



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES CUAUTITLÁN

**Simulación del perfil de velocidades para un fluido tipo Bingham en canales  
rectangulares empleando redes de Boltzmann**

**TESIS**

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**INGENIERO EN ALIMENTOS**

PRESENTA:

**ALBERTO IGNACIO GUERRERO VERGARA**

ASESOR: Dr. José Luis Velázquez Ortega

CUAUTITLÁN IZCALLI, ESTADO DE MÉXICO, 2018



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES CUAUTITLÁN  
SECRETARÍA GENERAL  
DEPARTAMENTO DE EXÁMENES PROFESIONALES

U.N.A.M.  
FACULTAD DE ESTUDIOS  
ASUNTO: VOTO APROBATORIO



M. en C. JORGE ALFREDO CUÉLLAR ORDAZ  
DIRECTOR DE LA FES CUAUTITLÁN  
PRESENTE

ATN: I.A. LAURA MARGARITA CORTAZAR FIGUEROA  
Jefa del Departamento de Exámenes Profesionales  
EXÁMENES de la FES Cuautitlán.

Con base en el Reglamento General de Exámenes, y la Dirección de la Facultad, nos permitimos comunicar a usted que revisamos el: Trabajo de Tesis

**Simulación del perfil de velocidades para un fluido tipo Bingham en canales rectangulares empleando redes de Boltzman**

Que presenta el pasante: Alberto Ignacio Guerrero Vergara  
Con número de cuenta: 303177830 para obtener el Título de la carrera: Ingeniería en Alimentos

Considerando que dicho trabajo reúne los requisitos necesarios para ser discutido en el EXAMEN PROFESIONAL correspondiente, otorgamos nuestro VOTO APROBATORIO.

ATENTAMENTE  
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"  
Cuautitlán Izcalli, Méx. a 09 de Agosto de 2018.

PROFESORES QUE INTEGRAN EL JURADO

	NOMBRE	FIRMA
PRESIDENTE	I.A. Laura Margarita Cortazar Figueroa	
VOCAL	I.A. Francisco Javier López Martínez	
SECRETARIO	Dr. José Luis Velázquez Ortega	
1er. SUPLENTE	Dra. María Eugenia Ramírez Ortíz	
2do. SUPLENTE	I.A. Dulce María Oliver Hernández	

NOTA: los sinodales suplentes están obligados a presentarse el día y hora del Examen Profesional (art. 127).

LMCF/mmgm\*

## *Agradecimientos*

*Doy gracias infinitas a Dios y a los Maestros por este camino.*

*A mis padres por todo el cariño, amor, comprensión y consejos.*

*Con mucho cariño para Ana que ha escuchado con paciencia sobre este trabajo.*

*Muchas gracias a mi amigo, consejero, formador y asesor de esta tesis el Dr. José Luis Velázquez Ortega, quien sin su invaluable apoyo no hubiera sido posible dar este enorme paso.*

*A los sinodales, que aportaron para mejorar este trabajo y el aprecio que les tengo por qué fueron mis profesores en muchos semestres.*

*A mis profesores en general que me dieron un poco de su conocimiento, aprendizaje y experiencia*

*A mis amigos y compañeros de esta Facultad que siempre estamos como equipo para que la Universidad mejore día con día*

*A la latosa de Herlinda*

# CONTENIDO

INTRODUCCIÓN .....	3
OBJETIVO GENERAL.....	6
OBJETIVOS PARTICULARES .....	6
ESTADO DEL ARTE .....	7
CAPÍTULO 1. FLUJO DE FLUIDOS .....	10
1.1    El fluido desde el punto de vista de la dinámica de fluidos .....	10
1.2    La ecuación de continuidad y la de movimiento.....	11
1.2.2    Clasificación de los fluidos Newtonianos y no Newtonianos .....	13
1.3.1    Dependientes del tiempo.....	16
1.3.2    Independientes del tiempo .....	17
1.3.3    Fluidos adelgazantes .....	18
1.3.4    Fluidos espesante.....	19
1.3.5    Fluidos con tensión de fluencia o esfuerzo inicial.....	19
1.3.5.1    Modelo de Bingham .....	20
1.3.5.2    Magnitudes adimensionales .....	21
1.3.5.3    Tensión adimensional de fluencia.....	21
1.3.5.4    Modelo de Bercovier y Engelman .....	22
1.3.5.5    Modelo de Tanner y Milthorpe.....	23
1.3.5.6    Modelo de Papanastasiou.....	25
1.3.5.7    Modelo de Souza Mendes y Dutra (SMD).....	27
1.3.5.8    Solución analítica Bingham, Flujo de Poiseuille .....	28
1.4    Flujo de expansión súbita.....	29
CAPÍTULO 2. EL MÉTODO DE REDES DE BOLZTMANN .....	32
2.1    Simulación computacional .....	32
2.2    Métodos de la Dinámica de Fluidos Computacional.....	33
2.2.1    Diferencias finitas.....	33
2.2.2    Método de Volúmenes Finitos .....	34

2.2.3	Método de Elementos Finitos .....	35
2.3	Autómata Celular .....	35
2.4	Lattice Gas Autómata Celular .....	36
2.5	Lattice Boltzmann.....	37
2.5.1	Escalas .....	37
2.5.2	Inicios del Método de Lattice Boltzmann.....	38
2.5.3	Ecuación de Boltzmann .....	39
2.5.4	Función de Distribución.....	40
2.5.5	Función de colisión y ecuación de Bhatnagar-Gross-Krook .....	41
2.5.6	Modelos de rejillas .....	42
2.5.7	Condiciones frontera.....	45
2.5.8	Condiciones Bounce-back .....	46
CAPÍTULO 3 SIMULACIÓN DE UN FLUIDO TIPO BINGHAM CON EL MODELO PROPUESTO DE REDES DE BOLTZMANN .....		48
3.1	Solución analítica de la ecuación de movimiento para el caso de un fluido Bingham .....	48
3.2	Soluciones analíticas .....	52
3.3	Validación del modelo propuesto con la solución analítica del fluido Bingham .....	55
3.4	El fenómeno de contracción y expansión .....	61
3.5	Resultados en expansión y contracción súbita .....	65
3.5.1	Distribución de Presiones.....	111
3.6	Conclusiones.....	122

# INTRODUCCIÓN

A lo largo de la existencia de la humanidad siempre se ha deseado explicar, controlar y predecir su entorno, como el movimiento de las estrellas, el clima etc. comprender los fenómenos naturales y predecirlos. La ciencia esforzándose por proporcionar respuestas a estas incógnitas, ha desarrollado infinidad de métodos, modelos y herramientas que han contribuido en la comprensión de fenómenos que acontecen día a día. Recientemente con la ayuda y el desarrollo de las nuevas tecnologías, la simulación computacional es una herramienta de gran trascendencia que ha permitido y contribuido a la comprensión de múltiples problemáticas que años atrás no habían sido resueltas. Esta ha tenido un rápido desarrollo a la par del avance de las ciencias de la computación. En la industria, esta herramienta es de gran ayuda, si bien dependiendo del proceso a simular, muchos de estos tienen un porcentaje de error pequeño y otros no tanto, debido a la complejidad y al número de variables incluidas dentro del sistema, la realidad es que se pueden tomar decisiones más acertadas para la mejora, implementación o crecimiento de la industria, tomando en cuenta el impacto de los posibles cambios o comparando diferentes propuestas, sin el costo elevado de llevar los experimentos ya sea en una escala piloto o real, permitiendo la máxima eficiencia y productividad.

En la mecánica de fluidos, la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes nos da una idea del comportamiento de una gran variedad de fluidos, con ayuda de los métodos de simulación computacional, el tiempo y simplicidad presentan una gran ventaja que en tiempos atrás no se tenía. Ejemplos en los cuales se ha tenido grandes avances en el argot computacional, es el caso dispersión de los contaminantes en la atmósfera, la resistencia y fricción del aire para determinar cómo construir modelos más aerodinámicos en automóviles, aviones y barcos, además del transporte de fluidos no Newtonianos en las Operaciones Unitarias de los procesos industriales. Estos últimos, son el caso de los alimentos procesados,

ya que, debido a su naturaleza compleja, le otorgan diferentes comportamientos reológicos, es decir; fluyen y se desplazan de manera diferente al agua.

Los fluidos de tipo Bingham, son un ejemplo de fluidos no Newtonianos, que se comportan de una manera muy peculiar, de forma general, necesitan de un esfuerzo inicial o umbral que les permita fluir.

El método de Lattice Boltzmann, es una técnica de simulación computacional, la cual permite predecir de manera muy efectiva, el comportamiento del fluido. El cual toma la escala mesoscópica como principal característica.

El presente trabajo está organizado en tres capítulos que se describen de la siguiente forma:

*Capítulo uno.* Relacionado con los conceptos básicos de la mecánica de fluidos y su relación con la ecuación de Navier Stokes, la descripción de diferentes modelos de fluidos, Newtonianos y no Newtonianos en especial el modelo de Bingham, las principales características de este, solución analítica y deducción para el perfil de velocidades. También se desarrolla el análisis matemático de las expansiones y contracciones súbitas por un canal.

*Capítulo dos.* En el cual se describe la ecuación, el método de redes de Boltzmann y sus principales características. Así mismo, el término de colisión, el tiempo de relajación, las condiciones de frontera periódicas y las de rebote o “Bounce Back”, las cuales nos permiten determinar los límites donde tiene que ir nuestro fluido, todos estos conceptos sirvieron para entender la física detrás del método, lo cual ayudó como base en la elaboración del programa y su funcionamiento para la simulación del fluido de tipo Bingham.

*Capítulo tres.* Aquí, se presentan de manera introductoria diferentes métodos de simulación computacional y la propuesta de un modelo matemático para la modificación de la ecuación de redes de Boltzmann en el término de colisión en función de la viscosidad aparente para el caso de un fluido tipo Bingham. De igual forma, se muestran los resultados obtenidos con diferentes números de Bingham de dicha propuesta y su respectiva validación con la solución analítica de la ecuación de movimiento, en la cual se compara el porcentaje de error, con resultados favorables, además de mostrar la simulación del programa. Por último,



se proporcionan los resultados de la simulación para el caso de un fluido tipo Bingham a través de un canal donde se presenta el fenómeno de la expansión y contracción súbita, los cuales se contrastan con investigaciones de algunos autores por diferentes métodos de simulación.

## **OBJETIVO GENERAL**

Obtención de perfiles de velocidad, esfuerzos de corte y velocidades de deformación para un fluido tipo Bingham con el método de redes de Boltzmann a través de la propuesta de modificación en el parámetro de relajación en función de la viscosidad aparente.

## **OBJETIVOS PARTICULARES**

1. Generar un modelo de redes de Boltzmann que permita simular el comportamiento para el caso de un fluido tipo Bingham a través de un canal rectangular.
2. Simulación del fenómeno de expansión y contracción súbita en un canal, para el caso de un fluido tipo Bingham con el método de redes de Boltzmann generado.

## ESTADO DEL ARTE

Dentro de la literatura en el ámbito de investigación internacional concerniente al Método de Redes de Boltzmann (MRB), se encuentran algunos trabajos relacionados con la simulación del fluido de Bingham. En este sentido, Wang (2008), propone un MRB denominado D2Q9 para este tipo de fluidos. La importancia radica principalmente, en la incorporación del efecto de la velocidad local de cizallamiento en la función de la distribución del modelo. Con esta propuesta, se tiene un modelo eficiente y estable, lo cual se consigue durante la relajación de las funciones de distribución de las partículas en el proceso de colisión. En dicho trabajo, se realizaron simulaciones en un canal plano con un rango de números de Bingham de 0 a 2000. Para verificar la viabilidad del modelo, se compararon los resultados de los perfiles de velocidad obtenidos por redes de Boltzmann con la solución analítica de las ecuaciones de movimiento para un flujo de Poiseuille en una rejilla de tamaño de  $42 \times 10$ . Para dichas simulaciones, se tomaron en cuenta las siguientes condiciones: la viscosidad plástica  $1/6$ , cuatro esfuerzos iniciales de deformación ( $0$ ,  $1 \times 10^{-3}$ ,  $5 \times 10^{-3}$  y  $1 \times 10^{-2}$ ) y una diferencia de presión de  $1/3$ . Cabe mencionar que todas estas condiciones se presentaron en unidades de rejilla y son adimensionales. Así mismo, se manejaron diferentes condiciones de frontera, entre ellas las de no deslizamiento en las paredes del canal, de acuerdo con los esquemas de redes de Boltzmann propuestos por Zou y He (1997). Los resultados reportados, demostraron que las regiones de deformación y las regiones de vórtice en las esquinas fueron predichas con precisión por el modelo propuesto y sus valores numéricos estuvieron de acuerdo con los reportados en la literatura.

En investigaciones de Ginzburg & Steiner (2002), utilizaron el MRB en dos y tres dimensiones, con un algoritmo de interfaz libre, para un proceso de llenado en cavidades de aleaciones metálicas con carácter plástico y viscoplástico, utilizando como modelo un fluido de Bingham. Para lo cual, usaron un modelo inmiscible con

dos fases: fluido y vacío, utilizando una ecuación de corrección de Boltzmann para líquidos inmiscibles.

Este modelo, se usa en los métodos de fabricación de aleaciones metálicas, que dependiendo de la velocidad de deformación pueden comportarse como sólido o líquido. Concluyendo que en el método para que tenga un llenado uniforme y sin ningún problema con la viscosidad, éste tiene que trabajar con números de Reynolds bajos, ya que al utilizar condiciones “Bounce-Back” y las de no deslizamiento se ven afectadas al incrementar la velocidad de llenado, lo cual se observa en algunas diferencias en el comportamiento de dispersión cerca del punto de estancamiento del llenado del molde, lo cual requiere realizar investigaciones en regímenes con mayor viscosidad al momento de la simulación del llenado del molde. A pesar de estas dificultades, el método pareció ser muy prometedor para otro tipo de fluidos como los Herschel-Bulkley y potencia, para simulaciones de interfaz libre y multifásica.

En otros estudios realizados por Fusi *et al.* (2014), investigaron el flujo unidimensional de un fluido Bingham con parámetros reológicos dependientes de la presión. Determinaron soluciones explícitas y mostraron condiciones para la existencia o no de un tapón rígido. En esa investigación, se modifican los perfiles clásicos con la asunción que la dependencia de la presión es lineal tanto para la viscosidad como para la fuerza de deformación.

Estudios numéricos del flujo de Bingham usando el MRB fueron realizados por Tang *et al.* (2011), incorporando la modificación del exponencial de Papanastasiou y el MRB incompresible de He-Luo, este método fue empleado evitando inestabilidad numérica, la cual es encontrada en simulaciones de fluidos No-Newtonianos. Se usó el modelo D2Q9, con una rejilla de 100 x 500 con una altura de 0.1 m, un gradiente de presión de 1 Pa/m, viscosidad de 0.01 kg/ms<sup>2</sup> y  $\tau_0$  entre los rangos de 0.001 a 0.04 kg/ms<sup>2</sup>. La validación del fluido de Bingham fue realizada por medio de un flujo en un canal plano, para lo cual, los resultados coincidieron con las soluciones analíticas.

El trabajo de Kefayati & Huigol (2016), consistió en una simulación bidimensional, para un fluido de Bingham, usando convección mixta en una geometría

rectangular, calentando las paredes laterales. Para ello, se utilizaron dos modelos: un fluido de Bingham sin modificación y otro donde se aplicó el modelo de corrección de Papanastasiou. Se investigaron los efectos del rendimiento sobre el transporte de calor y momento, las variables manipuladas fueron el número de Reynolds (100, 500 y 1000), Prandtl (0,1, 1 y 10), número de Bingham (0, 1, 5 y 10) y el número de Grashof se fijó en 10,000. Los resultados mostraron que, al aumentar el número de Reynolds, aumenta la transferencia de calor y cambia la extensión de la sección no deformada. Además, para números de Reynolds y Prandtl fijos, se observó que el aumentar el número de Bingham disminuye la transferencia de calor, pero aumenta la sección no deformada. Aunque un aumento en el número de Prandtl incrementa la transferencia de calor, no afecta las secciones de las regiones de deformación producidas en la cavidad. Se compararon los resultados de los modelos de Bingham y Papanastasiou, observándose que existe una diferencia visible entre los dos modelos, especialmente en las secciones de deformación.

Finalmente, el trabajo de Kefayati & Huigol (2017), consistió en una simulación de flujo constante, en una sección rectangular con un fluido de Bingham en tres dimensiones. Emplearon el modelo de Bingham sin ninguna corrección, aplicado un enfoque basado en una modificación del MRB junto al método de diferencias finitas. Se evaluaron los efectos del esfuerzo en el rendimiento del momento utilizando dos parámetros: el número de Oldroyd (0,1 - 0,53) y el diámetro hidráulico (1 y 2). La ventaja del nuevo método consistió en modelar el flujo sin pérdida de precisión y reducción de tiempo; así mismo, las ecuaciones de la función de distribución de partículas se resolvieron de manera paralela. Para dichas simulaciones, no se requirieron condiciones de rebote. El nuevo método Diferencias finitas del método de Lattice Boltzmann por sus siglas en inglés FDLBM, resolvió la evolución de las funciones de distribución de partículas,  $f_\alpha$ , y determinan los campos de velocidad y de esfuerzo en tres dimensiones, ya sea en flujo constante o inestable. Con esta nueva propuesta, se tiene una aceptable precisión y estabilidad numérica.

# CAPÍTULO 1. FLUJO DE FLUIDOS

## 1.1 El fluido desde el punto de vista de la dinámica de fluidos

Un fluido en su forma más general se describe como una sustancia que sufre deformación constantemente cuando se le aplica un esfuerzo de corte. Se puede describir en tres niveles: microscópico, mesoscópico y macroscópico.

- **Microscópico.** La evolución de la posición y la velocidad de cada una de las partículas se cuantifica por medio de las leyes de la mecánica de Newton. Dicha evolución es muy compleja, debido a que se obtendría una ecuación para cada una de las partículas, obteniendo así, un gran número de ecuaciones del orden del número de Avogadro.
- **Mesoscópico.** En los límites del nivel macroscópico y el microscopio, tenemos el nivel mesoscópico. Este nivel, se sustenta en la física estadística e involucra funciones de distribución probabilística de partículas, la evolución de estas se encuentra representada en la ecuación de Boltzmann.
- **Macroscópico.** Se rige por medio de las leyes de conservación macroscópicas, la ecuación de continuidad y las ecuaciones de Navier-Stokes, en las cuales, el fluido es considerado como un continuo.

En la industria de alimentos el conocer el comportamiento del fluido, sobre todo las propiedades como densidad y viscosidad son importantes, ya que tienen aplicación para los cálculos en ingeniería de procesos, como es el caso de las líneas de tuberías, bombas, extrusores, mezcladores, cortadores e intercambiadores de calor etc. Así como, para la determinación de la funcionalidad de ingredientes en desarrollo de los nuevos productos, control de calidad a nivel intermedio, pruebas de vida útil y la evaluación de textura de alimentos, entre otros.

## 1.2 La ecuación de continuidad y la de movimiento

Para la caracterización de los fluidos a nivel macroscópico, dos ecuaciones son de suma importancia, las ecuaciones de continuidad y la de movimiento. Para la primera, se considera un elemento de volumen fijo  $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$  en el espacio, y se aplica un campo de velocidades de un fluido. Así mismo, se aplica un balance de materia como el mostrado en la figura (1.1), para obtener la ecuación de continuidad (Velázquez, 2018).

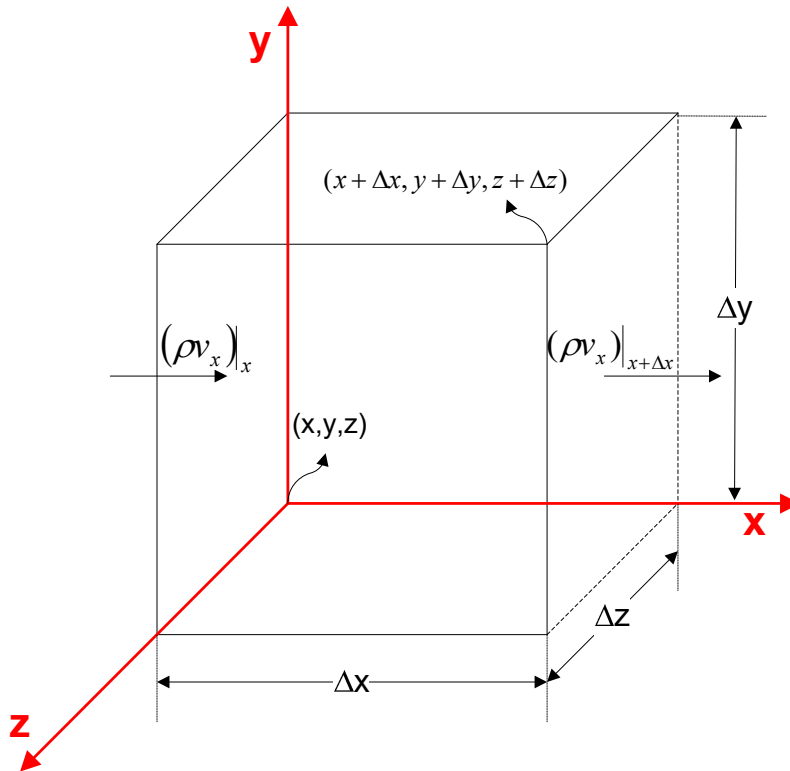


Figura 1.1 Región de volumen  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  fija en el espacio, a través de la cual se hace pasar un campo de velocidades (Velázquez, 2018).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \left( \frac{\partial}{\partial x} \rho v_x + \frac{\partial}{\partial y} \rho v_y + \frac{\partial}{\partial z} \rho v_z \right) \quad (1.1)$$

En la ecuación (1.1), el lado derecho describe las salidas menos entradas de momento por unidad de volumen, mientras que el lado izquierdo describe la acumulación de masa por unidad de volumen.

Para la obtención de la ecuación de movimiento, el procedimiento es similar al utilizado en la ecuación de continuidad, pues también se toma un elemento de volumen ( $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ ), pero se realiza un balance de cantidad de movimiento, obteniendo la ecuación de movimiento en formulación de Lagrange en forma vectorial (Velázquez, 2018).

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\nabla p - [\nabla \cdot \tau] + \rho g_x \quad (1.2)$$

El término izquierdo de la ecuación (1.2), corresponde a la masa por unidad de volumen multiplicada por la derivada sustancial, que engloba las aceleraciones temporales y las espaciales. El primer término del lado derecho es la fuerza de presión; el segundo término son las fuerzas viscosas y el tercer término es la fuerza gravitacional, todas estas fuerzas son por unidad de volumen.

Esta misma ecuación, establece que un pequeño elemento de volumen se mueve, cuando el fluido es acelerado por las fuerzas que actúan sobre él, luego entonces, podemos decir que sigue la segunda ley de Newton: masa por aceleración es igual a la suma de fuerzas.

Una ecuación de movimiento ampliamente utilizada en la dinámica de fluidos es la relacionada con fluidos Newtonianos, la cual se conoce como la ecuación de Navier-Stokes.

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 v + \rho g \quad (1.3)$$

Sin embargo, no todos los fluidos se comportan como Newtonianos, por lo que, para el caso de los fluidos no Newtonianos la ecuación a utilizar es la (1.2), correspondiente a la ecuación de movimiento en formulación Lagrangiana como



ya se había mencionado. Lo anterior, entre otras cosas, nos lleva a presentar una clasificación de diferentes tipos fluidos.

## 1.2.2 Clasificación de los fluidos Newtonianos y no Newtonianos

El comportamiento y clasificación de los fluidos se puede realizar desde el punto de vista de su viscosidad, la cual es una magnitud escalar que mide la facilidad que presenta un fluido a fluir. Para el caso de fluidos Newtonianos, la viscosidad suele denominarse coeficiente de viscosidad y es constante. Esta puede variar con la presión o la temperatura, pero no con el tiempo o la velocidad de deformación.

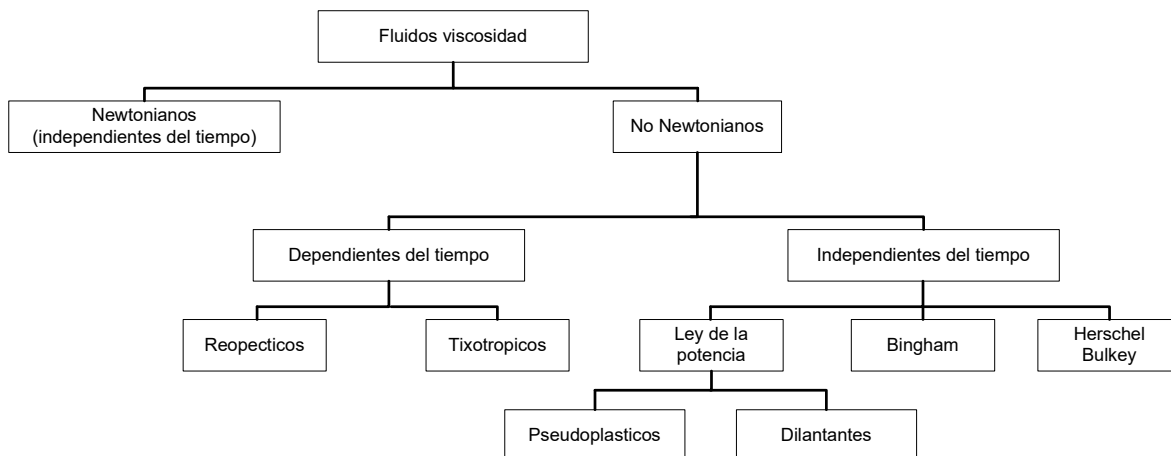


Figura 1.2 Diagrama de clasificación para diferentes tipos de fluidos (Quintans, 2008).

En los fluidos Newtonianos, la tensión de corte  $\tau_{ij}$  y la velocidad de deformación  $\dot{\gamma}$  están linealmente relacionadas por la ley de Newton de la viscosidad.

Para el caso particular de un flujo a través de dos placas estáticas, en el cual el flujo es unidimensional en dirección “x” y en estado estacionario, la ley de Newton de la viscosidad se expresa de la siguiente manera:

$$\tau_{yx} = \mu \dot{\gamma} = \mu \frac{dv_x}{dy} \quad (1.4)$$

En la ecuación (1.4),  $\tau_{yx}$  es la tensión en la dirección x (en la dirección del flujo), sobre la superficie perpendicular al eje y,  $\dot{\gamma}$  es la velocidad de deformación (desviadora) en la dirección del desplazamiento de  $\mu$  es la viscosidad dinámica.

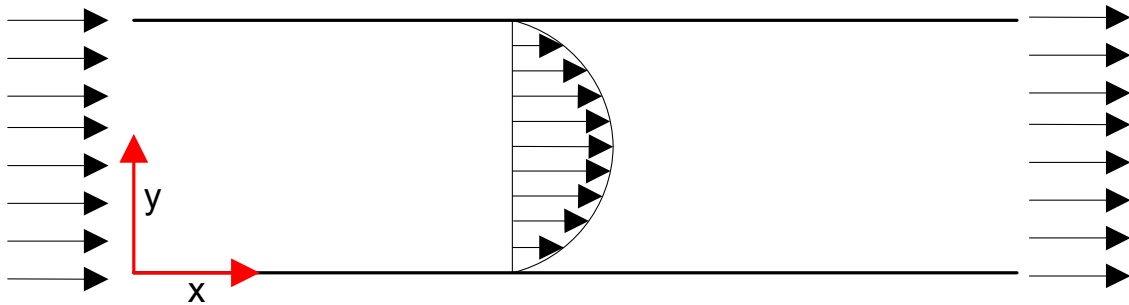


Figura 1.3 Flujo entre dos placas estáticas, correspondiente a un fluido newtoniano (Moreno, 2014).

En el caso más general, la ley lineal relaciona la velocidad de deformación con el tensor de las tensiones desviadoras, en la forma

$$\tau = 2\mu_0 \varepsilon(u) \quad (1.5)$$

En la ecuación (1.5)  $\mu$  es la viscosidad dinámica, la cual será constante en caso de fluido Newtoniano y  $\varepsilon$  es el gradiente simétrico de la velocidad.

Cuando la relación entre la tensión y la velocidad de deformación no es lineal, el fluido se denomina no Newtoniano. Este tipo de fluidos, se subdividen en dos clasificaciones, independientes y dependientes del tiempo.

Para el caso de los fluidos no Newtonianos, la viscosidad ya no es constante, por ello, la relación entre la tensión y de la velocidad de deformación del fluido ya no es lineal. Por tal motivo, ahora surge un nuevo término conocido como la viscosidad aparente o también conocida como viscosidad dependiente de la velocidad de cizalla.

Algunos fluidos presentan una tensión inicial, a partir de la cual el fluido comienza a moverse. Por debajo de esta tensión la velocidad de deformación sería nula. Esta relación no es lineal o, si lo es, no pasa por el origen.

Por otra parte, existen algunos fluidos que tienen “memoria” de su historia de deformación. Dichos materiales una vez deformados, pueden volver a su forma original, parcial o totalmente, demostrando una combinación de efectos elásticos y viscosos. Si se presenta una variación de la viscosidad con la presión, la viscosidad aumenta exponencialmente. Lo anterior se debe a que, estos fluidos al deformarse, se producen cambios estructurales internos, muchas veces dependientes del tiempo. Tomando en cuenta que la viscosidad puede ser afectada por diversos factores como velocidad de cizalla, temperatura, presión y tiempo de cizalla. De acuerdo a esta consideración, muchos materiales pueden ser modelados como fluidos no Newtonianos independientes del tiempo.

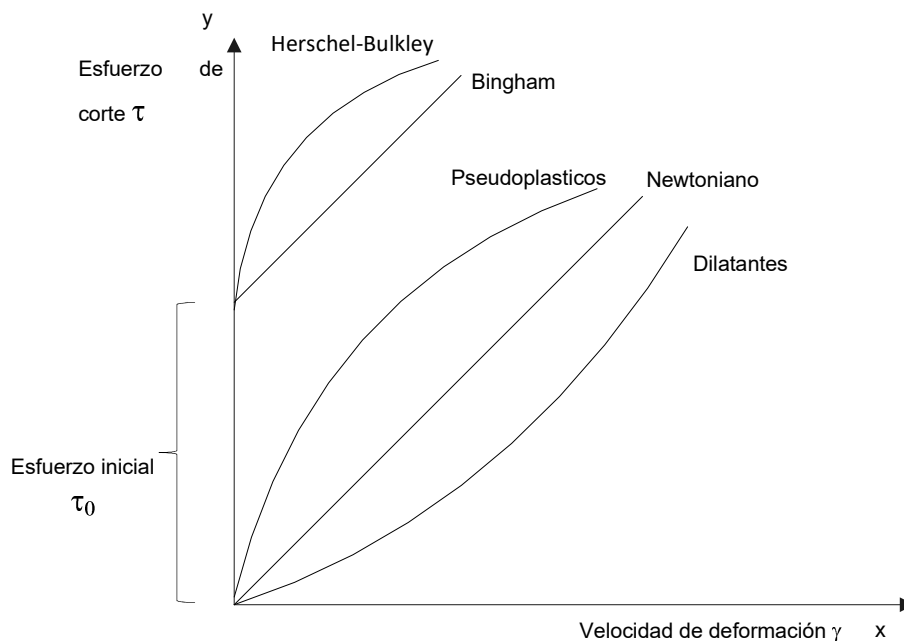


Figura 1.4 Relación entre el esfuerzo de corte y velocidad de deformación para diferentes tipos de fluidos (Daily, 1975).

Algunos ejemplos de fluidos no Newtonianos son especialmente sistemas dispersos de elevado peso molecular; por ejemplo, las pectinas, proteínas y los almidones o también los sólidos insolubles, los cuales presentan un

comportamiento donde el esfuerzo inicial y el esfuerzo de cizalla no son lineales y no pasan por el origen (Rao, 2006).

Los fluidos no Newtonianos pueden clasificarse en tres grandes grupos:

- *Independientes del tiempo*, cuyo modelo es

$$\tau = f(\dot{\gamma}) \quad (1.6)$$

- *Dependientes del tiempo*, cuyo modelo es

$$\tau = f(\dot{\gamma}, t, \text{historia}) \quad (1.7)$$

En la ecuación (1.7), t es el tiempo, la historia se refiere a la memoria de la secuencia de tensiones aplicadas.

- *Fluidos no Newtonianos viscoelásticos*, en los cuales la deformación es parcialmente recuperable, de manera similar a los sólidos elásticos.

### 1.3.1 Dependientes del tiempo

El comportamiento de los fluidos dependientes del tiempo depende solo de la velocidad de deformación, por lo que la tensión puede expresarse de la siguiente forma

$$\tau = f(\dot{\gamma}) \quad (1.8)$$

Algunos de estos fluidos requieren de una tensión de corte mínima para comenzar a moverse o deformarse. A esta tensión mínima se le llama tensión de “*fluencia*”.

Este tipo de fluidos se clasifican en fluidos tixotrópicos y reopécticos, los primeros, en los que su viscosidad disminuye al aumentar el tiempo de aplicación del

esfuerzo cortante, recuperando su estado inicial después de un reposo prolongado, y los fluidos reopécticos, en los cuales su viscosidad aumenta con el tiempo de aplicación de la fuerza y vuelven a su estado anterior tras un tiempo de reposo. Cabe destacar que no todos los fluidos dentro de esta clasificación requieren una tensión de corte mínima.

### 1.3.2 Independientes del tiempo

Estos se clasifican dependiendo del esfuerzo cortante y su viscosidad aparente  $\eta$ , la cual puede expresarse en función de  $\dot{\gamma}$  o de  $\tau$  indistintamente. En las regiones en las que  $\eta$  disminuye o aumenta al incrementar el gradiente de velocidad  $\dot{\gamma}$ , el comportamiento se denomina pseudoplástico o dilatante, dependiendo del caso. Este tipo de fluidos se rigen por medio de la ley de la potencia

$$\tau = k\dot{\gamma}^n \quad (1.9)$$

En la ecuación (1.9), “k” es el índice de consistencia y “n” es el índice de comportamiento al fluido. Mientras más alto sea el valor de “k”, el fluido es más viscoso, y si “n” se aleja de la unidad, más pronunciadas serán las propiedades no Newtonianas del fluido. Así pues, si “n” es menor que la unidad, el fluido es pseudoplástico y la viscosidad aparente disminuye con el aumento del esfuerzo o del gradiente. Si n es mayor que la unidad el fluido es dilatante y su viscosidad aparente aumenta con el incremento del esfuerzo o del gradiente (Reyes, 2012), como se puede ver en la figura 1.4.

### 1.3.3 Fluidos adelgazantes

Para el caso de los fluidos pseudoplásticos a escala logarítmica, la relación tensión-velocidad de deformación es asintóticamente lineal, con una pendiente entre 0 y 1. La explicación a este fenómeno es que, con el aumento de la velocidad de deformación, las moléculas (o estructura interna del fluido) se alinean progresivamente. Este comportamiento es característico de algunos polímeros, soluciones de polímeros y algunas suspensiones.

Otras ecuaciones empíricas para describir comportamientos adelgazantes son los modelos de:

$$\text{Prandtl; } \tau = A \sin^{-1} \left( \frac{\dot{\gamma}}{C} \right) \quad (1.9)$$

$$\text{Eyring; } \tau = \frac{\dot{\gamma}}{B} + C \sin \left( \frac{\tau}{A} \right) \quad (1.10)$$

$$\text{Powell Eyring; } \tau = A \dot{\gamma} + B \sinh^{-1} (C \dot{\gamma}) \quad (1.11)$$

$$\text{Ellis; } \tau = \frac{\mu_0}{1 + \left( \frac{|\tau|}{\tau_{1/2}} \right)^{\alpha-1}} \quad (1.12)$$

$$\text{Carreau-Yasuda; } \tau = \mu_0 \left[ 1 + (\dot{\gamma})^{1/3} \right]^{(n-1)/1.3} \dot{\gamma} \quad (1.13)$$

En estas ecuaciones A, B, C,  $\mu_0$ , m, n son constantes características de cada fluido,  $\alpha \sim 1.3$ ,  $\alpha > 1$ ,  $\tau_{1/2}$ , es la magnitud de la tensión cuando la viscosidad es la mitad de la viscosidad a cizallamiento nulo. Estas ecuaciones constitutivas son considerablemente más difíciles de utilizar que la ley potencial en derivaciones analíticas, pero se usan a menudo en aproximaciones numéricas.

### **1.3.4 Fluidos espesante**

Los fluidos espesantes son sistemas dispersos altamente concentrados en los que la viscosidad se incrementa a medida que se incrementa la velocidad de deformación. De ahí proviene la utilización del término “dilatante”. Por eso, su comportamiento se representa por medio de la ley potencial  $n > 1$ .

El fenómeno de dilatancia en los fluidos fue descubierto por Osborne Reynolds en 1885, y se refiere a la expansión de un volumen debido a la deformación de corte en donde explica en la teoría cinética de los medios granulares, que considerando un material poroso, éste para bajas velocidades de deformación, la porosidad disminuye y las partículas del medio están más unidas; a altas velocidades de deformación, este empaquetamiento de partículas se rompe, por lo que, la porosidad aumenta y el material se expande.

### **1.3.5 Fluidos con tensión de fluencia o esfuerzo inicial**

Algunos fluidos muestran una tensión de fluencia o esfuerzo inicial  $\tau_0$ , por debajo de la cual no hay velocidad de deformación y el comportamiento es similar a un sólido.

El modelo más sencillo para estos fluidos es el rígido-plástico, donde el material se comporta como un sólido rígido para valores menores a los de tensión de fluencia, mientras que, para los valores de tensión mayores a la tensión de fluencia, se comporta como un plástico perfecto, la viscosidad es lineal y las tensiones permanecen constantes para cualquier valor de velocidad de deformación.

### 1.3.5.1 Modelo de Bingham

Eugene C. Bingham describió a las pinturas con este modelo en 1919, publicado en su libro “*Fluidity and Plasticity*” en 1922. El modelo fue analizado por Oldroyd, Reiner y Prager, las pinturas, las lechadas, la pasta dental, los lodos, algunos fluidos de perforación y sustancias alimenticias como la margarina, la mayonesa y el ketchup son buenos ejemplos de los plásticos de Bingham.

Este tipo de fluido es de carácter viscoplástico y se caracteriza por presentar una tensión de corte mínima, denominada tensión de fluencia. Por encima de esta tensión de corte mínima el fluido comienza a moverse. En caso de no superarse esta tensión de fluencia, el fluido se comporta como un cuerpo rígido o cuasi-rígido, con velocidad de deformación nula.

La característica principal del modelo de Bingham es el esfuerzo inicial o tensión de fluencia, necesario para producir fluencia. Por debajo de este esfuerzo, la velocidad de deformación se considera nula.

La relación entre el esfuerzo de corte frente al gradiente de velocidad es lineal, pero no pasa por el origen para un plástico de Bingham, su modelo matemático está dado por

$$\tau_{yx} = -\mu_0 \frac{dv_x}{dy} \pm \tau_0 \text{ si } |\tau_{yx}| > \tau_0 \quad (1.14)$$

$$\frac{dv_x}{dy} = 0 \text{ si } |\tau_{yx}| < \tau_0$$

$$\mu(\dot{\gamma}) = \mu_0 + \frac{\tau_y}{\dot{\gamma}} \text{ para } \tau > \tau_y \quad (1.15)$$

$$\dot{\gamma} = 0 \text{ para } \tau \leq \tau_y$$

Donde  $\mu_0$  es la viscosidad plástica y  $\mu(\dot{\gamma})$  la viscosidad aparente, la cual disminuye con el incremento en la magnitud de la velocidad de deformación.

En consecuencia, el tensor de tensiones desviadoras es



$$\tau = 2 \left( \mu_0 + \frac{\tau_y}{\dot{\gamma}} \right) \varepsilon(u) \text{ para } \tau > \tau_y \quad (1.16)$$

$$\dot{\gamma} = 0 \text{ para } \tau \leq \tau_y$$

Otros ejemplos de fluidos tipo Bingham en los alimentos son la salsa de tomate, mayonesa, crema batida, clara de huevo batida, margarina y condimentos tipo mostaza.

### 1.3.5.2 Magnitudes adimensionales

El número de Bingham es un número adimensional cuya denominación es con el símbolo,  $Bn$  y se define como:

$$Bn = \frac{\tau_y H}{\mu V} \quad (1.17)$$

Donde  $V$  es una velocidad característica del flujo viscoplástico,  $H$  es una longitud característica y  $\mu$  es la viscosidad del fluido de Bingham.

El número de Bingham se relaciona con la tensión de fluencia  $\tau_{y|}$  con la tensión ocasionada por una velocidad de deformación característica  $\left( \dot{\gamma}_0 = \frac{V}{H} \right)$ .

En el caso de un fluido Newtoniano el valor del número de  $Bn$  será igual a cero, para un caso opuesto, el número de Bingham puede tener números muy altos, al tratarse de un sólido.

### 1.3.5.3 Tensión adimensional de fluencia

En flujos viscoplásticos es conveniente mostrar los resultados en función de una tensión de fluencia adimensional,  $\tau_{y|}$ , definida por Papanastasiou como

$$\tau_y = \frac{\tau_y H}{\mu V_N} \quad (1.18)$$

donde  $V_N$  es una velocidad característica tomada como la velocidad promedio del líquido Newtoniano de la misma viscosidad del modelo viscoplástico.

Los fluidos con tensión de fluencia generalmente presentan dos problemas:

- Estos modelos ideales presentan singularidad para la viscosidad cuando la velocidad de deformación es nula.
- Además, en algunos casos, no está acotada la función de la viscosidad cuando la velocidad de deformación tiende a cero ( $\lim_{\dot{\gamma} \rightarrow 0} \mu \rightarrow \infty$ ).

Estos problemas no son limitación en soluciones analíticas para problemas simples, pero resultan inconvenientes en la solución numérica.

Para evitar las dificultades y lograr la formulación computacional, se han propuestos los modelos regularizados. Estos modelos se iniciaron en el año de 1972 con Fortin, continuando con el trabajo de Zienkiewicz y Gogbole. Los modelos más populares por su simplicidad algebraica fueron los modelos de Bercovier y Engelman. Un modelo que también ha sido muy utilizado es el modelo de doble viscosidad, inicialmente propuesto por Tanner y Milhoper.

Uno de los últimos modelos más usados en nuestros días es el modelo de Papanastasiou. Sin embargo, Souza Mendes y Dutra (2004) han propuesto recientemente una modificación del modelo de Papanastasiou.

#### **1.3.5.4 Modelo de Bercovier y Engelman**

En 1980, el modelo de Bercovier y Engelman fue el primer intento para resolver la singularidad para el modelo de Bingham de una manera muy simple por medio de la siguiente regularización

$$\mu(\dot{\gamma}) = \mu_0 + \frac{\tau_y}{\dot{\gamma} + e} \quad \text{para } \tau \geq \tau_y \quad (1.19)$$

$$\dot{\gamma} = 0 \quad \text{para } \tau < \tau_y$$

donde  $e$  es una velocidad de deformación muy pequeña, por ejemplo,  $e = 10^{-3} s^{-1}$ , que actúa como parámetro de regularización. Con este modelo, sus autores, resolvieron numéricamente el problema de cavidad 2D, pero no mostraron las zonas de fluencia y no fluencia de acuerdo, con el criterio de tensión de fluencia  $\tau = \tau_y$ ; en cambio, presentaron contornos definidos por  $\dot{\gamma} = e$ . Obtuvieron buenos resultados para el flujo de Poiseuille.

Posteriormente, Beris en 1985 usó el modelo de Bercovier y Engelman, teniendo en cuenta la ecuación para la zona rígida ( $\dot{\gamma} < e$ ). Con este nuevo modelo resolvieron el problema de una esfera cayendo en un medio infinito. En este estudio encontraron las zonas de fluencia y no fluencia y un importante criterio de cese del movimiento de las esferas.

### 1.3.5.5 Modelo de Tanner y Milthorpe

El modelo introducido originalmente por Tanner y Milthorpe, describe con doble viscosidad lineal que regulariza el fluido de Bingham.

Este modelo de doble viscosidad sustituye el comportamiento rígido del modelo ideal para valores de tensiones por debajo de la tensión de fluencia por una dependencia lineal entre la tensión y la velocidad de deformación. El modelo para el fluido de Bingham es

$$\mu_0 + \frac{\tau_y}{\dot{\gamma}} \quad \text{para } \dot{\gamma} > \dot{\gamma}_c \quad (1.20)$$

$$\mu(\dot{\gamma}) = \mu_y \quad \text{para } \dot{\gamma} \leq \dot{\gamma}_c$$

En la ecuación (1.20),  $\mu_\gamma$  es la viscosidad crítica y  $\dot{\gamma}_c$  es la velocidad de deformación crítica. Para esta velocidad de deformación crítica la tensión es

$$\mu_\gamma \dot{\gamma}_c = \mu_0 \dot{\gamma}_c + \tau_y \quad (1.21)$$

Por tanto, la velocidad de deformación crítica está dada por

$$\dot{\gamma}_c = \frac{\tau_y}{\mu_\gamma - \mu_0} \quad (1.22)$$

El valor de  $\mu_\gamma$  debe ser grande para aproximar el modelo ideal. Una buena aproximación recomendada por Beverly y Tanner (1983) es tomar  $300 \leq \frac{\mu_\gamma}{\mu_0} \leq 1000$ .

El inconveniente de este modelo es que para la viscosidad crítica se tiene una tensión crítica  $\tau_c$  algo mayor que la tensión de fluencia. Esta tensión crítica es

$$\tau_c = \tau_y \frac{\mu_\gamma}{\mu_\gamma - \mu_0} > \tau_y \quad (1.23)$$

La figura (1.5), muestra el comportamiento bilineal propuesto por Tanner y Milthorpe, representado por la línea en color azul.

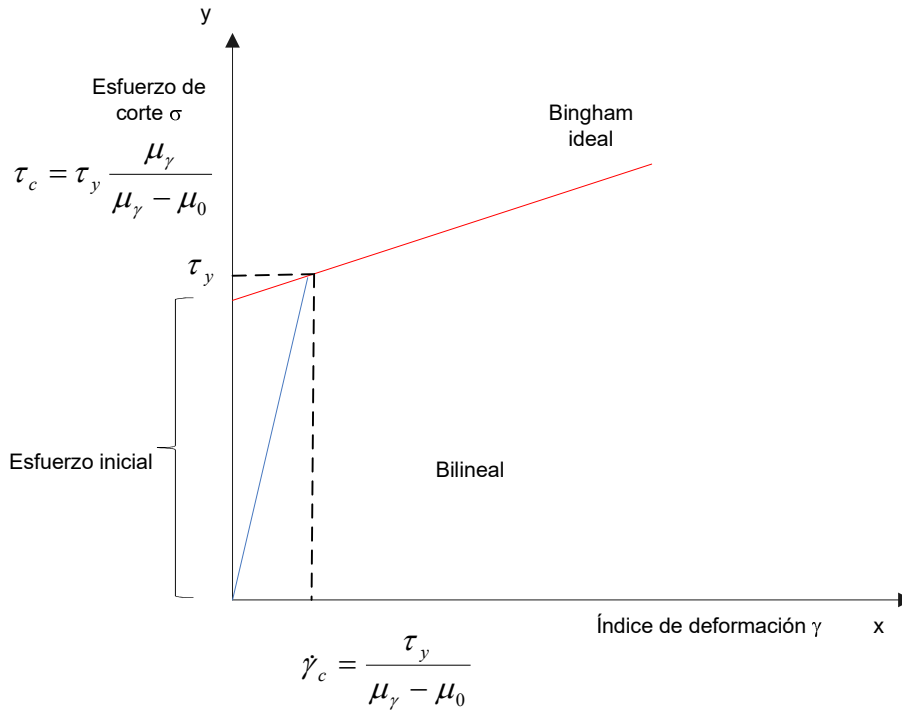


Figura 1.5.- Curvas del modelo de Bingham, modelo bilineal, (Moreno, 2014).

### 1.3.5.6 Modelo de Papanastasiou

Papanastasiou propuso una regularización exponencial para el término de la tensión de fluencia del modelo de Bingham, debido a los problemas de la limitación debido a la singularidad de la viscosidad  $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ .

El modelo de Papanastasiou es uno de los modelos más usados en la resolución de problemas para fluidos viscoplásticos en cálculos numéricos para los fluidos de Bingham, debido a su facilidad de implementación.

La ventaja que presenta el modelo es que describe, con una sola ecuación, tanto las zonas de fluencia como las de no fluencia, mediante una función suavizada de la viscosidad que depende de la velocidad de deformación y de un parámetro de regularización ( $m$ ), modificando la viscosidad aparente  $\mu(\dot{\gamma})$  del modelo ideal de la forma

$$\mu(\dot{\gamma}) = \mu_0 + \frac{\tau_y}{\dot{\gamma}} (1 - \exp(-m\dot{\gamma})) \quad (1.24)$$

El tensor de las tensiones desviadoras es

$$\tau = 2 \left( \mu_0 + \frac{\tau_y}{\dot{\gamma}} (1 - \exp(-m\dot{\gamma})) \right) \varepsilon(u) \quad (1.25)$$

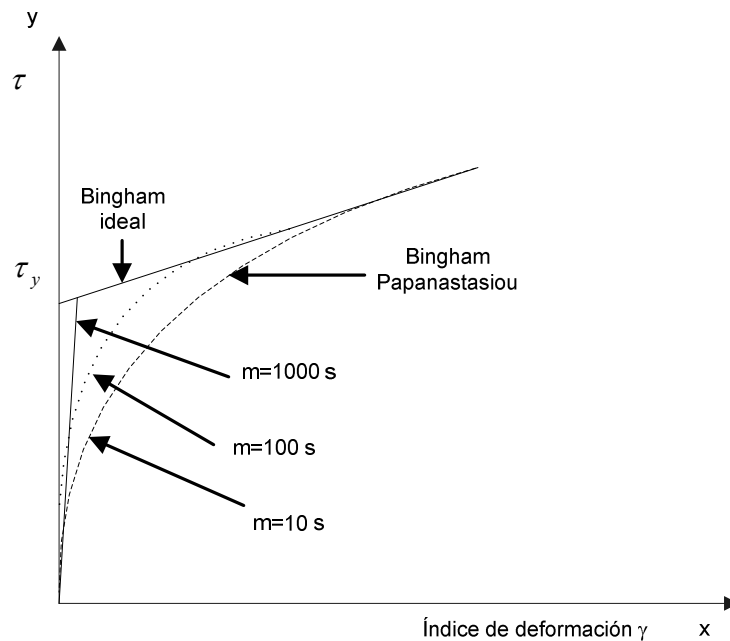


Figura 1.6.- Modelo regularizado de Papanastasiou para el fluido de Bingham con diferentes valores del parámetro de regularización "m", (Moreno, 2014).

