



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS DE LA TIERRA

INSTITUTO DE GEOFÍSICA

“Modelado de velocidades de ondas en rocas anisótropas y heterogéneas con aplicación en la exploración de recursos naturales”

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS DE LA TIERRA

P R E S E N T A:

LUIS DANIEL JAIMES TEJEDA

Director de Tesis:

Dr. Oscar Cerapio Valdiviezo Mijangos
Instituto Mexicano del Petróleo



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Quiero agradecer sinceramente a mi asesor de tesis, el Dr. Oscar Valdiviezo por todo el apoyo que siempre me brindó durante mis estudios de maestría y en la elaboración de este trabajo.

- Al Dr. Federico Sabina por sus orientaciones, consejos y comentarios siempre oportunos.
- Al maestro Carlos Gandarilla por compartir su conocimiento en la realización del modelo numérico autoconsistente y su disposición.
- Al Dr. Reinaldo Rodríguez por todo su apoyo y sus importantes sugerencias que me brindó desinteresadamente.
- A la Dra. Leticia Flores Márquez, por su disposición y paciencia para leer en detalle cada avance de este trabajo y darme sus oportunas sugerencias.
- Al Dr. Rubén Nicolás quien estaba en disposición de apoyarme siempre en todas mis dudas y por sus atinados consejos.
- A los miembros del jurado, Doctores: Raúl Valenzuela Wong, Leticia Flores Márquez, Enrique Coconi Morales, Federico Sabina Ciscar y mi asesor Oscar Valdiviezo Mijangos, por su tiempo, sus invaluable comentarios y sugerencias que hicieron que este trabajo tomara su forma final.

A todos ellos mi gratitud.

También quiero agradecer al CoNaCyT por la beca que me otorgó para la realización de la maestría y el apoyo para realizar una estancia en Berkeley.

A mi alma mater la UNAM por todo lo que me ha dado, siempre estaré agradecido.

Quiero dedicar este trabajo a toda mi familia y especialmente:

A mi abuela Mary

A mis padres: Cristina y Luis

A mis hermanos: Juan Pablo y Marily

A mi novia Queilenin

Contenido

ABSTRACT	VI
RESUMEN.....	VII
INTRODUCCIÓN	VIII
JUSTIFICACIÓN	X
1 MÉTODO AUTOCONSISTENTE.....	1
1.1 APROXIMACIÓN AL PROBLEMA	3
2 MODELOS CONSTITUTIVOS	5
2.1 MODELO DE MEDIO EFECTIVO.....	5
2.2 EL PROBLEMA DE ESHELBY	9
2.3 INCLUSIÓN ELÁSTICA EQUIVALENTE	10
3 RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA.....	14
3.1 ECUACIÓN DE ONDA	14
3.2 EXPRESIÓN PARA UNA ONDA PLANA	14
4 EL PROBLEMA DE UN SOLO DISPERSOR	16
5 IMPLEMENTACIÓN AUTOCONSISTENTE.....	20
5.1 EL CASO DE ESFEROIDES ALINEADOS	21
6 RESULTADOS NUMÉRICOS CASO DINÁMICO	28
6.1 VALIDACIÓN DEL PROGRAMA.....	28
6.2 RESULTADOS DEL MODELO DINÁMICO APLICADO A ROCAS QUE PRESENTAN ANISOTROPÍA	31
6.3 RESULTADOS DEL MODELO DINÁMICO APLICADO A ROCAS QUE PRESENTAN ANISOTROPÍA CON RESULTADOS DIMENSIONALES Y APLICADO A BANDAS FRECUENCIA SÍSMICA, SÓNICA Y ULTRASÓNICA [Hz]	46
6.4 ECUACIÓN DE DISPERSIÓN	53
6.5 IDENTIFICACIÓN DEL POTENCIAL DE PRODUCCIÓN DE YACIMIENTOS NO CONVENCIONALES.....	55
7 RESULTADOS NUMÉRICOS CASO ESTÁTICO	58
7.1 APLICACIÓN DEL MODELO AUTOCONSISTENTE AL REGISTRO SÓNICO DEL POZO <i>CITIZEN GREEN</i>	77
8 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....	82
9 APÉNDICES	87
9.1 APÉNDICE A	87
9.2 APÉNDICE B	96

Índice de Figuras

Figura 1. Esquema de un material compuesto; modelo de formación contenido agua y aceite.	1
Figura 2. Resolución del problema de una inclusión sometida a la transformación representada por el tensor de Eshelby ϵ^T . Fuente:(González-Martínez, 2000).	9
Figura 3. Esquema de las operaciones de corte y soldadura necesarias para obtener el tensor de concentración, A_i . Fuente:(González-Martínez, 2000).....	11
Figura 4. Esferoides con diferente razón de aspecto $\delta < 1$, $\delta = 1$, $\delta > 1$	21
Figura 5. Velocidad de fase vs frecuencia normalizada; (1) muestra la figura 7 del artículo Sabina et al 2015, (2) Muestra los resultados obtenidos con el programa TIM	29
Figura 6. Atenuación vs frecuencia normalizada, (1) figura 8 (Sabina, et al., 2015), (2) Resultados obtenidos con el programa TIM.	29
Figura 7. Ilustración de los compuestos bajo estudio, (Sabina, et al., 2015).	30
Figura 8. Velocidad de fase vs atenuación; (1) figura 8 (Sabina, et al., 2015), (2) Resultados obtenidos del TIM.....	30
Figura 9. Atenuación vs frecuencia normalizada; (1) figura 8 (Sabina, et al., 2015), (2) resultados del TIM.	31
Figura 10. Velocidad y atenuación de onda P a través de un medio compuesto (Calcita, Arcilla, Cuarzo) y con diferentes fracciones volumétricas de fluido.	32
Figura 11. Velocidad y atenuación de onda SH a través del compuesto y diferentes fracciones de agua.	33
Figura 12. Velocidad y atenuación de onda SV a través del compuesto y diferentes fracciones de agua.	34
Figura 13. Esquema de incidencia del tren de onda sobre inclusiones con una razón de aspecto $\delta = 1$, esfera. 90° y 0° respectivamente	34
Figura 14. Esquema de incidencia del frente de onda sobre inclusiones con una razón de aspecto $\delta < 1$, disco. 90° y 0° respectivamente	35
Figura 15. Velocidad y atenuación de onda P con razón de aspecto $\delta = 0.5$, con incidencia axial y transversal.	35
Figura 16. Velocidad y atenuación de onda SH con razón de aspecto $\delta = 0.5$, con incidencia axial y transversal.	36
Figura 17. Velocidad y atenuación de onda SV con razón de aspecto $\delta = 0.5$, con incidencia axial y transversal.	37
Figura 18. Velocidad y atenuación de onda P con razón de aspecto $\delta = 0.2$, y con incidencia axial y transversal	38
Figura 19. Velocidad y atenuación de onda SH con razón de aspecto $\delta = 0.2$, y con incidencia axial y transversal	39
Figura 20. Velocidad y atenuación de onda SV con razón de aspecto $\delta = 0.2$, y con incidencia axial y transversal	39
Figura 21. Velocidad y atenuación de ondas P, SH y SV con razón de aspecto $\delta = 0.2$, ángulo de incidencia vertical y transversal con fracción volumétrica de agua de 4%.	41
Figura 22. Esquema de incidencia del frente de onda sobre inclusiones con una razón de aspecto $\delta > 1$, fibra delgada, a 90° y 0° respectivamente.	41
Figura 23. Velocidad y atenuación de onda P con razón de aspecto $\delta = 4$, y con incidencia axial - transversal y diferentes fracciones de agua.	42
Figura 24. Velocidad y atenuación de onda SH con razón de aspecto $\delta = 4$, y con incidencia axial - transversal y diferentes fracciones de agua.	42
Figura 25. Velocidad y atenuación de onda SV con razón de aspecto $\delta = 4$, y con incidencia axial - transversal y diferentes fracciones de agua.	43
Figura 26. Velocidad y atenuación de ondas P, SH y SV con razón de aspecto $\delta = 4$, ángulo de incidencia vertical y transversal con fracción volumétrica de agua de 10%.	44
Figura 27. Velocidad y atenuación de onda P a través de diferentes fluidos con razón de aspecto $\delta = 0.5$, y con incidencia axial - transversal, la fracción volumétrica de las inclusiones es constante de $\theta = 0.07$	45
Figura 28. Velocidad y atenuación de onda P con diversos radios de la inclusión y utilizados como factor de escalamiento la banda completa de frecuencias, matriz calcita + (15%) fluido.	47

Figura 29. Velocidad y atenuación de onda P con diversos radios de la inclusión y utilizados como factor de escalamiento la banda completa de frecuencias, matriz arcilla + (15%) fluido.....	47
Figura 30. Velocidad y atenuación de onda SV con diversos radios de la inclusión y utilizados como factor de escalamiento la banda completa de frecuencias, matriz calcita + (15%) fluido.	48
Figura 31. Velocidad y atenuación de onda SV con diversos radios de la inclusión y utilizados como factor de escalamiento la banda completa de frecuencias, matriz arcilla + (15%) fluido.....	48
Figura 32. Velocidad y atenuación de onda P a frecuencia sónica, con matriz de calcita e inclusiones de arcilla, cuarzo, y diferentes fluidos. Radio de inclusión constante 0.5 (mm).....	49
Figura 33. Velocidad y atenuación de onda SH a frecuencia sónica, con matriz de calcita e inclusiones de arcilla, cuarzo, y diferentes fluidos. Radio de inclusión constante 0.5 (mm).....	50
Figura 34. Velocidad y atenuación de onda P, con matriz de calcita e inclusiones de arcilla, cuarzo, y 6% de petróleo. Incidencia de onda a 0°, 45° y 90° respecto a la vertical en inclusiones con razones de aspecto $\delta=0.4$ y $\delta=3$. Cada tipo de inclusión se graficó en diferente frecuencia, sónica y ultrasónica.....	51
Figura 35. Velocidad y atenuación de onda P, con matriz de calcita e inclusiones de arcilla, cuarzo, y 8% de petróleo. A diferentes frecuencias dependientes del radio de la inclusión $\alpha= 0.005, 0.5$ y 50 (mm).	52
Figura 36. Razón de Poisson contra módulo de Young indicando las regiones dúctil y frágil. (Grieser & Bray, 2007).	57
Figura 37. Diagrama axial y transversal considerando inclusiones esféricas y con algunas fracciones de agua salada.	61
Figura 38. Graficas razón de Poisson contra la fracción volumétrica del agua para una razón de aspecto $\delta=1$	62
Figura 39. Graficas del módulo de Young contra la fracción volumétrica del agua para una razón de aspecto $\delta=1$..	62
Figura 40. Diagrama axial y transversal considerando inclusiones esféricas y con algunas fracciones de agua salada considerando la línea divisoria entre la región dúctil y la región frágil.	63
Figura 41. Diagrama ternario de minerales arcillosos: Illita, Clorita, Caolinita. Incluyendo las regiones frágil y dúctil	64
Figura 42. Diagrama axial y transversal considerando inclusiones esféricas y con algunas fracciones de agua incluyendo el área donde pueden situarse las propiedades arcillosas.....	65
Figura 43. Diagramas axial y transversal para una razón de aspecto $\delta=0.5$ y diferentes porcentajes de agua con sal.	65
Figura 44. Proceso de compactación para arcilla y arena. (Schön, 2011)	67
Figura 45. Graficas razón de Poisson contra la fracción volumétrica del agua para una razón de aspecto $\delta=0.5$	68
Figura 46. Graficas módulo de Young contra la fracción volumétrica del agua para una razón de aspecto $\delta=0.5$	68
Figura 47. Diagramas axial y transversal para una razón de aspecto $\delta=0.2$ y diferentes porcentajes de agua.....	69
Figura 48. Graficas del parámetro elástico, razón de Poisson respecto la fracción volumétrica del agua para una razón de aspecto $\delta=0.2$	70
Figura 49. Graficas del parámetro elástico, módulo de Young respecto la fracción volumétrica del agua para una razón de aspecto $\delta=0.2$	70
Figura 50. Diagramas axial y transversal para una razón de aspecto $\delta=2$ (fibra alargada) y diferentes porcentajes de agua con sal.	71
Figura 51. Graficas del parámetro elástico, razón de Poisson respecto la fracción volumétrica del agua para una razón de aspecto $\delta=2$	71
Figura 52. Graficas del parámetro elástico, módulo de Young respecto la fracción volumétrica del agua para una razón de aspecto $\delta=2$	72
Figura 53. Diagramas axial y transversal para una razón de aspecto $\delta=10$ microfractura y diferentes porcentajes de agua con sal.	72
Figura 54. Graficas del parámetro elástico, razón de Poisson respecto la fracción volumétrica del agua para una razón de aspecto $\delta=10$	73

Figura 55. Graficas del parámetro elástico, módulo de Young respecto la fracción volumétrica del agua para una razón de aspecto $\delta=10$	73
Figura 56.. Diagramas axial y transversal que muestra las trayectorias de los parámetros elásticos del modelo isótropo hacia el modelo anisótropo para $\delta>>1$ y $\delta<<1$, caso de la fibra alargada y disco plano respectivamente.	74
Figura 57. Graficas razón de Poisson contra la fracción volumétrica del agua que indica el comportamiento del parámetro elástico cuando la razón de aspecto es $\delta=0.2$ y $\delta=5$	75
Figura 58.. Graficas módulo de Young contra la fracción volumétrica del agua que indica el comportamiento del parámetro elástico cuando la razón de aspecto es $\delta=0.2$ y $\delta=5$	75
Figura 59. Esquema de las formas de las inclusiones en función de su razón de aspecto	76
Figura 60. Gráfica que representa el comportamiento de la razón de poisson y el Módulo de Young respectivamente cuando la razón de aspecto cambia de $\delta<1$ a $\delta>1$. Matriz de calcita con 12% de fluido.	76
Figura 61. Gráfica que representa el comportamiento de la razón de poisson y el Módulo de Young respectivamente cuando la razón de aspecto cambia de $\delta<1$ a $\delta>1$. Matriz de Arcilla con 12% de fluido.	77
Figura 62. Parámetros elásticos medidos a partir de las velocidades de onda en la formación que atraviesa el pozo Citizen Green.....	79
Figura 63. Diagrama axial y transversal considerando inclusiones esféricas y con algunas fracciones de agua incluyendo el área donde pueden situarse las propiedades arcillosas.	80
Figura 64. Diagrama con los principales minerales arcillosos y la posición de los parámetros elásticos de las rocas del yacimiento.	80
Figura 65. Diagramas de la razón de Poisson y el módulo de Young respecto al incremento de la fracción volumétrica del fluido para cada mineral arcilloso: Clorita, Illita, Caolinita	81
Figura 66. Diagrama quinario axial y transversal para una razón de aspecto $\delta=1$ y diferentes porcentajes de agua e incluyendo el área que envuelven los minerales arcillosos.	96
Figura 67. Graficas del parámetro elástico de cinco materiales, razón de Poisson respecto la fracción volumétrica del agua para una razón de aspecto $\delta=1$	97
Figura 68. Graficas del parámetro elástico de cinco materiales, módulo de Young respecto la fracción volumétrica del agua para una razón de aspecto $\delta=1$	97
Figura 69. Diagrama quinario axial y transversal para una razón de aspecto $\delta=0.5$ y diferentes porcentajes de agua.	98
Figura 70. Graficas del parámetro elástico de cinco materiales, razón de Poisson respecto la fracción volumétrica del agua para una razón de aspecto $\delta=0.5$	98
Figura 71. Graficas del parámetro elástico de cinco materiales, módulo de Young respecto la fracción volumétrica del agua para una razón de aspecto $\delta=0.5$	99
Figura 72. Diagrama quinario axial y transversal para una razón de aspecto $\delta=2$ y diferentes porcentajes de agua	100
Figura 73. Graficas del parámetro elástico de cinco materiales, razón de Poisson respecto la fracción volumétrica del agua para una razón de aspecto $\delta=2$	100
Figura 74. Graficas del parámetro elástico de cinco materiales, módulo de Young respecto la fracción volumétrica del agua para una razón de aspecto $\delta=2$	101
Figura 75. Gráficas de razón de Poisson y módulo de Young de la calcita contra la fracción volumétrica de agua, para una razón de aspecto $\delta=1$	101
Figura 76. Gráficas de razón de Poisson y módulo de Young del cuarzo contra la fracción volumétrica de agua, para una razón de aspecto $\delta=1$	102
Figura 77. Gráficas de razón de Poisson y módulo de Young de la arcilla contra la fracción volumétrica de agua, para una razón de aspecto $\delta=1$	102

ABSTRACT

The objective of this study is to determine the effective mechanical properties of porous, fractured, heterogeneous and anisotropic media by means of a self-consistent model. From these properties are obtained patterns of dispersion and attenuation in these composite media.

A self-consistent numerical model was implemented in *Matlab* to predict the effective mechanical properties of synthetic materials in order to compare the results with those published in Sabina, et al., (2015). This same model was implemented to determine the effective properties in typical rocks of hydrocarbon deposits, which by their very nature are heterogeneous and anisotropic media. To this end were used elastic properties of minerals given in (Mavko, Mukerji, & Dvorkin, 2009), mainly calcite, clay and quartz, in addition the model considers rocks saturated of fluid such as water, oil or gas.

Were obtained and analyzed patterns of dispersion and attenuation of waves that propagate in this type of rocks to P-wave, SH-wave and SV-wave, for a wide range of frequencies including bands seismic, sonic, and ultrasonic which is useful to reconcile the measurements of elastic parameters at different frequencies.

From the prediction of effective properties, new ternary diagrams of rock physics were made in terms of Young module, and Poisson ratio, with which it is very easy to locate the geomechanical properties of rocks.

Finally shows an example of application of the self-consistent model for the mineralogical characterization of a formation, by means of the slowness of waves that cross the rocks. This information is from a sonic log.

RESUMEN

El objetivo del presente trabajo es determinar las propiedades mecánicas efectivas de medios porosos, fracturados, heterogéneos y anisotrópicos por medio de un modelo autoconsistente. A partir de estas propiedades se obtienen patrones de dispersión y atenuación de ondas elásticas cuando se propagan en estos medios compuestos.

Se implementó un modelo numérico autoconsistente en *Matlab* para predecir las propiedades mecánicas efectivas de materiales sintéticos con el fin de comparar los resultados con aquellos publicados en (Sabina, et al., 2015). Este mismo modelo se implementó para determinar las propiedades efectivas en rocas típicas de yacimientos de hidrocarburos, que por su misma naturaleza son medios heterogéneos y anisótropos. Para ello se usaron propiedades elásticas de minerales dadas en (Mavko, Mukerji, & Dvorkin, 2009), principalmente calcita, arcilla y cuarzo, además el modelo considera rocas saturadas de fluido como agua, aceite o gas.

Se obtuvieron y analizaron patrones de dispersión y atenuación de ondas que se propagan en este tipo de rocas para onda P, onda SV y SH para un amplio rango de frecuencias incluyendo bandas sísmicas, sónicas y ultrasónicas lo que resulta útil para conciliar las mediciones de parámetros elásticos a diferentes frecuencias.

A partir de la predicción de propiedades efectivas se construyeron nuevos diagramas ternarios de física de rocas en términos de módulo de Young y razón de Poisson, con los que es muy fácil ubicar las propiedades geomecánicas de rocas.

Finalmente se muestra un ejemplo de aplicación del modelo autoconsistente para la caracterización mineralógica de una formación, por medio de las lentitudes de ondas que atraviesan dichas rocas. Dicha información es proveniente de un registro sísmico.

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo tiene como finalidad determinar las propiedades efectivas de medios compuestos y anisótropos, por medio de un esquema autoconsistente para el análisis de propagación de ondas en estos medios. El trabajo inicia con el esquema autoconsistente implementado por (Sabina & Willis, 1988) para el análisis de propagación de ondas en una variedad de materiales sintéticos con microestructuras. El esquema expresa los principales campos de esfuerzo y deformación para el caso estático o bien el esfuerzo, deformación, velocidad y momento de densidad para el caso dinámico, en términos de sus principales valores sobre una sola inclusión. y analizar si este modelo sirve como herramienta para la interpretación de registros acústicos.

La simulación de ondas es un campo teórico de investigación que comenzó hace casi cuatro décadas, en estrecha relación con el desarrollo de la tecnología informática y algoritmos numéricos para la solución de ecuaciones diferenciales e integrales de varias variables. Los algoritmos de solución de problemas usando computadoras son una herramienta importante que proporciona una percepción de las propagaciones de onda para una variedad de aplicaciones.

El sonido es una forma de energía radiante de naturaleza puramente mecánica, cuya fuerza se transmite desde la fuente de sonido como un movimiento molecular del medio. Cada molécula transfiere su energía a la siguiente molécula antes de regresar a su posición original. La velocidad de propagación de las ondas compresionales y de corte depende de las propiedades mecánicas elásticas de la roca, que se ven afectadas por otros parámetros como presión, porosidad, contenido y tipo de fluido, mineralogía, presencia de fracturas y anisotropía¹, es decir, que las propiedades geomecánicas de las rocas dependen de la dirección en que son examinadas; existen varios modelos que predicen la dispersión y atenuación de las ondas en un medio anisótropo debido a micro fracturas (Sabina & Willis,

1 Anisotropía: Variación predecible de una propiedad de un material con la dirección en la que se mide, lo cual puede producirse en todas las escalas. Para un cristal de un mineral, la variación de las propiedades físicas observada en diferentes direcciones es la anisotropía. En las rocas, la variación de la velocidad sísmica medida en sentido paralelo o perpendicular a las superficies de estratificación es una forma de anisotropía. Observada a menudo donde los minerales laminares, tales como las micas y las arcillas, se alinean en forma paralela a la estratificación depositacional a medida que se compactan los sedimentos, la anisotropía es común en las lutitas. (glosario Schlumberger)

1996), (Mavko, Mukerji, & Dvorkin, 2009). Muchos esfuerzos se han enfocado en el desarrollo de metodologías para asociar la saturación de fluido y datos de mineralogía dentro del análisis de las respuestas sísmicas de la roca en banda completa de frecuencias (Valdiviezo-Mijangos & Nicolás-López, 2014).

El trabajo está estructurado en ocho capítulos, en los primeros cuatro capítulos se describe el planteamiento teórico del método autoconsistente y se desarrollan las ecuaciones (Sabina, Smyshlyayev, & Willis, 1993). El capítulo cinco muestra la implementación numérica de las ecuaciones autoconsistentes para ser resueltas por medio de aproximaciones numéricas.

El capítulo seis muestra los resultados del caso dinámico del modelo autoconsistente, en este, se comparan los resultados numéricos con resultados del artículo (Sabina, et al., 2015), se muestran resultados de la aplicación del modelo a rocas por medio de graficas de velocidades y atenuaciones de ondas contra la frecuencia. Se analizan estas curvas cuando los parámetros son adimensionales y dimensionales.

En el capítulo siete se presenta los resultados del caso estático, en el cual se observan nuevos diagramas ternarios de física de rocas basados en arcilla, cuarzo y calcita que se utilizan para describir la variación de litofacies² en yacimientos no convencionales³, (Valdiviezo-Mijangos & Nicolás-López, 2014), con la implementación de que además de obtener diagramas para medios isótropos, también se obtuvieron diagramas para medios anisótropos, en donde existen dos razones de Poisson y dos módulos de Young, uno axial y otro transversal al plano de laminación. Se analiza como estos diagramas pueden contribuir a la interpretación de registros acústicos, también se muestra un ejemplo de aplicación del modelo a datos sísmicos tomados en un pozo prospecto para inyección de CO₂ en California E.U. Finalmente en el capítulo ocho se dan conclusiones parciales y generales del modelo autoconsistente y su utilidad en la interpretación petrofísica de yacimientos petroleros.

2 Litofacies: Una subdivisión mapeable de una unidad estratigráfica, que puede diferenciarse por sus facies o su litología-la textura, la mineralogía, la granulometría y el ambiente depositacional que la generó. (glosario Schlumberger)

3 Yacimientos no convencionales: Término amplio para el petróleo y el gas natural producido por medios que no cumplen los requisitos para producción convencional. Lo que se ha calificado como "no convencional" en un momento particular es una función compleja de las características de los recursos, las tecnologías disponibles de exploración y producción, el entorno económico, y la escala, la frecuencia y la duración de la producción del recurso. (glosario Schlumberger)

JUSTIFICACIÓN

La importancia que tiene la interpretación de la información que proporcionan los registros geofísicos es tal, que ésta se utiliza para la toma de decisiones en prácticamente en todas las operaciones relacionadas con la exploración y explotación de hidrocarburos, además permite hacer una evaluación del potencial petrolero de un país. En el mundo del petróleo no pareciera que la importancia de los registros es de esa magnitud, pero así es (Ramos-Rodríguez, et al., 2008).

Un registro geofísico representa alguna propiedad física o química del sistema roca-fluido como: la resistencia al paso de corriente, radiactividad natural, transmisión de ondas acústicas, respuesta de neutrones por efecto del contenido de hidrógeno, temperatura, contraste de salinidades entre fluidos etc. Esta información debe ser interpretada por medio de ecuaciones y modelos con el fin de obtener los parámetros petrofísicos deseados como porosidad, permeabilidad, litología, correlación de límites entre capas, índice de saturación de fluido, etc.

Con ayuda de los modelos matemáticos es posible traducir información indirecta de los registros, en información que es relevante en operaciones de exploración, perforación, terminación de pozos y producción de hidrocarburos entre otras cosas. Por esta razón se aplicó un modelo autoconsistente cuyo objetivo es la obtención de propiedades mecánicas efectivas de rocas, que a su vez son útiles para la interpretación de parámetros petrofísicos como litología, porosidad, contenido de fluido, anisotropía, fragilidad. Y que además abre nuevas oportunidades de investigación dirigida a encontrar más aplicaciones, tales como inversión sísmica, delimitación de yacimientos no convencionales, e identificación de zonas con potencial para fracturamiento hidráulico.

1 Método Autoconsistente

La caracterización de materiales compuestos con propiedades predeterminadas requiere desarrollar modelos de comportamiento mecánico que permitan conocer la relación entre la microestructura del material y su comportamiento macroscópico, (Sabina & Willis, 1988) introdujeron un esquema de tipo autoconsistente para el análisis de ondas en un medio compuesto, una fase continua llamada matriz con inclusiones esferoidales, fase dispersa. El esquema expresa los campos de tensión y deformación para el caso estático y la tensión, deformación, velocidad y momento de densidad para el caso dinámico en un compuesto, en función de sus valores promedio sobre una sola inclusión y estos son encontrados resolviendo el problema para una sola inclusión y asumiendo que el medio de referencia (matriz) es homogéneo⁴ y tenga las propiedades del compuesto en cuestión (Sabina, Smyshlyaev, & Willis, 1993).

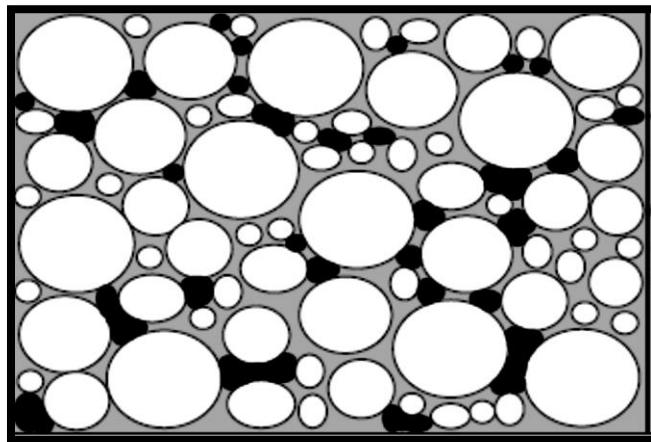


Figura 1. Esquema de un material compuesto; modelo de formación contenido agua y aceite.

El presente trabajo está basado en el modelo (Sabina, et al., 2015) que fue aplicado a materiales compuestos, con una matriz de resina epoxi e inclusiones de Al 6061 (aleación de aluminio endurecido que contiene como principales elementos aluminio, magnesio y silicio) y SiC (carburo de silicio), sin embargo, en esta tesis fue aplicado a rocas heterogéneas y anisótropas.

⁴ Homogéneo: Que posee la cualidad de uniformidad. Si las irregularidades se distribuyen en forma uniforme en un material, el material es homogéneo. (glosario Schlumberger)

Los métodos autoconsistentes dan solución a muchos problemas de física que no poseen soluciones exactas, para obtener soluciones aproximadas al introducir de manera heurística simplificaciones basadas en ciertas hipótesis físicamente bien fundamentadas. Por tanto, el área de validez de estas soluciones aproximadas las determina las comparaciones con datos experimentales. Dicha simplificación puede llevarse a cabo mediante el cambio de las propiedades del medio que rodea cada partícula, o por el cambio del campo que actúa sobre ésta. En la actualidad existen varios trabajos en donde son aplicadas las modificaciones de los esquemas autoconsistentes a problemas estáticos y de ondas en la física o la mecánica de los medios continuos homogéneos y no homogéneos, entre todos estos métodos destacan principalmente dos: el *Método de Campo Efectivo* (MCE) y el *Método de Medio Efectivo* (MME). Estos métodos están basados en suposiciones diferentes y en general dan diferentes resultados cuando son aplicados. Ambos se basan en dos tipos de hipótesis:

- Reducir el problema de muchas partículas aleatoriamente distribuidas a una sola partícula.
- Una condición autoconsistente [II](#).

Se utilizó el *Método de Medio Efectivo*. El MME incluye aproximaciones unificadas por una hipótesis común: Para la construcción de un campo interno dentro de cualquier inclusión en un material compuesto, se asume que el medio heterogéneo fuera de dicha inclusión puede ser reemplazado por uno homogéneo que posee las propiedades efectivas del compuesto. El MME, se basa en las siguientes hipótesis (Gandarilla-Pérez, 2013):

- I. Cada inclusión en el medio se comporta como si estuviese aislada, dentro de un medio homogéneo con las propiedades efectivas del compuesto.
- II. La onda principal en el medio heterogéneo (la partícula) coincide con la que se propaga en el medio homogéneo (la matriz).

La primera hipótesis reduce el problema de la descripción de las interacciones entre varias inclusiones del compuesto, al problema de una sola partícula aislada, la segunda hipótesis es la condición de autoconsistencia. Además, se consideró una particularidad en la primera hipótesis del MME con el fin de que el modelo diera buenos resultados cuando la fracción volumétrica de la inclusión fuera mayor a 0.3, y es que la partícula está a su vez compuesta

por una base con las propiedades de la inclusión, rodeada por una matriz concéntrica con las propiedades efectivas.

- I. Cada partícula (o parte no homogénea) es un compuesto embebido en una matriz con las propiedades efectivas.

La segunda hipótesis es la misma que se mencionó anteriormente (II). Con esto fue posible extender la aplicación del método para cuando la inclusión tiene una fracción volumétrica mayor al 0.3.

Cabe destacar que las condiciones autoconsistentes son adaptables y aplicables a varios tipos de problemas de ondas en medios no homogéneos

1.1 Aproximación al problema

El objeto de estudio es un sólido con propiedades elásticas llamada matriz (fase continua) en la cual se encuentran embebidas n tipos de inclusiones con diferentes propiedades elásticas y distribuidas aleatoriamente (fase dispersa). Cada tipo de inclusión r tienen la misma forma, tamaño y orientación. El compuesto ocupa un dominio Ω suficientemente grande para contener la cantidad de inclusiones referidas. En las ecuaciones tenemos las constantes elásticas relacionadas con las ecuaciones constitutivas.

$$\sigma_{ij} = L_{ijks} \varepsilon_{ks}, \quad (1.1)$$

$$P_i = \rho_{ij} v_{ij}, \quad (1.2)$$

donde los vectores σ_{ij} y ε_{ks} representan la tensión y la deformación respectivamente. La Ec. (1.1) es la representación de la Ley de Hook en donde la deformación esta multiplicada por la matriz de constantes elásticas L_{ijks} . De igual forma P es la densidad de momento que está relacionada con la velocidad v multiplicada con la densidad ρ . (Gandarilla-Pérez, 2013)

La deformación se relaciona con el desplazamiento a partir de la relación de Cauchy.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (1.3)$$

Entendemos por notación tensorial (coma) a la derivada parcial con respecto a la componente

$$\text{indicada: } u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial u_j}.$$

En la Ec. (1.1) la matriz de constantes elásticas es una matriz de 36 constantes elásticas independientes, sin embargo, para este trabajo se considera que el material tiene un plano isotrópico (plano XY), es decir, que tiene un eje de simetría transversal (eje Z) lo que convierte la matriz en una matriz simétrica y varios de sus elementos se anulan, quedando una matriz con únicamente 5 constantes elásticas. Esta matriz representa el caso Transversalmente Isótropo, TI, o VTI por sus siglas en inglés (transversely isotropic with vertical symmetry axis). La Ec. (1.1) entonces puedes reescribirse de forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & 0 & 0 & 0 \\ L_{12} & L_{11} & L_{13} & 0 & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{31} & L_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}, \quad L_{66} = \frac{1}{2}(L_{11} - L_{12}), \quad (1.4)$$

así mismo el tensor de momento al considerar un material transversalmente isotrópico queda escrito como:

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad P = \rho \cdot v. \quad (1.5)$$

2 Modelos constitutivos

2.1 Modelo de Medio Efectivo

La mayor parte de los modelos de campo efectivo y medio efectivo para materiales heterogéneos están basados en el análisis de (Eshelby, 1957) sobre el comportamiento de una inclusión elipsoidal en un medio elástico, que se explica en el subtema 2.2.

Para el modelo de medio efectivo, se define como volumen característico V de un material polifásico, a la mínima fracción de éste cuyas propiedades son iguales a las de todo el material, es decir, el volumen mínimo tal que sus propiedades sean representativas del volumen total. Dichas propiedades se denominan *efectivas*. De acuerdo con esta definición, el sistema polifásico es un material heterogéneo cuyas propiedades se pueden considerar estadísticamente homogéneas cuando se analiza un volumen suficientemente grande (González-Martínez, 2000). El volumen característico está dado por una longitud característica que es sensiblemente mayor que el tamaño de la inclusión o heterogeneidad típica. Dicho de otra forma, las propiedades efectivas son el promedio de las propiedades de todos los materiales según la fracción volumétrica que ocupan en el compuesto.

Dentro del volumen característico coexisten $N+1$ fases homogéneas (matriz + N inclusiones) de volumen V_r ($r=1, \dots, N+1$) que se superponen aleatoriamente distribuidas. Cada inclusión de tipo r tiene la misma forma, tamaño y orientación. Consideramos el tensor de módulos elásticos de la matriz como L_{N+1} y la densidad de masa de la matriz como ρ_{N+1} . Una inclusión de tipo r tiene un tensor de módulos elásticos L_r y densidad de masa ρ_r . Estas inclusiones ocupan un dominio $x'+\Omega_r$, donde Ω_r contiene al origen y x' se refiere al centro de la inclusión en cuestión. El campo dentro del compuesto satisface la ecuación de movimiento.

$$\operatorname{div} \sigma = \dot{p} \quad (2.1)$$

donde la tensión σ y densidad de momento p están relacionados con la deformación ε y la velocidad v a través de las relaciones constitutivas (1.1) y (1.2).

$$\sigma = L \varepsilon, \quad p = \rho v. \quad (2.2)$$

Con deformación ε , (1.3) y velocidad v relacionados con el desplazamiento u por:

$$v_i = \dot{u}_i. \quad (2.3)$$

Los modelos de campo medio determinan las propiedades efectivas suponiendo que la tensión y la deformación en cada fase están adecuadamente representadas por sus valores medios, $\langle \sigma \rangle$ y $\langle \varepsilon \rangle$, al igual que la densidad de momento $\langle p \rangle$ y la velocidad $\langle v \rangle$.

Definimos como promedio de estos campos a la integral:

$$\langle \cdot \rangle = \int_V (\cdot) dV$$

La ecuación de movimiento (2.1) es lineal, por lo que el promedio resulta:

$$\text{div} \langle \sigma \rangle = \langle \dot{p} \rangle \quad (2.4)$$

Las tensiones y deformaciones efectivas se obtienen integrando las tensiones y deformaciones medias en cada una de las fases dentro del volumen característico. Esta operación se denomina homogenización y se expresa como (Sabina & Willis, 1988), (González-Martínez, 2000).

$$\begin{aligned} \langle \sigma \rangle &= \sum_{r=1}^{N+1} \theta_r \langle \sigma \rangle_r, \quad \langle \varepsilon \rangle = \sum_{r=1}^{N+1} \theta_r \langle \varepsilon \rangle_r, \\ \langle p \rangle &= \sum_{r=1}^{N+1} \theta_r \langle p \rangle_r, \quad \langle \rho \rangle = \sum_{r=1}^{N+1} \theta_r \langle \rho \rangle_r, \end{aligned} \quad (2.5)$$

Donde θ_r es la fracción volumétrica de la fase r y satisface:

$$\sum_{r=1}^{N+1} \theta_r = 1 \quad (2.6)$$

La concentración es uniforme e igual a la fracción volumen, pues asumimos que el material es estadísticamente uniforme.

Con el operador $\langle \cdot \rangle_r$ estamos indicando el valor de la integral:

$$\langle f \rangle_r(x, t) = \frac{1}{|\Omega_r|} \int_{U_r} f(x, t; x') dx', \quad U_r = \{x' : x - x' \in \Omega_r\}. \quad (2.7)$$

Se puede obtener el promedio por medio de las relaciones (1.1) y (1.2)

$$\langle \sigma \rangle = \sum_{r=1}^{N+1} \theta_r \langle \sigma \rangle_r = \sum_{r=1}^{N+1} \theta_r L_r \langle \varepsilon \rangle_r, \quad (2.8)$$

$$\langle p \rangle = \sum_{r=1}^{N+1} \theta_r \langle p \rangle_r = \sum_{r=1}^{N+1} \theta_r \rho_r \langle v \rangle_r. \quad (2.9)$$

Recordemos que el índice $N+1$ se refiere únicamente a las propiedades de la matriz, mientras que el índice r hace referencia a las propiedades de las inclusiones. Si extraemos el término $N+1$ que se refiere a las propiedades de la matriz del resto de la sumatoria.

$$\langle \varepsilon \rangle = \underbrace{\theta_{N+1} \langle \varepsilon \rangle_{N+1}}_{\text{matriz}} + \underbrace{\sum_{r=1}^N \theta_r \langle \varepsilon \rangle_r}_{N \text{ inclusiones}}, \quad (2.10)$$

$$\langle v \rangle = \underbrace{\theta_{N+1} \langle v \rangle_{N+1}}_{\text{matriz}} + \underbrace{\sum_{r=1}^N \theta_r \langle v \rangle_r}_{N \text{ inclusiones}}, \quad (2.11)$$

$$\langle \sigma \rangle = \underbrace{\theta_{N+1} L_{N+1} \langle \varepsilon \rangle_{N+1}}_{\text{Matriz}} + \underbrace{\sum_{r=1}^N \theta_r L_r \langle \varepsilon \rangle_r}_{N \text{ inclusiones}}, \quad (2.12)$$

$$\langle p \rangle = \underbrace{\theta_{N+1} \rho_{N+1} \langle v \rangle_{N+1}}_{\text{Matriz}} + \underbrace{\sum_{r=1}^N \theta_r \rho_r \langle v \rangle_r}_{N \text{ inclusiones}}. \quad (2.13)$$

Multiplicando las ecuaciones (2.10) y (2.11) por los términos L_{N+1} y ρ_{N+1} respectivamente y extraemos el resultado de las ecuaciones (2.12) y (2.13)

$$\langle \sigma \rangle = L_{N+1} \langle \varepsilon \rangle + \sum_{r=1}^N \theta_r (L_r - L_{N+1}) \langle \varepsilon \rangle_r, \quad (2.14)$$

$$\langle p \rangle = \rho_{N+1} \langle v \rangle + \sum_{r=1}^N \theta_r (\rho_r - \rho_{N+1}) \langle v \rangle_r,$$

de la misma forma que las ecuaciones (2.5), las relaciones de localización o concentración permiten conocer las tensiones y deformaciones en la fase r a partir de las tensiones y deformaciones efectivas, matemáticamente se expresan:

$$\langle \varepsilon \rangle_r = A_r \langle \varepsilon \rangle, \quad \langle \sigma \rangle_r = B_r \langle \sigma \rangle, \quad (2.15)$$

donde A_r es el tensor de concentración global de deformación mecánica y B_r el tensor de concentración global de tensión mecánica. Es inmediato demostrar que los tensores mecánicos de concentración global A_r y B_r deben satisfacer las siguientes relaciones

$$\sum_{r=1}^{N+1} \theta_r A_r = I, \quad \sum_{r=1}^{N+1} \theta_r B_r = I, \quad (2.16)$$

de forma similar podemos encontrar tensores de concentración global de velocidad de ondas, y tensor de concentración de densidad de momento: $\langle v \rangle_r = C_r \langle v \rangle$, $\langle p \rangle_r = D_r \langle p \rangle$.

