

La demostración se puede consultar en [2].

Procedemos ahora a la demostración del teorema.

Demostración. **Marsden-Weinstein.**

El que G actue libremente y ξ sea un valor regular nos asegura que $\mu^{-1}(\xi)$ es una subvariedad cerrada de M con codimensión la dimensión de G (punto

II), y el teorema **4.1.2** que el cociente $\mu^{-1}(\xi)/G$ es una variedad. También para cada $p \in \mu^{-1}(\xi)$ $T_p\mathcal{O}_p$ es subespacio isotrópico de (T_pM, ω_p), esto es, $T_p\mathcal{O}_p \subseteq (T_p\mathcal{O}_p)^{\omega}$(punto IV). Con esto en mente y de la proposición **1.2.1** tenemos las siguientes igualdades:

$$(T_p\mathcal{O}_p)^{\omega} = ker\ d\mu_p = T_p\mu^{-1}(\xi).$$

Considerando el espacio cociente $T_p\mu^{-1}(\xi)/T_p\mathcal{O}_p$, la proposición **4.1.1** nos asegura una forma simpléctica canónica en él, luego de la relación de equivalencia para $p \in M$ definida en el paso 4.- tenemos que $[p] \in \mu^{-1}(\xi)/G$ tiene por espacio tangente

$$T_{[p]}\mu^{-1}(\xi)/G \simeq T_p\mu^{-1}(\xi)/T_p\mathcal{O}_p.$$

Con lo cual tiene una forma no degenerada $\tilde{\omega}_\xi$ sobre $\mu^{-1}(\xi)/G$.

Además, si se satisface que

$$i^*\omega = \pi^*\tilde{\omega}_\xi. \tag{4.1}$$

Como

$$\pi^* d\tilde{\omega}_\xi = d\pi^*\tilde{\omega}_\xi,$$

de la igualdad **(4.1)** se sigue que

$$d\pi^*\tilde{\omega}_\xi = di^*\omega.$$

Finalmente y debido a la cerradura de ω

$$di^*\omega = i^*d\omega = 0$$

por tanto

$$\pi^* d\tilde{\omega}_\xi = i^*d\omega = 0.$$

En efecto, como la proyección π^* es de hecho inyectiva se sigue que $d\tilde{\omega}_\xi = 0$ siempre se satisface, por tanto $\tilde{\omega}_\xi$ es una forma cerrada. Lo cual concluye la demostración. ■

Teorema 4.1.3 *Bajo las condiciones del teorema anterior la variedad simpléctica* $M//_\xi\, G = \mu^{-1}(\xi)/G$ *tiene dimensión*

$$dim\, M//_\xi\, G = dim\, M\ - 2\, dim\, G.$$

Demostración.
Debido al teorema de la función inversa se tiene,

$$dim\, \mu^{-1}(\xi) = dim\, M - dim\, G.$$

además sabemos que la dimensión del cociente es $dim\, \mu^{-1}(\xi) - dim\, G$ por tanto

$$dim\, M//_{\xi}\, G = dim\, M - dim\, G - dim\, G = dim\, M - 2\, dim\, G. \quad \blacksquare$$

En general, estas variedades simplécticas cociente resultan muy interesantes, y de ellas se desprende toda una teoría dentro de la geometría simpléctica[1], y como pudimos apreciar el papel que juegan las aplicaciones de momento resulta fundamental.

4.2. Ejemplos

El propósito que nos plantearemos con los dos siguientes ejemplos es, en función de la igualdad **(3.4)** poder encontrar la aplicación de momento correspondiente dada la acción de un grupo a través de la variedad, y en consecuencia por medio del teorema **4.1.1** poder darse una idea quién sería la variedad cociente. En los casos que presentaremos a continuación tomaremos como variedad $\mathbb{C}^4$, y trataremos de seguir una serie de pasos concisos que permitan visualizar la teoría que se hubo presentado durante los capítulos 3 y 4 principalmente.

