UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Algunas Propiedades de $SP_n(X)$

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

JORGE LUIS SANTOS SILVA

DIRECTOR DE TESIS:
DR. JORGE MARCOS MARTÍNEZ MONTEJANO

2018
CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX.

Datos del Alunmo

Apellido Paterno	Santos
Apellido Materno	Silva
Nombre(s)	Jorge Luis
Teléfono	0445542331195
Escuela	Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias
Carrera	Matemáticas
No. de Cuenta	307162061

1. Datos del Asesor

Grado	Dr.
Nombre(s)	Jorge Marcos
Apellido Paterno	Martínez
Apellido Materno	Montejano

2. Datos del Sinodal

Grado	Dra.
Nombre(s)	María Isabel
Apellido Paterno	Puga
Apellido Materno	Espinosa

3. Datos del Sinodal

Grado	M. en C.
Nombre(s)	Luis Antonio
Apellido Paterno	Paredes
Apellido Materno	Rivas

4. Datos del Sinodal

Grado	Dr.
Nombre(s)	Carlos
Apellido Paterno	Vargas
Apellido Materno	Obieta

5. Datos del Sinodal

Grado	Dr.
Nombre(s)	Verónica
Apellido Paterno	Martínez de la Vega
Apellido Materno	Y Mancilla

La matemática-verdad lo trae cada matemático dentro de si mismo. El sufrimiento, el gozo, el triunfo, el fracaso, los elogios y la pasión; todo eso que hay en este arte de contrastes, de luz y sombra, de exhaltación y amargura, de héroes y truhanes, lo vamos viviendo los matemáticos. Algunos caminarán todo el tiempo sin llegar jamás a ningún lado en ese laberinto mil veces peor que el del minotauro porque éste es un camino que se recorre voluntariamente. Para el que llega encontrar la verdad en las matemáticas, el camino es aun más duro porque debe defenderlo con la vida hasta la muerte. Aquel que descubrió la verdad en las matemáticas y lo traiciona, preferirá no haberlo descubierto nunca. . .

Jorge de Jesús "El Glison"

Agradecimientos

A mis padres (B y N), gracias por el apoyo incondicional y por haber creído en mi todo este tiempo se veía difícil). A mis hermanos Ana y Beto, gracias por sus consejos y ejemplo. A mis amigos que me acompañaron durante todos estos años haciendo esta experencia mas placentera. Alejambro, Dolores, Toña y Vicky. A las siete esferas, el P.A., el D.Z. y el A.M. A mis profesores y colegas de los que aprendí y tuve oportunidad de compartir enseñanzas. A Mario Rosales por darme la oportunidad de apoyar sus cursos y mostrarme un enfoque diferente de las matemáticas. A mi Universidad querida por haberme cobijado durante mi estancia. A mi asesor y profesor Jorge Marcos, por los cursos de topología y su paciencia. Y a Paint, Ale y Diosel por los consejos y enseñarme a escribir. A Ani y Roberto por las correcciones.

Índice general

Introducción

En Topología, hay dos nociones de producto simétrico relacionados con un espacio base X, uno de estos es $F_n(X)$, el cual es un subespacio del hiperespacio 2^X, y el otro denotado mediante $SP_n(X)$ es un cociente bajo una acción de un grupo.

Dado un espacio topológico X definimos los hiperespacios:

1. $2^X = \{A \subseteq X |\ A \text{ es cerrado}\}$

2. $F_n(X) = \{A \in 2^X |\ |A| \leq n\}$.

El conjunto 2^X se le dota de la topología de Vietoris, y $F_n(X)$ tiene la topología de subespacio. El estudio de los hiperespacios se remonta a pricipios de 1900 con trabajos de Hausdorff y Vietoris, mientras que el espacio $F_n(X)$ fue estudiado por primera vez por Borsuk y Ulam en 1931.

El otro producto simétrico $SP_n(X)$ se obtiene bajo la acción del grupo simétrico S_n en el espacio $X^n = X \times \cdots \times X$ permutando las coordenadas, es decir:

$$\begin{array}{rcl} S_n \times X^n & \to & X^n \\ (\sigma, x) & \mapsto & (x_{\sigma(1)}, \cdots x_{\sigma(n)}). \end{array}$$

El espacio cociente de X^n por esta acción es lo que denotaremos por $SP_n(X)$. Esta construcción, que asocia a un espacio topológico X un segundo espacio $SP_n(X)$; también asocia a una función continua $f\colon X \to Y$ una segunda función continua $SP_n(f)\colon SP_n(X) \to SP_n(Y)$. Además, la asignación cumple con las siguiente propiedades:

1) La identidad $1_X\colon X \to X$, bajo la asignación $SP_n(-)$ es la identidad en $SP_n(X)$.

2) Dado un diagrama de composición

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] & Z \\ X \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "g\circ f"'] & \end{tikzcd}$$

induce el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} SP_n(Y) \arrow[r, "SP_n(g)"] & SP_n(Z) \\ SP_n(X) \arrow[u, "SP_n(f)"] \arrow[ur, "SP_n(g)\circ SP_n(f)"'] & \end{tikzcd}$$

en otras palabras, $SP_n(g \circ f) = SP_n(g) \circ SP_n(f)$[1].

Estos productos simétricos guardan una relación entre ellos, de hecho, de la definición de ambos productos simétricos se tiene que $SP_1(X) = X = F_1(X)$. También se puede probar de manera sencilla que $SP_2(X) = F_2(X)$.

En este trabajo de tesis estudiaremos el producto simétrico $SP_n(X)$, veremos que propiedades topológicas se preservan de X en la construcción de $SP_n(X)$ y viceversa.

En el primer capítulo se introducirá las herramientas necesarias de Teoría de Grupos y Topología que usaremos, pues como hemos dicho, el espacio $SP_n(X)$ es un cociente bajo la acción del grupo de permutaciones.

En el segundo capítulo daremos la definición del espacio $SP_n(X)$, también veremos qué propiedades cumple la función $\mathbb{P}_n \colon X^n \to SP_n(X)$ que manda a cada elemento de X^n a su clase de equivalencia, y también daremos un modelo de $SP_n(-)$, así como algunos encajes que resultan naturales de la definición.

En los capítulos restantes estudiaremos propiedades topológicas que se transfieren de $SP_n(X)$ a X^n, de $SP_n(X)$ a X, de X a $SP_n(X)$ y también de X^n a $SP_n(X)$. En el tercer capítulo veremos cosas de separabilidad, de la primera y segunda numerabilidad; en el cuarto capítulo estudiaremos axiomas de separación, como también relaciones de metrización; en el quinto capítulo se prueban las relaciones de compacidad, compacidad secuencial, compacidad numerable, compacidad local y también, la relación entre las compactaciones de Stone-Cech y de Alexandroff; finalmente en el sexto capitulo veremos cómo tienen la misma dimensión $SP_n(X)$ y X^n.

[1] En el lenguaje de teoría de categorías, se tiene que la construcción $SP_n(-)$ es funtorial en la categoría de espacios topológicos.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se presentan todas las definiciones, resultados y notaciones que usaremos a lo largo del texto. Iniciamos introduciendo nociones de teoría de grupos que nos serán de gran ayuda.

1.1. Teoría de Grupos

Definición 1.1.1 Sea $f\colon A \to B$ una función. Para $C \subseteq A$, definimos la **imagen** de C bajo f como el conjunto $\{f(a) \in B \mid a \in C\}$, el cual denotamos con $f(C)$.

Recordemos que una función $f\colon A \to B$ es **biyectiva** si es inyectiva[1] y suprayectiva[2]. También recordemos que una función $f\colon A \to B$ se dice que es **invertible** si existe $g\colon B \to A$ una función tal que $f \circ g = 1_B$ y $g \circ f = 1_A$. Dicha función es única y la denotaremos por f^{-1}.

Definición 1.1.2 Dado X un conjunto, a una función biyectiva $\sigma\colon X \to X$ le llamaremos una **permutación** en X. Denotamos por S_n al conjunto de permutaciones de $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, es decir:

$$S_n = \{\sigma\colon \{1, 2, 3, \ldots, n\} \to \{1, 2, 3, \ldots, n\} \mid \sigma \text{ es biyectiva}\}.$$

Definición 1.1.3 Un **grupo** es un conjunto no vacío G con una operacioń binaria $*\colon G \to G$ que satisface lo siguiente:

i) Asociatividad: $a * (b * c) = (a * b) * c$; para $a, b, c \in G$.

ii) Neutro: existe $e \in G$ tal que $a * e = e * a = a$ para cualquier $a \in G$.

iii) Inverso: para todo $a \in G$ existe $a' \in G$ tal que $a * a' = e = a' * a$. Al elemento a' se le llama inverso de a y se denotará como a^{-1}.

[1] Una función f es inyectiva si para $x \neq y$ en A se tiene que $f(x) \neq f(y)$ en B.
[2] Una función f es suprayectiva (sobre) si $f(A) = B$.

Si G es un grupo bajo la operación $*$ lo denotaremos con $(G, *)$.

Notacioń 1.1.4 Si $(G, *)$ es un grupo, para $a \in G$ definimos las potencias a^k para $k \in \mathbb{Z}$ como:

i) si $k = 0$, $a^0 = e$ donde e es el neutro de G.

ii) para $k \geq 1$, hacemos:

$$\begin{aligned} a^1 &= a \\ a^2 &= a * a \\ &\vdots \\ a^{k+1} &= a^k * a \end{aligned}$$

iii) Si $-k < 0$ $(k > 0)$, definimos:

$$a^{-k} = (a^{-1})^k.$$

El siguiente lema nos será de muy uťil, una prueba de este se puede consultar en Zaldiv́ar [5].

Lema 1.1.5 *El conjunto S_n es un grupo bajo la operación de composición de funciones.*

Definición 1.1.6 Dadas $\sigma \in S_n$ y $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, a el conjunto

$$\{\sigma^k(i) \mid k \in \mathbb{N}\}$$

se le llamará la **órbita** de i bajo σ. Al cual denotaremos como $\mathrm{orb}_\sigma(i)$ a la órbita de i bajo σ.

Observación 1.1.7 Si $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ y $\sigma \in S_n$, entonces la órbita de i bajo σ es no vacía, ya que $i = e(i) = \sigma^0(i) \in \mathrm{orb}_{\sigma(i)} = \{\sigma^k(i) | k \in \mathbb{N}\}$.

El siguiente lema se sigue de la definición de órbita.

Lema 1.1.8 *Sea $\sigma \in S_n$. Entonces las órbitas de σ son disjuntas.*

Con el anterior lema damos por terminado todos los resultados y definiciones acerca de teoría de grupos que necesitaremos a lo largo del texto, por lo cual, las definiciones y resultados consecuentes sólo son topológicas. Asumiremos que el lector está familiarizado con lo que es una topología.

1.2. Nociones Básicas de Topología

Definición 1.2.1 Sea (X, τ) un espacio topológico.

i) Decimos que $\beta \subseteq \tau$ es una **base** para la topología si para todo $x \in X$ y para cualquier abierto[3] V tal que $x \in V$ se tiene que existe $U \in \beta$ tal que $x \in U \subseteq V$. Si $A \subseteq X$ es elemento de una base para X, entonces decimos que A es un elemento **básico** para la topología de X.

ii) Decimos que $\beta_x \subseteq \tau$ es una **base local** para x, si para cualquier vecindad[4] del punto existe $U \in \beta_x$ tal que $x \in U \subseteq V$.

Notemos que si X es un conjunto, τ es una topología para X y β es una base para dicha topología, entonces los objetos que viven en τ son la unión de elementos de la base β.

Lema 1.2.2 *Si $\mathcal{A}$ es un conjunto de subconjuntos de X, entonces $\mathcal{A}$ es base de una topología si cumple con la siguiente propiedad:*

$$U, V \in \mathcal{A} \qquad y \quad x \in U \cap V \ \Rightarrow \ \exists\, W \in \mathcal{A} \text{ tal que } x \in W \subseteq U \cap V.$$

Demostración. Como queremos probar que $\mathcal{A}$ es base para una topología, consideraremos $\mathfrak{A} = \{\bigcup U \mid U \subseteq \mathcal{A}\} \cup \{X\}$ y veremos que cumple con ser una topología, así $\mathcal{A}$ será base para $\mathfrak{A}$. Primero observamos que $\emptyset \subseteq \mathcal{A}$ y $\bigcup \emptyset = \emptyset$, por lo que $\emptyset \in \mathfrak{A}$. Ahora, nos resta probar que $\mathfrak{A}$ es cerrado bajo uniones de cualquier cantidad de conjuntos e intersecciones finitas.

Veamos que $\mathfrak{A}$ es cerrado bajo uniones de cualesquiera conjuntos, sea pues $\{B_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq \mathfrak{A}$. Entonces para todo $\alpha \in \Lambda$ existe $U_\alpha \subseteq \mathcal{A}$ tal que $B_\alpha = \bigcup U_\alpha$, así

$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} (\bigcup U_\alpha) = \bigcup (\bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha) \in \mathfrak{A},$$

luego la unión de conjuntos que pertenecen a $\mathfrak{A}$ también es un elemento de $\mathfrak{A}$.

Para probar que $\mathfrak{A}$ es cerrado bajo intersecciones finitas nos basta con probar que para cualquier par de conjuntos $U, V \in \mathfrak{A}$, entonces $U \cap V \in \mathfrak{A}$. Así pues, tomemos $B_1, B_2 \in \mathfrak{A}$, luego existen $U_1, U_2 \subseteq \mathcal{A}$ tal que

$$B_1 = \bigcup U_1 \text{ y } B_2 = \bigcup U_2.$$

[3] U es abierto si es elemento de la topología τ.

[4] $U \subseteq X$ es vecindad de x si existe V abierto tal que $x \in V \subseteq U$.

Por lo que, $B_1 \cap B_2 = \bigcup U_1 \cap \bigcup U_2 = \bigcup_{P \in U_1}(\bigcup_{Q \in U_2}(P \cap Q))$. Ahora, tenemos que para cada $x \in B_1 \cap B_2$ existen $P_x \in U_1, Q_x \in U_2$ tales que $x \in P_x \cap Q_x \subseteq B_1 \cap B_2$, como $P_x, Q_x \in \mathfrak{A}$ existen $W_x \in \mathcal{A}$ tal que

$$x \in W_x \subseteq P_x \cap Q_x \subseteq B_1 \cap B_2.$$

Consideremos el conjunto

$$W = \bigcup_{x \in B_1 \cap B_2} W_x,$$

se sigue que $W \subseteq B_1 \cap B_2$; por otro lado tenemos que si $y \in B_1 \cap B_2$, entonces $y \in W_y \subseteq W$, y así $B_1 \cap B_2 \subseteq W$. De lo anterior concluimos que

$$B_1 \cap B_2 = W.$$

Y debido a que W es unión de elementos de $\mathcal{A}$ se tiene $W = B_1 \cap B_2 \in \mathfrak{A}$, por lo que procediendo de manera inductiva tenemos que si $B_1, B_2, \ldots, B_n \in \mathfrak{A}$, entonces $\bigcap_{i=1}^{n} B_i \in \mathfrak{A}$. Finalmente tenemos que $\mathfrak{A}$ es una topología, y de la definición de base se sigue que $\mathcal{A}$ base para $\mathfrak{A}$. $\square$

Definición 1.2.3 Para X un espacio topológico y β una base para la topología de X. Decimos que un subconjunto Λ de la topología es una **sub-base** para la topología de X siempre que para todo conjunto $A \in \beta$ se tiene que A es unión de intersecciones finitas de elementos de Λ.

De la definición de sub-base de un espacio topológico se sigue que si X es un conjunto y si $\mathcal{A}$ es una familia de subconjuntos de X, entonces $\mathcal{A}$ es sub-base para alguna topología. La manera natural de generar una topología dado un conjunto $\mathcal{A}$ es generar primero un conjunto $\mathfrak{A}$ que se comporte como en las hipótesis del lema anterior, para después generar una topología con $\mathcal{A}$.

Proposición 1.2.4 *Sean X un conjunto no vacío y $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una familia de subconjuntos de X. Entonces $\mathcal{A}$ es sub-base para la topología que tiene como base*

$$\beta_{\mathcal{A}} = \{\cap_{\alpha \in \Lambda'} A_\alpha \mid \Lambda' \subseteq \Lambda, |\Lambda'| < |\mathbb{N}|\}.$$

Demostración. Por el Lema 1.2.2 nos basta con probar que si $U, V \in \beta_{\mathcal{A}}$ y $x \in U \cap V$, entonces existe $W \in \beta_{\mathcal{A}}$ tal que $x \in W \subseteq U \cap V$.

Consideremos pues $U, V \in \beta_{\mathcal{A}}$. Entonces existen dos conjuntos finitos $\Lambda_1, \Lambda_2 \subseteq \Lambda$ tal que

$$U = \bigcap_{\alpha \in \Lambda_1} A_\alpha \qquad \text{y} \qquad V = \bigcap_{\alpha \in \Lambda_2} A_\alpha,$$

de esta manera,

$$U \cap V = \big(\bigcap_{\alpha \in \Lambda_1} A_\alpha\big) \cap \big(\bigcap_{\alpha \in \Lambda_2} A_\alpha\big).$$

Ahora, como

$$\bigcap_{\alpha \in \Lambda_1} A_\alpha \cap \bigcap_{\alpha \in \Lambda_2} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in \Lambda_1 \cup \Lambda_2} A_\alpha \in \beta_{\mathcal{A}},$$

se sigue que para todo $x \in U \cap V$ existe $W_x \in \beta_{\mathcal{A}}$ tal que $x \in W_x$. Por lo tanto, el conjunto $\mathcal{A}$ genera una topología en X. $\square$

Podemos notar que, la topología que genera el conjunto vacío consta de dos elementos, a saber, el total y el conjunto vacío.

Definición 1.2.5 Sea $f \colon X \to Y$ una función entre espacios topológicos. Decimos que:

i) f es una función **continua** si $f^{-1}(A) \subseteq X$ es abierto (cerrado[5]) siempre que $A \subseteq Y$ es abierto (cerrado).

ii) f es una función **abierta** (**cerrada**) si para $A \subseteq X$ tal que A abierto (cerrado), implica que $f(A) \subseteq Y$ es abierto (cerrado).

iii) f es un **homeomorfismo** si f es biyectiva y además f y f^{-1} continuas.

La prueba de los siguientes teoremas se puede ver en Dugundji [3].

Teorema 1.2.6 *Sea $f \colon X \to Y$ una función biyectiva y continua. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

i) *f^{-1} es continua.*

ii) *f es abierta.*

iii) *f es cerrada.*

[5] A es cerrado si $X \setminus A$ es abierto.

Teorema 1.2.7 *Sea Y un subespacio de X. Si $A \subseteq Y$ es un conjunto abierto (cerrado) de Y, y si Y es un subconjunto abierto (cerrado) en X, entonces A es abierto (cerrado) en X.*

Definición 1.2.8 Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. El **interior** de A, el cual se denotará mediante $int(A)$, como la unión de todos los abiertos que están contenidos en A. La **cerradura** de A, el cual denotaremos por $\overline{A}$, es la intersección de todos los cerrados que contienen a A. Y la **frontera** denotada por $Fr(A)$, es la intersección de la cerradura de A con la cerradura de $X \setminus A$.

Se sigue que el interior y la cerradura de un conjunto serán abiertos y cerrados respectivamente, dado que la unión de abiertos es abierta y la intersección de cerrados es cerrada. También se siguen las siguientes equivalencias para la definición de cerradura y de frontera de un conjunto, cuya prueba puede consultarse en Munkres [2].

Teorema 1.2.9 *Sean X y Y espacios topológicos; sea $f\colon X \to Y$ una función. Entonces son equivalentes:*

i) *f es continua.*

ii) *Para cada subconjunto $A \subseteq X$, se tiene que $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.*

iii) *Para cada conjunto cerrado $B \subseteq Y$, se tiene que $f^{-1}(B)$ es cerrado en X.*

iv) *Para cada $x \in X$ y cualquier abierto $V \subseteq Y$ tal que $f(x) \in V$, existe un abierto U tal que $x \in U$ y $f(U) \subseteq V$.*

La prueba de los incios de la proposición siguiente se encuentra en Engelking [1].

Proposición 1.2.10 *Si $A \subseteq X$, entonces:*

i) $\overline{A} = \{x \in X \mid \text{para toda vecindad } B \text{ de } x,\ B \cap A \neq \emptyset\}$

ii) $Fr(A) = \{x \in X \mid \text{para toda vecindad } U \text{ de } x,\ \text{se tiene que } U \cap A \neq \emptyset \neq U \cap X \setminus A\}$

Podemos observar de nuestra proposición que A es un conjunto cerrado si y solamente si A es igual a su cerradura.

Proposición 1.2.11 *Si $f\colon X \to Y$ es una función cerrada, entonces para todo $A \subseteq X$ se tiene que $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$.*

Demostración. Basta notar que $\overline{f(A)}$ esta contenido en cualquier conjunto cerrado que contiene a $f(A)$; y que $f(\overline{A})$ es un conjunto cerrado con contiene a $f(A)$, pues f es cerrada y $A \subseteq \overline{A}$. □

Proposición 1.2.12 *Si $f\colon X \to Y$ es una función continua y abierta, entonces para todo $B \subseteq X$, $f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$.*

Demostración. Primero veamos que $f^{-1}(\overline{B}) \subseteq \overline{f^{-1}}(B)$, para esto sea $x \notin \overline{f^{-1}}(B)$. Entonces existe $U \subseteq X$ tal que $x \in U$ y $U \cap f^{-1}(B) = \emptyset$. Así,

$$f(x) \in f(U) \subseteq y \setminus B,$$

y al ser U abierto y f abierta se sigue que $f(x) \notin \overline{B}$. Por lo que $x \notin f^{-1}(\overline{B})$, y así, $f^{-1}(\overline{B}) \subseteq \overline{f^{-1}}(B)$.
Para el regreso basta con notar que al ser f continua, entonces $f^{-1}(\overline{B})$ es un cerrado tal que $f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(\overline{B})$. Así, $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$, pues $\overline{f^{-1}(B)}$ es el cerrado mas pequeño que contiene a $f^{-1}(B)$. □

Recordemos que si $B \subseteq X$, entonces $int(B) = X \setminus \overline{X \setminus B}$.

Corolario 1.2.13 *Si $f\colon X \to Y$ es una función continua y abierta, entonces para todo $B \subseteq X$, $f^{-1}(int(B)) = int(f^{-1}(B))$.*

Demostración. Consideremos $B \subseteq Y$. Luego,

$$\begin{aligned} f^{-1}(int(B)) &= f^{-1}(Y \setminus \overline{Y \setminus B}) \\ &= f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(\overline{Y \setminus B}) \\ &= X \setminus \overline{f^{-1}(Y \setminus B)} \\ &= X \setminus \overline{f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(B)} \\ &= X \setminus \overline{X \setminus f^{-1}(B)} \\ &= int(f^{-1}(B)). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Que es lo que queríamos probar. □

Definición 1.2.14 Sean $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ una familia de espacios topológicos y $\{\tau_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ sus topologías.

i) Para cada $\gamma \in \Gamma$ definimos la función proyección $p_\gamma : \prod_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha \to X_\gamma$ como $p_\gamma((x_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}) = x_\gamma$.

ii) Definimos la sub-base de la topología para el producto[6] $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ como $\beta = \{p_\gamma^{-1}[U_\gamma] | p_\gamma$ es la función proyección para X_γ y $U_\gamma \in \tau_\gamma\}$.

Observamos que si $X_1, X_2, \cdots, X_n$ son espacios y $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n$ sus topologías respectivas, entonces una base para la topología producto es la siguiente

$$\beta = \{\prod_{i=1}^{n} U_i | U_i \in \tau_i, i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}\}.$$

Esto sucede ya que si $i \in \{1, 2, 3, \cdots, n\}$, entonces $U_i \in \tau_i$ y $\prod_{i=1}^{n} U_i = \cap_{i=1}^{n} p_i^{-1}[U_i]$, donde p_i es la función proyección.

Pruebas de los Teoremas 1.2.15 y 1.2.16 se pueden encontrar en [3], así como una demostración del Teorema 1.2.17 se encuentra en [2].

Teorema 1.2.15 *Las funciones proyección son continuas, abiertas y suprayectivas.*

Teorema 1.2.16 *Sean $\{Y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ una familia de espacios topológicos y $f : X \to \prod_{\gamma\in\Gamma} Y_\gamma$. Entonces f una función continua si y solamente si para cada $\gamma \in \Gamma$, $p_\gamma \circ f$ es continua.*

Teorema 1.2.17 *Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ una familia de espacios topológicos. Para toda $\alpha \in \Gamma$ consideremos $A_\alpha \subseteq X_\alpha$. Si $\prod_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha$ tiene la topología producto, entonces*

$$\prod_{\alpha\in\Gamma} \overline{A_\alpha} = \overline{\prod_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha}.$$

Definición 1.2.18 Dada una familia de conjuntos $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ de X, decimos que:

i) $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ es una cubierta abierta de X si para toda $\alpha \in \Gamma$, U_α es abierto en X y $X \subseteq \bigcup_{\alpha\in\Gamma} U_\alpha$.

ii) $\{V_\gamma\}_{\gamma\in\Lambda}$ es una subcubierta de $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ si $\{V_\gamma\}_{\gamma\in\Lambda} \subseteq \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ y $X \subseteq \bigcup_{\gamma\in\Lambda} V_\gamma$.

[6] $\prod_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha$ denota el producto generalizado de conjuntos.

1.3. Topología de Identificación y Espacio Cociente

Esta sección, es de suma importancia para la elaboración y comprensión del trabajo, esto debido a que, el objeto que estudiaremos será un un espacio cociente. Empezaremos con un par de definiciones y resultados básicos.

Definición 1.3.1 Sea X un espacio topológico y Y un conjunto cualquiera. Si $p\colon X \to Y$ una función suprayectiva, entonces la **topología de identificación** en Y está determinada por p y es

$$\tau_p = \{U \subseteq Y |\ p(U) \text{ es abierto en X}\}.$$

De la definición anterior se sigue que si p es una función suprayectiva de un espacio X a un conjunto Y, entonces p es una función continua cuando a Y se le dota de la topología de identificación. Más aún, si tenemos una topología en Y que haga a la función p continua, entonces dicha topología estará contenida en la topología de identificación; en otras palabras, la topología de identificación es la topología más grande que hace a p continua. Una consecuencia de la definición es el siguiente teorema, cuya prueba puede consultarse en [6].

Teorema 1.3.2 *Si X y Y son espacios topológicos y $f\colon X \to Y$ es una función continua y suprayectiva que además es abierta o cerrada, entonces la topología de Y es la topología de identificación.*

Si f es una función continua de X en Y, se dice que f es una **identificación** siempre que la topología de Y coincide con la topología de identificación determinada por f. Observamos que, toda función suprayectiva, continua y abierta es una identificación, *i.e.*, la topología del contradominio es la de identificación.

El siguiente lema nos será de gran utilidad para la construcción de funciones continuas y abiertas (cerradas) a través de identificaciones, la prueba se puede encontrar en [3].

Lema 1.3.3 (**Transgresión**) *Sean $p\colon X \to Y$ una identificación y $h\colon X \to Z$ una función continua. Asumamos que h es constante en $p^{-1}(y)$ para cada $y \in Y$. Entonces:*

i) *$h \circ p^{-1}\colon Y \to Z$ es continua y el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "p"'] & Z \\ Y \arrow[ur, "h\circ p^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

ii) *$h \circ p^{-1}\colon Y \to Z$ es una función abierta (cerrada) si y solo si $h(U)$ es abierto (cerrado) siempre que U es un abierto (cerrado) que satisface que $U = p^{-1} \circ p[U]$.*

Definición 1.3.4 Dada $\mathfrak{R}$ una **relación de equivalencia**[7] en un espacio topológico X, llamaremos **espacio cociente** al conjunto $X/\mathfrak{R}$ dotado con la topología de identificación de la función que manda a cada elemento de X a su clase de equivalencia en $X/\mathfrak{R}$.

Denotaremos mediante $[x]$ a la clase de equivalencia de $x \in X$, *i.e.*, $[x] = \{a \in X|\ (x,a) \in \mathfrak{R}\} \subseteq X$.

Definición 1.3.5 Sean X un espacio topológico y $\mathfrak{P}$ una **partición**[8] de X. Entonces:

i) Decimos que $\mathfrak{P}$ es un **espacio de descomposición** cuando se le dota de la siguiente topología: $\tau_{\mathfrak{P}} = \{A \subseteq \mathfrak{P}|\ \bigcup A$ es abierto en X$\}$.

ii) $V \subseteq X$ es **abierto saturado relativo a** $\mathfrak{P}$ si existe un conjunto abierto A del espacio de descomposición $\mathfrak{P}$ tal que $V = \bigcup A$.

iii) Una descomposición $\mathfrak{P}$ se dice **semicontinua superiormente** si para $F \in \mathfrak{P}$ y para U subconjunto de X abierto tal que $F \subseteq U$, se tiene que hay $V \subseteq X$ abierto tal que V es saturado relativo a la descomposición $\mathfrak{P}$ y $F \subseteq V \subseteq U$.

Como una relación de equivalencia $\mathfrak{R}$ sobre un conjunto X induce una partición $\mathfrak{P}$ y viceversa, es natural preguntarnos si la topología de descomposición e identificación coinciden para la partición inducida por una relación.