En la figura 1.6 se encuentran representados diferentes valores de m considerados en el modelo de Papanastasiou. La viscosidad en la ecuación (1.24) está acotada cuando el gradiente de la velocidad de deformación tiende a cero. Desarrollando en serie de Taylor y despreciando los términos de más de segundo orden, se tiene que

$$\mu_{\max} = \lim_{\dot{\gamma} \rightarrow 0} \mu(\dot{\gamma}) = \mu_0 + m \tau_y \quad (1.26)$$

Para valores muy altos del parámetro de regularización, es recomendable definir un valor  $\mu_t < \mu_{\max}$  para velocidades de deformación muy bajas  $\dot{\gamma} < \dot{\gamma}_t$ , en la figura 1.7 se puede apreciar la influencia del parámetro de regularización.

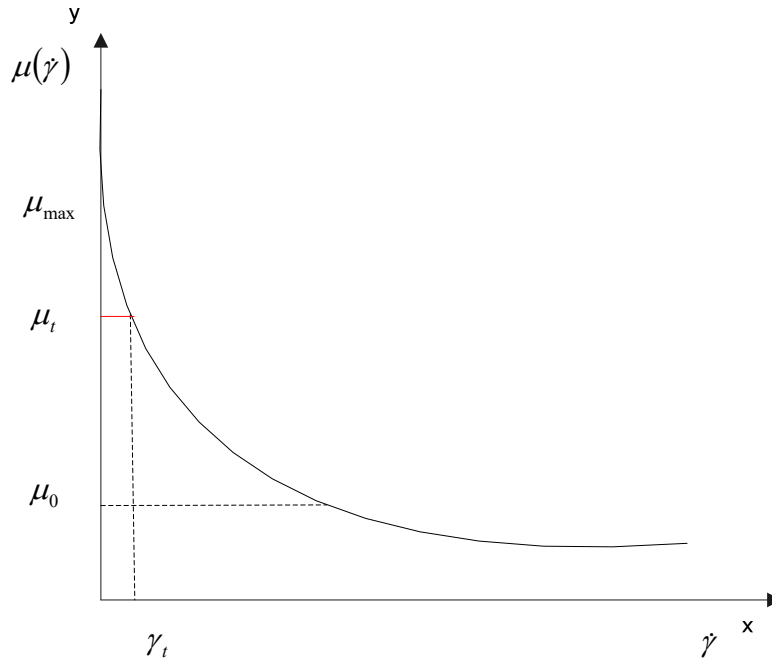


Figura 1.7.- Variación de la viscosidad con la velocidad de deformación en los modelos de Papanastasiou y SMD, (Moreno, 2014).

### 1.3.5.7 Modelo de Souza Mendes y Dutra (SMD)

Otro modelo es el de Souza Mendes y Dutra (SMD), el cual propone la regularización exponencial que afecta a todos los términos de la viscosidad

$$\mu(\dot{\gamma}) = \left( \mu_0 + \frac{\tau_y}{\dot{\gamma}} \right) \left( 1 - \exp\left( -\frac{\eta_0}{\tau_y} \dot{\gamma} \right) \right) \quad (1.27)$$

Además, el parámetro de regularización se sustituye por un parámetro que depende de la viscosidad del fluido a cizallamiento nulo  $\eta_0$  y la tensión de fluencia  $\tau_y$  es

$$m = \eta_0 / \tau_y \quad (1.28)$$

El límite para la viscosidad cuando la velocidad de deformación es cero esta dado por

$$\mu_{\max} = \lim_{\dot{\gamma} \rightarrow 0} \mu(\dot{\gamma}) = m \tau_y \quad (1.29)$$

### 1.3.5.8 Solución analítica Bingham, Flujo de Poiseuille

El flujo de Poiseuille es un flujo estacionario que se desarrolla entre placas paralelas e infinitas, que se encuentran fijas. Su nombre se debe a Jean Louis Marie Poiseuille, quien en 1838 estudió experimentalmente el flujo laminar incompresible a través de un tubo; entre 1840 y 1846 lo describió matemáticamente.

La distribución de velocidades para el fluido de Bingham en un fluido de Poiseuille se obtiene haciendo  $n = 1$

$$\frac{\Delta P}{2K} [(y_1 - y)^2 - (y_1)^2] \quad \text{para } 0 \leq y < y_1 \quad (1.34)$$

$$u(y) = -\frac{\Delta P}{2k} (y_1)^2 \quad \text{para } y_1 \leq y \leq y_2$$

$$u_{\text{tope}} + \frac{\Delta P}{2k} [(y - y_2)^2 - (H - y_2)^2] \quad \text{para } y_2 \leq y \leq H \quad (1.35)$$

Las superficies de fluencia se encuentran en  $y_1$  y  $y_2$ :

$$y_1 = \frac{2\tau_y}{\Delta P} - \frac{H}{2}, \quad y_2 = \frac{2\tau_y}{\Delta P} + \frac{H}{2} \quad (1.36)$$



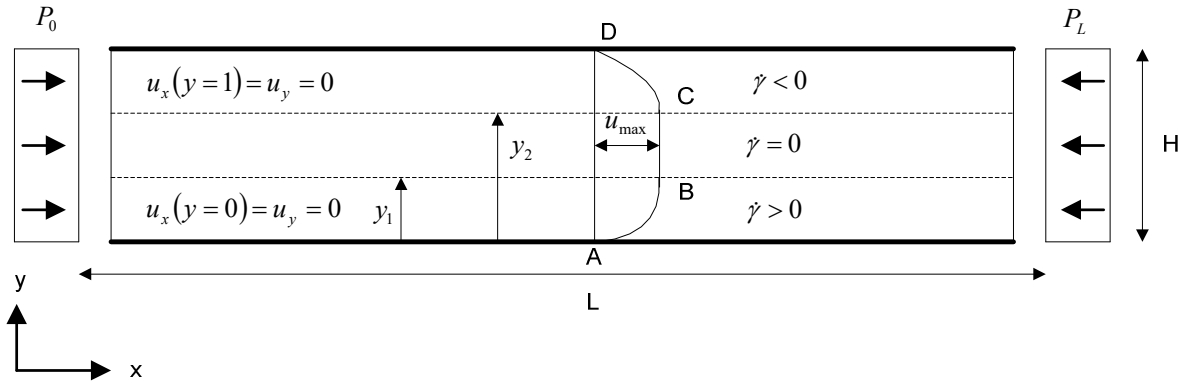


Figura 1.8.- Geometría y condiciones de contorno en una expansión súbita, (Moreno, 2014).

## 1.4 Flujo de expansión súbita

Este flujo ha sido estudiado experimentalmente para un fluido Newtoniano por Alleborn en 1997, que establece casos limitantes para la geometría y los parámetros del flujo. Hace referencia a un valor crítico del número de Reynolds ( $Re_c=218$ ) para una expansión plana con relación de expansión 1:2; para valores de Reynolds tales que  $Re < Re_c$  hay una única, simétrica y estable configuración del flujo; a partir de ese valor crítico, el flujo presenta asimetría.

El problema de flujo de una expansión repentina ha sido simulado por medio de elementos finitos, diferencias finitas y el método de Lattice Boltzmann, entre otros. Los estudios de este problema se iniciaron para el caso Newtoniano y se realizaron después para casos no newtonianos. Para fluidos de Bingham, los investigadores mencionados utilizan el modelo regularizado de Papanastasiou. Para el flujo de Bingham, en este trabajo, se estudian las zonas de turbulencia para diferentes valores de la tensión de fluencia y diferentes números de Bingham. El flujo estudia varios números de Reynolds, considerando la velocidad promedio del flujo de Bingham.

La velocidad se adimensionaliza dividiéndola por la velocidad promedio del flujo Newtoniano  $V_n = 1 \text{ m/s}$  con la misma viscosidad que para el fluido viscoplástico de Bingham. La solución analítica de Poiseuille para la velocidad en el canal de

entrada y en el canal de salida es la obtenida en la ecuación 1.34 y 1.35. Los perfiles completamente desarrollados en la entrada y en la salida se muestran en la figura 1.8, respectivamente para los diferentes valores de  $\tau_y$ . En el canal de salida la velocidad máxima está relacionada con la expansión del canal y resulta de la conservación de *momentum*. La velocidad máxima en la salida,  $V_{\max}^s$ , es proporcional a la velocidad máxima en la entrada,  $V_{\max}^e$  e inversamente proporcional a la expansión del canal,  $H:2H$ . Esto es:  $V_{\max}^s / H = V_{\max}^e / 2H$ .

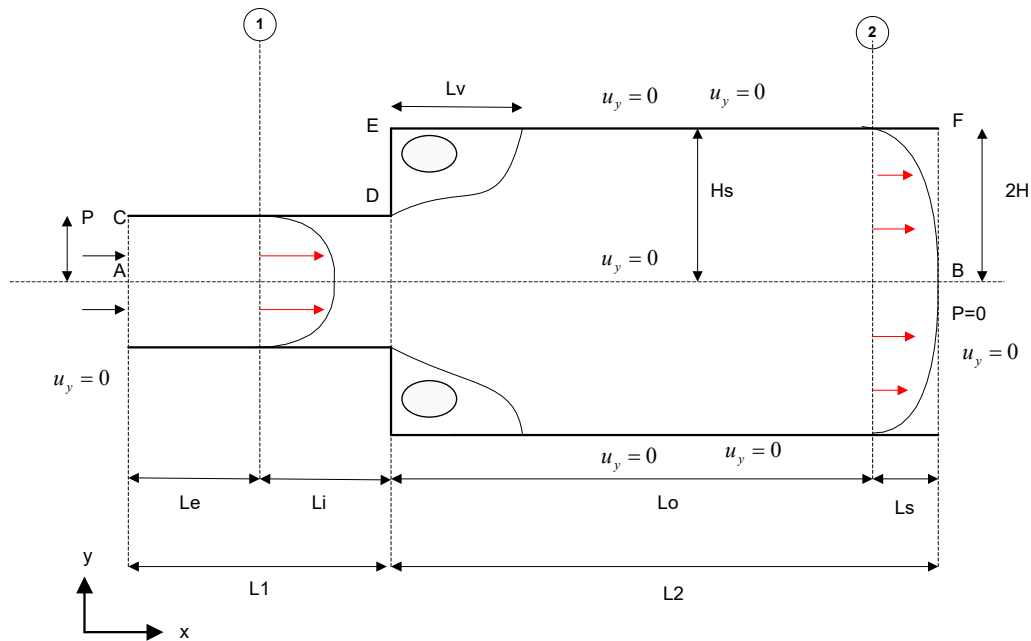


Figura 1.9.- Geometría y condiciones de contorno en una expansión súbita, (Moreno, 2014).

La condición de no deslizamiento se impone en las paredes de la cavidad de la expansión a lo largo de CDEF. La condición de deslizamiento se impone a lo largo del plano de simetría, AB. El fluido se mueve por la aplicación de un gradiente de presión. En la sección de salida BF la presión es nula. En la entrada AC se aplica un perfil de presiones  $P$  constante de manera tal que se produzca el gradiente de presión deseado.

Los efectos de entrada debido a la aplicación de esta presión son importantes en la sección CA y mucho menos importantes en la sección de salida BF. Desde la sección de entrada, se desarrolla una capa límite, en una longitud  $Le$ , que desaparece en la sección 1; en esta sección 1, el perfil de velocidades está

completamente desarrollado. Después de la expansión, el perfil de velocidades se desarrolla a lo largo de  $L_0$  (canal expandido) hasta la sección 2; este perfil totalmente desarrollado se mantiene en el resto del canal de salida ( $L_s$ ). Una vez que se ha desarrollado completamente el perfil de velocidades, éste es independiente de la longitud del canal ( $L_i$  y  $L_s$ ).

La longitud de entrada,  $L_e$ , y la de salida,  $L_o$ , deben ser lo suficientemente grandes como para permitir el completo desarrollo de los perfiles de velocidad en la secciones 1 y 2 (Figura 1.9). La longitud de entrada mínima de  $L_e = 4R$  ( $R$  es el radio del cilindro) es estándar en el caso axisimétrico. En el caso de geometrías planas esta longitud se toma  $L_e = 4H$  ( $H$  es la mitad del ancho del canal). En el canal de salida se sugiere usar una longitud adimensional  $L_s/H$  en función del número de Reynolds como  $L_s/H = 8+0.08Re$ . Para  $Re = 100$ , esta longitud resulta en  $L_s/H = 16$ .

## **CAPÍTULO 2. EL MÉTODO DE REDES DE BOLZTMANN**

### **2.1 Simulación computacional**

La simulación, es una herramienta con la cual podemos observar el comportamiento de un fenómeno y posteriormente, nos ayuda a predecir y en consecuencia reduce de manera sustancial el número de experimentos, tiempo y recursos económicos, logrando la optimización e incluso la automatización de procesos.

Muchas han sido las propuestas dentro del área de mecánica de fluidos en la simulación computacional, con la finalidad de resolver o explicar el comportamiento de estos, sobre todo en fluidos de carácter complejo, tales como los sistemas dispersos heterogéneos (emulsiones, suspensiones y soles). En la industria de los alimentos se tienen muchos fluidos de carácter complejo, ya sea porque se encuentran en la naturaleza de esa manera o por el proceso de transformación para su elaboración.

En décadas pasadas, el ingeniero no tenía suficientes herramientas para realizar todos los cálculos necesarios para el funcionamiento de un proceso, mucho menos el comportamiento de éste. En el caso de la mecánica de fluidos, las ecuaciones de Navier-Stokes (NS) se limitaban a resolverlas solo para un número reducido de casos. Con el avance de las computadoras y los potentes ordenadores, surge la Dinámica de Fluidos Computacional (CFD), la cual ha simplificado pasos, desarrollado soluciones numéricas para las ecuaciones de NS, además de optimizar procesos. Hoy en día es inevitable y progresivo su avance, pues anteriormente los altos costos y el consumo de tiempo asociado con la experimentación a menudo impidió en algunos casos el deseo de producir de manera eficiente buenos resultados.

Como se mencionó anteriormente, la incapacidad de resolver ecuaciones que determinan el comportamiento de un fluido ha llevado a encontrar diversas formas de solución. Entre estos métodos se encuentra la técnica de modelación matemática (métodos numéricos). Esta técnica es eficiente y permite resolver problemas complejos obteniendo resultados en un periodo de tiempo corto.

Los métodos teóricos se han convertido en una alternativa para la solución de problemas de flujo de fluidos, y estos generalmente se dividen en dos categorías, la primera cubre todos los *métodos analíticos*, los cuales en la mayoría de los casos tienen una solución complicada, por lo cual en ocasiones la opción no es práctica, la segunda opción corresponde a los *métodos numéricos*, los cuales dan como resultado una serie de valores aproximados, para la solución deseada. En esta categoría se encuentran los métodos más ampliamente usados como el Método de Diferencias Finitas (MDF), Método de Volumen Finito (MVF) y el Método de Elemento Finito (MEF). De igual forma, existen otros métodos como los elementos de frontera y el autómata celular entre otros.

La principal diferencia entre las tres técnicas está asociada con las variables de flujo y el proceso de discretización. En la tabla 2.1, se muestra la comparación de los métodos experimentales, teóricos y numéricos.

## **2.2 Métodos de la Dinámica de Fluidos Computacional**

### **2.2.1 Diferencias finitas**

El MDF, es el método más antiguo para la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales, introducido por Euler durante el siglo XVIII. También es el método más fácil de usar para la aplicación a problemas con geometrías simples. El punto de inicio del método es la ecuación diferencial de una variable  $\phi$ . La variable desconocida  $\phi$  se describe por medio de puntos sobre los nodos de una malla (el dominio de solución es cubierto por una malla). En cada punto de la malla, la ecuación diferencial es aproximada reemplazando las derivadas parciales

por aproximaciones finitas usando una expansión en series de Taylor o polinomios ajustados, los cuales son usados para obtener las aproximaciones de diferencias finitas para la primera y segunda derivada de  $\phi$  con respecto a las coordenadas en término de los valores nodales. El resultado es una ecuación algebraica para  $\phi$  en cada nodo de la malla donde el valor de la variable en el nodo genérico y en ciertos nodos vecinos aparece como incógnitas. EL MDF tiene ciertos inconvenientes, uno de ellos es aplicarlo en mallas no regulares y es un método no conservativo. En resumen, es un método general que permite la resolución aproximada de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales definidas en recintos finitos.

Tabla 2.1.- Ventajas, desventajas de métodos de simulación computacional.

Método	Ventajas	Desventajas
<b>Experimental</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Fenómeno más realista</li> </ul>	Equipo requerido Problemas de escalamiento Dificultad de mediciones Costo operacional
<b>Teórica</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Fenómeno más general</li> </ul>	Geometría y procesos físicos ideales Fenómenos lineales
<b>Numérica</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Geometría y procesos físicos más realistas</li> <li>Evolución temporal del fenómeno</li> </ul>	Delimitar condiciones frontera Costo computacional

## 2.2.2 Método de Volúmenes Finitos

Fue desarrollado originalmente como una forma especial de formulación de diferencias finitas, el punto de inicio de este método es usar la forma integral de las ecuaciones de la conservación, este a su vez tiene un número finito de

volúmenes de control (VC) contiguos y las ecuaciones de conservación son aplicadas para cada VC. Para expresar los valores de las variables en las superficies de VC en términos de los valores nodales se utilizan interpolaciones. Como resultado se obtiene la ecuación algebraica para cada VC, en el cual aparecen valores de los nodos vecinos. EL MVF puede ser adecuado a cualquier tipo de malla y aplicado a geometrías complejas, la cual define las fronteras de los volúmenes de control. Esto requiere dos niveles de aproximación: interpolación e integración.

### **2.2.3 Método de Elementos Finitos**

Fue introducido por Tuner en 1956, se empleó en principio para el análisis estructural, consiste en una generalización de los métodos de principio variacional y de residuos pesados, los cuales están basados en la idea de la solución  $\phi$  de una ecuación diferencial puede ser representada como una combinación lineal de parámetros desconocidos  $c_j$  y de funciones apropiadas  $\phi_j$  para el dominio entero del problema. El MEF inicia con una propuesta de solución de  $\phi$  en función de  $c_j$  y  $\phi_j$  y es sustituida en las ecuaciones de conservación, pero como la propuesta no satisface el dominio completo de solución, entonces queda como un valor residual. Y para reducir estos residuales, se multiplica por un grupo de funciones de peso e integrarlos (igualando las integrales a cero) y se obtiene un grupo de ecuaciones algebraicas para coeficientes desconocidos  $c_j$  de las funciones de aproximación. Y así seleccionar la mejor solución dentro del grupo de funciones permitidas.

## **2.3 Autómata Celular**

Un autómata celular es un modelo matemático para un sistema dinámico, compuesto por un conjunto de celdas o células que adquieren distintos estados o valores. Estos estados son alterados de un instante a otro en unidades de tiempo

discreto, es decir, que se puede cuantificar con valores enteros a intervalos regulares. De esta manera este conjunto de células logran una evolución según una determinada expresión matemática, que es sensible a los estados de las células vecinas, la cual se le conoce como regla de transición local.

Un autómata finito es un modelo de sistema con entradas y salidas discretas, consiste en un conjunto finito de estados y un conjunto de transiciones entre esos estados. La entrada y el estado actuales del autómata determinan su conducta en el instante siguiente. Un autómata celular consiste de dos componentes: el primero es un espacio celular, una red de "n" celdas de estado finito, cada una con un patrón idéntico de conexiones locales con otras celdas, junto con condiciones de límite, si se trata de una red finita. El segundo componente consiste en reglas de transición que actualizan, o bien definen los estados de cada celda, donde éstos estados junto con el de las celdas conectadas a ellas dan lugar a lo que es un nodo vecino.

## **2.4 Lattice Gas Autómata Celular**

En 1986 Frisch, Hasslacher y Pomeau programaron una célula autómata a la que lograron implementar la ley de conservación de masa, reproduciendo la complejidad del flujo de un fluido, en una rejilla, malla o Lattice en forma hexagonal simétrica.

Cada rejilla tenía seis partículas que seguían las siguientes reglas:

- Todas las partículas tienen la misma masa.
- Todas las partículas se mueven en seis direcciones definidas por la malla.
- En cierto lapso las partículas pueden moverse hacia un nodo cercano, si dos o más partículas llegan al mismo sitio, pueden chocar, algunas colisiones pueden causar que las partículas se dispersen, esto es, su velocidad cambia, mientras otras no. Sin embargo, las colisiones no cambian el número total de partículas,



ni el vector suma de sus velocidades, masa y momento son conservados, lo que significa que las partículas tienen la misma energía al desplazarse.

- Dos partículas en el mismo sitio no se pueden mover hacia la misma dirección.

Uno de estos métodos de CFD es el método de Lattice Boltzmann (LB) es una técnica de simulación computacional recientemente desarrollada, que ha ganado atención en el mundo académico, especialmente para la simulación de fluidos complejos a escala mesoscópica (Maso 2015); (Van der Sman 2016).

## **2.5 Lattice Boltzmann**

El método de la Ecuación de Lattice Boltzmann (LBE), se fundamenta en la teoría cinética, utilizada para la simulación de flujos en la mecánica de fluidos, donde las partículas se mueven sobre un Lattice o rejilla regular y en cada paso de tiempo las partículas se propagan redistribuyendo su velocidad utilizando una fase de colisión local.

### **2.5.1 Escalas**

Tal como se muestra en la figura 2.1, la escala mesoscópica, se encuentra entre la escala molecular o microescala y la escala macroscópica, donde esta última asume que las cantidades físicas son continuas.

La importancia de este método, en la rama de la ingeniería en alimentos es que muchos de estos, se encuentran procesados y pueden ser considerados como fluidos complejos, los cuales en muchas ocasiones se necesita tener el control en la mesoescala, ya que influye en parámetros de calidad del alimento, como es la textura (Van der Sman, 2016).

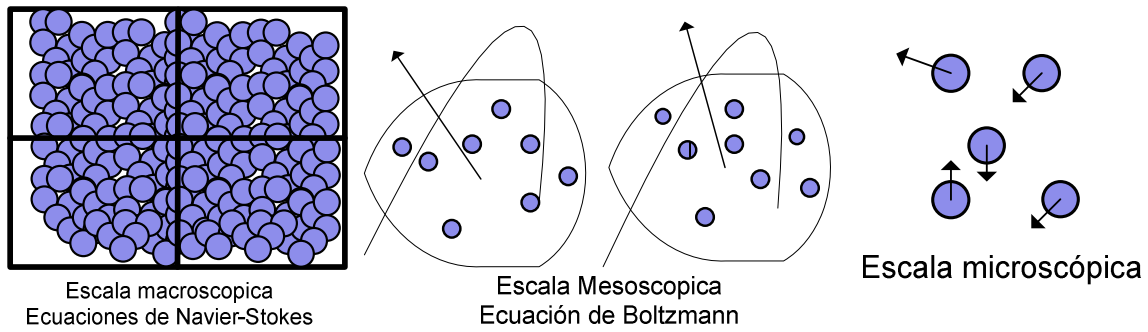


Figura 2.1 Escalas macro, mesoscópica y microscópica respectivamente (León, 2017).

## 2.5.2 Inicios del Método de Lattice Boltzmann

La primera propuesta de la ecuación de Lattice Boltzmann fue realizada inicialmente por G. McNamara y Zanetti en 1988, en respuesta de los inconvenientes creados por el método de Autómatas celulares de redes de gases específicamente por el “ruido” estadístico. Para resolverlo la idea fue simple, sustituir la ocupación Booleana con un conjunto de poblaciones. Este cambio de perspectiva es el mismo que el de la teoría cinética continua, en lugar de seguir una sola molécula Booleana, se depositan varias representando un “paquete” de partículas que tienen varios grados de libertad microscópicos (Succi, 2001). Esto sirvió para la descripción de fenómenos físicos tales como flujo de fluidos y difusión por convección en lugar de los métodos convencionales; volumen finito o elemento finito. Estos métodos tradicionales están basados en el enfoque continuo como la discretización de ecuaciones diferenciales parciales tales como la ecuación de Navier-Stokes o la ecuación de Fourier.

### 2.5.3 Ecuación de Boltzmann

La ecuación de Boltzmann permite evaluar la distribución en espacio-tiempo de un paquete de partículas de un fluido, esto quiere decir que divide el espacio en celdas y el tiempo avanza a pasos discretos, en cada celda se asocia un campo de velocidades discretas, en escala mesoscópica y a cada dirección de velocidad le pertenece un número real conocido, como función de distribución, la cual se explica más adelante. En contraste, el método de Boltzmann físicamente describe el movimiento de “paquetes” de partículas (Succi, 2001).

De acuerdo con esto, el método de Lattice Boltzmann y la teoría cinética toman ciertos criterios:

- La masa del fluido es considerada como partículas de redes.
- Las partículas se encuentran en nodos de una rejilla regular.
- Las partículas se desplazan de acuerdo con un conjunto finito y discreto de velocidades permitidas, llevándolos a nodos adyacentes por pasos.

La ecuación de Boltzmann según Wang & Ho (2008) se describe de la siguiente manera

$$f_i(x + v_i \Delta t, t + \Delta t) - f_i(x, t) = \Omega_i(x, t) \quad (2.1)$$

Donde  $f_i$  es la función de distribución de las partículas en  $i$  direcciones,  $\Omega_i$  es el operador de colisión ( $\Omega_i = 1/\tau$ ) que responde ante la función de distribución y  $v_i$ ,  $\Delta t$  son las velocidades en la rejilla en  $i$  direcciones.

### 2.5.4 Función de Distribución

Describe la evolución de la densidad de partículas, en la rejilla definida  $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$  que da la probabilidad continua, de encontrar una partícula de fluido dentro de un pequeño volumen ubicado en posición  $\vec{x}$  con una velocidad  $\vec{v}$  en el tiempo  $t$  y esta evoluciona de acuerdo a la ecuación cinética, que al encontrarse una partícula junto con otra, en un nodo, colisionarán y se propagarán en toda la red. Las propiedades microscópicas del fluido (tales como la densidad  $\rho$  y la velocidad  $\mathbf{u}$ ) se obtienen evaluando los momentos hidrodinámicos de la función de distribución  $f$ .

Evidentemente, la función de distribución cambia con el tiempo por lo cual divide este espacio en celdas como se muestra en la figura 2.2 de tal forma que en cada celda existan muchas moléculas ( $n_i$ ) en cada paso de tiempo y se asigna una energía  $e_i$  a cada rejilla.

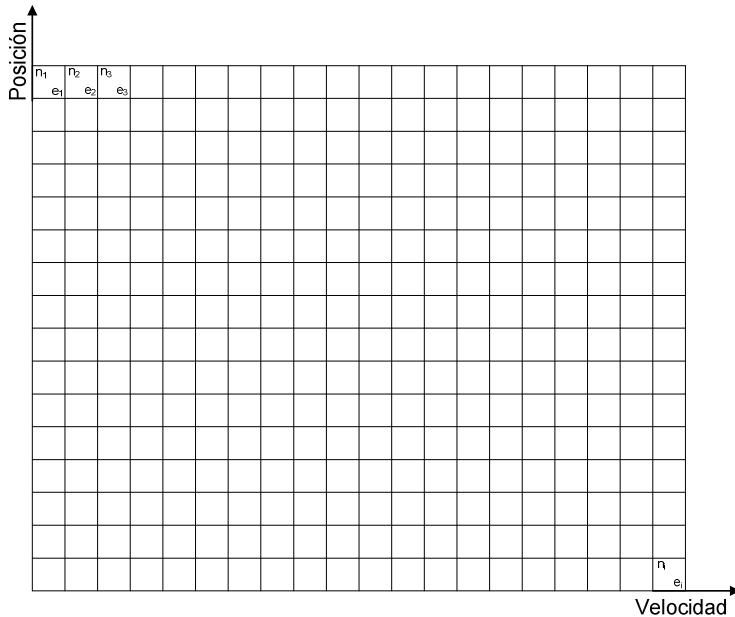


Figura 2.2 Espacio de fase (León, 2017).

En un tiempo determinado se expresa la suma de las moléculas contenidas en cada celda junto con la suma de las energías y esta es igual a la energía total del

sistema, ya que las partículas entran y salen de los volúmenes de espacio entre nodo y nodo, en el caso de haber colisiones se representa de la siguiente manera

$$f(x, v, t) d^3x d^3v - f\left(x + v dt + F \frac{dt}{m}\right) d^3x' d^3v' = C \quad (2.2)$$

La ecuación (2.1) representa la cantidad de partículas que entran en el volumen  $d^3x d^3v$  menos la cantidad de partículas que salen del volumen  $d^3x d^3v$  causadas por las colisiones durante el intervalo de tiempo  $dt$ . El término del factor de colisión se originó en los primeros años de los 90's ya que muchos investigadores sugirieron simplificar el modelo de colisión del modelo de Lattice Boltzmann al cual le asignaron el símbolo de omega ( $\Omega$ ) y se resuelve mediante una determinación de matriz y considerando que la fuerza exterior  $F$  puede ser función del vector de posición y del vector de velocidad microscópica (Sargsyan Tigran 2012).

### 2.5.5 Función de colisión y ecuación de Bhatnagar-Gross-Krook

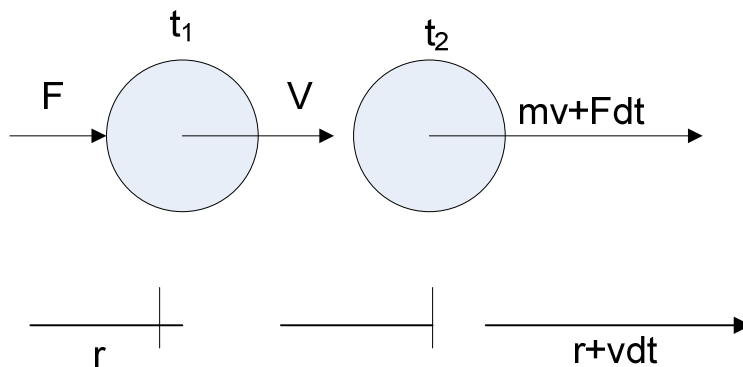


Figura 2.3 Estado inicial y final aplicando una fuerza externa  $F$  (León, 2017).

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla f = \Omega(f) \quad (2.3)$$

El término  $\Omega$  debe satisfacer las leyes de conservación y ser compatible con la simetría del modelo, siendo este un operador de colisión linealizado que supone que la distribución está cerca del estado de equilibrio local. Este método puede simplificarse utilizando la simple aproximación de Bhatnagar-Gross-Krook (BGK), con un solo momento de relajación  $\tau$ , que es el método más sencillo utilizado para resolver la ecuación (2.2), y consiste en reemplazar el término de colisión por un término de relajación de la función  $f$  a la función de equilibrio de Maxwell-Boltzmann.

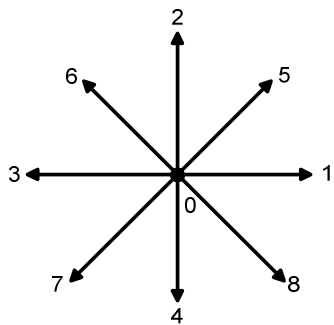
$$\Omega_i = -\left(\frac{f_i(\bar{x},t) - f_i^{eq}(\bar{x},t)}{\tau}\right) \quad (2.4)$$

Según el trabajo de Bhatnager, Gross & Krook (BGK) 1954, el término de colisión se interpreta como un proceso de relajación hasta el estado de equilibrio local. Dicho de otra forma, la variación de la función de distribución  $f$  esta en dos pasos propagación y colisión (figura 2.3).

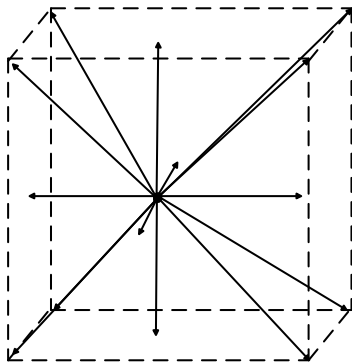
### 2.5.6 Modelos de rejillas

Existen diferentes modelos de rejilla como se muestra en la figura 2.4 en el cual al menos se muestran 4 formas, donde se utiliza la expresión  $D_nQ_m$ , en donde  $n$  representa el número de dimensiones y  $m$  el número de posibles direcciones de velocidades permitidas. Así entonces, el modelo  $D1Q3$ , representa un modelo en una dimensión con 3 posibles direcciones de velocidad permitidas, hay dos dimensiones a cada lado y en el centro se encuentra la velocidad cero en la cual las partículas no se mueven y permanecen en el nodo en cuestión. Así el modelo  $D1Q5$ , tiene una dimensión con cinco direcciones de velocidad permitidas, incluyendo la del centro.

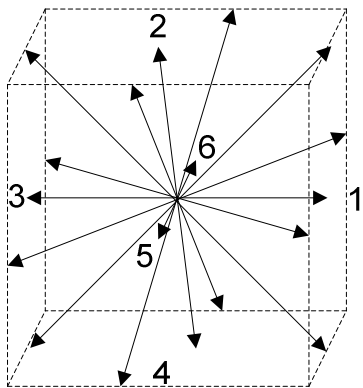
El número de vectores en las rejillas está determinado como se muestra a continuación



$$w_i = \begin{cases} 4/9 & i=0 \\ 1/9 & i=1, 2, 3, 4 \\ 1/36 & i=5, 6, 7, 8 \end{cases}$$

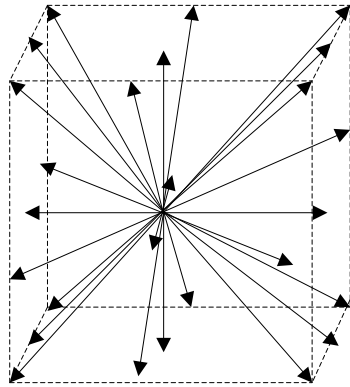


$$w_i = \begin{cases} 2/9 & i=0 \\ 1/9 & i=1-6 \\ 1/72 & i=7-14 \end{cases}$$



$$w_i = \begin{cases} 1/3 & i=0 \\ 1/18 & i=1-6 \\ 1/36 & i=7-18 \end{cases}$$

Figura 2.4 Diferentes modelos de configuraciones de rejilla Lattice Boltzmann (Wagner, 2008)



$$w_i = \begin{cases} 8/27 & i=0 \\ 2/27 & i=1-6 \\ 1/216 & i=7-14 \\ 1/54 & i=15-26 \end{cases}$$

Figura 2.4 Diferentes modelos de configuraciones de rejilla Lattice Boltzmann (Wagner 2008)  
(continuación)

Resumiendo, los pasos de simulación del modelo de Lattice-Boltzmann son:

- Cálculo de Variables Macroscópicas: Las variables macroscópicas se calculan a partir de las funciones de distribución. Si en una celda específica se desea un valor especial para alguna variable, simplemente se le asigna el valor deseado.
- Cálculo de las funciones de equilibrio: A partir de las cantidades macroscópicas, se calculan los valores de equilibrio para cada función  $f$ .
- Colisión: Cada función de distribución  $f$  toma un nuevo valor, de acuerdo con la ley de evolución BGK.
- Propagación: Las funciones de equilibrio modificadas viajan a los nodos, usando cada una el vector velocidad  $\bar{v}$  al que están asociadas (Rincon Baez 2014) (Chirila 2010).



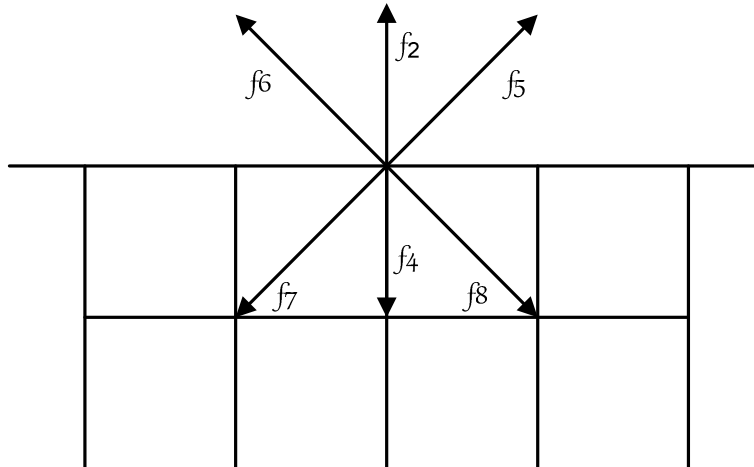


Figura 2.5 Función de distribución contra una frontera no deslizante (Viggen, 2009).

### 2.5.7 Condiciones frontera

La condición de fronteras periódicas o simplemente periódicas, como se conoce comúnmente, es la forma más sencilla de aplicar condiciones para la entrada y salida de flujos, utilizando cualquier metodología, en cuanto a la dinámica de fluidos computacional se refiere. Éstas consisten en mantener los valores de las cantidades físicas involucradas en el problema (velocidad, presión, temperatura, concentración, etc.), impuestas a un extremo del dominio, iguales a las de su lado o frontera opuesta. Estas condiciones, no toman en cuenta cualquier perturbación que el flujo pueda presentar en sus fronteras, por lo tanto, son solo adecuadas para aplicar en fenómenos físicos donde los efectos de las superficies, donde se aplica la condición, no jueguen un papel importante en el desarrollo del flujo o donde no existan perturbaciones del flujo cerca de las fronteras mismas.

Simplificando la representación base de LBM es una rejilla espacial regular. Cada nodo de la rejilla está asociado a un conjunto de escalares que corresponden a un conjunto de velocidades permitidas, las cuales definen las direcciones de un nodo. Los escalares, llamados función distribución, representan el número de partículas mesoscópicas que tienen cada velocidad permitida, en este caso en dos dimensiones y se pueden definir una gran variedad de configuraciones de rejilla. Al

modelo D2Q9 es un sistema de 8 direcciones y una dirección adicional correspondiente a velocidad cero.

Las condiciones periódicas, son un cambio en la geometría del programa pasando a ser una especie de círculo sin fin.

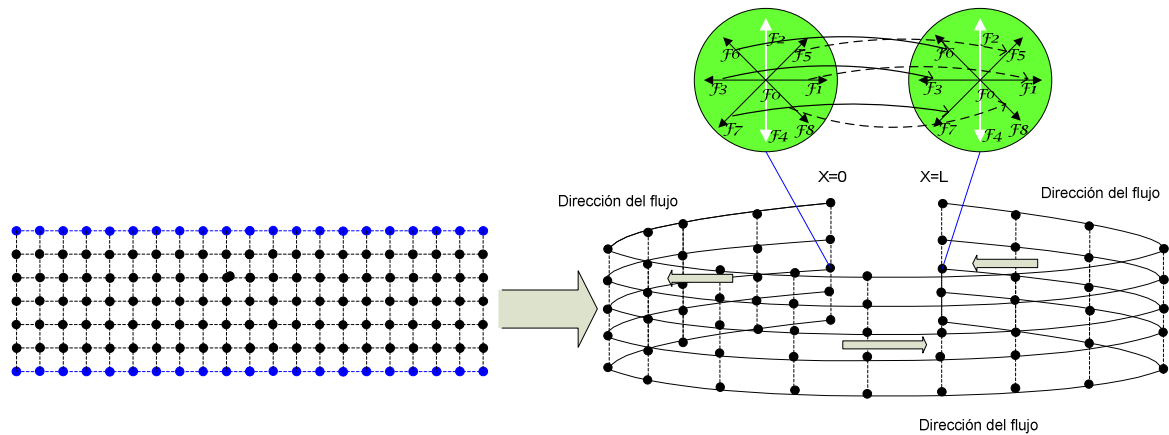


Figura 2.6 Aplicación de condiciones periódicas (León, 2017).

Es importante mencionar, que la aplicación de las condiciones periódicas sólo involucraría a unos nodos, que es el caso de las fronteras extremas derecha e izquierda, en  $x = 0$  y  $x = L$ , tal como se puede ver en la figura 2.6.

### 2.5.8 Condiciones Bounce-back

También conocidas como condiciones de frontera no deslizante o de rebote. Este tipo de fronteras son utilizadas para simular la interacción que se tiene entre el fluido y una pared fija, también se utilizan este tipo de fronteras cuando se simula un flujo alrededor de un obstáculo. El uso de estas fronteras, asume que las funciones de distribución dentro de la región del fluido, chocan con la frontera

sólida y simplemente se reflejan en la dirección opuesta de la velocidad entrante con la misma magnitud.

Las fronteras pueden estar ubicadas en el centro de la misma retícula o se puede ubicar entre dos retículas consecutivas. Para tratar el paso de propagación, en las retículas vecinas a cualquier frontera del tipo pared estática, las partículas que se dirigen hacia dicha pared deben ser retornadas al dominio del flujo. Esta aproximación, supone que las partículas que chocan con la pared estática son retornadas en la misma dirección pero en sentido contrario y sin pérdida de energía, lo que indica que el choque entre estas y la pared es un choque totalmente elástico.

La figura 2.5, muestra lo que sucede al aplicar este tipo de condiciones de frontera.

Se puede ver que las funciones  $f_2, f_5$  y  $f_6$  chocan contra la pared lo que produce que se reflejen en las direcciones opuestas, esto es que  $f_7 = f_5$ ,  $f_4 = f_2$  y  $f_8 = f_6$ . (León, 2017).

# CAPÍTULO 3 SIMULACIÓN DE UN FLUIDO TIPO BINGHAM CON EL MODELO PROPUESTO DE REDES DE BOLTZMANN

## 3.1 Solución analítica de la ecuación de movimiento para el caso de un fluido Bingham

En este apartado, obtendremos una expresión matemática que represente la forma de cuantificar el perfil de velocidades para un fluido no Newtoniano para el modelo de Bingham.

Considérese el flujo de un fluido tipo Bingham en dirección  $x$ , comprendido entre dos placas separada una distancia  $2H$ , tal como el que se muestra en la figura 3.1.

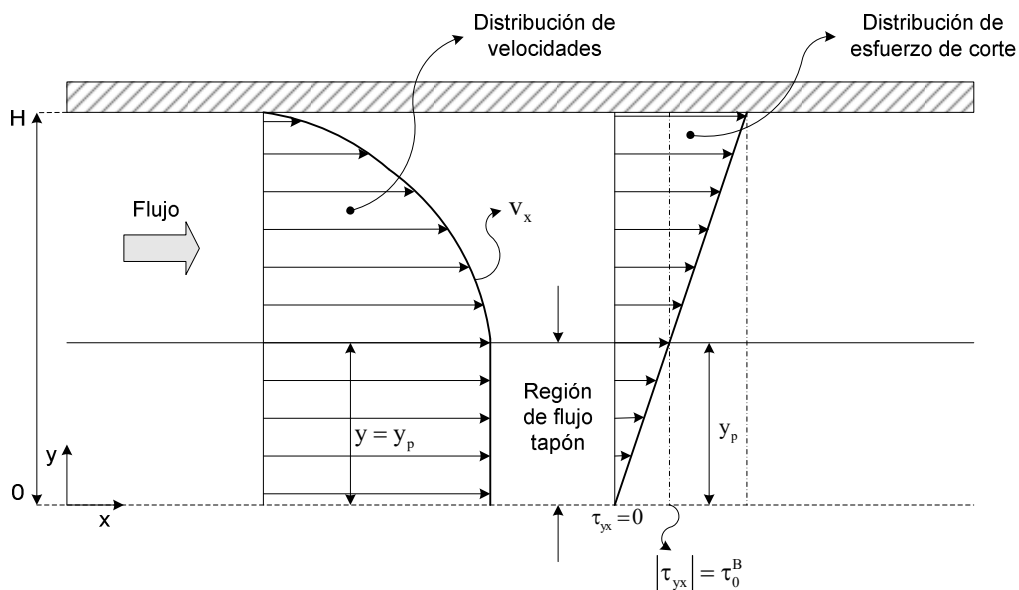


Figura 3.1 Flujo de un fluido Bingham comprendido entre dos placas (Chhabra, 1999).

Tomando en cuenta las condiciones de estado estacionario, sección transversal constante, ausencia de efectos gravitacionales y flujo isotérmico e incompresible.

A partir de la ecuación de movimiento, podemos obtener el perfil de esfuerzos, así como el de velocidades

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right] = -\nabla \cdot \bar{\bar{\tau}} - \nabla P + \rho \vec{g} \quad (3.1)$$

Podemos considerar el efecto del gradiente de presión, como una fuerza impulsora favorable para el movimiento del fluido. Por lo general, la presión disminuye a un ritmo constante desde el extremo inicial hasta el final en la dirección x.

$$\nabla P \cong \frac{\Delta P}{\Delta z} = \frac{(P_L - P_0)}{L} = \frac{\Delta P}{L} \quad (3.2)$$

El componente del tensor de densidad de flujo de cantidad de movimiento de la ecuación (3.1) es  $\tau_{yx}$ , por lo que, considerando las condiciones anteriores tenemos la siguiente ecuación a resolver

$$-\frac{d\tau_{yx}}{dy} = \left( \frac{\Delta P}{L} \right) \quad (3.3)$$

Realizando una separación de variables, además de realizar las integrales correspondientes en la ecuación (3.3) obtenemos

$$\tau_{yx} = -\left( \frac{\Delta P}{L} \right) y + c_1 \quad (3.4)$$

La constante de integración vale cero, cuando  $\tau_{yx} = 0$  en  $y = 0$ , es decir, en el centro de las placas el esfuerzo es mínimo; por lo tanto, el perfil de esfuerzos es

$$\tau_{yx} = -\left( \frac{\Delta P}{L} \right) y \quad (3.5)$$

Igualando la ecuación (3.5) con el modelo de Bingham obtenemos

$$-\mu_B \left( \frac{dv_x}{dy} \right) + \tau_0 = - \left( \frac{\Delta P}{L} \right) y \quad (3.6)$$

Realizando una segunda separación de variables, además de realizar las integrales correspondientes tenemos

$$-v_x = - \left( \frac{\Delta P}{L} \right) \frac{1}{\mu_B} \frac{y^2}{2} - \frac{\tau_0}{\mu_B} y + c_2 \quad (3.7)$$

Para encontrar el valor de la constante de integración dos, proponemos de acuerdo con la figura (3.1) la condición en la cual la velocidad es cero en una de las paredes de las placas; es decir,  $v_x = 0$  en  $y = \pm H$ .

$$c_2 = \left( \frac{\Delta P}{L} \right) \frac{1}{2\mu_B} H^2 + \frac{\tau_0}{\mu_B} H \quad (3.8)$$

Sustituyendo el valor de la constante en la ecuación (3.7), se obtiene el siguiente perfil de velocidades

$$\begin{aligned} -v_x &= - \left( \frac{\Delta P}{L} \right) \frac{1}{\mu_B} \frac{y^2}{2} - \frac{\tau_0}{\mu_B} y + \left( \frac{\Delta P}{L} \right) \frac{1}{2\mu_B} H^2 + \frac{\tau_0}{\mu_B} H \\ \therefore v_x &= \frac{\tau_0}{\mu_B} H \left( \frac{y}{H} - 1 \right) - \left( \frac{\Delta P}{L} \right) \frac{H^2}{2\mu_B} \left[ 1 - \left( \frac{y}{H} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

Para conocer el perfil de velocidades en la región del flujo tapón, proponemos la condición para el esfuerzo inicial de acuerdo con la ecuación (3.5), cuando  $y = y_0$

$$y = y_0; \quad \tau_0 = -\left(\frac{\Delta P}{L}\right)y_0 \quad (3.10)$$

Sustituyendo la condición (3.10) en la ecuación (3.9) obtenemos lo siguiente

$$-v_0 = -\left(\frac{\Delta P}{L}\right)\frac{y_0}{\mu_B}(H - y_0) + \left(\frac{\Delta P}{L}\right)\frac{1}{2\mu_B}(H^2 - y_0^2) \quad (3.11)$$

Finalmente, factorizando la ecuación (3.11) obtenemos la velocidad en la región de flujo tapón

$$v_0 = \left(-\frac{\Delta P}{L}\right)\frac{H^2}{2\mu_B}\left(1 - \frac{y_0}{H}\right)^2 \quad (3.12)$$

Comúnmente suele representarse los perfiles de velocidad en función del número de Bingham

$$\text{Bn} = \frac{\tau_0 H}{\mu_B v} \quad (3.13)$$

En la ecuación (3.13),  $v$  es una velocidad característica. Dividiendo la ecuación (3.9) por esta velocidad obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{v_x}{v} &= \frac{\overbrace{\tau_0 H}^{\text{Bn}}}{\mu_B v} \left(\frac{y}{H} - 1\right) - \left(\frac{\Delta P}{L}\right)\frac{H^2}{2\mu_B v} \left[1 - \left(\frac{y}{H}\right)^2\right] \\ \therefore \frac{v_x}{v} &= \text{Bn} \left(\frac{y}{H} - 1\right) - \left(\frac{\Delta P}{L}\right)\frac{H^2}{2v\mu_B} \left[1 - \left(\frac{y}{H}\right)^2\right] \end{aligned} \quad (3.14)$$

Para el caso del flujo tapón, la ecuación (3.12) puede dividirse por la velocidad característica para dar

$$\frac{v_0}{v} = \left( -\frac{\Delta P}{L} \right) \frac{H^2}{2\nu\mu_B} \left( 1 - \frac{y_0}{H} \right)^2 \quad (3.15)$$

### 3.2 Soluciones analíticas

En las figuras (3.2 – 3.5) se presentan las gráficas de las soluciones analíticas del fluido de Bingham para valores de  $Bn = 0.1, 0.2, 0.3$  y  $0.4$ , con valores adimensionales.

