



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**Diseño e implementación de
un controlador adaptable de
orden fraccionario**

TESIS

Que para obtener el título de

Ingeniero Eléctrico Electrónico

P R E S E N T A N

Jair Servín Aguilar

Jorge Alberto Pérez Gómez

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Marcos Ángel González Olvera



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2018



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Jurado asignado

Presidente: Dr. Gerardo René Espinosa Pérez

Secretario: Dr. Paul Rolando Maya Ortiz

Vocal: Dr. Marcos Ángel González Olvera

Primer suplente: Dra. Anahí Flores Pérez

Segundo suplente: M.I. Mauro Gilberto López Rodríguez

La tesis se realizó en la Facultad de Ingeniería, UNAM.

Director de tesis

Dr. Marcos Ángel González Olvera

Agradecimientos

La tesis que aquí presentamos Jorge y yo ha sido posible gracias diferentes personas e instituciones. Por lo que, de manera muy personal, quiero agradecer y reconocer a todos a continuación.

Gracias a mis padres, Araceli y Héctor. Ustedes han sido las personas que me han dado más apoyo que nadie. Gracias por siempre tener la disposición de escucharme y tratar de entenderme. El apoyo, no solo económico, sino también moral, y las diferentes atenciones que han tenido conmigo (imposible enunciarlas todas) son de gran valor. Los admiro en muchos sentidos. Este trabajo los involucró siempre a ustedes. Gracias por avanzar conmigo siempre. Tengo todo que agradecerles por su empeño en vernos felices. Los amo.

Gracias a mis hermanos, Jonatan e Iván. Son ustedes quienes más me han motivado siempre. Su apoyo, equiparable al de mis padres, ha sido de vital importancia en todo momento. Gracias por siempre tener algo que decirme en favor de mi desarrollo personal. Gracias por nunca negarme el apoyo que de ustedes he demandado, a veces sin merecerlo. Pero no todo se trata de merecer, y pueden apoyarse en mí siempre. Representan para mí un pilar fundamental. Gracias también por siempre estar interesados en el rumbo que lleva mi vida y mis ideas. Los amo y los admiro profundamente.

A mi tía María Elena, alias “Tía Titi”, mi más sincero agradecimiento. Siempre he recibido el más cálido cobijo en tu persona. Gracias por recibirme en tu casa durante los últimos 5 años de mi vida. Hemos compartido frustraciones, alegrías, logros, comida, sobremesas, estrés... Cuánto nos hemos podido conocer en este tiempo, tía. Te amo con todo mi corazón. Mi etapa universitaria ha sido más cómoda y bonita gracias a tu amor y tu apoyo.

Quiero agradecer a mis abuelos. En especial a mi abuelita Ana María, por siempre tener las palabras suficientes para expresar todo el cariño que es capaz de entregar. Por haberme recibido en tu casa en todo momento con comida caliente y deliciosa. Porque en tu casa pase gran parte de mi vida escolar, disfrutando de tu cariño. Te amo, abuelita.

Gracias a mis amigos: Jorge, Isaac, Daniel, Joaquín, Héctor, Jaime, Vanessa, Brito, Miguel, Samuel y Julio. Gracias por todos los momentos compartidos. Gracias por el incesante intercambio de ideas, música y bromas. Ejercimos el apoyo mutuo y la amistad durante nuestro proceso universitario, y encuentro en eso un factor muy importante del éxito que hemos obtenido. Gracias, amigos.

Gracias a Daniela Andrade. La última etapa de mi carrera universitaria estuvo llena de inquietudes, incertidumbres e ideas. Encuentro en ti una gran amiga, y tienes aquí un amigo con el que puedes contar siempre. Gracias por escucharme con atención e intención de entenderme. Gracias por todas las risas y las ideas compartidas. Te amo.

II

Gracias a nuestro asesor y profesor, Doctor Marcos Ángel González. Es usted quien me ha motivado a realizar una tesis. Es usted ahora quien me motiva a continuar trabajando en el área de Control. Gracias por su gran disposición y la excelente manera que tiene de compartir el conocimiento. Gracias también por su apoyo económico en favor de este trabajo. Es usted un excelente profesional.

Gracias a la Doctora Anahí Flores por darme la oportunidad de trabajar como su ayudante. Los consejos que he recibido de su parte han sido de vital importancia durante la realización de este trabajo. Encuentro motivación en su trabajo como profesional y como docente. Gracias por su apoyo durante el último año.

Gracias a la Universidad Nacional Autónoma de México por prestarme sus instalaciones para continuar mis estudios y darme la oportunidad de diversificar mis conocimientos. Gracias también a todos mis profesores por compartir su conocimiento y consejos.

Por último, quiero agradecer a la Universidad Autónoma de la Ciudad de México (UACM) por facilitarnos el uso de sus instalaciones y del equipo para la realización de los experimentos realizados durante este trabajo. Gracias a la institución y a su personal, que nos recibieron siempre con amplia disposición.

A todo ustedes, infinitas gracias.
Jair Servín Aguilar.

Este trabajo es el resultado del esfuerzo, compromiso y apoyo de muchas personas a las cuales quiero agradecer a continuación.

Muchas gracias mami, Pilar. Sin duda alguna, tu eres la persona que más me ha apoyado antes y durante esta etapa. Gracias por estar siempre conmigo, incluso estando lejos uno del otro. Por todo el tiempo y cada consejo que me has brindado. Por la confianza que has depositado en mí y alentarme a superarme, personal y profesionalmente, día con día. Porque sin ti hubiera sido difícil lograr lo que hasta este momento he logrado. Simplemente, gracias por el amor que me tienes. Te amo mamá.

Muchas gracias hermanos, Ulises, María Fernanda, Cesar y Marco. Ustedes son parte fundamental en mi vida. Uli, tu carisma es algo que admiro mucho de ti, lo cual te permite relacionarte fácilmente con las demás personas. Gracias por tu apoyo incondicional. Marifer, a tu corta edad me has demostrado que la disciplina es sumamente importante para alcanzar mis objetivos. Cesarín y Marquito, a pesar de que son muy pequeños me han recordado que el cuestionarme es primordial para tener claro lo que quiero. Me siento muy orgulloso de todos ustedes y pueden contar conmigo siempre. Los amo.

Muchas gracias papi, Ulices. Por tu amor y apoyo. Por las pláticas que hemos tenido. Pero sobretodo, por cada enseñanza y por la confianza que has depositado en mí. Te amo papá.

Abuelitos muchas gracias. Jorge, Josefa y Celia ustedes me han llenado de sabiduría durante todo este tiempo. Todos sus consejos y regaños me han servido para ser la persona que soy ahora. Quiero que sepan que son un ejemplo para mí y encuentro mucha inspiración en la vida de cada uno. Gracias por todo el apoyo que me han brindado. Por todos los momentos felices que he pasado con ustedes. Sé que aún nos falta compartir más anécdotas y tiempo juntos. Los amo.

Joaquín muchas gracias por todo lo que me has dado. Eres una de las personas que más ha influido en mi vida. Gracias por cada consejo y el tiempo que has invertido conmigo. Pero sobre todo, por el gran amor que tienes por mí y mi hermano. Janet, muchas gracias por los momentos felices que hemos compartido. Gracias por tus atenciones y por la paciencia que has tenido conmigo y con mi hermano. Eres una persona muy especial para mí y siempre estaré muy agradecido contigo. Los quiero mucho.

Sé que la familia no se escoge y si se escogiera, los escogería a ustedes. Muchas gracias a todos, a mis tías, mis tíos y primos. Todos ustedes han influido en mí y siempre están cuando los necesito. De esa misma forma, quiero que sepan que cuentan conmigo y que tengo un gran amor por todos ustedes.

Whitney, Vanessa, Isaac, Jair, Bruno, Joaquín, Daniel y Héctor muchas gracias por todo. Ustedes me han regalado momentos invaluable, los cuales siempre recordaré con mucha alegría. Whitney e Isaac, hermanos de otra sangre, durante la etapa universitaria compartimos momentos tristes y alegres. Nunca olvidaré los fines de semana que pasábamos juntos, las veces que cocinábamos, cuando salíamos a algún bar, las noches de estudio, los viajes, entre otras cosas. Jair, Bruno, Joaquín, Daniel y Héctor con ustedes también viví cosas que nunca olvidaré, sobre todo las pláticas extensas que teníamos cuando nos reuníamos. Vanessa, hemos tenido etapas buenas y etapas no tan buenas. Sin embargo, nunca nos hemos alejado demasiado uno del otro. Gracias por tu apoyo incondicional, por cada momento compartido, por las risas y lágrimas. Sé que, a pesar del tiempo y la distancia, siempre existirá un cariño especial entre nosotros. A cada uno de ustedes les deseo éxito y deseo que nuestra amistad perdure.

IV

Gracias a la familia Vega Ángeles y Jiménez Gómez, por haberme recibido en más de una ocasión en sus hogares y hacerme sentir parte de su familia.

Muchas gracias al Dr. Marcos Ángel, por todo el tiempo y disposición que tuvo con Jair y conmigo. Por haber confiado en nosotros para realizar este trabajo. Por el apoyo económico para desarrollar el artículo y presentarlo en el CNCA 2018.

Gracias a la Universidad Nacional Autónoma de México por haberme permitido desarrollar mis conocimientos y vivir experiencias que no hubiera tenido en otra institución.

Finalmente, gracias a la Universidad Autónoma de la Ciudad de México por las facilidades en el uso de sus instalaciones y equipos utilizados para la realización de este trabajo. Y a la fundación Telmex por el apoyo económico otorgado durante 5 años.

A cada uno de ustedes, gracias por ser parte de esta etapa.
Jorge Alberto Pérez Gómez.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Objetivo	2
1.2. Motivación	2
1.3. Contribuciones	2
1.4. Antecedentes teóricos	3
1.4.1. Estabilidad en el sentido de Lyapunov	3
1.4.2. Control adaptable	6
1.4.3. Cálculo fraccionario	10
1.4.4. Ecuaciones diferenciales fraccionarias	14
1.4.5. Representación de un sistema de orden fraccionario	17
1.4.6. Solución numérica de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario	17
2. Descripción del problema	21
2.1. Sistemas a controlar	21
2.1.1. Sistema hidráulico	21
2.1.2. Sistema térmico	26
2.2. Técnicas de control	28
2.3. Análisis de estabilidad	33
2.3.1. Análisis de estabilidad del sistema hidráulico de primer orden	34
2.3.2. Análisis de estabilidad del sistema hidráulico de segundo orden	34
2.3.3. Análisis de estabilidad del sistema térmico	37
3. Diseño del controlador	39
3.1. Propuestas de control para el sistema hidráulico	39
3.2. Propuesta de control para el sistema térmico	43
4. Resultados experimentales	45
4.1. Control con adaptación de un parámetro del sistema hidráulico de primer orden	46
4.2. Control con adaptación de dos parámetros del sistema hidráulico de primer orden	52
4.3. Control con adaptación de un parámetro del sistema hidráulico de segundo orden	58
4.4. Control con adaptación de dos parámetros del sistema térmico de primer orden	64
5. Conclusiones	69
Bibliografía	71

Capítulo 1

Introducción

La teoría de control es un área de la ingeniería que aborda el problema de obtener cierto comportamiento deseado de un sistema dinámico. Durante la década de los 50's surge el control adaptable con la motivación de controlar sistemas con parámetros desconocidos en su modelo (K. Åström, 2015). Es en este marco donde un controlador adaptable busca modificar sus propios parámetros de acuerdo con los cambios en la dinámica del proceso y el carácter de las perturbaciones (K. J. Åström & Wittenmark, 2013). Sin embargo, este tipo de controladores no buscan la convergencia de los parámetros a su valor real, sino la convergencia de la salida del sistema a un valor deseado o trayectoria deseada.

Las primeras contribuciones al control adaptable, enfocadas en un principio al control de sistemas de vuelo, son reportadas en (Gregory, 1959). De dichas contribuciones, surge, como una solución a los problemas de seguimiento y estabilización, el control adaptable basado en modelo de referencia (MRAC) (Narendra & Annaswamy, 2012). Este enfoque, en el caso lineal, presenta la ventaja de soportar cambios paramétricos lentos con respecto a la planta. En general, se sabe que el uso de MRAC clásico no garantiza convergencia de los parámetros desconocidos a los parámetros reales, sobre todo si no se cumple con la condición de excitación persistente. A pesar de ello, es una técnica que garantiza convergencia de la salida del sistema al modelo de referencia.

Un enfoque de control, que ha surgido recientemente, es el control de orden fraccionario. Éste enfoque hace uso de la teoría del cálculo fraccionario, que extiende las definiciones de los operadores derivada e integral al caso en que el orden de derivación e integración es un número real, e incluso complejo.

Algunos trabajos recientes (Samir Ladaci & Charef, 2006; B. Vinagre, Petráš, Podlubny, & Chen, 2002) muestran que al emplear una integral de orden fraccionario en la ley de adaptación se puede mantener la estabilidad en lazo cerrado y una alta capacidad de adaptación, aún en presencia de perturbaciones, así como contar con un mayor número de parámetros de diseño. Esta mejora del desempeño radica principalmente en las propiedades de no localidad y memoria de los operadores fraccionarios. En (Samir Ladaci & Charef, 2006) son muy claras las ventajas que ofrece la inclusión de una derivada de orden fraccionario en la ley de adaptación del MRAC gracias a que la derivada fraccionaria es un proceso largo de memoria. Un trabajo más reciente (Navarro-Guerrero & Tang, 2015), presenta el análisis de estabilidad y convergencia de un sistema adaptable basado en modelo de referencia de orden fraccionario, con adaptación de orden fraccionario. En él, destacan la ventaja

que tiene una ley de adaptación de orden fraccionario en la velocidad de convergencia del error de seguimiento a cero y la importancia de la ganancia de adaptación, así como el diseño del control para el suministro de anestesia en pacientes.

En este trabajo nos enfocamos en la implementación de un control adaptable basado en modelo de referencia añadiendo una ley de adaptación de orden fraccionario, derivada del mecanismo de ajuste conocido como regla MIT, aplicado experimentalmente en un sistema hidráulico, de primer y segundo orden, y un sistema térmico de primer orden. Con una adecuada elección del modelo de referencia, realizamos una serie de experimentos que nos permite hacer una comparación entre las diferentes elecciones de la ganancia de adaptación y el orden de integración, involucrado en el mecanismo de ajuste. Con ello se llegó a algunas conclusiones interesantes acerca de las ventajas de implementar una ley de adaptación de orden fraccionario. Los resultados obtenidos también nos permiten concluir acerca de la elección conjunta del orden de integración y la ganancia de adaptación, y las implicaciones de incrementar o disminuir esta última.

1.1. Objetivo

El principal objetivo de este trabajo es diseñar sistemas de control adaptable fraccionario que permitan controlar un sistema hidráulico de primer y segundo orden, y un sistema térmico de primer orden. Para ello, se desarrollarán leyes de control con adaptación de uno, dos y tres parámetros mediante el análisis de los modelos matemáticos que describen el comportamiento de cada sistema experimental.

Además, mostraremos las ventajas que tiene el MRAC de orden fraccionario sobre el de orden entero. A través de las simulaciones y los resultados obtenidos de las implantaciones, compararemos el desempeño de las respuestas de los sistemas.

1.2. Motivación

El desarrollo del control adaptable se ha visto favorecido por las ventajas que presenta cuando se implementa sobre sistemas de parámetros desconocidos o variables. Algunas técnicas adaptables resuelven muy bien el problema de identificación de parámetros. Por otro lado, hay técnicas adaptables que se ajustan bastante bien a los cambios paramétricos.

Este trabajo encuentra motivación en el diseño de controladores que permitan el seguimiento de un modelo de referencia y se ajusten bien a cambios paramétricos del sistema. También, pretende explorar la implementación de una ley de ajuste con base en el cálculo fraccionario y mostrar las ventajas que ésta pudiera presentar.

1.3. Contribuciones

La contribución más importante de este trabajo es la unión entre la teoría de los controladores adaptables basados en modelo de referencia y la teoría del cálculo fraccionario. Concretamente, nuestro trabajo contribuye de la siguiente manera:

- Implantamos un algoritmo de control adaptable de orden fraccionario en un sistema hidráulico de primer y segundo orden.
- Implantamos un algoritmo de control adaptable de orden fraccionario en un sistema térmico de primer orden.
- Con los resultados de la implementación de este tipo de controladores podemos concluir que, en los sistemas mencionados, un controlador de orden fraccionario permite incrementar la ganancia de adaptación a la vez que se logra convergencia de la salida del sistema a la salida de un modelo de referencia, en comparación con un sistema adaptable de orden entero implementado sobre las mismas plantas.

Por otro lado, se escribió un artículo (Pérez, Servín, & González, 2018) en el cual se mostraron algunos de los resultados experimentales presentados aquí. Dicho artículo fue presentado e incluido en las memorias del Congreso Nacional de Control Automático (CNCA) 2018, organizado por la Asociación de México de Control Automático (AMCA).

Así, a partir de los experimentos realizados y las conclusiones obtenidas, contribuimos al estado del arte del cálculo fraccionario aplicado en la teoría de control y los controladores adaptables basados en modelo de referencia.

1.4. Antecedentes teóricos

A continuación, se abordará la teoría básica involucrada en el desarrollo de esta tesis. Comenzaremos por revisar las condiciones de estabilidad de los sistemas, así como algunas de sus características y análisis. Seguido de ello, se definirá el control adaptable y sus características. Además, se hablará acerca de la técnica específica de control adaptable a implementar.

Además, revisaremos la teoría básica sobre el cálculo fraccionario, que es una de las partes fundamentales y más interesantes en esta tesis. Finalmente, presentamos las características de los sistemas de orden fraccionario.

1.4.1. Estabilidad en el sentido de Lyapunov

Para los sistemas dinámicos existen distintos tipos de estabilidad, según sea caracterizado el sistema. Un enfoque de estabilidad es el de Lyapunov. La *estabilidad en el sentido de Lyapunov* describe el comportamiento del sistema en torno a un punto de equilibrio. En general, existen tres condiciones que determinan las propiedades de estabilidad de un punto de equilibrio. A continuación presentamos dichas condiciones tomadas de (Khalil, 1996).

Considere el sistema autónomo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) , \quad (1.1)$$

donde $f : D \rightarrow R^n$ es una función localmente Lipschitz de un dominio $D \subset R^n$ a R^n . Suponga que $\bar{\mathbf{x}} \in D$ es un punto de equilibrio de (1.1); es decir,

$$\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = 0 .$$

Queremos caracterizar y estudiar la estabilidad de $\bar{\mathbf{x}}$. Por conveniencia, se establecen las definiciones y teoremas para el caso cuando el punto de equilibrio es el origen de R^n ; es decir, $\bar{\mathbf{x}} = 0$. No hay pérdida de generalidad en hacer esto porque cualquier punto de equilibrio puede ser trasladado al origen por medio de un cambio de variable. Suponga $\bar{\mathbf{x}} \neq 0$, y considere el cambio de variable $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}$. La derivada de \mathbf{y} está dada por

$$\dot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{y} + \bar{\mathbf{x}}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{g}(\mathbf{y}) ,$$

donde $\mathbf{y}(0) = 0$.

Bajo este cambio de variable, el sistema tiene equilibrio en el origen. Por lo tanto, sin pérdida de generalidad, siempre deberemos asumir que $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ satisface $\mathbf{f}(0) = 0$, y estudiar la estabilidad del origen $\mathbf{x} = 0$.

Definición 1.1 (Khalil, 1996). *El origen $\mathbf{x} = 0$ del sistema (1.1) es:*

- *Estable en el sentido de Lyapunov (ESL) si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que*

$$\|\mathbf{x}(0)\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon , \quad \forall t \geq 0 .$$

- *Inestable en el sentido de Lyapunov (ISL) si no es estable.*
- *Asintóticamente estable en el sentido de Lyapunov (AESL) si es estable y existe un $\delta > 0$ tal que*

$$\|\mathbf{x}(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = 0 .$$

1.4.1.1. Teorema de estabilidad de Lyapunov

El siguiente teorema permite determinar la estabilidad de un punto de equilibrio de acuerdo con el comportamiento de las trayectorias del sistema en torno de este punto. Para establecer este teorema, se busca una función candidata de Lyapunov que permita evaluar el comportamiento de las trayectorias del sistema. Si el cambio de la función candidata de Lyapunov a lo largo de las trayectorias nunca es positivo, se garantiza que el punto de equilibrio es AESL o ESL. De otro modo, el criterio no nos permite concluir.

A continuación presentamos la definición de una *función de Lyapunov*

Definición 1.2 (Slotine & Li, 1991) *Si, en una bola \mathbf{B}_{R_0} , la función $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ es positiva definida y tiene derivadas parciales continuas, y si sus derivadas con respecto del tiempo a lo largo de la trayectoria de cualquier estado del sistema (1.1) es negativa semi-definida, esto es,*

$$\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x}) \leq 0,$$

entonces $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ es llamada función de Lyapuno del sistema (1.1).

Así, podemos ahora enunciar el siguiente teorema.

Teorema 1.1 (Teorema de estabilidad de Lyapunov (Khalil, 1996)). *Sea $\mathbf{x} = 0$ un punto de equilibrio del sistema (1.1) y $D \subset R^n$ un dominio que contiene a $\mathbf{x} = 0$. Sea $\mathbf{V} : D \rightarrow R$ una función continuamente diferenciable , tal que*

$$\mathbf{V}(0) = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{V}(\mathbf{x}) > 0 \quad \text{en} \quad D - \{0\} \quad ,$$

$$\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \text{en} \quad D.$$

Entonces, $\mathbf{x} = 0$ es estable. Aún más, si

$$\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x}) < 0 \quad \text{en} \quad D - \{0\} \quad ,$$

entonces $\mathbf{x} = 0$ es asintóticamente estable.

1.4.1.2. Teorema de LaSalle

Si una función candidata de Lyapunov sólo determina que el punto de equilibrio de un sistema invariante en el tiempo es ESL, el siguiente teorema, conocido como *Teorema de Conjuntos Invariantes Locales* o *Teorema de LaSalle*, amplía el análisis, permitiendo determinar si el punto de equilibrio es AESL.

Definición 1.3 *Un conjunto \mathbf{G} es un conjunto invariante para un sistema dinámico si toda trayectoria del sistema que empieza en un punto en \mathbf{G} permanece en \mathbf{G} para todo tiempo futuro.*

Teorema 1.2 (*Teorema de Conjuntos Invariantes Locales (Slotine & Li, 1991)*). *Considere un sistema autónomo de la forma (1.1), con \mathbf{f} continua, y sea $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ una función escalar con primeras derivadas parciales continuas. Asuma que*

- *para algún $l > 0$, la región Ω_l definida por $\mathbf{V}(\mathbf{x}) < l$ está acotada*
- *$\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x}) \leq 0$ para todo \mathbf{x} en Ω_l*

Sea R el conjunto de todos los puntos dentro de Ω_l donde $\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x}) = 0$, y sea \mathbf{M} el conjunto invariante más grande en R . Entonces, todas las soluciones $\mathbf{x}(t)$ que se originan en Ω_l tienden a \mathbf{M} cuando $t \rightarrow \infty$.

1.4.1.3. Lema de Barbalat

Aunque el *lema de Barbalat* no es un resultado propio de la teoría de control, sino un resultado puramente matemático, éste nos permitirá concluir si un punto de equilibrio de un sistema variante en el tiempo es asintóticamente estable en el sentido de Lyapunov. Dado que un sistema adaptable es variante en el tiempo, pues los parámetros adaptables están en función de éste, el lema es útil. Entonces, si tenemos una función que tiende a un límite finito, nos queda garantizar que sus derivadas convergen a cero. La definición de este lema es enunciada a continuación.

Lema 1.1 (*Lemma de Barbalat (Slotine & Li, 1991)*). *Si la función diferenciable $f(t)$ tiene un límite finito cuando $t \rightarrow \infty$, y f es uniformemente continua, entonces $f(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.*

Revisar las derivadas de una función será útil para investigar si ésta es uniformemente continua. Una condición suficiente para mostrar continuidad uniforme de una función diferenciable es que sus derivadas estén acotadas.

1.4.2. Control adaptable

La implementación de técnicas de control tiene como objetivo llevar a un sistema a trabajar bajo las condiciones deseadas. La elección de la técnica a implementar depende de los objetivos de control y las características del sistema.

Cuando hablamos de control adaptable, nos referimos a un tipo de control que se ajusta a las características del controlador, tales como sus ganancias, durante su operación. Teniendo en cuenta lo anterior, el tipo de problemas que comúnmente estudia el control adaptable, aunque no se limita solo a estos, son sistemas en los que existen parámetros desconocidos en el modelo matemático. Además, un control adaptable puede modificar su comportamiento de acuerdo a los cambios en la dinámica del proceso y la naturaleza de las perturbaciones.

Así, un sistema adaptable será aquel con parámetros ajustables y un mecanismo que permita ajustar dichos parámetros. La Figura 1.1 ilustra un sistema adaptable.

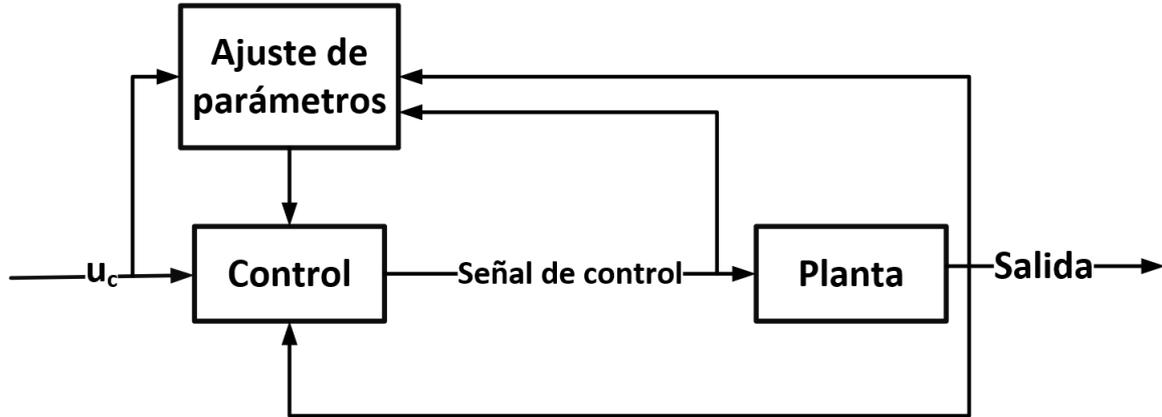


Figura 1.1: Diagrama de bloques de un sistema adaptable

1.4.2.1. Control adaptable basado en modelo de referencia (MRAC)

El control adaptable basado en modelo de referencia (MRAC) resuelve el problema de control cuando el desempeño deseado está dado por un modelo de referencia. Un diagrama de bloques de un sistema adaptable basado en modelo de referencia se muestra en la Figura 1.2. El controlador consta de un lazo de realimentación ordinario y un lazo que ajusta los parámetros de tal forma que el error, que es la diferencia entre la salida de la planta y y la salida del modelo de referencia y_m , sea pequeño.

El mecanismo de ajuste es muy importante cuando se diseña un sistema adaptable. El sistema, con su mecanismo de ajuste, deberá ser diseñado de forma que sea estable y lleve el error de seguimiento a cero.

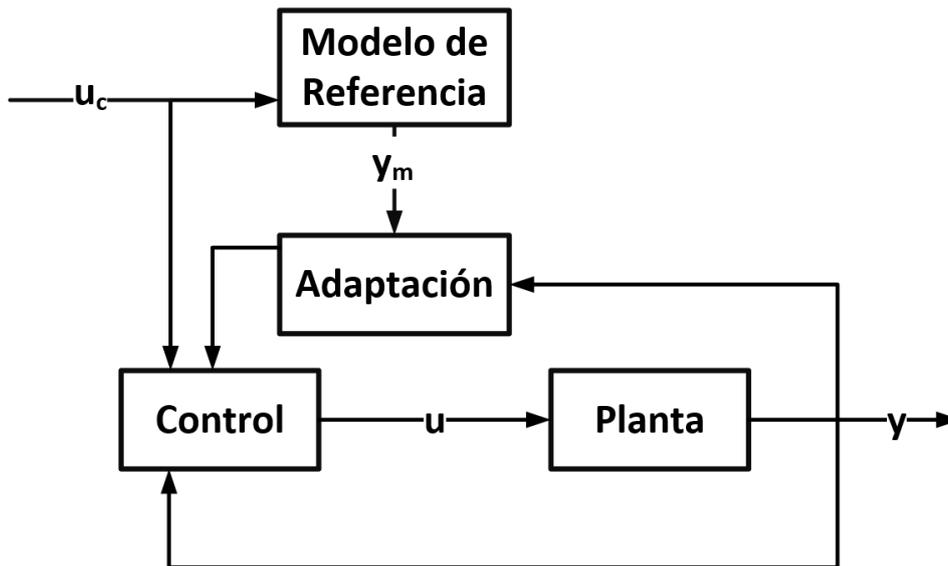


Figura 1.2: Diagrama de bloques de un sistema adaptable basado en modelo de referencia

1.4.2.2. Regla MIT

La regla MIT es el mecanismo de ajuste más usual en control adaptable basado en modelo de referencia. Su nombre se debe a que fue desarrollado en el laboratorio de instrumentación del Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT, por sus siglas en inglés).

Consideremos un sistema en lazo cerrado. En él, el controlador tiene un parámetro ajustable θ . La respuesta del sistema en lazo cerrado es dada por un modelo con salida y_m . Sea e el error entre la salida y del sistema y la salida y_m del modelo de referencia. Una forma de ajustar el parámetro θ es minimizando la función costo

$$J(\theta) = \frac{1}{2}e^2. \quad (1.2)$$

Para hacer J pequeño, podemos cambiar el parámetro θ en sentido negativo del gradiente de J . Esto es,

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \frac{\partial J}{\partial \theta} = -\gamma e \frac{\partial e}{\partial \theta}. \quad (1.3)$$

La expresión (1.3) es conocida como la regla MIT. La derivada parcial $\partial e / \partial \theta$, que se llama *derivada de sensibilidad del sistema*, indica como es que el error está influenciado por el parámetro ajustable θ . Si asumimos que el cambio del parámetro θ es lento en comparación con el cambio de las otras variables del sistema, entonces la derivada $\partial e / \partial \theta$ se puede evaluar asumiendo que θ es constante.

1.4.2.3. Reguladores universales

A pesar de que el objetivo del MRAC no es la convergencia de los parámetros a sus valores reales, un regulador universal realiza una búsqueda exhaustiva dentro del conjunto de posibles ganancias del controlador tal que eventualmente encontrará las ganancias que estabilicen al sistema. Un

controlador es un regulador universal para una clase de plantas dadas si, cuando está conectado a cualquier planta de la misma clase, garantiza que:

- Todas las señales en el sistema de lazo cerrado permanecen acotadas.
- Los estados de la planta convergen a 0 cuando $t \rightarrow \infty$

bajo condiciones iniciales arbitrarias.

Considere el sistema escalar (K. J. Åström & Wittenmark, 2013)

$$\dot{y} = ay + bu , \quad (1.4)$$

parametrizado por a y b , donde a es completamente desconocida y $b \neq 0$.