Ejemplo 1.
Para este primer caso consideraremos una acción de $\mathbb{T}^2$ sobre $\mathbb{C}^4$.

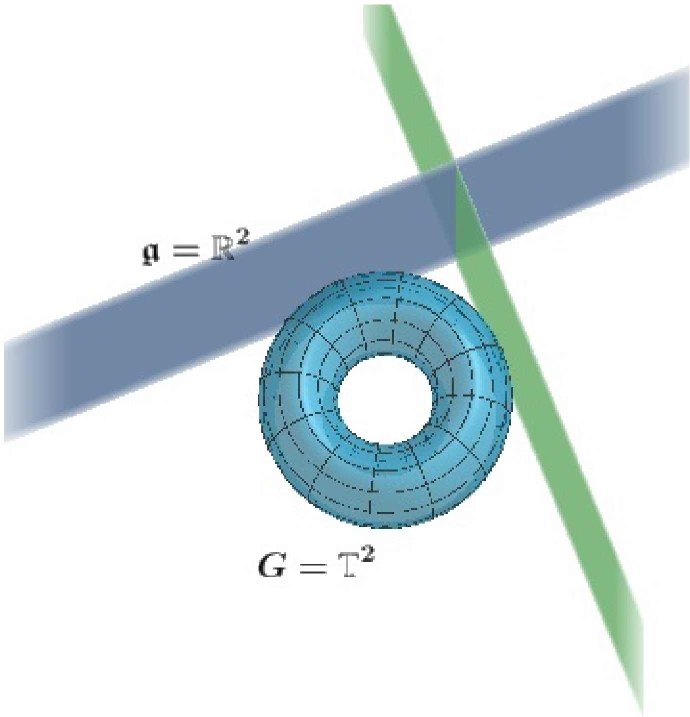
$$G = \mathbb{T}^2, \qquad \mathbb{C}^4 = (z_1, z_2, z_3, z_4), \qquad \mathfrak{g} = \mathfrak{t}^2,$$
$$\mathbb{T}^2 \cdot \mathbb{C}^4 = (e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) \cdot (z_1, z_2, z_3, z_4) = (e^{i\theta_1} z_1, e^{i\theta_1} z_2, e^{i\theta_2} z_3, e^{i\theta_2} z_4)$$

1. Tomemos elementos en el álgebra, $X \in \mathfrak{g} = \mathbb{R}^2$, y para lo cual consideremos $X = (1, 0)$ **y** $X = (0, 1)$.

2. Lo siguiente es hallar $\tilde{X}$, el campo hamiltoniano correspondiente, esto es, el generador infinitesimal.

$$X \longrightarrow exp(tX) \longrightarrow exp(tX) \cdot p, \quad \textbf{si}\ p = (z_1, z_2, z_3, z_4).$$

[1] Para ahondar más en detalle revisar [4].



$$X \longrightarrow e^{itX} \cdot p = (e^{itX_1} z_1, e^{itX_1} z_2, e^{itX_2} z_3, e^{itX_2} z_4). \qquad (4.2)$$

Derivando **(4.2)** en $t = 0$ tenemos el campo hamiltoniano

$$\tilde{X}(p) = (iX_1 z_1, iX_1 z_2, iX_2 z_3, iX_2 z_4).$$

El cual para $X = (1, 0)$ queda en la forma:

$$\tilde{X}(p) = (iz_1, iz_2, 0, 0).$$

3.- Ahora calcular $\iota(\tilde{X})\omega$, con la forma simpléctica estándar

$$\omega = \sum_{j=1}^{4} dx_j \wedge dy_j = \frac{i}{2} \sum dz_j \wedge d\tilde{z}_j.$$

así tenemos:

$$\begin{aligned} \iota(\tilde{X})\omega &= \frac{i}{2}(d\tilde{z} \wedge dz)(\tilde{X}(p), \cdot) \\ &= \frac{i}{2}(dz_j \otimes d\tilde{z}_j - d\tilde{z}_j \otimes dz_j)(\tilde{X}(p), \cdot) \end{aligned}$$

$$= \frac{i}{2}(dz_j(\tilde{X}(p)d\tilde{z}_j - d\tilde{z}_j(\tilde{X}(p), \cdot)dz_j$$
$$= \frac{i}{2}(dz_j(iz_1, iz_2, 0, 0)d\tilde{z}_j - d\tilde{z}(iz_1, iz_2, 0, 0)dz_j$$
$$= -\frac{1}{2}(z_1, z_2, 0, 0)d\tilde{z}_j.$$

La aplicación μ_1 está dada por:

$$\mu_1 = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}|z_j|^2.$$

Para $X = (0, 1)$ se tiene por otro lado

$$\frac{i}{2}(dz_j(0, 0, iz_3, iz_4))d\tilde{z}_j$$
$$= -\frac{1}{2}(0, 0, z_3, z_4)d\tilde{z}_j.$$

con lo que tenemos la aplicación:

$$\mu_2 = -\frac{1}{2}(|z_3|^2 + |z_4|^2).$$

Dado que la aplicación de momento es de tal forma que $\mu : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ y a su vez $\mathfrak{g}^*$ es isomorfo para este caso con $\mathbb{R}^2$, de las dos aplicaciones anteriores tenemos la aplicación de momento final dada expresamente por:

$$\mu(p) = -\frac{1}{2}(|z_1|^2 + |z_2|^2, |z_3|^2 + |z_4|^2).$$

Lo siguiente es hallar los valores regulares para ello calculamos la derivada de μ.

$$d\mu = -\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_3 & y_3 & x_4 & y_4 \end{pmatrix}$$
$$= -\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_3 & z_4 \end{pmatrix}$$

Por lo cual el único valor crítico es $O_{\mathbb{R}^2}$. Así tomando $q \in \mathbb{R}^2,\ q = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ se tiene

$$\mu^{-1}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \{z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}^4 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1,\ |z_4|^2 + |z_3|^2 = 1\}.$$

$$= \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3.$$

Que es una variedad de dimensión 6 como también lo asegura el teorema de la imagen inversa.

Tomando el cociente por la acción, tenemos la variedad cociente

$$\mathbb{S}^3/\mathbb{S} \times \mathbb{S}^3/\mathbb{S} \simeq \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1.$$

Y cuya dimensión $dim\,(\mu^{-1}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}/G) = dim\,(\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1) = 4$, como efectivamente asegura el teorema **4.1.3**.

Notar que, en el caso de que la elección del valor regular q hubiese sido de la forma $\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$ con $k, l > 0$, la subvariedad $\mu^{-1}\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$ no sería propiamente una esfera 3-dimensional, es por tanto que el valor regular garantiza que la imagen inversa es una variedad, pero no dice mucho acerca de la topología.

Ejemplo 2.

La acción de $\mathbb{S}^1$ sobre $\mathbb{C}^4$, esto es, $\mathbb{S}^1 \circlearrowleft \mathbb{C}^4$.

$$G = \mathbb{S}^1, \qquad \mathbb{C}^4 = (z_1, z_2, z_3, z_4), \qquad \mathfrak{g}^* = \mathbb{R},$$

$$\mathbb{S}^1 \cdot \mathbb{C}^4 = e^{it} \cdot (z_1, z_2, z_3, z_4) = (e^{itX}z_1, e^{itX}z_2, e^{-itX}z_3, e^{-itX}z_4).$$

1. Consideremos un elemento en el álgebra, $X \in \mathfrak{g}$. Dado que para este caso es real, tomemos $X = 1$.

2. Encontrar el campo hamiltoniano, esto es, análogo al ejemplo anterior hallar el generador infinitesimal $\tilde{X}$.

$$X \longrightarrow exp(tx) \longrightarrow exp(tX) \cdot p, \quad \textbf{si } p = (z_1, z_2, z_3, z_4).$$

$$X \longrightarrow e^{itX} \cdot p = (e^{itX}z_1, e^{itX}z_2, e^{-itX}z_3, e^{-itX}z_4). \tag{4.3}$$