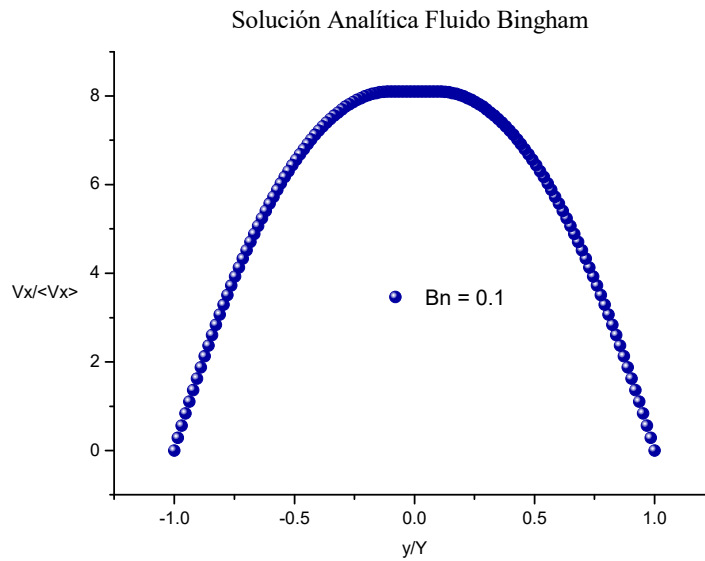


Figura 3.2. Perfil de velocidades para un fluido Bingham para  $Bn = 0.1$



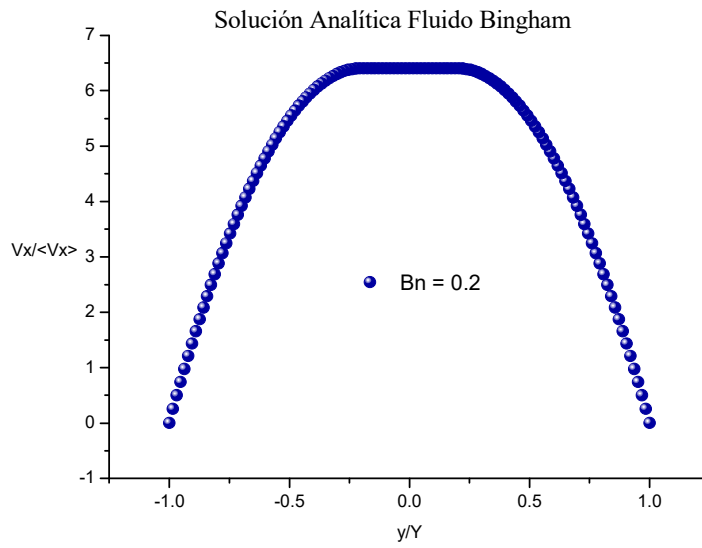


Figura 3.3 Perfil de velocidades para un fluido Bingham para  $Bn = 0.2$

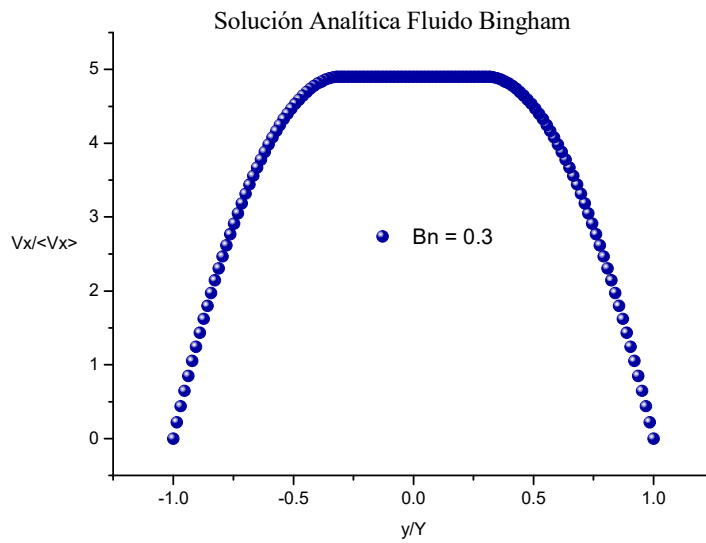


Figura 3.4. Perfil de velocidades para un fluido Bingham para  $Bn = 0.3$

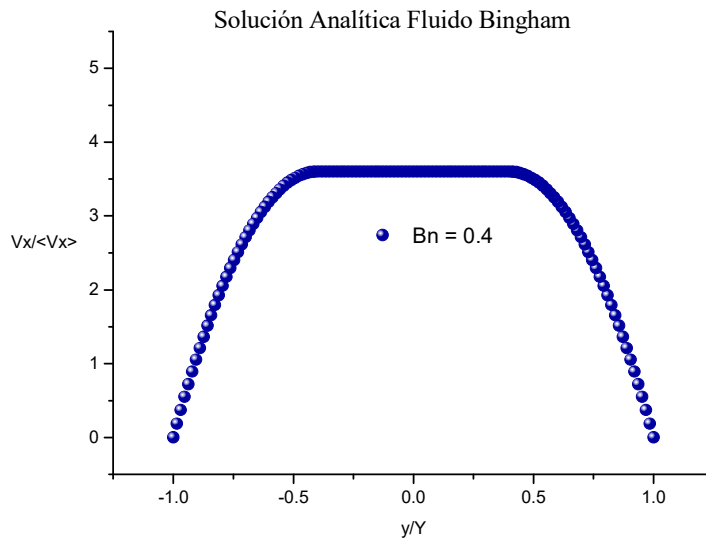


Figura 3.5. Perfil de velocidades para un fluido Bingham para  $Bn = 0.4$

En la figura (3.6), se aprecia el efecto de los números de Bingham; en esta gráfica, se observa que mientras el número de Bingham tiende a cero, el comportamiento se asemeja al de un fluido Newtoniano, tal como puede observar en la ecuación (3.14).

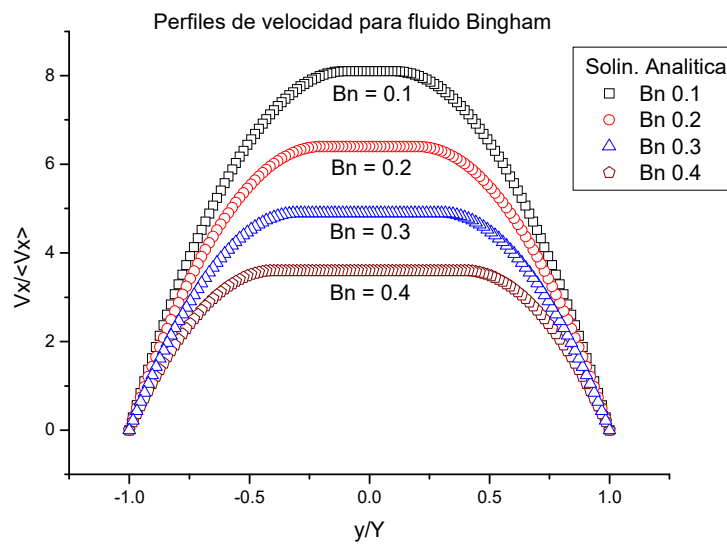


Figura 3.6 Perfil de velocidades para un fluido Bingham para  $Bn = 0.1, 0.2, 0.3$  y  $0.4$

### 3.3 Validación del modelo propuesto con la solución analítica del fluido Bingham

Para esta parte, se compararon los resultados obtenidos con el modelo propuesto de redes de Boltzmann para un fluido Bingham con los valores encontrados en la solución analítica. El modelo propuesto consistió en la modificación del parámetro de relajación en la ecuación de redes de Boltzmann (ecuación 2.1), para ello se propone un parámetro de relajación  $\tau$  en función de la viscosidad aparente de manera que

$$\tau = 3 \left[ \mu_B + \tau_0 \left( \frac{dv_x}{dy} \right) \right] + \frac{1}{2} \quad (3.16)$$

La ecuación (3.16) se utilizó en la ecuación de redes de Boltzmann para el caso de un fluido tipo Bingham, las simulaciones se efectuaron en una rejilla de 64 x 64 (Pérez, 2016), utilizando condiciones *bounce back* y periódicas. El estado estacionario se alcanzó a partir de las **200000** iteraciones, tal como se observa en la figura 3.7.

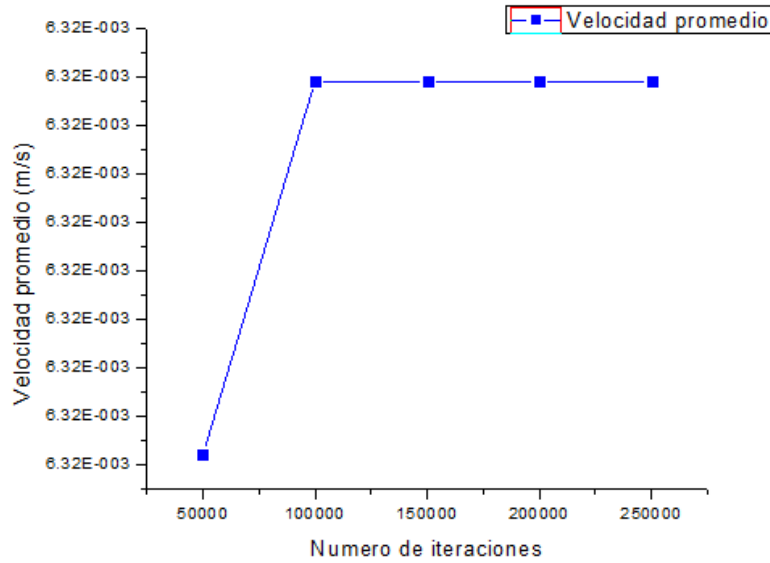


Figura 3.7 Estado estacionario para las simulaciones correspondientes a un fluido Bingham

En la tabla 1, se presentan las condiciones usadas para las simulaciones realizadas para los números de Bingham 0.1, 0.2, 0.3 y 0.4.

Tabla 3.1 Condiciones utilizadas para las simulaciones.

Simulaciones de redes de Boltzmann para un fluido Bingham			
Número de Bingham	Esfuerzo inicial	Fuerza	Viscosidad de Bingham
0.1	2.00E-5	2.66E-2	0.4
0.2	1.10E-5	5.83E-3	0.08
0.3	1.40E-5	5.19E-3	0.07
0.4	6.50E-6	1.88E-3	0.025

El programa utilizado en las simulaciones es el mostrado en la figura 3.8, cabe mencionar que este código de programación es independiente o *freelance*, pues fue hecho para cubrir las necesidades específicas de la simulación del fluido de Bingham.

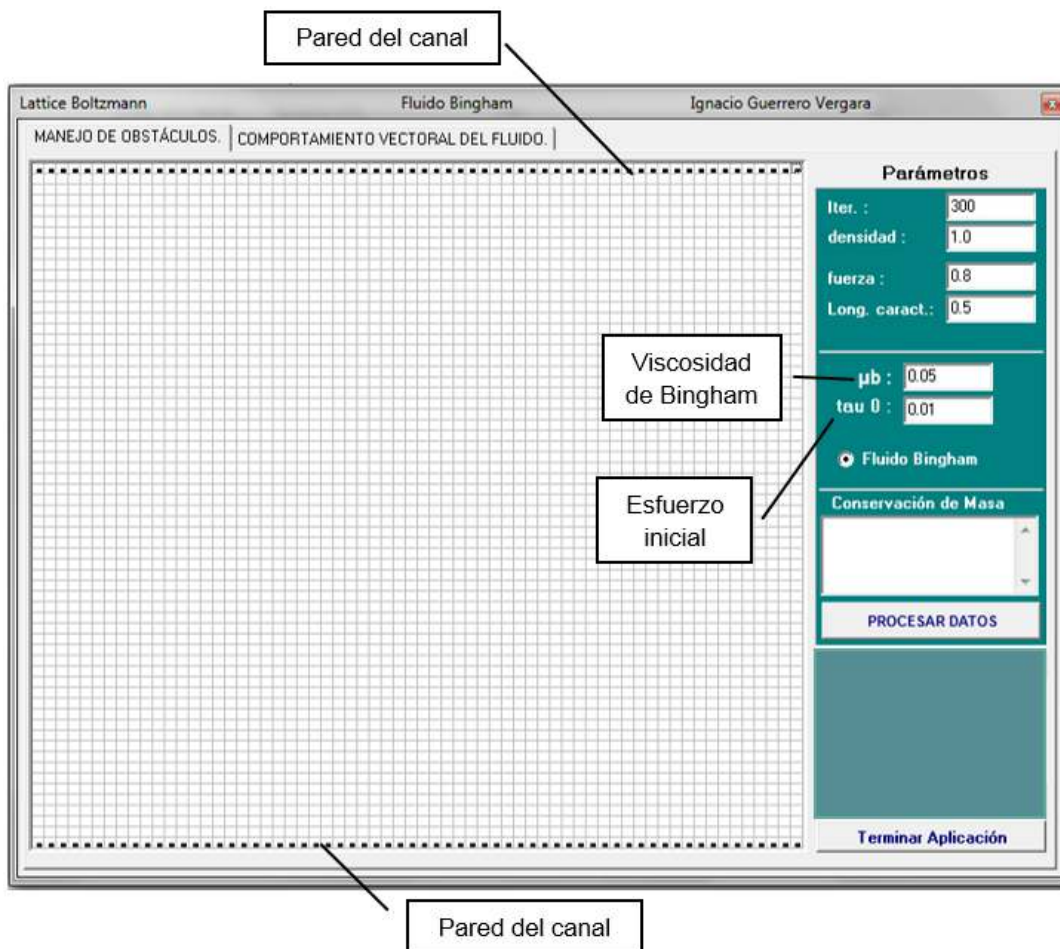


Figura 3.8 Pantalla de ejemplo de programa empleado para las simulaciones

Los resultados de las simulaciones con el método de redes de Boltzmann se presentan en la figura (3.8), para los cuatro números de Bingham.

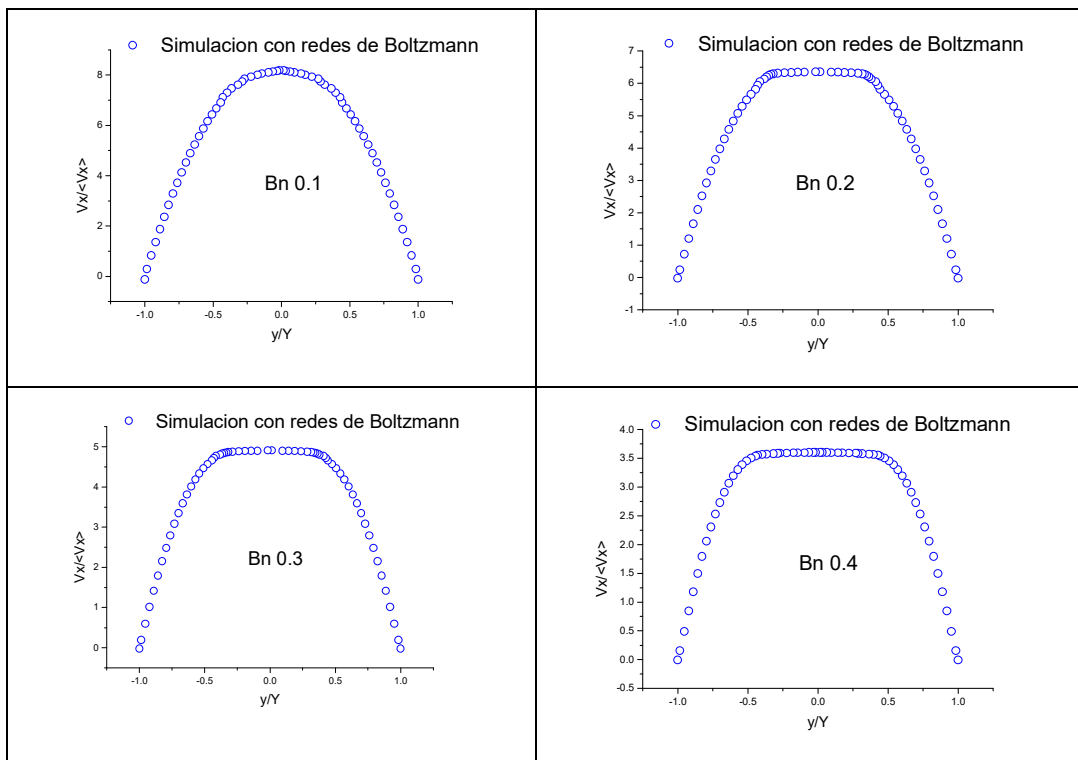


Figura 3.9 Simulaciones de redes de Boltzmann para valores de Bingham 0.1, 0.2, 0.3 y 0.4

En las figuras (3.9-3.13), se presenta las comparaciones de los resultados de las simulaciones de redes de Boltzmann con las soluciones analíticas, correspondientes a los cuatro números de Bingham trabajados, con la finalidad de validar el modelo propuesto.

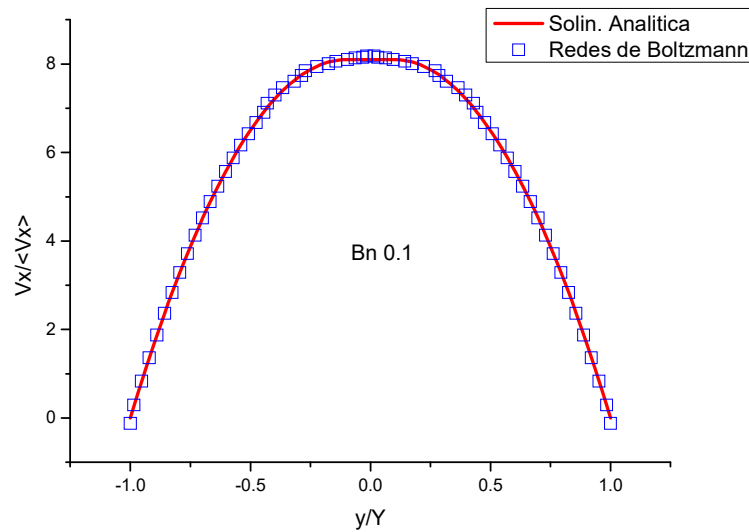


Figura 3.10 Comparación de las simulaciones de redes de Boltzmann con la solución analítica, para un número de Bingham de 0.1, obteniéndose un porcentaje de error del 0.42 %

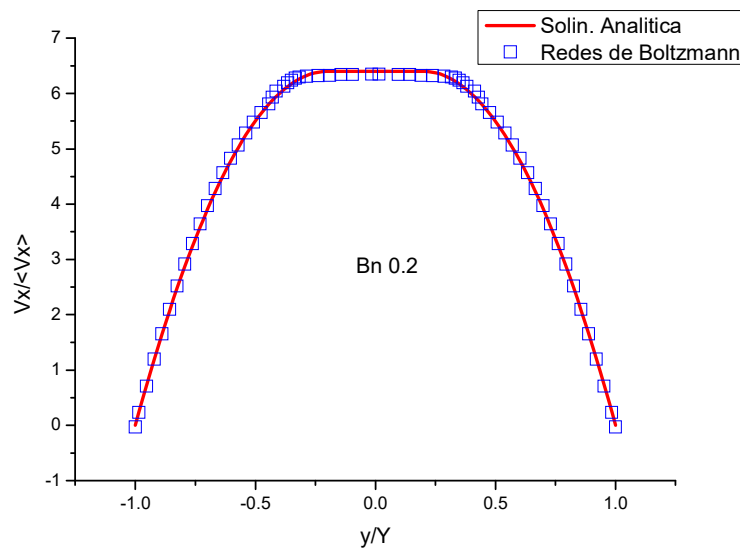


Figura 3.11 Comparación de las simulaciones de redes de Boltzmann con la solución analítica, para un número de Bingham de 0.2, obteniéndose un porcentaje de error del 1.23 %

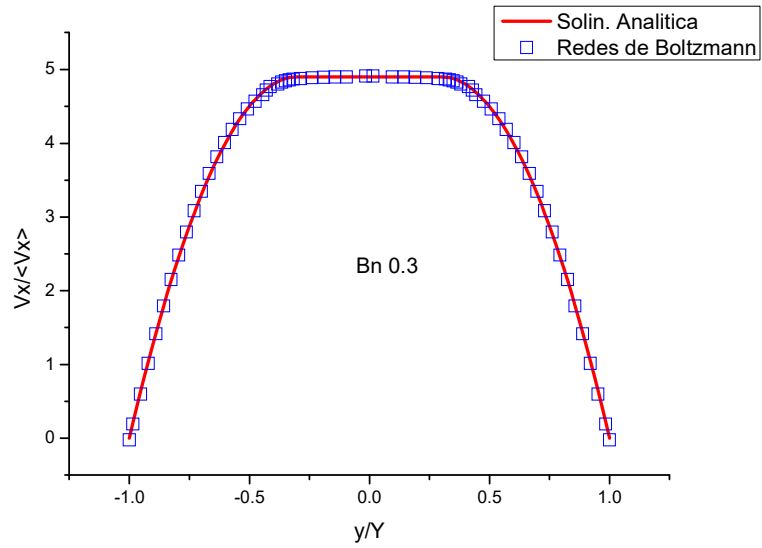


Figura 3.12 Comparación de las simulaciones de redes de Boltzmann con la solución analítica, para un número de Bingham de 0.3, obteniéndose un porcentaje de error del 1.25 %.

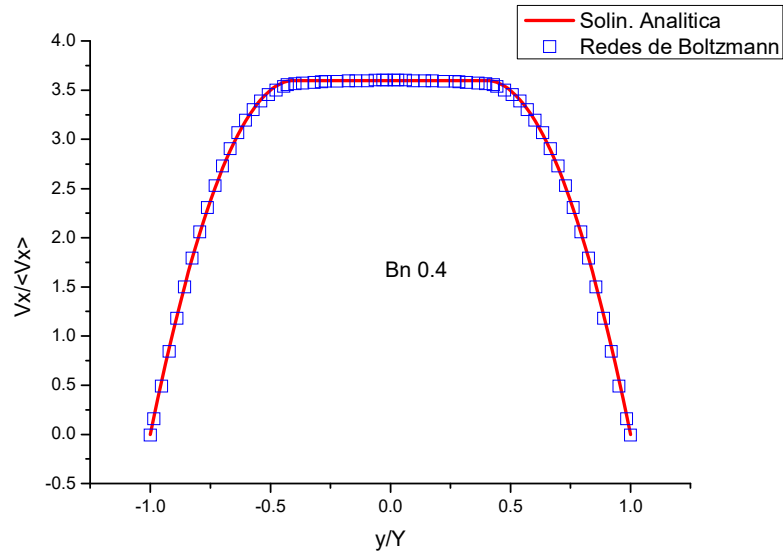


Figura 3.13 Comparación de las simulaciones de redes de Boltzmann con la solución analítica, para un número de Bingham de 0.4, obteniéndose un porcentaje de error del 1.61 %.



Por último, en la figura (3.14) se presenta una comparación de todas las simulaciones con el método de redes de Boltzmann con los cuatro números de Bingham, para las soluciones analíticas.

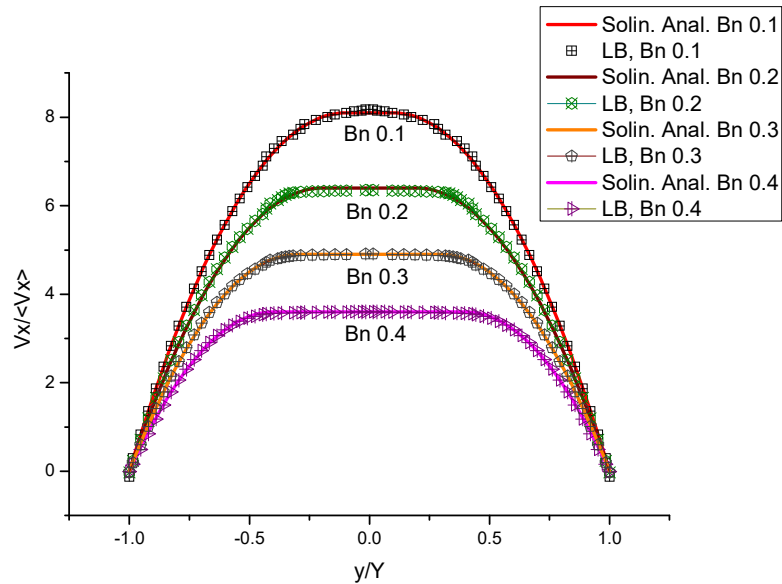


Figura 3.14 Comparación de todas las simulaciones de redes de Boltzmann con las soluciones analíticas, para los cuatro números de Bingham, con un porcentaje de error menor al 1.7 %

Es importante mencionar que los valores de todas las variables en las simulaciones están en unidades de red, aun cuando se han manejado valores adimensionales en muchas de las figuras.

### 3.4 El fenómeno de contracción y expansión

Un fenómeno que se encuentra frecuentemente de forma natural en diferentes dispositivos y equipos industriales como difusores, válvulas y alabes de turbina por citar algunos, es la separación de flujo. La separación de flujo también se presenta en conductos rectangulares donde el área se reduce súbita o gradualmente de una sección a otra, como puede ocurrir en tuberías de sistemas de enfriamiento y aire acondicionado, en los dispositivos de flujo utilizados en el sector alimenticio y de productos químicos, en procesos de elaboración de polímeros y tubería

equipada con deflectores, solo por mencionar algunos casos. En dicha separación, se genera caída de presión y zonas de separación, además dependiendo de la velocidad se puede producir vibración y ruido en los conductos (De Nevers, 2006; Bertin, 1984; White, 1993).

Para comprender dicho fenómeno, consideremos la figura 3.15, en la cual se puede apreciar un flujo de un fluido a través de un conducto rectangular de sección uniforme, en el cual se considera la inserción de un obstáculo o escalón.

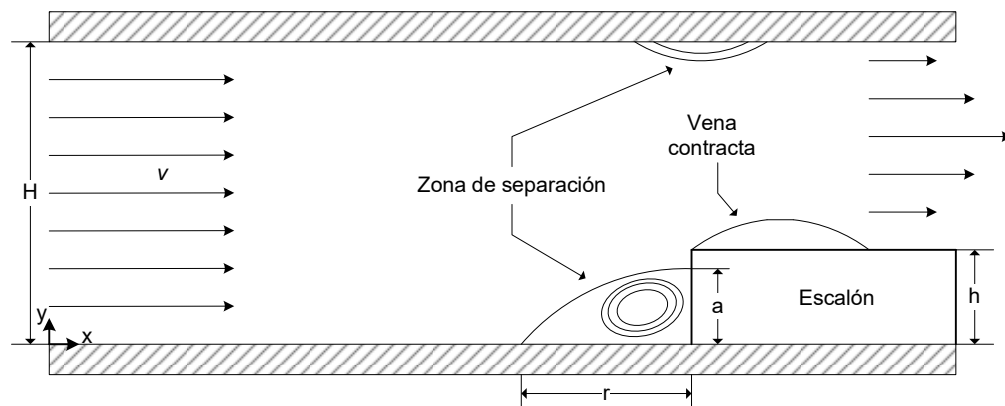


Figura 3.15 Flujo en conducto rectangular con contracción. (Morales, Barbosa and Jiménez, 2009)

En la figura anterior, se aprecia una zona de separación antes del escalón definida por su longitud ( $r$ ) y altura ( $a$ ), además se aprecia la formación de una vena contracta sobre el escalón, e incluso para Reynolds altos puede presentarse una zona de separación en la pared superior del conducto.

Los primeros estudios de simulación numérica destinados a analizar el flujo laminar en conductos rectangulares con contracción súbita "*forward-facing step*" fueron realizadas por Dennis y Smith, Mei y Plotkin, quienes coinciden que las características principales del flujo son la zona de separación frente al escalón y una pequeña zona de recirculación sobre el mismo (Morales, *et al.*, 2009).

La circulación y la separación de flujo causada por una contracción repentina en la geometría, en la forma de un escalón, juega un papel importante en muchas aplicaciones prácticas en la industria química y de alimentos. Como es el caso de dispositivos de transferencia de calor, tal como los sistemas de enfriamiento para equipo electrónico, intercambiadores de calor de alto rendimiento, cámaras de

combustión y el paso de enfriamiento en turbinas. También es utilizado, como un caso de referencia para el cálculo del flujo laminar con una particularidad geométrica (Wilhelm & Kleiser, 2002).

El estudio de fluidos Newtonianos a través de expansiones súbitas de varias relaciones y condiciones representa un problema clásico que ha sido estudiado por muchos investigadores. Por lo que, mucha información acerca de este tipo de fluidos es conocida. Para el caso de fluidos no Newtonianos, no hay muchos trabajos ya que las investigaciones son recientes, y no existe mucha información acerca del flujo en una expansión. Una mejor comprensión de fluidos no Newtonianos a través de expansiones súbitas debería enfocarse, tanto al diseño y desarrollo de procesos hidrodinámicos más eficientes, así como a un mejor control de calidad de los productos finales.

Se han realizados trabajos experimentales con fluidos de la potencia y viscoelásticos en expansiones súbitas sobre un amplio rango del número de Reynolds, incluyendo régimen turbulento. Además, se han realizado pruebas numéricas para el flujo de un fluido de Herschel-Bulkley para el caso de una expansión en tres dimensiones. Así mismo, se han realizado pruebas numéricas para fluidos viscoelásticos, en los cuales se reportan algunos cambios ocurridos cuando son utilizados fluidos no Newtonianos en una expansión en comparación con el caso de un fluido Newtoniano. Algunos resultados son reportados, en el caso de un fluido de la potencia en comparación de un fluido no Newtoniano para una razón de expansión de 3:1 (Manica & De Bortoli, 2004).

También existen estudios realizados con fluidos de la potencia variando el índice de comportamiento al fluido ( $0.60 \leq n \leq 1.4$ ) y el número de Reynolds generalizado ( $0.0001 \leq Re_{gen} \leq 10$ ) en una expansión súbita (Ternik, 2010).

Otra aportación hecha en el presente trabajo es la realización de simulaciones de un fluido de Bingham a través de una expansión y contracción con las condiciones encontradas, para tres números de Bingham (0.2, 0.3 y 0.4). El ducto con geometría rectangular como el mostrado en la figura 3.16, representa tal caso.

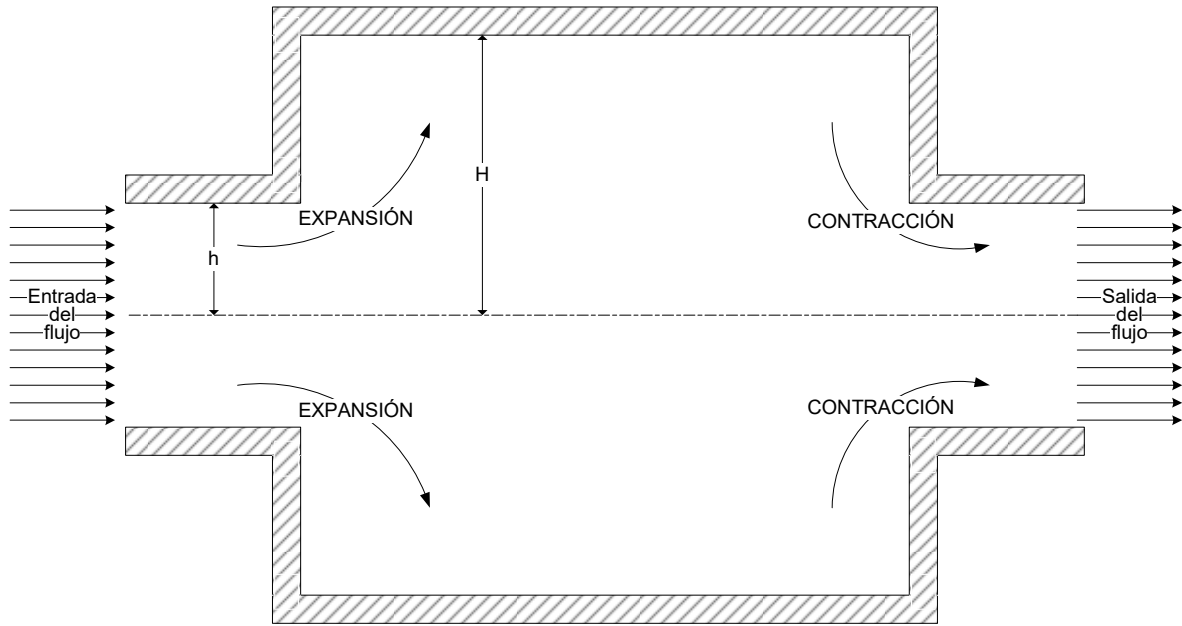


Figura 3.16 Ducto con geometría rectangular donde se presenta una expansión y una contracción para una razón de 2:1

Se construyó una rejilla para simular el ducto rectangular, en la cual se dividió por zonas, tal como se muestra en la figura 3.17. La zona A representa la entrada del fluido al ducto, la zona B representa la expansión y la zona C la contracción. La razón de expansión y de contracción utilizada es de 2:1.

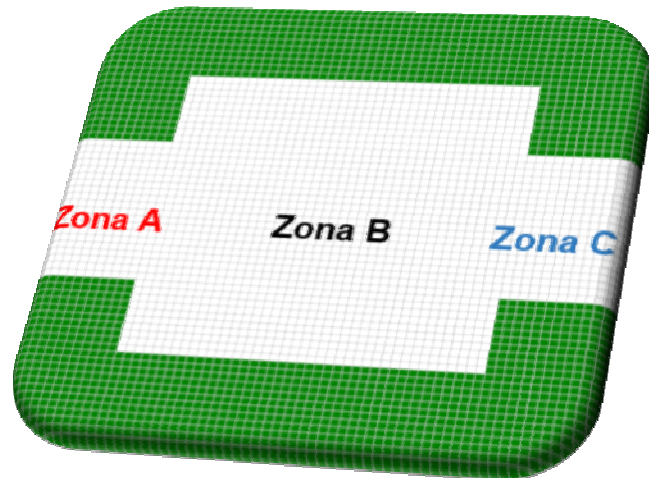


Figura 3.17 Ducto rectangular utilizado para la simulación.

Una vez validado el modelo de redes de Boltzmann propuesto para la simulación de fluidos de Bingham, se realizaron una serie de corridas con las condiciones encontradas para los tres números de Bingham. Primeramente, se varió la viscosidad dejando constantes la fuerza y el esfuerzo inicial; posteriormente, la viscosidad y la fuerza se mantuvieron constantes y se varió el esfuerzo inicial. Por último, se varió la fuerza y permanecieron constantes la viscosidad y el esfuerzo inicial. Las figuras 3.18 – 3.83 presentan los resultados obtenidos de dichas simulaciones. Cabe destacar que todos los resultados obtenidos están en unidades de rejilla y son números adimensionales.

### 3.5 Resultados en expansión y contracción súbita

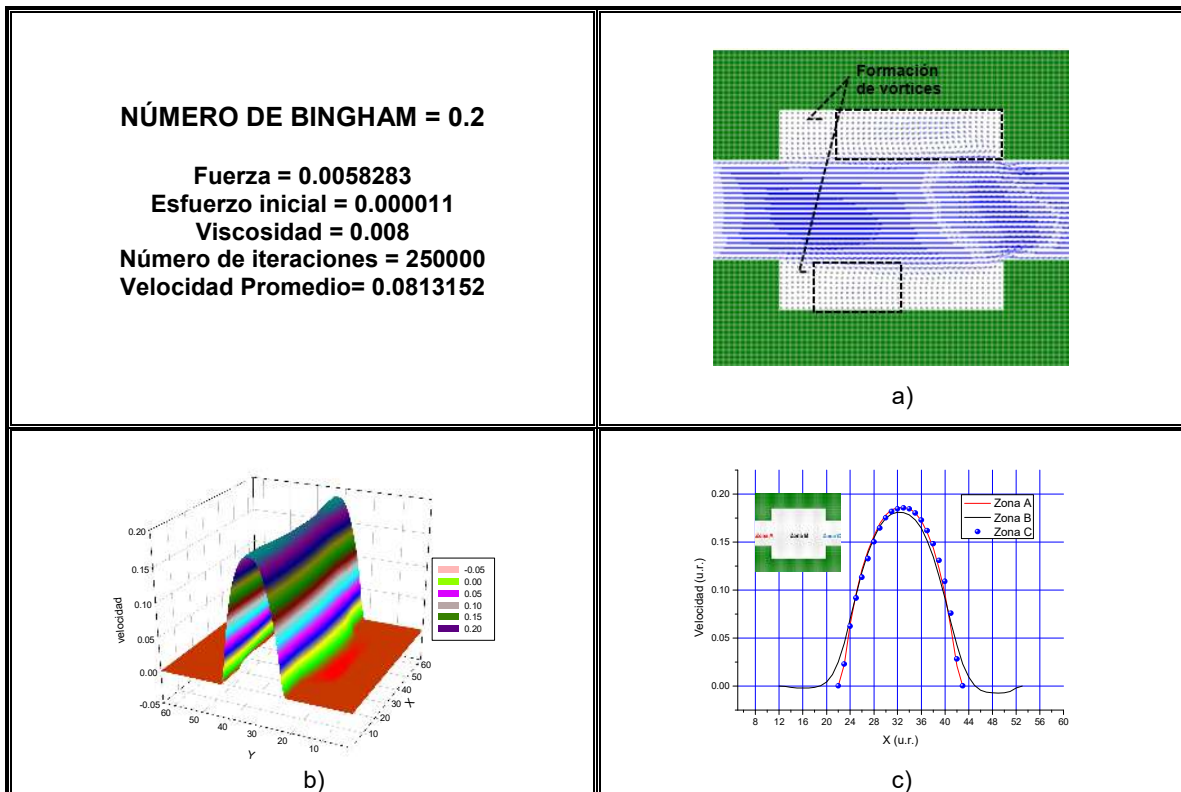


Figura 3.18 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Viscosidad = 0.008

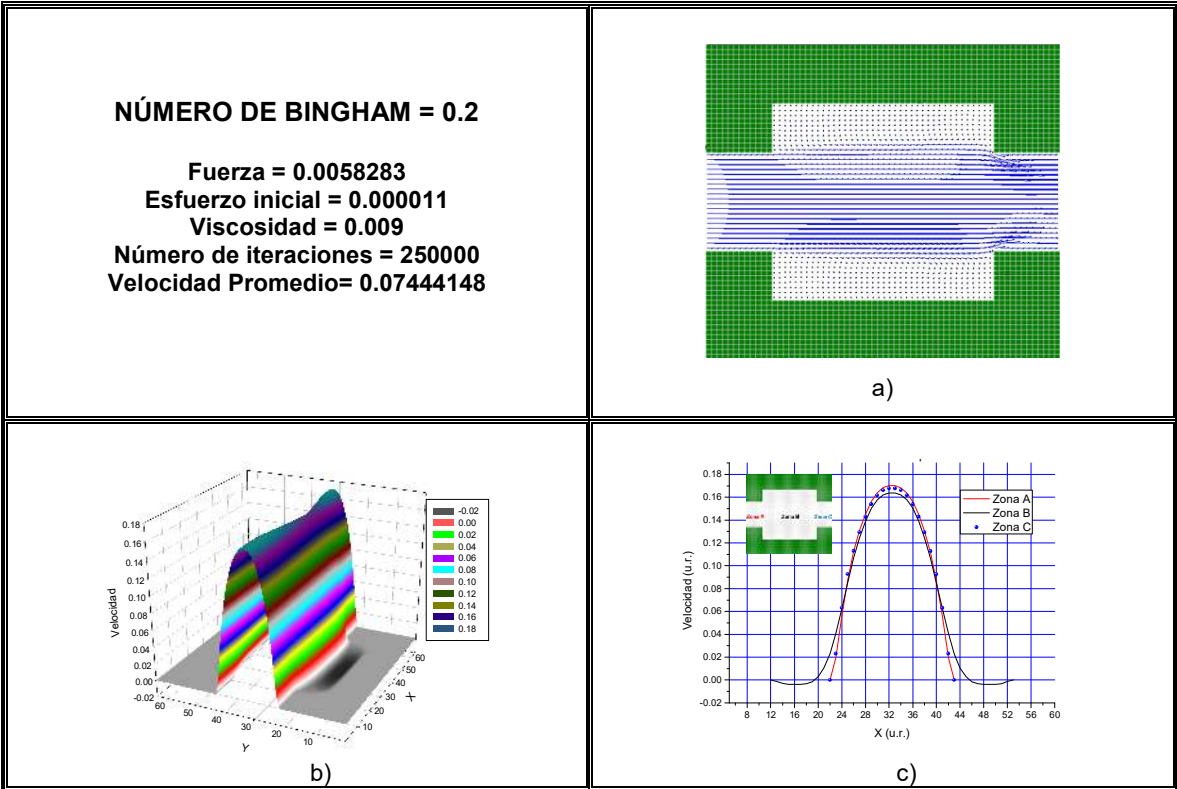


Figura 3.19 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Viscosidad = 0.009

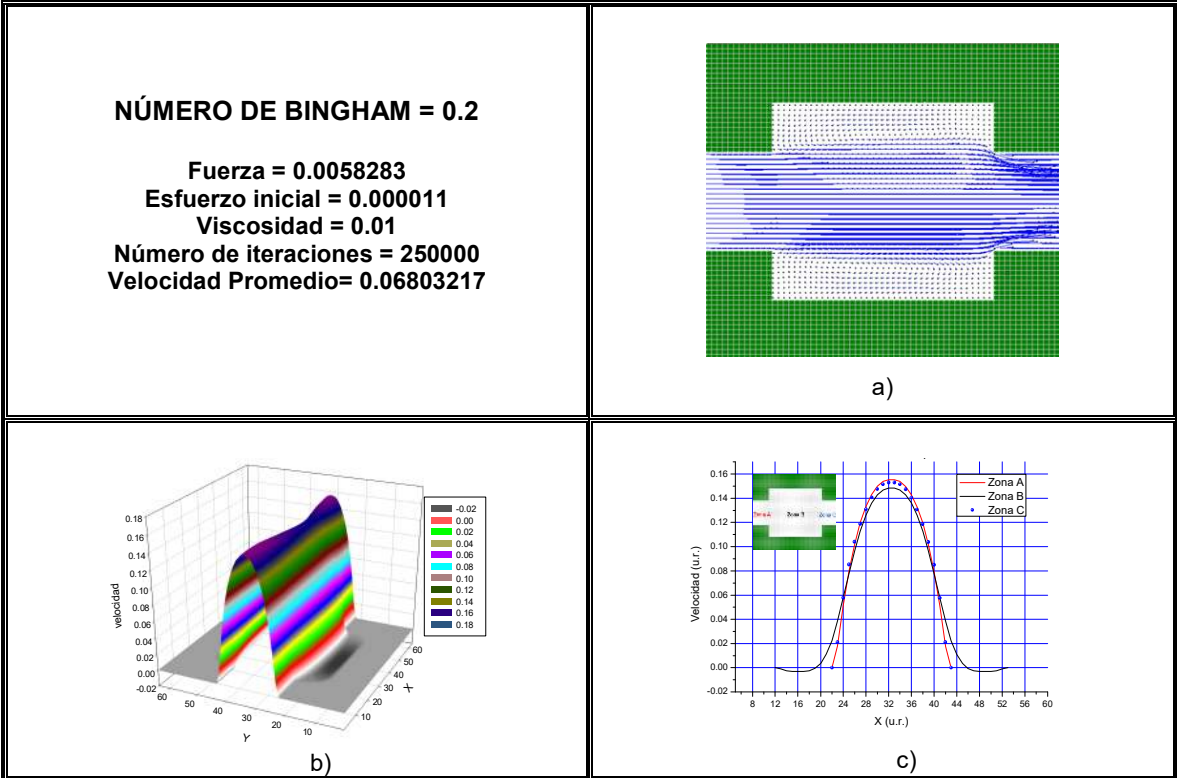


Figura 3.20 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Viscosidad = 0.01

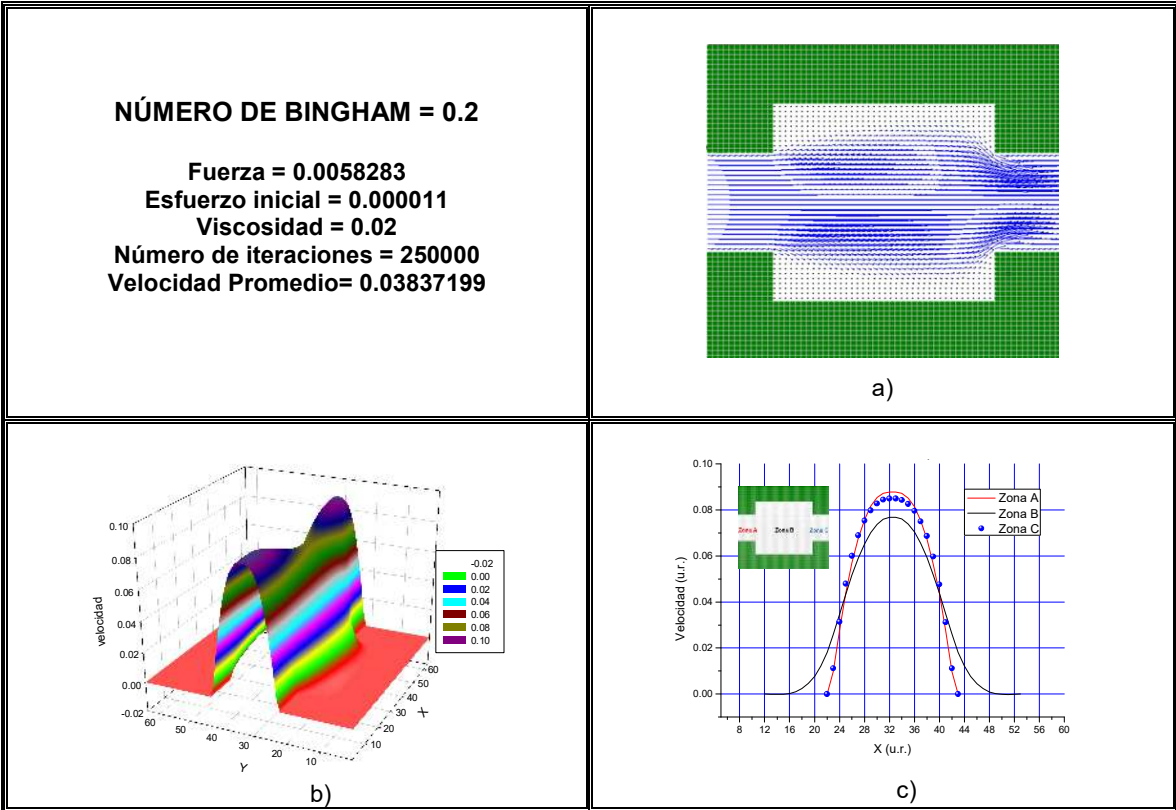


Figura 3.21 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Viscosidad = 0.02

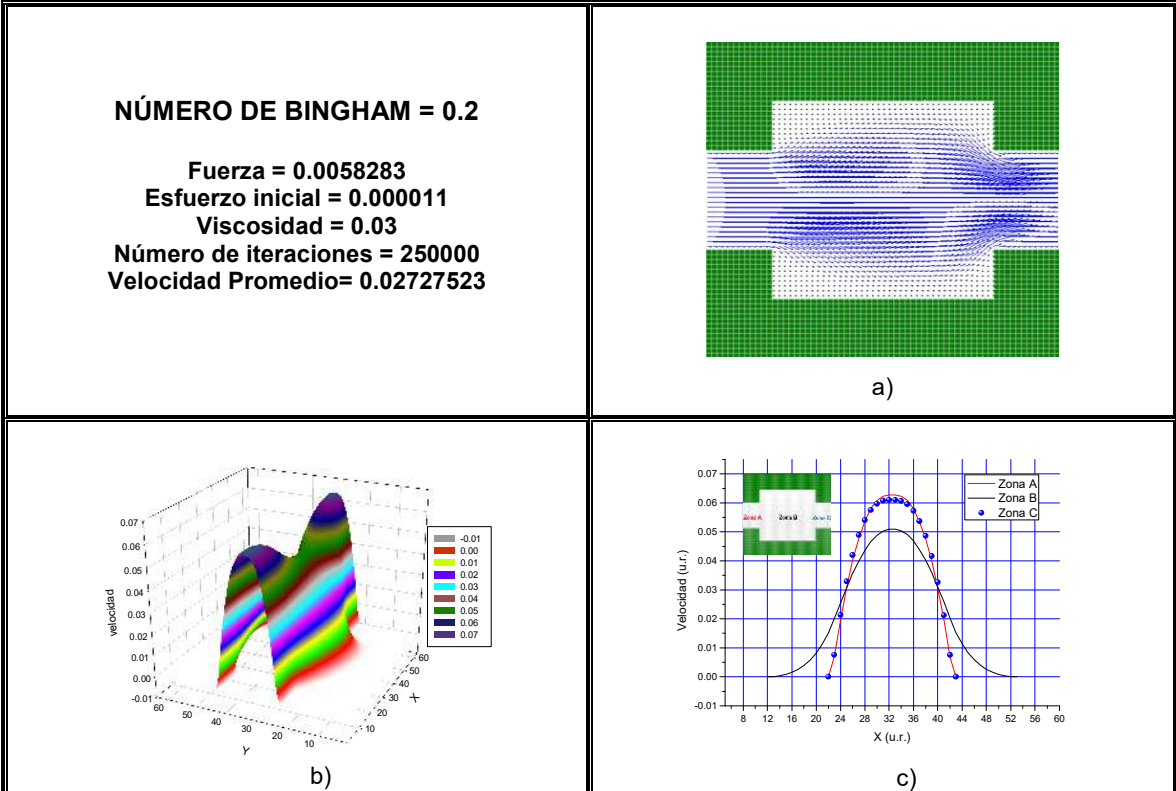


Figura 3.22 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Viscosidad = 0.03



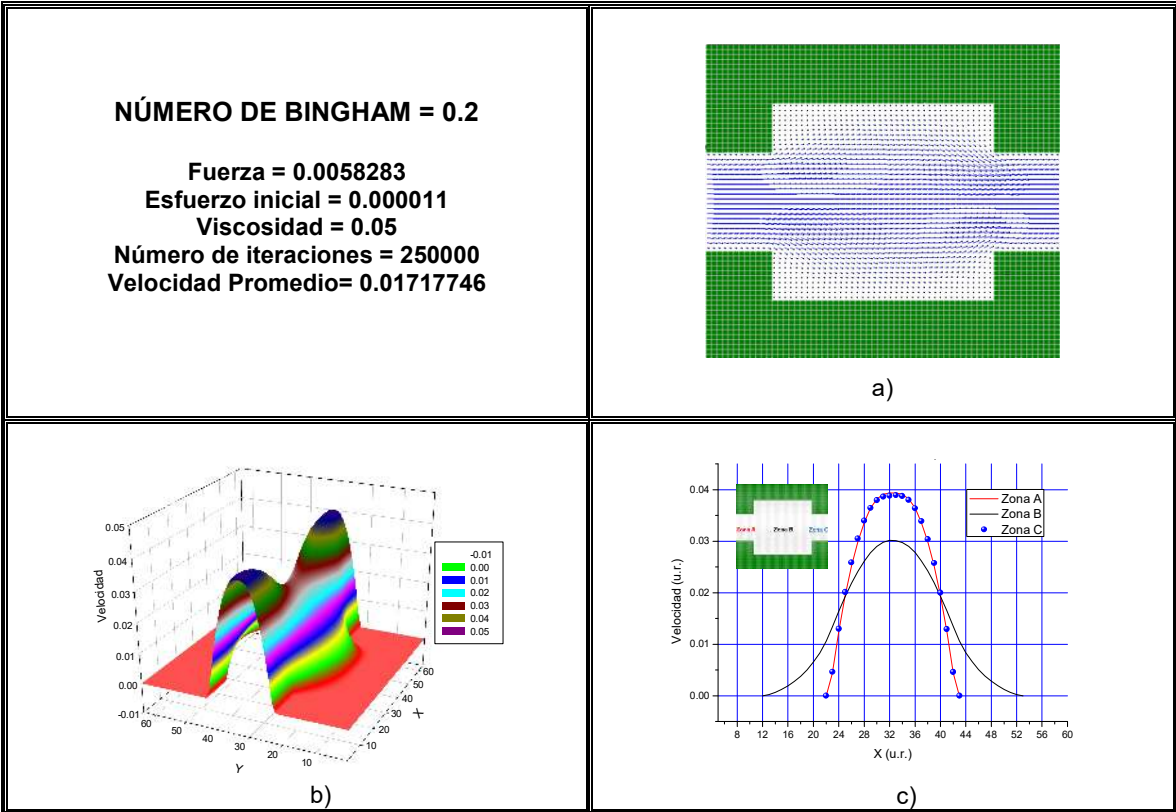


Figura 3.23 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Viscosidad = 0.05

