



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS  
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

SIMULACIONES MONTE CARLO DEL TRANSPORTE DE PARTÍCULAS  
ENERGÉTICAS EN PLASMAS CON REGIONES DE ISLAS MAGNÉTICAS

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:  
RODRIGO SAAVEDRA ESTRADA

JULIO JAVIER MARTINELL BENITO  
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES, UNAM  
JOSÉ JULIO EMILIO HERRERA VELÁZQUEZ  
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES, UNAM  
ROSALÍO FERNANDO RODRÍGUEZ ZEPEDA  
INSTITUTO DE FÍSICA, UNAM

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX. **DICIEMBRE** 2018



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

---

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Aparatos de fusión por confinamiento magnético . . . . .	2
1.2. Transporte del plasma en regiones con islas magnéticas . . . . .	4
<b>2. Descripción de las islas magnéticas</b>	<b>7</b>
2.1. Representación del campo magnético . . . . .	8
2.2. Formación de las islas magnéticas . . . . .	10
<b>3. Ecuaciones estocásticas de centro guía</b>	<b>13</b>
3.1. Dinámica de la función de distribución . . . . .	14
3.1.1. Ecuación cinética . . . . .	14
3.1.2. Ecuación de deriva cinética . . . . .	16
3.1.3. Operador de colisiones de Fokker-Planck . . . . .	17
3.1.4. Dispersión de Lorentz . . . . .	18
3.2. Dinámica de 1-partícula . . . . .	20
3.2.1. Ecuaciones de centro guía en coordenadas cartesianas . . . . .	21
3.2.2. Operadores de Boozer y Kuo-Petravic . . . . .	23
3.2.3. Ecuaciones estocásticas de centro guía . . . . .	24
3.3. Ecuaciones de centro guía en coordenadas magnéticas . . . . .	25
<b>4. Simulaciones en modelos de islas magnéticas</b>	<b>27</b>
4.1. Modelo de placa . . . . .	27
4.1.1. Trayectorias . . . . .	29
4.1.2. Simulaciones Monte Carlo . . . . .	31
4.2. Modelo de Tokamak . . . . .	34
4.2.1. Trayectorias . . . . .	34
4.2.2. Simulaciones Monte Carlo . . . . .	37
4.3. Modelo de Stellarator . . . . .	44

4.3.1. Trayectorias . . . . .	45
4.3.2. Simulaciones Monte Carlo . . . . .	45
<b>5. Conclusiones</b>	<b>49</b>
<b>Apéndice</b>	<b>51</b>
<b>A. Derivación de las ecuaciones de centro guía en coordenadas magnéticas</b>	<b>53</b>
A.1. Formulación Lagrangiana de la aproximación de centro guía . . . . .	53
A.2. Formulación Hamiltoniana de la aproximación de centro guía . . . . .	55
<b>B. Equivalencia entre operadores de colisión de Fokker-Planck y operadores de Boozer y Kuo-Petravic</b>	<b>57</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>59</b>

# Resumen

Se realizaron simulaciones Monte Carlo para estudiar el transporte de una población de iones en un plasma para varias configuraciones de campo: de placa, tokamak y stellarator. En cada uno se incluyó el efecto de colisiones e islas magnéticas. Se obtuvieron trayectorias individuales para estudiar la dinámica microscópica del sistema, secciones de Poincaré y coeficientes de difusión en varios regímenes de colisionalidad y para varios anchos de isla.

En el modelo de placa se muestra que las superficies magnéticas se mantienen tanto para las secciones de Poincaré del campo como para las secciones de trayectorias, i.e. no hay transporte estocástico. Además se obtiene que se incrementa el transporte de iones térmicos en la vecindad de la cadena de islas. En el modelo de tokamak que incluye curvatura del campo se obtiene que existe transporte estocástico y los coeficientes de difusión incrementan con el tamaño de las islas. En el modelo de stellarator se muestra que hay atrapamiento helicoidal, lo cual da un régimen de superbanana en la difusión.



# Capítulo 1

## Introducción

El consumo de energía de la población mundial está en aumento, mientras que la cantidad de recursos naturales de los que se extrae energía principalmente (gas natural y petróleo) está en decremento [1]. Además de esto, la extracción de energía de estos recursos tiene como consecuencia la producción de gases contaminantes que tienen un impacto negativo al medio ambiente y contribuyen al calentamiento global [2]. Por ello, es necesario encontrar una alternativa a la producción de energía actual, que sea menos costosa en cuanto a recursos naturales y además menos contaminante.

Un gran candidato para resolver esta problemática es la producción de energía por *fusión nuclear*, que consiste en colisionar núcleos atómicos ligeros para convertirlos en un solo núcleo más pesado y estable. En contraste a la *fisión nuclear* (separación de núcleos pesados en otros más ligeros), que se utiliza actualmente para producir energía en plantas nucleares alrededor del mundo, la energía por fusión aún no se ha producido de manera autosustentable. Si bien ambas son capaces de satisfacer la demanda energética de la población mundial, conseguir energía de fusión nuclear de forma autosustentable representaría grandes ventajas respecto a la obtenida por fisión nuclear: la primera requiere menos recursos, tiene un impacto menor en el medio ambiente y además es más segura (los posibles accidentes serían poco significativos en la zona de desastre, mientras que las plantas de fisión nuclear pueden tener consecuencias mayores; recuérdese los casos de Chernobyl y Fukushima).

Para conseguir producción de energía por fusión nuclear, es necesario que el sistema que contiene a los núcleos fusionables posea una alta densidad y temperatura. Por ejemplo, tal situación ocurre en el sol, en donde la fuerza gravitacional es lo suficientemente grande para producir temperaturas de 150 millones de °C. Sin embargo,



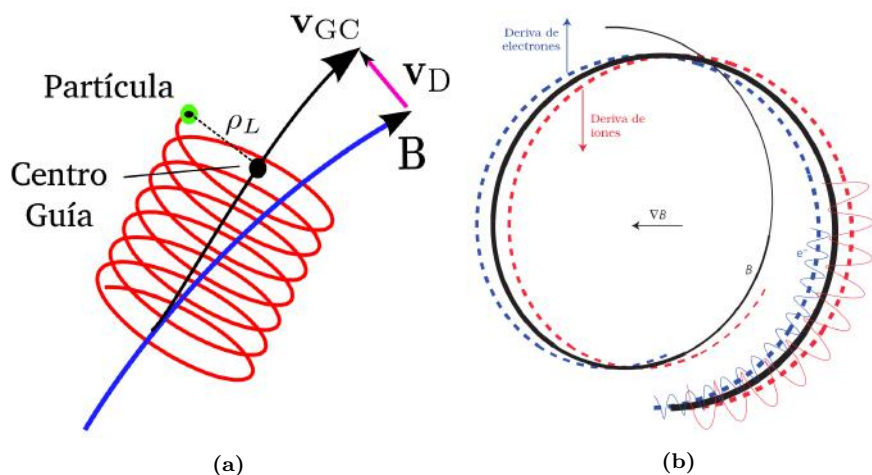
esto es difícil de imitar en un laboratorio, debido a las altas presiones requeridas que no se pueden generar con instrumentos convencionales. Dos líneas de investigación principales han sido estudiadas para conseguir fusión nuclear en un laboratorio: la *fusión por confinamiento inercial* y la *fusión por confinamiento magnético*. La primera consiste en comprimir un blanco pequeño de material fusionable mediante láseres, hasta lograr que dicho material implusione [3]. La segunda, que es el objeto de estudio en esta tesis, consiste en calentar a altas temperaturas el combustible y confinarlo durante el tiempo suficiente para que se den las reacciones de fusión. A temperaturas tan altas el combustible se encuentra en *estado de plasma*, el cual posee propiedades que permiten el uso campos magnéticos para su confinamiento [4].

## 1.1. Aparatos de fusión por confinamiento magnético

La interacción entre las partículas cargadas y los campos electromagnéticos está prescrita por la llamada *fuerza de Lorentz*. De acuerdo a ésta, en un campo magnético uniforme una partícula cargada seguirá una trayectoria helicoidal alrededor de una línea de campo (ver figura 1.1a). Este movimiento puede separarse en una parte de giro alrededor de la línea de campo y un desplazamiento del centro del círculo descrito, llamado *centro de guía*, paralelo a la línea de campo.

Entonces, un campo magnético uniforme acota a las partículas en dirección perpendicular al campo. Para acotarlas también en dirección paralela, puede pensarse en unir a las líneas de campo por sus extremos, quedando una geometría de espiras circulares para el campo. Esta puede generarse con un embobinado alrededor de una cámara toroidal. Sin embargo, este sistema tendría una magnitud más grande en el eje de simetría de la configuración (en esa región las bobinas se encuentran más cerca las unas de las otras), lo cual provocaría una *deriva* vertical de las partículas y por tanto la pérdida del plasma. Esta pérdida puede evitarse con una geometría un poco distinta: la de líneas de campo embobinadas alrededor de superficies toroidales. De modo que la deriva vertical en la parte exterior del toroide compense a la deriva en la parte interior (ver figura 1.1b).

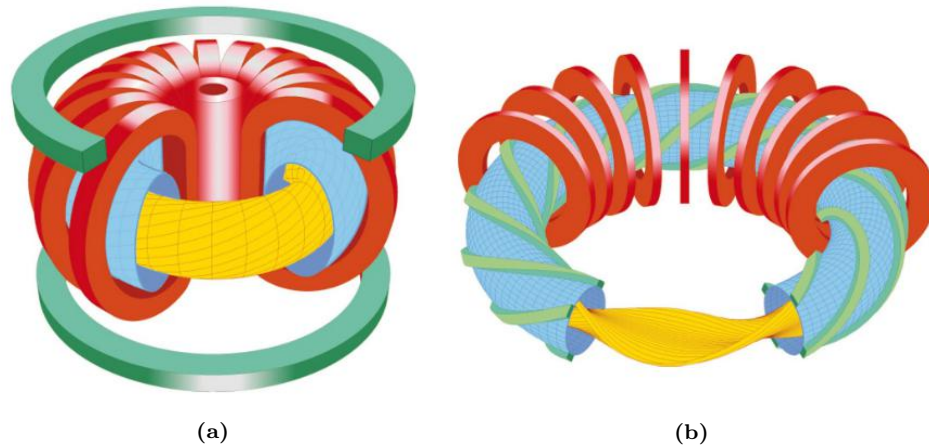
Se han propuesto dos aparatos de confinamiento que permiten generar campos magnéticos de este tipo: tokamaks y stellarators. Los tokamaks (ver figura 1.2a) son aparatos axisimétricos en los cuales el campo magnético es generado por bobinas externas y el plasma mismo. Una corriente de plasma muy intensa es inducida mediante



**Figura 1.1:** Dinámica de partículas cargadas en un campo magnético. (a) Movimiento en un campo local, se muestra la deriva debida a la curvatura del campo. Imagen tomada de [5] (b) Movimiento en un campo toroidal. Se muestra cómo el movimiento del centro guía en promedio se mantiene sobre la línea de campo. Imagen tomada de [4].

un solenoide central, la cual genera parte importante del campo magnético total. Por otro lado, los stellarators (ver figura 1.2b) son aparatos sin axisimetría cuyo campo es enteramente generado por bobinas externas que pueden tener diseños complicados. Debe destacarse que el tokamak ha pasado por un proceso de selección en el cual se ha mejorado cada vez más y más su diseño para conseguir el confinamiento óptimo y ha culminado en las propuestas de ITER y DEMO [6], experimentos que tienen como objetivo principal probar la utilidad del tokamak como aparato para producir energía de fusión nuclear de manera autosustentable. Lo mismo no ha ocurrido todavía para el stellarator, cuyo diseño aún sigue en desarrollo.

Existen varias problemáticas por las cuales la producción de energía de manera autosustentable no ha podido conseguirse con estos aparatos. Una de ellas tiene que ver con las temperaturas necesarias para que ocurran las reacciones de fusión. Para el tokamak, la producción de energía está dada por la potencia generada debido al calentamiento ohmico  $P_{OH} = R_p I_p^2$ , donde  $R_p$  es la resistencia eléctrica del plasma e  $I_p$  la corriente. Desafortunadamente, el máximo de la corriente del plasma se encuentra limitado por inestabilidades que pueden destruir la topología del campo y terminar el confinamiento. Por otro lado, el diseño del tokamak no puede alcanzar temperaturas tan altas por si mismo, por lo que deben utilizarse métodos adicionales para alcanzar las temperaturas requeridas. Uno de los métodos es el calentamiento

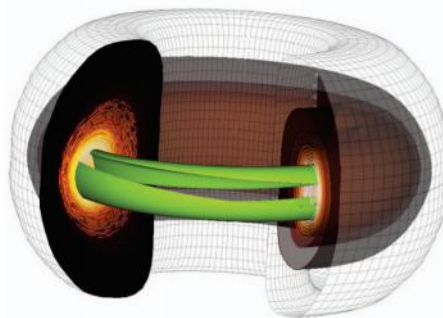


**Figura 1.2:** Aparatos de fusión por confinamiento magnético. (a) Tokamak. (b) Stellarator.

por *inyección de haces de partículas neutras* (NBI por sus siglas en inglés), éstas se introducen en una región del plasma a velocidades muy grandes, entonces penetran y se ionizan por colisiones con el plasma hasta termalizarse, i. e. hasta alcanzar la energía cinética promedio del plasma. Durante este proceso la energía cinética de las partículas neutras es transferida al plasma, aumentando su temperatura [7]. Otro método es el calentamiento por *resonancia de ciclotrón*, que consiste en incidir una onda electromagnética en una región del plasma con frecuencia tal que corresponda a la frecuencia de ciclotrón de iones o electrones. Las partículas en ésta región aumentan su energía y la transfieren al resto del plasma por colisiones [8].

## 1.2. Transporte del plasma en regiones con islas magnéticas

Un haz de partículas neutras inyectado en el plasma se ioniza tras haber penetrado. Entonces, queda una población de iones con una energía cinética superior a la de los iones que componen al plasma. Estos *iones rápidos* colisionan y se transportan a través del aparato de fusión. El transporte estará determinado por la topología del campo magnético y por las variables termodinámicas que caractericen al plasma, i.e. su densidad  $n$  y su temperatura  $T$ . Entender la dinámica de esta población de iones es importante puesto que en un experimento de fusión debe controlarse la pérdida de

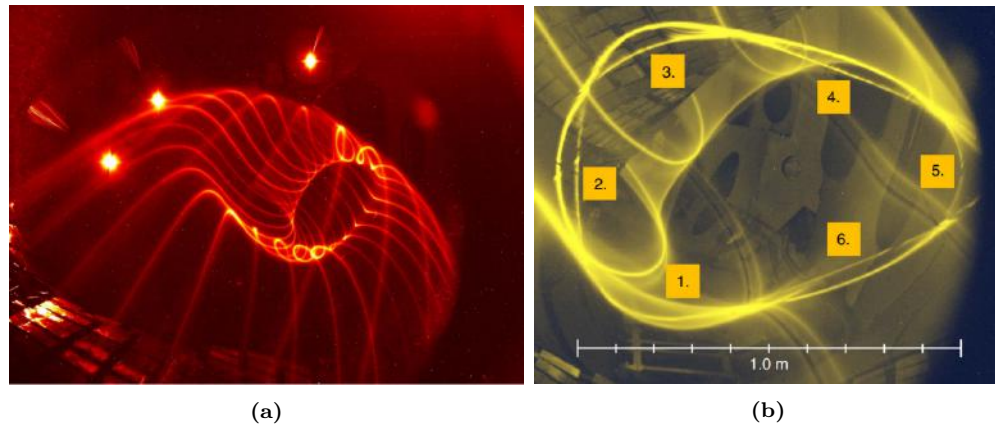


**Figura 1.3:** Representación tridimensional de una isla magnética en un tokamak. Imagen tomada de Sanderson et. al. [9].

estas partículas, es decir, deben controlarse las colisiones con las paredes que pueden dañar al aparato.

La población de partículas se moverá en conjunto a través del plasma, cambiando su distribución espacial y sus promedios de energía y momento. Cuantitativamente, este cambio se determina mediante los llamados *coeficientes de transporte*. Estos ya han sido calculados de manera sistemática y exacta para campo uniforme e infinito (Braginskii 1965 [10]), a la teoría formal que desarrolló se le llamó *teoría de transporte clásico*. Otra teoría fue desarrollada durante los años 60's y resumida por Hinton y Hazeltine en 1976 [11] para calcular coeficientes de transporte para plasmas con campos toroidales. En contraste al caso de campos uniformes a esta se le llamó *teoría de transporte neoclásico*. Estas teorías tienen en común que las ecuaciones que las describen son lineales en la función de distribución, lo cual es una buena aproximación para tiempos de confinamiento cortos. Sin embargo, para los experimentos de fusión con tiempos de confinamiento más largos es necesario desarrollar una teoría que incluya efectos no lineales de las ecuaciones que se refieren al transporte producido por fluctuaciones en el plasma, tal teoría aún sigue en desarrollo y lleva el nombre de *Teoría de Transporte Anómalo* [12].