Nos concentraremos en determinar los tensores de concentración de deformación y concentración de velocidad debido a que el tensor de concentración de tensión y de densidad de momento se pueden determinar a partir de los primeros como se demuestra en las Ecs. (2.8) y (2.9) respetivamente.

$$\langle \varepsilon \rangle_r = A_r \langle \varepsilon \rangle, \quad \langle v \rangle_r = C_r \langle v \rangle. \quad (2.17)$$

Las propiedades elásticas efectivas quedan entonces determinadas en el momento en el que se conocen los tensores de concentración A_r y C_r , si sustituimos las Ecs. (2.15) en las Ecs. (2.14).

$$\begin{aligned} \langle \sigma \rangle &= L_{N+1} \langle \varepsilon \rangle + \sum_{r=1}^N \theta_r (L_r - L_{N+1}) A_r \langle \varepsilon \rangle, \\ \langle p \rangle &= \rho_{N+1} \langle v \rangle + \sum_{r=1}^N \theta_r (\rho_r - \rho_{N+1}) C_r \langle v \rangle. \end{aligned} \quad (2.18)$$

El problema entonces se reduce a estimar los tensores de concentración global, hallar dichos tensores considerando el compuesto en su totalidad requeriría de un total conocimiento de este, es decir, la ubicación espacial de cada inclusión en la matriz, su tamaño, su forma etc., lo cual no es absolutamente posible. En su lugar, consideramos el problema para una sola inclusión de tipo r centrada en x' , embebida en un medio de referencia cuya matriz de cofactores denotaremos por L_0 , y por ρ_0 a su densidad de masa. El campo incidente en la inclusión será la onda u_0 y se construye seleccionando L_0 y ρ_0 de forma que el medio de referencia pueda soportar la onda principal $\langle u \rangle$ y u_0 pueda ser seleccionado igual a $\langle u \rangle$.

2.2 El problema de Eshelby

La mayor parte de los modelos de campo medio para materiales heterogéneos están basados en el análisis de (Eshelby, 1957) sobre el comportamiento de una inclusión elipsoidal en un medio elástico. Considérese un sólido homogéneo con propiedades elásticas representadas por el tensor L_0 . En el interior del sólido existe una región Ω que cambia de forma y genera tensiones en la propia región y en el resto del sólido. Este campo de tensiones es complicado, sin embargo, es posible encontrar una solución analítica cuando la región que sufre la transformación tiene forma elipsoidal y su deformación es uniforme. Eshelby ilustró el problema mediante un conjunto de operaciones de corte y soldadura (González-Martínez, 2000).

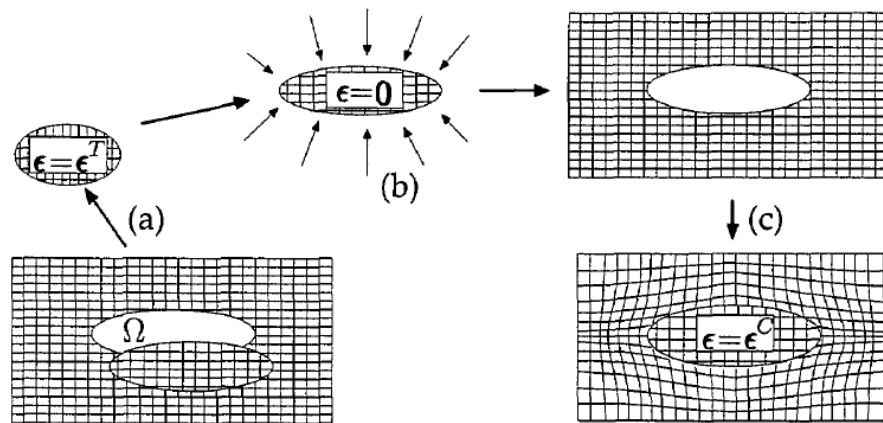


Figura 2. Resolución del problema de una inclusión sometida a la transformación representada por el tensor de Eshelby ϵ^T . Fuente:(González-Martínez, 2000).

- Primero se extrae la inclusión del sólido y se deforma libremente una magnitud uniforme representada por el tensor de deformación ϵ^T . La tensión en la inclusión y en el resto del sólido es nula.
- La inclusión no puede ser introducida directamente en su posición inicial sin antes aplicarle la tensión necesaria para regresarla a su forma original.
- Una vez que se encuentra inserta en su posición inicial, con su forma inicial, se retiran las tensiones hasta alcanzar una deformación de equilibrio en la inclusión ϵ^{eq} .

Eshelby demostró que la deformación de equilibrio es uniforme y está relacionada con la deformación inicial según:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{eq} = \boldsymbol{S} \boldsymbol{\varepsilon}^T, \quad (2.19)$$

donde \boldsymbol{S} es el tensor de Eshelby. Las tensiones en la inclusión se pueden determinar directamente aplicando la ley de Hooke puesto que la deformación es uniforme.

$$\boldsymbol{\sigma}_r = \boldsymbol{L}_0 (\boldsymbol{\varepsilon}^{eq} - \boldsymbol{\varepsilon}^T) = \boldsymbol{L}_0 (\boldsymbol{S}_i - \boldsymbol{I}) \boldsymbol{\varepsilon}^T. \quad (2.20)$$

El tensor de Eshelby sólo depende de las propiedades elásticas de la matriz y del cociente δ entre los ejes mayor y menor del elipsoide. Existen expresiones analíticas para los casos de una fibra indefinida ($\delta \rightarrow \infty$), esferas ($\delta=1$) y discos circulares ($\delta \rightarrow 0$) embebidos en una matriz isótropa; existen además expresiones analíticas cuando la matriz es transversalmente isótropa (Laws & McLaughlin, 1979). El tensor de Eshelby se puede evaluar de forma numérica (González-Martínez, 2000).

2.3 Inclusión elástica equivalente

Para Eshelby hay dos formas de analizar la parte dispersa de un compuesto, como inhomogeneidades e inclusiones, la inhomogeneidad se presenta cuando el tensor de módulos elásticos de la fase dispersa es diferente al tensor de módulos elásticos de la matriz, mientras que la inclusión se refiere cuando el refuerzo y la matriz presentan el mismo tensor de módulos elásticos y contiene auto-deformaciones, con esto se simplifica el problema suponiendo que matriz e inclusión tienen las mismas propiedades (*inclusión equivalente*). Eshelby se refirió a las auto-deformaciones como transformaciones de deformaciones libres de tensiones, (Eshelby, 1957).

El tensor de concentración global de deformaciones para una inhomogeneidad embebida en una matriz con diferentes propiedades elásticas se puede abordar utilizando el concepto de *inclusión equivalente*, en este esquema se transforma a la inhomogeneidad en una inclusión producto de la auto-deformación, es decir, si el conjunto está sometido a una deformación efectiva $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$, la deformación en la inhomogeneidad se puede calcular sustituyendo ésta por

una inclusión ficticia que tiene las mismas propiedades elásticas del medio sobre la que se ha impuesto la deformación inicial ε^T .

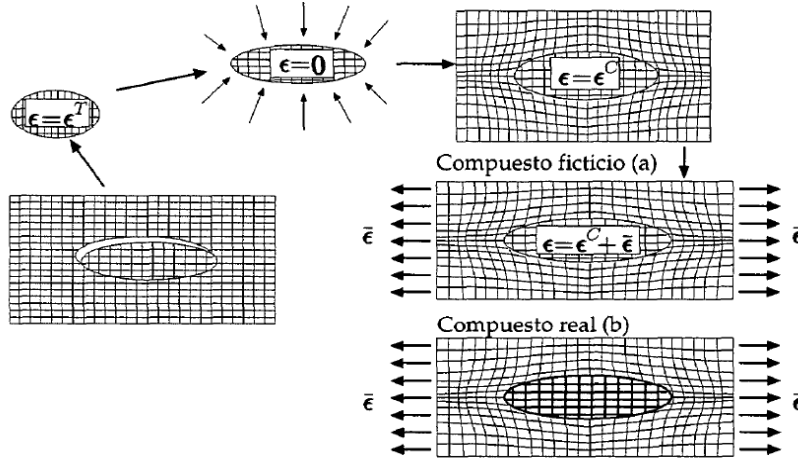


Figura 3. Esquema de las operaciones de corte y soldadura necesarias para obtener el tensor de concentración, A_i . Fuente:(González-Martínez, 2000).

Esta deformación se calcula imponiendo que los campos de tensión y deformación en ambas inclusiones (ficticia y real) sean idénticos. De acuerdo con la figura (anterior), la deformación y la tensión en la inclusión ficticia vienen expresadas por.

$$\varepsilon_i^{fic} = \varepsilon^{eq} + \langle \varepsilon \rangle, \quad \sigma_i^{fic} = L_0 \left(\varepsilon^{eq} + \langle \varepsilon \rangle - \varepsilon^T \right) \quad (2.21)$$

La deformación de la inclusión real tiene que ser igual a la de la inclusión ficticia, y la tensión en la inclusión real será entonces:

$$\varepsilon_i^{real} = \varepsilon^{eq} + \langle \varepsilon \rangle, \quad \sigma_i^{real} = L_i \left(\varepsilon^{eq} + \langle \varepsilon \rangle \right) \quad (2.22)$$

En donde L_i es el correspondiente tensor de rigidez. La deformación impuesta ε^T que es necesaria imponer para que la deformación en ambas inclusiones (ficticia y real) sean idénticas, se obtiene igualando las tensiones obtenidas en las Ecs. (2.21) y (2.22) . Entonces.

$$\begin{aligned} L_i \left(\varepsilon^{eq} + \langle \varepsilon \rangle \right) &= L_0 \left(\varepsilon^{eq} + \langle \varepsilon \rangle - \varepsilon^T \right) \\ L_i \varepsilon^{eq} + L_i \langle \varepsilon \rangle &= L_0 \varepsilon^{eq} + L_0 \langle \varepsilon \rangle - L_0 \varepsilon^T \\ L_i \varepsilon^{eq} + L_i \langle \varepsilon \rangle - \left(L_0 \varepsilon^{eq} + L_0 \langle \varepsilon \rangle \right) &= -L_0 \varepsilon^T \\ \left(L_i - L_0 \right) \varepsilon^{eq} + \left(L_i - L_0 \right) \langle \varepsilon \rangle &= -L_0 \varepsilon^T \end{aligned}$$

Sustituimos \mathcal{E}^{eq} de la Ec. (2.19):

$$\begin{aligned}
(L_i - L_0)S\mathcal{E}^T + (L_i - L_0)\langle \mathcal{E} \rangle &= -L_0\mathcal{E}^T \\
(L_i - L_0)\langle \mathcal{E} \rangle &= -L_0\mathcal{E}^T - (L_i - L_0)S\mathcal{E}^T \\
(L_i - L_0)\langle \mathcal{E} \rangle &= -\mathcal{E}^T [(L_i - L_0)S + L_0] \\
[(L_i - L_0)S + L_0]^{-1} (L_i - L_0)\langle \mathcal{E} \rangle &= -\mathcal{E}^T [(L_i - L_0)S + L_0]^{-1} [(L_i - L_0)S + L_0] \\
\mathcal{E}^T &= -[(L_i - L_0)S + L_0]^{-1} (L_i - L_0)\langle \mathcal{E} \rangle.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

A la Ec. (2.23) se le conoce como ecuación de inclusión equivalente. De esta ecuación, la deformación característica, para simular la inhomogeneidad, puede ser obtenida (Cherkaoui, 2006):

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^T &= -[(L_i - L_0)S + L_0]^{-1} (L_i - L_0)\langle \mathcal{E} \rangle \\
\mathcal{E}^T &= -\left\{ (L_i - L_0)^{-1} [(L_i - L_0)S + L_0] \right\}^{-1} \langle \mathcal{E} \rangle \\
\mathcal{E}^T &= -\left[S + (L_i - L_0)^{-1} L_0 \right]^{-1} \langle \mathcal{E} \rangle
\end{aligned} \tag{2.24}$$

La deformación total en la inclusión viene dada por:

$$\mathcal{E}_i = \langle \mathcal{E} \rangle + \mathcal{E}^{eq} = \langle \mathcal{E} \rangle + S_i \mathcal{E}^T = A_i \langle \mathcal{E} \rangle \tag{2.25}$$

Ec.(2.17)

Donde el término $A_i \langle \mathcal{E} \rangle$, el término que se desea encontrar para sustituirlo en la Ec. (2.18).

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{E} \rangle + S_i \mathcal{E}^T &= A_i \langle \mathcal{E} \rangle \\
A_i &= I - S \left[S + (L_i - L_0)^{-1} L_0 \right]^{-1} \\
&= \left[\left(S + (L_i - L_0)^{-1} L_0 \right) - S \right] \left[S + (L_i - L_0)^{-1} L_0 \right]^{-1} \\
&= (L_i - L_0)^{-1} L_0 \left[S + (L_i - L_0)^{-1} L_0 \right]^{-1} \\
&= \left\{ \left[S + (L_i - L_0)^{-1} L_0 \right] L_0^{-1} (L_i - L_0) \right\}^{-1} \\
&= \left[S L_0^{-1} (L_i - L_0) + I \right]^{-1}
\end{aligned}$$

El resultado de este desarrollo es el tensor de concentración de la deformación en la inclusión:

$$\left[I + SL_0^{-1}(L_i - L_0) \right]^{-1} \langle \varepsilon \rangle = A_i \langle \varepsilon \rangle \quad (2.26)$$

La Ec. (2.26) es una de las formas más simples para el tensor de concentración de deformación, ya que no toma en cuenta distorsiones de los campos tensionales producidas por las inclusiones vecinas, y debe aplicarse cuando $\theta_i \ll 1$.

3 Resolución del Problema

3.1 Ecuación de onda

Una onda es una perturbación que se propaga. Las ondas mecánicas requieren un medio material para propagarse. Una onda transporta energía, pero no transporta materia: Las partículas vibran alrededor de la posición de equilibrio, pero no viajan con la perturbación.

La ecuación de onda es una expresión matemática que nos informa de la posición (u) de cualquier punto (x) en cualquier instante (t). Es una ecuación de tipo hiperbólica en derivadas parciales que hace referencia a una función $u(x,t)$ que satisface:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u, \quad (3.1)$$

en donde el término ∇^2 es el laplaciano, y c es una constante equivalente a la velocidad de propagación de la onda. La ecuación de onda en una dimensión se expresa como una derivada parcial:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (3.2)$$

Existen varias soluciones a la ecuación diferencial (3.2). A continuación, se presenta una solución para una onda plana que se propaga libremente en un medio de referencia.

3.2 Expresión para una onda plana

Partiendo de la ecuación (3.2), se obtiene una solución general de la forma:

$$u(x,t) = f(x \pm ct), \quad (3.3)$$

la ecuación representa ondas de forma arbitraria que se propagan a una velocidad c en la dirección positiva o negativa del eje (x). Cuando se trata de ondas armónicas, podemos expresar la función f mediante funciones *senos* y *cosenos*. Una onda de este tipo tiene una fase que se repite cada cierta distancia λ , a esta distancia se le conoce como *longitud de onda*; si además esta onda se desplaza a con una velocidad constante c , habrá un tiempo T en el cual

la fase en un punto dado, será la misma que en un tiempo $t = 0$. A este tiempo T en el cual se repite la fase, se le conoce como *periodo*.

Entonces estas ondas, senoidal o cosenoidal, pueden representarse respectivamente como:

$$u(x,t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x) - \frac{2\pi}{T}(t) + \phi\right) \quad (3.4)$$

o

$$u(x,t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x) - \frac{2\pi}{T}(t) + \phi\right), \quad (3.5)$$

donde A es la amplitud de la onda, ϕ es un desfaseamiento, λ es la longitud de onda y T es el periodo.

Sin embargo, la función f también puede ser expresada como una función compleja, con parte real e imaginaria, esto es útil en muchas aplicaciones científicas e ingenieriles ya que facilita las operaciones. Por lo que la siguiente ecuación es también una solución de la ecuación de onda.

$$u(x,t) = A \left[\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x) - \frac{2\pi}{T}(t)\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x) - \frac{2\pi}{T}(t)\right) \right]. \quad (3.6)$$

De la Ec. (3.6):

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ que se conoce como número de onda, y

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ es la frecuencia angular.

Por lo tanto, la Ec. (3.6) se puede expresar en términos del número de onda y la frecuencia angular como:

$$u(x,t) = A \left[\cos(kx - \omega t) + i \sin(kx - \omega t) \right] \quad (3.7)$$

Usado la fórmula de Euler $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$, y sustituyendo en la Ec. (3.7), llegamos a la ecuación que representa la solución de una onda plana.

$$u(x,t) = A e^{i(kx - \omega t)} \quad (3.8)$$

4 El problema de un solo dispersor

El MME, como se comentó en el capítulo 1, se basa en las siguientes suposiciones:

- I. Cada inclusión en el medio se comporta como si estuviese aislada dentro de un medio homogéneo, con las propiedades efectivas del compuesto.
- II. La onda principal en el medio no homogéneo coincide con la que se propaga en el medio homogéneo.

La primera hipótesis reduce el problema de la descripción de las interacciones entre varias inclusiones del compuesto, al problema de una sola partícula aislada, la segunda hipótesis requiere también frecuencias bajas para ignorar la diferencia entre las velocidades del tren de ondas en el medio heterogéneo y el medio homogéneo con las propiedades efectivas. La interacción de la onda con la inclusión se vuelve muy compleja cuando la longitud de onda tiene el mismo orden de magnitud que el radio de la inclusión, de ahí que consideremos a la inclusión a su vez un compuesto.

$$\langle \sigma \rangle = L_0 \langle \varepsilon \rangle, \text{ con } \langle \varepsilon \rangle = \varepsilon_0,$$

$$\langle p \rangle = \rho_0 \langle v \rangle, \text{ con } \langle v \rangle = v_0,$$

donde L_0 , ρ_0 , ε_0 y v_0 se refieren a las propiedades en el medio de referencia (medio efectivo).

Para el problema de un solo dispersor, una onda plana armónica que se propaga a través del medio de referencia es considerado de la forma (3.8) :

$$u_0(x, t) = m \exp[i(kn \cdot x - \omega t)]. \quad (4.1)$$

Donde m representa la polarización de la onda y el tamaño de la amplitud, n denota un vector unitario que define la dirección de propagación y k es el número de onda.

Los campos de esfuerzo y deformación están escritos como:

$$\sigma = L_0 \varepsilon + \tau, \quad P = \rho_0 v + \pi, \quad (4.2)$$

donde la polarización del esfuerzo τ y la polarización del ímpetu π son cero afuera de la inclusión y satisfacen la siguiente condición dentro de la inclusión,

$$\tau = (L_r - L_0)\varepsilon, \quad \pi = (\rho_r - \rho_0)v. \quad (4.3)$$

Si sustituimos las ecuaciones (4.2) en la ecuación de movimiento (2.1) podemos observar que el desplazamiento u es idénticamente igual a 1 en un medio de referencia uniforme, dirigido por las fuerzas $\tau - \dot{\pi}$ y por tanto puede ser representado en términos de la integral de convolución que envuelve la función de Green para un material homogéneo, es decir,

$$\sigma = L_0\varepsilon + \tau, \quad P = \rho_0v + \pi = \rho_0\dot{u} + \pi,$$

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t} = -i\omega u,$$

por lo tanto,

$$\sigma = L_0\varepsilon + \tau, \quad p = -i\omega\rho_0u + \pi. \quad (4.4)$$

Si sustituimos las Ecs. (4.4) en la ecuación de movimiento (2.1) se muestra que u podría ser generada en un material homogéneo con tensor de módulos elásticos L_0 y densidad ρ_0 si fuese conducido por una fuerza de cuerpo $\text{div } \tau + i\omega\pi$. Así en términos de la función de Green G , para un material homogéneo.

$$\begin{aligned} u(x) &= u_0 + G * (\text{div } \tau + i\omega\pi), \\ u(x) &= u_0 - S * \tau - M * \pi, \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde las componentes S y M son obtenidas de diferenciar la función de Green

$$S_{ikl}(x) = -G_{i(k,l)}(x), \quad M_{ij} = -i\omega G_{ij}(x). \quad (4.6)$$

Los paréntesis en los subíndices significan simetría, el campo u_0 es el campo incidente en la inclusión el cual puede ser igualado a $\langle u \rangle$ en la presente aplicación. El símbolo $*$ en las Ecs. (4.5) representa la operación de convolución con respecto a x . La tensión y la velocidad pueden ser obtenidas entonces por diferenciación y representadas en la forma:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \varepsilon_0 - S_x * \tau - M_x * \pi, \\ \nu &= \nu_0 - S_t * \tau - M_t * \pi.\end{aligned}\tag{4.7}$$

En la ecuación anterior, las ecuaciones generalizadas S_x , S_t , M_x y M_t , son obtenidas de diferenciar la función de Green G:

$$\begin{aligned}(S_x)_{ijkl} &= -G_{ik,lj} |_{(ij)(kl)}, & (M_x)_{ijk} &= -i\omega G_{ik,j} |_{(ij)}, \\ (S_t)_{ijk} &= i\omega G_{i(j,k)}, & (M_t)_{ij} &= -\omega^2 G_{ij}.\end{aligned}\tag{4.8}$$

Si se despeja ε y ν en las Ecs. (4.3) resulta:

$$\varepsilon = (L_r - L_0)^{-1} \tau, \quad \nu = (\rho_r - \rho_0)^{-1} \pi,\tag{4.9}$$

y sustituyendo estas expresiones en (4.7) y despejando ε_0 y ν_0 tenemos:

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 &= (L_r - L_0)^{-1} \tau + S_x * \tau + M_x * \pi, \\ \nu_0 &= (\rho_r - \rho_0)^{-1} \pi + S_t * \tau + M_t * \pi.\end{aligned}\tag{4.10}$$

Estas ecuaciones se resolvieron con el Método de Galerkin, tomando τ y π como constantes en la inclusión, aunque todavía dependientes de la posición x' con respecto al centro y satisfaciendo (4.9) finalmente se llega a:

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_0^{(r)} &= (L_r - L_0)^{-1} \tau + \bar{S}_x^{(r)} * \tau + \bar{M}_x^{(r)} * \pi, \\ \bar{\nu}_0^{(r)} &= (\rho_r - \rho_0)^{-1} \pi + \bar{S}_t^{(r)} * \tau + \bar{M}_t^{(r)} * \pi.\end{aligned}\tag{4.11}$$

La testa (notación de barra) representa el valor promedio sobre la inclusión indicada por el superíndice r . Es posible comprobar que en el caso en que las inclusiones tienen un centro de simetría, $\bar{M}_x^{(r)} = \bar{S}_t^{(r)} = 0$. Por los que podemos despreciar estos términos reduciendo las ecuaciones (4.11) a las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_0^{(r)} &= \left[(L_r - L_0)^{-1} + \bar{S}_x^{(r)} \right] \tau, \\ \bar{\nu}_0^{(r)} &= \left[(\rho_r - \rho_0)^{-1} + \bar{M}_t^{(r)} \right] \pi,\end{aligned}$$

si despejamos τ y π :

$$\tau = \left[(L_r - L_0)^{-1} + \bar{S}_x^{(r)} \right]^{-1} \bar{\varepsilon}_0^{(r)}, \quad (4.12)$$

$$\pi = \left[(\rho_r - \rho_0)^{-1} + \bar{M}_t^{(r)} \right]^{-1} \bar{v}_0^{(r)}. \quad (4.13)$$

Si sustituimos τ y π que obtuvimos en las ecuaciones (4.9). Obtenemos el tensor de concentración de tensión y el tensor de concentración de velocidad respectivamente.

$$\begin{aligned} \varepsilon &= (L_r - L_0)^{-1} \tau \\ &= (L_r - L_0)^{-1} \left[(L_r - L_0)^{-1} + \bar{S}_x^{(r)} \right]^{-1} \bar{\varepsilon}_0^{(r)} \\ &= \left\{ \left[(L_r - L_0)^{-1} + \bar{S}_x^{(r)} \right] (L_r - L_0) \right\}^{-1} \bar{\varepsilon}_0^{(r)} \\ \varepsilon &= \left[I + \bar{S}_x^{(r)} (L_r - L_0) \right]^{-1} \bar{\varepsilon}_0^{(r)}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Así mismo se obtiene la expresión para la velocidad:

$$\begin{aligned} v &= (\rho_r - \rho_0)^{-1} \pi \\ &= (\rho_r - \rho_0)^{-1} \left[(\rho_r - \rho_0)^{-1} + \bar{M}_t^{(r)} \right]^{-1} \bar{v}_0^{(r)} \\ &= \left\{ \left[(\rho_r - \rho_0)^{-1} + \bar{M}_t^{(r)} \right] (\rho_r - \rho_0) \right\}^{-1} \bar{v}_0^{(r)} \\ v &= \left[I + \bar{M}_t^{(r)} (\rho_r - \rho_0) \right]^{-1} \bar{v}_0^{(r)}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Finalmente, si consideramos la onda plana dada en capítulo 3 se define:

$$h_r(kn) = \frac{1}{\Omega_r} \int_{\Omega_r} \exp(ikn \cdot x) dx,$$

y los campos $\langle \varepsilon \rangle_r$ y $\langle v \rangle_r$ definidos por la integral de (2.7) siguen como:

$$\langle \varepsilon \rangle_r(x) = h_r(kn) h_r(-kn) \left[I + \bar{S}_x^{(r)} (L_r - L_0) \right]^{-1} \varepsilon_0(x), \quad (4.16)$$

$$\langle v \rangle_r(x) = h_r(kn) h_r(-kn) \left[I + \bar{M}_t^{(r)} (\rho_r - \rho_0) \right]^{-1} v_0(x). \quad (4.17)$$

5 Implementación autoconsistente

Los requerimientos de auto-consistencia se traducen en los siguientes requerimientos:

$$\langle \sigma \rangle = L_0 \langle \varepsilon \rangle, \text{ con } \langle \varepsilon \rangle = \varepsilon_0,$$

$$\langle p \rangle = \rho_0 \langle v \rangle, \text{ con } \langle v \rangle = v_0,$$

donde L_0 , ρ_0 , ε_0 y v_0 se refieren a las propiedades en el medio de referencia o medio efectivo. Las Ecs. (2.14) por lo tanto dan, para la condición del medio (4.16) y (4.17), la condición autoconsistente.

$$\begin{aligned} L_0 \varepsilon_0 &= L_{N+1} \varepsilon_0 + \sum_{r=1}^N \theta_r h_r(kn) h_r(-kn) (L_r - L_{N+1}) \left[I + \bar{S}_x^{(r)}(L_r - L_0) \right]^{-1} \varepsilon_0, \\ \rho_0 v_0 &= \rho_{N+1} v_0 + \sum_{r=1}^N \theta_r h_r(kn) h_r(-kn) (\rho_r - \rho_{N+1}) \left[I + \bar{M}_t^{(r)}(\rho_r - \rho_0) \right]^{-1} v_0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Si despejamos L_0 y ρ_0 de estas ecuaciones obtenemos la ecuación autoconsistente simplificada.

$$\begin{aligned} L_0 &= L_{N+1} + \sum_{r=1}^N \theta_r h_r(kn) h_r(-kn) (L_r - L_{N+1}) \left[I + \bar{S}_x^{(r)}(L_r - L_0) \right]^{-1}, \\ \rho_0 &= \rho_{N+1} + \sum_{r=1}^N \theta_r h_r(kn) h_r(-kn) (\rho_r - \rho_{N+1}) \left[I + \bar{M}_t^{(r)}(\rho_r - \rho_0) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

En las ecuaciones generales autoconsistentes (5.2), los valores iniciales para L_0 y ρ_0 pueden ser cualquier valor ya que la homogenización de las propiedades de la matriz con las propiedades de inclusiones convergen siempre a las propiedades efectivas; se tomaron como valores iniciales para comenzar las iteraciones a $L_0 = L_{N+1}$ y $\rho_0 = \rho_{N+1}$, es decir, las propiedades efectivas tomaron los valores de las propiedades de matriz para comenzar la homogenización.

5.1 El caso de esferoides alineados

Si consideramos que el compuesto consta de una matriz y un sólo tipo de inclusión embebida en ella, considerado como caso bifásico. En este caso $N=1$ y por tanto $r=1$, entonces el subíndice 1 denota a la inclusión y 2, es decir, $N+1=2$ se refiere a la matriz. Tenemos en entonces para el conjunto $\Omega = \Omega_1$ la expresión:

$$\Omega = \left\{ \mathbf{x} : x_1^2 + x_2^2 + \frac{x_3^2}{\delta^2} < a^2 \right\}. \quad (5.3)$$

La forma de los esferoides está sujeta por los valores de la razón de aspecto δ . Se han estudiado diferentes tipos de reforzamiento en los compuestos a través de la razón de aspecto, por ejemplo, $\delta=1$ es una inclusión esférica, $\delta < 1$ genera un disco y $\delta > 1$ son fibras elongadas en el eje de simetría “z” Figura 4

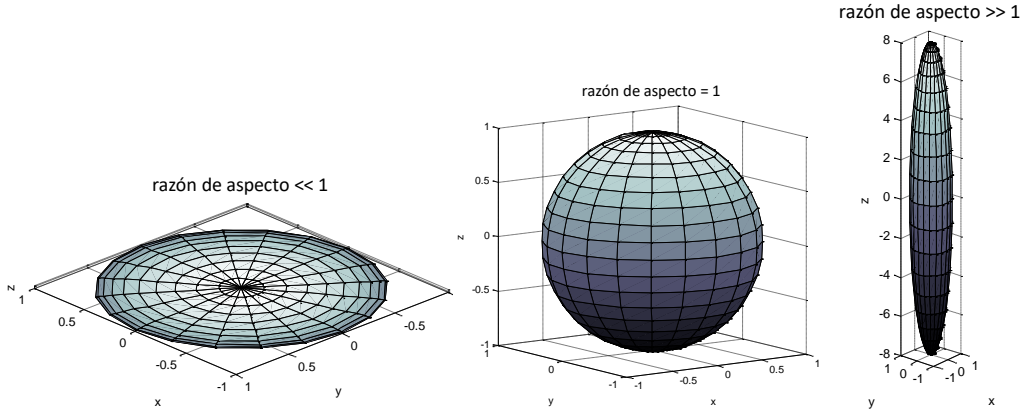


Figura 4. Esferoides con diferente razón de aspecto $\delta \ll 1$, $\delta=1$, $\delta \gg 1$.

La ecuación autoconsistente (5.2) para una inclusión es:

$$\begin{aligned} L_0 &= L_2 + \theta_1 h_1(kn) h_1(-kn) (L_1 - L_2) \left[I + \bar{S}_x^{(r)} (L_1 - L_0) \right]^{-1}, \\ \rho_0 &= \rho_2 + \theta_1 h_1(kn) h_1(-kn) (\rho_1 - \rho_2) \left[I + \bar{M}_t^{(r)} (\rho_1 - \rho_0) \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

donde:

$$\begin{aligned} h(kn) &= h(kn \zeta(n_3)), \\ \hat{h}(z) &= \frac{3[\sin(z) - z \cos(z)]}{z^3}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Como se comentó en el primer capítulo, estamos considerando un Medio Transversalmente Isótropo, cuya matriz de coeficientes tiene la forma indicada en la Ec. (1.4), observamos que las 36 constantes elásticas que describen el medio se ven reducidas a sólo cinco. Por lo que comenzamos a trabajar con la notación de Hill, con la que simplificamos la matriz L como un vector de seis componentes, conocido como *vector de Hill* (Hill, 1965).

$$L = (2k, l, q, n, 2m, 2p), \text{ con } q = l; \quad (5.6)$$

Las componentes k, l, q, n, m, p del vector, se relacionan con las de la matriz L como se muestra:

$$L = (2k, l, q, n, 2m, 2p) = \begin{pmatrix} k+m & k-m & l & 0 & 0 & 0 \\ k-m & k+m & l & 0 & 0 & 0 \\ q & q & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & 0 & 0 & 0 \\ L_{12} & L_{11} & L_{13} & 0 & 0 & 0 \\ L_{13} & L_{13} & L_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2L_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2L_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{11}-L_{12} \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

Entonces con ayuda del álgebra de Hill se puede pasar de una notación matricial a una vectorial, se presenta esta notación:

$$\begin{aligned} k &= \frac{L_{11} + L_{12}}{2}; & l = q = L_{13}; & n = L_{33}; \\ m &= \frac{L_{11} - L_{12}}{2} = L_{66}; & p &= L_{44}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

También podemos pasar de una notación vectorial a una matricial como en la relación (5.8):

$$\begin{aligned} L_{11} &= k + m; & L_{12} &= k - m; & L_{33} &= n; \\ L_{13} &= l = q; & L_{44} &= p. \end{aligned} \quad (5.9)$$

De la misma manera se define un vector para las densidades, la matriz en este caso tiene sólo dos componentes distintas, (1.5), por lo que el vector que le corresponde es:

$$\begin{aligned} \rho &= (\rho_I, \rho_{III}), \\ \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{33} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \rho_I & 0 & 0 \\ 0 & \rho_I & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{III} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

es decir:

$$\begin{aligned}\rho_{11} &= \rho_{22} = \rho_I, \\ \rho_{33} &= \rho_{III}.\end{aligned}$$

Para mantener la correspondencia con la notación de Hill y los valores obtenidos para \bar{S}_x y \bar{M}_t , éstas son también expresadas en notación de Hill como:

$$\begin{aligned}\bar{S}_x &= (2k_s, l_s, q_s, n_s, 2m_s, 2p_s), \\ \bar{M}_t &= (M_I, M_{III}).\end{aligned}\tag{5.11}$$

Como se mostró en la ecuación (4.5), los vectores \bar{S}_x , \bar{M}_t son la descomposición de onda plana de la función de Green. Retomando las ecuaciones definidas en (4.8):

$$(S_x)_{ijkl} = -G_{ik,lj} |_{(ij)(kl)}, \quad (M_t)_{ij} = -\omega^2 G_{ij}.$$

Los tensores \bar{S}_x y \bar{M}_t quedan definidos por:

$$\begin{aligned}\left(\bar{S}_x^{(r)}\right)_{ijkl} &= \frac{1}{|\Omega_r|} \int_{\Omega_r} dx' \int_{\Omega_r} G_{ik,lj}(x-x') dx |_{(ij),(kl)}, \\ \left(\bar{M}_t^{(r)}\right)_{ij} &= -\frac{\omega^2}{|\Omega_r|} \int_{\Omega_r} dx' \int_{\Omega_r} G_{ij}(x-x') dx,\end{aligned}\tag{5.12}$$

Donde, G_{ij} es la función elastodinámica de Green del tiempo reducido, representación de la función de Green desarrollada por (Willis, 1980):

$$G_{ij} = \frac{1}{8\pi^2} \sum_{N=1}^3 \int_{|\xi|=1} \frac{U_i^N(\xi) U_j^N(\xi)}{c_N^2} \left\{ \delta(\xi \cdot x) + \frac{i\omega}{2c_N} \exp\left(\frac{i\omega|\xi \cdot x|}{c_N}\right) \right\} ds.\tag{5.13}$$

Donde U_i^N es la polarización y c_N es la velocidad de una onda plana que se propaga en la dirección del vector ξ en un medio de referencia (que son los autovectores y velocidades de fase correspondientes) y ω es la frecuencia angular. En esta ecuación N se refiere al tipo de onda: 1=P, 2=SH y 3=SV.

Cabe mencionar que el vector ξ está dado en coordenadas esféricas en donde:

$$\xi_j = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \left(a \sin \theta \cos \phi, a \sin \theta \sin \phi, a \cos \theta \right) = \left(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \delta \cos \theta \right),$$

en donde el tercer elemento del vector es igual a u que es el ángulo de incidencia de la onda; a el radio del esferoide.

Por lo tanto, se satisface:

$$\left[(L_0)_{ijkl} \xi_j \xi_l - c_N^2 (\rho_0)_{ik} \right] U_k^N = 0, \quad (5.14)$$

$$U_i^N (\rho_0)_{ij} U_j^N = 1.$$

La única diferencia entre la ecuación (5.13) y la representación original de Willis (1980) es que aquí el vector U_j^N es ortonormalizado con relación al tensor ρ_0 . El número de onda asociado k_N (o kn) se relaciona con la frecuencia de esta forma:

$$k_N = \frac{\omega}{c_N}. \quad (5.15)$$

Sin embargo, para el manejo de las ecuaciones usamos una frecuencia angular normalizada con respecto a la velocidad de la onda en cuestión (P, SH o SV) en la matriz $c_{N,m}$

$$\omega_{Nor} = \bar{\omega} = \frac{\omega}{c_{1,N}}, \quad \omega = \bar{\omega} c_{1,N}.$$

Entones en términos de la frecuencia normalizada, tenemos las siguientes ecuaciones auxiliares:

$$k_N = \frac{\bar{\omega}}{c_N} c_{N,m}, \quad (5.16)$$

$$z = k_N |\xi|, \quad (5.17)$$

si obtenemos la norma de ξ y la renombramos como ζ :

$$\begin{aligned} \zeta = |\xi| &= \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} = 1, \\ &= \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \delta^2 u^2} = 1. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Finalmente, haciendo algebra llegamos a la siguiente expresión:

$$\zeta = |\xi| = \left[1 + (\delta^2 - 1)u^2 \right]^{1/2}, \quad (5.19)$$

entonces la ecuación (5.17) puede ser expresada en términos de ζ

$$z = k_N \zeta = \frac{\overline{\omega} c_{N,m}}{c_N} \zeta, \quad (5.20)$$

$$\varepsilon_N(z) = \frac{3(1-iz) [\sin z - z \cos z] e^{iz}}{z^3}, \quad (5.21)$$

$$H_N = \delta \frac{\varepsilon(z)}{c_N^2 \zeta^3}, \quad (5.22)$$

$$F_N = \delta \frac{1 - \varepsilon(z)}{\zeta^3}. \quad (5.23)$$

Si se resuelve la Ec. (5.13), llegamos a las siguientes expresiones (Gandarilla-Pérez, 2013):

$$\left(\overline{S}_x^{(r)} \right)_{ijkl} = \frac{1}{4\pi} \sum_{N=1}^3 \int_{|\xi|=1} \frac{\xi_j U_i^N(\xi) U_k^N(\xi) \xi_l}{c_N^2} H_N(\zeta(\xi)) ds, \quad (5.24)$$

$$\left(\overline{M}_t^{(r)} \right)_{ij} = \frac{1}{4\pi} \sum_{N=1}^3 \int_{|\xi|=1} U_i^N(\xi) U_j^N(\xi) F_N(\zeta(\xi)) ds. \quad (5.25)$$

lo que faltaría por obtener ahora sería la forma de los vectores U_i^N y las expresiones de las velocidades de fase c_N que son obtenidas a partir de las ecuaciones (5.14), lo que se obtiene son las siguientes expresiones en donde los subíndices corresponden al tipo de onda, P=1, SV=2 y SH=3.

$$c_1^2 = \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{k_0 + m_0}{\rho_I} + \frac{p_0}{\rho_{III}} + u^2 \left(\frac{p_0 - k_0 - m_0}{\rho_I} + \frac{n_0 - p_0}{\rho_{III}} \right) + \dots \right. \\ & \left. \left[4u^2(1-u^2) \left(\frac{(l_0 + p_0)(q_0 + p_0)}{\rho_I \rho_{III}} \right) + \left[\frac{k_0 + m_0}{\rho_I} - \frac{p_0}{\rho_{III}} + u^2 \left(\frac{p_0 - k_0 - m_0}{\rho_I} - \frac{n_0 - p_0}{\rho_{III}} \right) \right]^2 \right]^{1/2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (5.26)$$

$$c_2^2 = \frac{m_0(1-u^2) + p_0u^2}{\rho_1}$$

$$c_3^2 = \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{k_0 + m_0}{\rho_1} + \frac{p_0}{\rho_{III}} + u^2 \left(\frac{p_0 - k_0 - m_0}{\rho_1} + \frac{n_0 - p_0}{\rho_{III}} \right) - \dots \right] \right. \\ \left. \left[4u^2(1-u^2) \left(\frac{(l_0 + p_0)(q_0 + p_0)}{\rho_1 \rho_{III}} \right) + \left[\frac{k_0 + m_0}{\rho_1} - \frac{p_0}{\rho_{III}} + u^2 \left(\frac{p_0 - k_0 - m_0}{\rho_1} - \frac{n_0 - p_0}{\rho_{III}} \right) \right]^2 \right]^{1/2} \right\}$$

Los vectores característicos:

$$U_i^{(1)} = \begin{bmatrix} \rho_1^{-1/2} m_1(u) \cos \phi \\ \rho_1^{-1/2} m_1(u) \sin \phi \\ \rho_{III}^{-1/2} m_3(u) \end{bmatrix}, \quad U_i^{(2)} = \begin{bmatrix} \rho_1^{-1/2} \sin \phi \\ \rho_1^{-1/2} \cos \phi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad U_i^{(3)} = \begin{bmatrix} \rho_1^{-1/2} m_1(u) \cos \phi \\ \rho_1^{-1/2} m_1(u) \sin \phi \\ \rho_{III}^{-1/2} m_3(u) \end{bmatrix}. \quad (5.27)$$

Donde:

$$m_1 = \left(\frac{\rho_I}{D} \right)^{-1/2} \left[p_0(1-u^2) + n_0u^2 - \rho_3 c_1^2 \right], \quad (5.28)$$

$$m_3 = - \left(\frac{\rho_{III}}{D} \right)^{-1/2} (q_0 + p_0) u \sqrt{1-u^2}, \quad (5.29)$$

$$D = \rho_1 \left[p_0 + (n_0 - p_0)u^2 - \rho_3 c_1^2 \right]^2 + \rho_{III} (q_0 + p_0)^2 (1-u^2)u^2. \quad (5.30)$$

La forma transversalmente isótropa de los vectores característicos o eigen vectores (5.27) y las velocidades de onda (5.26) son sustituidas en las ecuaciones (5.24) y (5.25), las funciones $\bar{S}_x^{(r)}$ y $\bar{M}_t^{(r)}$ pueden ser reducidos y reescritos en términos del vector de Hill.

$$\bar{S}_x = (2k_s, l_s, q_s, n_s, 2m_s, 2p_s), \quad \bar{M}_t = (M_I, M_{III}).$$

Donde cada elemento se obtiene a partir de las siguientes integrales:

$$2k_s = \frac{1}{2\rho_I} \int_0^1 (1-u^2) [m_1^2 H_1 + m_3^2 H_3] du, \quad (5.31)$$

$$q_s = l_s = \frac{1}{2\sqrt{\rho_I \rho_{III}}} \int_0^1 u \sqrt{1-u^2} m_1 m_3 [H_1 - H_3] du, \quad (5.32)$$

$$n_s = \frac{1}{\rho_{III}} \int_0^1 u^2 [m_3^2 H_1 + m_1^2 H_3] du, \quad (5.33)$$

$$2m_s = \frac{1}{4\rho_I} \int_0^1 (1-u^2) [m_1^2 H_1 + H_2 + m_3^2 H_3] du, \quad (5.34)$$

$$2p_s = \frac{1}{4} \int_0^1 \left\{ \left[u^2 \frac{m_1^2}{\rho_I} + (1-u^2) \frac{m_3^2}{\rho_{III}} + 2 \frac{m_1 m_3 u \sqrt{1-u^2}}{\sqrt{\rho_I \rho_{III}}} \right] H_1 + \frac{u^2}{\rho_I} H_2 + \left[u^2 \frac{m_3^2}{\rho_I} + (1-u^2) \frac{m_1^2}{\rho_{III}} - 2 \frac{m_1 m_3 u \sqrt{1-u^2}}{\sqrt{\rho_I \rho_{III}}} \right] H_3 \right\} du \quad (5.35)$$

$$M_I = \frac{1}{2\rho_I} \int_0^1 [m_1^2 F_1 + F_2 + m_3^2 F_3] du, \quad (5.36)$$

$$M_{III} = \frac{1}{\rho_{III}} \int_0^1 [m_3^2 F_1 + m_1^2 F_3] du. \quad (5.37)$$

6 Resultados numéricos Caso Dinámico

6.1 Validación del programa

Las propiedades elásticas efectivas de los sistemas shale⁵ oil y shale gas⁶ pueden ser obtenidos con el método autoconsistente y a partir de él, la velocidad y atenuación de las ondas P y S para un amplio rango de frecuencias incluyendo bandas de frecuencias sísmicas, sónicas y ultrasónicas. El modelo matemático tiene la virtud de considerar las inclusiones como sólidas o líquidas embebidas en una matriz sólida tomando en cuenta la fracción volumen de cada una.

