UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LA CONVOLUCIÓN LIBRE DESDE UNA PERSPECTIVA ANALÍTICA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

JOSÉ ARNULFO QUINTERO CAMPAS

DIRECTOR DE TESIS:

DR. FRANCISCO JAVIER TORRES AYALA

Ciudad Universitaria, CDMX, 2018

Agradezco al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica(PAPIIT), en particular al proyecto con clave IA105316, por su apoyo en la realización de la presente.

Índice general

Introducción

La probabilidad libre es una teoría creada por Dan Voiculescu alrededor de 1985, motivado por una serie de trabajos en los que buscaba entender álgebras de von Neumann de grupos libres. Sus descubrimientos en 1991 sobre el hecho que las matrices aleatorias también satisfacen asintóticamente la relación de *libertad* transformó la teoría radicalmente. No sólo produjo resultados espectaculares acerca de la estructura de las álgebras de operadores, también introdujo nuevos conceptos y herramientas en el campo de estudio de la teoría de matrices aleatorias; a tal grado que, en un enfoque específico, *los espacios de probabilidad no conmutativos* se usan para modelar el comportamiento asintótico de matrices aleatorias cuando la dimensión de estas tiende al infinito.

Así, la teoría de probabilidad libre se ha convertido en un campo de estudio propio, uniendo varias disciplinas de las matemáticas como lo son la probabilidad clásica, las álgebras de operadores, las matrices aleatorias, la combinatoria, la teoría de representaciones de grupos simétricos, entre otras. Una idea importante aportada por la probabilidad libre es que el concepto de *libertad* para una familia de *variables aleatorias no conmutativas* en un álgebra de von Neumann debe tratarse como un análogo de la noción de independencia de la probabilidad clásica. De este modo, se motiva el desarrollo de contrapartes libres de los teoremas fundamentales de la probabilidad clásica. Por ejemplo, existe una noción de *convolución libre* de distribuciones y un conjunto de artefactos analíticos bien desarrollados, que reemplaza a la maquinaria clásica de la transformada de Fourier, para tratar eficazmente este nuevo tipo de convolución.

La convolución libre es una operación binaria sobre medidas de probabilidad en la recta real, que corresponde a la suma de dos variables aleatorias libres; de la misma manera que la convolución usual corresponde a la suma de dos variables aleatorias independientes. También existe una versión multiplicativa de la convolución libre, que va con el producto de variables aleatorias libres. El tratamiento analítico para la descripción de esta nueva operación se basa en una buena comprensión de las transformadas de Cauchy, de las medidas de probabilidad convolucionadas, y de un par de otras transformaciones usadas específicamente por la probabilidad libre, la transformada $\mathcal{R}$ y la transformada

$\mathcal{S}$. Por lo tanto, por un lado, muchas preguntas sobre la convolución libre resultan en nuevas declaraciones interesantes sobre las funciones analíticas, y por otro lado, el análisis complejo es una herramienta importante para investigar las propiedades de la convolución libre.

El objetivo principal de esta tesis es presentar una demostración de la propiedad de linearizacion de la transformada $\mathcal{R}$ para suma de variables aleatorias no conmutativas y libres, además de dar una introducción al campo de la teoría de la probabilidad libre, estudiar el concepto de la convolución libre y algunos resultados generales.

El primer capítulo define y expone los conceptos básicos de la probabilidad libre que tratan Nica y Speicher en [12]. Se definen las ideas de *espacio de probabilidad no conmutativo* y *distribución-** de una *variable aleatoria no conmutativa*, así como propiedades y algunos ejemplos de estos conceptos.

El Capítulo 2 está basado en otra de las conferencias de Nica y Speicher en [12]. Se presenta un caso particular de *variables aleatorias no conmutativas*, así como una forma de obtener la distribución de este tipo de elementos, lo cual muestra algunos aspectos combinatorios de la probabilidad no conmutativa.

En el Capítulo 3, apoyado principalmente en [2], se expone la transformada de Cauchy y se desarrollan algunos resultados importantes que servirán para el estudio de la *convolución libre*.

Finalmente, el cuarto capítulo busca describir la *convolución libre*, algunas propiedades y mostrar dos casos especiales de esta operación; la convolución libre entre deltas de Dirac y distribuciones semicirculares. Previamente se define la idea de *independencia libre* y se desarrollan dos ejemplos. La definición de los conceptos, algunas características y ejemplos se estudiaron de [12] y [15], mientras que el desarrollo técnico para la transformada $\mathcal{R}$ está motivado por [10].

Capítulo 1

Espacios de probabilidad-$*$

En este capítulo se formulan los conceptos básicos de la probabilidad libre. Esta presentación se lleva a cabo desde el contexto del análisis funcional dividido en dos secciones.

En principio, se define lo que es un espacio de probabilidad no conmutativo y, así, lo que constituye un espacio de probabilidad-*. En consiguiente, se exhiben algunas propiedades y se detallan unos cuantos ejemplos de estos espacios.

En la segunda sección se define qué es un momento-* y la distribución-* de una variable aleatoria no conmutativa. A su vez, se desarrollan algunos resultados que muestran la importancia que tiene la distribución-* para detallar los posibles valores que puede tomar la funcional dada, así como algunos ejemplos que puntualizan esta relación.

1.1. Espacios de probabilidad no conmutativos.

Básicamente, un espacio de probabilidad conmutativo se puede ver como un álgebra de variables aleatorias y una funcional para ésta, dada por la esperanza de dichas variables aleatorias. De esta manera, la extensión al caso no conmutativo se define como sigue:

Definición 1.1.1. Un espacio de probabilidad no conmutativo es una pareja $(\mathcal{A}, \varphi)$ tal que

(i) $\mathcal{A}$ es un álgebra unitaria sobre $\mathbb{C}$. Es decir,

- a*)* $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ es un álgebra y
- b*)* Existe $1_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$ tal que $a \cdot 1_{\mathcal{A}} = 1_{\mathcal{A}} \cdot a = a, \quad$ para cualquier $a \in \mathcal{A}$

(ii) $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ es una funcional lineal unitaria. Es decir, $\varphi(1_{\mathcal{A}}) = 1$

A los elementos $a \in \mathcal{A}$ se les llama variables aleatorias no conmutativas.

Nota 1.1.1.

(I) Se dice que φ es una traza cuando $\varphi(ab) = \varphi(ba)$, para todo $a, b \in \mathcal{A}$

(II) Si φ es una traza, entonces se dice que el espacio $(\mathcal{A}, \varphi)$ es tracial.

Definición 1.1.2. Sea $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ un álgebra sobre $\mathbb{C}$ y sea $* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ una operación unaria. Se dice que $\mathcal{A}$ es un álgebra-$*$ si se satisface lo siguiente:

(I) $(za + b)^* = \overline{z}a^* + b^*$, para cualesquiera $a, b \in \mathcal{A}$ y cualquier $z \in \mathbb{C}$ (anti-lineal)

(II) $(ab)^* = b^*a^*$, para cualesquiera $a, b \in \mathcal{A}$ (anti-multiplicativa)

(III) $1_{\mathcal{A}}^* = 1_{\mathcal{A}}$

(IV) $(a^*)^* = a$, para cualquier $a \in \mathcal{A}$ (involución)

En la literatura también se enuncia de otra forma al pedir que la operación $*$ sea un anti-automorfismo (incisos *(I), (II)*) y una involución (inciso *(IV)*) sobre $\mathcal{A}$ y que se satisfaga *(III)*.

Definición 1.1.3. Sea $(\mathcal{A}, \varphi)$ un espacio de probabilidad no conmutativo y $\mathcal{A}$ una álgebra-$*$. Decimos que $(\mathcal{A}, \varphi)$ es un espacio de probabilidad-$*$ si para cualquier $a \in \mathcal{A}$ $\varphi(a^*a) \geq 0$, es decir que la funcional sea positiva.

Definición 1.1.4. Se dice que un espacio de probabilidad no conmutativo $(\mathcal{A}, \varphi)$ es un espacio de probabilidad C^* si $\mathcal{A}$ es un álgebra C^* y φ es un estado.

Nota 1.1.2. Se dice que φ es fiel si dada $a \in \mathcal{A}$ sucede lo siguiente:

$$\text{Si } \varphi(a^*a) = 0 \Rightarrow a = 0$$

Desde la estructura de un espacio de probabilidad-$*$ podemos denotar las siguientes propiedades para variables aleatorias no conmutativas, cuyas definiciones salen directo del área de estudio de operadores sobre espacios de Hilbert.

1. Se dice que $a \in \mathcal{A}$ es autoadjunta si $a = a^*$.
2. Se dice que $u \in \mathcal{A}$ es unitaria si $u^*u = uu^* = 1_{\mathcal{A}}$.
3. Se dice que $a \in \mathcal{A}$ es normal si $a^*a = aa^*$.
4. Se dice que $a \in \mathcal{A}$ es positiva si $a = x^*x$, para algún $x \in \mathcal{A}$

Observación 1.1.1.

(I) Dada $a \in \mathcal{A}$ definimos su parte real y parte imaginaria como sigue:

$$\text{Re}(a) := \frac{(a + a^*)}{2},$$

$$\text{Im}(a) := \frac{(a - a^*)}{2i}$$

(II) Dada $a \in \mathcal{A}$ existen $x_a, y_a \in \mathcal{A}$, autoadjuntos, tal que $a = x_a + iy_a$

Prueba. Sea $a \in \mathcal{A}$, tomamos $x_a = \mathrm{Re}(a)$ y $y_a = \mathrm{Im}(a)$ entonces,

$$x_a + iy_a = \frac{a+a^*}{2} + i\frac{a-a^*}{2i} = \frac{a+a^*+a-a^*}{2} = a$$

$\square$

Observación 1.1.2. Sea $(\mathcal{A}, \varphi)$ un espacio de probabilidad-$*$.

$$\text{Si } x = x^* \Rightarrow \varphi(x) \in \mathbb{R}, \text{ para cualquier } x \in \mathcal{A}$$

Prueba. Sea $x \in \mathcal{A}$ tal que $x = x^*$, entonces

$$\begin{aligned}\left(\frac{x+1_{\mathcal{A}}}{2}\right)^*\left(\frac{x+1_{\mathcal{A}}}{2}\right) - \left(\frac{x-1_{\mathcal{A}}}{2}\right)^*\left(\frac{x-1_{\mathcal{A}}}{2}\right) &= \frac{(x+1_{\mathcal{A}})^2}{4} - \frac{(x-1_{\mathcal{A}})^2}{4} \\ &= \frac{x^2+2x+1_{\mathcal{A}}-x^2+2x-1_{\mathcal{A}}}{4} \\ &= x.\end{aligned}$$

Luego denotemos $a = \frac{x+1_{\mathcal{A}}}{2}$ y $b = \frac{x-1_{\mathcal{A}}}{2}$, entonces

$$\varphi(x) = \varphi(a^*a) - \varphi(b^*b),$$

pero φ es positiva, es decir $0 \leq \varphi(a^*a) \in \mathbb{R}$, para cualquier $a \in \mathcal{A}$. Por ende $\varphi(x) \in \mathbb{R}$. $\square$

Observación 1.1.3. Sea $(\mathcal{A}, \varphi)$ un espacio de probabilidad-$*$. Entonces la funcional φ es autoadjunta, es decir, dada $a \in \mathcal{A}$

$$\varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)}$$

Prueba. Sea $a \in \mathcal{A}$ entonces, por la Observación 1.1.1 (inciso II), $a = x + iy$ para algunas $x, y \in \mathcal{A}$, con $x = x^*$ y $y = y^*$. Entonces

$$\varphi(a^*) = \varphi\big((x+iy)^*\big) = \varphi(x - iy) = \varphi(x) - i\varphi(y)$$

y por la Observación 1.1.2, es claro que $\varphi(x), \varphi(y) \in \mathbb{R}$. Así,

$$\varphi(a^*) = \overline{\varphi(x)} - i\overline{\varphi(y)} = \overline{\varphi(x) + i\varphi(y)} = \overline{\varphi(x+iy)} = \overline{\varphi(a)}$$

$\square$

El siguiente teorema extiende la desigualdad de Cauchy-Schwarz al marco general de los espacios de probabilidad-$*$.

Teorema 1.1.1. Sea $(\mathcal{A}, \varphi)$ un espacio de probabilidad-$*$. Entonces para cualesquiera $a, b \in \mathcal{A}$

$$|\varphi(b^*a)|^2 \leq \varphi(a^*a)\varphi(b^*b) \tag{1.1.1}$$

Prueba. Sean $a, b \in \mathcal{A}$.

Si $a = 0$ o $b = 0$ el resultado es trivial.

Si $a = b$, entonces $|\varphi(b^*a)|^2 = |\varphi(a^*a)|^2 = \varphi(a^*a)\overline{\varphi(a^*a)} = \varphi(a^*a)\varphi(a^*a) = \varphi(a^*a)\varphi(b^*b)$, por lo que se satisface (1.1.1).

Sean $a \neq b$ y $a, b \neq 0$. Para el subcaso donde $\varphi(b^*a) = 0$ claramente se satisface (1.1.1), por la positividad de φ. Si φ no se anula en b^*a, consideremos el mapeo $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por

$$T(t) = \varphi\big((a - tb)^*(a - tb)\big) \quad \text{para cualquier } t \in \mathbb{R}$$

Sea $t \in \mathbb{R}$, entonces por hipótesis $T(t) \geq 0$, es decir,

$$\varphi\big(a^*a - ta^*b - tb^*a + t^2b^*b\big) \geq 0,$$

por lo que

$$\varphi(a^*a) - t\varphi(a^*b) - t\varphi(b^*a) + t^2\varphi(b^*b) \geq 0,$$

pero por la Observación 1.1.3, $\varphi(a^*b) = \overline{\varphi(b^*a)}$, entonces

$$\varphi(a^*a) - t\big(\overline{\varphi(b^*a)} + \varphi(b^*a)\big) + t^2\varphi(b^*b) \geq 0,$$

por lo que

$$2t\,\mathrm{Re}(\varphi(b^*a)) \leq \varphi(a^*a) + t^2\varphi(b^*b).$$

Para el subcaso donde $\varphi(b^*b) = 0$ tendremos que $2t\,\mathrm{Re}(\varphi(b^*a)) \leq \varphi(a^*a)$. Lo cual sólo es posible si $\mathrm{Re}(\varphi(b^*a)) = 0$, ya que si $\mathrm{Re}(\varphi(b^*a)) > 0$ la desigualdad no se sostiene para cualquier $t \in \mathbb{R}^+$ y si $\mathrm{Re}(\varphi(b^*a)) < 0$ tampoco se sostiene para cualquier $t \in \mathbb{R}^-$. De esta manera, tendremos que

$$0 = \Big(\mathrm{Re}(\varphi(b^*a))\Big)^2 = \frac{\varphi(b^*a)^2 + 2|\varphi(b^*a)|^2 + \varphi(a^*b)^2}{4}$$

sólo se satisface cuando $\varphi(b^*a) = 0$, por lo que (1.1.1) se satisface.

Así, si $\varphi(b^*b) \neq 0$, en particular, para $t = \left(\frac{\varphi(a^*a)}{\varphi(b^*b)}\right)^{\frac{1}{2}}$ tendremos que

$$2\left(\frac{\varphi(a^*a)}{\varphi(b^*b)}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{Re}(\varphi(b^*a)) \leq \varphi(a^*a) + \frac{\varphi(a^*a)}{\varphi(b^*b)}\varphi(b^*b)$$

entonces

$$2\varphi(a^*a)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{Re}(\varphi(b^*a)) \leq 2\varphi(a^*a)\varphi(b^*b)^{\frac{1}{2}}$$

de donde

$$\mathrm{Re}(\varphi(b^*a)) \leq \Big(\varphi(a^*a)\varphi(b^*b)\Big)^{\frac{1}{2}}$$

y

$$\big(\mathrm{Re}(\varphi(b^*a))\big)^2 \leq \varphi(a^*a)\varphi(b^*b) \tag{1.1.2}$$

Luego, consideremos $z = \frac{|\varphi(b^*a)|}{\varphi(a^*b)}$. Claramente $z \in \mathbb{C}$ y $|z| = 1$, entonces

$$\overline{z}\varphi(b^*a) = \frac{|\varphi(b^*a)|}{\overline{\varphi(a^*b)}} \cdot \varphi(b^*a) = \frac{|\varphi(b^*a)|}{\varphi(b^*a)} \cdot \varphi(b^*a) = |\varphi(b^*a)|$$

pero $|\varphi(b^*a)| \in \mathbb{R}^+$, entonces $|\varphi(b^*a)| = \overline{z}\varphi(b^*a) = \mathrm{Re}(\overline{z}\varphi(b^*a))$. Así, de (1.1.2) se sigue que

$$\Big(\mathrm{Re}\left(\varphi((zb)^*a)\right)\Big)^2 \leq \varphi(a^*a)\varphi\big((zb)^*zb\big)$$

de donde

$$\Big(\mathrm{Re}\left(\overline{z}\varphi(b^*a)\right)\Big)^2 \leq \varphi(a^*a)\varphi\big(\overline{z}b^*zb\big)$$

y por lo tanto

$$|\varphi(b^*a)|^2 \leq \varphi(a^*a)\varphi\big(\overline{z}zb^*b\big) = \varphi(a^*a)\varphi\big(|z|^2b^*b\big) = \varphi(a^*a)\varphi\big(b^*b\big)$$

□

Ejemplo 1.1.1.

(i) Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad en el sentido clásico, es decir Ω es un conjunto, $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra de subconjuntos medibles de Ω y $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ es una medida de probabilidad. Denotemos $\mathcal{A} = L^\infty(\Omega, \mathbb{P})$ y tomemos a φ dada por

$$\varphi(f) = \int_\Omega f(\omega)d\mathbb{P}(\omega), \quad \text{para cualquier } f \in \mathcal{A}$$

y a la operación $*$ como

$$f^*(\omega) = \overline{f(\omega)}, \quad f \in \mathcal{A} \quad \omega \in \Omega$$

Entonces $(\mathcal{A}, \varphi)$ es un espacio de probabilidad-$*$ de traza fiel.

Prueba. Es claro que con la suma y multiplicación de funciones complejo-valuadas y con la función identidad $1_\mathcal{A}(\omega) = 1$, para toda $\omega \in \Omega$, $\mathcal{A}$ es un álgebra unitaria sobre $\mathbb{C}$. Y como $\varphi(1_\mathcal{A}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$, $(\mathcal{A}, \varphi)$ es un espacio de probabilidad no conmutativo. Entonces

$$\sup_{\omega\in\Omega} |f^*(\omega)| = \sup_{\omega\in\Omega} |\overline{f(\omega)}| = \sup_{\omega\in\Omega} |f(\omega)| < \infty, \quad \text{para cualquier } f \in \mathcal{A}$$

por lo que $f^* \in \mathcal{A}$ para cualquier $f \in \mathcal{A}$. Además, dadas $f, g \in \mathcal{A}$ se cumple que:

a) $1^*_\mathcal{A}(\omega) = \overline{1} = 1 = 1_\mathcal{A}(\omega)$, para cualquier $\omega \in \Omega$. Por tanto, $1^*_\mathcal{A} = 1_\mathcal{A}$.

b) $(f^*(\omega))^* = (\overline{f(\omega)})^* = \overline{\overline{f(\omega)}} = f(\omega)$, para cualquier $\omega \in \Omega$. Por tanto, $f^* = f$ (involución).

c) $((zf+g)(\omega))^* = \overline{(zf+g)(\omega)} = \overline{zf(\omega)} + \overline{g(\omega)} = \overline{z}f^*(\omega) + g^*(\omega)$, para cualquier $\omega \in \Omega$ y $z \in \mathbb{C}$. Por tanto, $(zf+g)^* = \overline{z}f^* + g^*$ (anti-lineal).

d) $((fg)(\omega))^* = \overline{(fg)(\omega)} = \overline{f(\omega)g(\omega)} = \overline{g(\omega)f(\omega)} = \overline{g(\omega)} \ \ \overline{f(\omega)} = g^*(\omega)f^*(\omega)$, para cualquier $\omega \in \Omega$. Por tanto, $(fg)^* = g^*f^*$ (anti-multiplicativa).

De esta manera, $(\mathcal{A}, *)$ es un álgebra-$*$. Por último, dada $f \in \mathcal{A}$ se tiene que

$$\varphi(f^* f) = \int_\Omega (f^* f)(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int_\Omega \overline{f(\omega)} f(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int_\Omega |f(\omega)|^2 d\mathbb{P}(\omega) \geq 0$$

Es decir, φ es positiva. Por tanto, $(\mathcal{A}, \varphi)$ es un espacio de probabilidad-$*$. Que φ sea una traza se sigue inmediatamente porque la multiplicación de funciones conmuta en $\mathbb{C}$ y para verificar que sea fiel tomamos cualquier $f \in \mathcal{A}$, entonces si $\varphi(f^* f) = 0$, tendremos que

$$\int_\Omega |f(\omega)|^2 d\mathbb{P}(\omega) = 0,$$

por lo que $f = 0$ c.d.-$\mathbb{P}$ □

(II) El ejemplo anterior sólo trata las variables aleatorias genuinas que son acotadas, por lo que omite las más importantes de la teoría de probabilidad usual (las de distribución Gaussiana). A manera de extensión, para este segundo ejemplo, reemplazamos $\mathcal{A} = L^\infty(\Omega, \mathbb{P})$ por

$$\mathcal{A} = L^{\infty-}(\Omega, \mathbb{P}) := \bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p(\Omega, \mathbb{P})$$

De esta manera obtenemos un álgebra de variables aleatorias genuinas que tienen momentos finitos de cualquier orden; esta extensión ya incluye las Gaussianas. Es cerrada bajo la multiplicación usual de funciones complejo-valuadas, pues dados $f, g \in \mathcal{A}$ y $1 \leq p < \infty$ tenemos que

$$|fg|^p \leq \frac{|f|^{2p} + |g|^{2p}}{2},$$

entonces

$$\int_\Omega |fg|^p d\mathbb{P} \leq \frac{1}{2} \int_\Omega |f|^{2p} d\mathbb{P} + \frac{1}{2} \int_\Omega |g|^{2p} d\mathbb{P},$$

por lo que $fg \in \mathcal{A}$. Que $(\mathcal{A}, \varphi)$ sea un espacio de probabilidad-$*$ de traza fiel se sigue de la misma manera que en el inciso anterior.

(III) Sea d un entero positivo, consideremos $M_d(\mathbb{C})$, las matrices de dimensión dxd sobre los complejos, y sea $tr : M_d(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ la traza normalizada,

$$tr(A) = \frac{1}{d} \cdot \sum_{i=1}^{d} \alpha_{ii}, \quad \text{para } A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^d \in M_d(\mathbb{C})$$

Definimos la operación $* : M_d(\mathbb{C}) \to M_d(\mathbb{C})$ dada por

$$A^* = (\overline{\alpha_{ji}})_{i,j=1}^d \qquad \text{para } A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^d \in M_d(\mathbb{C})$$

Entonces $(M_d(\mathbb{C}), tr)$ es un espacio de probabilidad-$*$ de traza fiel.

Prueba. Con la múltiplicación y suma usual de matrices y la matriz identidad $I_d = (\delta_{ij})_{i,j=1}^d$, $M_d(\mathbb{C})$ es un álgebra unitaria sobre $\mathbb{C}$. Luego, dados $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^d, B = (\beta_{ij})_{i,j=1}^d \in M_d(\mathbb{C})$ y $z \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$tr(zA+B) = \frac{1}{d}\cdot\sum_{i=1}^{d}(z\alpha_{ii}+\beta_{ii}) = \frac{1}{d}\cdot\Big(\sum_{i=1}^{d} z\alpha_{ii}+\sum_{i=1}^{d}\beta_{ii}\Big) = \frac{1}{d}\cdot\Big(z\sum_{i=1}^{d}\alpha_{ii}+\sum_{i=1}^{d}\beta_{ii}\Big)$$

$$= z\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d}\alpha_{ii} + \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d}\beta_{ii} = ztr(A) + tr(B)$$

y

$$tr(I_d) = \frac{1}{d}\cdot\sum_{i=1}^{d}\delta_{ii} = \frac{d}{d} = 1$$

Por tanto, $(M_d(\mathbb{C}), tr)$ es un espacio de probabilidad no conmutativo. Luego, dadas $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^d, B = (\beta_{ij})_{i,j=1}^d \in M_d(\mathbb{C})$ tenemos que:

a) $A^* = (\overline{\alpha_{ji}})_{i,j=1}^d \in M_d(\mathbb{C})$.

b) $I_d^* = (\overline{\delta_{ji}})_{i,j=1}^d = (\delta_{ji})_{i,j=1}^d = (\delta_{ij})_{i,j=1}^d = I_d$.

c) $(A^*)^* = \big((\overline{\alpha_{ji}})_{i,j=1}^d\big)^* = (\overline{\overline{\alpha_{ij}}})_{i,j=1}^d = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^d = A$.

d) Sea $z \in \mathbb{C}$, entonces

$$\begin{aligned}(zA+B)^* &= \big((z\alpha_{ij})_{i,j=1}^d + (\beta_{ij})_{i,j=1}^d\big)^* \\ &= \big((z\alpha_{ij}+\beta_{ij})_{i,j=1}^d\big)^* \\ &= \big(\overline{z\alpha_{ji}+\beta_{ji}}\big)_{i,j=1}^d \\ &= \big(\overline{z\alpha_{ji}}+\overline{\beta_{ji}}\big)_{i,j=1}^d \\ &= \overline{z}\big(\overline{\alpha_{ji}}\big)_{i,j=1}^d + \big(\overline{\beta_{ji}}\big)_{i,j=1}^d \\ &= \overline{z}A^* + B^*.\end{aligned}$$

e) Por un lado,

$$\begin{aligned}(AB)^* &= \left((\alpha_{ij})_{i,j=1}^d \cdot (\beta_{ij})_{i,j=1}^d\right)^* \\ &= \left(\left(\sum_{k=1}^d \alpha_{ik}\beta_{kj}\right)_{i,j=1}^d\right)^* \\ &= \left(\sum_{k=1}^d \overline{\alpha_{jk}\beta_{ki}}\right)_{i,j=1}^d \\ &= \left(\sum_{k=1}^d \overline{\beta_{ki}\alpha_{jk}}\right)_{i,j=1}^d \\ &= \left(\sum_{k=1}^d \overline{\beta_{ki}}\,\overline{\alpha_{jk}}\right)_{i,j=1}^d\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$B^*A^* = (\overline{\beta_{ji}})_{i,j=1}^d \cdot (\overline{\alpha_{ji}})_{i,j=1}^d = \left(\sum_{k=1}^d \overline{\beta_{ki}}\,\overline{\alpha_{jk}}\right)_{i,j=1}^d$$

Por tanto, $(AB)^* = B^*A^*$.