El transporte neoclásico considera un campo magnético en equilibrio que se encuentra alojado en superficies toroidales anidadas llamadas *superficies magnéticas*. Sin embargo, si este campo en equilibrio es perturbado, es posible que en ciertas regiones se produzcan reconexiones del campo y se generen subestructuras llamadas *islas magnéticas* (véase la figura 1.3). Recientemente la existencia de islas magnéticas en el vacío fue verificada de experimentalmente [13], en la figura 1.4 puede verse la topología del campo del stellarator W7X, la cual incluye islas magnéticas. Las teorías de transporte clásico y neoclásico no incluyen el efecto de islas magnéticas en



**Figura 1.4:** Mediciones experimentales de la topología del campo magnético. (a) Líneas de campo. (b) Isla 5/6. Imágenes tomadas de [13].

los coeficientes de difusión que predicen. Por ello **el objetivo de esta tesis es estudiar numéricamente el efecto de las islas magnéticas sobre el transporte de iones en varios modelos de campo magnético.**

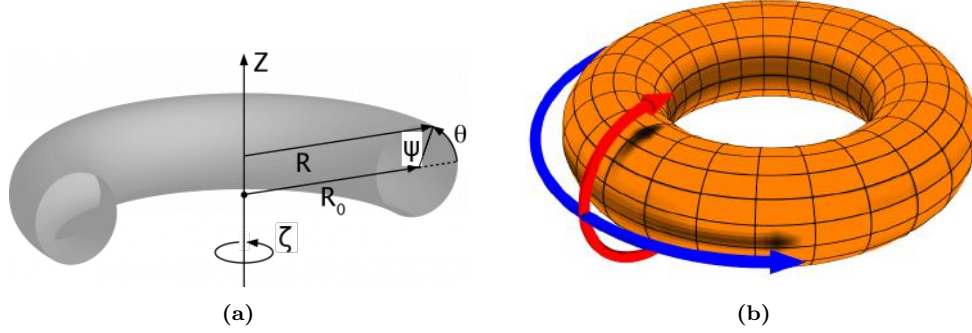
La estructura de la tesis es la siguiente: en el capítulo 2 se describe matemáticamente la estructura de las islas debida a una perturbación del campo magnético. En el capítulo 3 se muestran las ecuaciones que describen la dinámica de una población de partículas en el plasma y su equivalencia con ecuaciones de una sola partícula. Se obtienen ecuaciones de movimiento que se pueden resolver para distintas geometrías de campo magnético con una región de islas magnéticas. En el capítulo 4 se muestran resultados numéricos. Primero se muestra como es la dinámica individual de las partículas y luego las secciones de Poincaré y coeficientes de difusión obtenidos de simular a un ensemble de partículas. Finalmente, en el capítulo 5 se discuten los resultados y se dictan algunas conclusiones.

# Capítulo 2

## Descripción de las islas magnéticas

En experimentos de fusión, es posible conseguir el confinamiento del plasma mediante el diseño de un campo magnético  $\mathbf{B}$  capaz de acotar el movimiento de las partículas a una región finita del espacio. Tal campo magnético debe estar alojado en una superficie bidimensional finita y suave. Es sabido, dado un importante teorema matemático (Teorema de la bola peluda), que la única topología que cumple dichas condiciones es la de superficies toroidales anidadas, la cual es usada en aparatos de fusión como el tokamak y el stellarator. Sin embargo, no es posible mantener la estructura de estos campos magnéticos a todo tiempo. Cuando el plasma está presente existen perturbaciones en el sistema que pueden llevar a la reconexión de líneas de campo en algunas regiones del espacio, produciendo así a las llamadas *islas magnéticas*, que a su vez interactúan con el plasma en cuestión.

En este capítulo se discute cómo se representa matemáticamente la perturbación que genera una cadena de islas magnéticas en una región de un campo en equilibrio. Para simular el transporte de una población de iones en presencia de esta cadena debe incluirse la perturbación estudiada en las ecuaciones de movimiento de las partículas cargadas (véanse secciones 3.2.1 y 3.3).



**Figura 2.1:** (a) Coordenadas toroidales. (b) Componentes del campo. Azul: dirección toroidal. Rojo: dirección poloidal. Imágenes por Sánchez et. al. [14].

## 2.1. Representación del campo magnético

El campo magnético de un sistema descrito por *coordenadas toroidales*  $(\psi, \theta, \zeta)$  (ver figura 2.1a) tiene la *representación covariante*

$$\mathbf{B} = \nabla\psi \times \nabla\theta - \nabla\psi_p \times \nabla\zeta = \mathbf{B}_p + \mathbf{B}_t. \quad (2.1)$$

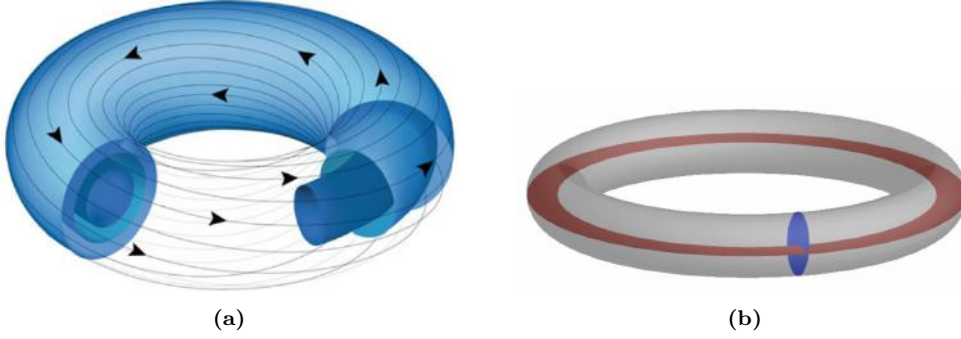
Al primer término de esta ecuación se le llama *campo poloidal* y al segundo *campo toroidal* de acuerdo a sus direcciones, ver figura 2.1b. Esta representación tiene la característica de que las trayectorias de las líneas de campo son de naturaleza Hamiltoniana, i. e. se cumplen las ecuaciones

$$\frac{d\psi}{d\zeta} = -\frac{\partial\psi_p}{\partial\theta}, \quad (2.2a)$$

$$\frac{d\theta}{d\zeta} = \frac{\partial\psi_p}{\partial\psi}, \quad (2.2b)$$

que tienen la forma de ecuaciones de Hamilton con  $\psi_p(\psi, \theta, \zeta)$  el Hamiltoniano,  $\psi$  el momento conjugado,  $\theta$  la coordenada generalizada y  $\zeta$  el tiempo.

Una *superficie magnética* se define por una función  $f(\mathbf{r}) = \text{cte}$  si en todo punto del espacio el campo magnético es tangente a esta,  $\mathbf{B} \cdot \nabla f = 0$ . Se dice entonces que  $f(\mathbf{r})$  es una *cantidad de superficie*. De la ecuación (2.1) puede notarse que  $\psi$  y  $\psi_p$  son cantidades de superficie solo si  $\psi_p = \psi_p(\psi)$ .



**Figura 2.2:** (a) Superficies magnéticas anidadas. (b) Cortes perpendiculares al flujo toroidal (azul) y poloidal (guinda). Imágenes por Sánchez et al. [14].

A las funciones  $\psi$  y  $\psi_p$  se les puede asociar una interpretación física dadas las relaciones

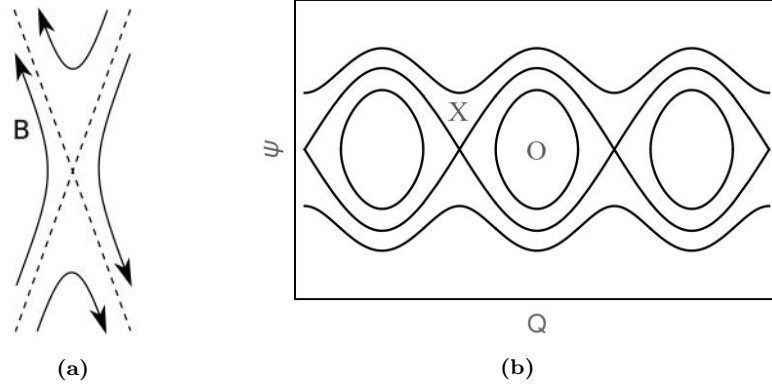
$$\frac{1}{2\pi} \int d\zeta d\theta d\psi \mathcal{J}(\mathbf{B} \cdot \nabla \zeta) = 2\pi\psi, \quad (2.3a)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int d\zeta d\theta d\psi \mathcal{J}(\mathbf{B} \cdot \nabla \theta) = 2\pi\psi_p, \quad (2.3b)$$

donde  $\mathcal{J}^{-1} = \nabla\psi \cdot (\nabla\theta \times \nabla\zeta)$  es el Jacobiano. La ecuación (2.3a) representa al flujo de campo toroidal a través de una superficie definida en  $0 < \psi < \psi_0$ ,  $0 < \theta < 2\pi$  y  $\zeta = \text{cte}$ . (2.3b) representa al flujo de campo poloidal a través de una superficie definida en  $0 < \psi < \psi_0$ ,  $\theta = \text{cte}$  y  $0 < \zeta < 2\pi$ . Véase la figura 2.2b.

De esta manera, tanto el *flujo poloidal*  $\psi_p$  como el *flujo toroidal*  $\psi$  sirven como etiquetas para las superficies magnéticas anidadas sobre las cuales se inscriben las trayectorias de campo magnético (ver figura 2.2a, nótese que las superficies anidadas no necesariamente deben ser de sección circular). A las superficies que se etiquetan con las funciones  $\psi$  y  $\psi_p$  se les llama también *superficies de flujo*. Por último, es usual definir a la relación  $d\psi_p/d\psi \equiv 1/q(\psi)$ , donde a  $q(\psi)$  se le llama *factor de seguridad*. También se puede definir a la función inversa  $\iota = 1/q$  que se le llama *transformada rotacional*, esta mide el número de vueltas que hace una línea de campo alrededor del toroide en dirección poloidal tras haber dado una vuelta en dirección toroidal.





**Figura 2.3:** (a) Geometría de la reconexión. (b) Cadena de islas magnéticas.

## 2.2. Formación de las islas magnéticas

Para ilustrar cómo se forma una cadena de islas, se introduce una pequeña perturbación  $\alpha_0$  a la función de flujo poloidal. Se toma su desarrollo de Fourier en las variables  $\theta$ ,  $\zeta$  y se considera un solo armónico

$$\psi_p = \int \frac{d\psi}{q} + \alpha_0 \cos(n\zeta - m\theta). \quad (2.4)$$

Entonces, las ecuaciones de Hamilton para las líneas de campo (2.2) son

$$\frac{d\psi}{d\zeta} = -\alpha_0 m \sin(n\zeta - m\theta), \quad (2.5a)$$

$$\frac{d\theta}{d\zeta} = \frac{1}{q(\psi)}. \quad (2.5b)$$

De (2.5b) puede notarse que  $q(\psi)$  define a la *helicidad* del campo en las variables  $\theta$ ,  $\zeta$  sobre la superficie  $\psi$ , entonces si  $q' = dq/d\psi \neq 0$  se dice que el campo es *cizallado*.

De las ecuaciones (2.1), (2.5) se tiene que  $\mathbf{B} \cdot \nabla\psi = m\alpha_0 \sin(n\zeta - m\theta)/\mathcal{J}$ , i. e. la perturbación  $\alpha_0$  introduce una componente  $\mathbf{B}$  en la dirección perpendicular a las superficies de flujo. Si  $q(\psi)$  no está cerca del número racional  $m/n$ ,  $\psi$  es una función oscilatoria y  $q(\psi)$  puede aproximarse a una constante, dando entonces

$$\theta = \zeta/q + \theta_0, \quad (2.6a)$$

$$\psi = \alpha_0 m \frac{\cos(n\zeta - m\theta)}{n - m/q} + \psi_0. \quad (2.6b)$$

En este caso, si bien las superficies de flujo se distorsionan, la topología de superficies anidadas se mantiene. Sin embargo si  $q(\psi) \approx m/n$ , el denominador de (2.6b) diverge. Para obtener una solución cerca de una superficie racional, se desarrolla en serie de Taylor a  $q(\psi)$  alrededor de  $\psi_0$ , con  $q(\psi_0) = m/n$ , y se introduce la variable  $Q = n\zeta - m\theta$ . Entonces, las ecuaciones de Hamilton toman la forma

$$dQ = \frac{mq'}{q^2}(\psi - \psi_0)d\zeta \quad (2.7a)$$

$$d\psi = -\alpha_0 m \sin Q d\zeta \quad (2.7b)$$

donde  $q$  y  $q' = dq/d\psi$  se evalúan en  $\psi = \psi_0$ . Integrando las ecuaciones (2.7) se obtiene que

$$(\psi - \psi_0)^2 = \frac{q^2 \alpha_0}{q'} (\cos Q + k), \quad (2.8)$$

donde  $k$  es una constante de integración.

Los puntos en el plano  $\psi - \theta$  con  $\zeta = 0$  descritos por tránsitos sucesivos de una línea de campo forman una *sección de Poincaré*. Si  $q$  es racional, la sección de Poincaré consistirá de un conjunto finito de puntos dados por (2.8). Si  $q$  es irracional, toda la superficie será cubierta. Nótese que los puntos dados por  $\cos Q = 1$ ,  $k = -1$  y por  $\cos Q = -1$ ,  $k = 1$  son periódicos con periodo  $m$ . Si se desarrolla el coseno alrededor de  $\cos Q = 1$  se obtiene la ecuación

$$(\psi - \psi_0)^2 = \frac{q^2 \alpha_0}{q'} (1 - Q^2/2 + k). \quad (2.9)$$

Entonces, para  $\alpha_0 q' > 0$ , los puntos se encuentran en superficies elípticas alrededor de los puntos periódicos. Estos forman curvas continuas o puntos discretos dependiendo del valor de  $q$ . Similarmente, cerca de los puntos con  $\cos Q = -1$ , los puntos en la sección de Poincaré yacen en superficies hiperbólicas. Así, hay una cadena de hipérbolas y elipses en  $\psi = \psi_0$  a la cual se le llama *cadena de islas*, y se distingue de las superficies toroidales por una separatriz que pasa por los puntos X (ver figura 2.3). La separatriz se describe eligiendo la constante de integración  $k = 1$ , dando así islas con ancho

$$\delta\psi = 4 \left( \frac{\alpha_0 q^2}{q'} \right)^{1/2}. \quad (2.10)$$



# Capítulo 3

## Ecuaciones estocásticas de centro guía

En este capítulo se muestra la derivación de ecuaciones de movimiento para una población de partículas cargadas sujetas a campos externos y que colisionan con un plasma de fondo. Se obtiene un sistema acoplado de *ecuaciones de Langevin*: estas son ecuaciones diferenciales de primer orden que poseen una parte determinista debida a los campos y una parte estocástica debida a las colisiones. Las ecuaciones de Langevin pueden integrarse numéricamente mediante un algoritmo de Runge-Kutta y el esquema de Euler-Maruyama [15]. Por otro lado, las teorías de transporte han sido descritas en términos de la función de distribución y sus momentos, de lo cual se obtiene de forma analítica a los coeficientes de transporte [10]. La ecuación de Fokker-Planck determina a la función de distribución de una población de  $N$  partículas, ésta puede resolverse equivalentemente mediante la integración de  $N$  ecuaciones de Langevin.

En la sección 3.1 se muestra cómo se obtiene la ecuación de deriva cinética y el operador generalizado de dispersión de Lorentz, lo cual determina a la ecuación de Fokker-Planck. En la sección 3.2 se muestra la derivación de las ecuaciones de centro guía y los operadores de Boozer y Kuo-Petravic, lo cual determina a las ecuaciones de Langevin. La resolución de éstas ecuaciones determinan la evolución de las variables de espacio fase  $(x, y, z, v^2, \lambda)$  adecuadas para el modelo de placa. Finalmente en la sección 3.3 se muestran las ecuaciones de centro guía para las variables de espacio fase  $(\psi, \theta, \zeta, v^2, \lambda)$  adecuadas en el modelo de tokamak.

## 3.1. Dinámica de la función de distribución

Se considera una población de  $N$  partículas cargadas de cualquier especie (i.e. iones o electrones) en un plasma. Debe tomarse en cuenta la interacción con campos externos y campos de las demás partículas cargadas en el plasma. A continuación se verá que, aunque la resolución exacta a este problema es imposible, puede simplificarse si se toman algunas aproximaciones físicamente razonables.