Con el fin de comparar los resultados y calibrar el programa, se reprodujeron algunos resultados de los artículos (Sabina, Smyshlyayev, & Willis, 1993) y (Sabina, et al., 2015), En el cual se usaron diferentes materiales, como se comentó al inicio del primer capítulo, el modelo fue aplicado a una matriz de resina epoxi con inclusiones de Al 6061 y SiC.

Los siguientes resultados muestran las curvas de velocidad de fase normalizadas y las curvas de atenuación normalizadas de una onda P con un ángulo de incidencia $\theta=0^\circ$, con una fracción volumétrica $\varphi=0.5$ y con diferentes razones de aspecto $\delta=0.05$, $\delta=1$ y $\delta=5$. La matriz es de resina epoxi y las inclusiones de Al 6061 (Sabina, Smyshlyayev, & Willis, 1993).

⁵ Shale. Lutita: roca sedimentaria de grano fino compuesta de limo y arcilla o lodo consolidado. L lutita es la roca sedimentaria más común. (glosario Schlumberger)

⁶ Shale Oil (lutita bituminosa), Shale Gas (gas en lutita): Formación que contiene hidrocarburos que no pueden recuperarse por medio de métodos convencionales de explotación, debido a la baja permeabilidad. (glosario Schlumberger)

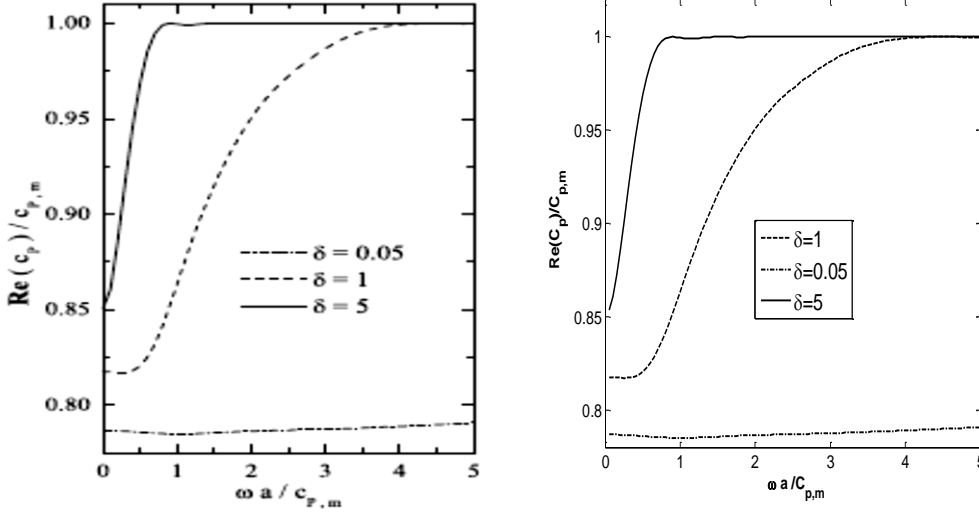


Figura 5. Velocidad de fase vs frecuencia normalizada; (1) muestra la figura 7 del artículo Sabina et al 2015, (2) Muestra los resultados obtenidos con el programa TIM

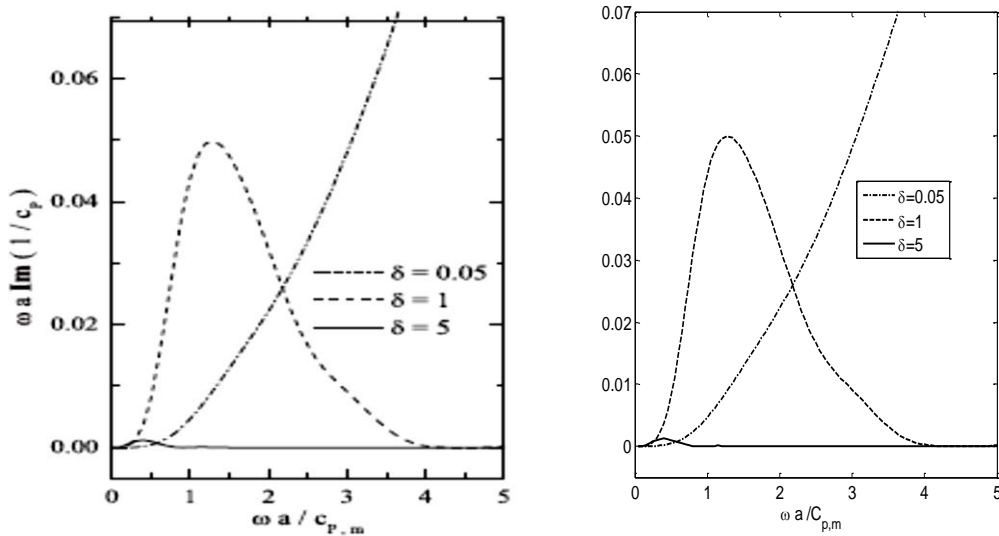


Figura 6. Atenuación vs frecuencia normalizada, (1) figura 8 (Sabina, et al., 2015), (2) Resultados obtenidos con el programa TIM.

Se muestran en la Figura 5 y Figura 6 la similitud de las gráficas del modelo con los resultados del artículo. También se reprodujeron resultados del artículo (Sabina, et al., 2015), en donde se comparan las velocidades de fase normalizada y atenuación normalizada de onda P entre un compuesto C1 con un solo tipo inclusión y otro compuesto C3 con dos tipos de inclusiones. Para ambos casos se muestran las gráficas a diferentes ángulos de incidencia, $\theta=0^\circ$, $\theta=45^\circ$ y $\theta=90^\circ$. La inclusión con razón de aspecto $\delta=0.33$ y fracción volumen $\varphi=0.25$ en el compuesto C1 es reemplazado por dos inclusiones con razones de aspecto $\delta=0.33$ y

$\delta=5$, y fracción volumen $\phi=0.25$ para ambas inclusiones. La matriz fue de resina epoxi y las inclusiones de Al6061.

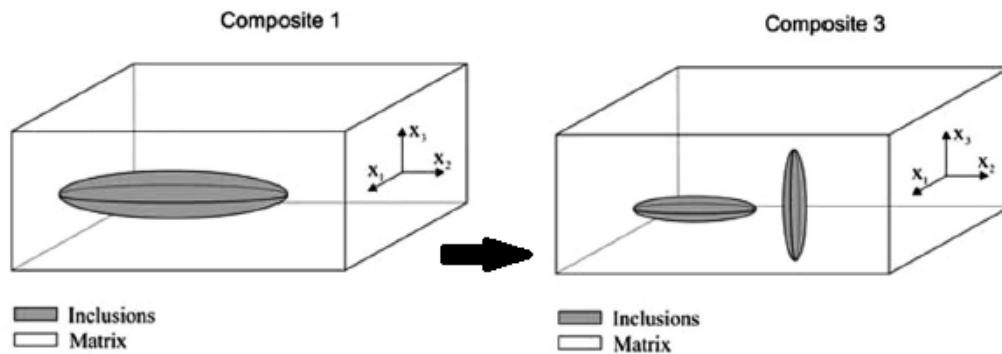


Figura 7. Ilustración de los compuestos bajo estudio, (Sabina, et al., 2015).

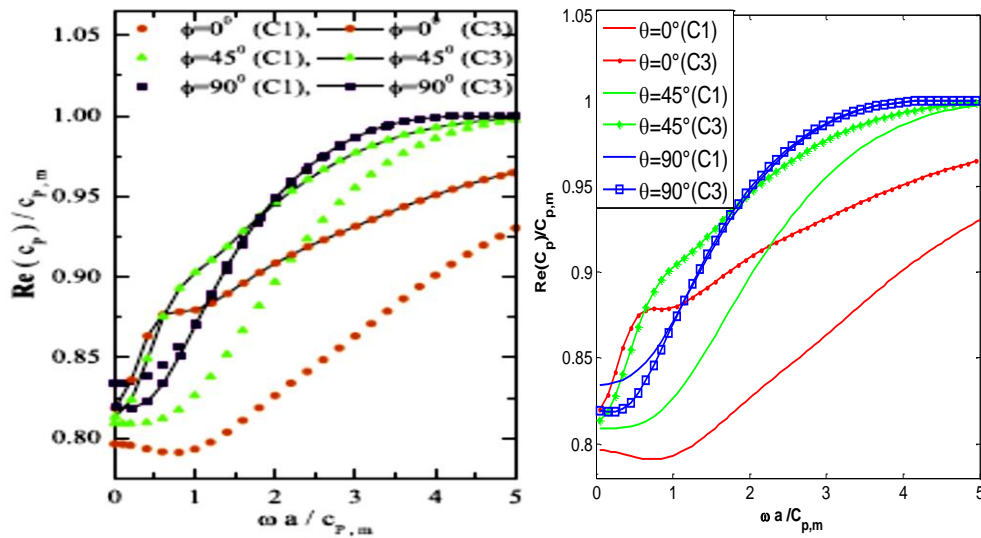


Figura 8. Velocidad de fase vs atenuación; (1) figura 8 (Sabina, et al., 2015), (2) Resultados obtenidos del TIM.

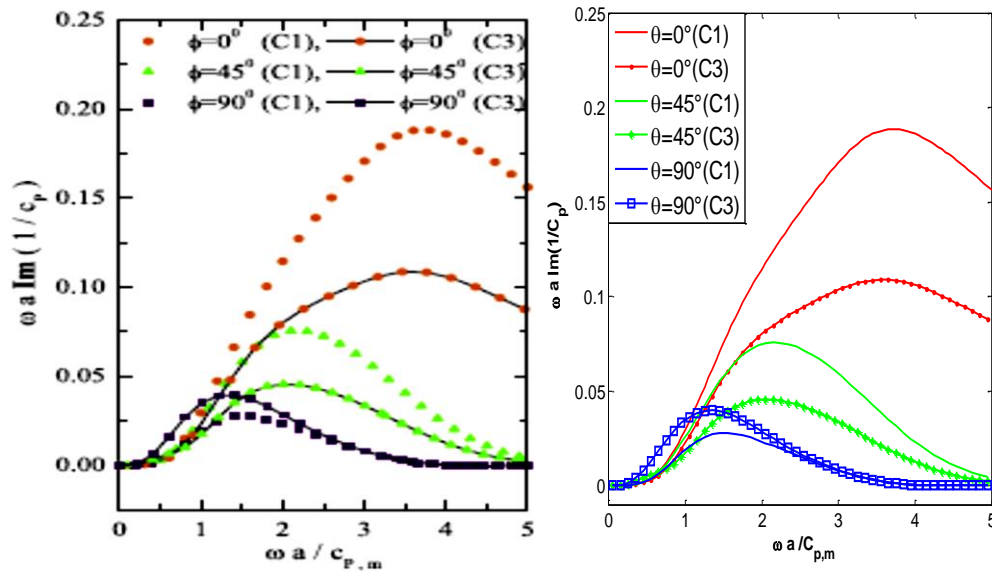


Figura 9. Atenuación vs frecuencia normalizada; (1) figura 8 (Sabina, et al., 2015), (2) resultados del TIM.

Con las gráficas anteriores se comprobó que el programa da los resultados esperados ya que coinciden con los resultados dados en el artículo (Sabina, et al., 2015). Con estos resultados se calibró el algoritmo numérico realizado en Matlab.

6.2 Resultados del modelo dinámico aplicado a rocas que presentan anisotropía

Se aplicó el método autoconsistente para predecir el comportamiento de velocidades de ondas y su atenuación cuando pasan a través rocas que se encuentran comúnmente en yacimientos de hidrocarburos. Los materiales utilizados para la modelación fueron: Una matriz de calcita, con inclusiones de cuarzo y arcilla; las propiedades de estas rocas se obtuvieron de (Mavko, Mukerji, & Dvorkin, 2009). Es importante mencionar que para las propiedades elásticas del cuarzo se tomaron las que aparecen en la literatura como cuarzo con arcilla ya que en los yacimientos siempre aparecen asociados estos minerales y difícilmente se encuentran puros, esto hace que los resultados del modelo sean más aproximados a las condiciones reales de yacimiento.

Las siguientes figuras muestran una proporción aproximada de la composición de formaciones carbonatadas arcillosas, una matriz de calcita con 25% de arcilla, 10% de cuarzo y porosidades que van del 5 al 15% con saturación de agua salada. Las velocidades y

atenuaciones corresponden a inclusiones esféricas y un ángulo de incidencia de 0° aunque, por ser el caso isótropo las gráficas son las mismas a cualquier ángulo de incidencia.

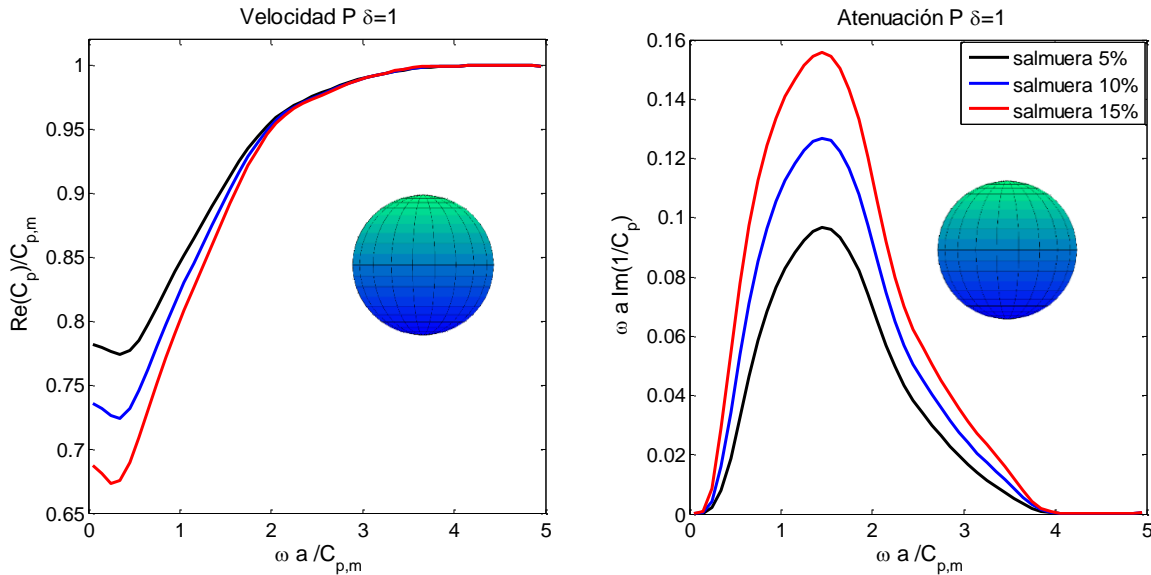


Figura 10. Velocidad y atenuación de onda P a través de un medio compuesto (Calcita, Arcilla, Cuarzo) y con diferentes fracciones volumétricas de fluido.

La Figura 10 muestra el comportamiento de la velocidad y la atenuación de una onda P a través de un medio compuesto, contra la frecuencia angular normalizada con la velocidad P en la matriz. Cabe mencionar que el porcentaje de fluido que se muestra en todas las gráficas corresponde a la porosidad, la cual se considera saturada al 100% del fluido en cuestión.

Se aprecia que, a baja frecuencia angular adimensional las velocidades son menores, es decir, que la propagación de la onda es más lenta conforme la cantidad de fluido es mayor y la atenuación es mayor debido a la dispersión que provoca los fluidos.

A baja frecuencia, la longitud de onda suele corresponder con la dimensión de las inclusiones por lo que a baja frecuencia la velocidad de onda corresponde más a las velocidades que pasan a través de las inclusiones, así cuando las propiedades de las inclusiones tienen menos rigidez que la matriz, las velocidades son más lentas y viceversa. Conforme la frecuencia va aumentando, la longitud de onda se acorta haciendo que haya una mejor homogenización de las velocidades en las inclusiones con la velocidad en matriz y se refleje como un incremento de velocidad, ya que como se comentó anteriormente, la matriz se consideró calcita a través de la cual las velocidades de propagación son mayores.

Lo anterior explica porque cuando la fracción volumétrica de las inclusiones fluidas es mayor, la velocidad a baja frecuencia es menor. Además, en la gráfica de atenuación se observa que la atenuación es mayor cuando la proporción de fluido es mayor, esto es debido a la dispersión que se genera cuando la onda pasa a través del fluido, el máximo de atenuación indica la frecuencia de resonancia del compuesto.

Los mismos parámetros de entrada fueron usados para obtener las gráficas de velocidad y atenuación de ondas SH y SV.

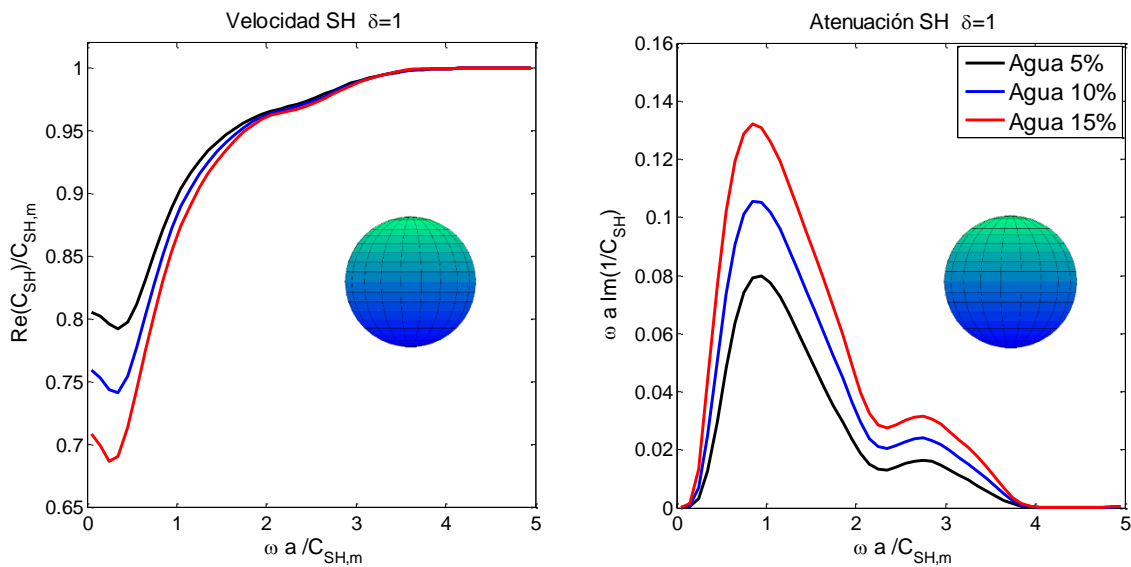


Figura 11. Velocidad y atenuación de onda SH a través del compuesto y diferentes fracciones de agua.

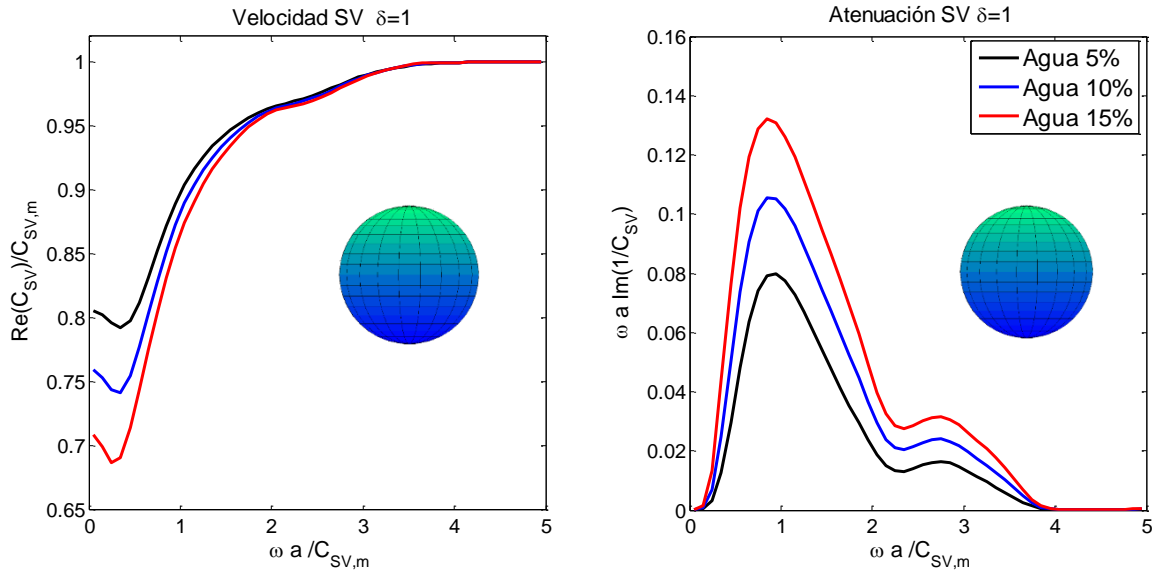


Figura 12. Velocidad y atenuación de onda SV a través del compuesto y diferentes fracciones de agua.

Las curvas de velocidad y atenuación SH y SV son idénticas para una inclusión esférica, puesto que en ambas direcciones las ondas atraviesan la misma superficie de inclusión.

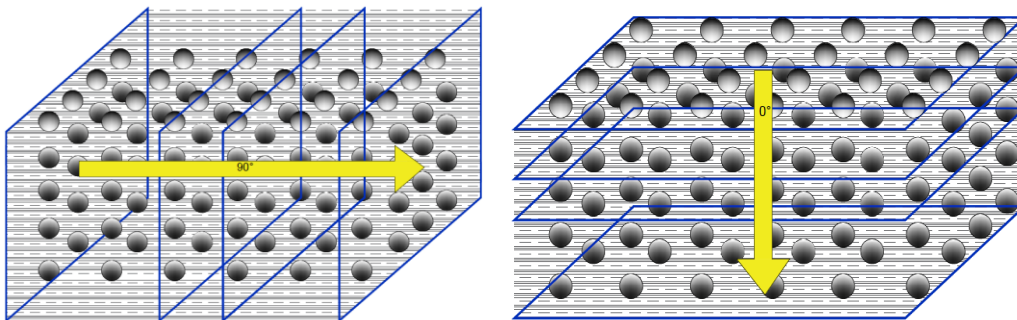


Figura 13. Esquema de incidencia del tren de onda sobre inclusiones con una razón de aspecto $\delta=1$, esfera. 90° y 0° respectivamente

Cuando las inclusiones son esféricas, $\delta=1$, el comportamiento de velocidad y atenuación es el mismo sin importar el ángulo de incidencia de la onda, caso isótropo Figura 11 y Figura 12.

Con las mismas proporciones de minerales, se obtuvieron gráficas de velocidades y atenuación de ondas con una razón de aspecto de inclusiones $\delta=0.5$ que es el caso transversalmente isótropo (TI) con eje de simetría z.

En este caso es cuando se presenta anisotropía debido a que la respuesta de las mediciones si es dependiente del ángulo en el que se miden, se muestran los resultados para un ángulo de

incidencia de $\theta=0^\circ$ y $\theta=90^\circ$ con respecto a la vertical. Cabe mencionar que en los diagramas el término agua, se refiere realmente a salmuera⁷ ya es el termino común para referirse a agua en yacimientos.

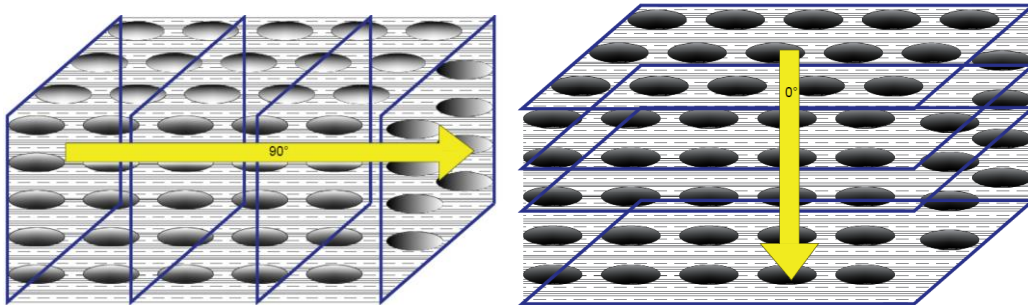


Figura 14. Esquema de incidencia del frente de onda sobre inclusiones con una razón de aspecto $\delta < 1$, disco. 90° y 0° respectivamente

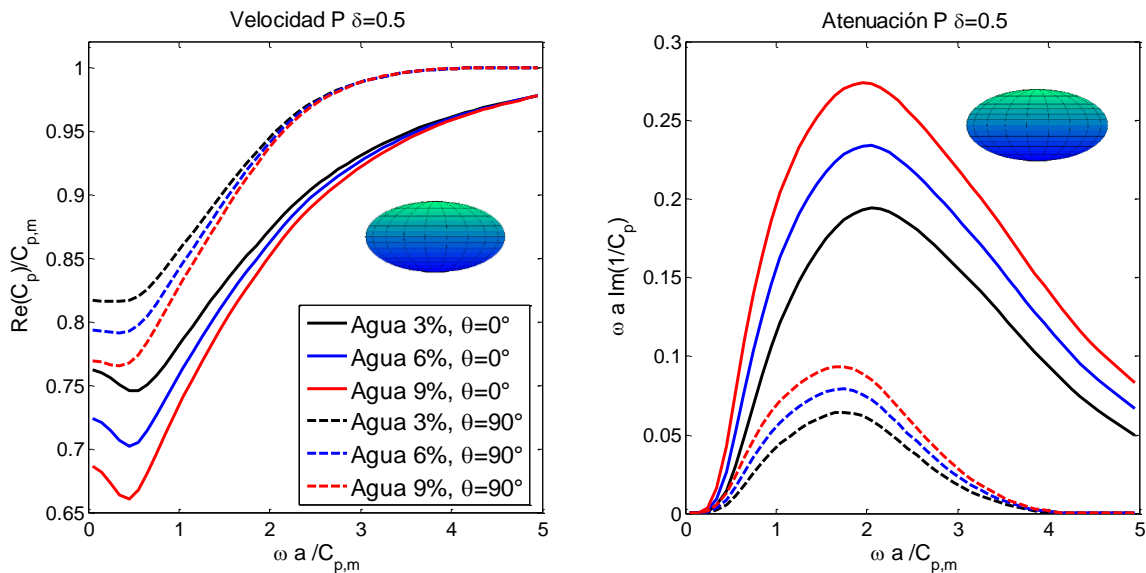


Figura 15. Velocidad y atenuación de onda P con razón de aspecto $\delta=0.5$, con incidencia axial y transversal.

En la Figura 15 se ve el comportamiento de una onda P que incide axial, $\theta=0^\circ$, y transversalmente, $\theta=90^\circ$, en un compuesto con inclusiones con la forma elipsoidal mostrada en la Figura 14.

Cuando las inclusiones tienen una razón de aspecto diferente de 1, la anisotropía aparece y crece conforme la razón de aspecto se aleja del valor de 1, esto provoca que el volumen

⁷ Salmuera: Agua que tiene sales disueltas, especialmente cloruro de sodio.

porcentual de inclusiones fluidas que puede ser modelado sea menor, lo que puede tener sentido físico si se observa que mientras la inclusión es más plana $\delta \ll 1$, puede parecerse a una laminación muy delgada de grano fino, lo que supone una reducción en la porosidad y una alta carga litostática y en consecuencia menos contenido de fluidos.

Según la definición de (Barratt & Collins, 1965), la dispersión de onda de una sección transversal de obstáculo tridimensional es definida como la proporción de la tasa promedio en la cual la energía es dispersada por el obstáculo y la tasa promedio a la cual la energía de la onda incidente atraviesa una unidad de área perpendicular a la dirección de propagación de la onda, es una medida del efecto del obstáculo sobre la onda, en otras palabras, la energía de propagación de una onda cuando incide en una inclusión, se descompone en ondas reflejadas, refractadas y ondas transmitidas a través obstáculo, mientras mayor es el área de incidencia de la onda sobre la inclusión, mayor es la dispersión que ésta genera, esto explica el comportamiento de velocidad y atenuación cuando la onda incide axial o transversalmente como se muestra en la Figura 15.

A continuación, se presentan las curvas de velocidad y atenuación para ondas SH y SV con las mismas características del medio compuesto.

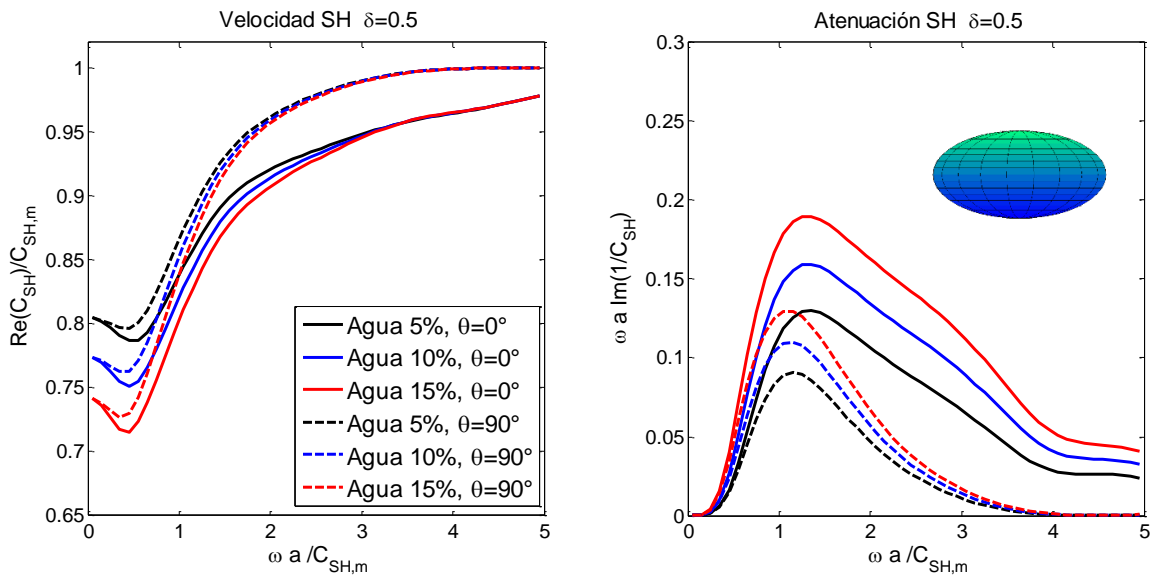


Figura 16. Velocidad y atenuación de onda SH con razón de aspecto $\delta=0.5$, con incidencia axial y transversal.

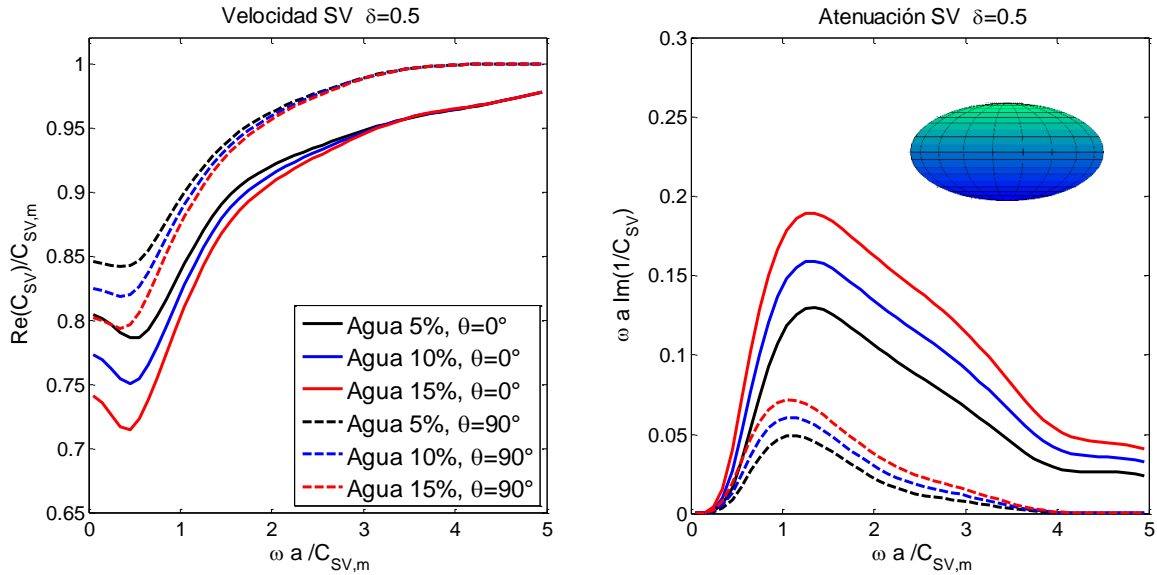


Figura 17. Velocidad y atenuación de onda SV con razón de aspecto $\delta=0.5$, con incidencia axial y transversal.

De igual manera que en la onda P, las ondas SH y SV, muestran que cuando la onda atraviesa axialmente el compuesto, el área transversal que atraviesa el frente de onda es mayor que cuando la onda incide transversalmente (90° respecto a la vertical), lo que, como se comentó anteriormente, genera más dispersión de energía y en consecuencia más atenuación.

Si se analiza con atención la Figura 16 y Figura 17, se observa que las curvas son exactamente las mismas cuando se trata de una incidencia a vertical ($\theta=0^\circ$), debido a que ambas ondas de corte inciden sobre el plano isótropo XY, sin embargo, cuando la incidencia es a 90° , las curvas de velocidad y atenuación no coinciden debido que la onda de corte vertical (SV) inicialmente genera un desplazamiento vertical en la partícula mientras que la onda horizontal (SH) desplaza horizontalmente la partícula, en este caso la inclusión.

Se observan diferencias entre el comportamiento de las ondas S y P, una es que el máximo de la función de atenuación se encuentra a diferentes frecuencias en ambos casos, éste punto de inflexión se relaciona con la frecuencia de resonancia del compuesto. La velocidad de las ondas P inicia de un menor valor que la velocidad inicial de las ondas S

Es de notarse que cuando la onda alcanza la velocidad normalizada máxima (igual a 1), la cual corresponde a la velocidad en la calcita (matriz); en este punto la curva de atenuación es cero a la misma frecuencia adimensional.

Considerando el mismo tipo de inclusiones se hicieron graficas de onda P ahora para una razón de aspecto $\delta \ll 1$, caso TI, las velocidades y atenuaciones cambian de acuerdo con el ángulo de incidencia de la onda. Las líneas continuas son para un ángulo de incidencia $\theta=0^\circ$ respecto a la vertical y las líneas discontinuas corresponden a un ángulo $\theta=90^\circ$.

Las siguientes gráficas, Figura 18, Figura 19 y Figura 20, son para una razón de aspecto $\delta=0.2$ cuya forma es la de un plato plano. En ellas se muestran las velocidades y atenuaciones con diferentes fracciones volumétricas de agua y también a ángulos de 0° y 90° .