- Caso $b > 0$

Primero, consideramos el caso más simple donde la señal de la ganancia de control b es conocida, y positiva. Se propone el siguiente controlador:

$$\dot{k} = y^2 , \quad (1.5)$$

$$u = -ky .$$

Esta notación permite ver con facilidad que no estamos estimando los parámetros a y b . Sólo estamos buscando el espacio de ganancias del controlador para un control adecuado. La ecuación diferencial para k es la ley de ajuste o sintonizador.

Planta en lazo cerrado:

$$\dot{y} = (a - bk)y .$$

Función candidata de Lyapunov:

$$V := \frac{y^2}{2} .$$

La derivada de V queda de la siguiente forma:

$$\dot{V} = (a - bk)y^2 = (a - bk)\dot{k} .$$

Integrando \dot{V} :

$$\frac{y^2(t)}{2} = ak(t) - \frac{bk^2(t)}{2} + C , \quad (1.6)$$

donde C es una constante determinada por las condiciones iniciales.

Conocemos de la ley de ajuste (1.5) que k es monótonamente no decreciente. Por lo que tendría que aproximarse a una cota o crecer sin acotar. Pero si fuese no acotada, entonces el lado derecho de (1.6) sería negativo, mientras que el lado izquierdo no puede ser negativo. Por lo tanto k está acotada, lo que implica que y también esté acotada.

Si y está acotada, implica que \dot{y} también está acotada. Por el lema de Barbalat, $y(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Por lo tanto, el controlador anterior es un regulador universal para los sistemas definidos como (1.4) para toda $a \in \mathbb{R}$ y $b > 0$.

- Caso general

Ahora, regresemos al caso general donde la señal de b en (1.4) puede ser arbitraria, pero diferente de cero. Parece que esta incertidumbre adicional hace que el problema de diseño de un regulador universal sea significativamente más compleja.

Considere un controlador de la forma (K. J. Åström & Wittenmark, 2013)

$$\dot{z} = f(z, y) ,$$

$$u = h(z, y) ,$$

donde $z \in \mathbb{R}$ y f y h son funciones racionales continuas. El sistema en lazo cerrado queda de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{y} &= ay + bh(z, y) , \\ \dot{z} &= f(z, y) . \end{aligned} \tag{1.7}$$

Primero, mostramos que f no puede ser cero. Si fuese cero, entonces el valor de z sería constante ($z \equiv z_0$), y la planta sería

$$\dot{y} = ay + bh(z_0, y)$$

(el controlador sería estático). Primero supongamos que $h(z_0, y) \neq 0 \forall y > 0$. Entonces se mantiene la misma señal. Asumimos que $h(z_0, y) > 0 \forall y > 0$ (el otro caso es completamente análogo). Elegimos, por ejemplo,

$$a = 1 \quad \text{y} \quad b = 1 ,$$

tenemos,

$$\dot{y} = y + h(z_0, y) \quad \forall y > 0 .$$

Esto significa que para una condición inicial positiva, el valor de y sólo puede incrementar. Esto implica que y no tiende a cero.

Ahora supongamos que $h(z_0, y_0) = 0$ para alguna $y_0 > 0$. Se toma, por ejemplo,

$$a = 0 \quad \text{y} \quad b = \text{valor arbitrario} .$$

Así, se obtiene

$$\dot{y} = bh(z_0, y) ,$$

para lo cual $y = y_0$ es un equilibrio. Nuevamente, y no puede converger a 0 para cualquier condición inicial.

Por lo tanto, debe existir una z_0 para la cual $f(z_0, y)$ es una función no nula de y . Debido que es racional, tiene un número finito de ceros. De ahí, que existe una $y_0 > 0$ tal que $f(z_0, y)$ tiene la misma señal para toda $y \geq y_0$. Asumimos que esta señal es positiva:

$$f(z_0, y) > 0 \quad \forall y \geq y_0 . \tag{1.8}$$

Ahora consideremos $h(z, y_0)$ como una función de z . También es racional, por lo que existe una $z_1 \geq z_0$ tal que $h(z, y_0)$ tiene la misma señal para toda $z \geq z_1$. De nuevo, asumimos que esta señal es positiva.

Por continuidad, $h(z, y_0)$ esta acotada desde abajo por $z \geq z_0$.

Ahora, tomamos $a > 0$, y luego $b > 0$ lo suficiente pequeño para que

$$ay_0 + bh(z, y_0) > 0 \quad \forall z \geq z_0 . \quad (1.9)$$

Observando la planta (1.7), y las desigualdades (1.8) y (1.9), vemos que las soluciones no pueden dejar la región

$$\{(y, z) : y \geq y_0, z \geq z_0\} ,$$

porque en cualquier lugar del límite de esta región, se dirigen hacia adentro. En otras palabras, es una región invariante para el sistema de lazo cerrado.

Por lo tanto, la convergencia de y hacia 0 desde una condición inicial dentro de la región no se alcanza.

1.4.3. Cálculo fraccionario

En una de sus cartas, Leibniz (1695) utilizó la notación $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$ para la derivada n -ésima de una función. Esto llamó la atención de L'Hôpital, quien escribió una carta cuestionando a Leibniz qué ocurriría si $n = \frac{1}{2}$. Este es el origen del cálculo fraccionario. De ahí que el cálculo fraccionario busca extender las definiciones de los operadores derivada e integral a los casos en que el orden de derivación o integración no es entero, sino cualquier número real o complejo.

Existen distintas definiciones para las derivadas e integrales de orden fraccionario. Todas ellas son generalizaciones de las definiciones habituales de los operadores derivada e integral, que las incluyen como un caso particular. A continuación se abordarán la definición de algunas funciones especiales que resultan clave. Posteriormente se hablará de algunas definiciones de los operadores fraccionarios más extendidos.

1.4.3.1. Funciones especiales

Es importante definir las funciones más importantes y usadas en cálculo fraccionario. A continuación se presentan algunas de las funciones más importantes en la teoría del cálculo fraccionario.

- Función *Gamma*

La función *Gamma* es una generalización del factorial (cuando n es un entero) en la forma

$$\Gamma(n) = (n - 1)! , \quad (1.10)$$

y se define como

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt . \quad (1.11)$$

- Función *Mittag - Leffler*

Si la función *Gamma* es una generalización del factorial, la función *Mittag - Leffler* es una generalización de la función exponencial. Esta función depende de un parámetro α y está definida como:

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} . \quad (1.12)$$

La función de dos parámetros depende de α y β , y está definida como:

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} ; \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} , \quad \Re(\alpha) > 0 , \quad \Re(\beta) > 0 . \quad (1.13)$$

Lo que implica que (1.13) es una generalización de (1.12). Sin embargo, ambas funciones ($E_{\alpha}(z)$ y $E_{\alpha, \beta}(z)$) son llamadas funciones *Mittag - Leffler* de uno y dos parámetros, respectivamente.

La función *Mittag - Leffler* cumple con las siguientes propiedades:

$$E_{\alpha, \beta}(z) = zE_{\alpha, \alpha+\beta}(z) + \frac{1}{\Gamma(\beta)} , \quad (1.14)$$

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \beta E_{\alpha, \beta+1}(z) + \alpha z \frac{d}{dz} E_{\alpha, \beta+1} , \quad (1.15)$$

$$\left(\frac{d}{dz} \right)^m \left[z^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}(z^{\alpha}) \right] = z^{\beta-m-1} E_{\alpha, \beta-m}(z^{\alpha}) , \quad \Re(\beta - m) > 0 , \quad m = 0, 1, \dots . \quad (1.16)$$

1.4.3.2. Operadores fraccionarios

Los operadores fraccionarios son generalizaciones de los operadores habituales. En la literatura, es común encontrar una variedad de propuestas de estos operadores, ya que no hay un consenso. A continuación, se mostrarán algunas de las definiciones más extendidas.

- Integral fraccionaria de Riemann-Liouville

Este enfoque simplifica el cálculo de la integral n -ésima de una función f haciendo uso de la *Fórmula de Cauchy de la Integral Múltiple*,

$${}_a I_t^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau ; \quad n \in \mathbb{N} . \quad (1.17)$$

Dado que la función gamma (1.11) es una generalización del factorial (1.10), podemos definirla para valores de n no enteros como sigue.

Definición 1.4 (Petráš, 2011). Sea $f \in L_1(a, t)$ ($-\infty < a < t < \infty$). La integral fraccionaria de Riemann - Liouville de orden $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\Re(\alpha) > 0$) de f se define por

$${}_a I_t^{\alpha} f(t) \equiv {}_a D_t^{-\alpha} f(t) := \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1}} d\tau ; \quad \alpha, a \in \mathbb{R}, \quad \alpha > 0 . \quad (1.18)$$

Así, el operador integro-diferencial continuo ${}_a D_t^\alpha$ se define como

$${}_a D_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}, & \alpha > 0, \\ 1, & \alpha = 0, \\ \int_a^t (d\tau)^\alpha, & \alpha < 0. \end{cases} \quad (1.19)$$

donde a y t son los límites en donde la operación está definida y $\alpha \in \mathbb{R}$ es el orden de la operación.

- Derivada fraccionaria de Riemann-Liouville

A partir de la *integral fraccionaria de Riemann-Liouville* (1.18), podemos definir la *derivada fraccionaria de Riemann-Liouville* como sigue.

Definición 1.5 (Petráš, 2011). Sea $f \in L_1(a, t)$ ($-\infty < a < t < \infty$). La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de orden $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\Re(\alpha) \geq 0$) de f se define por

$${}_a D_t^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha - n + 1}} d\tau; \quad \alpha, a \in \mathbb{R}, \quad \alpha > 0, \quad (1.20)$$

para $(n - 1 < \alpha < n)$, donde a y t son los límites de la operación.

Siendo $f(t)$ una función causal de t , que es $f(t) = 0$ para $t < 0$, y considerando el caso $0 < \alpha < 1$, la integral fraccionaria de Riemann-Liouville está definida como

$${}_0 D_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t - \tau)^{1 - \alpha}} d\tau \quad \text{para } 0 < \alpha < 1, \quad t > 0, \quad (1.21)$$

y la expresión para la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville es

$${}_0 D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha - n + 1}} d\tau. \quad (1.22)$$

- Derivada fraccionaria de Grünwald-Letnikov

El enfoque de Grünwald-Letnikov toma como punto de partida la derivada. La fórmula para la derivada n -ésima de f (Petráš, 2011) está dada por

$$\frac{d^n}{dt^n} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} f(t - jh). \quad (1.23)$$

Esta fórmula puede ser generalizada para valores no enteros de n , tomando en cuenta que para $\alpha > 0$ se tiene

$$\binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha!}{j!(\alpha - j)! \Gamma(j + 1) \Gamma(\alpha - j + 1)}. \quad (1.24)$$

Entonces, considerando una serie infinita obtenemos

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} f(t) \approx \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t - jh) .$$

Dado un h determinado, los términos de la serie para valores de j superiores a $\lceil \frac{t-a}{h} \rceil$ no tiene sentido. Esto debido a que, para ese caso, $f(t)$ tomaría valores fuera del intervalo $[a, t]$ en donde está definida la operación. Entonces la derivada fraccionaria se puede definir como sigue.

Definición 1.6 (Petráš, 2011). Sea f una función acotada en $[a, t]$ ($-\infty < a < b < \infty$). La derivada fraccionaria de Grünwald-Letnikov de orden $\alpha \in \mathbb{R}$ ($\alpha > 0$) de f se define, si existe, por

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \binom{\alpha}{j} f(t - jh) , \quad (1.25)$$

donde $\lceil \frac{t-a}{h} \rceil$ es la parte entera de $\frac{t-a}{h}$, a y t son los límites de la operación.

Con ello, es necesario decir que la derivada fraccionaria de Grünwald-Letnikov sólo está definida para órdenes de derivación reales.

En este punto, es importante mencionar que los operadores diferenciales de Riemann-Liouville y Grünwald-Letnikov regresan los mismos resultados bajo los mismos límites inferiores a y órdenes de integración reales con $\alpha > 0$. Sin embargo, para la solución de problemas con ecuaciones diferenciales de orden fraccionario es muy socorrida la definición de Riemann-Liouville. Mientras que, para soluciones numéricas, se suele utilizar la definición de Grünwald-Letnikov, que resulta muy apropiada para realizar cálculos numéricos iterativos.

- Derivada fraccionaria de Caputo

La definición de la derivada de Riemann-Liouville fue fundamental en el desarrollo teórico del cálculo fraccionario. En aplicaciones de naturaleza estrictamente matemática es la definición más utilizada. Sin embargo, al tratar modelos matemáticos de sistemas físicos de orden fraccionario surgió el problema de las condiciones iniciales, también de orden fraccionario. Estas condiciones iniciales no tienen una interpretación física.

El operador diferencial fraccionario de Caputo, a diferencia del de Riemann-Liouville, considera como condiciones iniciales derivadas de orden entero, que son condiciones iniciales con interpretación física.

Dicho lo anterior, en este enfoque, se define la derivada como sigue.

Definición 1.7 (Petráš, 2011). Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\Re(\alpha) \geq 0$) y $f \in AC^n[a, t]$ ($-\infty < a < t < \infty$), con $n = \lceil \Re(\alpha) \rceil + 1$. La derivada fraccionaria de Caputo de orden α de f se define por

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha - n + 1}} d\tau, \quad n - 1 < \alpha < n . \quad (1.26)$$

Bajo ciertas condiciones, el operador derivada fraccionaria de Caputo y el de Riemann-Liouville son equivalentes. Denotemos la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville por ${}^{RL}{}_a D_t^\alpha f(t)$ y la

derivada fraccionaria de Caputo por ${}^C_a D_t^\alpha f(t)$. La siguiente expresión nos ofrece una relación entre estos dos operadores.

$${}^{RL}_a D_t^\alpha f(t) = {}^C_a D_t^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(a), \quad (1.27)$$

para $f^{(k)}(a) = 0$, ($k = 0, 1, \dots, n-1$)

Las condiciones iniciales para la ecuación diferencial de orden fraccionario con la derivada de Caputo son en la misma forma que en el caso de ecuaciones diferenciales de orden entero. Hecho que representa una ventaja para las aplicaciones en sistemas físicos, pues las condiciones iniciales tiene una interpretación física bien conocida.

1.4.4. Ecuaciones diferenciales fraccionarias

Una vez revisados algunos conceptos básicos del cálculo fraccionario, es natural avanzar al concepto de ecuación diferencial de orden fraccionario. Se conoce como ecuación diferencial fraccionaria, o de orden fraccionario (EDF, de ahora en adelante), a toda relación que involucre uno o más operadores fraccionarios aplicados a una función f . Cabe mencionar que gran parte de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias tiene mucha similitud con el caso fraccionario. Por ejemplo, se sabe que una EDF de orden α necesita $[\mathbb{R}(\alpha) + 1]$ condiciones iniciales para ser resuelta de forma particular. Pero, también existen diferencias. Una de ellas es el hecho de que una misma EDF tendrá diferentes significados dependiendo de si los operadores fraccionarios implicados sean de Riemann-Liouville, Caputo o algún otro.

El método de la transformada de Laplace es una herramienta muy útil para la solución de problemas en ingeniería. Por ello recurriremos a ella en la resolución de ecuaciones diferenciales fraccionarias a lo largo de esta tesis.

1.4.4.1. Aspectos básicos de la transformada de Laplace

La función $F(s)$ de la variable compleja s definida por

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t); s\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt, \quad (1.28)$$

se conoce como *transformada de Laplace* de la función $f(t)$. Para la existencia de la integral (1.28), la función $f(t)$ debe de ser de orden α por lo que existen constantes positivas M y T tal que

$$e^{-\alpha t} |f(t)| \leq M \quad \forall t > T.$$

En otras palabras, la función $f(t)$ no debe crecer más rápido que una función exponencial cuando $t \rightarrow \infty$.

La función original $f(t)$ puede ser obtenida a partir de su transformada de Laplace $F(s)$ con ayuda de la transformada inversa de Laplace

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s); t\} = \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{st} F(s) ds, \quad c = \text{Re}(s) > c_0. \quad (1.29)$$

En algunos casos, la evaluación de la transformada inversa de Laplace usando la fórmula (1.29) resulta complicado. Sin embargo, algunas veces nos da información de utilidad sobre la función original $f(t)$ que estamos estudiando.

La transformada de Laplace de la convolución

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau, \quad (1.30)$$

de dos funciones $f(t)$ y $g(t)$, que es igual a cero para $t < 0$, es igual al producto de las transformadas de Laplace de las funciones:

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t); s\} = F(s)G(s), \quad (1.31)$$

bajo la suposición de que las dos, $F(s)$ y $G(s)$, existen.

A partir de la definición (1.28), integrando por partes, bajo la suposición de que las integrales existen, podemos obtener la siguiente fórmula de la transformada de Laplace para la derivada de orden entero n de una función $f(t)$:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t); s\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0). \quad (1.32)$$

En adelante, para la transformada de Laplace de derivadas e integrales fraccionarias, consideraremos los límites inferiores igual a 0.

1.4.4.2. Transformada de Laplace de integrales fraccionarias

La integral fraccionaria de Riemann-Liouville de orden $p > 0$ definida por (1.21), se puede escribir como la convolución de las funciones $g(t) = t^{p-1}$ y $f(t)$:

$${}_0D_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t (t - \tau)^{p-1} f(\tau) d\tau = t^{p-1} * f(t). \quad (1.33)$$

La transformada de Laplace de la función t^{p-1} es

$$G(s) = \mathcal{L}\{t^{p-1}; s\} = \Gamma(p)s^{-p}. \quad (1.34)$$

Así, usando la fórmula para la transformada de Laplace de una convolución (1.31) se obtiene la transformada de Laplace de las integrales fraccionarias de Riemann-Liouville y de Grünwald-Letnikov:

$$\mathcal{L}\{{}_0D_t^{-p} f(t); s\} = s^{-p} F(s). \quad (1.35)$$

1.4.4.3. Transformada de Laplace de derivadas fraccionarias

Ahora revisemos la transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, que, por comodidad, escribiremos en la forma

$${}_0D_t^p f(t) = g^{(n)}(t), \quad (1.36)$$

$$g(t) = {}_0D_t^{-(n-p)} f(t) \frac{1}{\Gamma(k-p)} \int_0^t (t-\tau)^{n-p-1} f(\tau) d\tau, \quad (n-1) \leq p < n. \quad (1.37)$$

Haciendo uso de la fórmula para la transformada de Laplace de una derivada de orden entero (1.32) se obtiene:

$$\mathcal{L}\{{}_0D_t^p f(t); s\} = s^n G(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k g^{(n-k-1)}(0). \quad (1.38)$$

La transformada de Laplace de la función $g(t)$ está dada por (1.35)

$$G(s) = s^{-(n-p)} F(s). \quad (1.39)$$

Además, de la definición de la derivada de Riemann-Liouville (1.22) se tiene

$$g^{(n-k-1)}(t) = \frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}} {}_0D_t^{-(n-p)} f(t) = {}_0D_t^{p-k-1} f(t). \quad (1.40)$$

Sustituyendo (1.39) y (1.40) en (1.38) se obtiene la siguiente expresión para la transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de orden $p > 0$:

$$\mathcal{L}\{{}_0D_t^p f(t); s\} = s^p F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[{}_0D_t^{p-k-1} f(t) \right]_{t=0}, \quad (n-1) \leq p < n. \quad (1.41)$$

Ahora, veamos el caso de la derivada fraccionaria de Caputo (1.26). La fórmula para la transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de Caputo tiene la forma

$$\int_0^\infty e^{-st} {}_0D_t^\alpha f(t) dt = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), \quad (n-1) \leq \alpha < n. \quad (1.42)$$

Para condiciones iniciales cero, la transformada de Laplace de derivadas fraccionarias de orden r (de Grünwald-Letnikov, de Riemann-Liouville y de Caputo) se reduce a:

$$\mathcal{L}\{{}_0D_t^r f(t); s\} = s^r F(s) \quad (1.43)$$

Ahora, comparando (1.41) y (1.42), es claro que la transformada de Laplace para la derivada fraccionaria de Caputo incluye las condiciones iniciales (físicamente interpretables) para $t = 0$. Mientras que, la transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville no incluye estas condiciones iniciales en derivadas de orden entero.

1.4.5. Representación de un sistema de orden fraccionario

Un sistema lineal invariante en el tiempo de orden fraccionario puede ser descrito por una ecuación diferencial lineal de orden fraccionario (Patil, Vyawahare, & Bhole, 2014) de la forma

$$\begin{aligned} a_n D^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} D^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_0 D^{\alpha_0} y(t) = \\ b_m D^{\beta_m} u(t) + b_{m-1} D^{\beta_{m-1}} u(t) + \dots + b_0 D^{\beta_0} u(t) , \end{aligned} \quad (1.44)$$

donde $a_k, (k = 0, \dots, n), b_k, (k = 0, \dots, m)$ son constantes, y $\alpha_k, (k = 0, \dots, n), \beta_k, (k = 0, \dots, m)$ son reales arbitrarios o números racionales, los cuales pueden ser elegidos tal que $\alpha_n > \alpha_{n-1} > \dots > \alpha_0$, y $\beta_m > \beta_{m-1} > \dots > \beta_0$. La ecuación diferencial lineal de orden fraccionario dada en la ecuación (1.44) es representada en la forma

$$H(s) = \frac{b_m s^{\beta_m} + \dots + b_1 s^{\beta_1} + b_0 s^{\beta_0}}{a_n s^{\alpha_n} + \dots + a_1 s^{\alpha_1} + a_0 s^{\alpha_0}} = \frac{Q(s^{\beta_k})}{P(s^{\alpha_k})} .$$

La ecuación (1.44) tiene dos casos particulares, de donde surgen dos tipos de sistemas: los sistemas de orden conmensurable y los sistemas de orden racional. A nosotros nos interesan los sistemas de orden conmensurable. A continuación se muestra la definición de este tipo de sistemas.

Definición 1.8 (B. M. Vinagre & Monje, 2006) *Un sistema es de orden conmensurable si queda descrito por una ecuación diferencial donde todos los órdenes de derivación son múltiplos enteros de un orden base, α . Es decir, sistemas para los que se cumple que*

$$\alpha_k, \beta_k = k\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}.$$

La ecuación anterior, asumiendo que se trata de un sistema de orden conmensurable, se puede representar en la forma

$$H(s) = \frac{b_m s^{m\alpha} + \dots + b_1 s^{\alpha} + b_0}{a_n s^{n\alpha} + \dots + a_1 s^{\alpha} + a_0}, \text{ con } \alpha < 1 .$$

1.4.6. Solución numérica de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario

La solución analítica de una ecuación diferencial fraccionaria es de gran complejidad. Si pensamos en la solución numérica, hay que considerar un factor adicional: la solución numérica de una ecuación diferencial de orden fraccionario es un proceso recursivo que, de acuerdo con la teoría, necesita un espacio de almacenamiento infinito. Algunas de las aproximaciones más utilizadas se basan en lo que se conoce como principio de memoria corta (Podlubny, 1998). Son conocidas algunas aproximaciones de los operadores fraccionarios en tiempo discreto y continuo. Una recopilación de dichas aproximaciones es mostrada en (B. Vinagre, Podlubny, Hernandez, & Feliu, 2000).

Para ejecutar las simulaciones y los experimentos de esta tesis, será utilizado un conjunto de herramientas contenidas en el paquete *Fractional Variable Order Derivative Simulink Toolkit*, desarrollado en la Universidad Tecnológica de Varsovia. La descripción de esta herramienta, basada en la definición del operador fraccionario de Grünwald-Letnikov, se encuentra en el manual de usuario (Sierociuk, 2014). El desarrollador considera dos parámetros para la implementación de

los bloques en Simulink®. Uno de ellos es el tiempo de muestreo T_s , el cual define el número de muestras por unidad de tiempo durante la simulación. Además, es necesario especificar el valor del parámetro que el desarrollador nombra $Nbuf$. Éste indica el tamaño del conjunto de datos almacenados durante la simulación. Debido a que, en teoría, el cálculo de una derivada de orden fraccionario es un proceso de memoria infinito, el resultado numérico arrojado por el bloque se verá mejorado mientras más grande sea el valor del parámetro $Nbuf$. Es por ello que una de las recomendaciones contenida en el manual del usuario es que el parámetro $Nbuf$ sea igual al resultado de dividir el tiempo de ejecución entre el tiempo de muestreo.

Tomando la definición de la función rampa

$$r(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ t, & t \geq 0, \end{cases}$$

definimos la siguiente función:

$$y(t) = r(t) - r(t - 3) - r(t - 7) + r(t - 10). \quad (1.45)$$

Utilizando la definición de la *derivada fraccionaria de Caputo* (1.26) calculamos la derivada analítica de la función (1.45) empleando diferentes valores en el orden de derivación. A continuación, mostramos el resultado de la derivada analítica para un orden de derivación $\alpha = 1/2$:

$$\frac{d^{1/2}y(t)}{dt^{1/2}} = (0.56419) \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 2\sqrt{t}, & 0 < t \leq 3, \\ -2(\sqrt{-3+t} - \sqrt{t}), & 3 < t \leq 7, \\ -2(\sqrt{-7+t} + \sqrt{-3+t} - \sqrt{t}), & 7 < t \leq 10, \\ 2(\sqrt{-10+t} - \sqrt{-7+t} - \sqrt{-3+t} + \sqrt{t}), & t > 10, \end{cases}$$

La Figura 1.3 muestra la función (1.45) y sus derivadas con diferentes ordenes de derivación. Además, en la Figura 1.4, mostramos una comparación entre la solución analítica y el resultado del método numérico con odrden de derivación $\alpha = 1/2$ y diferentes valores del parámetro $Nbuf$.

Como se puede observar en la Figura 1.4, una elección de $Nbuf$ adecuada es 1000. Sin embargo, ese valor implica mayor capacidad de cómputo. Es por ello que consideramos una aproximación suficientemente buena con $Nbuf = 500$. Con ello reducimos la exigencia de poder computacional y tenemos un resultado de simulación que permitirá llevar a cabo nuestras simulaciones y experimentos más adelante.

En la Figura 1.5 mostramos la solución numérica de las derivadas fraccionarias de la función (1.45) con diferentes valores en el orden de derivación y $Nbuf = 500$.

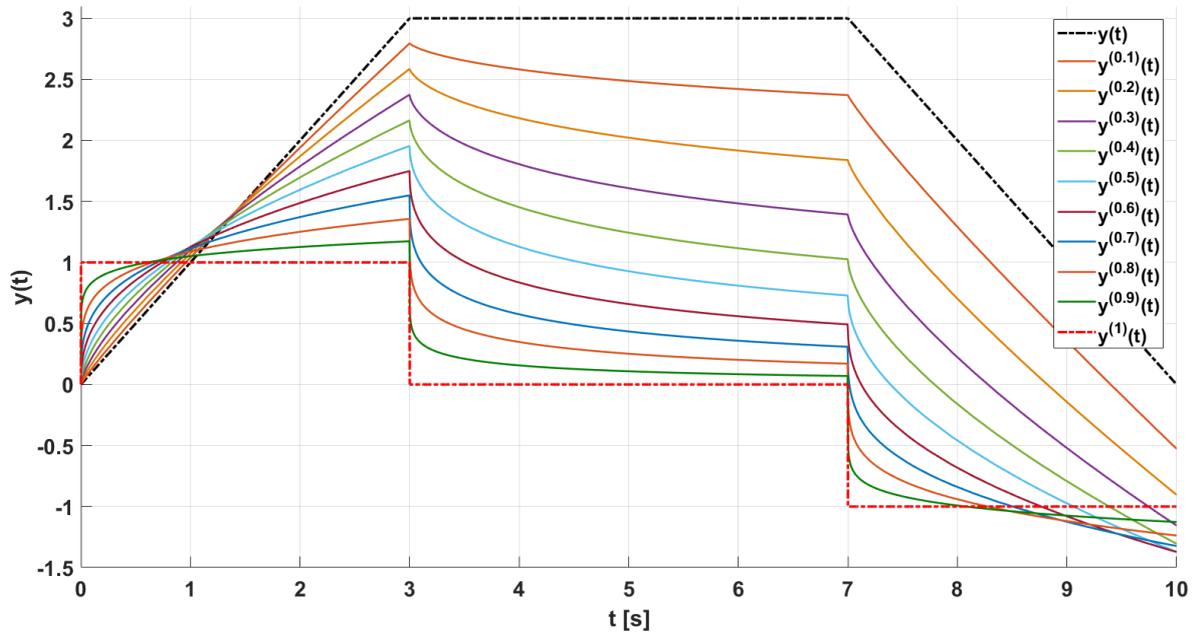


Figura 1.3: Solución analítica de la derivada de $y(t)$ con diferentes órdenes de derivación.

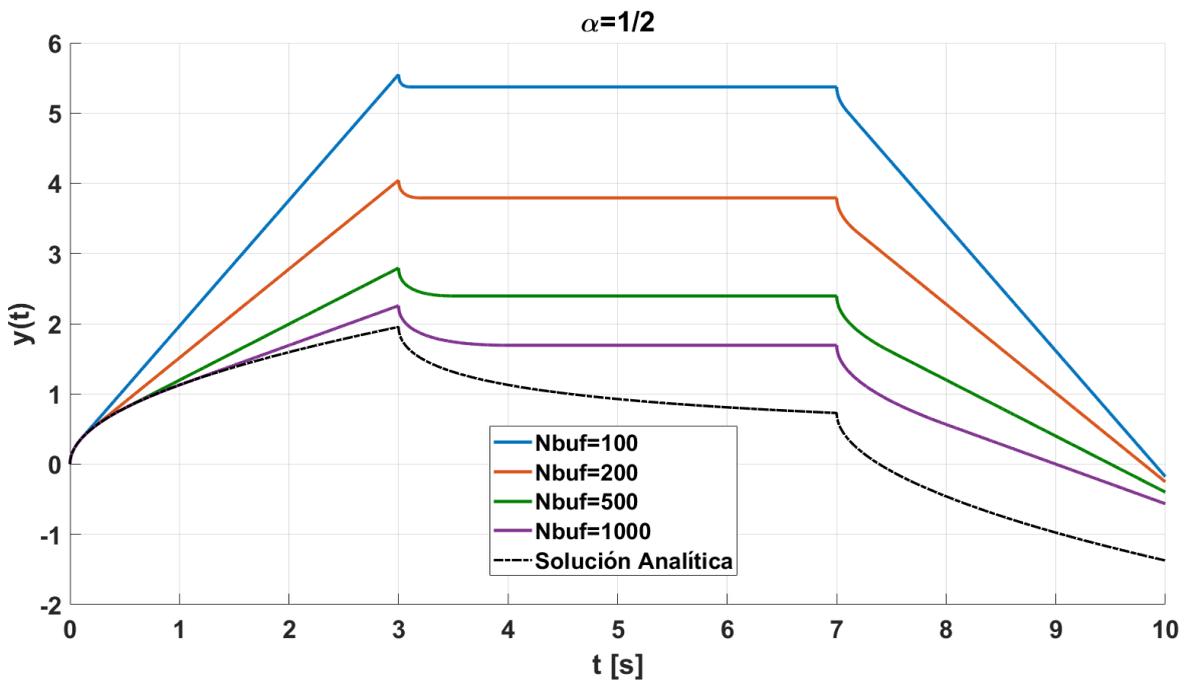


Figura 1.4: Comparación de la solución analítica y la solución numérica de la derivada fraccionaria con diferentes valores del parámetro $Nbuf$.