[7] $\mathfrak{R}$ es una relación de equivalencia en X si $\mathfrak{R} \subseteq X \times X$ y para $x, y, z \in X$ se tiene que:

1. $(x,x) \in \mathfrak{R}$.
2. Si $(x,y) \in \mathfrak{R}$, entonces $(y,x) \in \mathfrak{R}$.
3. Si $(x,y), (y,z) \in \mathfrak{R}$, entonces $(x,z) \in \mathfrak{R}$.

[8] Recordemos que una partición de un conjunto X es una familia $\mathfrak{A}$ subconjunto de la potencia de X tal que $X = \bigcup \mathfrak{A}$; y además si $a, b \in \mathfrak{A}$, entonces $a \neq \emptyset \neq b$ y $a \cap b = \emptyset$.

Dadas $\mathfrak{D}$ una partición de X y $P\colon X \to \mathfrak{D}$, donde $P(x) = F$ si $x \in F \in \mathfrak{D}$, diremos que P es el **mapeo natural** de la partición.

Lema 1.3.6 *Sean X un conjunto, $\mathfrak{P}$ una partición de X y $P\colon X \to \mathfrak{P}$ el mapeo natural. Entonces para todo $U \subseteq \mathfrak{P}$, $P^{-1}(U) = \bigcup U$.*

Demostración. Sean $U \subseteq \mathfrak{P}$ y $x \in \bigcup U$. Entonces existe $F \in U \subseteq \mathfrak{P}$ tal que $x \in F$, por lo que $P(x) = F \in U$, de donde $x \in P^{-1}(U)$. Así,

$$\bigcup U \subseteq P^{-1}(U).$$

Por otro lado, si $x \in P^{-1}(U)$, entonces $P(x) \in U$. Además, debido a que $x \in P(x)$ se tiene que $x \in \bigcup U$, por lo que,

$$P^{-1}(U) \subseteq \bigcup U.$$

Y en conclusión $P^{-1}(U) = \bigcup U$. $\square$

Los siguientes dos teoremas que aparecen en [6] nos dan la relación que hay entre el espacio de descomposición y la topología de identificación.

Teorema 1.3.7 *La topología en un espacio de descomposición $\mathfrak{D}$ de X es la topología de identificación inducida por el mapeo natural $P : X \to \mathfrak{D}$.*

Teorema 1.3.8 *Si Y está dotado de la topología de identificación inducida por $f\colon X \to Y$, entonces Y es homeomorfo al espacio de descomposición $\mathfrak{D}$ cuyos elementos son los conjuntos $f^{-1}(y)$, $y \in Y$, bajo el homeomorfismo $h\colon Y \to \mathfrak{D}$ tal que $h \circ f$ es el mapeo natural $P\colon X \to \mathfrak{D}$.*

La Definición 1.3.5 nos da herramientas para decir cuando un mapeo natural asociada a una descomposición es cerrada, lo cual nos muestra el siguiente teorema, cuya prueba se encuentra en [6].

Proposición 1.3.9 *El mapeo natural P asociado a la descomposición $\mathfrak{D}$ de X es cerrado si y sólo si $\mathfrak{D}$ es semicontinua superiormente.*

Con esta proposición terminamos los resultados de descomposiciones y cocientes que vamos a utilizar.

Capítulo 2

Algunas Propiedades de $SP_n(X)$

En este capítulo definiremos el espacio $SP_n(X)$. Dicho espacio se construirá para cualquier natural n mayor que cero y para cualquier espacio topológico X.

2.1. ¿Qué es $SP_n(X)$?

Como es de esperarse, el espacio $SP_n(X)$ es un cociente topológico, por lo que definiremos primero la siguiente relación, la cual veremos después que es de equivalencia.

Definición 2.1.1 Dado un espacio topológico X definimos la relación $\sim$ en X^n como sigue: Para $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in X^n$, decimos que

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \sim (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

si existe una permutación $\sigma \in S_n$ tal que

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_{\sigma(1)}, y_{\sigma(2)}, \dots, y_{\sigma(n)}).$$

De la definición de $\sim$ se sigue que es una relación, por lo cual nos falta ver que es de equivalencia. Introduciremos notación para hacer más ligera la lectura de este texto.

Notación 2.1.2 Denotaremos mediante $(x_i)_{i=1}^n$ a la n-ada $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Se hará uso de las dos notaciones sin distinción a lo largo del texto.

Proposición 2.1.3 *La relación $\sim$ de la Definición 2.1.1 es de equivalencia en X^n.*

Demostración. Para ver que $\sim$ es una relación de equivalencia sobre X^n tenemos que probar tres cosas: que la relación es simétrica, que es reflexiva y que es transitiva. Tomemos pues

$$(x_i)_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n, (z_i)_{i=1}^n \in X^n$$

y veamos que:

i) La relación es reflexiva: Consideremos $\sigma = e \in S_n$, entonces para todo $j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $\sigma(j) = j$, y así $(x_{\sigma(i)})_{i=1}^n = (x_i)_{i=1}^n$. Luego,

$$(x_i)_{i=1}^n \sim (x_i)_{i=1}^n$$

por lo que $\sim$ es reflexiva.

ii) La relación es simétrica: Si $(x_i)_{i=1}^n \sim (y_i)_{i=1}^n$, entonces existe $\sigma \in S_n$ tal que $(x_i)_{i=1}^n = (y_{\sigma(i)})_{i=1}^n$. Así $(x_{\sigma^{-1}(i)})_{i=1}^n = (y_{\sigma^{-1}(\sigma(i))})_{i=1}^n = (y_i)_{i=1}^n$, y como $\sigma^{-1} \in S_n$ se sigue

$$(y_i)_{i=1}^n \sim (x_i)_{i=1}^n,$$

lo cual nos dice que la relación es simétrica.

iii) La relación es transitiva: Supongamos que $(x_i)_{i=1}^n \sim (y_i)_{i=1}^n$ y $(y_i)_{i=1}^n \sim (z_i)_{i=1}^n$, entonces existen permutaciones $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$ tal que $(x_i)_{i=1}^n = (y_{\sigma_1(i)})_{i=1}^n$ y $(y_i)_{i=1}^n = (z_{\sigma_2(i)})_{i=1}^n$. De donde $(x_i)_{i=1}^n = (y_{\sigma_1(i)})_{i=1}^n = (z_{\sigma_2(\sigma_2(i))})_{i=1}^n$, y así,

$$(x_i)_{i=1}^n \sim (z_i)_{i=1}^n.$$

Por lo que la relación es transitiva

Con lo anterior queda probado que la relación $\sim$ es de equivalencia. $\square$

Ahora ya podemos definir $SP_n(X)$.

Definición 2.1.4 Sean X un espacio topológico y n un natural mayor que cero.

i) Definimos el espacio $SP_n(X)$ como el cociente de X^n con la relación $\sim$, es decir,

$$SP_n(X) = X^n / \sim .$$

ii) Denotaremos con $\mathbb{P}_n$ al mapeo natural de X^n a su clase de equivalencia en $SP_n(X)$. Y si $(x_i)_{i=1}^n \in X^n$ escribiremos $[(x_i)]_{i=1}^n$ para denotar $\mathbb{P}_n((x_i)_{i=1}^n)$.

Como $\mathbb{P}_n$ es una función suprayectiva notamos que cualquier elemento de $SP_n(X)$ lo podemos escribir como $[(x_i)]_{i=1}^n$. Por la sección anterior también notamos que $\mathbb{P}_n$ es una función continua. A continuación probaremos resultados sencillos de cómo se comporta la función $\mathbb{P}_n$.

Lema 2.1.5 *Sea* $\{U_i\}_{i=1}^n$ *una familia de conjuntos de* X*. Entonces*

$$\mathbb{P}_n^{-1}(\mathbb{P}_n(\prod_{i=1}^n U_i)) = \bigcup(\mathbb{P}_n(\prod_{i=1}^n U_i)) = \bigcup_{\sigma\in S_n}(\prod_{i=1}^n U_{\sigma(i)})$$

Demostración. Por el Lema 1.3.6 se tiene que

$$\mathbb{P}_n^{-1}(\mathbb{P}_n(\prod_{i=1}^n U_i)) = \bigcup(\mathbb{P}_n(\prod_{i=1}^n U_i)),$$

por lo que nos basta probar que $\mathbb{P}_n^{-1}(\mathbb{P}_n(\prod_{i=1}^n U_i)) = \bigcup_{\sigma\in S_n}(\prod_{i=1}^n U_{\sigma(i)})$.

Probemos primero que $\mathbb{P}_n^{-1}(\mathbb{P}_n(\prod_{i=1}^n U_i)) \subseteq \bigcup_{\sigma\in S_n}(\prod_{i=1}^n U_{\sigma(i)})$, tomemos

$$(x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{P}_n^{-1}(\mathbb{P}_n(\prod_{i=1}^n U_i)).$$

Entonces $\mathbb{P}_n((x_i)_{i=1}^n) \in \mathbb{P}_n(\prod_{i=1}^n U_i)$, por lo que existe $(y_i)_{i=1}^n \in \prod_{i=1}^n U_i$ tal que $\mathbb{P}((y_i)_{i=1}^n) = \mathbb{P}_n((x_i)_{i=1}^n))$, y así hay $\alpha \in S_n$ tal que

$$(x_{\alpha(i)})_{i=1}^n = (y_i)_{i=1}^n \in \prod_{i=1}^n U_i.$$

De aquí $(x_i)_{i=1}^n \in \prod_{i=1}^n U_{\alpha^{-1}(i)} \subseteq \bigcup_{\sigma\in S_n}\prod_{i=1}^n U_{\sigma(i)}$, lo que implica que

$$\mathbb{P}_n^{-1}(\mathbb{P}_n(\prod_{i=1}^n U_i)) \subseteq \bigcup_{\sigma\in S_n}\prod_{i=1}^n U_{\sigma(i)}.$$

Ahora probemos que $\bigcup_{\sigma\in S_n}(\prod_{i=1}^n U_{\sigma(i)}) \subseteq \mathbb{P}_n^{-1}(\mathbb{P}_n(\prod_{i=1}^n U_i))$, para esto tomemos

$$(x_i)_{i=1}^n \in \bigcup_{\sigma\in S_n}(\prod_{i=1}^n U_{\sigma(i)}).$$

Entonces existe $\alpha \in S_n$ tal que $(x_i)_{i=1}^n \in \prod_{i=1}^n U_{\alpha(i)}$, lo que implica

$$(x_{\alpha^{-1}(i)})_{i=1}^n \in \prod_{i=1}^n U_i.$$

Como $\mathbb{P}_n((x_{\alpha^{-1}(i)})_{i=1}^n) = \mathbb{P}_n((x_i)_{i=1}^n)$ se sigue que$(x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{P}_n^{-1}(\mathbb{P}_n(\prod_{i=1}^n U_i))$, y en consecuencia

$$\bigcup_{\sigma\in S_n}(\prod_{i=1}^n U_{\sigma(i)}) \subseteq \mathbb{P}_n^{-1}(\mathbb{P}_n(\prod_{i=1}^n U_i)).$$

Finalmente hemos probado que

$$\bigcup_{\sigma \in S_n} (\prod_{i=1}^{n} U_{\sigma(i)}) = \mathbb{P}_n^{-1}(\mathbb{P}_n(\prod_{i=1}^{n} U_i)),$$

por lo que se concluye el lema. $\square$

Del Lema 1.3.6 podemos deducir la siguiente proposición que tiene parecido al Lema 2.1.5 .

Proposición 2.1.6 *Sea $[A] \subseteq SP_n(X)$. Entonces $[A]$ es abierto en $SP_n(X)$ si y solamente si $\bigcup [A]$ es abierto en X^n.*

Demostración. $[A]$ es un abierto de $SP_n(X)$ si y solamente si $\mathbb{P}_n^{-1}([A])$ es abierto en X^n. Por el Lema 1.3.6 tenemos que $\mathbb{P}_n^{-1}([A]) = \bigcup [A]$, pues $SP_n(X)$ es un una descomposición. $\square$

Proposición 2.1.7 *Sean X un espacio topológico y β una base para la topología. Entonces el conjunto*

$$[\beta] = \{\mathbb{P}_n[\prod_{i=1}^{n} A_i] | \ A_i \in \beta, \ i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}\}$$

es base para la topología de $SP_n(X)$.

Demostración. Debido a que para cualquier familia de conjuntos $\{B_i\}_{i=1}^n$ de X cumple con

$$\mathbb{P}_n^{-1}(\mathbb{P}_n(\prod_{i=1}^{n} B_i)) = \bigcup_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} B_{\sigma(i)},$$

se sigue que los elementos de $[\beta]$ son abiertos en $SP_n(X)$. Veamos ahora que $[\beta]$ cumple con ser base, para esto sean $[U] \subseteq SP_n(X)$ un abierto y $[(x_i)]_{i=1}^n \in [U]$. Entonces

$$(x_i)_{i=1}^n \in \bigcup [U]$$

y además $\bigcup [U]$ es abierto en X^n. Así, para toda $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ existe un abierto $U_i \subseteq X$ tal que

$$(x_i)_{i=1}^n \in \prod_{i=1}^{n} U_i \subseteq \bigcup [U] = \mathbb{P}_n^{-1}([U]).$$

Como β es base para X existen $B_1, B_2, \dots, B_n \in \beta$ tales que

$$(x_i)_{i=1}^n \in \prod_{i=1}^n B_i \subseteq \prod_{i=1}^n U_i.$$

Luego,

$$[(x_i)]_{i=1}^n \in \mathbb{P}_n(\prod_{i=1}^n B_i) \subseteq \mathbb{P}_n(\prod_{i=1}^n U_i) \subseteq \mathbb{P}_n(\bigcup [U]) = [U].$$

Y como los elementos de $[\beta]$ son abiertos concluimos que es base para la topología de $SP_n(X)$. $\square$

Observación 2.1.8 Debido a que el espacio $SP_n(X)$ tiene la topología de identificación inducida por la función $\mathbb{P}_n$ se tiene que $\mathbb{P}_n$ es una función continua.

Lema 2.1.9 *La función $\mathbb{P}_n$ abierta y cerrada.*

Demostración. Primero probemos que $\mathbb{P}_n$ es una función abierta, para esto sean $\mathcal{U} \subseteq X^n$ abierto y $[(x_i)]_{i=1}^n \in \mathbb{P}_n(\mathcal{U})$. Entonces existe $\sigma \in S_n$ tal que

$$(x_{\sigma(i)})_{i=1}^n \in \mathcal{U} \subseteq X^n.$$

Dado que $\mathcal{U}$ es abierto se tiene que para toda $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ existen los abiertos $U_i \subseteq X$ tal que

$$(x_{\sigma(i)})_{i=1}^n \in \prod_{i=1}^n U_i \subseteq \mathcal{U}$$

y así,

$$\mathbb{P}_n((x_{\sigma(i)})_{i=1}^n) = [(x_i)]_{i=1}^n \in \mathbb{P}_n(\prod_{i=1}^n U_i) \subseteq \mathbb{P}_n(\mathcal{U}).$$

Como $\mathbb{P}^{-1}(\mathbb{P}_n(\prod_{i=1}^n U_i)) = \bigcup_{\sigma \in S_n}(\prod_{i=1}^n U_{\sigma(i)})$ se tiene que $\mathbb{P}_n(\prod_{i=1}^n U_i)$ es abierto, donde concluimos que $\mathbb{P}_n(\mathcal{U})$ es abierto. Por lo tanto, $\mathbb{P}_n$ es una función abierta.

Ahora probaremos que $\mathbb{P}_n$ es una función cerrada, para esto utilizamos la Proposición 1.3.9 y probamos que $SP_n(X)$ es una descomposición semicontinua superiormente. Sean $[(x_i)]_{i=1}^n \in SP_n(X)$ y $\mathcal{U} \subseteq X^n$ abierto tal que

$$[(x_i)]_{i=1}^n \subseteq \mathcal{U}.$$

Entonces para toda $\sigma \in S_n$, $(x_{\sigma(i)})_{i=1}^n \in \mathcal{U}$. Así, para toda permutación $\sigma \in S_n$ existe una familia de conjuntos abiertos $\{U_{\sigma,i}\}_{i=1}^n$ de X tal que

$$(x_{\sigma(i)})_{i=1}^n \in \prod_{i=1}^n U_{\sigma,i} \subseteq \mathcal{U}.$$

Para toda $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ definamos

$$U_i = \bigcap \{U_{\sigma,j} | \ 1 \leq j \leq n, \ \sigma \in S_n \text{ tales que } \sigma(j) = i\}.$$

Se sigue que U_i es abierto dado que es interección finita de abiertos. Además, como $x_{\sigma(j)} \in U_{\sigma,j}$ se sigue que si $\sigma(j) = i$, entonces $x_i \in U_{\sigma(j)}$. Así

$$x_i \in U_i \subseteq U_{\sigma,j}.$$

Luego, $[(x_i)]_{i=1}^n \in \mathbb{P}_n(\prod_{i=1}^n U_i)$, de donde

$$(x_i)_{i=1}^n \subseteq \mathbb{P}_n^{-1}(\mathbb{P}_n(\prod_{i=1}^n U_i)),$$

además $\mathbb{P}_n^{-1}(\mathbb{P}_n(\prod_{i=1}^n U_i))$ es abierto saturado con respecto a $SP_n(X)$ ya que $\mathbb{P}(\prod_{i=1}^n U_i)$ es abierto en $SP_n(X)$ y

$$\mathbb{P}_n^{-1}(\mathbb{P}(\prod_{i=1}^n U_i)) = \bigcup \mathbb{P}_n(\prod_{i=1}^n U_i).$$

Sabemos que $\mathbb{P}_n^{-1}(\mathbb{P}_n(\prod_{i=1}^n U_i))$ es un abierto saturado relativo a $SP_n(X)$ que contienen a $[(x_i)]_{i=1}^n$ por lo que sólo falta probar que $\mathbb{P}_n^{-1}(\mathbb{P}(\prod_{i=1}^n U_i)) \subseteq \mathcal{U}$. Consideremos $(y_i)_{i=1}^n \in \mathbb{P}_n^{-1}(\mathbb{P}(\prod_{i=1}^n U_i))$, entonces existe $\sigma \in S_n$ tal que

$$(y_i)_{i=1}^n \in \prod_{i=1}^n U_{\sigma(i)}.$$

Debido a que $x_i \in U_i$ se sigue $(x_{\sigma(i)})_{i=1}^n \in \prod_{i=1}^n U_{\sigma(i)}$, y como $(x_{\sigma(i)})_{i=1}^n \in \prod_{i=1}^n U_{\sigma,i}$ se tiene que

$$\prod_{i=1}^n U_{\sigma(i)} \subseteq \prod_{i=1}^n U_{\sigma,i} \subseteq \mathcal{U},$$

pues así fue la elección de los conjuntos U_i. En conclusión

$$(y_i)_{i=1}^n \in \mathcal{U},$$

por lo que $SP_n(X)$ es una descomposición semicontinua superiormente. Así por la Proposición 1.3.9 se sigue que $\mathbb{P}_n$ es una función cerrada. $\square$

El lema anterior nos dice que conjuntos cerrados van a conjuntos cerrados, a través de la función $\mathbb{P}_n$, pero esto no lo es todo, se tiene que la función se comporta bien con la cerradura, *i.e.*, $\mathbb{P}_n(\overline{A})) = \overline{\mathbb{P}_n(A)}$.

Lema 2.1.10 $\overline{\mathbb{P}_n(\mathcal{A})} = \mathbb{P}_n(\overline{\mathcal{A}})$

Demostración. De la Proposición 1.2.11 se sigue que $\overline{\mathbb{P}_n(\mathcal{A})} \subseteq \mathbb{P}_n(\overline{\mathcal{A}})$, pues $\mathbb{P}_n$ es cerrada. Luego, de el Teorema 1.2.9 tenemos que $\mathbb{P}_n(\overline{\mathcal{A}}) \subseteq \overline{\mathbb{P}_n(\mathcal{A})}$, ya que la función $\mathbb{P}_n$ es una función continua.

Por lo tanto,

$$\mathbb{P}_n(\overline{\mathcal{A}}) = \overline{\mathbb{P}_n(\mathcal{A})}.$$

$\square$

Corolario 2.1.11 *Sea $\{U_i\}_{i=1}^n$ una familia de conjuntos de X. Entonces $\mathbb{P}_n(\overline{\prod_{i=1}^n U_i}) = \mathbb{P}_n(\prod_{i=1}^n \overline{U_i}) = \overline{\mathbb{P}_n(\prod_{i=1}^n U_i)}$*

Demostración. Por el Lema 2.1.10 se tiene que

$$\mathbb{P}_n(\overline{\prod_{i=1}^n U_i}) = \overline{\mathbb{P}_n(\prod_{i=1}^n U_i)},$$

y por el teorema 1.2.17 se sigue que

$$\overline{\prod_{i=1}^n U_i} = \prod_{i=1}^n \overline{U_i}.$$

Luego,

$$\mathbb{P}_n(\overline{\prod_{i=1}^n U_i}) = \mathbb{P}_n(\prod_{i=1}^n \overline{U_i}),$$

por lo que $\mathbb{P}_n(\overline{\prod_{i=1}^n U_i}) = \mathbb{P}_n(\prod_{i=1}^n \overline{U_i}) = \overline{\mathbb{P}_n(\prod_{i=1}^n U_i)}$. $\square$

Ya vimos que la función $\mathbb{P}_n$ se comporta bien con la cerradura, vale la pena preguntarse cómo se comporta con la frontera.

Observación 2.1.12

$$SP_n(X) \setminus \mathbb{P}_n(\mathcal{A}) = \mathbb{P}_n(X^n \setminus \mathbb{P}_n^{-1}(\mathbb{P}_n(\mathcal{A}))),$$

esto ya que

$$([x_i]_{i=1}^n \in SP_n(X) \setminus \mathbb{P}_n(\mathcal{A})$$

si y solamente si

$$[(x_i)]_{i=1}^n \cap \mathbb{P}_n^{-1}(\mathbb{P}_n(\mathcal{A})) = \emptyset,$$

lo cual sucede si y sólo si

$$[(x_i)]_{i=1}^n \subseteq X^n \setminus \mathbb{P}_n^{-1}(\mathbb{P}_n(\mathcal{A}))$$

o de manera equivalente

$$([x_i)]_{i=1}^n \in \mathbb{P}_n(X^n \setminus \mathbb{P}_n^{-1}(\mathbb{P}_n(\mathcal{A}))).$$

Proposición 2.1.13 *Si $\mathcal{A} \subseteq X^n$ y $[B] \subseteq SP_n(X)$, entonces:*

i) $Fr(\mathbb{P}_n(A)) \subseteq \mathbb{P}_n(Fr(\mathcal{A}))$.

ii) $Fr(\mathbb{P}_n^{-1}([B]) = \mathbb{P}_n^{-1}(Fr([B]))$.

Demostración.

i) Probemos que $Fr(\mathbb{P}_n(\mathcal{A})) \subseteq \mathbb{P}_n(Fr(\mathcal{A}))$ por contrapuesta. Si

$$[(x_i)]_{i=1}^n \notin \mathbb{P}_n(Fr(\mathcal{A})),$$

entonces existe una familia de abiertos $\{U_i\}_{i=1}^n$ de X tal que

$$(x_{\sigma(i)})_{i=1}^n \in \prod_{i=1}^n U_{\sigma(i)} \subseteq \mathcal{A} \text{ o bien } (x_{\sigma(i)})_{i=1}^n \in \prod_{i=1}^n U_{\sigma(i)} \subseteq X^n \setminus \mathcal{A}.$$

Observamos que si para toda $\sigma \in S$ se tiene que $\prod_{i=1}^n U_{\sigma(i)} \subseteq X^n \setminus \mathcal{A}$, entonces se sigue

$$[(x_i)]_{i=1}^n \in \mathbb{P}_n(\prod_{i=1}^n U_i) \subseteq SP_n(X) \setminus \mathbb{P}_n(\mathcal{A}),$$

y de esto último
$$[(x_i)]_{i=1}^n \notin Fr(\mathbb{P}_n(\mathcal{A})).$$

Por otro lado, si existe $\sigma_0 \in S_n$ tal que
$$(x_{\sigma_0(i)})_{i=1}^n \in \prod_{i=1}^n U_{\sigma_0(i)} \subseteq \mathcal{A},$$
entonces
$$[(x_i)]_{i=1}^n \in \mathbb{P}_n(\prod_{i=1}^n U_i) \subseteq \mathbb{P}_n(\mathcal{A}),$$
de donde se sigue que
$$[(x_i)]_{i=1}^n \notin Fr(\mathbb{P}_n(\mathcal{A})),$$
pues $\mathbb{P}_n(\prod_{i=1}^n U_i)$ es abierto.

Concluimos que $[(x_i)]_{i=1}^n \notin Fr(\mathbb{P}_n(\mathcal{A}))$, y así por contrapuesta,
$$Fr(\mathbb{P}_n(\mathcal{A})) \subseteq \mathbb{P}_n(Fr(\mathcal{A})).$$

ii) Consideremos $[B] \subseteq Y$. Luego,

$$\begin{aligned} Fr(\mathbb{P}_n^{-1}([B])) &= \overline{\mathbb{P}_n^{-1}([B])} \setminus int(\mathbb{P}_n^{-1}([B])) \\ &= \mathbb{P}_n^{-1}(\overline{[B]}) \setminus \mathbb{P}_n^{-1}(int[B]) \\ &= \mathbb{P}_n^{-1}(\overline{[B]} \setminus int([B])) \\ &= \mathbb{P}_n^{-1}(Fr[B]). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Donde la tercer igualdad la obtenemos de la Proposición 1.2.12 y el Corolario 1.2.13, ya que $\mathbb{P}_n$ es una función continua y abierta.

□

Veamos un contraejemplo donde no se cumple que $\mathbb{P}_n(Fr(\mathcal{A})) \subseteq Fr(\mathbb{P}_n(\mathcal{A}))$.

Ejemplo 2.1.14 Tomemos $X = [0,1]$ y $n = 2$, veamos que existe $\mathcal{A} \subseteq [0,1]^2$ tal que $\mathbb{P}_2(Fr(\mathcal{A})) \nsubseteq Fr(\mathbb{P}_2(\mathcal{A}))$. Sean lo conjuntos

$$\begin{aligned} A_1 &= [7/16, 9/16] \\ A_2 &= [11/16, 13/16] \\ A_3 &= [23/32, 25/32] \\ A_4 &= [15/32, 17/32] \end{aligned}$$

y consideremos

$$\mathcal{A} = (A_1 \times A_2) \cup (A_3 \times A_4).$$

Entonces

$$\mathbb{P}_2(\mathcal{A}) = \mathbb{P}_2(A_1 \times A_2 \cup A_3 \times A_4) = \mathbb{P}_2(A_1 \times A_2) \cup \mathbb{P}_2(A_3 \times A_4).$$

Del Lema 2.1.5 tenemos que $\mathbb{P}_2^{-1}(\mathbb{P}_2(A_1 \times A_2)) = (A_1 \times A_2) \cup (A_2 \times A_1)$ y $\mathbb{P}_2^{-1}(\mathbb{P}_2(A_3 \times A_4)) = (A_3 \times A_4) \cup (A_4 \times A_3)$, así notando que $A_3 \subseteq A_1$ y $A_4 \subseteq A_2$ se sigue

$$\mathbb{P}_2^{-1}(\mathbb{P}_2(A_3 \times A_4)) \subseteq \mathbb{P}_2^{-1}(\mathbb{P}_2(A_1 \times A_2)),$$

lo cual sucede si $\mathbb{P}_2(A_3 \times A_4) \subseteq \mathbb{P}_2(A_1 \times A_2)$ y así

$$\mathbb{P}_2(\mathcal{A}) = \mathbb{P}_2^{-1}(\mathbb{P}_2(A_1 \times A_2)).$$

Por otro lado, como $\mathcal{A}$ es la unión de dos rectángulos cerrados disjuntos, su frontera es la unión de las fronteras de dichos rectángulos, es decir, $Fr(\mathcal{A}) = \{7/16\} \times A_2 \cup \{9/16\} \times A_2 \cup A_1 \times \{11/16\} \cup A_1 \times \{13/16\} \cup A_3 \times \{15/32\} \cup A_3 \times \{17/32\} \cup \{23/32\} \times A_4 \cup \{25/32\} \times A_4$.

Consideremos el punto

$$(23/32, 15/32) \in Fr(\mathcal{A}),$$

debido a que $A_3 \subseteq int(A_1)$ y $A_4 \subseteq int(A_2)$ tenemos

$$(23/32, 15/32) \in int(A_1 \times A_2).$$

Y debido a que $\mathbb{P}_n$ es una función abierta se sigue que

$$[(23/32, 15/32)] \in int(\mathbb{P}_n(\mathcal{A})),$$

y en consecuencia $[(23/32, 15/32)] \notin Fr(\mathbb{P}_n(\mathcal{A}))$. Como

$$\mathbb{P}_n((23/32, 15/32)) = [(23/32, 15/32)] \in \mathbb{P}_n(Fr(\mathcal{A}))$$

concluimos que

$$\mathbb{P}_n(Fr(\mathcal{A})) \nsubseteq Fr(\mathbb{P}_n(A)).$$

2.2. Encajes y Modelos

Ya sabemos un poco acerca del comportamiento del mapeo natural que va del espacio producto a nuestro cociente llamado $SP_n(X)$, ahora veremos que $SP_n(X)$ cuenta con una copia homeomorfa de X.