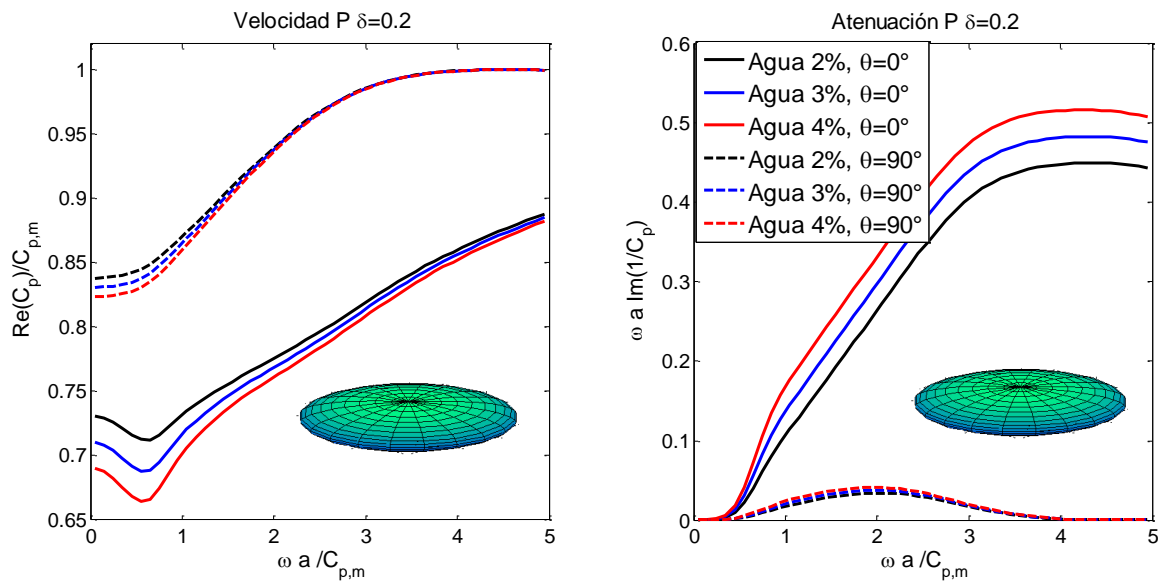


Figura 18. Velocidad y atenuación de onda P con razón de aspecto $\delta=0.2$, y con incidencia axial y transversal

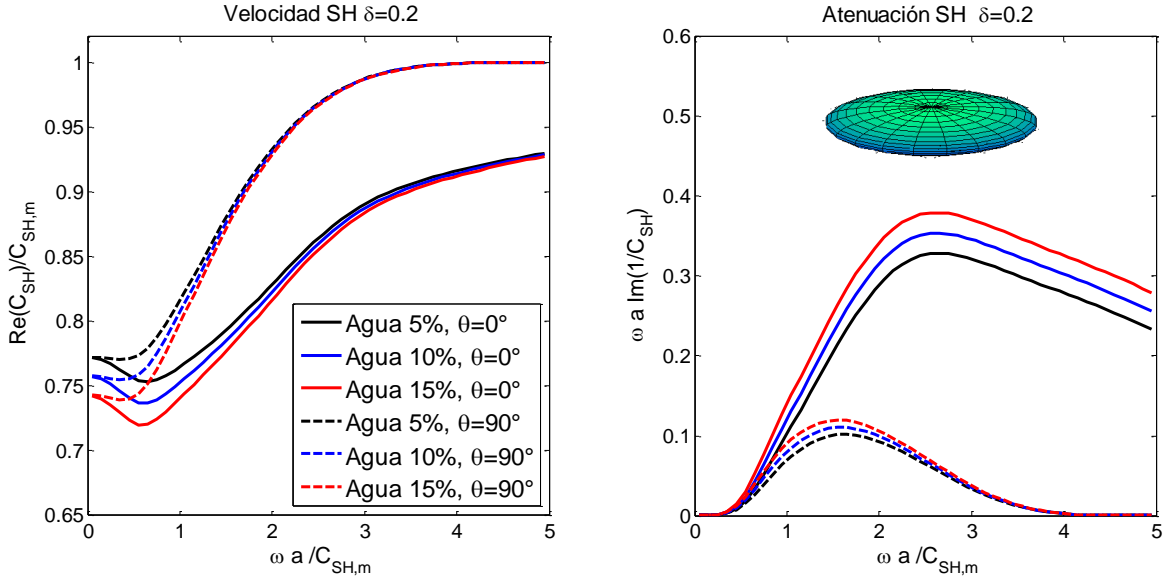


Figura 19. Velocidad y atenuación de onda SH con razón de aspecto $\delta=0.2$, y con incidencia axial y transversal

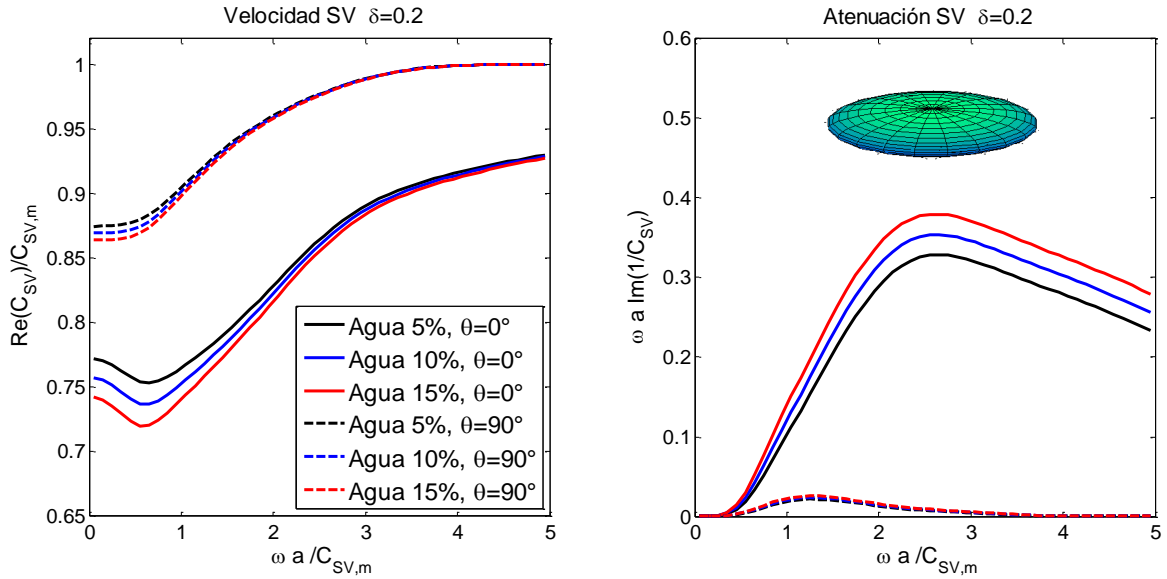


Figura 20. Velocidad y atenuación de onda SV con razón de aspecto $\delta=0.2$, y con incidencia axial y transversal

Para una razón de aspecto $\delta=0.2$, las fracciones de fluido que pueden ser simuladas son menores, que cuando la razón de aspecto es un poco mayor. Obsérvese también que el contraste de velocidades y atenuaciones cuando la incidencia de onda cambia 90° es mucho mayor debido a que también es mayor el contraste entre el diámetro mayor y menor del esferoide.

Observando las gráficas Figura 19 y Figura 20 nos damos cuenta de que cuando la incidencia es vertical las velocidades y atenuaciones son exactamente las mismas, puesto que ambas ondas atraviesan una superficie idéntica, sin importar la razón de aspecto, las ondas SH y SV siempre incidirán sobre un círculo en el plano XY cuando la dirección de propagación sea vertical, sin embargo, cuando la incidencia es transversal, nótese que las velocidades y atenuaciones son distintas.

Para el caso de la onda SH al límite de baja frecuencia obsérvese que las velocidades parten del mismo valor a $\theta=0^\circ$ y $\theta=90^\circ$. Considérese que la onda parte del centro de la inclusión y el primer desplazamiento de la partícula, en este caso la inclusión, será no en la dirección de propagación del tren de onda sino en dirección vertical u horizontal según el tipo de onda, si imaginamos este hecho vemos que la onda SH cuando el frente de onda es sobre el eje Z (0° respecto la vertical), va comenzar a desplazar la inclusión en la dirección del eje Y, y cuando esta misma onda incide transversalmente ($\theta=90^\circ$), la partícula empezara su desplazamiento también en dirección Y, en ambos casos debido a que la inclusión comenzará su desplazamiento en el plano isótropo XY, las velocidades a esta frecuencia inicial son las mismas. Si ahora analizamos el desplazamiento de la SV a 0° y 90° , veremos que el primer desplazamiento de la inclusión cuando la dirección de propagación es a 0° , la inclusión se moverá en el eje X, y cuando la dirección de propagación sea 90° , la inclusión comenzará su movimiento en la dirección del eje Z lo que hace que las velocidades no inicien igual a la frecuencia inicial.

A continuación, se muestra gráficas que comparan las velocidades y atenuaciones de onda P, SH y SV a diferente ángulo de incidencia, con una razón de aspecto $\delta=0.2$ (disco plano) y una fracción volumétrica de agua constante de 4%.

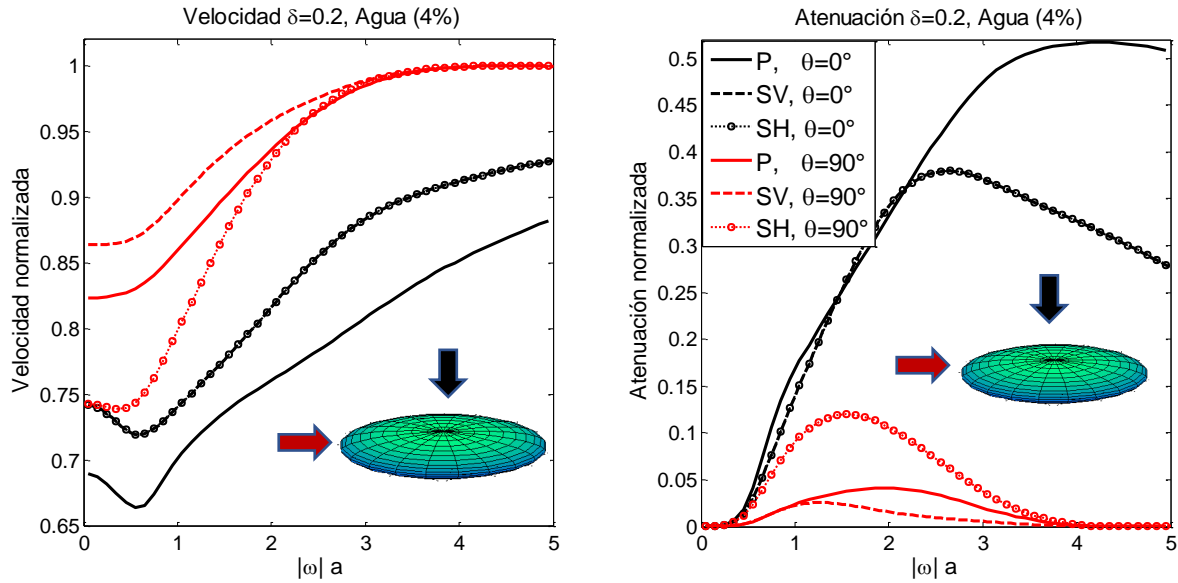


Figura 21. Velocidad y atenuación de ondas P, SH y SV con razón de aspecto $\delta=0.2$, ángulo de incidencia vertical y transversal con fracción volumétrica de agua de 4%.

En la Figura 21 las velocidades y atenuaciones de las ondas SH y SV a $\theta=0^\circ$ son las mismas, ambos gráficos se traslapan debido a que la dirección de propagación es vertical como se comentó antes, en este mismo ángulo, las velocidades de la onda P son distintas por tratarse de otro tipo de onda, onda compresional.

A continuación, se presentan gráficas para una razón de aspecto de $\delta>1$ cuya forma es la de una fibra alargada sobre eje Z, Figura 22, con diferentes fracciones volumétricas de agua y ángulos de 0° y 90° respecto a la vertical.

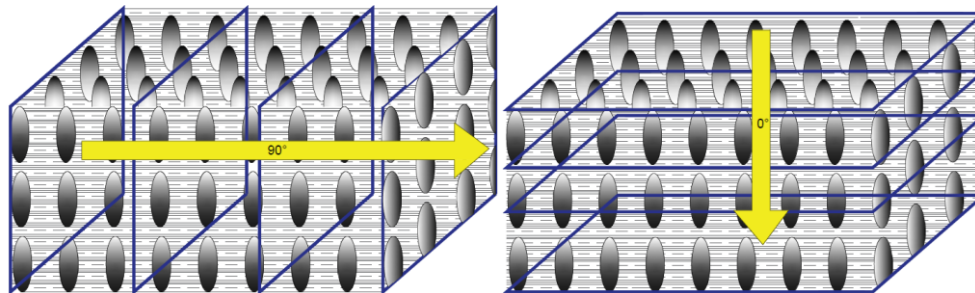


Figura 22. Esquema de incidencia del frente de onda sobre inclusiones con una razón de aspecto $\delta>1$, fibra delgada, a 90° y 0° respectivamente.

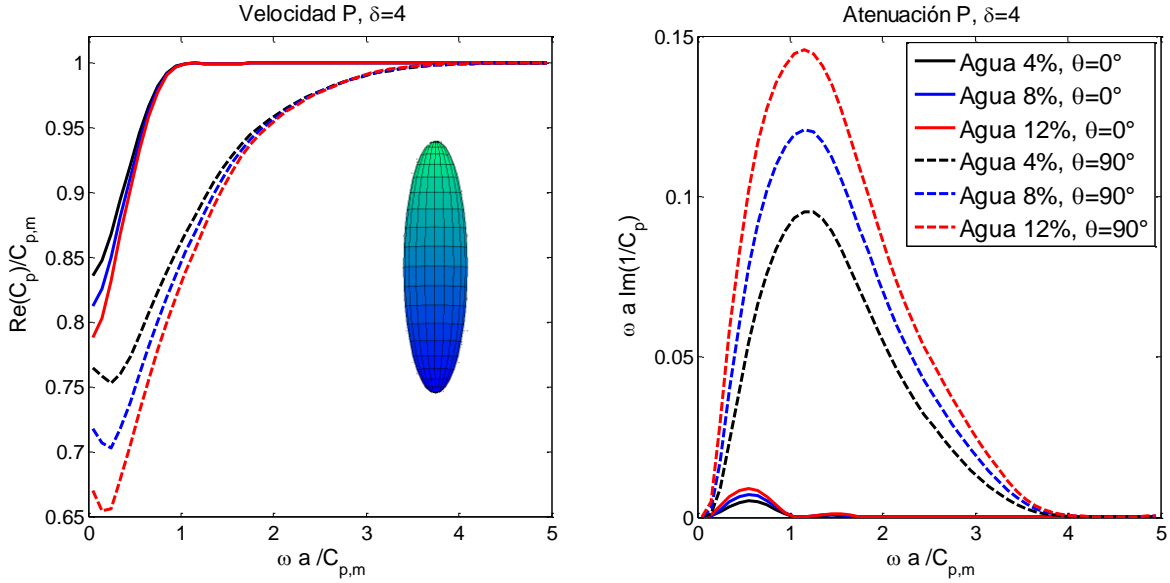


Figura 23. Velocidad y atenuación de onda P con razón de aspecto $\delta=4$, y con incidencia axial - transversal y diferentes fracciones de agua.

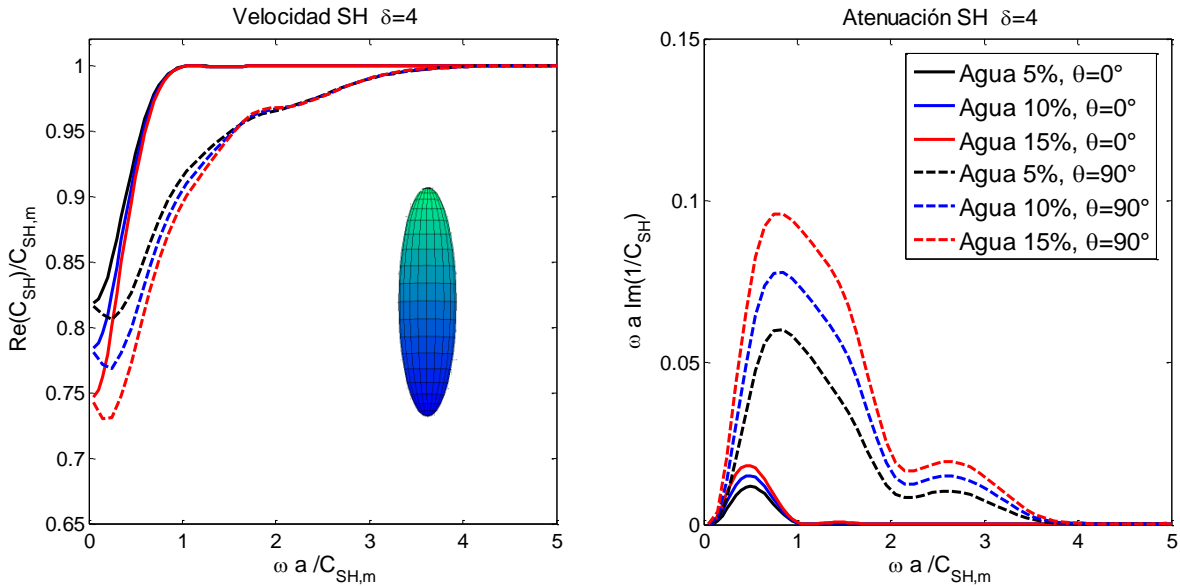


Figura 24. Velocidad y atenuación de onda SH con razón de aspecto $\delta=4$, y con incidencia axial - transversal y diferentes fracciones de agua.

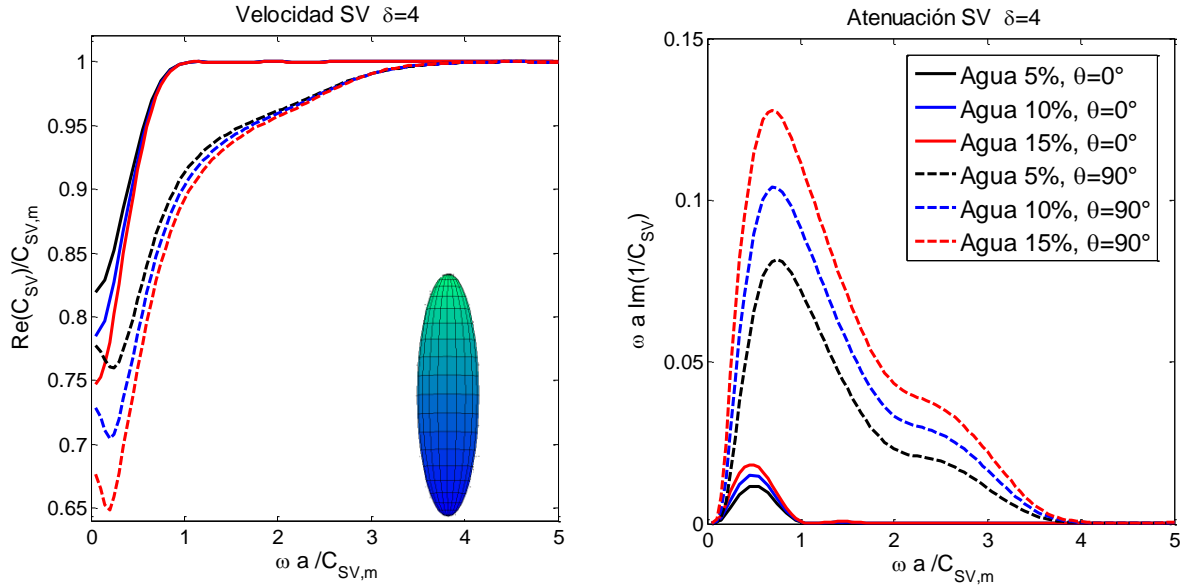


Figura 25. Velocidad y atenuación de onda SV con razón de aspecto $\delta=4$, y con incidencia axial - transversal y diferentes fracciones de agua.

Cuando la razón de aspecto $\delta > 1$ la forma de la inclusión presenta un alargamiento en el eje vertical, la atenuación se invierte, ya que la dispersión que genera esta forma de la inclusión es mucho menor cuando la dirección de propagación es sobre eje Z, es decir, que la inclusión no genera mucha resistencia al paso de la onda y por lo tanto tampoco dispersión. Además, la cantidad de fluido que puede simularse es mayor que cuando se trata de una inclusión plana, $\delta < 1$

Cuando la dirección de propagación de las ondas es a 90° respecto a la vertical, la dispersión generada es mayor debido al área perpendicular que atraviesa el frente de onda.

A continuación, se muestra gráficas que comparan las velocidades y atenuaciones de onda P, SH y SV a diferente ángulo de incidencia, con una razón de aspecto $\delta=4$ (fibra alargada) y una fracción volumétrica de agua constante de 10%.

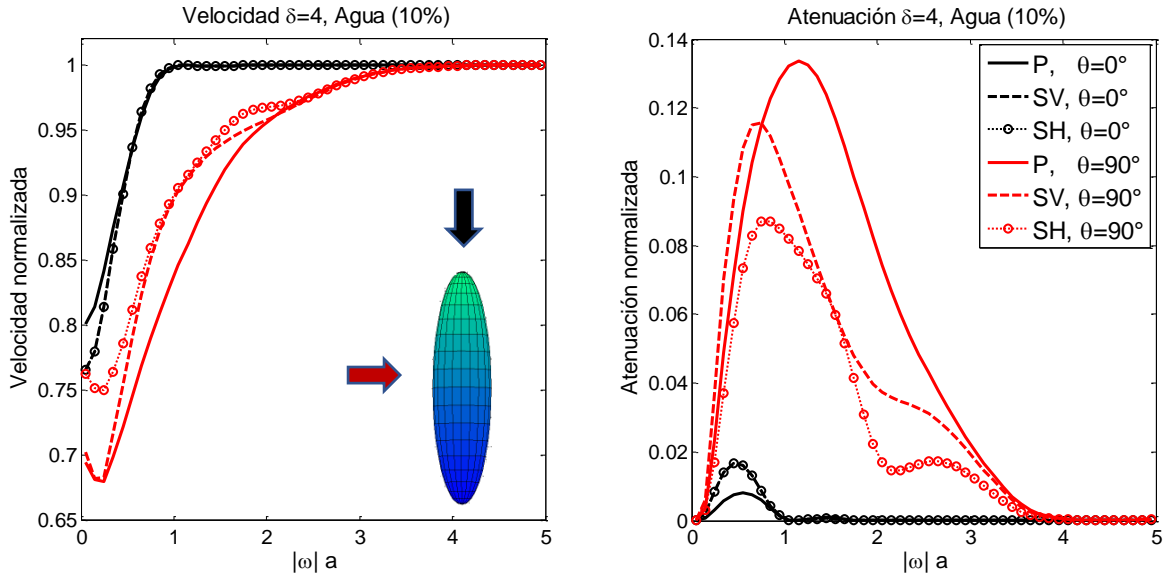


Figura 26. Velocidad y atenuación de ondas P, SH y SV con razón de aspecto $\delta=4$, ángulo de incidencia vertical y transversal con fracción volumétrica de agua de 10%.

Si comparamos la Figura 21 y Figura 26 comprobamos que las velocidades y atenuaciones se invierten de acuerdo al ángulo de incidencia de las ondas, nótese que las velocidades tienen un rango similar en ambas gráficas, sin embargo para el caso de las atenuaciones son mucho menores cuando $\delta > 1$ que cuando $\delta < 1$. A estas diferentes formas de las inclusiones podemos darle interpretación geológica, por ejemplo, cuando $\delta \ll 1$ que es el caso de un disco plano, podemos interpretarlo como una estratificación delgada en donde el fluido está confinado, este caso es representativo de los yacimientos Shale donde la porosidad es muy baja, en parte por el tamaño de las partículas y por la presión de confinamiento que provoca la carga litostática en la zona, además la anisotropía está muy presente en este tipo de yacimientos. Cuando $\delta > 1$, la inclusión tiene la forma de una fibra alargada cuyo sentido físico puede interpretarse como fracturas alineadas, por otro lado, cuando $\delta = 1$ que es el caso isotrópico donde la inclusión es esférica, se puede interpretar como aquellas rocas donde la anisotropía es muy baja, es decir, las muestras de roca no muestran un plano de laminación aparente, la composición de la roca puede ser muy heterogénea pero las propiedades efectivas son iguales medidas en cualquier dirección.

En la siguiente gráfica, Figura 27, se muestran las curvas de velocidad y atenuación de diferentes fluidos con una fracción volumétrica constante de 0.07, con razón de aspecto $\delta=0.5$, los ángulos de incidencia 0 y 90°.

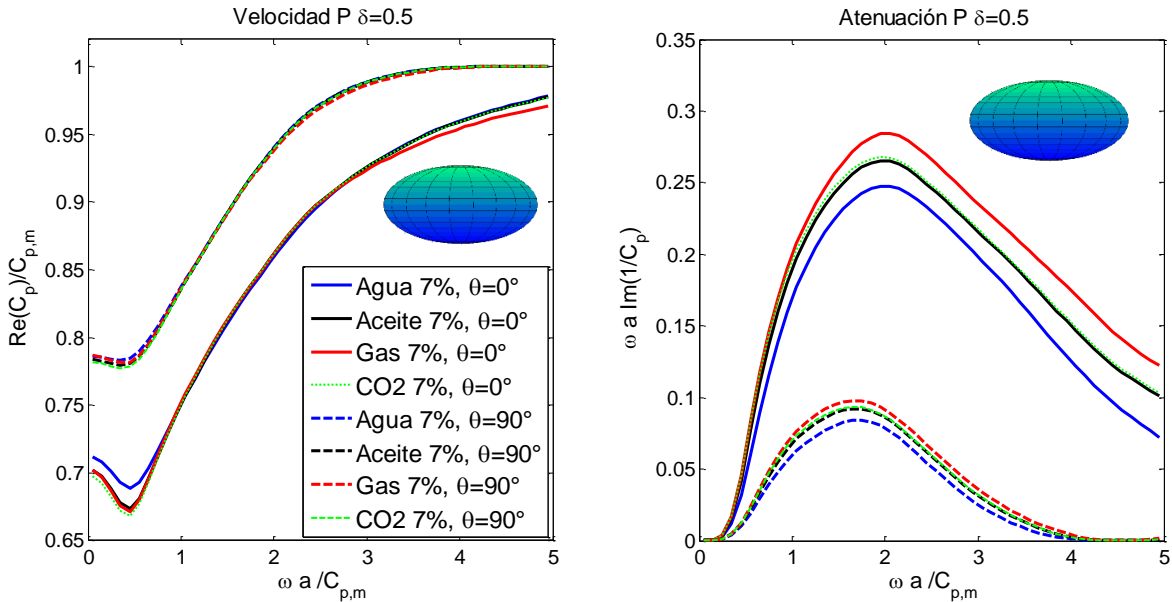


Figura 27. Velocidad y atenuación de onda P a través de diferentes fluidos con razón de aspecto $\delta=0.5$, y con incidencia axial - transversal, la fracción volumétrica de las inclusiones es constante de $\theta=0.07$

Estas gráficas muestran la similitud del comportamiento de velocidades y atenuaciones cuando se tienen misma forma de la inclusión y misma fracción volumétrica. Sin embargo, los valores cambian un poco dependiendo de la diferencia de propiedades de los diferentes tipos de fluidos, sobre todo la densidad, que es el parámetro que más influye para ver la separación entre las curvas de los diferentes fluidos.

Es fácil apreciar que la forma de la inclusión, la dirección de propagación de las ondas, y el porcentaje de fluido, son parámetros que impactan más en los resultados de las mediciones de velocidad de onda que las propiedades del fluido contenido en los poros. En otras palabras, la anisotropía y la cantidad de fluidos afectan más las mediciones que el tipo de fluido contenido en la formación.

6.3 Resultados del modelo dinámico aplicado a rocas que presentan anisotropía con resultados dimensionales y aplicado a bandas frecuencia sísmica, sónica y ultrasónica [Hz]

Además de las gráficas anteriores donde la velocidad está normalizada con la velocidad de la matriz y la frecuencia angular es adimensional, se elaboraron gráficas dimensionales con fines ingenieriles.

Muchos esfuerzos se han enfocado en desarrollar metodologías para asociar datos de saturación de fluido y mineralogía dentro del análisis de respuestas sísmicas de la roca en frecuencias de banda completa. El método autoconsistente ha sido extendido usando datos de laboratorio observados en mediciones de frecuencias dependientes de las velocidades de onda P- y S- en muestras de rocas sedimentarias (Batzle, Han, & Hofmann, 2006). Además, el método autoconsistente fue usado para reconciliar las propiedades elásticas observadas a frecuencias sísmicas (~30-280 Hz), de registro sónico (~8-24 kHz) y mediciones ultrasónicas en laboratorio (~300~1000 kHz) (Sams, Neep, Worthington, & King, 1997). Se aplicó un esquema autoconsistente utilizando la definición de frecuencia dimensional (6.1) para conciliar las respuestas de frecuencias sísmicas, sónicas y ultrasónicas (Valdiviezo-Mijangos & Nicolás-López, 2014).

$$\varpi = \frac{\omega a}{c_{N,m}} = \frac{2\pi a f}{c_{N,m}}, \quad f = \frac{\varpi c_{N,m}}{2\pi a}; \quad 0 < \varpi < 5, \quad (6.1)$$

donde: ϖ es la frecuencia angular adimensional, a es el radio de la inclusión en el plano isótropo (plano XY), f es la frecuencia en Hz y $c_{N,m}$ es la velocidad de la onda P en la matriz (km/s).

Se obtuvieron gráficas de velocidad de fase y atenuación considerando una matriz de calcita con porosidad constante $\phi=15\%$ saturada de agua y aceite, también gráficas con una matriz de Arcilla y misma proporción de fluidos, estas gráficas representan claramente la dependencia entre el radio de la inclusión y la frecuencia.

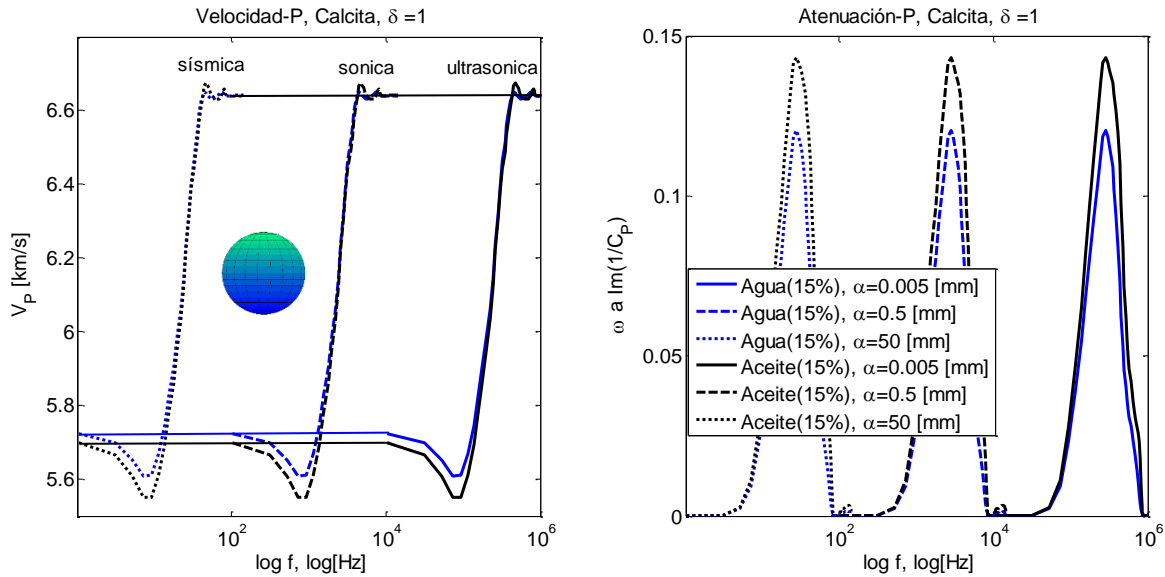


Figura 28. Velocidad y atenuación de onda P con diversos radios de la inclusión y utilizados como factor de escalamiento la banda completa de frecuencias, matriz calcita + (15%) fluido.

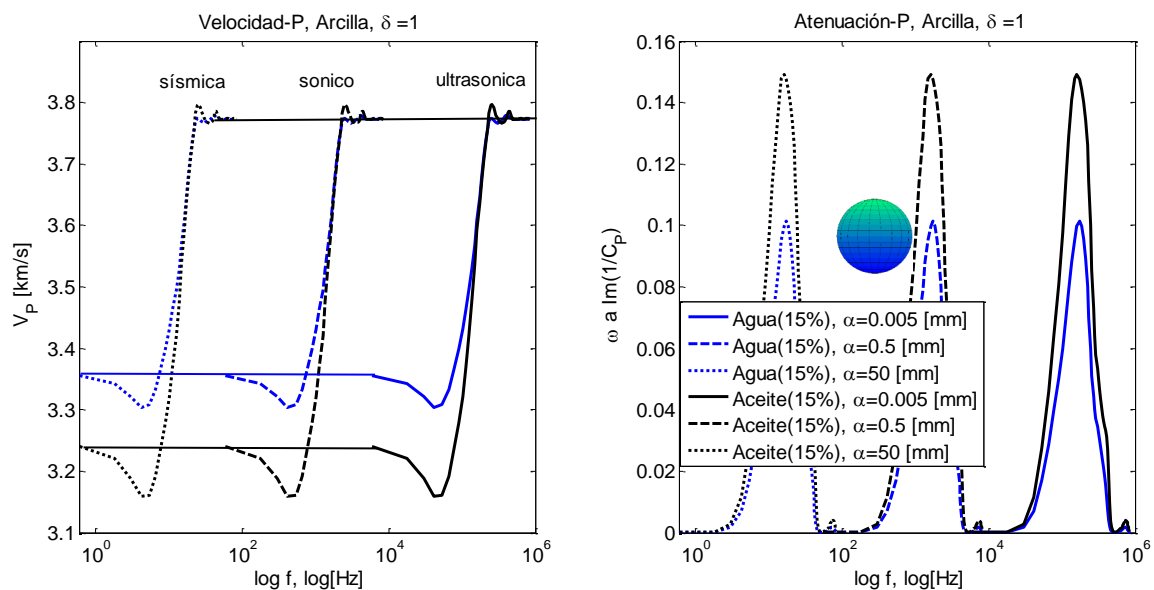


Figura 29. Velocidad y atenuación de onda P con diversos radios de la inclusión y utilizados como factor de escalamiento la banda completa de frecuencias, matriz arcilla + (15%) fluido.

Comparando la Figura 28 y Figura 29 se observa la diferencia de velocidades en las matrices, calcita y arcilla respectivamente, la línea horizontal de máxima velocidad es justamente la velocidad de la matriz, entonces para el caso de la calcita la velocidad es aproximadamente 6.62 (Km/s), mientras que la velocidad en la arcilla oscila en 3.77 (Km/s).

y la dispersión que producen las diferentes inclusiones, agua y aceite, en la gráfica de atenuación, en ella se observa que el aceite genera mayor dispersión que el agua, sin embargo, las velocidades en la calcita son mucho mayores que en la arcilla.

Se presentan en seguida las gráficas SV con los mismos parámetros que se usaron en las gráficas anteriores.

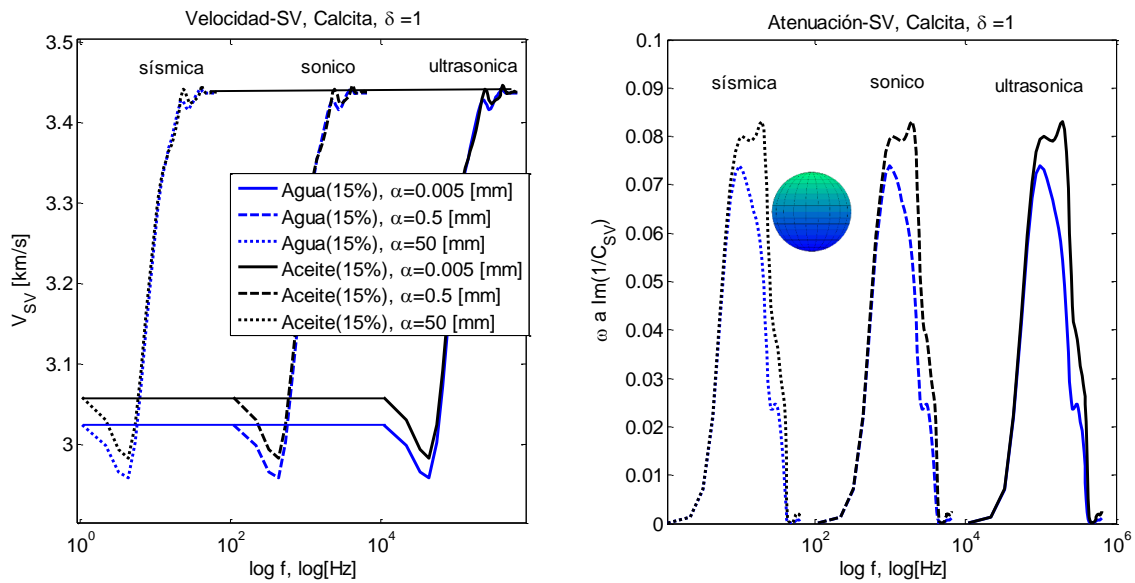


Figura 30. Velocidad y atenuación de onda SV con diversos radios de la inclusión y utilizados como factor de escalamiento la banda completa de frecuencias, matriz calcita + (15%) fluido.

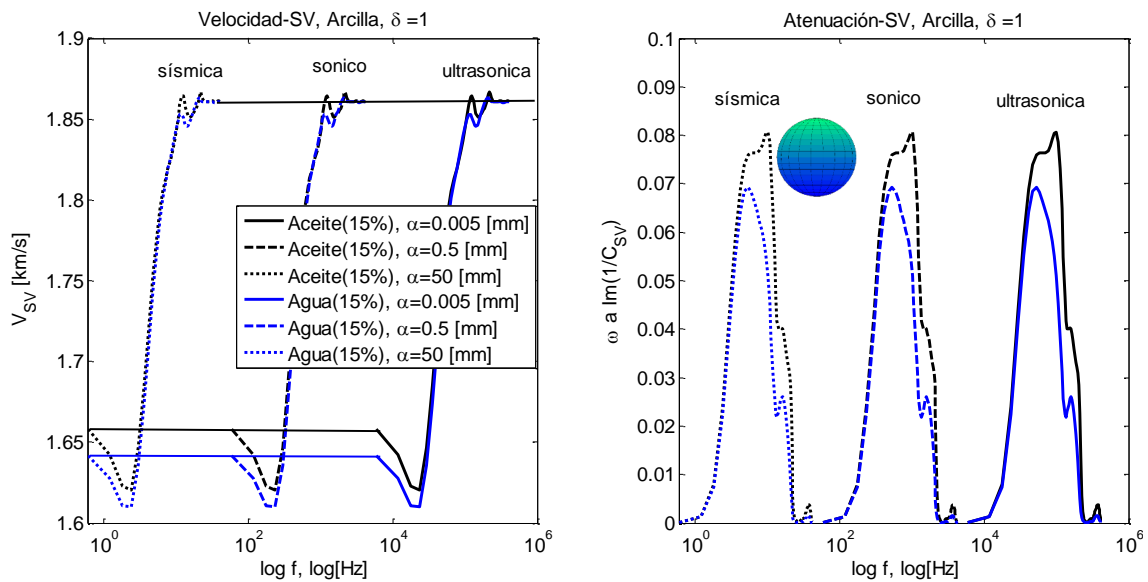


Figura 31. Velocidad y atenuación de onda SV con diversos radios de la inclusión y utilizados como factor de escalamiento la banda completa de frecuencias, matriz arcilla + (15%) fluido.

Cabe señalar que, como se comentó anteriormente, las ondas SH y SV son idénticas cuando se trata del caso isótropo, $\delta=1$.

Si se comparan las velocidades de las ondas S y P se aprecia, que la onda compresional es mucho más veloz que las ondas de corte, así mismo la dispersión que genera el fluido, es mayor en la onda P que en las S.

De acuerdo con las gráficas Figura 29 Figura 31 y la Ec. (6.1), se observa una dependencia de la frecuencia con el radio de la inclusión y a su vez las velocidades y atenuaciones están en función de la frecuencia, por ejemplo, cuando el radio es 0.005 [mm] las velocidades y atenuaciones corresponden a un rango de frecuencias ultrasónicas, que son aquellas frecuencias que se usan en mediciones de laboratorio, cuando se considera un radio de inclusión de 0.5 [mm] las velocidades aparecen a los rangos de frecuencia del registro sónico y cuando el radio es 50 [mm] los rangos de frecuencia son aquellos que se usan en la sismica.

Las siguientes figuras muestran la velocidad y la atenuación de onda P con frecuencia sónica dada por un radio de inclusión de $\alpha=0.5$ (mm) y una razón de aspecto $\delta=1$. Considerando una matriz de calcita y diferentes inclusiones, entre ellas: arcilla, cuarzo, agua, gas y aceite.

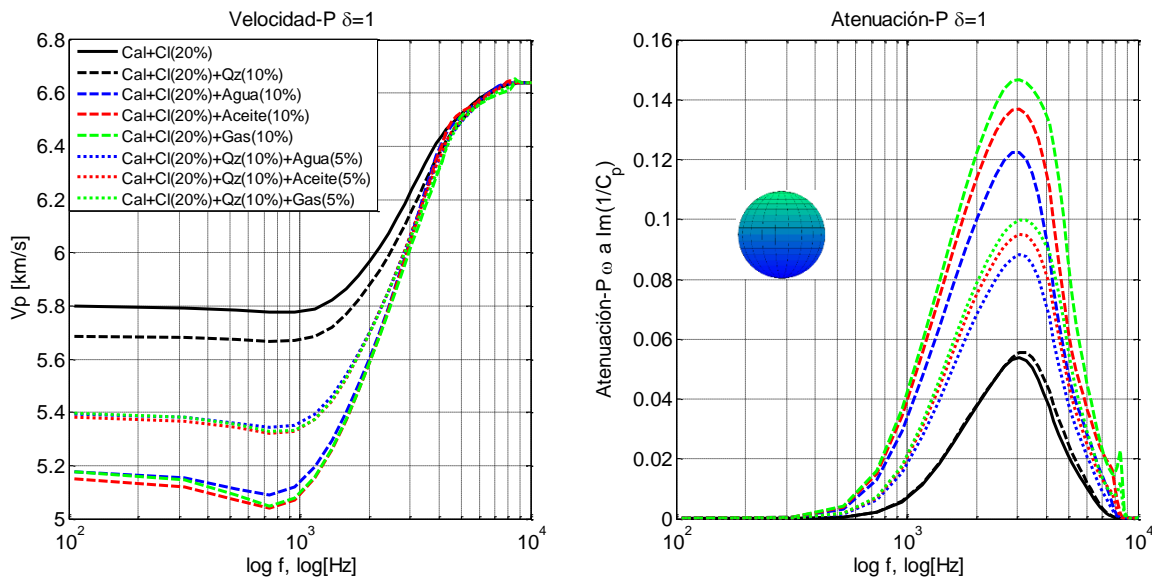


Figura 32. Velocidad y atenuación de onda P a frecuencia sónica, con matriz de calcita e inclusiones de arcilla, cuarzo, y diferentes fluidos. Radio de inclusión constante 0.5 (mm).