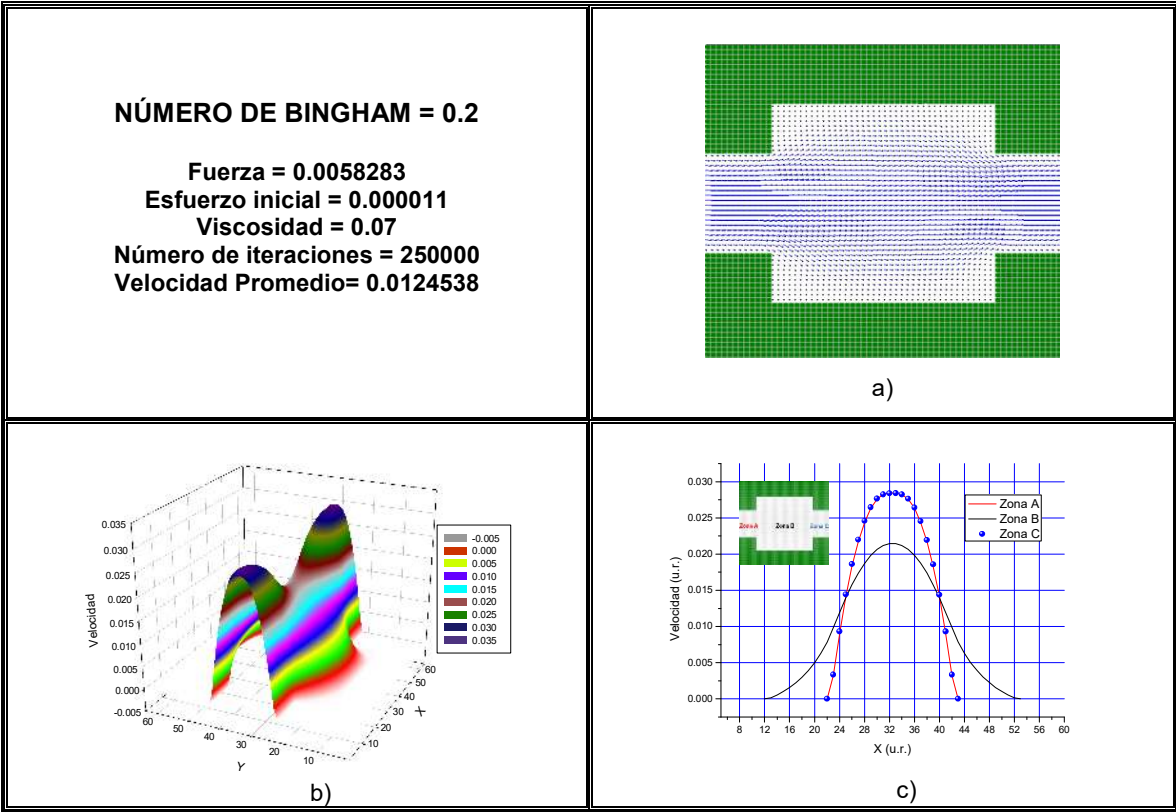


Figura 3.24 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Viscosidad = 0.07



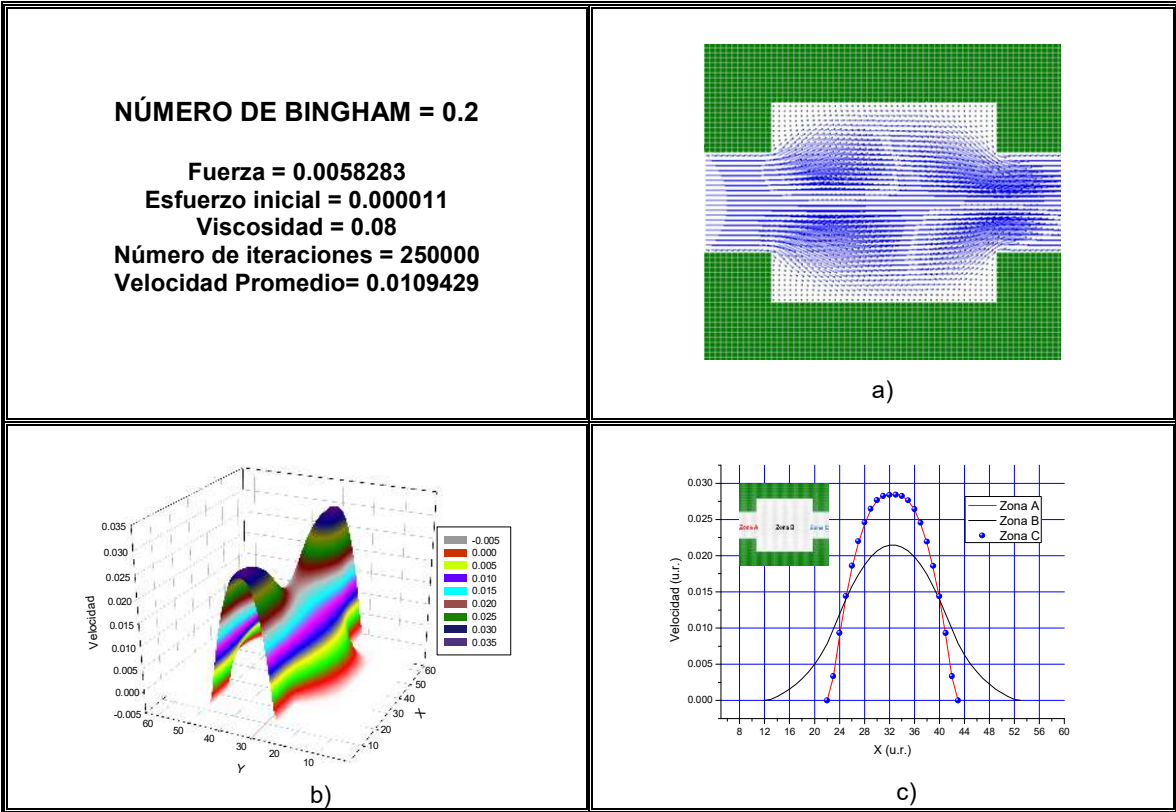


Figura 3.25 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Viscosidad = 0.08

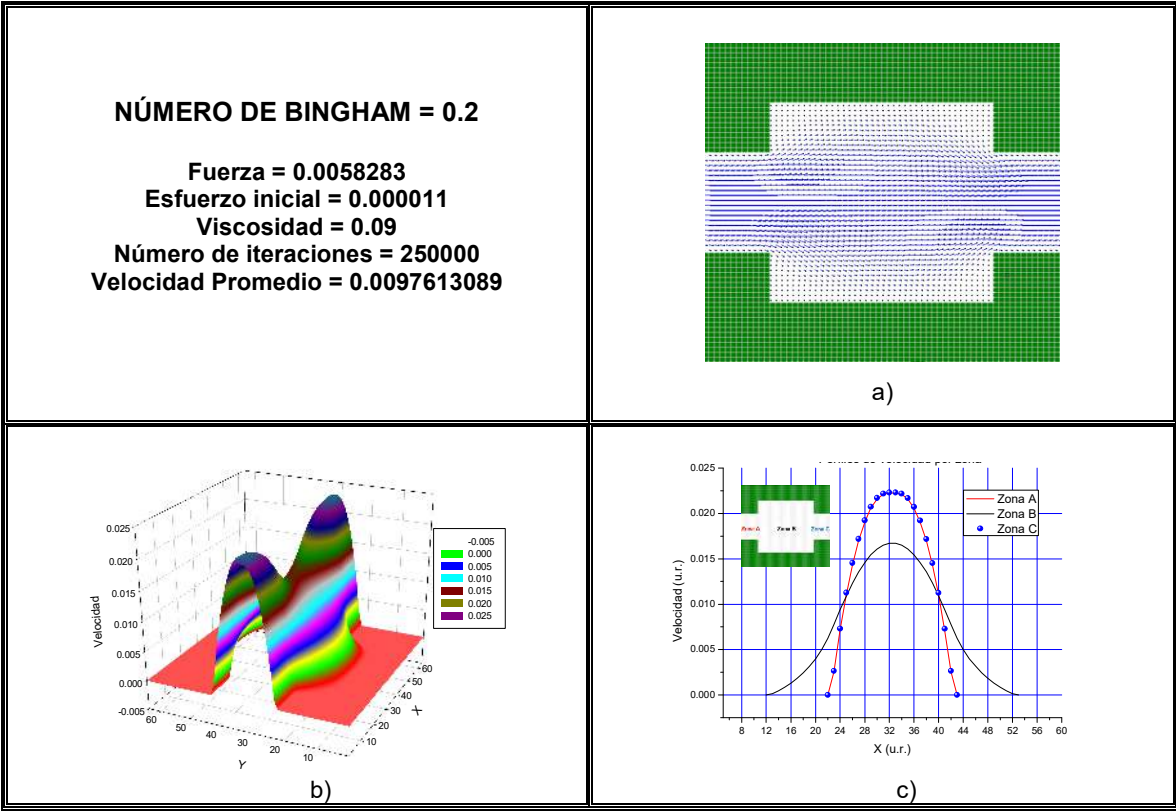


Figura 3.26 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Viscosidad = 0.09

Se puede observar en las figuras 3.18-3.26 que al aumentar la viscosidad en la zona "B", el flujo pierde velocidad debido a la expansión súbita esto se puede ver en la gráfica del inciso c), donde se muestran las velocidades en cada sección, lo cual es resultado es esperado y se conservan las velocidades de entrada y salida en la zona "A" y "C".

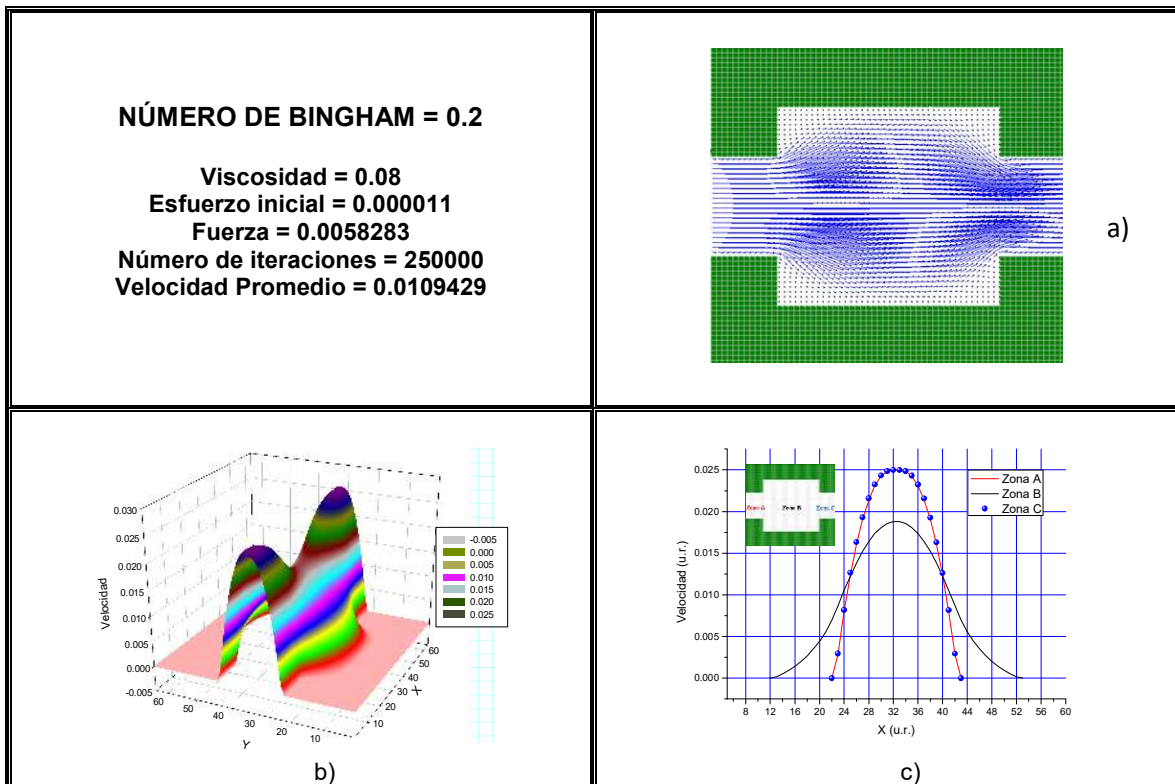


Figura 3.27 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Esf. inicial = 0.000011

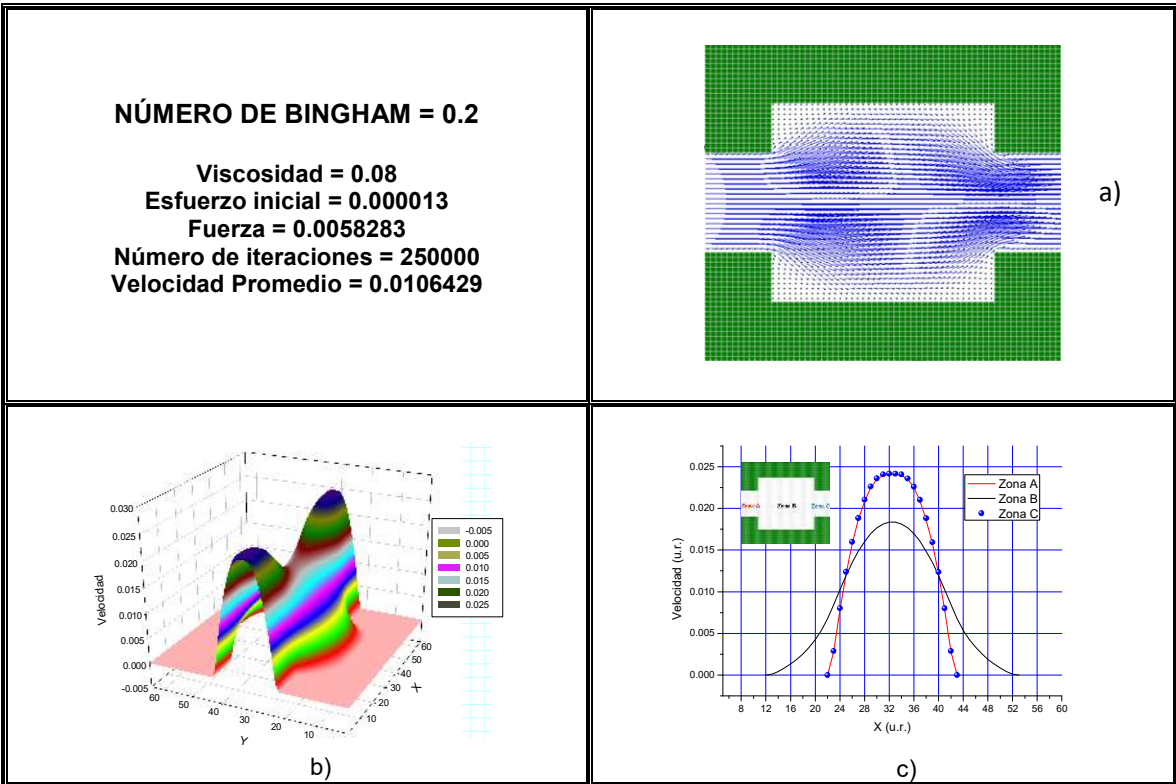


Figura 3.28 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Esf. inicial = 0.000013

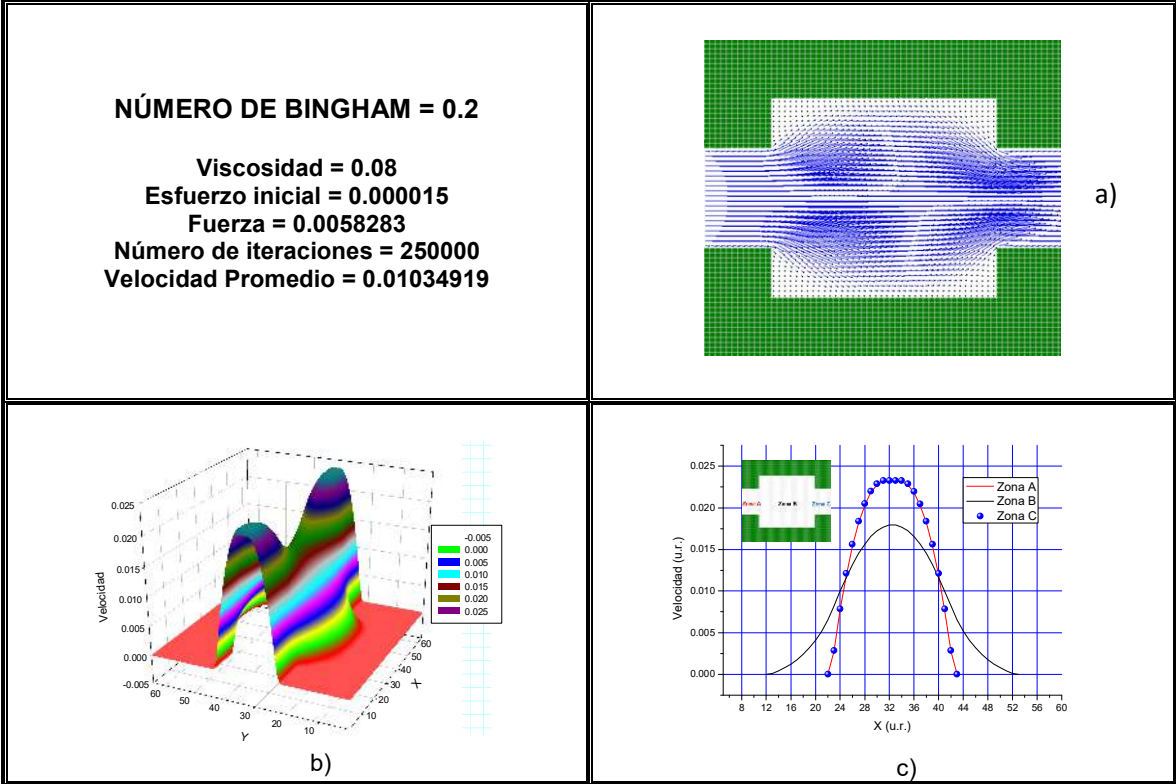


Figura 3.29 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Esf. inicial = 0.000015

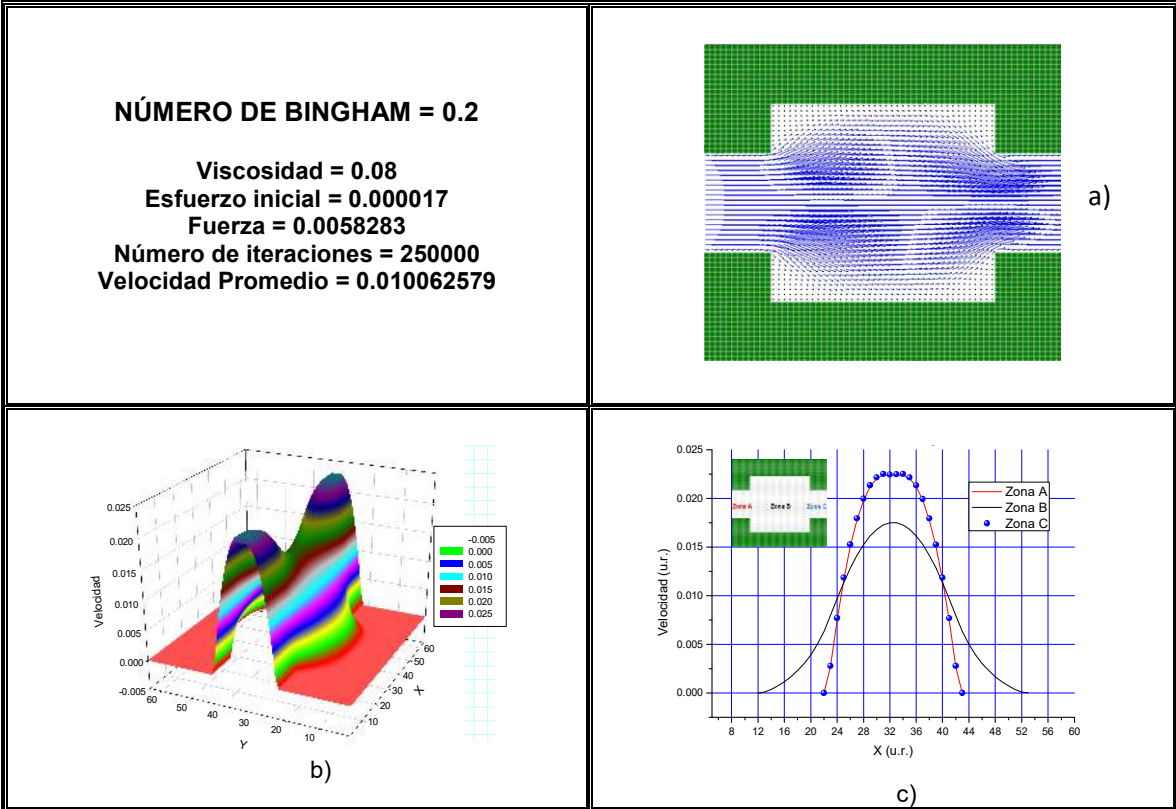


Figura 3.30 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Esf. inicial = 0.000017

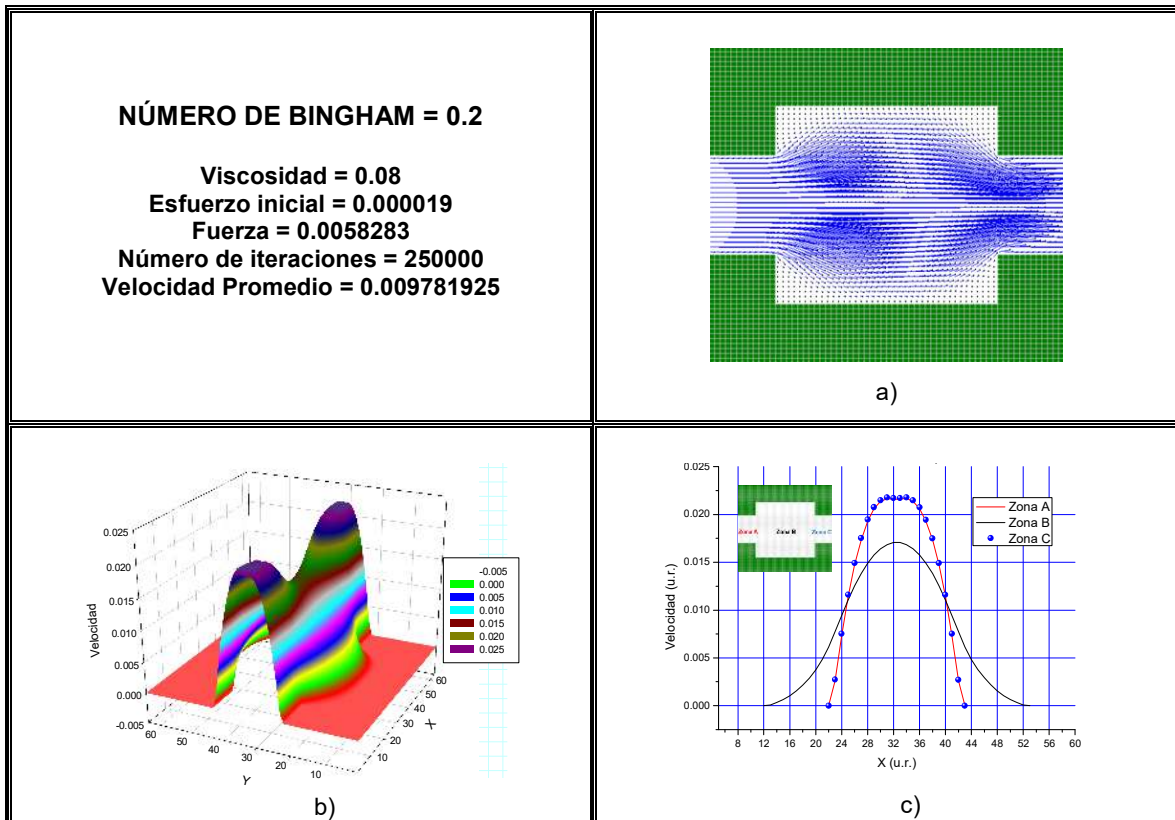


Figura 3.31 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Esf. inicial = 0.000019

En las figuras 3.27-3.31 se varió el esfuerzo inicial lo cual no afecta aparentemente las líneas de flujo y por consecuencia la velocidad promedio y se conservan las velocidades de entrada y salida en la zona “A” y “C”.



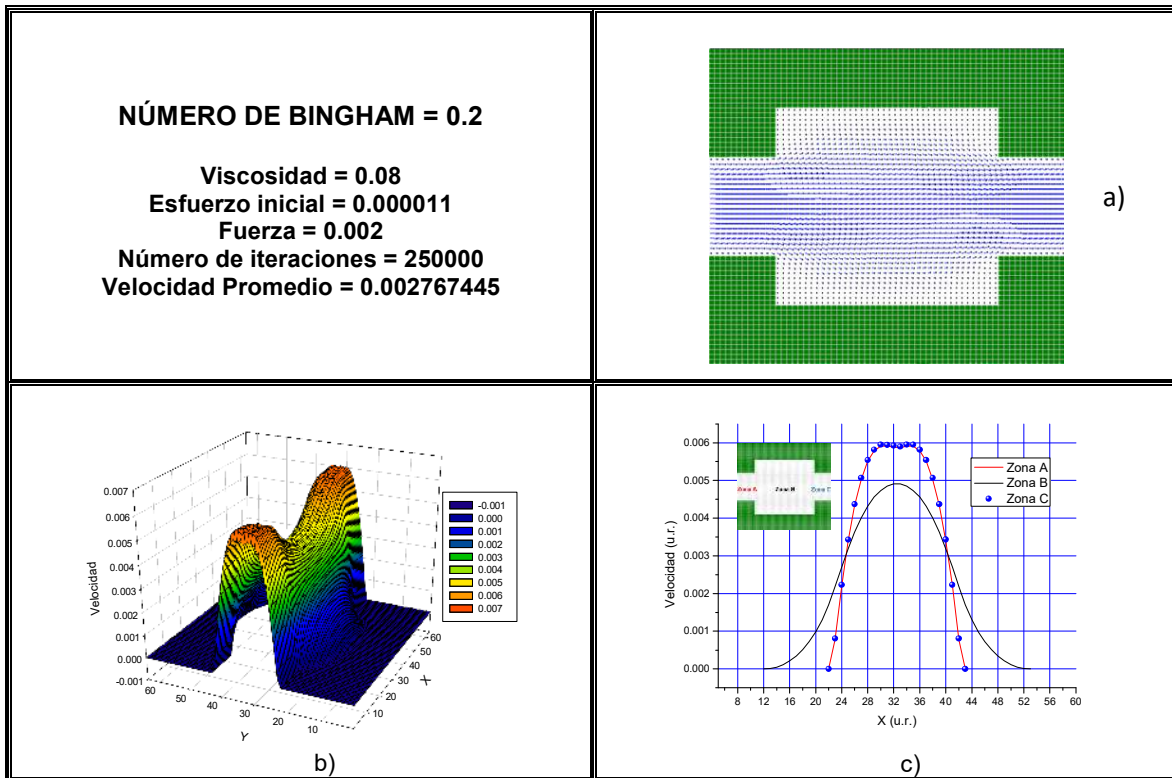


Figura 3.32 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Fuerza = 0.002

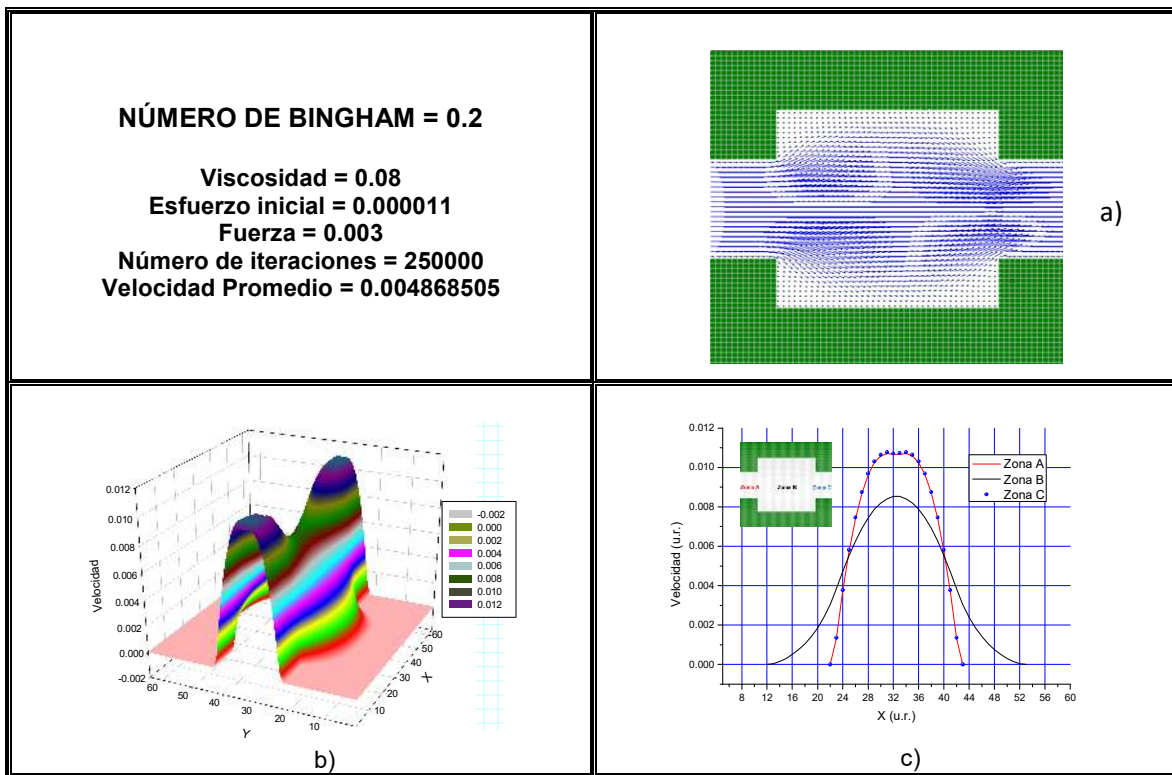


Figura 3.33 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Fuerza = 0.003

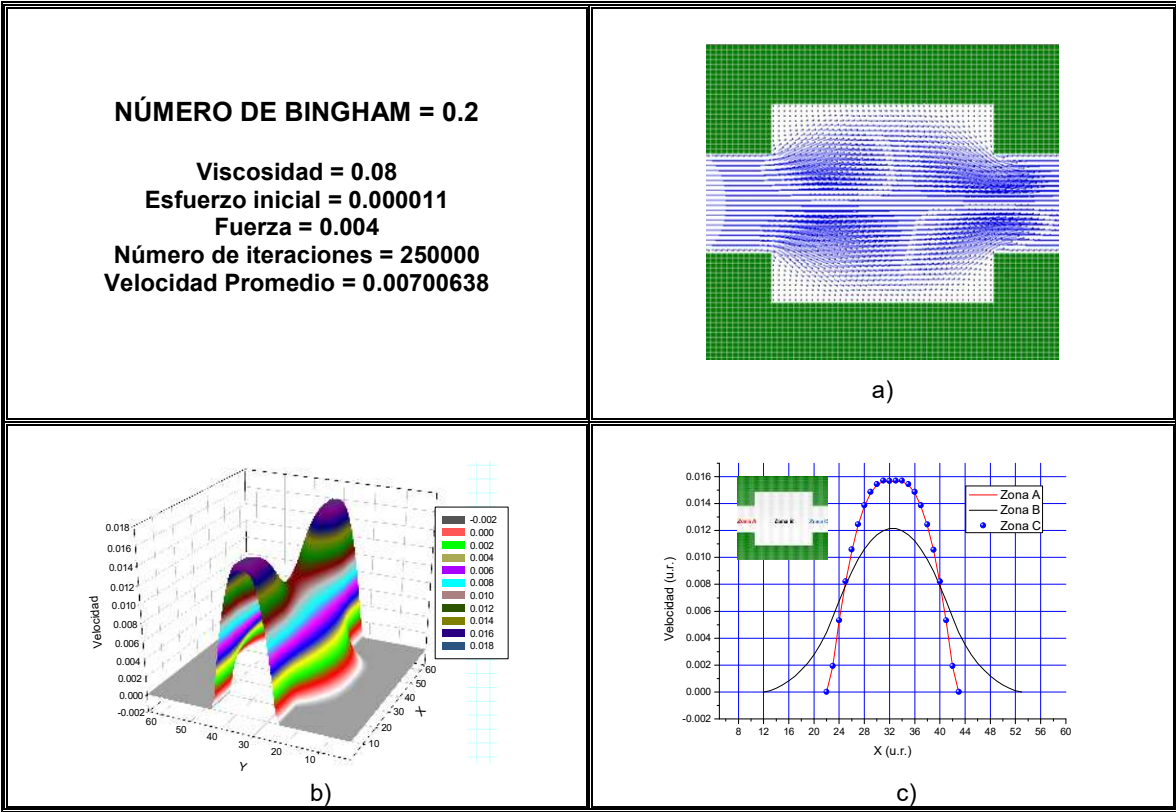


Figura 3.34 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Fuerza = 0.004

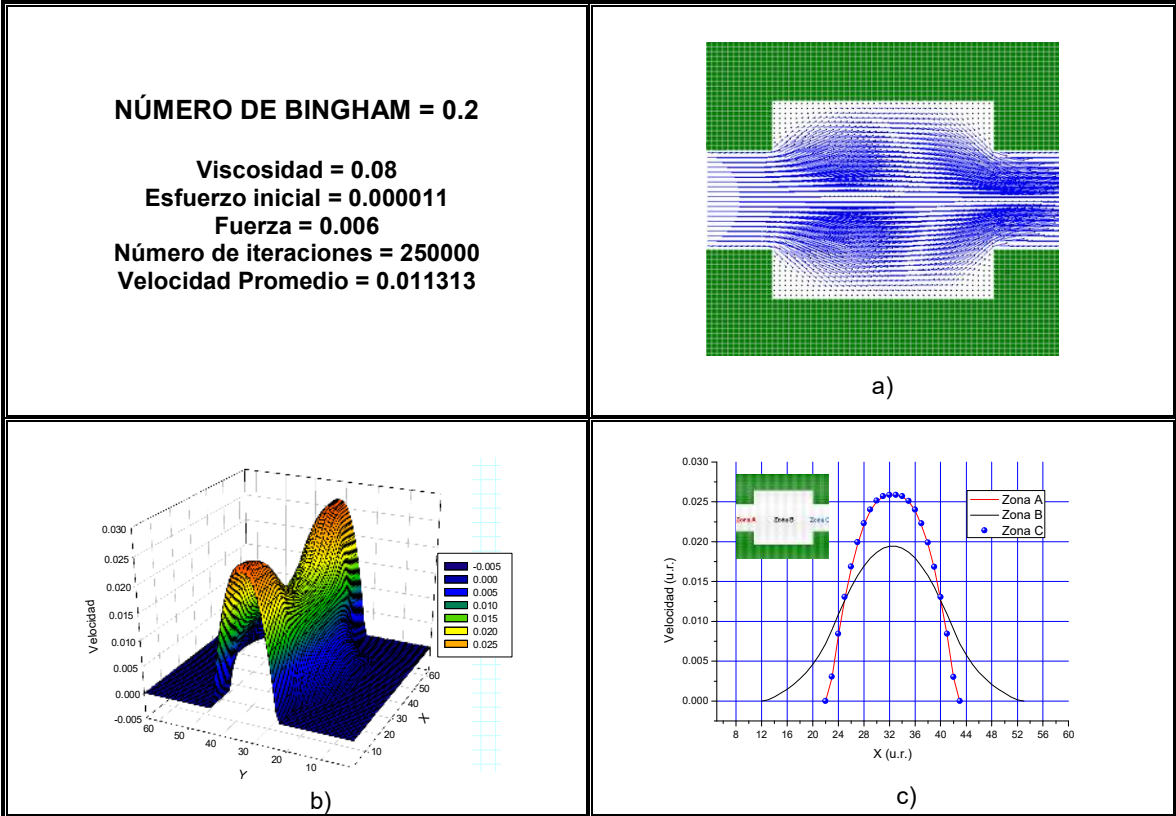


Figura 3.35 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Fuerza = 0.006

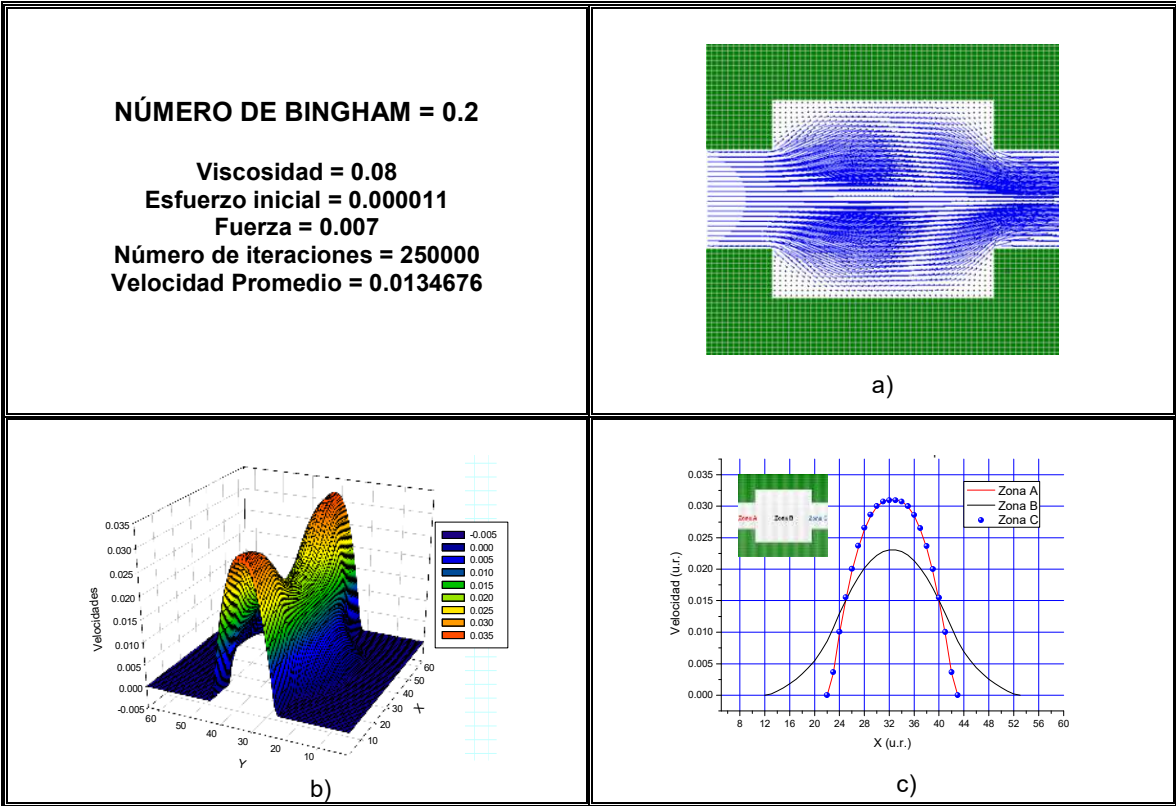


Figura 3.36 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Fuerza = 0.007

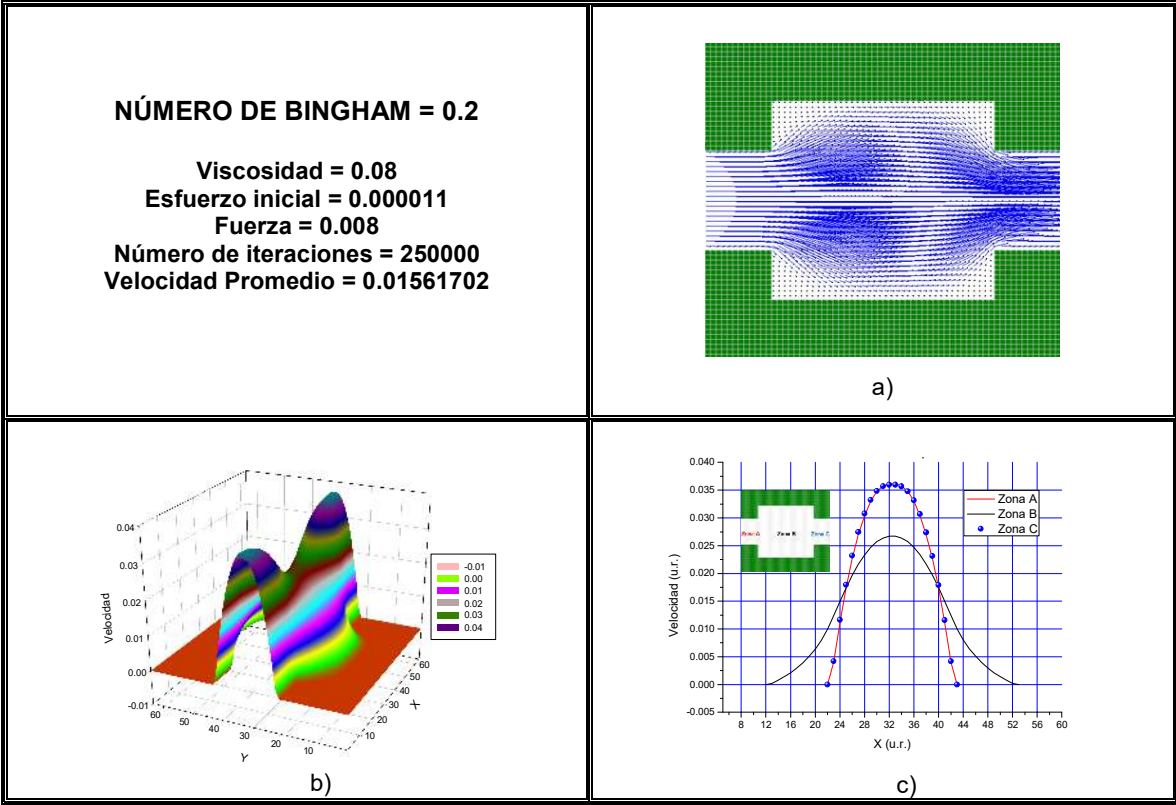


Figura 3.37 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Fuerza = 0.008



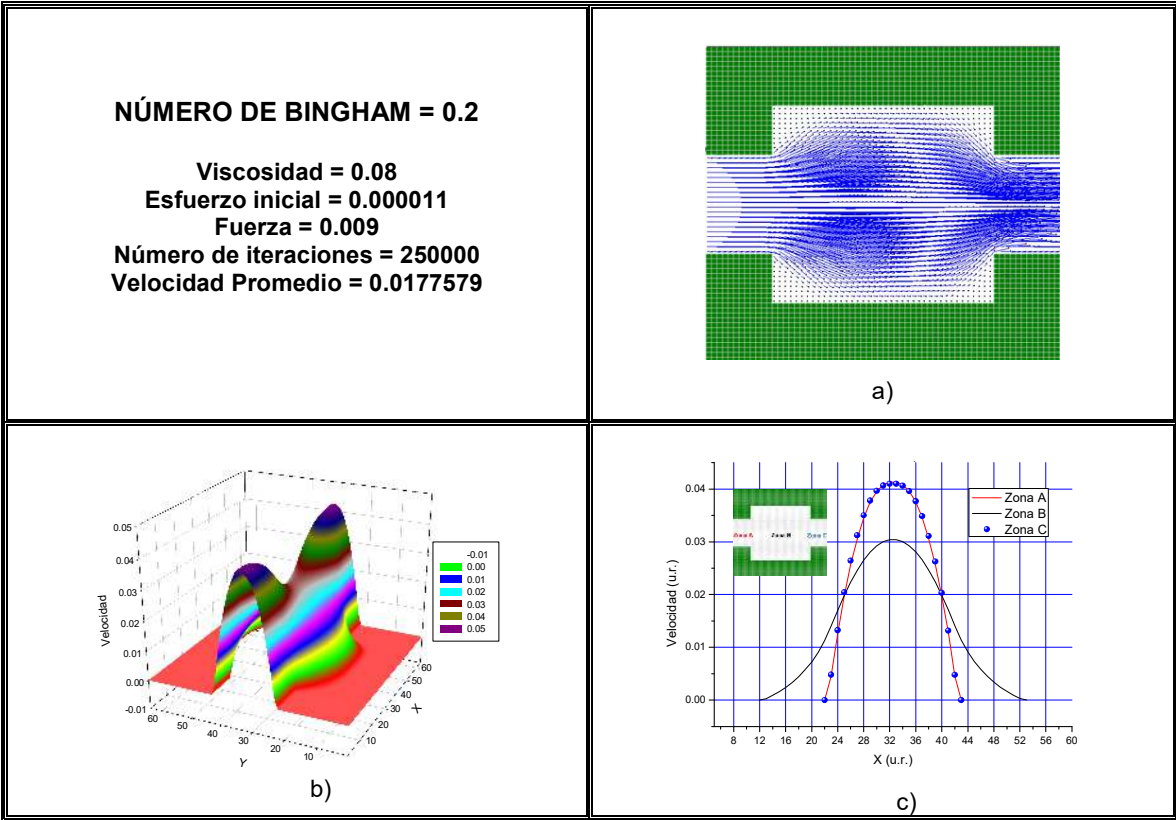


Figura 3.38 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Fuerza = 0.009

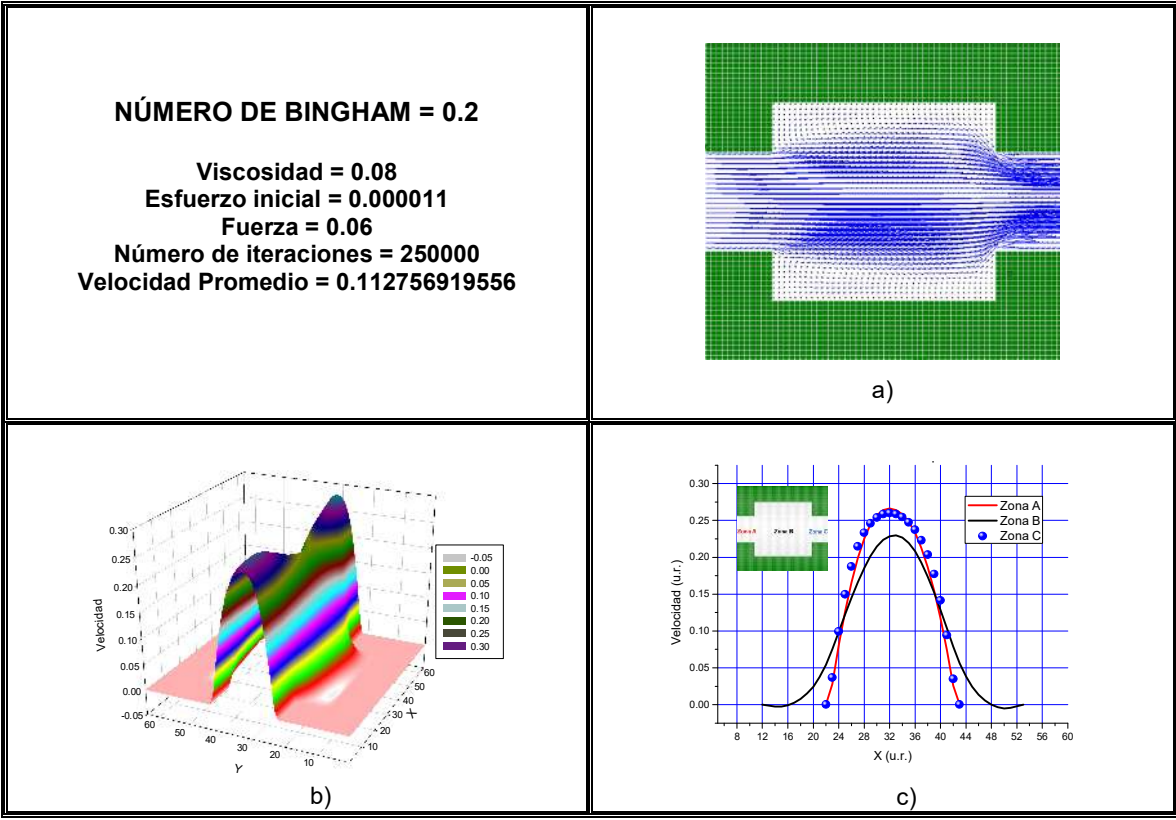


Figura 3.39 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Fuerza = 0.06

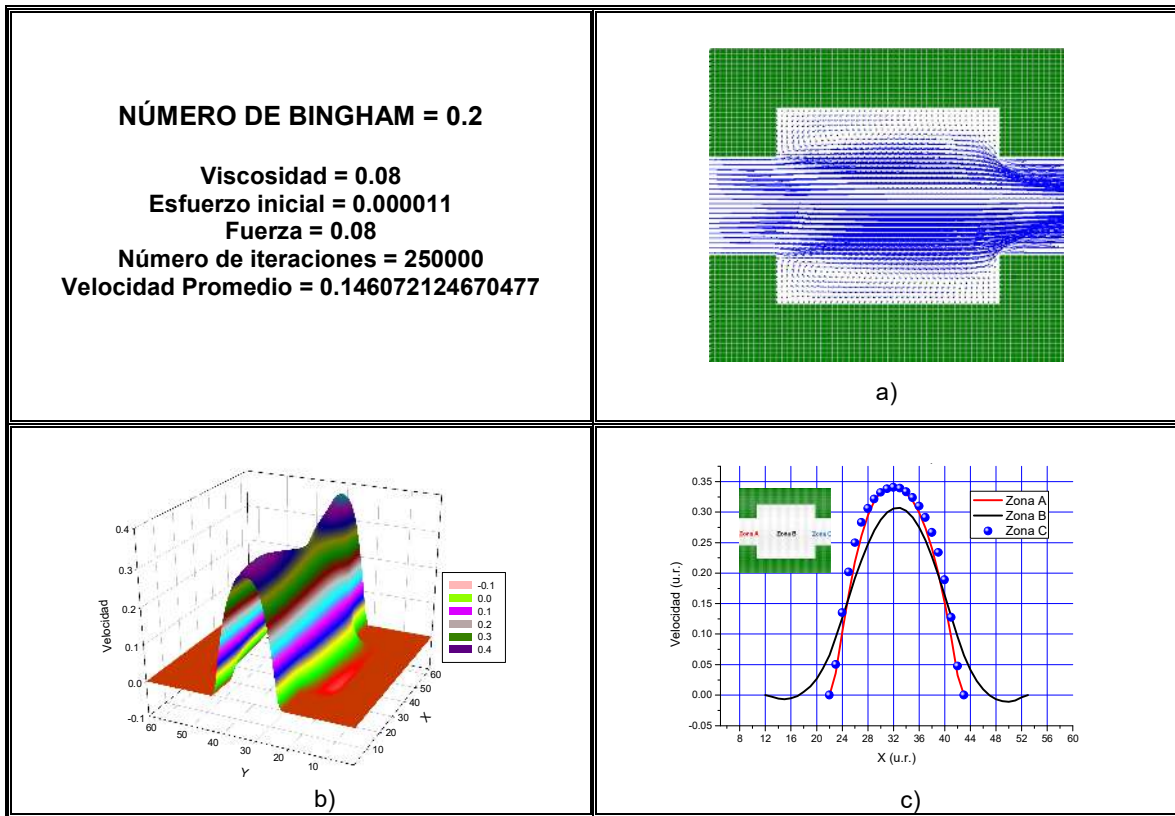


Figura 3.40 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Fuerza = 0.08

En las figuras 3.32-3.40 a medida que sube la fuerza también la velocidad promedio. Se puede observar el fenómeno de vena contracta en todas las figuras y en la gráfica del inciso c) la zona “B”, la velocidad promedio está muy cerca de la zona “A” y “C”.