### 3.1.1. Ecuación cinética

Un plasma se compone de electrones y una o varias especies de iones. Cada partícula se caracteriza por su carga  $q$ , su posición  $\mathbf{r}$  y su velocidad  $\mathbf{v}$ . Para conocer la dinámica de una población de partículas en un plasma es necesario determinar a la *función de distribución*  $f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  tal que

$$f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3r d^3v \quad (3.1)$$

representa al número de partículas de especie  $a$  en un elemento de volumen del espacio fase  $d^3r d^3v$  alrededor del punto  $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  a tiempo  $t$ .

La función de distribución obedece a la ecuación de conservación

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_a + \mathbf{a} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_a = 0, \quad (3.2)$$

donde  $\nabla$  es un operador de derivadas espaciales y  $\nabla_{\mathbf{v}}$  de derivadas respecto a las componentes de velocidad.  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$  es la velocidad de la partícula y  $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$  la aceleración que está dada por la fuerza de Lorentz como

$$\mathbf{a} = \frac{e_a}{m_a} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (3.3)$$

$\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  representan a los campos totales, es decir, la contribución de campos externos pero también los producidos por las partículas cargadas que conforman al plasma. Entonces, la ecuación (3.2) incluye a la interacción electromagnética entre todas las partículas del sistema. Resolverla requiere resolver las ecuaciones de Maxwell para obtener los campos producidos por cada partícula en el plasma, de modo que la aceleración (3.3) dependerá de las posiciones y velocidades de todas las partículas del sistema.

Para simplificar el problema tómesese en cuenta lo siguiente: a nivel macroscópico, i.e. a escalas espaciales mayores a la longitud de Debye, es posible tomar cantidades promedio respecto a un ensemble de plasmas macroscópicamente equivalentes, por ejemplo

$$\bar{f} = \langle f \rangle_{\text{ensemble}}, \quad \bar{\mathbf{a}} = \langle \mathbf{a} \rangle_{\text{ensemble}}. \quad (3.4)$$

Tomar el promedio de ensemble de la ecuación (3.2) dará en el último término

$$\left\langle \mathbf{a} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_a \right\rangle_{\text{ensemble}} \neq \bar{\mathbf{a}} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \bar{f}_a, \quad (3.5)$$

donde la igualdad se cumple solo si  $\mathbf{a}$  y  $f$  son estadísticamente independientes, es decir en ausencia de interacción.

La *ecuación cinética* es una ecuación de evolución aproximada para  $\bar{f}$  que incluye a las colisiones como el “residuo” de las correlaciones entre partículas mediante un operador  $C(f)$ , se escribe como

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_a + \mathbf{a} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_a = C(f) \quad (3.6)$$

donde se ha suprimido la notación de barra a las cantidades promedio. El *operador de colisiones* se define como

$$C(f) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(v, t + \Delta t) - f(v, t)}{\Delta t}. \quad (3.7)$$

A  $C(f)$  se le llama *operador de Fokker-Planck* si este representa colisiones Coulombianas, en tal caso a (3.6) suele llamarse también *ecuación de Fokker-Planck*. Por otro lado, si  $C(f) = 0$ , a (3.6) se le llama *ecuación de Vlasov*. Cualquier operador de colisiones en la ecuación cinética debe cumplir las propiedades siguientes [16]:

1. **Bilinearidad.** Cualquier proceso colisional debe ser dominado por interacciones binarias, contribuciones de interacción de tres o más cuerpos son poco probables. En este caso el operador de colisiones puede escribirse como  $C_a = \sum_b C_{ab}(f_a, f_b)$ , donde  $C_{ab}$  representa dispersión de partículas prueba de la distribución  $f_a$  debido a partículas de fondo de la distribución  $f_b$ .
2. **Disipación clásica.** El operador de colisiones debe incrementar la entropía. De modo que en equilibrio  $C_a$  se anula para  $f_a = f_{Ma}$ , esta es la *distribución Maxwelliana*

$$f_{Ma}(\mathbf{r}, t) = n_a(\mathbf{r}, t) \left( \frac{m_a}{2\pi T_a(\mathbf{r}, t)} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{m_a v^2}{2T_a(\mathbf{r}, t)} \right) \quad (3.8)$$

3. **Invariancia de Galileo.** El proceso colisional no cambia si las partículas se mueven con un flujo  $\mathbf{V}$

$$C_{ab}(f_a(\mathbf{v} - \mathbf{V}), f_b(\mathbf{v} - \mathbf{V})) = C_{ab}(f_a(\mathbf{v}), f_b(\mathbf{v})) \quad (3.9)$$

4. **Simetría espacial.** El operador de colisiones debe tener invariancia traslacional y debe reflejar la invariancia rotacional del proceso colisional subyacente.
5. **Conservación mecánica local.** El operador de colisiones debe cumplir conservación de partículas, energía y momento en cada punto del espacio.

### 3.1.2. Ecuación de deriva cinética

La ecuación cinética puede describirse en distintas variables de espacio fase. Para coordenadas generales  $(\mathbf{z}, t)$  se escribe como

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{z}_k \frac{\partial f}{\partial z_k} = C(f). \quad (3.10)$$

En particular interesan las variables  $\mathbf{z} = (\mathbf{r}, v^2, \lambda, \theta)$ , donde  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  son coordenadas espaciales,  $v^2$  la energía cinética normalizada,  $\lambda$  el ángulo de inclinación y  $\theta$  el ángulo de giro (véase la sección 3.2.1). Para simplificar a esta ecuación puede tomarse un promedio de la ecuación cinética respecto al ángulo de giro  $\langle F \rangle = \oint d\theta F$ . Entonces

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{dv^2}{dt} \frac{\partial f}{\partial v^2} + \frac{d\lambda}{dt} \frac{\partial f}{\partial \lambda} + \frac{d\theta}{dt} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right\rangle \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{dv^2}{dt} \frac{\partial f}{\partial v^2} + \frac{d\lambda}{dt} \frac{\partial f}{\partial \lambda} = C(f), \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde  $f$  y  $C(f)$  en la segunda igualdad son cantidades promedio respecto al ángulo de giro, se ha suprimido la notación de promedio. Esto borra la información relacionada al giro de la partícula y reduce la dimensión de variables de espacio fase de 6 a 5, de modo que las variables restantes quedan referidas únicamente al movimiento de centro guía (véase la figura 1.1a). A (3.11) se le llama *ecuación de deriva cinética*, esta contiene la información de la dinámica de la partícula debida a los campos externos. Sin embargo, para tomar en cuenta el efecto de colisiones con el plasma aún falta especificar la parte derecha de 3.6.

### 3.1.3. Operador de colisiones de Fokker-Planck

Que las partículas cargadas tengan interacción Coulombiana permite considerar solo cambios pequeños en la velocidad. Con ello se puede reducir al operador de colisiones a un operador de difusión en el espacio de velocidades, esto es el operador de Fokker-Planck.

Se muestra la derivación de la ecuación unidimensional de manera breve, es directo generalizar al caso tridimensional. Considérese una población de partículas en el plasma con función de distribución  $f(x, v, t)$ . Sea  $F(v, \Delta v)$  la probabilidad de que la velocidad de las partículas cambie de  $v$  a  $v + \Delta v$  como resultado de una colisión en un intervalo de tiempo  $\Delta t$ , entonces debe cumplirse que

$$f(v, t + \Delta t) = \int d\Delta v f(v - \Delta v, t) F(v - \Delta v, \Delta v), \quad (3.12)$$

esta es la ecuación de *Chapman-Kolmogorov*, que da el cambio exacto de la función de distribución si el proceso es *Markoviano*, es decir, si el cambio depende solo del estado inmediatamente anterior de la función de distribución. Para cambios pequeños de la velocidad, es apropiado tomar un desarrollo de Taylor en el primer argumento de  $f(v - \Delta v, t)$  y  $F(v - \Delta v, \Delta v)$ , y con los momentos

$$\int d\Delta v F(v, \Delta v) = 1 \quad (3.13a)$$

$$\langle \Delta v \rangle \equiv \int d\Delta v F(v, \Delta v) \Delta v \quad (3.13b)$$

$$\langle (\Delta v)^2 \rangle \equiv \int d\Delta v F(v, \Delta v) (\Delta v)^2 \quad (3.13c)$$

puede obtenerse que

$$C(f) \approx -\frac{\partial}{\partial v} \left( \langle \Delta v \rangle f \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left( \langle (\Delta v)^2 \rangle f \right). \quad (3.14)$$

En el caso tridimensional y anisótropo, el operador de colisiones puede reescribirse como

$$C(f) = -\frac{\partial}{\partial v_i} \left( \langle \Delta v_i \rangle f(\mathbf{v}, t) \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} \left( \langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle f(\mathbf{v}, t) \right), \quad (3.15)$$

este es el *operador de colisiones de Fokker-Planck*, éste describe la contribución de colisiones.



### 3.1.4. Dispersión de Lorentz

Para terminar de especificar al operador de colisiones hace falta dar la función de distribución del plasma de fondo  $f_{BG}$  con el que colisiona la población de partículas de prueba. Se considera que el plasma de fondo es Maxwelliano, es decir los iones y electrones que lo componen estarán (separadamente) en equilibrio térmico y por tanto su función de distribución descrita por (3.8). Bajo esta suposición y en las variables de espacio fase  $(\mathbf{r}, v, \lambda)$ , el operador de colisiones de Fokker-Planck se reduce al llamado operador de Lorentz, que considera dispersión en ángulo de inclinación y velocidad. Sin embargo, resulta útil reescribirlo en términos de las variables de espacio fase  $(\mathbf{r}, v^2, \lambda)$ .

#### Colisiones con un plasma Maxwelliano

Se busca la forma del operador de colisiones de Fokker-Planck para el caso de colisiones entre una población de partículas de prueba y un plasma Maxwelliano. Para ello es útil reescribir a la ecuación de Fokker-Planck en términos de *potenciales de Rosenbluth*

$$h_b(\mathbf{v}) \equiv \frac{m + m_b}{m_b} \int d^3v' \frac{f_b(\mathbf{v}')}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|}, \quad (3.16a)$$

$$g_b(\mathbf{v}) \equiv \int d^3v' |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| f_b(\mathbf{v}'). \quad (3.16b)$$

Estas funciones pueden interpretarse físicamente como el potencial que actúa sobre las partículas de prueba con velocidad  $\mathbf{v}$  debido a las partículas del plasma de especie  $b$  con función de distribución  $f_b$ . Entonces, para varias especies el operador de colisiones de Fokker-Planck puede escribirse como

$$C(f) = \sum_b \Gamma_b \left[ - \frac{\partial}{\partial v_k} \left( f \frac{\partial h_b}{\partial v_k} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v_j \partial v_k} \left( f \frac{\partial^2 g_b}{\partial v_j \partial v_k} \right) \right], \quad (3.17)$$

donde

$$\Gamma_b = \frac{4\pi Z^2 Z_b^2 e^4 \ln \Lambda_b}{m^2}, \quad (3.18)$$

$m$  es la masa de las partículas de prueba,  $Z$  su número de carga,  $Z_b$  el número de carga de las partículas del plasma de especie  $b$  y  $\ln \Lambda_b$  su logaritmo de Coulomb.

Puede probarse que, para plasma Maxwelliano, la función de distribución  $f_b(\mathbf{v}) = f_M(\mathbf{v})$  tiene la forma de la ecuación (3.8) [17]. En tal caso los potenciales de Rosenbluth son isótropos y toman la forma

$$h_b(\mathbf{v}) = h_b(v) = \frac{n_b}{v} \left(1 + \frac{m}{m_b}\right) \Phi(v/v_{T,b}) \quad (3.19a)$$

$$g_b(\mathbf{v}) = g_b(v) = n_b \left[ \left(v + \frac{v_{T,b}^2}{2v}\right) \Phi(v/v_{T,b}) + \frac{v_{T,b} \exp(-v^2/v_{T,b}^2)}{\sqrt{\pi}} \right] \quad (3.19b)$$

donde

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dx e^{-x^2} \quad (3.20)$$

es la función de error,  $n_b$  la densidad de las partículas de especie  $b$  y  $v_{T,b}$  su velocidad térmica.

### Operador generalizado de Lorentz

El operador de colisiones (3.17) está escrito en coordenadas cartesianas. Es posible reescribirlo en forma covariante para coordenadas generalizadas [18]. Así, para variables  $(\mathbf{r}, v, \lambda)$  se escribe como

$$C(f) = \sum_b \Gamma_b \left\{ \frac{1}{2v^2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} \left( v^2 \frac{\partial^2 g_b}{\partial v^2} f \right) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial u} \left[ f \left( v^2 \frac{\partial h_b}{\partial v} + \frac{\partial g_b}{\partial v} \right) \right] + \frac{1}{2v^3} \frac{\partial g_b}{\partial v} \frac{\partial}{\partial \lambda} (1 - \lambda^2) \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right\}, \quad (3.21)$$

después de tomar las derivadas, es posible reescribirlo como [19]

$$C(f) = \sum_b \frac{\nu_{d,b}}{2} \frac{\partial}{\partial \lambda} (1 - \lambda^2) \frac{\partial f}{\partial \lambda} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[ \sum_b \nu_{E,b} v^3 f \right] + \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[ \sum_b \nu_{E,b} v_{th,b}^2 v^2 \frac{\partial f}{\partial v} \right]. \quad (3.22)$$

Éste es el llamado *operador generalizado de dispersión de Lorentz*, donde se han

definido las siguientes cantidades

$$\nu_{B,e} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{m_e}} \frac{e^4 n \ln \Lambda}{\epsilon_0^2 (k_B T_e)^{3/2}}, \quad \nu_{B,i} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\pi}{m_i}} \frac{e^4 n \ln \Lambda}{\epsilon_0^2 (k_B T_i)^{3/2}}, \quad (3.23a)$$

$$\nu_{d,e} = \frac{3}{4} \sqrt{\pi} \nu_{B,e} \frac{m_e^2}{m_i^2} \frac{\Phi(x_e) - \Psi(x_e)}{x_e^3}, \quad \nu_{d,i} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \nu_{B,i} \frac{\Phi(x_i) - \Psi(x_i)}{x_i^3}, \quad (3.23b)$$

$$\nu_{E,e} = \frac{3}{2} \sqrt{\pi} \nu_{B,e} \frac{m_i}{m_e} \frac{\Psi(x_e)}{x_e}, \quad \nu_{E,i} = 3 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \nu_{B,i} \frac{\Psi(x_i)}{x_i}. \quad (3.23c)$$

Aquí  $\nu_{B,b}$  es la frecuencia de colisiones de Braginskii [10] de las partículas de especie  $b$ ,  $\nu_{d,b}$  la frecuencia de deflexiones, i.e. la frecuencia con que una partícula prueba se deflecta un ángulo  $\pi/2$  debido a colisiones con partículas de especie  $b$ ,  $\nu_{E,b}$  la frecuencia de dispersión de energía, i. e. la frecuencia con que una partícula de prueba con energía inicial  $E$  se relaja a una energía final de termalización  $E_T$  debido a colisiones con partículas de especie  $b$ . También se han definido

$$\Psi(x) = \frac{\Phi(x) - x\Phi'(x)}{2x^2}, \quad (3.24)$$

$$\ln \Lambda = \ln \left[ \frac{3}{2} \frac{\epsilon_0^{3/2}}{\sqrt{\pi n e^3}} (k_B T_i)^{3/2} \right], \quad (3.25)$$

donde  $\ln \Lambda$  es el logaritmo de Coulomb de iones.

El operador (3.22) incluye efectos convección y dispersión de ángulo de inclinación en su primer término y de energía en su segundo término. Resolver la ecuación cinética (3.6) significa obtener la evolución de la función de distribución de las partículas de prueba incluidos los efectos de campos externos y colisiones con el plasma de fondo.

## 3.2. Dinámica de 1-partícula

La ecuación de Fokker-Planck dada por 3.11 y 3.22 es una ecuación diferencial parcial acoplada a las ecuaciones de movimiento para  $(\mathbf{r}, v^2, \lambda)$ . En esta sección se muestra que para el mismo sistema físico se pueden obtener ecuaciones de Langevin, que son las ecuaciones de movimiento para  $(\mathbf{r}, v^2, \lambda)$  mas una parte estocástica y son sencillas de integrar numéricamente. En el apéndice B se muestra que de hecho la ecuación de Fokker-Planck y las ecuaciones de Langevin son equivalentes.

### 3.2.1. Ecuaciones de centro guía en coordenadas cartesianas

El movimiento de un ion de masa  $m$  y carga  $q$  sujeto a campos externos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  se describe mediante la fuerza de Lorentz. Por ejemplo, sabemos que en un campo magnético uniforme la trayectoria de una partícula cargada girará alrededor de una línea de campo a la vez que se trasladará paralelamente. Sin embargo, si el campo es inhomogéneo y curvo es posible tener movimientos perpendiculares superpuestos al giro y traslación paralela a la línea de campo, a éstos se les llama movimientos de deriva. Tal situación complica bastante las ecuaciones de movimiento descritas por la fuerza de Lorentz.