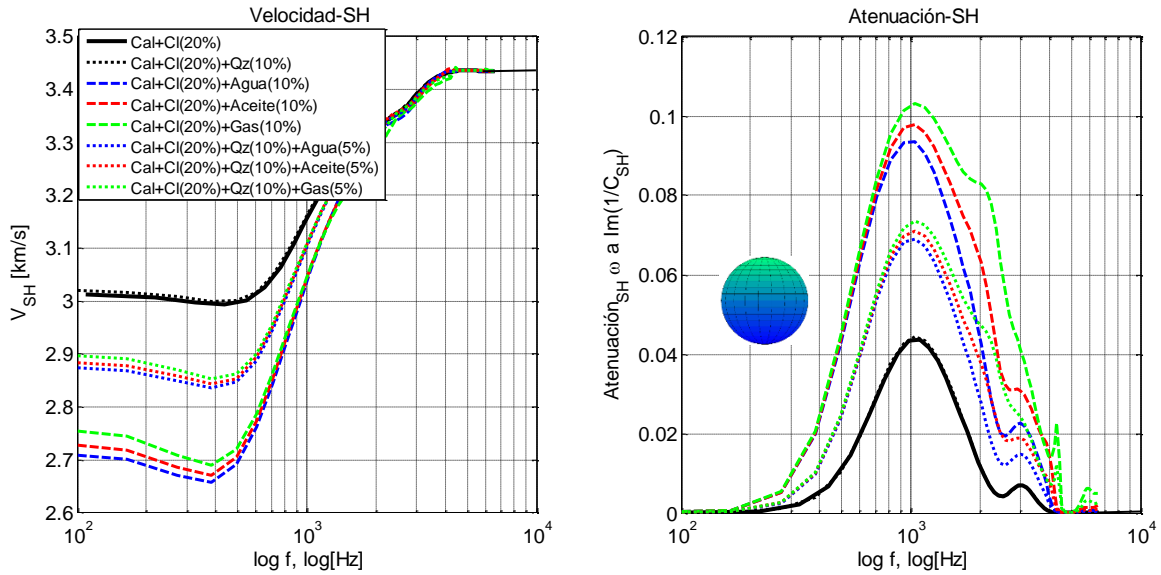


Figura 33. Velocidad y atenuación de onda SH a frecuencia sónica, con matriz de calcita e inclusiones de arcilla, cuarzo, y diferentes fluidos. Radio de inclusión constante 0.5 (mm).

En las figuras anteriores se muestra la influencia que tienen los diferentes tipos de inclusiones en las velocidades y en la atenuación, las velocidades y la atenuación de la onda P son mayores que de las ondas S. Si comparamos la Figura 32 Figura 33 se puede observar que hay un desplazamiento en el eje de las frecuencias, es decir, la atenuación máxima de la onda P se presenta a una mayor frecuencia, 3000 (Hz) aproximadamente, mientras que en las ondas S la máxima atenuación es a 1000 (Hz) de frecuencia, así mismo, el incremento de velocidad se da a una mayor frecuencia en la onda P que en la onda S.

También se analizan las velocidades y atenuaciones de onda P- a través de rocas compuestas por una matriz de calcita con 20% de arcilla y 10% cuarzo debido a que son minerales comúnmente encontrados en yacimientos carbonatados. Además, se consideró porosidad de 6% en volumen y que está saturada completamente de aceite.

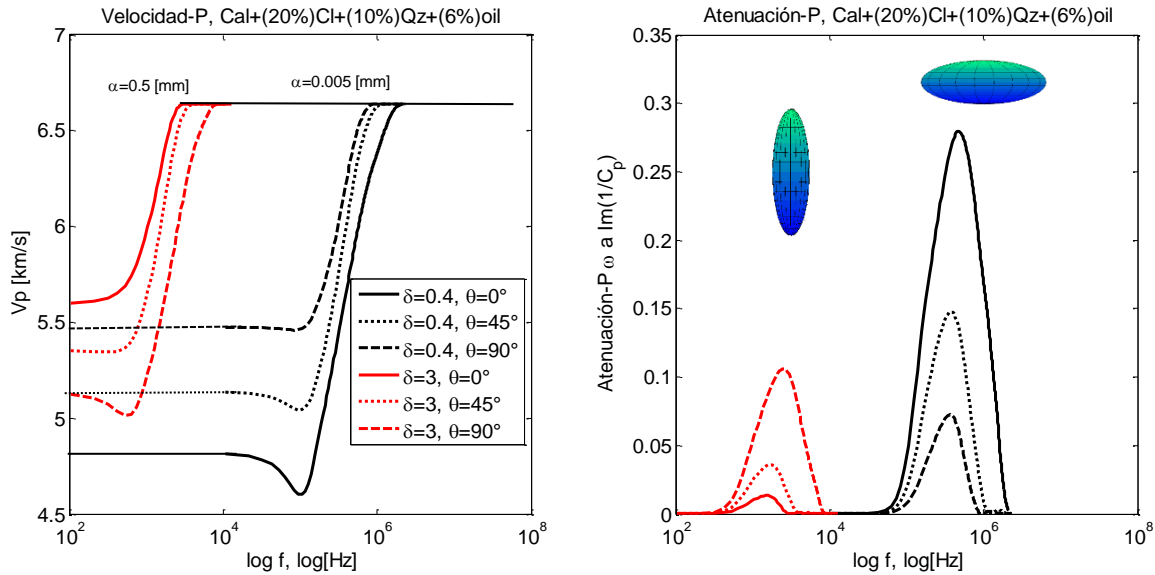


Figura 34. Velocidad y atenuación de onda P, con matriz de calcita e inclusiones de arcilla, cuarzo, y 6% de petróleo. Incidencia de onda a 0° , 45° y 90° respecto a la vertical en inclusiones con razones de aspecto $\delta=0.4$ y $\delta=3$. Cada tipo de inclusión se graficó en diferente frecuencia, sónica y ultrasónica.

La gráfica anterior muestra el comportamiento de velocidad y atenuación cuando una onda incide en diferente ángulo sobre inclusiones con diferente forma; en este caso se consideraron una razón de aspecto $\delta=3$, y $\delta=0.4$, gráfica roja y negra respectivamente. Además, se graficaron a diferentes frecuencias para visualizar con más claridad cada una de las inclusiones. Como se muestra en la Figura 28, 29, 30 y 31, las velocidades y atenuaciones tienen el mismo comportamiento y magnitud a diferentes frecuencias, sísmica, sónica y ultrasónica.

Las siguientes figuras muestran la diferencia en las velocidades y atenuaciones de ondas cuando inciden sobre inclusiones con diferente forma y a diferentes ángulos. Se muestra para cada una de las frecuencias.

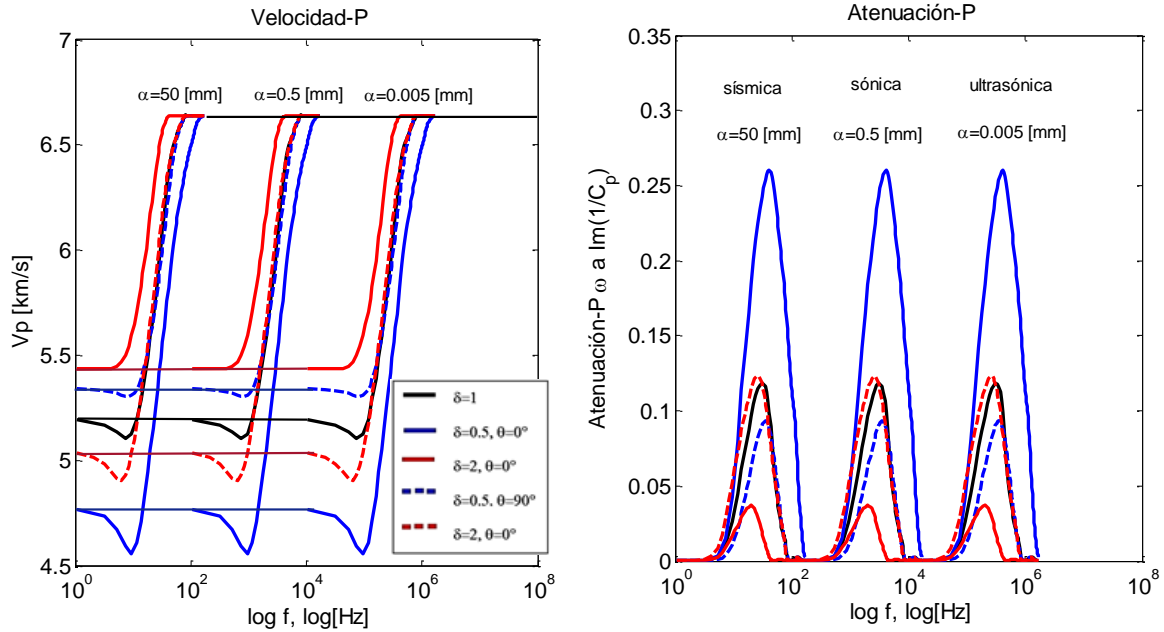


Figura 35. Velocidad y atenuación de onda P, con matriz de calcita e inclusiones de arcilla, cuarzo, y 8% de petróleo. A diferentes frecuencias dependientes del radio de la inclusión $\alpha = 0.005, 0.5$ y 50 (mm).

En la Figura 35 se grafican la misma matriz de calcita con 20% de arcilla y 10% cuarzo, la razón de aspecto de las inclusiones, $\delta = 0.5, \delta = 1$ y $\delta = 2$, y los ángulos de incidencia de las ondas es $\theta = 0^\circ$ y 90° sobre cada una de las inclusiones. Cabe mencionar que las gráficas en color negro corresponden a una razón de aspecto de 1, lo que representa el caso isótropo y por tanto el ángulo de incidencia no influye en el resultado de las gráficas.

Se observa que la mayor dispersión de onda se presenta cuando las inclusiones tienen una razón de aspecto $\delta < 1$, y el ángulo de incidencia es axial, es decir, a 0° respecto la vertical, mientras que la menor dispersión se genera en el mismo ángulo, pero para una razón de aspecto $\delta > 1$. Mientras menor sea la razón de aspecto, mayor es la atenuación que genera cuando la incidencia es vertical.

Con estas gráficas se puede analizar el impacto que tienen las diferentes variables en las velocidades de ondas sísmicas, sónicas y ultrasónicas, estas mediciones de velocidad y atenuación son fuertemente dependientes de los parámetros de entrada como: la forma de la inclusión, la fracción volumétrica de cada inclusión y las propiedades de las mismas, el ángulo en que la onda atraviesa el compuesto, y es de gran utilidad ver que la velocidad de onda es dependiente de la frecuencia que a su vez está estrechamente ligada con el radio de las inclusiones.

La composición mineralógica de rocas representada por arcilla, cuarzo y calcita, así como la saturación de fluido en la roca es considerada en el modelo dinámico. Los análisis de atenuación y dispersión de ondas elásticas a través de las bandas de frecuencia en sistemas shale son realizados mediante las propiedades mecánicas dinámicas efectivas. Estas propiedades fueron calculadas por medio del método autoconsistente para diferentes razones de aspecto.

Para reconciliar las propiedades elásticas medidas a diferentes frecuencias, se utilizó como parámetros es radio de la inclusión y frecuencia adimensional. Todos los resultados del modelado son consistentes con la fracción volumétrica, discriminado de espesores de estratos, radio de la inclusión y resolución de la longitud de onda.

6.4 Ecuación de dispersión

La dispersión de ondas acústicas es investigada con métodos experimentales, las velocidades a diferentes frecuencias son calculadas por la ecuación de dispersión y han sido comparadas con valores medidos en muestras de arenisca y lutita, los resultados implican que la dispersión en areniscas y lutitas está en buen acuerdo con la ecuación de dispersión (Zhang, Chu, Li, & Man, 2001).

La dispersión de velocidades de ondas en rocas es un aspecto ubicuo de la exploración geofísica y ha sido probado en cada una de las bandas de frecuencia. El análisis de calidad de dispersión de velocidad es necesario para aplicar los resultados de laboratorio a interpretación sísmica y de registro sísmico de pozo por medio de la extrapolación de los resultados de laboratorio a alta frecuencia, ya que el tamaño del núcleo⁸ se restringe en orden de centímetros. La extrapolación se basa en la ecuación de dispersión.

El grado de dispersión puede ser determinado si se conoce la relación entre la velocidad de la onda compresional V_p y la frecuencia f , esto se denota como $V_p(f)$. D_p muestra la diferencia del cambio de velocidad con la frecuencia.

⁸ Núcleo: Una muestra cilíndrica de roca recolectada mediante de una barrena de extracción de núcleos durante la etapa de perforación de pozos.

$$D_p = \frac{V_{p|\max}(f) - V_{p|\min}(f)}{V_{p|\min}(f)} \times 100\% \quad (6.2)$$

Donde D_p llamado grado de dispersión es la magnitud del cambio de velocidad a diferentes frecuencias, $V_{p|\max}(f)$ y $V_{p|\min}(f)$ son el máximo y el mínimo valor de la velocidad a diferentes frecuencias respectivamente.

El coeficiente de atenuación es calculado por el método del cociente de espectro y dado por la ecuación:

$$\alpha = \frac{1}{L} \ln \left(\frac{A_0}{A_1} \right) \quad (6.3)$$

Donde L es el tamaño del núcleo y A_1 es la amplitud de la señal, A_0 es la amplitud de la señal en un bloque de aluminio de el mismo tamaño que el núcleo, el aluminio se generalmente considerado un medio estándar sin atenuación de onda acústica (Zhang, Chu, Li, & Man, 2001).

El factor de calidad Q es dado por:

$$Q = \frac{\pi f}{\alpha V_p} \quad (6.4)$$

donde f es la frecuencia, α es el coeficiente de atenuación, y V_p es la velocidad.

El factor de calidad Q es una medida de cuán disipativo es el material, cuando menor es Q , mayor es la disipación que genera el material. Hay muchas maneras de expresar Q (Mavko, Mukerji, & Dvorkin, 2009).

La viabilidad y la racionalidad de la extrapolación de la velocidad ha sido investigada en orden de extrapolar la velocidad de mediciones de laboratorio en las bandas de baja frecuencia. En el supuesto que la roca es descrita como modelo constante Q , la ecuación de dispersión se usa para el cálculo de velocidad a diferentes frecuencias y se muestra como:

$$\frac{V_1}{V_2} = 1 + \left(\frac{1}{\pi Q} \right) \ln \left(\frac{f_1}{f_2} \right) \quad (6.5)$$

donde Q es el factor de calidad, y V_1, V_2 son las velocidades a dos diferentes frecuencias f_1, f_2 respectivamente.

El error entre el valor de las mediciones y el valor calculado de la velocidad está dado por el cociente del valor absoluto de la diferencia del valor medido y el valor calculado sobre el valor medido, la expresión es la siguiente.

$$D_{(m,c)}(\%) = \frac{|V_c - V_m|}{V_m} \times 100\%, \quad (6.6)$$

donde V_c, V_m son los valores calculados y los valores medidos de velocidad respectivamente.

Con ayuda de la Ec. (6.5), es posible predecir las velocidades a diferentes frecuencias, conociendo las velocidades a frecuencias supersónicas medidas en laboratorio.

6.5 Identificación del potencial de producción de yacimientos no convencionales

Los yacimientos no convencionales en particular los shale son un caso especial porque son roca generadora⁹, roca almacén¹⁰ y trampa al mismo tiempo, esto hace que la interpretación de registros sea difícil porque la mayoría de las técnicas de interpretación de registros están basados en formaciones convencionales y calibrados por tipos de roca estándar como la limolita, dolomita y arenisca. La composición mineralógica de los shale es muy compleja y la variación en la densidad, resistividad, y cantidad de material radiactivo puede causar un serio error en la estimación de porosidad y saturación de fluidos. Se usan registros especiales para identificar áreas de posible producción de hidrocarburos por medio de la localización de

⁹ Roca generadora: Una roca rica en contenido de materia orgánica que, si recibe calor en grado suficiente, generará petróleo o gas. Las rocas generadoras típicas, normalmente lutitas o calizas, contienen aproximadamente un 1% de materia orgánica y al menos 0,5% de carbono orgánico total (COT). (glosario Schlumberger)

¹⁰ Roca almacén: Es aquella roca que sea capaz de almacenar a los hidrocarburos. Generalmente tiene una extensión geográfica mayor a la de los yacimientos, debido a que estos están restringidos a la trampa. La mayor parte de las acumulaciones de petróleo en el mundo se encuentran en rocas almacenadoras clásticas o detríticas, incluyendo las areniscas, pero en México la mayor producción es en rocas carbonatadas. Para que un cuerpo o estrato pueda considerarse como almacenadora debe de ser (glosario Schlumberger):

- Poroso en intervalos de 5% a 30%
- Permeable para permitir el movimiento de los fluidos
- Mostrar cierta continuidad lateral y vertical

alta concentraciones de carbón orgánico total (TOC), materia orgánica, composición mineral, y áreas propensas al desarrollo de una red de fracturas. La identificación de estas áreas es la llave del éxito en la terminación¹¹ de un complejo shale

Las propiedades mecánicas de la roca pueden ayudar a identificar intervalos shale propensos a tener fracturas naturales y alta probabilidad de crear una red de fracturas durante el fracturamiento hidráulico. (Grieser & Bray, 2007) propusieron un vínculo entre las propiedades mecánicas de la roca, la red de fracturas creadas durante un proceso de fracking¹² y los resultados de producción.

Una deseable combinación de propiedades mecánicas es seleccionada para ayudar a localizar áreas en los yacimientos shale que tienen una propensión a fracturarse como una red con suficiente extensión de área para impactar en los resultados de producción.

Con ayuda de los datos del registro sísmico es posible convertir las velocidades de ondas en parámetros elásticos, razón de Poisson y módulo de Young, estos parámetros son de los más importantes y pueden ser usados para identificar intervalos de ductilidad y fragilidad en el shale y también determinar barreras de esfuerzo. A continuación, se muestra una gráfica que indica la región dúctil y frágil.

11 Terminación de Pozos: Es el sistema de procesos y accesorios que se instalan dentro del pozo con el objetivo de conducir fluidos de las formaciones a la superficie o viceversa.

12 Fracking (fracturamiento hidráulico): Un tratamiento de estimulación ejecutado en los pozos de petróleo y gas de los yacimientos de baja permeabilidad (shale). Fluidos con diseños técnicos especiales son bombeados a alta presión y alto régimen de bombeo en el intervalo a tratar, produciendo la apertura de una fractura vertical con el fin de conducir los hidrocarburos desde la formación hacia el pozo.

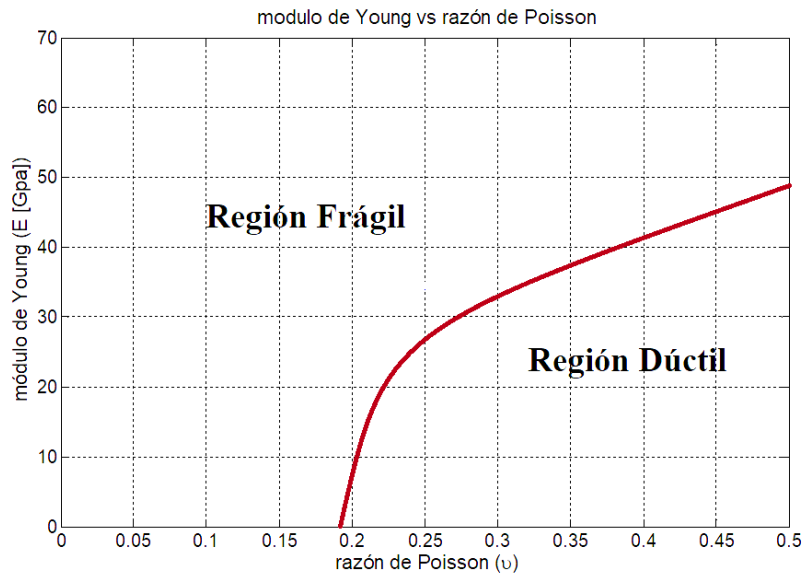


Figura 36. Razón de Poisson contra módulo de Young indicando las regiones dúctil y frágil. (Grieser & Bray, 2007).

La Figura 36. Razón de Poisson contra módulo de Young indicando las regiones dúctil y frágil. .Figura 36 puede ser usada para identificar zonas frágiles en que son favorables para realizar un fracturamiento hidráulico, además, con la aplicación del método autoconsistente caso estático, que se describe en el capítulo 1, podemos conocer cómo cambian los parámetros de módulo de Young y razón de Poisson respecto a la dirección en que son medidas. Esto proporciona mejor información de la dirección más probable de la red de fracturas.

7 Resultados numéricos Caso Estático

El modelo matemático autoconsistente tiene la virtud de considerar el análisis completo de las propiedades elásticas para compuestos heterogéneos (Sabina & Willis, 1988).

Las ecuaciones autoconsistentes se resuelven para obtener las propiedades efectivas del vector de Hill, con él calculamos las velocidades de las ondas P y S para todo tipo de rocas. En el caso estático se determinan las propiedades elásticas efectivas de los materiales compuestos al igual que en el caso dinámico, pero además se pueden generar plantillas de física de rocas en las que se grafican la razón de Poisson contra el módulo de Young axial y transversal. Estas plantillas representan la integración directa de los datos múltiples generados del análisis de núcleos de pozo, registros de pozo, estudios de yacimientos y geociencias.

Los diagramas ternarios¹³ son la forma más fácil de correlacional tres componentes minerales y son ampliamente usados. El clásico diagrama ternario basado en Arcilla, Cuarzo y Carbonato es usado para describir las variaciones de litofacies de yacimientos respecto a la profundidad, por ello las plantillas son una herramienta útil para el análisis integrado de múltiples datos generados por el modelado petrológico, geofísico y geológico.

Los yacimientos shale son un buen ejemplo de aplicación del modelo estático, ya que se componen básicamente de una estructura mineral sólida e inclusiones de materia orgánica y fluidos, además de que presentan planos de laminación heterogéneos que provocan anisotropía.

Las definiciones isotrópicas para las constantes elásticas son a veces extendidas a materiales anisótropos (Mavko, Mukerji, & Dvorkin, 2009). Un ejemplo es el caso de un material transversalmente isótropo (TI) con esfuerzo uniaxial aplicado a lo largo del eje de simetría (eje z) tal que,

$$\sigma_{33} \neq 0 \quad \sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{22} = \sigma_{23} = 0$$

¹³ *Diagrama ternario: Es una expresión gráfica de observaciones cuantitativas. Representa gráficamente mediante un punto la distribución porcentual de tres variables.*

El módulo de Young y razón de Poisson axial y transversal parten de las siguientes ecuaciones:

$$E_a = E_{33} = \frac{\sigma_{33}}{\varepsilon_{33}} = c_{33} - \frac{2c_{31}^2}{c_{11} + c_{12}} \quad (7.1)$$

$$\nu_a = \nu_{31} = \nu_{32} = -\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{33}} = \frac{c_{31}}{c_{11} + c_{12}} \quad (7.2)$$

Si el campo de esfuerzos uniaxial es rotado del eje de simetría de forma que

$$\sigma_{11} \neq 0 \quad \sigma_{33} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{22} = \sigma_{23} = 0$$

Entonces se puede definir otro módulo de Young y razón de Poisson (Mavko, Mukerji, & Dvorkin, 2009).

$$E_t = E_{11} = \frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}} = c_{11} + \frac{c_{31}^2(-c_{11} + c_{12}) + c_{12}(-c_{33}c_{12} + c_{31}^2)}{c_{33}c_{11} + c_{31}^2} \quad (7.3)$$

$$\nu_t = \nu_{21} = \nu_{12} = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = \frac{c_{33}c_{12} - c_{31}^2}{c_{33}c_{11} - c_{31}^2} \quad (7.4)$$

$$\nu_{t_3} = \nu_{13} = \nu_{23} = -\frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}} = \frac{c_{31}(c_{11} - c_{12})}{c_{33}c_{11} - c_{31}^2} \quad (7.5)$$

Si sustituimos las relaciones de las constantes elásticas (5.8) con los elementos del vector de Hill $(2k, l, q, n, 2p, 2m)$, en las ecuaciones (7.1) - (7.4). obtenemos el módulo de Young y la razón de Poisson en términos del vector de Hill que es el que usamos en el modelo autoconsistente (Sabina-Ciscar, Bravo-Castillero, Guinovart-Díaz, Rodríguez-Ramos, & Valdiviezo-Mijangos, 2002).

$$E_a = n - \frac{2l^2}{k} \quad (7.6)$$

$$\nu_a = \frac{l}{k} \quad (7.7)$$

$$E_t = \frac{k+m}{2} + \frac{\frac{q^2}{2}(k-3m) - \frac{n}{4}(k-m)^2}{\frac{n}{2}(k+m) - q^2} \quad (7.8)$$

$$\nu_t = k - \frac{np}{E_a} \left[k + \frac{np}{E_a} \right]^{-1} = \nu_t = \frac{k - \frac{np}{E_a}}{k + \frac{np}{E_a}} \quad (7.9)$$

Con las ecuaciones (7.6)-(7.9) se puede obtener un módulo de Young y una razón de Poisson axial y transversal para cada fracción volumétrica de los componentes, por ejemplo, si tenemos como valor inicial una fracción volumétrica de 1 para el cuarzo y una fracción volumétrica $\phi=0$ para la arcilla, obtenemos un punto que es la esquina superior izquierda del diagrama (100% cuarzo), posteriormente va disminuyendo la fracción volumétrica del cuarzo y va aumentando la de la arcilla en la misma proporción y a cada decremento de la fracción volumétrica del primer componente se determina un módulo de Young y una razón de Poisson, y así sucesivamente hasta tener 0% de cuarzo y 100% de arcilla, esto genera la línea cuarzo-arcilla del diagrama ternario, lo mismo para obtener la línea cuarzo-calcita y calcita-arcilla, de esta manera se generan los diagramas ternarios que relaciona el módulo de Young y la razón de Poisson, Figura 37.

En las siguientes gráficas se muestran los diagramas axial y transversal para una razón de aspecto $\delta=1$, es decir inclusiones esféricas. En ellas se aprecia que ambas gráficas, axial y transversal son iguales debido a que las inclusiones son esferas, las mediciones de estos parámetros elásticos son iguales sin importar la dirección en que sean medidas, caso isótropo. Los puntos de cada componente: cuarzo, arcilla, calcita, coincide en la gráfica axial y transversal.

Los siguientes diagramas ternarios, cuarzo, calcita, arcilla son para una razón de aspecto $\delta=1$ y con algunas fracciones de agua.

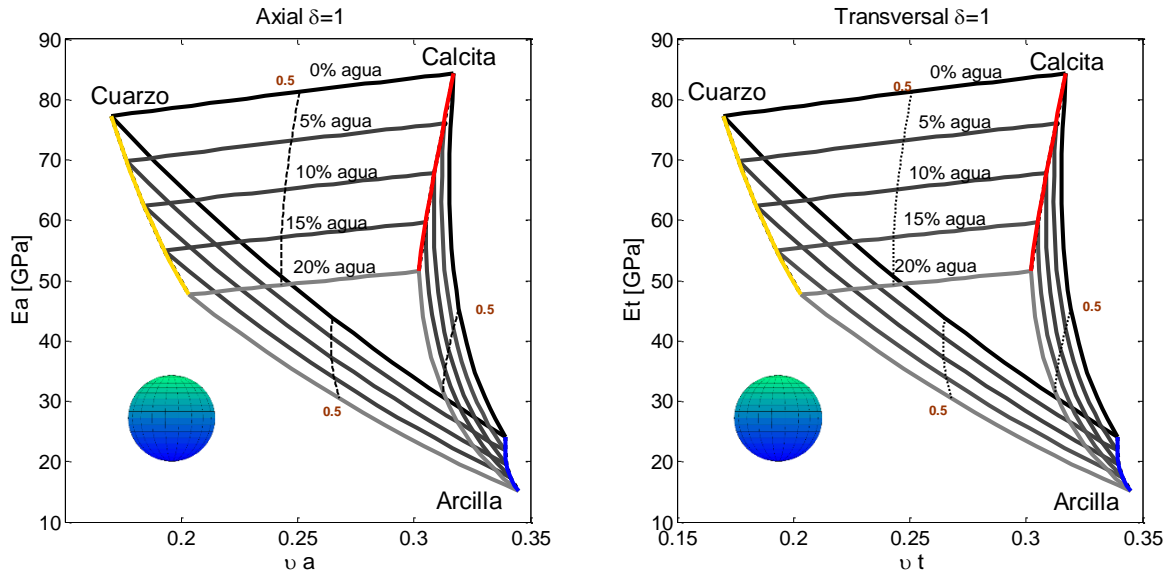


Figura 37. Diagrama axial y transversal considerando inclusiones esféricas y con algunas fracciones de agua salada.

Para razón de aspecto $\delta=1$ del modelo TI reproduce los resultados del modelo isótropo, inclusiones esféricas, con la presencia de fluido, en este caso salmuera, las propiedades geomecánicas de la roca heterogénea se desplazan hacia los valores de la arcilla.

Cuando el porcentaje de fluido aumenta, el área que encierra el diagrama ternario se reduce y para rocas dominadas por cuarzo y calcita, la presencia de fluido impacta más las propiedades elásticas que en el caso de la arcilla.

La Figura 38 muestra el comportamiento de la razón de Poisson de cada mineral con el correspondiente incremento de la fracción volumétrica del fluido en cuestión, en este caso agua, así mismo la figura 39 muestra el módulo de Young en función del contenido de fluido.

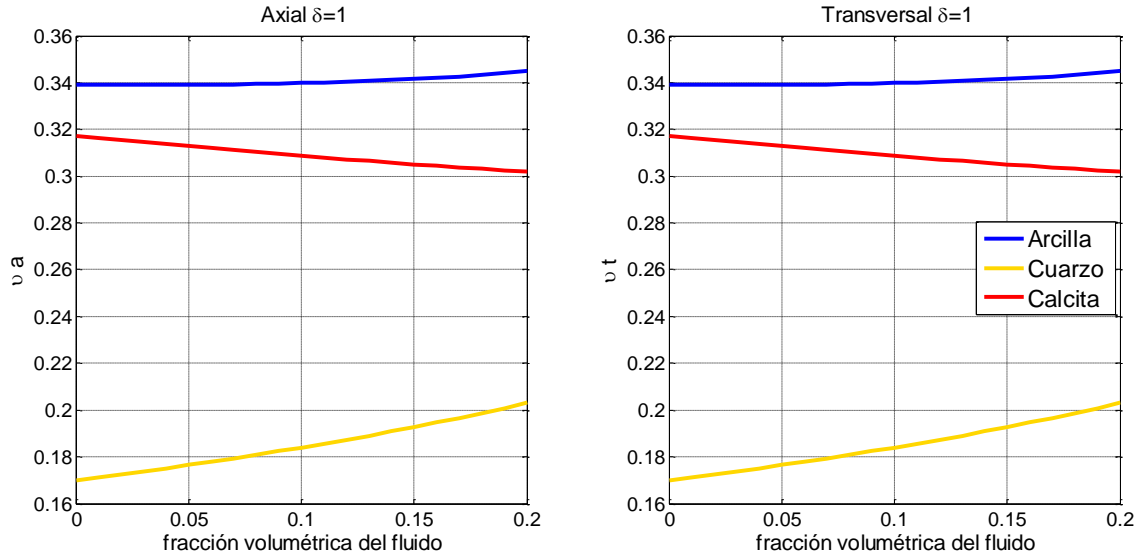


Figura 38. Graficas razón de Poisson contra la fracción volumétrica del agua para una razón de aspecto $\delta=1$.

Con la presencia de agua, la razón de Poisson aumenta para el cuarzo, también para la arcilla y disminuye en la calcita. Se observa entonces que el contenido de fluidos afecta de manera diferente a los distintos tipos de roca.

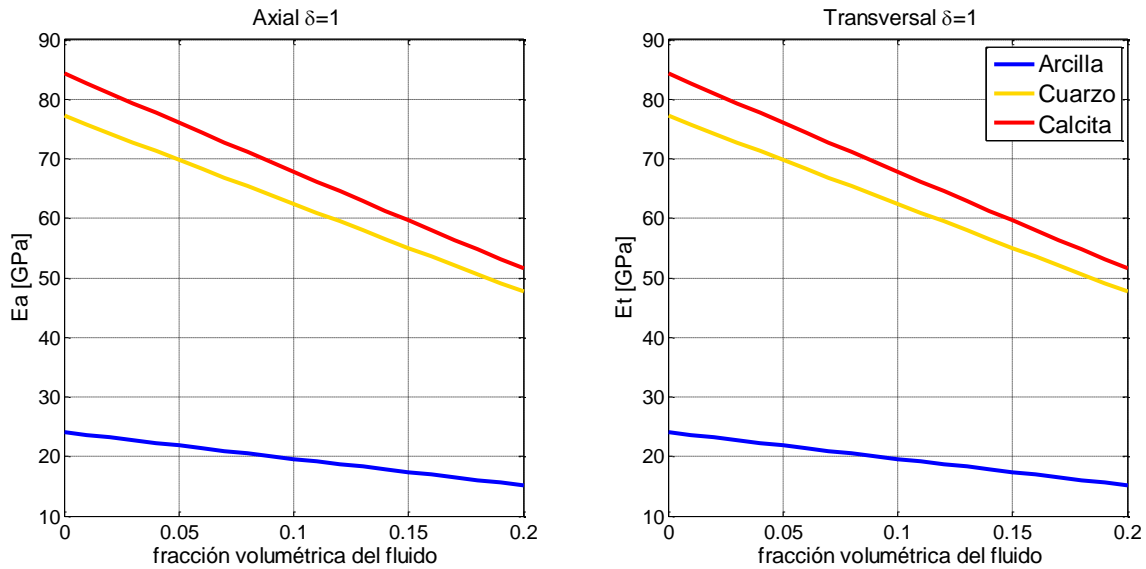


Figura 39. Graficas del módulo de Young contra la fracción volumétrica del agua para una razón de aspecto $\delta=1$.

los tres tipos de roca presentan un decremento en módulo de Young conforme aumenta la presencia de fluido, éste decremento no es el mismo en los tres casos

Se comprobó que los templates no sólo se desplazan de lugar con el aumento de fluido, sino que también reducen su tamaño y sufren distorsión debido a que los parámetros elásticos (módulo de Young y razón de Poisson) de cada material tienen un comportamiento distinto en presencia de fluido.

La siguiente gráfica muestra el diagrama ternario, Figura 37, y la zona de delimitación de área dúctil y frágil de la Figura 36.

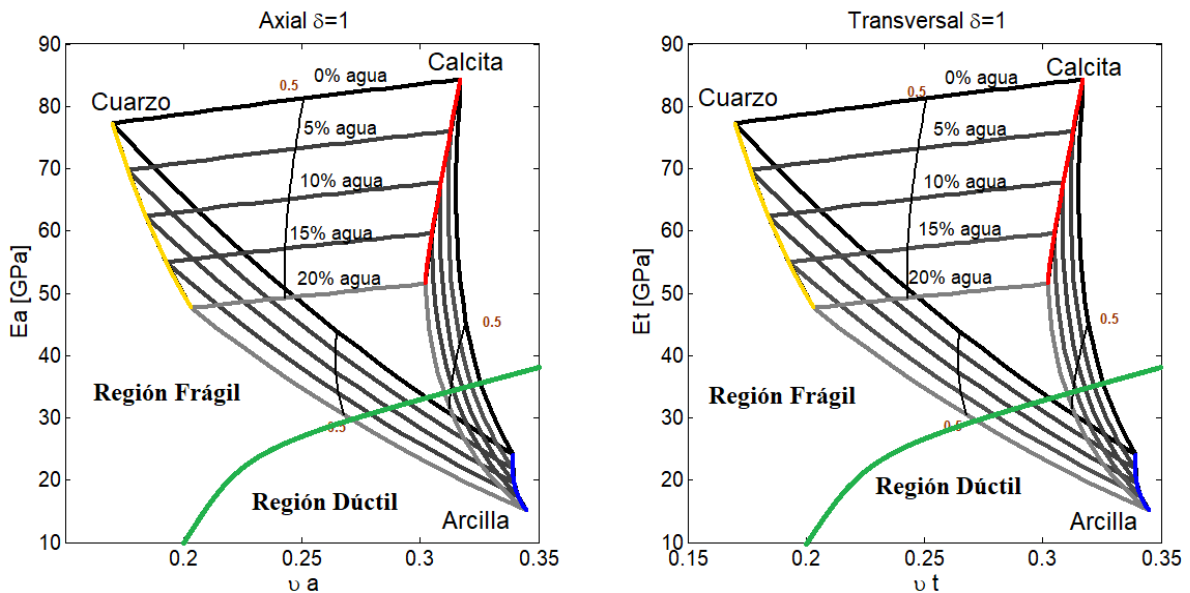


Figura 40. Diagrama axial y transversal considerando inclusiones esféricas y con algunas fracciones de agua salada considerando la línea divisoria entre la región dúctil y la región frágil.

Es importante mencionar que la arcilla no es estrictamente un mineral, sino un conglomerado de diferentes minerales dependiendo el ambiente sedimentario donde fue depositado, los principales minerales arcillosos son: Caolinita, Clorita, Illita y Montmorillonita. Esto significa entonces que los diagramas pueden ser mejor ajustados si se conoce cuál es el tipo de mineral arcilloso que predomina en la arcilla.

En la siguiente gráfica, Figura 41, se muestra el amplio rango de parámetros elásticos que puede tener la arcilla dependiendo de la concentración de tres de los minerales arcillosos: Illita, Clorita y Caolinita, (no se encontró información de los parámetros elásticos de la Montmorillonita)

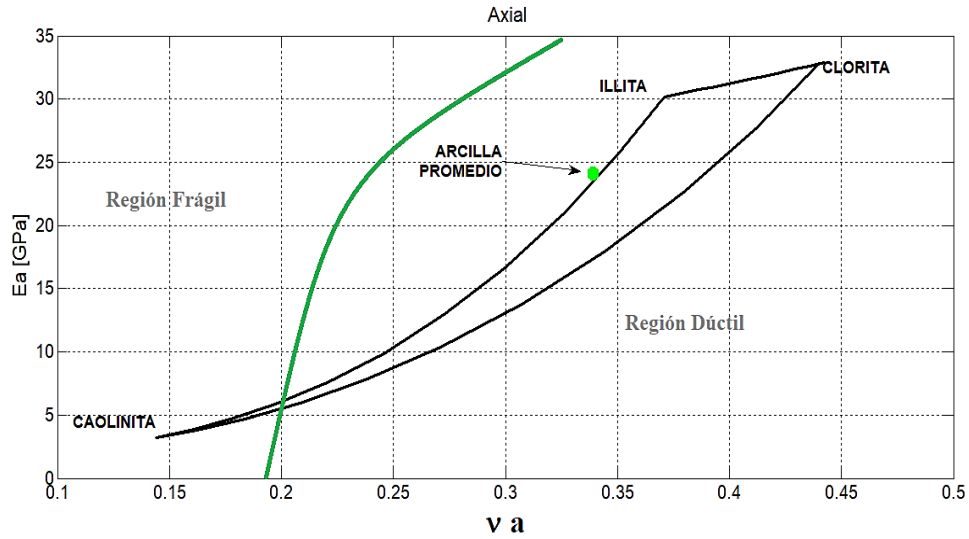


Figura 41. Diagrama ternario de minerales arcillosos: Illita, Clorita, Caolinita. Incluyendo las regiones frágil y dúctil

La línea verde divide la zona cuyas propiedades del material se consideran dúctiles, con la zona con propiedades frágiles. La Figura 41 muestra la posibilidad de mejorar los diagramas ternarios calcita-cuarzo-arcilla, si se conoce el tipo de mineral arcilloso predominante. Es decir, la arcilla cubre toda un área donde puede situarse dependiendo de la concentración de los minerales arcillosos, la arcilla que se consideró en los diagramas ternarios es un promedio entre los diferentes minerales arcillosos (Illita, Clorita y Caolinita), en la literatura se encuentra como (arcilla Han), (Mavko 2009).

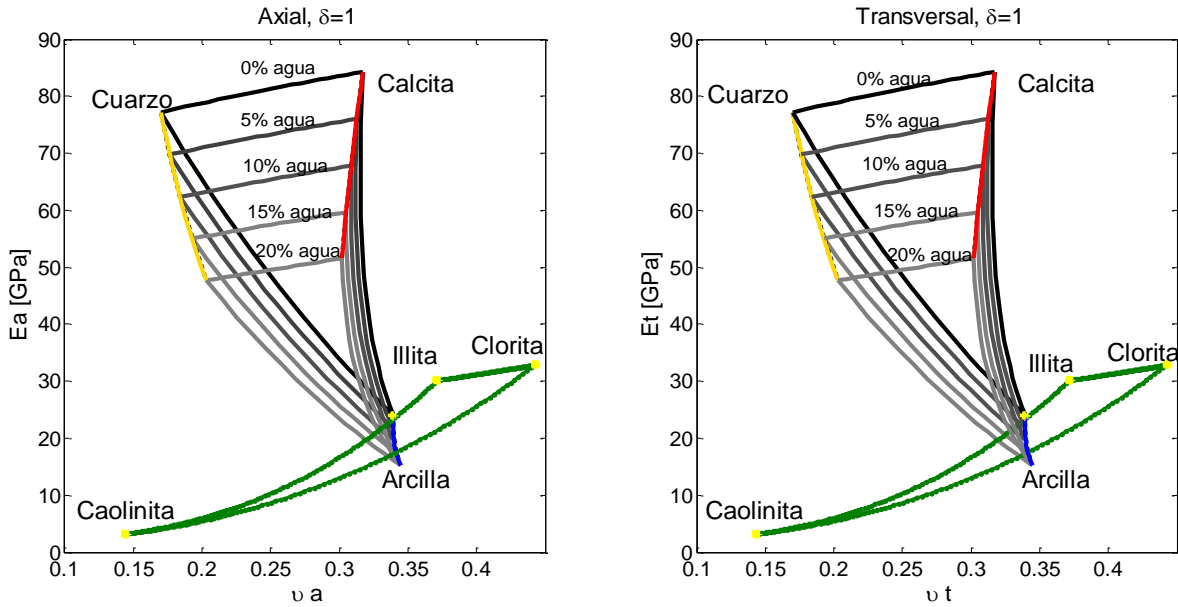


Figura 42. Diagrama axial y transversal considerando inclusiones esféricas y con algunas fracciones de agua incluyendo el área donde pueden situarse las propiedades arcillosas.