De esta manera, $M_d(\mathbb{C})$ es un álgebra-$*$. Ahora, dada $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^d$ en $M_d(\mathbb{C})$ se tiene que

$$\begin{aligned}tr(A^*A) &= tr\left((\overline{\alpha_{ji}})_{i,j=1}^d \cdot (\alpha_{ij})_{i,j=1}^d\right) \\ &= tr\left(\left(\sum_{k=1}^d \overline{\alpha_{ki}}\alpha_{kj}\right)_{i,j=1}^d\right) \\ &= \frac{1}{d}\sum_{i=1}^d\sum_{k=1}^d \overline{\alpha_{ki}}\alpha_{ki} \\ &= \frac{1}{d}\sum_{i=1}^d\sum_{k=1}^d |\alpha_{ki}|^2 \geq 0,\end{aligned}$$

por lo que tr es positiva. Por tanto $(M_d(\mathbb{C}), tr)$ es un espacio de probabilidad-$*$. Luego, veamos que φ es una traza. Sean $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^d$ y $B = (\beta_{ij})_{i,j=1}^d$ en $M_d(\mathbb{C})$ entonces,

$$tr(AB) = \frac{1}{d}\cdot\sum_{i=1}^d\sum_{k=1}^d \alpha_{ik}\beta_{ki} = \frac{1}{d}\cdot\sum_{k=1}^d\sum_{i=1}^d \alpha_{ik}\beta_{ki} = \frac{1}{d}\cdot\sum_{k=1}^d\sum_{i=1}^d \beta_{ki}\alpha_{ik} = tr(BA)$$

Por último, dada $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^{d} \in M_d(\mathbb{C})$, si $tr(A^*A) = 0$, entonces

$$\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d}\sum_{k=1}^{d}|\alpha_{ki}|^2 = 0,$$

entonces

$$|\alpha_{ki}|^2 = 0, \quad \text{para toda } k, i \in \{1, 2, \dots, d\}$$

por lo que

$$\alpha_{ki} = 0, \quad \text{para toda } k, i \in \{1, 2, \dots, d\}$$

y, así,

$$A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^{d} = (0)_{i,j=1}^{d} = O_d$$

□

(IV) De los ejemplos (II) y (III) se puede dar otro más donde el álgebra consiste de las matrices dxd sobre $L^{\infty-}(\Omega, \mathbb{P})$, es decir

$$\mathcal{A} = M_d\big(L^{\infty-}(\Omega, \mathbb{P})\big)$$

y la funcional φ está dada por

$$\varphi(F) = \int_{\Omega} tr(F)d\mathbb{P}, \text{ para toda } F \in \mathcal{A}$$

Las variables aleatorias no conmutativas de esta álgebra-$*$ son las matrices aleatorias sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, donde está claro que la operación $*$ se da como en los incisos (II) y (III). Veamos que φ es positiva. Sea $F = (f_{ij})_{i,j=1}^{d}$ en $\mathcal{A}$, entonces

$$\begin{aligned}
\varphi(F^*F) &= \varphi\left((f_{ji}^*)_{i,j=1}^{d} \cdot (f_{ij})_{i,j=1}^{d}\right) \\
&= \varphi\left(\left(\sum_{k=1}^{d} f_{ki}^* f_{kj}\right)_{i,j=1}^{d}\right) \\
&= \int_{\Omega} tr\left(\left(\sum_{k=i}^{d} f_{ki}^* f_{kj}\right)_{i,j=1}^{d}\right) d\mathbb{P} \\
&= \int_{\Omega} \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d}\sum_{k=1}^{d} f_{ki}^* f_{ki} d\mathbb{P} \\
&= \frac{1}{d}\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{d}\sum_{k=1}^{d}|f_{ki}|^2 d\mathbb{P}
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\varphi(F^*F) \geq 0.$$

Por último, veamos que φ es una traza y fiel. Sean $F = (f_{ij})_{i,j=1}^d$ y $G = (g_{ij})_{i,j=1}^d$ en $\mathcal{A}$, entonces

$$\begin{aligned}
\varphi(FG) &= \varphi\left((f_{ij})_{i,j=1}^d \cdot (g_{ij})_{i,j=1}^d\right) \\
&= \varphi\left(\left(\sum_{k=1}^d f_{ik}g_{kj}\right)_{i,j=1}^d\right) \\
&= \int_\Omega \frac{1}{d}\sum_{i=1}^d\sum_{k=1}^d f_{ik}g_{ki}d\mathbb{P} \\
&= \int_\Omega \frac{1}{d}\sum_{i=1}^d\sum_{k=1}^d g_{ki}f_{ik}d\mathbb{P} \\
&= \int_\Omega \frac{1}{d}\sum_{k=1}^d\sum_{i=1}^d g_{ki}f_{ik}d\mathbb{P} \\
&= \int_\Omega tr\left(\left(\sum_{i=1}^d g_{ni}f_{im}\right)_{n,m=1}^d\right)d\mathbb{P} \\
&= \varphi\left(\left(\sum_{i=1}^d g_{ni}f_{im}\right)_{n,m=1}^d\right) \\
&= \varphi\left((g_{nm})_{n,m=1}^d \cdot (f_{nm})_{n,m=1}^d\right) \\
&= \varphi(GF)
\end{aligned}$$

Luego, si $\varphi(F^*F) = 0$ tenemos que

$$\frac{1}{d}\int_\Omega \sum_{i=1}^d\sum_{k=1}^d |f_{ki}|^2 d\mathbb{P} = 0,$$

entonces

$$\sum_{i=1}^d\sum_{k=1}^d \int_\Omega |f_{ki}|^2 d\mathbb{P} = 0$$

de donde

$$\int_\Omega |f_{ki}|^2 d\mathbb{P} = 0, \text{ para toda } k, i \in \{1, \ldots, d\}$$

y

$$f_{ki} = 0 \quad \text{c.d.-}\mathbb{P}, \text{ para toda } k, i \in \{1, \ldots, d\}$$

por lo que

$$F = 0.$$

Por lo tanto, $\left(M_d\left(L^{\infty-}(\Omega, \mathbb{P})\right), \varphi\right)$ es un espacio de probabilidad-$*$ de traza fiel.

(V) Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y sea $\mathcal{A} = B(\mathcal{H})$ el conjunto de operadores lineales y acotados en $\mathcal{H}$. $\mathcal{A}$ es un álgebra-$*$, donde el producto entre operadores es la composición y el adjunto T^* de cualquier operador $T \in \mathcal{A}$ se determina de manera única como sigue:

$$\langle Tu, v\rangle = \langle u, T^*v\rangle \quad \text{para todo } u, v \in \mathcal{H}$$

Sea $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}$ una subálgebra-$*$ unitaria y sea $u_0 \in \mathcal{H}$ un vector de norma unitaria ($||u_0|| := \langle u_0, u_0\rangle^{1/2} = 1$). Definimos $\varphi_{u_0} : \mathcal{A}_1 \to \mathbb{C}$ como sigue:

$$\varphi_{u_0}(T) := \langle Tu_0, u_0\rangle \quad \text{para toda } T \in \mathcal{A}_1$$

Entonces φ_{u_0} es una funcional lineal positiva y unitaria, y usualmente se dice que es un estado vectorial (en el álgebra de operadores $\mathcal{A}_1$). Veamos que φ_{u_0} es positiva. Sea $T \in \mathcal{A}_1$, entonces

$$\varphi_{u_0}(T^*T) = \langle (T^*T)u_0, u_0\rangle = \langle T^*(Tu_0), u_0\rangle$$

y llamemos $v_0 = Tu_0$, entonces

$$\begin{aligned} \varphi_{u_0}(T^*T) &= \langle T^*v_0, u_0\rangle \\ &= \langle v_0, (T^*)^*u_0\rangle \\ &= \langle v_0, Tu_0\rangle \\ &= \langle Tu_0, Tu_0\rangle \geq 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(\mathcal{A}_1, \varphi_{u_0})$ es un espacio de probabilidad-$*$.

Definición 1.1.5.

(I) Un morfismo entre dos espacios de probabilidad-$*$ $(\mathcal{A}, \varphi)$ y $(\mathcal{B}, \psi)$ es un homomorfismo unitario entre álgebras-$*$ $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ tal que $\psi \circ \Phi = \varphi$.

(II) Cuando $(\mathcal{B}, \psi)$ es el espacio de probabilidad-$*$ como del Ejemplo 1.1.1 (V), se dice que Φ es una representación de $(\mathcal{A}, \varphi)$.

Nota 1.1.3. Para precisar un poco la Definición 1.1.5 (II), el dar un representación de $(\mathcal{A}, \varphi)$ equivale a dar una terna $(\mathcal{H}, \Phi, u_0)$ donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert, $\Phi : \mathcal{A} \to B(\mathcal{H})$ es un homomorfismo unitario y $u_0 \in \mathcal{H}$ es un vector de norma unitaria tal que $\varphi(a) = \langle \Phi(a)u_0, u_0\rangle$, para toda $a \in \mathcal{A}$.

1.2. Distribuciones-$*$.

En esta sección se extiende el concepto distribución de la teoría de probabilidad clásica al ambito algebráico no conmutativo. Se les denomina como distribuciones porque reflejan la misma idea de la probabilidad clásica, donde la distribución (μ_X) de una variable aleatoria clásica (X) se entiende como la medida inducida en $(\mathbb{C}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$, por medio de la medida del espacio de probabilidad y la variable aleatoria, como sigue: $\mu_X(\cdot) := \mathbb{P}\left(X^{-1}(\cdot)\right)$. Así, la distribución de X nos habla sobre la posibilidad de los valores que puede tomar X, según los eventos de Ω.

En cierto modo, esta medida es exactamente una funcional sobre las variables aleatorias del espacio, la cual está determinada integrando respecto a la medida de probabilidad. Consideremos un espacio de probabilidad cualquiera $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y sean X una variable aleatoria y P cualquier polinomio. Entonces

$$\int_{\mathbb{C}} P \, d\mu_X = \int_{\Omega} P \circ X \, d\mathbb{P} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left(P \circ X\right).$$

Así, extendiendo a cualquier variable aleatoria acotada, definimos la funcional $\tilde{\mu}_X : L^{\infty}(\Omega, \mathbb{P}) \to \mathbb{C}$ tal que para toda $f \in L^{\infty}(\Omega, \mathbb{P})$

$$\tilde{\mu}_X(f) := \int_{\mathbb{C}} f \, d\mu_X = \mathbb{E}\left(f \circ X\right)$$

Con esta idea, si $(\mathcal{A}, \varphi)$ es un espacio de probabilidad no conmutativo y $a \in \mathcal{A}$, la distribución de a sería una funcional lineal μ_a en el álgebra de polinomios de una incógnita con coeficientes complejos, definida por $\mu_a(P) = \varphi(P(a))$. Además, si a es normal, la funcional μ_a se puede extender a una medida de probabilidad de soporte compacto en $\mathbb{C}$, cuya definición se da a continuación:

Definición 1.2.1. Sea $(\mathcal{A}, \varphi)$ un espacio de probabilidad-$*$ y sea $a \in \mathcal{A}$ tal que $a^*a = aa^*$ (normal). Se dice que una medida de probabilidad μ sobre $\mathbb{C}$ es la distribución-$*$ de a si tal medida existe, es de soporte compacto y satisface que

$$\int z^n (\overline{z})^m d\mu(z) = \varphi\big(a^n (a^*)^m\big), \quad \text{para todos } n, m \in \mathbb{N} \tag{1.2.1}$$

A grandes rasgos, la distribución-$*$ de una variable aleatoria no conmutativa a es una manera estandarizada de leer los valores de φ en la subálgebra-$*$ unitaria generada por a. En este caso, la subálgebra-$*$ unitaria generada por a es

$$\mathcal{A} := \left\langle \{a^n (a^*)^m | n, m \geq 0\} \right\rangle$$

Así, el trabajo de la distribución-$*$ de a será el de tener un rastreo de los valores de $\varphi(a^n(a^*)^m)$, donde $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. El tipo de objeto que puede realizar esta labor, y que es preferible tener cuando sea posible, es una medida de probabilidad de soporte compacto sobre $\mathbb{C}$.

Además, esta medida de probabilidad μ de soporte compacto sobre $\mathbb{C}$ se determina de manera única por como integra funciones de la forma $z \mapsto z^n(\overline{z})^m$, con $n, m \in \mathbb{N}$. Consecuencia inmediata del teorema de Stone-Weierstrass. De manera más precisa, por el teorema de Stone-Weierstrass, μ se determina como una funcional lineal sobre $C(K)$, el espacio de funciones continuas complejo-valuadas sobre K, donde K es el soporte de μ; esto a su vez determina de manera única a μ.

El siguiente teorema muestra las condiciones necesarias para que dos distribuciones-$*$ sean iguales.

Teorema 1.2.1. Sean μ_1, μ_2 medidas de probabilidad de soporte compacto sobre $\mathbb{C}$ y sean $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

$$\text{Si } \int z^n (\overline{z})^m d\mu_1(z) = \int z^n (\overline{z})^m d\mu_2(z) \;\Rightarrow\; \mu_1 = \mu_2$$

Prueba. Sean μ_1, μ_2 medidas de probabilidad de soporte compacto sobre $\mathbb{C}$ y consideremos el compacto K tal que contenga tales soportes. Dada μ medida de probabilidad definimos $L_\mu : C(K) \to \mathbb{C}$ como

$$L_\mu(f) = \int f d\mu, \quad \text{para toda } f \in C(K)$$

Claramente L_μ es funcional lineal sobre $C(K)$. Luego, dados $n, m \in \mathbb{N}$ consideremos el polinomio $p_{n,m} : K \to \mathbb{C}$ dado por

$$p_{n,m}(z) = z^n (\overline{z})^m, \quad \text{para toda } z \in K$$

Entonces, por Stone-Weierstrass, $\big\langle \{p_{n,m}(z) | z \in K\} \big\rangle$ es denso en $C(K)$, por lo que de la hipótesis se sigue

$$L_{\mu_1}(f) = L_{\mu_2}(f), \quad \text{para toda } f \in C(K)$$

En particular, dada $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C(K)$ tal que $f_k \xrightarrow[k\to\infty]{c.d.} \chi_B$, donde B es cualquier boreliano de $\mathbb{C}$, se tiene que

$$L_{\mu_1}(f_k) = L_{\mu_2}(f_k),$$

entonces

$$\int f_k d\mu_1 = \int f_k d\mu_2$$

y por el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue,

$$\mu_1(B) = \mu_2(B), \quad \text{para cualquier boreliano } B \text{ de } \mathbb{C}$$

por lo tanto, $\mu_1 = \mu_2$. □

Observación 1.2.1. *(Caso de variables aleatorias no conmutativas autoadjuntas).* Sea $(\mathcal{A}, \varphi)$ un espacio de probabilidad-$*$ y sea $a \in \mathcal{A}$ tal que $a = a^*$. Supongamos que a tiene distribución-$*$ μ, entonces el soporte de μ está en $\mathbb{R}$.

Prueba: Definimos $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = z - \overline{z}$, para toda $z \in \mathbb{C}$. Entonces,

$$\int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 d\mu(z) = \int_{\mathbb{C}} (z - \overline{z})(\overline{z} - z) d\mu(z) = \int_{\mathbb{C}} 2z\overline{z} - z^2 - \overline{z}^2 d\mu(z)$$

Pero por hipótesis y como a es normal, de (1.2.1) se tiene que

$$\int_{\mathbb{C}} 2z\overline{z} - z^2 - \overline{z}^2 d\mu(z) = 2\varphi(aa^*) - \varphi(aa) - \varphi(a^*a^*) = 0$$

Es decir,

$$\int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 d\mu(z) = 0$$

entonces f se anula en el soporte de μ, por lo que

$$\text{supp}(\mu) \subset \{z \in \mathbb{C} | z = \overline{z}\} = \mathbb{R}.$$

$\square$

Así que en este caso μ en realidad es una medida sobre $\mathbb{R}$ y se tiene que

$$\int t^p d\mu(t) = \varphi(a^p), \text{ para toda } p \in \mathbb{N} \tag{1.2.2}$$

De hecho, si encontramos una medida de probabilidad μ de soporte compacto en $\mathbb{R}$ tal que $\int t^p d\mu(t) = \varphi(a^p)$, para toda $p \in \mathbb{N}$, entonces μ es la distribución-$*$ de a. Claramente, $\int_{\mathbb{C}} z^n (\overline{z})^m d\mu(z)$ se vuelve $\int t^{n+m} d\mu(t)$, mientras que $\varphi(a^n(a^*)^m)$ se vuelve $\varphi(a^{n+m})$. Así, la idea de esta observación es que para elementos $a \in \mathcal{A}$ autoadjuntos es más apropiado hablar de su distribución (en vez de su distribución-$*$); esto se define como una medida de probabilidad de soporte compacto en $\mathbb{R}$ tal que (1.2.2) se satisface.

A continuación se presentan los resultados seguidos de la observación anterior para el caso especial de operadores lineales, acotados y autoadjuntos sobre un espacio de Hilbert y algunos ejemplos de distribuciones-*.

Teorema 1.2.2. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y sea $T \in B(\mathcal{H})$ autoadjunto. Denotemos por $\mathcal{B}$ al álgebra C^* generada por $\{T, 1\}$. Sea $\varphi : \mathcal{B} \to \mathbb{C}$ un estado, entonces existe μ medida de probabilidad de soporte compacto sobre los borelianos de $\mathbb{R}$ tal que

$$\varphi(T^n) = \int_{\mathbb{R}} t^n \, d\,\mu(t), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Corolario 1.2.1. Sea $(\mathcal{A}, \varphi)$ un espacio de probabilidad C^*. Todo $a \in \mathcal{A}$ autoadjunto admite una μ_a medida de probabilidad de soporte compacto sobre los borelianos de $\mathbb{R}$ tal que

$$\varphi(a^n) = \int_{\mathbb{R}} t^n \, d\,\mu_a(t), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Ejemplo 1.2.1.

(I) Consideremos el Ejemplo 1.1.1 (I), donde el álgebra de variables aleatorias es $L^\infty(\Omega, \mathbb{P})$. Sea $a \in \mathcal{A}$; en otras palabras, a es una función $\mathcal{F}$-medible acotada, $a : \Omega \to \mathbb{C}$. Consideremos la medida de probabilidad μ en $\mathbb{C}$, llamada *la distribución de a* en la teoría de probabilidad usual; esto se define como

$$\mu(E) = \mathbb{P}\Big(\{\omega \in \Omega \,:\, a(\omega) \in E\}\Big), \quad E \subset \mathbb{C} \text{ boreliano.} \tag{1.2.3}$$

Si tomamos algún $r > 0$ tal que $|a(\omega)| \leq r$, para todo $\omega \in \Omega$, queda claro que μ tiene soporte en el disco cerrado de radio r con centro en 0, por lo que μ es de soporte compacto. Luego, como $\mathcal{A}$ es conmutativa, a es normal. Veamos que μ es exactamente la distribución-$*$ de a.

Prueba. De (1.2.3) se tiene que

$$\int_{\mathbb{C}} \chi_E \; d\mu = \int_{\Omega} (\chi_E \circ a) \; d\mathbb{P} \tag{1.2.4}$$

Luego, por el hecho de que toda función $\mathcal{F}$-medible se puede aproximar por funciones $\mathcal{F}$-simples y toda función $\mathcal{F}$-simple se puede aproximar por funciones características, (1.2.4) se satisface para cualquier función medible acotada.

Ahora, sean $n, m \in \mathbb{N}$ y tomemos $r > 0$ tal que $|a(\omega)| \leq r$, para toda $\omega \in \Omega$. Consideremos $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = z^n(\overline{z})^m$, para todo $z \in \mathbb{C}$ con $|z| \leq r$. Claramente f es $\mathcal{F}$-medible y acotada, por lo que

$$\int_{\mathbb{C}} f \; d\mu = \int_{\Omega} (f \circ a) \; d\mathbb{P}$$

Entonces

$$\int_{\mathbb{C}} z^n (\overline{z})^m \; d\mu(z) = \int_{\Omega} f(a(\omega)) \; d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\Omega} (a(\omega))^n (\overline{a(\omega)})^m \; d\mathbb{P}(\omega),$$

pero

$$\varphi(a^n(a^*)^m) := \int_{\Omega} (a(\omega))^n (\overline{a(\omega)})^m \; d\mathbb{P}(\omega)$$

Por lo tanto

$$\int_{\mathbb{C}} z^n (\overline{z})^m \; d\mu(z) = \varphi(a^n(a^*)^m)$$

así, μ es la distribución-$*$ de a. □

(II) Consideremos el Ejemplo 1.1.1 (*III*). Sea $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^d \in M_d(\mathbb{C})$ una matriz normal. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ los valores propios de A, considerando multiplicidades. Luego, como A es normal, A es diagonalizable por una matriz unitaria $U \in M_d(\mathbb{C})$. Es decir, $A = UDU^{-1}$, donde $D = (\lambda_i \delta_{ij})_{i,j=1}^d$ y U es una matriz cuyas columnas son los vectores que constituyen el núcleo de $(A - \lambda_i I_d)$, para cada $i \in \{1, \ldots, d\}$, y además $UU^* = I_d = U^*U$. Así, dados $n, m \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$A^n = UD^nU^{-1}$$

y

$$(A^*)^m = (U^{-1})^*(D^*)^m U^*$$

Entonces

$$\begin{aligned} tr\,(A^n(A^*)^m) &= tr\left(UD^nU^{-1}(U^{-1})^*(D^*)^mU^*\right) \\ &= tr\left((D^*)^mU^*UD^nU^{-1}(U^{-1})^*\right) \\ &= tr\,((D^*)^mD^n) \\ &= tr\,(D^n(D^*)^m)\,, \end{aligned}$$

donde $D^n = (\lambda_i^n\delta_{ij})_{i,j=1}^d$ y $(D^*)^m = \left(\overline{\lambda_i}^m\delta_{ij}\right)_{i,j=1}^d$, entonces

$$D^n(D^*)^m = \left(\lambda_i^n\overline{\lambda_i}^m\delta_{ij}\right)_{i,j=1}^d,$$

entonces

$$tr\,(D^n(D^*)^m) = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^d \lambda_i^n\overline{\lambda_i}^m,$$

por lo que queda claro que

$$tr\big(A^n(A^*)^m\big) = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^d \lambda_i^n\overline{\lambda_i}^m \tag{1.2.5}$$

Ahora, definimos

$$\mu := \frac{1}{d}\sum_{i=1}^d \delta_{\lambda_i}$$

donde

$$\delta_\lambda(B) = \begin{cases} 1 & \lambda \in B \\ 0 & \lambda \notin B \end{cases}$$

para todo $B \subset \mathbb{C}$ boreliano y $\lambda \in \mathbb{C}$. Veamos que μ es la distribución-$*$ de A, usualmente llamada la distribución de valores propios de la matriz A.

Prueba. Sean $n, m \in \mathbb{N}$. Por la linealidad de la integral tenemos que

$$\int z^n(\overline{z})^m\, d\mu(z) = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^d \int z^n(\overline{z})^m\, d\delta_{\lambda_i}(z)$$

donde $f(z) = z^n(\overline{z})^m$ es Borel medible, entonces

$$\int f\, d\delta_{\lambda_i} = f(\lambda_i), \text{ para toda } i \in \{1, \ldots, d\}$$

Por tanto

$$\int z^n(\overline{z})^m\, d\mu(z) = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^d \lambda_i^n(\overline{\lambda_i})^m \overset{(1.2.5)}{=} tr\big(A^n(A^*)^m\big).$$

$\square$

Definición 1.2.2. Sea a una variable aleatoria no conmutativa en un espacio de probabilidad-$*$ $(\mathcal{A}, \varphi)$. Una expresión de la forma

$$\varphi(a^{\varepsilon_1} \cdots a^{\varepsilon_k}), \quad \text{con } k \geq 0 \text{ y } \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k \in \{1, *\}, \tag{1.2.6}$$

es llamado un momento-$*$ de a.

De esta manera, podemos observar que la distribución-$*$ de a permite obtener sus momentos-$*$.

Definición 1.2.3. Sea $(\mathcal{A}, \varphi)$ un espacio de probabilidad-$*$ y sea a un elemento autoadjunto de $\mathcal{A}$. En este caso, los momentos-$*$ descritos en (1.2.6) se reducen a expresiones de la forma $\varphi(a^k), \quad k \geq 0$, y se les llama simplemente momentos de a. Siguiendo la terminología estándar de la teoría clásica de probabilidad, el primer momento $\varphi(a)$ también es llamado como la media de a, mientras que $\varphi(a^2) - \varphi(a)^2$ es llamado la varianza de a.

Capítulo 2

Distribución de elementos no-normales

En este capítulo se hará uso de las trayectorias de Dyck, expuestas detalladamente en el apéndice A, asícomo de algunos conceptos y resultados expuestos en el capítulo anterior para calcular detalladamente la distribución-$*$ de $a+a^*$, para a no-normal. La cual resulta ser una distribución semicircular. En el capítulo 4 se dará una descripción concreta de esta distribución.