Teorema 2.2.1 *$SP_n(X)$ tiene un subespacio homeomorfo a X.*

Demostración. Sea $H_n\colon X \to SP_n(X)$ definida como

$$H_n(x) = [(x_i)]_{i=1}^n \text{ con } x_i = x \text{ para toda } i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}.$$

Probaremos que H_n es un encaje[1], primero notamos que H es función ya que si $x, y \in X$ son tal que $x = y$, entonces $(x_i)_{i=1}^n = (y_i)_{i=1}^n$, donde $x_i = x$ y $y_i = y$ para $0 \leq i \leq n$. Así

$$H_n(x) = \mathbb{P}_n((x_i)_{i=1}^n) = [(x_i)]_{i=1}^n = [(y_i)]_{i=1}^n = \mathbb{P}_n((y_i)_{i=1}^n) = H_n(y),$$

teniéndose así que H es función. Para ver que H es un encaje nos basta que probar tres cosas:

i) que la función es continua,

ii) que es abierta si restringimos la función al **subespacio**[2] $H_n(X)$ y

iii) que es inyectiva.

Y en conclusión se tendrá que $SP_n(X)$ tiene una copia de X.

i) Veamos que H_n es continua, sean pues $x \in X$ y $[A] \subseteq SP_n(X)$ abierto tal que $H_n(x) \in [A]$. Entonces $\mathbb{P}_n^{-1}([A])$ es un abierto tal que

$$\mathbb{P}_n^{-1}(H_n(x)) \subseteq \mathbb{P}_n^{-1}([A]).$$

Notamos que $\mathbb{P}_n^{-1}(H_n(x)) = \{(x, x, x, \ldots, x)\}$, por lo que

$$(x, x, x, \ldots, x) \in \mathbb{P}_n^{-1}([A]),$$

[1] Un encaje es una función continua, abierta e inyectiva, *i.e.*, es un homeomorfismo sobre su imagen.

[2] Si X es un espacio topológico con topología τ y $Y \subseteq X$, entonces la familia

$$\tau_Y = \{Y \cap U \mid U \in \tau\}$$

es una topología para Y. Con esta topología Y se le denomina subespacio de X.

y así existe una familia de abiertos $\{U_i\}_{i=1}^n$ de X tal que

$$(x, x, x, \ldots, x) \in \prod_{i=1}^{n} U_i \subseteq \mathbb{P}_n^{-1}([A]).$$

Consideremos el conjunto

$$U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i,$$

dado que para toda $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $x \in U_i$, se sigue que $x \in U$, además U es abierto por ser intersección finita de abiertos. Ahora, si tomamos $y \in U$, entonces

$$\mathbb{P}_n^{-1}(H_n(y)) \subseteq \mathbb{P}_n^{-1}(H_n(U)) \subseteq \mathbb{P}_n^{-1}(\mathbb{P}_n(U^n)) = U^n,$$

como $U^n \subseteq \prod_{i=1}^n U_i \subseteq \mathbb{P}_n^{-1}([A])$ y además $\mathbb{P}_n(\mathbb{P}_n^{-1}([A])) = [A]$ se sigue

$$H_n(y) \in [A].$$

Se concluye que $H_n(U) \subseteq [A]$, por lo que la función H_n es continua.

ii) Consideremos ahora $U \subseteq X$ abierto y veamos que $H_n(U)$ es abierto en $H_n(X)$, para esto probaremos que

$$H_n(U) = \mathbb{P}_n(U^n) \cap H_n(X).$$

Veamos que $H_n(U) \subseteq \mathbb{P}_n(U^n) \cap H_n(X)$. Si $[(x_i)]_{i=1}^n \in H_n(U)$, entonces existe $x \in U$ tal que $H_n(x) = [(x_i)]_{i=1}^n$. Luego

$$H_n(x) = [(x, x, x, \ldots, x)] = \mathbb{P}_n((x, x, x, \ldots, x)) = [(x_i)]_{i=1}^n,$$

y como $x \in U$ y $H_n(x) \in H_n(X)$ se sigue que

$$H_n(x) = [(x, x, x, \ldots, x)] = [(x_i)]_{i=1}^n \in \mathbb{P}_n(U^n) \cap H_n(X).$$

Por lo que $H_n(U) \subseteq \mathbb{P}_n(U^n) \cap H_n(X)$.
Ahora probemos que $\mathbb{P}_n(U^n) \cap H_n(X) \subseteq H(U)$, para esto consideremos $[(x_i)]_{i=1}^n \in \mathbb{P}_n(U^n) \cap H_n(X)$, así existe $\sigma \in S_n$ y existe $x \in X$ tal que

$$(x_{\sigma(i)})_{i=1}^n \in U^n \text{ y } H_n(x) = [(x_i)]_{i=1}^n.$$

Como $H_n(x) = [(x_i)]_{i=1}^n$ se tiene que para toda $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $x_i = x$, y así

$$(x, x, x, \ldots, x) \in U^n.$$

Donde se sigue que $x \in U$, por lo que $H_n(x) = [(x_i)]_{i=1}^n \in H_n(U)$. Concluimos que

$$\mathbb{P}_n(U^n) \cap H_n(X) \subseteq H_n(U).$$

De las dos contenciones se sigue que

$$H_n(U) = \mathbb{P}_n(U^n) \cap H_n(X),$$

y por lo tanto, la función H_n es abierta sobre su imagen.

iii) Finalmente se tiene que H_n es inyectiva ya que si $x, y \in X$ son tales que $x \neq y$, entonces $(x, x, x, \ldots, x) \neq (y, y, y, \ldots, y)$, y de aquí que

$$H_n(x) = [(x, x, x, \ldots, x)] \neq [(y, y, y, \ldots, y)] = H_n(y).$$

Así, la función es inyectiva.

Debido a que H_n es una función continua, inyectiva y abierta sobre su imagen se sigue que H_n es un encaje. Por lo tanto, $SP_n(X)$ tiene una copia de X. □

Este encaje no tiene por que ser cerrado, lo cual se verá en el siguiente ejemplo. La función resultará será cerrada siempre que el espacio cumpla con ser Hausdorff (se estudiará en los capítulos posteriores).

Ejemplo 2.2.2 Consideremos los conjuntos $X = \{1, 2\}$ y $\tau = \{X, \emptyset\}$, notamos que τ es una topología para X. Veamos que $H_2(X)$ no es cerrado en $SP_2(X)$, donde H_n es la función definida en el Teorema 2.2.1. Notamos primero que la topología de X^2 es

$$\tau_{X^2} = \{X^2, \emptyset\}$$

ya que este es el producto $\tau_{X^2} = \tau \times \tau$. Ahora consideremos el punto

$$[(1, 2)] \in SP_2(X),$$

se sigue que $[(1, 2)] \notin H_2(X)$, pero cualquier vecindad[3] que contenga el punto intersecta a $H(X)$ ya que la topología de $SP_2(X)$ es

$$\tau_{SP_2(X)} = \{SP_2(X), \emptyset\},$$

y así, $SP_2(X) \setminus H_2(X)$ no es abierto. Luego, $H_(X)$ no es cerrado, y por lo tanto,H_2 no es una función cerrada (aunque lo es sobre su imagen).

[3]Recordemos A es vecindad de x si existe U abierto tal que

$$x \in U \subseteq A.$$

Si se tienen dos números naturales n y m, entonces una pregunta natural que resulta de la definición del espacio $SP_n(X)$ es: ¿Si $n \leq m$, entonces se tendrá una copia de $SP_n(X)$ en $SP_m(X)$? Y la respuesta esta pregunta es afrimativa.

Teorema 2.2.3 *Sean X un espacio topológico y $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $n \leq m$. Fijemos $a \in X$ y definamos $H_{n,m} \colon SP_n(X) \to SP_m(X)$ como*

$$H_{n,m}([(x_i)]_{i=1}^n) = [[(x_i')]_{i=1}^m \text{ con } x_j' = \begin{cases} x_j & si\ j \leq n \\ a & si\ j > n. \end{cases}$$

Entonces $H_{n,m}$ es un homeomorfismo sobre su imagen.

Para hacer más ligera la lectura de la demostración será divida en varios lemas y proposiciones.

Lema 2.2.4 *$H_{n,m}$ es función.*

Demostración. Fijemos $a \in X$ y sea $H_{n,m} \colon SP_n(X) \to SP_m(X)$ definida como

$$H_{n,m}([(x_i)]_{i=1}^n) = [[(x_i')]_{i=1}^m \text{ con } x_j' = \begin{cases} x_j & \text{si } j \leq n \\ a & \text{si } j > n. \end{cases}$$

Veamos que $H_{n,m}$ esta bien definida, para esto consideremos

$$[(x_i)]_{i=1}^n, [(y_i)]_{i=1}^n \in SP_n(X) \text{ tales que } [(x_i)]_{i=1}^n = [(y_i)]_{i=1}^n.$$

Como $[(x_i)]_{i=1}^n = [(y_i)]_{i=1}^n$ se sigue que hay $\sigma \in S_n$ tales que

$$(x_{\sigma(i)})_{i=1}^n = (y_i)_{i=1}^n.$$

Definamos $\sigma' \colon \{1, 2, 3, \ldots, m\} \to \{1, 2, 3, \ldots, m\}$ como sigue

$$\sigma'(i) = \begin{cases} \sigma(i) & \text{si } i \leq n \\ i & \text{si } i > n. \end{cases}$$

De la definición de σ' se sigue que es función, ahora probaremos que $\sigma' \in S_n$, esto se hará viendo que σ' es inyectiva. Tomemos pues

$$i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, m\} \text{ tal que } i \neq j$$

Entonces se tienen cuatro casos: i) $i, j > n$, ii) $i, j \leq n$, iii) $i \leq n < j$ y iv) $j \leq n < i$; veamos ahora que pasa en cada uno de estos casos.

i) Si $i, j > n$, entonces

$$\sigma'(i) = i \neq j = \sigma'(j).$$

ii) Si $i, j \leq n$, entonces debido a que σ es una función inyectiva se tiene que

$$\sigma'(i) = \sigma(i) \neq \sigma(j) = \sigma'(j).$$

iii) Si $i \leq n < j$, entonces

$$\sigma'(i) \leq n < j = \sigma'(j).$$

iv) Si $j \leq n < i$, entonces

$$\sigma'(j) \leq n < i = \sigma'(i).$$

Y en consecuencia σ' es una función inyectiva, y que al tener un domino y contradominio finito con la misma cardinalidad se sigue que $\sigma' \in S_n$, es decir, σ' es una permutación. Veamos que $H_{n,m}([(x_i)]_{i=1}^n) = H_{n,m}([(y_i)]_{i=1}^n)$, para esto supongamos que

$$H_{n,m}([(x_i)]_{i=1}^n) = [(x'_i)]_{i=1}^m \text{ y } H_{n,m}([(y_i)]_{i=1}^n) = [(y'_i)]_{i=1}^m.$$

Por la definición de $H_{n,m}$ se sigue que

$$x'_j = \begin{cases} x_j & \text{si } j \leq n \\ a & \text{si } j > n \end{cases} \text{ y } \; y'_j = \begin{cases} y_j & \text{si } j \leq n \\ a & \text{si } j > n, \end{cases}$$

por lo que

$$(x_{\sigma'(i)})_{i=1}^m = (y_i)_{i=1}^m.$$

Esto implica que

$$H_{n,m}([(x_i)]_{i=1}^n) = H_{n,m}([(y_i)]_{i=1}^n),$$

de donde se concluye que $H_{n,m}$ está bien definida. $\square$

Hemos visto que $H_{n,m}$ es una función, aún nos falta ver que es continua, abierta sobre su imagen e inyectiva.

Lema 2.2.5 *$H_{n,m}$ es una función inyectiva.*

Demostración. Sean $[(x_i)]_{i=1}^n, [(y_i)]_{i=1}^n \in SP_n(X)$ tales que

$$H_{n,m}([(x_i)]_{i=1}^n) = H_{n,m}([(y_i)]_{i=1}^n).$$

Supongamos que $H_{n,m}([(x_i)]_{i=1}^n) = [(x'_i)]_{i=1}^m$ y $H_{n,m}([(y_i)]_{i=1}^n) = [(y'_i)]_{i=1}^m$, con $x_i = x'_i$ y $y_i = y'_i$ si $i \leq n$ y $x'_i = y'_i = a$ si $n < i$. Luego existe $\sigma \in S_n$ tal que

$$(x_{\sigma(i)})_{i=1}^m = (y_i)_{i=1}^m.$$

Consideremos $\sigma' \colon \{1, 2, 3, \ldots, n\} \to \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ como

$$\sigma'(i) = \sigma^r(i),$$

donde r es el primer natural tal que $\sigma^r(i) \leq n$. Veamos que σ' es biyectiva, lo cual se hará viendo que es inyectiva, para esto consideremos $i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ tales que $i \leq j$ y veamos que $\sigma'(i) \neq \sigma'(j)$, para lo cual se tienen cuatro casos:

i) Si $\sigma(i), \sigma(j) \leq n$, entonces

$$\sigma'(i) = \sigma(i) \text{ y } \sigma'(j) = \sigma(j),$$

y como σ es una función inyectiva tenemos que $\sigma(i) \neq \sigma(j)$.

ii) Si $\sigma(i), \sigma(j) > n$, entonces hay $r_i, r_j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tales que

$$\sigma'(i) = \sigma^{r_i}(i) \text{ y } \sigma'(j) = \sigma^{r_j}(j).$$

Se tienen dos casos: **caso uno** $j \notin orb_\sigma(i)$, **caso dos** $j \in orb_\sigma(i)$. Para el **caso uno** del Lema 1.1.8 se sigue que para todo $m, k \in \mathbb{N}$,

$$\text{si } j \notin orb_\sigma(i), \text{ entonces } \sigma^m(j) \neq \sigma^k(i),$$

por lo que

$$\text{si } j \notin orb_\sigma(i), \text{ entonces } \sigma'(i) \neq \sigma'(j).$$

Para el **caso dos** procederemos por contradicción, supongamos que $j \in orb_\sigma(i)$, que $\sigma'(i) = \sigma^{r_i}(i) = \sigma^{r_j}(j) = \sigma'(j)$, entonces

$$\sigma^{r_i - r_j}(i) = j.$$

Podemos suponer sin pérdida de genralidad que $r_j < r_i$, así $0 < r_i - r_j \leq r_i, r_j$, por lo que $\sigma^{r_i - r_j}(i) > n$ ya que r_i es el mínimo tal que

$$\sigma^{r_i}(i) \leq n,$$

así $j = \sigma^{r_i - r_j}(i) > n$ lo cual es una contradicción ya que $1 \leq j \leq n$, de aquí que

$$\text{si } j \in orb_\sigma(i), \text{ entonces } \sigma'(i) = \sigma^{r_i}(i) \neq \sigma^{r_j}(j) = \sigma'(j).$$

Concluimos que en cualquiera de los dos casos $\sigma'(i) \neq \sigma'(j)$.

iii) Supongamos que $\sigma(i) \leq n$, $\sigma(j) > n$ y que $\sigma'(i) = \sigma'(j)$, llegaremos a una contradicción. Como $\sigma(j) > n$ se sigue que existe $r \in \mathbb{N}$ mínimo tal que

$$\sigma'(j) = \sigma^r(j) \leq n.$$

Ahora, debido a que $\sigma(j) > n$ se sigue que $r > 1$, y además como $\sigma(i) = \sigma'(i) = \sigma'(j) = \sigma^r(j)$, tenemos

$$i = \sigma(j)^{r-1} \leq n.$$

lo cual es una contradicción ya que r es el mínimo mayor que cero tal que $\sigma^r(j) \leq n$. Concluimos que

$$\sigma'(i) \neq \sigma'(j).$$

iv) En el último caso tenemos que $\sigma(i) > n$ y $\sigma(j) \leq n$, pero esto se prueba de manera análoga al caso anterior.

Concluimos que

$$\text{si } i \leq j, \text{ entonces } \sigma'(i) \neq \sigma'(j),$$

por lo que σ' es inyectiva, y como su dominio y contradominio es el mismo conjunto finito concluimos que σ' es una biyección, más aún, como el conjunto sobre el que esta definida es $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ se sigue que $\sigma \in S_n$. Ahora probemos que $(x_{\sigma'(i)})_{i=1}^n = (y_i)_{i=1}^n$, pues para ésto fue definida σ'.

Consideremos $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, luego se tienen dos casos de la definición de σ':

i) El primer caso es que $\sigma'(i) = \sigma(i)$. Como $(x_{\sigma(i)})_{i=1}^m = (y_i)_{i=1}^m$ se tiene que

$$x_{\sigma'(i)} = y_i.$$

ii) En el segundo caso se tiene que $\sigma'(i) = \sigma^r(i)$ para alguna $r > 1$ (recordemos que este r es el mínimo natural tal que $\sigma^r(i) \leq n$). Dado que $x_{\sigma(i)} = y_i$ y $\sigma(i) > n$ se sigue que

$$y_i = a.$$

Por otro lado, como $\sigma^{r-1}(i) > n$ se tiene que $y_{\sigma^{r-1}(i)} = a$ y así

$$x_{\sigma'(i)} = x_{\sigma(\sigma^{r-1}(i))} = y_{\sigma^{r-1}(i)} = a.$$

Concluimos que

$$(x_{\sigma'(i)})_{i=1}^{n} = (y_i)_{i=1}^{n},$$

y así $[(x_i)]_{i=1}^{n} = [(y_i)]_{i=1}^{n}$. Por lo tanto, $H_{n,m}$ es inyectiva. □

Del lema anterior se sigue que $H_{n,m}$ es biyectiva sobre su imagen, veamos ahora que la función es continua.

Proposición 2.2.6 *$H_{n,m}$ es continua.*

Demostración. Sean $[(x_i)]_{i=1}^{n} \in SP_n(X)$ y $[\mathcal{U}] \subseteq SP_m(X)$ abierto tal que

$$H_{n,m}([(x_i)]_{i=1}^{n}) \in [\mathcal{U}].$$

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $[\mathcal{U}]$ es un abierto básico, así, por la Proposición 2.1.7 se sigue que existe una familia de abiertos $\{U_i\}_{i=1}^{m}$ de X tal que

$$[\mathcal{U}] = \mathbb{P}_m(\prod_{i=1}^{m} U_i).$$

Tomemos $[(y_i)]_{i=1}^{n} \in H_{n,m}^{-1}([\mathcal{U}])$, luego

$$H_{n,m}([(y_i)]_{i=1}^{n}) = [(y_i')]_{i=1}^{m}, \text{ donde } y_j' = \begin{cases} y_j & \text{si } j \leq n \\ a & \text{si } j > n. \end{cases}$$

Debido a que $[(y_i')]_{i=1}^{m} \in [\mathcal{U}]$, existe $\sigma \in S_n$ tal que $(y_i')_{i=1}^{m} \in \prod_{i=1}^{m} U_{\sigma(i)}$. Para toda $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ hagamos $V_i = U_{\sigma(i)}$, así

$$[(y_i)]_{i=1}^{n} \in \mathbb{P}_n(\prod_{i=1}^{n} V_i).$$

Ahora probemos que $\mathbb{P}_n(\prod_{i=1}^{n} V_i) \subseteq H_{n,m}^{-1}(\mathcal{U})$, para esto consideremos

$$[(z_i)]_{i=1}^{n} \in \mathbb{P}_n(\prod_{i=1}^{n} V_i),$$

entonces hay $\sigma' \in S_n$ tal que $(z_{\sigma'(i)})_{i=1}^n \in \prod_{i=1}^n V_i = \prod_{i=1}^n U_{\sigma(i)}$, y en consecuencia

$$(z_{\sigma^{-1}(\sigma'(i))})_{i=1}^n \in \prod_{i=1}^n U_i.$$

Por lo que al ser $H_{n,m}([(z_i)]_{i=1}^n) = [(z_i')]_{i=1}^m$, donde $z_j' = \begin{cases} z_j & \text{si } j \leq n \\ a & \text{si } j > n \end{cases}$, y como para $i > n$, $z_i = y_i = a \in U_i$, tenemos que

$$H_{n,m}([(z_i)]_{i=1}^n) = [(z_i')]_{i=1}^m \in \mathbb{P}_m(\prod_{i=1}^m U_i) = [\mathfrak{U}].$$

Así se sigue

$$\mathbb{P}_n(\prod_{i=1}^n U_i) \subseteq [\mathfrak{U}],$$

y por lo tanto la función $H_{n,m}$ es continua. □

Solo resta probar que la función $H_{n,m}$ es abierta sobre su imagen para concluir que $SP_n(X)$ se puede encajar en $SP_m(X)$.

Proposición 2.2.7 *Los conjuntos abiertos de $SP_n(X)$ a través de la función $H_{n,m}$ son abiertos en el subespacio $H_{n,m}(SP_n(X)) \subseteq SP_m(X))$.*

Demostración. Sea pues $[U] \subseteq SP_n(x)$ un abierto. Supongamos sin pérdida de generalidad que $[U]$ es un abierto básico de la topología, así, por la Proposición 2.1.7 se sigue que existe una familia de abierto $\{U_i\}_{i=1}^n$ de X tal que

$$[U] = \mathbb{P}_n(\prod_{i=1}^n U_i).$$

Para ver que $H_{n,m}([U])$ es abierto en $H_{n,m}(SP_n(X))$ tenemos que probar que $H_{n,m}([U])$ es la intersección de un abierto en $SP_m(x)$ con $H_{n,m}(SP_n(X))$. Para toda $i \in \{1, 2, 3, \ldots, m\}$ definamos

$$U_i' = \begin{cases} U_i & \text{si } i \leq n \\ X & \text{si } i > n. \end{cases}$$

Así $\mathbb{P}_m(\prod_{i=1}^m U'i))$ es abierto ya que la función $\mathbb{P}_n$ es abierta y además el producto finito de abiertos es abierto. Veamos ahora que

$$H_{n,m}([(U)]) = H_{n,m}(SP_n(X)) \cap \mathbb{P}_m(\prod_{i=1}^m U'i).$$

Probemos primero que $H_{n,m}([(U)]) \subseteq H_{n,m}(SP_n(X)) \cap \mathbb{P}_m(\prod_{i=1}^m U'i)$, tomemos pues

$$[(x_i)]_{i=1}^n \in [U],$$

luego

$$H_{n,m}([(x_i)]) = [(x_i')]_{i=1}^m, \text{ donde } x_i' = \begin{cases} x_i & \text{si } i \leq n \\ a & \text{si } i > n. \end{cases}$$

Así existe $\sigma \in S_n$ tal que $(x_{\sigma(i)})_{i=1}^n \in \prod_{i=1}^n U_i$, definamos

$$\sigma'(i) = \begin{cases} \sigma(i) & \text{si } i \leq n \\ i & \text{si } i > n \end{cases}.$$

De manera análoga a la demostración del Lema 2.2.4 tenemos que $\sigma' \in S_m$, y además

$$(x_i')_{i=1}^m \in \prod_{i=1}^m U_i.$$

Por lo que $H_{n,m}([(x_i)]_{i=1}^n \in \mathbb{P}_n(\prod_{i=1}^m U_i) \cap H_{n,m}(SP_n(X))$, y así,

$$H_{n,m}([(U)]) \subseteq H_{n,m}(SP_n(X)) \cap \mathbb{P}_m(\prod_{i=1}^m U_i).$$

Ahora veamos que $H_{n,m}(SP_n(X)) \cap \mathbb{P}_m(\prod_{i=1}^m U_i) \subseteq H_{n,m}([(U)])$, para esto sea

$$[(x_i')]_{i=1}^m \in H_{n,m}(SP_n(X)) \cap \mathbb{P}_m(\prod_{i=1}^m U_i).$$

Entonces existen $\sigma \in S_n$ y $[(x_i)]_{i=1}^n \in SP_n(X)$ tales que

$$(x'_{\sigma(i)})_{i=1}^m \in \prod_{i=1}^m U_i \text{ y } H_{n,m}([(x_i)]_{i=1}^n) = [(x_i')]_{i=1}^m.$$

Por la definición de $H_{n,m}$ podemos suponer que $x_i' = \begin{cases} x_i & \text{si } i \leq n \\ a & \text{si } i > n \end{cases}$. Consideremos $\sigma' \colon \{1, 2, 3, \ldots, n\} \to \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ como

$$\sigma'(i) = \sigma^r(i)$$

donde r es el primer natural tal que $\sigma^r(i) \leq n$, se sigue de la demostración del Lema 2.2.5 que $\sigma' \in S_n$. Veamos que $x_{\sigma'(i)} \in U_i$, y para esto se tienen dos casos:

i) **Caso uno**: Si $\sigma(i) \leq n$, entonces

$$x_{\sigma'(i)} = x_{\sigma(i)} \in U_i.$$

ii) **Caso dos**: Si $\sigma(i) > n$, entonces existe $r > 1$ tal que $\sigma^r(i) = \sigma'(i)$ con r mínimo. Debido a que $\sigma(i) > n$ se sigue que

$$\text{para todo } k \in orb(i),\ x_k = a.$$

Así

$$\text{si } k \in orb(i),\ \text{entonces } a \in U_k,$$

y debido a que $i \in orb(i)$ tenemos

$$x_{\sigma'(i)} \in U_i.$$

Concluimos que

$$(x_{\sigma'(i)})_{i=1}^n \in \prod_{i=1}^n U_i,$$

por lo que $H_{n,m}([(U)]) \subseteq H_{n,m}(SP_n(X)) \cap \mathbb{P}_m(\prod_{i=1}^m U'i)$. Finalmente

$$H_{n,m}([(U)]) = H_{n,m}(SP_n(X)) \cap \mathbb{P}_m(\prod_{i=1}^m U'i),$$

lo que implica que $H_{n,m}$ es abierta sobre su imagen. $\square$

Con todo lo que hemos probado acerca de la función $H_{n,m}$ concluimos que $SP_m(X)$ tiene un espacio homeomorfo a $SP_n(X)$. En el espacio del Ejemplo 2.2.2 podemos observar que este encaje no tiene por qué ser cerrado.

La demostración anterior (el conjunto de lemas y proposiciones) no es la más fácil, pero la que presentamos ya que utiliza únicamente la definición de $SP_n(X)$ e ilustra cómo es su naturaleza. En el próximo teorema daremos un modelo de $SP_n(X)$ con $X = [0,1]$, de nuevo dividiremos la demostración en varios lemas y proposiciones.

Teorema 2.2.8 *Sean $i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}\}$ tales que $i \leq j$ y*

$$\mathfrak{A}_n = \{(x_i)_{i=1}^n \in [0,1]^n |\ x_i \leq x_j \text{ si } i \leq j\}.$$

Entonces $SP_n([0,1]) \simeq \mathfrak{A}_n$.

Primero construiremos la función que será el homeomorfismo que buscamos entre $SP_n([0,1])$ y $\mathfrak{A}_n$ y veremos que está bien definida, para después probar que realmente es homeomorfimo entre dichos espacios.

Lema 2.2.9 *La relación* $\rho\colon [0,1]^n \to \mathfrak{A}_n$ *definida como*

$$\rho((x_i)_{i=1}^n) = (x_{\sigma(i)})_{i=1}^n,$$

donde $\sigma \in S_n$ *es una permutación que cumple con* $x_{\sigma(1)} \leq x_{\sigma(2)} \leq \cdots \leq x_{\sigma(n)}$ *es función.*

Demostración. Para ver que ρ es función nos basta con probar que la imagen de un punto a través de la relación consta únicamente de un punto, esto es equivalente a probar que el valor de ρ es independiente de la elección de la permutación. Consideremos

$$(x_i)_{i=1}^n \in [0,1]^n \text{ y } \sigma, \sigma' \in S_n$$

tales que si $0 \leq i < j \leq n$, entonces $x_{\sigma(i)} \leq x_{\sigma(j)}$ y $x_{\sigma'(i)} \leq x_{\sigma'(j)}$. Demostremos que $x_{\sigma(i)} = x_{\sigma'(i)}$ para toda $i \in \{1,2,3,\ldots,n\}$, lo cual se hará por inducción.