**NÚMERO DE BINGHAM = 0.3**

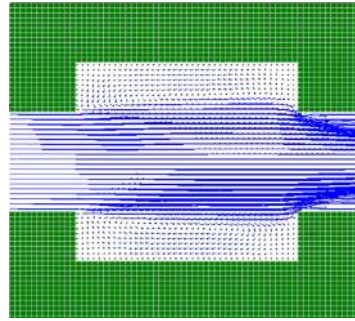
**Fuerza = 0.0051925**

**Esfuerzo inicial = 0.000014**

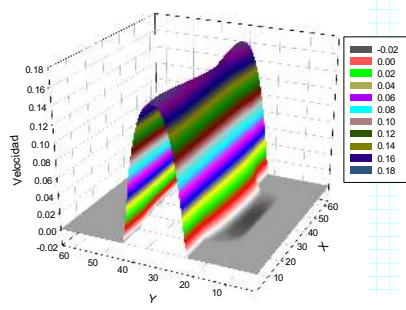
**Viscosidad = 0.008**

**Número de iteraciones = 250000**

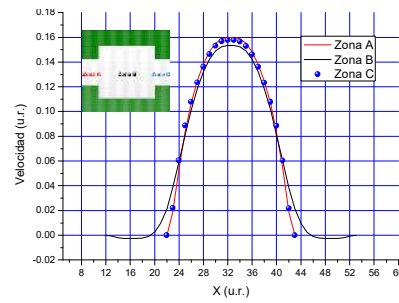
**Velocidad Promedio= 0.0706934167**



a)



b)



c)

Figura 3.41 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Viscosidad = 0.008

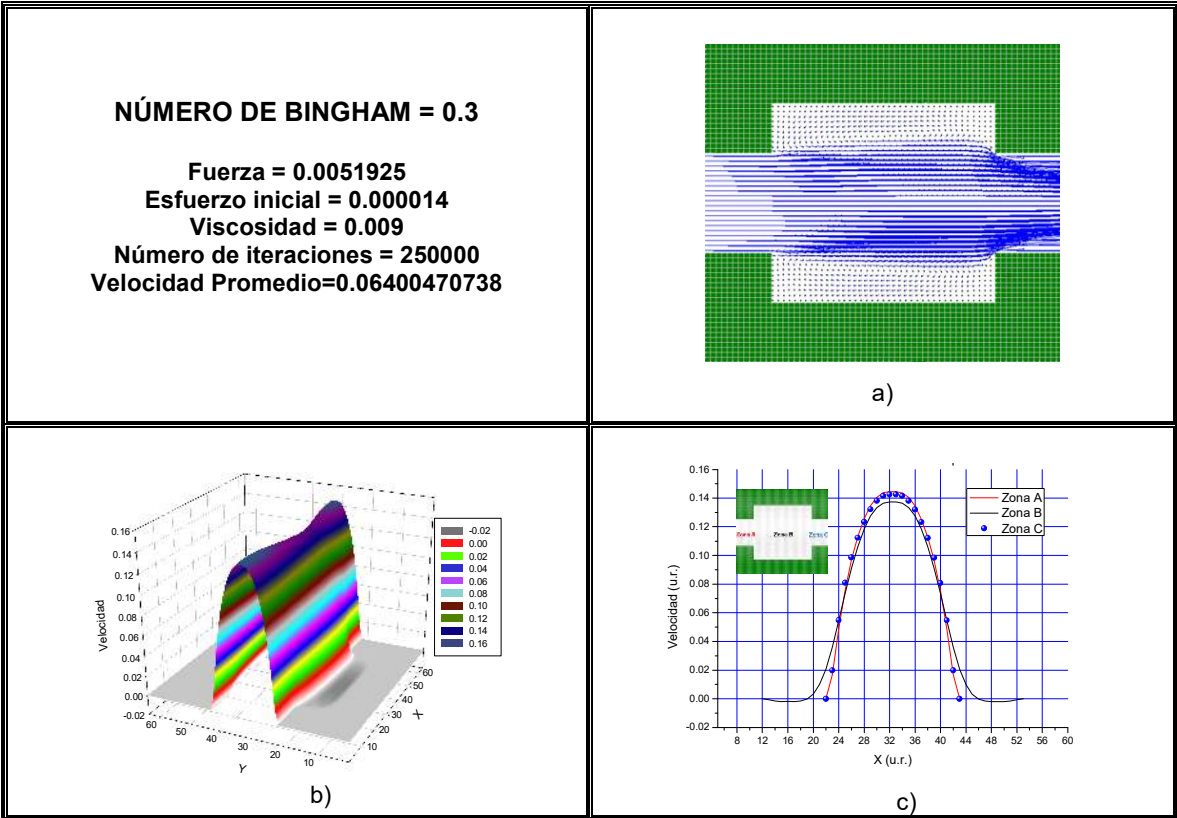


Figura 3.42 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Viscosidad = 0.009

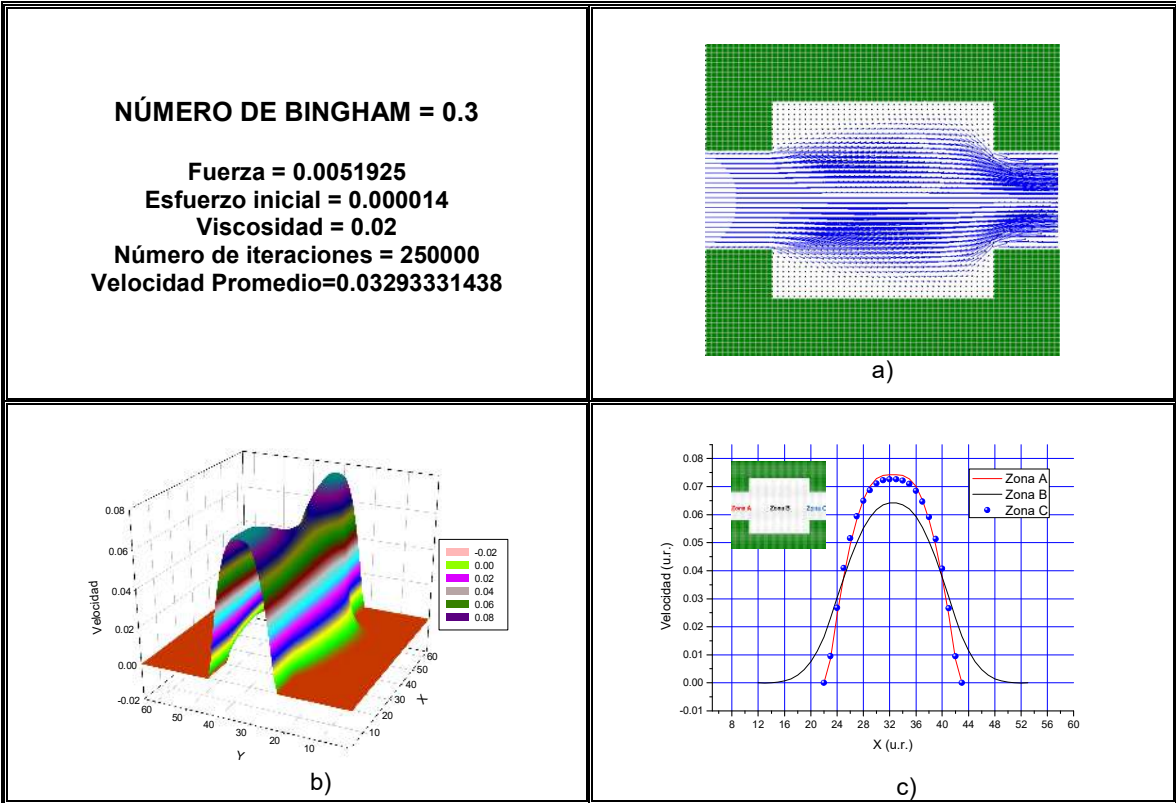


Figura 3.43 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Viscosidad = 0.02

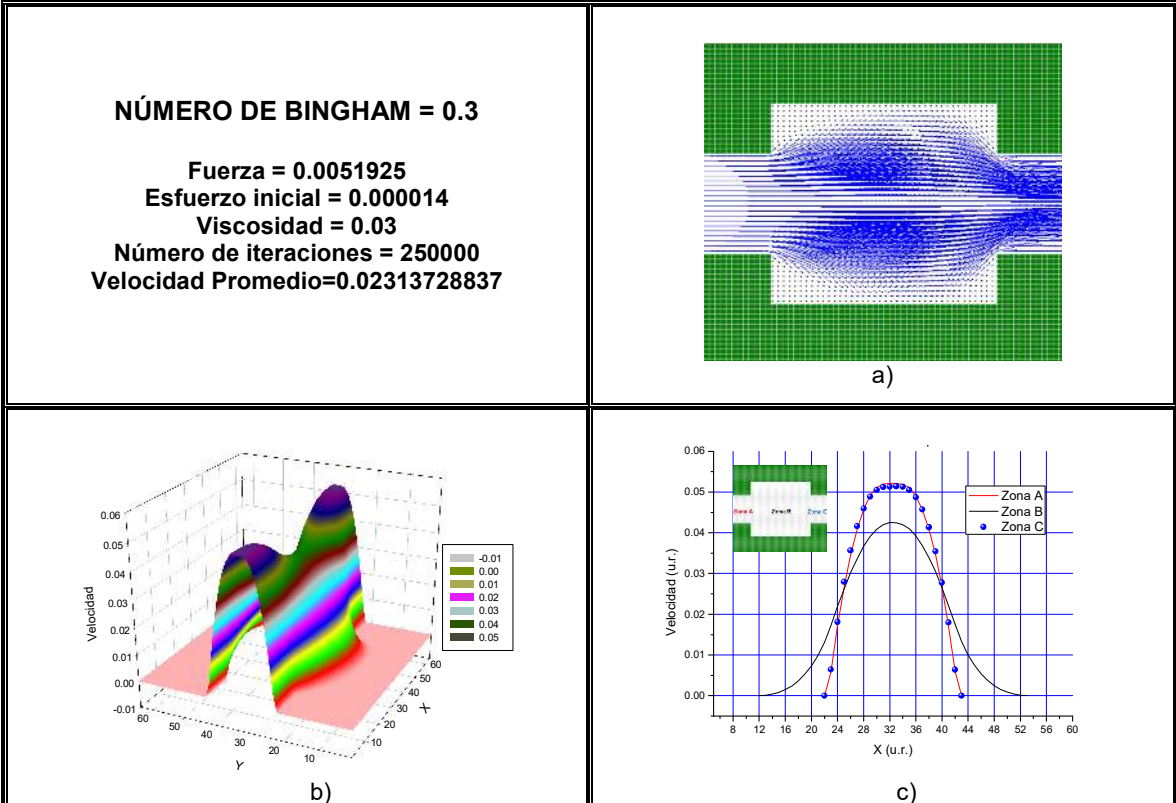


Figura 3.44 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Viscosidad = 0.03



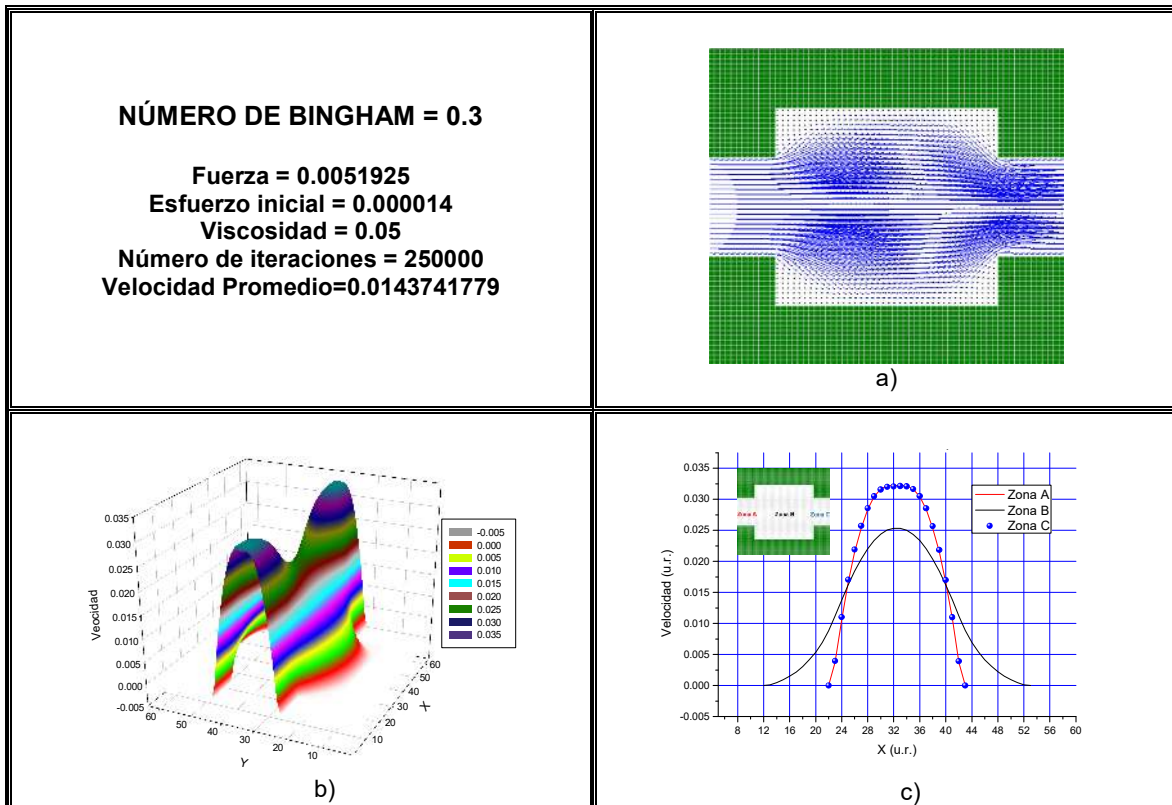


Figura 3.45 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Viscosidad = 0.05

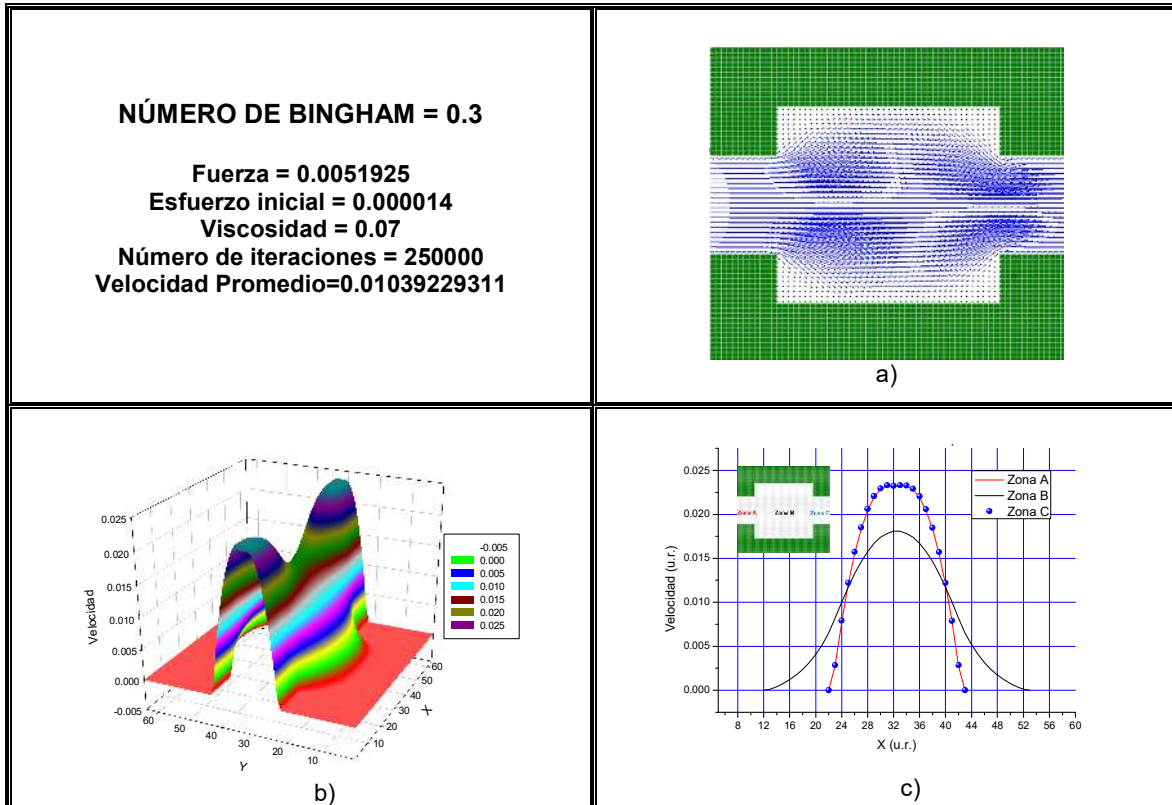


Figura 3.46 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Viscosidad = 0.07

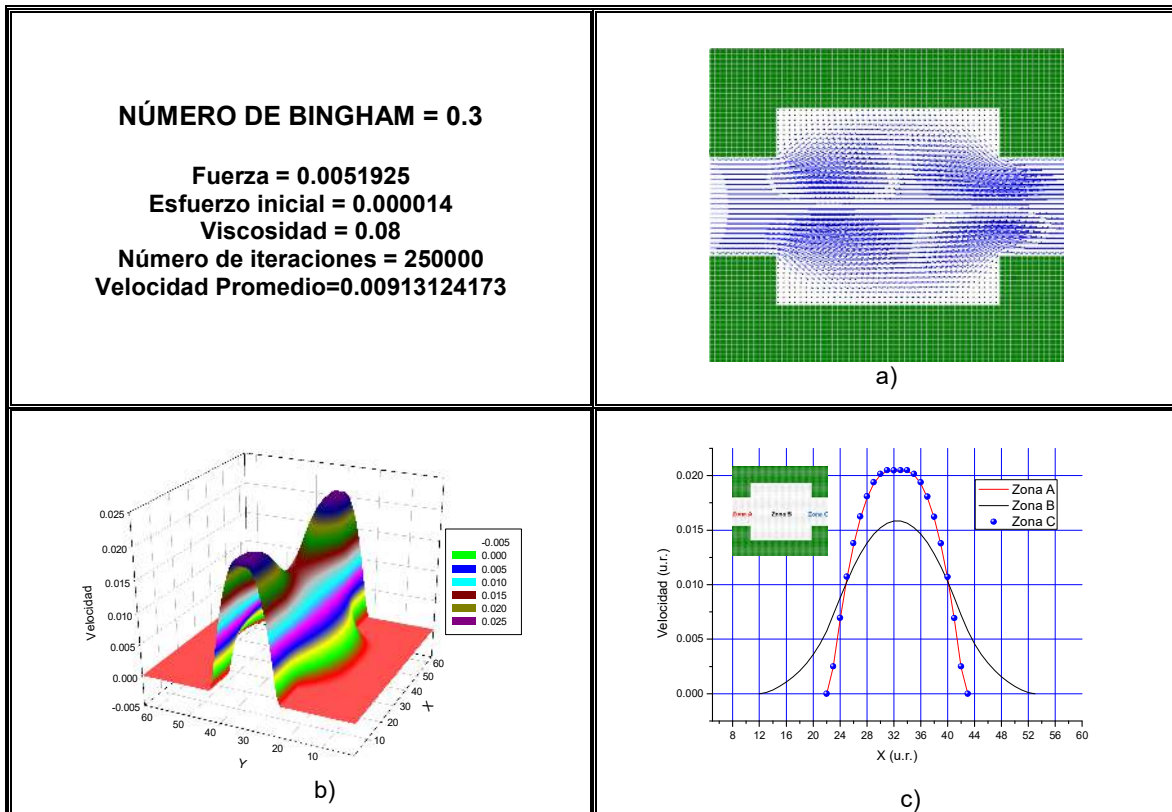


Figura 3.47 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Viscosidad = 0.08

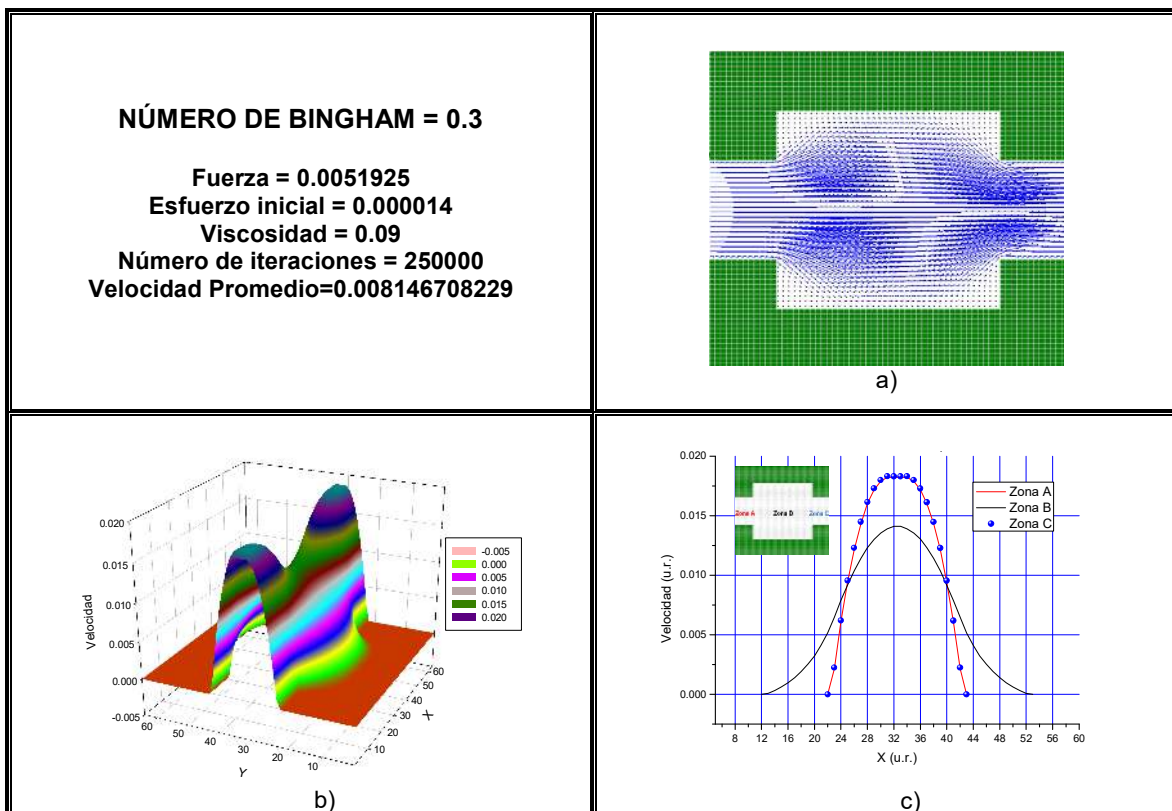


Figura 3.48 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Viscosidad = 0.09

En las figuras 3.41-3.48 al aumentar la viscosidad el flujo pierde velocidad debido a la expansión súbita que es la zona “B”, esto se puede ver en la gráfica del inciso c), donde se muestran las velocidades en cada sección. Se puede observar en todos los casos que las líneas de flujo en la zona “C” se presenta el fenómeno de vena contracta.

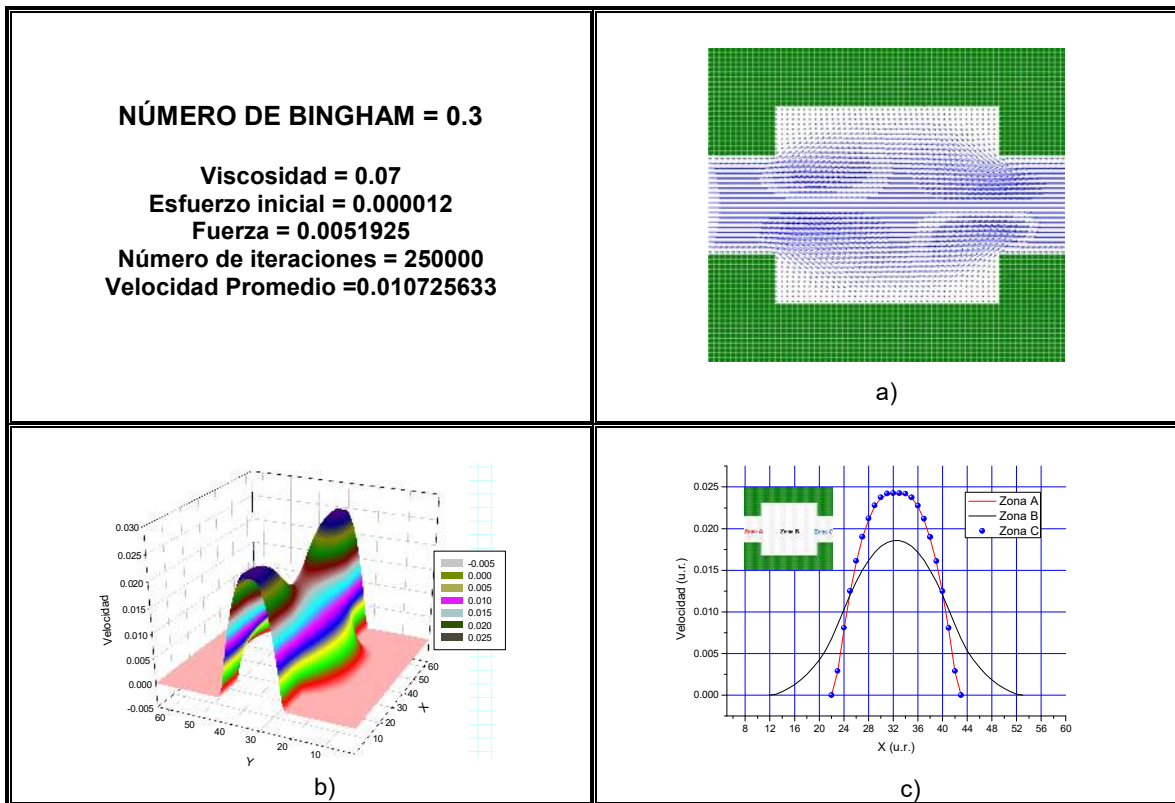


Figura 3.49 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Esf. inicial = 0.000012



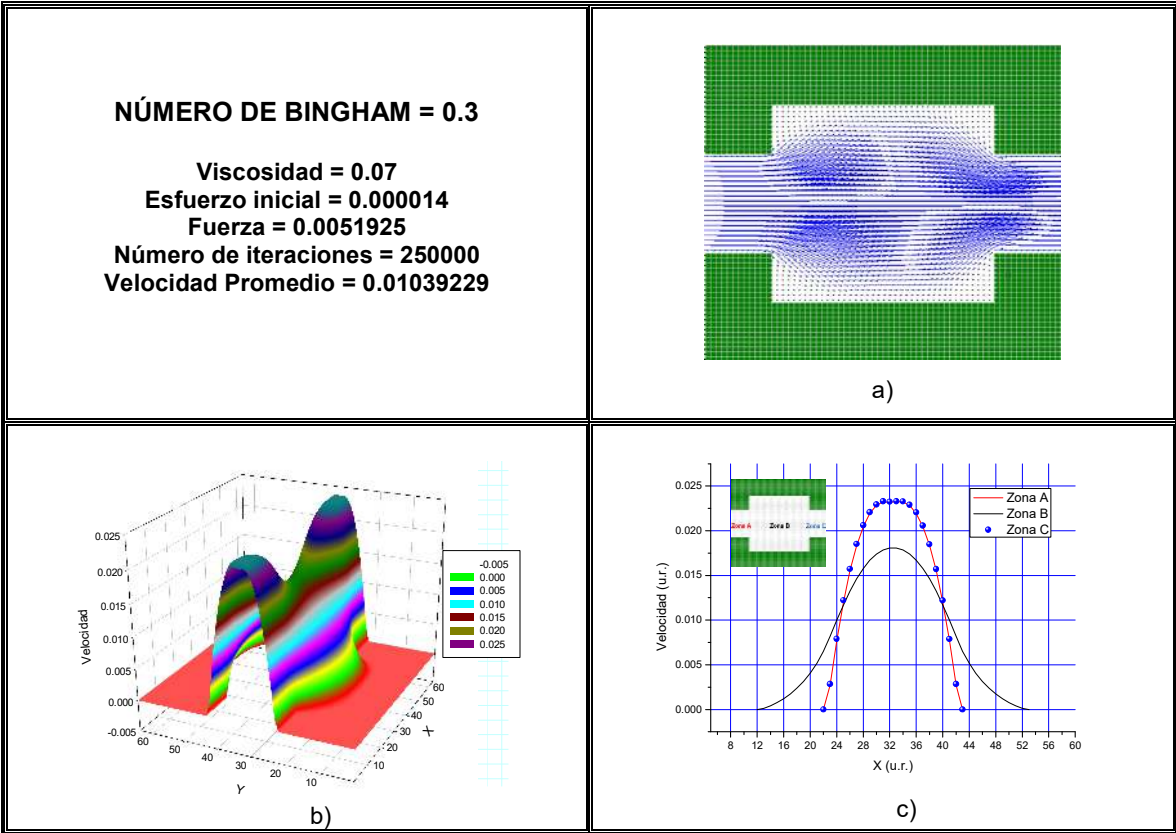


Figura 3.50 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Esf. inicial = 0.000014

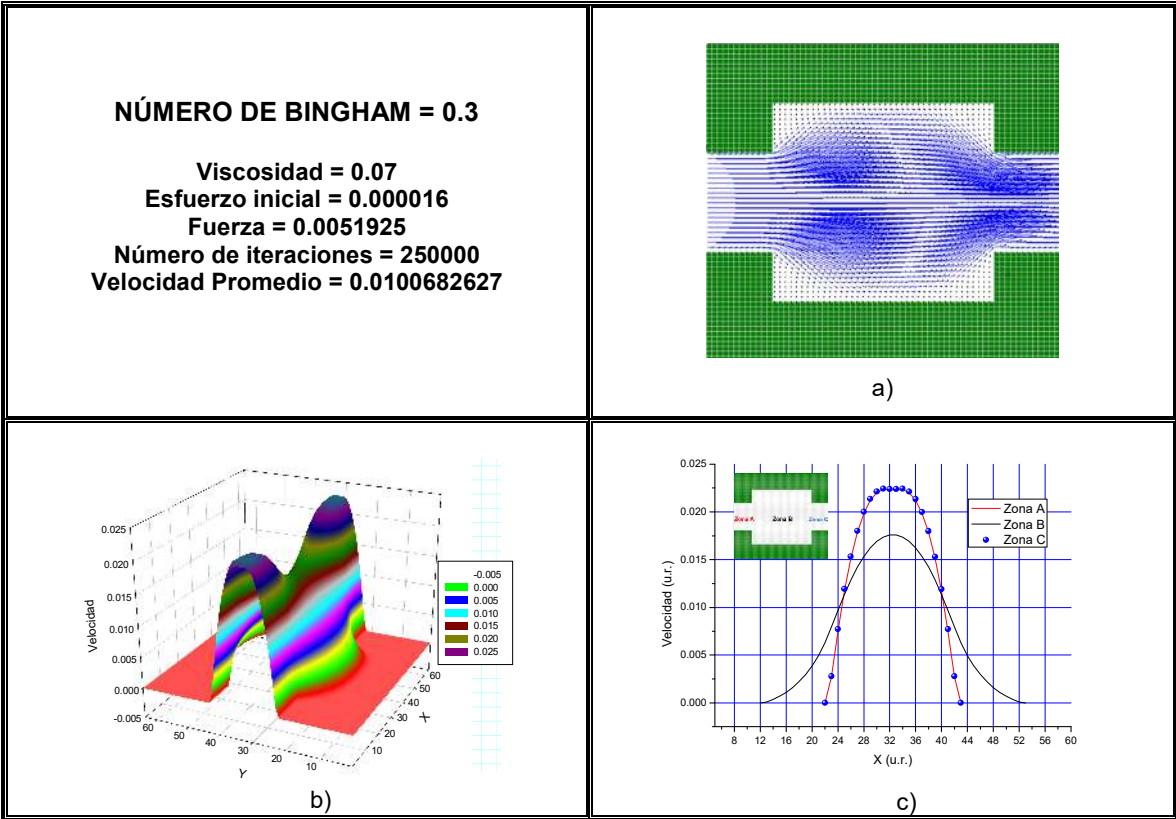


Figura 3.51 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Esf. inicial = 0.000016

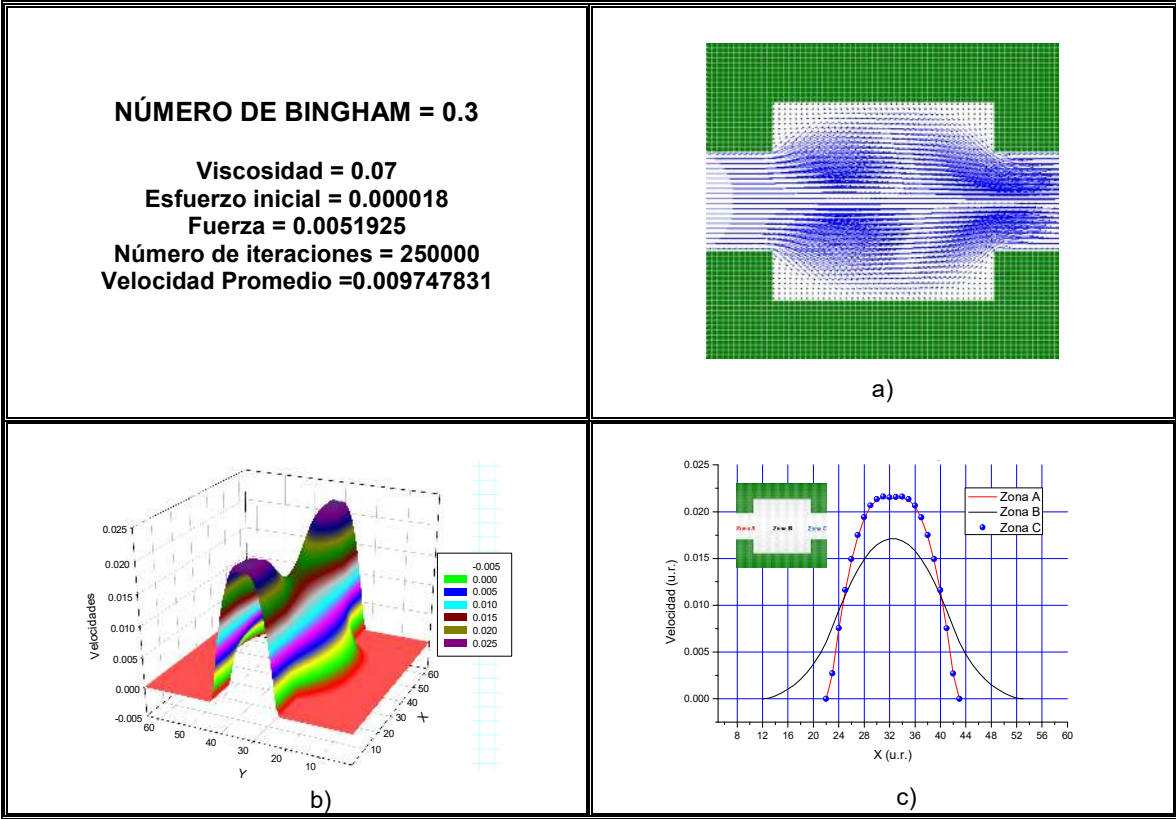


Figura 3.52 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Esf. inicial = 0.000018

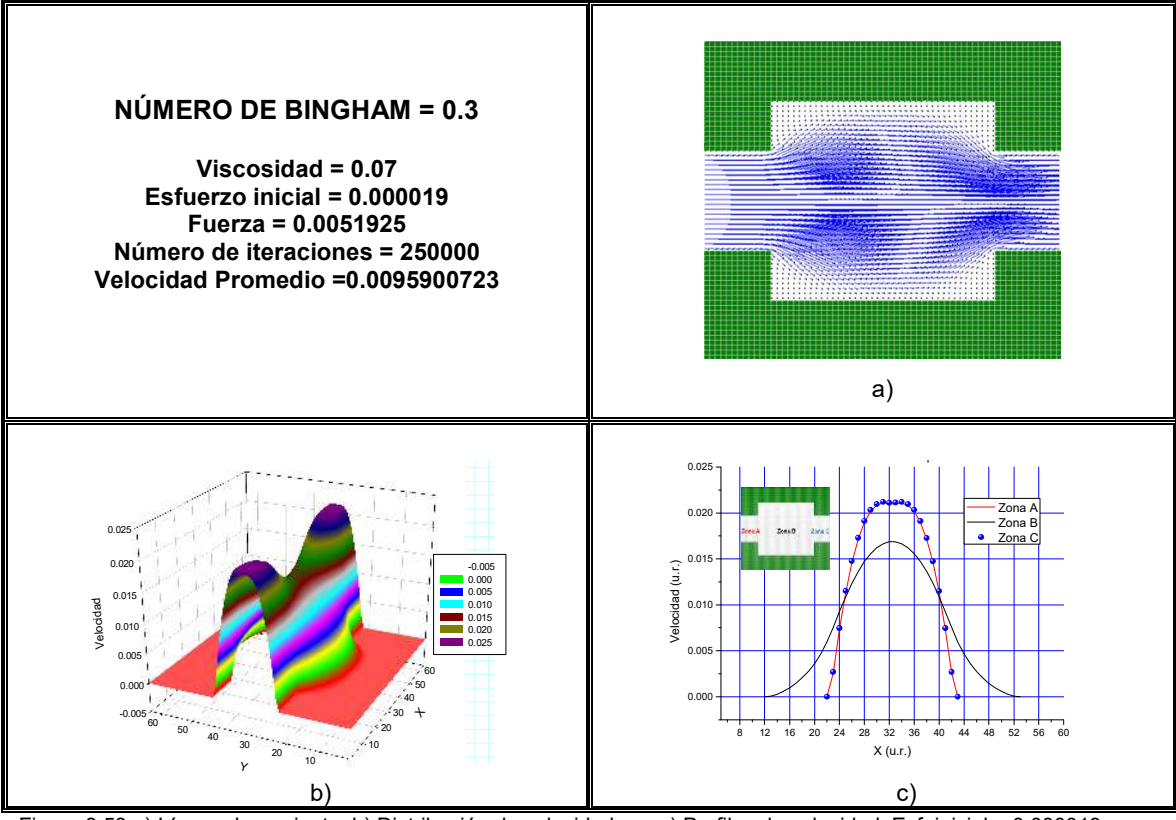


Figura 3.53 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Esf. inicial = 0.000019

En las figuras 3.49-3.53 se varió el esfuerzo inicial lo cual afecta las líneas de flujo donde se aprecia el fenómeno de vena contracta en la zona “C” y la velocidad promedio se ve afectada pues a medida que sube el esfuerzo inicial aumenta, la velocidad promedio disminuye y se conservan las velocidades de entrada y salida en la zona “A” y “C”.

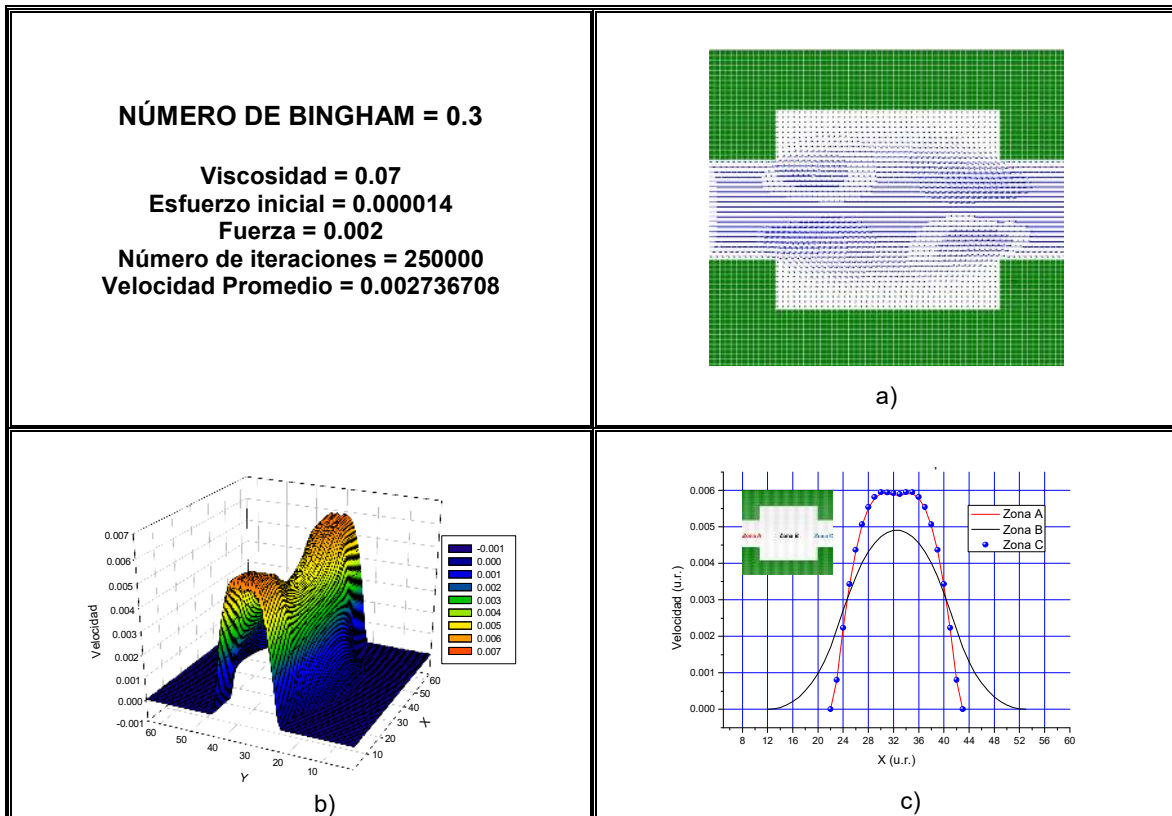


Figura 3.54 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Fuerza = 0.002

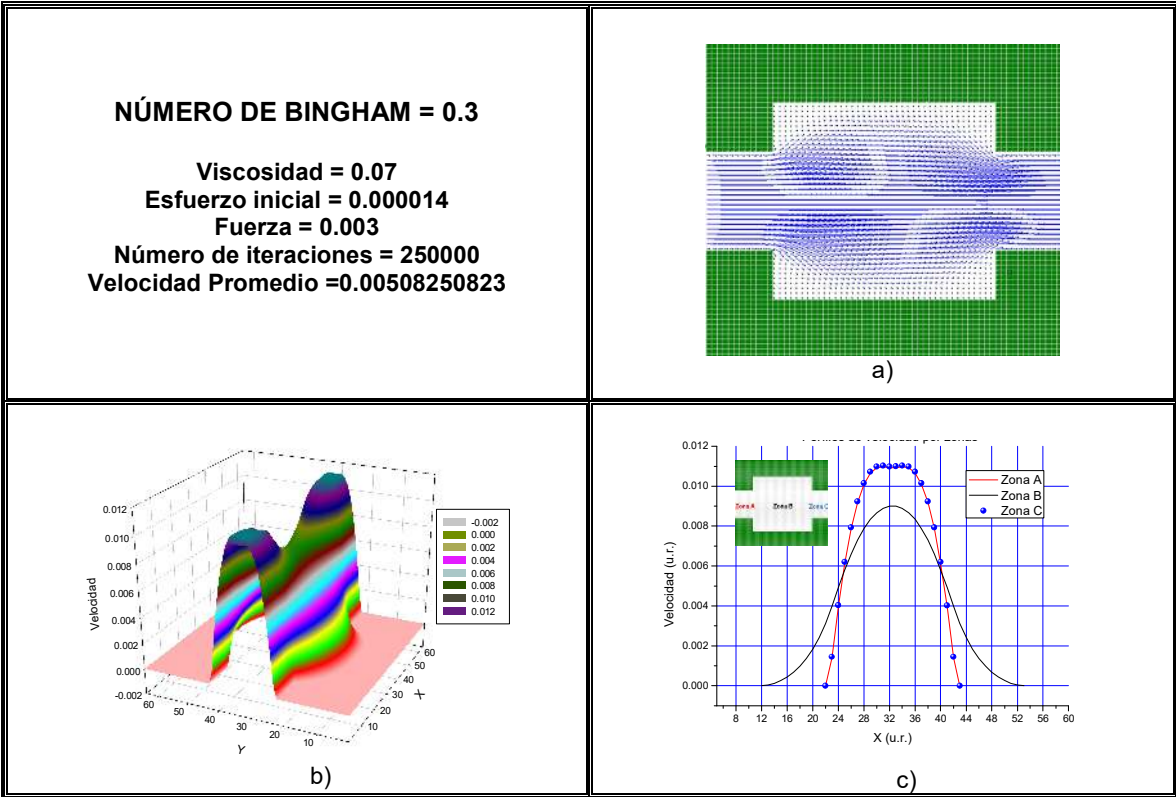


Figura 3.55 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Fuerza = 0.003

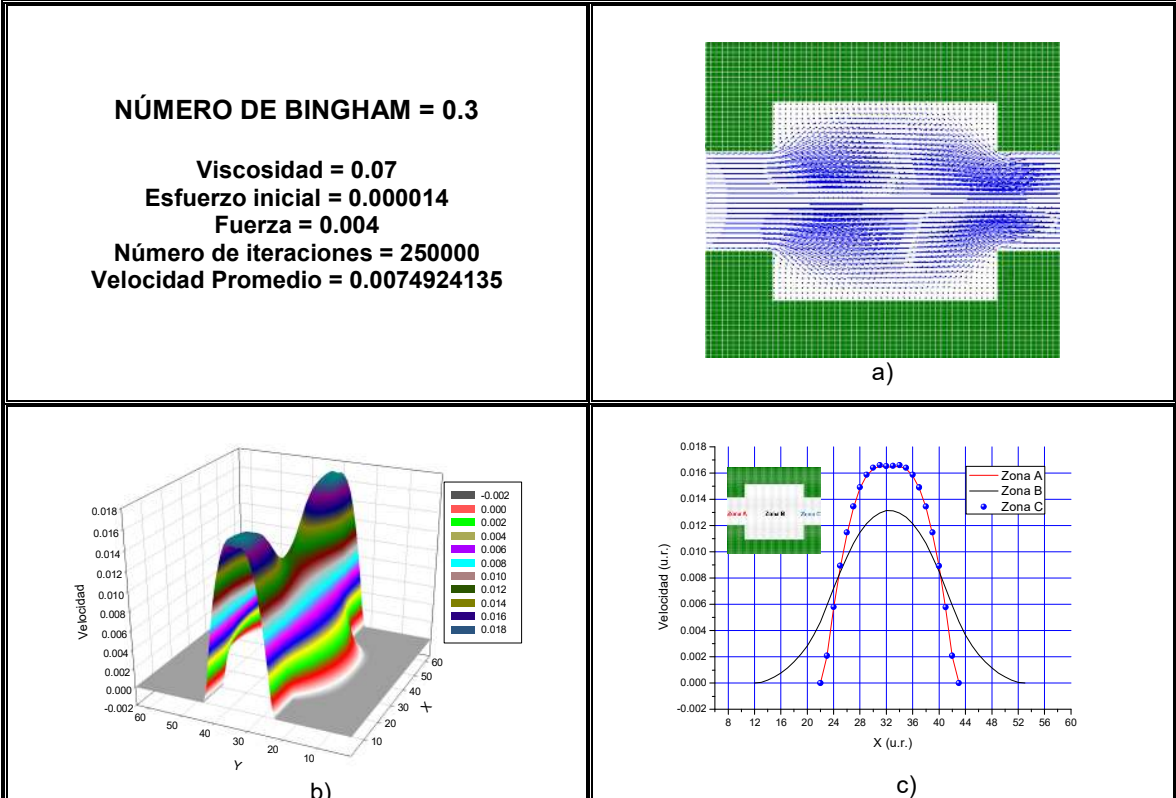


Figura 3.56 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Fuerza = 0.004



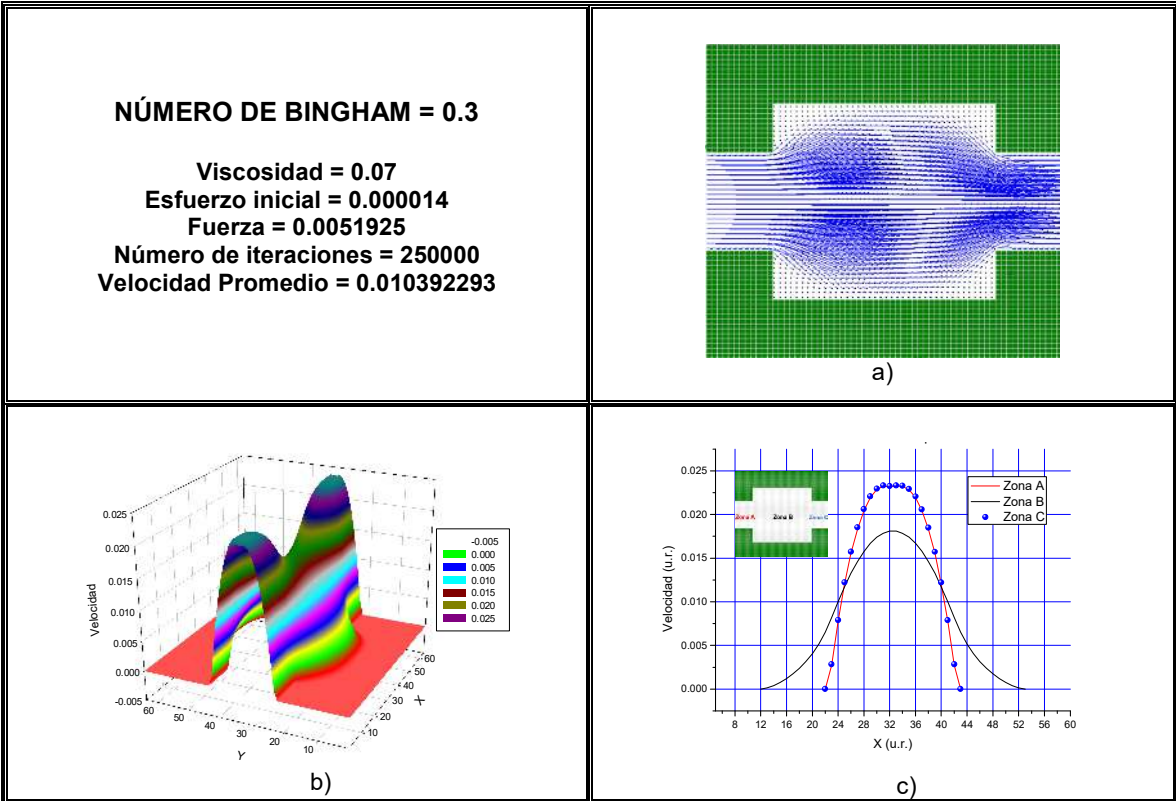


Figura 3.57 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Fuerza = 0.0051925