Así, se empezará con lo siguiente. Fijemos un espacio de probabilidad-$*$ $(\mathcal{A}, \varphi)$ y un elemento $a \in \mathcal{A}$ tal que:

1. $a^*a = 1_{\mathcal{A}} \neq aa^*$,
2. $\mathcal{A} = \langle \{a^{n_1}(a^*)^{m_1} \cdots a^{n_k}(a^*)^{m_k} \ : \ k, n_k, m_k \in \mathbb{N}\} \rangle$,
3. $\{a^n(a^*)^m \ : \ n, m \geq 0\}$ es linealmente independiente y
4. la funcional $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ satisface lo siguiente:

$$\varphi(a^n(a^*)^m) = \begin{cases} 1 & n = m = 0 \\ 0 & c.o.c. \end{cases} \tag{2.0.1}$$

para toda $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Observación 2.0.1.

$$\langle \{a^n(a^*)^m : n, m \geq 0\} \rangle = \mathcal{A} \tag{2.0.2}$$

Prueba. Claramente

$$\{a^n(a^*)^m : n, m \geq 0\} \subset \{a^{n_1}(a^*)^{m_1} \cdots a^{n_k}(a^*)^{m_k} : k, n_k, m_k \in \mathbb{N}\}.$$

Por otro lado, dados $n, m, p, q \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$(a^n(a^*)^m) \ (a^p(a^*)^q) = a^n \left((a^*)^m a^p\right) (a^*)^q,$$

donde

$$(a^*)^m a^p = \begin{cases} 1_{\mathcal{A}} & m = p \\ (a^*)^{m-p} & m > p \\ a^{p-m} & m < p \end{cases}$$

entonces

$$(a^n(a^*)^m)\ (a^p(a^*)^q) = \begin{cases} a^n(a^*)^q & m = p \\ a^n(a^*)^{q+m-p} & m > p \\ a^{n+p-m}(a^*)^q & m < p \end{cases}$$

por lo que

$$a^n(a^*)^m a^p(a^*)^q \in \{a^n(a^*)^m : n, m \geq 0\}, \quad \text{para toda } n, m, q, p \in \mathbb{N}$$

Así, para cualquier $a^{n_1}(a^*)^{m_1} \cdots a^{n_s}(a^*)^{m_s} \in \mathcal{A}$, queda claro que, por inducción sobre s, tenemos que

$$a^{n_1}(a^*)^{m_1} \cdots a^{n_s}(a^*)^{m_s} \in \{a^n(a^*)^m : n, m \geq 0\}$$

Por lo tanto,

$$\{a^{n_1}(a^*)^{m_1} \cdots a^{n_k}(a^*)^{m_k} : k, n_k, m_k \in \mathbb{N}\} \subset \{a^n(a^*)^m : n, m \geq 0\}.$$

□

Observación 2.0.2. Sea k un entero positivo, sea $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k \in \{1, *\}$ y sea $a^{\varepsilon_1} \cdots a^{\varepsilon_k} \in \mathcal{A}$. Definimos

$$\lambda_j := \begin{cases} 1, & \varepsilon_j = * \\ -1, & \varepsilon_j = 1 \end{cases} \quad \text{para } 1 \leq j \leq k \tag{2.0.3}$$

y denotemos por γ_k a la trayectoria NE-SE correspondiente a la tupla $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ en $\{-1, 1\}^k$. Entonces

$$\varphi(a^{\varepsilon_1} \cdots a^{\varepsilon_k}) = \begin{cases} 1, & \gamma_k \text{ es de Dyck} \\ 0, & c.o.c. \end{cases} \tag{2.0.4}$$

Prueba. Si γ_k corresponde a una trayecoria de Dyck, entonces

$$\sum_{i=1}^{j} \lambda_i \geq 0, \quad \text{para } 1 \leq j < k \tag{2.0.5}$$

y

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 0 \tag{2.0.6}$$

Fijemos $j \in \{2, 3, \ldots, k\}$. Por (2.0.5) queda claro que $\varepsilon_1 = *$ y, además, en la secuencia $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_j$ hay a lo más tantos 1 como $*$ se tengan. Es decir, $a^{\varepsilon_1} a^{\varepsilon_2} \cdots a^{\varepsilon_j}$ queda de la forma $(a^*)^p$, con $0 \leq p \leq j$. Pero por (2.0.6), la secuencia $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ tiene la misma cantidad de 1 que de $*$. Por lo que $a^{\varepsilon_1}a^{\varepsilon_2}\cdots a^{\varepsilon_k} = 1_{\mathcal{A}}$. Así, $\varphi(a^{\varepsilon_1}\cdots a^{\varepsilon_k}) = 1$.

Si γ_k no es de Dyck, se consideran tres casos:

Caso I: $\sum_{i=1}^{j}\lambda_i \geq 0$, para $1 \leq j < k$, y $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i = q$, para algún $0 < q \leq k$. Lo cual implica que $a^{\varepsilon_1}\cdots a^{\varepsilon_k} = (a^*)^q$, para algún $0 < q \leq k$. Por lo que $\varphi(a^{\varepsilon_1}\cdots a^{\varepsilon_k}) = 0$.

Caso II: $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i = 0$, y $j_0 \in \{1, \ldots, k-1\}$ tal que $\sum_{i=1}^{j_0}\lambda_i < 0$. Así, por (2.0.2), se tiene que $a^{\varepsilon_1}\cdots a^{\varepsilon_{j_0}} = a^p(a^*)^q$, con $0 \leq q \leq p \leq k-1$ y $0 < p+q < k$. Entonces $a^{\varepsilon_1}\cdots a^{\varepsilon_k} = a^r(a^*)^r$, con $1 < r \leq k$. Por tanto $\varphi(a^{\varepsilon_1}\cdots a^{\varepsilon_k}) = 0$.

Caso III: $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i < 0$, $a^{\varepsilon_1}\cdots, a^{\varepsilon_k} = a^p(a^*)^q$, con $0 \leq q < p \leq k$ y $p+q \leq k$. En cualquier subcaso se tiene que $\varphi(a^{\varepsilon_1}\cdots, a^{\varepsilon_k}) = 0$.

$\square$

Teorema 2.0.1. Sea k un entero positivo.

$$\varphi\Big((a+a^*)^k\Big) = \begin{cases} C_{k/2} & k \text{ es par} \\ 0 & k \text{ es impar} \end{cases}, \tag{2.0.7}$$

donde C_p es el p-ésimo número de Catalan, para cualquier $p \in \mathbb{N}$.

Prueba. Es claro que

$$(a+a^*)^k = \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k \in \{1,*\}} a^{\varepsilon_1}\cdots a^{\varepsilon_k},$$

por lo que

$$\varphi\Big((a+a^*)^k\Big) \overset{(2.0.1)}{=} \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k \in \{1,*\}} \varphi(a^{\varepsilon_1}\cdots a^{\varepsilon_k}) \overset{(2.0.4)}{=} \sum_{\text{Trayectorias de Dyck de k pasos}} 1.$$

Si k es impar, $\varphi\Big((a+a^*)^k\Big) = 0$. Pues una trayectoria de Dyck cualquiera no puede tener una cantidad impar de pasos; si fuese el caso, en particular tendríamos $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \{-1, 1\}^k$ tal que $\sum_{i=1}^{j}\lambda_i$, con $1 \leq j \leq k$, pero $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i > 0$. Lo cual contradice la definición.

Si $k = 2p$, para $p \in \mathbb{N}$, entonces por la observación A.0.3, tendremos que $\varphi\Big((a+a^*)^k\Big) = C_p = C_{k/2}$ $\square$

Teorema 2.0.2. Definimos

$$d\mu(t) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-t^2}dt, \quad \text{para toda } t \in [-2, 2]. \tag{2.0.8}$$

La distribución de $a + a^*$ es la medida definida por (2.0.8).

Prueba. Sea $k \in \mathbb{N}$ y $f(t) = t^k\sqrt{4-t^2}$, para toda $t \in [-2, 2]$.

Si $k = 2p+1$, para $p \geq 0$, entonces

$$f(-t) = (-1)^{2p+1}t^{2p+1}\sqrt{4-t^2} = -t^{2p+1}\sqrt{4-t^2} = -f(t),$$

por lo que

$$\int_{-2}^{2} f(t)dt = 0.$$

Si $k = 2p$, para $p \geq 0$, consideramos el cambio de variable $t = 2\cos\theta$, y entonces

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{2} f(t)dt &= \int_{-2}^{2} t^{2p}\sqrt{4-t^2}dt \\
&= \int_{\pi}^{0} (2\cos\theta)^{2p}\sqrt{4-4\cos^2\theta}(-2\sin\theta d\theta) \\
&= \int_{0}^{\pi} 2^{2p+2}\cos^{2p}\theta\sin\theta\sqrt{1-\cos^2\theta}\, d\theta \\
&= 4^{p+1}\int_{0}^{\pi} \cos^{2p}\theta\left(1-\cos^2\theta\right)\, d\theta \\
&= 4^{p+1}\int_{0}^{\pi} \cos^{2p}\theta - \cos^{2p+2}\theta\, d\theta \\
&= 4^{p+1}\left(\int_{0}^{\pi} \cos^{2p}\theta\, d\theta - \int_{0}^{\pi} \cos^{2(p+1)}\theta\, d\theta\right).
\end{aligned}$$

Denotemos

$$I_p := \int_{0}^{\pi} \cos^{2p}\theta\, d\theta, \quad p \geq 0. \tag{2.0.9}$$

Entonces,

$$\int_{-2}^{2} t^{2p}\sqrt{4-t^2}dt = 4^{p+1}\Big(I_p - I_{p+1}\Big). \tag{2.0.10}$$

Luego, para resolver (2.0.9), usamos el siguiente resultado:

$$\int_{0}^{\pi} \cos^n x\, dx = \frac{n-1}{n}\int_{0}^{\pi} \cos^{n-2} x\, dx, \quad \text{para todo } n \text{ par.}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
I_p &= \frac{(2p-1)(2p-3)(2p-5)\cdots 5\cdot 3\cdot 1}{2p(2p-2)(2p-4)\cdots 4\cdot 2}\cdot\pi \\
&= \frac{(2p)!}{\big(2p(2p-2)(2p-4)\cdots 4\cdot 2\big)^2}\cdot\pi \\
&= \frac{(2p)!}{4^p\cdot(p!)^2}\cdot\pi \\
&= \frac{\pi}{4^p}\binom{2p}{p}
\end{aligned}$$

y de esta manera,

$$I_{p+1} = \frac{\pi}{4^{p+1}}\binom{2p+2}{p+1} = \frac{\pi}{4^{p+1}} \cdot \frac{2p+2}{p+1}\binom{2p+1}{p} = \frac{2\pi}{4^{p+1}}\binom{2p+1}{p}.$$

Así,

$$\begin{aligned} I_p - I_{p+1} &= \frac{\pi}{4^p}\left(\binom{2p}{p} - \frac{1}{2}\binom{2p+1}{p}\right) \\ &= \frac{\pi}{4^p}\left(\binom{2p}{p} - \frac{2p+1}{2p+2}\binom{2p}{p}\right) \\ &= \frac{\pi}{4^p}\binom{2p}{p}\left(\frac{2p+2-2p-1}{2p+2}\right) \\ &= \frac{\pi}{2\cdot 4^p} \cdot \frac{1}{p+1}\binom{2p}{p} \\ &= \frac{\pi}{2\cdot 4^p} C_p. \end{aligned}$$

Entonces, de (2.0.10), se sigue que

$$\int_{-2}^{2} t^{2p}\sqrt{4-t^2}dt = 2\pi C_p. \tag{2.0.11}$$

De esta manera, se tiene que

$$\int_{-2}^{2} t^k \, d\mu(t) = \begin{cases} 0 & k \text{ es impar} \\ C_p & k \text{ es par} \end{cases},$$

donde $k = 2p$, entonces

$$\int_{-2}^{2} t^k \, d\mu(t) = \begin{cases} 0 & k \text{ es impar} \\ C_{k/2} & k \text{ es par} \end{cases}.$$

Así, por (2.0.7), queda claro que

$$\varphi\Big((a+a^*)^k\Big) = \int_{-2}^{2} t^k \, d\mu(t), \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

□

Capítulo 3

Transformada de Cauchy

En este capítulo se desarrollarán las herramientas analíticas necesarias para poder estudiar la convolución libre, así como construir una metodología para obtener la distribución de dicha operación entre variables aleatorias no conmutativas.

En una primera sección se exponen algunas representaciones integrales para un determinado tipo de funciones analíticas. Posteriormente se define la transformada de Cauchy y se muestran varias propiedades útiles para el capítulo posterior.

3.1. La Clase Nevanlinna

El problema de interpolación consiste en lo siguiente: en los planos complejos de variables z y w damos dos regiones G_z y G_w, respectivamente. Luego, damos $Z = \{z_a\} \subset G_z$ y $W = \{w_a\} \subset G_w$. Buscamos una función $f(z)$ analítica en G_z, cuyo rango pertenezca a G_w y satisfaga que

$$f(z_a) = w_a.$$

Si Z contiene más de un punto, estas condiciones se modifican de manera natural; de la misma manera se realiza una modificación para el caso límite cuando $z_a \in Z$ se mueve hacia la frontera de G_z. Además, pedimos que las regiones G_z y G_w sean simples cerradas; para este caso, sólo consideraremos medios-planos o discos unitarios.

3.1.1. La clase C (Caratheodory).

Nos referimos a la clase C como al conjunto de funciones $F : D \to i\mathbb{C}^+$, donde

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\},$$

$$i\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) \geq 0\}.$$

Observación 3.1.1. Sea $f = u + iv$ una función analítica en G_z. Entonces, por la fórmula integral de Schwartz tenemos que

$$f(z) = i\,v(0) + \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} \frac{w+z}{w-z}\cdot\frac{u(w)}{w}\,d\,w, \quad \text{para toda } z \in G_z. \tag{3.1.1}$$

Luego, podemos reescribir f como

$$f(z) = u(r,\theta) + i\,v(r,\theta), \quad \text{con } z = re^{i\theta},$$

donde $r > 0$ y $\theta \in [-\pi, \pi]$. Así, para $|z| < R < 1$ se tiene que

$$\begin{aligned} f(z) &= i\,v(0) + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z}\cdot\frac{u(R,\theta)}{Re^{i\theta}}\,Rie^{i\theta}\,d\theta \\ &= i\,v(0) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z}\cdot u(R,\theta)\,d\theta, \quad \text{para toda } z \in G_z. \end{aligned}$$

Entonces, definiendo $\sigma_R(\theta) = \int_{-\pi}^{\theta} u(R,\phi)\,d\,\phi$, para $R \in (0,1)$, tenemos que

$$f(z) = i\,v(0) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z}\cdot d\sigma_R(\theta), \quad \forall\, z \in G_z. \tag{3.1.2}$$

Teorema 3.1.1. Para toda función F de la clase C se tiene lo siguiente:

$$F(z) = i\,Im\,F(0) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\,d\,\sigma(\theta), \tag{3.1.3}$$

donde $\sigma(\theta)$ es una función no decreciente y de variación acotada (esencialmente determinada por F).

Prueba. Como $F(z) = u(r,\psi) + i\,v(r,\psi)$ con $\psi \in [-\pi, \pi]$, por la observación anterior, queda claro que para $|z| < R < 1$

$$F(z) = i\,v(0) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z}\,d\,\sigma_R(\theta), \quad \forall\, z \in G_z, \tag{3.1.4}$$

donde $\sigma_R(\theta) := \int_{-\pi}^{\theta} u(R,\phi)\,d\,\phi$ para $\theta \in [-\pi, \pi]$. Claramente, $\sigma_R(\theta)$ es no-decreciente, por lo que

$$0 \le \sigma_R(\theta) \le \sigma_R(\pi), \quad \forall\, R \in (0,1)\ \forall\, \theta \in [-\pi, \pi].$$

Pero

$$ReF(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta}+0}{e^{i\theta}-0}\,d\,\sigma_R(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\,\sigma_R(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(R,\theta)d\theta = \frac{1}{2\pi}\,\sigma_R(\pi).$$

Entonces

$$0 \le \sigma_R(\theta) \le 2\pi\,ReF(0), \quad \forall\, R \in (0,1)\ \forall\, \theta \in [-\pi, \pi],$$

por lo que $\{\sigma_R(\theta)\}_{R\in(0,1)}$ es uniformemente acotada. Así, por el primer teorema de Helly, existe $\{\sigma_{R_k}(\theta)\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{\sigma_R(\theta)\}_{R\in(0,1)}$, con $R_k \to 1$, y $\sigma(\theta)$ no-decreciente tal que para cualquier $\theta \in [-\pi, \pi]$

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_{R_k}(\theta) = \sigma(\theta).$$

Así, por (3.1.4), en particular se tiene para $k \in \mathbb{N}$ que

$$F(z) = i\,v(0) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{R_k e^{i\theta} + z}{R_k e^{i\theta} - z}\, d\,\sigma_{R_k}(\theta), \quad \forall\, z \in G_z,$$

y por el segundo teorema de Helly

$$F(z) = i\,v(0) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z}\, d\,\sigma(\theta), \quad \forall\, z \in G_z.$$

$\square$

3.1.2. La clase S (Schur).

Nos referimos a la clase S como al conjunto de funciones $\phi : D \to \overline{D}$. Existe una relación entre la clase C y la S, dada por

$$\phi(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{F(z) - F(0)}{F(z) + \overline{F(0)}}, \quad \forall\, z \in G_z, \tag{3.1.5}$$

donde ϕ es de la clase S y F de la clase C.

3.1.3. La clase N (Nevanlinna).

Nos referimos a la clase N como al conjunto de funciones $f : H^+ \to \mathbb{C}^+$, donde

$$H^+ = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\},$$

$$\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) \geq 0\}.$$

Definición 3.1.1. Dados dos espacios medibles $(X, \mathcal{S})$, $(Y, \mathcal{T})$, una función medible $f : X \to Y$ y una medida μ en $(X, \mathcal{S})$ se define la medida imagen de μ bajo f en $(Y, \mathcal{T})$, denotada $f_*(\mu)$, dada por

$$f_*(\mu)(B) = \mu\left(f^{-1}(B)\right),$$

para todo $B \in \mathcal{T}$.

Observación 3.1.2. Dados tres espacios medibles $(X, \mathcal{S})$, $(Y, \mathcal{T})$, $(Z, \mathcal{U})$, una medida μ en $(X, \mathcal{S})$ y dos funciones medibles $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, entonces $(g \circ f)_*(\mu) = g_*(f_*(\mu))$.

Lema 3.1.1. Sea $(X, \mathcal{S}, \sigma)$ un espacio de medida finita. Sean $f : X \to \mathbb{C}$, $u : Y \to X$ medibles y sea μ la medida imagen de σ bajo u. Entonces

$$\int_Y f\big(u(\theta)\big)\, d\,\sigma(\theta) = \int_X f\big(\tilde{u}\big)\, d\,\mu(\tilde{u}). \tag{3.1.6}$$

Prueba.

Caso I: Sea $B \subseteq X$ y $f = \chi_B$, entonces

$$\int_Y \chi_B \circ u \;\, d\,\sigma = \int_Y \chi_{u^{-1}(B)}\, d\,\sigma = \sigma\big(u^{-1}(B)\big) = \int_X \chi_B\, d\,\mu.$$

Caso II: f es una función simple. Es decir,

$$f = \sum_{i=1}^{n} c_i\, \chi_{B_i},$$

donde $c_i \in \mathbb{C}$ y $B_i \subseteq X$, para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces, por le caso I,

$$\int_Y f \circ u \;\, d\,\sigma = \sum_{i=1}^{n} c_i\, \sigma\big(u^{-1}(B_i)\big) = \int_X f\, d\,\mu.$$

Caso III: Si f es cualquier función medible y acotada, entonces existe una sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, uniformemente acotada, de funciones simples tal que $s_n \to f$. Entonces, por el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue y el caso II, tenemos que

$$\int_Y f \circ u \;\, d\,\sigma = \lim_{n\to\infty} \int_Y s_n \circ u \;\, d\,\sigma = \lim_{n\to\infty} \int_X s_n\, d\,\mu = \int_X f\, d\,\mu.$$

$\square$

Lema 3.1.2. La transformada de Möbius $T : D \to H^+$, dada por

$$T(z) = \frac{i(1+z)}{1-z},$$

es una biyección entre el interior del círculo unitario y el semiplano superior. Además, la inversa está dada por

$$T^{-1}(w) = \frac{w-i}{w+i}.$$

Prueba. Veamos que T es inyectiva. Sean $x, y \in \mathbb{Z}$, tales que $|x|, |y| < 1$. Si $T(x) = T(y)$, entonces

$$\frac{i(1+x)}{1-x} = \frac{i(1+y)}{1-y},$$

entonces

$$(1+x)(1-y) = (1+y)(1-x),$$

de donde
$$1 - y + x - xy = 1 - x + y - xy,$$
y
$$x = y.$$

Luego, veamos que T es suprayectiva. Sea $w \in H^+$ y consideremos $z = \frac{w-i}{w+i}$, entonces
$$|z|^2 = z\,\overline{z} = \frac{(w-i)(\overline{w}+i)}{(w+i)(\overline{w}-i)} = \frac{|w|^2 + i(w-\overline{w}) + 1}{|w|^2 - i(w-\overline{w}) + 1} = \frac{|w|^2 - 2Im(w) + 1}{|w|^2 + 2Im(w) + 1} < 1,$$
por lo que $|z| < 1$ y
$$T(z) = \frac{i(1 + \frac{w-i}{w+i})}{1 - \frac{w-i}{w+i}} = \frac{i(w+i+w-i)}{w+i-w+i} = w.$$

$\square$

Teorema 3.1.2. Para toda función f de la clase N se tiene la siguiente representación:
$$f(z) = \mu\, z + \nu + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + u\,z}{u - z}\, d\,\tau(u), \tag{3.1.7}$$
donde μ, $\nu \in \mathbb{R}$, con $\mu > 0$, y $\tau(u) \in BV(\mathbb{R})$ es no-decreciente.

Prueba. Sea f de la clase N y consideremos la siguiente transformación de möbius del círculo unitario al semiplano superior (H^+):
$$w = \frac{i(1+z)}{1-z}, \quad |z| < 1.$$
Entonces
$$z = \frac{w-i}{w+i}, \quad w \in H^+.$$
De esta manera, tenemos que $f(w) = iF(z)$, con F de la clase C. Así, por el Teorema 3.1.1, tenemos que
$$F(z) = i\,ImF(0) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\, d\,\sigma(\theta).$$
Por lo que
$$f(w) = -ImF(0) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} i \cdot \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\, d\,\sigma(\theta).$$
Pero
$$\begin{aligned}\int_{[-\pi,\pi]} i \cdot \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\, d\,\sigma(\theta) &= \int_{[-\pi,0)} i \cdot \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\, d\,\sigma(\theta) + \int_{(0,\pi]} i \cdot \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\, d\,\sigma(\theta) + i \cdot \frac{1+z}{1-z}\, d\,\sigma(\{0\}) \\ &= \int_{[-\pi,0)} i \cdot \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\, d\,\sigma(\theta) + \int_{(0,\pi]} i \cdot \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\, d\,\sigma(\theta) + w\, d\,\sigma(\{0\}).\end{aligned}$$

Luego, consideremos $u(\theta) = \frac{i(1+e^{i\theta})}{1-e^{i\theta}}$. Entonces u establece una biyección entre $[-\pi, 0)$ y $[0, \infty)$ o $(0, \pi]$ y $(-\infty, 0]$. Además, $u'(\theta) = \frac{-2e^{i\theta}}{(1-e^{i\theta})^2}$, por lo que es continua y nunca se anula en $[-\pi, 0)$ o $(0, \pi]$. Así, por el Lema 3.1.1, se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{[-\pi,0)} i \cdot \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\, d\,\sigma(\theta) &= \int_{[-\pi,0)} i \cdot \frac{e^{i\theta} + \frac{w-i}{w+i}}{e^{i\theta} - \frac{w-i}{w+i}}\, d\,\sigma(\theta) \\
&= \int_{[-\pi,0)} \frac{1 - e^{i\theta} + wi(1+e^{i\theta})}{i(1+e^{i\theta}) - w(1-e^{i\theta})}\, d\,\sigma(\theta) \\
&= \int_{[-\pi,0)} \frac{1 + w\frac{i(1+e^{i\theta})}{1-e^{i\theta}}}{\frac{i(1+e^{i\theta})}{1-e^{i\theta}} - w}\, d\,\sigma(\theta) \\
&= \int_{[0,\infty)} \frac{1+w\tilde{u}}{\tilde{u}-w}\, d\tau(\tilde{u}).
\end{aligned}$$

Análogamente,

$$\int_{(0,\pi]} i \cdot \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\, d\,\sigma(\theta) = \int_{(-\infty,0]} \frac{1+w\tilde{u}}{\tilde{u}-w}\, d\tau(\tilde{u}).$$

De esta manera,

$$\begin{aligned}
f(w) &= -ImF(0) + w\frac{d\,\sigma\big(\{0\}\big)}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\int_{(-\infty,0]} \frac{1+w\tilde{u}}{\tilde{u}-w}\, d\tau(\tilde{u}) + \frac{1}{2\pi}\int_{[0,\infty)} \frac{1+w\tilde{u}}{\tilde{u}-w}\, d\tau(\tilde{u}) \\
&= -ImF(0) + w\frac{d\,\sigma\big(\{0\}\big)}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\int_{(-\infty,\infty)} \frac{1+w\tilde{u}}{\tilde{u}-w}\, d\tau(\tilde{u}).
\end{aligned}$$

□

3.2. La Transformada de Cauchy

Dada μ una medida de probabilidad en $\mathbb{R}$, consideramos la transformada de Cauchy de μ dada por

$$G_\mu(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z-t}\, d\,\mu(t), \quad \text{para todo}\, z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \tag{3.2.1}$$

Observación 3.2.1. Es claro que

$$\overline{G_\mu(z)} = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z-t}\, d\,\mu(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\overline{z}-t}\, \overline{d\,\mu(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\overline{z}-t}\, d\,\mu(t) = G_\mu(\overline{z}),$$

por lo que el comportamiento de G_μ en el semiplano inferior (H^-) está determinado por su comportamiento en el semiplano superior (H^+).