- **Caso base**: Probemos que $x_{\sigma'(1)} = x_{\sigma(1)}$. Primero notamos de la elección de las permutaciones que para todo $i \leq n$ se tiene

$$x_{\sigma'(1)} \leq x_i \text{ y } x_{\sigma(1)} \leq x_i,$$

  y así, debido a que $x_{\sigma(1)} = x_k$ y $x_{\sigma'(1)} = x'_k$ para algunos $k, k' \leq n$, se sigue que

$$x_{\sigma(1)} \leq x_{\sigma'(1)} \text{ y } x_{\sigma'(1)} \leq x_{\sigma(1)},$$

  lo cual implica que

$$x_{\sigma(1)} = x_{\sigma'(1)}.$$

- **Paso inductivo**: Probemos ahora que

$$\text{si } x_{\sigma(i)} = x_{\sigma'(i)}, \text{ entonces } x_{\sigma(i+1)} = x_{\sigma'(i+1)}.$$

  Para esto supongamos que $x_{\sigma(i)} = x_{\sigma'(i)}$ pero $x_{\sigma(i+1)} \neq x_{\sigma'(i+1)}$. Luego, $x_{\sigma(i+1)} < x_{\sigma'(i+1)}$ o bien $x_{\sigma(i+1)} > x_{\sigma'(i+1)}$. Así, si

$$x_{\sigma(i)} = x_{\sigma'(i)} \leq x_{\sigma(i+1)} < x_{\sigma'(i+1)},$$

entonces existen $k_1, k_2, \ldots, k_{i+1} \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ tales que

$$x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_{i+1}} \leq x_{\sigma'(i+1)}.$$

De aquí que existe $k > i+1$ el cual cumple con $x_k < x_{\sigma'(i+1)}$, lo cual es una contradicción, para el caso $x_{\sigma(i+1)} > x_{\sigma'(i+1)}$ obtenemos de manera análoga el mismo resultado. Finalmente concluimos

$$x_{\sigma(i+1)} = x_{\sigma'(i+1)}.$$

Con lo anterior queda probado que

$$\text{para toda } i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\},\ x_{\sigma(i)} = x_{\sigma'(i)}.$$

Así, ρ es independiente de la permutación, y por lo tanto, ρ está bien definida. $\square$

Observación 2.2.10 Notamos que el conjunto $\beta_{[0,1]} = \{(a, b)|\ 0 \leq a < b \leq 1\} \cup \{[0, x)|\ 0 < x \leq 1\} \cup \{0 \leq y < 1\}$ forma una base para la topología usual de $[0, 1]$, pues el conjunto $\tau_{\mathbb{R}} = \{(a, b)|\ a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b\}$ es base de la topología usual de $\mathbb{R}$. Además, como $\mathbb{R}$ es un espacio Hausdorff, se sigue que $[0, 1]$ es un espacio Hausdorff, esto es, si $x, y \in [0, 1]$ entonces existen $U, V \in \beta_{[0,1]}$ ajenos tales que $x \in U$ y $u \in V$.

Proposición 2.2.11 *La función ρ definida en el Lema 2.2.9 es continua.*

Demostración. Sean $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{A}_n$ un abierto no vacío y $(x_i)_{i=1}^n \in \rho^{-1}(\mathcal{A}) \subseteq [0, 1]^n$. Veamos que $\rho^{-1}(\mathcal{A})$ es abierto, para esto podemos suponer que existen abiertos $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq [0, 1]$ tales que

$$\mathcal{A} = \prod_{i=1}^{n} A_i \cap \mathfrak{A}_n.$$

Debido a que $[(x_i)]_{i=1}^n \in \mathcal{A}$ existe una permutación $\sigma \in S_n$ tal que

$$(x_{\sigma(i)})_{i=1}^n \in \prod_{i=1}^{n} A_i \cap \mathfrak{A}_n \text{ y } x_{\sigma(i)} \leq x_{\sigma(j)},\ \text{para } i \leq j.$$

Por la Observacion 2.2.10 tenemos que para toda $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ existen $U_i \in \beta_{[0,1]}$ tales que $x_i \in U_i \subseteq A_i$ y

$$\text{si } x_i \neq x_j,\ \text{entonces } U_i \cap U_j = \emptyset.$$

Consideremos ahora el conjunto

$$\mathfrak{P} = \{B_i \subseteq \{1,2,3,\ldots,n\} |\ i \in B_i \text{ y } a,b \in B_i \text{ si y solo si } x_{\sigma(a)} = x_{\sigma(b)}\},$$

se sigue que $\mathfrak{P}$ es una partición de $\{1,2,3,\ldots,n\}$ por como se ha definido. Para toda $i \in \{1,2,3,\ldots,n\}$ hagamos

$$V_i = \bigcap_{j \in B_i} U_j.$$

Se sigue que $\{V_i\}_{i=1}^n$ es una familia de abiertos tales que $x_i \in V_i \subseteq A_i$ y si $x_i \neq x_j,$ entonces $U_i \cap U_j = \emptyset$; pero si $x_i = x_j,$ entonces $U_i = U_j$.

Probemos ahora que $\prod_{i=1}^n V_i \subseteq \rho^{-1}(\mathcal{A})$, tomemos pues

$$(y_i)_{i=1}^n \in \prod_{i=1}^n V_i.$$

Debido a que $y_i \in V_i \subseteq U_i \subseteq A_i$ se tiene

$$(y_i)_{i=1}^n \in \prod_{i=1}^n A_i.$$

Además, como $\{V_{\sigma(i)}\}_{i=1}^n$ es una familia de intervalos ajenos tal que si $x_{\sigma(i)} < s_{\sigma(j)}$, entonces para todas $x \in V_{\sigma(i)}$ y $y \in V_{\sigma(j)}$, $x < y$. Así

$$(y_{\sigma(i)})_{i=1}^n \in \mathfrak{A},$$

y como $(y_{\sigma(i)})_{i=1}^n = \rho((y_i)_{i=1}^n$ se concluye que

$$\rho(\prod_{i=1} 1^n V_i) \subseteq \mathfrak{A}.$$

De donde se sigue que $\prod_{i=1}^n V_i \subseteq \rho^{-1}(\mathfrak{A})$, y por lo tanto, ρ es una función continua. $\square$

Obviamente la función ρ no es el homemorfismo ya que ni siquiera tiene como dominio $P_n([0,1])$. Si ρ fuera constante en las fibras de $\mathbb{P}_n$, entonces por el Lema 1.3.3 tendríamos un posible candidato para el homemorfismo.

Proposición 2.2.12 *ρ es constante en $\mathbb{P}_n^{-1}([(x_i)]_{i=1}^n)$, para todo $[(x_i)]_{i=1}^n \in SP_n([0,1])$*

Demostración. Sean $[(x_i)]_{i=1}^n \in SP_n([0,1])$ y $(y_i)_{i=1}^n, (z_i)_{i=1}^n \in \mathbb{P}_n^{-1}([(x_i)]_{i=1}^n)$. Entonces existen $\sigma_y, \sigma_z \in S_n$ tales que

$$(x_i)_{i=1}^n = (y_{\sigma_y(i)})_{i=1}^n = (z_{\sigma_z(i)})_{i=1}^n.$$

Por otro lado, hay $\sigma \in S_n$ tal que $x_{\sigma(i)} \leq x_{\sigma(j)}$ para $i \leq j$, y así

$$y_{\sigma(\sigma_y(i))} = z_{\sigma(\sigma_z(i))} \leq y_{\sigma(\sigma_y(j))} = z_{\sigma(\sigma_z(j))} \text{ si } i \leq j.$$

Debido a que ρ es función se sigue $\rho((y_i)_{i=1}^n) = \rho((z_i)_{i=1}^n)$, por lo tanto, ρ es constante en $\mathbb{P}_n^{-1}([(x_i)]_{i=1}^n)$ para todo $[(x_i)]_{i=1}^n \in SP_n([0,1])$. $\square$

Por el primer inciso del Lema 1.3.3 se tiene que

$$\rho \circ \mathbb{P}_n^{-1} : SP_n([0,1]) \to \mathfrak{A}_n$$

es continua, y además, para toda $\sigma \in S_n$, $\rho \circ \mathbb{P}_n^{-1}([(x_i)]_{i=1}^n = \rho((x_{\sigma(i)})_{i=1}^n)$. El segundo inciso del Lema 1.3.3 nos dice que la función $\rho \circ \mathbb{P}_n^{-1}$ será abierta siempre y cuando cumpla con las hipótesis de la siguiente proposición.

Proposición 2.2.13 *Si $U \subseteq [0,1]$ es un abierto tal que $U = \mathbb{P}_n^{-1}(\mathbb{P}_n(U))$, entonces $\rho(U)$ es abierto.*

Demostración. Sean $U \subseteq [0,1]$ abierto y $(x_i)_{i=1}^n \in \rho(U)$ tal que $U = \mathbb{P}_n^{-1}(\mathbb{P}_n(U))$. Entonces existe $(y_i)_{i=1}^n \in U$ tal que

$$\rho((y_i)_{i=1}^n) = (x_i)_{i=1}^n,$$

como U es abierto se sigue que para toda $i \in \{1,2,3,\ldots,n\}$ existen abiertos básicos (intervalos) $A_i \subseteq [0,1]$ tales que

$$(y_i)_{i=1}^n \in \prod_{i=1}^n A_i \subseteq U.$$

Probemos que $(x_i)_{i=1}^n \in \bigcup_{\sigma \in S_n}(\prod_{i=1}^n A_{\sigma(i)}) \cap \mathfrak{A}_n \subseteq \rho(U)$. Debido a que $(y_i)_{i=1}^n \in \prod_{i=1}^n A_i$ y a que para alguna $\sigma' \in S_n$, $(y_{\sigma'(i)})_{i=1}^n = \rho((y_i)_{i=1}^n)$, se sigue

$$(x_i)_{i=1}^n = (y_{\sigma'(i)})_{i=1}^n \in \bigcup_{\sigma \in S_n}(\prod_{i=1}^n A_{\sigma(i)}) \cap \mathfrak{A}_n.$$

Tomemos ahora $(z_i)_{i=1}^n \in \bigcup_{\sigma \in S_n}(\prod_{i=1}^n A_{\sigma(i)}) \cap \mathfrak{A}_n$, entonces existe $\alpha \in S_n$ tal que

$$(z_{\alpha(i)})_{i=1}^n \in \prod_{i=1}^n A_i,$$

y como $\prod_{i=1}^n A_i \subseteq U$, tenemos

$$(z_i)_{i=1}^n = \rho((z_{\alpha(i)})_{i=1}^n) \in \rho(\prod_{i=1}^n A_i) \subseteq \rho(U).$$

Así concluimos que $(x_i)_{i=1}^n \in \bigcup_{\sigma \in S_n} (\prod_{i=1}^n A_{\sigma(i)}) \cap \mathfrak{A}_n \subseteq \rho(U)$, y por lo tanto, $\rho(U)$ es abierto en $\mathfrak{A}_n$. $\square$

Sólo estamos a un paso de terminar de probar que $\rho \circ \mathbb{P}_n^{-1}$ es un homeomorfismo, para esto solo necesitamos probar que dicha función es biyectiva.

Lema 2.2.14 $\rho \circ \mathbb{P}_n^{-1}$ *es biyectiva.*

Demostración. Primero notamos que la función $\rho \circ \mathbb{P}_n^{-1}$ es sobre, pues si $(x_i)_{i=1}^n \in \mathfrak{A}_n \subseteq [0,1]^n$, entonces $\rho \circ \mathbb{P}_n^{-1}([(x_i)]_{i=1}^n) = \rho((x_i)_{i=1}^n) = (x_i)_{i=1}^n$. Ahora, para ver que $\rho \circ \mathbb{P}_n^{-1}$ es inyectiva tomemos

$$[(x_i)]_{i=1}^n, [(y_i)]_{i=1}^n \in SP_n([0,1])$$

tal que $\rho \circ \mathbb{P}_n^{-1}([(x_i)]_{i=1}^n) = \rho \circ \mathbb{P}_n^{-1}([(y_i)]_{i=1}^n)$. Entonces existen $\sigma, \sigma' \in S_n$ tales que

$$\rho \circ \mathbb{P}_n^{-1}([(x_i)]_{i=1}^n) = (x_{\sigma(i)})_{i=1}^n \text{ y } \rho \circ \mathbb{P}_n^{-1}([(y_i)]_{i=1}^n) = (y_{\sigma'(i)})_{i=1}^n.$$

Además, como para toda $\sigma' \in S_n$ y $[(z_i)] \in SP_n([0,1])$,

$$\rho \circ \mathbb{P}_n^{-1}([(z_i)]_{i=1}^n) = \rho((z_{\sigma'(i)})_{i=1}^n) \in [(z_i)]_{i=1}^n,$$

se sigue que $\rho \circ \mathbb{P}_n^{-1}([(x_i)]_{i=1}^n) \in [(x_i)]_{i=1}^n$ y $\rho \circ \mathbb{P}_n^{-1}([(y_i)]_{i=1}^n) \in [(y_i)]_{i=1}^n$, y por lo tanto,

$$[(x_i)]_{i=1}^n = [(y_i)]_{i=1}^n.$$

Concluyendo así que $\rho \circ \mathbb{P}_n^{-1}$ es inyectiva. $\square$

Como conclusión tenemos que la función $\rho \circ \mathbb{P}_n^{-1}$ es un homeomorfismo entre $\mathfrak{A}_n$ y $SP_n([0,1])$.

Capítulo 3

Numerabilidad y Separabilidad

3.1. Primero Numerable

La primera numerabilidad es una propiedad que habla del cardinal de bases locales.

Definición 3.1.1 Sea X un espacio topológico. Decimos que X es **primero numerable** si para cada punto $x \in X$ existe una base local numerable para x.

Queremos ver que $SP_n(X)$ es primero numerable siempre que X es un espacio primero numerable, para esto notemos que $SP_n(X)$ es un cociente de un producto finito de espacios topológicos, por lo que valdría la pena preguntarnos primero si es que el producto finito de espacios primero numerables es numerable, lo cual es cierto y es fácil de probar, por lo que se omite la prueba.

Proposición 3.1.2 *Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ espacios topológicos. Entonces X_i es 1º numerable para toda $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ si y sólo si $\prod_{i=1}^{n} X_i$ es 1º numerable.*

La siguiente proposición también es fácil de demostrar y de nuevo se omitirá.

Proposición 3.1.3

1. *Si X es un espacio primero numerable, entonces todo subespacio de X es primero numerable.*
2. *Si X es primero numerable y Y es homeomorfo a X, entonces Y es primero numerable.*

Teorema 3.1.4 *Sea X un espacio topológico. Entonces X es primero numerable si y sólo si $SP_n(X)$ es primero numerable.*

Demostración. Supongamos que X es primero numerable y veamos que $SP_n(X)$ también lo es. Debido a la Proposición 3.1.2 tenemos que X^n es primero numerable, consideremos $[(x_i)]_{i=1}^n \in SP_n(X)$. Como X^n es primero numerable tenemos que existe $\beta_{(x_i)_{i=1}^n}$ base local numerable de $(x_i)_{i=1}^n$. Consideremos

$$\beta_{[(x_i)]_{i=1}^n} = \{\mathbb{P}_n(U) | \; U \in \beta_{(x_i)_{i=1}^n}\},$$

y veamos que es base local numerable para $[(x_i)]_{i=1}^n$. Notamos que $\beta_{[(x_i)]_{i=1}^n}$ es numerable ya que es imagen de un conjunto numerable; además, por el Lema 2.1.9, sus elementos son abiertos pues son la imagen de conjuntos abiertos a través de una función abierta. Veamos ahora que $\beta_{[(x_i)]_{i=1}^n}$ es base local, sea pues $[U] \subseteq SP_n(X)$ un abierto que tenga a $[(x_i)]_{i=1}^n$. Entonces

$$(x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{P}_n^{-1}([U]),$$

así, existe $V \in \beta_{(x_i)_{i=1}^n}$ tal que $(x_i)_{i=1}^n \in V \subseteq \mathbb{P}_n^{-1}([U])$, por lo que

$$\mathbb{P}_n((x_i)_{i=1}^n) = [(x_i)]_{i=1}^n \in \mathbb{P}_n(V) \subseteq [U].$$

De aquí se concluye que $\beta_{[(x_i)]_{i=1}^n}$ es base local, y por lo tanto, $SP_n(X)$ es primero numerable.

Por el Teorema 2.2.1 tenemos que $SP_n(X)$ tiene un subespacio homeomorfo a X, y por la Proposición 3.1.3 se sigue que dicho subespacio es primero numerable y además todo subespacio homemorfo a el es también primero numerable. Luego, X es primero numerable. □

Corolario 3.1.5 *X^n es primero numerable si y solamente si $SP_n(X)$ es primero numerable.*

Demostración. Por el teorema anterior tenemos que $SP_n(X)$ es primero numerable si y sólo si X es primero numerable, y por la Proposición 3.1.2 tenemos que X es primero numerable si y solamente si X^n es primero numerable. Así, concluimos que $SP_n(X)$ es primero numerable si y sólo si X^n es primero numerable. □

3.2. Segundo Numerable

Veamos ahora qué pasa para bases numerables del espacio X y $SP_n(X)$. La prueba del siguiente resultado se puede consultar en [3].

Teorema 3.2.1 *i) La segunda numerabilidad es invariante ante funciones continuas, abiertas y suprayectivas.*

ii) Cualquier subespacio de un segundo numerable es segundo numerable.

iii) El producto $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ es segundo numerable si y solamente si para toda $n \in \mathbb{N}$, X_n segundo numerable.

Como corolario tenemos:

Corolario 3.2.2 *Sea X un espacio topológico. Entonces los siguiente son equivalentes.*

i) X es segundo numerable,

ii) X^n es segundo numerable.

iii) $SP_n(X)$ es segundo numerable.

Demostración.
i) $\Rightarrow$ *ii)*] Por el tercer inciso del Teorema 3.2.1 tenemos que si X es segundo numerable, entonces X^n es segundo numerable.

ii) $\Rightarrow$ *iii)*] Como $\mathbb{P}_n$ es una función continua y sobre que sale de X^n y entra a $SP_n(X)$, se sigue del Teorema 3.2.1 que si X^n es segundo numerable, entonces $SP_n(X)$ es segundo numerable.

iii) $\Rightarrow$ *i)*] Ahora supongamos que $SP_n(X)$ es segundo numerable. Como X es homeomorfo a un subespacio de $SP_n(X)$, se siguen de los incisos *i)* y *ii)* del Como $\mathbb{P}_n$ es una función continua y sobre que sale de X^n y entra a $SP_n(X)$, se sigue del Teorema 3.2.1 tenemos que si X^n es segundo numerable, entonces $SP_n(X)$ es segundo numerable.
que X es segundo numerable. $\square$

3.3. Separable

Definición 3.3.1 Sea X un espacio topológico y sea $A \subseteq X$.

i) Decimos que A es **denso** en X si para todo $U \subseteq X$ abierto no vacío se tiene que $U \cap A \neq \emptyset$.

ii) Decimos que un espacio X es **separable** si X tiene un conjunto denso y numerable.

De nuevo tenemos que el ser separable se preserva bajo productos finitos (más que eso, hasta numerables), como lo muestra el siguiente teorema que se encuentra en [3].

Proposición 3.3.2 *i) La separabilidad es invariante ante funciones continuas.*

ii) Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ una familia de espacios topológicos. Entonces el producto $\prod_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha$ es separable si y sólo si X_α es separable.

Teorema 3.3.3 *Sea X un espacio topológico. Entonces X es separable si y sólo si $SP_n(X)$ es separable.*

Demostración. Supongamos que X es separable y veamos que $SP_n(X)$ también lo es. Así, de la Proposición 3.3.2, pues $\mathbb{P}_n$ es una función continua y X es separable.

Ahora supongamos que $SP_n(X)$ es separable y probemos que X es separable. Sea $[D] \subseteq SP_n(X)$ denso numerable. Definamos

$$D = \{x \in X |\ x = p_1((x_i)_{i=1}^n) \text{ con } \mathbb{P}_n((x_i)_{i=1}^n) \in [D]\}$$

donde p_1 es la proyección a la primera coordenada. Notamos que $|D| \leq |[D]^n| \leq |\mathbb{N}^n| = |\mathbb{N}|$, por lo que sólo resta ver que D es denso. Tomemos $U \subseteq X$ un abierto no vacío, entonces $\mathbb{P}_n(U^n)$ es abierto, y como $[D]$ es denso existe $[(x_i)]_{i=1}^n \in [D]$ tal que $[(x_i)]_{i=1}^n \in \mathbb{P}_n(U^n)$. Así,

$$(x_i)_{i=1}^n \in U^n,$$

por lo que $p_1((x_i)_{i=1}^n) = x_1 \in U$, y como $p_1((x_i)_{i=1}^n) \in D$ se sigue que

$$D \cap U \neq \emptyset.$$

Finalmente concluimos que D es denso numerable, y por lo tanto, X es separable. $\square$

Corolario 3.3.4 *Sea X un espacio topológico. Entonces X^n es separable si y solamente si $SP_n(X)$ es separable.*

Demostración. Por el segundo inciso de la Proposición 3.3.2 tenemos que X^n es separable si y sólo si X es separable, y por el Teorema 3.3.3 tenemos que X es separable si y sólo si $SP_n(X)$ es separable. $\square$

Capítulo 4

Axiomas de Separación

Algunas demostraciones de esta sección pueden simplificarse notando que ciertas propiedades se preservan bajo funciones continuas, abiertas suprayectivas y/o cerradas; pero las pruebas que se muestran solo requieren de la definición, y se exponen para ilustrar como funciona nuestro espacio $SP_m(X)$.

4.1. T_1

En el año de 1914, Hausdorff introduce la noción de espacio topológico, la cual es diferente a la que nosotros usamos, pues en la de Hausdorff se pueden separar dos puntos diferentes mediante vecindades ajenas. Esto último hoy se conoce como el axioma T_2, y como lo indica el número, hay axiomas mas débiles que este. Los axiomas de separación suelen denotarse con T (de la palabra *Trenunng*, que es separación en alemán), y en esta sección estudiaremos el axioma T_1.

Definición 4.1.1 Sea X un espacio topológico. Decimos que X es $\boldsymbol{T_1}$ si para $x, y \in X$ tales que $x \neq y$ existen $U, V \subseteq X$ abiertos; $x \in U, y \in V$ y $x \notin V, y \notin U$.

La demostración de la siguiente proposición se puede encontrar en [9].

Proposición 4.1.2 *Sea $\{X_j \mid j \in J\}$ una familia de espacios T_1. Entonces $\prod_{j \in J} X_j$ es T_1 si y sólo si para toda $j \in J$, X_j es T_1.*

Ahora si probemos la relación de X y $SP_n(X)$ con respecto al axioma de separación T_1.

Teorema 4.1.3 *Sea X un espacio topológico. Entonces X es T_1 si y sólo si $SP_n(X)$ es T_1.*

Demostración. Probemos que $SP_n(X)$ es T_1 suponiendo que X lo es, para esto sean $[(x_i)]_{i=1}^n, [(y_i)]_{i=1}^n \in SP_n(X)$ tales que $[(x_i)]_{i=1}^n \neq [(y_i)]_{i=1}^n$. Por la Proposición 4.1.2 se sigue que X^n es T_1, y así, para $\alpha \in S_n$ hay $U_{\alpha_x}, U_{\alpha_y} \subseteq X^n$ tales que

$$(x_i)_{i=1}^n \in U_{\alpha_x}, (y_{\alpha(i)})_{i=1}^n \in U_{\alpha_y}, \text{ pero } (y_{\alpha(i)})_{i=1}^n \notin U_{\alpha_x}, (x_i)_{i=1}^n \notin U_{\alpha_y}.$$

De lo anterior se sigue que para toda $\sigma \in S_n$, $(x_i)_{i=1}^n \in \bigcap_{\alpha \in S_n} U_{\alpha_x}$ y $(y_{\sigma(i)})_{i=1}^n \notin \bigcap_{\alpha \in S_n} U_{\alpha_x}$, lo cual implica que

$$[(x_i)]_{i=1}^n \in \mathbb{P}_n(\bigcap_{\alpha \in S_n} U_{\alpha_x}) \text{ y } [(y_i)]_{i=1}^n \notin \mathbb{P}_n(\bigcap_{\alpha \in S_n} U_{\alpha_x}).$$

De la misma manera, se sigue que para toda $\alpha \in S_n$ existen abiertos $V_{\alpha_x}, V_{\alpha_y} \subseteq X^n$ tales que

$$(x_{\alpha(i)})_{i=1}^n \in V_{\alpha_x}, (y_i)_{i=1}^n \in V_{\alpha_y}; \text{ y } (x_{\alpha(i)})_{i=1}^n \notin V_{\alpha_y}, (y_i)_{i=1}^n \notin V_{\alpha_x}.$$

De aquí que si $\sigma \in S_n$, entonces $(y_i)_{i=1}^n \in \bigcap_{\alpha \in S_n} V_{\alpha_y}$ y $(x_{\sigma(i)})_{i=1}^n \notin \bigcap_{\alpha \in S_n} V_{\alpha_y}$. Por lo que,

$$[(y_i)]_{i=1}^n \in \mathbb{P}_n(\bigcap_{\alpha \in S_n} V_{\alpha_y}) \text{ pero } [(x_i)]_{i=1}^n \notin \mathbb{P}_n(\bigcap_{\alpha \in S_n} V_{\alpha_y}).$$

Y al ser $\mathbb{P}_n(\bigcap_{\alpha \in S_n} U_{\alpha_x})$ y $\mathbb{P}_n(\bigcap_{\alpha \in S_n} V_{\alpha_y})$ abiertos del cociente, concluimos que $SP_n(X)$ es T_1.

Ahora probemos el recíproco, es decir, que si $SP_n(X)$ es T_1, entonces X es T_1, tomemos pues $x, y \in X$ tal que $x \neq y$. Para toda $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ definamos $x_i = x$ y $y_i = y$, se sigue que

$$[(x_i)]_{i=1}^n \neq [(y_i)]_{i=1}^n.$$

Debido a que $SP_n(X)$ es T_1, existen $[U]_x, [U]_y \subseteq SP_n(X)$ abiertos tales que

$$[(x_i)]_{i=1}^n \in [U]_x,\ [(y_i)]_{i=1}^n \in [U]_y;\ \text{y } [(x_i)]_{i=1}^n \notin [U]_y,\ [(y_i)]_{i=1}^n \notin [U]_x.$$

Al ser $[U]_x$ y $[U]_y$ abiertos, existen colecciones de conjuntos abiertos $\{U_{x,i}\}_{i=1}^n$ y $\{U_{y,i}\}_{i=1}^n$ de X tales que

$$[(x_i)]_{i=1}^n \in \mathbb{P}_n(\prod_{i=1}^n U_{x_i}) \subseteq [U]_x \text{ y } [(y_i)]_{i=1}^n \in \mathbb{P}_n(\prod_{i=1}^n U_{y_i}) \subseteq [U]_y.$$

Notamos que para toda $i \in \{1,2,3,...,n\}$, $x = x_i \in U_{x,i}$ y $y = y_i \in U_{y,i}$. También existen $j,k \in \{1,2,3,\ldots,n\}$ tales que $x \notin U_{y,j}$ y $y \notin U_{x,k}$. Luego,

$$x \notin \bigcap_{i=1}^{n} U_{y,i};\ y \notin \bigcap_{i=1}^{n} U_{x,i} \text{ y } x \in \bigcap_{i=1}^{n} U_{x,i},\ y \in \bigcap_{i=1}^{n} U_{y,i}.$$

Además, como la intersección finita de abiertos es abierta, concluimos que X cumple con ser T_1. $\square$

Como corolario tenemos:

Corolario 4.1.4 *X^n es T_1 si y sólo si $SP_n(X)$ es T_1.*

Demostración. De la Proposición 4.1.2 tenemos que X^n es T_1 si y solamente si X es T_1, y del teorema anterior se sigue que X es T_1 si y sólo si $SP_n(X)$ es T_1. De estos dos resultados concluimos que X^n es T_1 si y sólo si $SP_n(X)$ es T_1. $\square$

4.2. T_2

Como hemos mencionado el axioma T_2 será mas fuerte que el T_1, pues en este, los puntos se separarán mediante vecindades ajenas.

Definición 4.2.1 Un espacio topológico X se dice que es $\boldsymbol{T_2}$ o **Hausdorff** si para cualquier par de puntos $x, y \in X$ existen abiertos $U, V \subseteq X$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Observación 4.2.2 Notamos que si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son puntos en un espacio T_2 tales que $x_i \neq x_j$ siempre que $i \neq j$, entonces existen abiertos $U_1, U_2, \ldots, U_n$ tales que

$$x_k \in U_k;\ \text{y si } i \neq j,\ \text{entonces } U_i \cap U_j = \emptyset.$$

Esto se sigue de la definición y de que la intersección finita de abiertos es un conjunto abierto.

La prueba de la siguiente proposición puede verse en [3].

Proposición 4.2.3 *X es Hausdorff si y solamente si la diagonal $\{(x,x) \in X^2 |\ x \in X\}$ es cerrada en X^2.*

Teorema 4.2.4 *Sea X un espacio topológico. Entonces X es T_2 si y sólo si $SP_n(X)$ es T_2.*

Demostración. Primero veamos que si X es T_2, entonces $SP_n(X)$ también lo es. Tomemos pues $[(x_i)]_{i=1}^n, [(y_i)]_{i=1}^n \in SP_n(X)$ tales que $[(x_i)]_{i=1}^n \neq [(y_i)]_{i=1}^n$, entonces para toda $\sigma, \sigma' \in S_n$,

$$(x_{\sigma(i)})_{i=1}^n \neq (y_{\sigma'(i)})_{i=1}^n.$$

De aquí se tiene que para cada par $\sigma, \sigma' \in S_n$, existe $i_{\sigma,\sigma'} \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ tal que

$$x_{\sigma(i_{\sigma,\sigma'})} \neq y_{\sigma'(i_{\sigma,\sigma'})}.$$

Dado que X es T_2 existen abiertos $U_1, U_2, \ldots, U_n, V_1, V_2, \ldots, V_n \subseteq X$ tales que para toda $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $x_i \in U_i$, $y_i \in V_i$, y además si $x_i \neq y_j$, entonces $U_i \cap V_j = \emptyset$. Definamos

$$[U] = \mathbb{P}_n(\prod_{i=1}^n U_i) \text{ y } [V] = \mathbb{P}_n(\prod_{i=1}^n V_i),$$

se sigue que $[U]$ y $[V]$ son abiertos en $SP_n(X)$ tales que $[(x_i)]_{i=1}^n \in [U]$ y $[(y_i)]_{i=1}^n \in [V]$. Como para toda $\sigma, \sigma' \in S_n$ existe $i_{\sigma,\sigma'} \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ tal que $x_{\sigma(i_{\sigma,\sigma'})} \neq y_{\sigma'(i_{\sigma,\sigma'})}$, se tiene que $U_{\sigma(i_{\sigma,\sigma'})} \cap U_{\sigma(i_{\sigma,\sigma'})} = \emptyset$, por lo que si $\sigma, \sigma' \in S_n$, entonces

$$\prod_{i=1}^n U_{\sigma(i)} \cap \prod_{i=1}^n V_{\sigma'(i)} = \emptyset.$$

De aquí que

$$\bigcup_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n U_{\sigma(i)} \cap \bigcup_{\sigma' \in S_n} \prod_{i=1}^n V_{\sigma'(i)} = \emptyset.$$

Por lo que $[U]$ y $[V]$ son abiertos ajenos, y por lo tanto, $SP_n(X)$ es T_2.