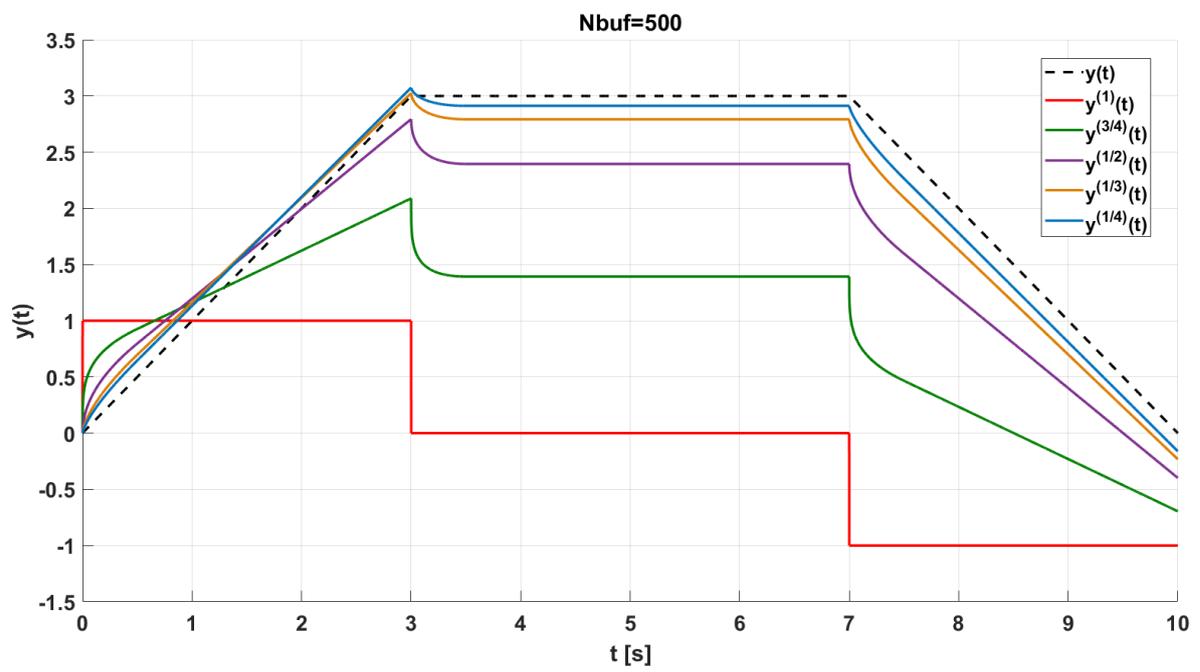


Figura 1.5: Solución numérica de la función $y(t)$ con diferentes valores α .

Capítulo 2

Descripción del problema

En este capítulo aborda la descripción de los sistemas a controlar. Hablaremos de sus características físicas, sus componentes y su modelo matemático. También, hablaremos de la técnica de control que utilizaremos, mostrando algunos aspectos teóricos. Adicionalmente, apoyándonos de simulaciones, presentamos una discusión acerca de las ventajas que podría tener el uso de un MRAC de orden fraccionario frente a uno de orden entero.

2.1. Sistemas a controlar

En esta sección se describen el funcionamiento y las partes que componen el sistema hidráulico y térmico. También, se muestra el modelo de primer orden que describe el comportamiento del sistema térmico y, en el caso del sistema hidráulico, se cuenta con un modelo de primer orden y un modelo de segundo orden.

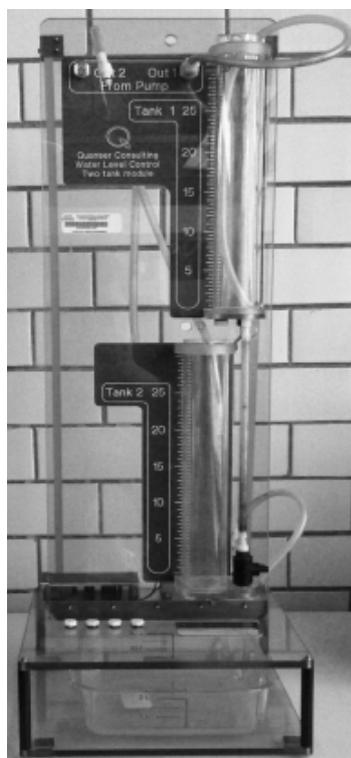
2.1.1. Sistema hidráulico

Uno de los sistemas utilizados para implementar el control adaptable fraccionario fue un sistema de tanques acoplados Quanser® que se muestra en la Figura 2.1.a.

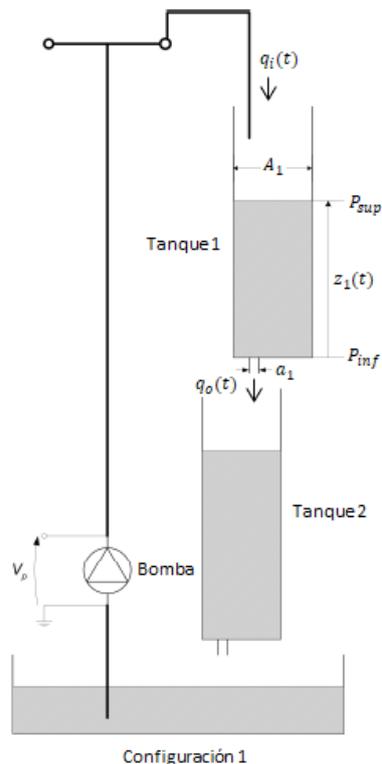
2.1.1.1. Descripción física del sistema

La planta Quanser® cuenta con dos tanques de dimensiones iguales, una bomba, mangueras de plástico que permiten realizar distintas combinaciones, dos sensores de presión, válvula de escape acoplada al tanque 1, un sistema de calibración para los sensores y un recipiente que contiene el líquido que fluye a través de las mangueras y tanques.

Cuando la bomba es accionada extrae el agua del recipiente y lo transporta al tanque 1 a través de una de las mangueras. Luego, el agua sale del tanque 1 por un orificio que está al fondo del mismo tanque y ésta cae dentro del tanque 2. Por último, el agua sale del tanque 2 a través de un orificio que está al fondo del mismo tanque y cae sobre el recipiente que la contiene.



(a)



(b)

Figura 2.1: a) Sistema de tanques acoplados Quanser®. b) Diagrama del sistema de tanques acoplados Quanser®.

■ Bomba

La bomba que incluye la planta tiene un diámetro de entrada de $0.635[cm]$ y un diámetro de salida de $0.4762[cm]$. El voltaje máximo de alimentación es de $12[V]$ y voltaje pico máximo de $22[V]$. La relación entre el voltaje de alimentación y el flujo de salida está dada por la siguiente expresión

$$q_i = 3.3 V_{\text{bomba}} [cm^3/s] .$$

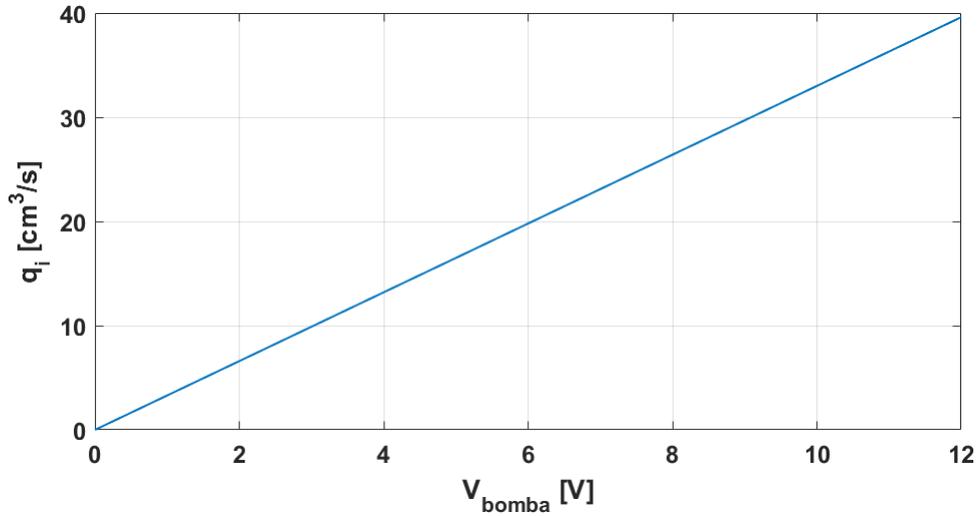
Por lo que el flujo de salida máximo es de $39.6[cm^3/s]$. En la figura (2.2) se puede observar la relación que existe entre el voltaje de alimentación de la bomba V_{bomba} y el flujo que proporciona la bomba al tanque q_i .

■ Tanques

Ambos tanques tienen $30[cm]$ de altura, $15.5179[cm^2]$ de área en la sección transversal y $4.445[cm]$ de diámetro interno.

Los orificios de salida en los tanques cuentan con un conjunto de resistencias hidráulicas que modifican el flujo de salida según el diámetro y área transversal. En la Tabla 2.1, se observan las distintas resistencias hidráulicas con las que cuenta la planta:

Durante la ejecución de los experimentos se utilizaron las resistencias hidráulicas medianas.

Figura 2.2: Relación entre q_i y V_{bomba}

Resistencia	Diámetro [cm]	Área [cm]
Orificio de salida grande	0.5556	0.2424
Orificio de salida mediano	0.4762	0.1781
Orificio de salida chico	0.3175	0.0791

Tabla 2.1: Características de las resistencias hidráulicas.

Los sensores utilizados en los tanques para calcular el nivel de líquido contenido en el tanque miden presión manométrica, dentro de un rango de $0[kpa]$ a $6.89[kpa]$. La altura máxima de cada tanque es de $30[cm]$. De acuerdo con la forma de calibración de los sensores hidráulicos indicada en el manual de usuario de la planta, la relación entre el voltaje del sensor y la altura del líquido contenido dentro del tanque está dada por (Quanser Inc, 2012a):

$$z = 6.25 V_{\text{sensor}}[cm] .$$

Por lo que el voltaje máximo entregado por el sensor es de $4.8[V]$. En la figura (2.3) se puede observar la relación que existe entre la altura del nivel del tanque z y el voltaje que entrega el sensor de presión V_{sensor} .

2.1.1.2. Modelo de primer orden

Utilizando el principio de Bernoulli para el análisis del fluido contenido en el tanque 1, la ecuación queda de la siguiente forma:

$$P_{inf} + \frac{\rho_{inf} v_{inf}^2}{2} + \rho_{inf} g z_{inf}(t) = P_{sup} + \frac{\rho_{sup} v_{sup}^2}{2} + \rho_{sup} g z_{sup}(t) .$$

Considerando que el área del orificio por el cual sale el agua del tanque 1 es menor que el área de la sección transversal del mismo tanque, $A_1 \gg a_1$, el fluido contenido en él puede considerarse en reposo. Con lo anterior $v_{sup} = 0$. Por otra parte, la presiones que existe en los extremos del tanque

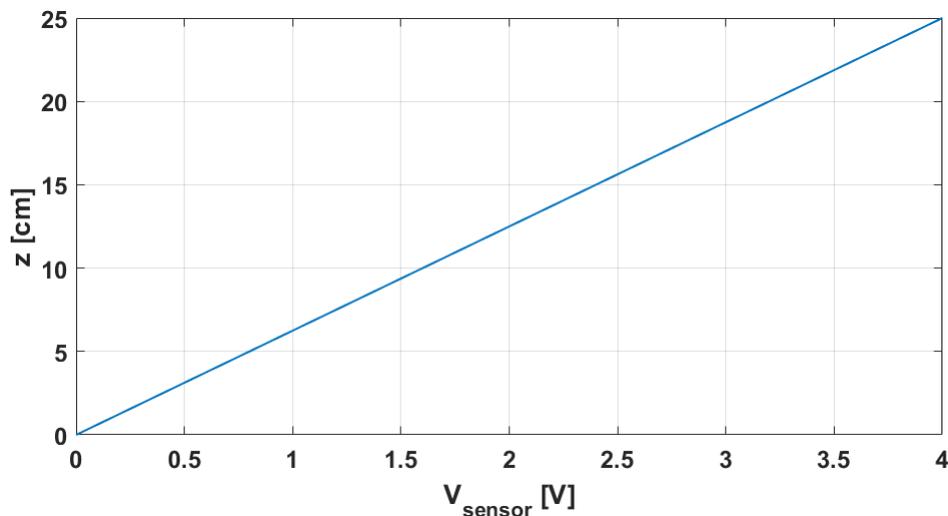


Figura 2.3: Relación entre z y V_{sensor}

son iguales por lo que $P_{inf} = P_{sup}$. Además, durante el proceso la densidad del líquido no cambia lo cual implica que $\rho_{inf} = \rho_{sup}$. De esta forma se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{\rho_{inf} v_{inf}^2}{2} + \rho_{inf} g z_{inf}(t) = \rho_{sup} g z_{sup}(t) .$$

Despejando v_{inf} de la ecuación anterior, se obtiene

$$v_{inf}(t) = \sqrt{2gz_1(t)} , \quad (2.1)$$

donde $z_1(t) = z_{sup}(t) - z_{inf}(t)$.

Utilizando la ecuación de continuidad para el flujo de salida

$$q_o(t) = a_1 v_{inf}(t) .$$

Por lo tanto

$$v_{inf}(t) = \frac{q_o(t)}{a_1} .$$

Ahora, sustituyendo la ecuación anterior en (2.1) resulta

$$q_o(t) = a_1 \sqrt{2gz_1(t)} .$$

Por otro lado, la variación del volumen del fluido en función del flujo de salida y entrada es

$$\frac{dV_1(t)}{dt} = q_i(t) - q_o(t) ,$$

y la variación del volumen del fluido en función de la variación de la altura del fluido es

$$\frac{dV_1(t)}{dt} = A_1 \frac{dz_1(t)}{dt} .$$

Igualando ambas ecuaciones

$$A_1 \frac{dz_1(t)}{dt} = q_i(t) - q_o(t) .$$

Sustituyendo $q_o(t)$ en la expresión anterior se obtiene lo siguiente:

$$A_1 \frac{dz_1(t)}{dt} = q_i(t) - a_1 \sqrt{2gz_1(t)} .$$

Por lo tanto, la ecuación anterior queda de la siguiente forma:

$$\dot{z}_1(t) = -\frac{a_1}{A_1} \sqrt{2gz_1(t)} + \frac{1}{A_1} u(t) . \quad (2.2)$$

Sin embargo, como se puede observar el sistema es un sistema no lineal por lo que es necesario linealizar alrededor de un punto, ya que la técnica de control a implementar necesita de una función de transferencia y un sistema no lineal no se puede representar mediante una función de transferencia. De la ecuación (2.2), el sistema linealizado es

$$\dot{\bar{z}}_1(t) = -\frac{a_1 g}{A_1 \sqrt{2gZ_{1eq}}} \bar{z}_1(t) + \frac{1}{A_1} \bar{u}(t) , \quad (2.3)$$

donde $\bar{z}_1 = z_1(t) - Z_{1eq}$ es la salida del sistema trasladado al punto de operación y $\bar{u}(t) = u(t) - U_{eq}$ es la entrada del sistema trasladado al punto de operación con Z_{1eq} y U_{eq} el punto de operación deseado para el sistema. Para la linealización del sistema se tomarán en cuenta las siguientes condiciones de equilibrio $Z_{1eq} = 0.1[m]$ y $U_{eq} = 2.5 \times 10^{-5}[\frac{m^3}{s}]$. Por lo tanto, el sistema linealizado queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{z}}_1(t) &= -0.0804 \bar{z}_1(t) + 644.4171 \bar{u}(t) , \\ \bar{y}(t) &= \bar{z}_1(t) . \end{aligned}$$

La función de transferencia del modelo lineal, obtenida a partir de $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$, es:

$$G(s) = \frac{644.4}{s + 0.0804} . \quad (2.4)$$

2.1.1.3. Modelo de segundo orden

Al considerar como salida del sistema la altura del segundo tanque, el sistema resultante es de segundo orden. Del análisis realizado para la obtención del modelo de primer orden, y sabiendo que la salida del tanque 1 es la entrada del tanque 2, el modelo para el sistema de segundo orden queda de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= -\frac{a_1}{A_1} \sqrt{2gz_1(t)} + \frac{1}{A_1} u(t) , \\ \dot{z}_2(t) &= \frac{a_1}{A_1} \sqrt{2gz_1(t)} - \frac{a_2}{A_2} \sqrt{2gz_2(t)} . \end{aligned} \quad (2.5)$$

De la ecuación (2.5), el sistema linealizado es

$$\dot{\bar{\mathbf{z}}}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{a_1 g}{A_1 \sqrt{2g} Z_{1eq}} & 0 \\ \frac{a_1 g}{A_1 \sqrt{2g} Z_{1eq}} & -\frac{a_2 g}{A_2 \sqrt{2g} Z_{2eq}} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{z}}(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \end{bmatrix} \bar{u}(t) ,$$

$$\bar{\mathbf{y}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{z}}(t) .$$

donde $\bar{\mathbf{z}}(\mathbf{t}) = \mathbf{z}(\mathbf{t}) - \mathbf{z}_{eq}$ es el vector de estados trasladado al punto de operación y $\bar{u}(t) = u(t) - U_{eq}$ es la entrada del sistema trasladado al punto de operación con Z_{1eq} , Z_{2eq} y U_{eq} el punto de operación deseado. Para la linealización del sistema se tomarán en cuenta las siguientes condiciones de equilibrio $Z_{1eq} = 0.1[m]$, $Z_{2eq} = 0.1[m]$ y $U_{eq} = 2.5 \times 10^{-5} [\frac{m^3}{s}]$. De esta forma el sistema linealizado es el siguiente:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \begin{bmatrix} -0.0804 & 0 \\ 0.0804 & -0.0804 \end{bmatrix} \mathbf{z}(t) + \begin{bmatrix} 644.4171 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) ,$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{z}(t) .$$

La función de transferencia del modelo lineal obtenida a partir de $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ es:

$$G(s) = \frac{51.81}{s^2 + 0.1608 s + 0.006464} . \quad (2.6)$$

2.1.2. Sistema térmico

En la figura (2.4) se muestra el calentador de flujo con el cual se controla la temperatura del aire que circula dentro de él.



Figura 2.4: Sistema térmico.

2.1.2.1. Descripción física del sistema

El experimento de flujo de calor Quanser® mostrado en la figura (2.4) cuenta con una cámara de fibra de vidrio, tres sensores de temperatura, un calentador a base de bobina y un soplador. Además, cuenta con un amplificador incorporado que entrega energía al calentador y el soplador. La energía entregada al calentador y el soplador es controlada por una señal analógica. También, tiene un tacómetro montado sobre el soplador para medir la velocidad del ventilador.

▪ Calentador

El modelo del calentador utilizado es AF20-400-120-XX10-3.1. Las dimensiones son $8 \times 8 \times 3.2$ [cm³]. El voltaje de alimentación es de 120[V] y la potencia máxima de 400[W]. La relación entre el flujo de aire y la caída de presión que genera el calentador dentro de la cámara térmica se observa en la Figura 2.5.

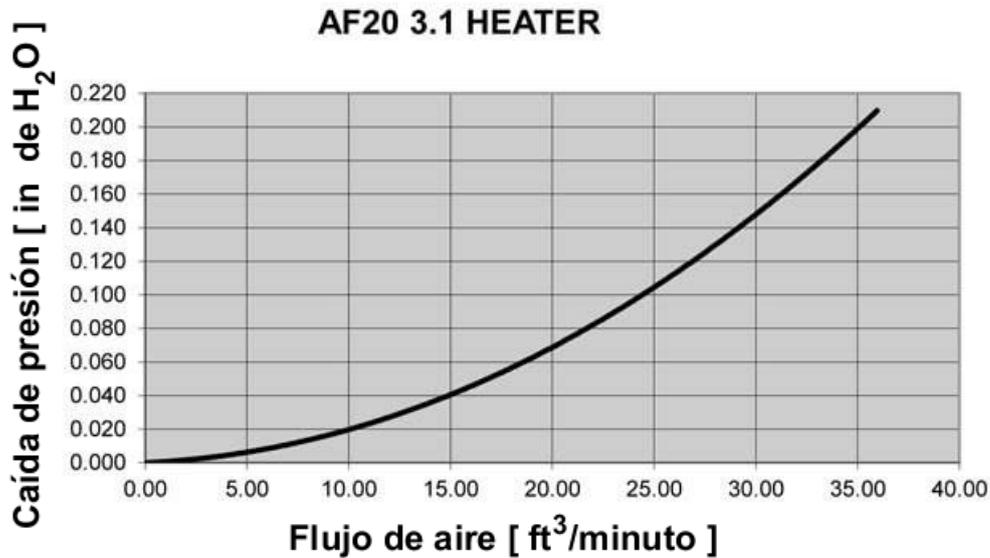


Figura 2.5: Relación entre el flujo de aire [ft³/min] y la caída de presión [pulgadas H₂O] (Quanser Inc, 2012b).

▪ Cámara térmica

Las dimensiones de la cámara térmica son $50 \times 15 \times 10$ [cm³] con sección transversal interna de 0.0064 [m²]. Dentro de ella están contenidos el soplador, el calentador y los tres sensores de temperatura. El voltaje analógico de salida de cada sensor varía de 0 – 5[V], el cual es proporcional a la temperatura de la cámara. Además, la ganancia de calibración es de 20 [°C/V]. Con ello, la expresión que representa la lectura de temperatura tomada por los sensores es

$$V_{\text{sensor}} = \frac{1}{20} T [V] .$$

Por lo que la temperatura máxima medible es de 100[°C]. En la Figura 2.6 se muestra la relación que existe entre el voltaje de salida del sensor V_{sensor} y la temperatura de la cámara T en estado estacionario.

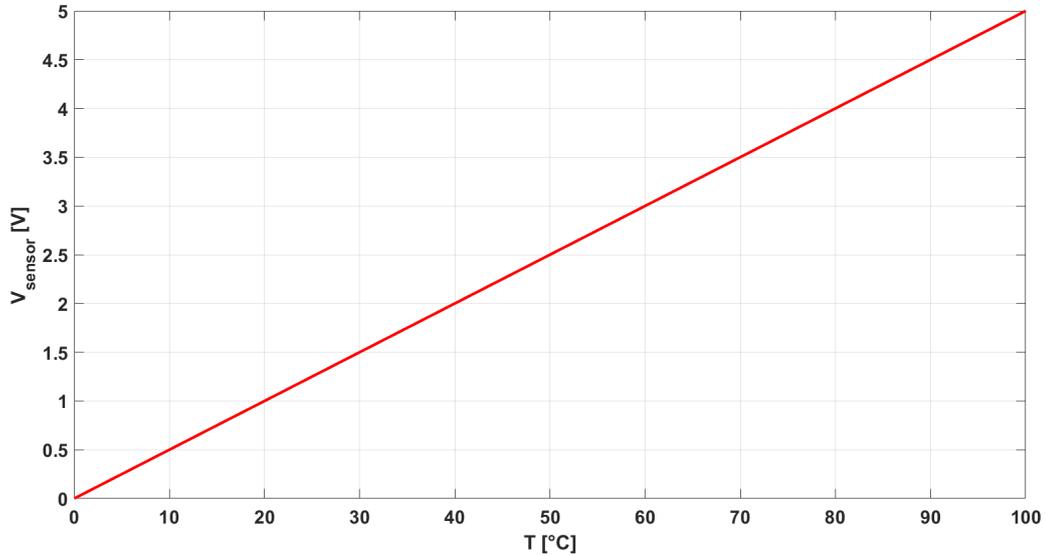


Figura 2.6: Relación entre la temperatura de la cámara y el voltaje del sensor V_{sensor} en estado estacionario.

2.1.2.2. Modelado del sistema

Considerando que el sistema térmico se puede aproximar a un sistema de primer orden (Quanser Inc, 2012b), éste se puede representar con la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{T}_s(t) + a_0 T_s(t) = b_0 V_h(t) ,$$

donde a_0 y b_0 son parámetros del sistema, T_s es la temperatura del sensor y V_h el voltaje del calentador. Aplicando la transformada de Laplace, con condición inicial nula, a la expresión anterior el sistema queda representado de la siguiente forma:

$$T_s(s)[s + a_0] = b_0 V_h(s) .$$

Por lo tanto, la función de transferencia del sistema es

$$G(s) = \frac{V_h(s)}{T_s(s)} = \frac{b_0}{s + a_0} , \quad (2.7)$$

donde, de acuerdo con el manual (Quanser Inc, 2012b), $a_0 = \frac{1}{5}$ y $b_0 = 2$.

2.2. Técnicas de control

A continuación, se presenta la teoría del control adaptable basado en modelo de referencia con adaptación de uno y dos parámetros. De igual forma, se habla acerca de la manera en la que se puede analizar la estabilidad de un sistema fraccionario a través del lugar geométrico de las raíces.

▪ **Control adaptable basado en modelo de referencia con adaptación de un parámetro**

Supongamos que no se conoce la ganancia proporcional de los sistemas 2.4, 2.6 y 2.7, entonces se pueden representar de la forma $kG(P)$ por lo que se puede considerar el sistema adaptable descrito por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} y &= kG(p)u ; \\ y_m &= k_0G_m(p)u_c ; \\ u &= \theta u_c ; \\ e &= y - y_m , \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde y es la salida del sistema a controlar, y_m es la salida del modelo de referencia, u es el control propuesto, u_c es la entrada del modelo de referencia, e es el error, $\theta = \frac{k_0}{k}$ es el parámetro adaptable y $p = \frac{d}{dt}$. El sistema adaptable descrito en (2.8) permite la adaptación de la ganancia proporcional, no importando el orden de la planta $G(p)$ lo cual es útil para el control de la planta hidráulica y térmica. Utilizando la regla MIT (1.3), la ley de adaptación resulta

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma y_m e = -\gamma y_m y + \gamma y_m^2 , \quad (2.9)$$

donde γ es la ganancia de adaptación. Con lo anterior, los elementos de diseño del controlador son: la entrada de referencia u_c y la ganancia de adaptación γ . Para ilustrar lo anterior, se propone una planta con las características mencionadas a manera de ejemplo. El resultado de simulación se presenta en la Figura 2.7.

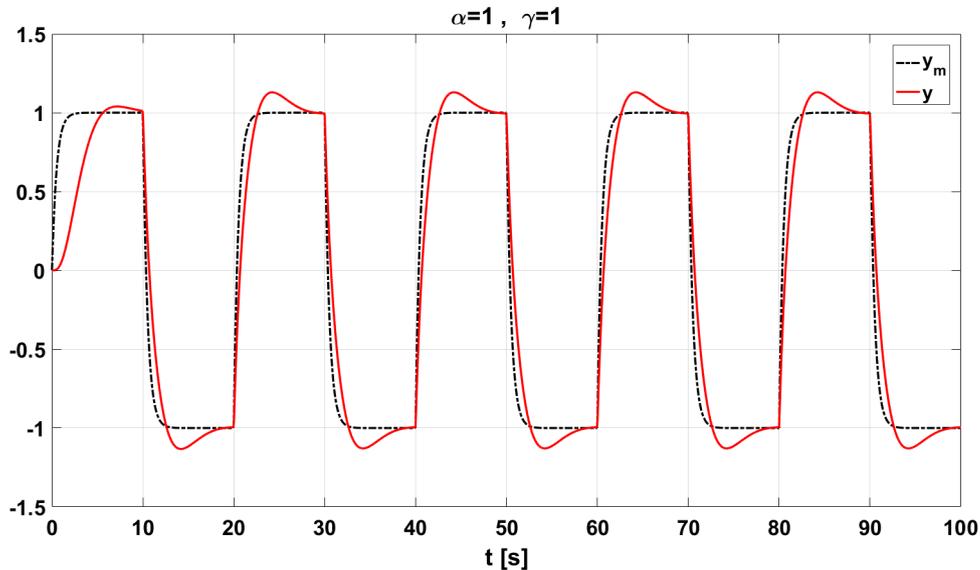


Figura 2.7: $G(p) = \frac{1}{p+1/2}$, $k = \frac{1}{2}$, $G_m(p) = \frac{1}{p+2}$, $k_0 = 2$, u_c es una señal cuadrada de amplitud 1 y $\gamma = 1$.

Sin embargo, en este punto proponemos una ley de adaptación de orden fraccionario. Es decir, adicionamos un parámetro de diseño α . Éste parámetro será el orden de la integral a resolver para

obtener θ . Así, la ley de adaptación de orden fraccionario es

$$\frac{d^\alpha \theta}{dt^\alpha} = \theta^{(\alpha)} = -\gamma y_m e = -\gamma y_m y + \gamma y_m^2, \quad (2.10)$$

donde α es el orden de la derivada del parámetro θ .

En la Figura 2.8 se muestra el resultado de la simulación del sistema adaptable mostrado en la Figura 2.7, con la salvedad de que se busca un mejor seguimiento aumentando la ganancia de adaptación $\gamma = 30$. Entonces, se trata de un gráfico comparativo entre el resultado con $\alpha = 1$ y el resultado con $\alpha = \frac{1}{2}$.

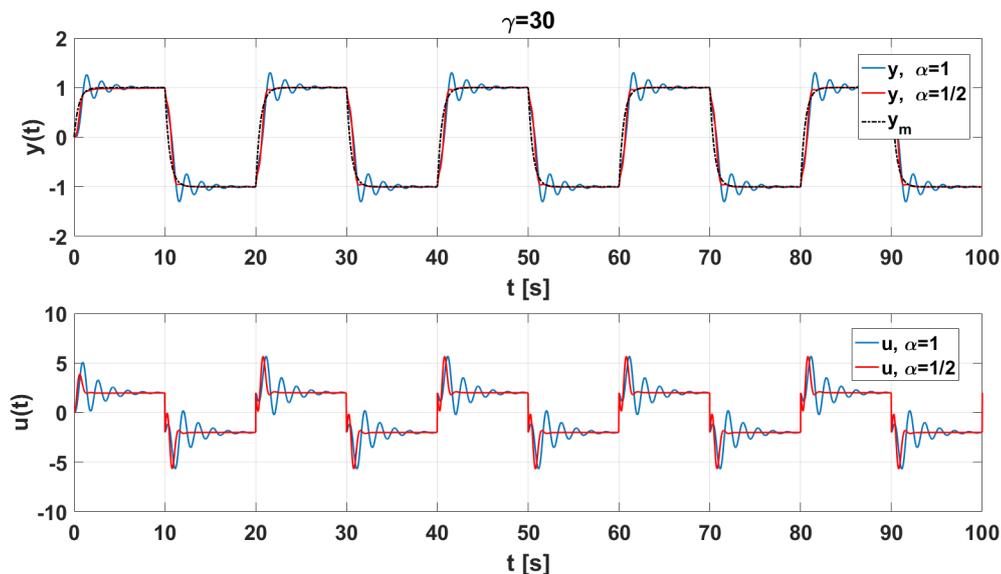


Figura 2.8: $G(p) = \frac{1}{p+\frac{1}{2}}$, $k = \frac{1}{2}$, $G_m(p) = \frac{1}{p+2}$, $k_0 = 2$, u_c es una señal cuadrada de amplitud 1 y $\gamma = 30$.