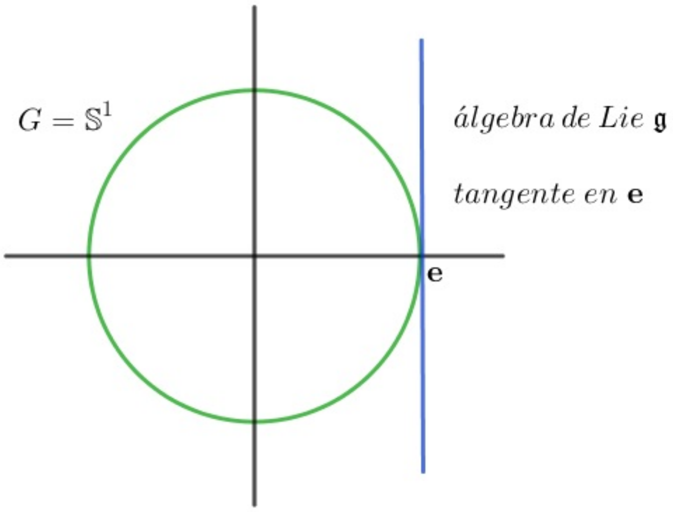
Lo siguiente es derivar **(4.3)** en $t = 0$ y así obtener:

$$\tilde{X}(p) = (iz_1, iz_2, -iz_3, -iz_4).$$

3. Ya con $\tilde{X}(p)$ estamos en condiciones de saber quién es $\iota(\tilde{X})\omega$ y en consecuencia decir quién debe ser $d\langle \mu(p), X\rangle$.

Considerando la forma simpléctica estándar

$$\omega = \sum_{j=1}^{4} dx_j \wedge dy_j = \frac{i}{2} \sum dz_j \wedge d\tilde{z}_j.$$



se tiene:

$$\begin{aligned}\iota(\tilde{X}(p))dz_j \wedge d\tilde{z}_j &= \frac{i}{2}d\tilde{z}_j \wedge dz_j(\tilde{X}(p), \cdot) \\ &= \frac{i}{2}(dz_j \otimes d\tilde{z}_j - d\tilde{z}_j \otimes dz_j)(\tilde{X}(p), \cdot) \\ &= \frac{i}{2}dz_j(\tilde{X}(p))d\tilde{z}_j - d\tilde{z}_j(\tilde{X}(p))dz_j. \qquad (4.4)\end{aligned}$$

Ahora, debido a que $e_j = \frac{\partial}{\partial z_j}$ la expresión de $\tilde{X}$ queda dada por:

$$\tilde{X}(p) = iXz_1\partial z_1 + iXz_2\partial z_2 - iXz_3\partial z_3 - iXz_4\partial z_4$$

De lo cual el segundo sumando en (4.4) es cero, y así llegando finalmente a la expresión.

$$\iota(\tilde{X}(p))dz_j \wedge d\tilde{z}_j = \frac{i}{2}dz_j(\tilde{X}(p))d\tilde{z}_j. \qquad (4.5)$$

Y así tenemos:

$$dz_j(\tilde{X}(p))d\tilde{z}_j = \frac{i}{2}dz_j(iz_1\partial_{z_1} + iz_2\partial_{z_2} - iz_3\partial_{z_3} - iz_4\partial_{z_4})d\tilde{z}_j$$

$$= -\frac{1}{2}(z_1, z_2, -z_3, -z_4)d\tilde{z}_j$$
$$= d[-\frac{1}{2}(|z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_3|^2 - |z_4|^2)].$$

Con lo cual la aplicación de momento μ queda expresada por:

$$\mu(z_1, z_2, z_3, z_4) = -\frac{1}{2}(|z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_3|^2 - |z_4|^2). \tag{4.6}$$

También lo podemos ver de la siguiente forma.