Nota 3.2.1. Para cualquier $\alpha > 0$ denotemos

$$\Gamma_\alpha = \big\{z \in H^+ \,:\, |Re(z)| < \alpha\, Im(z)\big\} \tag{3.2.2}$$

Observación 3.2.2. Sean $x, y, t \in \mathbb{R}$ y $\alpha > 0$ tales que $|x| < \alpha y$ y $y > 0$. Entonces para cualquier $t \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$f(t) = \frac{t^2}{(x-t)^2 + y^2} < \alpha^2 + 1. \tag{3.2.3}$$

Claramente f está definida en todo $\mathbb{R}$ y es derivable, al menos, dos veces. Así,

$$f'(t) = \frac{2xt(x-t) + 2y^2 t}{\big((x-t)^2 + y^2\big)^2}$$

y

$$f''(t) = \frac{\big(2x(x-2t) + y^2\big)\big((x-t)^2 + y^2\big) + 4t(x-t)\big(x(x-t) + y^2\big)}{\big((x-t)^2 + y^2\big)^3}.$$

Entonces $f'(t) = 0$ si y sólo si $t\big(xt - (x^2+y^2)\big) = 0$; si y sólo si $t = 0$ o $t = \frac{x^2+y^2}{x}$. Donde

$$f''(0) = \frac{2}{x^2 + y^2} > 0,$$

y

$$f''\Big(\frac{x^2+y^2}{x}\Big) = -\frac{2x^4}{y^4(x^2+y^2)} < 0.$$

Entonces para toda $t \in \mathbb{R}$

$$f(t) \leq f\Big(\frac{x^2+y^2}{x}\Big) = \frac{x^2+y^2}{y^2} = \Big(\frac{x}{y}\Big)^2 + 1,$$

pero $\frac{|x|}{y} < \alpha$, entonces $\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1 < \alpha^2 + 1$, por lo que $f(t) < \alpha^2 + 1$.

Lema 3.2.1. Sea $f : H^+ \to H^+$ analítica y tal que $\sup_{y \geq 1} |iyf(iy)| < \infty$, entonces

$$f(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1+u^2}{u-z}\, d\tau(u),$$

donde $\tau(u) \in BV(\mathbb{R})$ y no decreciente.

Prueba. Como f es de clase N, podemos representarla de manera integral como

$$f(z) = a + bz + \int_{\mathbb{R}} \frac{1+uz}{u-z}\, d\tau(u),$$

donde $\tau(u) \in BV(\mathbb{R})$ y no decreciente, $a, b \in \mathbb{R}$ y $b \geq 0$. Entonces

$$f(iy) = a + iby + \int_{\mathbb{R}} \frac{1+iuy}{u-iy}.$$

Pero
$$\frac{1+iuy}{u-iy} = \frac{(1-y^2)u}{u^2+y^2} + i\frac{y(1+u^2)}{u^2+y^2},$$
entonces
$$iyf(iy) = A_y + iB_y,$$
donde
$$A_y = -y^2\Big(b + \int_{\mathbb{R}} \frac{1+u^2}{u^2+y^2} d\tau(u)\Big)$$
$$B_y = y\Big(a + (1-y^2)\int_{\mathbb{R}} \frac{u}{u^2+y^2} d\tau(u)\Big).$$
Así, como $\sup_{y\geq 1}|iyf(iy)| < \infty$, entonces $\sup_{y\geq 1}|A_y| < \infty$ y $\sup_{y\geq 1}|B_y| < \infty$. Luego, como $\lim_{y\to\infty}\frac{1}{|y|^n} = 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$ fija, tenemos que

$$\lim_{y\to\infty} \frac{|A_y|}{|y|^2} = 0$$

$$\lim_{y\to\infty} \frac{|B_y|}{|y|} = 0.$$
Es decir,
$$\lim_{y\to\infty}\Big|b + \int_{\mathbb{R}} \frac{1+u^2}{u^2+y^2} d\tau(u)\Big| = 0$$
y
$$\lim_{y\to\infty}\Big|a + (1-y^2)\int_{\mathbb{R}} \frac{u}{u^2+y^2} d\tau(u)\Big| = 0,$$
si y sólo si
$$b + \lim_{y\to\infty}\int_{\mathbb{R}} \frac{1+u^2}{u^2+y^2} d\tau(u) = 0$$
y
$$a + \lim_{y\to\infty}(1-y^2)\int_{\mathbb{R}} \frac{u}{u^2+y^2} d\tau(u) = 0.$$
Por otro lado, como $\frac{1+u^2}{y^2+u^2} \leq 1$, para toda $y \geq 1$, el Teorema de la Convergencia Dominada implica que

$$\lim_{y\to\infty}\int_{\mathbb{R}} \frac{1+u^2}{u^2+y^2}\, d\tau(u) = \int_{\mathbb{R}} \lim_{y\to\infty} \frac{1}{y^2}\,\frac{1+u^2}{1+(u/y)^2}\, d\tau(u) = 0,$$

y entonces $b = 0$. De esta manera tenemos que $|A_y| = \Big| -\int_{\mathbb{R}} \frac{1+u^2}{1+(u/y)^2} d\tau(u)\Big|$ es acotado para toda $y \geq 1$. Entonces, por el Lema de Fatou,

$$\int_{\mathbb{R}} 1 + u^2 d\tau(u) \leq \varliminf_{y\to\infty}\int_{\mathbb{R}} \frac{1+u^2}{1+(u/y)^2} d\tau(u) < \infty,$$

por lo que $1+u^2$ es τ-integrable sobre todo $\mathbb{R}$. Entonces, como $\tau \in BV(\mathbb{R})$, tenemos que 1 y u^2 son τ-integrables sobre $\mathbb{R}$. De esta manera, por Hölder, u

es τ-integrable sobre $\mathbb{R}$. Luego, $1-y^2 \leq u^2+y^2$, para toda $y \geq 1$. Entonces $\frac{(1-y^2)u}{u^2+y^2} \leq u$, para toda $y \geq 1$. Así, por el Teorema de la Convergencia Dominada,

$$\lim_{y\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{(1-y^2)u}{u^2+y^2} d\tau(u) = -\int_{\mathbb{R}} u\, d\tau(u).$$

Entonces

$$a = \int_{\mathbb{R}} u\, d\tau(u),$$

y por lo tanto

$$f(z) = \int_{\mathbb{R}} u\, d\tau(u) + \int_{\mathbb{R}} \frac{1+uz}{u-z}\, d\tau(u) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1+u^2}{u-z}\, d\tau(u).$$

□

Lema 3.2.2. Sea $G : H^+ \to H^-$ una función analítica, entonces son equivalentes:

(I) Existe μ una medida de probabilidad en $\mathbb{R}$ tal que $G_\mu = G$ en H^+.

(II) Para cada $\alpha > 0$,

$$\lim_{|z|\to\infty,\ z\in\Gamma_\alpha} zG(z) = 1.$$

(III) $\lim_{y\to\infty} iyG(iy) = 1$.

Prueba.
(i) ⇒ (ii).
Sea $\alpha > 0$ y sea $z \in \Gamma_\alpha \subseteq H^+$. Entonces, por hipótesis, $G(z) = G_\mu(z)$. Luego,

$$|zG(z)-1| = \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{z}{z-t}\, d\,\mu(t) - \int_{\mathbb{R}} d\,\mu(t) \right| = \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{z-z+t}{z-t}\, d\mu(t) \right| \leq \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{t}{z-t} \right| d\mu(t).$$

Así, si $z = x+iy \in \Gamma_\alpha$, entonces

$$\left| \frac{t}{z-t} \right|^2 = \left| \frac{t}{x-t+iy} \right|^2 = \frac{t^2}{(x-t)^2+y^2}.$$

Entonces, por la Observación 3.2.2, tenemos que

$$\left| \frac{t}{z-t} \right| < (\alpha^2+1)^{1/2}, \qquad \text{para toda } t \in \mathbb{R}.$$

Luego, como $Im(z) > 0$ y $z \neq 0$, podemos realizar el siguiente cambio de variable: sea $w = \frac{1}{z}$. Si $|z| \to \infty$, entonces $|w| \to 0$, y entonces $w \to 0$. De esta manera $\left| \frac{wt}{1-wt} \right| = \left| \frac{t}{z-t} \right|$, entonces

$$|zG(z)-1| \leq \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{wt}{1-wt} \right| d\mu(t),$$

donde $\left|\frac{wt}{1-wt}\right|$ está acotada por $(\alpha^2+1)^{1/2}$, para toda $t \in \mathbb{R}$. Así, por el Teorema de la Convergencia Dominada,

$$\lim_{|z|\to\infty,\ z\in\Gamma_\alpha} |zG(z)-1| \leq \int_{\mathbb{R}} \lim_{w\to 0} \left|\frac{wt}{1-wt}\right| d\mu(t) = 0.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Es directo tomando $z = iy$.

(iii) $\Rightarrow$ (i).
Consideremos $\tilde{G} = -G : H^+ \to H^+$ y es analítica. Luego, $iy\tilde{G}(iy) = -iyG(iy)$, para toda $y > 0$. Entonces, por hipótesis, $\sup_{y\geq 1} |iy\tilde{G}(iy)| < \infty$. Así, por el Lema 3.2.1, tenemos que

$$\tilde{G}(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1+u^2}{u-z}\, d\tau(u),$$

para toda $z \in H^+$, donde $\tau(u) \in BV(\mathbb{R})$ y no decreciente. De esta manera, consideremos

$$\mu(u) = \int_{-\infty}^{u} (1+v^2)\, d\tau(v),$$

para toda $t \in \mathbb{R}$. Claramente, μ está bien definida, pues $1+v^2$ es τ-integrable sobre $\mathbb{R}$, como se probó en el Lema 3.2.1. Entonces $d\mu(u) = (1+u^2)\, d\tau(u)$. Por lo que

$$G(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-u}\, d\mu(u),$$

para toda $z \in H^+$. Entonces

$$iyG(iy) = \int_{\mathbb{R}} \frac{y^2}{y^2+u^2}\, d\mu(u) + i\int_{\mathbb{R}} \frac{yu}{y^2+u^2}\, d\mu(u),$$

pero, por hipótesis, $\lim_{y\to\infty} iyG(iy) = 1$, entonces

$$\lim_{y\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{y^2}{y^2+u^2}\, d\mu(u) = 1.$$

Y, por otro lado, por el Teorema de la Convergencia Dominada,

$$\lim_{y\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{y^2}{y^2+u^2}\, d\mu(u) = \int_{\mathbb{R}} d\mu(u).$$

Por lo que

$$\int_{\mathbb{R}} d\mu(u) = 1.$$

Por lo tanto μ es medida de probabilidad en $\mathbb{R}$ y $G_\mu = G$ en H^+. $\square$

Lema 3.2.3. Sea $F : H^+ \to H^+$ analítica. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(I) Existe una medida de probabilidad μ en $\mathbb{R}$ tal que $F_\mu = F$ en H^+.

(II) Para cada $\alpha > 0$,
$$\lim_{|z|\to\infty \ z\in\Gamma_\alpha} \frac{F(z)}{z} = 1.$$

(III) $\lim_{y\to\infty} \frac{F(iy)}{iy} = 1$.

(IV) Existe $\alpha > 0$ y una sucesión $z_n \in \Gamma_\alpha$ tal que $\lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{F(z_n)}{z_n} = 1$.

(V) Existe $a \in \mathbb{R}$ y una medida finita positiva ρ en $\mathbb{R}$ tal que
$$F(z) = a + z + \int_{\mathbb{R}} \frac{1+tz}{t-z}\, d\rho(t),$$
para todo $z \in H^+$.

Prueba.

$(i) \Rightarrow (ii)$
Sea $\alpha > 0$ y consideremos $G : H^+ \to H^-$ dada por $G(z) = \frac{1}{F(z)}$, para toda $z \in H^+$. Claramente G está bien definida y es analítica. Luego, por hipótesis, para toda $z \in H^+$ tenemos que
$$G(z) = \frac{1}{F(z)} = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-t}\, d\mu(t) = G_\mu(z).$$
Entonces, por el Lema 3.2.2
$$\lim_{|z|\to\infty \ z\in\Gamma_\alpha} zG(z) = 1,$$
es decir
$$\lim_{|z|\to\infty \ z\in\Gamma_\alpha} \frac{z}{F(z)} = 1,$$
por lo tanto
$$\lim_{|z|\to\infty \ z\in\Gamma_\alpha} \frac{F(z)}{z} = 1.$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Se sigue de considerar $z = iy$.

$(iii) \Rightarrow (iv)$
Consideremos $z_n = in$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $z_n \in \Gamma_1$, para toda $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty$. Así, por hipótesis
$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(z_n)}{z_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{F(in)}{in} = 1.$$

$(iv) \Rightarrow (v)$
Como F es de clase N, tenemos que
$$F(z) = a + bz + \int_{\mathbb{R}} \frac{1+uz}{u-z}\, d\tau(u),$$

para todo $z \in H^+$, donde $\tau \in BV(\mathbb{R})$ y no decreciente. Pero, por hipótesis, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a}{z_n} + b + \frac{1}{z_n}\int_{\mathbb{R}} \frac{1+uz_n}{u-z_n}\, d\tau(u) = 1,$$

donde $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$. Entonces

$$b + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{z_n}\int_{\mathbb{R}} \frac{1+uz_n}{u-z_n}\, d\tau(u) = 1,$$

pero $\lim_{n\to\infty} \frac{1+uz_n}{u-z_n} = -u$. Por lo que $\frac{1+uz_n}{u-z_n}$ es acotada y entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{z_n}\int_{\mathbb{R}} \frac{1+uz_n}{u-z_n}\, d\tau(u) = 0$. Por lo que $b = 1$.

Luego, como $\tau \in BV(\mathbb{R})$, $\rho([a,b]) := V_a^b(\tau)$ es una medida finita bien definida sobre $\mathbb{R}$ y, como τ es no decreciente, es positiva. Así,

$$F(z) = a + z + \int_{\mathbb{R}} \frac{1+tz}{t-z}\, d\rho(t).$$

$(v) \Rightarrow (i)$
Sea $\alpha > 0$ y sea $z \in \Gamma_\alpha$, entonces

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{F(z)}{z} = 1 + \lim_{|z|\to\infty} \frac{1}{z}\int_{\mathbb{R}} \frac{1+tz}{t-z}\, d\rho(t),$$

donde $\lim_{|z|\to\infty} \frac{1}{z}\int_{\mathbb{R}} \frac{1+tz}{t-z}\, d\rho(t) = 0$, por lo que

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{F(z)}{z} = 1.$$

Entonces

$$\lim_{|z|\to\infty} z\frac{1}{F(z)} = \lim_{|z|\to\infty} \frac{z}{F(z)} = 1,$$

entonces, por el Lema 3.2.2, existe una medida de probabilida μ sobre $\mathbb{R}$ tal que $G_\mu = \frac{1}{F}$ en H^+. Es decir $F_\mu = \frac{1}{G_\mu} = F$ en H^+. □

Teorema 3.2.1. Sea μ medida de probabilidad de soporte compacto en $\mathbb{R}$ y G_μ su respectiva transformada de Cauchy. Entonces para cualesquiera reales $s < t$,

$$\mu(\{s\}) + \mu(\{t\}) + 2\mu((s,t)) = -\frac{2}{\pi}\lim_{y\to 0^+}\int_{(s,t)} Im\, G_\mu(x+iy)\, dx \qquad (3.2.4)$$

Prueba. Sea $z = x + iy \in H^+$, entonces

$$G_\mu(x+iy) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x+iy-u}\, d\mu(u) = \int_{\mathbb{R}} \frac{x-u}{(x-u)^2+y^2} + i\,\frac{-y}{(x-u)^2+y^2}\, d\mu(u),$$

por lo que

$$-\int_{(s,t)} Im\, G_\mu(x+iy)\, dx = \int_{(s,t)} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{y}{(x-u)^2+y^2}\, d\mu(u)\right) dx,$$

donde $\frac{y}{(x-u)^2+y^2}$ es integrable respecto de la medida producto entre μ y λ (Lebesgue), entonces

$$-\int_{(s,t)} Im\, G_\mu(x+iy)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{(s,t)} \frac{y}{(x-u)^2+y^2}\, dx \right) d\mu(u),$$

donde

$$\int_{(s,t)} \frac{y}{(x-u)^2+y^2}\, dx = \arctan \frac{t-u}{y} - \arctan \frac{s-u}{y},$$

haciendo el cambio de variable $x-u = y \tan\theta$. Denotemos

$$I(t,y) = \int_{\mathbb{R}} \arctan \frac{t-u}{y}\, d\mu(u).$$

Luego, como $\arctan \frac{t-u}{y}$ se anula para $u=t$, tenemos que

$$I(t,y) = \int_{(-\infty,t)} \arctan \frac{t-u}{y}\, d\mu(u) + \int_{(t,\infty)} \arctan \frac{t-u}{y}\, d\mu(u) + \mu\left(\{t\}\right)$$

Además,

$$\arctan \frac{t-u}{y} \leq \frac{\pi}{2}, \quad \text{para todo } u \in (-\infty, t)$$

y

$$\arctan \frac{t-u}{y} \geq -\frac{\pi}{2}, \quad \text{para todo } u \in (t, \infty)$$

Por lo que del Teorema de la Convergencia Dominada se sigue que

$$\lim_{y\to 0^+} I(t,y) = \frac{\pi}{2}\mu\left((-\infty,t)\right) - \frac{\pi}{2}\mu\left((t,\infty)\right) + \mu\left(\{t\}\right).$$

De esta manera, tenemos que

$$\begin{aligned}-\frac{2}{\pi}\lim_{y\to 0^+}\int_{(s,t)} Im\, G_\mu(x+iy)\, dx &= \mu\left((-\infty,t)\right) - \mu\left((t,\infty)\right) + \mu\left(\{t\}\right) - \mu\left((-\infty,s)\right) + \mu\left((s,\infty)\right) + \mu\left(\{s\}\right)\\ &= \mu\left(\{s\}\right) + \mu\left(\{t\}\right) + 2\mu\left((s,t)\right).\end{aligned}$$

□

Definición 3.2.1. Dada una medida regular de probabilidad μ, decimos que $\{a\}$ es un átomo de μ si $\mu\left(\{a\}\right) > 0$.

Definición 3.2.2. Sea $f : H^+ \to \mathbb{C}$, decimos que el límite L de $f(z)$ cuando z se aproxima no-tangencialmente (N.T.) a α existe, siempre que para cualquier cono con vértice en α, contenido en H^+, y cualquier ε, exista una δ tal que si $|z-\alpha| < \delta$, para todo z en el cono, entonces $|f(z) - L| < \varepsilon$.

Lema 3.2.4. Sea μ medida regular de probabilidad y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces $(z-\alpha)G_\mu(z) \to \mu(\{\alpha\})$, cuando $z \to \alpha$ no-tangencialmente.

Prueba. Sea $z = x + iy \in H^+$, entonces si $z \to \alpha$ no-tangencialmente tenemos que $\frac{(x-\alpha)^2}{y^2}$ está acotado. Por otro lado, para todo t

$$\left|\frac{x-t}{y} + i\right| = \left(\frac{(x-t)^2}{y^2} + 1\right)^{1/2} \geq 1,$$

es decir, $\frac{1}{|z-t|} \leq 1$. De esta manera, $\frac{|z-\alpha|}{|z-t|}$ está acotado para todo t y

$$\lim_{z \overset{N.T.}{\to} \alpha} \frac{z-\alpha}{z-t} = \begin{cases} 1, & t = \alpha \\ 0, & t \neq \alpha \end{cases} = \chi_{\{\alpha\}}(t)$$

Así, por el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue

$$\lim_{z \overset{N.T.}{\to} \alpha} (z-\alpha) G_\mu(z) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{\{\alpha\}}(t)\, d\mu(t) = \mu(\{\alpha\}).$$

$\square$

Teorema 3.2.2. Sea μ medida regular de probabilidad, $\{a\}$ es un átomo de μ si y sólo si G_μ tiene un polo simple en a.

Prueba. ($\Rightarrow$) Si $\{a\}$ es un átomo de μ, entonces $\mu(\{a\}) \neq 0$. Así, definimos $g : \Gamma_\alpha \subseteq H^+ \to \mathbb{C}$ dada por

$$g(z) = (z-a) G_\mu(z).$$

Entonces g es analítica y, por el lema anterior, $g(a) = \mu(\{a\}) \neq 0$. Y, así,

$$G_\mu(z) = \frac{g(z)}{z-a}.$$

($\Leftarrow$) Si G_μ tiene un polo simple en a, entonces existe $g : U \subseteq H^+ \to \mathbb{C}$, con $g(a) \neq 0$, tale que para todo $z \in U \setminus \{a\}$

$$G_\mu(z) = \frac{g(z)}{(z-a)}.$$

Así, del lema anterior se sigue que $(z-a)G_\mu(z) \to \mu(\{a\})$, cuando $z \overset{N.T.}{\to} a$. Por lo que $\mu(\{a\}) \neq 0$. $\square$

Capítulo 4

La Convolución Libre

Este capítulo compete a la teoría de la probabilidad libre. En la primera parte se define el concepto de *independencia libre*, situación afín entre variables aleatorias no conmutativas, así como el desarrollo de dos ejemplos que ayudan a aclarar el origen de esta idea y su semejanza con el tema de ortogonalidad entre espacios de Hilbert.

En la segunda parte se define la convolución libre y se ponen en práctica los instrumentos descritos en el capítulo anterior con la finalidad de exponer un método analítico para calcularla y estudiar dos casos especiales de ésta.

4.1. Independencia libre

Decimos que una familia de subálgebras de un espacio de probabilidad no conmutativo son independientes siempre que las subálgebras conmuten entre ellas y el valor de cualquier palabra entre ellas se pueda calcular como el producto de cada elemento evaluado por la funcional, toda vez que las variables aleatorias contiguas provengan de distintas subálgebras. El concepto de libertad o independencia libre es análogo, pero completamente no conmutativo.

Definición 4.1.1. Sea $(\mathcal{A}, \varphi)$ un espacio de probabilidad no conmutativo y sea I un conjunto de índices fijo. Sea $A_i \subset \mathcal{A}$ subálgebra unitaria, para toda $i \in I$. Decimos que la familia $\{A_i\}_{i \in I}$ es libremente independiente (o que las subálgebras son libres) si

$$\varphi(a_1 \cdots a_k) = 0, \tag{4.1.1}$$

siempre que:

(I) $k \in \mathbb{N}$.

(II) $a_j \in A_{i(j)}$, con $i(j) \in I$, para toda $j \in \{1, \ldots, k\}$.

(III) $i(j) \neq i(j+1)$, para toda $j \in \{1, \ldots, k-1\}$.

(IV) $\varphi(a_j) = 0$, para toda $j \in \{1, \ldots, k\}$.

Nota 4.1.1. Si $\{S_i\}_{i\in I}$ es una familia de subconjuntos de $(\mathcal{A},\varphi)$, decimos que $\{S_i\}_{i\in I}$ son libremente independientes si $\{alg(1,S_i)\}_{i\in I}$ son libremente independientes. Donde $alg(1,A)$ se entiende como la subálgebra unitaria generada por $A\subset\mathcal{A}$. En particular, un conjunto de variables aleatorias no conmutativas, $\{a_i\}_{i\in I}\subset\mathcal{A}$, son libremente independientes si sus respectivas subálgebras unitarias generadas, $\{alg(1,a_i)\}_{i\in I}$, lo son.

Definición 4.1.2. Si $(\mathcal{A},\varphi)$ es espacio de probabilidad-$*$, decimos que $\{a_i\}_{i\in I}$ son libres si $\{alg(1,a_i,a_i^*)\}_{i\in I}$ son libremente independientes.