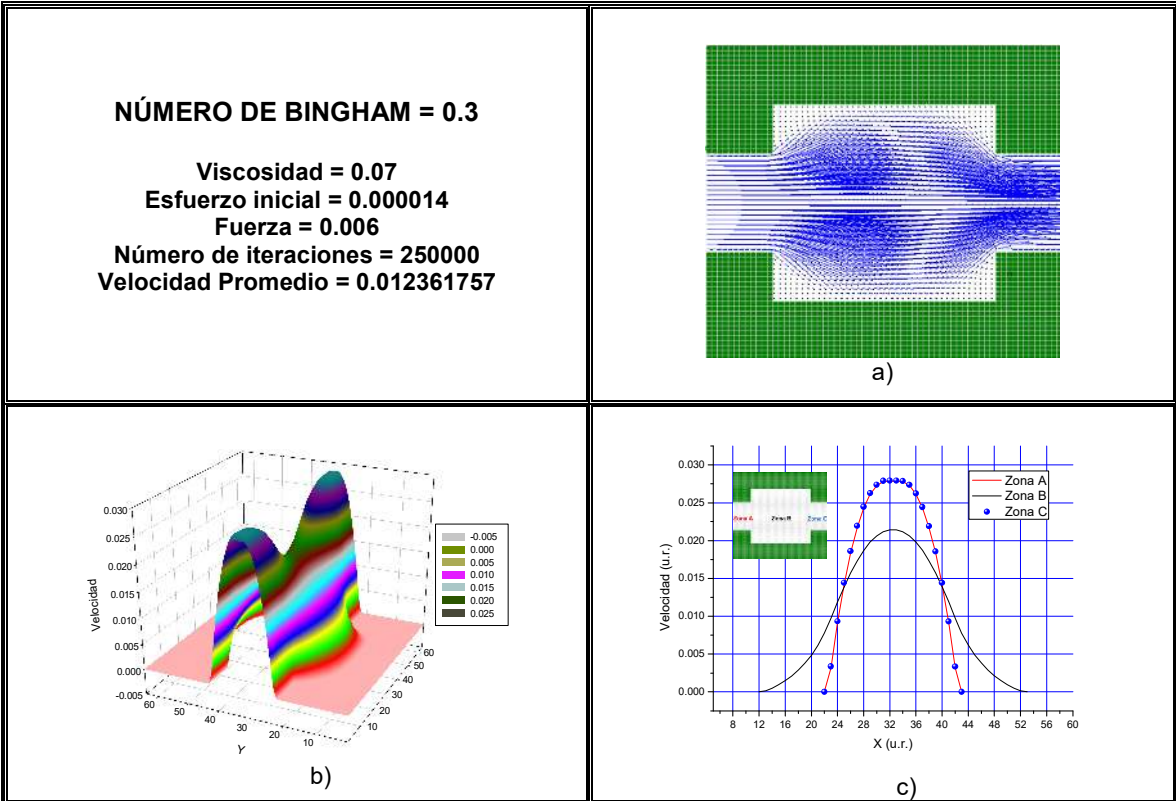


Figura 3.58 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Fuerza = 0.006

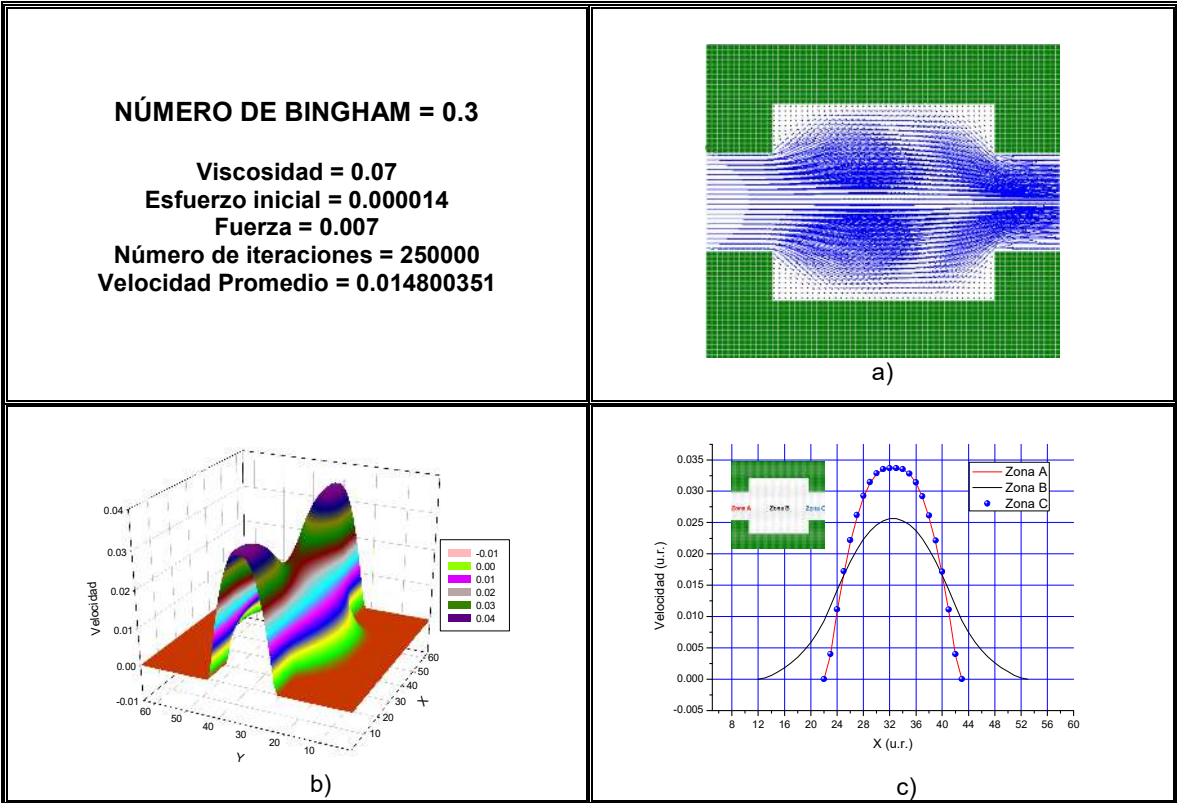


Figura 3.59 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Fuerza = 0.007

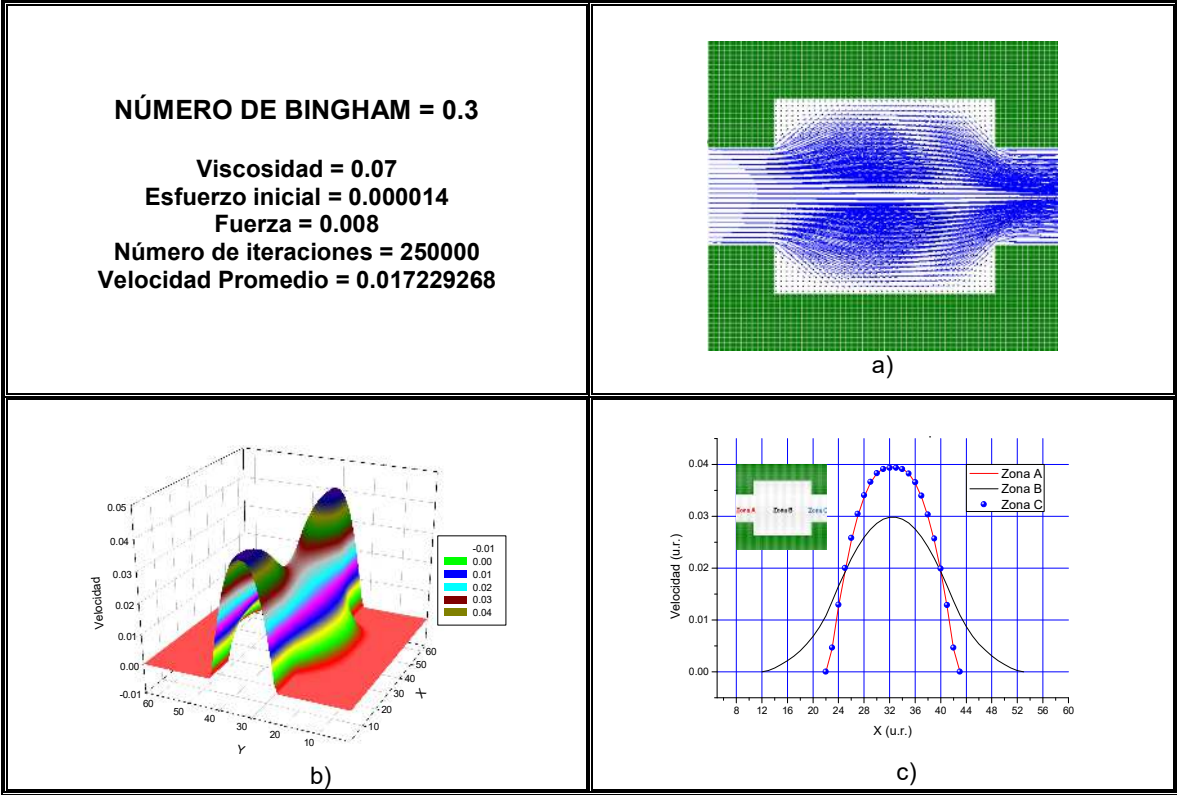


Figura 3.60 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Fuerza = 0.008

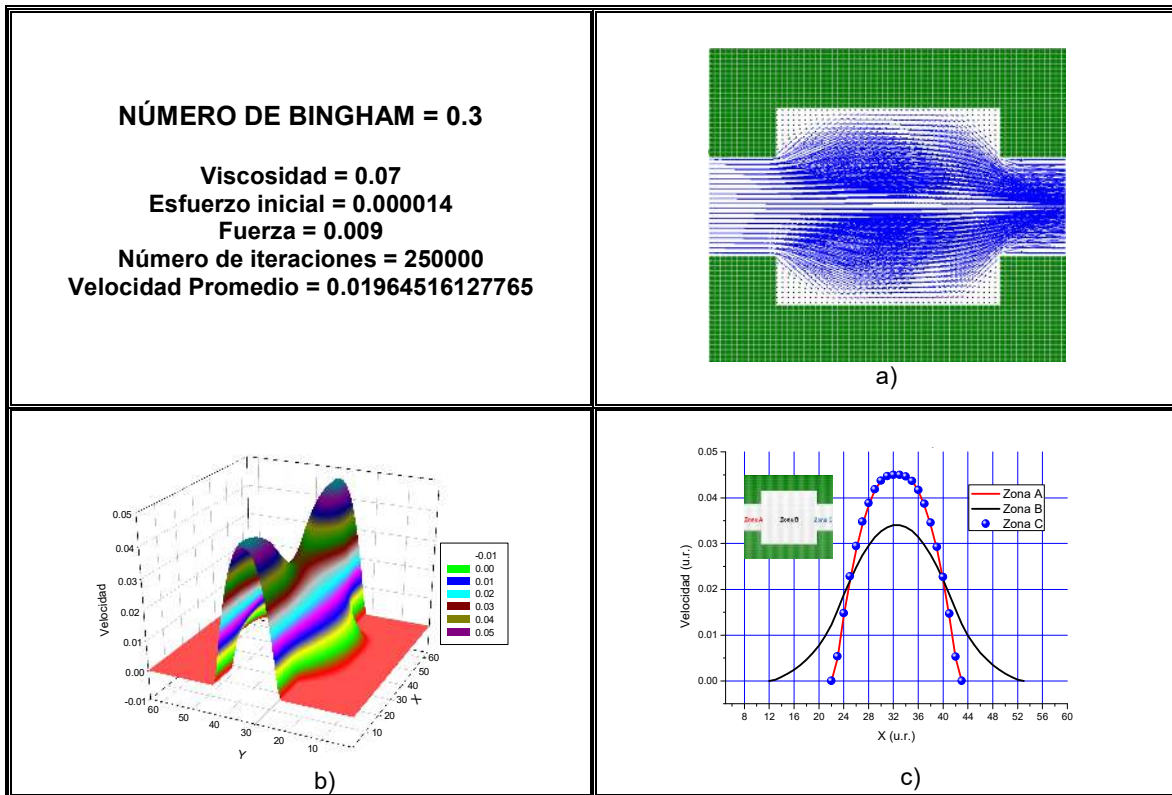


Figura 3.61 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Fuerza = 0.009

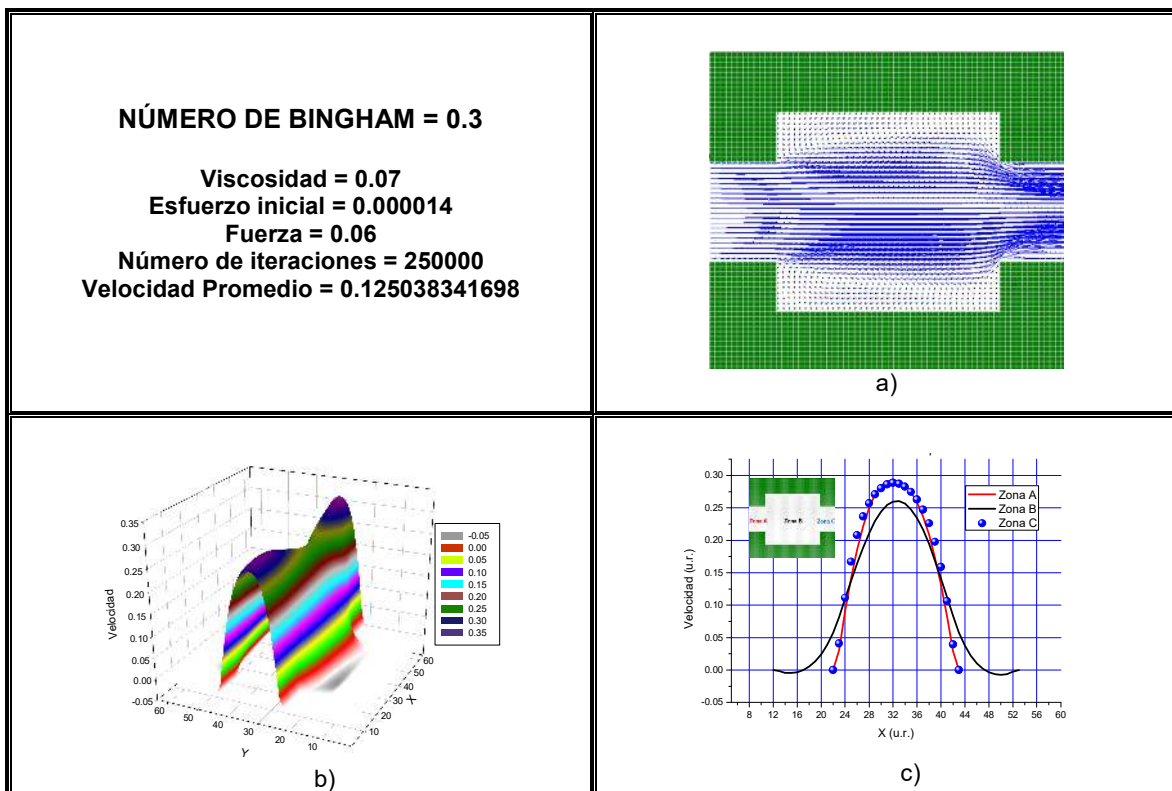


Figura 3.62 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Fuerza = 0.06

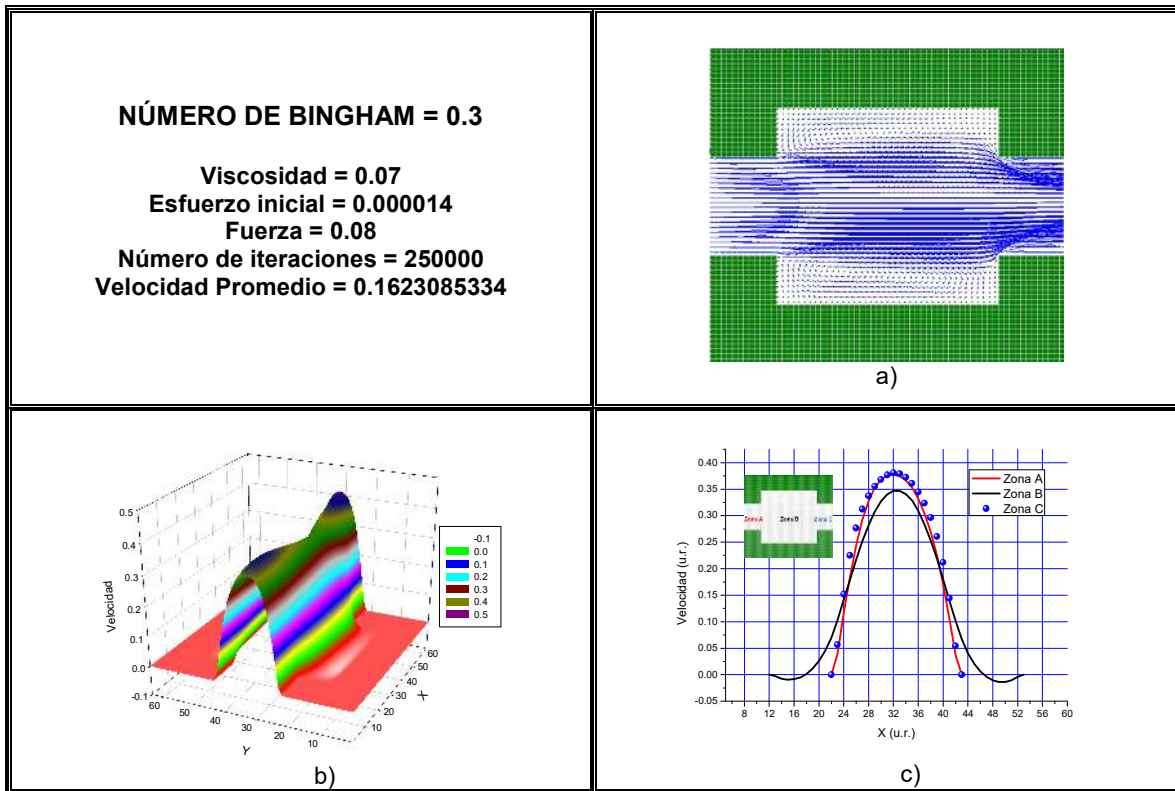


Figura 3.63 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Fuerza = 0.08

En las figuras 3.54-3.63 a medida que sube la fuerza también la velocidad promedio, se puede observar el fenómeno de vena contracta en todas las figuras.



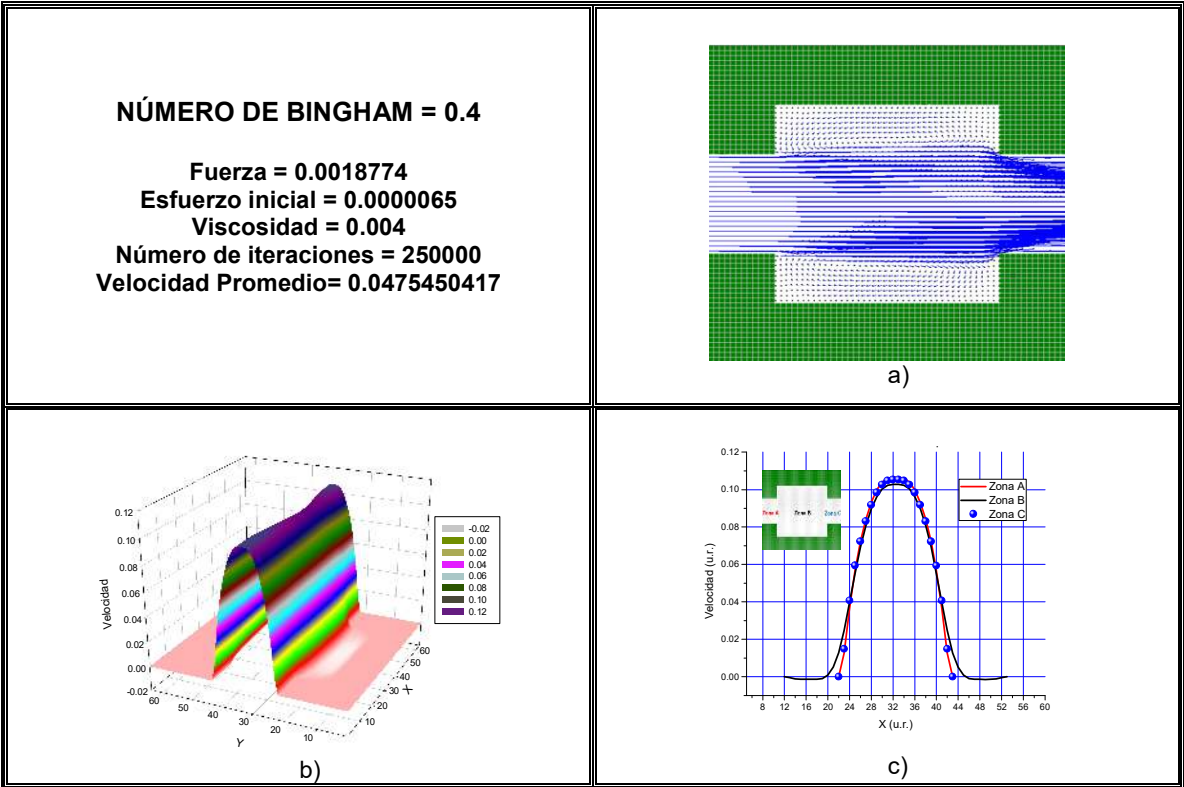


Figura 3.64 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Viscosidad = 0.004

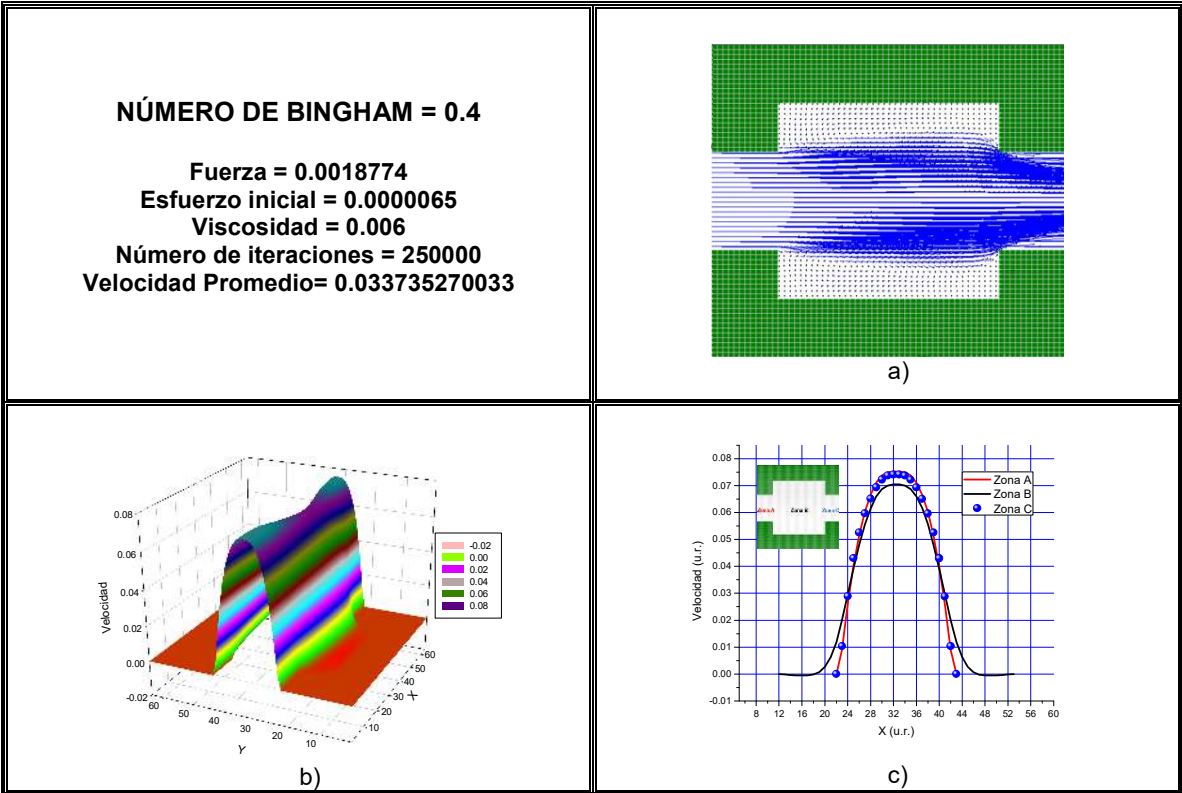


Figura 3.65 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Viscosidad = 0.006

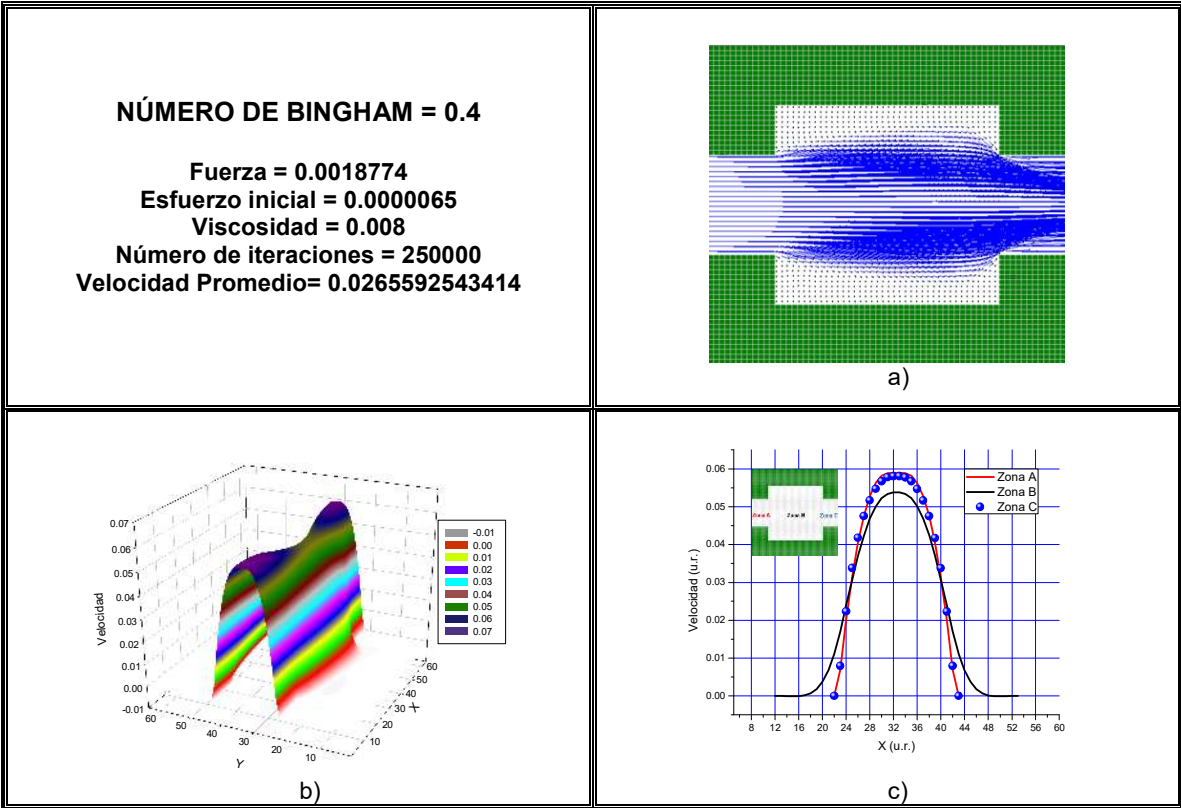


Figura 3.66 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Viscosidad = 0.008

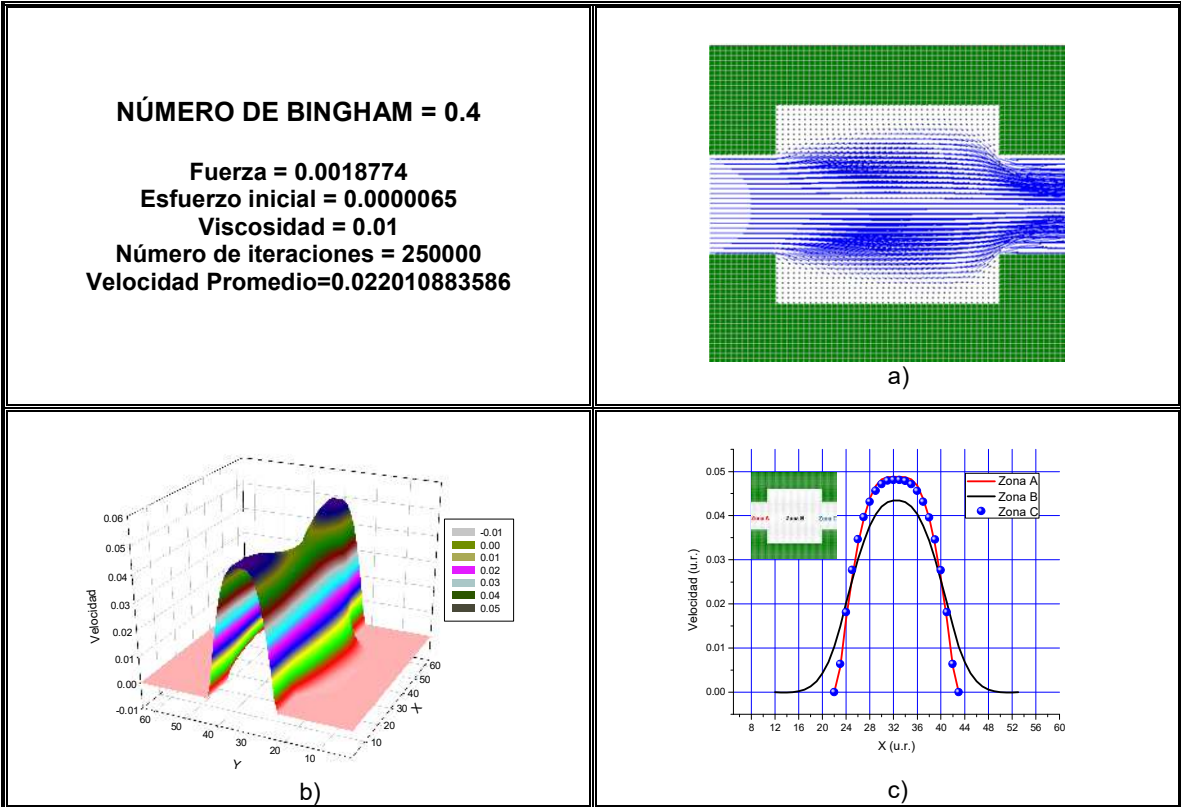


Figura 3.67 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Viscosidad = 0.01

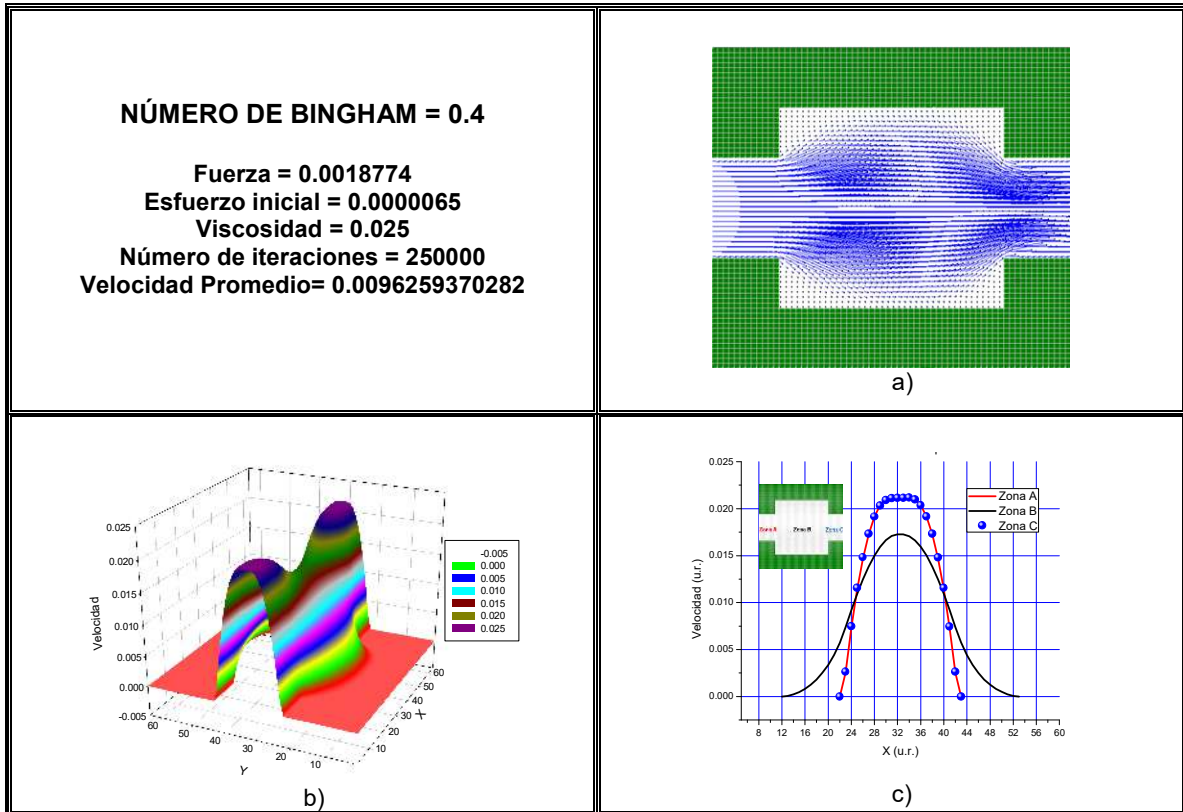


Figura 3.68 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Viscosidad = 0.025

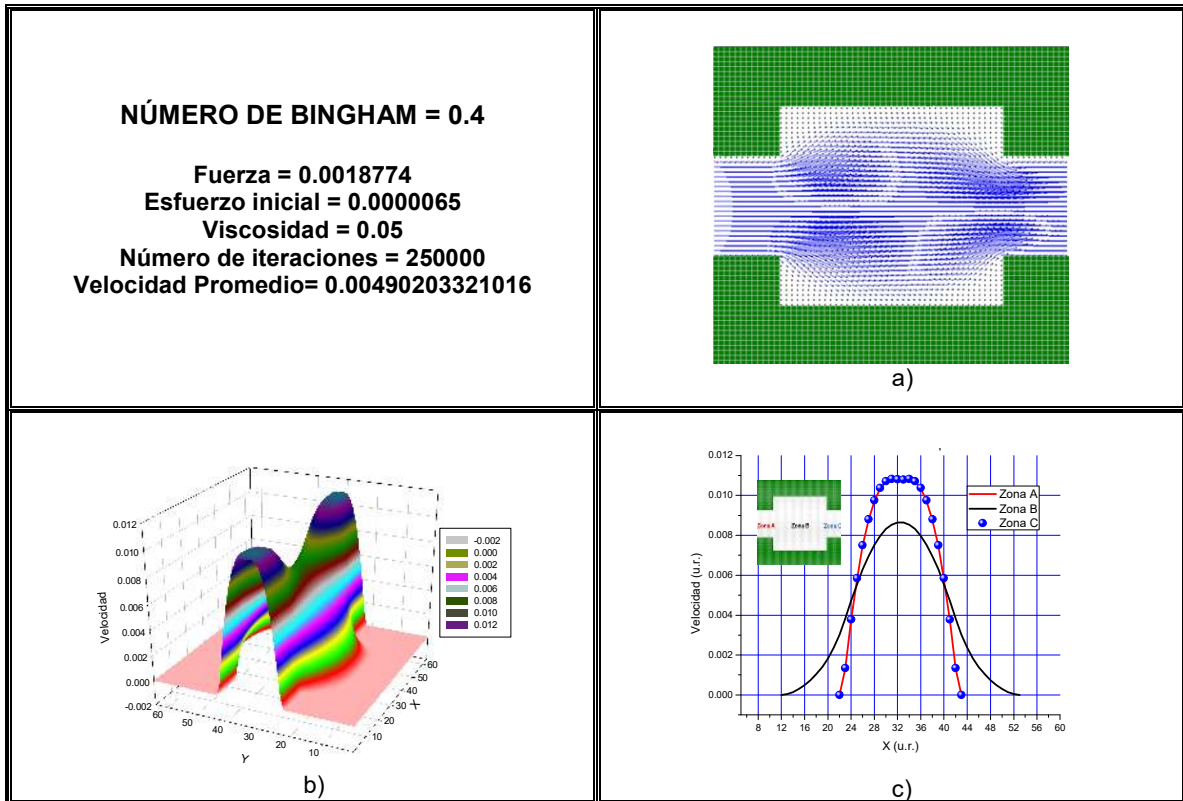


Figura 3.69 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Viscosidad = 0.05

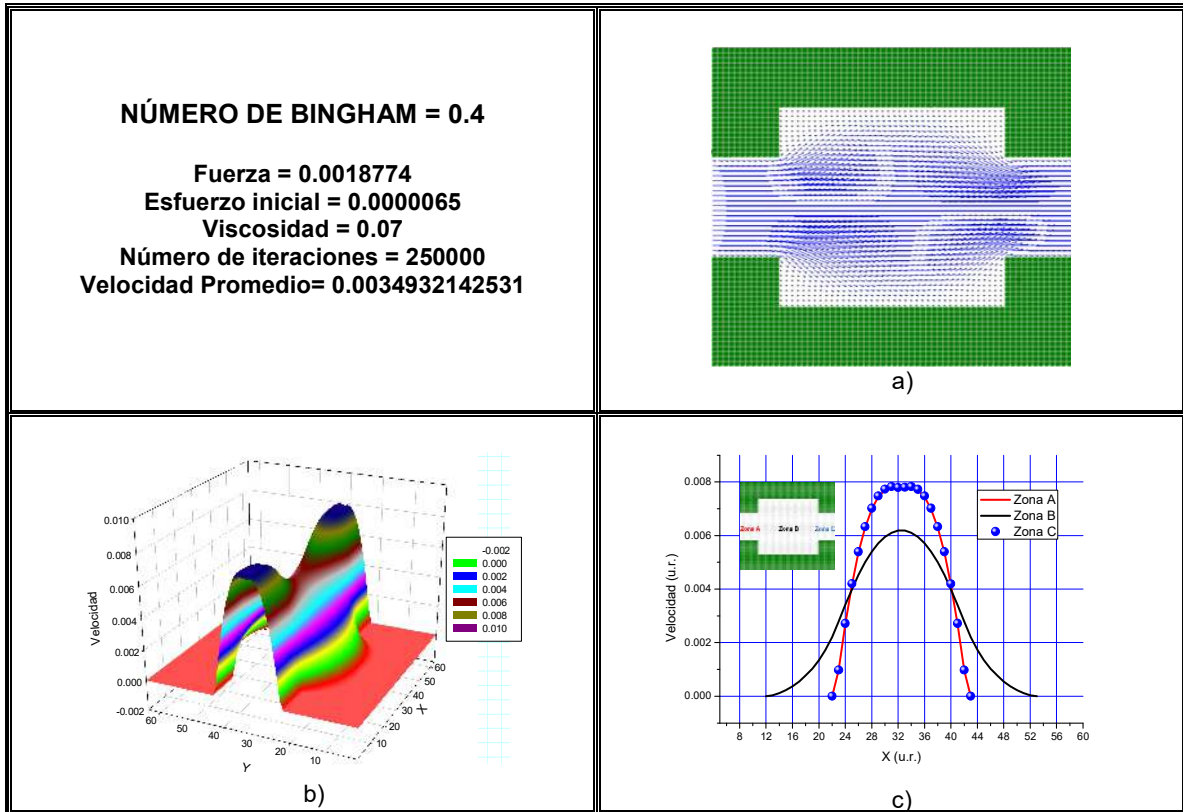


Figura 3.70 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Viscosidad = 0.07

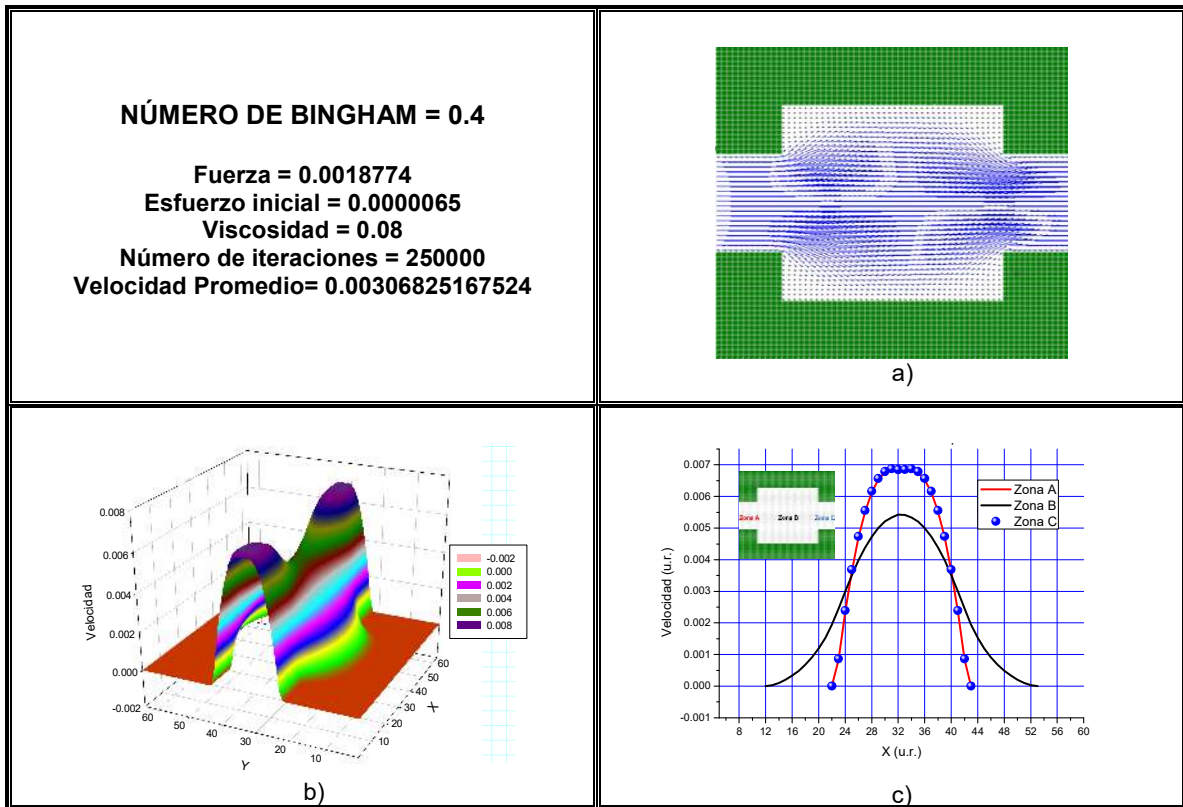


Figura 3.71 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Viscosidad = 0.08



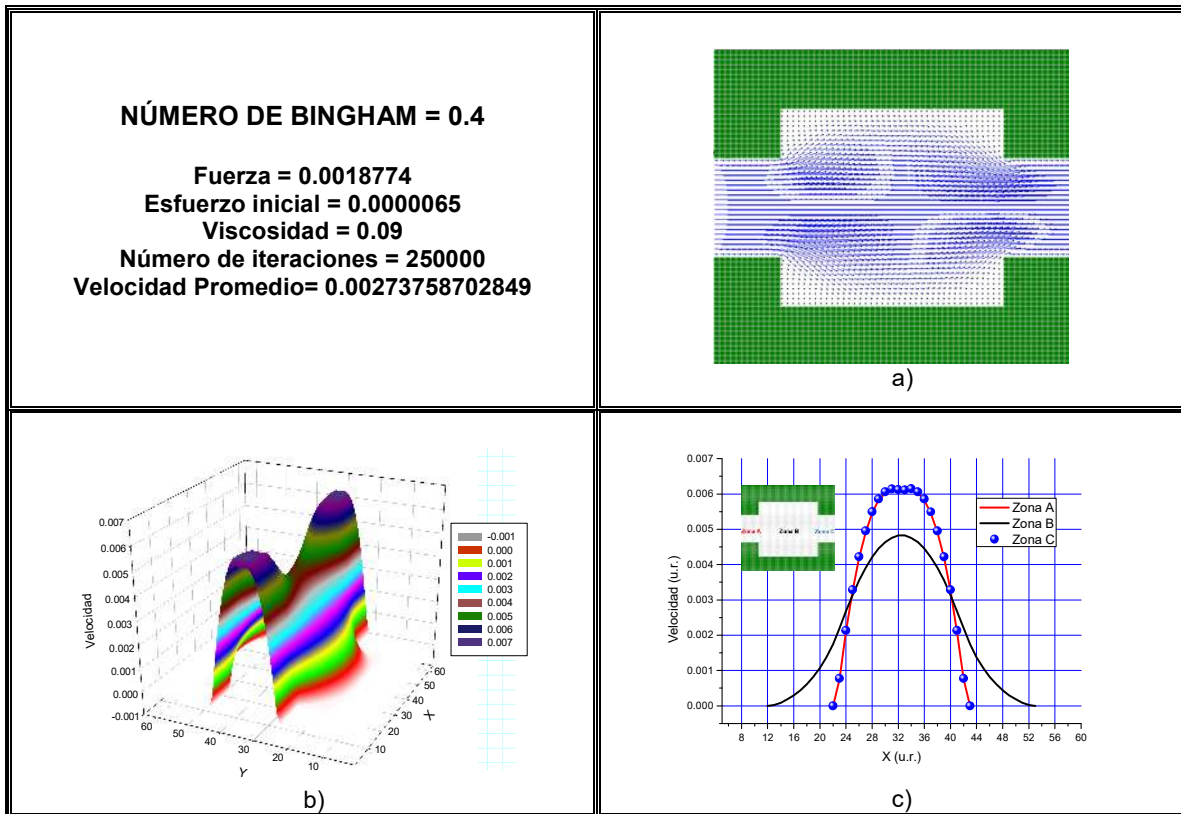


Figura 3.72 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Viscosidad = 0.09

Se puede observar en las figuras 3.64-3.72 que al aumentar la viscosidad en la zona “B”, el flujo pierde velocidad debido a la expansión súbita esto se puede ver en la gráfica del inciso c), donde se muestran las velocidades en cada sección. Se puede observar en la zona “C” el fenómeno de vena contracta que se explicará más adelante.