Los siguientes diagramas ternarios, cuarzo, calcita, arcilla, son para una razón de aspecto $\delta=0.5$

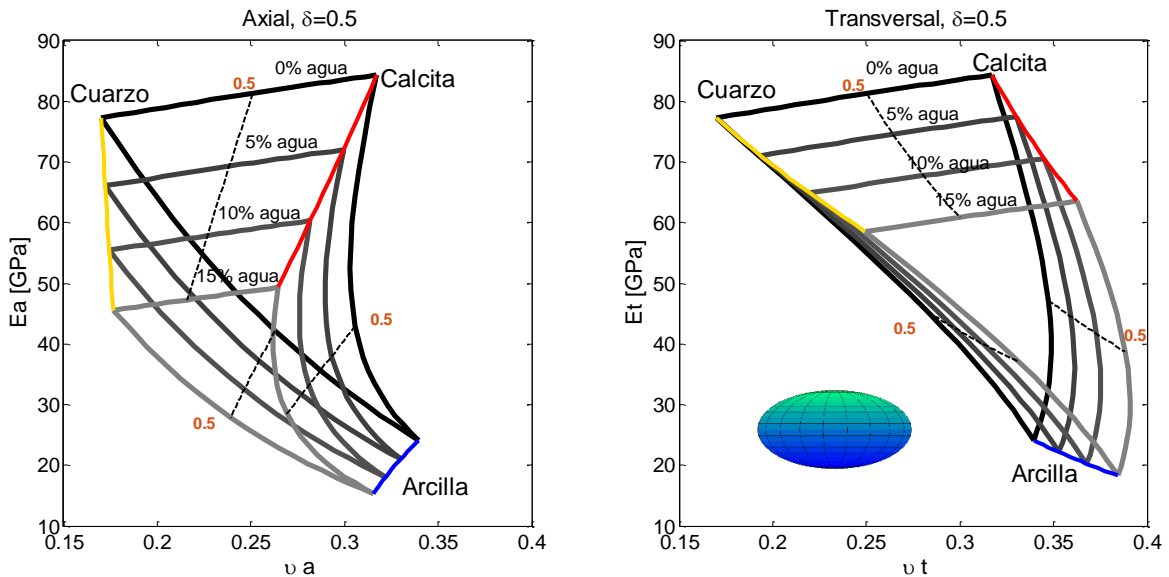


Figura 43. Diagramas axial y transversal para una razón de aspecto $\delta=0.5$ y diferentes porcentajes de agua con sal.

En el caso de un medio TI aparecen dos módulos de Young y dos razones de Poisson, axial y transversal (Mavko, Mukerji, & Dvorkin, 2009).

Cuando la razón de aspecto es diferente de 1, es cuando aparece la anisotropía, esto puede verse en la diferencia de las trayectorias entre las dos gráficas de la Figura 43

Conforme la razón de aspecto se aleja del valor $\delta=1$, las fracciones de fluido que el modelo admite son menores. Cuando $\delta \ll 1$ significa que la forma de las inclusiones es más plana, lo que se traduce como un aumento de anisotropía y cuando δ se acerca al valor de uno esa anisotropía disminuye hasta ser el caso isótropo $\delta=1$

Si se comparan los diagramas axial y transversal, cuando tenemos el 100% de un mineral (vértices) ambas gráficas coinciden en esos valores debido a que ese punto está bien representado por las propiedades puras del material. Aunque las trayectorias de un mineral a otro cambian debido a la forma de las inclusiones.

En ambos diagramas con la presencia de fluido se desplazan las propiedades geomecánicas hacia la región dúctil que es donde se encuentran las propiedades de la arcilla.

La Figura 43 muestra que al cambiar la forma de las inclusiones a una razón de aspecto $\delta=0.5$, los diagramas axial y transversal cambian su trayectoria al pasar de un mineral a otro.

Cuando tenemos el diagrama ternario sin considerar fluido, los vértices que representan el 100% de un material, coinciden en el caso axial y transversal, sin embargo, las trayectorias de un material a otro no son las mismas en ambas gráficas. Es aquí donde se demuestra la influencia que tiene la anisotropía en las mediciones de velocidad de ondas, ya que las mediciones del tiempo de arribo de las ondas dependerán del ángulo de medición respecto la orientación de laminación.

Cuando la anisotropía es grande la cantidad de fluido que puede ser modelada es menor, como se comentó antes, cuando la forma de la inclusión es muy plana puede verse como una carga vertical muy grande que deforma la forma del poro y granos y reduce la porosidad y en consecuencia el contenido de fluidos.

Cuando se encuentran hidrocarburos en lutitas se le considera a esto un yacimiento no convencional, porque el fluido no tuvo la oportunidad de migrar a otra zona de menor presión,

se quedó atrapado en la roca generadora, en este tipo de yacimientos es frecuente encontrar una presión de formación anormalmente alta al gradiente de presión normal.

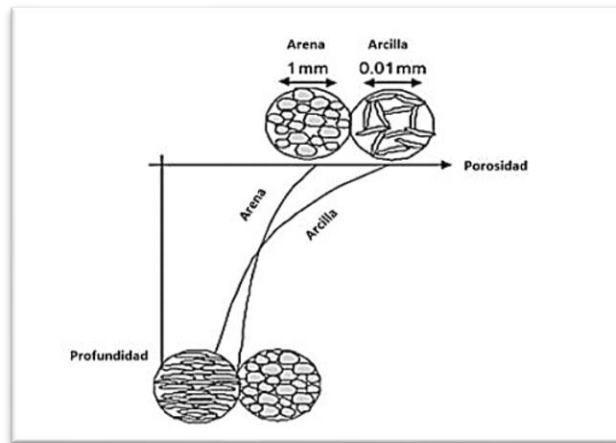


Figura 44. Proceso de compactación para arcilla y arena. (Schön, 2011)

La Figura 44 es una forma esquemática de representar el reacomodo de las partículas o minerales cuando están a mayor profundidad, es decir, sometidos a mayor presión vertical, esto genera reducción de porosidad y una laminación por parte de la arcilla que luce similar a una inclusión con forma de disco plano, $\delta < 1$.

En las siguientes gráficas, Figura 45 y Figura 46, se comparan la razón de Poisson y el módulo de Young contra el contenido de fluido para una razón de aspecto $\delta = 0.5$ similar a las Figuras 38 y 39 respectivamente con la diferencia de que además de agua, la inclusión fluida se consideró aceite y gas, fue más útil verlo a través de estas gráficas que a través de los ternarios porque es difícil ver las diferencias.

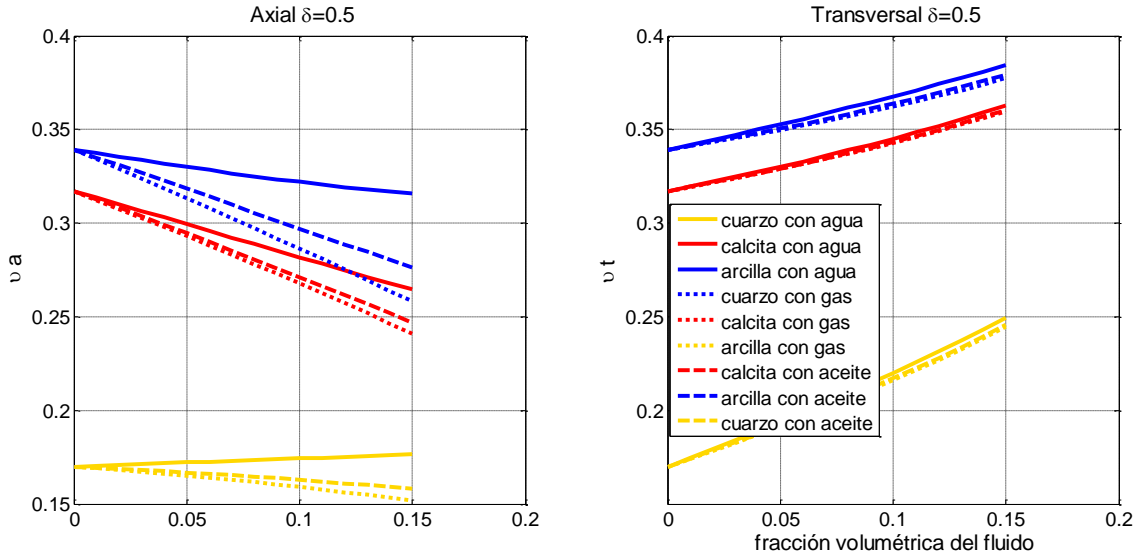


Figura 45. Graficas razón de Poisson contra la fracción volumétrica del agua para una razón de aspecto $\delta=0.5$

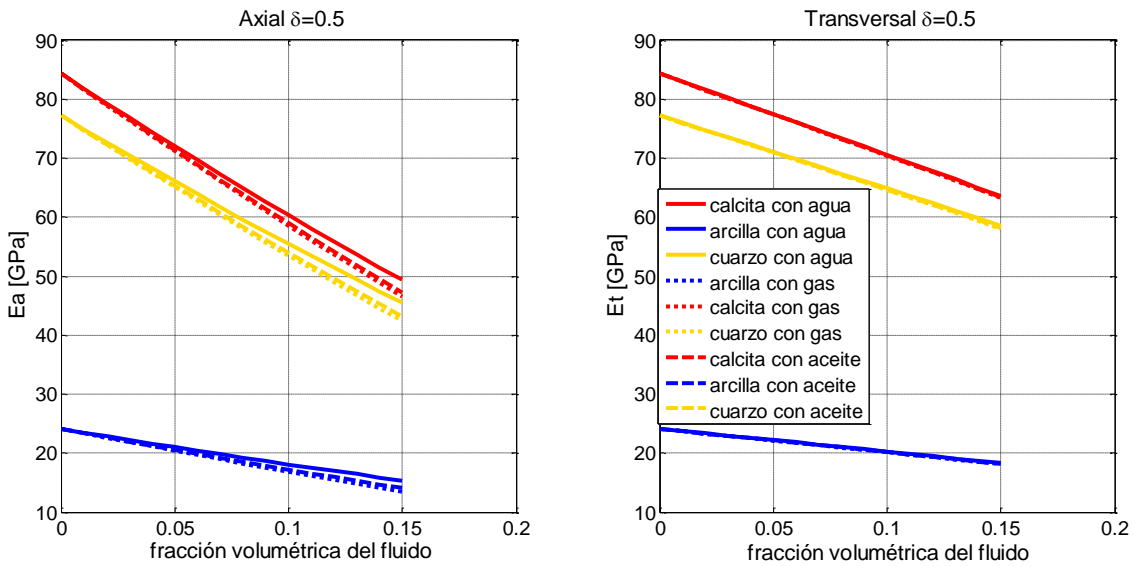


Figura 46. Graficas módulo de Young contra la fracción volumétrica del agua para una razón de aspecto $\delta=0.5$

Para el caso del módulo de Young respecto a la fracción volumétrica del fluido, el comportamiento es parecido en los tres tipos de fluido, agua, aceite y gas.

Para la razón de Poisson se observa diferencia cuando el fluido es agua, aceite o gas, el comportamiento es muy distinto en el diagrama axial y transversal, ya que en el primero las gráficas son decreciente y en el segundo crecientes. Se observa también que, en los dos casos las gráficas cuando el fluido es aceite o gas están por debajo de la gráfica de agua. Esto

demuestra que el tipo de fluido influye también en las propiedades elásticas de todo el compuesto, así como el ángulo de medición de las propiedades.

Al igual que la Figura 42 también se realizaron diagramas donde se incluye el área donde pueden situarse las propiedades de la arcilla para razones de aspecto diferentes de uno. Véase anexo B.

Los siguientes diagramas ternarios, cuarzo, calcita, arcilla son para una razón de aspecto $\delta=0.2$ y con algunas fracciones de agua.

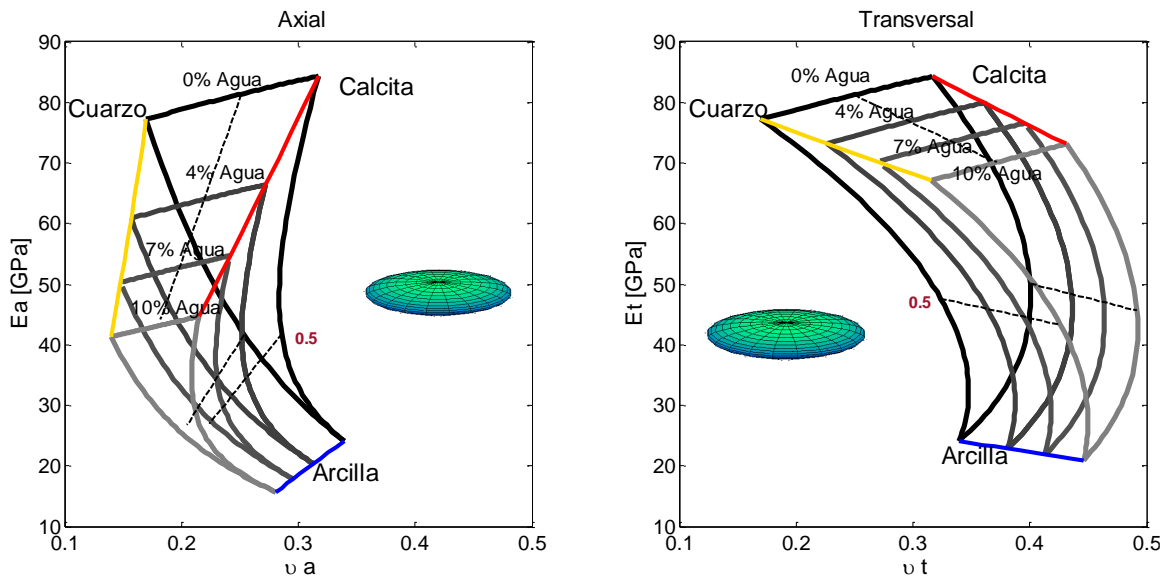


Figura 47. Diagramas axial y transversal para una razón de aspecto $\delta=0.2$ y diferentes porcentajes de agua.

La Figura 47 muestra los diagramas ternarios con diferentes proporciones de fluido, de 0 a 10%, como se mencionó anteriormente, cuando la razón de aspecto es más lejana al valor 1, las inclusiones tienen una forma más compacta lo que reduce la porosidad y por lo tanto también reduce cantidad de fluido que puede estar contenida en los poros.

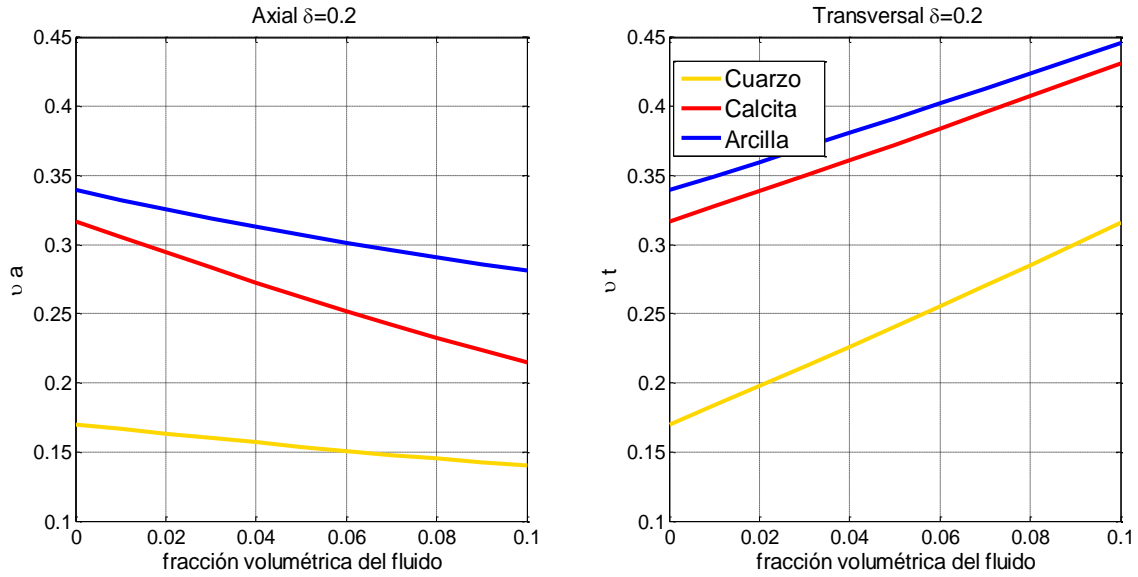


Figura 48. Graficas del parámetro elástico, razón de Poisson respecto la fracción volumétrica del agua para una razón de aspecto $\delta=0.2$.

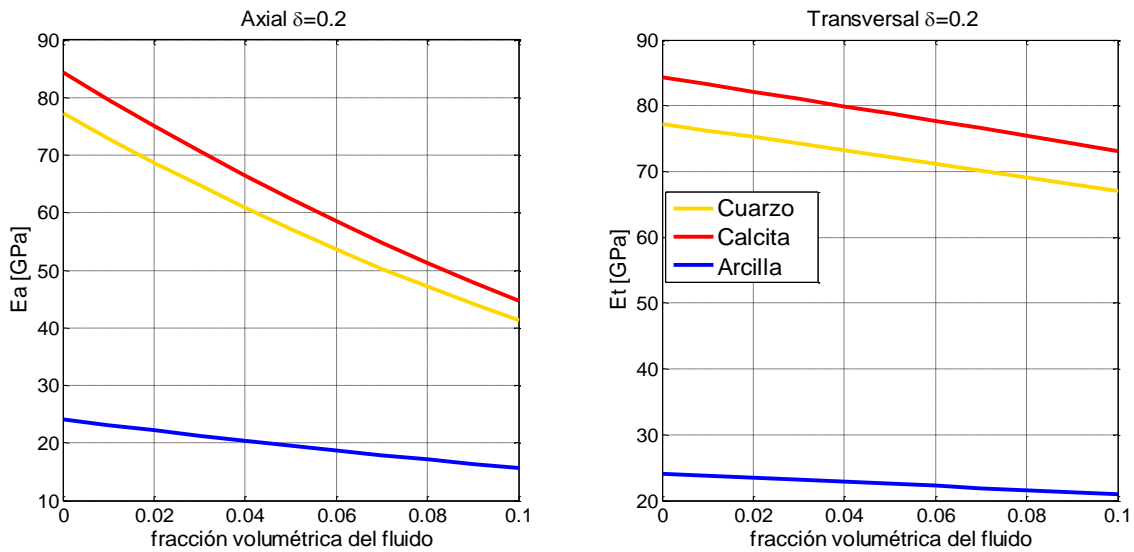


Figura 49. Graficas del parámetro elástico, módulo de Young respecto la fracción volumétrica del agua para una razón de aspecto $\delta=0.2$

Estos dos casos en donde $\delta < 1$ tienen un comportamiento similar (Figura 45, Figura 46, Figura 48 y Figura 49). Cuando las inclusiones tienen una forma de disco y el espacio poroso también adquiere una forma similar, cuanto más fluido tiene la formación, las propiedades medidas transversalmente (90° respecto a la vertical) tienden a ser más dúctiles, y, por el

contrario, las propiedades en el sentido vertical son cada vez más frágiles con el aumento de fluido.

Con el fin de analizar el comportamiento de los parámetros elásticos cuando la razón de aspecto es mayor a 1, se realizaron un diagrama ternario, cuarzo, calcita, arcilla, son para una razón de aspecto $\delta=2$ y contenido de agua de hasta 15%.

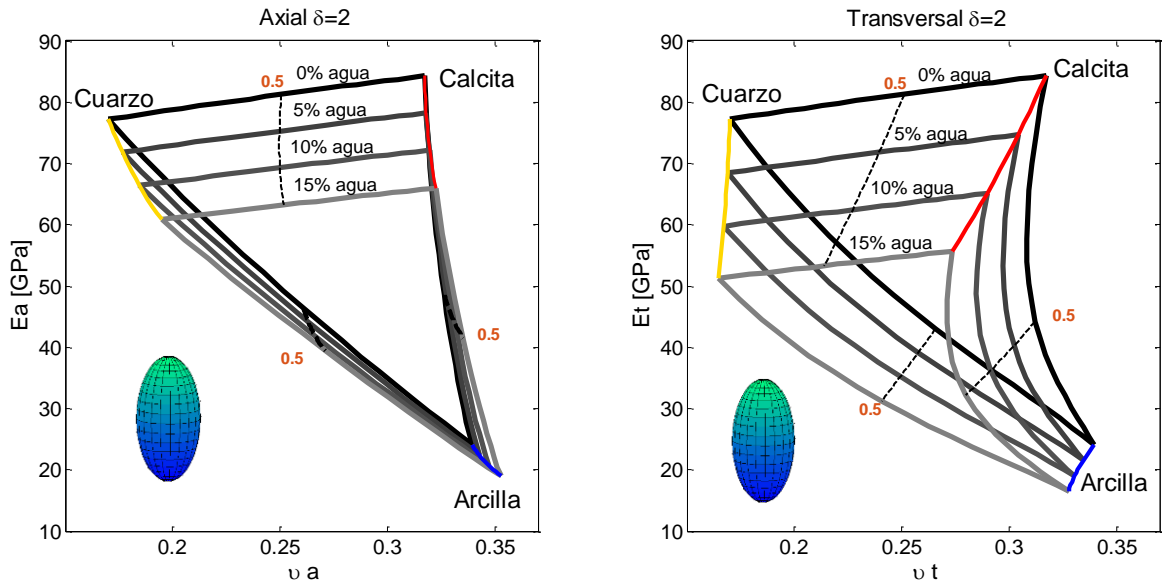


Figura 50. Diagramas axial y transversal para una razón de aspecto $\delta=2$ (fibra alargada) y diferentes porcentajes de agua con sal.

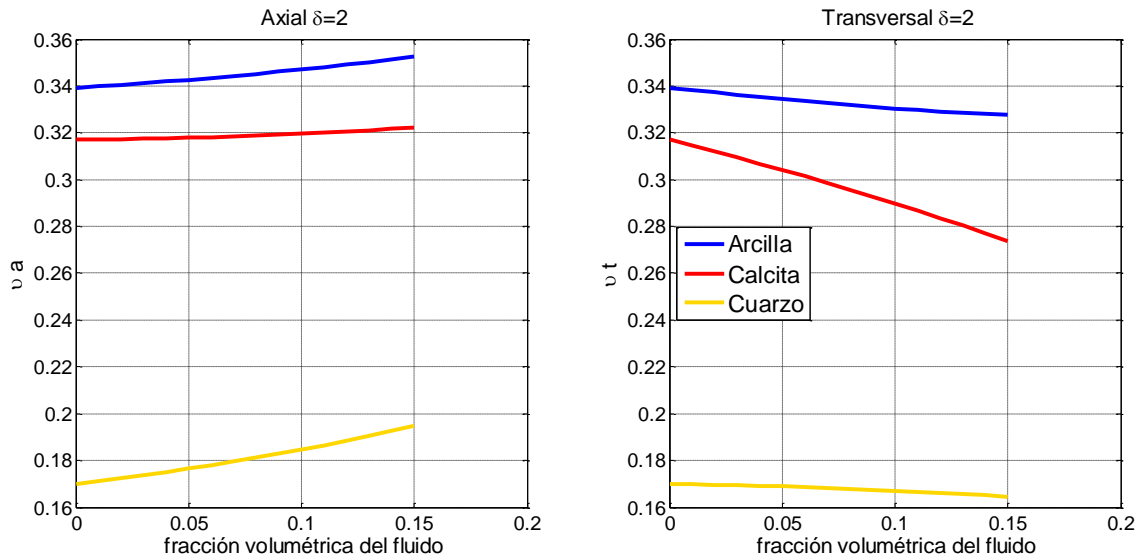


Figura 51. Graficas del parámetro elástico, razón de Poisson respecto la fracción volumétrica del agua para una razón de aspecto $\delta=2$

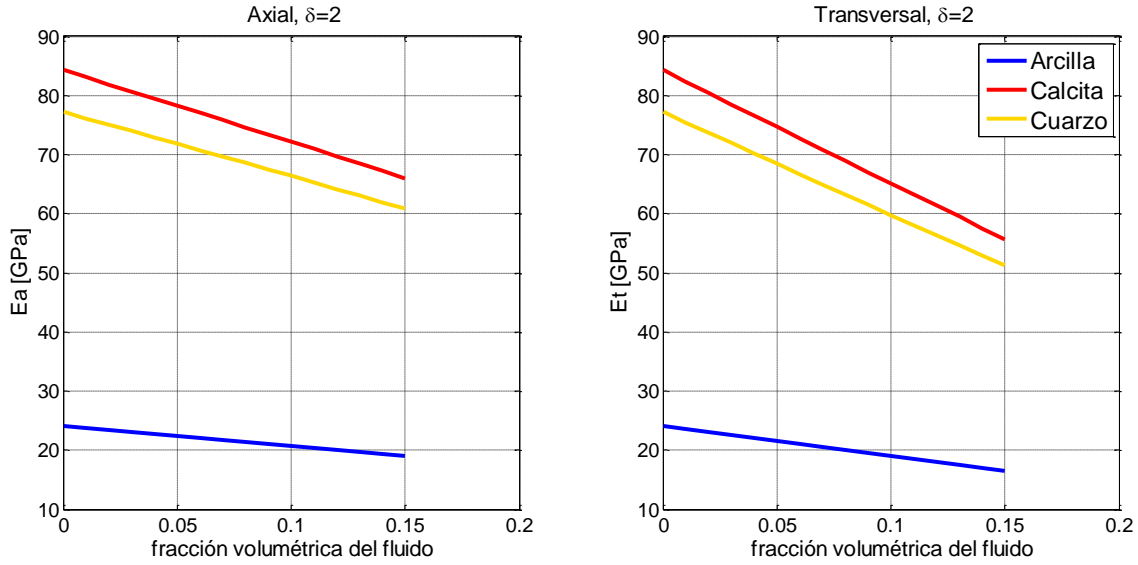


Figura 52. Graficas del parámetro elástico, módulo de Young respecto la fracción volumétrica del agua para una razón de aspecto $\delta=2$

También se hicieron gráficas con razón de aspecto mucho mayor a 1, que es el caso una fibra alargada, que puede ser vista desde como microfibras alineadas. Tal es el caso de la Figura 53, en donde se tiene una razón de aspecto $\delta=10$ y contenido de aceite de hasta 15%.

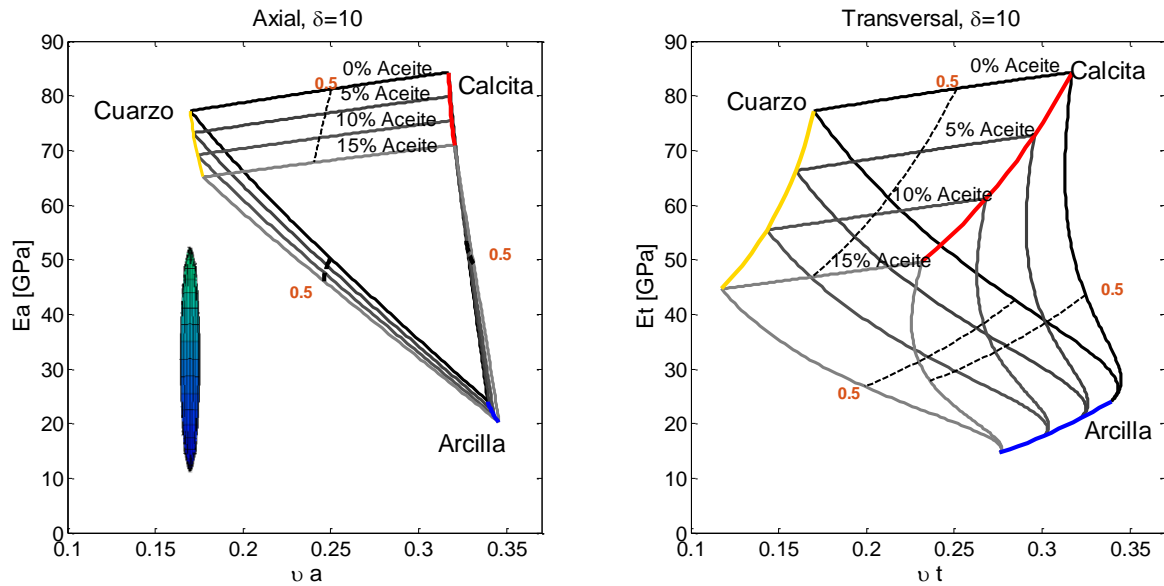


Figura 53. Diagramas axial y transversal para una razón de aspecto $\delta=10$ microfibras y diferentes porcentajes de agua con sal.

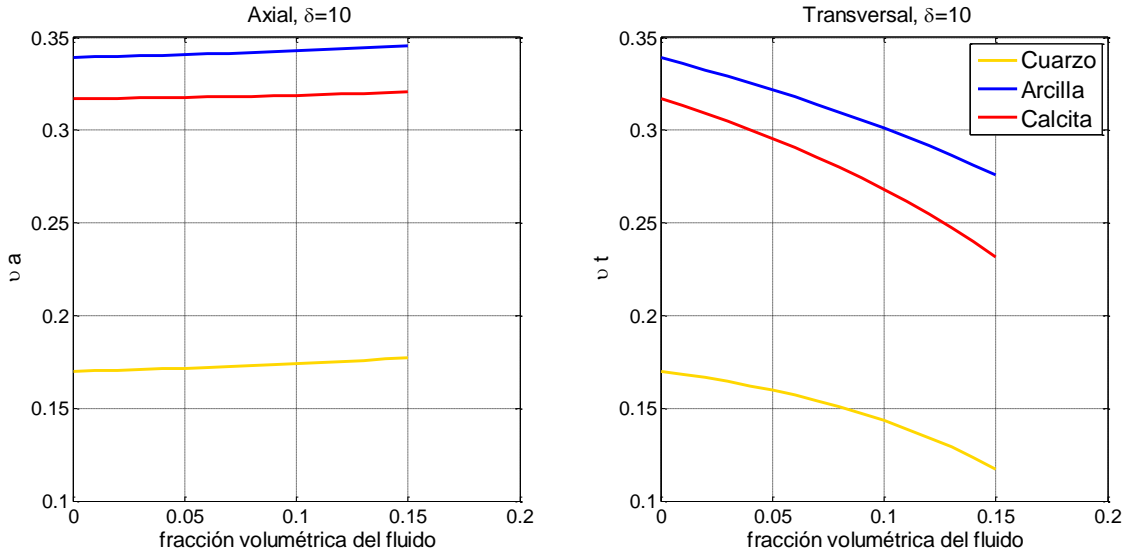


Figura 54. Graficas del parámetro elástico, razón de Poisson respecto la fracción volumétrica del agua para una razón de aspecto $\delta=10$

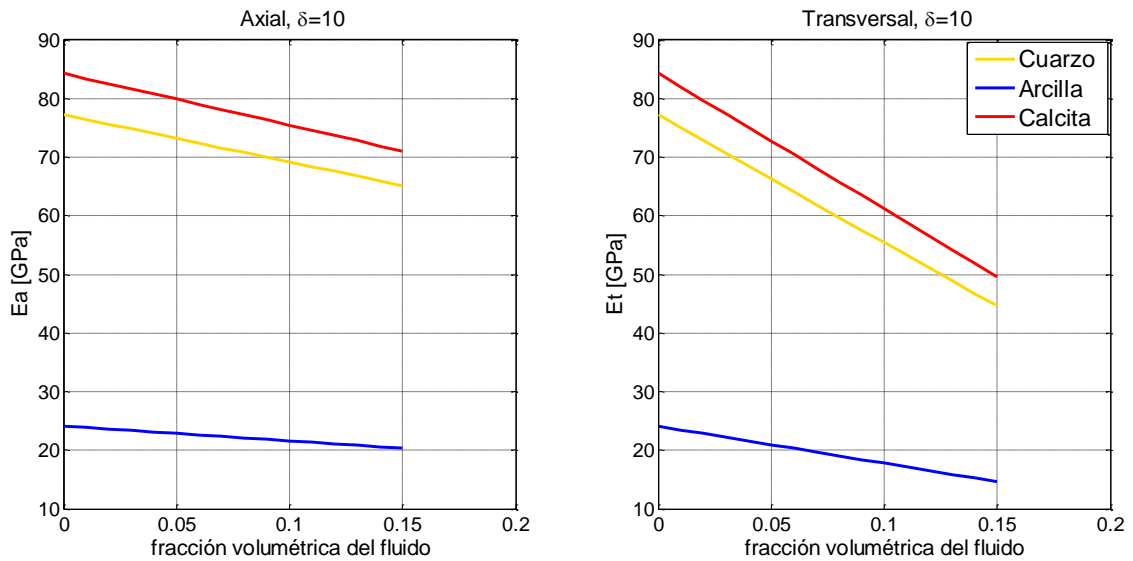


Figura 55. Graficas del parámetro elástico, módulo de Young respecto la fracción volumétrica del agua para una razón de aspecto $\delta=10$

El comportamiento de la razón de Poisson es opuesto para el caso axial y transversal. En la parte transversal vemos que este parámetro decrece de una manera no lineal, mientras que en el caso axial el incremento es lineal y muy pequeño. Para que las propiedades del compuesto, con el aumento de fluido, se acerque a la zona dúctil, el comportamiento de la razón de Poisson debe ser creciente y el módulo de Young decreciente como fue el caso transversal para $\delta < 1$. Ahora para el caso en que $\delta > 1$ vemos que este comportamiento se da en la dirección

vertical, sin embargo, es este acercamiento a la zona dúctil es mucho menor en magnitud que el anteriormente mencionado.

Además de los diagramas ternarios que sirven como plantillas para caracterizar la roca cualitativamente, también se realizaron diagramas quinaris. Este tipo de diagramas, con más de tres componentes, son útiles para ampliar el rango de minerales que pueden encontrarse en las rocas, además de clorita y caolinita, los diagramas pueden contener más de cinco tipos de roca o minerales según el número y tipo de minerales que se quieran analizar, haciendo posible caracterizar con varios minerales simultáneamente, ver apéndice B.

Se muestra la comparación del comportamiento axial y transversal de los parámetros elásticos cuando la forma de las inclusiones sólidas y fluidas son planas ($\delta < 1$) y alargadas ($\delta > 1$).

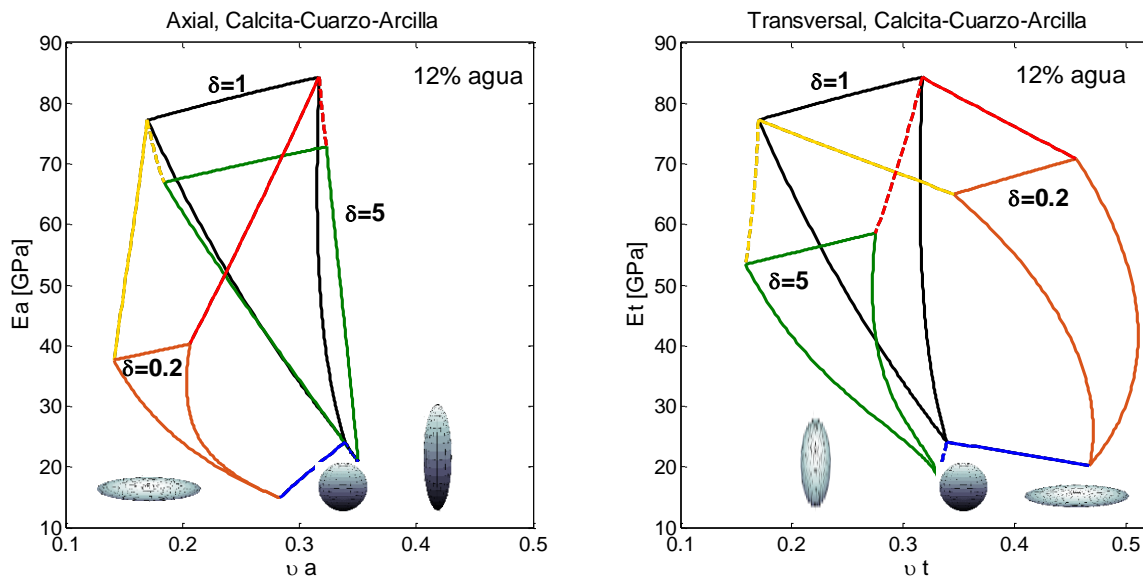


Figura 56.. Diagramas axial y transversal que muestra las trayectorias de los parámetros elásticos del modelo isótropo hacia el modelo anisótropo para $\delta \gg 1$ y $\delta \ll 1$, caso de la fibra alargada y disco plano respectivamente.

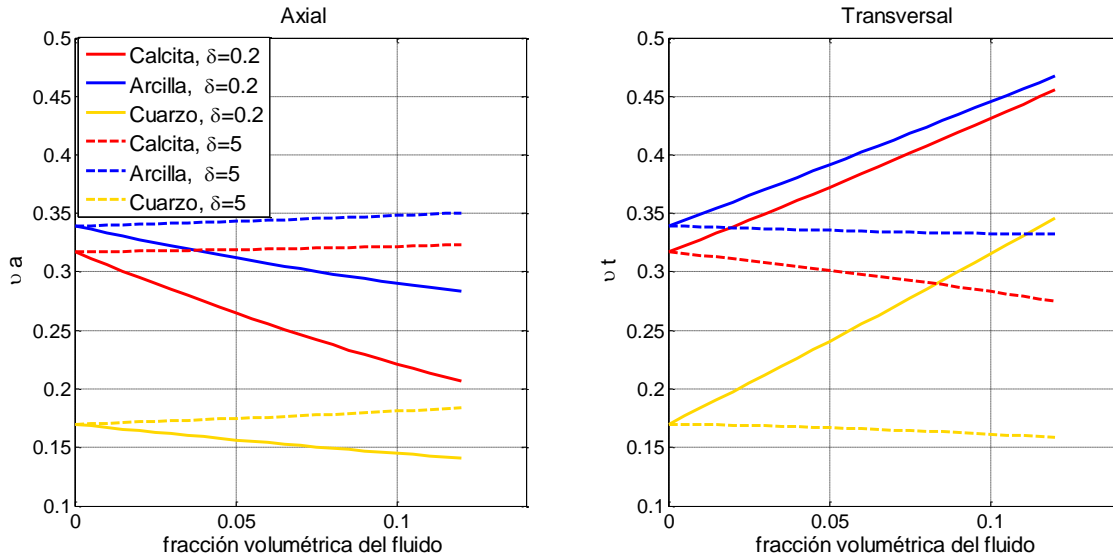


Figura 57. Graficas razón de Poisson contra la fracción volumétrica del agua que indica el comportamiento del parámetro elástico cuando la razón de aspecto es $\delta=0.2$ y $\delta=5$

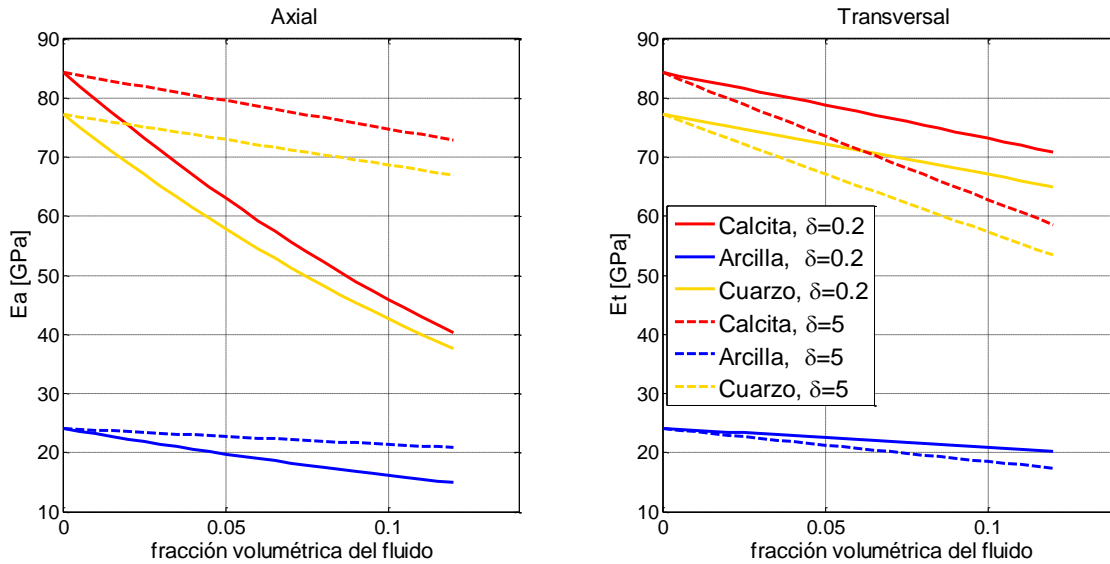


Figura 58.. Graficas módulo de Young contra la fracción volumétrica del agua que indica el comportamiento del parámetro elástico cuando la razón de aspecto es $\delta=0.2$ y $\delta=5$.