Observe que, de la Figura 2.8, la disminución en el orden de integración α nos permite incrementar la ganancia de adaptación γ considerablemente, reduciendo las oscilaciones.

- **Control adaptable basado en modelo de referencia con adaptación de dos parámetros**

Si consideramos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -ay + bu ; \\ \dot{y}_m &= -a_m + b_m u_c ; \\ u &= \theta_1 u_c - \theta_2 y ; \\ e &= y - y_m , \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde $\theta_1 = \frac{b_m}{b}$; $\theta_2 = \frac{a_m - a}{b}$, utilizando la regla MIT (1.3), las leyes de adaptación de los parámetros θ_1 y θ_2 quedan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\frac{d\theta_1}{dt} &= -\gamma \left(\frac{a_m}{p + a_m} u_c \right) e , \\ \frac{d\theta_2}{dt} &= \gamma \left(\frac{a_m}{p + a_m} y \right) e ,\end{aligned}\quad (2.12)$$

donde $p = \frac{d}{dt}$. Una comparación entre un sistema con un parámetro adaptable y uno de dos parámetros adaptables se muestra en la Figura 2.9.

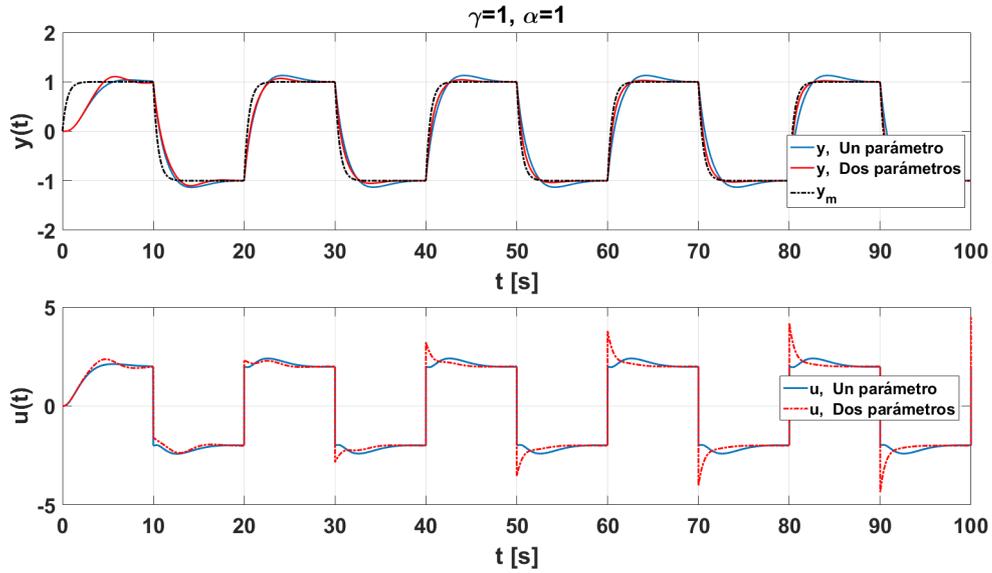


Figura 2.9: $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, $a_m = b_m = 2$ u_c es una señal cuadrada de amplitud 1, $\gamma = 1$, $\alpha = 1$.

Notablemente, el sistema con dos parámetros adaptables presenta un mejor seguimiento de la referencia, aunque crece la amplitud de la señal de control.

Una vez más, proponemos las leyes de adaptación de orden fraccionario como sigue

$$\begin{aligned}\frac{d^\alpha \theta_1}{dt^\alpha} &= -\gamma \left(\frac{a_m}{p + a_m} u_c \right) e , \\ \frac{d^\alpha \theta_2}{dt^\alpha} &= \gamma \left(\frac{a_m}{p + a_m} y \right) e ,\end{aligned}\quad (2.13)$$

donde $p = \frac{d}{dt}$ y α es el orden de la derivada de los parámetros adaptables θ_1 y θ_2 .

La Figura 2.10 ilustra el resultado de simulación de un sistema con dos parámetros adaptables. Con la finalidad de mejorar el seguimiento de la referencia, incrementamos la ganancia de adaptación $\gamma = 30$. Se trata, pues, de un gráfico comparativo entre el caso $\alpha = 1$ y el caso $\alpha = \frac{1}{2}$

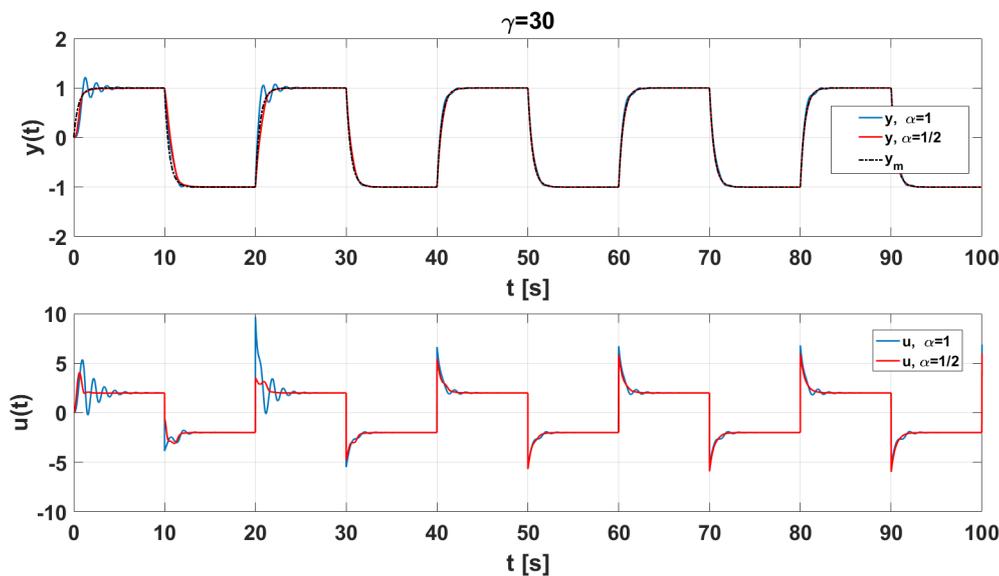


Figura 2.10: $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, $a_m = b_m = 2 u_c$ es una señal cuadrada de amplitud 1 y $\gamma = 30$.

En el caso de un sistema con dos parámetros adaptables, la disminución del orden de integración α , también mejora el desempeño. El seguimiento se logra y las oscilaciones son de amplitud muy pequeña.

- **Control adaptable basado en modelo de referencia con adaptación de tres parámetros**

Considerando el siguiente sistema

$$\begin{aligned}
 \ddot{y} &= -a\dot{y} - by + cu ; \\
 \ddot{y}_m &= -a_m\dot{y}_m - b_my_m + c_mu_c ; \\
 u &= \theta_1 u_c - \theta_2 y - \theta_3 \dot{y} ; \\
 e &= y - y_m ,
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

donde $\theta_1 = \frac{c_m}{c}$; $\theta_2 = \frac{b_m - b}{c}$; $\theta_3 = \frac{a_m - a}{c}$, y tomando el resultado de la regla MIT (1.3), las leyes de adaptación de orden fraccionario de los parámetros θ_1 , θ_2 y θ_3 son

$$\begin{aligned}
 \frac{d^\alpha \theta_1}{dt^\alpha} &= -\gamma \left(\frac{a_m}{p^2 + a_m p + b_m} u_c \right) e , \\
 \frac{d^\alpha \theta_2}{dt^\alpha} &= \gamma \left(\frac{a_m}{p^2 + a_m p + b_m} y \right) e , \\
 \frac{d^\alpha \theta_3}{dt^\alpha} &= \gamma \left(\frac{a_m}{p^2 + a_m p + b_m} \dot{y} \right) e ,
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

donde $p = \frac{d}{dt}$ y α es el orden de la derivada de los parámetros adaptables θ_1 , θ_2 y θ_3 .

2.3. Análisis de estabilidad

Si nuestra planta está dada por $G(p) = \frac{1}{p^2 + a_1 p + a_2}$, con $p = \frac{d}{dt}$, la ecuación diferencial que describe a la planta es

$$\ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_2 y(t) = u(t) . \quad (2.16)$$

Sustituyendo u de (2.8) en (2.16) se tiene

$$\ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_2 y(t) = \theta u_c . \quad (2.17)$$

Consideremos $u_c = u_c^0$ y $y_m = y_m^0$ constantes. Si ahora, derivamos en un orden de α y sustituimos $\theta^{(\alpha)}$ de (2.8) en (2.17) se obtiene la ecuación que gobierna la dinámica del sistema adaptable

$$y^{(2+\alpha)} + a_1 y^{(1+\alpha)} + a_2 y^\alpha + \gamma y_m^0 u_c^0 y = \gamma u_c^0 (y_m^0)^2 . \quad (2.18)$$

Operando la ecuación diferencial homogénea de (2.18) bajo la transformada de Laplace se obtiene la ecuación característica

$$s^{(2+\alpha)} + a_1 s^{(1+\alpha)} + a_2 s^{(\alpha)} + \gamma y_m^0 u_c^0 = 0 . \quad (2.19)$$

Hagamos el cambio de variable $w = s^\alpha$ con $\alpha = \frac{1}{2}$. Bajo este cambio de variable la ecuación característica resulta

$$w^5 + a_1 w^3 + a_2 w + \gamma y_m^0 u_c^0 = 0 . \quad (2.20)$$

Si $\alpha = \frac{1}{v} \Rightarrow v = 2$, las hojas de Riemann son las regiones del plano s dadas por:

$$s = |s| e^{j\phi} ; \quad (2k+1)\pi < \phi < (2k+3)\pi ; \quad k = -1, 0, \dots, (v-2) . \quad (2.21)$$

La hoja principal de Riemann se presenta cuando $k = -1$. Además, del lugar de las raíces sabemos que la condición de estabilidad es $|\phi| > \frac{\pi}{2}$.

Bajo el cambio de variable $w = s^\alpha$ las hojas de Riemann se convierten en las regiones del plano w dadas por

$$w = |w| e^{j\phi_w} ; \quad \alpha(2k+1)\pi < \phi_w < \alpha(2k+3)\pi ; \quad k = -1, 0, \dots, (v-2) . \quad (2.22)$$

La hoja principal de Riemann sigue siendo el caso $k = -1$. Ahora la condición de estabilidad es $|\phi_w| > \alpha \frac{\pi}{2}$.

Entonces, retomando el ejemplo, nuestra región de inestabilidad con $\alpha = \frac{1}{2}$ será $|\phi_i| > \frac{\pi}{4}$. Donde ϕ_i es el argumento de la raíz i -ésima del polinomio característico.

2.3.1. Análisis de estabilidad del sistema hidráulico de primer orden

Sea el sistema linealizado en torno al punto de análisis $Y_{eq} = 10[cm]$ y $U_{eq} = 2.5 \times 10^{-5}[\frac{m^3}{s}]$

$$\dot{y}(t) + 0.0804 y(t) = 644.4171 u(t) ,$$

cuya función de transferencia es

$$G(s) = \frac{644.4}{s + 0.0804} .$$

Entonces, bajo el cambio de variable $w = s^\alpha$ (con $\alpha = \frac{1}{2}$), la ecuación característica del sistema adaptable de orden fraccionario es

$$w^3 + 0.0804 w + 644.4 k = 0 .$$

Con ello, la región de inestabilidad es $-\frac{\pi}{4} < \phi_i < \frac{\pi}{4}$. Mientras que la primera hoja de Riemann es $-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$. En la Figura 2.11 se muestra el resultado del lugar geométrico de las raíces de este análisis.

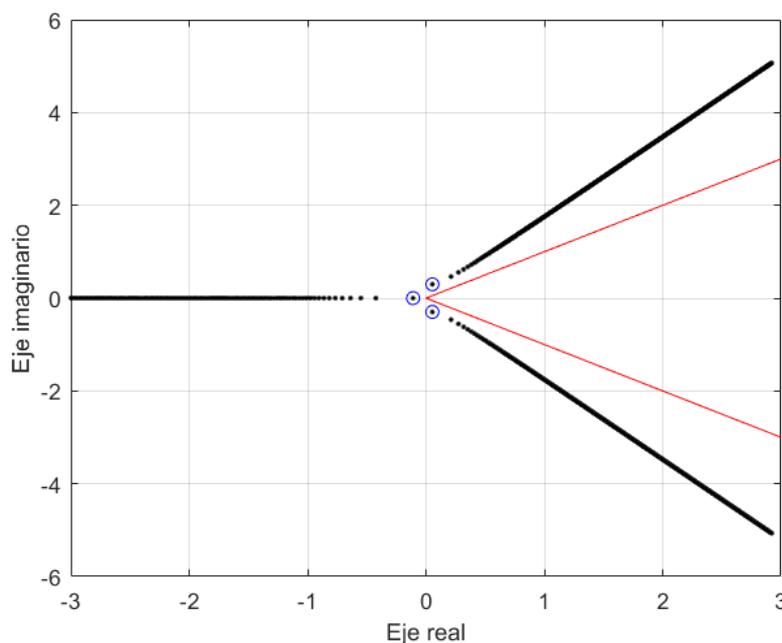


Figura 2.11: Lugar geométrico de las raíces del sistema hidráulico de primer orden con $\alpha = \frac{1}{2}$

2.3.2. Análisis de estabilidad del sistema hidráulico de segundo orden

Sea el sistema linealizado alrededor del punto de análisis $Y_{1eq} = 10[cm]$, $Y_{2eq} = Y_{1eq}$ y $U_{eq} = 2.5 \times 10^{-5}[\frac{m^3}{s}]$

$$\ddot{y}(t) + 0.1608 \dot{y}(t) + 0.006464 y = 51.81 u(t) ,$$

cuya función de transferencia es

$$G(s) = \frac{51.81}{s^2 + 0.1608 s + 0.006464} .$$

Entonces, bajo el cambio de variable $w = s^\alpha$ (con $\alpha = \frac{1}{2}$), la ecuación característica del sistema adaptable de orden fraccionario es

$$w^5 + 0.1608 w^3 + 0.006464 w + 51.81 k = 0 .$$

Con ello, la región de inestabilidad es $-\frac{\pi}{4} < \phi_i < \frac{\pi}{4}$. Mientras que la primera hoja de Riemann es $-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$. En la Figura 2.12 se muestra el resultado del lugar geométrico de las raíces para este caso.

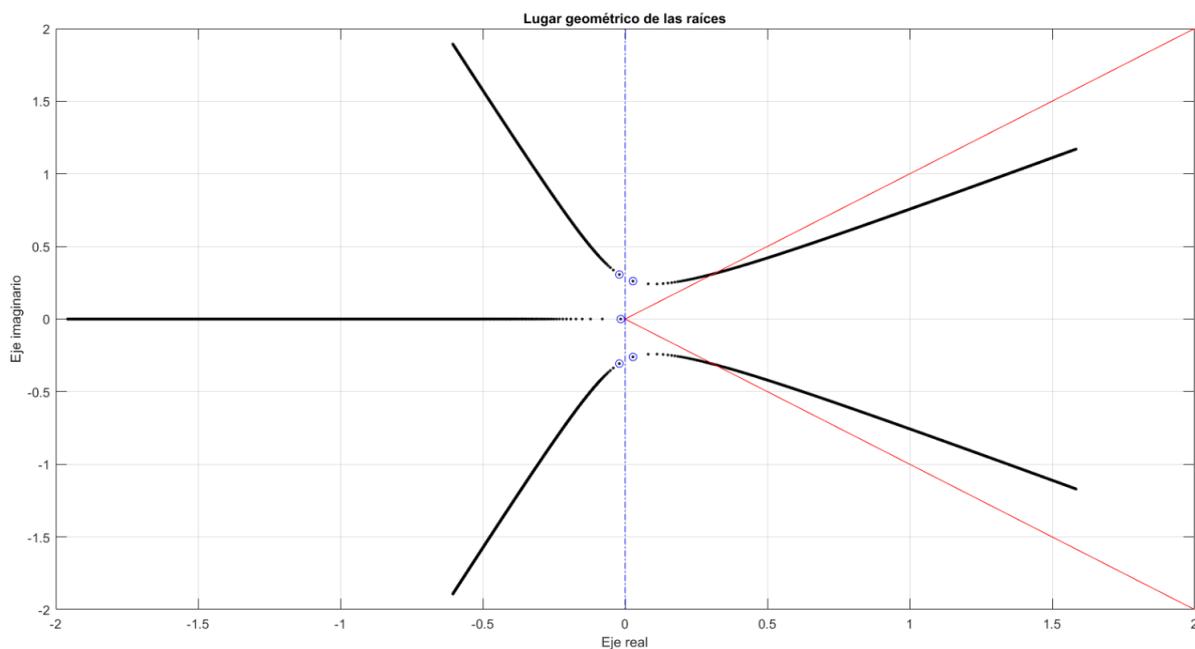


Figura 2.12: Lugar geométrico de las raíces del sistema hidráulico de segundo orden con $\alpha = \frac{1}{2}$

Si ahora consideramos $\alpha = \frac{1}{3}$, la ecuación característica del sistema adaptable de orden fraccionario es

$$w^7 + 0.1608 w^4 + 0.006464 w + 51.81 k = 0 .$$

Con ello, la región de inestabilidad es $-\frac{\pi}{6} < \phi_i < \frac{\pi}{6}$. Mientras que, la primera hoja de Riemann es $-\frac{\pi}{3} < \phi < \frac{\pi}{3}$. En la Figura 2.13 se muestra el resultado del lugar geométrico de las raíces para este caso.

Ahora, consideremos $\alpha = \frac{1}{4}$, la ecuación característica del sistema adaptable de orden fraccionario es

$$w^9 + 0.1608 w^5 + 0.006464 w + 51.81 k = 0 .$$

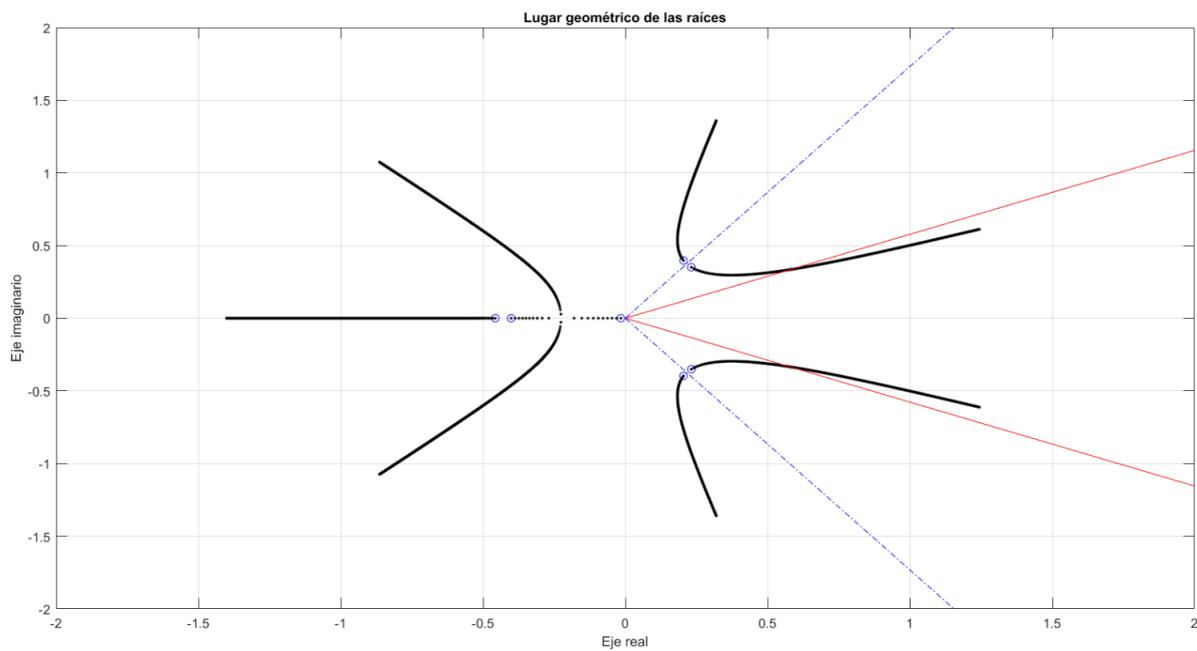


Figura 2.13: Lugar geométrico de las raíces del sistema hidráulico de segundo orden con $\alpha = \frac{1}{3}$

Con ello, la región de inestabilidad es $-\frac{\pi}{8} < \phi_i < \frac{\pi}{8}$. Mientras que la primera hoja de Riemann es $-\frac{\pi}{4} < \phi < \frac{\pi}{4}$. En la Figura 2.14 se muestra el resultado del lugar geométrico de las raíces para este caso.

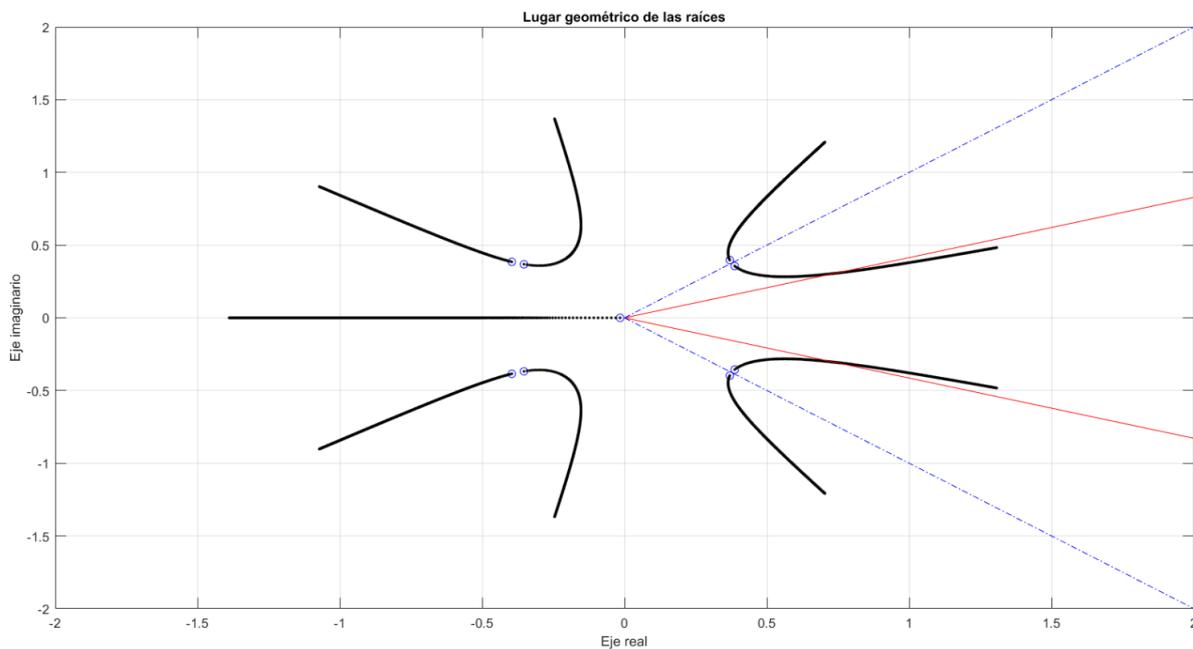


Figura 2.14: Lugar geométrico de las raíces del sistema hidráulico de segundo orden con $\alpha = \frac{1}{4}$

2.3.3. Análisis de estabilidad del sistema térmico

Sea el sistema linealizado invariante en el tiempo

$$\dot{y}(t) + \frac{1}{5} y(t) = 2 u(t) ,$$

cuya función de transferencia es

$$G(s) = \frac{2}{s + 1/5} .$$

Entonces, bajo el cambio de variable $w = s^\alpha$ (con $\alpha = \frac{1}{2}$), la ecuación característica del sistema adaptable de orden fraccionario es

$$w^3 + \frac{1}{5} w + 2 k = 0 .$$

Con ello, la región de inestabilidad es $-\frac{\pi}{4} < \phi_i < \frac{\pi}{4}$. Mientras que la primera hoja de Riemann es $-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$. En la Figura 2.15 se muestra el resultado del lugar geométrico de las raíces para este caso.

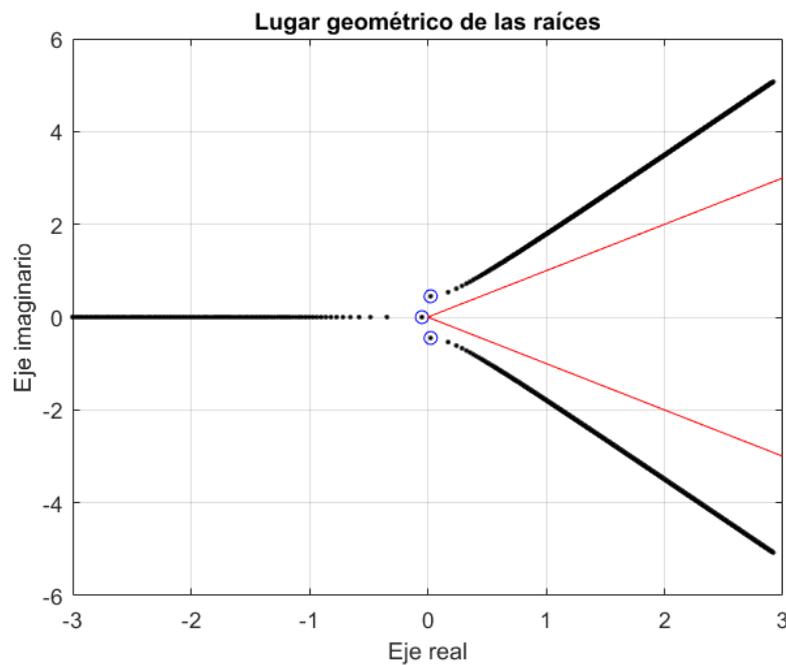


Figura 2.15: Lugar geométrico de las raíces del sistema térmico con $\alpha = \frac{1}{2}$

Capítulo 3

Diseño del controlador

A continuación, presentamos el diseño del controlador para cada sistema. En todo caso, los parámetros de diseño serán: la ganancia de adaptación γ , el orden de integración α y los parámetros del modelo de referencia según el número de parámetros adaptables que considere la ley de control. Sin embargo, en este apartado solo se aborda la elección del modelo de referencia. Esto se debe a que, con fines experimentales, se han elegido diferentes valores de γ y α para ser evaluados en los resultados.

3.1. Propuestas de control para el sistema hidráulico

Sobre este sistema realizamos tres propuestas de control. Con las primeras dos de ellas buscamos controlar el nivel del primer tanque por lo que el sistema a controlar resulta de primer orden. Sin embargo, estas dos propuestas difieren en el número de parámetros adaptables. Con la primera propuesta solo consideramos un parámetro adaptable. Mientras que, con la segunda propuesta consideramos la adaptación de dos parámetros del sistema.

Con la tercera propuesta se considera como objetivo controlar el nivel del segundo tanque por lo que el sistema resulta de segundo orden. El control propuesto considera solo la adaptación de un parámetro.

▪ Sistema de primer orden con adaptación de un parámetro

En este caso, proponemos como señal de referencia escalón unitario $u_c = 1$. Con un sistema de primer orden de la forma

$$G_m(s) = \frac{k}{\tau s + 1} ,$$

podemos elegir la constante de tiempo de nuestro modelo de referencia, así como el valor al que queremos hacer llegar la salida del mismo. Con esta consideración en mente, elegimos $\tau = 10[s]$ y $k = 10[cm] = 0.1[m]$. Con ello el modelo de referencia es

$$G_m(s) = \frac{0.1}{10 s + 1} .$$

En términos del parámetro k_0 , para un sistema del tipo $k_0 G_m(s) = \frac{k_0}{s+a_m}$, el modelo de referencia es

$$Y_m(s) = \frac{k_0}{s+0.1} U_c(s) , \quad (3.1)$$

$$\dot{y}_m(t) = -0.1 y_m(t) + k_0 u_c(t) , \quad (3.2)$$

con $k_0 = 0.01$.

Algunas simulaciones, que se muestran en la Figura 3.1, indican que el desempeño del controlador es mejor cuando el orden de integración es $\alpha = 1/4$. Además, cuando el orden de integración es $\alpha = 1$ la respuesta del sistema presenta oscilaciones. Estas se pueden reducir disminuyendo la ganancia de adaptación γ . Pero, al disminuir γ , también aumenta el tiempo de convergencia. Esto nos hace pensar que no es posible encontrar una sintonización adecuada de γ para $\alpha = 1$.

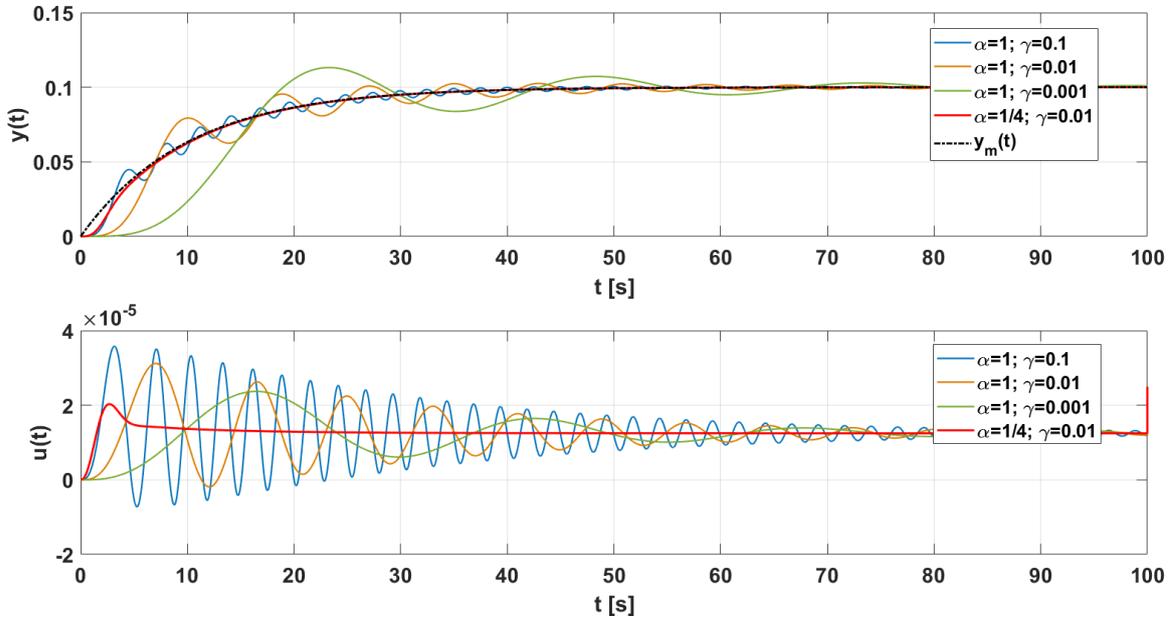


Figura 3.1: Resultado de simulación: Salida del sistema hidráulico de primer orden con adaptación de un parámetro y señal de control. Gráfico comparativo para diferentes sintonizaciones.

■ Sistema de primer orden con adaptación de dos parámetros

La propuesta de control ahora es con adaptación de dos parámetros. Sin embargo, el modelo de referencia resulta el mismo que en el caso anterior, pues se trata del mismo sistema de primer orden.