Ahora supongamos que $SP_n(X)$ es T_2 y probemos que X es T_2, sean $x, y \in X$ tales que $x \neq y$. Definamos para toda $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $x_i = x$ y $y_i = y$. Se sigue que

$$[(x_i)]_{i=1}^n \neq [(y_i)]_{i=1}^n.$$

Debido a que $SP_n(X)$ es T_2, existen abiertos ajenos $[U], [V] \subseteq SP_n(X)$ tales que

$$[(x_i)]_{i=1}^n \in [U] \text{ y } [(y_i)]_{i=1}^n \in [V].$$

Por la Proposición 2.1.7 existen dos familias de abiertos $\{U_i\}_{i=1}^n$ y $\{V_i\}_{i=1}^n$ de X tales que

$$[(x_i)]_{i=1}^n \in \mathbb{P}_n(\prod_{i=1}^n U_i) \subseteq [U] \text{ y } [(y_i)]_{i=1}^n \in \mathbb{P}_n(\prod_{i=1}^n V_i) \subseteq [V].$$

Luego, para toda $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $x \in U_i$ y $y \in V_i$. Ya tenemos que $\bigcap_{i=1}^n U_i$ y $\bigcap_{i=1}^n V_i$ son abiertos que tienen a x y y respectivamente, nos falta probar que dichos conjuntos son ajenos. Llamemos

$$U = \bigcap_{i=1}^n U_i \text{ y } V = \bigcap_{i=1}^n V_i$$

y supongamos que $z \in U \cap V$. Dado que para toda $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $U \subseteq U_i$ y $V \subseteq V_i$, se tiene que $U^n \subseteq \prod_{i=1}^n U_i$ y $V^n \subseteq \prod_{i=1}^n V_i$. Como $\mathbb{P}_n(\prod_{i=1}^n U_i) \subseteq [U]$ y $\mathbb{P}_n(\prod_{i=1}^n V_i) \subseteq [V]$ se sigue que

$$[(z, z, z, \ldots, z)] \in \mathbb{P}_n(U^n) \cap \mathbb{P}_n(V^n) \subseteq \mathbb{P}_n(\prod_{i=1}^n U_i) \cap \mathbb{P}_n(\prod_{i=1}^n V_i) \subseteq [U] \cap [V],$$

lo cual es una contradicción, pues $[U]$ y $[V]$ son ajenos. Así, concluimos que U y V también lo son, y por lo tanto, X es un espacio Hausdorff. $\square$

La propiedad de ser T_2 se preserva para productos como lo dicta el siguiente teorema, cuya demostración se encuentra en [9].

Teorema 4.2.5 *Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una familia de espacios topológicos. Entonces $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ es T_2 si y solamente si para toda $\alpha \in \Lambda$, X_α es T_2.*

Como consecuencia inmediata del teorema anterior y del 4.2.4 tenemos:

Corolario 4.2.6 *X^n es T_2 si y solamente si $SP_n(X)$ es T_2.*

Demostración. Por el teorema anterior tenemos que X^n es T_2 si y solamente si X es T_2, y del Teorema 4.2.4 tenemos que X es T_2 si y solamente si $SP_n(X)$ es T_2. Donde se concluye que X^n es T_2 si y sólo si $SP_n(X)$ es T_2. $\square$

Una propiedad de que X sea un espacio Hausdorff, es que la imagen del encaje definido en 2.2.1 será un subespacio cerrado de $SP_n(X)$. Lo cual se sigue del siguiente lema, cuya demostración se encuentra en [3].

Lema 4.2.7 *Sean $f, g : X \to Y$ funciones continuas con Y un espacio Hausdorff.*

i) *Si $A \subseteq X$ es un conjunto denso y $f(x) = g(x)$ para toda $x \in A$, entonces $f = g$.*

ii) *La gráfica*[1] *de la función f es cerrada en $X \times Y$.*

La siguiente proposición se sigue facilmente del Lema 4.2.7.

Proposición 4.2.8 *Si X es Hausdorff, entonces*

$$\Delta_n = \{(x_i)_{i=1}^n \in X^n \mid x_i = x_j \text{ para toda } i, j \leq n\}$$

es cerrado en X^n.

Demostración. Consideremos la función $i_n \colon X \to X^n$ tal que $i_n(x) = (x, x, \ldots, x) \in X^n$. Como la función i_n es continua y X^n es Hausdorff, se sigue del Lema 4.2.7 que $\{(x, i_n(x)) \in X^n \mid x \in X\}$ es cerrado en $X \times X^n$. Debido a que la función $\phi \colon X \times X^n \to X^{n+1}$ definida como

$$\phi(x, (y_i)_{i=1}^n) = (x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \in X_{n+1}$$

es homeomorfismo y a que $\Delta_{n+1} = \phi(\{(x, i_n(x)) \in X^n \mid x \in X\})$, se concluye que $\Delta_{n+1} \subseteq X^{n+1}$ es cerrado. □

Corolario 4.2.9 *Sea X un espacio topológico. Entonces X se puede encajar como un cerrado en $SP_n(X)$.*

Demostración. Se sigue de la Proposición 4.2.8 y del Teorema 2.2.1, ya que X es homeomorfo a $\mathbb{P}_n(\Delta_n)$. □

4.3. T_3

El siguiente axioma de separación no separa unicamente puntos de puntos, si no este también separa puntos de cerrados.

Definición 4.3.1 Dado X un espacio T_2, diremos que X es $\boldsymbol{T_3}$ o **regular**, si para cualquier cerrado $A \subseteq X$ y cualquier punto x tal que $x \notin A$ existen dos abiertos $U, V \subseteq X$ tales que $x \in U$ y $A \subseteq V$, pero $U \cap V = \emptyset$.

[1] La gráfica de $f \colon X \to Y$ es el conjunto $\{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$.

La demostración de los siguientes resultados se encuentran en [3].

Proposición 4.3.2 *Las siguientes tres propiedades son equivalentes:*

i) *X es regular.*

ii) *Para todo $x \in X$ y una vecindad U de x, existe una vecindad V de x tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.*

iii) *Para todo $x \in X$ y A cerrado que no tiene a x, existe una vecindad V de x tal que $\overline{V} \cap A = \emptyset$.*

Como es de esperarse el producto de espacios será T_3 si y solamente si cada uno de los espacios involucrados en el producto es T_3.

Teorema 4.3.3 *Sean $\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ una familia de espacio topológicos. Entonces*

i) *Cualquier subespacio de un espacio regular es regular.*

ii) *$\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ es T_3 si y solamente si X_γ es T_3 para toda $\gamma \in \Gamma$.*

Proposición 4.3.4 *Sea X un espacio topológico. Entonces X es T_3 si y sólo si $SP_n(X)$ es T_3.*

Demostración. Supongamos que X es T_3 y veamos que $SP_n(X)$ también lo es. Tomemos pues $[(x_i)]_{i=1}^n \in SP_n(X)$ y $[U] \subseteq SP_n(X)$ abierto tales que $[(x_i)]_{i=1}^n \in [U]$. Como X es T_3, el Teorema 4.3.3 nos dice que X^n es T_3, por lo que para $(x_i)_{i=1}^n$ existe un abierto $V \subseteq X^n$ tal que

$$(x_i)_{i=1}^n \in V \subseteq \overline{V} \subseteq \mathbb{P}_n^{-1}([U]).$$

De donde $[(x_i)]_{i=1}^n \in \mathbb{P}_n(V) \subseteq \mathbb{P}_n(\overline{V}) \subseteq \mathbb{P}_n(\mathbb{P}_n^{-1}([U])) = [U]$. Debido a que $\overline{\mathbb{P}_n(V)} = \mathbb{P}_n(\overline{V})$ y a que $\mathbb{P}_n(V)$ es abierto, concluimos de la Proposición 4.3.2 que $SP_n(X)$ es T_3.

Ahora probemos que si $SP_n(X)$ es T_3, entonces X es T_3, de nuevo lo haremos uso de la Proposición 4.3.2. Sean $x \in X$ y U un abierto tales que $x \in U$. Entonces $\mathbb{P}_n(U^n)$ es vecindad de $[(x_i)]_{i=1}^n$, donde $x_i = x$ para $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$, y así, debido a que $SP_n(X)$ es T_3, existe $[V]$ vecindad de $[(x_i)]_{i=1}^n$ tal que

$$[(x_i)]_{i=1}^n \in [V] \in \overline{[V]} \subseteq \mathbb{P}_n(U^n).$$

Como $[V]$ es vecindad de $[(x_i)]_{i=1}^n$ existen abiertos $V_1, V_2, ..., V_n \subseteq X^n$ tales que

$$[(x_i)]_{i=1}^n \in \mathbb{P}_n(\prod_{i=1}^n V_i) \subseteq [V].$$

Tomando $V = \bigcap_{i=1}^n V_i$, se sigue que V es un abierto tal que

$$[(x_i)]_{i=1}^n \in \mathbb{P}_n(V^n) \subseteq \overline{\mathbb{P}_n(V^n)} \subseteq \mathbb{P}_n(U^n).$$

Como $\overline{\mathbb{P}_n(V^n)} = \mathbb{P}_n(\overline{V}^n)$ y $\mathbb{P}_n(\overline{V}^n) \subseteq \mathbb{P}_n(U^n)$, tenemos que

$$x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U.$$

Finalmente, de la Proposición 4.3.2 se concluye que X es T_3. $\square$

Corolario 4.3.5 *Sea X un espacio topológico. Entonces X^n es T_3 si y solamente si $SP_n(X)$ es T_3.*

Demostración. Del Teorema 4.3.3 tenemos que X^n es T_3 si y sólo si X es T_3, y de la Proposición anterior tenemos que X es T_3 si y solamente si X^n es T_3. En consecuencia X^n es T_3 si y sólo si $SP_n(X)$ también lo es. $\square$

4.4. $T_{3_{1/2}}$

La diferencia de ser $T_{3_{1/2}}$ con el ser T_3, es que $T_{3_{1/2}}$ separa puntos de cerrados mediante funciones continuas.

Definición 4.4.1 Decimos que un espacio Hausdorff X es $\boldsymbol{T_{3_{1/2}}}$ o **completamente regular**, si para cualquier punto x y un conjunto cerrado A tales que $x \notin A$ se tiene que existe una función continua $f\colon X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(a) = 1$, para todo $a \in A$.

El siguiente teorema y su prueba se encuentran en [3].

Teorema 4.4.2

1. *Cualquier subespacio de un espacio completamente regular es completamente regular.*
2. *Sea una familia $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de espacios completamente regulares. Entonces para toda $\alpha \in \Lambda$ X_α es completamente regular si y solamente si $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ es completamente regular.*

Proposición 4.4.3 $T_{3_{1/2}}$ *se preserva bajo homeomorfismos.*

Demostración. Sean X y Y dos espacios topológicos tal que X es completamente regular y $H\colon X \to Y$ un homeomorfismo. Probaremos que Y es un espacio completamente regular. Consideremos $y \in Y$ y B un conjunto cerrado tales que $y \notin B$. Como H es un homeomorfismo se tiene que $H^{-1}(B)$ es un cerrado en X tal que

$$H^{-1}(y) \notin H^{-1}(B).$$

Dado que X es completamente regular, existe $f\colon X \to [0,1]$ continua tal que $f(x) = 0$ y $f(b) = 1$, para $b \in H^{-1}(B)$. Así, $f \circ H^{-1}\colon Y \to [0,1]$ es una función continua que cumple con

$$f \circ H^{-1}(y) = f(H^{-1}(y)) = f(x) = 0 \text{ y } f \circ H^{-1}(B) = f(H^{-1}(B)) = \{1\}.$$

Por lo tanto, Y es un espacio completamente regular. $\square$

Corolario 4.4.4 *Si $SP_n(X)$ es completamente regular, entonces X es completamente regular.*

Demostración. Por el Teorema 2.2.1 se sigue que X es homeomorfo a un subespacio de $SP_n(X)$, por el Teorema 4.4.2 se sigue que dicho subespacio es completamente regular. Por la Proposición 4.4.3 se concluye que X es un espacio completamente regular. $\square$

Notacioń 4.4.5 Dados $\epsilon > 0$ y $x \in [0,1]$, denotaremos mediante $B_\epsilon(x)$ al conjunto $\{y \in [0,1] \mid |x-y| < \epsilon\} \subseteq [0,1]$.

Proposición 4.4.6 *Si $\{f_i\}_{i=1}^n$ es una familia de funciones continuas de un espacio X en el intervalo $[0,1]$, entonces la función $F\colon X^n \to [0,1]$ definida como $F(x) = min\{f_i(x)|\ i \in \{1,2,3,\ldots,n\}\}$ es continua.*

Demostración. Sean $y \in X^n$, $\epsilon > 0$ y $x \in F^{-1}(B_\epsilon(F(y)))$. Entonces $F(x) \in B_\epsilon(F(y)) \subseteq [0,1]$, consideremos el conjunto $\Omega \subseteq \{1,2,3,\ldots,n\}$ definido como

$$\Omega = \{i \in \{1,2,3,\ldots,n\}|\ f_i(y) = F(y)\}.$$

Notamos que $\Omega \neq \emptyset$ debido a que para toda $z \in X$, existe $j_z \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ tal que $F(z) = f_{j_z}(z)$. Hagamos

$$\delta_0 = (1/2)min\{|f_i(y) - f_j(y)| \mid i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\} \text{ y } f_i(y) \neq f_j(y)\}.$$

Se sigue que si $f_i(y) \neq f_j(y)$, entonces $B_{\delta_0}(f_i(y)) \cap B_{\delta_0}(f_j(y)) = \emptyset$. Llamemos $\delta = min\{\delta_0, \epsilon\}$, debido a que para toda $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ las funciones f_i son continuas tenemos que existen $U_1, U_2, \ldots, U_n \subseteq X$ abiertos tales que $y \in \bigcap_{i=1}^n U_i$, $f_i(U_i) \subseteq B_\delta(f_i(y))$; y además si $f_i(y) = f_j(y)$, entonces $U_i = U_j$. Probemos ahora que $\bigcap_{i=1} U_i \subseteq F^{-1}(B_\epsilon(F(y)))$, para esto tomemos $z \in \bigcap_{i=1} U_i$, entonces para toda $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$,

$$f_i(z) \in B_\delta(f_i(y)) \subseteq B_{\delta_0}(f_i(y)).$$

Notamos que si $i \in \Omega$, entonces para toda $j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\} \setminus \Omega$ y para todo $w \in B_\delta(f_j(y))$, $f_i(z) < w$. Así, para toda $w \in \bigcap_{i=1} U_i$, existe $i_w \in \Omega$ tal que $f_{i_w}(w) = F(w)$, y como $f_i(U_i) \subseteq B_\delta(f_i(y)) = \bigcap_{i \in \Omega} B_\delta(f_i(y))$,

$$F(\bigcap_{i=1}^n U_i) \subseteq \bigcap_{i \in \Omega} B_\delta(f_i(y)) \subseteq B_\epsilon(F(y)),$$

o lo que es lo mismo,

$$\bigcap_{i=1}^n U_i \subseteq F^{-1}(B_\epsilon(F(y))).$$

Debido a que para toda $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, U_i es abierto e intersección finita de abiertos es abierta concluimos que $F^{-1}(B_\epsilon(F(y)))$ es abierto, y por lo tanto, F es una función continua. $\square$

La Proposición 4.4.6 nos servirá para dar la función que separa puntos de cerrados en $SP_n(X)$.

Lema 4.4.7 *Sean X un espacio topológico y $\sigma \in S_n$ una permutación. Entonces la función $f_\sigma \colon X^n \to X^n$ definida como $f_\sigma((x_i)_{i=1}^n) = (x_{\sigma(i)})_{i=1}^n$ es continua.*

Demostración. Veamos que f_σ es continua, para esto consideremos $\mathcal{A} \subseteq X^n$ abierto, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\mathcal{A}$ es un abierto básico en X^n, *i.e.*, para toda $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ existe un conjunto abierto $A_i \subseteq X$ tal que

$$\mathcal{A} = \prod_{i=1}^n A_i.$$

Si probamos que $f_\sigma^{-1}(\prod_{i=1}^n A_i) = \prod_{i=1}^n A_{\sigma^{-1}(i)}$ se tendría que $f_\sigma^{-1}(\mathcal{A})$ es abierto y en consecuencia f_σ sería una función continua. Primero probaremos que $f_\sigma^{-1}(\prod_{i=1}^n A_i) \subseteq \prod_{i=1}^n A_{\sigma^{-1}(i)}$, para esto sea $(x_i)_{i=1}^n \in f_\sigma^{-1}(\prod_{i=1}^n A_i)$. Entonces

$$f_\sigma((x_i)) = (x_{\sigma(i)})_{i=1}^n \in \prod_{i=1}^n A_i,$$

lo cual sucede si y solamente si para cualquier $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, se tiene que $x_i \in A_{\sigma^{-1}(i)}$. De esto último concluimos que $(x_i)_{i=1}^n \in \prod_{i=1}^n A_{\sigma^{-1}(i)}$, por lo que

$$f_\sigma^{-1}(\prod_{i=1}^n A_i) \subseteq \prod_{i=1}^n A_{\sigma^{-1}(i)}.$$

Probemos ahora que $\prod_{i=1}^n A_{\sigma^{-1}(i)} \subseteq f_\sigma^{-1}(\prod_{i=1}^n A_i)$, tomemos un punto $(x_i)_{i=1}^n \in \prod_{i=1}^n A_{\sigma^{-1}(i)}$. Entonces para toda $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $x_i \in A_{\sigma^{-1}(i)}$, lo cual implica que $x_{\sigma(i)} \in A_i$, o de manera equivalente,

$$(x_{\sigma(i)})_{i=1}^n \in \prod_{i=1}^n A_i.$$

Como $(x_{\sigma(i)})_{i=1}^n = f_\sigma((x_i)_{i=1}^n)$ se tiene que $f_\sigma((x_i)_{i=1}^n) \in \prod_{i=1}^n A_i$, y en consecuencia, $(x_i)_{i=1}^n \in f_\sigma^{-1}(\prod_{i=1}^n A_i)$, por lo que

$$\prod_{i=1}^n A_{\sigma^{-1}(i)} \subseteq f_\sigma^{-1}(\prod_{i=1}^n A_i).$$

Luego, $\prod_{i=1}^n A_{\sigma^{-1}(i)} = f_\sigma^{-1}(\prod_{i=1}^n A_i)$, así tenemos que la imagen inversa de abiertos es abierta, y por lo tanto, la función f_σ es continua. $\square$

Teorema 4.4.8 *Si X es $T_{3_{1/2}}$, entonces $SP_n(X)$ es $T_{3_{1/2}}$.*

Demostración. Como X es $T_{3_{1/2}}$, tenemos que X^n también lo es, sean $[(x_i)]_{i=1}^n \in SP_n(X)$ y $[A]$ un cerrado tal que $[(x_i)]_{i=1}^n \notin [A]$. Entonces para toda $\sigma \in S_n$, $(x_{\sigma(i)})_{i=1}^n) \notin \mathbb{P}_n^{-1}([A])$. Así, como X^n es $T_{3_{1/2}}$ tenemos que existe una función continua $F\colon X^n \to [0, 1]$ tal que

$$F((x_i)_{i=1}^n) = 0 \text{ y } F(\mathbb{P}_n^{-1}([A]) \subseteq \{1\}.$$

Consideremos la función $\mathcal{F}\colon X^n \to [0, 1]$ definida como

$$\mathcal{F}((x_i)_{i=1}^n) = \text{mín}\{F((x_{\sigma(i)})_{i=1}^n) | \ \sigma \in S_n\},$$

notamos que $\mathcal{F}$ es una función tal que $\mathcal{F}(\{(x_{\sigma(i)})_{i=1}^{n}|\ \sigma \in S_n\}) \subseteq \{0\}$ y $\mathcal{F}(\mathbb{P}_n^{-1}([A]) \subseteq \{1\}$. Definamos para toda $\sigma \in S_n$ la función $g_\sigma \colon X^n \to X^n$, como $g_\sigma((y_i)_{i=1}^{n}) = (y_{\sigma(i)})_{i=1}^{n}$, se sigue que si $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ es una familia de conjuntos abiertos de X, entonces

$$g_\sigma^{-1}(\prod_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} A_{\sigma^{-1}(i)}.$$

Por lo que para cualquier $\sigma \in S_n$, g_σ es una función continua, pues g_σ es continua por el Lema 4.4.7. Notamos que

$$\mathcal{F}((x_i)_{i=1}^{n}) = \text{mín}\{F \circ g_\sigma((x_i)_{i=1}^{n})|\ \sigma \in S_n\},$$

y debido a que para toda $\sigma \in S_n$, g_σ es continua, se sigue de la Proposición 4.4.6 que $\mathcal{F}$ es continua, pues F también es continua. Ahora tomemos $\alpha \in S_n$, entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{F}((x_{\alpha(i)})_{i=1}^{n}) &= min\{F((x_{\sigma(\alpha(i))})_{i=1}^{n})|\ \sigma \in S_n\} \\ &= min\{F((x_{\sigma(i)})_{i=1}^{n})|\ \sigma \in S_n\} \\ &= \mathcal{F}((x_i)_{i=1}^{n}),\end{aligned} \tag{4.1}$$

por lo que $\mathcal{F}$ es una función constante sobre las fibras de $\mathbb{P}_n$. Debido a que $\mathcal{F}$ es una función continua y constante sobre las fibras de $\mathbb{P}_n$, se tiene del Lema de Trangresión que $\mathcal{F} \circ \mathbb{P}_n^{-1} \colon SP_n(X) \to [0,1]$ es una función continua. Como $\mathcal{F}(\{(x_{\sigma(i)})_{i=1}^{n}|\ \sigma \in S_n\}) \subseteq \{0\}$ y $\mathcal{F}(\mathbb{P}_n^{-1}([A]) \subseteq \{1\}$, se sigue que

$$\mathcal{F} \circ \mathbb{P}_n^{-1}([(x_i)]_{i=1}^{n} = 0 \text{ y } \mathcal{F} \circ \mathbb{P}_n^{-1}([A]) \subseteq \{1\}.$$

Por lo que $\mathcal{F} \circ \mathbb{P}_n^{-1}$ separa a $[(x_i)]_{i=1}^{n}$ y $[A]$, y además, como X es T_2, $SP_n(X)$ es T_2. Por lo tanto, $SP_n(X)$ es $T_{3_{1/2}}$. □

Corolario 4.4.9 *X^n es $T_{3_{1/2}}$ si y solamente si $S_n(X)$ es $T_{3_{1/2}}$.*

Demostración. Por el Corolario 4.4.4 y por el Teorema 4.4.8 se sigue que $SP_n(X)$ es $T_{3_{1/2}}$ si y solamente si X es $T_{3_{1/2}}$. Por otro lado, del Teorema 4.4.2 se sigue que X es $T_{3_{1/2}}$ si y sólo si X^n es $T_{3_{1/2}}$. De lo anterior junto con que X^n es T_2 si y sólo si $SP_n(X)$ también lo es se concluye el resultado. □

4.5. T_4

El axioma T_4 separa conjuntos cerrados de conjuntos cerrados.

Definición 4.5.1 Decimos que un espacio Hausdorff X es $\boldsymbol{T_4}$ o **normal** si para cualquier par de conjuntos cerrados ajenos $A, B \subseteq X$, se tiene que existen dos conjuntos abiertos ajenos $U, V \subseteq X$ tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$.

La prueba de la siguiente proposición se encuentra en [9].

Proposición 4.5.2 *i) Si X es normal y $A \subseteq X$ es cerrado, entonces A es normal.*

ii) Sean X y Y espacios topológicos y $f\colon X \to Y$ una función tales que X es normal y f es continua, cerrada y suprayectiva. Entonces Y es normal

A diferencia de los anteriores axiomas de separación, tenemos que existe un espacio normal X y un natural n tales que $SP_n(X)$ no es normal. Para ver esto definamos el siguiente espacio:

Definición 4.5.3 Consideremos el conjunto $S = \{[a,b) \subseteq \mathbb{R}^n |\ a < b\}$, y llamemos $\mathbf{S}$ a la topología generada por S. Definimos la recta de Sorgenfrey como el espacio topológico (X, τ) donde X es la recta real y $\tau = \mathbf{S}$.

Notemos que si $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $a < b$, entonces $(a,b) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} [a - 1/i, b)$. Esto sucede ya que $(a,b) \subseteq [a - 1/i, b)$ para $i \in \mathbb{N}$, y además si $x \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} [a - 1/i, b)$, entonces para toda $i \in \mathbb{N}$, $x > a - i/b$, luego, $a \leq x$, por lo que $x \in (a,b)$, y en consecuencia

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} [a - 1/i, b) \subseteq (a,b).$$

Concluimos que los intervalos abiertos $(a,b) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} [a - 1/i, b)$ son elementos de la topología de la recta de Sorgenfrey. Así la topología usual de $\mathbb{R}$ está contenida en $\mathbf{S}$, más aún, la topología usual de $\mathbb{R}^n$ está contenida en $\mathbf{S}^n$.

Lema 4.5.4 *La recta de Sorgenfrey es normal.*

Demostración. Para ver que la recta de Sorgenfrey es normal se tiene que demostrar que la recta es un espacio Hausdorff y que se pueden separar cerrados ajenos con abiertos ajenos, cosas que probaremos en ese mismo orden. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ dos puntos tales que $a \neq b$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a < b$, entonces

$$(a - (|b-a|/2), a + (|b-a|/2)) \cap (b - (|b-a|/2), b + (|b-a|/2)) = \emptyset,$$

y además

$$a \in (a - (|b-a|/2), a + (|b-a|/2)) \text{ y } b \in (b - (|b-a|/2), b + (|b-a|/2)).$$

Así, debido a que

$$(a - (|b-a|/2), a + (|b-a|/2)), (b - (|b-a|/2), b + (|b-a|/2)) \in \mathbf{S}$$

se concluye que la recta de Sorgenfrey es Hausdorff.

Veamos ahora que es normal, para esto sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ dos conjuntos cerrados ajenos. Entonces para toda $a \in A \setminus B$, existe $U_a \in \mathbf{S}$ tal que

$$a \in U_a \subseteq \mathbb{R} \setminus B.$$

Podemos suponer que para cada a existe x_a tal que $U_a = [a, x_a)$. De manera análoga tenemos que para todo $b \in B$ existe un número $y_b \in \mathbb{R}$ tal que

$$b \in [b, y_b) = V_b \subseteq \mathbb{R} \backslash A.$$

Consideremos

$$U = \bigcup_{a \in A} U_a \text{ y } V = \bigcup_{b \in B} V_b,$$

se sigue que U y V son abiertos tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$, por lo que sólo nos falta verificar que U y V son ajenos, lo cual haremos por contradicción. Si $z \in U \cap V$, entonces existen $a' \in A$ y $b' \in B$ tal que $U_{a'} \cap V_{b'} \neq \emptyset$, o lo que es lo mismo,

$$[a, x_a) \cap [b, y_b) \neq \emptyset.$$

Esto último sucede si y solamente si $a \in [b, y_b)$ o $b \in [a, x_a)$, lo cual es una contradicción por la elección de $U_{a'}$ y $V_{b'}$, por lo que U y V son ajenos. En conclusión tenemos que la recta de Sorgenfrey es normal. □

Veamos que $SP_2(X)$ no es normal, donde X es la recta de Sorgenfrey. Para el cual haremos uso de el Lema de Jones, cuya prueba puede encontrarse en [6].

Lema 4.5.5 ***(Jones)*** *Sean X es un espacio Hausdorff, $D \subseteq X$ un conjunto denso y $S \subseteq X$ discreto. Si $|D| \leq |S|$, entonces X no es normal.*

Si X es la recta de Sorgenfrey, notamos que $\mathbb{Q}$ es denso X, eso se debe a que si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$, entonces como $\mathbb{Q}$ es denso con la topología usual en $\mathbb{R}$ se sigue que existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q \in (a, b) \subseteq [a, b)$, de lo anterior se sigue $\mathbb{Q}$ es denso en la recta de Sorgenfrey. Por lo que $\mathbb{P}_2(\mathbb{Q}^2)$ es denso en $SP_2(X)$. Además, debido a que $|\mathbb{P}_2^{-1}[(x_1, x_2)]| \leq 2$, se sigue que $\mathbb{P}_2(\mathbb{Q}^2)$ es infinito.