Las *ecuaciones de centro guía* son una aproximación al movimiento original de la partícula, que considera sólo la dinámica del centro guía y desprecia la información de giro (véase la figura 1.1a). Se considera  $\rho/L \ll 1$  donde  $L$  es una longitud característica del sistema. Entonces, las ecuaciones de centro guía se obtienen desarrollando a las ecuaciones de movimiento respecto al radio de giro pequeño  $\rho$  y se les toma el promedio respecto al ángulo de giro  $\theta$  (de la misma manera que se hace para obtener la ecuación de deriva cinética 3.11). A orden mas bajo del radio de giro, las ecuaciones para las coordenadas espaciales  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  son

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_D, \quad (3.26)$$

donde  $\mathbf{v}_{\parallel}$  es la componente de la velocidad en dirección paralela a la línea de campo y  $\mathbf{v}_D$  la *velocidad de deriva* (que es perpendicular a  $\mathbf{v}_{\parallel}$ ), se escriben como

$$\mathbf{v}_{\parallel} = v\lambda\mathbf{b} + \frac{mv^2(1-\lambda^2)}{eB}\mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{b})\mathbf{b}, \quad (3.27a)$$

$$\mathbf{v}_D = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} + \frac{mv^2(1-\lambda^2)}{2eB^3}\mathbf{B} \times \nabla B + \frac{mv^2\lambda^2}{eB}\boldsymbol{\kappa}, \quad (3.27b)$$

donde  $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$ . El segundo término en 3.27a es una corrección a primer orden de la velocidad paralela. El primer término de 3.27b corresponde a la velocidad de deriva  $\mathbf{v}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}$  debido al campo eléctrico. El segundo término es la velocidad  $\mathbf{v}_{\nabla B}$  debida al gradiente del campo y el tercer término la velocidad  $\mathbf{v}_{\boldsymbol{\kappa}}$  debida a la curvatura del campo  $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{b} \times (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{b}$ .

Nótese que las ecuaciones 3.27 corresponden a una partícula cargada positivamente, para obtener las correspondientes a un electrón basta con tomar  $e \rightarrow -e$ . Una consecuencia de promediar respecto al ángulo de giro es que las variables de espacio fase necesarias para integrar al sistema se reducen de 6 a 5. En particular, en este

trabajo resultará útil intercambiar a las variables  $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  por  $(\mathbf{r}, v^2, \lambda)$ , donde  $\mathbf{r}$  son coordenadas cartesianas de posición,  $v^2$  es energía cinética normalizada y  $\lambda$  es el *ángulo de inclinación* de la partícula, que se define como

$$\lambda = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}}{vB}, \quad (3.28)$$

es decir es el ángulo formado entre el vector de velocidad  $\mathbf{v}$  y el vector  $\mathbf{b}$ .

Resolver (3.26) determina a la parte espacial del espacio fase. Aún se necesitan ecuaciones de movimiento para  $v^2$  y  $\lambda$  que determinen al espacio fase faltante. Una de las ecuaciones se puede obtener si se deriva respecto al tiempo a la cantidad conservada  $U = mv^2/2 + e\Phi$  donde  $U$  es la energía total de la partícula y  $\Phi$  el potencial electrostático, se obtiene que

$$\frac{dv^2}{dt} = 2\frac{e}{m}\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}. \quad (3.29)$$

donde  $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$  es el campo eléctrico externo.

El momento magnético  $\mu = mv_{\perp}^2/2B$  es otra cantidad conservada, puede reescribirse en términos del ángulo de inclinación como  $\mu = mv^2(1 - \lambda^2)/2B$ . Si se deriva respecto al tiempo queda otra ecuación de movimiento

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{1 - \lambda^2}{2\lambda} \left[ 2\frac{e}{m} \frac{1}{v^2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} - \frac{1}{B} \mathbf{v} \cdot \nabla B \right]. \quad (3.30)$$

Nótese que esta ecuación tiene al ángulo de inclinación en el denominador, esto es indeseable para una resolución numérica ya que genera inestabilidades en el proceso de integración debido a que puede ser un número muy pequeño. Para resolver esto debe reemplazarse por  $\lambda = v_{\parallel}/v$ .

En resumen, las ecuaciones de movimiento bajo la aproximación de centro guía que determinan completamente a las variables de espacio fase  $(x, y, z, v^2, \lambda)$  son

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_D \quad (3.31a)$$

$$\frac{dv^2}{dt} = \frac{2e}{m}(\mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_D) \cdot \mathbf{E} \quad (3.31b)$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{1 - \lambda^2}{2} \left[ \frac{2e}{m} \frac{1}{vv_{\parallel}}(\mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_D) \cdot \mathbf{E} - \frac{v}{v_{\parallel}B}(\mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_D) \cdot \nabla B \right]. \quad (3.31c)$$

En adelante nos referiremos a ellas simplemente como ecuaciones de centro guía.

### 3.2.2. Operadores de Boozer y Kuo-Petravic

Se muestra brevemente el procedimiento seguido por A. H. Boozer y G. Kuo-Petravic [20] para derivar un operador Monte Carlo equivalente al operador de dispersión de Lorentz. Considérese el valor promedio del ángulo de inclinación

$$\langle \lambda \rangle = \int_{-1}^1 \lambda f d\lambda, \quad (3.32)$$

puede obtenerse que

$$\frac{d\langle \lambda \rangle}{dt} = -\nu_d \langle \lambda \rangle, \quad (3.33a)$$

$$\frac{d\sigma^2}{dt} = \nu_d (1 - 3\langle \lambda^2 \rangle - \langle \lambda \rangle^2). \quad (3.33b)$$

Si además se considera que inicialmente la distribución es una función delta de Dirac centrada en  $\lambda_0$ , a  $t = 0$

$$\frac{d\langle \lambda \rangle}{dt} = -\nu_d \lambda_0, \quad (3.34a)$$

$$\frac{d\sigma^2}{dt} = \nu_d (1 - \lambda_0^2), \quad (3.34b)$$

donde  $\sigma^2 = \langle \lambda^2 \rangle - \langle \lambda \rangle^2$  es la varianza.

Después de un tiempo corto  $t$ , se espera que  $f$  sea una distribución gaussiana centrada en  $\lambda = \lambda_0(1 - \nu_d t)$  con desviación estándar  $[(1 - \lambda_0^2)\nu_d t]^{1/2}$ . Supóngase que el esparcimiento de  $f$  se debe a un número grande de cambios en ángulo de inclinación de mismo tamaño pero signo distinto. De este modo

$$\lambda_n = \lambda_0(1 - \nu_d \tau) \pm [(1 - \lambda_0^2)\nu_d \tau]^{1/2}, \quad (3.35)$$

éste el operador de dispersión de ángulo de inclinación de Boozer y Kuo-Petravic. En notación diferencial, y si se considera dispersión debida a varias especies [19], el operador de dispersión de ángulo de inclinación puede escribirse como

$$d\lambda = -\sum_b \nu_{d,b} dt \pm \sqrt{\sum_b \nu_{d,b} (1 - \lambda^2) dt^{1/2}}. \quad (3.36)$$

Además, puede obtenerse un operador de dispersión de energía mediante el promedio

$$\langle E \rangle = \int \frac{1}{2} m v^2 f 4\pi v^2 dv \quad (3.37)$$

y de manera similar al procedimiento seguido para (3.35) puede obtenerse un operador para la energía

$$E_n = E_0 - (2\nu_E \tau) \left[ E_0 - \left( \frac{3}{2} + \frac{E}{\nu_E} \frac{d\nu_E}{dE} \right) T \right] \pm 2[T E_0 (\nu_E \tau)]^{1/2}. \quad (3.38)$$

Para varias especies y en forma diferencial, se puede escribir un operador de dispersión de energía para  $v^2$

$$dv^2 = -2 \sum_b \nu_{E,b} \left( v^2 - \frac{x_b}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-v^2/v_{th,b}^2}}{\Psi(v/v_{th,b})} \frac{3k_B T_b}{m} \right) dt \pm 2v \sqrt{\sum_b \nu_{E,b} \frac{3k_B T_b}{m}} dt^{1/2}. \quad (3.39)$$

El primer término de las ecuaciones 3.36 y 3.39 representa convección de las variables  $\lambda$  y  $v^2$ , i.e. amortiguamiento respecto a la evolución descrita por las ecuaciones de centro guía 3.31. El segundo término representa dispersión, i.e. pequeñas desviaciones con signo aleatorio  $\pm$  respecto a la evolución descrita por 3.31.

### 3.2.3. Ecuaciones estocásticas de centro guía

Se pueden sumar los operadores de Boozer y Kuo-Petravic (3.36) y (3.39) a las ecuaciones de centro guía (3.31) para obtener

$$d\mathbf{r} = (\mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_D) dt \quad (3.40a)$$

$$dv^2 = 2(\mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_D) \cdot \mathbf{E} dt - 2 \sum_b \nu_{E,b} \left( v^2 - \frac{x_b}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-v^2/v_{th,b}^2}}{\Psi(v/v_{th,b})} 3k_B T_b \right) dt \pm 2v \sqrt{\sum_b \nu_{E,b} 3k_B T_b} dt^{1/2} \quad (3.40b)$$

$$d\lambda = \frac{1 - \lambda^2}{2} \left[ \frac{2}{v v_{\parallel}} (\mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_D) \cdot \mathbf{E} - \frac{v}{v_{\parallel} B} (\mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_D) \cdot \nabla B \right] dt - \sum_b \nu_{d,b} dt \pm \sqrt{\sum_b \nu_{d,b} (1 - \lambda^2)} dt^{1/2}. \quad (3.40c)$$

estas son las *ecuaciones estocásticas de centro guía*. Su nombre se debe a que consideran una parte determinista dada por las ecuaciones de centro guía y una parte estocástica dada por los operadores de Boozer y Kuo-Petravic. En el mismo sentido se dice que son ecuaciones de Langevin.

La utilidad de 3.40 es que son un sistema acoplado de ecuaciones lineales que, dados los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  y los parámetros de plasma  $n$  y  $T$ , pueden integrarse numéricamente mediante un algoritmo de Runge-Kutta y un esquema de Euler-Maruyama [5]. Las ecuaciones estocásticas de centro guía 3.40 dan la dinámica de 1 partícula, debido a campos externos (en su parte determinista), y debido a colisiones con otras partículas que componen al plasma (en su parte estocástica). Resolverla para  $N$  partículas es equivalente a obtener la función de distribución  $f$  que es la solución a la ecuación de Fokker-Planck equivalente.

En este sentido, puede aplicarse un método de Monte Carlo para estudiar al transporte de una población de partículas prueba en el plasma. Pues integrar 3.41 requiere muestrear aleatoriamente debido al carácter estocástico de las ecuaciones. A partir de ello pueden realizarse diagnósticos para obtener cantidades macroscópicas del sistema, e.g. coeficientes de difusión.

### 3.3. Ecuaciones de centro guía en coordenadas magnéticas

Las ecuaciones estocásticas de centro guía 3.40 son difíciles de resolver para una configuración de campo con geometría toroidal, puesto que los modelos de campos de este tipo se describen con la magnitud  $B$  en términos de las coordenadas magnéticas  $(\psi_p, \theta, \zeta)$  (véase la figura 2.1a), mientras que para resolver 3.40 se requiere la forma vectorial del campo,  $\mathbf{B}$ . Sin embargo, también es posible obtener la dinámica de una partícula prueba en coordenadas magnéticas e incluir el efecto de islas y colisiones con el plasma. Para ello se utiliza la formulación Hamiltoniana del movimiento de centro guía [21].

En el apéndice A se muestra cómo se derivan las ecuaciones de centro guía en la



formulación Hamiltoniana. El resultado es

$$\begin{pmatrix} \dot{\rho}_{\parallel} \\ \dot{\psi}_p \\ \dot{\theta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -K & C & -F \\ K & 0 & -g & I \\ -C & g & 0 & 0 \\ F & -I & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{\rho_{\parallel}} H \\ \partial_{\psi_p} H \\ \partial_{\theta} H \\ \partial_{\zeta} H \end{pmatrix}, \quad (3.41)$$

donde  $H$  es el hamiltoniano,  $C = -1 + (\rho_{\parallel} + \alpha)\partial_{\psi_p}g + g\partial_{\psi_p}\alpha$ ,  $K = g\partial_{\theta}\alpha - I\partial_{\zeta}\alpha$  y  $F = q + (\rho_{\parallel} + \alpha)\partial_{\psi_p}I + I\partial_{\psi_p}\alpha$ ,  $g$  e  $I$  son las corrientes poloidal y toroidal,  $\alpha$  la amplitud de perturbación del campo con la forma

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \nabla \times \alpha \mathbf{B}_0, \quad (3.42)$$

donde  $\mathbf{B}_0$  es el campo sin perturbar.  $\alpha$  es una función con la forma

$$\alpha(r, \theta, \zeta) = \alpha_0(r) \sin(m\theta - n\zeta), \quad (3.43)$$

esta genera una isla de ancho 2.10.

Para tomar en cuenta el efecto de colisiones pueden integrarse las ecuaciones 3.41 junto a los operadores de Boozer y Kuo-Petravic 3.35 y 3.38. Otros códigos de centro guía ya han sido desarrollados antes para campos reales, e. g. ORBIT [21] Y GC3 [22].

# Capítulo 4

## Simulaciones en modelos de islas magnéticas

Se desarrolló un código en FORTRAN y se paralelizó usando OpenMP y la arquitectura multiproceso del cluster Tochtli (Instituto de Ciencias Nucleares, UNAM). Con éste se realizaron simulaciones en los modelos de placa (sección 4.1), de tokamak (sección 4.2) y de stellarator (sección 4.3). Para cada modelo se obtuvieron trayectorias individuales, secciones de Poincaré y coeficientes de difusión.

### 4.1. Modelo de placa

Una primera aproximación para estudiar al transporte en islas magnéticas es en geometría plana. Para ello se considera un campo cizallado inscrito en planos paralelos sin curvatura y se le toma una perturbación tal que produzca islas (ver figura 2.3). Así, el campo magnético se escribe como

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{z}} \times \nabla\psi + B_0\hat{\mathbf{z}}, \quad (4.1)$$

donde  $B_0$  es una constante y  $\psi$  es

$$\psi(x, y) = \psi_x \ln[\cosh(k_x x + x_0)] + \psi_y \cos(k_y y + y_0), \quad (4.2)$$

aquí  $\psi_y/\psi_x$  es una constante que da el ancho de la isla,  $k_y = N_I/L$  con  $N_I$  es el número de islas y  $L$  la longitud característica del sistema,  $k_x = 1/L$ ,  $x_0$  y  $y_0$  son

constantes que desplazan la posición de la cadena de islas en el plano  $x - y$ . Las superficies magnéticas descritas por  $\psi(x, y) = \text{cte.}$  define curvas en el plano  $x - y$  que se extienden paralelamente sobre el eje  $z$ .

En componentes, el campo magnético es

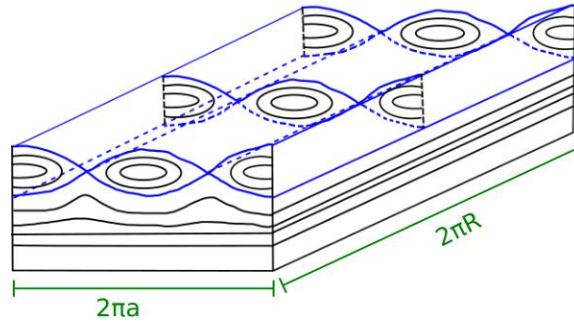
$$B_x = k_y \psi_y \sin(k_y y + y_0), \quad (4.3a)$$

$$B_y = k_x \psi_x \tanh(k_x x + x_0), \quad (4.3b)$$

$$B_z = B_0, \quad (4.3c)$$

puede verse que si  $\psi_y = 0$  se tiene un campo cizallado sin islas en el plano  $y - z$ .

Para integrar a las ecuaciones de movimiento se requieren condiciones de frontera, aquí se toman condiciones que emulan las de un toroide:  $-a/2 < x < a/2$  de modo que si una partícula llega a los extremos se considera como perdida (corresponde a un choque con la pared en un tokamak),  $0 < y < 2\pi a$ ,  $0 < z < 2\pi R$  tienen condiciones periódicas. Aquí  $a$  y  $R$  son el radio menor y mayor del toroide equivalente. La geometría de este modelo puede verse en la figura 4.1.



**Figura 4.1:** Geometría de placa.

Dados los campos externos  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}$ , condiciones iniciales y de frontera, y los parámetros del plasma  $n$ ,  $T$  ya pueden integrarse las ecuaciones (3.40). Esto se ha hecho previamente para campos de aparatos de fusión reales pero sin incluir el efecto de islas magnéticas [5]. Aquí el objetivo será estudiar cómo se modifica el transporte de una población de iones en presencia de una cadena de islas. Para tener un mejor entendimiento del fenómeno, es útil conocer al tipo de trayectorias que tendrán los iones en este sistema.