Además, se considera la adaptación de dos parámetros. Así, en términos de los parámetros a_m y b_m , para un sistema del tipo $G_m(s) = \frac{a_m}{s+b_m}$, el modelo de referencia es

$$Y_m(s) = \frac{0.01}{s+0.1} U_c(s) , \quad (3.3)$$

$$\dot{y}_m(t) = -0.1 y_m(t) + 0.01 u_c(t) . \quad (3.4)$$

Ahora, comparemos el comportamiento del sistema cuando se adaptan uno y dos parámetros, respectivamente. El gráfico de la Figura 3.2 muestra el beneficio de adaptar dos parámetros. Cuando se adaptan dos parámetros, el sistema converge más rápido al modelo de referencia. Aunque, esto implica una que se tenga una señal de control con mayor demanda energética.

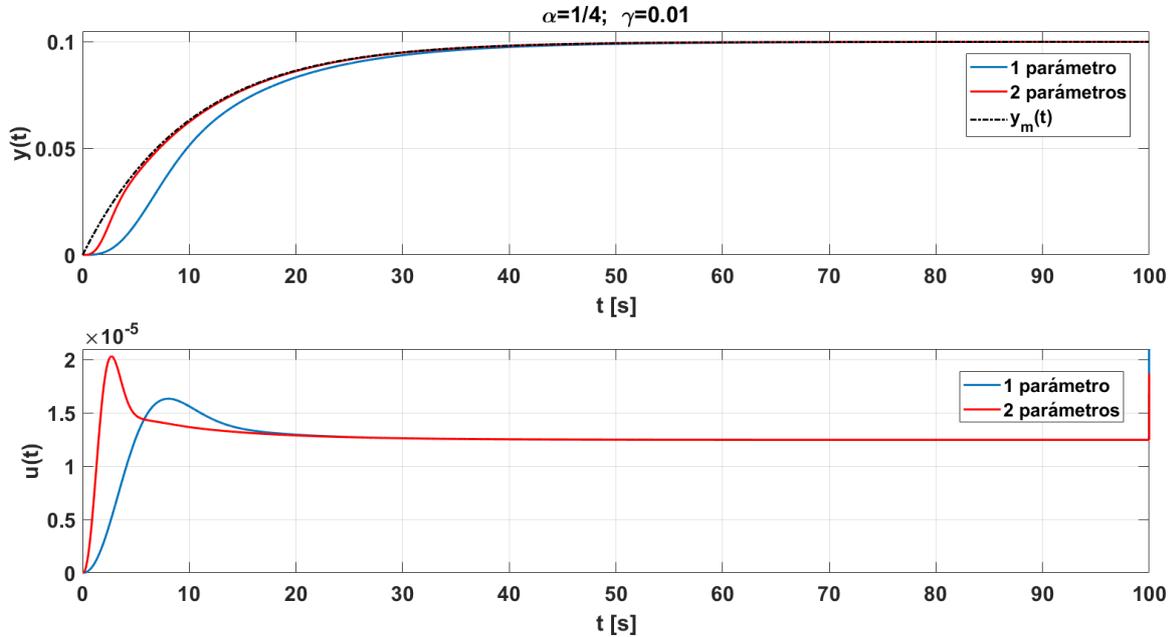


Figura 3.2: Resultado de simulación: Salida del sistema y señal de control. Gráfico comparativo entre el resultado de adaptar uno y dos parámetros sobre el sistema hidráulico de primer orden.

▪ Sistema de segundo orden con adaptación de un parámetro

En este caso, proponemos como señal de referencia escalón unitario $u_c = 1$. Con un sistema de segundo orden de la forma

$$G_m(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2},$$

podemos elegir la frecuencia natural ω_n de nuestro modelo de referencia, así como su coeficiente de amortiguamiento ζ . Elegimos $\omega_n = 0.0678$ y $\zeta = 1.1858$. La elección del coeficiente de amortiguamiento se debe a que buscamos una respuesta al escalón del tipo sobre amortiguada. Con ello, el modelo de referencia es

$$G_m(s) = \frac{0.0046}{s^2 + 0.1608 s + 0.0046}.$$

En términos del parámetro k_0 , para un sistema del tipo $k_0 G_m(s) = \frac{k_0 \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$, el modelo de referencia es

$$Y_m(s) = \frac{k_0 0.0046}{s^2 + 0.1608 s + 0.0046} U_c(s), \quad (3.5)$$

$$\ddot{y}_m(t) = -0.1608 \dot{y}_m(t) - 0.0046 y_m(t) + 0.0046 k_0 u_c(t), \quad (3.6)$$

con $k_0 = 0.1$.

Apoyándonos de las simulaciones realizadas sobre el sistema linealizado mostradas en la Figura 3.3, suponemos que no habrá valor de γ que mejore la respuesta del sistema cuando $\alpha = 1$, comparándolo con el desempeño resultante de tener un orden de integración fraccionario. Esto debido a que el sistema responde más lentamente cuando $\alpha = 1$ y, si aumentamos γ manteniendo $\alpha = 1$, solo podemos esperar una respuesta con más oscilaciones. Adicionalmente, se observa una ligera mejora en la respuesta cuando $\alpha = 1/6$, que cuando $\alpha = 1/4$. Esta mejora radica en la amplitud de la señal de control, así como en el número de oscilaciones.

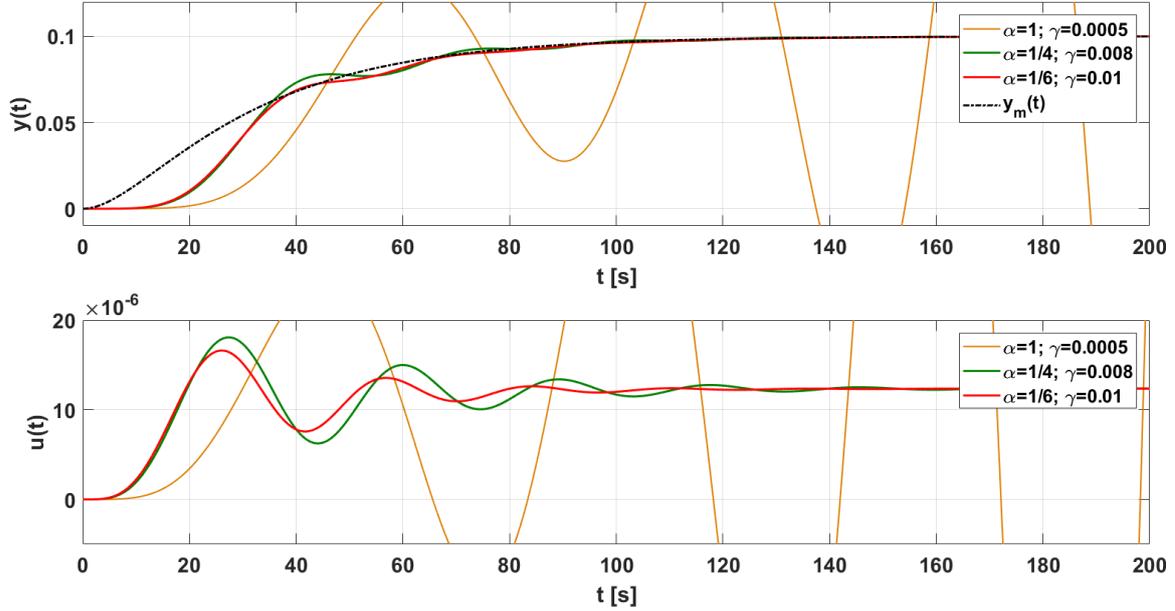


Figura 3.3: Resultado de simulación: Salida del sistema de segundo orden con adaptación de un parámetro y señal de control. Gráfico comparativo para diferentes sintonizaciones.

■ Sistema de segundo orden con adaptación de tres parámetros

Nuevamente, proponemos un escalón unitario como señal de referencia $u_c = 1$. Como se trata del mismo sistema de segundo orden del caso anterior, la elección del modelo de referencia es la misma, pero esta vez se busca hacer la adaptación de los tres parámetros del sistema.

Consideremos un sistema de segundo orden de la forma

$$G_m(s) = \frac{c_m}{s^2 + a_m s + b_m},$$

donde $a_m = 2\zeta\omega_n$, $b_m = \omega_n^2$ y $c_m = k_0\omega_n^2$.

Conservando la elección de ω_n , ζ y k_0 de la propuesta anterior, el modelo de referencia en términos de los parámetros a_m , b_m y c_m es

$$Y_m(s) = \frac{0.00046}{s^2 + 0.1608 s + 0.0046} U_c(s), \quad (3.7)$$

$$\ddot{y}_m(t) = -0.1608 \dot{y}_m(t) - 0.0046 y_m(t) + 0.00046 u_c(t). \quad (3.8)$$

Como en casos anteriores, no fue posible encontrar un valor de γ tal que la respuesta del sistema siga el modelo de referencia. Los valores de γ que permiten que el sistema no se haga inestable,

producen una respuesta muy lenta del sistema. Comparando la adaptación de un parámetro (Figura 3.3) con la adaptación de tres parámetros (Figura 3.4) del mismo sistema, se observó que es posible proponer valores para la ganancia de adaptación que permitan una respuesta más rápida del sistema. Aunque, la señal de control es inevitablemente más grande mientras se incrementa el número de parámetros adaptables.

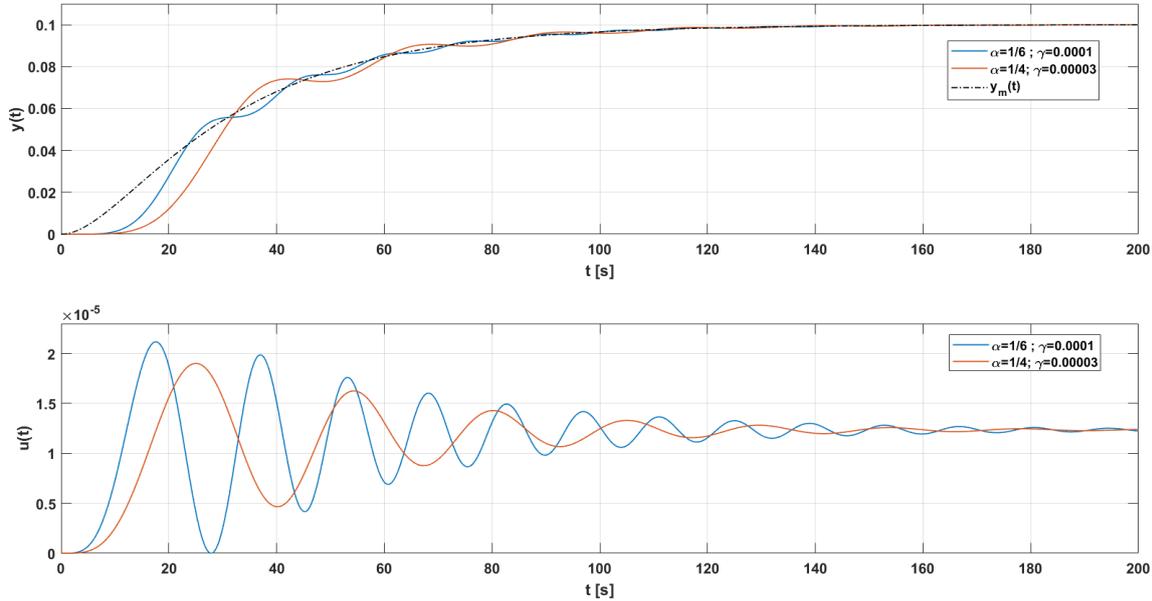


Figura 3.4: Resultado de simulación: Salida del sistema de segundo orden con adaptación de tres parámetros y señal de control. Gráfico comparativo para diferentes sintonizaciones.

3.2. Propuesta de control para el sistema térmico

Para el sistema térmico se consideró como objetivo el control de temperatura dentro de la cámara térmica. El sistema resulta de primero orden. La propuesta se sustenta en el esquema de control adaptable basado en modelo de referencia con adaptación de dos parámetros.

Proponemos como señal de referencia un escalón unitario $u_c = 1$. Con un sistema de primer orden de la forma

$$G_m(s) = \frac{k}{\tau s + 1} ,$$

podemos elegir la constante de tiempo de nuestro modelo de referencia, así como el valor al que queremos hacer llegar la salida del mismo. Con esta consideración, y sabiendo que la planta térmica tiene una respuesta lenta, elegimos $\tau = 150[s]$ y $k = 45[^\circ C]$. Con ello el modelo de referencia es

$$G_m(s) = \frac{45}{150 s + 1} .$$

En términos de los parámetros a_m y b_m , para un sistema del tipo $G_m(s) = \frac{a_m}{s+b_m}$, el modelo de

referencia es

$$Y_m(s) = \frac{0.3}{s + 0.0066} U_c(s) , \quad (3.9)$$

$$\dot{y}_m(t) = -0.0066 y_m(t) + 0.3 u_c(t) . \quad (3.10)$$

En lo que se refiere al sistema térmico, se realizó la simulación mostrada en la Figura 3.5. El resultado de dicha simulación muestra un comportamiento no deseado en su etapa transitoria, ya que el sistema, según indica el fabricante en el manual, tiene un retraso. Es importante mencionar que la simulación fue realizada con base el modelo de primer orden proporcionado por el fabricante en el manual.

A pesar de que la simulación no es exitosa, más adelante realizaremos algunas pruebas sobre la planta física para evaluar el desempeño del controlador propuesto en esta sección.

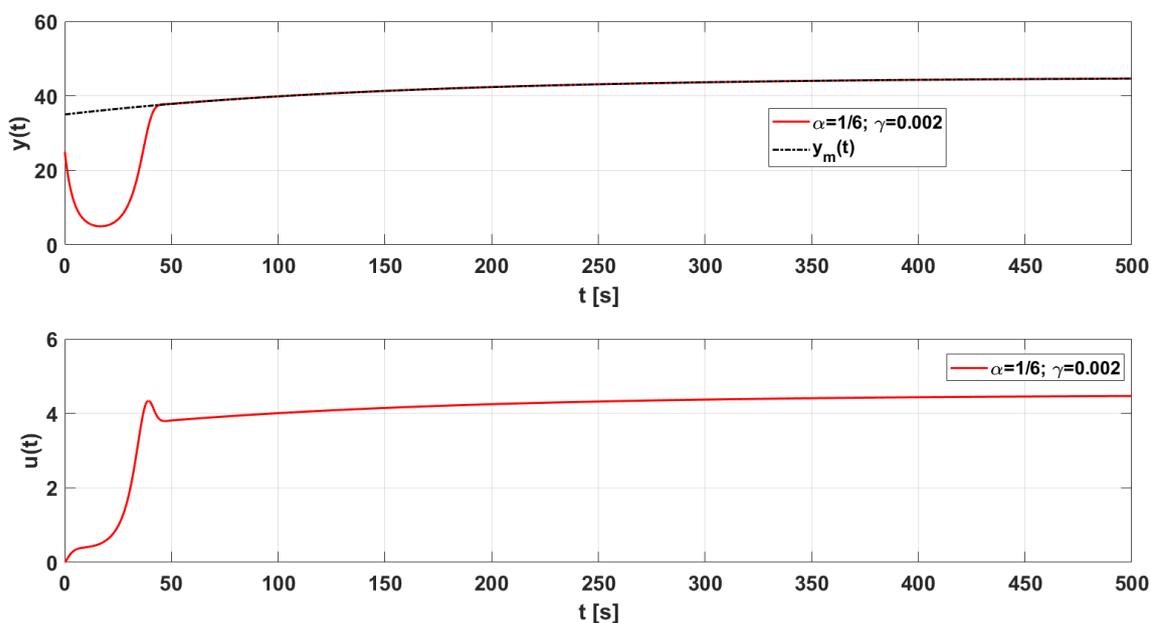


Figura 3.5: Resultado de simulación: Salida del sistema con $\alpha = 1/4$

Capítulo 4

Resultados experimentales

En este capítulo, se muestran los resultados obtenidos al implementar el controlador sobre el sistema hidráulico de primer orden, adaptando uno y dos parámetros. De igual forma, se describe el desempeño del esquema con adaptación de un parámetro en el sistema hidráulico de segundo orden. Además, exponemos los resultados obtenidos al controlar el sistema térmico con una ley de control de un parámetro.

La configuración utilizada para implantar los controladores en la planta hidráulica y en la planta térmica se ilustran en las siguientes imágenes, respectivamente.

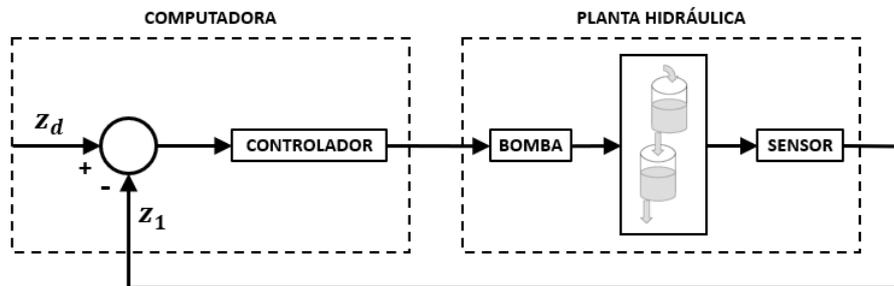


Figura 4.1: Configuración de la implementación del control en planta hidráulica

En la Figura 4.1 la altura deseada z_d y la señal de control se definen y generan en la computadora, respectivamente. En la Figura 4.2 se establece la temperatura deseada T_d y la señal de control es generada en la computadora. Cabe resaltar que en este experimento sólo se hace control sobre el calentador, pues la planta no cuenta con un sistema para enfriar la cámara térmica. El ventilador tiene una señal de entrada constante que únicamente nos permite hacer fluir el aire por la cámara térmica, pero no es posible controlar el proceso de enfriamiento.

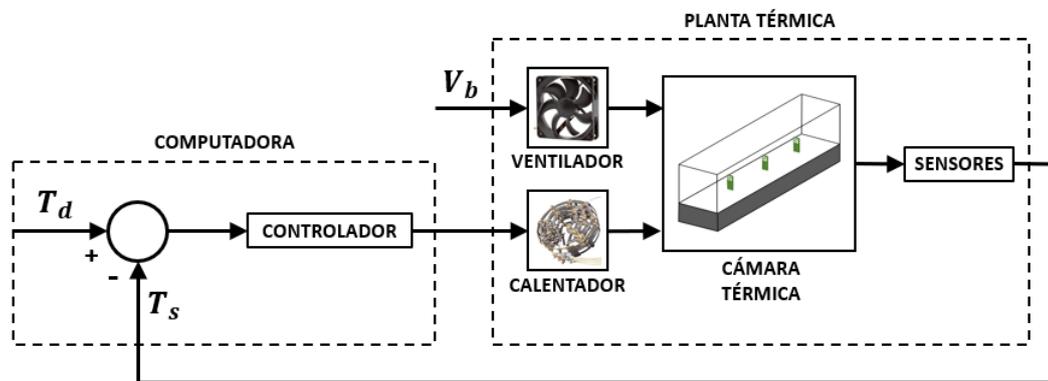


Figura 4.2: Configuración de la implementación del control en planta térmica

4.1. Control con adaptación de un parámetro del sistema hidráulico de primer orden

Para el control del nivel de agua del tanque 1 con adaptación de un parámetro realizamos una secuencia de experimentos descritos en la Tabla 4.1. Para ello, utilizamos el modelo de referencia descrito en (3.2), donde $k_0 = 0.01$, con condición inicial del parámetro adaptable $\theta(0) = 1 \times 10^{-5}$.

Experimento	α	γ
1	1/4	0.1
2	1/4	0.01
3	1/4	0.001
4	1/3	0.1
5	1/3	0.01
6	1/3	0.001
7	1/2	0.1
8	1/2	0.01
9	1/2	0.001
10	3/4	0.1
11	3/4	0.01
12	3/4	0.001
13	1	0.1
14	1	0.01
15	1	0.001

Tabla 4.1: Experimentos con diferentes parámetros

Se calculó el error RMS para cada experimento realizado, los cuales mostramos en la Figura 4.3. En ella se puede observar que el experimento con mejor desempeño se presenta cuando $\alpha = 1/4$ y $\gamma = 0.01$. También, se aprecia que en el caso de $\gamma = 0.01$ se cumple que, a menor valor de α , el seguimiento del sistema es mejor para el valor seleccionado de γ . Por otro lado, el experimento con peor desempeño se presenta cuando $\alpha = 1/4$ y $\gamma = 0.001$. Esto se debe a que el valor de γ es

demasiado pequeño para el valor de α , lo cual no le da mucho peso al seguimiento del modelo de referencia.

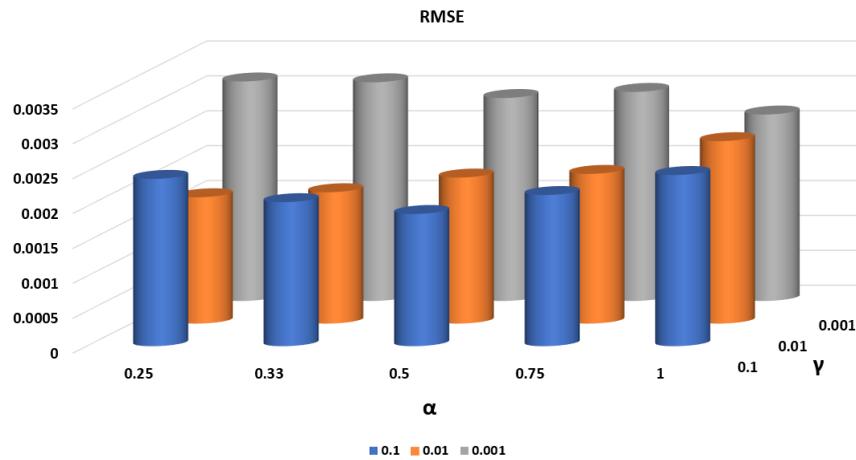


Figura 4.3: Error RMS de la adaptación de un parámetro en el sistema hidráulico de primer orden.

En la Figura 4.4 se compara el resultado experimental con mejor desempeño, $\alpha = 1/4$ y $\gamma = 0.01$, con el resultado obtenido al evaluar el sistema con $\alpha = 1$ y $\gamma = 0.01$. En dicha figura, la convergencia de la salida del sistema al modelo de referencia se obtiene en menor tiempo cuando $\alpha = 1/4$ y presenta menor número de oscilaciones. Por otra parte, la señal de control cuando $\alpha = 1/4$, presenta excursiones menores y mayor presencia de ruido en comparación a la señal de control con integración de orden entero.

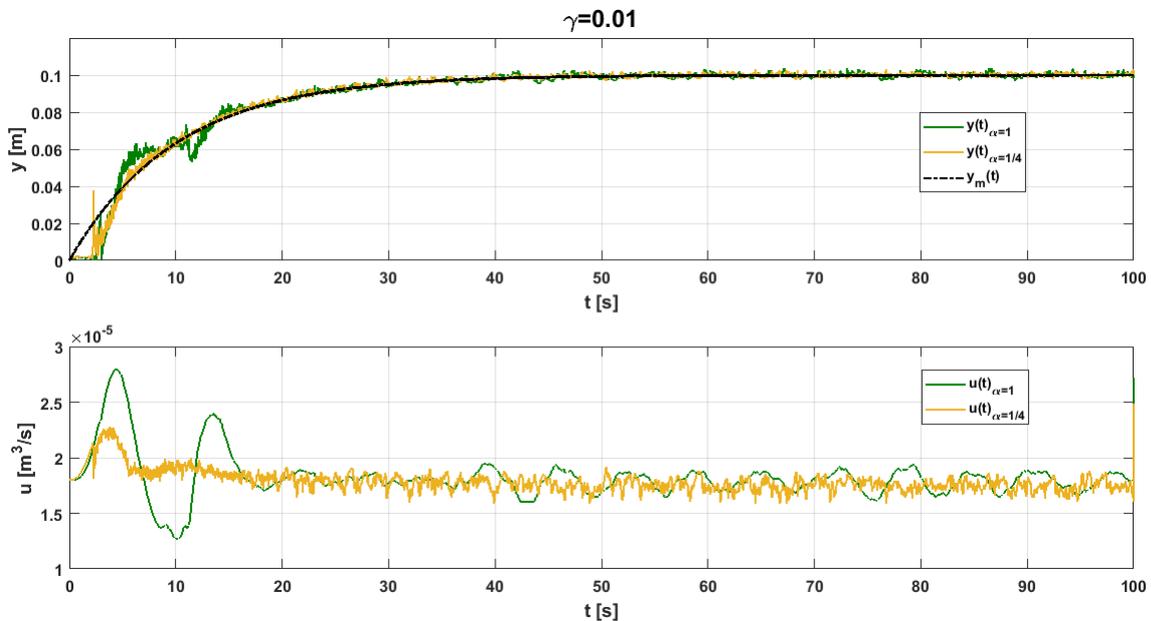


Figura 4.4: Salida del sistema hidráulico de primer orden y señal de control con adaptación de un parámetro.

Cambiar el nivel en la referencia una vez que el sistema se ha estabilizado suele ser un experimento interesante. Esta prueba se ha realizado con $\gamma = 0.01$ y órdenes de integración $\alpha = 1/4$ y $\alpha = 1$. En la Figura 4.5, el resultado de este experimento muestra que la respuesta del sistema de orden entero tiene oscilaciones no deseadas. Mientras que, la respuesta del sistema de orden fraccionario converge muy rápido y el seguimiento es muy bueno.

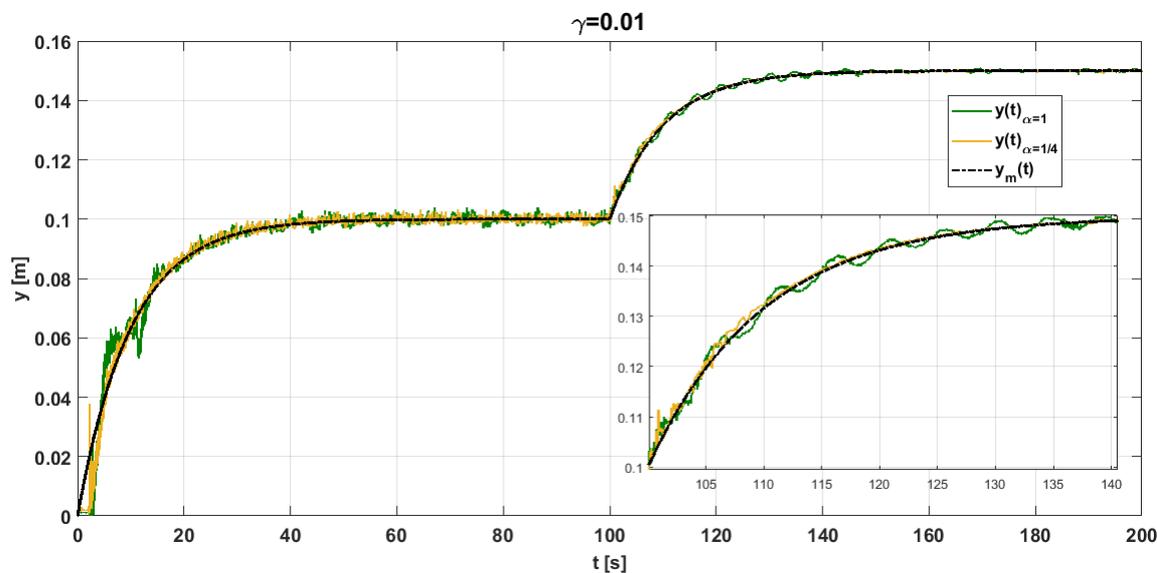


Figura 4.5: Salida del sistema hidráulico variando el valor de la señal de referencia u_c

Veamos el resultado de los experimentos no mostrados hasta ahora. Con $\gamma = 0.1$, y variando el valor de α , la Figura 4.6 muestra que, al cambiar la referencia del sistema, éste adquiere mucho ruido cuando el valor de α es muy pequeño. Es decir, $\gamma = 0.1$ con valores pequeños de α hace que el sistema sea sensible ante perturbaciones o cambios de referencia.

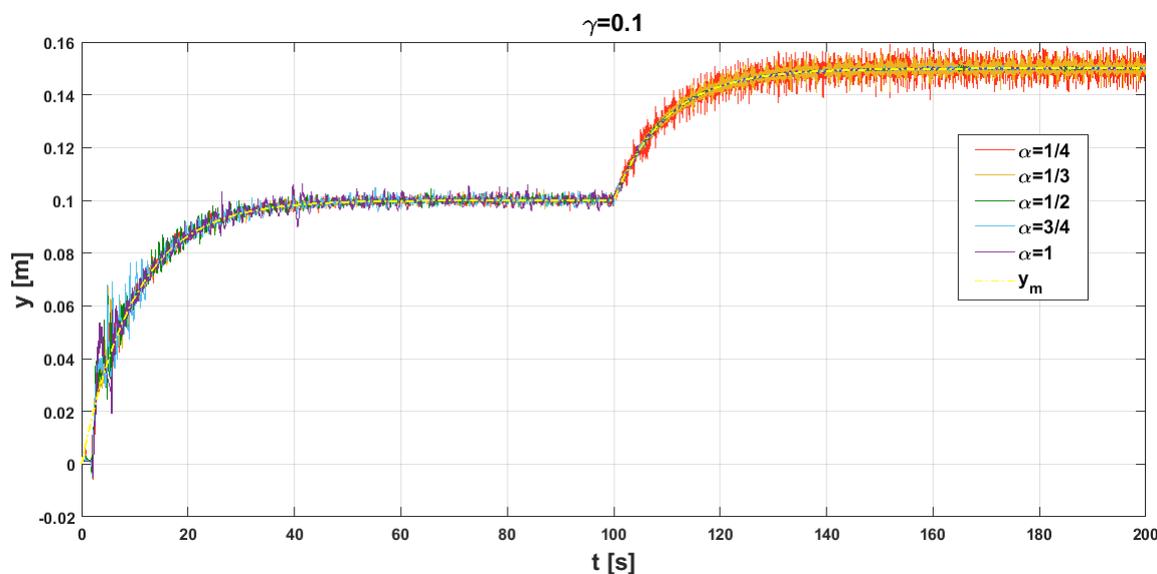


Figura 4.6: Respuestas del sistema hidráulico de primer orden cuando $\gamma = 0.1$

Ahora, cambiando el valor de γ a 0.01, en la Figura 4.7 observamos un comportamiento con oscilaciones de menor amplitud que las mostradas en la Figura 4.6. Además, la respuesta del sistema es más lenta y, al cambiar el punto de análisis, las oscilaciones prevalecen cuando $\alpha = 1$.