La forma simpléctica ω la podemos expresar como $\omega = d\alpha$ con α una 1-forma

$$\iota_X \omega = dH, \quad \textbf{o} \quad \iota_X d\alpha = dH$$

a su vez con la identificación para los complejos $z_j = x_j + iy_j$ tenemos que el campo $\tilde{X}$ lo podemos ver como:

$$\tilde{X} = (iz_1, iz_2, -iz_3, -iz_4) = (-y_1, x_1; -y_2, x_2; y_3, -x_3; y_4, -x_4) = \iota_X \alpha.$$

Luego considerando la 1-forma α como $\alpha = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{4} y_j dx_j - x_j dy_j$ se tiene que:

$$\alpha(\tilde{X}) = \frac{1}{2}(-y_1^2 - x_1^2 - y_2^2 - x_2^2 + y_3^2 + x_3^2 + y_4^2 + x_4^2).$$

Por tanto

$$H = -\alpha(\tilde{X}) = -\frac{1}{2}(|z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_3|^2 - |z_4|^2). \tag{4.7}$$

Así encontramos el hamiltoniano H, que hace las veces de aplicación de momento μ correspondiente a la acción simpléctica, y vemos que en ambos casos llegamos a lo mismo, es decir, las expresiones en (4,6) **y** (4,7) coinciden.

La derivada de la aplicación queda de la siguiente manera

$$d\mu = -(x_1, y_1, x_2, y_2, -x_3, -y_3, -x_4, -y_4) = -(z_1, z_2, -z_3, -z_4)$$

con lo cual el único $q \in \mathbb{R}$ que no es valor regular es el $0_{\mathbb{R}}$.

Consideremos $q = -2$

$$\Rightarrow \mu^{-1}(-2) = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4 |\, |z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_3|^2 - |z_4|^2 = 1\}$$

y la cual tiene $dim\, \mu^{-1}(-2) = 7$.

Finalmente, para este caso, se tiene que la variedad cociente $\mu^{-}1(-2)/G$ no es un objeto que se pueda visualizar sencillamente, pero que podemos ver cómo el conjunto de ceros de un polinomio en $\mathbb{C}^4$, es decir, el conjunto de puntos en $\mathbb{R}^8$ en los cuales un polinomio en 8 variables se anula, esto es, una variedad algebraica. De hecho, dicho conjunto es difeomorfo a un haz vectorial sobre $\mathbb{C}P^1$, pero que para los propósitos del presente trabajo la demostración de esto no es relevante. Lo relevante de este caso es nuevamente como la elección del valor regular juega un papel vital sobre la topología de la variedad cociente, es decir, dependiendo de cómo sea q la variedad obtenida como imagen inversa se verá distinta y por tanto ésta tendrá una topología distinta para distintos valores.

Apéndice A

Inmersiones, Submersiones y Encajes

Recordemos que si M^m y N^n son variedades diferenciables y $f : M \longrightarrow N$ una función suave, el rango de f en cada $p \in M$, $(rang\, f)$ está dado por el rango de la función $f_* : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$, es decir, el de la matriz Jacobiana de f; también lo podemos pensar como $im\, df_p \subset T_{f(p)}N$. Si el rango de f es el mismo en cada punto, se dice que f tiene rango constante y se denota por $rank\, f = k$.

Podemos notar que dicho rango está acotado superiormente por el $min\{m, n\}$ con m y n las dimensiones de M y N respectivamente, si el rango de df_p es igual a dicho límite se dice que f tiene rango máximo en p, si lo es en todo punto se dice simplemente que f tiene rango máximo.