### 4.1.1. Trayectorias

Se realizó la integración de las ecuaciones (3.31). Esto dio como resultado la evolución de trayectorias de iones durante un intervalo de tiempo  $t = 0.18$  ms. Además se utilizaron los parámetros que se muestran en la tabla 4.1.

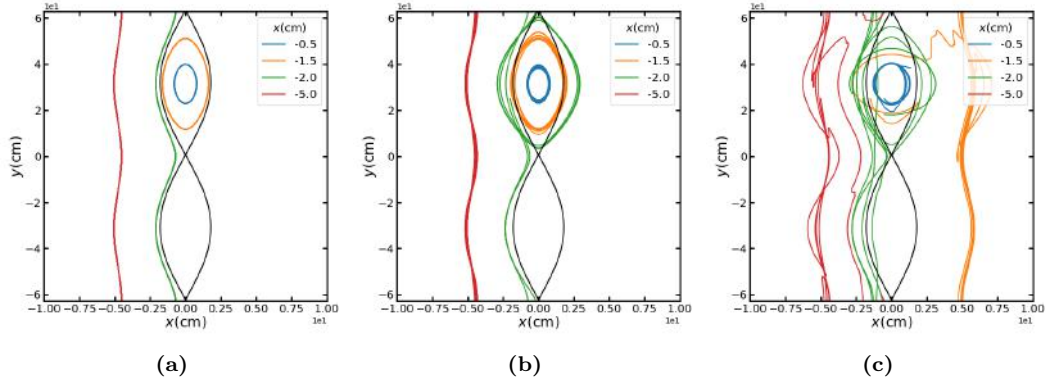
Parámetro	Valor
Magnitud del campo en el eje $B_0$	2 T
Radio mayor $R$	200 cm
Radio menor $a$	20 cm
Temperatura de iones $T_i$	1 keV
Temperatura de electrones $T_e$	1 keV
Densidad de plasma $n$	$2 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$

**Tabla 4.1:** Parámetros.

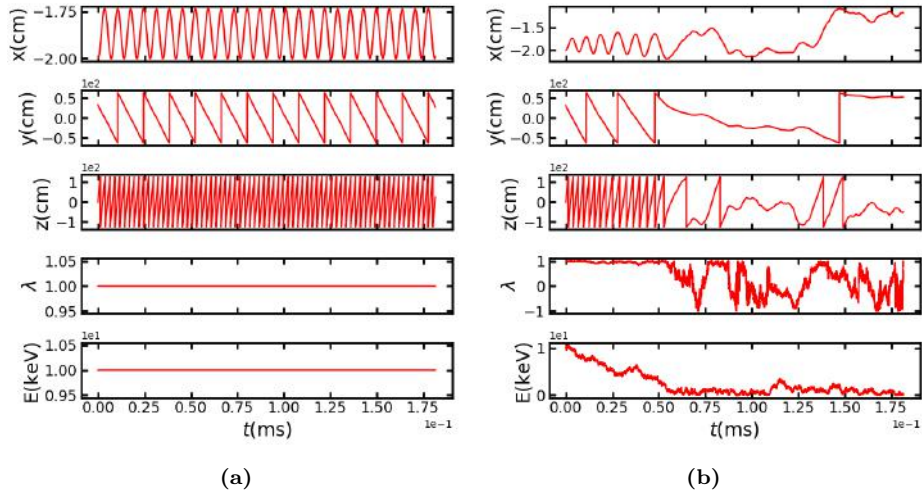
En la figura 4.2a se muestran varias trayectorias de *iones térmicos*, i.e. iones con la misma distribución maxwelliana del plasma. Algunas trayectorias son *pasantes*, éstas se encuentran fuera de la cadena de islas, y otras *atrapadas en la cadena* que se encuentran en los puntos O de la cadena. En este caso sin colisiones, toda la trayectoria de una partícula se aloja en una sola superficie magnética, pues sigue una sola línea de campo correspondiente a la posición inicial. En la figura 4.2b se muestran trayectorias obtenidas bajo el efecto de colisiones con un plasma de fondo, ésto se caracteriza por la frecuencia de colisiones  $\nu$ . Puede notarse que la trayectoria de una partícula pasante cambia a ser atrapada durante el tiempo de simulación. Aunque, en general, lo contrario también puede ocurrir. En la figura 4.2c puede verse que las partículas cambian más frecuentemente de superficie magnética, lo que se relaciona al incremento en la frecuencia de colisiones.

En la figura 4.3 se muestra la evolución de las variables de espacio fase para una partícula rápida con energía inicial de  $E = 10$  keV. De la figura 4.3a puede notarse la oscilación de la variable  $x$  debido a la isla, y de  $y, z$  debido a las condiciones periódicas en esas direcciones. El ángulo de inclinación y la energía se mantienen constantes. En la figura 4.3b se incluye el efecto de colisiones. Puede notarse que para  $t < 0.5 \times 10^{-1} \text{ s}^{-1}$  las variables cartesianas se mantienen aproximadamente iguales que el caso sin colisiones, el ángulo de inclinación oscila alrededor de  $\lambda = 1$  y la energía decrece hasta alcanzar la termalización. Para  $t > 0.5 \times 10^{-1} \text{ s}^{-1}$  se observa variación estocástica en las variables cartesianas y el ángulo de paso, mientras que la energía oscila alrededor de la energía térmica de los iones del plasma. De ésto puede decirse que los iones rápidos desvían poco su trayectoria debido a las colisiones, pero

sí disminuye su energía hasta la termalización en donde las desviaciones ya se vuelven apreciables.



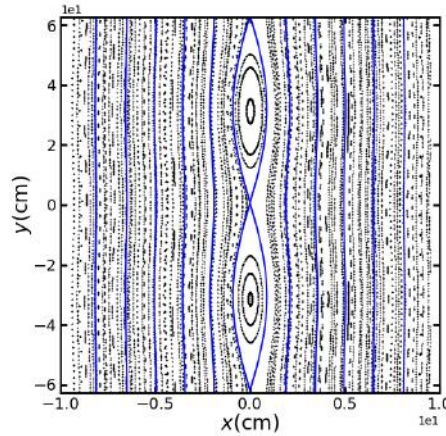
**Figura 4.2:** Proyección en el plano  $x - y$  de las trayectorias de partículas. Se iniciaron con ángulo de inclinación  $\lambda = 1$  y  $x = -0.5, -1.5, -2.0, -5.0$  cm. (a) Sin colisiones. (b) Con frecuencia de colisiones  $\nu = 1.8 \times 10^3 \text{ s}^{-1}$ . (c) Con frecuencia de colisiones  $\nu = 1.8 \times 10^4 \text{ s}^{-1}$ .



**Figura 4.3:** Evolución temporal de las coordenadas de espacio fase para una partícula rápida con energía inicial  $E = 10 \text{ keV}$  y ángulo de inclinación inicial de  $\lambda = 1$ . (a) Sin colisiones. (b) Con colisiones.

### 4.1.2. Simulaciones Monte Carlo

Una *sección de Poincaré* puede obtenerse simulando un ensemble de partículas iniciadas en distintas superficies magnéticas, se elije un plano  $x - y$  para  $z = 0$  de modo que la intersección de una trayectoria con ese plano se representa como un punto. En la figura 4.4 se muestra una sección de Poincaré obtenida para el modelo de placa, de esta puede verse que las partículas se mueven sobre superficies magnéticas. Cabe destacar que una sección de Poincaré no necesariamente corresponde a las líneas de campo, pues las trayectorias podrían desviarse de estas debido a derivas. Aún así puede obtenerse una sección de Poincaré del campo magnético tomando partículas con energías muy bajas,  $E = 1 \times 10^{-10}$  keV, de modo que sigan a las líneas de campo. En este modelo tanto partículas lentas como rápidas dibujan el mismo tipo de sección de Poincaré, contrario a lo que ocurre en el modelo de tokamak (ver sección 4.2.2).



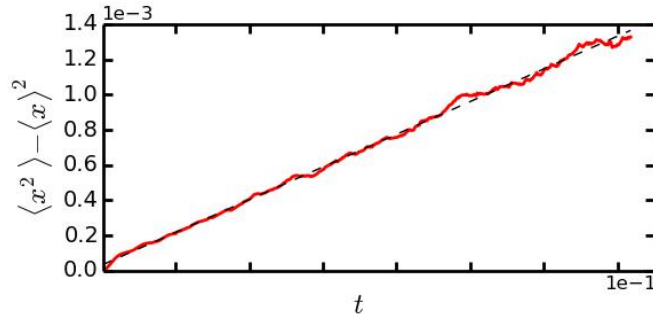
**Figura 4.4:** Sección de Poincaré. Se muestran en azul las superficies dibujadas tomando  $\psi(x, y) = \text{cte.}$  de 4.2.

Los coeficientes de difusión pueden calcularse a partir de la dispersión mediante la fórmula

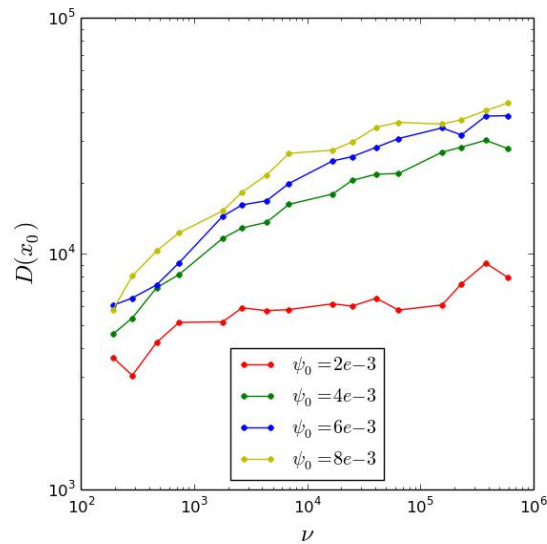
$$D(x_0) = \frac{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}{2t}, \quad (4.4)$$

donde  $\langle \rangle$  representa el promedio de ensemble,  $x_0$  es el valor inicial de  $x$  para la población de partículas simulada. En la figura 4.5 se muestra la dispersión de las partículas en la variable  $x$  iniciadas en  $x_0$ , el coeficiente de difusión está dado por la pendiente de la recta obtenida por regresión lineal. Así, pueden hacerse simulaciones para obtener coeficientes de difusión para varias frecuencias de colisión y para varios

anchos de isla. En la figura 4.6 se muestran curvas de difusión  $D(\nu)$  obtenidas para varios anchos de isla. Puede verse que la difusión incrementa con el ancho de isla.



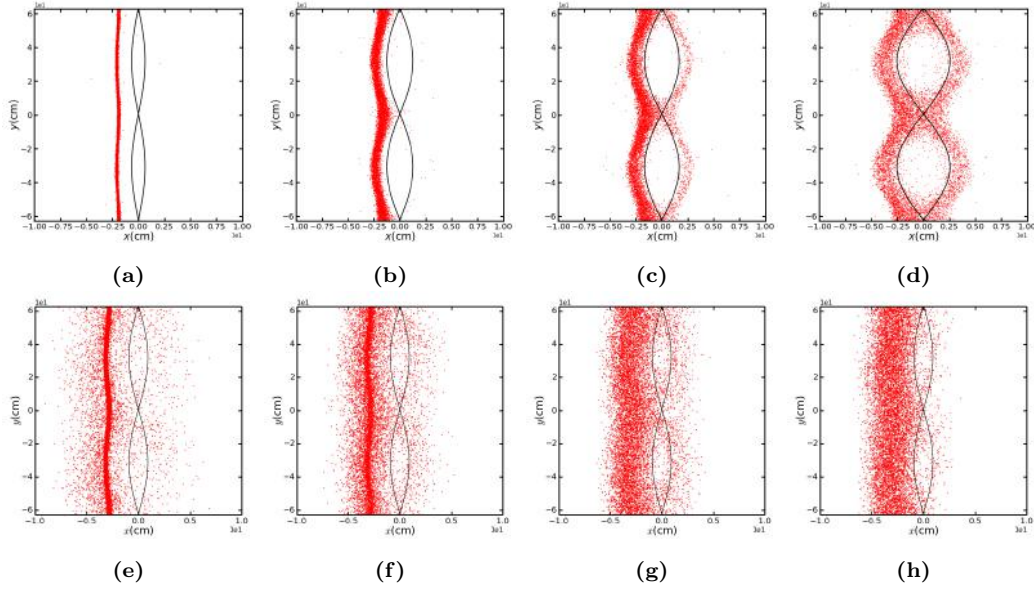
**Figura 4.5:** Dispersión de la variable  $x$  para un ensemble de partículas iniciadas en  $x_0$ . La línea punteada representa la regresión lineal hecha cuya pendiente corresponde al coeficiente de difusión.



**Figura 4.6:** Difusión de iones térmicos para varios anchos de isla  $\psi_0 = 2 \times 10^{-3}, 4 \times 10^{-3}, 6 \times 10^{-3}, 8 \times 10^{-3}$ .

Para visualizar que ocurre físicamente con el incremento del ancho de isla, pueden verse las distribuciones finales de partículas de la figura 4.7. Para anchos de isla cada vez más grandes, (a-d), las partículas alcanzan a transportarse al otro lado de la

isla a través de los puntos  $X$ , esto corresponde a un incremento en la dispersión y por tanto del coeficiente de difusión. Por otro lado, puede verse que ocurre con el incremento de la frecuencia de colisiones, (e-h). Como es de esperarse, de ésta se ve que las partículas se transportan cada vez más y más lejos del valor inicial  $x_0$  para  $\nu$  cada vez más grande, lo que también significa un incremento en el coeficiente de difusión. Estos dos efectos combinados explican la forma de las curvas obtenidas en 4.6.



**Figura 4.7:** Distribución final del ensemble de iones iniciado en  $x_0$ . Se muestran para varios anchos de isla  $\psi_y = 2 \times 10^{-3}$ ,  $4 \times 10^{-3}$ ,  $6 \times 10^{-3}$ ,  $8 \times 10^{-3}$  (a-d) y para varias frecuencias de colisión  $\nu = 2 \times 10^2$ ,  $2 \times 10^3$ ,  $2 \times 10^4$ ,  $2 \times 10^5$  (e-h).



## 4.2. Modelo de Tokamak

A diferencia del modelo de placa, el modelo de tokamak incluye un efecto de curvatura para el campo. En este las superficies magnéticas son superficies toroidales anidadas, como se ve en la figura 2.2a. Por otro lado, una isla magnética se ve como en la figura 1.3. Se modela al campo de tokamak de sección circular de acuerdo a [20]

$$B(r, \theta) = B_0 \left( 1 - \epsilon_w \frac{r}{a} \cos \theta \right), \quad (4.5)$$

donde  $B_0$  es la magnitud del campo en el eje magnético,  $\epsilon_w = R/a$  la razón de aspecto inversa en la pared y  $a$  el radio menor del tokamak. Para poder resolver las ecuaciones de centro guía 3.41 hace falta dar al factor de seguridad  $q$ , las corrientes  $g$ ,  $I$  y sus derivadas  $g'$ ,  $I'$ . Aquí se toman a las corrientes como constantes:  $g = RB_\varphi$  e  $I = rB_\theta$ , por tanto  $g' = I' = 0$ . Para el factor de seguridad se toma al perfil

$$q(\psi) = q_w \left( \frac{\psi_p}{\psi_w} \right)^{1/2}, \quad (4.6)$$

donde  $q_w = \epsilon_w B_t / B_p$  es el factor de seguridad en la pared y  $\psi_w$  es el flujo poloidal en la pared.

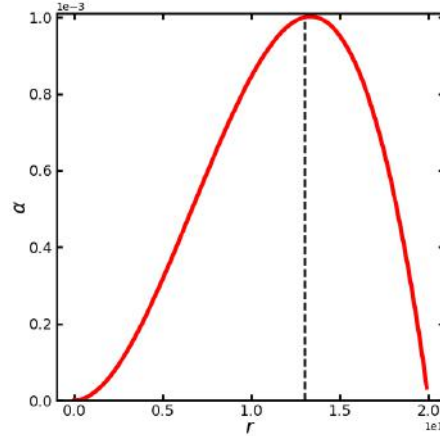
Para modelar a la amplitud de perturbación  $\alpha$  en 3.41, se utiliza [23]

$$\alpha(r) = \alpha_{\max} \left( \frac{r}{r_{\max}} \right)^m \left( \frac{a-r}{a-r_{\max}} \right)^n, \quad (4.7)$$

cuyo máximo es  $\alpha_{\max}$  y se encuentra en  $\alpha_{\max} = r_{\max}/a = m/(m+p)$ . Éste es un buen modelo para  $m/n > 1$ , aquí se utiliza  $m = 2$ ,  $n = 1$ . En la figura 4.8 se muestra la forma de  $\alpha(r)$ .