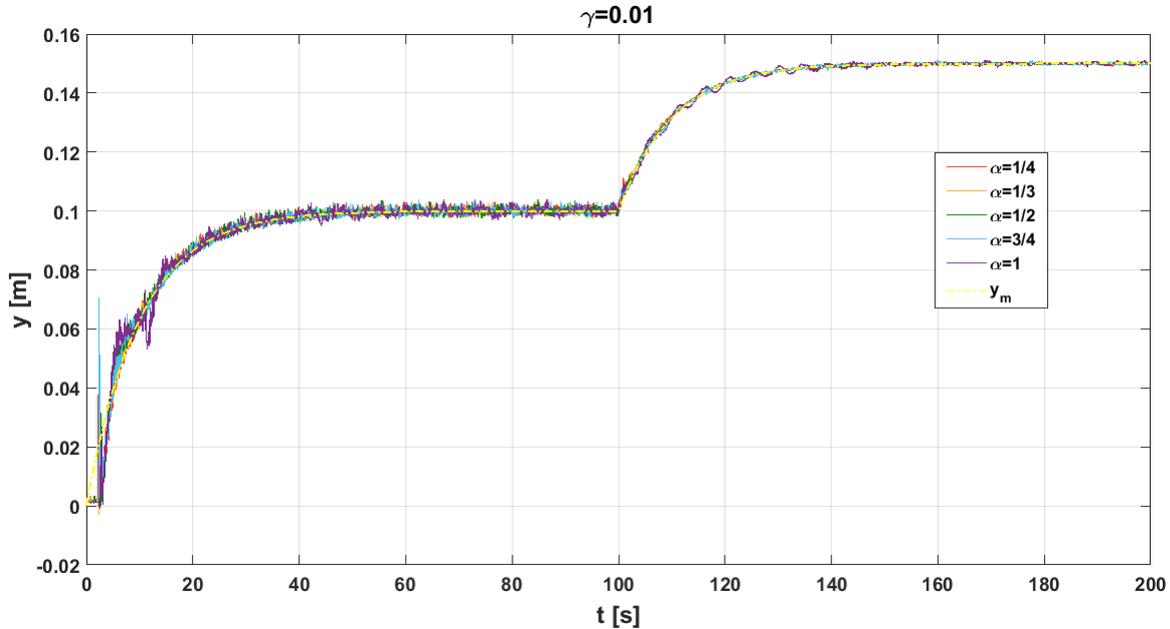


Figura 4.7: Respuestas del sistema hidráulico de primer orden cuando $\gamma = 0.01$

Una vez más cambiamos el valor de la ganancia de adaptación γ . Esta vez a 0.001. La respuesta de este experimento se ilustra en la Figura 4.8. Dicha gráfica muestra que con la disminución de α , a pesar de que se reducen las oscilaciones, se tiene un sobrepaso cuando la referencia cambia.

Sin embargo, en comparación con las figuras 4.6 y 4.7, no hay gran diferencia en el desempeño del sistema antes del cambio en la referencia. Además, es notable la disminución del ruido en la salida cuando cambia el nivel de agua deseado.

De los experimentos mostrados, hemos obtenido la estimación del parámetro adaptable θ . Las figuras 4.9, 4.10 y 4.11 corresponden a dichas gráficas. La Figura 4.9 muestra que el comportamiento del parámetro θ tiene mucho ruido para todos los valores de α , cuando $\gamma = 0.1$. Esto se debe a que el valor de γ es muy grande. Es decir, la razón de cambio de θ respecto al tiempo es grande. Observemos que con $\alpha \geq 1/2$ el ruido disminuye considerablemente cuando cambiamos el valor de la referencia.

La Figura 4.10 muestra la dinámica del parámetro θ de los experimentos realizados con $\gamma = 0.01$. En ella, el parámetro adaptable tiene oscilaciones de menor magnitud que al utilizar $\gamma = 0.1$. Sin embargo, al cambiar el punto de análisis, la señal con más oscilaciones se presenta cuando $\alpha = 1$. Las otras son más estables conforme se disminuye el valor de α .

Por último, en la Figura 4.11 se puede observar que el comportamiento de θ tiene mayor número de oscilaciones, cuando el valor de α es mayor, y su dinámica es más suave cuando α es más pequeña. Por lo que la combinación $\alpha = 1/4$ y $\gamma = 0.001$ genera un comportamiento más suave y con menos ruido. Además, la magnitud del parámetro adaptable es muy pequeña, lo cual se traduce en una señal de control con menores excursiones.

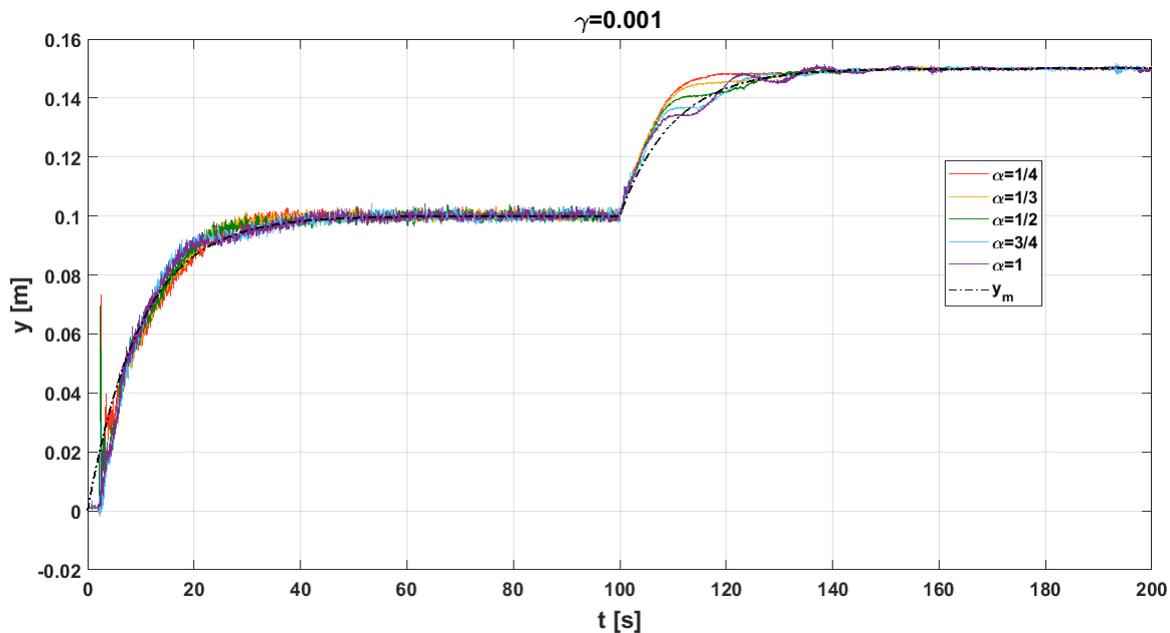


Figura 4.8: Respostas do sistema hidráulico de primeira ordem quando $\gamma = 0.001$

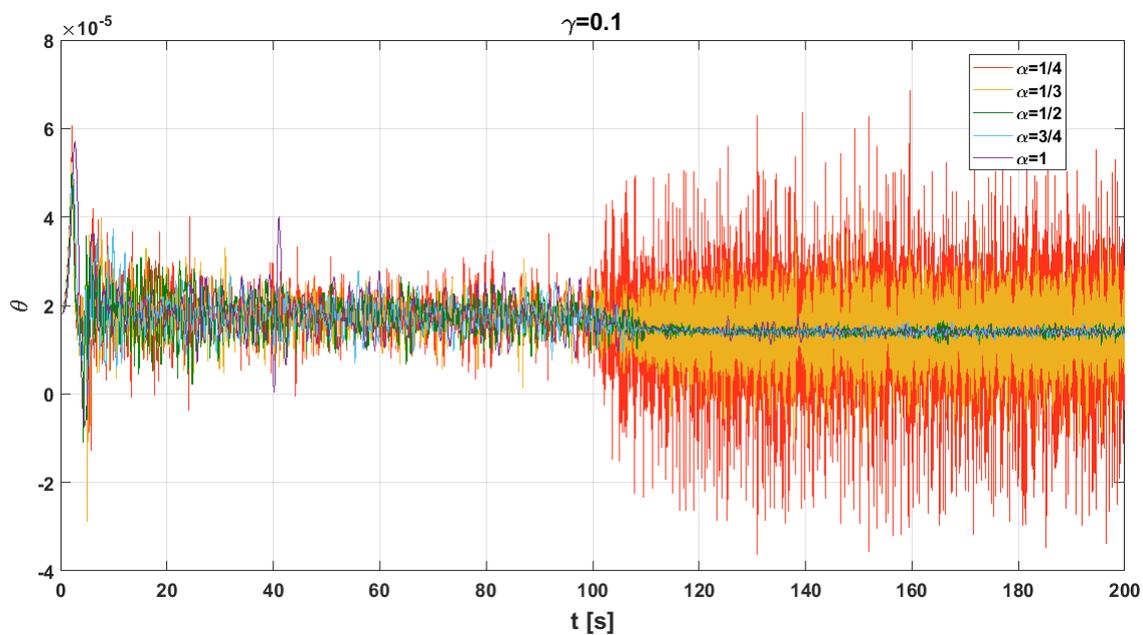


Figura 4.9: Dinâmicas de θ do sistema hidráulico de primeira ordem quando $\gamma = 0.1$

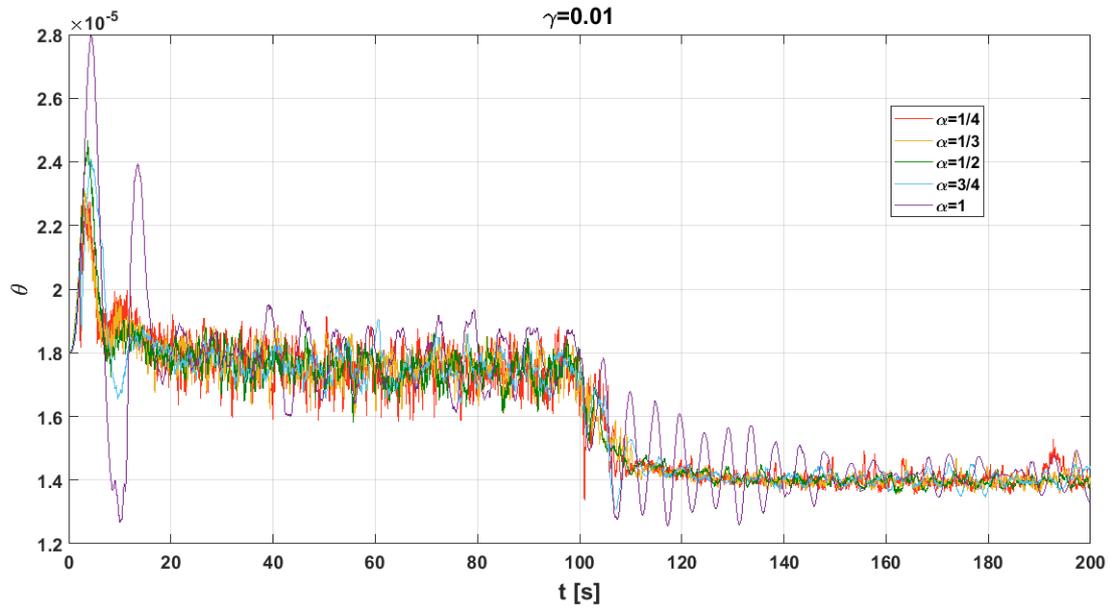


Figura 4.10: Dinámicas de θ del sistema hidráulico de primer orden cuando $\gamma = 0.01$

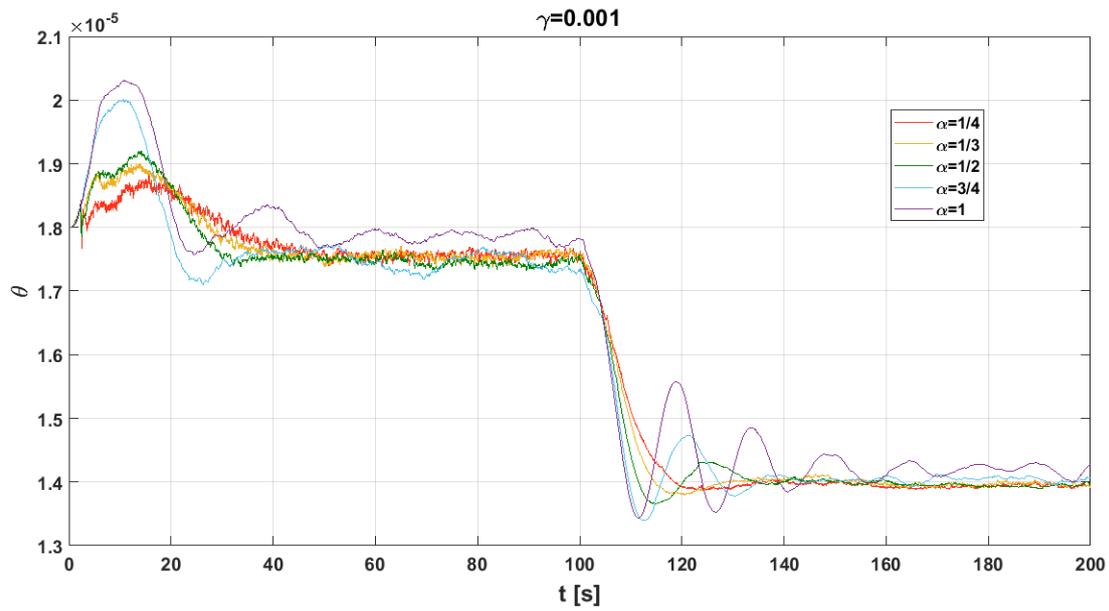


Figura 4.11: Dinámicas de θ del sistema hidráulico de primer orden cuando $\gamma = 0.001$

4.2. Control con adaptación de dos parámetros del sistema hidráulico de primer orden

En la Tabla 4.2 se indican las sintonizaciones de cada experimento referente al control del nivel de agua del tanque 1 con la adaptación de dos parámetros. Para ello, utilizamos el modelo de referencia descrito en (3.4), donde $k_0 = 0.01$ con condiciones iniciales $\theta_1(0) = 0$ y $\theta_2(0) = 0$.

Experimento	α	γ
1	1/4	0.01
2	1/4	0.005
3	1/4	0.001
4	1/2	0.01
5	1/2	0.005
6	1/2	0.001
7	3/4	0.01
8	3/4	0.005
9	3/4	0.001
10	1	0.01
11	1	0.005
12	1	0.001

Tabla 4.2: Experimentos con diferentes parámetros

De los experimentos realizados, calculamos los errores RMS como un indicador del rendimiento del controlador. En la Figura 4.12 sólo se muestran los errores RMS del experimento 1 al 9 debido a que las magnitudes de los errores en los experimentos con $\alpha = 1$ son grandes y no es posible ver la diferencia que existe entre los errores de los sistemas de orden fraccionario. En dicha gráfica, se puede observar que el experimento con mejor desempeño se presenta cuando $\alpha = 1/2$ y $\gamma = 0.005$. Por otro lado, el experimento con peor desempeño es cuando $\alpha = 1$ y $\gamma = 0.01$, ya que el error RMS numérico es de 0.0252, diez veces más que el mejor caso. La comparación entre los casos mencionados se ilustra en la Figura 4.13. Como se puede observar, el sistema de orden entero se mantiene oscilando. Por otro lado, el sistema fraccionario al inicio tiene oscilaciones no deseadas. Aunque, a partir del segundo 20 éste converge a la señal de referencia.

Además, en la misma figura se puede observar la comparación entre las señales de control de ambos casos. La señal de control del sistema de orden entero tiene oscilaciones de gran magnitud en comparación con la señal de control del sistema fraccionario. En un principio el sistema fraccionario alcanza a demandar aproximadamente cuatro veces lo que demanda cuando alcanza la altura deseada.

En las Figuras 4.14, 4.15 y 4.16 mostramos el comportamiento que presentó la salida del sistema en cada experimento, comparándolos con distintos valores de α , manteniendo un mismo valor de γ . Cabe mencionar que, cuando se considera la integral de orden entero, el sistema presenta oscilaciones no deseadas y de gran magnitud. La Figura 4.14, que corresponde a una ganancia de adaptación $\gamma = 0.01$, presenta un buen seguimiento del modelo de referencia. Sin embargo, después de cambiar el nivel de referencia, la salida del sistema presenta ruido cuando $\alpha = 1/4$.

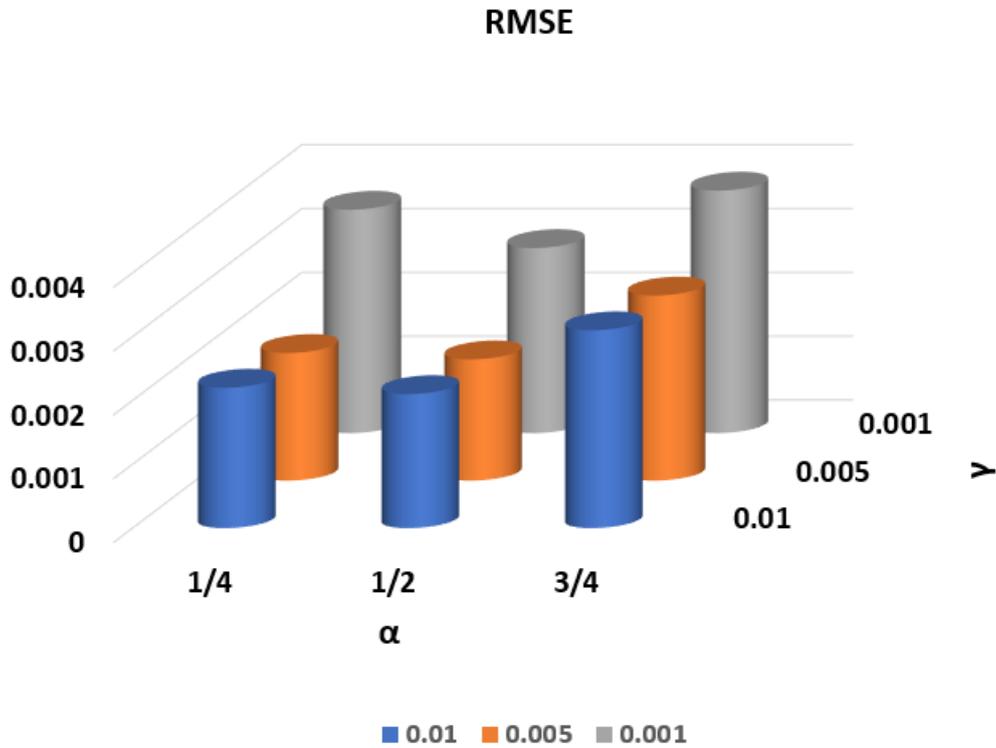


Figura 4.12: Error RMS de la adaptación de 2 parámetros en el sistema hidráulico de primer orden.

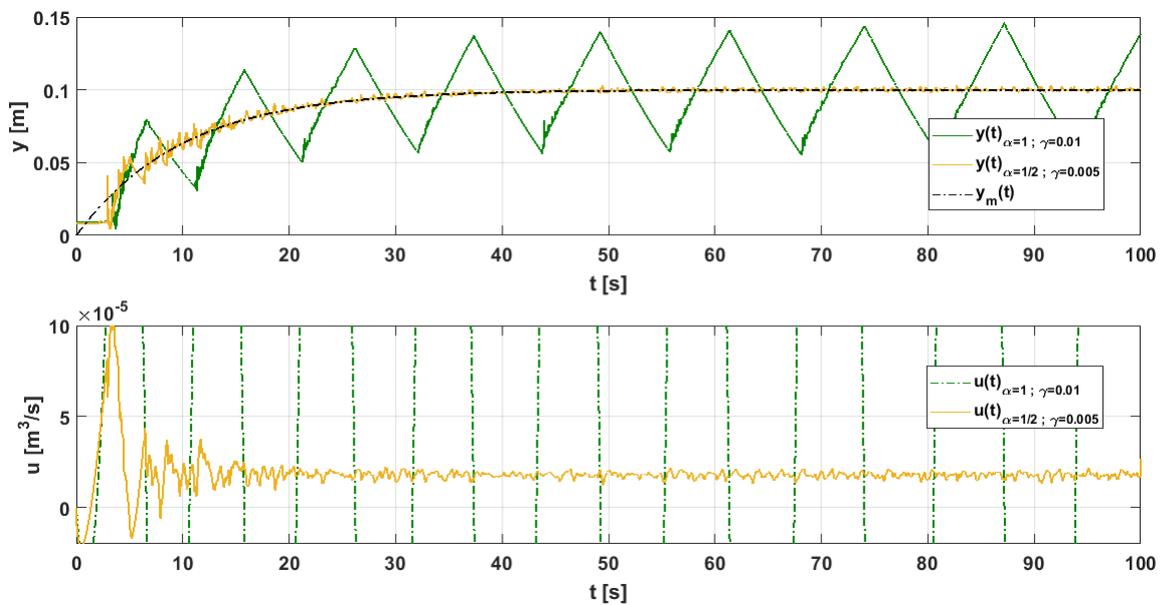


Figura 4.13: Salida del sistema hidráulico de primer orden y señal de control con adaptación de 2 parámetros.

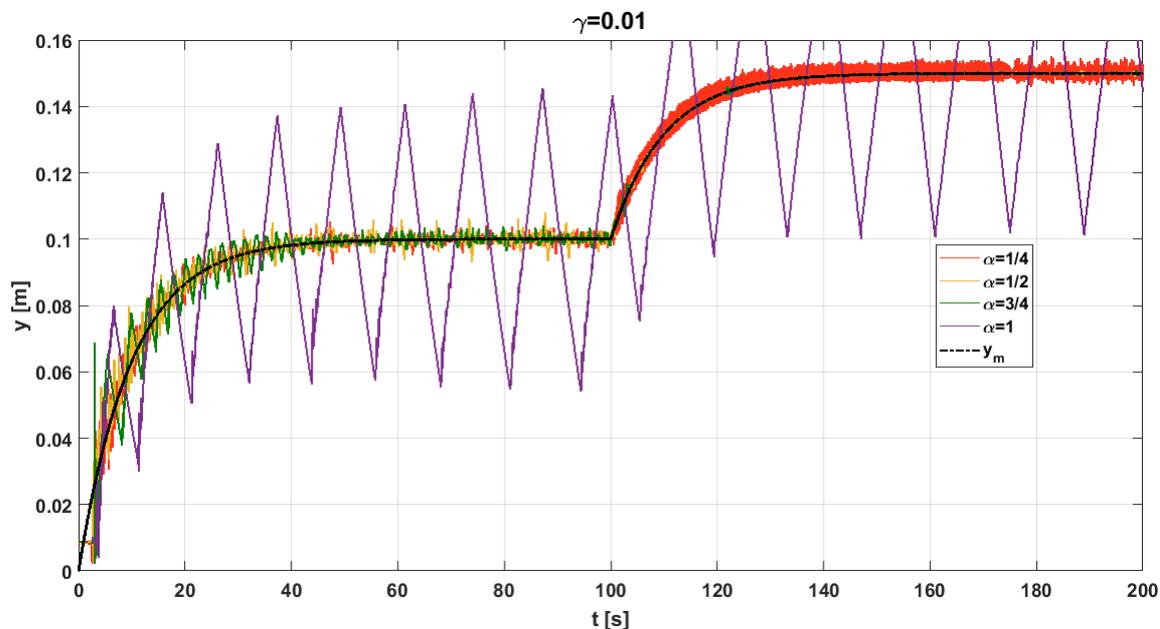


Figura 4.14: Respuestas del sistema hidráulico de primer orden cuando $\gamma = 0.01$

La salida del sistema cuando $\gamma = 0.005$ se ilustra en la Figura 4.15. Como se puede observar, el seguimiento del sistema fraccionario es bueno para los valores de α menores a uno. En comparación con la respuesta mostrada en las figuras 4.14 y 4.16, éste valor de γ se ajusta mejor a los valores elegidos de α .

A diferencia de la Figura 4.15, en la Figura 4.16 se observa que al sistema le toma más tiempo la convergencia al modelo de referencia. Esto se debe a que el valor de γ es muy pequeño para los valores de α . A pesar de ello, este sistema adaptable resulta no ser tan sensible a la variación en la ganancia de adaptación.

El comportamiento de los parámetros adaptables es mostrado a continuación en las figuras 4.17, 4.18 y 4.19. Es de notar que, en todos los experimentos realizados sobre este sistema, θ_2 tiende a un valor distinto para cada valor de α , a diferencia de θ_1 . Además, podemos apuntar que mientras más pequeño es el valor de la ganancia de adaptación, los parámetros oscilan dentro de una región más pequeña en torno a su valor final. Esto se ve reflejado en la Figura 4.19, cuando $\gamma = 0.001$.

Una vez que contamos con resultados experimentales del desempeño del controlador con adaptación de uno y dos parámetros sobre el sistema hidráulico, resulta interesante hacer la comparación entre los mejores casos de cada implementación. Recordemos que el mejor caso del sistema con un parámetro adaptable se presentó con $\alpha = 1/4$ y $\gamma = 0.01$, mientras que el mejor caso del sistema con adaptación de dos parámetros se presentó con $\alpha = 1/2$ y $\gamma = 0.005$. La comparación de las respuestas es ilustrada en la Figura 4.20. Con respecto al desempeño del sistema, ambos casos son muy similares. Sin embargo, cuando se adapta sólo un parámetro, la planta alcanza más rápido la altura deseada y tiene menos oscilaciones. Por otro lado, al ver las señales de control generadas para cada caso, es evidente que la señal de control, del controlador con adaptación de dos parámetros, presenta mayores excursiones y hay mayor efecto del ruido de medición.

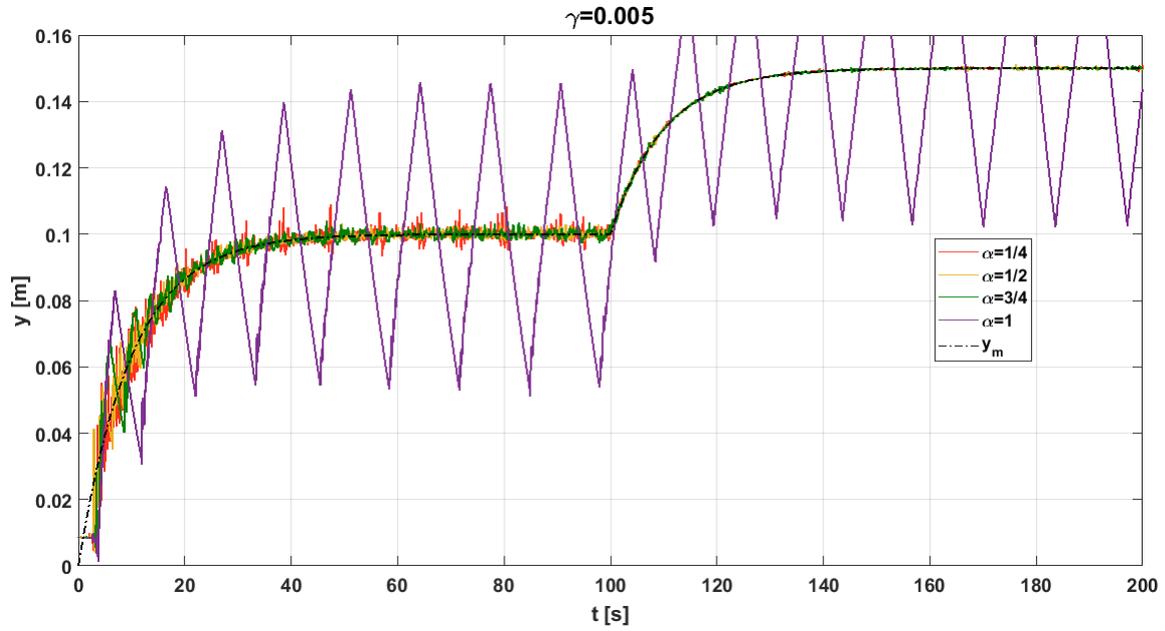


Figura 4.15: Respuestas del sistema hidráulico de primer orden cuando $\gamma = 0.01$

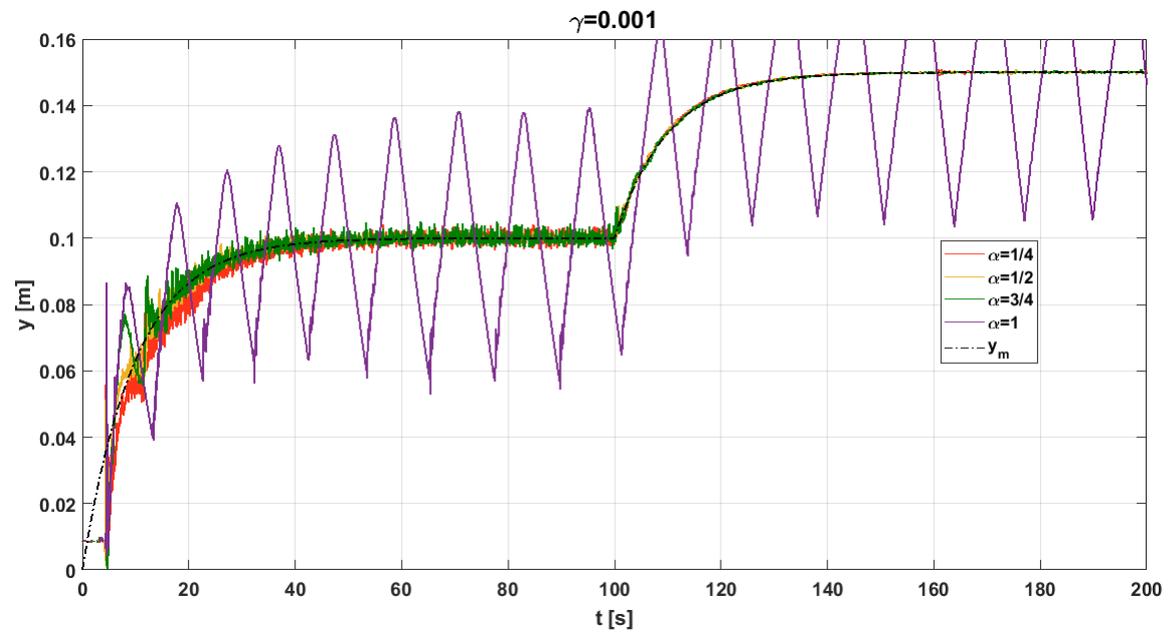


Figura 4.16: Respuestas del sistema hidráulico de primer orden cuando $\gamma = 0.001$

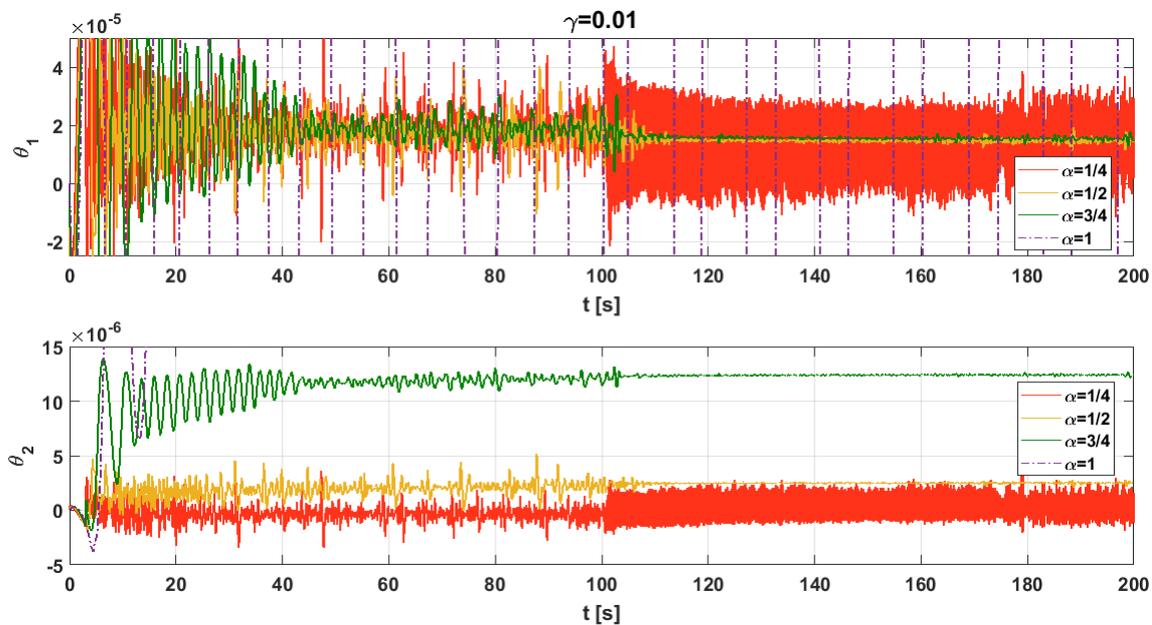


Figura 4.17: Dinámicas de θ del sistema hidráulico de primer orden cuando $\gamma = 0.01$