Definimos el plano de Sorgenfrey como el conjunto $\mathbb{R}^2$ dotado con la topología $\mathbf{S}^2$, es decir, es el espacio producto de la recta de Sorgenfrey con ella misma.

Proposición 4.5.6 *Si X es la recta de Sorgenfrey, entonces $SP_2(X)$ tiene un conjunto cerrado, discreto y no numerable.*

Demostración. Consideremos el conjunto

$$[\Gamma] = \{[(x_1, x_2)] \in SP_2(X) |\ x_1 = -x_2\}$$

y veamos que es un conjunto cerrado, discreto y no numerable. Notamos que $[\Gamma] = \mathbb{P}_2(\Gamma)$, donde $\Gamma = \{(x_1, x_2) \in X^2 |\ x_1 = -x_2\}$. Veamos que $[\Gamma]$ es un conjunto cerradoa, para esto concideremos la función $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $F(x, y) = x + y$. Debido a que F es continua con la topología usual de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ (esto por nuestros cursos de cálculo), y además, como la topología usual de $\mathbb{R}^2$ esta contenida en la topología $\mathbf{S}^2$ se sigue que F es continua con la topología del plano de Sorgenfrey. Como

$$\Gamma = F^{-1}(\{0\})$$

se sigue que Γ es cerrado en el plano, y así, como la función $\mathbb{P}_2$ es cerrada, $[\Gamma]$ es cerrado. Ahora veamos que $[\Gamma]$ es discreto, tomemos pues $x \in \mathbb{R}$. Entonces $[x, x+1) \times [-x, -x+1)$ es un abierto que tiene a $(x, -x)$; notamos que

$$\text{si } y \in [x, x+1), \text{ entonces } -y \notin [-x, -x+1)$$

y

$$\text{si } y \in [-x, -x+1), \text{ entonces } y \notin [x, x+1).$$

Por lo que $\Delta \cap [x, x+1) \times [-x, -x+1) = \{(x, -x)\}$, y así, Γ es discreto. Luego, $[\Gamma]$ es discreto pues es la imagen de un conjunto discreto a través de una función abierta y cerrada. Finalmente, debido a que $|\mathbb{P}_n^{-1}([(x_1, x_2)])| \leq 2$ se tiene que

$$|[\Gamma]| = |\Gamma| = |\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|.$$

Concluimos que $[\Gamma]$ es un subconjunto cerrado, discreto y no numerable de $SP_2(X)$. $\square$

Proposición 4.5.7 *Si X es la recta de Sorgenfrey, entonces $SP_2(X)$ no es normal.*

Demostración. Sabemos que $\mathbb{P}_2(\mathbb{Q}^2)$ es un denso numerable de $SP_2(X)$. Por la Proposición 4.5.6 tenemos que $[\Gamma]$ es un subespacio cerrado, discreto y no numerable de $SP_2(X)$. Así, por el Lema 4.5.5 concluimos que $SP_2(X)$ no es normal. □

Proposición 4.5.8 *Sea X un espacio Hausdorff tal que X^n es normal. Entonces $SP_n(X)$ es normal.*

Demostración. Se sigue de la Proposición 4.5.2, ya que la función $\mathbb{P}_n$ es continua, cerrada y sobreyectiva. □

También tenemos que:

Teorema 4.5.9 *Si $SP_n(X)$ es normal, entonces X es normal.*

Demostración. Por el Corolario 4.2.9 se sigue que X se puede encajar como un cerrado en $SP_n(X)$. Y así, de la Proposición 4.5.2 se sigue que X es normal. □

4.6. Metrización

En esta sección hablaremos acerca de metrización, a continuación recordaremos algunas definiciones para seguir el estudio del espacio en cuestión.

Definición 4.6.1 Sea X un conjunto no vacío.

- Decimos que una función $\rho\colon X \times X \to [0, \infty)$ es una **métrica** en X siempre que para cualquiera $x, y, z \in X$ se cumplan las siguientes tres propiedades:

  i) $\rho(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.
  ii) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.
  iii) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (desigualdad del triangulo).

  Un conjunto X dotado de una métrica ρ se le llama **espacio métrico** y se denotará como (X, ρ).

- Sean (X, ρ) un espacio métrico y $x \in X$ y $\epsilon \in (o, \infty)$. Definimos la **bola** de radio ϵ alrededor de x como el conjunto

$$B_\epsilon(x) = \{y \in X|\ \rho(x, y) < \epsilon\} \subseteq X$$

.

Dado que para cualquier $x \in X$, $\rho(x, x) = 0$, se sigue que para toda $\epsilon > 0$ y para cualquier $x \in X$, $x \in B_\epsilon(x)$, y en consecuencia, las bolas son conjuntos no vacíos.

Lema 4.6.2 *Si (X, ρ) es un espacio métrico y ϵ un número mayor que cero, entonces $\overline{B_\epsilon(x)} \subseteq \{y \in X|\ \rho(x, y) \leq \epsilon\}$.*

Demostración. Sea $z \in X \setminus \{y \in X|\ \rho(x, y) \leq \epsilon\}$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$\rho(x, z) = \epsilon + \delta.$$

Consideremos $w \in B_\delta(z)$ y supongamos que $w \in B_\epsilon(x)$. Luego,

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, w) + \rho(w, z) < \epsilon + \delta = \rho(x, z)$$

lo cual es una contradicción, por lo que $B_\epsilon(x) \cap B_\delta(z) = \emptyset$, lo cual implica que $z \notin \overline{B_\epsilon(x)}$. Concluimos que $\overline{B_\epsilon(x)} \subseteq \{y \in X|\ \rho(x, y) \leq \epsilon\}$. □

Proposición 4.6.3 *Sean (X, ρ) un espacio métrico y $x \in X$. Si ϵ_x es un real mayor que cero y $y \in B_{\epsilon_x}(x)$, entonces existe $\epsilon_y \in (0, \infty)$ tal que*

$$B_{\epsilon_y}(y) \subseteq \overline{B_{\epsilon_y}(y)} \subseteq B_{\epsilon_x}(x).$$

Demostración. Sean $x \in X$, $\epsilon_x \in (0, \infty)$ y $y \in B_{\epsilon_x}(x)$. Entonces $\rho(x, y) < \epsilon_x$, tomemos pues $m = \rho(x, z)$ y $\epsilon_y = (min\{m, \epsilon_x - m\})/3$ y probemos que $\overline{B_{\epsilon_y}(y)} \subseteq B_{\epsilon_x}(x)$. Para esto consideremos $z \in \overline{B_{\epsilon_y}(y)}$, así,

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) \leq m + \epsilon_y.$$

De lo anterior se siguen dos casos:

i) Si $\epsilon_y = m/3$, entonces $\epsilon_y < \epsilon_x/2$, como consecuencia

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) \leq m + \epsilon_y = m + (m/3) < \epsilon_x/2 + \epsilon_x/2 = \epsilon_x.$$

Por lo que $y \in B_{\epsilon_x}(x)$.

ii) Si $\epsilon_y = (\epsilon_x - m)/3$, entonces $\epsilon_y < \epsilon_x/2$, luego

$$\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z) \leq m + \epsilon_y = m + (\epsilon_x - m)/3 < \epsilon_x.$$

En consecuencia $y \in B_{\epsilon_x}(x)$.

Por lo tanto, $\overline{B_{\epsilon_y}(y)} \subseteq B_{\epsilon_x}(x)$. □

Es fácil ver que todo espacio métrico es un espacio topológico tomando como base a la familia $\{B_\epsilon(x) |\ x \in X \text{ y } \epsilon > 0\}$ (ya que dicho conjunto cumple con las hipótesis del Lema 1.2.2).

Definición 4.6.4 Sean (X, τ). Decimos que X es **metrizable** si existe una métrica en X tal que la topología generada por la métrica ρ es equivalente a τ.

Para lo que resta del capítulo denotaremos con $B_\epsilon(x), \mathcal{B}_\epsilon((x_i)_{i=1}^n)$ y $\mathfrak{B}_\epsilon([(x_i)]_{i=1}^n)$ las bolas de radio épsilon al rededor de los puntos $x, (x_i)_{i=1}^n$ y $[(x_i)]_{i=1}^n$ en los espacios X, X^n y $SP_n(X)$ respectivamente.

Lema 4.6.5 *Si X es un espacio topológico metrizable, entonces X^n es métrizable.*

Demostración.

Sea ρ una métrica en X tal que genera la topología de X. Consideremos la relación $\delta \colon X^n \times X^n \to (0, \infty)$ definida por

$$\delta((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)) = max\{\rho(x_i, y_i) |\ 0 \leq 1 \leq n\},$$

se sigue de la definición de δ que es función. Nos falta probar que δ es una métrica y que la topología que genera es la del producto X^n. Primero probemos que δ es una métrica, para esto sean $(x_i)_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n, (z_i)_{i=1}^n \in X^n$. Entonces:

i) Supongamos que $\delta((x_i)_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n) = 0$, esto sucede si y solamente si para toda $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $\rho(x_i, y_i) = 0$. Esto último ocurre si y sólo si $(x_i)_{i=1}^n = (y_i)_{i=1}^n$, pues ρ es métrica en X.

ii) Probemos que $\delta((x_i)_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n) = \delta((y_i)_{i=1}^n, (x_i)_{i=1}^n)$. Como ρ es métrica se sigue que para toda $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $\rho(x_i, y_i) = \rho(y_i, x_i)$. Por lo que

$$max\{\rho(x_i, y_i) |\ 0 \leq i \leq n\} = max\{\rho(y_i, x_i) |\ 0 \leq i \leq n\},$$

y así, $\delta((x_i)_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n) = \delta((y_i)_{i=1}^n, (x_i)_{i=1}^n)$.

iii) Probemos ahora la desigualdad del triángulo. Tenemos que existe $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ tal que $\delta((x_i)_{i=1}^n, (z_i)_{i=1}^n) = \rho(x_k, z_k)$, así, $\rho(x_k, z_k) \leq \rho(x_k, y_k) + \rho(y_k, z_k)$. Como

$$\rho(y_k, z_k) \leq \text{máx}\{\rho(y_i, z_i)|\ 0 \leq i \leq n\} = \delta((y_i)_{i=1}^n, (z_i)_{i=1}^n)$$

se sigue $\delta((x_i)_{i=1}^n, (z_i)_{i=1}^n) \leq \delta((x_i)_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n) + \delta((y_i)_{i=1}^n, (z_i)_{i=1}^n)$.

Concluimos que δ es una métrica en X^n. Sean τ_δ la topología que genera la métrica δ y τ_{X^n} la topología producto de X^n, probaremos que $\tau_\delta = \tau_{X^n}$. Tomemos $\mathcal{U} \in \tau_{X^n}$ y $(x_i)_{i=1}^n \in \mathcal{U}$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\mathcal{U}$ es un abierto básico, es decir, $\mathcal{U} = \prod_{i=1}^n U_i$ para ciertos abiertos $U_1, U_2, \dots, U_n \subseteq X$, así, para toda $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ existe $\epsilon_i > 0$ tal que

$$B_{\epsilon_i}(x_i) \subseteq U_i.$$

Si $\epsilon = min\{\epsilon_i|\ i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}\}$, entonces $B_\epsilon(x_i) \subseteq U_i$. Probaremos que $\mathfrak{B}_\epsilon((x_i)_{i=1}^n) = \{(y_i)_{i=1}^n|\ \delta((x_i)_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n) < \epsilon\} \subseteq \mathcal{U} \subseteq X^n$. Tomemos $(y_i)_{i=1}^n \in \mathfrak{B}_\epsilon((x_i)_{i=1}^n)$, así, para toda $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, $\rho(x_i, y_i) < \epsilon \leq \epsilon_i$. Por lo que

$$y_i \in B_\epsilon(x_i) \subseteq B_{\epsilon_i}(x_i).$$

Dado que $B_{\epsilon_i}(x_i) \subseteq U_i$, tenemos $(y_i)_{i=1}^n \in \prod_{i=1}^n U_i = \mathcal{U}$, y así, $\mathfrak{B}_\epsilon((x_i)_{i=1}^n) \subseteq \mathcal{U}$. En consecuencia

$$\tau_{X^n} \subseteq \tau_\delta.$$

Ahora veamos que $\tau_\delta \subseteq \tau_{X^n}$, para esto sean $(x_i)_{i=1}^n \in X^n$ y $\epsilon > 0$. Tomemos $(y_i)_{i=1}^n \in \mathfrak{B}_\epsilon((x_i)_{i=1}^n) = \{(z_i)_{i=1}^n|\ \delta((x_i)_{i=1}^n, (z_i)_{i=1}^n) < \epsilon\}$, y para toda $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ consideremos

$$\epsilon_i = \begin{cases} min\{\rho(x_i, y_i), \epsilon - \rho(x_i, y_i)\}/2 & \text{si } x_i \neq y_i \\ \epsilon & \text{si } x_i = y_i \end{cases}.$$

Dado que ρ es una métrica que genera la topología de X tenemos que $B_r(x)$ es un abierto para cualquier r positivo y para cualquier x de X, por lo que si $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, entonces $B_{\epsilon_i}(x_i)$ es abierto. Veamos que $\prod_{i=1}^n B_{\epsilon_i}(y_i) \subseteq \mathfrak{B}_\epsilon((x_i)_{i=1}^n)$, para esto sea $(z_i)_{i=1}^n \in \prod_{i=1}^n B_{\epsilon_i}(y_i)$. Entonces para $i \in \{1, 2, 3, \dots, \}$, $\rho(z_i, y_i) < \epsilon_i$, por lo que

$$\rho(x_i, z_i) \leq \rho(x_i, y_i) + \rho(y_i, z_i) \leq \rho(x_i, y_i) + \epsilon_i.$$

Consideremos $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, se siguen tres casos:

i) Si $x_i = y_i$, entonces

$$\rho(x_i, z_i) \leq \rho(x_i, y_i) + \rho(y_i, z_i) \leq \rho(x_i, y_i) + \epsilon_i = 0 + \epsilon = \epsilon.$$

ii) Si $x_i \neq y_i$ y $\epsilon_i = \rho(x_i, y_i)$, entonces $\rho(x_i, y_i) \leq \epsilon/2$, y así,

$$\rho(x_i, z_i) \leq \rho(x_i, y_i) + \epsilon_i = \rho(x_i, y_i) + \rho(x_i, y_i) \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

iii) Si $x_i \neq y_i$ y $\epsilon_i = \epsilon - \rho(x_i, y_i)$, entonces

$$\rho(x_i, z_i) \leq \rho(x_i, y_i) + \epsilon_i = \rho(x_i, y_i) + \epsilon - \rho(x_i, y_i) = \epsilon.$$

Por lo que $(z_i)_{i=1}^n \in \mathfrak{B}_\epsilon((x_i)_{i=1}^n)$, y en consecuencia $\prod_{i=1}^n B_{\epsilon_i}(y_i) \subseteq \mathfrak{B}_\epsilon((x_i)_{i=1}^n)$. Luego,

$$\tau_\delta \subseteq \tau_{X^n}.$$

Concluimos que $\tau_\delta = \tau_{X^n}$. Por lo tanto, X^n es metrizable. $\square$

Corolario 4.6.6 *Sea X un espacio topológico. Si ρ es una métrica que genera a la topología de X, entonces*

$$\delta((x_i)_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n) = max\{\rho(x_i, y_i) |\ 1 \leq i \leq n\}\}$$

es una métrica que genera la topología producto en X^n.

Demostración. Se sigue de la demostración del Lema 4.6.5. $\square$

Probaremos el resultado importante de esta sección, el cual es la relación de metrizabilidad que hay entre X y $SP_n(X)$.

Teorema 4.6.7 *Sea X un espacio topológico. Entonces X es metrizable si y solamente si $SP_n(X)$ es metrizable.*

Demostración. Primero supongamos que X es metrizable y veamos que $SP_n(X)$ también lo es. Por el Lema 4.6.5 tenemos que X^n es metrizable, tomemos pues ρ una métrica en X^n que genera la topología producto. Definamos $\delta\colon SP_n(X) \times SP_n(X) \to [0, \infty)$ como

$$\delta([(x_i)]_{i=1}^n, [(y_i)]_{i=1}^n) = min\{\rho((x_{\sigma(i)})_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n) |\ \sigma \in S_n\}.$$

Notamos que δ es función, veamos que δ es una métrica para $SP_n(X)$, para esto consideremos $[(x_i)]_{i=1}^n, [(y_i)]_{i=1}^n, [(z_i)]_{i=1}^n \in SP_n(X)$, luego:

i) Se tiene que $\delta([(x_i)]_{i=1}^n, [(y_i)]_{i=1}^n) = 0$ si y solamente si para alguna permutación $\sigma \in S_n$ se tiene que $(x_{\sigma(i)})_{i=1}^n = (y_i)_{i=1}^n$), y esto sucede si y sólo si $[(x_i)]_{i=1}^n = [(y_i)]_{i=1}^n$. Así, $\delta([(x_i)]_{i=1}^n, [(y_i)]_{i=1}^n) = 0$ si y solamente si $[(x_i)]_{i=1}^n = [(y_i)]_{i=1}^n$.

ii) Probemos que $\delta([(x_i)]_{i=1}^n, [(y_i)]_{i=1}^n) = \delta([(y_i)]_{i=1}^n, [(x_i)]_{i=1}^n)$, esto sucede ya que

$$\begin{aligned}\delta([(x_i)]_{i=1}^n, [(y_i)]_{i=1}^n) &= min\{\rho((x_{\sigma(i)})_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n) |\ \sigma \in S_n\} \\ &= min\{\rho((x_i)_{i=1}^n, (y_{\sigma^{-1}(i)})_{i=1}^n) |\ \sigma \in S_n\} \\ &= min\{\rho((y_{\sigma^{-1}(i)})_{i=1}^n, (x_i)_{i=1}^n) |\ \sigma \in S_n\} \\ &= \delta([(y_i)]_{1\leq i\leq n}, [(x_i)]_{1\leq i\leq n})\end{aligned} \tag{4.2}$$

iii) Probemos ahora la desigualad del triangulo, para esto supongamos que no se cumple, es decir,

$$\delta([(x_i)]_{i=1}^n, [(z_i)]_{i=1}^n) > \delta([(x_i)]_{i=1}^n, [(y_i)]_{i=1}^n) + \delta([(y_i)]_{i=1}^n, [(z_i)]_{i=1}^n).$$

Sabemos que existen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in S_n$ tales que

$$\begin{aligned}\delta([(x_i)]_{i=1}^n, [(y_i)]_{i=1}^n) &= \rho((x_{\sigma_1(i)})_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n) \\ \delta([(y_i)]_{i=1}^n, [(z_i)]_{i=1}^n) &= \rho((y_{\sigma_2(i)})_{i=1}^n, (z_i)_{i=1}^n) \\ \delta([(x_i)]_{i=1}^n, [(z_i)]_{i=1}^n) &= \rho((x_{\sigma_3(i)})_{i=1}^n, (z_i)_{i=1}^n).\end{aligned} \tag{4.3}$$

Así, $\rho((x_{\sigma_3(i)})_{i=1}^n, (z_i)_{i=1}^n) > \rho((x_{\sigma_1(i)})_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n) + \rho((y_{\sigma_2(i)})_{i=1}^n, (z_i)_{i=1}^n)$, y además,

$$\begin{aligned}\rho((x_{\sigma_1(i)})_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n) &= \rho((x_{\sigma_3(i)})_{i=1}^n, (y_{\sigma_3(\sigma_1^{-1}(i))})_{i=1}^n) \\ \rho((y_{\sigma_2(i)})_{i=1}^n, (z_i)_{i=1}^n) &= \rho((y_{\sigma_3(i)})_{i=1}^n, (z_{\sigma_3(\sigma_2^{-1}(i))})_{i=1}^n).\end{aligned} \tag{4.4}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\rho((x_{\sigma_2(\sigma_1(i))}), (z_i)_{i=1}^n) &= \rho((x_{\sigma_3(i)})_{i=1}^n, (z_{\sigma_3(\sigma_1^{-1}(\sigma_2^{-1}(i)))})_{i=1}^n) \\ &\leq \rho((x_{\sigma_3(i)})_{i=1}^n, (y_{\sigma_3(\sigma_1^{-1}(i))})_{i=1}^n) \\ &+ \rho((y_{\sigma_3(\sigma_1^{-1}(i))})_{i=1}^n, (z_{\sigma_3(\sigma_1^{-1}(\sigma_2^{-1}(i)))})_{i=1}^n) \\ &= \rho((x_{\sigma_1(i)})_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n) \\ &+ \rho((y_{\sigma_2(i)})_{i=1}^n, (z_i)_{i=1}^n) \\ &< \rho((x_{\sigma_3(i)})_{i=1}^n, (z_i)_{i=1}^n)\end{aligned} \tag{4.5}$$

lo cual es una contradicción, pues

$$\rho((x_{\sigma_3(i)})_{i=1}^n,(z_i)_{i=1}^n)=min\{(x_{\sigma(i)})_{i=1}^n,(z_i)_{i=1}^n|\ \sigma\in S_n\}.$$

Finalmente se tiene que

$$\delta([(x_i)]_{i=1}^n,[(z_i)]_{i=1}^n)\le\delta([(x_i)]_{i=1}^n,[(y_i)]_{i=1}^n)+\delta([(y_i)]_{i=1}^n,[(z_i)]_{i=1}^n).$$

Concluimos que δ es una métrica, nos falta ahora ver que la métrica genera la topología de $SP_n(X)$, para esto sean $[(x_i)]_{i=1}^n\in SP_n(X)$ y $[A]\subseteq SP_n(X)$ abierto tales que $[(x_i)]_{i=1}^n\in[A]$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $[A]$ es un abierto básico, es decir, existe una familia $\{A_i\}_{i=1}^n$ de abiertos de X tal que $x_i\in A_i$ y $[A]=\mathbb{P}_n(\prod_{i=1}^n A_i)$. Como $\prod_{i=1}^n A_i$ es abierto en X^n existe $\epsilon>0$ tal que

$$(x_i)_{i=1}^n\in\mathcal{B}_\epsilon((x_i)_{i=1}^n)\subseteq\prod_{i=1}^n A_i.$$

Veamos que $\mathfrak{B}_\epsilon([(x_i)]_{i=1}^n)\subseteq[A]$, consideremos $[(y_i)]_{i=1}^n\in\mathfrak{B}_\epsilon([(x_i)]_{i=1}^n)$, así existe $\sigma\in S_n$ tal que $\rho((y_{\sigma(i)})_{i=1}^n,(x_i)_{i=1}^n)<\epsilon$. Luego,

$$(y_{\sigma(i)})_{i=1}^n\in\mathcal{B}_\epsilon((x_i)_{i=1}^n),$$

lo cual implica que $[(y_i)]_{i=1}^n=\mathbb{P}_n((y_i)_{i=1}^n)\in\mathbb{P}_n(\mathcal{B}_\epsilon((x_i)_{i=1}^n))\subseteq[A]$, de aquí tenemos que

$$\mathfrak{B}_\epsilon([(x_i)]_{i=1}^n)\subseteq[A].$$

Probemos ahora que si $[(x_i)]_{i=1}^n\in SP_n(X)$ y $\epsilon>0$, entonces $\mathfrak{B}_\epsilon([(x_i)]_{i=1}^n)$ es abierto en $SP_n(X)$. Sea pues $[(y_i)]_{i=1}^n\in\mathfrak{B}_\epsilon([(x_i)]_{i=1}^n)$. Se sigue que existe $\sigma\in S_n$ tal que $\rho((x_i)_{i=1}^n,(y_{\sigma(i)})_{i=1}^n)<\epsilon$. Debido a que $\mathcal{B}_\epsilon((x_i)_{i=1}^n)$ es abierto en X^n existe una familia de abiertos $\{U_i\}_{i=1}^n$ de X tal que

$$(y_{\sigma(i)})_{i=1}^n\in\prod_{i=1}^n U_i\subseteq\mathcal{B}_\epsilon((x_i)_{i=1}^n).$$

Tomemos ahora $[(z_i)]_{i=1}^n\in\mathbb{P}(\prod_{i=1}^n U_i)$, entonces para alguna $\sigma'\in S_n$ sucede $(z_{\sigma'(i)})_{i=1}^n\in\prod_{i=1}^n U_i\subseteq\mathcal{B}_\epsilon((x_i)_{i=1}^n)$, por lo que

$$\delta([(x_i)]_{i=1}^n,[(z_i)]_{i=1}^n)\le\rho((x_i)_{i=1}^n,(z_{\sigma'(i)})_{i=1}^n)<\epsilon.$$

Luego, $[(z_i)]_{i=1}^n\in\mathfrak{B}_\epsilon([(x_i)]_{i=1}^n)$, y así $\mathbb{P}_n(\prod_{i=1}^n U_i)\subseteq\mathfrak{B}_\epsilon([(x_i)]_{i=1}^n)$, de donde $\mathfrak{B}_\epsilon([(x_i)]_{i=1}^n)$ es abierto. Concluimos que δ es una métrica que genera la topología de $SP_n(X)$, y por lo tanto, $SP_n(X)$ es metrizable.

Probaremos ahora el regreso, esto es, veamos que X es metrizable suponiendo que $SP_n(X)$ lo es. Tomemos $\delta\colon SP_n(X) \times SP_n(X) \to [0, \infty)$ una métrica que genere la topología de $SP_n(X)$ y definamos $\rho\colon X \times X \to [0, \infty)$ como

$$\rho(x, y) = \delta([(x, x, x, \ldots, x)], [(y, y, y, \ldots, y)]).$$

Se sigue que ρ que es función, pues las clases $[(x, x, x, \ldots, x)]$ y $[(y, y, y, \ldots, y)]$ constan de un solo elemento. Probemos ahora que ρ es métrica en X, para esto consideremos $x, y, z \in X$, entonces:

i) Tenemos que $\rho(x, y) = 0$ si y sólo si $\delta([(x, x, x, \ldots, x)], [(y, y, y, \ldots, y)]) = 0$, lo cual sucede si y sólo si $[(x, x, x, \ldots, x)] = [(y, y, y, \ldots, y)]$, y esto sucede si y sólo si $x = y$.

ii) Observamos que

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= \delta([(x, x, x, \ldots, x)], [(y, y, y, \ldots, y)]) \\ &= \delta([(y, y, y, \ldots, y)], [(x, x, x, \ldots, x)]) \\ &= \rho(y, x). \end{aligned} \tag{4.6}$$

iii) Por último nos queda probar la desigualdad del triángulo, tenemos que

$$\begin{aligned} \rho(x, z) &= \delta([(x, x, x, \ldots, x)], [(z, z, z, \ldots, z)]) \\ &\leq \delta([(x, x, x, \ldots, x)], [(y, y, y, \ldots, y)]) \\ &+ \delta([(y, y, y, \ldots, y)], [(z, z, z, \ldots, z)]) \\ &= \rho(x, y) + \rho(y, z). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Concluimos que ρ es una métrica en X, probemos ahora que ρ genera la topología de X. Consideremos $x \in X$ y $A \subseteq X$ un abierto tal que $x \in A$, entonces existe $\epsilon > 0$ que cumple con

$$\mathfrak{B}_\epsilon([(x, x, x, \ldots, x)]) \subseteq \mathbb{P}_n[A^n].$$

Ahora, si $y \in B_\epsilon(x)$, entonces $\rho(x, y) = \delta([(x, x, x, \ldots, x)], [(y, y, y, \ldots, y)]) < \epsilon$, lo cual implica que $[(y, y, y, \ldots, y)] \in \mathbb{P}_n[A^n]$, por lo que $y \in A$. De donde se sigue que

$$B_\epsilon(x) \subseteq A.$$

Ahora veamos que las bolas son abiertas en X, para esto sean $x \in X$, $\epsilon > 0$ y $y \in B_\epsilon(x)$. Entonces $\mathfrak{B}_\epsilon([(x, x, x, \ldots, x)])$ es un abierto en $SP_n(X)$ que tiene

como elemento a $[(y,y,y,\dots,y)]$, por lo que existe un abierto $[U] \subseteq SP_n(X)$ tal que
$$[(y,y,y,\dots,y)] \in [U] \subseteq \mathfrak{B}_\epsilon([(x,x,x,\dots,x)]).$$
Podemos suponer que $[U] = \mathbb{P}_n(\prod_{i=1}^n U_i)$ para abiertos $U_1, U_2, \dots, U_n \subseteq X$, Así, para $0 \leq i \leq n$, $y \in U_i$, y además
$$[(y,y,y,\dots,y)] \in \mathbb{P}_n((\bigcap_{i=1}^n U_i)^n) \subseteq [U] \subseteq \mathfrak{B}_\epsilon([(x,x,x,\dots,x)]).$$
Así, si $z \in \bigcap_{i=1}^n U_i$, entonces $\rho(x,z) = \delta([(x,x,x,\dots,x)],[(z,z,z,\dots,z]) < \epsilon$, de donde $z \in B_\epsilon(x)$. Luego, $y \in \bigcap_{i=1}^n U_i \subseteq B_\epsilon(x)$. Así tenemos que las bolas son abiertas, y por lo tanto, la métrica ρ genera la topología de X, *i.e.*, X es metrizable. □

Corolario 4.6.8 *Sea X un espacio topológico. Entonces X^n es metrizable si y solamente si $SP_n(X)$ es metrizable.*

Demostración. Por el Lema 4.6.5 tenemos que X^n es metrizable si y sólo si X es metrizable.Luego, del Teorema 4.6.7 se sigue que X es metrizable si y sólo si $SP_n(X)$ es metrizable. Por lo tanto, X^n es metrizable si y solamente si $SP_n(X)$ es metrizable. □

Capítulo 5
Compacidad

En este capítulo estudiaremos las relaciones de ser compacto, compacto por sucesiones, numerablemente compacto, así como la relación de las compactaciones de X, X^n y $SP_n(X)$.