### 4.2.1. Trayectorias

La integración de las ecuaciones 3.41 junto a los operadores de colisión 3.36 y 3.39 para una sola partícula dio como resultado las trayectorias de la figura 4.9. En 4.9a se muestran cuatro trayectorias para varios ángulos de inclinación. Puede verse que las partículas con ángulos de inclinación cercanos a  $-1$  tienen trayectorias recorridas hacia la *pared interna* (la más cercana al eje), mientras que ángulos de inclinación cercanos a  $0^-$  tienen trayectorias recorridas hacia la *pared externa* (la más

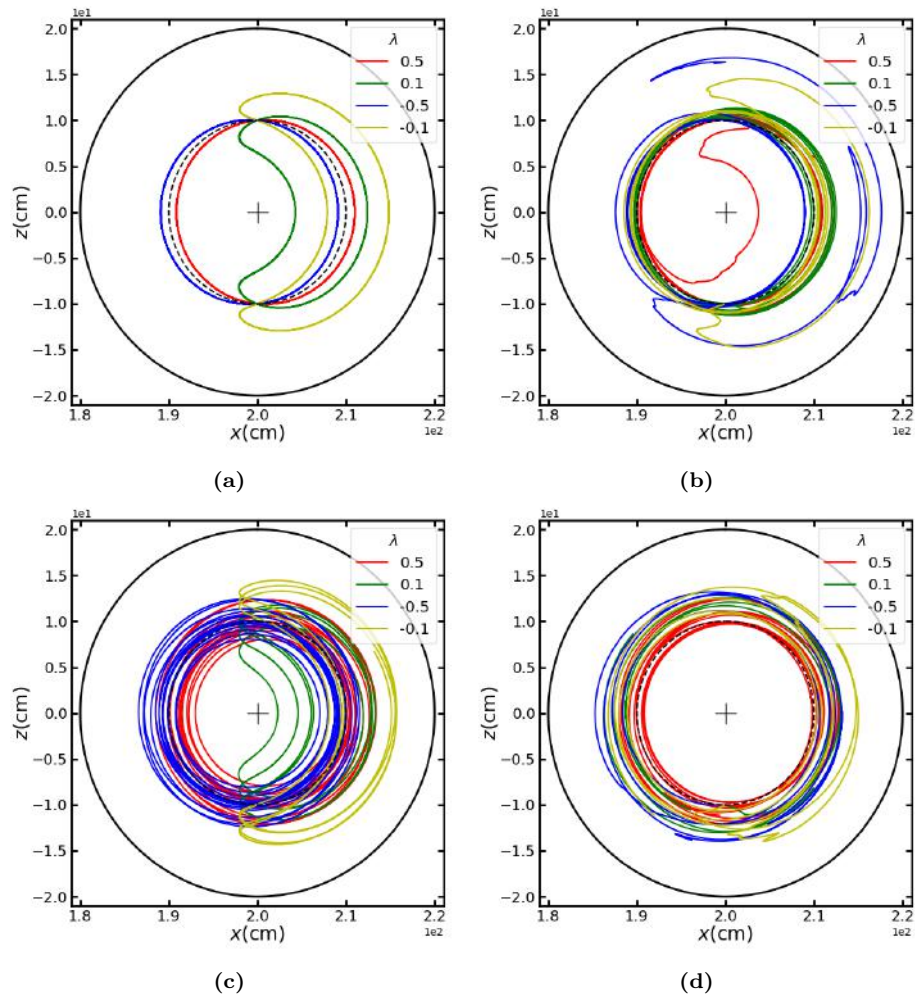


**Figura 4.8:** Forma de la amplitud de perturbación.

alejada al eje). Existen dos tipos de órbitas en este caso: las partículas con ángulo de inclinación más chico dan lugar a *órbitas de banana*, cuya velocidad paralela se anula cerca de las puntas y la partícula se refleja hacia superficies magnéticas más cercanas a la pared externa. Las partículas con ángulo de inclinación grande tienen *órbitas pasantes* cuyas trayectorias no se reflejan y continúan hacia superficies más cercanas a la pared interna.

En la figura 4.9b se muestran las trayectorias bajo el efecto de colisiones, esto hace que las partículas cambien de superficie magnética y también puedan cambiar su tipo de órbita de banana a pasante (o viceversa). En 4.9c se incluye el efecto de una cadena de islas  $m = 2$ ,  $n = 1$  pero no el de colisiones. Puede verse que las partículas cambian de superficie magnética pero mantienen su tipo de trayectoria. Finalmente en 4.9d se muestra el efecto combinado de colisiones e islas magnéticas.

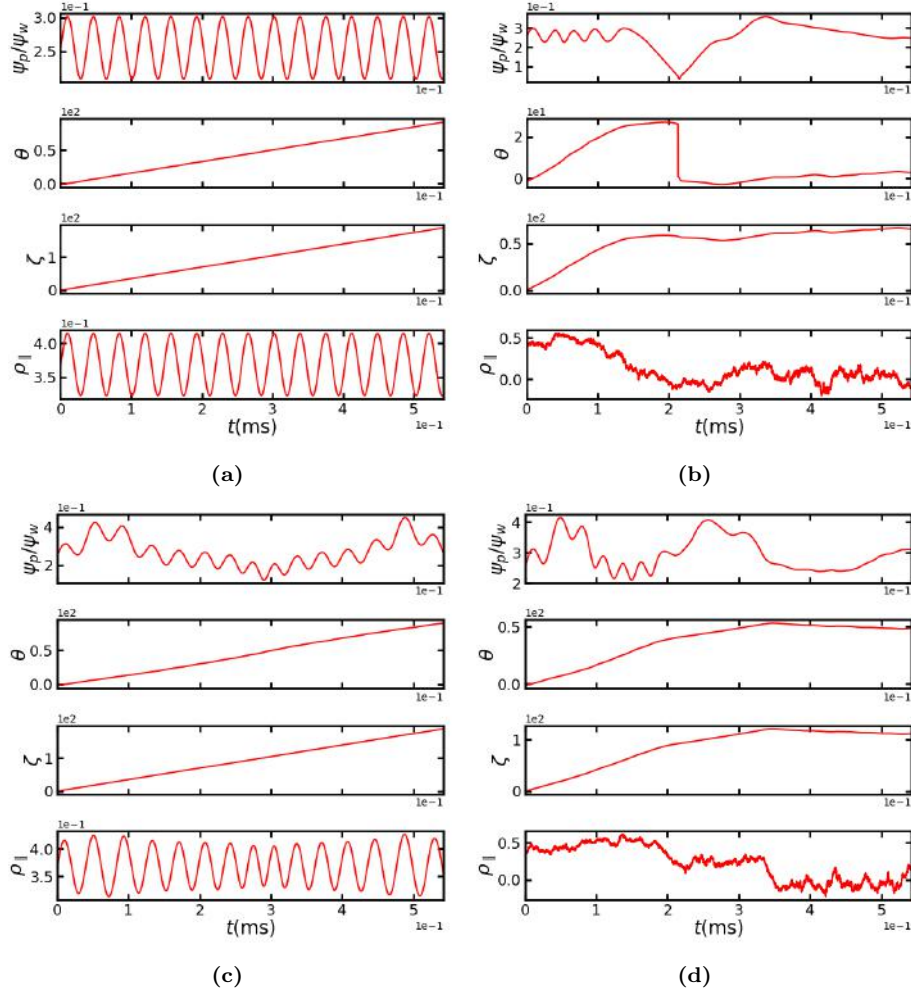
En la figura 4.10 se muestra la evolución de las variables de espacio fase para una partícula con ángulo de inclinación inicial  $\lambda = 1$  y energía  $E = 10$  keV. En 4.10a se observa una oscilación en el flujo magnético, esto indica que, si bien la partícula tiene una órbita pasante, esta tiene un movimiento acotado entre superficies magnéticas. También puede verse el incremento en las variables toroidal y poloidal, y una oscilación del radio de giro paralelo. En la figura 4.10b se incluye el efecto de colisiones, puede verse un salto en el ángulo poloidal, que corresponde con una reflexión de la trayectoria, es decir el cambio de órbita pasante a órbita de banana. En 4.10c se incluye el efecto de las islas solamente que no cambian significativamente las variables salvo la variable de flujo. En la figura 4.10d se incluyen los efectos tanto



**Figura 4.9:** Proyección en el plano  $x - z$  de las trayectorias de partículas individuales con ángulos de inclinación iniciales  $\lambda = 0.1, 0.5, -0.1, -0.5$  en el modelo de tokamak. (a) Sin colisiones. (b) Con colisiones. (c) Con islas. (d) Con colisiones e islas.

de las colisiones como de la isla.

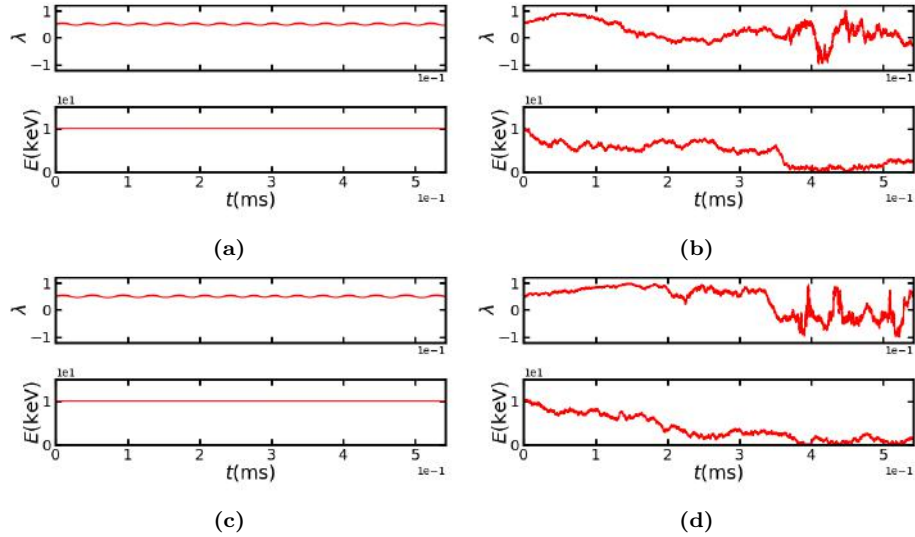
En la figura 4.11 se muestra la evolución del ángulo de inclinación y de la energía para la misma partícula de la figura 4.10. Como es natural, de 4.11b puede verse que el efecto de colisiones cambia de forma estocástica al ángulo de inclinación y relaja la energía a la termalización. Por otro lado de 4.11c puede verse que el efecto de islas no cambia la evolución de estas variables.



**Figura 4.10:** Evolución temporal de las coordenadas de Boozer para una partícula con ángulo de inclinación inicial  $\lambda = 0.5$  en el modelo de tokamak. (a) Sin colisiones. (b) Con colisiones. (c) Con islas. (d) Con colisiones e islas.

### 4.2.2. Simulaciones Monte Carlo

Para verificar la rotación de la cadena de islas se simula a un grupo de partículas,  $N = 80$ , poco energéticas que siguen las líneas de campo. Se obtienen secciones de Poincaré para varios ángulos toroidales, estas secciones corresponden al campo magnético. En la figura 4.12 puede verse que, efectivamente, la cadena de islas rota

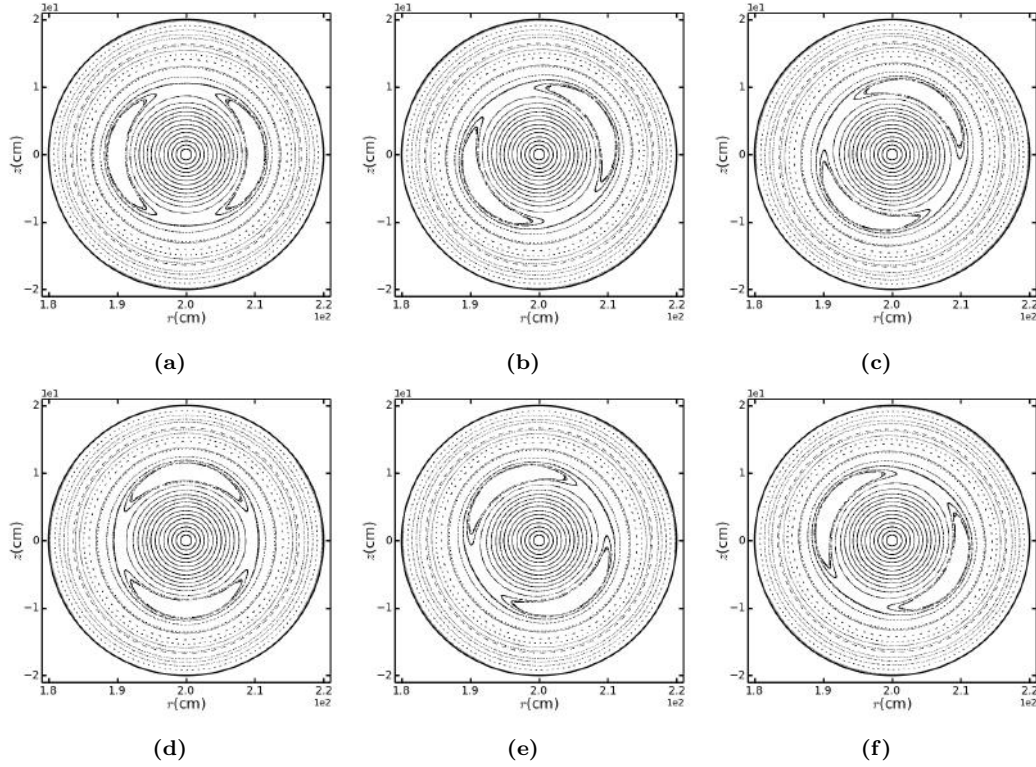


**Figura 4.11:** Evolución temporal del ángulo de inclinación y la energía para una partícula con ángulo de paso inicial  $\lambda = 0.5$  en el modelo de tokamak. (a) Sin colisiones. (b) Con colisiones. (c) Con islas. (d) Con colisiones e islas.

en dirección poloidal a medida que da una vuelta en dirección toroidal.

En la figura 4.13 se muestran secciones de Poincaré en el plano  $r - \theta$ , puede verse el cambio en el tamaño de las islas al variar la amplitud de la perturbación  $\alpha_0 = 2 \times 10^{-4}, 4 \times 10^{-4}, 6 \times 10^{-4}, 8 \times 10^{-4}$ . En (a-d) puede verse que las líneas de campo se mantienen alojadas en superficies y hay una cadena de  $m = 2$  islas en  $r = 0.5r_{\min}$ . En (e-h) se muestran secciones para trayectorias de iones rápidos, puede verse que aparecen islas secundarias además de la  $m = 2$  inducida por la perturbación, por ejemplo aparece una cadena  $m = 3$  en  $r = 0.8r_{\min}$ . Además, en este caso hay una región estocástica cerca de  $r = 0$  en la cual las trayectorias no se alojan sobre superficies y se ven como ruido en la sección de Poincaré.

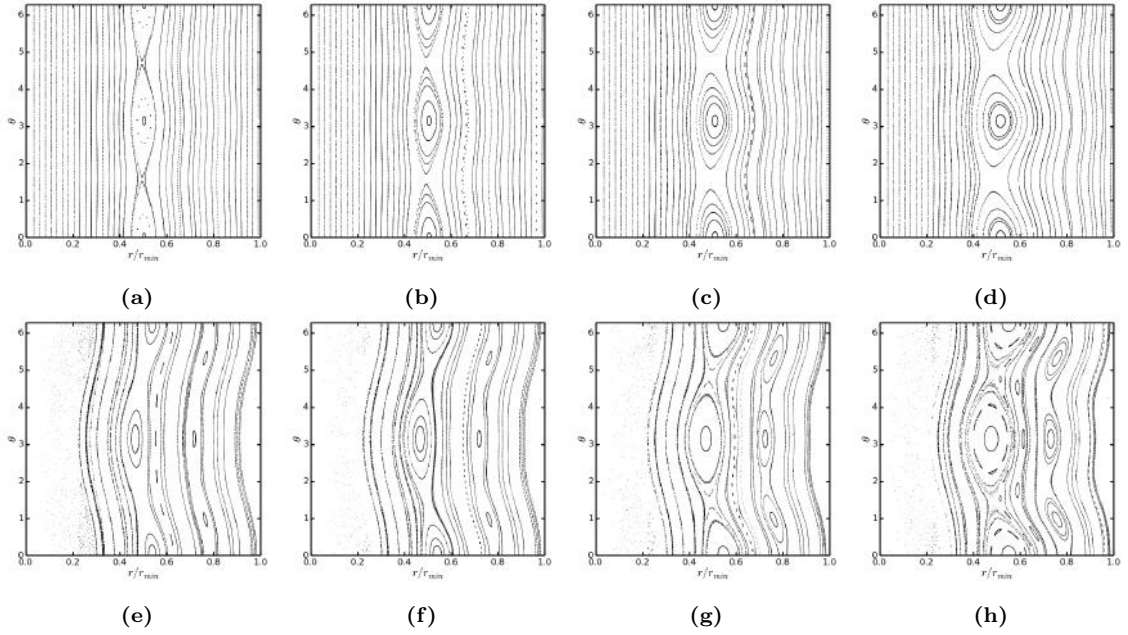
Se realizaron simulaciones de un ensemble de  $N = 1 \times 10^4$  iones térmicos con los parámetros mostrados en la tabla 4.1 y a partir de ello se calcularon coeficientes de difusión. La figura 4.14a muestra curvas de difusión  $D(\nu_*)$  para iones térmicos iniciados en  $r = 0.3r_{\min}$  para varios anchos de isla  $\alpha_0$ . Puede verse que para anchos de isla más grandes la difusión incrementa en los regímenes de banana y de Pfirsch-Schluter. Además, pueden compararse los resultados numéricos con la curva predicha por el transporte neoclásico [11]. Por otro lado, la figura 4.14b muestra curvas de



**Figura 4.12:** Secciones de Poincaré del Tokamak en el espacio  $r - z$  para varios ángulos toroidales. (a)  $\zeta = 0$ . (b)  $\zeta = \pi/3$ . (c)  $\zeta = 2\pi/3$ . (d)  $\zeta = \pi$ . (e)  $\zeta = 4\pi/3$ . (f)  $\zeta = 5\pi/3$ .