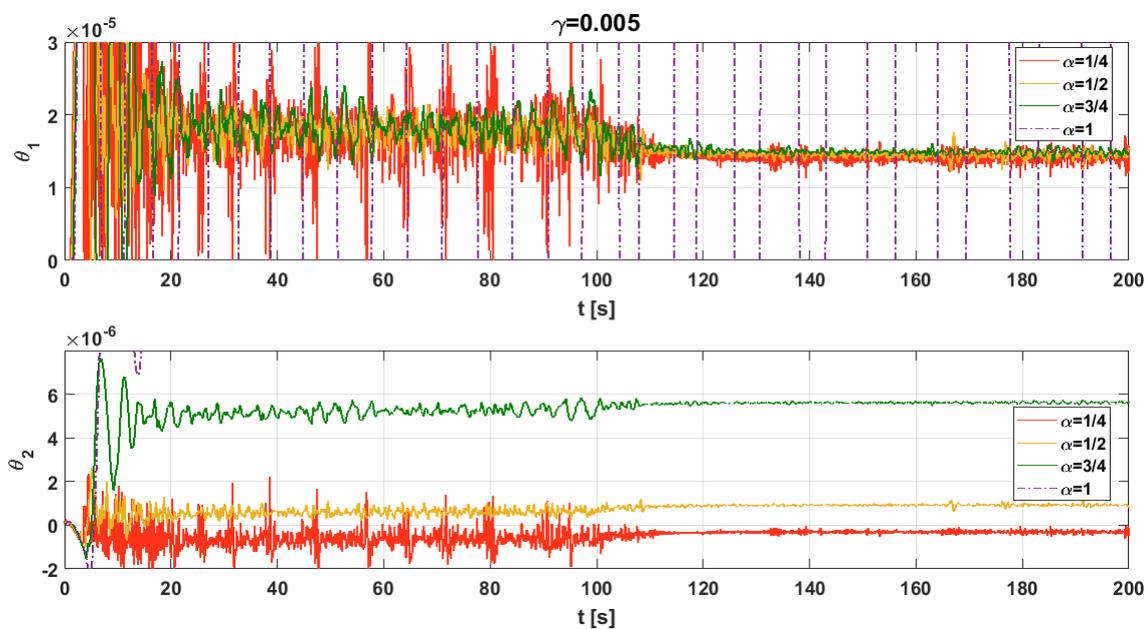


Figura 4.18: Dinámicas de θ del sistema hidráulico de primer orden cuando $\gamma = 0.005$

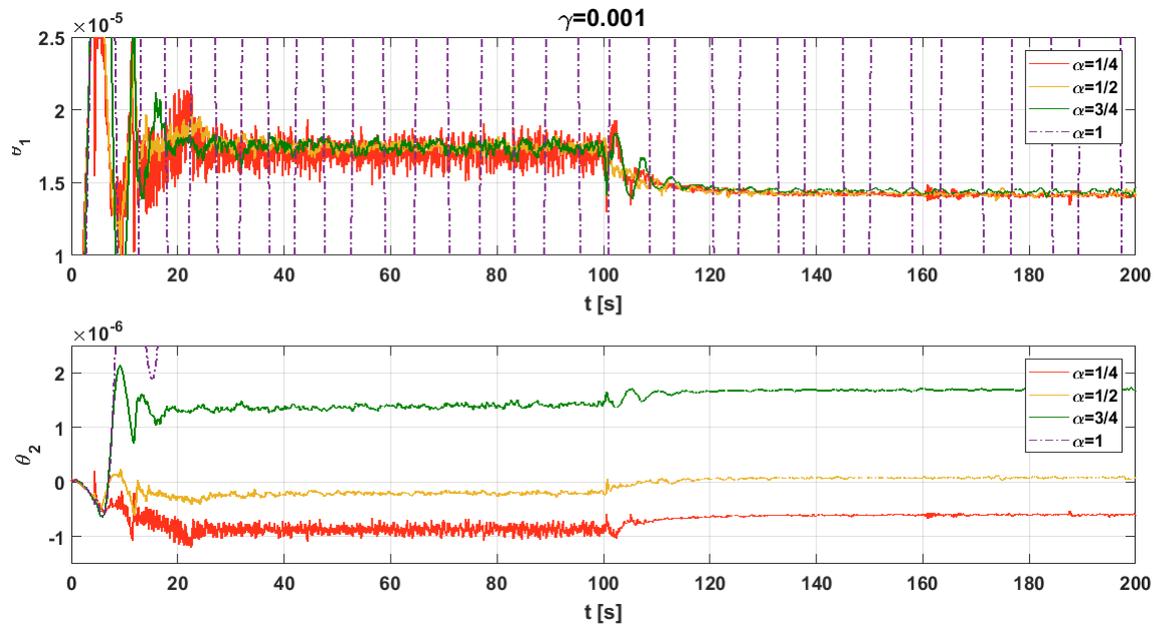


Figura 4.19: Dinámicas de θ del sistema hidráulico de primer orden cuando $\gamma = 0.001$

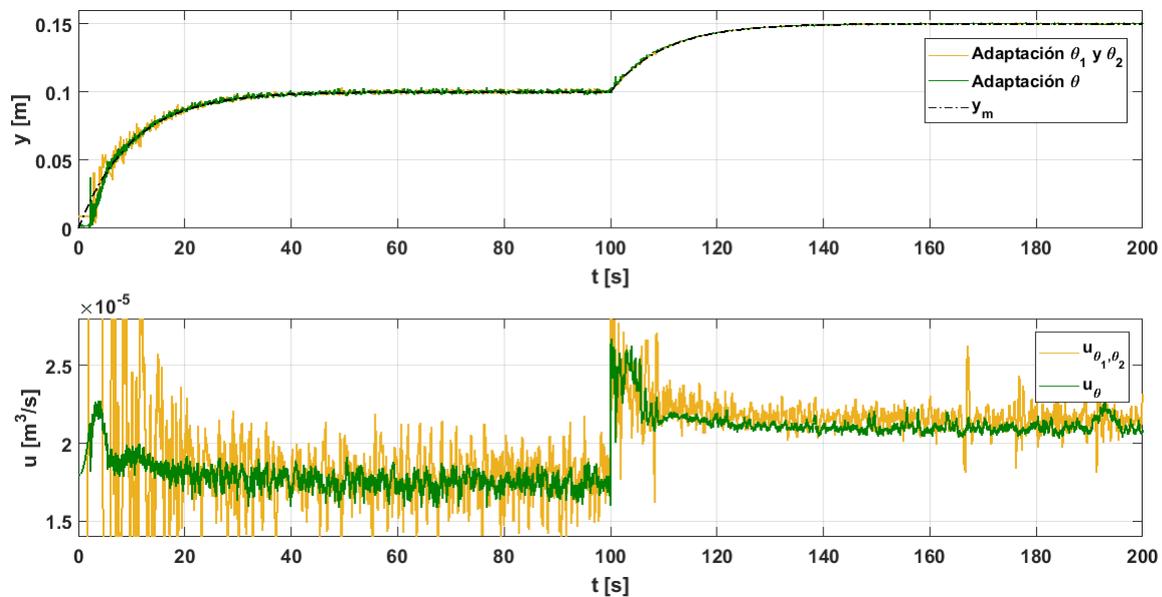


Figura 4.20: Señales de control con adaptación de uno y dos parámetros para sus mejores casos, respectivamente

4.3. Control con adaptación de un parámetro del sistema hidráulico de segundo orden

A continuación, se muestran los resultados experimentales de la implementación del controlador sobre el sistema hidráulico de segundo orden con un parámetro adaptable θ . La sintonización de cada experimento se describe en la Tabla 4.3. El modelo de referencia utilizado es (3.8), donde $k_0 = 0.1$ con condición inicial $\theta(0) = 0$.

Experimento	α	γ
1	1/6	0.01
2	1/6	0.008
3	1/6	0.006
4	1/4	0.01
5	1/4	0.008
6	1/4	0.006
7	1/2	0.001
8	1/2	0.0008
9	1/2	0.0006
10	1	0.00005

Tabla 4.3: Experimentos con diferentes parámetros

En este caso, el error RMS no se consideró como un parámetro que determinara cual fue el mejor y el peor caso de todos los experimentos, debido a que el sistema es sensible a las variaciones de α y γ . Es por ello, que no logramos establecer un valor γ que funcione para todos los valores de α sin que el tanque 1 se desborde.

Para determinar que combinación de parámetros de diseño permitió el mejor desempeño del sistema, elegimos las respuestas que tuvieran el mejor seguimiento al modelo de referencia y, posteriormente elegir el que tenga el menor valor de error RMS. Esto resultó en $\alpha = 1/6$ y $\gamma = 0.01$. Para definir el peor caso bastó con observar cual de todos los experimentos tenía el peor seguimiento al modelo de referencia, obteniendo $\alpha = 1$ y $\gamma = 0.00005$. Dichos resultados se muestran en la Figura 4.21. En ella se puede observar que el sistema de orden entero es lento y no converge al valor deseado en el tiempo establecido. Además, al cambiar el nivel del tanque 2 el sistema se hace inestable contrario a lo que sucede en el caso fraccionario, ya que el sistema sigue adecuadamente el modelo de referencia con pequeñas oscilaciones al transitar de un valor a otro.

Pero, veamos que sucede con los demás experimentos cuando mantenemos el valor de α y hacemos variar el valor de la ganancia de adaptación. En la Figura 4.22, manteniendo el orden de integración en 1/6 se puede observar que el experimento con $\gamma = 0.01$ tiene una respuesta más rápida que los demás casos. Sin embargo, durante su etapa transitoria presenta oscilaciones de mayor magnitud.

Por otro lado, veamos que sucede cuando el orden de integración es $\alpha = 1/4$. En la Figura 4.23 la respuesta con menor valor de γ tiene oscilaciones de menor magnitud, lo cual permite que el sistema converja más rápido que en los otros casos, donde γ es mayor. Sin embargo, al cambiar el valor del nivel de agua el sistema se vuelve inestable para todos los casos.

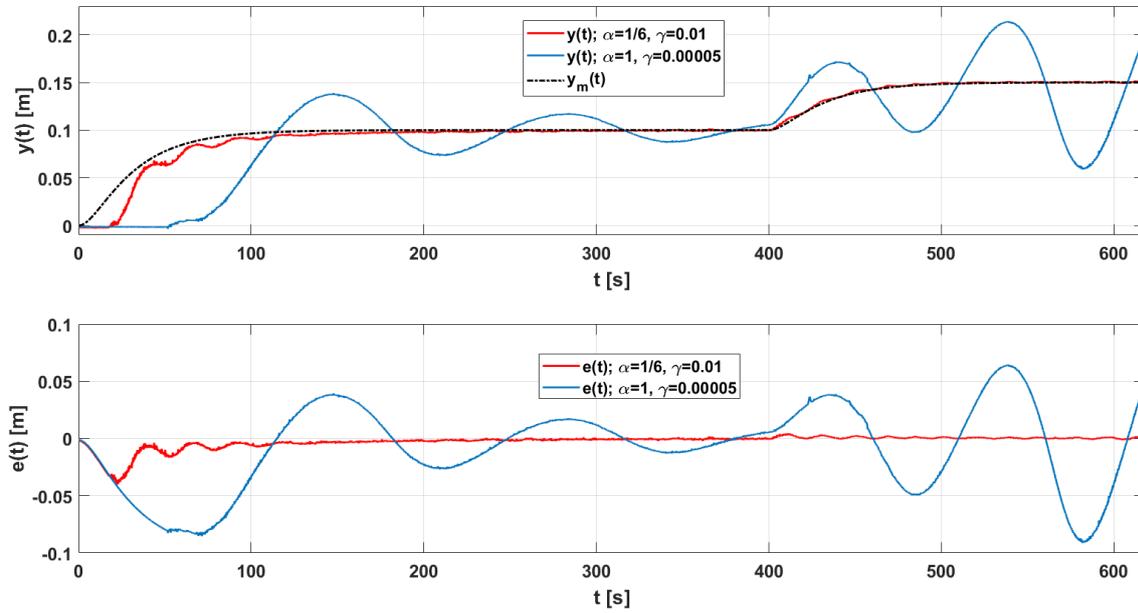


Figura 4.21: Salida del sistema hidráulico de segundo orden y señal de error

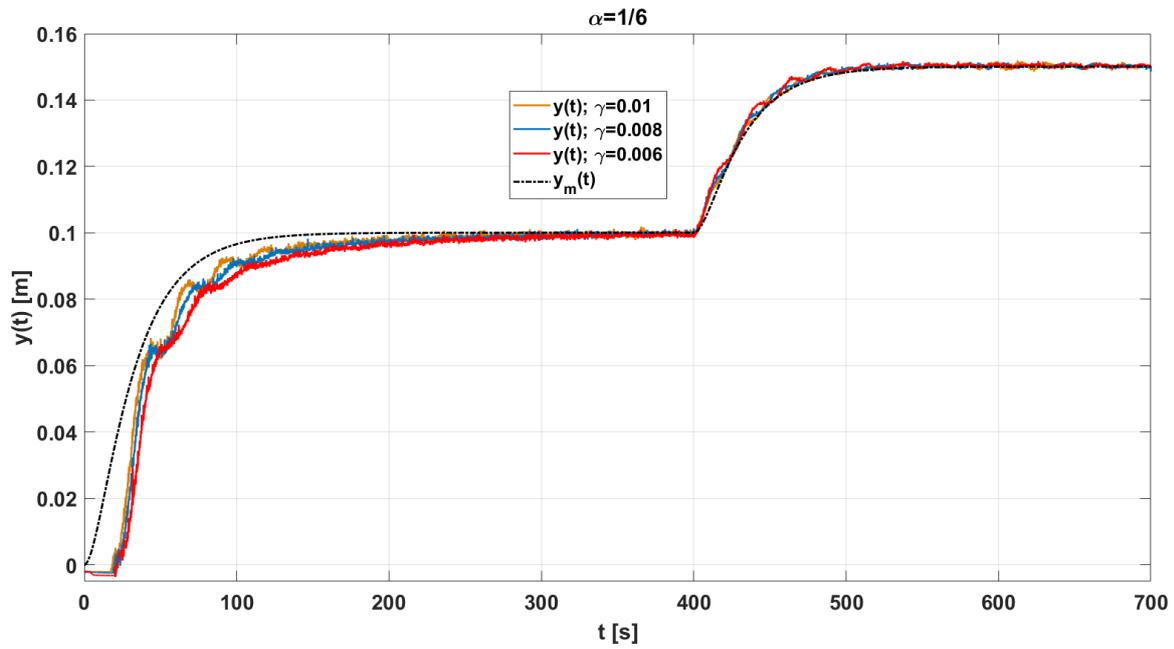


Figura 4.22: Salida del sistema hidráulico de segundo orden con $\alpha = 1/6$

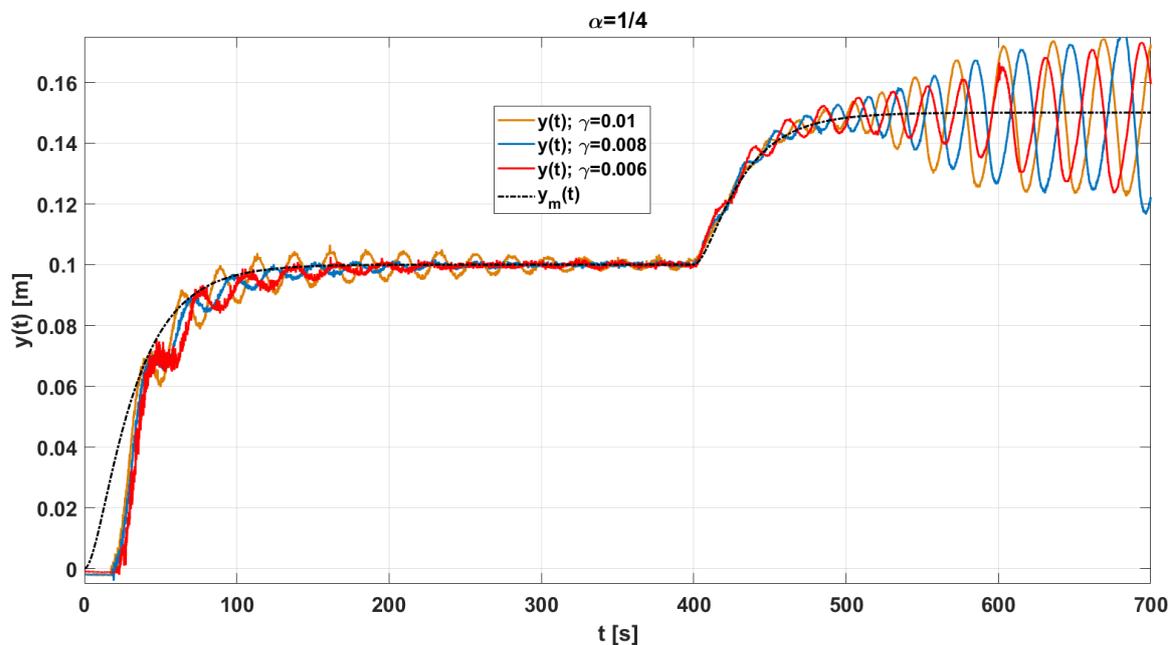


Figura 4.23: Salida del sistema hidráulico de segundo orden con $\alpha = 1/4$

En la Figura 4.24 mostramos los experimentos realizados con $\alpha = 1/2$. En ella, las respuestas del sistema tienen un tiempo de levantamiento mayor que las mostradas en las dos gráficas anteriores. Esto se debe a que el valor de gamma disminuyó diez veces para cada caso, respecto a los experimentos anteriores. No obstante, el tiempo de asentamiento es menor que cuando $\alpha = 1/6$, o que cuando $\alpha = 1/4$. Por otro parte, al aplicar un segundo escalón y modificar el nivel de referencia, el sistema se vuelve inestable para $\gamma = 0.001$ y $\gamma = 0.0008$.

Ahora, mostraremos la dinámica del parámetro adaptable θ resultante de cada uno de los experimentos. Esto se muestra en las Figuras 4.25, 4.26 y 4.27. En la Figura 4.25 el parámetro adaptable con menor número de oscilaciones se da cuando $\gamma = 0.006$. A pesar de las diferencias que existen en el desempeño de cada caso, θ tiende siempre al mismo valor. Esto se debe a que el sistema permanece bajo las mismas condiciones en todos los casos. El cambio que se observa en el valor al que convergen los parámetros, es consecuencia de la variación en el valor de la referencia.

En la Figura 4.26 el parámetro de adaptación presenta menos oscilaciones cuando $\gamma = 0.006$. Cabe resaltar que las gráficas del parámetro tienen menos ruido que en la Figura 4.25. Aunque, cuando se ejecuta el cambio del nivel de referencia el parámetro crece indefinidamente en todos los casos debido a que el sistema se hace inestable.

Por otra parte, la Figura 4.27 indica que, cuando $\alpha = 1/2$ el parámetro adaptable es más lento al inicio, pero converge a un valor en menor tiempo que para los otros valores del α . Por otro lado, cuando se modifica el valor de referencia, θ tiende a un valor distinto cuando $\gamma = 0.0006$. Para los otros dos casos el sistema se vuelve inestable.

Una de las pruebas que se realizaron durante la ejecución del experimento fue probar el sistema adaptable ante perturbaciones. Esto consistió en abrir la válvula del tanque 1, tal que el flujo de salida de la misma válvula fuese constante. Una vez que el nivel del tanque 2 llegó al valor deseado,

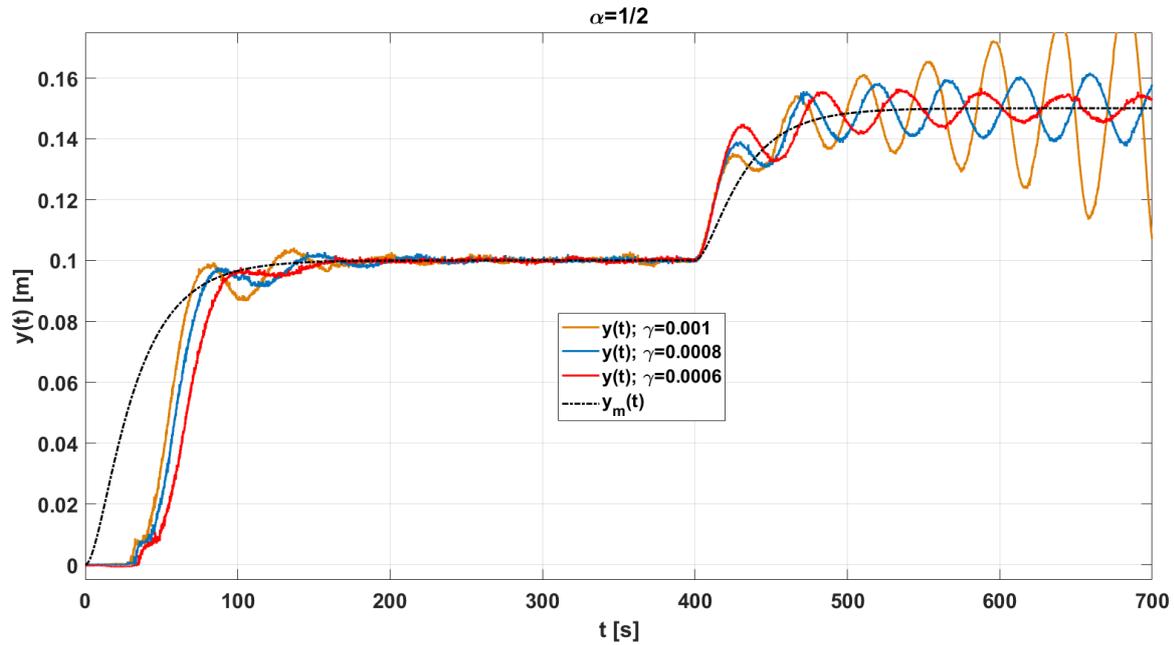


Figura 4.24: Salida del sistema hidráulico de segundo orden con $\alpha = 1/2$

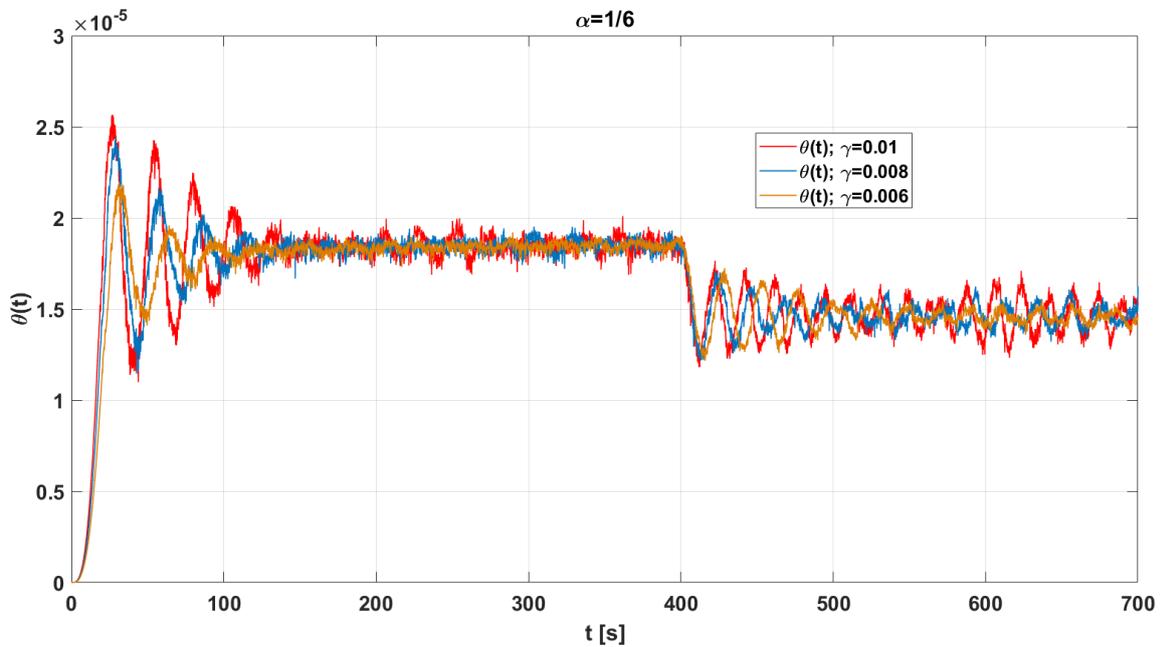


Figura 4.25: Parámetro adaptable θ del sistema hidráulico de segundo orden con $\alpha = 1/6$

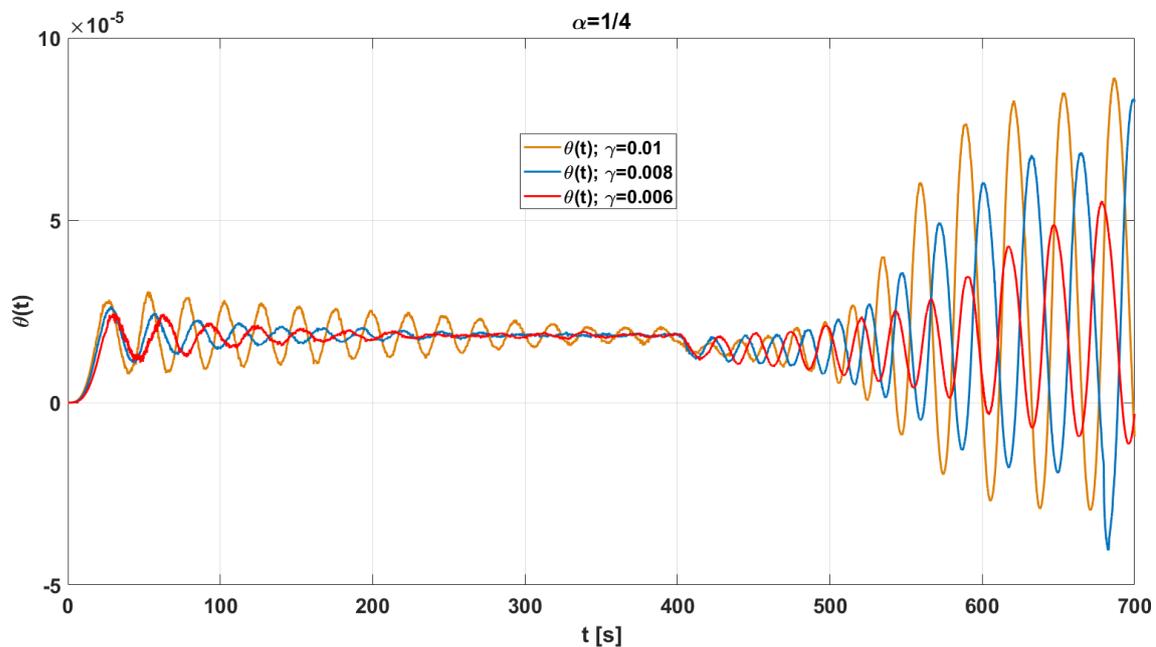


Figura 4.26: Parámetro adaptable θ del sistema hidráulico de segundo orden con $\alpha = 1/4$

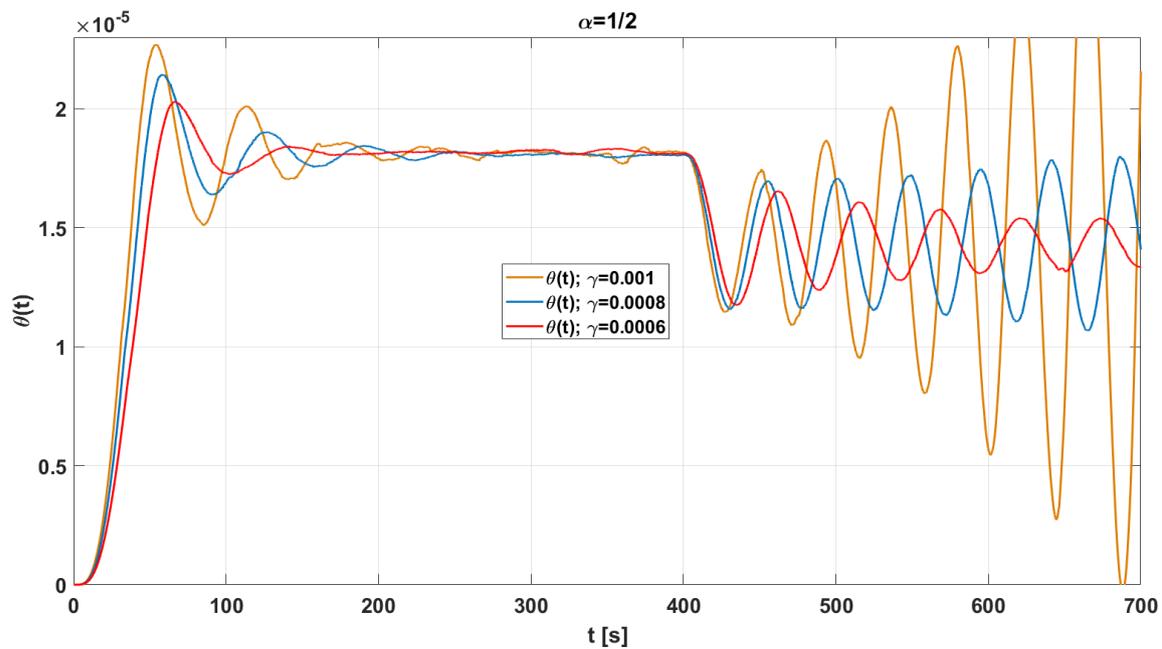


Figura 4.27: Parámetro adaptable θ del sistema hidráulico de segundo orden con $\alpha = 1/2$

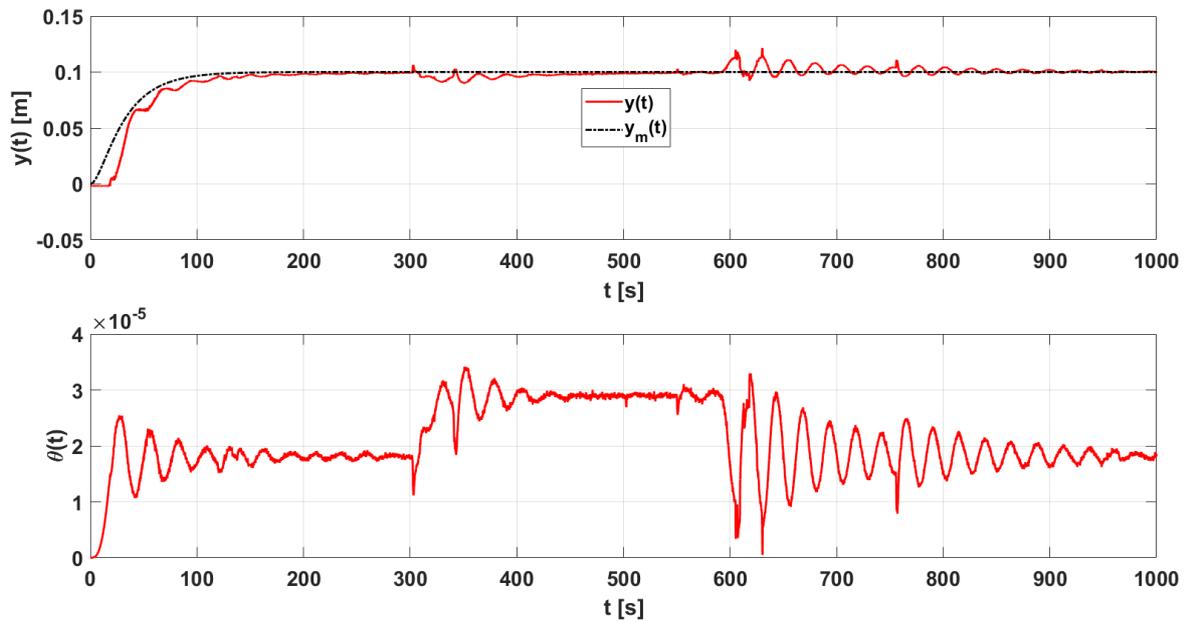


Figura 4.28: Salida del sistema hidráulico de segundo orden con perturbaciones para $\alpha = \frac{1}{6}$ y $\gamma = 0.01$

cerramos la válvula del tanque 1, representó una nueva perturbación. Pese a que en el modelo del sistema no consideramos perturbaciones, el sistema respondió adecuadamente, y en ambas perturbaciones se logró la convergencia. En la Figura 4.28 se pueden observar las dos ocasiones en que el sistema fue perturbado, y como el control se adapta a cada perturbación. Además, cuando el sistema cambia, el parámetro adaptable tiende a un valor distinto. Lo anterior tiene sentido ya que al perturbarse el sistema el modelo utilizado ya no describe su comportamiento.