5.1. Compacto

Definición 5.1.1 Sea X un espacio topológico.

i) Decimos que X es **compacto** si toda cubierta abierta de X admite una subcubierta finita.

ii) Se dice que una colección de conjuntos $\{C_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ de X tiene la **propiedad de la intersección finita** si para toda $\{\alpha_i\}_{i=1}^n \subseteq \Gamma$, $\bigcap_{i=1}^n C_{\alpha_i} \neq \emptyset$.

La prueba de los siguientes teoremas y proposiciones se puede consultar en [3].

Teorema 5.1.2 *i) Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ una familia de espacios topológicos no vacíos. Entonces $\prod_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha$ es compacto si y sólo si X_α es compacto para toda $\alpha \in \Gamma$.*

ii) Sea X un espacio topológico compacto. Si $A \subseteq X$ cerrado, entonces A es compacto.

Teorema 5.1.3 *i) La imagen continua de un conjunto compacto es compacto.*

ii) Sean X, Y espacios topológicos tales que X es un espacio compacto y Y es un espacio T_2. Si $f\colon X \to Y$ es una función continua, entonces f es cerrada.

Proposición 5.1.4 *Sea X un espacio Hausdorff. Si $A, B \subseteq X$ son compactos tales que $A \cap B \neq \emptyset$, entonces existen abiertos $U, V \subseteq X$ que cumplen con $A \subseteq U, B \subseteq V$ y $V \cap U = \emptyset$.*

Teorema 5.1.5 *Sea X un espacio topológico. Entonces X es compacto si y sólo si SP_n es compacto.*

Demostración. Supongamos que X es compacto y veamos que $SP_n(X)$ también lo es. Como X es compacto se tiene de el Teorema 5.1.2 que X^n es compacto. Además, debido a que el espacio $SP_n(X)$ es la imagen continua de un compacto, el Teorema 5.1.3 nos dice que $SP_n(X)$ es compacto.

Ahora supongamos que $SP_n(X)$ es un espacio compacto y probemos que X también lo es, sea pues $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ una cubierta abierta de X. Definamos

$$\mathbb{A} = \{\mathbb{P}_n[\prod_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}]|\ i \in \{1, 2, 3, .., n\},\ \alpha_i \in \Gamma\}.$$

Notamos que los elementos de $\mathbb{A}$ son abiertos, veamos ahora que $\mathbb{A}$ es cubierta de $SP_n(X)$, tomemos pues $[(x_i)]_{i=1}^n \in SP_n(X)$, entonces para toda $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ existe $\alpha_i \in \Gamma$ tal que $x_i \in U_{\alpha_i}$, así

$$[(x_i)]_{i=1}^n \in \mathbb{P}_n[\prod_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}] \in \mathbb{A}.$$

Por lo que $\mathbb{A}$ es cubierta abierta de $SP_n(X)$. Como $SP_n(X)$ es compacto existe $\Lambda \subseteq \Gamma$ finito tal que

$$\{\mathbb{P}_n[\prod_{i=1}^{n} A_i]|\ i \in \{1, 2, 3, .., n\},\ \alpha_i \in \Lambda\}$$

es una subcubierta finita de $\mathbb{A}$. Veamos que $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una subcubierta finita de $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$, para esto sea $x \in X$. Entonces hay $\{\alpha_i\}_{i=1}^n \subseteq \Lambda$ tal que $[(x, x, x, \ldots, x)] \in \mathbb{P}_n(\prod_{i=1}^n U_{\alpha_i})$, ya que $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es subcubierta finita de $SP_n(X)$. así, si $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, entonces

$$x \in U_{\alpha_i}.$$

Por lo que $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es subcubierta finita de $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$, y en conclusión, X es compacto. $\square$

Corolario 5.1.6 *X^n es compacto si y solamente si $SP_n(X)$ es compacto.*

Demostración. Por el teorema anterior tenemos que $SP_n(X)$ es compacto si y solamente si X es compacto, y de Teorema 5.1.2 tenemos que X es compacto si y solamente si X^n es compacto. □

Corolario 5.1.7 *$A \subseteq X^n$ es compacto si y solamente si $\mathbb{P}_n(A)$ es compacto*

Demostración. Se sigue de la demostración del teorema anterior. □

5.2. Compacidad secuencial

La compacidad secuencia no se define con cubiertas abiertas sino con sucesiones, aunque la compacidad y la compacidad secuencial llegan a ser equivalentes en cierto tipo de espacios (como los espacios métricos).

Definición 5.2.1 Sean X un espacio topológico y $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de puntos de X. Entonces

i) Si $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ es una sucesión creciente de naturales, entonces la sucesión $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ definida como $y_i = x_{n_i}$ es llamada **subsucesión** de $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.

ii) Decimos que la sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ **converge a** $\boldsymbol{x}$ ($x_n \to x$) si y sólo si para todo abierto $U \subseteq X$ tal que $x \in U$ se tiene que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_m \in U$ siempre que $N \leq m$

Definición 5.2.2 Sea X un espacio topológico.

i) Se dice que X es **secuencialmente compacto** si y sólo si para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ existe una subsucesión que converge en X.

ii) Si $A \subseteq X$ decimos que x es **punto de acumulación** de A si para cualquier abierto $U \subseteq X$ tal que $x \in U$, existe $a \in A \cap U$ tal que $a \neq x$.

Lema 5.2.3 *Sea X un espacio primero numerable. Dada una sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que todo elemento se repite a lo más una cantidad finita de veces. Entonces $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente si y solamente si existe un punto de acumulación de la sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.*

Demostración. Sea $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión que tiene como punto de acumulación a x_0 y que todo elemento se repite a lo más una cantidad finita de veces. Consideremos pues $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una base local numerable de x_0, construiremos recursivamente la subsucesión $\{x_{n(i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ como sigue:

i) Para $i = 1$ tomemos el primer natural $n(1) \in \mathbb{N}$ de tal manera que $x_{n(1)} \in U_1$.

ii) Suponiendo que ya se tomo $n(k)$, definiremos $n(k+1)$ como el primer natural tal que

$$x_{n(k+1)} \in \bigcap_{i=1}^{k+1} U_i \text{ y } n(k+1) > n(k)$$

.

De la elección de $\{x_{n(i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$, se tiene que si A es vecindad de x_0, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_0 \in U_k \subseteq A,$$

y como $\bigcap_{i=1}^{r} U_i \subseteq U_k$ cuando $k < r$, se sigue que para toda $r > k$, $x_r \in A$. Pero esto es que $\{x_{n(i)}\}_{i\in\mathbb{B}}$ converja a x_0.

Probemos ahora el regreso, sean $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión y $\{x_{n(i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ una subsucesión que converge a x_0. Veremos que x_0 es punto de acumulación de $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, para esto tomemos $U \subseteq X$ tal que $x_0 \in U$, debido a que $\{x_{n(i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a x_0 entonces hay $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $m > N$,

$$x_{n(m)} \in U.$$

Más aún, como los puntos de la sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ solo se repiten una cantidad finita de veces podemos suponer que si $m > N$, entonces $x_{n(m)} \neq x_0$. En consecuencia tenemos que

$$\emptyset \neq (\{x_{n(i)}\}_{i\in\mathbb{N}} \cap U) \setminus \{x_0\} \subseteq (\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \cap U) \setminus \{x_0\}.$$

Por lo tanto, x_0 es punto de acumulación de $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. $\square$

El siguiente lema así como su demostración se pueden encontrar en [2].

Lema 5.2.4 *Sea X un espacio topológico. Si $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq X$ es una sucesión que converge a x, entonces toda subsucesión $\{x_{n(i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge x.*

Proposición 5.2.5 *Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ espacios topológicos. Entonces $\prod_{i=1}^n X_i$ es secuencialmente compacto si y sólo si para todo $i \in \{1,2,3,..,n\}$, X_i es secuencialmente compacto.*

Demostración. Supongamos que $\prod_{i=1}^n X_i$ es secuencialmente compacto, sean $k \in \{1,2,3,\ldots,n\}$ y $\{x_k^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X_k. Para toda $i \in \{1,2,3,\ldots,n\} \setminus \{k\}$ tomemos $a_i \in X_i$, se sigue que

$$\{(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, x_k^i, a_{k+1}, .., a_n)\}_{i\in\mathbb{N}}$$

es una sucesión en $\prod_{i=1}^n X_i$. Como $\prod_{i=1}^n X_i$ es secuencialmente compacto tenemos que existe una subsucesión

$$\{(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, x_k^{n(i)}, a_{k+1}, .., a_n)\}_{i\in\mathbb{N}}$$

tal que converge a $(b_i)_{i=1}^n \in \prod_{i=1}^n X_i$. Veamos que la subsucesión

$$\{x_k^{m(i)}\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq X_k$$

converge a b_k. Sea un abierto $U_k \subseteq X_k$ tal que $b_k \in U_k$. Para todo $i \in \{1,2,\ldots,n\}\setminus\{k\}$ consideremos $U_i = X_i$. Debido a que $\prod_{i=1}^n U_i$ es un abierto en $\prod_{i=1}^n X_i$ que tiene a $(b_i)_{i=1}^n$, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que si $j > r$, entonces

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, x_k^{m(j)}, a_{k+1}, .., a_n) \in \prod_{i=1}^n U_i.$$

Así, si $j > r$, entonces $x_k^{m(i)} \in U_k$. Concluimos que $\{x_k^{m(j)}\}_{j\in\mathbb{N}} \to b_k$, y por lo tanto, X_k es secuencialmente compacto.

Supongamos ahora que para toda $j \in \{1,2,3,\ldots,n\}$, X_j es secuencialmente compacto y sea $\{(x_1^i, x_2^i, \ldots, x_n^i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\prod_{j=1}^n X_j$. Dado que X_1 es secuencialmente compacto y que $\{x_1^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X_1 existe $\Lambda_1 \subseteq \mathbb{N}$ tal que la subsucesión $\{x_1^i\}_{i\in\Lambda}$ converge a x_1^0. Ahora, como X_2 es secuencialmente compacto y como $\{x_2^i\}_{i\in\Lambda_1}$ es una sucesión en X_2 se tiene que hay $\Lambda_2 \subseteq \Lambda_1 \subseteq \mathbb{N}$ tal que la subsucesión $\{x_2^i\}_{i\in\Lambda_2}$ converge a x_2^0. Siguiendo de esta manera obtenemos que para toda $i \in \{1,2,3,\ldots,n\}$ existen $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n \subseteq \mathbb{N}$ y $(x_j^0)_{j=1}^n \in \prod_{j=1}^n X_j$ tales que

$$\Lambda_n \subseteq \Lambda_{n-1} \subseteq \ldots. \subseteq \Lambda_1,$$

y además si $j \in \{1,2,3,\ldots,n\}$, entonces $\{x_j^i\}_{i\in\Lambda_j}$ converge a x_j^0. Así, por el Lema 5.2.4 tenemos que para $j \in \{1,2,3,\ldots,n\}$, la subsucesión $\{x_j^i\}_{i\in\Lambda_n}$

converge a x_j^0. Veamos ahora que $\{(x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i)\}_{i\in\Lambda_n}$ converge al punto $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$. Sea pues un abierto $\mathcal{U} \subseteq \prod_{i=1}^n X_i$ tal que $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{U}$. Supongamos que $\mathcal{U}$ es un abierto básico, es decir, para toda $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ existe un abierto $U_i \subseteq X_i$ tal que $\mathcal{U} = \prod_{i=1}^n U_i$. Dado que $x_j \in U_j$ y a que $\{x_j^i\}_{i\in\Lambda_n} \to x_j$, se tiene que para toda $j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ existe $N_j \in \mathbb{N}$ tal que si $N_j \leq m_j$, entonces $x_j^{m_j} \in U_j$. Tomemos pues

$$N = max\{N_j | 1 \leq j \leq n\},$$

se sigue que para $1 \leq j \leq n$ y para $m \geq N$, $x_j^m \in U_j$. Así, si $m \geq N$, entonces $(x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m) \in \prod_{i=1}^n U_i = \mathcal{U}$, y en consecuencia, $\{(x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$. Por lo tanto, $\prod_{i=1}^n X_i$ es secuencialmente compacto. $\square$

La prueba de la siguiente proposición puede encontrarse en [3].

Proposición 5.2.6 *Sea X un espacio topológico primero numerable y T_1. Si $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X tal que $x_i \to x$ y $x_i \to y$, entonces $x = y$.*

Teorema 5.2.7 *Sea X un espacio topológico T_1 y primero numerable. Entonces X es secuencialmente compacto si y sólo si $SP_n(X)$ es secuencialmente compacto.*

Demostración. Supongamos que X es un espacio secuencialmente compacto y veamos que $SP_n(X)$ también lo es, sea pues

$$\{[(x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i)]\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq SP_n(X)$$

una sucesión. Observamos que $\{(x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\prod_{i=1}^n X_i$, así al X^n ser secuecialmente compacto existe una subsucesión

$$\{(x_1^{m(i)}, x_2^{m(i)}, \dots, x_n^{m(i)})\}_{i\in\mathbb{N}}$$

convergente. Supongamos que la subsucesión converge a $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y probemos que

$$\{[(x_1^{m(i)}, x_2^{m(i)}, \dots, x_n^{m(i)})]\}_{i\in\mathbb{N}} \to [(x_1, x_2, \dots, x_n)] = \mathbb{P}_n((x_1, x_2, \dots, x_n)).$$

Consideremos $\mathcal{U} \subseteq SP_n(X)$ un abierto tal que $[(x_1, x_2, \dots, x_n)] \in \mathcal{U}$, podemos suponer que $\mathcal{U} = \mathbb{P}_n[\prod_{i=1}^n U_i]$, donde para toda $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, $U_i \subseteq X$ es abierto. Así, existe $\sigma \in S_n$ tal que $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n U_{\sigma(i)}$.

Como $\{(x_1^i, x_2^i, \ldots, x_n^i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ es convergente, se sigue que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m(j) > m(N)$, entonces

$$(x_1^{m(j)}, x_2^{m(j)} \ldots, x_n^{m(j)}) \in \prod_{i=1}^{n} U_{\sigma(i)},$$

de donde

$$[(x_1^{m(j)}, x_2^{m(j)}, \ldots, x_n^{m(j)})] \in \mathbb{P}_n[\prod_{i=1}^{n} U_i] = \mathbb{P}_n[\prod_{i=1}^{n} U_{\sigma(i)}] = \mathcal{U}.$$

Por lo que $\{[(x_1^i, x_2^i, \ldots, x_n^i)]\}_{i\in\Lambda} \to [(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$. Por lo tanto, $SP_n(X)$ es secuencialmente compacto.

Veamos ahora el regreso, para esto supongamos que $SP_n(X)$ es secuencialmente compacto y demostremos que X también lo es, sea pues $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Entonces

$$\{[(x_i, x_i, \ldots, x_i)]\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq SP_n(X)$$

es una sucesión, y debido a que $SP_n(X)$ es secuencialmente compacto existe $\{[(x_{m(i)}, x_{m(i)}, \ldots, x_{m(i)})]\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \{[(x_i, x_i, \ldots, x_i)]\}_{i\in\mathbb{N}}$ subsucesión tal que

$$\{[(x_{m(i)}, x_{m(i)}, \ldots, x_{m(i)})]\}_{i\in\mathbb{N}} \to [(y_1, y_2, \ldots, y_n)]$$

para algún $[(y_1, y_2, \ldots, y_n)] \in SP_n(X)$. Veamos ahora que $\{x_{m(i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a y_1, para esto consideremos $U_1 \subseteq X$ un abierto tal que $y_1 \in U_1$. Para toda $i \in \{2, 3, 4, \ldots, n\}$ definamos $U_i = X$, se sigue que $\prod_{i=1}^{n} U_i$ es un abierto que tiene al punto $(y_1, y_2, \ldots., y_n)$, así

$$[(y_1, y_2, \ldots., y_n)] \in \mathbb{P}_n(\prod_{i=1}^{n} U_i).$$

Dado que $\mathbb{P}_n(\prod_{i=1}^{n} U_i)$ es abierto y $\{[(x_{m(i)}, x_{m(i)}, \ldots, x_{m(i)})]\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a $[(y_1, y_2, \ldots, y_n)]$, tenemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $k > N$, $[(x_{m(k)}, x_{m(k)}, \ldots, x_{m(k)})] \in \mathbb{P}_n(\prod_{i=1}^{n} U_i)$. Luego,

$$(x_{m(k)}, x_{m(k)}, \ldots, x_{m(k)}) \in \prod_{i=1}^{n} U_i,$$

siempre que $k > N$. Por lo que si $k > N$, entonces $x_{m(k)} \in U_1$. Esto último implica que $\{x_{m(i)}\}_{i\in\mathbb{N}} \to y_1$. Por lo tanto, X es secuencialmente compacto. $\square$

Corolario 5.2.8 *Sea X un espacio topológico. Entonces X^n es secuencialmente compacto si y solamente si $SP_n(X)$ es secuencialmente compacto.*

Demostración. Se sigue del teorema anterior y de la Proposición 5.2.5. □

5.3. Compacidad local

Definición 5.3.1 Decimos que X es **localmente compacto** si para todo punto $x \in X$ y para cualquier abierto $U \subseteq X$ tal que $x \in U$, se tiene que existe $A \subseteq X$ abierto tal que $x \in A \subseteq \overline{A} \subseteq U$, donde $\overline{A}$ es un compacto.

El lema siguiente así como su demostración pueden consultarse en [2].

Lema 5.3.2 *Sea X un espacio compacto y T_2. Si $Y \subseteq X$ es abierto o cerrado, entonces Y es localmente compacto.*

La prueba del siguiente teorema viene en [3].

Teorema 5.3.3 *i) La imagen continua de un conjunto localmente compacto es localmente compacto.*

ii) $\prod_{i \in I} X_i$ es localmente compacto si y solamente si para toda $i \in I$, X_i es localmente compacto y X_i es compacto excepto para una cantidad finita de valores de i.

Teorema 5.3.4 *Sea X un espacio Hausdorff. Entonces X es localmente compacto si y sólo si $SP_n(X)$ es localmente compacto.*

Demostración. Supongamos que X es localmente compacto. Por el Teorema 5.3.3, X^n es localmente compacto. Como $SP_n(X) = \mathbb{P}_n(X^n)$ y $\mathbb{P}_n$ es continua, de nuevo por el Teorema 5.3.3 se sigue que $SP_n(X)$ es localmente compacto.

Ahora probemos el recíproco, es decir, supongamos que $SP_n(X)$ es localmente compacto y veamos que X también lo es. Por el Lema 2.2.1 tenemos que X podemos encajarlo en $SP_n(X)$. Por la Proposición 4.2.8 sabemos que X se encaja como un cerrado, y así, por el Lema 5.3.2 concluimos que X es localmente compacto. □

Corolario 5.3.5 *Sea X un espacio topológico Hausdorff. Entonces X^n es localmente compacto si y solamente si $SP_n(X)$ es localmente compacto.*

Demostración. Se sigue del teorema anterior y del Teorema 5.3.3. □

5.4. Compacidad numerable

Definición 5.4.1 Decimos que un espacio topológico X es **numerablemente compacto** si toda cubierta abierta numerable tiene una subcubierta finita de X.

La prueba de la siguiente proposición se encuentra en [3].

Proposición 5.4.2 *i) La imagen continua de un espacio numerablemente compacto es numerablemente compacto.*

ii) Un subespacio cerrado de un espacio numerablemente compacto es numerablemente compacto.

iii) Sea $\{X_i\}_{i\in\{1,2,3,\ldots,n\}}$ una familia de espacios primero numerables y T_2. Si X_i es numerablemente compacto para toda $1 \leq i \leq n$, entonces $\prod_{i=1}^{n} X_i$ es numerablemente compacto.

Sin embargo, la propiedad de ser numerablemente compacto no se preserva para productos, ni siquiera se preserva para productos finitos. Aunque si pedimos que dichos espacios sean primero numerable, entonces se tiene que producto finito de numerablemente compacto es numerablemente compacto.

Teorema 5.4.3 *Sea X un espacio Hausdorff y primero numerable. Entonces X es numerablemente compacto si y sólo $SP_n(X)$ es numerablemente compacto.*

Demostración. Supongamos que X es numerablemente compacto. Por la Proposición 5.4.2 tenemos que X^n es numerablemente compacto. Como $\mathbb{P}_n$ es continua y $\mathbb{P}_n(X^n) = SP_n(X)$, se concluye de la Proposición 5.4.2 que $SP_n(X)$ es numerablemente compacto.

Ahora supongamos que $SP_n(X)$ es numerablemente compacto y veamos que X también lo es. Por el Lema 2.2.1 tenemos que X podemos encajarlo en $SP_n(X)$, y por la Proposición 4.2.8 sabemos que se encaja como un cerrado.

Así, de la Proposición 5.4.2 concluimos que X es un espacio numerablemente compacto. $\square$

Corolario 5.4.4 *Sea X un espacio Hausdorff y primero numerable. Entonces X^n es numerablemente compacto si y solamente si $SP_n(X)$ es numerablemente compacto.*

Demostración. Supongamos que X^n es numerablemente compacto. Debido a que $\mathbb{P}_n$ es continua y $\mathbb{P}_n(X^n) = SP_n(X)$ se sigue de la Proposición 5.4.2 que $SP_n(X)$ es numerablemente compacto.

Veamos ahora el regreso, supongamos pues que $SP_n(X)$ es numerablemente compacto, entonces por el Teorema 5.4.3 tenemos que X es numerable compacto. Así, por la Proposición 5.4.2 se sigue que X^n es numerablemente compacto. $\square$

5.5. Compactaciones

Una pregunta que surge del estudio de espacios topológicos no compactos es el saber como podemos encajar un espacio de manera densa en otro que si lo sea. ¿ Para que querríamos encajar un espacio? La respuesta a esta pregunta viene de que los espacios compactos son mas "bonitos"que los no compactos, esto es, que cumplen con propiedades que nos hace mas fácil su manejo.

A continuación daremos la definición de una compactación de un espacio.

Definición 5.5.1 Una **compactación** de un espacio X es un par ordenado (X^*, h) que consiste de un espacio compacto y T_2 X^* y un encaje h a algún conjunto denso de X^*.

Veamos un ejemplo sencillo, consideremos el intervalo $X = [0, 1)$, $X^* = [0, 1]$ y la función $h : [0, 1) \to [0, 1]$, definida como $h(x) = x$. Se sigue que h es un encaje del $[0, 1)$ en $[0, 1]$ y además

$$\overline{h[[0, 1)]} = \overline{[0, 1)} = [0, 1],$$

así $h[[0, 1)]$ es denso en $[0, 1]$, de esta manera observamos que $([0, 1], h)$ es una compactación de $(0, 1)$. Esta no es la única manera de compactar el intervalo semi-abierto (más adelante daremos otro ejemplo).

Notacioń 5.5.2 i) Para cualquier espacio X denotaremos con Y^X al conjunto de todas las funciones continuas con dominio X y contradominio Y.

ii) Llamemos I al intervalo cerrado $[0,1]$ y tomemos $\{I_f | f \in I^X\}$ una familia de intervalos $[0,1]$ indizados con I^X. Llamemos P^X al conjunto $\prod_{f \in I^X} I_f$; los puntos de P^X los denotaremos como $\{t_f\}$.

Compactación de Stone-Cech

El siguiente lema puede consultarse en [3].

Teorema 5.5.3 *Si X es un espacio completamente regular, entonces se puede encajar en un producto de intervalos cerrados. Más precisamente, la función $p\colon X \to P^X$ definido como*

$$p(x) = \{f(x)_f\}$$

es un homeomorfismo de X en $p[X]$.

Del teorema anterior podemos imaginar de que manera podemos encajar de manera densa un espacio completamente regular X en un espacio compacto X^*, de hecho, nuestro candidato es $\overline{p[X]}$, donde p es como en el teorema anterior.

Definición 5.5.4 *Sean X y $p\colon X \to P^X$ como en el Teorema 5.5.3. Entonces definimos la* **compactación de Stone-Cech** *como $(\beta(X), p)$, donde $\beta(X) = \overline{p[X]}$.*

Observamos que $\overline{p[X]}$ es compacto ya que es un subespacio cerrado de un producto de intervalos cerrados acotados. El siguiente teorema así como su demotración se encuentran en [3].

Teorema 5.5.5 *Sean X un espacio completamente regular y Y un espacio compacto. Entonces:*

i) Si $f\colon X \to Y$ es una función continua, entonces existe una única función continua $F : \beta(X) \to Y$ tal que $f = F \circ p$.

ii) (Unicidad) Para cualquier compactación (X^*, h) tal que cumple la propiedad del inciso anterior se tiene que X^* es homeomorfo a $\beta(X)$; de hecho existe un homeomorfismo entre X^* y $\beta(X)$ tal que es la identidad en X.

iii) $\beta(X)$ *es la compactificación más grande para* X*, esto es: Si* X^* *es cualquier compactificación de* X*, entonces* X *es un cociente de* $\beta(X)$*.*

Nos gustaría que $\beta(X^n)$ y $\beta(X)^n$ fueran homeomorfos, pero esto es algo que no siempre sucede, de hecho hay una condición que es suficiente y necesaria para que esto suceda, esta condición será la pseudo-compacidad.

Definición 5.5.6 Decimos que X es **pseudo-compacto** si para toda función continua $f\colon X \to \mathbb{R}$ existe $M_f \in \mathbb{N}$ tal que $|f(x)| \leq M_f$ para $x \in X$.

La definición anterior nos dice que X es un espacio pseudo-compacto siempre que todas las funciones continuas que salen de X y entran a los reales son acotadas. El siguiente teorema prueba que la pseudo-compacidad si es la condición que buscábamos, la demostración se encuentra en [10].

Teorema 5.5.7 *(Glicksberg) Sea* $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ *una familia de espacios topológicos completamente regulares. Entonces una condición suficiente y necesaria para que* $\prod_{\alpha\in\Lambda}\beta X_\alpha$ *se homeomorfo a* $\beta(\prod_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha)$ *es que* X_α *sea pseudo-compacto para toda* $\alpha \in \Lambda$*.*

Armados con el teorema anterior estudiaremos la relación que hay entre la compactación de Stone-Cech de X con la compactación de Stone-Cech de $SP_n(X)$.

Notación 5.5.8 Denotaremos con $\overline{\mathbb{P}_n}$ a la función que manda a cada elemento de $\beta(X)^n$ a su clase de equivalencia en $SP_n(\beta(X))$.