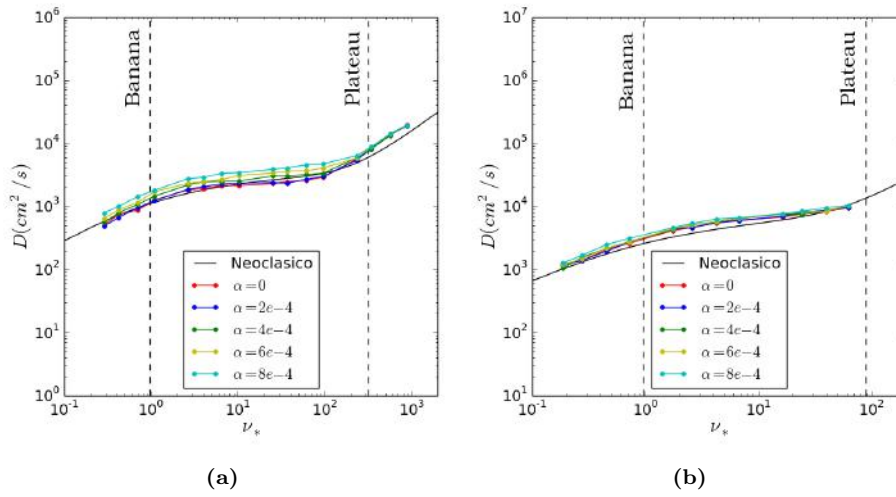
difusión para iones térmicos iniciados en  $r = 0.7r_{\min}$ , en este caso puede verse que el ancho de isla no tiene un efecto significativo en el transporte. Nótese que la isla se encuentra alrededor de  $r = 0.5r_{\min}$ .

En la figura 4.15 se muestran las curvas de difusión  $D(r)$  para varios anchos de isla. En 4.15a se muestran las curvas para iones térmicos en el régimen de plateau, puede verse que para anchos de isla más grandes se incrementa la difusión en la región cercana al eje magnético,  $r/r_{\min} = 0$ . Cerca de la cadena, alrededor de  $r/r_{\min} = 0.5$  la difusión se mantiene para todos los anchos de isla. En 4.15b se muestran las curvas de difusión para iones rápidos con energía de  $E = 10 \text{ keV}$  en el régimen de plateau. En 4.15c se muestran las curvas de difusión para iones térmicos en el régimen de banana, puede verse que la difusión es menor para todos los anchos de isla respecto a 4.15a, pero la forma de las curvas es cualitativamente similar. En 4.15d se muestra el caso para iones rápidos en el régimen de banana.



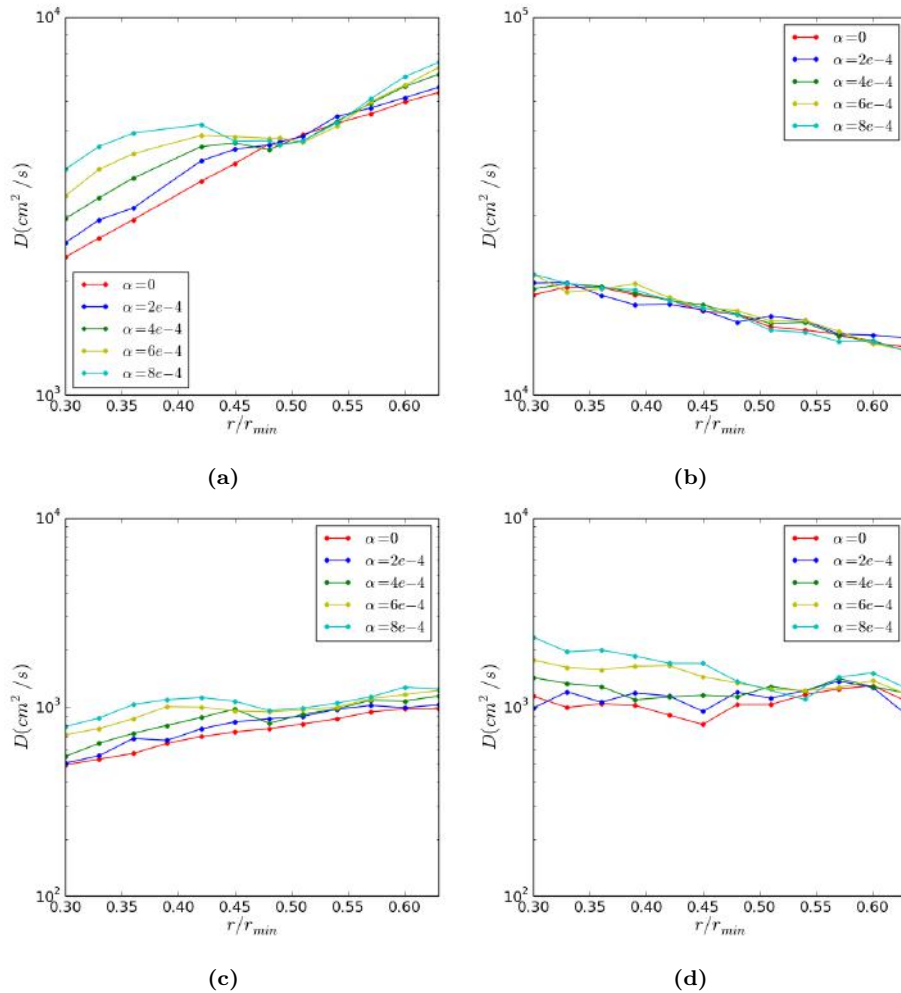
**Figura 4.13:** Secciones de Poincaré en el espacio  $r - \theta$  para campo de tokamak (a-d) y para el espacio fase de iones rápidos con energía  $E = 10\text{keV}$  (e-h). Se usaron amplitudes de perturbación  $\alpha = 2 \times 10^{-4}$ ,  $4 \times 10^{-4}$ ,  $6 \times 10^{-4}$ ,  $8 \times 10^{-4}$ .

Para tener una idea de que ocurre físicamente con la difusión pueden obtenerse distribuciones de partículas. En la figura 4.16a se muestra la distribución final de partículas para una simulación sin colisiones y sin islas. Puede verse que las partículas se mantienen prácticamente sobre la misma superficie magnética en que fueron iniciadas. En la figura 4.16b se muestra el efecto de colisiones en el régimen de Plateau, puede verse que las partículas se encuentran dispersas respecto a su posición inicial. En la figura 4.16c se muestra el efecto de la cadena de islas con amplitud  $\alpha_0 = 6 \times 10^{-3}$ , puede verse que, en comparación al caso de solo colisiones, las partículas se encuentran más dispersas respecto a su superficie inicial. La figura 4.16d muestra el efecto combinado de colisiones e islas, en esta puede verse que hay partículas que colisionan con la pared inferior (se muestra como puntos verdes en la pared).

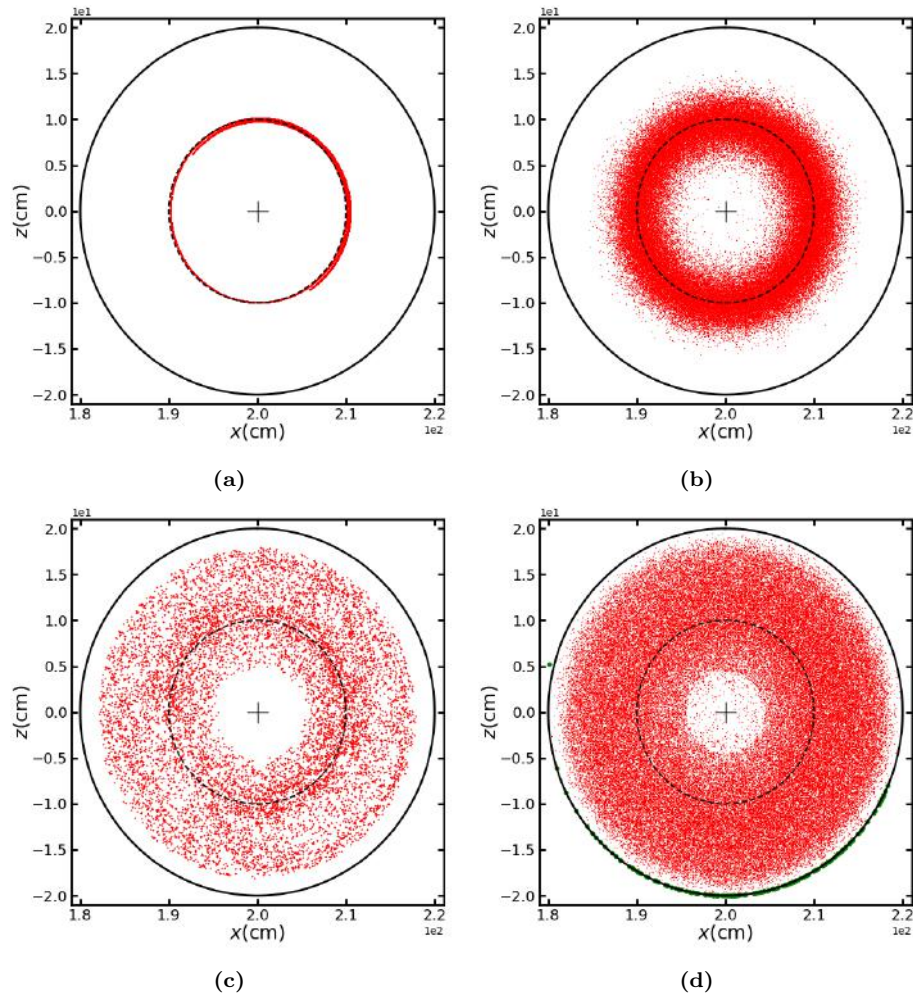


**Figura 4.14:** Coeficientes de difusión  $D(\nu_*)$  de iones térmicos para varios anchos de isla. Se muestra también el valor que predice el transporte neoclásico sin islas. (a) Para  $r_0 = 0.3$ . (b) Para  $r_0 = 0.7$





**Figura 4.15:** Coeficientes de difusión  $D(r)$  de iones para varios anchos de isla  $\alpha_0 = 2 \times 10^{-4}$ ,  $4 \times 10^{-4}$ ,  $6 \times 10^{-4}$ ,  $8 \times 10^{-4}$ . (a) Iones térmicos en el régimen de plateau. (b) Iones rápidos en el régimen de plateau. (c) Iones térmicos en el régimen de banana. (d) Iones rápidos en el régimen de banana.



**Figura 4.16:** Proyección en el plano poloidal de la distribución final de partículas. (a) Sin colisiones y sin islas. (b) Con colisiones y sin islas. (c) Sin colisiones y con islas. (d) Con colisiones y con islas

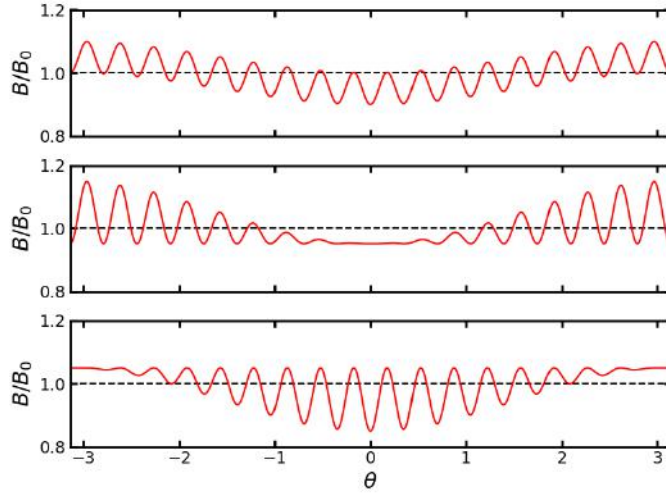
### 4.3. Modelo de Stellarator

A diferencia del modelo de placa y el de tokamak, el modelo de stellarator incluye tanto el efecto de curvatura como el efecto de *atrapamiento helicoidal*.

Se puede modelar al campo de stellarator de acuerdo a [24]

$$B(r, \theta, \zeta) = B_0 \left[ 1 - \epsilon_t \cos \theta - \epsilon_h \cos \eta + \frac{1}{2} \sigma (\epsilon_{h-} \cos \eta_- + \epsilon_{h+} \eta_+) \right] \quad (4.8)$$

donde  $\epsilon_t = r/R$  es la razón de aspecto inversa,  $\epsilon_h = \epsilon_0 (r/a)^l$ ,  $\epsilon_{h\pm} = \epsilon_{\pm} (r/a)^{(l\pm 1)}$ ,  $\eta = l\theta - m\zeta$ ,  $\eta_{\pm} = (l\pm 1)\theta - m\zeta$ , con  $\epsilon_0, \epsilon_{\pm}$  constantes. Aquí se elige entre  $\sigma = -1, 0, 1$  de manera que el confinamiento sea óptimo. Para ello debe tomarse el perfil de campo que localice a las órbitas atrapadas helicoidalmente al interior del toroide, esto compensa los movimientos de deriva que llevan a las partículas hacia la pared. En la figura 4.17 se muestran los perfiles a lo largo de una línea de campo, puede verse que para  $\sigma = 1$  el perfil es máximo cerca de  $\theta = \pm\pi$ , lo cual corresponde al confinamiento óptimo (véase 4.3.1).



**Figura 4.17:** Perfiles de campo magnético a lo largo de una línea de campo. (a)  $\sigma = 0$ . (b)  $\sigma = 1$ . (c)  $\sigma = -1$

### 4.3.1. Trayectorias

En la figura 4.18 se muestran trayectorias de iones térmicos de  $E = 1$  keV iniciados en  $r = 0.5r_{\min}$  con diferentes ángulos de inclinación  $\lambda = -0.5, -0.1, 0.5, 0.1$ . No se incluyen efectos de colisión ni islas. En 4.18a se muestran las trayectorias para el perfil de campo  $\sigma = 0$ . Las órbitas con ángulo de inclinación grande,  $\lambda = -0.5, 0.5$ , son pasantes. Por otro lado los iones con  $\lambda = -0.1, 0.1$  son atrapados helicoidalmente y derivan hacia la pared interna. La trayectoria con  $\lambda = -0.1$  choca con la pared mientras que la trayectoria con  $\lambda = 0.1$  alcanza a alejarse de la pared sin chocar. Esta configuración no es óptima para el confinamiento, puesto que la distancia entre las órbitas atrapadas helicoidalmente y las órbitas pasantes es muy grande y acerca a las partículas con ángulo de inclinación más chico hacia la pared interna.

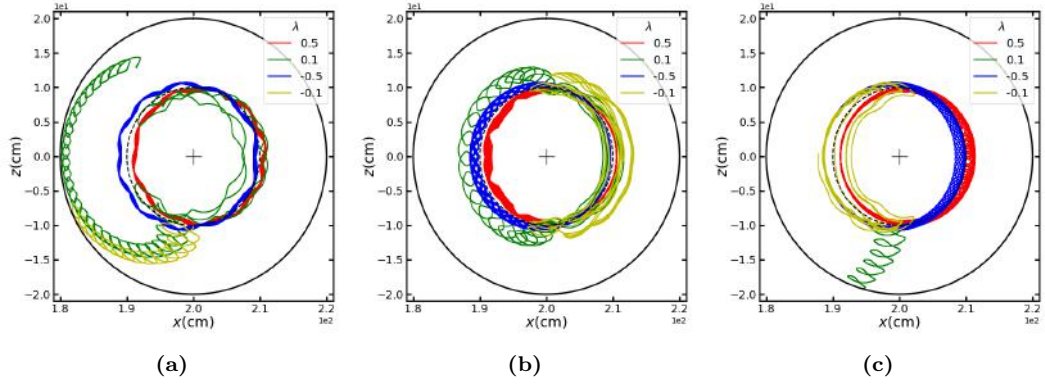
En la figura 4.18b pueden verse las trayectorias para el perfil de campo  $\sigma = 1$ . La trayectoria con  $\lambda = -0.1$  tiene una órbita atrapada de banana y la trayectoria con  $\lambda = 0.1$  es en parte una órbita de banana, pero también se vuelve una órbita atrapada helicoidalmente. Esta configuración es óptima puesto que la distancia entre las órbitas atrapadas helicoidalmente y las órbitas pasantes se mantiene aproximadamente constante. En comparación al perfil  $\sigma = 0$ , los iones no se acercan demasiado a la pared interna.