Definición A.0.1 *Sea $f : M \longrightarrow N$ una función suave entre variedades, f es una submersión suave si su diferencial es suprayectiva en cada punto, esto es, $rank\, f = dim\, N$. Por otro lado si dicha diferencial es inyectiva, es decir, $rank\, f = dim\, M$ a f se le llama una inmersión suave.*

En ambos casos destaquemos que f tiene rango máximo.

Si τ es un espacio topológico y $X \in \tau$ es un subconjunto, entonces X hereda la topología de τ en la cual los conjuntos abiertos de X son de la forma $U \cap X$, en donde U es un abierto de τ. A tal topología se le denomina la topología del subespacio.

Ahora introducimos la noción de *encaje*, el cual consistirá de una función suave e inyectiva, $f : M \longrightarrow N$ y cuya derivada es inyectiva en todos lados. Formal y más explícitamente,

Definición A.0.2 *Dada una función $f : M \longrightarrow N$ se dice un encaje si f es continua, inyectiva y f^{-1} es continua en $f(M)$ cuando se le da a $f(M)$ la topología del subespacio, es decir, M y $f(M)$ son homeomorfos por medio de f.*

Un encaje es de hecho un tipo particular de las inmersiones, en efecto, es una inmersión suave y un homeomorfismo con su imagen dada con la topología del subespacio, es decir, tanto un encaje topológico como una inmersión suave.

En topología existen dos nociones de subvariedades, estas son, subvariedades inmersas y subvariedades encajadas.

Definición A.0.3 *Sea M una variedad suave; un subconjunto $S \subset M$ se dice subvariedad inmersa si existe una variedad N y una inmersión suave $f : N \longrightarrow M$ tal que $S = f(N)$.*

Una observación importante es que bajo las condiciones de la definición anterior $f(N)$ puede no tener la misma topología de M.

Dicho de otro modo, un subconjuto $S \subset M$ es una subvariedad inmersa si ésta está equipada con una topología, no necesariamente la del subespacio, además de una estructura suave respecto a la cual la inclusión $S \hookrightarrow M$ es una inmersión suave.

Definición A.0.4 *Sea M una variedad suave; un subconjunto $S' \subset M$ se dice subvariedad encajada si existe una variedad N además de un encaje $f : N \longrightarrow M$ tal que $S' = f(N)$.*

Resumiendo, $S' \subset M$ es una subvariedad encajada si S' tiene la topología del subespacio y una estructura suave respecto a la cual la inclusión $S' \hookrightarrow M$ es un encaje suave.

Si S es una subvariedad, ya sea inmersa o encajada de M la **codimensión** de S en M está dada por $dim\, M - dim\, S$.

Notemos que las subvariedades encajadas son subvariedades inmersas, es decir, estas últimas son de un tipo más general, es por ello que al trabajar sobre todo en grupos de Lie, las subvariedades con las que se pueda estar trabajando pueden no heredar la topologia del grupo, es decir, no tengan la topología del subespacio y es por ello que resulta conveniente trabajar en estos casos con subvariedades inmersas.

Apéndice B

Acciones de Grupo

Recordemos algunos conceptos de álgebra como lo son las acciones de grupo, que ambiguamente los podemos ver como mapeos a través del cual un grupo *actúa* sobre un conjunto, esto es, como este grupo modifica o altera la estructura del conjunto.

Definición B.0.5 *Sea A un conjunto y G un grupo, diremos que G actúa sobre A (por la izquierda) si existe una función $\psi : G \times A \longrightarrow A$ que satisface:*

I. $\psi(e, a) = a, \quad$ *con e la identidad en G y para toda $a \in A$;*

II. $\psi(g, \psi(g, a)) = \psi(gh, a)$*, para toda $g, h \in G$ y $a \in A$.*

ψ es llamada una acción.

Donde para $a \in A$, $\psi(g, a) = ga$.

Observación. Por otro lado decimos que G actúa sobre A por la **derecha** si la función ψ es de la forma

$$\psi : A \times G \longrightarrow A$$

e igualmente satisface las condiciones I. y II.