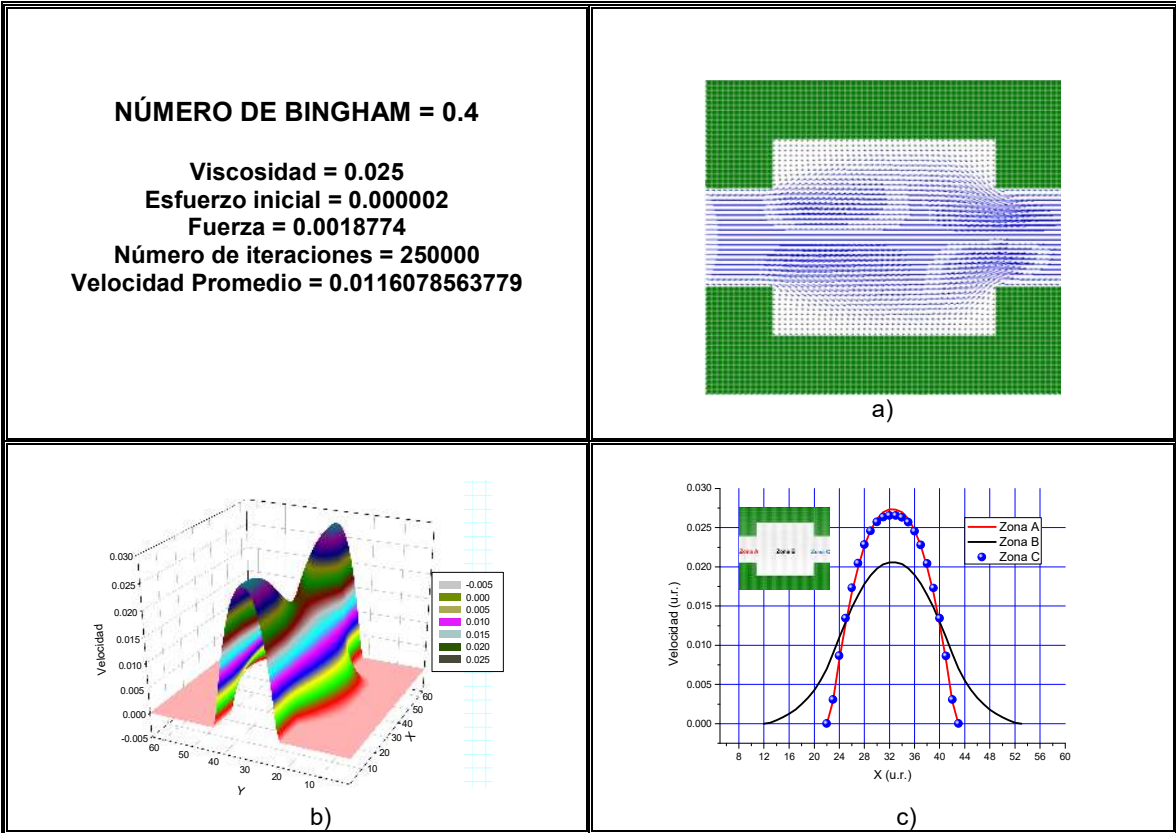


Figura 3.73 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Esf. inicial = 0.000002

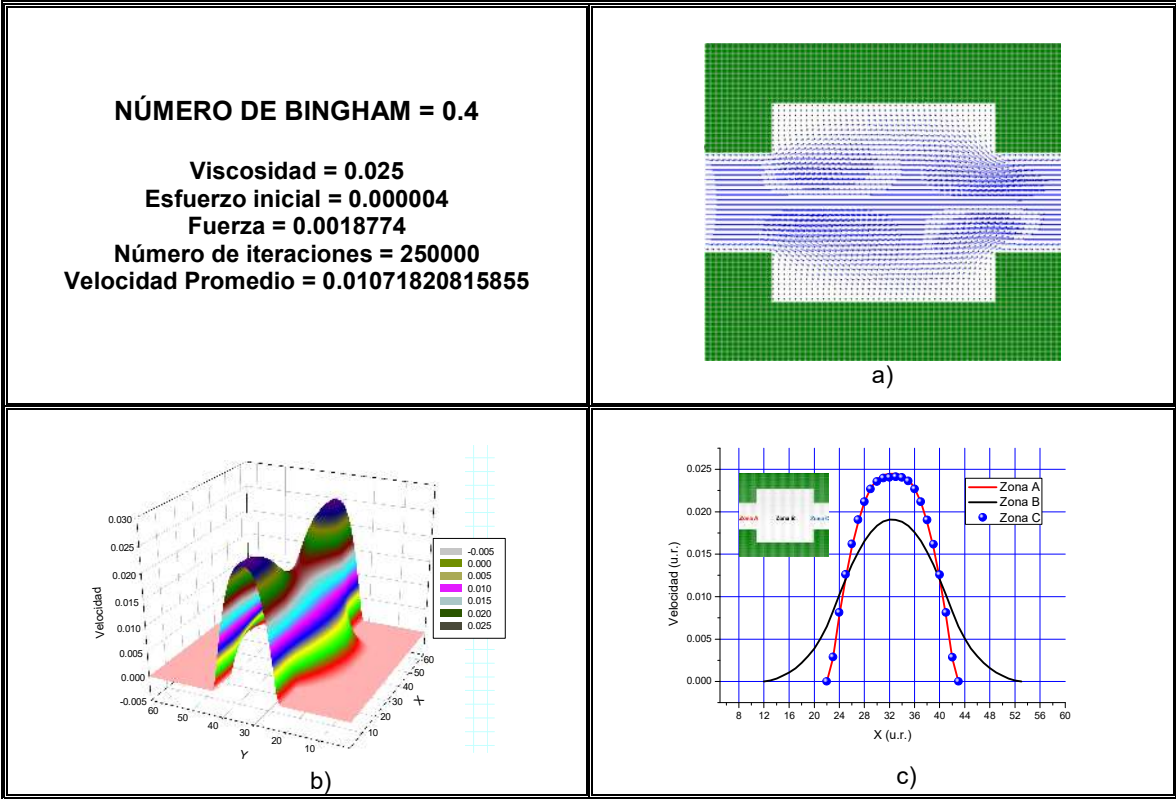


Figura 3.74 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Esf. inicial = 0.000004

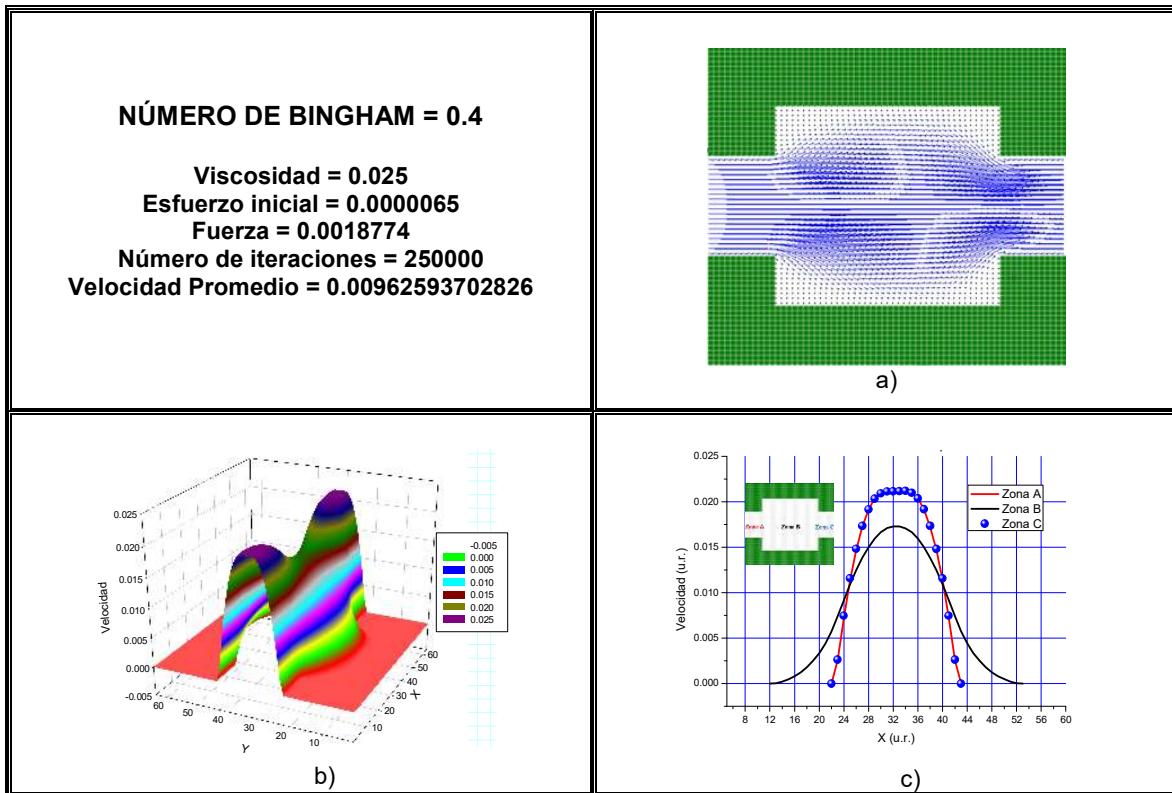


Figura 3.75 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Esf. Inic. = 0.0000065

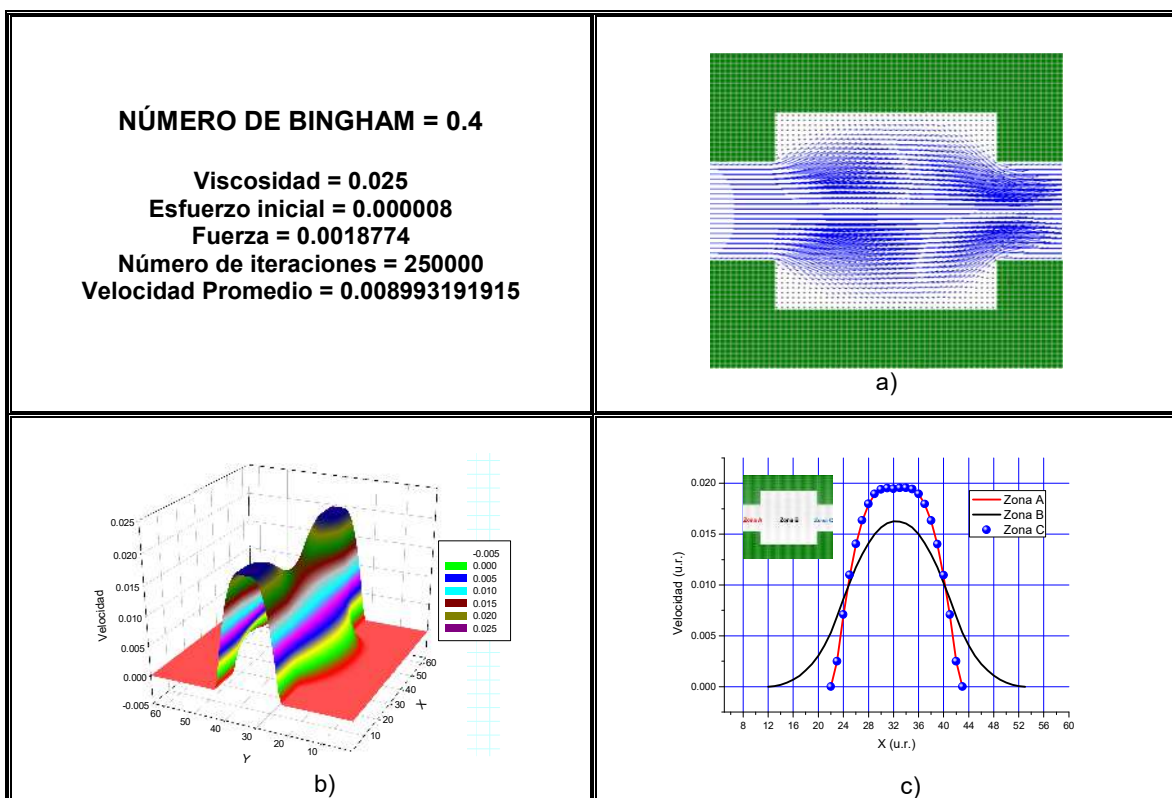


Figura 3.76 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Esf. Inicial = 0.000008



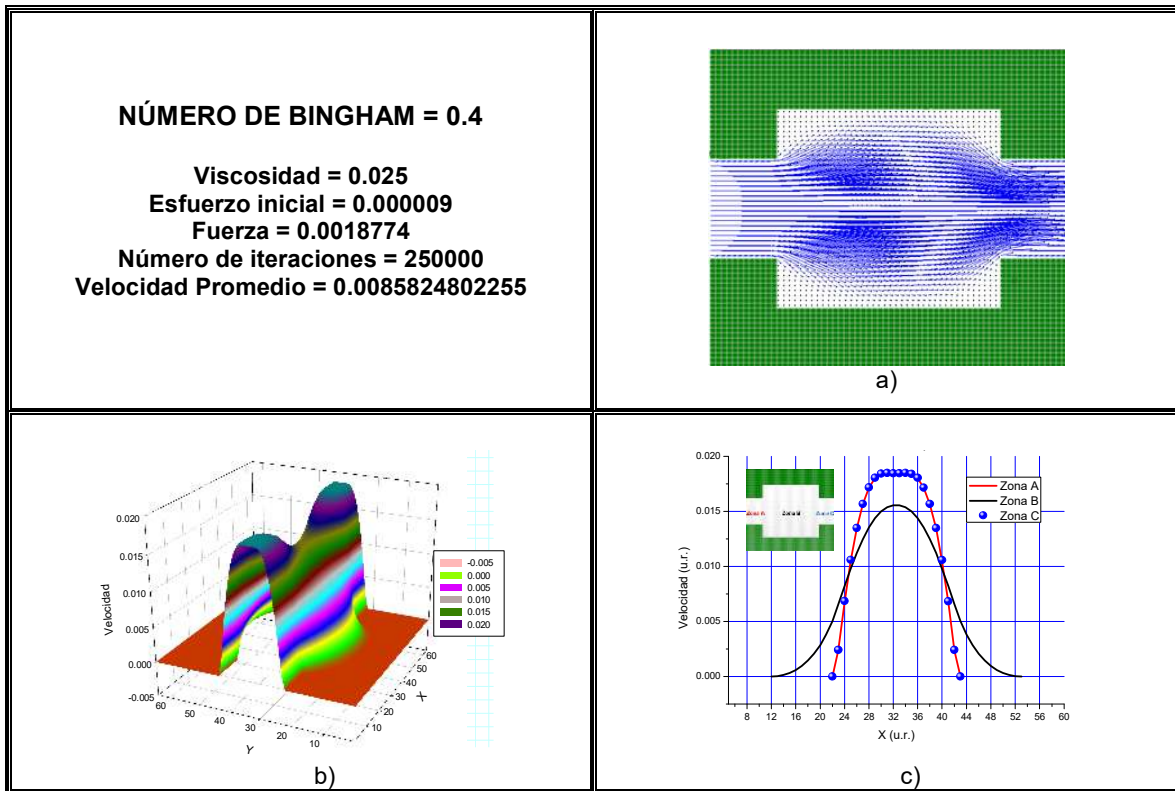


Figura 3.77 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Esf. Inicial = 0.000009

En las figuras 3.73-3.77 se varió el esfuerzo inicial lo cual afecta las líneas de flujo donde se aprecia el fenómeno de vena contracta en la zona “C” y la velocidad promedio se ve afectada pues a medida que sube el esfuerzo inicial la velocidad promedio disminuye.

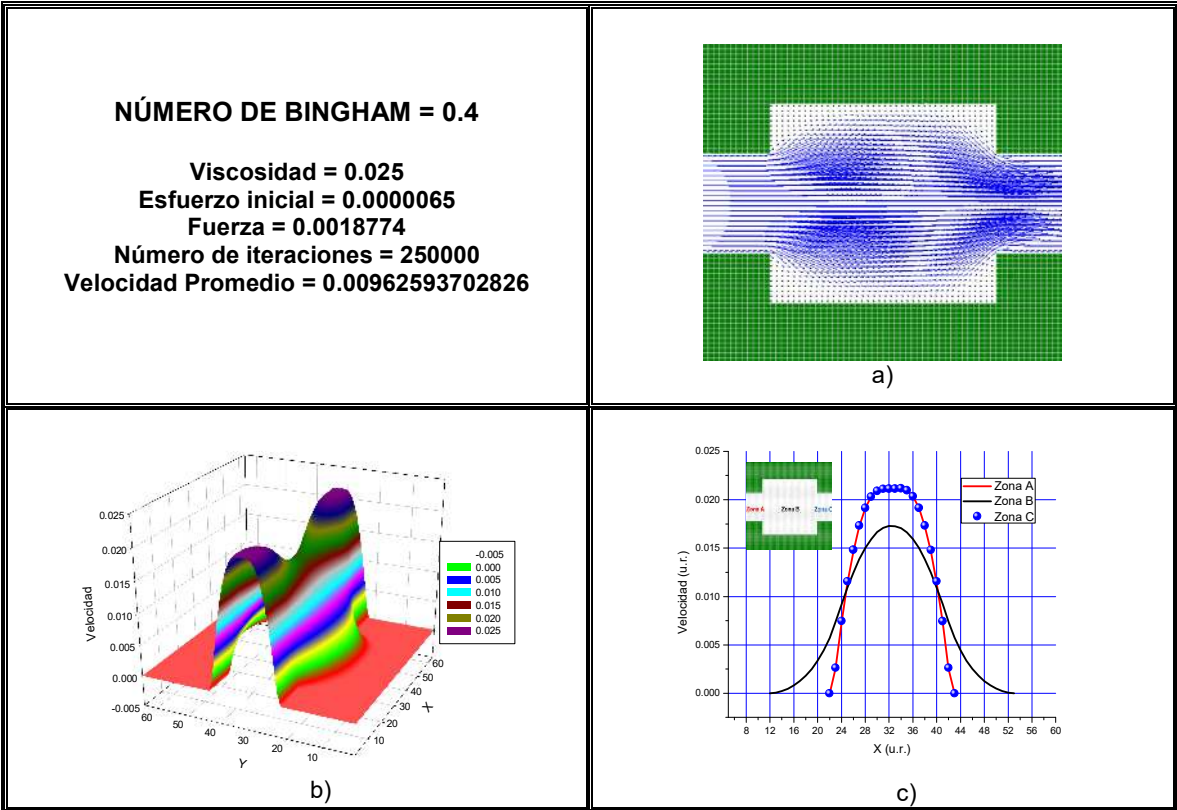


Figura 3.78 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Fuerza = 0.001877

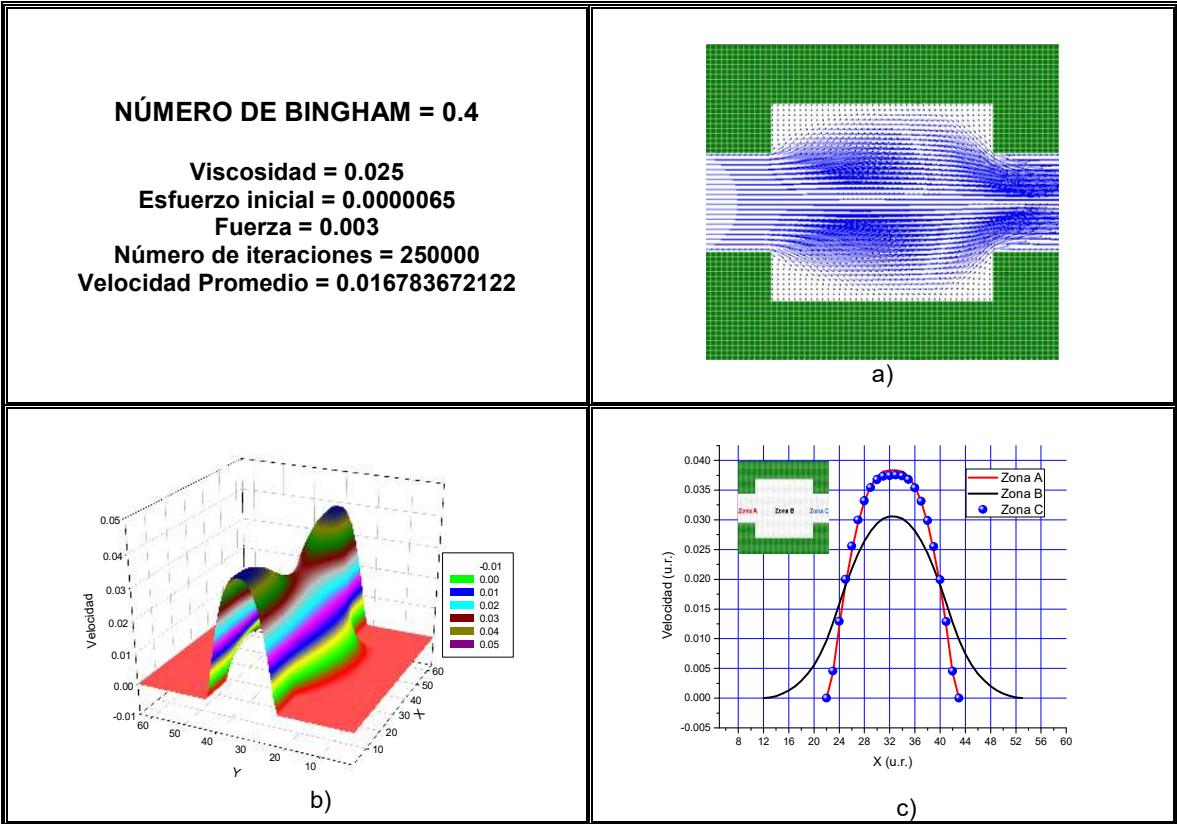


Figura 3.79 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Fuerza = 0.003

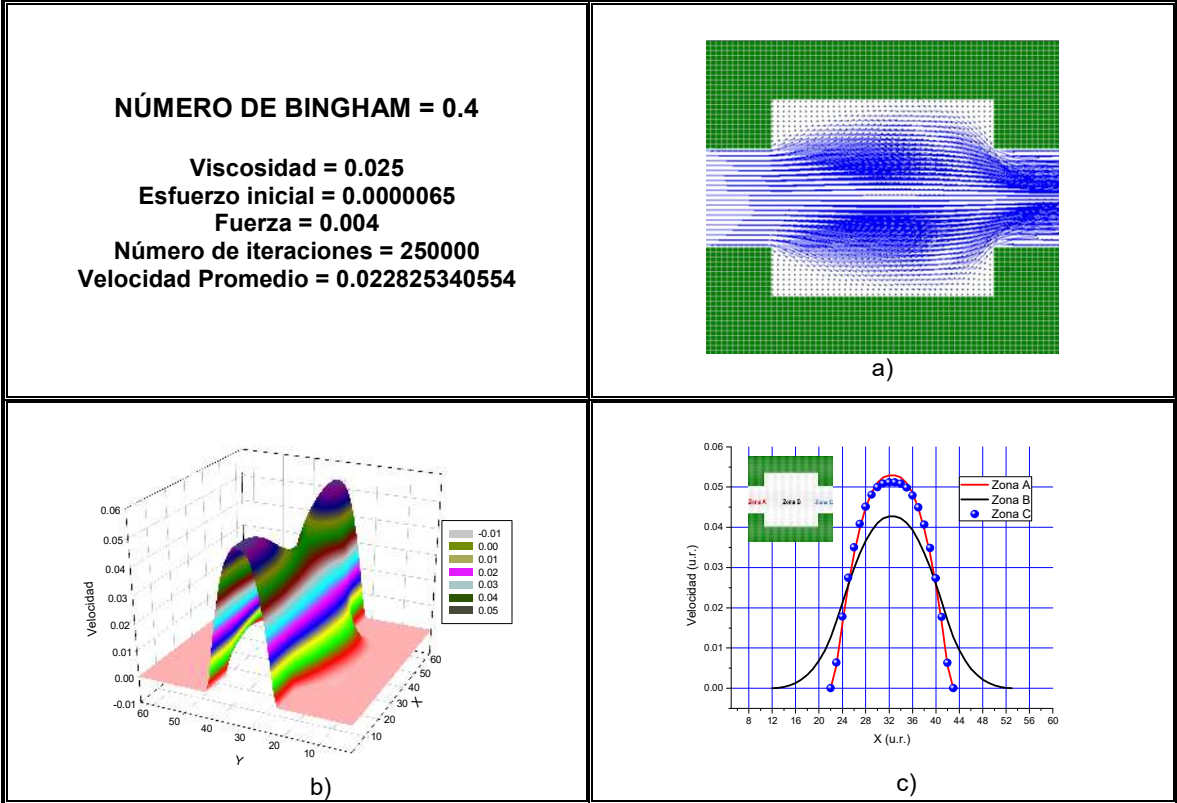


Figura 3.80 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Fuerza = 0.004

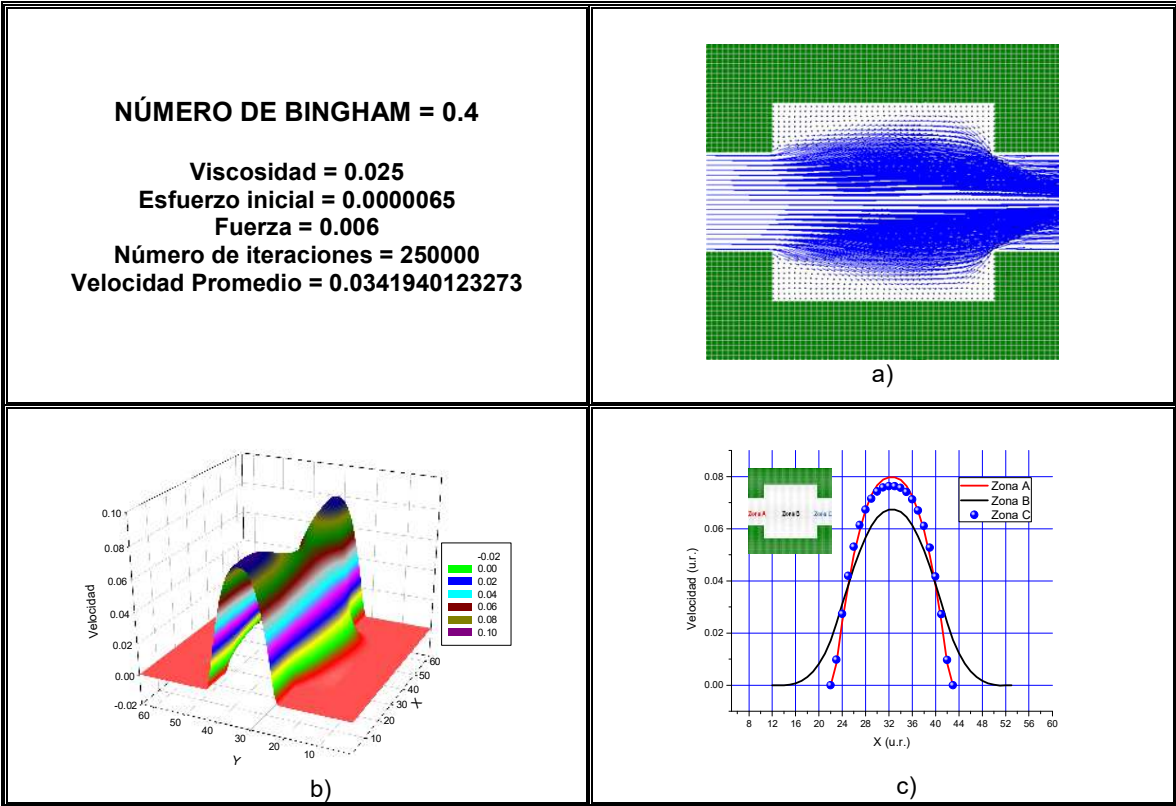


Figura 3.81 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Fuerza = 0.006

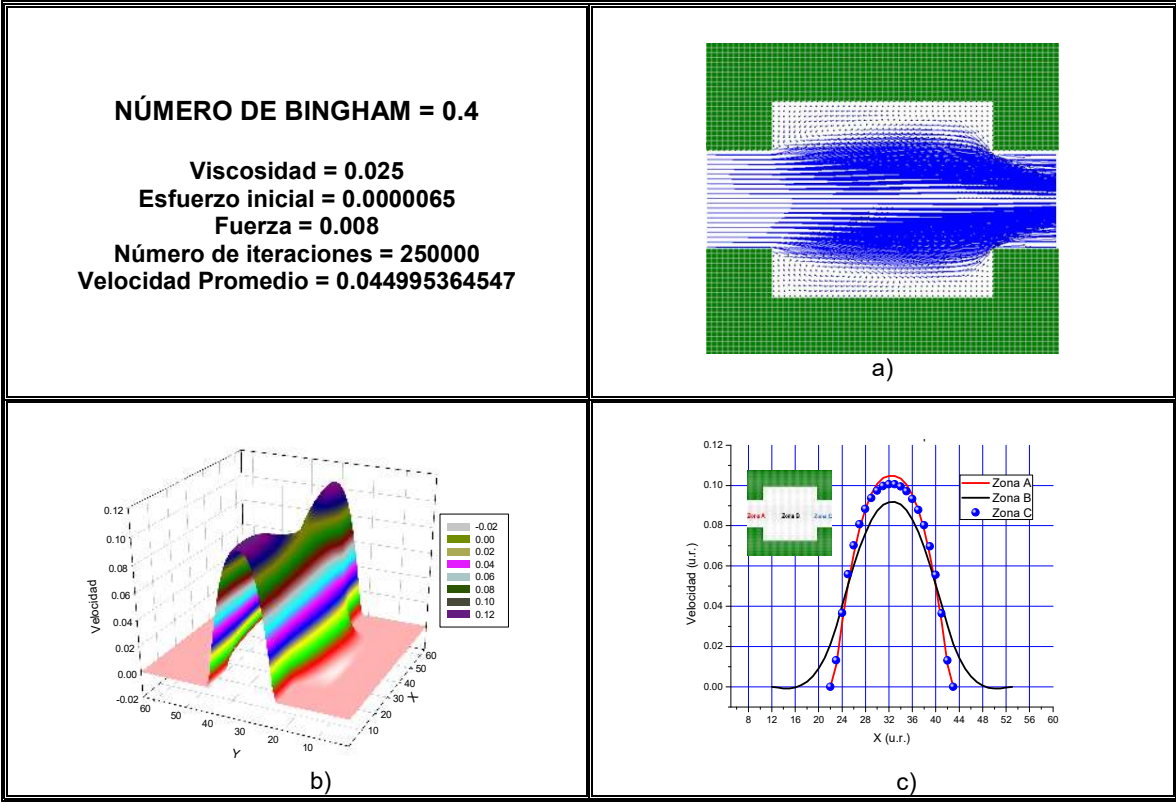


Figura 3.82 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Fuerza = 0.008

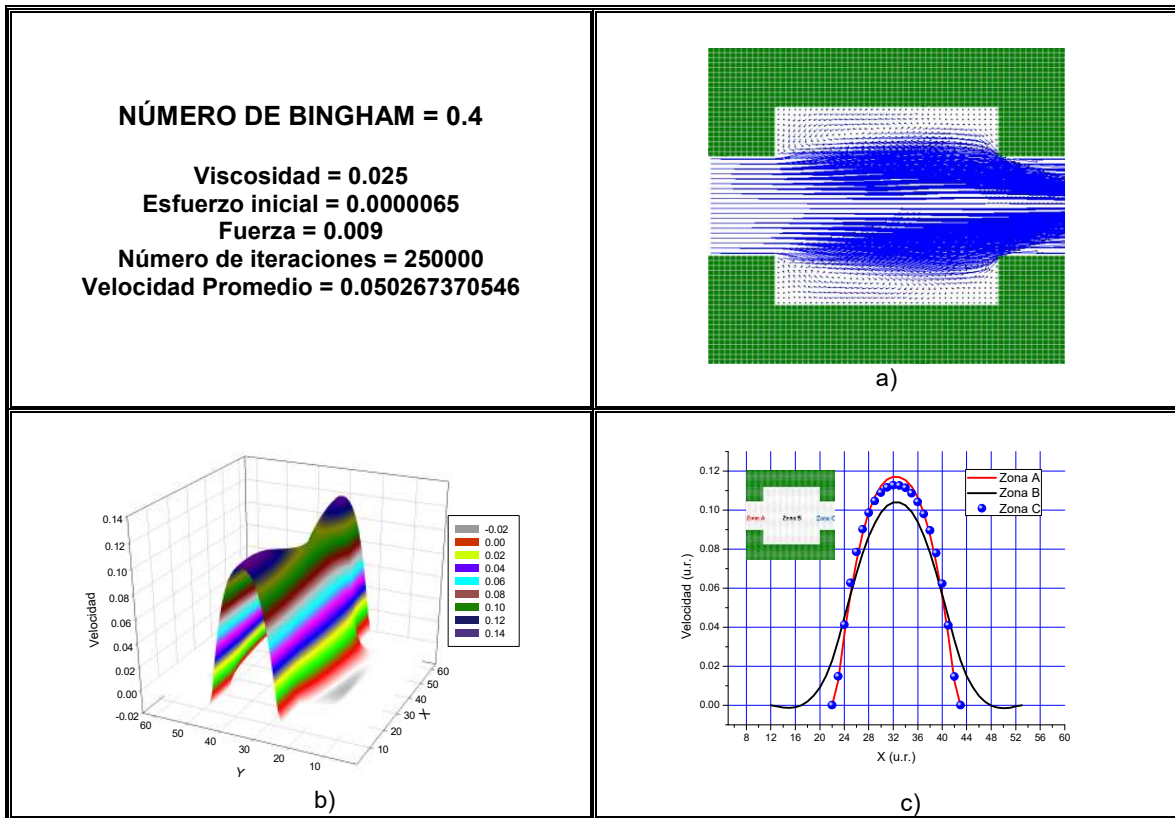


Figura 3.83 a) Líneas de corriente, b) Distribución de velocidades y c) Perfiles de velocidad. Fuerza = 0.009

En las figuras 3.78-3.83 a medida que sube la fuerza también la velocidad promedio; se puede observar el fenómeno de vena contracta en todas las figuras.

Algunas observaciones son

- Al aumentar la viscosidad y el esfuerzo inicial la velocidad promedio disminuye.
- Al aumentar la fuerza la velocidad promedio también.
- A medida que las líneas de flujo se ensanchan en la zona “B” la velocidad promedio es baja no se puede apreciar el fenómeno de vena contracta.
- Si la velocidad promedio y las línea de flujo por la zona “B” son estrechas, la velocidad de entrada y salida junto con la zona “B” llegan a ser similares.

El número de Reynolds se calculó a través de la siguiente ecuación

$$\#Re = \frac{\rho h v}{\mu_{\text{Bin}}} \quad (3.17)$$

En la ecuación (3.17),  $\rho$  es la densidad, la cual se tomó unitaria para todas las simulaciones,  $h$  el valor de la mitad de la altura de la entrada en el canal, (ver figura 15),  $v$  es la velocidad promedio y  $\mu$  la viscosidad de Bingham.

El resumen de todos los resultados de las simulaciones se presenta en la tabla 3.2. En estas, se ha resaltado en color rojo los números de Reynolds en los cuales se puede observar el fenómeno de la formación de vórtices, tal como se puede apreciar en las figuras 3.18-3.21, 3.39-3.43, 3.62-3.67 y 3.81-3.83.

Tabla 3.2 Resultados de las simulaciones para los tres números de Bingham 0.2, 0.3 y 0.4

	Esfuerzo inicial = 1.1E-5; Fuerza = 5.83E-3			Viscosidad = 0.08; Fuerza = 5.83E-3			Esfuerzo inicial = 1.1E-5; Viscosidad = 0.08		
	Viscosidad	Vel. Prom.	# Re	Esfuerzo inicial	Vel. Prom.	# Re	Fuerza	Vel. Prom.	# Re
Bingham 0.2	0.008	0.0813	101.644	0.000011	0.0109	1.368	0.002	0.0028	0.346
	0.009	0.0744	82.713				0.003	0.0049	0.608
	0.01	0.0680	68.032				0.004	0.00701	0.876
	0.02	0.0384	19.186	0.000013	0.0106	1.33	0.006	0.0178	1.414
	0.03	0.0273	9.092				0.007	0.0135	1.683
	0.05	0.0172	3.435	0.000015	0.0106	1.294	0.008	0.0156	1.952
	0.07	0.0125	1.779				0.009	0.0178	2.22
	0.08	0.0109	1.368	0.000017	0.0101	1.258	0.06	0.1128	14.095
	0.09	0.0098	1.085				0.08	0.1461	18.259
Bingham 0.3	Esfuerzo inicial = 1.4E-5; Fuerza = 5.19E-3			Viscosidad = 0.07; Fuerza = 5.19E-3			Esfuerzo inicial = 1.4E-5; Viscosidad = 0.07		
	Viscosidad	Vel. Prom.	# Re	Esfuerzo inicial	Vel. Prom.	# Re	Fuerza	Vel. Prom.	# Re
	0.008	0.0707	88.367	0.000012	0.0107	1.532	0.002	0.0027	0.391
	0.009	0.0640	71.116				0.003	0.0051	0.726
	0.01	0.0586	58.58				0.004	0.0075	1.07
	0.02	0.0329	16.467	0.000014	0.0104	1.485	0.0051925	0.0104	1.485
	0.03	0.0231	7.712				0.006	0.0124	1.766
	0.05	0.0144	2.875	0.000016	0.0101	1.438	0.007	0.0148	2.114
	0.07	0.0104	1.485				0.008	0.0172	2.461
0.08	0.0091	1.141	0.000018	0.0097	1.393	0.009	0.0196	2.806	
0.09	0.0081	0.905				0.06	0.1623	17.863	
Bingham 0.4	Esfuerzo inicial = 6.5E-6; Fuerza = 1.877E-3			Viscosidad = 0.025; Fuerza = 1.877E-3			Esfuerzo inicial = 6.5E-6; Viscosidad = 0.025		
	Viscosidad	Vel. Prom.	# Re	Esfuerzo inicial	Vel. Prom.	# Re	Fuerza	Vel. Prom.	# Re
	0.004	0.0475	118.863	0.000002	0.0116	4.643	0.0018774	0.0096	3.85
	0.006	0.0337	56.225				0.003	0.0168	6.713
	0.008	0.0266	33.199				0.004	0.0228	9.13
	0.01	0.0220	22.011	0.000004	0.0107	4.287	0.006	0.0342	13.678
	0.025	0.0096	3.85				0.008	0.0450	17.998
	0.05	0.0049	0.98	0.000008	0.0089	3.597	0.009	0.0503	20.107
	0.07	0.0035	0.499				0.0086	3.433	
0.08	0.0031	0.384	0.000009	0.0086	3.433				
0.09	0.0027	0.304							

El fenómeno de la formación de vórtices puede observarse en las figuras 3.84-3.89, en estas se observa que dicho fenómeno se presenta en números de Reynolds mayores a 10, estando aún en régimen laminar, tal como lo han reportado K. A. Missirlis, D. Assimacopoulos, and E. Mitsoulis (1998); A. L. Halmos



and D. V. Boger (1975) y R. Manica and A. L. De Bortoli (2004) en sus investigaciones para fluidos no Newtonianos

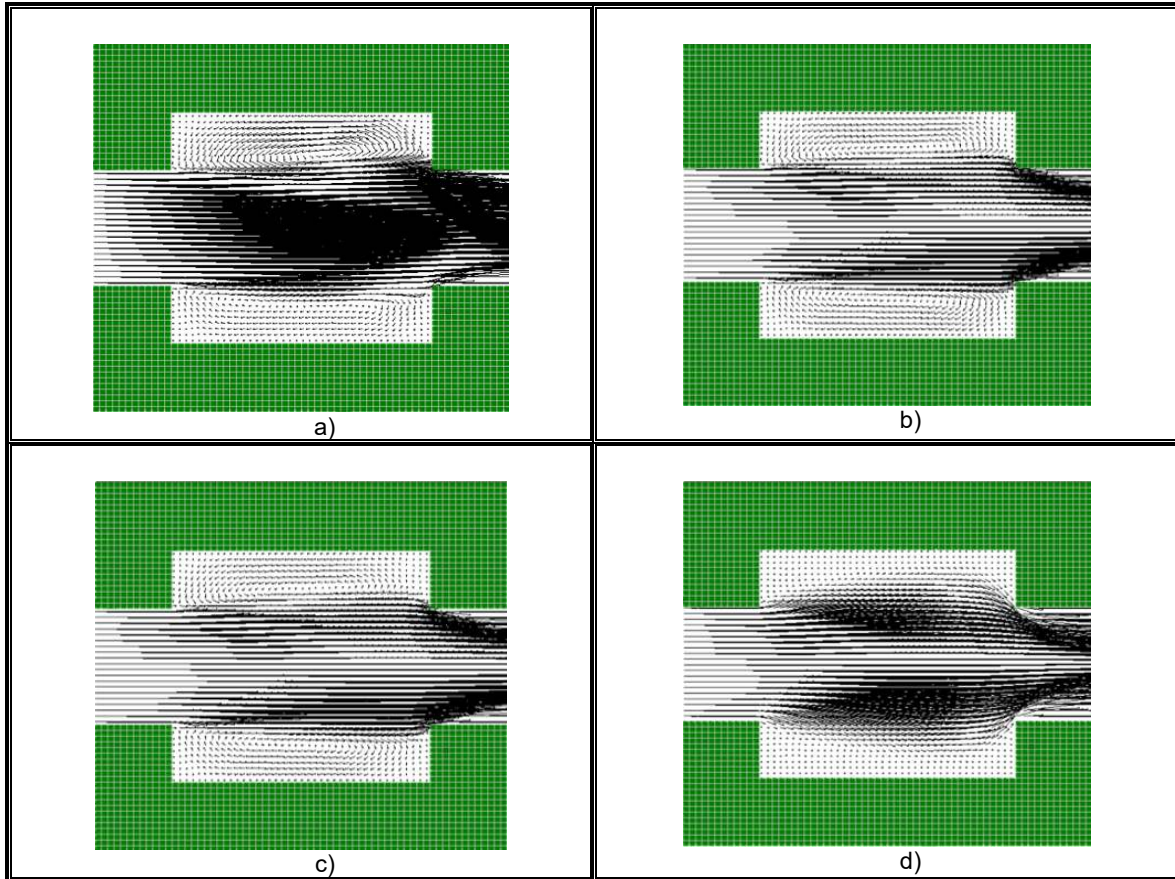


Figura 3.84 Líneas de corriente para número de Bingham = 0.2, esfuerzo inicial =  $1.1E-5$ , fuerza =  $5.83E-3$ . a) Número de Re = 101.644 y Viscosidad = 0.008; b) Número de Re = 82.713 y Viscosidad = 0.009; c) Número de Re = 68.032 y Viscosidad = 0.01 y d) Número de Re = 19.182 y Viscosidad = 0.02.

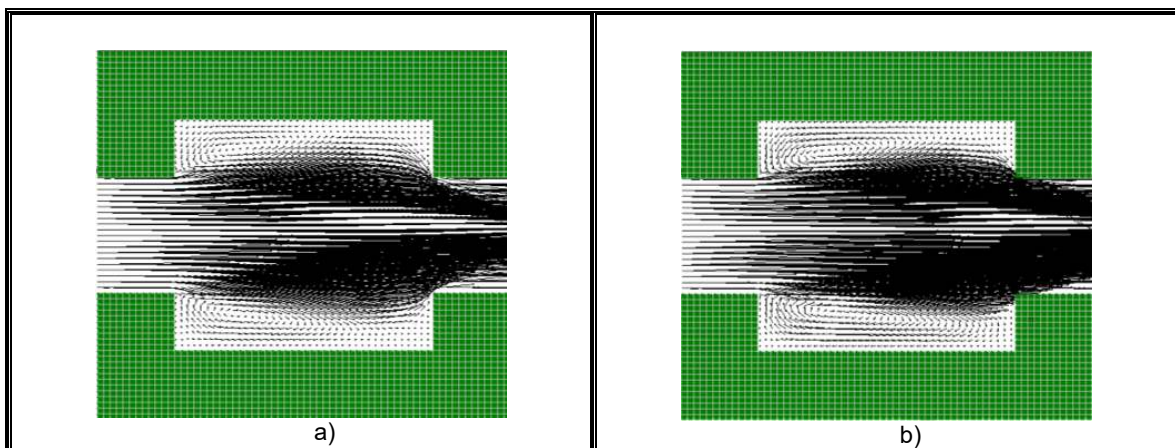


Figura 3.85 Líneas de corriente para número de Bingham = 0.2, esfuerzo inicial =  $1.1E-5$ , Viscosidad = 0.08. a) Número de Re = 14.095 y fuerza = 0.06; b) Número de Re = 18.259 y fuerza = 0.08.

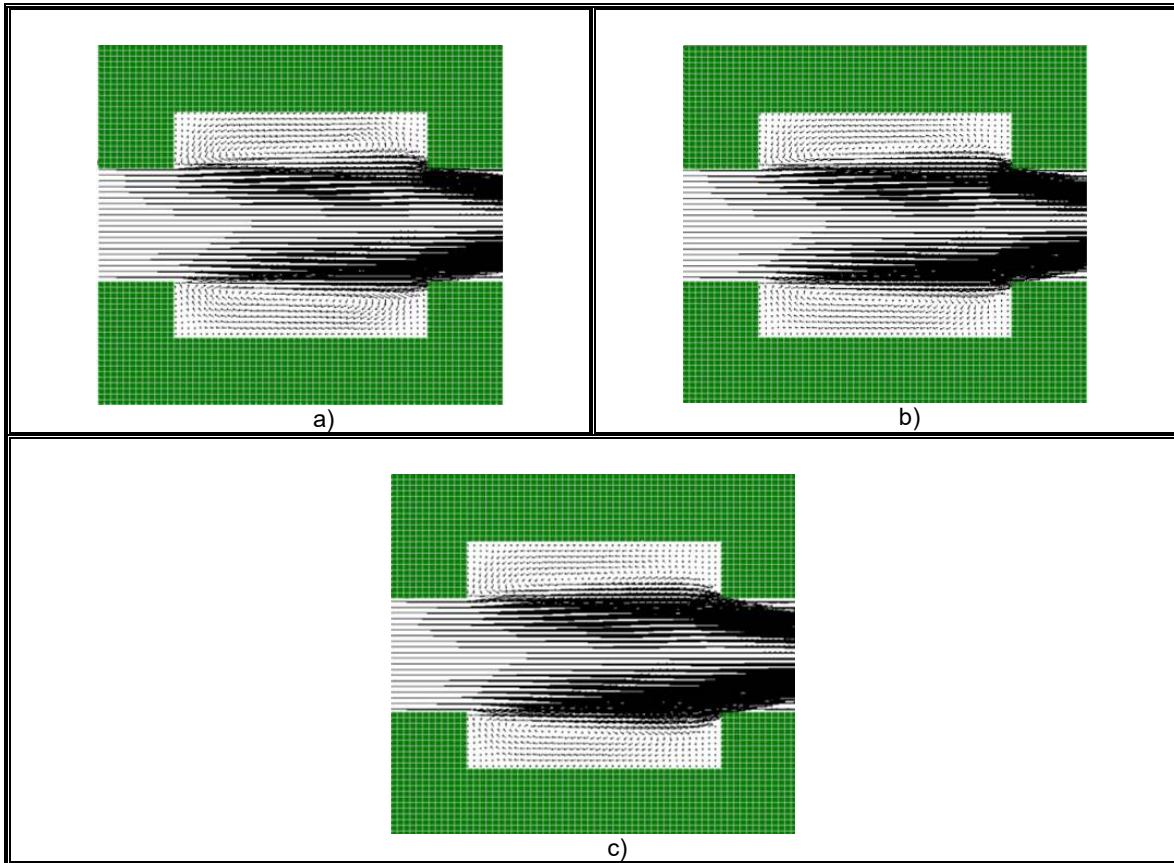


Figura 3.86 Líneas de corriente para número de Bingham = 0.3, esfuerzo inicial =  $1.4E-5$ , fuerza =  $5.19E-3$ . a) Número de Re = 88.367 y Viscosidad = 0.008; b) Número de Re = 71.116 y Viscosidad = 0.009; c) Número de Re = 58.58 y Viscosidad = 0.01.

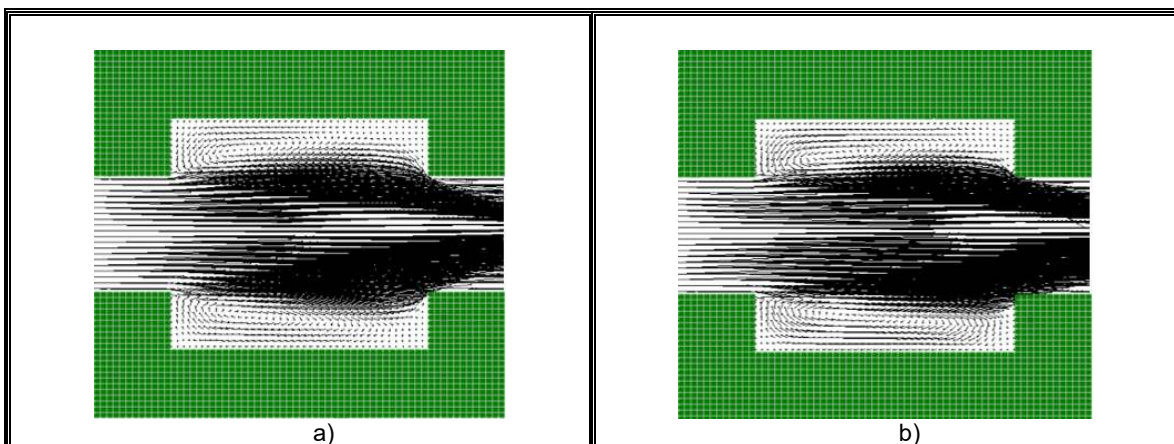


Figura 3.87 Líneas de corriente para número de Bingham = 0.3, esfuerzo inicial =  $1.4E-5$ , Viscosidad = 0.07. a) Número de Re = 17.863 y fuerza = 0.06; b) Número de Re = 23.187 y fuerza = 0.08



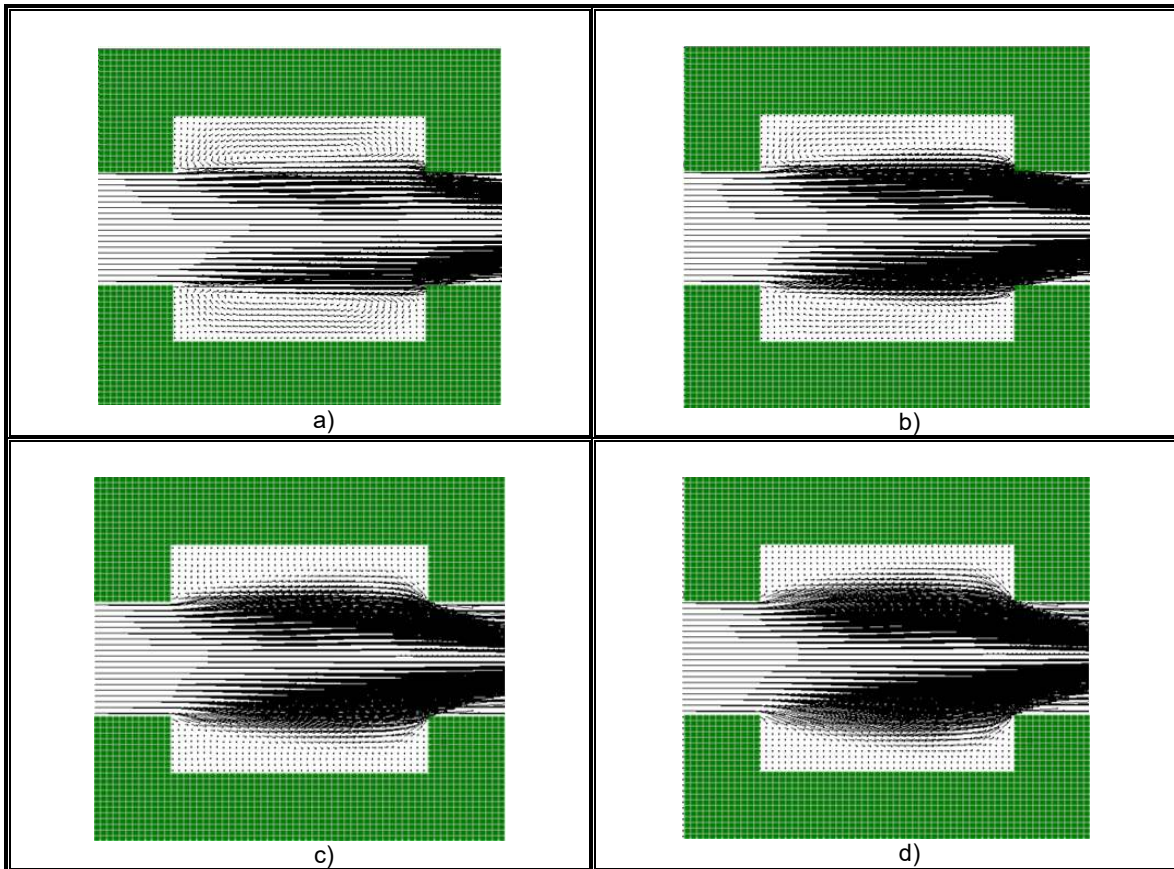


Figura 3.88 Líneas de corriente para número de Bingham = 0.4, esfuerzo inicial =  $6.5E-6$ , fuerza =  $1.877E-3$ .  
 a) Número de Re = 118.863 y Viscosidad = 0.004; b) Número de Re = 56.225 y Viscosidad = 0.006; c) Número de Re = 33.199 y Viscosidad = 0.008 y d) Número de Re = 22.011 y Viscosidad = 0.01

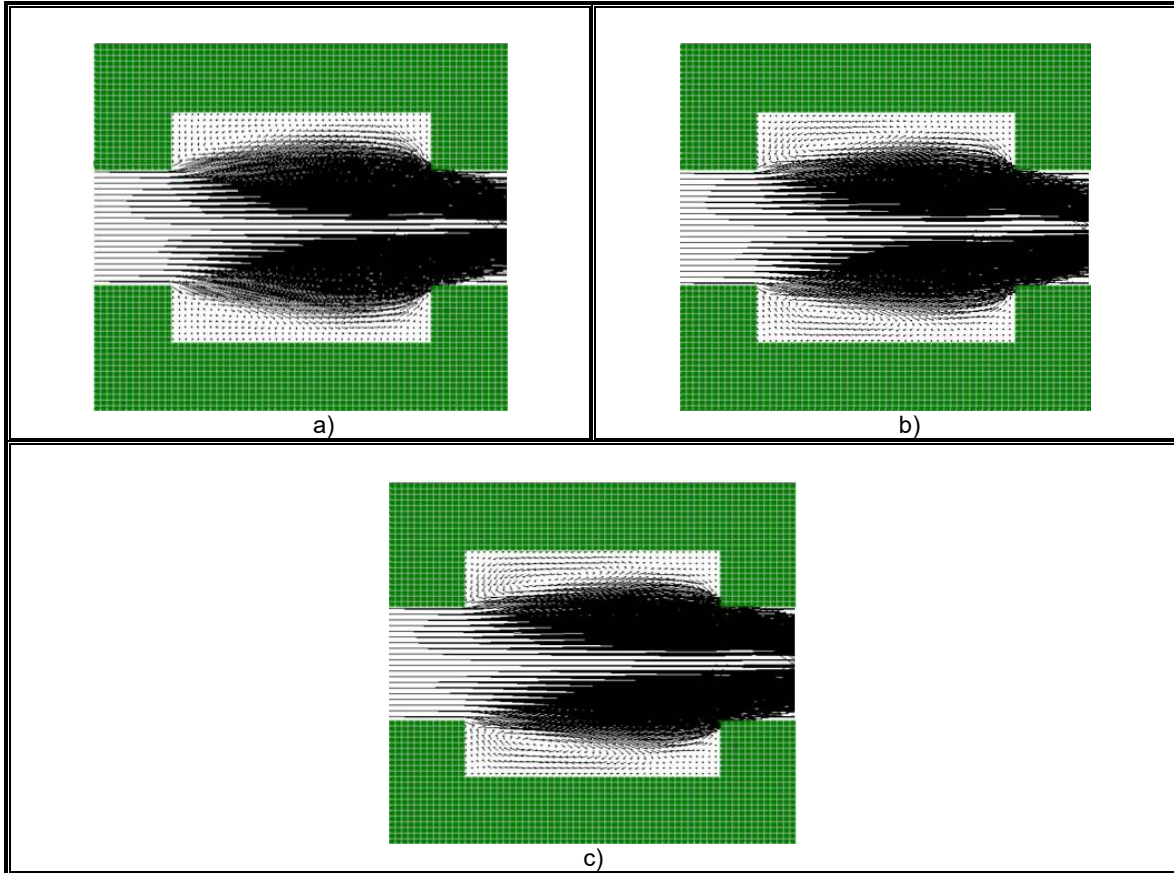


Figura 3.89 Líneas de corriente para número de Bingham = 0.4, esfuerzo inicial =  $6.5E-5$ , Viscosidad = 0.025. a) Número de Re = 13.678 y fuerza = 0.006; b) Número de Re = 17.998 y fuerza = 0.008; c) Número de Re = 20.107 y fuerza = 0.009

En las figuras 3.84-3.89, puede observarse que la disminución de la viscosidad, así como el incremento de la fuerza de cuerpo, favorecen la formación de vórtices como es de esperarse en las paredes de la zona B, de acuerdo con la ecuación (3.16). Sin embargo, al disminuir la viscosidad los vórtices se extienden a largo de las paredes de la zona B, y para el caso del aumento de la fuerza, la formación de los vórtices se ve más pronunciada en la parte izquierda superior e inferior de la zona B.