4.4. Control con adaptación de dos parámetros del sistema térmico de primer orden

Bajo el esquema de control con adaptación de dos parámetros, descrito por (2.14), y con el modelo de referencia (3.10), realizamos una serie de experimentos caracterizados en la Tabla 4.4. A continuación, presentamos los resultados obtenidos.

Experimento	α	γ
1	1/3	0.001
2	1/3	0.0005
3	1/3	0.0001
4	1/2	0.001
5	1/2	0.0005
6	1/2	0.0001
7	1	0.001
8	1	0.0005
9	1	0.0001

Tabla 4.4: Experimentos realizados sobre el sistema térmico.

En seguida, mostramos un gráfico del error RMS, calculado para cada experimento, en la Figura 4.29. Una vez que conocemos el error RMS, determinamos que el mejor caso se presentó en el experimento 1 ($\alpha = 1/3$, $\gamma = 0.001$). Mientras que el peor caso se presentó en el experimento 3 ($\alpha = 1/3$, $\gamma = 0.0001$).

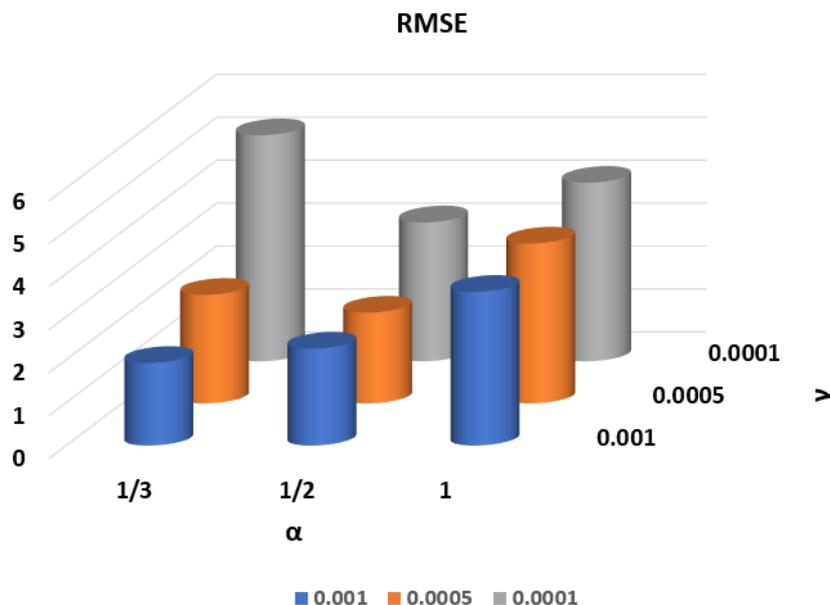


Figura 4.29: RMSE de la adaptación de 2 parámetros en el sistema térmico.

La Figura 4.30 ilustra los experimentos 1 y 3, tratados en el párrafo anterior. En el gráfico, es

evidente la ventaja que presenta el experimento 1 ($\alpha = 1/3$, $\gamma = 0.001$) frente al experimento 3 ($\alpha = 1/3$, $\gamma = 0.0001$). Esta ventaja, se debe a que la ganancia de adaptación γ es mayor en el experimento 1, por lo que converge mucho más rápido. Sin embargo, estos experimentos solo son el mejor y el peor resultado, según su error RMS.

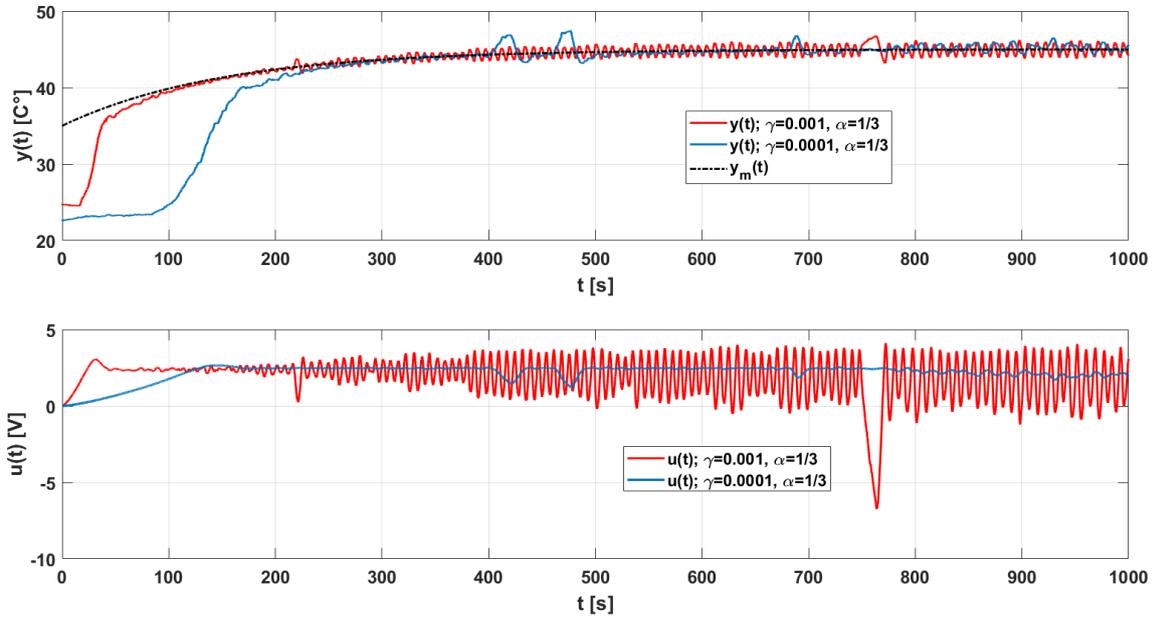


Figura 4.30: Salida del sistema térmico de primer orden y señal de control con adaptación de dos parámetros.

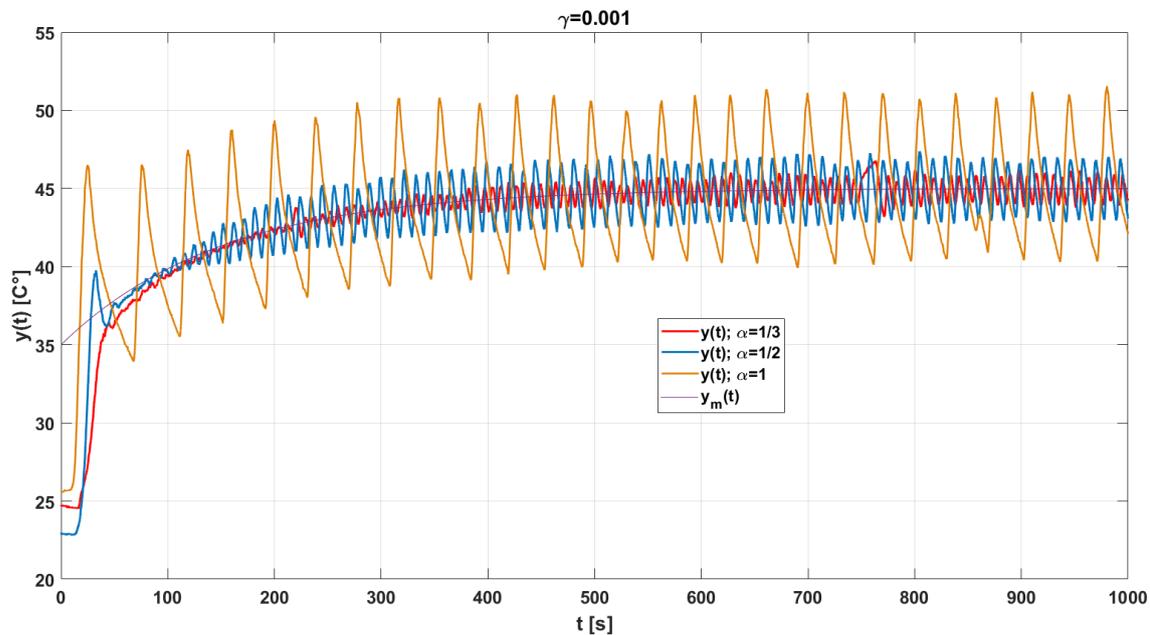
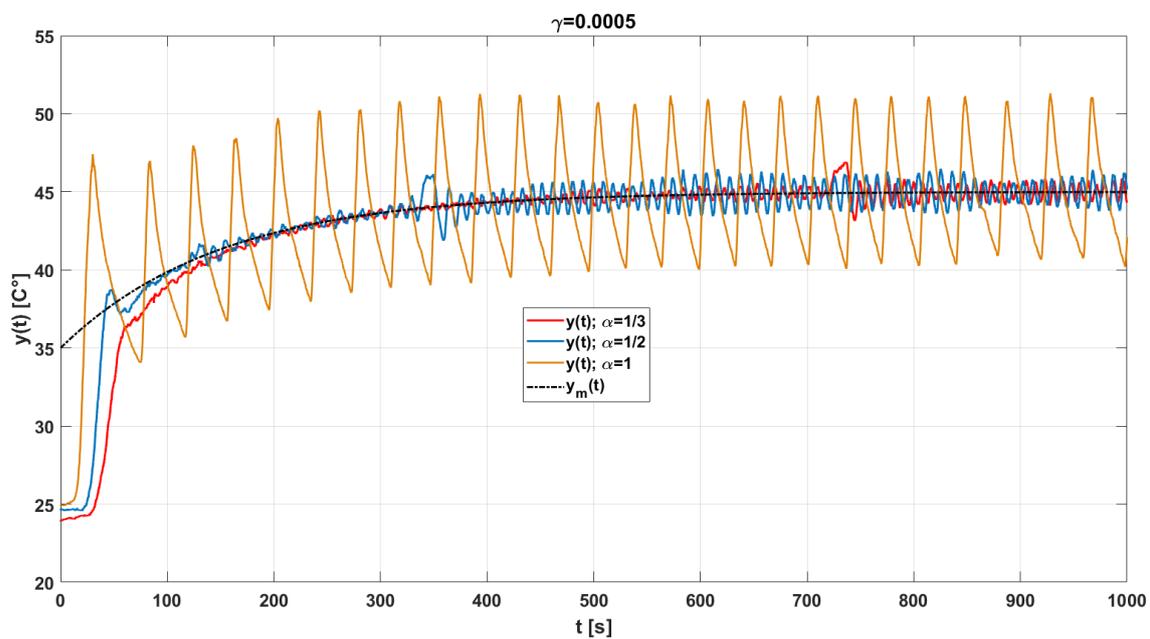
Revisemos ahora que pasa cuando mantenemos la misma ganancia de adaptación γ , mientras se hace variar el orden de integración α .

De las figuras 4.31, 4.32 y 4.33 es evidente que, al disminuir el orden de integración α , se logra disminuir la amplitud de las oscilaciones en la respuesta del sistema. Este comportamiento es bastante deseable. Además, como las gráficas están en la misma escala de tiempo, es válido hacer una comparación entre ellas. Así, podemos asegurar que también disminuye la amplitud de las oscilaciones cuando disminuimos la ganancia de adaptación γ . Sin embargo, la reducción en la ganancia de adaptación también trae como consecuencia una respuesta más lenta del sistema. Es decir, mientras más pequeña la ganancia de adaptación, toma más tiempo la convergencia del sistema al modelo de referencia.

Por ejemplo, veamos las figuras 4.31 y 4.32. De ellas podemos observar que es significativo el cambio en el comportamiento cuando variamos la ganancia de adaptación. A pesar de que la convergencia de la planta al modelo de referencia se logra en menor tiempo en el caso con $\gamma = 0.001$, se tienen oscilaciones de amplitudes no deseables. Mientras que, en el caso con $\gamma = 0.005$ la convergencia se logra en un tiempo mayor, pero las oscilaciones disminuyen aceptablemente.

Si ahora comparamos los gráficos de las figuras 4.32 y 4.33, podemos notar que la reducción de la ganancia de adaptación aumenta considerablemente el tiempo de convergencia.

Revisemos ahora que pasa con los parámetros adaptables en las figuras 4.34, 4.35 y 4.36. Es importante notar que, en todos los experimentos, θ_1 y θ_2 , tienden al mismo valor, respectivamente.

Figura 4.31: Salida del sistema con $\gamma = 0.001$.Figura 4.32: Salida del sistema con $\gamma = 0.0005$.

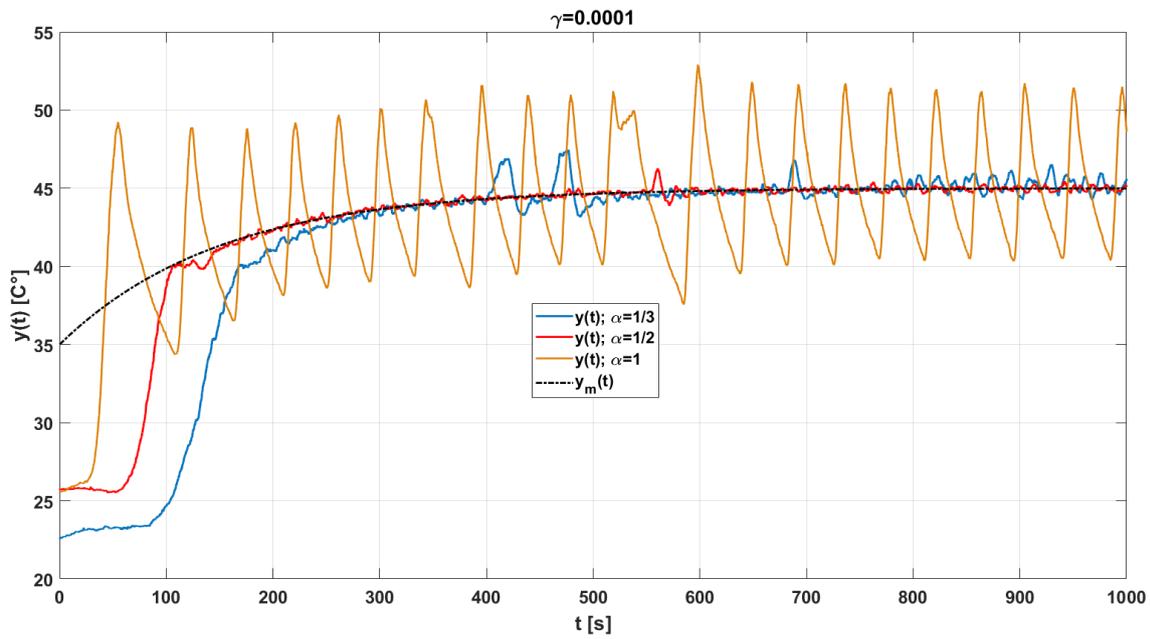


Figura 4.33: Salida del sistema con $\gamma = 0.0001$.

En estos gráficos también son apreciables las diferencias remarcadas en los gráficos de la salida (figuras 4.31, 4.32 y 4.33).

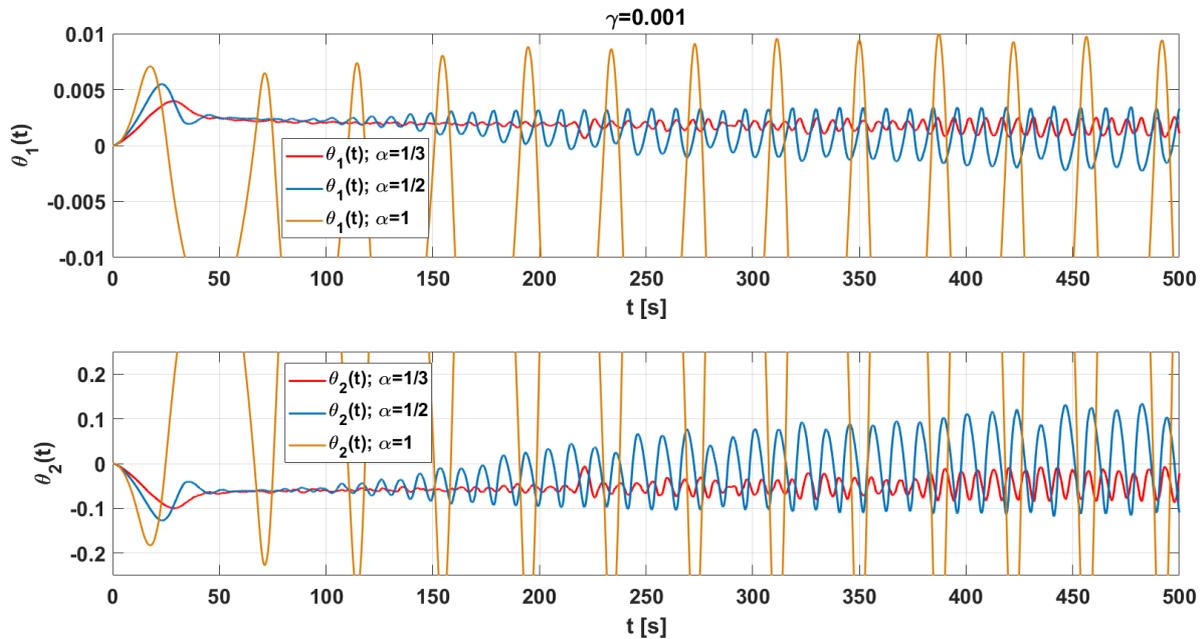


Figura 4.34: Parámetros θ_1 y θ_2 con $\gamma = 0.001$

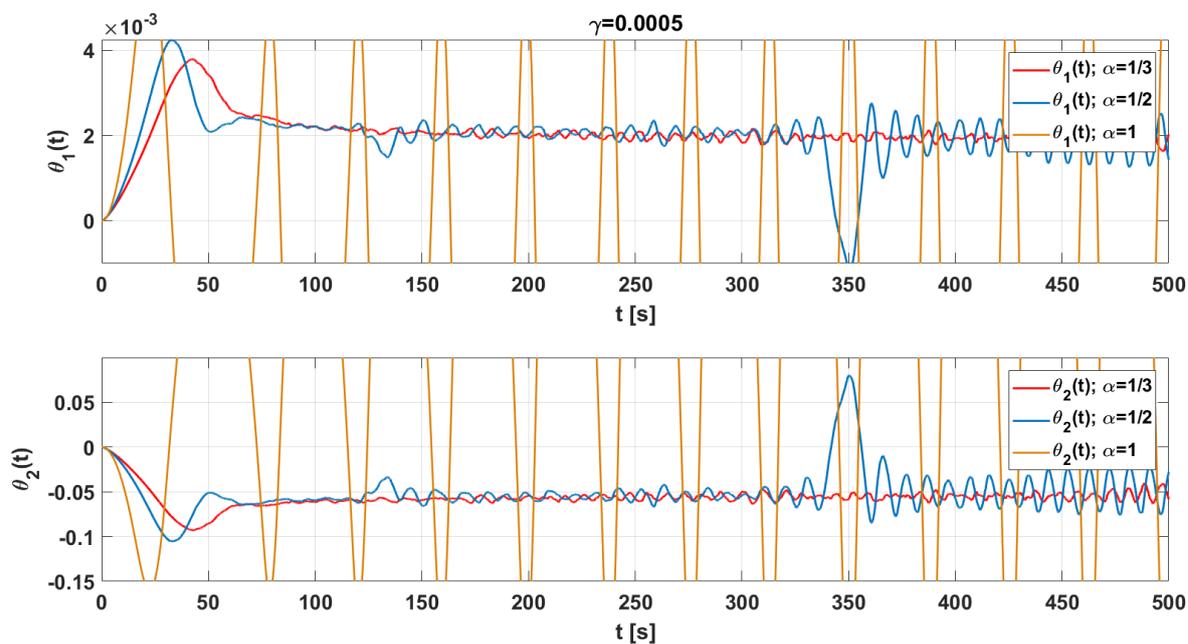


Figura 4.35: Parámetros θ_1 y θ_2 con $\gamma = 0.0005$

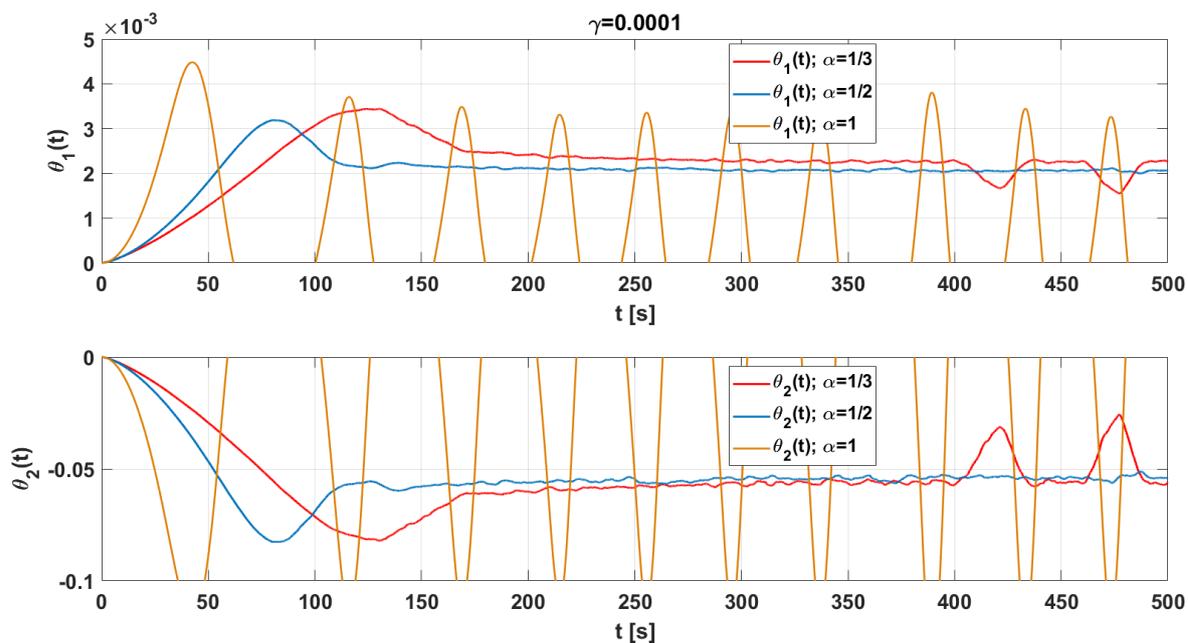


Figura 4.36: Parámetros θ_1 y θ_2 con $\gamma = 0.0001$

En la Figura 4.36 se aprecia el valor al que tienden los parámetros, pues presenta menos oscilaciones y convergen más rápido a su valor final.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo, a partir de la teoría conocida de control adaptable basado en modelo de referencia (MRAC), así como de la teoría del cálculo fraccionario, diseñamos un par de controladores con integración de orden fraccionario, que constan de adaptar uno y dos parámetros de un sistema. A su vez, se implementaron dichos controladores en un sistema de tanques acoplados, aprovechando las configuraciones de primer y segundo orden del mismo. De la misma manera, implementamos el controlador con adaptación de dos parámetros sobre un sistema que consta de una cámara térmica. La implementación de los controladores en los sistemas mencionados nos permitió realizar una serie de experimentos con distintas sintonizaciones para evaluar su rendimiento. A pesar de que no utilizamos algún método para sintonizar la ganancia de adaptación γ , ni el orden de integración α , durante la etapa experimental logramos obtener, al menos, una combinación de α y γ que nos permitiera alcanzar el objetivo de control de forma satisfactoria.

Un controlador de orden fraccionario tiene más parámetros de diseño en comparación con los controladores de orden entero. Debido a lo anterior, una de las principales ventajas de implementar un MRAC con integración de orden fraccionario es que, al disminuir el orden de integración es posible ajustar la ganancia de adaptación a un valor más grande, sin que el sistema se haga inestable. Esto hace que el error de seguimiento disminuya en menor tiempo y, las oscilaciones decrementsen en frecuencia y magnitud. Sin embargo, la sintonización de cualquiera de los parámetros de diseño no es independiente. Se deben tomar en cuenta lo demás parámetros.

Otra de las ventajas de este tipo de controladores, radica en la robustez, al menos experimental, que presentan ante perturbaciones y dinámicas no modeladas. Esto, lo verificamos en la prueba realizada con el controlador de dos parámetros adaptables en el sistema hidráulico de segundo orden. En dicha prueba, el sistema fue perturbado dos veces, logrando en ambas ocasiones que el sistema siguiera nuevamente la referencia.

Una consideración importante al diseñar un MRAC, es el modelo de referencia. Ya que, no basta que la salida del modelo de referencia tenga el desempeño deseado. También, es importante considerar las características del sistema a controlar. Esto se ve ejemplificado, al no utilizar el mismo modelo de referencia de la planta hidráulica en la planta térmica, puesto que no tienen el mismo tiempo de respuesta.

Por otra parte, el MRAC no garantiza la convergencia de los parámetros del sistema a sus valores reales. Aunque, en todos los experimentos con un comportamiento estable, los parámetros adaptables

tienden a un valor constante cuando el tiempo tiende a infinito.

En el caso de sistemas no lineales, es necesario linealizar el sistema alrededor de un punto de operación para el diseño del controlador. Esto implica que, el controlador resultante lleve al sistema a ese punto de operación. A pesar de ello, al cambiar el punto de operación, los controladores propuestos tienen un buen comportamiento y, en algunos casos, mejoraron su desempeño.

Aparte de lo ya mencionado, los sistemas LTI de orden fraccionario deforman la región de estabilidad, tal que sea mayor, para $0 < \alpha < 1$, que la región de estabilidad de un sistema LTI de orden entero.

Bibliografía

- Åström, K. (2015). History of adaptive control. En *Encyclopedia of Systems and Control* (pp. 526-533). Springer.
- Åström, K. J. & Wittenmark, B. (2013). *Adaptive control*. Courier Corporation.
- Goodwine, B. (2014). Modeling a multi-robot system with fractional-order differential equations. En *Robotics and Automation (ICRA), 2014 IEEE International Conference on* (pp. 1763-1768). IEEE.
- Gregory, P. (1959). *Proceedings of the Self Adaptive Flight Control Systems Symposium*. Wright air development center, Air research y development command, US Air Force, Wright-Patterson air force base, Ohio.
- Khalil, H. K. (1996). Nonlinear systems. *Prentice-Hall, New Jersey*, 2(5), 5-1.
- Kulish, V. V. & Lage, J. L. (2002). Application of fractional calculus to fluid mechanics. *Journal of Fluids Engineering*, 124(3), 803-806.
- Ladaci, S. [S] & Charef, A. [A]. (2003). MIT adaptive rule with fractional Integration. En *Proceedings of CESA*.
- Ladaci, S. [Samir] & Charef, A. [Abdelfatah]. (2006). On fractional adaptive control. *Nonlinear Dynamics*.
- Makris, N. & Constantinou, M. (1991). Fractional-derivative Maxwell model for viscous dampers. *Journal of Structural Engineering*, 117(9), 2708-2724.
- Mathai, A. M. & Haubold, H. J. (2008). *Special functions for applied scientists*. Springer.
- Monje, C. A., Chen, Y., Vinagre, B. M., Xue, D., & Feliu-Batlle, V. (2010). *Fractional-order systems and controls: fundamentals and applications*. Springer Science & Business Media.
- Narendra, K. S. & Annaswamy, A. M. (2012). *Stable adaptive systems*. Courier Corporation.
- Navarro-Guerrero, G. & Tang, Y. (2015). Adaptive control for anesthesia based on a simple fractional-order model. En *Decision and Control (CDC), 2015 IEEE 54th Annual Conference on*. IEEE.
- Patil, M. D., Vyawahare, V. A., & Bhole, M. K. (2014). A new and simple method to construct root locus of general fractional-order systems. *ISA transactions*.
- Pérez, J., Servín, J., & González, M. (2018). *Control Adaptable de Orden Fraccionario Aplicado a un Sistema Hidráulico*. CNCA 2018.
- Petráš, I. (2011). *Fractional-order nonlinear systems: modeling, analysis and simulation*. Springer Science & Business Media.
- Podlubny, I. (1998). *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. Elsevier.
- Quanser Inc, C. (2012a). *Instructor Manual Heat Flow Experiment*.

- Quanser Inc, C. (2012b). *User Manual Heat Flow Experiment*.
- Sierociuk, D. (2014). Fractional Variable Order Derivative Simulink Toolkit (2012).
- Slotine, J.-J. E. & Li, W. (1991). *Applied nonlinear control*. Prentice hall Englewood Cliffs, NJ.
- Vinagre, B. M. & Monje, C. A. (2006). Introducción al control fraccionario. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*.
- Vinagre, B., Petráš, I., Podlubny, I., & Chen, Y. (2002). Using fractional order adjustment rules and fractional order reference models in model-reference adaptive control. *Nonlinear Dynamics*.
- Vinagre, B., Podlubny, I., Hernandez, A., & Feliu, V. (2000). Some approximations of fractional order operators used in control theory and applications. *Fractional calculus and applied analysis*, 3(3), 231-248.
- Xin, G. & Jue-Bang, Y. (2005). Chaos and chaotic control in a fractional-order electronic oscillator. *Chinese Physics*, 14(5), 908.