Lema 5.5.9 *Sea* X *un espacio topológico completamente regular y pseudo-compacto tal que* $SP_n(X)$ *es completamente regular. Entonces* $SP_n(X)$ *se puede encajar como un denso en* $SP_n(\beta(X))$*, es decir,* $SP_n(\beta(X))$ *es una compactación de* $SP_n(X)$*.*

Demostración. Por el Teorema 5.5.7 notamos que $\beta(X^n)$ es homeomorfo a $\beta(X)^n$. Así, hay un encaje P_0 que manda X^n como denso al espacio $\beta(X)^n$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que

$$P_0((x_i)_{i=1}^n) = (p_0(x_i))_{i=1}^n,$$

donde p_0 es el encaje del par ordenado de la compactación de Stone-Cech de X. Dado que P_0 y $\overline{\mathbb{P}_n}$ son funciónes continuas y abiertas, se sigue la composición $\overline{\mathbb{P}_n} \circ P_0 \colon X^n \to SP_n(\beta(X))$ es función. Sean $[(x_i)]_{i=1}^n \in SP_n(X)$ y $\sigma, \sigma' \in S_n$. Entonces

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{P}_n} \circ P_0((x_{\sigma(i)})_{i=1}^n) &= \overline{\mathbb{P}_n}((p_0(x_i))_{i=1}^n) \\ &= [(p_0(x_i))_{i=1}^n)] \\ &= \overline{\mathbb{P}_n}((p_0(x_i))_{i=1}^n) \\ &= \overline{\mathbb{P}_n} \circ P_0((x_{\sigma'(i)})_{i=1}^n). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Así, $\overline{\mathbb{P}_n} \circ P_0$ es una función constante sobre las fibras de $\mathbb{P}_n$, donde $\mathbb{P}_n$ es la función que manda los elementos de X^n a sus clases de equivalencia en $SP_n(X)$ (como acostumbramos). Como $\overline{\mathbb{P}_n} \circ P_0$ es composición de encajes, se sigue que dicha función es continua, abierta y cerrada. Así, por el Lema 1.3.3 tenemos que $\overline{\mathbb{P}_n} \circ P_0 \circ \mathbb{P}_n^{-1}$ es una función continua, abierta y cerrada que va de $SP_n(X)$ en $SP_n(\beta(X))$. Nos gustaría que dicha función fuera el encaje buscado, para esto nos hace falta ver que la función es inyectiva y que $\overline{\mathbb{P}_n} \circ P_0(SP_n(X))$ es denso en $SP_n(\beta(X))$. Probemos primero que $\overline{\mathbb{P}_n} \circ P_0 \circ \mathbb{P}_n^{-1}$ es inyectiva, para esto observamos que si $(x_i)_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n \in X^n$, entonces

$$\overline{\mathbb{P}_n} \circ P_0 \circ \mathbb{P}_n^{-1}((x_i)_{i=1}^n) = \overline{\mathbb{P}_n} \circ P_0 \circ \mathbb{P}_n^{-1}((y_i)_{i=1}^n)$$

si y solamente si existe $\sigma \in S_n$ tal que $p_0(x_{\sigma(i)})_{i=1}^n = p_0(y_i)_{i=1}^n$. Por lo que, si $\overline{\mathbb{P}_n} \circ P_0 \circ \mathbb{P}_n^{-1}((x_i)_{i=1}^n) = \overline{\mathbb{P}_n} \circ P_0 \circ \mathbb{P}_n^{-1}((y_i)_{i=1}^n)$, entonces para toda $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $x_{\sigma(i)} = y_i$, pues p_0 es inyectiva (por ser encaje). De aquí concluimos que $\overline{\mathbb{P}_n} \circ P_0 \circ \mathbb{P}_n^{-1}$ es inyectiva, y así la función es un encaje de $SP_n(X)$ en $SP_n(\beta(X))$. Notemos que $\mathbb{P}_n^{-1}(SP_n(X)) = X^n$ y que

$$SP_n(\beta(X)) = \overline{\mathbb{P}_n}(\beta(X)^n) = \overline{\mathbb{P}_n}(\overline{P_0(X^n)}) \subseteq \overline{\overline{\mathbb{P}_n} \circ P_0(X^n)},$$

por lo que $\overline{\mathbb{P}_n} \circ P_0 \circ \mathbb{P}_n^{-1}[SP_n(X)]$ es denso en $SP_n(\beta(X))$. Por lo tanto, $SP_n(\beta(X))$ es una compactación de $SP_n(X)$. □

Proposición 5.5.10 *Sea X un espacio topológico completamente regular y pseudo-compacto tal que $SP_n(X)$ es completamente regular. Entonces el espacio cociente $SP_n(\beta(X^n))$ es homeomorfo a $\beta(SP_n(X))$.*

Demostración. Por el Lema 5.5.9 sabemos que $SP_n(\beta(X))$ es una compactación de $SP_n(X)$. Del Teorema 5.5.5 nos basta con probar que cualquier función continua de $SP_n(X)$ a cualquier espacio compacto Y se puede extender de manera continua a $SP_n(\beta(X))$. Debido a que $\beta(X)^n$ es homeomorfo a $\beta(X^n)$ y al artículo [10] se puede suponer que el encaje $P_0\colon X^n \to \beta(X)^n$ cumple que

$$P_0((x_i)_{i=1}^n) = p_0((x_i)_{i=1}^n),$$

donde p_0 es el encaje de X en $\beta(X)$. Consideremos Y un espacio compacto y $f\colon SP_n(X) \to Y$ una función continua, se sigue que $f \circ \mathbb{P}_n\colon X^n \to Y$ es continua. Debido a que $f \circ \mathbb{P}_n$ es continua saliendo de X^n existe una función continua $H : \beta(X)^n \to Y$ tal que extiende a $f \circ \mathbb{P}_n$. Observamos también que si H fuera constante en las fibras de $\overline{\mathbb{P}_n}$, entonces el Lema 1.3.3 (Transgresión) nos dice que $H \circ \overline{\mathbb{P}_n}^{-1}$ será una función continua de $SP_n(\beta(x))$ en Y, y así, probando que dicha función es una extensión continua de f concluiríamos la proposición. Veamos pues que H es constante sobre las fibras de $\overline{\mathbb{P}_n}$, consideremos

$$(x_i)_{i=1}^n X^n \text{ y } \sigma \in S_n.$$

Por el Lema 4.4.7, la función $f_\sigma\colon \beta(X)^n \to \beta(X)^n$ definida como $f_\sigma((y_i)_{i=1}^n) = (y_{\sigma(i)})_{i=1}^n$ es continua, y cumple con que

$$\begin{aligned} H((p_0(x_i))_{i=1}^n) &= f(\mathbb{P}_n((x_i)_{i=1}^n)) \\ &= f(\mathbb{P}_n((x_{\sigma(i)})_{i=1}^n)) \\ &= f([(x_i)]_{i=1}^n) \\ &= H((p_0(x_{\sigma(i)}))_{i=1}^n) \\ &= H \circ f_\sigma((p_0(x_i))_{i=1}^n). \end{aligned} \tag{5.2}$$

De esto se sigue que si $(y_i)_{i=1}^n \in P_0(X^n) \subseteq \beta(X)^n$, entonces

$$H((y_i)_{i=1}^n) = H \circ f_\sigma((y_i)_{i=1}^n) = H((y_{\sigma(i)})_{i=1}^n).$$

Luego, al ser $P_0(X^n)$ denso en $\beta(X)^n$ y las funciones H y f_σ continuas se tiene que $H = H \circ f_\sigma$, y así para $\sigma \in S_n$ y $(y_i)_{i=1}^n \in SP_n(\beta(X))$ se sigue que

$$H((y_i)_{i=1}^n) = H((y_{\sigma(i)})_{i=1}^n).$$

Donde se concluye que H es constante en las fibras de $\overline{\mathbb{P}_n}$, así por el Lema de Transgresión se sigue que $H \circ \overline{\mathbb{P}_n}^{-1}$ es una función continua de $SP_n(\beta(X))$ en Y. Ahora veamos que $H \circ \overline{\mathbb{P}_n}^{-1}$ extiende a f, esto es, si $[(x_i)]_{i=1}^n \in SP_n(X)$, entonces

$$f([(x_i)]_{i=1}^n) = H \circ \overline{\mathbb{P}_n}^{-1} \circ \overline{\mathbb{P}_n} \circ P_0 \circ \mathbb{P}_n^{-1}([(x_i)]_{i=1}^n).$$

Por la demostración del Lema 5.5.9 tenemos que

$$H(P_0((x_i)_{i=1}^n)) = H \circ \overline{\mathbb{P}_n}^{-1} \circ \overline{\mathbb{P}_n} \circ P_0 \circ \mathbb{P}_n^{-1}([(x_i)]_{i=1}^n).$$

Así

$$\begin{aligned} f([(x_i)]_{i=1}^n) &= f(\mathbb{P}_n((x_i)_{i=1}^n)) \\ &= H(P_0((x_i)_{i=1}^n)) \\ &= H \circ \overline{\mathbb{P}_n}^{-1} \circ \overline{\mathbb{P}_n} \circ P_0 \circ \mathbb{P}_n^{-1}([(x_i)]_{i=1}^n). \end{aligned} \tag{5.3}$$

De aquí concluimos que $H \circ \overline{\mathbb{P}_n}^{-1}$ es una función continua que extiende a f, y así, por el Teorema 5.5.5 se sigue que $SP_n(\beta(X))$ es homeomorfo a $\beta(SP_n(X))$. $\square$

Otra compactación que podemos estudiar es la llamada compactación a un punto de Alexandroff, en la cual están implicados los espacios localmente compactos. Como lo dice su nombre la compactación cumple con la característica que al espacio original solo se le agrega un punto.

Compactación a un Punto

El siguiente teorema puede consultarse en [3].

Teorema 5.5.11 *(Alexandroff) Sea X un espacio topológico Hausdorff localmente compacto. Entonces:*

1. *X puede ser encajado en un espacio compacto X^* de tal manera que $|X^* \setminus X| = 1$*
2. *(Unicidad) Si Y^* y X^* cumplen la propiedad del inciso anterior, entonces X^* y Y^* son homeomorfos; de hecho, existen un homeomorfismo entre X^* y Y^* tal que la identidad en X.*

Definición 5.5.12 La compactación anterior es llamada **compactación de Alexandroff** o **compactación a un punto**, la cual denotaremos por $(\widehat{X}, h_a)$. La función $h_a \colon X \to \widehat{X}$ es el encaje del Teorema 5.5.11.

Observamos que un espacio X es se encaja como un abierto en $\widehat{X}$, esto se debe a que $\widehat{X}$ es Hausdorff y a que $|\widehat{X} \setminus X| = 1$ (recordemos que los conjuntos finitos son cerrados en los espacios T_2). Así, podemos suponer que X es un subespacio abierto de $\widehat{X}$, por lo que si $A \subseteq X$ es abierto, entonces $A \subseteq \widehat{X}$ es abierto.

Proposición 5.5.13 *Sea X un espacio Hausdorff y supongamos que $\widehat{X} = X \cup \{a\}$ y $\widehat{X^n} = X^n \cup \{\alpha\}$. Entonces la función $F \colon \widehat{X}^n \to \widehat{X^n}$ definida como*

$$F((x_i)_{i=1}^n) = \begin{cases} (x_i)_{i=1}^n & \textit{si } x_i \neq a \text{ para toda } i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\} \\ \alpha & \textit{si } x_i = a \text{ para alguna } i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}. \end{cases}$$

es continua.

Demostración. Sea pues $\mathcal{A} \subseteq \widehat{X^n}$ un abierto. Entonces hay dos casos:

i) Si $\alpha \notin \mathcal{A}$, entonces $\mathcal{A}$ es un abierto de X^n, por lo que $F^{-1}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$. Debido a que X es abierto en $\widehat{X}$, se sigue que X^n es abierto en $\widehat{X}^n$. Como
$$\mathcal{A} \subseteq X^n \subseteq \widehat{X}^n,$$
se concluye que $\mathcal{A}$ es abierto en $\widehat{X}^n$.

ii) Si $\alpha \in \mathcal{A}$, entonces $X^n \setminus \mathcal{A}$ es un cerrado compacto en X^n, tomemos $(x_i)_{i=1}^n \in F^{-1}(\mathcal{A})$ y veamos que $F^{-1}(\mathcal{A})$ es vecindad de él. Si tenemos que para toda $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $x_i \neq a$, se sigue que
$$(x_i)_{i=1}^n \in \mathcal{A} \setminus \{\alpha\} \subseteq X^n.$$
Como $X^n \setminus \mathcal{A}$ es un cerrado en X^n que no tiene al punto $(x_i)_{i=1}^n$, se tiene que para toda $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ existe $A_i \subseteq X$ abierto tal que
$$(x_i)_{i=1}^n \in \prod_{i=1}^n A_i \subseteq X^n \setminus \mathcal{A},$$
y como los abiertos de X también son abiertos de $\widehat{X}$, se sigue que $\prod_{i=1}^n A_i$ es abierto y esta contenido en $\mathcal{A}$. Por lo que $\mathcal{A}$ es vecindad de $(x_i)_{i=1}^n$. Supongamos ahora que existe $k \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ tal que $x_k = a$. Debido a que $X^n \setminus \mathcal{A}$ es un cerrado compacto en X^n y a que p_i es continua se sigue que $p_i(X^n \setminus \mathcal{A})$ es compacto en X, donde $p_i \colon X^n \to X$ es la i-ésima proyección. Consideremos
$$U = \overline{p}_k^{-1}(\widehat{X} \setminus p_k(X^n \setminus \mathcal{A})),$$
donde $\overline{p}_k \colon \widehat{X}^n \to \widehat{X}$ es la k-eśima proyección. Como $p_k(X^n \setminus \mathcal{A})$ es compacto en un T_2, se sigue que $\widehat{X} \setminus p_k(X^n \setminus \mathcal{A})$ es abierto en $\widehat{X}$, por lo que U es abierto en $\widehat{X}^n$. Dado que $X^n \setminus \mathcal{A} = \overline{X}^n \setminus \mathcal{A}$ y a que $a \notin p_k(X^n \setminus \mathcal{A})$, se sigue
$$(x_i)_{i=1}^n \in U.$$

Como

$$\overline{p}_k^{-1}(\widehat{X} \setminus p_k(X^n \setminus \mathcal{A})) = \widehat{X}^n \setminus \overline{p}_k^{-1}(p_k(X^n \setminus \mathcal{A})) \\ = \widehat{X}^n \setminus \overline{p}_k^{-1}(\overline{p}_k(X^n \setminus \mathcal{A})) \tag{5.4}$$

y

$$X^n \setminus \mathcal{A} \subseteq \overline{p}_k^{-1}(\overline{p}_k(X^n \setminus \mathcal{A})),$$

concluimos que $U \cap (X^n \setminus \mathcal{A}) = U \cap (\widehat{X}^n \setminus \mathcal{A}) = \emptyset$, por lo que

$$(x_i)_{i=1}^n \in U \subseteq \mathcal{A}.$$

Y así, $\mathcal{A}$ es vecindad de $(x_i)_{i=1}^n$.

De lo anterior se concluye que $F^{-1}(\mathcal{A})$ es abierto, y por lo tanto, F es una función continua. □

Proposición 5.5.14 *Sea X un espacio Hausdorff localmente compacto. Supongamos que $\widehat{X^n} = X^n \cup \{\alpha\}$ y que $\widehat{SP_n(X)} = SP_n(X) \cup \{\widehat{\alpha}\}$. Entonces la función $H\colon \widehat{X^n} \to \widehat{SP_n(X)}$ definida como*

$$H(\overline{x}) = \begin{cases} \mathbb{P}_n((x_i)_{i=1}^n) & si \;\; \overline{x} = (x_i)_{i=1}^n \in X^n \\ \widehat{\alpha} & si \; \overline{x} = \alpha \end{cases}$$

es continua.

Demostración. Veamos que H es continua, tomemos pues $A \subseteq \widehat{SP_n(X)}$ un abierto, como en la demostración anterior tenemos dos casos:

i) Si $\widehat{\alpha} \notin A$, entonces A es un abierto de $SP_n(X)$, por lo que $\bigcup A = \mathbb{P}_n^{-1}(A)$ es un abierto de X^n. Luego, por la definición de H se sigue que

$$\bigcup A = \mathbb{P}_n^{-1}(A) = H^{-1}(A),$$

y así, $H^{-1}(A)$ es abierto en $\widehat{X^n}$.

ii) Supongamos ahora que $\widehat{x} = \alpha$, nos basta con probar que $\widehat{X^n} \setminus H^{-1}(A)$ es compacto. Notamos que

$$\widehat{X^n} \setminus H^{-1}(A) = H^{-1}(\widehat{SP_n(X)} \setminus A) = \mathbb{P}_n^{-1}(\widehat{SP_n(X)} \setminus A),$$

y como sabemos que $B \subseteq SP_n(X)$ es compacto si y solamente si $\mathbb{P}_n^{-1}(B)$ también lo es, concluimos que $\widehat{X^n} \setminus H^{-1}(A)$ es compacto, por lo que $H^{-1}(A)$ es abierto en $\widehat{X^n}$.

De lo anterior se concluye que $H^{-1}(A)$ es abierto, y por lo tanto, H es continua. $\square$

Notación 5.5.15 *Denotaremos mediante* $\widehat{\mathbb{P}_n}$ *a la función que manda a cada elemento de* $\widehat{X}^n$ *en su en* $SP_n(\widehat{X})$.

Proposición 5.5.16 *Sea* X *un espacio topológico localmente compacto. Supongamos que* $\widehat{X} = X \cup \{a\}$, $\widehat{X^n} = X^n \cup \{\alpha\}$ *y* $\widehat{SP_n(X)} = SP_n(X) \cup \{\widehat{\alpha}\}$. *Entonces la funcioń* $H \circ F\colon \widehat{X}^n \to \widehat{SP_n(X)}$ *es constante en* $\widehat{\mathbb{P}_n}^{-1}([y])$ *para cada* $[y] \in SP_n(\widehat{X})$.

Demostración. Sean $[y] \in SP_n(\widehat{X})$ y $(x_i)_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n \in \widehat{\mathbb{P}_n}^{-1}([y])$. Entonces existe $\sigma \in S_n$ tal que $(x_{\sigma(i)})_{i=1}^n = (y_i)_{i=1}^n$,tenemos dos casos:

i) Para toda $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $x_i \neq a \neq y_i$. Luego, $(x_i)_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n \in X^n$, por lo que

$$\begin{aligned} H(F((x_i)_{i=1}^n)) &= H((x_i)_{i=1}^n) \\ &= \mathbb{P}_n((x_i)_{i=1}^n) \\ &= \mathbb{P}_n((y_i)_{i=1}^n) \\ &= H((y_i)_{i=1}^n) \\ &= H \circ F((y_i)_{i=1}^n), \end{aligned} \tag{5.5}$$

lo cual es lo que queríamos.

ii) Existen $i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ tales que $x_i = y_j = a$, de aquí que $F((x_i)_{i=1}^n) = F((y_i)_{i=1}^n) = \alpha$, por lo que al ser H función tenemos

$$H \circ F((x_i)_{i=1}^n) = H(\alpha) = H \circ F((y_i)_{i=1}^n),$$

que de nuevo es lo que queríamos.

De lo anterior concluimos que la funcioń $H \circ F\colon \widehat{X}^n \to \widehat{SP_n(X)}$ es constante en $\widehat{\mathbb{P}_n}^{-1}([y])$, para cada $[y] \in SP_n(\widehat{X})$. $\square$

Observación 5.5.17 Notamos que la función $H \circ F\colon \widehat{X}^n \to \widehat{SP_n(X)}$ es suprayectiva ya que F y H son funciones suprayectivas.

Teorema 5.5.18 *Sea* X *un espacio Hausdorff localmente compacto. Entonces* $\widehat{SP_n(X)}$ *es homeomorfo a alguń cociente de* $SP_n(\widehat{X})$.

Demostración. Por el Teorema 1.3.2 nos basta con probar que existe una funcioń $\rho\colon \widehat{SP_n(X)} \to SP_n(\widehat{X})$ continua, cerrada y suprayectiva. Supongamos que $\widehat{X} = X \cup \{a\}$, $\widehat{X^n} = X^n \cup \{\alpha\}$, $\widehat{SP_n(X)} = SP_n(X) \cup \{\widehat{\alpha}\}$ y sean H y F de las Proposiciones 5.5.13 y 5.5.14 respectivamente. Entonces, de la Proposicioń 5.5.16 y el Lema de Trangresioń tenemos que

$$H \circ F \circ \widehat{\mathbb{P}_n}^{-1}\colon SP_n(\widehat{X}) \to \widehat{SP_n(X)}$$

es una funcioń continua; además, al ser $\widehat{SP_n(X)}$ T_2 y $SP_n(\widehat{X})$ compacto se tiene del Teorema 5.1.3 que $H \circ F \circ \widehat{\mathbb{P}_n}^{-1}$ es cerrada. Como $H \circ F\colon \widehat{X}^n \to \widehat{SP_n(X)}$ es suprayectiva se sigue que $H \circ F \circ \widehat{\mathbb{P}_n}^{-1}$ también los es. De donde se concluye el teorema. $\square$

Capítulo 6

Dimensión

Estudiaremos la relación de dimensión entre X^n y $SP_n(X)$.

6.1. Dimensión

La dimensión (topológica) de un espacio X se definirá resursivamente.

Supondremos en este capítulo que los espacios topológicos son métricos separables.

Definición 6.1.1 (**Dimensión**)

i) $dim(X) = -1$ si y sólo si $X = \emptyset$.

ii) Ahora, supongamos que ya se definio $dim(Y) \leq n-1$ para algún $0 \leq n$ y para cualquier espacio Y. Entonces para un espacio X y un punto $p \in X$ decimos que
$$dim_p(X) \leq n$$
si existe una base local de vecindades β_p de p tal que $dim(Fr(B)) \leq n-1$ para todo $B \in \beta_p$.

iii)) $dim(X) \leq n$ si y sólo si $dim_p(X) \leq n$ para todo $p \in X$.

iv) $dim(X) = n$ si y sólo si $dim(X) \leq n$ y $dim(X) \nleq n-1$.

v) $dim_p(X) = n$ si y sólo si $dim_p(X) \leq n$ y $dim_p(X) \nleq n-1$.

vi) $dim(X) = \infty$ si y sólo si $dim(X) \nleq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

vii) $dim_p(X) = \infty$ si y sólo si $dim_p(X) \nleq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dado un espacio topológico X y Y un subespacio, es de esperarse que la dimensión de Y sea menór o igual a a la dimensión de X. La demostración del siguiente teorema se encuentra en [7].

Teorema 6.1.2 (Teorema del subespacio) *Sea X un espacio topológico tal que $dim(X) \leq n$. Entonces para $A \subseteq X$ se tiene que $dim(A) \leq n$.*

Teorema 6.1.3 *Sean X un espacio métrico separable y $A \subseteq X^n$. Si $dim(A) \leq m$, entonces $dim(\mathbb{P}_n[A]) \leq m$.*

Demostración. La demostración se hará por inducción:

i) Si $A \subseteq X^n$ es tal que $dim(A) \leq -1$, entonces $dim(A) = -1$. Así, de la definición se sigue que

$$A = \emptyset.$$

Por lo que $\mathbb{P}_n(A) = \emptyset$, lo cual implica que $dim(\mathbb{P}_n(A)) \leq -1$.

ii) Supongamos que para $B \subseteq X$ tal que la $dim(B) \leq m-1$ se tiene $dim(\mathbb{P}_n[B]) \leq m-1$ y probemos que

$$\text{si } B \subseteq X \text{ es tal que } dim(B) \leq m, \text{ entonces } dim(\mathbb{P}_n(B)) \leq m.$$

Sea pues $B \subseteq X$ tal que $dim(B) \leq m$. Entonces existe β una base de vecindades de la topología de B tal que si $U \in \beta$, entonces $dim(Fr(U)) \leq m-1$. Notamos que $\{\mathbb{P}_n(U) | \ U \in \beta\}$ es una base de $\mathbb{P}_n(B)$, esto sucede ya que $SP_n(X)$ es un cociente. Por la Proposición 2.1.13 tenemos que para todo $U \in \beta$,

$$Fr(\mathbb{P}_n(U)) \subseteq \mathbb{P}_n(Fr(U)).$$

Por nuestra suposición, junto con que $dim(Fr(U)) \leq m-1$ se sigue

$$dim(\mathbb{P}_n(Fr(U))) \leq m-1.$$

Así, debido a que $Fr(\mathbb{P}_n(U)) \subseteq \mathbb{P}_n(Fr(U))$ se sigue del Teorema 6.1.2 que

$$Fr(\mathbb{P}_n(U)) \leq m-1.$$

Luego, $\{\mathbb{P}_n(U) | \ U \in \beta\}$ es un base de vecindades para $\mathbb{P}_n(B)$ tal que $Fr(\mathbb{P}_n(U)) \leq m-1$, y por la definición de dimensión se sigue que $dim(B) \leq m$, que era lo que queríamos probar.

Por lo tanto,

$$\text{si } A \subseteq X^n \text{ tal que } dim(A) \leq m, \text{ entonces } dim(\mathbb{P}_n(A) \leq m.$$

$\square$

Como consecuencia del resultado anterior tenemos lo siguiente.

Corolario 6.1.4 *Sea X un espacio métrico y separable. Si $dim(X^n) \leq m$, entonces $dim(SP_n(X)) \leq m$.*

Demostración. Por el teorema anterior tenemos que si $A \subseteq X^n$ y $dim(A) \leq m$, entonces $dim(\mathbb{P}_n(A)) \leq m$. Por lo que si tomamos $A = X^n$ y se cumple que $dim(X^n) \leq m$, se sigue que

$$dim(SP_n(X)) \leq m$$

debido a que $SP_n(X) = \mathbb{P}_n(X)$. $\square$

Corolario 6.1.5 *Sea X un espacio métrico y separable. $dim(SP_n(X)) \leq dim(X^n)$.*

Demostración. Se sigue del corolario anterior notando que $\dim(X^n) \leq \dim(X^n)$. $\square$

La prueba del siguiente teorema puede consultarse en [7].

Teorema 6.1.6 *Sea $f : X \to Y$ una función cerrada y $X \neq \emptyset$. Entonces*

$$dim(X) \leq sup\{dim(f^{-1}(y))| \ y \in Y\} + dim(Y)$$

.

Corolario 6.1.7 $dim(X^n) \leq dim(SP_n(X))$.

Demostración. Por el Teorema 6.1.6 nos basta con demostrar que

$$dim(\mathbb{P}_n^{-1}([(y_i)]_{i=1}^n)) = 0$$

para todo $[(y_i)]_{i=1}^n \in SP_n(X)$. Consideremos $d(\ , \ ) \colon X^n \to \mathbb{R}^+$ una métrica que genera la topología producto. Para todo $\sigma, \sigma' \in S_n$ definamos

$$c_{\sigma,\sigma'} = d((y_{\sigma(i)})_{i=1}^n, (y_{\sigma'(i)})_{i=1}^n.$$

Notamos que si $(y_{\sigma(i)})_{i=1}^n \neq (y_{\sigma'(i)})_{i=1}^n$, entonces $0 < c_{\sigma,\sigma'}$, tomemos pues

$$r = min\{d_{\sigma,\sigma'}| \ (y_{\sigma(i)})_{i=1}^n \neq (y_{\sigma'(i)})_{i=1}^n\}/2.$$

Así, si $(y_{\sigma(i)})_{i=1}^n \neq (y_{\sigma'(i)})_{i=1}^n$, entonces

$$(y_{\sigma'(i)})_{i=1}^n \notin B_r((y_{\sigma(i)})_{i=1}^n) \text{ y } (y_{\sigma'(i)})_{i=1}^n \notin B_r((y_{\sigma(i)})_{i=1}^n).$$

Se sigue que para toda $\sigma \in S_n$, $\{(y_{\sigma(i)})_{i=1}^n\}$ es abierto en $\{(y_{\sigma'(i)})_{i=1}^n\}_{\sigma' \in S_n}$, por lo que

$$\beta_{(y_i)_{i=1}^n} = \{\{(y_{\sigma(i)})_{i=1}^n\} | \ \sigma \in S_n\}$$

es base de $\{(y_{\sigma'(i)})_{i=1}^n\}_{\sigma' \in S_n}$. Como para toda $\sigma \in S_n$, $\{(y_{\sigma(i)})_{i=1}^n\}$ es abierto, se sigue que todos los subconjuntos de $\{(y_{\sigma'(i)})_{i=1}^n\}_{\sigma' \in S_n}$ son abiertos, y así los conjuntos unipuntuales de $\{(y_{\sigma'(i)})_{i=1}^n\}_{\sigma' \in S_n}$ son cerrados. Por lo que,

$$Fr(\{(y_{\sigma(i)})_{i=1}^n\}) = \overline{\{(y_{\sigma(i)})_{i=1}^n\}} \setminus int(\{(y_{\sigma(i)})_{i=1}^n\}) = \emptyset,$$

lo cual nos dice que $dim(\{(y_{\sigma(i)})_{i=1}^n\}_{\sigma \in S_n}) \leq 0$. Debido a que $[(y_i)]_{i=1}^n$ es cualquier punto en $SP_n(X)$ y a que $\mathbb{P}_n^{-1}([(y_i)]_{i=1}^n) = \{(y_{\sigma'(i)})_{i=1}^n\}_{\sigma' \in S_n}$ se sigue que

$$sup\{dim(\mathbb{P}_n^{-1}([(y_i)]_{i=1}^n)) \mid [(y_i)]_{i=1}^n \in SP_n(X)\} \leq 0.$$

Luego, del Teorema 6.1.6 tenemos que

$$dim(X^n) \leq sup\{dim(\mathbb{P}_n^{-1}([(y_i)]_{i=1}^n)) \mid [(y_i)]_{i=1}^n \in SP_n(X)\} + dim(SP_n(X)).$$

Por lo tanto,

$$dim(X^n) \leq dim(SP_n(X)).$$

□

Corolario 6.1.8 *Sea X un espacio metrico y separable. Entonces $dim(X^n) = dimSP_n(X)$.*

Demostración. Por el Corolario 6.1.5 tenemos que

$$dim(SP_n(X)) \leq dim(X^n),$$

y por el Corolario 6.1.7 se sigue que

$$dim(X^n) \leq dim(SP_n(X)).$$

Por lo tanto, $dim(X^n) = dimSP_n(X)$. □

Bibliografía

[1] R. Engelking; *General Topology.*

[2] J. Munkres; *Topología.* Pearson Education (2002)

[3] J. Dugundji; *Topology.* Allyn & Bacon (1966).

[4] C. Prieto; *Topologá Bśica.* Fondo de Cultura Econḿica (2005).

[5] F. Zaldivar; *Introducción a la Teoría de Grupos.* Aportaciones Matemáticas **32**, Sociedad Matemática Mexicana (2005).

[6] S. Willard; *General Topology.* Addison-Wesley Publishing Company (1979).

[7] Sam B. Nadler; *Dimension Theory: An Introduccion with Exercises.* Aportaciones Matemáticas **18**, Sociedad Matemática Mexicana (2002).

[8] K. Kunen, Jerry E. Vaughan; *Handbook of Set-Theoretic Topology.* Elsevier Science Publishing Company (1988).

[9] F. Casarrubias, A. Tamariz; *Elementos de la Topología General.* Aportaciones Matemáticas **37** Sociedad Matemática Mexicana (2012).

[10] I. Glicksberg; *Stone-?ech Compactifications of Products.* Transactions of American Mathematical Society. **90(3):369-369** American Mathematical Society (1959).