4.1.1. Ejemplo: El producto libre de grupos.

Sea $G=(G,e,\cdot)$ cualquier grupo y consideremos la siguiente álgebra:

$$\mathbb{C}[G]:=\left\{\sum_{g\in G}\alpha_g\, g\ :\ \alpha_g\in\mathbb{C},\text{ para casi toda }\ \alpha_g=0\right\},$$

donde

$$\left(\sum_{g\in G}\alpha_g\, g\right)+\left(\sum_{h\in G}\beta_h\, h\right)=\sum_{z\in G}(\alpha_z+\beta_z)\, z,$$

$$\left(\sum_{g\in G}\alpha_g\, g\right)\cdot\left(\sum_{h\in G}\beta_h\, h\right):=\sum_{g,h\in G}(\alpha_g\beta_h)(gh)$$

y

$$\left(\sum_{g\in G}\alpha_g\, g\right)^*:=\sum_{g\in G}\overline{\alpha_g}\, g^{-1}.$$

Claramente el producto está bien definido, pues para todo $g,h\in G$ tales que $gh=z$, consideramos $\gamma_z=\sum_{g,h:gh=z}\alpha_g\beta_h\in\mathbb{C}$, y entonces

$$\left(\sum_{g\in G}\alpha_g\, g\right)\cdot\left(\sum_{h\in G}\beta_h\, h\right)=\sum_{z\in G}\gamma_z\, z.$$

Consideremos la funcional $\tau_G:\mathbb{C}[G]\to\mathbb{C}$ definida por

$$\tau_G\left(\sum_{g\in G}\alpha_g\, g\right)=\alpha_e.$$

Entonces $(\mathbb{C}[G],\tau_G)$ es un espacio de probabilidad-$*$, ya que, por un lado, $(\mathbb{C}[G],+,\cdot)$ es un álgebra unitaria, donde $e\in G$ es el unitario del álgebra, y $\tau_G(e)=1$; por lo que $(\mathbb{C}[G], \tau_G)$ es un espacio de probabilidad no conmutativo. Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\left(\lambda \sum_{g\in G} \alpha_g\, g + \sum_{h\in G} \beta_h\, h\right)^* &= \left(\sum_{g\in G} (\lambda\, \alpha_g) g + \sum_{h\in G} \beta_h\, h\right)^* \\
&= \left(\sum_{z\in G} (\lambda\, \alpha_z + \beta_z) z\right)^* \\
&= \sum_{z\in G} (\overline{\lambda\, \alpha_z} + \overline{\beta_z}) z^{-1} \\
&= \sum_{g\in G} \overline{\lambda\, \alpha_g}\, g^{-1} + \sum_{h\in G} \overline{\beta_h}\, h^{-1} \\
&= \bar{\lambda} \left(\sum_{g\in G} \alpha_g\, g\right)^* + \left(\sum_{h\in G} \beta_h\, h\right)^*,
\end{aligned}$$

para cualquier $\lambda \in \mathbb{C}$. Luego,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{g\in G} \alpha_g\, g \cdot \sum_{h\in G} \beta_h\, h\right)^* &= \left(\sum_{g,h\in G} (\alpha_g \beta_h)(gh)\right)^* \\
&= \sum_{g,h\in G} \overline{\alpha_g \beta_h} (h^{-1} g^{-1}) \\
&= \sum_{h\in G} \overline{\beta_h}\, h^{-1} \cdot \sum_{g\in G} \overline{\alpha_g}\, g^{-1} \\
&= \left(\sum_{h\in G} \beta_h\, h\right)^* \cdot \left(\sum_{g\in g} \alpha_g\, g\right)^*.
\end{aligned}$$

Además,

$$\left(\left(\sum_{g\in G} \alpha_g\, g\right)^*\right)^* = \left(\sum_{g\in G} \overline{\alpha_g}\, g^{-1}\right)^* = \sum_{g\in G} \alpha_g\, g,$$

y claramente $(e = 1 \cdot e + 0)^* = e^{-1} = e$. Por último, para cualquier $a = \sum_{g\in G} \alpha_g\, g \in \mathbb{C}[G]$, se tiene que

$$a^* a = \sum_{g\in G} \overline{\alpha_g}\, g^{-1} \cdot \sum_{g\in G} \alpha_g\, g = \left(\sum_{g\in G} |\alpha_g|^2\right) e,$$

por lo que $\tau_G(a^* a) = \sum_{j=1}^{k} |\alpha_{i(j)}|^2 \geq 0$, para alguna $k \in \mathbb{N}$. Por lo que, en efecto, $(\mathbb{C}[\mathbb{G}], \tau_G)$ es un espacio de probabilidad-$*$-.

Definición 4.1.3. Sea G un grupo cualquiera y $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia de subgrupos de G, donde I es un conjunto de índices fijo. Decimos que $\{G_i\}_{i\in I}$ es libre (o que los subgrupos son libres) si para cualquier $k \geq 1$ y cualquier $i(j) \in I$, con $i(j) \neq i(j+1)$ para $j \in \{1,\ldots,k-1\}$, tenemos que:

$$g_1 \cdots g_k \neq e, \tag{4.1.2}$$

siempre que $g_j \in G_{i(j)} \setminus \{e\}$, para $j \in \{1,\ldots,k\}$.

Definición 4.1.4. Sea G_i cualquier grupo, para toda $i \in I$, para I un conjunto de índices fijo. Se define al producto libre de $\{G_i\}_{i\in I}$ como $(G,\iota_i)_{i\in I}$ tal que

1. $\iota_i : G_i \to G$ es monomorfismo de grupo tal que $\iota_i(e_i) = e$, para toda $i \in I$.
2. Dados $\varphi_i : G_i \to F$, existe un único $\bar{\varphi} : G \to F$, morfismo, tal que
$$\bar{\varphi} = \varphi_i \circ \iota_i^{-1}$$

Nota 4.1.2. De manera intuitiva, es el grupo generado por todos los elementos de cada G_i sujeto a

1. las relaciones dentro de cada G_i,
2. y que $e_i \in G_i$ se identifica con el neutro $e \in G$ como $e = e_i$, para toda $i \in I$.

Y también se le denota como:

$$G := *_{i\in I} G_i,$$

Observación 4.1.1.

(I) El producto libre de $\{G_i\}_{i\in I}$ hace que los grupos involucrados sean libres.

(II) De las condiciones intuitivas podemos caracterizar al producto libre como

$$*_{i\in I} G_i = \{e\} \cup \Big\{ g_1 \cdots g_k \ : \ g_j \in G_{i(j)} \setminus \{e\}, \ \ i(j) \neq i(j+1) \quad \text{para } j = 1,\ldots,k-1 \Big\}$$

El siguiente resultado muestra cómo la idea de independencia libre se hereda directamente de la noción de libertad entre grupos.

Teorema 4.1.1. Sea G grupo y $G_i \leqslant G$, para toda $i \in I$, con I conjunto de índices fijo. Entonces $\{G_i\}_{i\in I}$ son libres si y sólo si $\{\mathbb{C}[G_i]\}_{i\in I}$ son libremente independientes en $(\mathbb{C}[G], \tau_G)$.

Prueba.
$(\Rightarrow)$ Para cualquier $k \in \mathbb{N}$ fijo, sea $a_j \in \mathbb{C}[G_{i(j)}]$, para toda $j \in \{1,\ldots,k\}$, tales que $i(j) \neq i(j+1)$ para $j \in \{1,\ldots,k-1\}$, y tal que $\tau_G(a_j) = 0$, para toda $j \in \{1,\ldots,k\}$. Entonces

$$a_j = \sum_{g\in G_{i(j)}} \alpha_g^{(j)}\, g,$$

para toda $j \in \{1, \ldots, k\}$. Así,

$$a_1 \cdots a_k = \sum_{g_1 \in G_{i(1)}, \ldots, g_k \in G_{i(k)}} (\alpha_{g_1}^{(1)} \cdots \alpha_{g_k}^{(k)})(g_1 \cdots g_k),$$

pero como $\tau_G(a_j) = 0$, entonces $\alpha_e^{(j)} = 0$, para toda $j \in \{1, \ldots, k\}$. Por lo que, cada vez que en $g_1 \cdots g_k$ exista, al menos, un $j \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $g_j = e$, entonces $\alpha_{g_1}^{(1)} \cdots \alpha_{g_k}^{(k)} = 0$. De esta manera, tenemos que

$$\tau_G(a_1 \cdots a_k) = \sum_{\substack{g_1 \in G_{i(1)}, \ldots, g_k \in G_{i(k)} \\ \alpha_{g_1}^{(1)} \cdots \alpha_{g_k}^{(k)} \neq 0}} (\alpha_{g_1}^{(1)} \cdots \alpha_{g_k}^{(k)}) \tau_G(g_1 \cdots g_k).$$

Pero si $\alpha_{g_1}^{(1)} \cdots \alpha_{g_k}^{(k)} \neq 0$, entonces $\alpha_{g_j}^{(j)} \neq 0$, para toda $j \in \{1, \ldots, k\}$. Entonces $g_j \neq e$, para toda $j \in \{1, \ldots, k\}$, donde $g_j \in G_{i(j)}$ con $i(j) \neq i(j+1)$, para $j \in \{1, \ldots, k-1\}$. Así, por hipótesis, $g_1 \cdots g_k \neq e$ y, por ende, $\tau_G(a_1 \cdots a_k) = 0$.

($\Leftarrow$) Sea $k \geq 1$ y para $j \in \{1, \ldots, k\}$ sean $g_j \in G_{i(j)} \setminus \{e\}$, tales que $i(j) \neq i(j+1)$ para $j \in \{1, \ldots, k-1\}$. Así, como $g_j \neq e$, para toda $j \in \{1, \ldots, k\}$, entonces $\tau_G(g_j) = 0$, para toda $j \in \{1, \ldots, k\}$. Entonces, por hipótesis, $\tau_G(g_1 \cdots g_k) = 0$. De esta manera, si $g_1 \cdots g_k = e$, entonces $\tau_G(g_1 \cdots g_k) = 1$, lo cual contradice la hipótesis. Por lo tanto, $g_1 \cdots g_k \neq e$. $\square$

4.1.2. Ejemplo: Operador Creación y Aniquilación.

Definición 4.1.5. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Se define al espacio completo de Fock como sigue:

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^{\otimes n}, \tag{4.1.3}$$

donde $\mathcal{H}^{\otimes 0}$ es un espacio de Hilbert uno-dimensional, usualmente denotado por $\mathbb{C}\Omega$, en donde Ω es un vector particular de norma unitaria, llamado vector vacío.

Observación 4.1.2. Dado $\{\xi_i\}_{i \in I}$ base ortonormal para $\mathcal{H}$, podemos dar una base ortronormal para $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ como sigue:

$$\beta_{\mathcal{F}} = \{\Omega\} \cup \Big\{ \bigotimes_{j=1}^{n} \xi_{i_j} \ : n \in \mathbb{N}, \ \ i_j \in I \ \text{ para } j = 1, \ldots n \Big\} \tag{4.1.4}$$

Definición 4.1.6. Sea $B\big(\mathcal{F}(\mathcal{H})\big)$ el espacio de operadores lineales acotados sobre un espacio completo de Fock. Dado $T \in B\big(\mathcal{F}(\mathcal{H})\big)$ se define el estado vacío de T como:

$$\tau_{\mathcal{H}}(T) := \langle T\Omega, \Omega \rangle, \quad \text{para todo } T \in B\big(\mathcal{F}(\mathcal{H})\big), \tag{4.1.5}$$

donde a $\tau_{\mathcal{H}}$ se le llama estado vectorial.

Sea $\psi \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$. Entonces existen únicos $|n\rangle \in \mathcal{H}^{\otimes n}$, para $n \geq 1$, y $N \subseteq \mathbb{N}$, tal que

$$\psi = \lambda_\psi \Omega + \sum_{n \in N} |n\rangle \,,$$

donde $\lambda_\psi \in \mathbb{C}$ y, además,

$$||\psi|| = \Big(|\lambda_\psi|^2 + \sum_{n \in N} || \, |n\rangle \, ||^2 \Big)^{1/2}.$$

Por otro lado, como $\{\xi_i\}_{i \in I}$ es base ortonormal para $\mathcal{H}$, entonces para cada $n \geq 1$, tenemos que

$$\beta^{(n)} = \Big\{ \bigotimes_{k=1}^{n} \xi_{i_k} \ : \ i_k \in I \Big\}$$

es base para $\mathcal{H}^{\otimes n}$. De esta manera,

$$|n\rangle \in \overline{\langle \beta^{(n)} \rangle}.$$

Definición 4.1.7. Se define a $V \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{H})$ como el siguiente subespacio denso

$$V := \Big\{ \lambda\Omega + \sum_{1 \leq n \leq M} |n\rangle \ : \lambda \in \mathbb{C}, \ \ M \in \mathbb{N} \text{ y } \ |n\rangle \in \mathcal{H}^{\otimes n} \Big\}.$$

Definición 4.1.8. Fijemos $\xi \in \mathcal{H}$. Se define al operador creación (izquierdo) dado por el vector ξ como $\ell_\xi : V \to V$, determinado de la siguiente manera

$$\begin{cases} \ell_\xi \, \Omega = \xi \\ \ell_\xi \, \xi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \xi_{i_n} = \xi \otimes \xi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \xi_{i_n}, \quad \text{para todo } n \geq 1 \ \text{ y para todo } \ \xi_{i_1}, \ldots \xi_{i_n} \in \mathcal{H} \end{cases} \tag{4.1.6}$$

Así, para $M \in \mathbb{N}$ fijo,

$$\ell_\xi(\psi_M) = \lambda \, \xi + \sum_{1 \leq n \leq M} \xi \otimes |n\rangle \,,$$

para todo $\psi_M \in V$.

Observación 4.1.3. Sean $\xi \in \mathcal{H}$ y $M_1, M_2 \in \mathbb{N}$ fijos. Sean $\psi_{M_1}, \phi_{M_2} \in V$ y $z \in \mathbb{C}$.

(I) Si $M_1 = M_2 = M$,

$$\ell_\xi \, (z \, \psi_{M_1} + \phi_{M_2}) = \ell_\xi \Big((z\lambda_1 + \lambda_2)\Omega + \sum_{1 \leq h \leq M} |h\rangle \Big),$$

donde $|h\rangle = z \, |n\rangle + |m\rangle$. Entonces

$$\begin{aligned} \ell_\xi \, (z \, \psi_{M_1} + \phi_{M_2}) &= \Big(z\lambda_1 \xi + z \sum_{1 \leq n \leq M} \xi \otimes |n\rangle \Big) \ + \ \Big(\lambda_2 \xi + \sum_{1 \leq m \leq M} \xi \otimes |m\rangle \Big) \\ &= z \, \ell_\xi \Big(\lambda_1 \Omega + \sum_{1 \leq n \leq M} |n\rangle \Big) + \ell_\xi \Big(\lambda_2 \Omega + \sum_{1 \leq m \leq M} |m\rangle \Big) \\ &= z \, \ell_\xi \, \psi_{M_1} + \ell_\xi \, \phi_{M_2}. \end{aligned}$$

(II) (SPG) Si $M_1 < M_2$,

$$l_\xi\left(z\,\psi_{M_1} + \phi_{M_2}\right) = \ell_\xi\Big((z\lambda_1 + \lambda_2)\Omega + \sum_{1\le h\le M_2} |h\rangle\Big),$$

donde

$$\begin{cases} |h\rangle = z\,|n\rangle + |m\rangle\,, & 1 \le h \le M_1 \\ |h\rangle = |m\rangle\,, & M_1 < h \le M_2 \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \ell_\xi\left(z\,\psi_{M_1} + \phi_{M_2}\right) &= z\Big(\lambda_1\xi + \sum_{1\le n\le M_1} \xi\otimes|n\rangle\Big) \;+\; \Big(\lambda_2\xi + \sum_{1\le m\le M_2} \xi\otimes|m\rangle\Big) \\ &= z\,\ell_\xi\,\psi_{M_1} + \ell_\xi\,\phi_{M_2}. \end{aligned}$$

Por lo que ℓ_ξ es lineal.

Observación 4.1.4. Sean $\xi \in \mathcal{H}$ y $M \in \mathbb{N}$ fijos, entonces

$$||\ell_\xi\,\psi_M|| = ||\lambda\xi + \sum_{1\le n\le M} \xi\otimes|n\rangle\,|| = \Big(|\lambda|^2|\,||\xi||^2 + \sum_{1\le n\le M} ||\xi||^2\,||\,|n\rangle\,||^2\Big)^{1/2} = ||\xi||\,||\psi_M||,$$

para todo $\psi_M \in V$. Por lo tanto ℓ_ξ es acotado y, más aún, $||\ell_\xi|| = ||\xi||$.

Así, en virtud de las Observaciones 4.1.3 y 4.1.4, ℓ_ξ se extiende continuamente a todo $\mathcal{F}(\mathcal{H})$. Entonces, para todo $\xi \in \mathcal{H}$ fijo, existe $T_\xi : \mathcal{F}(\mathcal{H}) \to \mathcal{F}(\mathcal{H})$ lineal, acotado, con norma $||T_\xi|| = ||\ell_\xi|| = ||\xi||$ y tal que

$$\langle \ell_\xi\,\psi, \phi\rangle = \langle \psi, T_\xi\,\phi\rangle, \qquad \text{para todo } \psi, \phi \in \mathcal{F}(\mathcal{H}). \tag{4.1.7}$$

Afirmación 4.1.1. Para todo $\xi \in \mathcal{H}$ fijo, T_ξ es el operador aniquilación (izquierdo) dado por ξ. Es decir

$$\begin{cases} T_\xi\,\Omega = 0, & \\ T_\xi\,\xi_{i_1} = \langle \xi_{i_1}, \xi\rangle\Omega, & \text{para todo } \xi_{i_1} \in \mathcal{H} \\ T_\xi\,\xi_{i_1}\otimes\cdots\otimes\xi_{i_n} = \langle \xi_{i_1}, \xi\rangle \xi_{i_2}\otimes\cdots\otimes\xi_{i_n}, & \text{para todo } n \ge 2 \text{ y para todo } \xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_n} \in \mathcal{H} \end{cases}$$

Prueba.

Tomando en (4.1.7), $\psi = \xi^{(n)} \in \beta^{(n)}$ y $\phi = \Omega$, para $n \ge 1$, tenemos que

$$0 = \langle \xi^{(n+1)}, \Omega\rangle = \langle \xi^{(n)}, T_\xi\,\Omega\rangle,$$

para todo $n \ge 1$. Es decir, $T_\xi\,\Omega$ es ortogonal a $\xi^{(n)}$, para todo $n \ge 1$. Entonces $T_\xi\,\Omega \in \mathbb{C}\Omega$. Si suponemos que $T_\xi\Omega = \lambda_0\Omega$, para algún $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ no nulo, entonces con $\psi = \phi = \Omega$ se contradice (4.1.7). Por tanto,

$$T_\xi\,\Omega = 0. \tag{4.1.8}$$

Luego, tomando en (4.1.7), $\psi = \xi^{(n)} \in \beta^{(n)}$ y $\phi = \xi_{i_1}$, con $n \geq 1$ y $\xi_{i_1} \in \mathcal{H}$, por un lado tenemos que

$$\langle \ell_\xi \, \psi, \phi \rangle = \langle \xi^{(n+1)}, \xi_{i_1} \rangle = 0,$$

para todo $n \geq 1$. Por lo que

$$0 = \langle \psi, T_\xi \, \phi \rangle = \langle \xi^{(n)}, T_\xi \, \xi_{i_1} \rangle,$$

para todo $n \geq 1$. Es decir, $T_\xi \, \xi_{i_1}$ es ortogonal a todos los elementos de la base para $\mathcal{F}(\mathcal{H})$. Entonces $T_\xi \, \xi_{i_1} \in \mathbb{C}\, \Omega$. De esta manera,

$$T_\xi \, \xi_{i_1} = \lambda_1 \Omega, \quad \text{para algún } \lambda_1 \in \mathbb{C},$$

pero por (4.1.7) tenemos que

$$\langle \xi, \xi_{i_1} \rangle = \langle \ell_\xi \, \Omega, \xi_{i_1} \rangle = \langle \Omega, T_\xi \, \xi_{i_1} \rangle = \overline{\lambda_1},$$

por lo que

$$T_\xi \, \xi_{i_1} = \langle \xi_{i_1}, \xi \rangle \Omega, \quad \text{para todo } \ \xi_{i_1} \in \mathcal{H}. \tag{4.1.9}$$

Por último, tomando $\psi = \xi^{(n)} \in \beta^{(n)}$ y $\phi = \xi^{(m)} \in \beta^{(m)}$, para $n \geq 1$ y $m \geq 2$, de (4.1.7) se tiene lo siguiente:

$$\langle \xi^{(n+1)}, \xi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \xi_{i_m} \rangle = \langle \xi^{(n)}, T_\xi \, \xi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \xi_{i_m} \rangle. \tag{4.1.10}$$

Fijando $m \geq 2$, tenemos

(I) Si $n \geq m$, de (4.1.10) se sigue que

$$0 = \langle \xi^{(n+1)}, \xi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \xi_{i_m} \rangle = \langle \xi^{(n)}, T_\xi \, \xi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \xi_{i_m} \rangle, \quad \text{para todo } \ n \geq m.$$

Es decir, $T_\xi \, \xi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \xi_{i_m}$ es ortogonal a $\mathcal{H}^{\otimes n}$, para todo $n \geq m$.

(II) Si $n < m-1$, de (4.1.10) se sigue que

$$0 = \langle \xi^{(n+1)}, \xi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \xi_{i_m} \rangle = \langle \xi^{(n)}, T_\xi \, \xi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \xi_{i_m} \rangle, \quad \text{para todo } \ n < m-1.$$

Es decir, $T_\xi \, \xi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \xi_{i_m}$ es ortogonal a $\mathbb{C}\Omega$ y a $\mathcal{H}^{\otimes n}$, para $1 \leq n < m-1$.

Así, de (I) y (II), se tiene que $T_\xi \, \xi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \xi_{i_m} \in \mathcal{H}^{(m-1)}$. Entonces

$$T_\xi \, \xi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \xi_{i_m} = \sum_{k \in K} a_k \, \xi_{k_1} \otimes \cdots \otimes \xi_{k_{m-1}}, \quad K = \{(i_1, \ldots, i_{m-1}) : i_j \in I\}$$

donde $k = (k_1, \ldots, k_{m-1})$, $a_k \in \mathbb{C}$ y $\xi_{k_1}, \ldots, \xi_{k_{m-1}} \in \mathcal{H}$, para todo $k \in K$. De esta manera, considerando $\psi = \xi_{j_1} \otimes \cdots \otimes \xi_{j_{m-1}}$ y $\phi = \xi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \xi_{i_m}$ en (4.1.7), se tiene que

$$\langle \xi, \xi_{i_1} \rangle \langle \xi_{j_1} \otimes \cdots \otimes \xi_{j_{m-1}}, \xi_{i_2} \otimes \cdots \otimes \xi_{i_m} \rangle = \langle \xi_{j_1} \otimes \cdots \otimes \xi_{j_{m-1}}, T_\xi \, \xi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \xi_{i_m} \rangle,$$

donde

$$\begin{aligned}\langle \xi_{j_1} \otimes \cdots \otimes \xi_{j_{m-1}}, T_\xi\, \xi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \xi_{i_m} \rangle &= \sum_{k\in K} \overline{a_k} \langle \xi_{j_1} \otimes \cdots \otimes \xi_{j_{m-1}}, \xi_{k_1} \otimes \cdots \otimes \xi_{k_{m-1}} \rangle \\ &= \overline{a_j}, \quad j = (j_1, \ldots, j_{m-1}).\end{aligned}$$

Entonces, para $\psi = \xi_{i_2} \otimes \cdots \otimes \xi_{i_m}$ y $\phi = \xi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \xi_{i_m}$ en (4.1.7) se tiene que

$$\langle \xi, \xi_{i_1} \rangle = \overline{a_i}, \quad i = (i_2, \ldots, i_m). \tag{4.1.11}$$

Por otro lado, aplicando (4.1.7) a $\psi = T_\xi\, \xi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \xi_{i_m}$ y $\phi = \xi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \xi_{i_m}$ se tiene que

$$\Big\langle \sum_{k\in K} a_k\, \xi \otimes \xi_{k_1} \otimes \cdots \otimes \xi_{k_{m-1}}, \xi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \xi_{i_m} \Big\rangle = \sum_{k\in K} |a_k|^2$$

de donde

$$\sum_{k\in K} a_k \langle \xi, \xi_{i_1} \rangle \langle \xi_{k_1} \otimes \cdots \otimes \xi_{k_{m-1}}, \xi_{i_2} \otimes \cdots \otimes \xi_{i_m} \rangle = \sum_{k\in K} |a_k|^2$$

y

$$a_i \,\langle \xi, \xi_{i_1} \rangle = \sum_{k\in K} |a_k|^2. \tag{4.1.12}$$

Entonces, de (4.1.11) y (4.1.12) se tiene que $a_k = 0$, para todo $k \in K \setminus \{i\}$. Es decir,

$$\sum_{k\in K} a_k\, \xi_{k_1} \otimes \cdots \otimes \xi_{k_{m-1}} = a_i\, \xi_{i_2} \otimes \cdots \otimes \xi_{i_m},$$

por lo tanto

$$T_\xi\, \xi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \xi_{i_m} = \langle \xi_{i_1}, \xi \rangle\, \xi_{i_2} \otimes \cdots \otimes \xi_{i_m}, \quad \text{para todo } m \geq 2 \text{ y } \xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_m} \in \mathcal{H}. \tag{4.1.13}$$

En suma, de (4.1.8), (4.1.9) y (4.1.13), queda claro que T_ξ es el operador aniquilación (izquierdo) dado por ξ y lo denotaremos por ℓ_ξ^*.

□

Observación 4.1.5. Para cualesquiera $\xi, \eta \in \mathcal{H}$

$$\ell_\xi^*\, \ell_\eta = \langle \eta\,, \xi\, \rangle\, \boldsymbol{1}_{\mathcal{F}(\mathcal{H})}. \tag{4.1.14}$$

Pues para todo $\psi_M = \lambda_\psi \Omega + \sum_{1\leq n\leq M} |n\rangle \in V$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\ell_\xi^* \, \ell_\eta \, \psi_M &= \ell_\xi^* \left(\lambda_\psi \eta + \sum_{1\leq n\leq M} \eta \otimes |n\rangle \right) \\
&= \langle \eta \, , \, \xi \rangle \, \lambda_\psi \Omega + \sum_{1\leq n\leq M} \langle \eta \, , \, \xi \rangle \, |n\rangle \\
&= \langle \eta \, , \, \xi \rangle \left(\lambda_\psi \Omega + \sum_{1\leq n\leq M} |n\rangle \right) \\
&= \langle \eta \, , \, \xi \rangle \, \psi_M
\end{aligned}$$

Afirmación 4.1.2. Cualquier producto finito de elementos en $\{\ell_\xi^*\}_{\xi\in\mathcal{H}} \cup \{\ell_\eta\}_{\eta\in\mathcal{H}}$ se reduce a la siguiente expresión:

$$\alpha \cdot \ell_{\eta_1} \cdots \ell_{\eta_m} \ell_{\xi_1}^* \cdots \ell_{\xi_n}^* \tag{4.1.15}$$

para algún $\alpha \in \mathbb{C}$, $n, m \geq 0$ y $\eta_1, \ldots, \eta_m, \xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathcal{H}$.

Prueba. Sea

$$\ell_{\zeta_1}^{\varepsilon(1)} \cdots \ell_{\zeta_p}^{\varepsilon(p)} \tag{4.1.16}$$

cualquier producto finito de elementos en $\{\ell_\xi^*\}_{\xi\in\mathcal{H}} \cup \{\ell_\eta\}_{\eta\in\mathcal{H}}$, donde $\zeta_1, \ldots, \zeta_p \in \mathcal{H}$ y $\varepsilon(1), \ldots, \varepsilon(p) \in \{1, *\}$. Entonces, si existe $k \in \{1, \ldots, p-1\}$ tal que $\varepsilon(k) = *$ y $\varepsilon(k+1) = 1$, por la observación anterior, la expresión (4.1.16) se reduce a

$$\alpha_1 \cdot \ell_{\zeta_1}^{\varepsilon(1)} \cdots \ell_{\zeta_q}^{\varepsilon(q)},$$

donde $\alpha_1 = \langle \zeta_{k+1} \, , \, \zeta_k \rangle$ y $q = p - 2$. Así, repitiendo este procedimiento, se llegará a un punto en donde ya no existan $k \in \{1, \ldots, p-1\}$ tales que $\varepsilon(k) = *$ y $\varepsilon(k+1) = 1$, lo cual dejará la expresión (4.1.16) como en (4.1.15).