En las figuras 3.90-3.92, se puede observar el comportamiento para números de Bingham de 0.2, 0.3 y 0.4 de la velocidad promedio con respecto a la viscosidad, esfuerzo inicial, así como la fuerza de cuerpo.

### **3.5.1 Distribución de Presiones**

La distribución de presiones y velocidades de un flujo a lo largo de canales se puede explicar en dos formas, expansión y contracción súbita. En el primer caso, por ejemplo, en el paso de un fluido en una tubería pequeña a otra más grande, las velocidades o líneas de flujo disminuyen de manera abrupta, lo que ocasiona turbulencia y esto a su vez genera una pérdida de energía (Mott, 2006). En el segundo, en el paso de un fluido en una tubería grande a otra pequeña, la corriente de fluido converge hacia la contracción, la cual adopta una trayectoria curva y durante cierta distancia sigue un angostamiento. Por lo que, la sección transversal mínima efectiva del flujo es más pequeña. En dicha sección, el área mínima de flujo se denomina vena contracta, como consecuencia, la corriente debe desacelerar y expandirse de nuevo para llenar la tubería. La turbulencia que ocasiona la contracción y la expansión subsecuente es lo que genera la pérdida de energía. En las figuras 3.90 – 3.95, se puede apreciar tal efecto.

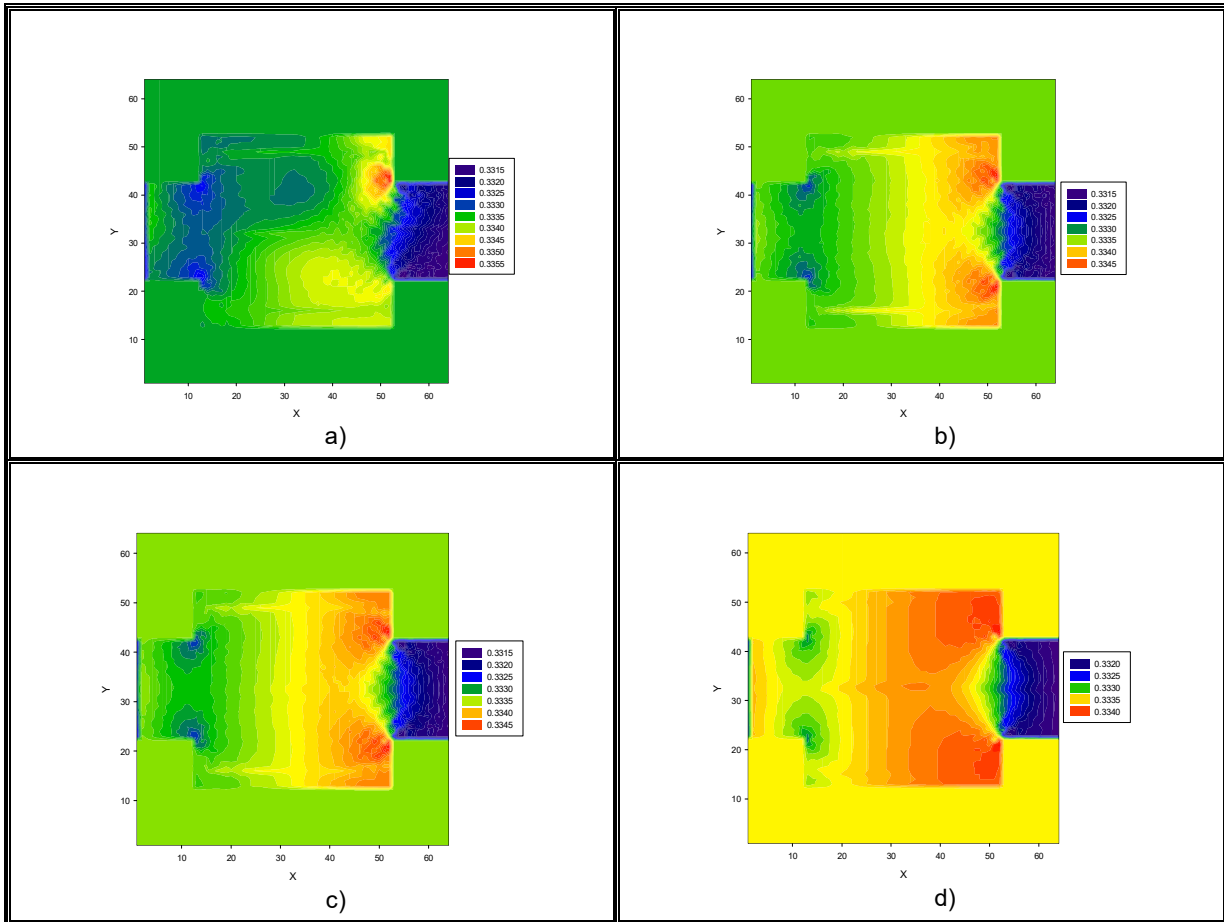


Figura 3.90 Distribución de presiones para número de Bingham = 0.2, esfuerzo inicial =  $1.1E-5$ , fuerza =  $5.83E-3$ . a) Número de Re = 101.644 y Viscosidad = 0.008; b) Número de Re = 82.713 y Viscosidad = 0.009; c) Número de Re = 68.032 y Viscosidad = 0.01 y d) Número de Re = 19.182 y Viscosidad = 0.02.

En la figura 3.90 se realizaron experimentos para un número de Bingham de 0.2, dejando la fuerza y el esfuerzo inicial con valores constantes, variando la viscosidad. En dichas figuras, se observa que al aumentar la viscosidad el número de Reynolds disminuye, lo cual es de esperarse de acuerdo con la expresión de la ecuación 3.17. Además, se observa un aumento en las presiones en las esquinas de las zonas de transición, sobre todo al final de la región “B”.

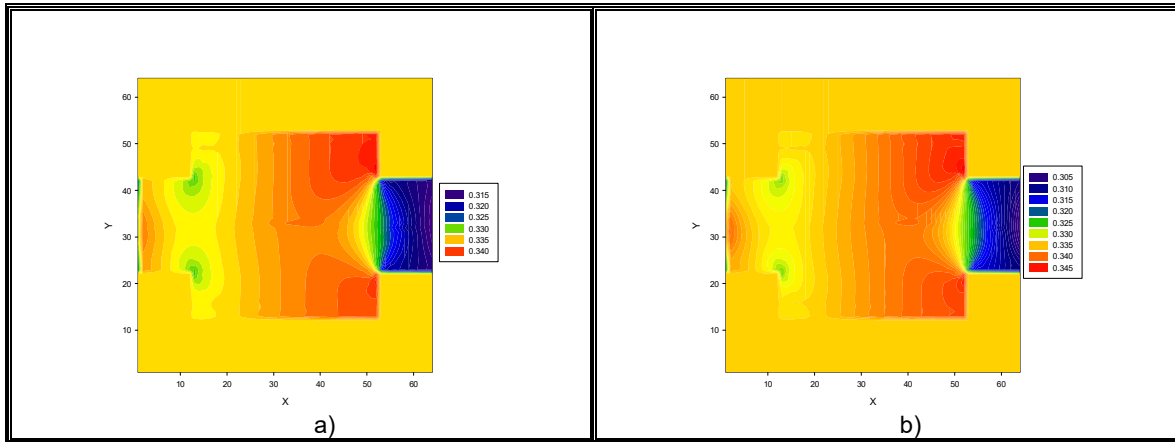


Figura 3.91 Distribución de presiones para número de Bingham = 0.2, esfuerzo inicial =  $1.1E-5$ , Viscosidad = 0.08. a) Número de Re = 14.095 y fuerza = 0.06; b) Número de Re = 18.259 y fuerza = 0.08.

En la figura 3.91, se varió la fuerza y se mantuvieron constantes el esfuerzo inicial y la viscosidad para un número de Bingham de 0.2. Aquí se observa que conforme la fuerza aumenta el número de Reynolds también, pero para nuestras condiciones el rango es muy cercano, por lo que, el cambio en las presiones no es muy apreciable entre las figuras a) y b). Sin embargo, sigue predominando el aumento en la presión en las zonas de transición.

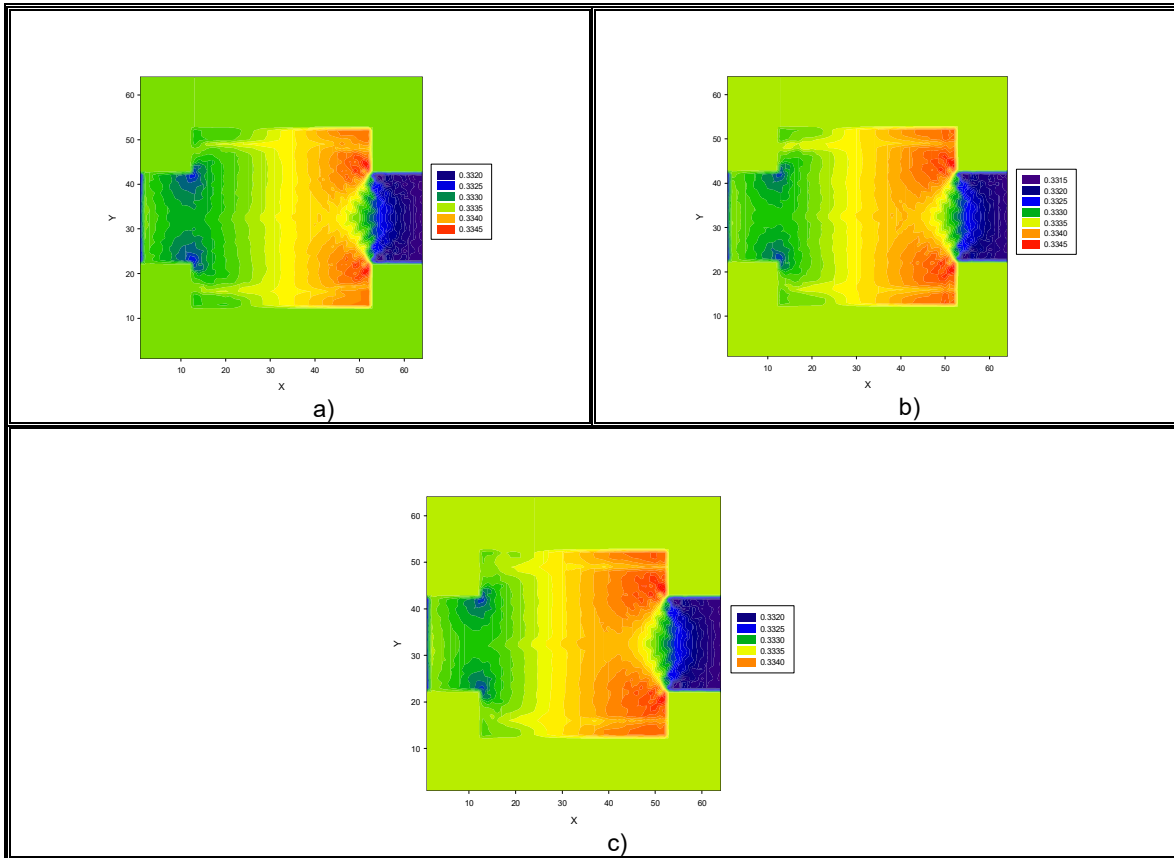


Figura 3.92 Distribución de presiones para número de Bingham = 0.3, esfuerzo inicial =  $1.4E-5$ , fuerza =  $5.19E-3$ . a) Número de Re = 88.367 y Viscosidad = 0.008; b) Número de Re = 71.116 y Viscosidad = 0.009; c) Número de Re = 58.58 y Viscosidad = 0.01.

En la figura 3.92, se realizaron experimentos para un número de Bingham 0.3, dejando la fuerza y el esfuerzo inicial con valores constantes, variando la viscosidad. En dichas figuras, se observa que al aumentar la viscosidad el número de Reynolds disminuye, tal como ocurre en los resultados expresados en la figura 3.90. Además, se observa que el valor de las presiones aparentemente no es muy apreciable debido al rango cercano entre los números de Reynolds, a diferencia de lo que ocurre en resultados de la figura 3.90. Sin embargo, sigue predominando el aumento en la presión en las zonas de transición.

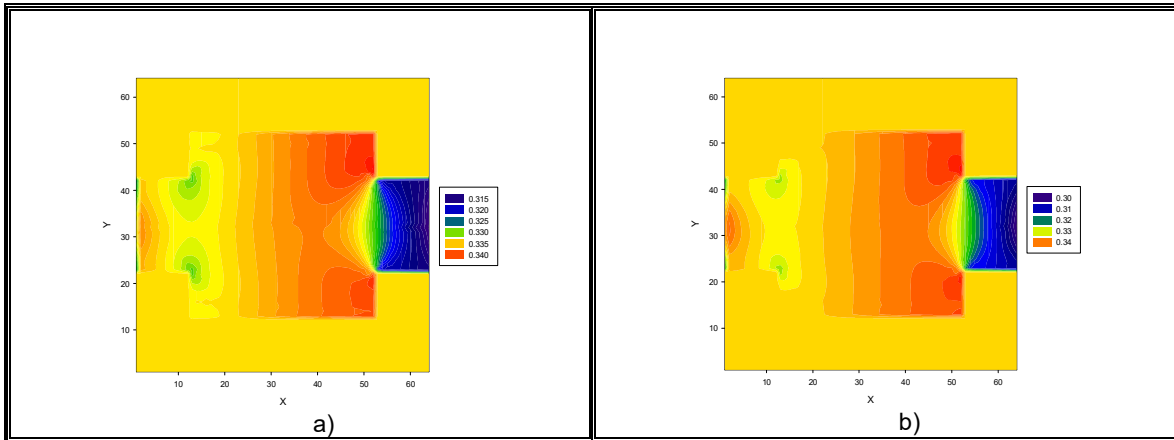


Figura 3.93 Distribución de presiones para número de Bingham = 0.3, esfuerzo inicial =  $1.4E-5$ , Viscosidad = 0.07. a) Número de Re = 17.863 y fuerza = 0.06; b) Número de Re = 23.187 y fuerza = 0.08.

En la figura 3.93, con el número de Bingham de 0.3, se mantuvo constante el esfuerzo inicial y la viscosidad, variando la fuerza. Se aprecia en la figura, que conforme la fuerza aumenta el número de Reynolds también, pero para nuestras condiciones nuevamente el rango es muy cercano, por lo que, el cambio en las presiones no es muy apreciable entre la figura a) y la b) pero, sigue predominando el aumento en la presión en las zonas de transición.

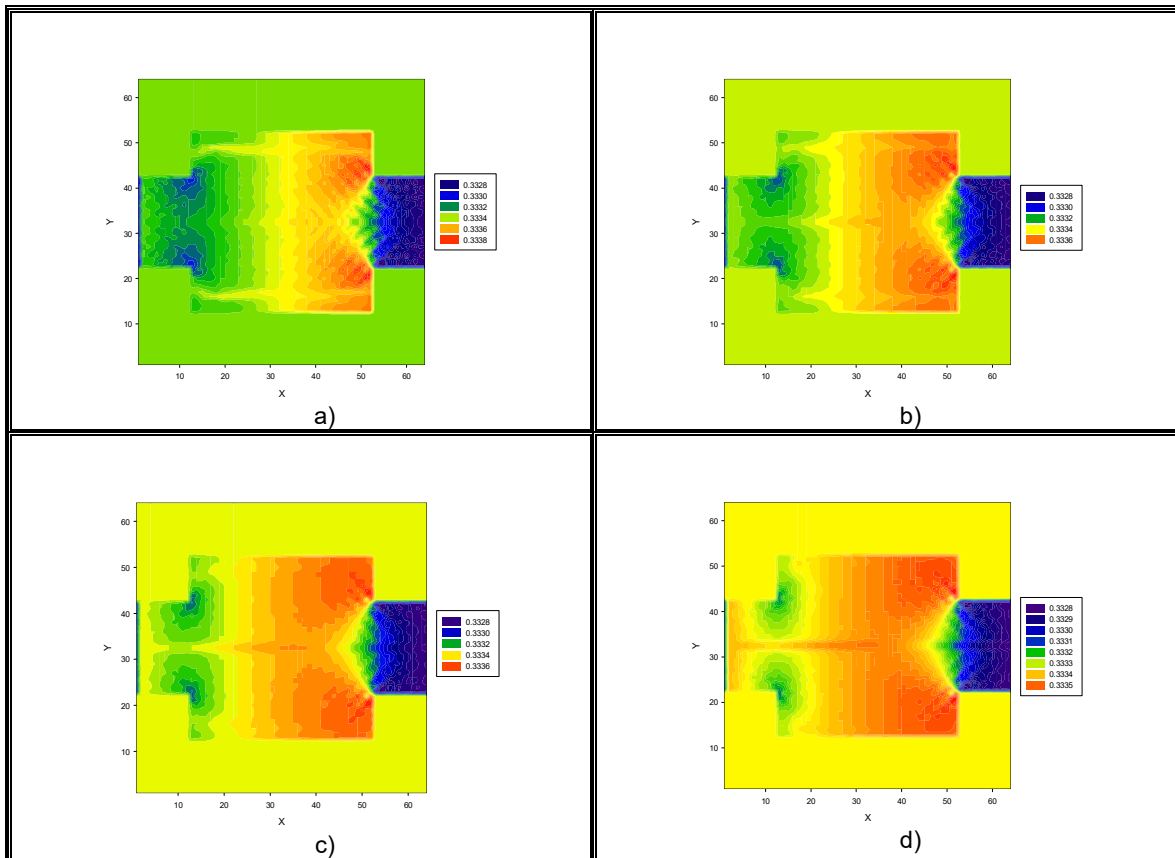


Figura 3.94 Distribución de presiones para número de Bingham = 0.4, esfuerzo inicial =  $6.5E-6$ , fuerza =  $1.877E-3$ . a) Número de Re = 118.863 y Viscosidad = 0.004; b) Número de Re = 56.225 y Viscosidad = 0.006; c) Número de Re = 33.199 y Viscosidad = 0.008 y d) Número de Re = 22.011 y Viscosidad = 0.01.

En la figura 3.94 se hicieron corridas para un número de Bingham de 0.4, dejando la fuerza y el esfuerzo inicial con valores constantes, variando la viscosidad. En dichas figuras, se observa que al aumentar la viscosidad el número de Reynolds disminuye, lo cual es de esperarse de acuerdo con la expresión de la ecuación 3.17. Además, se observa un aumento en las presiones en las esquinas, sobre todo al final de la región "B". Sin embargo, sigue predominando el aumento en la presión en las zonas de transición.



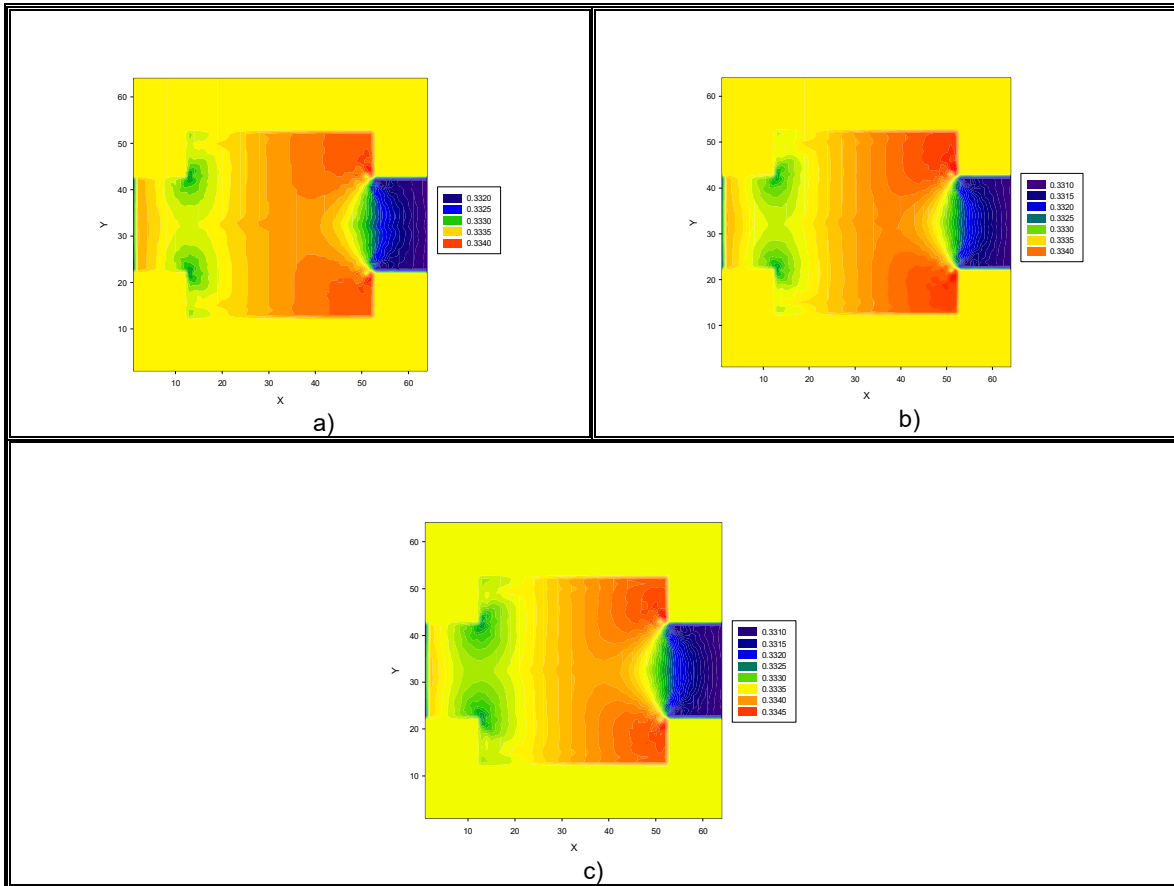


Figura 3.95 Distribución de presiones para número de Bingham = 0.4, esfuerzo inicial =  $6.5E-5$ , Viscosidad = 0.025. a) Número de Re = 13.678 y fuerza = 0.006; b) Número de Re = 17.998 y fuerza = 0.008; c) Número de Re = 20.107 y fuerza = 0.009.

En la figura 3.95, con el número de Bingham de 0.4, se mantuvo constante el esfuerzo inicial y la viscosidad, variando la fuerza. Se aprecia en la figura, que conforme la fuerza aumenta el número de Reynolds también, pero para nuestras condiciones nuevamente el rango es muy cercano, por lo que, el cambio en las presiones no es muy apreciable entre la figura a) y la c) pero, sigue predominando el aumento en la presión en las zonas de transición.

En las figuras 3.90, 3.92 y 3.94, se observa que conforme aumenta la viscosidad, sobre todo en las esquinas de las zonas de transición y de manera más marcada al final de la zona “B”, se presentan los fenómenos de turbulencia, lo que ocasiona un aumento de presión en comparación con las zonas “A” y “C” que son entradas y salidas respectivamente.

En las figuras 3.91, 3.93 y 3.95, se observa que conforme la fuerza aumenta el número de Reynolds también y existe de manera predominante el aumento de la presión en las zonas de transición dentro de la zona “B”.

La investigación de Meghdadi (2017), utiliza LBM para simular el paso de un fluido Newtoniano por un canal de expansión y contracción súbita, los resultados de su investigación fueron los siguientes:

- a) En los gradientes de alta presión aparecen un par de vórtices, generalmente en las esquinas de la zona “B”. Estos vórtices crean zonas de corriente de flujo “muertas” y las líneas de corriente se dirigen hacia la zona central, donde se aprecia el fenómeno de contracción de vena contracta.
- b) Debido a las condiciones de frontera en las regiones “A” y “C”, las líneas de corriente y los contornos de presión son simétricos.

En el presente trabajo, los resultados son similares a los de Meghdadi, por lo que, los resultados de la investigación aportan lo siguiente:

- a) Independientemente del valor de los números de Bingham, se pueden observar comportamientos similares entre ellos al mantener constantes los valores como son el esfuerzo inicial, la fuerza y la viscosidad.
- b) Si el número de Reynolds es elevado hay poca homogeneidad en el área de las presiones de manera más apreciable en la zona “B”
- c) Además cuando el número Reynolds es elevado se puede apreciar una mayor diferencia de presiones de manera puntual en el sistema.



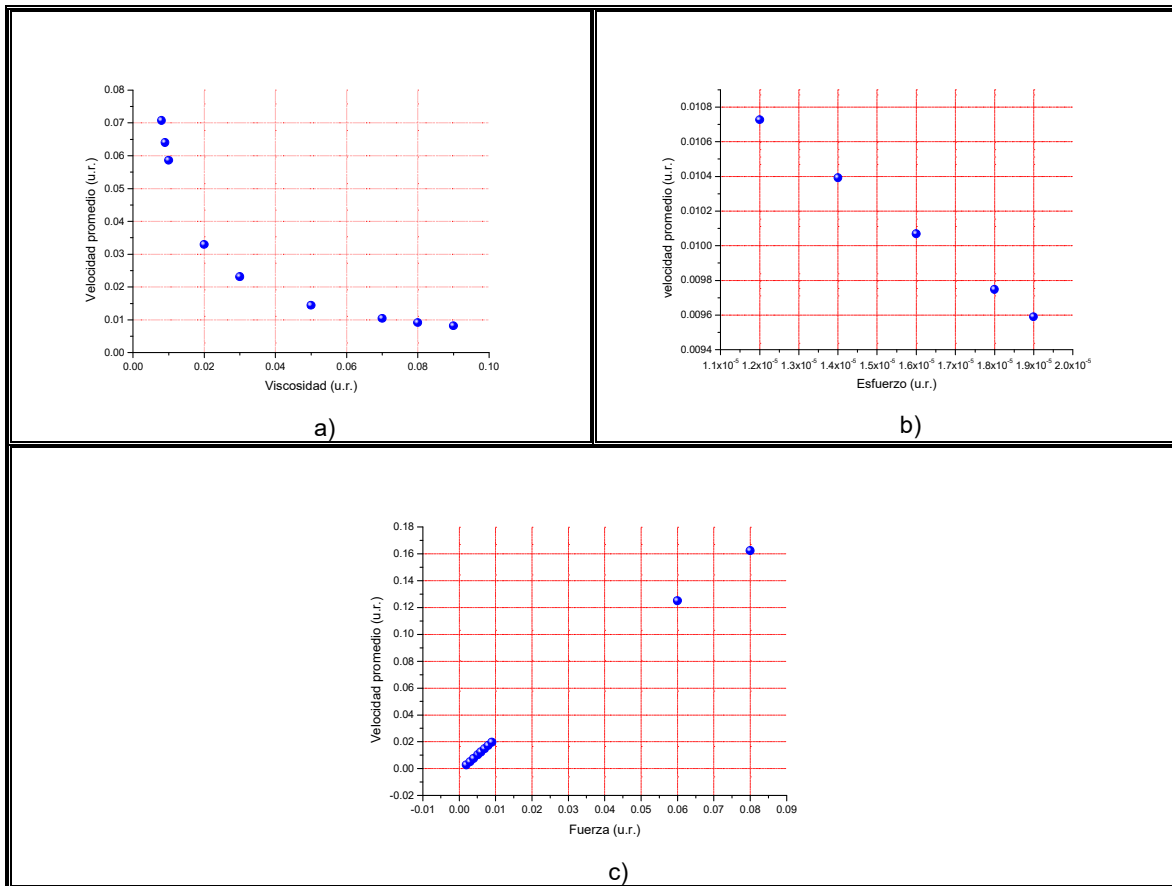


Figura 3.97 Comportamiento de la velocidad promedio para número de Bingham = 0.3 con respecto a la a) Viscosidad, b) Esfuerzo inicial y c) Fuerza de cuerpo.

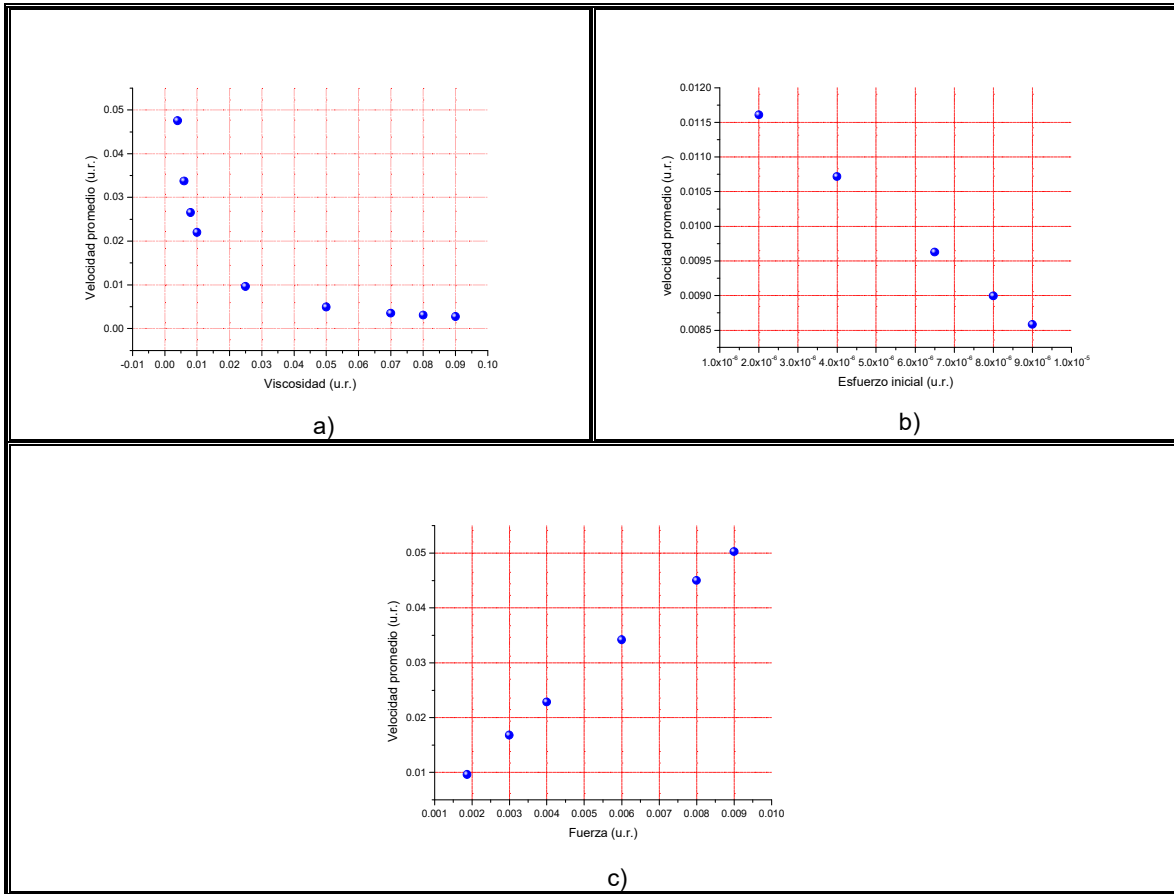


Figura 3.98 Comportamiento de la velocidad promedio para número de Bingham = 0.4 con respecto a la a) Viscosidad, b) Esfuerzo inicial y c) Fuerza de cuerpo.

En las figuras anteriores, se puede afirmar que disminuyendo la viscosidad aumenta el número de Reynolds siendo más notable en  $Bn = 0.2$ , lo cual trae como consecuencia una formación de vórtices. De igual forma, sucede al aumentar la fuerza de cuerpo, pero aquí con  $Bn = 0.4$ , es más pronunciado. En la figura (3.99), se observa lo mencionando anteriormente.

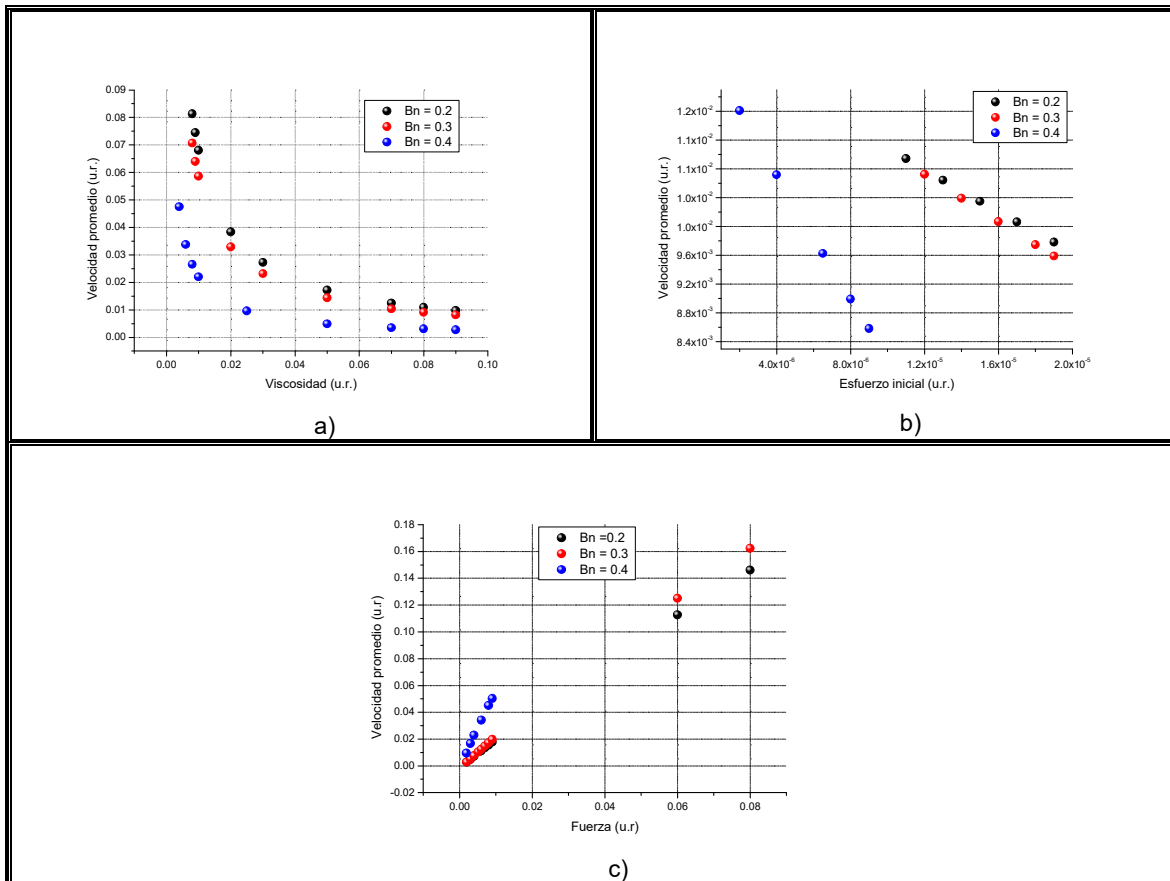


Figura 3.99 Comportamiento de la velocidad promedio para los tres números de Bingham con respecto a la a) Viscosidad, b) Esfuerzo inicial y c) Fuerza de cuerpo.

### 3.6 Conclusiones

¿Qué hace de Lattice Boltzmann un método tan especial?

El método de Boltzmann, a través de su relación con la teoría cinética, permite resolver los problemas de los fenómenos de transporte y la mecánica de fluidos de carácter complejo en diferentes sistemas, tal como la expansión y contracción súbita. La modificación de la ecuación de Boltzmann al incorporar el parámetro de relajación  $\tau$  en función de la viscosidad aparente, confirman que los resultados son similares con los reportados por los autores Wang & Ho (2008) que modificaron el método de Boltzmann con la corrección de Chapman-Enskog, Tang *et. al.* (2011) incorporando el factor de corrección de Papanastasiou y por último con Mitsoulis & Huigol (2004) utilizando el mismo factor de corrección que Tang, obteniendo todos, resultados similares en los perfiles de velocidades y en los canales de

expansión y/o contracción observando el mismo fenómeno de turbulencia en la zona B. De la misma forma la investigación de Meghdadi (2017) acerca de la distribución de presiones en las expansiones y contracciones súbitas los resultados son similares como se comentado anteriormente en este trabajo.

Una de las aportaciones de este trabajo a la carrera es conocer LBM como una alternativa en métodos de simulación, para simplificar, ejemplificar y/o visualizar el comportamiento de los fluidos.

Por lo tanto este método con las restricciones necesarias permite simular a la perfección el comportamiento de los fluidos, como es el caso del tipo Bingham, la importancia de esto es la aplicación de múltiples procesos industriales, en el desplazamiento de los fluidos reduciendo costos y tiempo.

## REFERENCIAS

1. Halmos A. L. and Boger D. V. (1975), *The behavior of a power law fluid flowing through a sudden expansión: Part I a numerical solution*, Aiche Journal, 21 3 540-549.
2. Bertin J. J. (1984), *Mecánica de fluidos para ingenieros*, Primera edición. Prentice-Hall Hispanoamericana. S. A.
3. Bruce R. Munson, Donald F. Young, Theodore H. Okiishi. (2002), *Fundamentals of Fluid Mechanics*. John Wiley & Sons Inc. USA.
4. Carrasco Boix Adria (2013) *Application of the Lattice Boltzmann Method to Issues of Coolant Flows in Nuclear Power Reactors*, master thesis, Universitat Politecnica de Catalunya Barcelona Tech.
5. Chhabra R.P., Richardson J.F., (1999), *Non-newtonian Flow in the Process Industries, Fundamentals and Engineering Applications*, Butterworth-Heinemann.
6. Chirila Dragos B., (2010), *Introduction to Lattice Boltzmann Methods*.
7. Sámano D., Mihir Sen. (2009), *Mecánica de Fluidos*, Universidad de Norte Dame.
8. Daily James W., Harleman Donald R.F., (1975), *Dinámica de los fluidos con aplicaciones en ingeniería*, Editorial Trillas, México.
9. De Nevers N. (2006), *Mecánica de fluidos para ingenieros químicos*, Tercera edición. Editorial CECSA, México.
10. Dottori Javier, (2016), *Modelos de fuerza de frontera y máxima entropía para aplicaciones de Lattice Boltzmann en fluidos*, Trabajo de tesis para optar al título de Doctor en Matemática Computacional e Industrial, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional del Centro de la Providencia de Buenos Aires Tandil.
11. Florez S. Elkin G., Cuesta Ildefonso, Salueña Clara, (2008) *Flujo de Poiseuille y la cavidad con pared móvil calculado usando el método de la*



- ecuación de Lattice Boltzmann*, Ingeniería y desarrollo, Número 24, julio diciembre.
12. Fonseca F., Romero B., (2011), *Solución de la ecuación de difusión usando el método de lattice-Boltzmann y diferencias finitas*, Revista colombiana de física, Vol 43 No 3.
  13. Fusi Lorenzo, Farina Angiolo, Rosso Fabio, (2014), *Bingham Flows with pressure-dependent rheological parameters*, International Journal of non-linear Mechanics 64, 33-38.
  14. Ginzburg Irina and Steiner Konrad, (2002), *A free-surface lattice Boltzmann method for modelling the filling of expanding cavities by Bingham fluids*, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 360, 453–466.
  15. Missirlis K. A., Assimacopoulos D., and Mitsoulis E. (1998), *A finite volume approach in the simulation of viscoelastic expansion flows*, Journal of Non-Newtonian Fluids Mechanics, 8 91-118.
  16. Kefayati G.H.R., Huilgol R.R., (2017), *Lattice Boltzmann method for the simulation of the steady flow of a Bingham fluid in a pipe of square cross-section*, European Journal of Mechanics B/Fluids, recuperado de: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0997754616306367>.
  17. Kefayati G.H.R., Huilgol R.R., (2016), *Lattice Boltzmann Method for simulation of mixed convection of a Bingham fluid in a lid-driven cavity*, International Journal of Heat and Mass Transfer 103, 725–743.
  18. Kremer Medeiros Gilberto, (2010), *An Introduction to the Boltzmann Equation and Transport Processes in Gases*, Springer London New York.
  19. León García O.J.E. (2017) *Simulación de fluidos pseudoplásticos con métodos actuales de la dinámica de fluidos computacionales y su comparación con datos experimentales*. Trabajo de tesis para optar por el título de maestría de en ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, México D.F.
  20. Maestro Garriga Alicia (2002), *Reología de espesantes celulósicos para pinturas al agua: modelización y mecanismo de espesamiento asociativo*, Tesis doctoral, Universitat de Barcelona, Facultat de Química.

21. Malkin Alexander Ya, Isayev Avraam I., (2012), *Rheology Concepts, Methods, and Applications*, Chem tec Publishing, Toronto, Canada, Second Edition.
22. Manica R and De Bortoli A. L., (2004), *Simulation of sudden expansion flows for power-law fluids*, *J. Non Newtonian Fluid Mech.* 121, 35-40.
23. Maso Talou G., Bulant C.A., D'Amato J.P.D., Clause A., Pomarico J., Iriarte D., Di Rocco O., (2015), *Automata de Lattice Boltzmann para modelar la difusión óptica en materiales translucidos*, Research Gate.
24. Meghdadi I. A.H. Afrand M. (2017), *Experiment and Lattice Boltzmann numerical study on nanofluids flow in a micromodel as porous médium*, *Physica E*, Vol 94 pags 15-21.
25. Mitsoulis Evan, Huigol R. R. (2004), *Entry flows of Bingham plastics in expansions*, *Journal of non-newtonian fluid mechanics* 122. 45-54.
26. Morales C, O. A., Barbosa S. J. G and Jiménez B. C. C. (2009), *Flujo laminar en conducto rectangular con contracción súbita*, *Memorias del XV congreso internacional anual de la SOMIM*. 23 al 25 de septiembre.
27. Moreno E., Cervera M., (2014), *Elementos finitos mixtos estabilizados para flujos viscoplasticos, formulación y aplicaciones*, Centro internacional de métodos numéricos en ingeniería, Barcelona España.
28. Mott Robert L. (2006) *Mecánica de fluidos*, Editorial Pearson Hill, México.
29. Norton Tomas & Sun Da-Wen, (2006), *Computacional fluid dynamics (CFD)- an effective and efficient design and analysis tool for the food industry: a review*, *Trends in Food Science & Technology*, Vol 17 600-620.
30. Pérez V. L. R. (2016), *La Ecuación de redes de Boltzmann: Una alternativa para la simulación de fluidos Newtonianos y de Ostwald de Waele*, Tesis de Licenciatura, FESC-UNAM. México.
31. Qixin Zhong and Christopher R. Daubert (2013), *Handbook of Farm, Dairy and Food Machinery Engineering*, Chapter 15 *Food Rheology* Academic Press El Servier Second edition London.
32. Quintans R. L. C., (2008), *Reología de productos alimentarios*, Tesis doctoral, Universidad Santiago de Compostela.

33. Manica R. and De Bortoli A. L. (2004), *Simulation of sudden expansion flows for power law fluids*, J. Non Newtonian Fluid Mechanics, 121 1 35-40.
34. Rao Anandha M., (2006), *Rheology of Fluid and semisolid foods principles and applications*, Springer Ed. Geneva, NY USA.
35. Reyes G. M. Á. (2012), *Modelo reológico de aceites de yacimientos naturalmente fracturados*, Tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de ingeniería.
36. Rincon Baez William Umar, (2014), *Simulación de un generador de impulsos tipo Roman por el método de Lattice Boltzmann*, Tesis de licenciatura Universidad Nacional de Colombia Facultad de Ciencias Departamento de Física Bogota Colombia.
37. Sargsyan Tigran (2012), *Estudio de fenómenos de transferencia de calor y dinámica de fluidos mediante los métodos de Lattice Boltzmann y volúmenes finitos*, Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales y Aeronautica de Terrassa España.
38. Souza, M. P. R. & Dutra, E. S. S. 2004. "Viscosity function for yield-stress liquids". *Appl. Rheol.*, 14, 296-302.
39. Succi Sauro, (2001), *The Lattice Boltzmann Equation for fluids Dynamics and Beyond*, Clarendon Oxford University Press.
40. Sukop C. Michael, Thorne Daniel T. Jr, (2007), *Lattice Boltzmann Modeling An introduction for Geoscientist and Engineers*, Springer London New York.
41. Tang G.H., Wang S.B., Ye P.X., Tao W.Q., (2011), *Bingham fluid simulation with the incompressible lattice Boltzmann model*, Journal of non-newtonian fluid mechanics, 166, 145-151.
42. Tanner, R. & Milthorpe, (1983), "Numerical simulation of flow fluids with yield stress", *Num. meth. lam. turb. flow*". In: EDS. C. TAYLOR, J. A. J. A. W. R. S. (ed.) *Proc. 3rd Int. Conf., Scattle*. Swasea, UK: Pineridge Press.
43. Ternik P. (2010) *New contributions on laminar Flow of inelastic non-Newtonian fluid in the two-dimensional symmetric expansion: creeping and slowly moving Flow conditions*, J. Non Newtonian Fluid Mech. 165, 1400-1411.

44. Tscheuschner Horst-Dieter, (2001), *Fundamentos de la tecnología de los alimentos*, Editorial Acribia Zaragoza España.
45. Van der Sman R.G.M., (2016), *Lattice Boltzmann Simulation of Microstructures, Chapter 2 of Food and Bioprocess Modeling Techniques* CRC Press Taylor and Francis Group London New York.
46. Velázquez O. J. L., (2018), *Principios de transferencia de cantidad de movimiento*, Ediciones FESC México.
47. Viggen M. E., (2009), *The Lattice Boltzmann Method with Applications in Acoustics*, Tesis de licenciatura de física, Norwegian University of Science and Technology, Norway.
48. Wagner J. Alexander, (2008), *A practical Introduction to the Lattice Boltzmann Method*, Department of Physics North Dakota State University Fargo March.
49. Wang Chen-Hao, Ho Jeng-Rong, (2008), *Lattice Boltzmann modeling of Bingham plastics*, Physica A 387, 4740–4748.
50. White M. F. (1993), *Mecánica de fluidos*, Cuarta edición. Mc Graw Hill.
51. Wilhelm D and Kleiser L. (2002) *Application of a spectral element method to two-dimensional forward-facing step flow*, *Journal of Scientific Computing*. 14(1-4): 619-627.
52. Zou Q., He X., (1997), *On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model*, Phys. Fluids 9 1591-1598.