Es de notarse que el incremento de fluido tiene más impacto en las propiedades cuando $\delta < 1$ que cuando $\delta > 1$, en términos geofísicos podemos concluir que la anisotropía intrínseca de la formación, es decir, la anisotropía por laminación impacta más en las propiedades elásticas que aquella anisotropía debida a una red de fracturas.

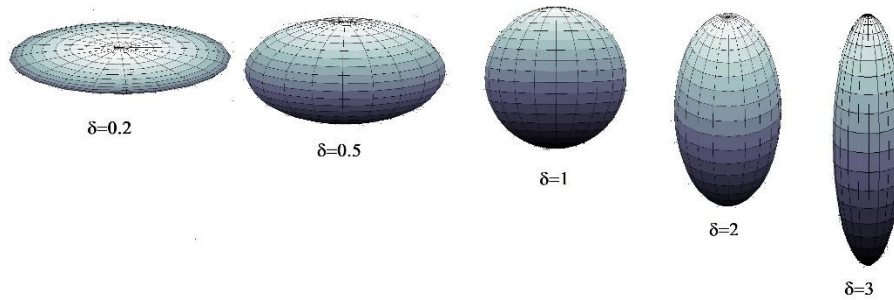


Figura 59. Esquema de las formas de las inclusiones en función de su razón de aspecto

Se muestra las diferentes formas de las inclusiones y del espacio poroso según la razón de aspecto. En las siguientes gráficas se analiza el comportamiento de los parámetros elásticos en función de la forma de la inclusión y los poros. Para ello se consideró una porosidad del 12% saturada de agua, aceite y gas, para formaciones carbonatadas y arcillosas respectivamente.

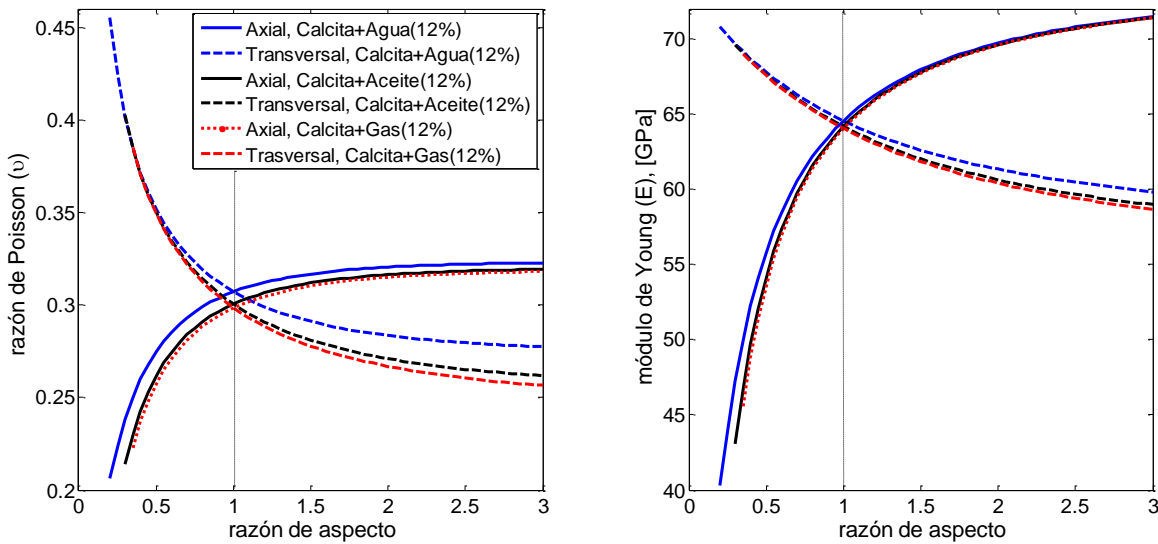


Figura 60. Gráfica que representa el comportamiento de la razón de poisson y el Módulo de Young respectivamente cuando la razón de aspecto cambia de $\delta < 1$ a $\delta > 1$. Matriz de calcita con 12% de fluido.

Ambas gráficas, Figura 60 y Figura 61, son consistentes con el modelo, en todos los casos, la intersección de las curvas axial y transversal coincide en una razón de aspecto de 1 que es el caso de la esfera y por tanto el caso isótropo.

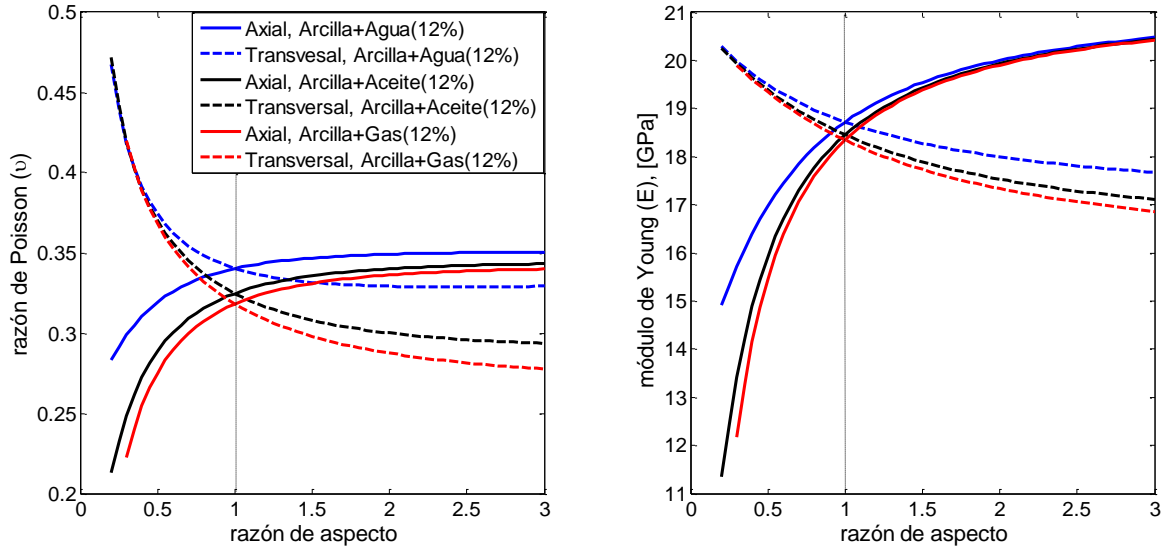


Figura 61. Gráfica que representa el comportamiento de la razón de poisson y el Módulo de Young respectivamente cuando la razón de aspecto cambia de $\delta < 1$ a $\delta > 1$. Matriz de Arcilla con 12% de fluido.

Las gráficas, Figura 60 y Figura 61, son distintas en magnitud debido a las propiedades de la matriz, aunque el comportamiento es similar, en ellas se aprecia que cuando $\delta < 1$ las pendientes son más abruptas, lo que verifica que la anisotropía intrínseca de la formación es más influyente en los parámetros elásticos que la anisotropía debida a una red de fracturas. También se puede ver las propiedades efectivas del compuesto cuando la saturación de fluido es agua, aceite o gas, de acuerdo con esto hay una mayor diferencia en las propiedades efectivas cuando la matriz es arcilla que cuando es calcita, esto se observa en la separación de las curvas.

7.1 Aplicación del modelo autoconsistente al registro sísmico del pozo *Citizen Green*

El valle central de California es el más prometedor recurso para el almacenamiento de CO_2 en Tierra, con una capacidad estimada de 75 a 300 Gt.

WESTCARB (Coast Regional Carbon Sequestration Partnership) perforó un pozo exploratorio para evaluar el potencial de almacenamiento de CO_2 de formaciones salinas extensivas a nivel regional y gas asociado en la cuenca del suroeste de Sacramento. Se obtuvieron diferentes registros geofísicos entre ellos el registro sísmico.

A partir de los datos del tiempo de arribo de ondas P y S del emisor al receptor, es posible obtener las velocidades de las ondas, o registro sónico; La idea de este trabajo fue hacer una caracterización mineralógica a partir del modelo autoconsistente estático.

Se importaron los datos de las lentitudes de onda y se obtuvieron las velocidades de las ondas P y S. a partir de estas velocidades se obtuvieron los parámetros elásticos módulo de Young y razón de Poisson a partir de las siguientes ecuaciones

$$\mu = \rho \cdot V_s^2 \quad (7.10)$$

$$k = \rho \left(V_p^2 - \frac{3}{4} V_s^2 \right) \quad (7.11)$$

Con el módulo de corte μ y el módulo de bulk k se determinaron cada elemento de la matriz de coeficientes.

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2C_{66} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k + \frac{4}{3}\mu & k - \frac{2}{3}\mu & k - \frac{2}{3}\mu & 0 & 0 & 0 \\ k - \frac{2}{3}\mu & k + \frac{4}{3}\mu & k - \frac{2}{3}\mu & 0 & 0 & 0 \\ k - \frac{2}{3}\mu & k - \frac{2}{3}\mu & k + \frac{4}{3}\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix} \quad (7.12)$$

Con las Ecs. (5.7) se pasa de la matriz de coeficientes al vector de Hill y finalmente con las Ecs. (7.6) a (7.9) se obtienen los parámetros elásticos módulo de Yong y razón de Poisson.

Parte de la información dada fueron los límites de las formaciones que atravesó el pozo.

Tabla 1. Intervalos de profundidad de las formaciones atravesadas por el pozo Citizen Green

PROFUNDIDAD [fts]		
De	a	FORMACIÓN
3550	3700	Sand
3700	3800	Nortomville Shale
3800	3900	Nortomville Sanstone
4000	4500	Domengine Sandstone
4600	4700	Capa shale
4700	4800	Capa shale & gas acumulation
5000	6000	Mokelumne Sanstone
6200	6400	H & T Shale
6450	6550	Sandstone (H & T or Top of Starkey)
6600	7200	Starkey Shale

Por cada formación se tomaron 100 puntos para conocer la dispersión de los datos. Además, con mediciones de laboratorio a núcleos de roca se estimó una porosidad promedio de 30% saturada con salmuera.

Se muestran la dispersión de puntos de las diferentes formaciones en un diagrama módulo de Young contra razón de Poisson.

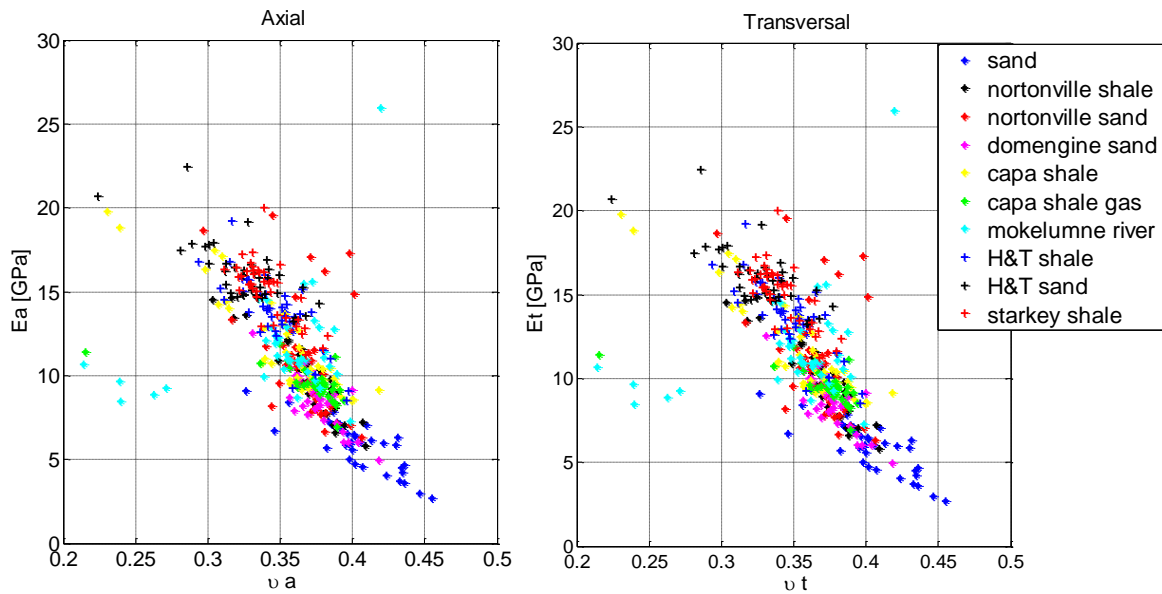


Figura 62. Parámetros elásticos medidos a partir de las velocidades de onda en la formación que atraviesa el pozo Citizen Green.

Se graficó la nube de puntos en el diagrama Figura 42 con el fin de localizar la dispersión de puntos respecto a los principales minerales, cuarzo, calcita y arcilla. Cabe mencionar que, de acuerdo con la información dada, imágenes de núcleos, saturación de fluido y porosidad, observamos que las rocas del yacimiento no presentaron anisotropía, es decir, no se mostró claramente un plano de laminación por lo que se consideró un caso isótropo, además las porosidades fueron del orden del 30% con saturación de agua.

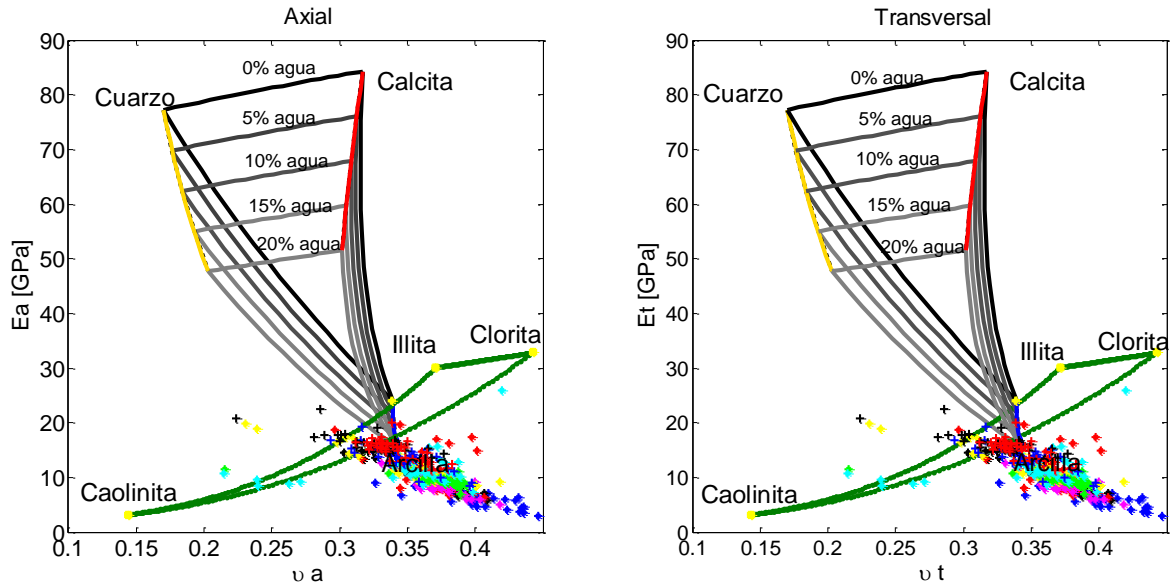


Figura 63. Diagrama axial y transversal considerando inclusiones esféricas y con algunas fracciones de agua incluyendo el área donde pueden situarse las propiedades arcillosas.

Se aprecia que la nube de puntos que representa las velocidades de onda se apega más a las propiedades de la arcilla. Tomando esto en cuenta la caracterización puede ser realizada con los principales minerales arcillosos como se observa a continuación.

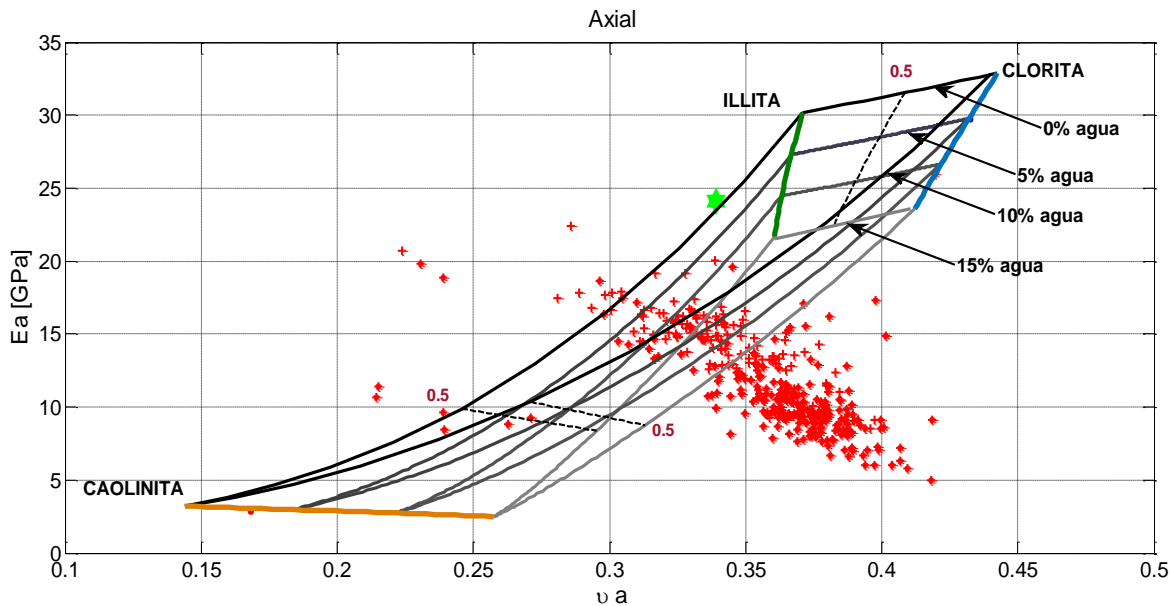


Figura 64. Diagrama con los principales minerales arcillosos y la posición de los parámetros elásticos de las rocas del yacimiento.

En la Figura 64 se observa que la mejor forma de correlacionar la información del registro sísmico del pozo fue a través de los parámetros elásticos de los diferentes minerales arcillosos encontrados en la literatura (clorita, Illita, caolinita). El modelo soportó una fracción volumétrica de fluido de 0.15, es decir el 15% en volumen de agua. Sin embargo, vemos que la tendencia de los diagramas con el incremento de fluido va acercándose a la nube de puntos, lo que corresponde con la información de porosidad dada que como se comentó antes, oscila en 30%. Además, se puede observar que las propiedades de la roca no tienen una preferencia muy marcada entre dichos minerales, es decir, que los tres minerales tienen presencia en las rocas en proporciones aproximadas.

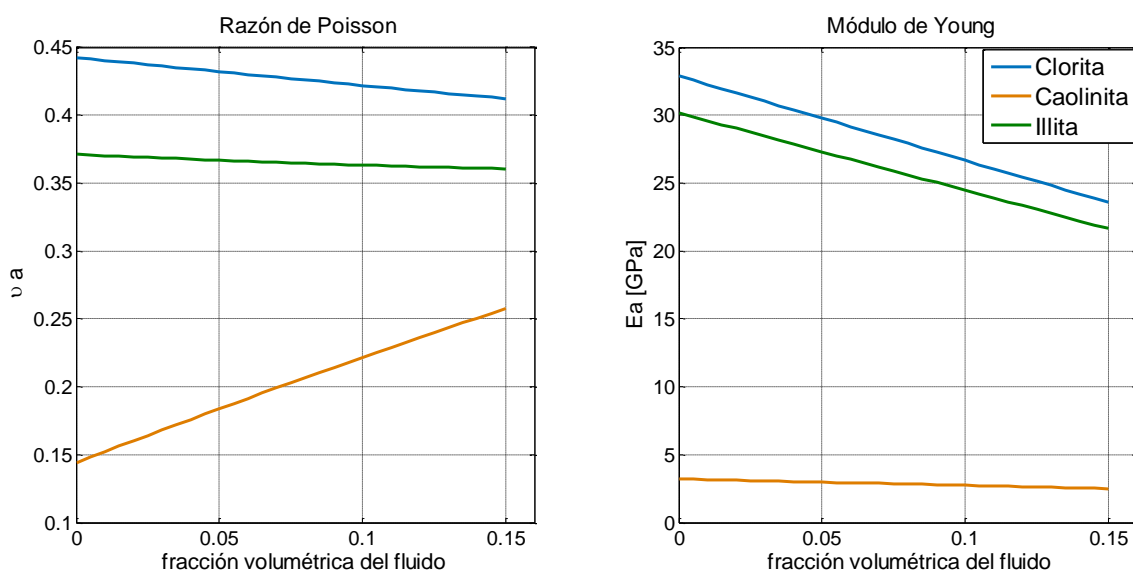


Figura 65. Diagramas de la razón de Poisson y el módulo de Young respecto al incremento de la fracción volumétrica del fluido para cada mineral arcilloso: Clorita, Illita, Caolinita

8 Conclusiones y recomendaciones

El objetivo de la tesis fue determinar las propiedades efectivas de medios compuestos y anisótropos, por medio de un esquema autoconsistente para el análisis de propagación de ondas en medios sintéticos y en rocas de yacimientos; usando parámetros elásticos de minerales dados en la literatura, Mavko, Mukerji, & Dvorkin (2009). Un objetivo parcial fue hacer una implementación numérica para resolver las ecuaciones autoconsistentes que describen un medio transversalmente isótropo. Las ecuaciones simplificadas son un sistema de 7 ecuaciones simultáneas no lineales que implican la evaluación de integrales numéricamente.

En el capítulo seis se comparan los resultados del modelo dinámico, Figura 5, Figura 6, Figura 8 y Figura 9, con aquellos que se muestran en el artículo de Sabina, et al., (2015), comprobando que son iguales se validó el algoritmo numérico. Se amplió la aplicación del método autoconsistente para determinar patrones de dispersión y atenuación de los tres tipos de onda: la onda P, onda SH y onda SV para un amplio rango de frecuencias de rocas que presentan anisotropía transversal. Se notó que el comportamiento de estas ondas depende de la fracción volumétrica y geometría de los minerales que constituyen la roca, la porosidad saturada en su totalidad de fluido, el tipo de fluido y el ángulo de incidencia de las ondas. Estos parámetros influyen en el comportamiento de la dispersión de onda y su atenuación, demostrando que la anisotropía es un factor dominante en los resultados obtenidos.

La razón de aspecto permitió interpretar formaciones con propiedades isotrópicas, $\delta=1$, y anisotrópicas, $\delta \neq 1$. Esta anisotropía a su vez puede ser interpretada de dos maneras: anisotropía debida a un plano de laminación que es el tipo más común en yacimientos shale (caso TI), $\delta < 1$, y debida a una red de fracturas alineadas, $\delta > 1$. Variando la razón de aspecto y el ángulo de incidencia de 0 a 90° es posible analizar varios casos de anisotropía

La porosidad o fracción volumétrica del fluido, el tipo de fluido contenido, la litología y fracción volumétrica de cada mineral en la roca influyen también en la determinación de las propiedades efectivas y en consecuencia en la dispersión y atenuación de ondas.

Se establecieron diámetros de inclusión que corresponden con las frecuencias utilizadas normalmente en registro de pozo, 0.5 mm, y mediciones de laboratorio, 0.005 (mm). Se

aplicó un esquema autoconsistente utilizando la definición de frecuencia dimensional para conciliar las respuestas de frecuencias sísmicas, sónicas y ultrasónicas, encontrando que la anisotropía y la porosidad son las propiedades que más impactan en las propiedades elásticas efectivas y en las dispersiones de ondas

Además, fueron determinadas las propiedades efectivas en el límite de baja frecuencia, modelo estático. Con él se realizaron nuevos diagramas ternarios de física de rocas que sirven como plantillas para ubicar propiedades geomecánicas de las rocas. Para esto se determinaron dos razones de Poisson y dos módulos de Young, uno axial y otro transversal, con estos diagramas es fácil identificar cómo influye la geometría de las inclusiones en los parámetros elásticos, se encontró que la anisotropía por laminación produce mayor diferencia entre las propiedades medidas axial y transversalmente que la anisotropía por fracturas.

Los resultados obtenidos muestran que, dependiendo de la mineralogía y de la razón de aspecto de las inclusiones, las propiedades efectivas pueden ser más dúctiles o frágiles con el aumento de porosidad, esto puede ayudar a interpretar zonas con mayor contenido de fluido y zonas con mejores condiciones de fragilidad para la generación de una red fracturas.

Finalmente se usaron los diagramas de física de rocas para mostrar un ejemplo de aplicación, al caracterizar mineralógicamente el pozo Citizen Green que es prospecto para almacenamiento de CO₂ en California E.U. Con los diagramas ternarios se identificó que la porosidad estaba del orden de 30%, la mayor parte de los estratos fue de arenisca, se hizo una caracterización de acuerdo con el tipo de mineral arcilloso predominante, se encontró que las propiedades elásticas fueron más parecidas a las propiedades de la Illita y se observó que el contenido de agua es mayor al %15, lo que coincide con información dada en el reporte. Sin embargo, aplicar este modelo a datos de un yacimiento tipo shale, serviría de mejor ejemplo porque podríamos caracterizar la anisotropía por medio de la razón de aspecto de inclusiones y poros.

Este trabajo de tesis abre nuevas oportunidades para mejorar la interpretación petrofísica a partir de registros acústicos y continuar la investigación dirigida a encontrar más aplicaciones, tales como inversión sísmica, delimitación de yacimientos no convencionales, e identificación de zonas con mayor fragilidad en yacimientos shale oil/gas.

Bibliografía

- Barratt, P. J., & Collins, W. D. (1965). The scattering cross-section of an obstacle in an elastic solid for plane harmonic waves. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 969-981.
- Bassiouni, Z. (1994). *THEORY, MEASUREMENT, AND INTERPRETATION OF WELL LOGS*. Louisiana State U.: SPE TEXTBOOK SERIES.
- Batzle, M. L., Han, D.-H., & Hofmann, R. (2006). Fluid mobility and frequency-dependent seismic velocity —Direct measurements. *GEOPHYSICS*, 1-9.
- Carcione, J. M. (2014). *Wave Fields in Real Media*. Trieste, Italy: ELSEVIER.
- Cherkaoui, M. (2006). *FUNDAMENTALS OF MICROMECHANICS OF SOLIDS*. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.
- Esheby, J. (1957). The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Department of Physical Metallurgy, University of Birmingham*.
- Gandarilla-Pérez, C. A. (2013). *Propiedades efectivas para compuestos piezoléctricos mediante el método autoconsistente de medio efectivo*. La Habana: Tesis de grado.
- González-Martínez, C. (2000). *Dos modelos micromecánicos de deformación con daño en materiales compuestos*. Madrid, España: (tesis de doctorado), Universidad Politécnica de Madrid.
- Grieser, B., & Bray, J. (2007). Identification of Production Potential in Unconventional Reservoirs. *SPE*, 1-6.
- Hill, R. (1965). A SELF-CONSISTENT MECHANICS OF COMPOSITE MATERIALS. *J. Mech. Phys. Solids*, 213-222.
- Laws, N., & McLaughlin, R. (1979). The effect of the fibre length on the overall moduli of composite materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 1-13.
- Mavko, G., Mukerji, T., & Dvorkin, J. (2009). *Rock Physics Handbook*. Ney York, United States of America: Cambridge university press.
- Nicolás-López, R., & Valdiviezo-Mijangos, O. C. (2016). Rock physics templates for integrated analysis of shales considering their mineralogy, organic matter and pore fluids. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 33-41.

- Peñate Rodríguez, H. C. (2005). *Un análisis autoconsistente para compuestos de más de dos fases*. La Habana, Cuba.
- Ramos-Rodríguez, H., Zinat-Conte, D., Ramírez-Maldonado, T., Ramírez-Jimenez, H., González-Flores, L., & Rodríguez-González, R. (2008). *Registros geofísicos en México tomo I*. Villa Hermosa, Tabasco: Schlumberger Offshore Services.
- Sabina, F. J., & Willis, J. (1996). Self-Consistent Analysis of Waves in Rocks Containing Arrays of Cracks. *Seismic Anisotropy Tulsa, Oklahoma: Society of Exploration Geophysicists*, 318-356.
- Sabina, F., & Willis, J. (1988). A SIMPLE SELF-CONSISTENT ANALYSIS OF WAVE PROPAGATION IN PARTICULATE COMPOSITES. *WAVE MOTION*, 127-142.
- Sabina, F., Gandarrilla-Pérez, C., Otero, J., Rodríguez-Ramos, R., Bravo-Castillero, J., & Valdiviezo Mijangos, O. (2015). Dynamic homogenization for composites with embedded multioriented. *International Journal of Solids and Structures*, 121-130.
- Sabina, F., Smyshlyaev, V., & Willis, J. (1993). SELF-CONSISTENT ANALYSIS OF WAVES IN A MATRIX-INCLUSION COMPOSITE I. ALIGNED SPHEROIDAL INCLUSIONS. *J. Mech. Phys. Solids*, 1573-1588.
- Sabina-Ciscar, F. J., Bravo-Castillero, J., Guinovart-Díaz, R., Rodríguez-Ramos, R., & Valdiviezo-Mijangos, O. (2002). Overall behavior of two-dimensional periodic composites. *International Journal of Solids and Structures*, 483-497.
- Sams, M., Neep, J., Worthington, M., & King, M. (1997). The measurement of velocity dispersion and frequency-dependent intrinsic attenuation in sedimentary rocks. *GEOPHYSICS*, 1456-1464.
- Schön, J. (2011). *Physical Properties of the Rock*. Amsterdam: ELSEVIER.
- Valdiviezo-Mijangos, O., & Nicolás-López, R. (2014). Dynamic characterization of shale systems by dispersion and attenuation of P- and S- waves considering their mineral composition and rock maturity. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 420-427.

- Willis, J. (1980). A POLARIZATION APPROACH TO THE SCATTERING OF ELASTIC WAVES-I. SCATTERING BY A SINGLE INCLUSION. *J. Mech. Phys. Solids*, 287-305.
- Yin, S., & Xie, R. (2018). Experimental analysis of dynamic and static mechanical properties of deep thick anhydrite cap rocks under high-stress conditions. *Carbonates and Evaporites*, 1-17.
- Zhang, Y.-Z., Chu, Z.-H., Li, M., & Man, L. (2001). An experimental study of acoustic dispersion of rock and extrapolation of velocity. *CHINESE JOURNAL OF GEOPHYSICS*, 1-9.

9 APÉNDICES

9.1 APÉNDICE A

Para este trabajo se consideró un material que tiene un plano isotrópico, que tiene un plano de simetría transversal (materiales isotrópicos). En este tipo de compuestos las constantes independientes se reducen a cinco.

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}$$

Así mismo el tensor de momento al considerar un material transversalmente isotrópico queda escrito como:

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

La idea de los métodos autoconsistentes es resolver problemas de cuerpos que no poseen solución analítica, introduciendo aproximaciones bien fundamentadas.

Con ayuda del álgebra de Hill podemos pasar de una notación matricial a una vectorial, En Sabina (1993) se presenta esta notación:

$$\begin{aligned} k &= \frac{C_{11} + C_{12}}{2} \\ l &= C_{13} \\ q &= C_{13} \\ n &= C_{33} \\ m &= \frac{C_{11} - C_{12}}{2} = C_{66} \\ p &= C_{44} \end{aligned}$$

$$L = (2k, l, q, n, 2m, 2p) = \begin{pmatrix} k+m & k-m & l & 0 & 0 & 0 \\ k-m & k+m & l & 0 & 0 & 0 \\ q & q & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{11} - C_{12} \end{pmatrix}$$

Entonces el producto de los vectores de Hill en realidad serían un producto de matrices que tiene la siguiente forma:

$$L_1 L_2 = L_3$$

$$(2k_1, l_1, q_1, n_1, 2m_1, 2p_1)(2k_2, l_2, q_2, n_2, 2m_2, 2p_2) = (2k_3, l_3, q_3, n_3, 2m_3, 2p_3)$$

Matricialmente sería de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} k_1+m_1 & k_1-m_1 & l_1 & 0 & 0 & 0 \\ k_1-m_1 & k_1+m_1 & l_1 & 0 & 0 & 0 \\ q_1 & q_1 & n_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2p_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2m_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_2+m_2 & k_2-m_2 & l_2 & 0 & 0 & 0 \\ k_2-m_2 & k_2+m_2 & l_2 & 0 & 0 & 0 \\ q_2 & q_2 & n_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2m_2 \end{pmatrix} =$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2k_1 k_2 + 2m_1 m_2 + l_1 q_2 & 2k_1 k_2 - 2m_1 m_2 + l_1 q_2 & 2k_1 l_2 + l_1 n_2 & 0 & 0 & 0 \\ 2k_1 k_2 - 2m_1 m_2 + l_1 q_2 & 2k_1 k_2 + 2m_1 m_2 + l_1 q_2 & 2k_1 l_2 + l_1 n_2 & 0 & 0 & 0 \\ 2k_2 q_1 + n_1 q_2 & 2k_2 q_1 + n_1 q_2 & n_1 n_2 + 2l_2 q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4p_1 p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4p_1 p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4m_1 m_2 \end{pmatrix}$$

Entonces para obtener la multiplicación de vectores de Hill hay que multiplicar matricialmente y después aplicar la relación notación de Hill para conocer cada elemento del vector

$$(2k_1, l_1, q_1, n_1, 2m_1, 2p_1)(2k_2, l_2, q_2, n_2, 2m_2, 2p_2) = (2k_3, l_3, q_3, n_3, 2m_3, 2p_3)$$

Donde cada elemento del vector resultado del producto se calcularía de la siguiente forma, siguiendo las operaciones de multiplicación definida. Por ejemplo, para el primer elemento se calcularía:

$$\begin{aligned}
& (2k_3, l_3, q_3, n_3, 2m_3, 2p_3) \\
2k_3 &= C_{11} + C_{12} = (2k_1 k_2 + 2m_1 m_2 + l_1 q_2) + (2k_1 k_2 - 2m_1 m_2 + l_1 q_2) \\
& \Rightarrow 2k_1 k_2 + 2m_1 m_2 + l_1 q_2 + 2k_1 k_2 - 2m_1 m_2 + l_1 q_2 \\
& \Rightarrow 4 \frac{k_1}{2} \frac{k_2}{2} + 2l_1 q_2 \\
\therefore 2k_3 &= k_1 k_2 + 2l_1 q_2
\end{aligned}$$

De manera similar se hace para obtener los demás parámetros del vector Hill product. Quedando definido el producto vectorial de la siguiente forma.

$$\begin{aligned}
& (2k_1, l_1, q_1, n_1, 2m_1, 2p_1)(2k_2, l_2, q_2, n_2, 2m_2, 2p_2) = \\
& \Rightarrow (k_1 k_2 + 2l_1 q_2 \quad k_1 l_2 + l_1 n_2 \quad q_2 n_1 + k_2 q_1 \quad n_1 n_2 + 2l_2 q_1 \quad m_1 m_2 \quad p_1 p_2)
\end{aligned}$$

De la misma forma se puede multiplicar el tensor de densidades

$$\begin{aligned}
& (\rho_{1I}, \rho_{1III})(\rho_{2I}, \rho_{2III}) = (\rho_{3I}, \rho_{3III}) \\
& \left(\begin{array}{ccc} \rho_{1I} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{1I} & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{1III} \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc} \rho_{2I} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{2I} & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{2III} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} \rho_{1I} \rho_{2I} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{1I} \rho_{2I} & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{1III} \rho_{2III} \end{array} \right)
\end{aligned}$$

Para la elaboración del programa podemos incluir las operaciones que corresponden a las densidades por ser lineal, entonces el vector de Hill ya no sería de 6 componentes sino de 8 debido a que las últimas dos componentes son las densidades.

$$\begin{aligned}
& Hillproduct \left[(2k_1, l_1, q_1, n_1, 2m_1, 2p_1, \rho_{1,1}, \rho_{1,3})(2k_2, l_2, q_2, n_2, 2m_2, 2p_2, \rho_{2,1}, \rho_{2,3}) \right] = \\
& \Rightarrow (k_1 k_2 + 2l_1 q_2, \quad k_1 l_2 + l_1 n_2, \quad q_2 n_1 + k_2 q_1, \quad n_1 n_2 + 2l_2 q_1, \quad m_1 m_2, \quad p_1 p_2, \quad \rho_{1,1} \rho_{2,1}, \quad \rho_{1,3} \rho_{2,3})
\end{aligned}$$

También se definen las operaciones de inversa del vector de Hill (Hillinverse) que es en realidad la inversa de la matriz y vectorizada nuevamente.

$$\begin{pmatrix} k+m & k-m & l & 0 & 0 & 0 \\ k-m & k+m & l & 0 & 0 & 0 \\ q & q & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2m \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4m_0} + \frac{n_0}{4k_0n_0 - 4l_0q_0} & -\frac{1}{4m_0} + \frac{n_0}{4k_0n_0 - 4l_0q_0} & -\frac{l_0}{2k_0n_0 - 2l_0q_0} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4m_0} + \frac{n_0}{4k_0n_0 - 4l_0q_0} & \frac{1}{4m_0} + \frac{n_0}{4k_0n_0 - 4l_0q_0} & -\frac{l_0}{2k_0n_0 - 2l_0q_0} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{q_0}{2k_0n_0 - 2l_0q_0} & -\frac{q_0}{2k_0n_0 - 2l_0q_0} & -\frac{k_0}{k_0n_0 - l_0q_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2p_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2p_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2m_0} \end{pmatrix}$$

Quedando definida la inversa del vector de Hill como:

$$\text{Hillinverse}(2k_2, l_2, q_2, n_2, 2m_2, 2p_2, \rho_{2,1}, \rho_{2,3}) = \left(\frac{n_0}{k_0n_0 - 2l_0q_0}, -\frac{l_0}{k_0n_0 - 2l_0q_0}, \frac{q_0}{k_0n_0 - 2l_0q_0}, \frac{k_0}{k_0n_0 - 2l_0q_0}, \frac{1}{m_0}, \frac{1}{p_0}, \frac{1}{\rho_{01}}, \frac{1}{\rho_{03}} \right)$$

Por linealidad de las ecuaciones podemos combinar las ecuaciones autoconsistentes anteriores en una sola, simplemente aumentando al vector de Hill las dos densidades, es decir, que el vector de Hill ya no sea éste $(2k_1, l_1, q_1, n_1, 2m_1, 2p_1)$, sino $(2k_1, l_1, q_1, n_1, 2m_1, 2p_1, \rho_{1,1}, \rho_{1,3})$. De esta manera se simplificó el programa realizado en MATLAB.