□

Teorema 4.1.2. Sea $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert y consideremos el espacio de probabilidad C^* $(B(\mathcal{F}(\mathcal{H})), \tau_{\mathcal{H}})$. Sea $\{\mathcal{H}_i\}_{i=1}^k$ una familia de subespacios de $\mathcal{H}$ tales que $\mathcal{H}_i \perp \mathcal{H}_j$ para todo $i \neq j$, con $i, j \in \{1, \ldots, k\}$. Para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$ sean

$$\mathcal{A}_i = \left\{ alg \left(1, \ell_\xi, \ell_\xi^* \right) \right\}_{\xi\in\mathcal{H}_i}.$$

Entonces $\{\mathcal{A}_i\}_{i=1}^k$ son libremente independientes en $(B(\mathcal{F}(\mathcal{H})), \tau_{\mathcal{H}})$.

Prueba. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sean $T_j \in \mathcal{A}_{i(j)}$, para $i(j) \in \{1, \ldots, k\}$ y $1 \leq j \leq n$, tales que:

$$i(j) \neq i(j+1), \quad \text{para todo } 1 \leq j \leq n-1. \tag{4.1.17}$$

$$\tau_{\mathcal{H}}(T_j) = 0, \quad \text{para todo } 1 \leq j \leq n. \tag{4.1.18}$$

Luego, de la Afirmación 4.1.2, queda claro que para todo $1 \leq j \leq n$

$$T_j = \sum_{m=1}^{p(j)} \alpha_m^{(j)} \cdot \ell_{\eta_{(1,j)}} \cdots \ell_{\eta_{(r(m),j)}} \ell^*_{\xi_{(1,j)}} \cdots \ell^*_{\xi_{(s(m),j)}},$$

donde $\alpha_m^{(j)} \in \mathbb{C}$ y $\eta_{(1,j)}, \ldots, \eta_{(r(m),j)}, \xi_{(1,j)}, \ldots, \xi_{(s(m),j)} \in \mathcal{H}_j$, para todo $m \in \{1, \ldots, p(j)\}$, con $p(j) \geq 1$. De esta manera,

$$T_j T_{j+1} = \sum_{m_j=1}^{p(j)} \sum_{m_{j+1}=1}^{p(j+1)} \alpha_{m_j}^{(j)} \alpha_{m_{j+1}}^{(j+1)} \cdot \mathscr{L}_{(m_j, m_{j+1})}^{(j,j+1)}, \tag{4.1.19}$$

donde

$$\mathscr{L}_{(m_j,m_{j+1})}^{(j,j+1)} = \ell_{\eta_{(1,j)}} \cdots \ell_{\eta_{(r(m_j),j)}} \ell^*_{\xi_{(1,j)}} \cdots \ell^*_{\xi_{(s(m_j),j)}} \cdot \ell_{\eta_{(1,j+1)}} \cdots \ell_{\eta_{(r(m_{j+1}),j+1)}} \ell^*_{\xi_{(1,j+1)}} \cdots \ell^*_{\xi_{(s(m_{j+1}),j+1)}}$$

para todo $1 \leq j \leq n-1$.

De esta manera, sólo existen cuatro posibles configuraciones para cada $\mathscr{L}_{(m_j,m_{j+1})}^{(j,j+1)}$ en cada uno de los sumandos que surjan en (4.1.19):

(I) $\mathscr{L}_{(m_j,m_{j+1})}^{(j,j+1)} = 0$, siempre que para algún $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ se tenga que

$$(s(m_j), j) \neq (0, j) \quad \text{y}$$

$$(r(m_{j+1}), j+1) \neq (0, j+1),$$

para algunos $1 \leq s(m_j) \leq p(j)$ y $1 \leq r(m_{j+1}) \leq p(j+1)$.

(II) $\mathscr{L}_{(m_j,m_{j+1})}^{(j,j+1)} = \ell_{\eta_{(1,j)}} \cdots \ell_{\eta_{(r(m_j),j)}} \ell_{\eta_{(1,j+1)}} \cdots \ell_{\eta_{(r(m_{j+1}),j+1)}}$, siempre que para algún $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ se tenga que

$$(s(m_j), j) = (0, j),$$

$$(s(m_{j+1}), j+1) = (0, j+1),$$

y

$$(r(m_j), j) \neq (0, j)$$

$$(r(m_{j+1}), j+1) \neq (0, j+1),$$

para algunos $1 \leq s(m_j) \leq p(j)$ y $1 \leq s(m_{j+1}) \leq p(j+1)$.

(III) $\mathscr{L}_{(m_j,m_{j+1})}^{(j,j+1)} = \ell^*_{\xi_{(1,j)}} \cdots \ell^*_{\xi_{(r(m_j),j)}}$, siempre que para algún $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ se tenga que

$$(r(m_j), j) = (0, j) \text{ y}$$

$$(r(m_{j+1}), j+1) = (0, j+1),$$

para algunos $1 \leq r(m_j) \leq p(j)$ y $1 \leq r(m_{j+1}) \leq p(j+1)$.

(IV) $\mathscr{L}^{(j,j+1)}_{(m_j,m_{j+1})} = \ell_{\eta_{(1,j)}} \cdots \ell_{\eta_{(r(m_j),j)}} \ell^*_{\xi_{(1,j)}} \cdots \ell^*_{\xi_{(s(m_j),j)}} \ell^*_{\xi_{(1,j+1)}} \cdots \ell^*_{\xi_{(s(m_{j+1}),j+1)}}$, siempre que para algún $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ se tenga que

$$(r(m_{j+1}), j+1) = (0, j+1),$$

para algún $1 \leq r(m_{j+1}) \leq p(j+1)$.

Entonces,

(a) Para $\mathscr{L}^{(j,j+1)}_{(m_j,m_{j+1})}$ como en los casos $(I), (III), (IV)$ queda claro que $\mathscr{L}^{(j,j+1)}_{(m_j,m_{j+1})}\Omega = 0$.

(b) Para $\mathscr{L}^{(j,j+1)}_{(m_j,m_{j+1})}$ como en el caso (II) se tiene que

$$\mathscr{L}^{(j,j+1)}_{(m_j,m_{j+1})}\Omega \in \mathcal{H}^{\otimes k(j)},$$

para algún $k(j) \geq 1$.

Entonces, para todo $1 \leq j \leq n-1$ se tiene que

$$T_j\, T_{j+1}\Omega = \begin{cases} 0 & \\ \in \mathcal{H}^{\otimes r(j)} & \text{para algún } \ r(j) \geq 1 \end{cases}$$

Entonces

$$T_1 \cdots T_n\, \Omega = \begin{cases} 0 & \\ \in \mathcal{H}^{\otimes r} & \text{para algún } r \geq 1 \end{cases},$$

por lo que

$$\tau_{\mathcal{H}}\,(T_1 \cdots T_n) = \langle T_1 \cdots T_n\, \Omega\,,\, \Omega\rangle = 0.$$

$\square$

4.2. La convolución libre.

Uno de los usos más importantes de la teoría de probabilidad clásica es el estudio de sumas de variables aleatorias. Un ejemplo claro lo proporciona la Estadística: si realizamos un experimento repetidamente e independiente, entonces el valor promedio de los resultados estará dado por $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, donde x_i representa el resultado del i-ésimo experimento. La nueva variable aleatoria $\bar{x}$ es llamada un estimador para la media de cada x_j. La Estadística estudia cuándo y cómo $\bar{x}$ converge a dicha media conforme n va aumentando hasta el infinito.

También surgen otras preguntas de interés y más sofisticadas: ¿Cuál será la distribución de $\bar{x}$? ¿Si no es posible obtener la distribución exacta de $\bar{x}$, se podrá aproximar? ¿Qué tan grande deberá ser n para que tal aproximación sea suficientemente precisa? Así, para comenzar a responder este tipo de preguntas fundamentales e importantes surge la necesidad de estudiar la suma de variables aleatorias.

Teorema 4.2.1. (Motivación) Sea $(\Omega, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad y sean X, Y variables aleatorias independientes con distribución μ_X y μ_Y, respectivamente. Entonces $X + Y$ se distribuye como $\mu_X * \mu_Y$ (la convolución).

La prueba se puede ver en el Teorema 15.1 de [11]. Así mismo, resulta de gran importancia el estudio de suma de variables aleatorias no conmutativas libres, pues varias preguntas fundamentales sobre estas recaen en conocer la distribución de dicha suma, que en este ámbito le corresponde a la convolución libre. Antes de definir la convolución libre se enuncia el siguiente teorema de representación que más adelante permitirá encontrar distribuciones libres para obtener la convolución libre de dos variables aleatorias no conmutativas cualesquiera.

Teorema 4.2.2. Sean $(\mathcal{A}_1, \varphi_1)$, $(\mathcal{A}_2, \varphi_2)$ espacios de probabilidad C^* tales que para cada $i \in \{1, 2\}$ se tiene que $\mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}_i)$ y $\varphi_i(a_i) = \langle a_i\, \xi_i, \xi_i \rangle$, donde $\mathcal{H}_i$ es un Hilbert y $\xi_i \in \mathcal{H}_i$ es unitario. Entonces existen $(\mathcal{H}, \xi)$ y morfismos

$$\lambda_i : \mathcal{A}_i \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_i), \quad i = 1, 2$$

tales que

(I) Si $\varphi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$ se define por $\varphi(a) = \langle a\xi, \xi \rangle$, entonces

$$\varphi\left(\lambda_i(a)\right) = \varphi_i(a), \quad a \in \mathcal{A}_i, \;\; i = 1, 2.$$

(II) $\lambda_1\left(\mathcal{A}_1\right)$ y $\lambda_2\left(\mathcal{A}_2\right)$ son libres con respecto a φ.

Para la prueba se recomienda ver el Teorema 7.9 de [12]. La importancia de este teorema reside en que nos permite encontrar copias libres de variables aleatorias no conmutativas dadas. Para aclarar un poco mejor esta idea se realiza la siguiente observación para el caso particular de operadores sobre dos espacios de Hilbert.

Observación 4.2.1. Sean $(\mathbb{R}, \mathbb{B}_{\mathbb{R}}, \mu_1)$, $(\mathbb{R}, \mathbb{B}_{\mathbb{R}}, \mu_2)$ espacios de medidas de probabilidad de soporte compacto. Consideremos

$$\mathcal{H}_1 = L^2(\mathbb{R}, \mu_1),$$

$$\mathcal{H}_2 = L^2(\mathbb{R}, \mu_2),$$

y la función constante $\xi_0 = 1$. Definimos $T_i : \mathcal{H}_i \to \mathcal{H}_i$, dado por $T_i(f) = \alpha\, f$, para $i = 1, 2$, donde $\alpha(t) = t$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Luego, sea $f \in \mathcal{H}_1$, entonces

$$\|T_1(f)\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} (\alpha\, f)^2 \, d\mu_1 = \langle \alpha^2, f^2 \rangle,$$

entonces, de la Desigualdad de Hölder, se sigue que

$$\|T_1(f)\|_2^2 \leq \|\alpha^2\|_1 \, \|f^2\|_1,$$

por lo que

$$\|T_1(f)\|_2 \leq \|\alpha\|_2 \, \|f\|_2,$$

donde $\alpha \in \mathcal{H}_i$, ya que μ_i es de soporte compacto, para $i = 1, 2$. Por tanto, T_1 es acotado y, análogamente, T_2 también lo es. Por otro lado, para $i = 1, 2$ definimos $\varphi_i : B(\mathcal{H}_i) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\varphi_i(S) = \langle S\, \xi_0, \xi_0 \rangle.$$

Entonces, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\varphi_1\left(T_1^k\right) = \langle T_1^k(\xi_0), \xi_0 \rangle = \langle \alpha^k \xi_0, \xi_0 \rangle = \langle \alpha^k, 1 \rangle = \int_{\mathbb{R}} \alpha^k \, d\mu_1 = \int_{\mathbb{R}} t^k \, d\mu_1(t).$$

Así, aplicando el teorema anterior a $(\mathcal{B}(\mathcal{H}_1), \varphi_1)$ y $(\mathcal{B}(\mathcal{H}_2), \varphi_2)$, con $\varphi(a) = \langle a\xi, \xi \rangle$, existen $\lambda_i : \mathcal{B}(\mathcal{H}_i) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tales que $\lambda_1(\mathcal{B}(\mathcal{H}_1))$ y $\lambda_2(\mathcal{B}(\mathcal{H}_2))$ son libres. Por tanto, $\lambda_1(T_1)$ y $\lambda_2(T_2)$ son libres y autoadjuntos. De esta manera definimos

$$T := \lambda_1(T_1) + \lambda_2(T_2),$$

donde claramente T es autoadjunto. Entonces existe μ medida de probabilidad de soporte compacto tal que

$$\varphi(T^n) = \int_{\mathbb{R}} t^n \, d\mu, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

A μ se le llama la convolución libre (aditiva) de μ_1 y μ_2 y se le denota por $\mu_1 \boxplus \mu_2$.

Definición 4.2.1. Sean x_1, x_2 variables aleatorias no conmutativas libres con distribución μ_1 y μ_2, respectivamente. Se define la convolución libre (aditiva) de μ_1 y μ_2 como la distribución μ de $x_1 + x_2$ y la denotamos por $\mu_1 \boxplus \mu_2$.

Desafortunadamente, el cálculo directo de la convolución libre (aditiva) resulta ser una labor muy complicada. Para realizar este trabajo se presentará una técnica propuesta por Voiculescu, que se apoya en la transformada $\mathcal{R}$.

Definición 4.2.2. Sea $(\mathcal{A},\varphi)$ un espacio de probabilidad C^*. Para toda $a\in\mathcal{A}$, definimos $h_a : B_{\frac{1}{||a||}}(0)\to\mathbb{C}$, dada por

$$h_a(t)=\varphi\left((1-ta)^{-1}\right)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\varphi\left(a^n\right)\,t^n$$

Afirmación 4.2.1. Para cualquier $a\in(\mathcal{A},\varphi)$ la función $k_a(t)=th_a(t)$ es una biyección de $B_{\frac{1}{4||a||}}(0)$ a una vecindad del 0 que contiene a $B_{\frac{1}{6||a||}}(0)$.

Prueba. Para cualquier $a\in\mathcal{A}$ tenemos que

$$k_a(t)=t+\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(a^n)\,t^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\,t^{n+1},$$

donde $c_0=1$ y $c_n=\varphi(a^n)$, para todo $n\in\mathbb{N}$. Luego,

$$\left(|\varphi(a^n)|\right)^{\frac{1}{n}}\le\left(||a^n||\right)^{\frac{1}{n}}\le\left(||a||^n\right)^{\frac{1}{n}}=||a||,\quad\text{para todo } n\in\mathbb{N},$$

por lo que el radio de convergencia de k_a está dado por

$$\frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty}|c_n|^{1/n}}\ge\frac{1}{||a||}\ge\frac{1}{4||a||},$$

por lo que k_a es analítica en $B_{\frac{1}{4||a||}}(0)$, entonces para todo $t\in B_{\frac{1}{4||a||}}(0)$ tenemos que

$$\frac{d}{dt}\,k_a(t)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\varphi(a^n)t^n$$

por lo que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{d}{dt}\,k_a(t)\right| &\geq 1-\left|\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\varphi(a^n)t^n\right| \\
&\geq 1-\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)|\varphi(a^n)|\,|t^n| \\
&\geq 1-\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\,\|\varphi\|\,\|a^n\|\,|t^n| \\
&= 1-\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\,\left(\|a\|\,|t|\right)^n \\
&= 2-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,\left(\|a\|\,|t|\right)^n \\
&= 2-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{d|t|}\frac{\left(\|a\|\,|t|\right)^{n+1}}{\|a\|} \\
&= 2-\frac{d}{d|t|}\frac{\|a\|\,|t|}{\|a\|}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\|a\|\,|t|\right)^n \\
&= 2-\frac{d}{d|t|}\left(\frac{|t|}{1-\|a\|\,|t|}\right) \\
&= 2-\left(\frac{1}{\left(1-\|a\|\,|t|\right)^2}\right),
\end{aligned}$$

donde $\|a\|\,|t|<\frac{1}{4}$, por lo que $-\frac{1}{(1-\|a\|\,|t|)^2}>-\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2}$. Así,

$$\left|\frac{d}{dt}\,k_a(t)\right|\geq 2-\frac{16}{9}=\frac{2}{9.}$$

De esta manera, para todo $t_1,t_2\in B_{\frac{1}{4\|a\|}}(0)$ distintos, tenemos que

$$|k_a(t_2)-k_a(t_1)|\geq\frac{2}{9}\,|t_2-t_1|\neq 0,$$

de donde queda claro la inyectividad de k_a sobre $B_{\frac{1}{4\|a\|}}(0)$. Luego, para todo

$t \in \overline{B}_{\frac{1}{4\|a\|}}(0)$,

$$\begin{aligned}
|k_a(t)| &= |t||h_a(t)| \\
&= |t| \left| 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(a^n)\, t^n \right| \\
&\geq |t| \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(a^n)||t^n| \right) \\
&\geq |t| \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} (\|a\|\, |t|)^n \right) \\
&= |t| \left(2 - \frac{1}{1 - ||a||\, |t|} \right) \\
&\geq |t| \left(2 - \frac{4}{3} \right) \\
&= \frac{2}{3} |t|.
\end{aligned}$$

De esta manera, para todo $t \in \partial\overline{B}_{\frac{1}{4\|a\|}}(0)$ tenemos que

$$|k_a(t)| \geq \frac{1}{6\|a\|}.$$

Es decir, la imagen de k_a en $B_{\frac{1}{4\|a\|}}(0)$ cubre, al menos, a $B_{\frac{1}{6\|a\|}}(0)$. $\square$

Observación 4.2.2. Recordemos la transformada de Cauchy para μ una medida de probabilidad dada

$$G_\mu(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-t}\, d\mu(t), \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Más en general, sea $(\mathcal{A}, \varphi)$ espacio de probabilidad C^* y $X \in \mathcal{A}$ autoadjunta. Definimos la transformada de Cauchy de X en $(\mathcal{A}, \varphi)$ como

$$G_X(z) = \varphi\left((z - X)^{-1}\right), \quad \text{para } |z| > \|X\| \tag{4.2.1}$$

Lema 4.2.1. Sea $(\mathcal{A}, \varphi)$ espacio de probabilidad C^* y sea $X \in \mathcal{A}$ autoadjunta. Si μ es la distribución de X y $|z| > \|X\|$, entonces

$$\varphi\left((z - X)^{-1}\right) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-t}\, d\mu(t), \quad \text{para } |z| > \|X\|.$$

Prueba. Como $\frac{\|X\|}{|z|} < 1$, tenemos que

$$\varphi\left((z - X)^{-1}\right) = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} \varphi\left(X^n\right),$$

pero $\varphi(X^n) = \int_D x^n \, d\mu(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $D = \operatorname{supp}(\mu) \subset \mathbb{R}$. Entonces

$$\varphi\left((z - X)^{-1}\right) = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \int_D \left(\frac{x}{z}\right)^n \, d\mu(x),$$

donde $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{z}\right)^n$ converge a $\frac{1}{1-\frac{x}{z}}$. Así, por el Teorema de la Convergencia Dominada tenemos que

$$\varphi\left((z - X)^{-1}\right) = \frac{1}{z} \int_D \frac{1}{1 - \frac{x}{z}} \, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z - x} \, d\mu(x).$$

□

Observación 4.2.3. Consideremos las mismas hipótesis del lema anterior. Sea $t = \frac{1}{z}$, entonces $|t| < \frac{1}{\|X\|}$ y, así,

$$\begin{aligned} G_X(z) &= \varphi\left((z - X)^{-1}\right) \\ &= \frac{1}{z}\varphi\left(\left(1 - \frac{1}{z}X\right)^{-1}\right) \\ &= t\varphi\left((1 - tX)^{-1}\right) \\ &= k_X(t) \end{aligned}$$

Lema 4.2.2. Sea $(\mathcal{A}, \varphi)$ espacio de probabilidad C^* y sea $X \in \mathcal{A}$ autoadjunta. Si $|z| > \|X\|$, entonces $G_X(z)$ es invertible respecto a composición.

Prueba. De la Afirmación 4.2.1 y la Observación 4.2.3 queda claro que $G_X(z)$ es invertible entre $B_{\frac{1}{4\|a\|}}(0)$ y una vecindad del 0 que contiene a $B_{\frac{1}{6\|a\|}}(0)$. □

Definición 4.2.3. Sea $(\mathcal{A}, \varphi)$ espacio de probabilidad C^* y sea $X \in \mathcal{A}$ autoadjunta con distribución μ. Se define la transformada $\mathcal{R}$ de μ como

$$\mathcal{R}_\mu(z) = G_X^{-1}(z) - \frac{1}{z}, \quad \text{para todo } |z| > \|X\| \tag{4.2.2}$$

Observación 4.2.4. De la Observación 4.2.3 tenemos que $G_X(z) = k_X\left(\frac{1}{z}\right)$, para $|z| > \|X\|$. Así, se propone que

$$G_X^{-1}(z) = \frac{1}{k_X^{-1}(z)},$$

pues

$$G_X^{-1} \circ G_X(z) = \frac{1}{k_X^{-1}\left(k_X\left(\frac{1}{z}\right)\right)} = z$$

y

$$G_X \circ G_X^{-1}(z) = k_X\left(\frac{1}{G_X^{-1}(z)}\right) = k_X\left(k_X^{-1}(z)\right) = z.$$

Afirmación 4.2.2. Sea $(\mathcal{A},\varphi)$ espacio de probabilidad no conmutativo tal que $||\varphi||=1$. Sea $a\in\mathcal{A}$, con $\varphi(a)\neq 0$. Entonces la función $\ell_a(t)=h_a(t)-1$ es una biyección entre $B_{\frac{|\varphi(a)|}{4||a||^2}}(0)$ y una vecindad del 0 que contiene a $B_{\frac{|\varphi(a)|^2}{6||a||^2}}(0)$

Prueba. Sea $a\in\mathcal{A}$ tal que $\varphi(a)\neq 0$. Para $t\in B_{\frac{|\varphi(a)|}{4\,||a||^2}}(0)$ tenemos que

$$\frac{\ell_a(t)}{\varphi(a)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(a^n)}{\varphi(a)}\,t^n,$$

donde

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\varphi(a^n)}{\varphi(a)}\right|^{\frac{1}{n}}\leq\frac{||a||}{|\varphi(a)|}\leq\frac{4\,||a||}{|\varphi(a)|},$$

entonces

$$\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\varphi(a^n)}{\varphi(a)}\right|^{1/n}}\geq\frac{|\varphi(a)|}{4\,||a||}.$$

Por lo que $\frac{\ell_a(t)}{\varphi(a)}$ es analítica en $B_{\frac{|\varphi(a)|}{4\,||a||^2}}(0)$. Así, para todo $t\in B_{\frac{|\varphi(a)|}{4\,||a||^2}}(0)$, tenemos que

$$\frac{d}{dt}\frac{\ell_a(t)}{\varphi(a)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,\varphi(a^n)}{\varphi(a)}\,t^{n-1}=1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n\,\varphi(a^n)}{\varphi(a)}\,t^{n-1},$$

por lo que

$$\left|\frac{d}{dt}\frac{\ell_a(t)}{\varphi(a)}\right|\geq 1-\frac{1}{|\varphi(a)|}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{d}{d|t|}(||a||\,|t|)^n=1-\frac{1}{|\varphi(a)|}\,\frac{d}{d|t|}\left(\frac{||a||^2|t|^2}{(1-||a||\,|t|)^2}\right),$$

donde

$$\frac{d}{d|t|}\left(\frac{||a||^2|t|^2}{(1-||a||\,|t|)^2}\right)=||a||^2|t|\frac{2-||a||\,|t|}{(1-||a||\,|t|)^2}.$$

Entonces

$$\left|\frac{d}{dt}\frac{\ell_a(t)}{\varphi(a)}\right|\geq 1-\frac{||a||^2|t|}{|\varphi(a)|}\,\frac{2-||a||\,|t|}{(1-||a||\,|t|)^2}\geq 1-\frac{1}{4}\,\frac{2-||a||\,|t|}{(1-||a||\,|t|)^2},$$

donde $2-||a||\,|t|\geq 2-\frac{1}{4}$ y $(1-||a||\,|t|)^2\geq\left(1-\frac{1}{4}\right)^2$, por lo que

$$\left|\frac{d}{dt}\frac{\ell_a(t)}{\varphi(a)}\right|\geq 1-\frac{1}{4}\frac{2-\frac{1}{4}}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2}=1-\frac{7}{9}=\frac{2}{9}.$$

De esta manera, para todo $t_1,t_2\in B_{\frac{|\varphi(a)|}{4\,||a||^2}}(0)$ distintos tenemos que

$$|\ell_a(t_2) - \ell_a(t_1)| \geq \frac{2}{9}|\varphi(a)|\,|t_2 - t_1| \neq 0,$$

de donde se sigue que ℓ_a es inyectiva en $B_{\frac{|\varphi(a)|}{4\,||a||^2}}(0)$. Luego, sea $|t| \leq \frac{1}{4\,||a||}$, entonces

$$\begin{aligned}
|\ell_a(t)| &\geq |\varphi(a)|\,|t| - \sum_{n=2}^{\infty} (\|a\|\,|t|)^n \\
&= |\varphi(a)|\,|t| - \|a\|^2|t|^2 \sum_{k=0}^{\infty} (\|a\|\,|t|)^k \\
&\geq |\varphi(a)|\,|t| - \|a\|^2|t|^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k \\
&= |\varphi(a)|\,|t| - \frac{4}{3}\|a\|^2|t|^2,
\end{aligned}$$

en particular, si $t \in \partial\overline{B}_{\frac{|\varphi(a)|}{4\,\|a\|^2}}(0)$, entonces

$$|\ell_a(t)| \geq \frac{|\varphi(a)|^2}{4||a||^2} - \frac{4}{3}\frac{|\varphi(a)|^2}{16||a||^2} = \frac{|\varphi(a)|^2}{6\,||a||^2},$$

es decir, la imagen de $B_{\frac{|\varphi(a)|}{4\,\|a\|^2}}(0)$ bajo ℓ_a contiene a $B_{\frac{|\varphi(a)|}{6\,\|a\|^2}}(0)$. □