En adelante consideraremos al conjunto A sobre el que se actúa como un espacio topológico. Cuando exista una acción de un grupo G sobre un espacio A, decimos que A es un G-**espacio**.

Definición B.0.6 *Si G actúa sobre A y $a \in A$, definimos la órbita de a, denotada por $\mathcal{O}(a)$ al subconjunto de A dado por*

$$\mathcal{O}(a) = \{ga : g \in G\} \subset A.$$

Definición B.0.7 *El estabilizador de a, denotado por G_a es el subgrupo de G dado por*

$$G_a = \{g \in G : ga = a\} \leq G.$$

Si A y B son dos G-espacios y $f : A \longrightarrow B$ una función entre ellos, entonces se dice que f es G-**equivariante** si

$$f(ga) = gf(a), \text{ para cualesquiera } a \in A \text{ y } g \in G.$$

Decimos que f es G-**invariante** si

$$f(ga) = f(a).$$

Sea A un G-espacio y ψ la acción de G en A. Para cada $g \in G$ se induce una función $\psi_g : A \longrightarrow A$, con $\psi_g(a) = ga$. Podemos notar que $\psi_e = Id_A$ y también que $\psi_{gh} = \psi_g \circ \psi_h$. Además se cumple que:

$$\psi_g \circ \psi_{g^{-1}} = \psi_{gg^{-1}} = Id_A,$$

y

$$\psi_{g^{-1}} \circ \psi_g = \psi_{g^{-1}g} = Id_A.$$

Por tanto se tiene que ψ_g es un homeomorfismo de A en A. Lo cual también nos induce un homomorfismo de grupos dado por

$$\rho : G \longrightarrow S_A, \quad g \mapsto \psi_g, \tag{B.1}$$

en donde S_A denota al grupo simétrico sobre A. De manera inversa, un homeomorfismo de grupo como en **B.1** induce una acción de G sobre A mediante $ga := (\rho(g))(a)$.

Bibliografía

[1] Bryant, Robert L., *An introductión to Lie Groups and Symplectic Geometry*, A series of nine lectures on Lie groups and symplectic geometry delivered at the Regional Geometry Institute in Park City, 1991.

[2] Da Silva, Ana C., *Lectures on Symplectic Geometry*, Springer-Verlag, Berkeley, 1988.

[3] Banyaga, Augustin, *The Structure of Classical Diffeomorphism Group*, Kluwer Academic Publishers, Dordrrcht/Boston/London.

[4] McDuff, Dusa; Salamon, Dietmar, *Introduction to Symplectic Topology*, 3a. edición, Oxford University Press, 2017.

[5] Guillemin, Victor; Pollack, Alan, *Topología Diferencial*, Papirhos, Instituto de Matemáticas-UNAM, 1a. edición, 2005.

[6] Lafontaine, Jacques, *An Introduction to Differential Manifolds*, Springer, 2da edición, 2010.

[7] Lee, John M., *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer, 2a. edición, 2003.

[8] Lee, John M., *Riemannian Manifolds, An Introduction to Curvature*, Springer, 1997.

[9] Madsen, Ib; Tornehave, Jørgen, *From Calculus to Cohomology, De Rham cohomology and characteristic classes*, Cambridge University Press, 1997.

[10] O'Neill, Barrett, *Semi-Riemannian Geometry with Applications to relativity*, Academic Press, 1983.

[11] Palmas, Oscar; Reyes, Guadalupe, *Curso de Geometría diferencial*, Volúmenes I y II, Facultad de Ciencias, UNAM, 2005.

[12] Palmas, Oscar; Sánchez, Héctor, *Geometría Riemanniana*, Facultad de Ciencias, UNAM, 2007

[13] Berndt, Rolf, *An Introduction to Symplectic Geometry*, American Mathematical Society, Graduate Studies in Mathematics v. 26. 2001.