Ahora vamos a ver cuáles son cada una de las ecuaciones y elementos que aparecen en la ecuación autoconsistente. Para ello comenzaremos con las funciones auxiliares mediante las cuales llegaremos a determinar $\bar{S}_x^{(r)}$

Las funciones auxiliares del método autoconsistente son las siguientes:

$$H_r = \delta \frac{\varepsilon(z)}{C_r^2 |\xi_n|^3} \quad F_r = \delta \frac{1 - \varepsilon(z)}{|\xi_n|^3}$$

Donde los términos que aparecen en las funciones son las siguientes:

$$|\xi_n| = \zeta = [1 + (\delta^2 - 1)u^2]^{1/2}$$

De estas ecuaciones los términos constantes son “ δ ” que es la **razón de aspecto** de la inclusión y “ u ” que es $\cos(\varphi)$, coseno del **ángulo de incidencia** de la onda.

$$z = k_r \zeta = \frac{\omega \zeta}{C_r}$$

El término “ z ” es:

Donde “ ω ” es la frecuencia angular y “ C_r ” la velocidad de fase de la onda “ r ”. Sin embargo, para poder graficar los resultados debemos trabajar con una frecuencia angular normalizada, la normalización en este trabajo se realiza con respecto a la velocidad de la onda P a través de la matriz. Por lo tanto, para fines prácticos, z queda definido en el programa como:

$$z = \frac{\omega_{nor} \zeta}{C_r} C_{1,m}$$

Así z puede dividirse en tres según el tipo de onda al que nos estemos refiriendo

$$z = \frac{\omega_{nor} \zeta}{C_r} C_{1,m} \Rightarrow z_1 = \omega_{nor} \zeta \frac{c1T(u, L_2)}{c1T(u, L_0)} \quad z_2 = \omega_{nor} \zeta \frac{c1T(u, L_2)}{c2T(u, L_0)} \quad z_3 = \omega_{nor} \zeta \frac{c1T(u, L_2)}{c3T(u, L_0)}$$

Donde $C_{1,m}$ se refiere a la velocidad de fase 1 definida como onda P a través de la matriz. Esto en el programa se denota como $c1T(u, L_2)$. Vamos entonces a definir las velocidades de fase C_r para los tres tipos de onda y considerando las propiedades de medio efectivo.

$$c1T(u, L_0) = \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{k_0 + m_0}{2\rho_I} + \frac{p_0}{2\rho_{III}} + u^2 \left(\frac{p_0 - k_0 - m_0}{2\rho_I} + \frac{n_0 - p_0/2}{\rho_{III}} \right) + \left[4u^2(1-u^2) \left(\frac{(l_0 + p_0/2)(q_0 + p_0/2)}{\rho_I \rho_{III}} \right) + \left[\frac{k_0 + m_0}{2\rho_I} - \frac{p_0}{2\rho_{III}} + u^2 \left(\frac{p_0 - k_0 - m_0}{2\rho_I} - \frac{n_0 - p_0/2}{\rho_{III}} \right) \right]^2 \right] \right] \right\}^{1/2}$$

$$c2T = \left(\frac{m_0(1-u^2) + p_0 u^2}{2\rho_I} \right)^{1/2}$$

$$c3T(u, L_0) = \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{k_0 + m_0}{2\rho_I} + \frac{p_0}{2\rho_{III}} + u^2 \left(\frac{p_0 - k_0 - m_0}{2\rho_I} + \frac{n_0 - p_0/2}{\rho_{III}} \right) - \left[4u^2(1-u^2) \left(\frac{(l_0 + p_0/2)(q_0 + p_0/2)}{\rho_I \rho_{III}} \right) + \left[\frac{k_0 + m_0}{2\rho_I} - \frac{p_0}{2\rho_{III}} + u^2 \left(\frac{p_0 - k_0 - m_0}{2\rho_I} - \frac{n_0 - p_0/2}{\rho_{III}} \right) \right]^2 \right] \right] \right\}^{1/2}$$

este método es autoconsistente lo que implica que algunas funciones dependan de otras funciones.

$$D = \rho_I \left[\frac{p_0}{2} + \left(n_0 - \frac{p_0}{2} \right) u^2 - \rho_3 c1T(u, L_0)^2 \right]^2 + \rho_{III} \left(q_0 + \frac{p_0}{2} \right)^2 (1-u^2) u^2$$

$$m_1 = \sqrt{\frac{\rho_I}{D}} \left[\frac{p_0}{2} (1-u^2) + n_0 u^2 - \rho_3 c1T(u, L_0)^2 \right]$$

$$m_3 = -\sqrt{\frac{\rho_{III}}{D}} \left(q_0 + \frac{p_0}{2} \right) u \sqrt{1-u^2}$$

Se definen a continuación las funciones auxiliares $\varepsilon(z)$ y $hr(z)$

$$\varepsilon(z) = \frac{3(1-iz)(\sin z - z \cos z) e^{iz}}{z^3}$$

$$h(z) = \frac{3(\sin z - z \cos z)}{z^3}$$

Si sustituimos la "z" en las funciones Hr y Fr que definimos anteriormente, estas funciones se expresan:

$$F_r = \delta \frac{1 - \varepsilon(z)}{|\xi_n|^3} \Rightarrow \begin{cases} F_1 = F1T = \delta \frac{\left[1 - \varepsilon \left(\omega_{nor} \zeta \frac{c1T(u, L_2)}{c1T(u, L_0)} \right) \right]}{\zeta^3} \\ F_2 = F2T = \delta \frac{\left[1 - \varepsilon \left(\omega_{nor} \zeta \frac{c1T(u, L_2)}{c2T(u, L_0)} \right) \right]}{\zeta^3} \\ F_3 = F3T = \delta \frac{\left[1 - \varepsilon \left(\omega_{nor} \zeta \frac{c1T(u, L_2)}{c3T(u, L_0)} \right) \right]}{\zeta^3} \end{cases}$$

$$H_r = \delta \frac{\varepsilon(z)}{C_r^2 |\xi_n|^3} \Rightarrow \begin{cases} H_1 = H1T = \delta \frac{\varepsilon \left(\omega_{nor} \zeta \frac{c1T(u, L_2)}{c1T(u, L_0)} \right)}{c1T(u, L_2)^2 \zeta^3} \\ H_2 = H2T = \delta \frac{\varepsilon \left(\omega_{nor} \zeta \frac{c1T(u, L_2)}{c2T(u, L_0)} \right)}{c2T(u, L_2)^2 \zeta^3} \\ H_3 = H3T = \delta \frac{\varepsilon \left(\omega_{nor} \zeta \frac{c1T(u, L_2)}{c3T(u, L_0)} \right)}{c3T(u, L_2)^2 \zeta^3} \end{cases}$$

De las ecuaciones anteriores, c1T, c2T, c3T, son funciones que dependen del ángulo de incidencia de la onda “r” y las propiedades elásticas L2 de la matriz y L0 propiedades efectivas. Físicamente, c1T, c2T, c3T representan las velocidades de onda P, SH y SV respectivamente

Una vez teniendo todas las funciones auxiliares mostradas hasta el momento podemos obtener el vector

$$\bar{S}_x^{(r)} = [2k_s, l_s, q_s, n_s, 2m_s, 2p_s, \rho_{s,1}, \rho_{s,3}]$$

a partir de resolver las integrales que aparecen a continuación:

$$2k_s = \frac{1}{2\rho_1} \int_0^1 (1-u^2) [m_1^2 H_1 + m_3^2 H_3] du$$

$$\begin{aligned}
q_s = l_s &= \frac{1}{2\sqrt{\rho_I \rho_{III}}} \int_0^1 u \sqrt{1-u^2} m_1 m_3 [H_1 - H_3] du \\
n_s &= \frac{1}{\rho_{III}} \int_0^1 u^2 [m_3^2 H_1 + m_1^2 H_3] du \\
2m_s &= \frac{1}{4\rho_I} \int_0^1 (1-u^2) [m_1^2 H_1 + H_2 + m_3^2 H_3] du \\
2p_s &= \frac{1}{2\rho_I} \int_0^1 \left\{ \left[u^2 \frac{m_1^2}{\rho_I} + (1-u^2) \frac{m_3^2}{\rho_{III}} + 2 \frac{m_1 m_3 u \sqrt{1-u^2}}{\sqrt{\rho_I \rho_{III}}} \right] H_1 + \frac{u^2}{\rho_I} H_2 + \left[u^2 \frac{m_3^2}{\rho_I} + (1-u^2) \frac{m_1^2}{\rho_{III}} - 2 \frac{m_1 m_3 u \sqrt{1-u^2}}{\sqrt{\rho_I \rho_{III}}} \right] H_3 \right\} du \\
M_I &= \frac{1}{2\rho_I} \int_0^1 [m_1^2 F_1 + F_2 + m_3^2 F_3] du \\
M_{III} &= \frac{1}{\rho_{III}} \int_0^1 [m_3^2 F_1 + m_1^2 F_3] du
\end{aligned}$$

Estas integrales se resuelven de manera numérica, en el programa de MATLAB fueron resueltas a partir de la cuadratura Gauss-Kronrod.

Finalmente se obtiene el vector $\bar{S}_x^{(r)} = [2k_s, l_s, q_s, n_s, 2m_s, 2p_s, \rho_{s,1}, \rho_{s,3}]$ y se sustituye en la ecuación autoconsistente.

$$L_0 = \alpha \left[L_2 + \sum_{r=1}^n \beta_N \phi(L_r - L_2) \phi \left[I + \bar{S}_x^{(r)} (L_r - L_0) \right]^{-1} \right] + (1-\alpha)L_0$$

Se puede reescribir de forma desarrollada, a partir de las operaciones multiplicación matricial y la inversa de la matriz definidas. Quedando los elementos del vector L_0 como (caso bifásico)

$$k_0 = \alpha \left[k_2 + \left(\frac{2(l_1 - l_2)(n_s(q_1 - q_0) + q_s(k_1 - k_0))}{-2(k_s(l_1 - l_0) + l_s(n_1 - n_0))(n_s(q_1 - q_0) + q_s(k_1 - k_0)) + (1+k_s(k_1 - k_0) + 2l_s(q_1 - q_0))(1+n_s(n_1 - n_0) + 2q_s(l_1 - l_0))} + \dots \right) \beta + k_0(1-\alpha) \right]$$

$$l_0 = \alpha \left[l_2 + \left(\frac{(k_1 - k_2)(k_s(l_1 - l_0) + l_s(n_1 - n_0))}{-2(k_s(l_1 - l_0) + l_s(n_1 - n_0))(n_s(q_1 - q_0) + q_s(k_1 - k_0)) + (1 + k_s(k_1 - k_0) + 2l_s(q_1 - q_0))(1 + n_s(n_1 - n_0) + 2q_s(l_1 - l_0))} + \dots \right) \beta \right] + l_0(1 - \alpha)$$

$$q_0 = \alpha \left[q_2 + \left(\frac{(n_1 - n_2)(n_s(q_1 - q_0) + q_s(k_1 - k_0))}{-2(k_s(l_1 - l_0) + l_s(n_1 - n_0))(n_s(q_1 - q_0) + q_s(k_1 - k_0)) + (1 + k_s(k_1 - k_0) + 2l_s(q_1 - q_0))(1 + n_s(n_1 - n_0) + 2q_s(l_1 - l_0))} + \dots \right) \beta \right] + q_0(1 - \alpha)$$

$$n_0 = \alpha \left[n_2 + \left(\frac{2k_s(n_s(l_1 - l_0) + l_s(n_1 - n_0))(q_1 - q_2)}{-2(k_s(l_1 - l_0) + l_s(n_1 - n_0))(n_s(q_1 - q_0) + q_s(k_1 - k_0)) + (1 + k_s(k_1 - k_0) + 2l_s(q_1 - q_0))(1 + n_s(n_1 - n_0) + 2q_s(l_1 - l_0))} + \dots \right) \beta \right] + n_0(1 - \alpha)$$

$$m_0 = \alpha \left[m_2 + \left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_s(m_1 - m_0)} \right) \beta \right] + m_0(1 - \alpha)$$

$$p_0 = \alpha \left[p_2 + \left(\frac{p_1 - p_2}{1 + p_s(p_1 - p_0)} \right) \beta \right] + p_0(1 - \alpha)$$

$$\rho_{01} = \alpha \left[\rho_{21} + \left(\frac{\rho_{11} - \rho_{21}}{1 + M_{11}(\rho_{11} - \rho_{01})} \right) \beta \right] + \rho_{01}(1 - \alpha)$$

$$\rho_{03} = \alpha \left[\rho_{23} + \left(\frac{\rho_{13} - \rho_{23}}{1 + M_{33}(\rho_{13} - \rho_{03})} \right) \beta \right] + \rho_{03}(1 - \alpha)$$

La razón de aspecto de la inclusión se describe a través de la ecuación de una esfera

$$\Omega = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2 \delta^2} \leq 1 \right\}$$

$$\Omega = \left\{ x^2 + y^2 + \frac{z^2}{\delta^2} \leq a^2 \right\}$$

9.2 APÉNDICE B

Los siguientes diagramas quinarios muestran cómo pueden relacionarse más de tres componentes, en este caso se usaron los materiales comunes, calcita, cuarzo, arcilla más dos minerales arcillosos, clorita y caolinita. También se muestran el desplazamiento de cada componente con el correspondiente aumento de fluido.

En color azul claro se interpone el diagrama (Figura 41) de los principales minerales arcillosos para ver su ubicación respecto al diagrama quinario.

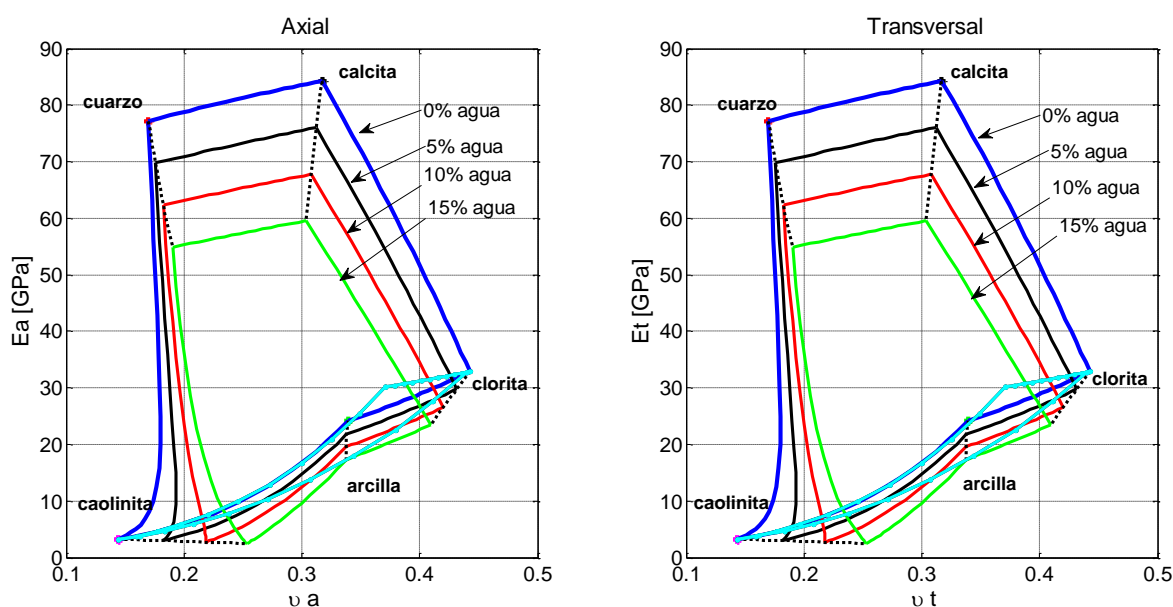


Figura 66. Diagrama quinario axial y transversal para una razón de aspecto $\delta=1$ y diferentes porcentajes de agua e incluyendo el área que envuelven los minerales arcillosos.

Naturalmente el diagrama axial y transversal es el mismo puesto que se trata del caso isótropo.

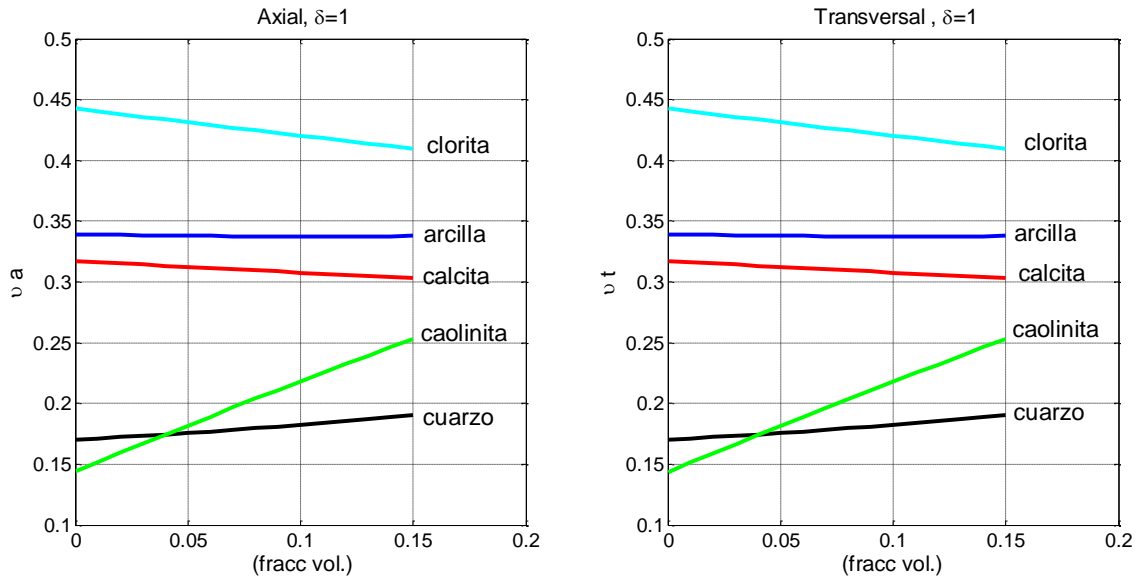


Figura 67. Graficas del parámetro elástico de cinco materiales, razón de Poisson respecto la fracción volumétrica del agua para una razón de aspecto $\delta=1$.

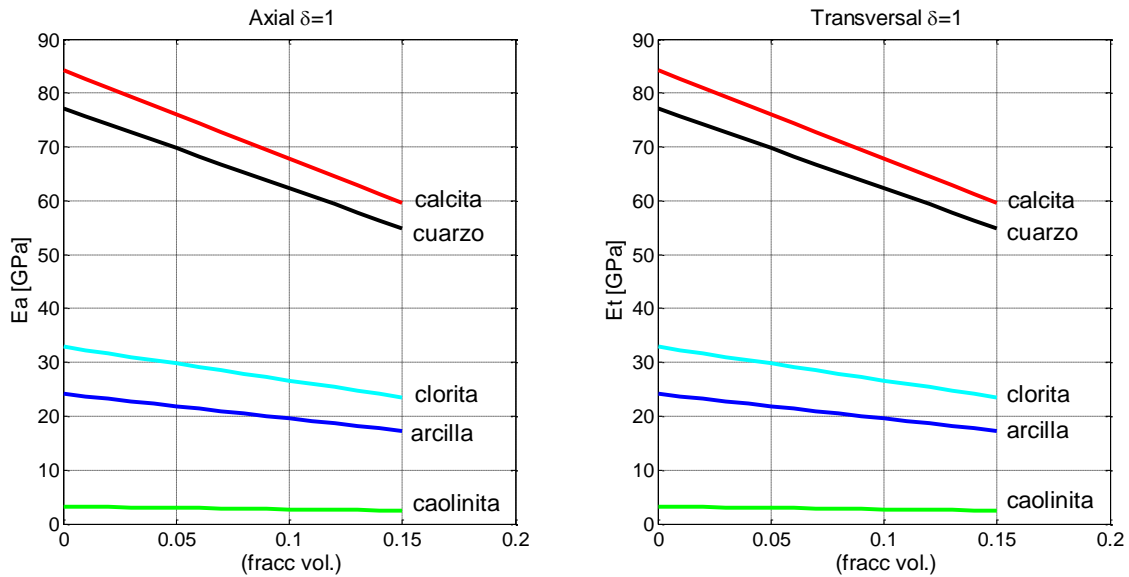


Figura 68. Graficas del parámetro elástico de cinco materiales, módulo de Young respecto la fracción volumétrica del agua para una razón de aspecto $\delta=1$.

A continuación, se muestra el diagrama quinario con una razón de aspecto $\delta < 1$, en ellas se muestran las trayectorias de un mineral a otro, y como cambian en la dirección axial y transversal.

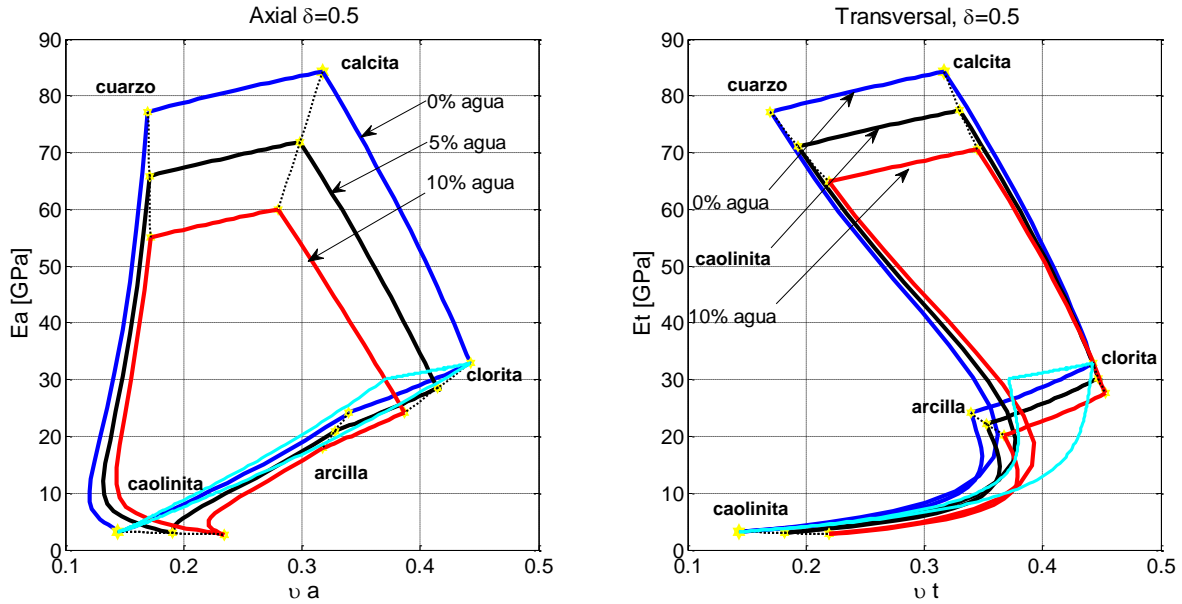


Figura 69. Diagrama quinario axial y transversal para una razón de aspecto $\delta=0.5$ y diferentes porcentajes de agua.

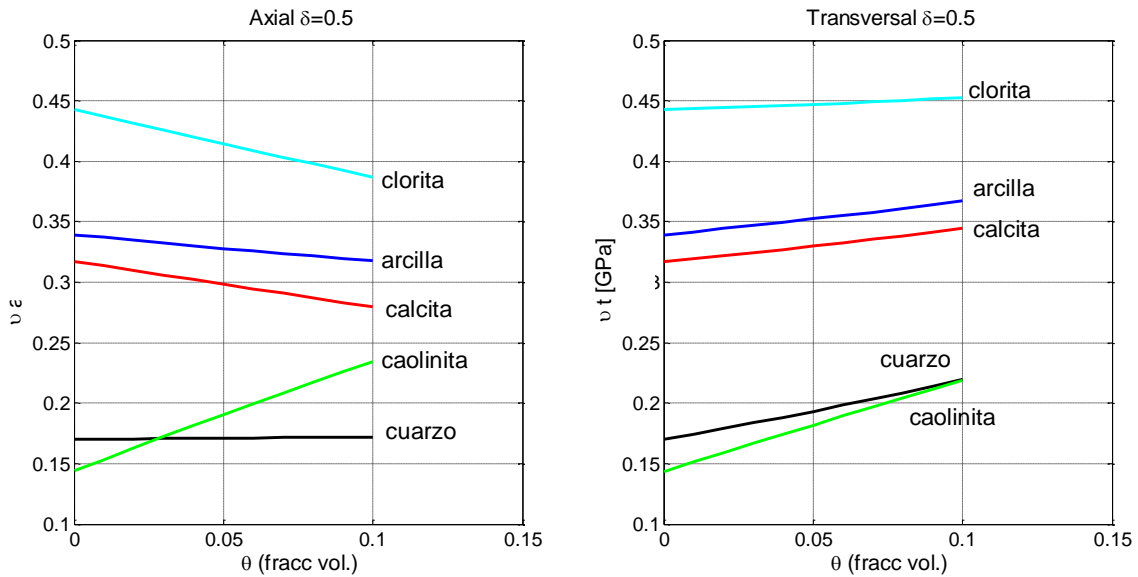


Figura 70. Graficas del parámetro elástico de cinco materiales, razón de Poisson respecto la fracción volumétrica del agua para una razón de aspecto $\delta=0.5$

La Figura 70 muestra como la razón de Poisson de los diferentes minerales cambia de acuerdo a la dirección de medición, algunos tienen un comportamiento contrario (axial o transversal) como es el caso de la arcilla o calcita y otros tienen el mismo comportamiento creciente o

decreciente en ambos casos, como la caolinita que en ambas direcciones su razón de Poisson es creciente, aunque diferente magnitud.

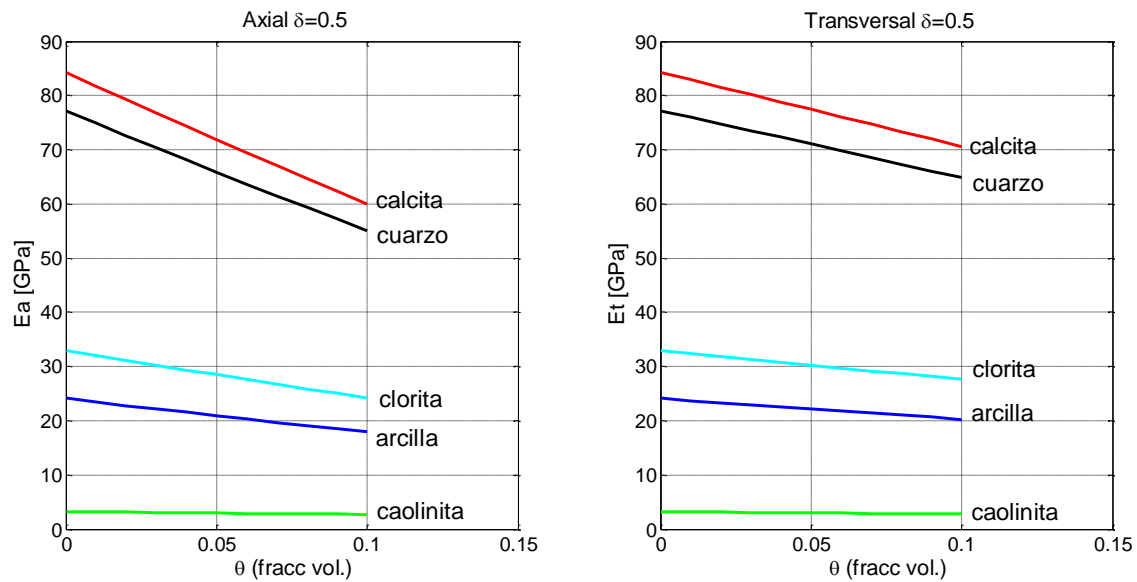


Figura 71. Graficas del parámetro elástico de cinco materiales, módulo de Young respecto la fracción volumétrica del agua para una razón de aspecto $\delta=0.5$

En cuanto al módulo de Young, vemos que, para todos los minerales, éste es decreciente conforme aumenta la proporción de fluido, sin embargo, para la caolinita este decremento es muy pequeño, casi se mantiene constante por lo que la presencia de fluido lo afecta poco elásticamente.

En las siguientes gráficas se trata del análisis del mismo diagrama quinario, pero ahora con una razón de aspecto $\delta > 1$.

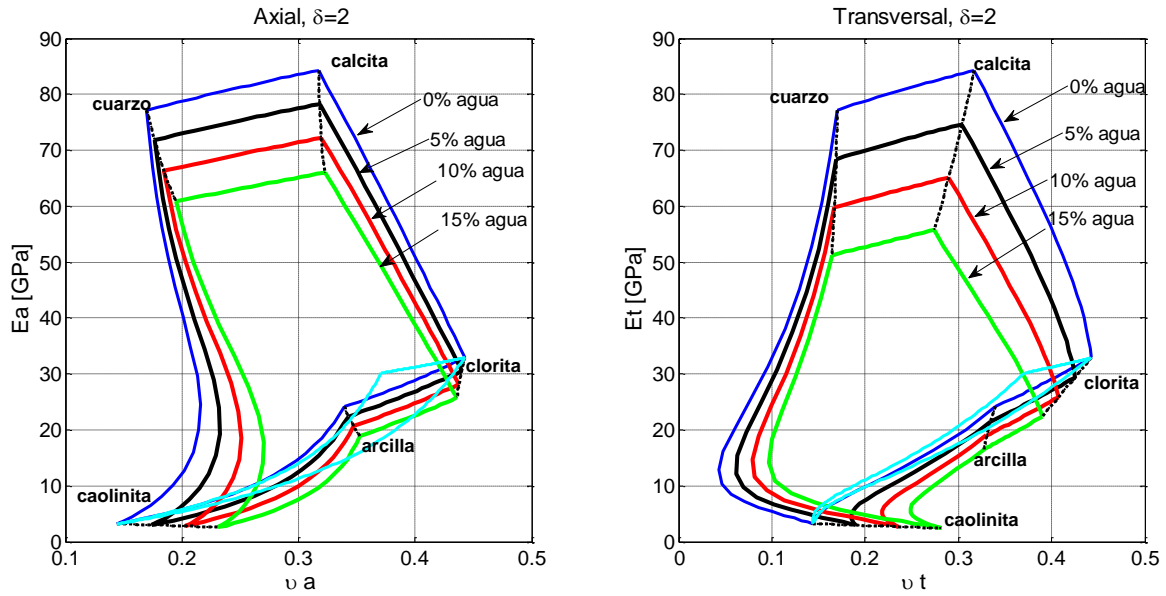


Figura 72. Diagrama quinario axial y transversal para una razón de aspecto $\delta=2$ y diferentes porcentajes de agua

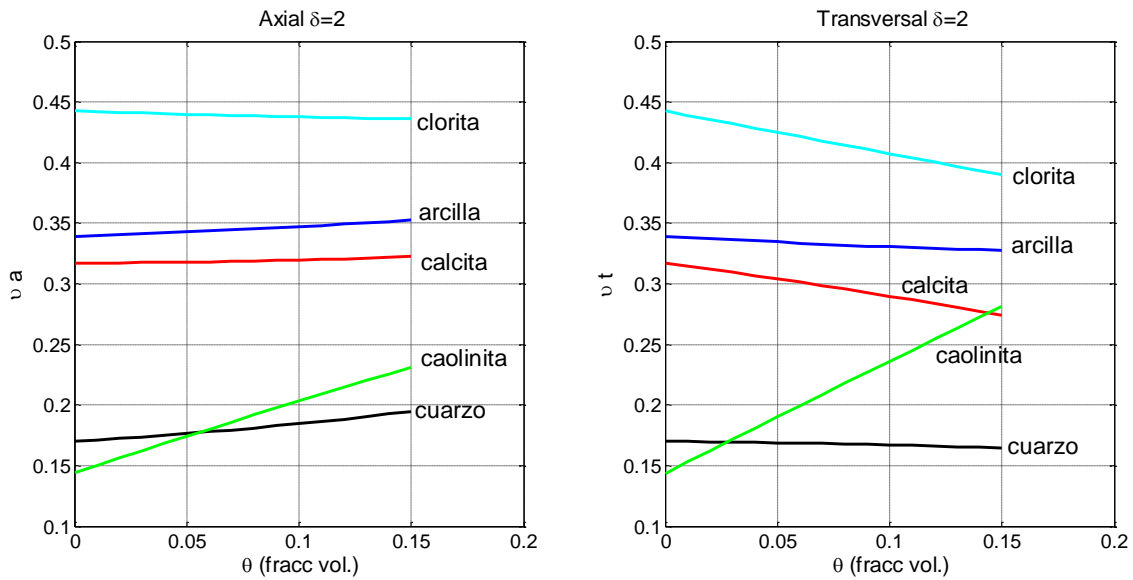


Figura 73. Graficas del parámetro elástico de cinco materiales, razón de Poisson respecto la fracción volumétrica del agua para una razón de aspecto $\delta=2$

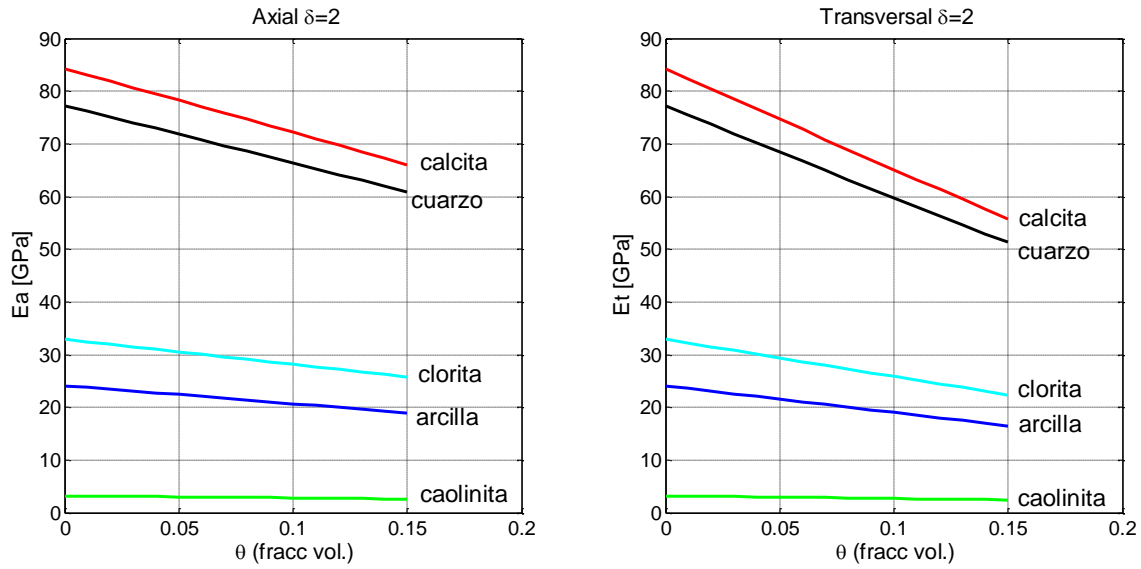


Figura 74. Graficas del parámetro elástico de cinco materiales, módulo de Young respecto la fracción volumétrica del agua para una razón de aspecto $\delta=2$

En algunos casos la forma de la inclusión puede ampliar el área que encierra el diagrama o puede disminuirla. Tal es el caso de los diagramas transversales de las Figura 69.

Es importante mencionar que el comportamiento de la razón de Poisson no es lineal, para mostrarlo, se muestran las gráficas por separado de las propiedades elásticas de cada mineral respecto a la fracción volumétrica del fluido.

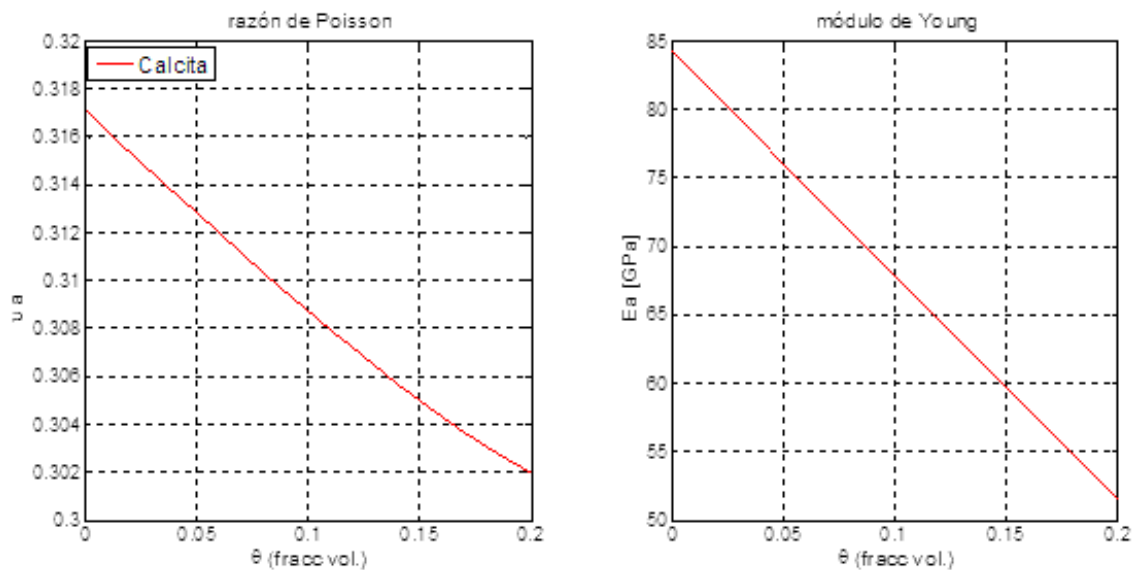


Figura 75. Graficas de razón de Poisson y módulo de Young de la calcita contra la fracción volumétrica de agua, para una razón de aspecto $\delta=1$.

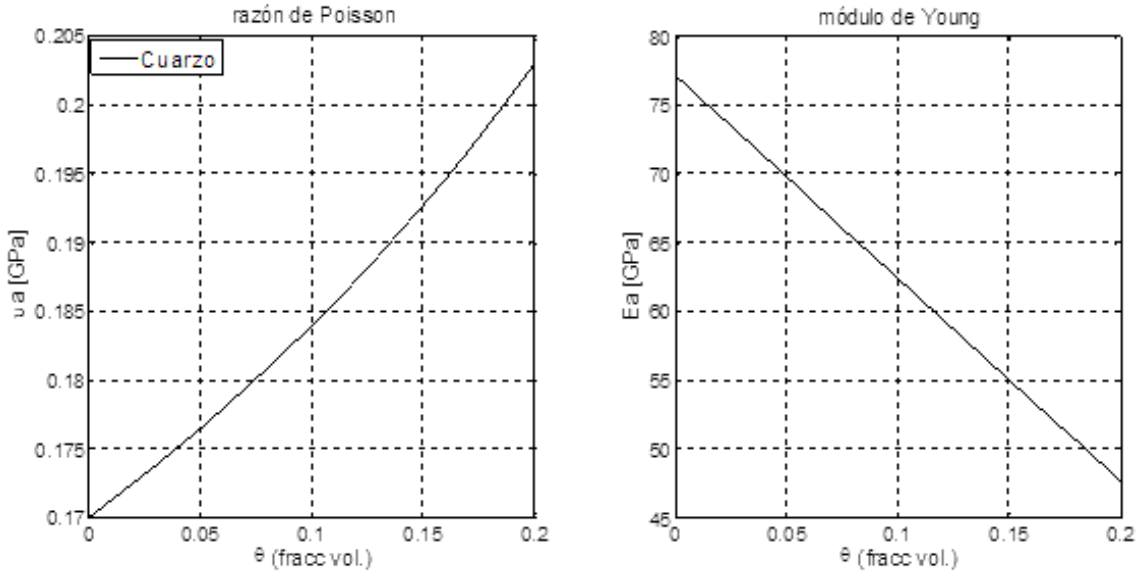


Figura 76. Gráficas de razón de Poisson y módulo de Young del cuarzo contra la fracción volumétrica de agua, para una razón de aspecto $\delta=1$.

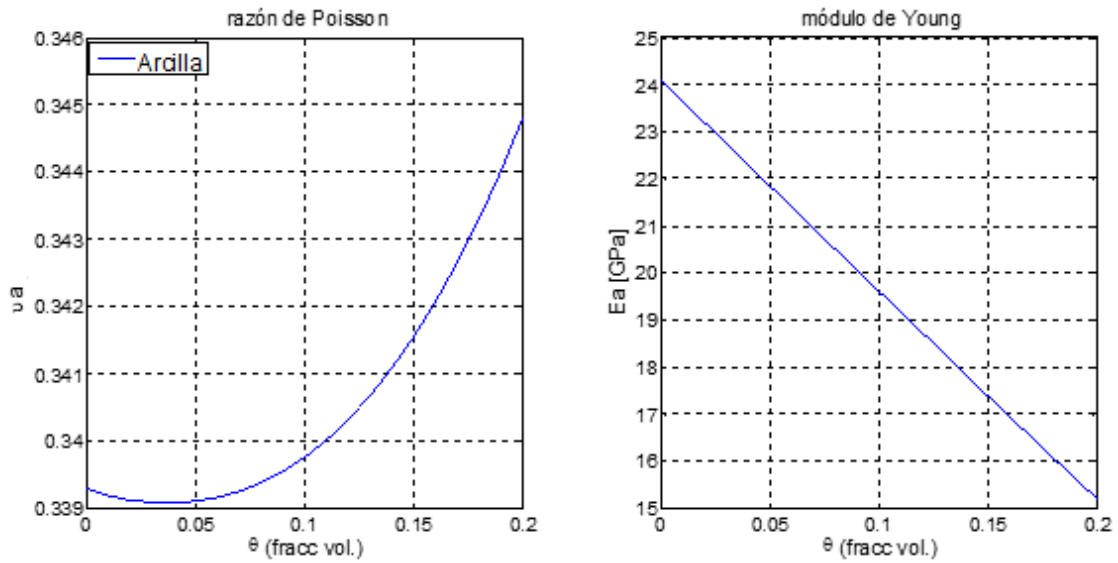


Figura 77. Gráficas de razón de Poisson y módulo de Young de la arcilla contra la fracción volumétrica de agua, para una razón de aspecto $\delta=1$.

Se distingue que para los tres minerales los módulos de Young son lineales con pendientes diferentes, mientras que la razón de Poisson tiene comportamiento diferente para cada mineral.

La razón de Poisson para la calcita disminuye y para el cuarzo aumenta, pero en ambos casos el comportamiento no es lineal, se puede ver cierta curvatura.

la razón de Poisson para el caso de la arcilla se comporta de manera exponencial, sin embargo, cuando la fracción volumétrica va de 0 a 0.05, la razón de Poisson decrece y pasando el valor de 0.05 crece exponencialmente.

A continuación se muestran los diagramas de las Figura 42, Figura 43, Figura 47, Figura 50, Figura 53 con el diagrama de minerales arcillosos Figura 41.