Lema 4.2.3. Sea $(\mathcal{A}, \varphi)$ espacio de probabilidad C^* y sean $a, b \in \mathcal{A}$ libres con respecto a φ. Para $t_1 \in B_{\frac{1}{\|a\|}}(0)$ y $t_2 \in B_{\frac{1}{\|b\|}}(0)$ definimos

$$a(t_1) = (1_\mathcal{A} - t_1\, a)^{-1} - h_a(t_1)1_\mathcal{A}$$

y

$$b(t_2) = (1_\mathcal{A} - t_2\, b)^{-1} - h_b(t_2)1_\mathcal{A}$$

Entonces

(I) $a(t_1)$ y $b(t_1)$ son libres con respecto a φ y $\varphi(a(t_1)) = \varphi(b(t_2)) = 0$, para todo $t_1 \in B_{\frac{1}{\|a\|}}(0)$ y $t_2 \in B_{\frac{1}{\|b\|}}(0)$

(II) Sea $\rho \in \mathbb{C}$, entonces

$$(1_\mathcal{A} - t_1\, a)(1_\mathcal{A} - \rho\, a(t_1)\, b(t_2))(1_\mathcal{A} - t_2\, b) = c_0 + c_1\, a + c_2\, b + c_3\, ab,$$

donde

$$\begin{aligned}
c_0 &= 1 - \rho\,(h_a(t_1) - 1)(h_b(t_2) - 1) \\
c_1 &= -t_1\,(1 + \rho\, h_a(t_1) - \rho\, h_a(t_1)\, h_b(t_2)) \\
c_2 &= -t_2\,(1 + \rho\, h_b(t_2) - \rho\, h_a(t_1)\, h_b(t_2)) \\
c_3 &= t_1 t_2\,(1 - \rho\, h_a(t_1)\, h_b(t_2))
\end{aligned}$$

(III) Si $\|\rho\, a(t_1)\, b(t_2)\| < 1$, entonces $c_0 + c_1\, a + c_2\, b + c_3\, ab$ es invertible y

$$\varphi\left((c_0 + c_1\, a + c_2\, b + c_3\, ab)^{-1}\right) = h_a(t_1)\, h_b(t_2)$$

Prueba. (I) Para todo $t_1 \in B_{\frac{1}{\|a\|}}(0)$, tenemos que $\|t_1\, a\| < 1$, por lo que $t_1\, a$ es acotada y, así, $(1_{\mathcal{A}} - t_1\, a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (t_1\, a)^n$. Por otro lado $h_a(t_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(a^n)\, t_1^n$, por lo que $a(t_1) \in alg\,(1_{\mathcal{A}}, a)$. Análogamente se tiene que $b(t_2) \in alg\,(1_{\mathcal{A}}, b)$. Así,

$$alg\,(1_{\mathcal{A}}, a(t_1)) \subseteq alg\,(1_{\mathcal{A}}, a)$$

y

$$alg\,(1_{\mathcal{A}}, b(t_2)) \subseteq alg\,(1_{\mathcal{A}}, b)\,,$$

por lo que $alg\,(1_{\mathcal{A}}, a(t_1))$ y $alg\,(1_{\mathcal{A}}, b(t_2))$ son φ -libres. Además, para todo $t_1 \in B_{\frac{1}{\|a\|}}(0)$ y $t_2 \in B_{\frac{1}{\|b\|}}(0)$

$$\varphi\,(a(t_1)) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi\,((t_1\, a)^n) - \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(a^n)\, t_1^n = 0$$

y

$$\varphi\,(b(t_2)) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi\,((t_2\, b)^n) - \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(b^n)\, t_2^n = 0.$$

(II) Luego, sea $\rho \in \mathbb{C}$, entonces

$$(1_{\mathcal{A}} - t_1\, a)(1_{\mathcal{A}} - \rho\, a(t_1)\, b(t_2))(1_{\mathcal{A}} - t_2\, b) = (1_{\mathcal{A}} - t_1\, a)(1_{\mathcal{A}} - t_2\, b) - \rho\,(1_{\mathcal{A}} - t_1\, a)a(t_1)\, b(t_2)(1_{\mathcal{A}} - t_2\, b),$$

donde

$$\begin{aligned}
(1_{\mathcal{A}} - t_1\, a)a(t_1)\, b(t_2)(1_{\mathcal{A}} - t_2\, b) &= (1_{\mathcal{A}} - h_a(t_1)(1_{\mathcal{A}} - t_1\, a))\, b(t_2)(1_{\mathcal{A}} - t_2\, b) \\
&= (1_{\mathcal{A}} - h_a(t_1)(1_{\mathcal{A}} - t_1\, a))\,(1_{\mathcal{A}} - h_b(t_2)(1_{\mathcal{A}} - t_2\, b)) \\
&= 1_{\mathcal{A}} - h_a(t_1)(1_{\mathcal{A}} - t_1\, a) - h_b(t_2)(1_{\mathcal{A}} - t_2\, b) + h_a(t_1)h_b(t_2)(1_{\mathcal{A}} - t_1\, a)(1_{\mathcal{A}} - t_2\, b) \\
&= (h_a(t_1) - 1)(h_b(t_2) - 1)\, 1_{\mathcal{A}} + t_1\big(\, h_a(t_1) - \, h_a(t_1)h_b(t_2)\big)\, a \\
&\quad + t_2\big(\, h_b(t_2) - \, h_a(t_1)h_b(t_2)\big)\, b + t_1 t_2\, h_a(t_1)h_b(t_2)\, ab
\end{aligned}$$

y

$$(1_{\mathcal{A}} - t_1\, a)(1_{\mathcal{A}} - t_2\, b) = 1_{\mathcal{A}} - t_1\, a - t_2\, b + t_1 t_2\, ab$$

por lo que

$$\begin{aligned}
(1_{\mathcal{A}} - t_1\, a)(1_{\mathcal{A}} - \rho\, a(t_1)\, b(t_2))(1_{\mathcal{A}} - t_2\, b) &= (1 - \rho(h_a(t_1) - 1)(h_b(t_2) - 1))\; 1_{\mathcal{A}} - t_1\,(1 + \rho\, h_a(t_1) - \rho\, h_a(t_1)h_b(t_2))\; a \\
&\quad - t_2\,(1 + \rho\, h_b(t_2) - \rho\, h_a(t_1)h_b(t_2))\; b + t_1 t_2\,(1 - \rho\, h_a(t_1)h_b(t_2))\; ab.
\end{aligned}$$

(III) Por último, supongamos que $\|\rho\, a(t_1)\, b(t_2)\| < 1$, entonces $(1 - \rho\, a(t_1)\, b(t_2))$ es invertible y, así, $c_0 + c_1\, a + c_2\, b + c_3\, ab$ es invertible. Entonces

$$(c_0 + c_1\, a + c_2\, b + c_3\, ab)^{-1} = (1_{\mathcal{A}} - t_2\, b)^{-1}(1_{\mathcal{A}} - \rho\, a(t_1)\, b(t_2))^{-1}(1_{\mathcal{A}} - t_1\, a)^{-1},$$

donde

$$(1_{\mathcal{A}} - \rho\, a(t_1)\, b(t_2))^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \left(a(t_1)b(t_2)\right)^n$$

y

$$(1_{\mathcal{A}} - t_1 a)^{-1} = a(t_1) + h_a(t_1) 1_{\mathcal{A}}$$
$$(1_{\mathcal{A}} - t_2 b)^{-1} = b(t_2) + h_b(t_2) 1_{\mathcal{A}}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
(c_0 + c_1\, a + c_2\, b + c_3\, ab)^{-1} &= (b(t_2) + h_b(t_2)1_{\mathcal{A}}) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \left(a(t_1)b(t_2)\right)^n \right) (a(t_1) + h_a(t_1)1_{\mathcal{A}}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n b(t_2) \left(a(t_1)b(t_2)\right)^n a(t_1) + h_a(t_1) \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n b(t_2) \left(a(t_1)b(t_2)\right)^n \\
&\quad + h_b(t_2) \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \left(a(t_1)b(t_2)\right)^n a(t_1) + h_a(t_1)h_b(t_2) \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \left(a(t_1)b(t_2)\right)^n ,
\end{aligned}$$

pero ya vimos que $a(t_1)$ y $b(t_2)$ son φ-libres, por lo que

$$\varphi\left(a(t_1)^{p_1}\, b(t_2)^{q_1} \cdots a(t_1)^{p_m}\, b(t_2)^{q_m}\right) = 0$$

para cualesquiera $p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m \geq 0$, tales que $(p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m) \neq (0, \ldots, 0, 0, \ldots, 0)$. Entonces

$$\varphi\left((c_0 + c_1\, a + c_2\, b + c_3\, ab)^{-1}\right) = 0 + h_a(t_1)\varphi(b(t_2)) + h_b(t_2)\varphi(a(t_1)) + h_a(t_1)h_b(t_2)\varphi(1_{\mathcal{A}}),$$

donde $\varphi(a(t_1)) = 0 = \varphi(b(t_2))$, por lo que

$$\varphi\left((c_0 + c_1\, a + c_2\, b + c_3\, ab)^{-1}\right) = h_a(t_1)h_b(t_2).$$

□

Teorema 4.2.3. Sea $(\mathcal{A}, \varphi)$ espacio de probabilidad no conmutativo con $\|\varphi\| = 1$ y sean $a, b \in \mathcal{A}$ libres con respecto a φ.

(I) Sean $t_1 \in B_{\frac{1}{4\|a\|}}(0)$ y $t_2 \in B_{\frac{1}{4\|b\|}}(0)$. Entonces

$$h_a(t_1),\; h_b(t_2) \neq 0$$

y

$$h_a(t_1) + h_b(t_2) - 1 \neq 0.$$

Además, si $k_a(t_1) = k_b(t_2)$, entonces

$$t := \frac{k_a(t_1)}{h_a(t_1) + h_b(t_2) - 1} = \frac{k_b(t_1)}{h_a(t_1) + h_b(t_2) - 1}$$

satisface que $|t| < \frac{1}{\|a+b\|}$ y

$$h_{a+b}(t) = h_a(t_1) + h_b(t_2) - 1,$$

$$k_{a+b}(t) = k_a(t_1) = k_b(t_2)$$

(II) Si $z \in \mathbb{C}$, $|z| < \text{mín}\left\{\frac{1}{6\|a\|}, \frac{1}{6\|b\|}, \frac{1}{6\|a+b\|}\right\}$, entonces

$$\mathcal{R}_{\mu_{a+b}}(z) = \mathcal{R}_{\mu_a}(z) + \mathcal{R}_{\mu_b}(z) \tag{4.2.3}$$

Prueba. Para cualesquiera $t_1 \in B_{\frac{1}{4\|a\|}}(0)$ y $t_2 \in B_{\frac{1}{4\|b\|}}(0)$ tenemos que

$$|h_a(t_1) - 1| \leq \sum_{n=1}^{\infty} (\|a\||t_1|)^n < \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{3}$$

$$|h_b(t_2) - 1| \leq \sum_{n=1}^{\infty} (\|b\||t_2|)^n < \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{3},$$

por lo que $h_a(t_1), h_b(t_2) > \frac{2}{3} \neq 0$ y, así, $h_a(t_1) + h_b(t_2) - 1 > \frac{1}{3} \neq 0$. Luego, supongamos que $k_a(t_1) = k_b(t_2)$, entonces

$$t = \frac{t_1\, h_a(t_1)}{h_a(t_1) + h_b(t_2) - 1} = t_1 \left(\frac{1}{1 + \frac{h_b(t_2)-1}{h_a(t_1)}}\right) = t_1 \left(1 + \frac{h_b(t_2) - 1}{h_a(t_1)}\right)^{-1},$$

donde

$$\left|1 + \frac{h_b(t_2) - 1}{h_a(t_1)}\right| \geq 1 - \frac{|h_b(t_2) - 1|}{|h_a(t_1)|} > 1 - \frac{1}{3}\frac{3}{2} = \frac{1}{2},$$

por lo que $|t| < 2|t_1|$, $2|t_2|$, entonces

$$|t| < \text{mín}\left\{\frac{1}{2\|a\|}, \frac{1}{2\|b\|}\right\},$$

donde $\text{mín}\left\{\frac{1}{2\|a\|}, \frac{1}{2\|b\|}\right\}(\|a\| + \|b\|) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, por lo que

$$|t| < \frac{1}{\|a\| + \|b\|} \leq \frac{1}{\|a + b\|}.$$

De esta manera, $h_{a+b}(t)$ está bien definida en $B_{\frac{1}{\|a+b\|}}(0)$. Así, consideremos $\rho = \frac{1}{h_a(t_1)h_b(t_2)}$. Como $|h_a(t_1)|$, $|h_b(t_2)| < \frac{4}{3}$, entonces $|\rho| < \frac{9}{16}$. Luego,

$$\begin{aligned}
\|a(t_1)\| &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} t_1^n \left(a^n - \varphi(a^n)1_{\mathcal{A}}\right) \right\| \\
&= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} t_1^n \left(a^n - \varphi(a^n)1_{\mathcal{A}}\right) \right\| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} |t_1|^n \|a^n - \varphi(a^n)1_{\mathcal{A}}\| \\
&\leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} (|t_1|\, \|a\|)^n \\
&< \frac{2}{3},
\end{aligned}$$

y análogamente, $\|b(t_2)\| < \frac{2}{3}$, por lo que $\|\rho\, a(t_1)b(t_2)\| < \frac{1}{4}$. Entonces, por el Lema 4.2.3, $c_0 + c_1\, a + c_2\, b + c_3\, ab$ es invertible y

$$\varphi\left((c_0 + c_1\, a + c_2\, b + c_3\, ab)^{-1}\right) = h_a(t_1)h_b(t_2),$$

donde

$$c_0 = 1 - \rho\, (h_a(t_1) - 1)\, (h_b(t_2) - 1) = \frac{h_a(t_1) + h_b(t_2) - 1}{h_a(t_1)h_b(t_2)}$$

$$c_1 = -t_1\, (1 + \rho\, h_a(t_1) - \rho\, h_a(t_1)h_b(t_2)) = \frac{-t_1}{h_b(t_2)}$$

$$c_2 = -t_2\, (1 + \rho\, h_b(t_2) - \rho\, h_a(t_1)h_b(t_2)) = \frac{-t_2}{h_a(t_1)}$$

$$c_3 = t_1 t_2\, (1 - \rho\, h_a(t_1)_b(t_2)) = 0.$$

Entonces $\frac{c_1}{c_0} = -t = \frac{c_2}{c_0}$, por lo que

$$\frac{1}{c_0}\varphi\left((1 - t(a+b))^{-1}\right) = h_a(t_1)h_b(t_2),$$

pero $h_{a+b}(t) := \varphi\left((1 - t(a+b))^{-1}\right)$, entonces

$$h_{a+b}(t) = c_0\, h_a(t_1)h_b(t_2) = h_a(t_1) + h_b(t_2) - 1,$$

y, así,

$$\begin{aligned} k_{a+b}(t) &= th_a(t_1) + th_b(t_2) - t \\ &= \frac{k_a(t_1)\, h_a(t_1) + k_a(t_1)\, h_b(t_2) - k_a(t_1)}{h_a(t_1) + h_b(t_2) - 1} \\ &= \frac{k_a(t_1)\, (h_a(t_1) + h_b(t_2) - 1)}{h_a(t_1) + h_b(t_2) - 1} \\ &= k_a(t_1) \\ &= k_b(t_2). \end{aligned}$$

Ahora, sea $\varepsilon = \text{mín}\left\{\frac{1}{6\,\|a\|}, \frac{1}{6\,\|b\|}, \frac{1}{6\,\|a+b\|}\right\}$ y $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| < \varepsilon$. De la Afirmación 4.2.1 se sigue que k_a^{-1}, k_b^{-1} y k_{a+b}^{-1} son analíticas en $B_\varepsilon(0)$. Luego, para $z \neq 0$ sean

$$t_1 = k_a^{-1}(z),$$
$$t_2 = k_b^{-1}(z),$$
$$t_3 = k_{a+b}^{-1}(z),$$

entonces $t_1 \in B_{\frac{1}{4\|a\|}}(0)$, $t_2 \in B_{\frac{1}{4\|b\|}}(0)$ y $t_3 \in B_{\frac{1}{4\|a+b\|}}(0)$. Así, por el inciso (I), queda claro que $h_a(t_1), h_b(t_2) \neq 0$ y $h_a(t_1) + h_b(t_2) - 1 \neq 0$. Luego,

$$k_a(t_1) = z = k_b(t_2),$$

entonces se sigue que $t = \frac{k_a(t_1)}{h_a(t_1)+h_b(t_2)-1}$ satisface $|t| < \frac{1}{\|a+b\|}$ y

$$k_{a+b}(t) = k_a(t_1) = k_b(t_2) = z.$$

Por lo que $t = k_{a+b}^{-1}(z)$, es decir

$$k_{a+b}^{-1}(z) = \frac{k_a(t_1)}{h_a(t_1) + h_b(t_2) - 1},$$

donde $h_a(t_1) = \frac{k_a(t_1)}{t_1} = \frac{z}{k_a^{-1}(z)}$ y $h_b(t_2) = \frac{k_b(t_2)}{t_2} = \frac{z}{k_b^{-1}(z)}$, por lo que

$$k_{a+b}^{-1}(z) = \frac{z}{\frac{z}{k_a^{-1}(z)} + \frac{z}{k_b^{-1}(z)} - 1} = \frac{1}{\frac{1}{k_a^{-1}(z)} + \frac{1}{k_b^{-1}(z)} - \frac{1}{z}},$$

entonces

$$\frac{1}{k_{a+b}^{-1}(z)} = \frac{1}{k_a^{-1}(z)} + \frac{1}{k_b^{-1}(z)} - \frac{1}{z} \tag{4.2.4}$$

Por otro lado, de la Observación 4.2.3 se sigue que

$$\mathcal{R}_{\mu_{a+b}}(z) = \frac{1}{k_{a+b}^{-1}(z)} - \frac{1}{z}$$

$$\mathcal{R}_{\mu_a}(z) = \frac{1}{k_a(z)^{-1}} - \frac{1}{z}$$

$$\mathcal{R}_{\mu_b}(z) = \frac{1}{k_b(z)^{-1}} - \frac{1}{z},$$

entonces

$$\mathcal{R}_{\mu_{a+b}}(z) \overset{(4.2.4)}{=} \frac{1}{k_a^{-1}(z)} + \frac{1}{k_b^{-1}(z)} - \frac{1}{z} - \frac{1}{z} = \mathcal{R}_{\mu_a}(z) + \mathcal{R}_{\mu_b}(z).$$

□

Ejemplo 4.2.1. Sean δ_0, δ_1 deltas de Dirac y sean α, $\beta \in [0,1]$ distintos. Entonces definimos las siguientes dos medidas:

$$\mu := \alpha\, \delta_0 + (1-\alpha)\delta_1$$

y

$$\nu := \beta\, \delta_0 + (1-\beta)\delta_1.$$

Claramente δ_0 y δ_1 son de soporte compacto. Luego, tenemos que sus respectivas transformadas de Cauchy quedan como sigue:

$$G_\mu(z) = \frac{1}{z}\,\alpha + \frac{1}{z-1}\,(1-\alpha) = \frac{z-\alpha}{z(z-1)}$$

$$G_\nu(z) = \frac{1}{z}\,\beta + \frac{1}{z-1}\,(1-\beta) = \frac{z-\beta}{z(z-1)}$$

De donde se obtiene, por cálculo directo, que las inversas deben ser de la forma

$$\frac{(w+1) \pm \sqrt{(w+1)^2 - 4\gamma\, w}}{2w}, \quad \gamma = \alpha, \beta$$

y del Lema 3.2.2 se sigue que

$$G_{\mu}^{-1}(w) = \frac{(w+1) + \sqrt{(w+1)^2 - 4\alpha w}}{2w},$$

$$G_{\nu}^{-1}(w) = \frac{(w+1) + \sqrt{(w+1)^2 - 4\beta w}}{2w}.$$

De esta manera, tenemos que

$$\mathcal{R}_{\mu}(z) = G_{\mu}^{-1}(z) - \frac{1}{z}$$

$$\mathcal{R}_{\nu}(z) = G_{\nu}^{-1}(z) - \frac{1}{z}$$

y del Teorema 4.2.3 se sigue que

$$\mathcal{R}_{\mu \boxplus \nu}(z) = \frac{2(z+1) + \sqrt{(z+1)^2 - 4\alpha z} + \sqrt{(z+1)^2 - 4\beta z}}{2z} - \frac{2}{z}.$$

Así,

$$G_{\mu \boxplus \nu}^{-1}(z) = 1 + \frac{\sqrt{(z+1)^2 - 4\alpha z} + \sqrt{(z+1)^2 - 4\beta z}}{2z}.$$

De aquí, se obtendrá $G_{\mu \boxplus \nu}(z)$ por cálculo directo. Ahora consideremos $w = G_{\mu \boxplus \nu}^{-1}(z)$ y $D_{\alpha} = (z+1)^2 - 4\alpha z$, $D_{\beta} = (z+1)^2 - 4\beta z$. Entonces,

$$w = 1 + \frac{\sqrt{D_{\alpha}} + \sqrt{D_{\beta}}}{2z}$$

de donde

$$2(w-1) - \frac{\sqrt{D_{\beta}}}{z} = \frac{\sqrt{D_{\alpha}}}{z}$$

y

$$4(w-1)^2 - \frac{4(w-1)\sqrt{D_{\beta}}}{z} + \frac{D_{\beta}}{z^2} = \frac{D_{\alpha}}{z^2},$$

entonces

$$\frac{D_{\beta} - D_{\alpha}}{z^2} = \frac{4(\alpha - \beta)}{z},$$

por lo que

$$4(w-1)^2 + \frac{4(\alpha - \beta)}{z} = \frac{4(w-1)}{z} \sqrt{D_{\beta}},$$

donde es claro que $w \neq 1$, pues $\alpha \neq \beta$, entonces

$$(w-1)\, z + \frac{\alpha - \beta}{w-1} = \sqrt{D_{\beta}}$$

de donde

$$(w-1)^2\, z^2 + 2(\alpha-\beta)\, z + \left(\frac{\alpha-\beta}{w-1}\right)^2 = z^2 + (2-4\beta)\, z + 1$$

y

$$w(w-2)\, z^2 + 2(\alpha+\beta-1)\, z + \left(\frac{\alpha-\beta}{w-1}\right)^2 - 1 = 0$$

entonces

$$z = \frac{1-\alpha-\beta}{w(w-2)} \pm \frac{\left((1-\alpha-\beta)^2 - \frac{(\alpha-\beta)^2 w(w-2)}{(w-1)^2} + w(w-2)\right)^{1/2}}{w(w-2)},$$

y del Lema 3.2.2 se sigue que

$$G_{\mu\boxplus\nu}(w) = \frac{1-\alpha-\beta}{w(w-2)} + \frac{\left((1-\alpha-\beta)^2 - \frac{(\alpha-\beta)^2 w(w-2)}{(w-1)^2} + w(w-2)\right)^{1/2}}{w(w-2)}.$$

Luego, denotemos

$$A(w) = (1-\alpha-\beta)^2 - \frac{(\alpha-\beta)^2 w(w-2)}{(w-1)^2} + w(w-2),$$

entonces para $w = x+iy \in H^+$ tenemos que

$$A(w) = R_A(x,y) + i\, I_A(x,y),$$

donde

$$R_A(x,y) = (1-\alpha-\beta)^2 + x(x-2) - y^2 - (\alpha-\beta)^2\, \frac{x(x-2)(x-1)^2 + y^2(2x(x-2)+3) + y^4}{\left((x-1)^2+y^2\right)^2}$$

$$I_A(x,y) = 2y\, \frac{(x-1)\left((x-1)^2+y^2\right)^2 - (\alpha-\beta)^2(x-1)}{\left((x-1)^2+y^2\right)^2}$$

Antes de continuar al computo de la densidad, se van a encontrar los átomos de $\mu\boxplus\nu$, cuyos candidatos serán los posibles polos de $G_{\mu\boxplus\nu}$, que por el Teorema 3.2.2 se veran los casos para $x = 0, 1, 2$. Entonces, para $x \approx 2$ y $y \approx 0$ tenemos que $I_A \approx 1-(\alpha-\beta)^2 \geq 0$, mientras que para $x, y \approx 0$ tenemos que $I_A \approx -1+(\alpha-\beta)^2 \leq 0$. Así, tenemos que

$$\lim_{w \overset{N.T.}{\to} 2} \sqrt{A(w)} = |1-\alpha-\beta|$$

y

$$\lim_{w \overset{N.T.}{\to} 0} \sqrt{A(w)} = -|1-\alpha-\beta|,$$

por lo que

$$\lim_{w \overset{N.T.}{\to} 2} (w-2) G_{\mu \boxplus \nu}(w) = \begin{cases} 1-(\alpha+\beta), & \alpha+\beta<1 \\ 0, & \alpha+\beta \geq 1 \end{cases}$$

y

$$\lim_{w \overset{N.T.}{\to} 0} w\, G_{\mu \boxplus \nu}(w) = \begin{cases} \alpha+\beta-1, & \alpha+\beta>1 \\ 0, & \alpha+\beta \leq 1 \end{cases}$$

Luego, como

$$(w-1)^2 A(w) = (w-1)^2 (1-\alpha-\beta)^2 - (\alpha-\beta)^2 w(w-2) + w(w-2)(w-1)^2,$$

y $I_A \approx -(\alpha-\beta)^2 \leq 0$, cuando $x \approx 1$ y $y \approx 0$, entonces

$$\lim_{w \overset{N.T.}{\to} 1} (w-1)\sqrt{A(w)} = -|\alpha-\beta|,$$

por lo que

$$\lim_{w \overset{N.T.}{\to} 1} (w-1)\, G_{\mu \boxplus \nu}(w) = |\alpha-\beta|.$$

De aquí que $\mu \boxplus \nu$ tenga un átomo en 1 cuando $\alpha \neq \beta$, mientras que el otro átomo en 0 o en 2 dependerá de $\alpha+\beta$.

Ahora, para obtener la densidad de $\mu \boxplus \nu$ se usará el resultado obtenido en (3.2.4). Primero, reescribiendo $A(w)$ en forma polar se tiene que

$$A(w) = r\, e^{i\theta},$$

donde

$$\begin{aligned} r &= \left(R_A^2(x,y) + I_A^2(x,y)\right)^{1/2} \\ \theta &= \begin{cases} \arctan\left(\frac{I_A(x,y)}{R_A(x,y)}\right), & R_A(x,y)>0 \\ \arctan\left(\frac{I_A(x,y)}{R_A(x,y)}\right)+\pi, & R_A(x,y)<0 \end{cases} \end{aligned}$$

Entonces

$$Im\, G_{\mu \boxplus \nu}(x+iy) = \frac{a_1\, r^{1/2}\, sen\left(\frac{\theta}{2}\right) + b_1\left(1-\alpha-\beta+r^{1/2}\, cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}{a_1^2-b_1^2},$$

donde

$$\begin{aligned} a_1 &= x^2-2x-y^2 \\ b_1 &= 2y(x-1) \end{aligned}$$

Así, para $y \approx 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} R_A(x,y) &\approx R_A(x) = (1-\alpha-\beta)^2 + x(x-2) - (\alpha-\beta)^2\, \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} \\ I_A(x,y) &\approx I_A(x) = 0, \end{aligned}$$

siempre que $x \neq 1$. Entonces, para $y \approx 0$ y $x \neq 1$

$$Im\, G_{\mu \boxplus \nu}(x+iy) \approx \begin{cases} 0, & R_A(x) > 0 \\ \frac{|R_A(x)|^{1/2}}{x(x-2)}, & R_A(x) < 0 \end{cases}$$

Entonces, para $x \notin \{0,1,2\}$

$$\lim_{y \to 0^+} Im\, G_{\mu \boxplus \nu}(x+iy) = \begin{cases} 0, & R_A(x) > 0 \\ \frac{|R_A(x)|^{1/2}}{x(x-2)}, & R_A(x) < 0 \end{cases}$$

De aquí podemos observar que el soporte de la densidad es $\{x \,:\, R_A(x) \leq 0\}$, que para valores de $\alpha = 0.6$ y $\beta = 0.7$ se puede visualizar en la Figura 4.1.

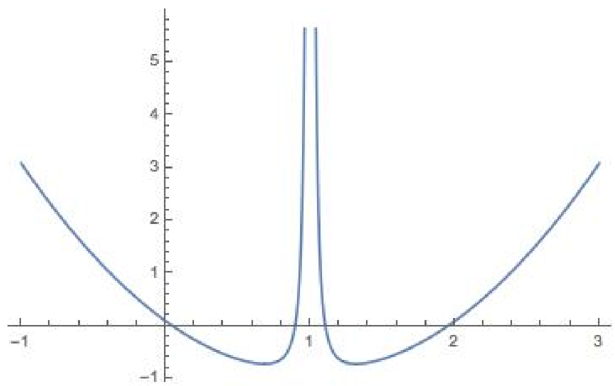

Figura 4.1: Gráfica de $R_A(x)$, con $\alpha = 0.6$ y $\beta = 0.7$. Donde $R_A(x) < 0$ cuando $x \in (0.0465857\,,\, 0.895114) \cup (1.10489\,,\, 1.95341)$, aproximadamente.

Así, por el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue y de (3.2.4) se sigue que para cualquier intervalo (s,t) contenido en el soporte de $\mu \boxplus \nu$ se tiene que

$$\mu \boxplus \nu\,((s,t)) = \frac{1}{\pi} \int_s^t \frac{|R_A(x)|^{1/2}}{x(2-x)}\, dx$$

4.3. Convolución libre de distribuciones semicirculares.

Definición 4.3.1. La ley semicircular con centro en $a \in \mathbb{R}$ y radio $r > 0$ es una medida de probabilidad $\gamma_{a,r}$ determinada por la siguiente densidad:

$$d\gamma_{a,r}(t) = \frac{2}{r^2\,\pi} \sqrt{r^2 - (t-a)^2}\, \chi_{[a-r,a+r]}(t)\, dt$$

La distribución semicircular tiene un rol análogo al de la distribución Gaussiana cuando se sustituye independencia clásica por libre. De esta manera, podemos verificar el siguiente resultado.

Afirmación 4.3.1. Sea $\gamma_{a,r}$ la distribución semicircular centrada en $a \in \mathbb{R}$ y radio $r > 0$. Entonces $\gamma_{a,r} = \left(L_a \circ D_{\frac{r}{2}}\right)_* (\gamma_{0,2})$, donde $D_r, L_a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ son funciones medibles y tales que $D_r(z) = rz$ y $L_a(z) = z + a$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

Prueba. Sea $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\int t^k \, d\left(L_a \circ D_{\frac{r}{2}}\right)_* (\gamma_{0,2})(t) &\overset{(3.1.6)}{=} \int \left(\frac{r}{2}t + a\right)^k \, d\gamma_{0,2}(t) \\
&= \int \left(\frac{r}{2}t + a\right)^k \, \frac{1}{2\pi}\sqrt{4 - t^2}\, \chi_{[-2,2]}(t)\, dt \\
&= \int x^k \, \frac{1}{2\pi}\sqrt{4 - \frac{4}{r^2}(x-a)^2}\, \chi_{[-2,2]}\left(\frac{2}{r}(x-a)\right) \frac{2}{r}\, dx \\
&= \int x^k \, \frac{2}{r^2\pi}\sqrt{r^2 - (x-a)^2}\, \chi_{[a-r,a+r]}(x)\, dx \\
&= \int x^k \, d\gamma_{a,r}(x).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, del Teorema 1.2.1 se sigue que $\gamma_{a,r} = \left(L_a \circ D_{\frac{r}{2}}\right)_* (\gamma_{0,2})$ $\square$

Lema 4.3.1. Dada μ medida de probabilidad de soporte compacto en $\mathbb{R}$, para cualquier boreliano B y $a \in \mathbb{R}$ y $r > 0$ fijos tenemos que

$$\mathcal{R}_{(L_a)_*(\mu)}(z) = \mathcal{R}_\mu(z) + a$$

$$\mathcal{R}_{(D_r)_*(\mu)}(z) = r\,\mathcal{R}_\mu(r\,z)$$

Prueba. Por un lado, tenemos que

$$G_{(L_a)_*(\mu)}(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\,(L_a)_*(\mu)(t)}{z - t} \overset{(3.1.6)}{=} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(t)}{z - (t+a)} = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(t)}{(z-a) - t} = G_\mu(z-a)$$

y

$$G_{(D_r)_*(\mu)}(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\,(D_r)_*(\mu)(t)}{z - t} \overset{(3.1.6)}{=} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(t)}{z - r\,t} = \frac{1}{r}\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(t)}{\frac{1}{r}\,z - t} = \frac{1}{r}\,G_\mu\left(\frac{1}{r}\,z\right)$$

De aquí, es claro ver que

$$G^{-1}_{(L_a)_*(\mu)}(z) = G^{-1}_\mu(z) + a$$

y

$$G^{-1}_{(D_r)_*(\mu)}(z) = r\,G^{-1}_\mu(r\,z)$$

pues

$$G^{-1}_{(L_a)_*(\mu)} \circ G_{(L_a)_*(\mu)}(z) = (z-a) + a = z = G_{(L_a)_*(\mu)} \circ G^{-1}_{(L_a)_*(\mu)}(z)$$

y

$$G^{-1}_{(D_r)_*(\mu)} \circ G_{(D_r)_*(\mu)}(z) = r\,G^{-1}_\mu\left(r\,\frac{1}{r}G_\mu\left(\frac{1}{r}\,z\right)\right) = r\,\frac{1}{r}\,z = G_{(D_r)_*(\mu)} \circ G^{-1}_{(D_r)_*(\mu)}(z).$$

Entonces

$$\mathcal{R}_{(L_a)_*(\mu)}(z) = G^{-1}_{(L_a)_*(\mu)}(z) - \frac{1}{z} = G^{-1}_{\mu}(z) + a - \frac{1}{z} = \mathcal{R}_{\mu}(z) + a$$

y

$$\mathcal{R}_{(D_r)_*(\mu)}(z) = G^{-1}_{(D_r)_*(\mu)}(z) - \frac{1}{z} = rG^{-1}_{\mu}(r\,z) - \frac{1}{z} = r\left(G^{-1}_{\mu}(r\,z) - \frac{1}{r\,z}\right) = r\,\mathcal{R}_{\mu}(r\,z)\,.$$

$\square$

Lema 4.3.2. Si X es una variable aleatoria no conmutativa con distribución semicircular $\gamma_{0,2}$, entonces

$$\mathcal{R}_{\gamma_{0,2}}(z) = z \tag{4.3.1}$$

Prueba. De la definición es claro que la densidad de $\gamma_{0,2}$ está dada por

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{4-t^2}\,\chi_{[-2,2]}(t)\,dt$$

Entonces

$$G_{\gamma_{0,2}}(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2}\frac{\sqrt{4-t^2}}{z-t}\,dt.$$

Luego, para todo $t < |z|$ se tiene que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{z^{n+1}} = \frac{1}{z-t},$$

por lo que

$$G_{\gamma_{0,2}}(z) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}\int_{-2}^{2}t^n\sqrt{4-t^2}\,dt, \quad |z| > t$$

Así, de (2.0.11) se sigue que

$$G_{\gamma_{0,2}}(z) = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{C_p}{z^{2p+1}}$$

Luego, de (A.0.4) se sigue que

$$\begin{aligned}
G_{\gamma_{0,2}}(z) &= \frac{1}{z} + \frac{1}{z}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{z^{2p}}\sum_{j=1}^{p} C_{j-1}C_{p-j} \\
&= \frac{1}{z} + \frac{1}{z}\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{p}\frac{C_{j-1}C_{p-j}}{z^{2j-2j+2p+1-1}} \\
&= \frac{1}{z} + \frac{1}{z}\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{p}\frac{C_{j-1}}{z^{2j-1}}\,\frac{C_{p-j}}{z^{2(p-j)+1}} \\
&= \frac{1}{z} + \frac{1}{z}\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{p-1}\frac{C_{k}}{z^{2k+1}}\,\frac{C_{p-k-1}}{z^{2(p-k-1)+1}} \\
&= \frac{1}{z} + \frac{1}{z}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{l}\frac{C_{k}}{z^{2k+1}}\,\frac{C_{l-k}}{z^{2(l-k)+1}} \\
&= \frac{1}{z} + \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_{k}}{z^{2k+1}}\sum_{l=k}^{\infty}\frac{C_{l-k}}{z^{2(l-k)+1}} \\
&= \frac{1}{z} + \frac{1}{z}G^{2}_{\gamma_{0,2}}(z),
\end{aligned}$$

por lo que

$$G^{2}_{\gamma_{0,2}}(z) - zG_{\gamma_{0,2}}(z) + 1 = 0.$$

Así, resolviendo para $G_{\gamma_{0,2}}(z)$ tendremos que

$$G_{\gamma_{0,2}}(z) = \frac{z \pm \sqrt{z^2-4}}{2}, \quad |z| > t$$

Luego, multiplicando por el conjugado de $z \pm \sqrt{z^2-4}$ y sustituyendo $z = iy$, se tiene que

$$G_{\gamma_{0,2}}(iy) = \frac{2}{iy\left(1 \mp \sqrt{1+\frac{4}{y^2}}\right)}, \quad |y| > t$$

Por lo que $G_{\gamma_{0,2}}(z) = \frac{z-\sqrt{z^2-4}}{2}$ para que se satisfaga que $\lim_{y\to\infty} iyG_{\gamma_{0,2}}(iy) = 1$. Así, $G^{-1}_{\gamma_{0,2}}(z) = z + \frac{1}{z}$, de donde se tiene que $\mathcal{R}_{\gamma_{0,2}}(z) = z$. □

Teorema 4.3.1. La familia de distribuciones semicirculares es cerrada bajo convolución libre.

Prueba. Sean $\gamma_{a,r}$ y $\gamma_{b,s}$ distribuciones semicirculares de dos variables aleatorias no conmutativas libremente independientes. Entonces de la Afirmación 4.3.1 y del Lema 4.3.1 se sigue que

$$\mathcal{R}_{\gamma_{a,r}}(z) = \frac{r}{2}\,\mathcal{R}_{\gamma_{0,2}}\left(\frac{r}{2}\,z\right) + a$$

y

$$\mathcal{R}_{\gamma_{b,s}}(z) = \frac{s}{2}\,\mathcal{R}_{\gamma_{0,2}}\left(\frac{s}{2}\,z\right) + b$$

Entonces, de (4.3.1) se tiene que

$$\mathcal{R}_{\gamma_{a,r}}(z) = \frac{r^2}{4}\,z + a$$

y

$$\mathcal{R}_{\gamma_{b,s}}(z) = \frac{s^2}{4}\,z + b$$

Así,

$$\mathcal{R}_{\gamma_{a,r}\boxplus\gamma_{b,s}}(z) = \frac{r^2+s^2}{4}\,z + (a+b),$$

que es la transformada $\mathcal{R}$ de la distribución semicircular $\gamma_{a+b,\sqrt{r^2+s^2}}$. $\square$

Capítulo 5

Conclusiones

Explorando una de tantas maneras de obtener la distribución-$*$ entre variables aleatorias no conmutativas libres, cuando es posible, me quedó claro la necesidad de una base considerablemente sólida de herramientas analíticas. Aprendí de la importancia que tienen otras disciplinas como el Análisis Funcional, Variable Compleja, Teoría de la Medida, Álgebras de Banach, entre otras para el desarrollo de metodologías que permitan calcular de manera analítica la convolución libre. A su vez, asimilé el paralelismo que mantiene la teoría de probabilidad libre con la probabilidad clásica. Si solamente se trata la parte algebráica, se llegan a simplificar algunos conceptos; como el caso de la esperanza y las varibles aleatorias, donde la primera se traduce a ser un estado mientras que las segundas se convierten en operadores.

También, comprendí lo fundamental que resultan ser los espacios de Hilbert cuando se busca estudiar las propiedades de algún espacio, pero resulta ser una labor demasiado compleja por su nivel de abstracción. En este sentido, con apoyo de las herramientas que provee la probabilidad libre, uno puede mejorar la manera de entender una estructura algebráica, cuyo nivel de abstracción complica su estudio, a través de representaciones en espacios de Hilbert; y en el mejor de los casos llevar a cabo una descripción analítica.

Finalmente, me gustaría aclarar que, aunque en este proyecto sólo se habló de medidas de soporte compacto, debido al enfoque inicial que se le da a este tema a nivel licenciatura, la línea de estudio sigue en extender el caso a distribuciones dadas por medidas de soporte no necesariamente compacto, lo cual compete a temas que involucran operadores no acotados.

Apéndice A

Trayectorias de Dyck

Definición A.0.1. Consideremos el espacio cuadriculado denotado por $\mathbb{Z}^2$. Definimos una trayectoria NE-SE como una trayectoria en $\mathbb{Z}^2$ que empieza en $(0,0)$ con pasos de la forma $(1,1)$ (pasos al Noreste) y $(1,-1)$ (pasos al Sureste).

Definición A.0.2. Una trayectorio de Dyck es una trayectoria NE-SE, denotada γ, que termina en el eje de las abscisas y nunca baja estrictamente más allá de este eje.

Observación A.0.1. Dado $k \in \mathbb{N}$, podemos identificar naturalmente el conjunto de trayectorias NE-SE de longitud k con $\{-1,1\}^k$ asociando cada trayectoria γ_k con una k-tupla cuyos elementos son la secuencia de ± 1s que aparecen en las segundas componentes de la trayectoria γ_k.

Observación A.0.2. Sea $k \in \mathbb{N}$ y consideremos la identificación natural descrita en la observación A.0.1. Entonces $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ es una trayectoria de Dyck si y sólo si

$$\begin{cases} \sum_{r=1}^{j} \lambda_r \geq 0, & 1 \leq j \leq k \\ \sum_{r=1}^{k} \lambda_r = 0. \end{cases} \tag{A.0.1}$$

Prueba. Sea $k \in \mathbb{N}$ y consideremos $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$, donde $\lambda_i \in \{-1,1\}$ para $i = 1, \ldots, k$.

Si (A.0.1) se satisface queda claro que la trayectoria γ_k NE-SE asociada a $(\lambda_1 \ldots, \lambda_k)$ termina en el eje de las abscisas, pues $\sum_{r=1}^{k} \lambda_r = 0$. Y como $\sum_{r=1}^{j} \lambda_r \geq 0$, para $1 \leq j \leq k$, entonces γ_k nunca baja del eje de las abscisas; ya que si fuese el caso contrario esto implicaría, sin pérdida de generalidad, que existe $(p_0, -1)$ para algún $p_0 \in \{1, \ldots, k-1\}$, un punto en la trayectoría, lo cual implica una contradicción con la hipótesis, ya que $\sum_{r=1}^{p_0} \lambda_r = -1$. Por tanto $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ es una trayectoria de Dyck.

Si $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ es una trayectoria de Dyck de longitud k, entonces para cualquier punto (p,q) en la trayectoria tendremos que $q \geq 0$ y $q = 0$ cuando $p = k$, donde $q = \sum_{r=1}^{p} \lambda_r$. Entonces $\sum_{r=1}^{p} \lambda_r \geq 0$, para cualquier $p \in \{1, \ldots, k-1\}$; y si $p = k$, $0 = q = \sum_{r=1}^{k} \lambda_r$. □

De (A.0.1) queda claro que una trayectoria de Dyck de longitud k existe sólo cuando k es par. De hecho la cantidad de trayectorias de Dyck de longitud k se pueden enumerar por medio de los numéros de Catalan.

Definición A.0.3. Dado un entero $n \geq 0$ denotamos por C_n al n-ésimo número de Catalan,

$$C_n := \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} \tag{A.0.2}$$

Observación A.0.3. Dado un entero positivo p, el número de trayectorias de Dyck de longitud $2p$ es igual al p-ésimo número de Catalan C_p.

Prueba: Sea $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$. Claramente una trayectoria NE-SE cualquiera con u pasos al Noreste y v pasos al Sureste terminá en el punto $(u+v, u-v)$, por lo que existen trayectorias NE-SE que terminen en (m,n) si y sólo si $(m,n) = (u+v, u-v)$, para algunos $u, v \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que $u+v > 0$. Es decir, si y sólo si $m > 0$, $|n| \leq m$ y m, n son de la misma paridad.

Así, las trayectorias NE-SE que terminen en (m,n) serán aquellas con precisamente $\frac{m+n}{2}$ pasos al Noreste y $\frac{m-n}{2}$ pasos al Sureste. Entonces tendremos que las posibles trayectorias NE-SE que terminen en (m,n) se pueden contar como sigue:

$$\frac{m!}{(\frac{m+n}{2})!(\frac{m-n}{2})!} = \binom{m}{\frac{m+n}{2}} \tag{A.0.3}$$

De esta manera, tenemos $\binom{2p}{p}$ trayectorias NE-SE posibles que terminen en $(2p, 0)$. Ahora, contemos las trayectorias NE-SE que terminen en $(2p, 0)$ que no sean trayectorias de Dyck.

Fijemos γ una trayectoria NE-SE que termine en $(2p, 0)$ y no sea de Dyck. Consideremos $j \in \{1, \ldots, 2p-1\}$ la longitud mínima de pasos tal que γ baja por primera vez del eje de las abscisas; es decir, para cualquier punto (p, q) en la trayectoria γ se tiene que:

$$\begin{cases} q > 0, & p < j-1 \\ q = 0, & p = j-1 \\ q = -1, & p = j \end{cases}$$

Entonces γ se puede descomponer como una yuxtaposición de dos trayectorias, $\gamma = \gamma' \vee \gamma''$; donde γ' va del $(0,0)$ al $(j,-1)$, y γ'' va del $(j,-1)$ al $(2p,0)$. Luego, tomemos $\widehat{\gamma''}$ como la reflexión de γ'' sobre el eje horizontal $y = -1$. Entonces $\widehat{\gamma''}$ va del $(j,-1)$ al $(2p,-2)$.

Así, definimos $F(\gamma) := \gamma' \vee \widehat{\gamma''}$, un mapeo que manda trayectorias NE-SE, que no son de Dyck y terminan en $(2p,0)$, a trayectorias NE-SE que terminan en $(2p,-2)$. De hecho F es una biyección entre el conjunto de trayectorias NE-SE que no son de Dyck y terminan en $(2p,0)$ y el conjunto de trayectorias NE-SE que terminan en $(2p,-2)$; ya que dada γ una trayectoria NE-SE que termina en $(2p,-2)$ tendremos que existe una cantidad de pasos mínima $j_\beta \in \{1, \ldots, 2p-1\}$ tal que β se encuentra a una altura $y = -1$. Por lo que podemos descomponer a β como $\beta = \beta' \vee \beta''$; donde β' va del $(0,0)$ al $(j_\beta, -1)$, y β'' va del $(j_\beta, -1)$ al $(2p, -2)$. Tomemos $\widehat{\beta''}$ como la reflexión de β'' sobre el eje $y = -1$ y $\gamma := \beta' \vee \widehat{\beta''}$, entonces γ es la única trayectoria NE-SE que termina en $(2p, 0)$ tal que $F(\gamma) = \beta$.

Entonces el número de trayectorias NE-SE que no son de Dyck y terminan en $(2p, 0)$ es igual a la cantidad de trayectorias NE-SE que terminan en $(2p, -2)$. Así, por (A.0.3), hay $\binom{2p}{\frac{2p-2}{2}}$ trayectorias NE-SE que no son de Dyck y terminan en $(2p, 0)$. Es decir, hay $\binom{2p}{p-1}$ trayectorias NE-SE que no son de Dyck y terminan en $(2p, 0)$. Por tanto, hay

$$\binom{2p}{p} - \binom{2p}{p-1}$$

trayectorias de Dyck que terminan en $(2p, 0)$. Pero,

$$\begin{aligned}
\binom{2p}{p} - \binom{2p}{p-1} &= \frac{(2p)!}{p!^2} - \frac{(2p)!}{(p+1)!(p-1)!} = (2p)! \cdot \frac{(p+1)!(p-1)! - p!^2}{p!^2(p+1)!(p-1)!} \\
&= (2p)! \cdot \frac{(p+1)p(p-1)!^2 - p^2(p-1)!^2}{p!^2(p+1)!(p-1)!} \\
&= (2p)! \cdot \frac{p(p-1)!^2\big(p+1-p\big)}{p!^2(p+1)!(p-1)!} \\
&= (2p)! \cdot \frac{p(p-1)!^2}{p(p-1)!p!(p+1)!(p-1)!} \\
&= \frac{(2p)!}{p!(p+1)!} = \frac{1}{p+1} \cdot \frac{(2p)!}{p!^2} = \frac{1}{p+1}\binom{2p}{p}
\end{aligned}$$

□

Observación A.0.4. Los números definidos en (A.0.2) satisfacen la siguiente regla de recurrencia:

$$\begin{cases} C_0 = C_1 = 1 \\ C_p = \sum_{j=1}^{p} C_{j-1}C_{p-j}, \quad p \geq 2 \end{cases} \tag{A.0.4}$$

Bibliografía

[1] Ahlfors, L. V.
1979. *Complex Analysis*. McGraw-Hill.

[2] Akhiezer, N. I.
1965. *The Classical Moment Problem and some related questions*. Oliver & Boyd.

[3] Berberian, S. K.
2013. *Tensor product of Hilbert Spaces*. URL `https://www.ma.utexas.edu/mp_arc/c/14/14-2.pdf`.

[4] Bercovici, H. and D. Voiculescu
1993. Free convolution of measures with unbounded support. *Indiana University Mathematics Journal*, 42(3).

[5] Bercovici, H. and D. Voiculescu
1998. Regularity questions for free convolution. In *Operator Theory Advances and Applications*, volume 104. Birkhäuser.

[6] Bozejko, M., M. Leinert, and R. Speicher
1996. Convolution and limit theorems for conditionally free random variables. *Pacific Journal of Mathematics*, 175(2).

[7] Carothers, N. L.
2000. *Real Analysis*. Cambridge University Press.

[8] Cohn, D. L.
1980. *Measure Theory*. Birkhäuser.

[9] Douglas, R. G.
1998. *Banach Algebra Techniques in Operator Theory*. Springer.

[10] Haagerup, U.
1997. On voiculescu's r– and s–transforms for free non-commuting random variables. In *Free probability theory (Waterloo, ON, 1995)*, volume 12. American Mathematical Society.

[11] Jacod, J. and P. Protter
2003. *Probability Essentials*. Springer.

[12] Nica, A. and R. Speicher
2006. *Lectures on the combinatorics of free probability*. Cambridge University Press.

[13] Roman, S.
2008. *Advanced Linear Algebra*. Springer.

[14] Speicher, R.
2009. *Free Probability Theory*. URL `https://arxiv.org/abs/0911.0087v1`.

[15] Voiculescu, D., K. Dykema, and A. Nica
1992. *Free Random Variables. A noncommutative probability approach to free products with applications to random matrices, operator algebras and harmonic analysis on free groups*. American Mathematical Society.