En la figura 4.18c pueden verse las trayectorias para el perfil de campo  $\sigma = -1$ . En este caso la órbita atrapada helicoidalmente tiene una deriva abrupta hacia la pared. Es claro que esta configuración no es óptima. Al igual que en los modelos de placa y de tokamak, el efecto de colisiones e islas es mover a los iones de superficie magnética de manera estocástica (véanse las figuras 4.2 y 4.9).

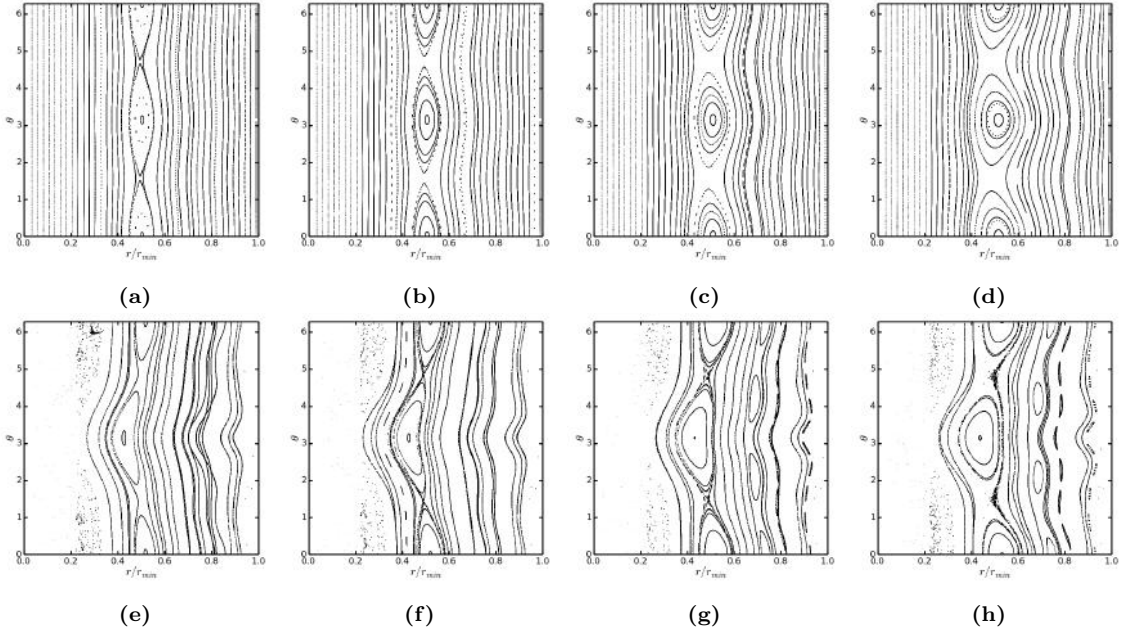
### 4.3.2. Simulaciones Monte Carlo

En la figura 4.19 se muestran secciones de Poincaré del campo (a-d) y de los iones rápidos (e-h). Puede verse que los anchos de isla más grandes no genera regiones estocásticas para el campo. Sin embargo, para las secciones de iones rápidos con los mismos anchos de isla puede verse que poseen una región estocástica cerca de  $r/r_{\min} = 0$  y además aparecen islas secundarias cerca de  $r/r_{\min} = 1$ . Cualitativamente ocurre lo mismo que para la secciones de tokamak, pero en este caso las secciones de iones rápidos tienen una estructura ligeramente distinta.

En la figura 4.20 se muestran los coeficientes de difusión  $D(\nu_*)$  obtenidos para iones térmicos de  $E = 1$  keV. En este caso, los coeficientes en el régimen de baja

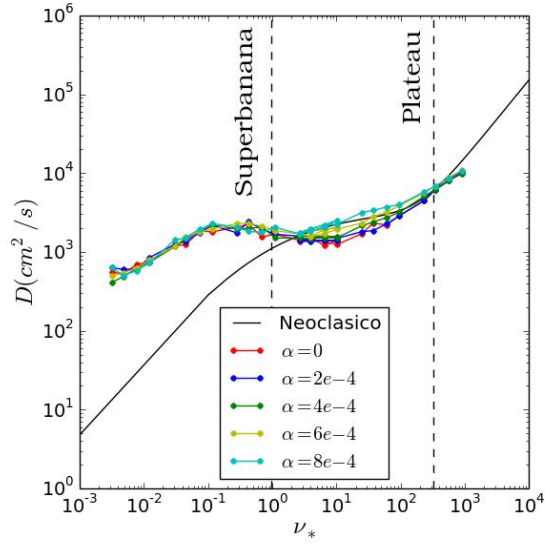


**Figura 4.18:** Proyección en el plano  $x - z$  de las trayectorias de iones con varios ángulos de inclinación iniciales  $\lambda = 0.1, 0.5, -0.1, -0.5$ . (a)  $\sigma = 0$ . (b)  $\sigma = 1$ . (c)  $\sigma = -1$ .



**Figura 4.19:** Secciones de Poincaré en el espacio  $r - \theta$  para varios anchos de isla  $\alpha = 0, 2 \times 10^{-4}, 4 \times 10^{-4}, 6 \times 10^{-4}, 8 \times 10^{-4}$ . Se muestran las secciones del campo (a-d) y de iones rápidos (e-h).

colisionalidad difieren bastante respecto a lo predicho por el transporte neoclásico en tokamaks. Este efecto ya ha sido estudiado previamente y es sabido que se de-



**Figura 4.20:** Coeficientes de difusión  $D(\nu_*)$  para varios anchos de isla  $\alpha = 0, 2 \times 10^{-4}, 4 \times 10^{-4}, 6 \times 10^{-4}, 8 \times 10^{-4}$ . Se muestran los regímenes de superbanana y plateau.

be al atrapamiento helicoidal [16]. A tal régimen en el modelo de stellarator se le llama de *superbanana*, y en este existen órbitas pasantes, de banana y atrapadas helicoidalmente. Puede notarse que el efecto de islas es despreciable en el régimen de superbanana, mientras que en el régimen de plateau se incrementa muy ligeramente la difusión.



# Capítulo 5

## Conclusiones

Se desarrolló un código que resuelve las ecuaciones de centro guía para una población de iones (térmicos o rápidos) en los modelos de placa, tokamak y stellarator. Se incluyó una cadena de islas magnéticas y el efecto de colisiones con un plasma maxwelliano de fondo mediante operadores de Boozer y Kuo-Petravic. A partir de la simulación de un ensemble de partículas, se obtuvo una solución numérica para la evolución de las variables de espacio fase de cada partícula. Ésto equivale a obtener la función de distribución que soluciona a la ecuación de Fokker-Planck con un operador de colisiones de Lorentz. Se realizaron diagnósticos para calcular trayectorias, secciones de Poincaré y coeficientes de difusión en varios regímenes de colisionalidad y para varios anchos de isla en cada modelo.

A partir de secciones de Poincaré se obtuvo que, en el modelo de placa, tanto las líneas de campo como las trayectorias de las partículas se alojan sobre superficies magnéticas. Por tanto, no existe transporte estocástico en este caso. Se obtuvo que las islas magnéticas incrementan el transporte radial de iones térmicos. Tal efecto se asocia a que los iones simplemente siguen las líneas de campo que tienen una componente radial debido a la presencia de la cadena de islas. Por otro lado el efecto de colisiones cambia de superficies magnéticas a los iones, contribuyendo con la difusión.

En las secciones de Poincaré para trayectorias en el modelo de tokamak, se obtuvo que se generan islas secundarias en la región cercana a la pared del tokamak y existen regiones estocásticas cercanas al eje magnético. Se calcularon coeficientes de difusión  $D(\nu_*)$  en varios regímenes de colisionalidad y se obtuvo una buena correspondencia con lo predicho por la teoría de transporte neoclásico para el caso sin islas. Además,



se calcularon coeficientes  $D(r)$  para una sola frecuencia de colisiones y varios anchos de isla. Para iones térmicos se observó que el efecto del transporte estocástico se ve reflejado como un incremento de los coeficientes de difusión en la región cercana al eje magnético, mientras que cerca de la cadena de islas la difusión se mantuvo constante para todos los anchos de isla. Para iones rápidos en el régimen de plateau no se observó un cambio significativo en el transporte debido a la cadena de islas, mientras que en el régimen de banana se observó un comportamiento similar al de iones térmicos. El incremento de la difusión en presencia de islas magnéticas está de acuerdo con resultados experimentales recientes [25].

Finalmente, en el modelo de stellarator se obtuvo que las secciones de Poincaré son cualitativamente similares a las del tokamak. Los coeficientes de difusión mostraron una buena correspondencia con la teoría de transporte que predice un régimen de super banana cuando hay atrapamiento helicoidal de las partículas.

# Apéndice



# Apéndice A

## Derivación de las ecuaciones de centro guía en coordenadas magnéticas

### A.1. Formulación Lagrangiana de la aproximación de centro guía

El método consiste en un desarrollo orden a orden de la función lagrangiana respecto al radio de giro, además se agrega en cada paso una derivada total respecto al tiempo (que simplifica el cálculo a ese orden). La derivación detallada puede encontrarse en [26], aquí solo se muestran los pasos esenciales.

Se parte de la función lagrangiana de una partícula cargada en un campo electromagnético

$$\mathcal{L} = [\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}] \cdot \dot{\mathbf{x}} - \mathcal{H}(\mathbf{v}, \mathbf{x}), \quad (\text{A.1})$$

con  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  y función hamiltoniana  $\mathcal{H} = v^2/2 + \Phi(\mathbf{x}, t)$ .

Se separa el movimiento paralelo al campo magnético respecto al movimiento perpendicular, esto se muestra a través del vector de velocidad,  $\mathbf{v} = v_{\parallel} \hat{\mathbf{b}} + w \hat{\mathbf{c}}$  donde  $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{B}/B$  y  $\hat{\mathbf{c}} = -\sin \xi \hat{\mathbf{e}}_1 - \cos \xi \hat{\mathbf{e}}_2$  con  $\hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2$ ,  $\xi$  el ángulo de giro y  $w$  la magnitud de la velocidad perpendicular.

El centro de guía de una partícula se define con

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \frac{w}{B} \hat{\mathbf{a}}, \quad (\text{A.2})$$

donde  $\hat{\mathbf{a}} = \cos \xi \hat{\mathbf{e}}_1 - \sin \xi \hat{\mathbf{e}}_2$  tal que  $\hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{c}} \times \hat{\mathbf{a}}$  y todas las cantidades en el segundo término están evaluadas en la posición del centro guía  $\mathbf{X}$ . Así, se reescribe la función lagrangiana como

$$\mathcal{L} = [\mathbf{A} + v_{\parallel} \hat{\mathbf{b}} + w \hat{\mathbf{c}}] \cdot \left[ \dot{\mathbf{X}} + \frac{d}{dt} \left( \frac{w}{B} \hat{\mathbf{a}} \right) \right] - \mathcal{H}. \quad (\text{A.3})$$

Ahora, se hace un desarrollo respecto al parámetro pequeño  $w$ . Es decir, todas las escalas espaciales son grandes comparadas a  $w$  tal que las variaciones temporales del campo son lentas respecto a la frecuencia de giro  $\xi$ . Entonces, se puede escribir al potencial vector como

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \approx \mathbf{A}(\mathbf{X}, t) + \frac{w}{B} \hat{\mathbf{a}} \cdot \nabla \mathbf{A}(\mathbf{X}, t), \quad (\text{A.4})$$

este se sustituye en (A.3). Luego se suma la derivada total de una cantidad  $S_1$  y se aproxima a orden más bajo respecto  $\xi$ . Se repite el procedimiento para otra cantidad  $S_2$ . Aquí  $S_1$  y  $S_2$  son

$$S_1 = -\frac{w}{B} \hat{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{A}, \quad (\text{A.5a})$$

$$S_2 = -\frac{w^2}{2B^2} (\hat{\mathbf{a}} \cdot \nabla) \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{a}}. \quad (\text{A.5b})$$

Luego de este procedimiento la función lagrangiana queda reducida a

$$\mathcal{L} = [\mathbf{A} + v_{\parallel} \hat{\mathbf{b}} + w \hat{\mathbf{c}}] \cdot \dot{\mathbf{X}} + \frac{w^2 \dot{\xi}}{2B} - \frac{w}{B} \hat{\mathbf{a}} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathcal{H} \quad (\text{A.6})$$

y finalmente se toma el promedio respecto al ángulo de giro. Queda entonces

$$\mathcal{L} = [\mathbf{A} + \rho_{\parallel} \mathbf{B}] \cdot \dot{\mathbf{X}} + \mu \dot{\xi} - \mathcal{H}, \quad (\text{A.7})$$

donde  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(v_{\parallel}, w, \mathbf{X}, t)$ ,  $\mu = w^2/2B$  es el momento magnético y  $\rho_{\parallel} = v_{\parallel}/B$  es el radio de giro paralelo.

De esta función lagrangiana se puede concluir que  $\mu$  es una cantidad conservada y  $\dot{\xi}$  es constante. Hasta este punto no se hizo ninguna suposición sobre el campo magnético, por lo cual (A.7) es válida independientemente de la existencia de superficies magnéticas, equilibrio u otras condiciones sobre  $\mathbf{B}$ .

## A.2. Formulación Hamiltoniana de la aproximación de centro guía

La formulación Hamiltoniana del movimiento de centro guía fue construida explícitamente por [27]. Además se puede extender el formalismo para incluir campos que no poseen superficies magnéticas bien definidas, dando lugar a campos estocásticos.

De la forma covariante del campo puede identificarse que  $\mathbf{B} = \nabla \times (\psi \nabla \theta - \psi_p \nabla \zeta) = \nabla \times \mathbf{A}$ , por otro lado  $\mathbf{v} = \dot{\psi} \nabla \psi + \dot{\theta} \nabla \theta + \dot{\zeta} \nabla \zeta$ . Entonces, puede reescribirse la función A.7 en términos de las variables  $(\psi, \theta, \zeta)$  como

$$\mathcal{L} = (\psi + \rho_{\parallel} I) \dot{\theta} + (\rho_{\parallel} g - \psi_p) \dot{\zeta} + \mu \dot{\xi} + \delta \rho_{\parallel} \dot{\psi} - \mathcal{H}, \quad (\text{A.8a})$$

donde la función Hamiltoniana se escribe como  $\mathcal{H} = \rho_{\parallel}^2/2 + \mu B + \Phi$ .

Salvo el término que incluye a  $\delta$ , este lagrangiano tiene la forma canónica  $\mathcal{L} = P_k \dot{q}_k - \mathcal{H}$ . Puede probarse que  $\delta$  no representa ninguna contribución a la trayectoria del centro guía en  $(\psi_p, \theta)$  ni a la precesión toroidal en la variable  $\zeta$ , simplemente corresponde a una fase adicional en la variable de tiempo. Por esto, puede eliminarse el término que lo incluye en la función Lagrangiana y ello no cambiará la descripción de la trayectoria [26]. Así, es directo identificar a los momentos canónicos

$$P_{\theta} = \psi + \rho_{\parallel} I, \quad (\text{A.9a})$$

$$P_{\zeta} = \rho_{\parallel} g - \psi_p, \quad (\text{A.9b})$$

y las ecuaciones de movimiento son

$$\dot{\theta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_{\theta}}, \quad \dot{P}_{\theta} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta}, \quad (\text{A.10a})$$

$$\dot{\zeta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_{\zeta}}, \quad \dot{P}_{\zeta} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \zeta}. \quad (\text{A.10b})$$

Nótese que la función hamiltoniana está dada en las variables  $(\rho_{\parallel}, \psi, \zeta, \theta)$ , y las ecuaciones de Hamilton en  $(P_{\zeta}, P_{\theta}, \zeta, \theta)$ . Sin embargo, se pueden obtener  $(\dot{\rho}_{\parallel}, \dot{\psi}, \dot{\zeta}, \dot{\theta})$  en las variables  $(\rho_{\parallel}, \psi, \zeta, \theta)$  con el cambio de coordenadas

$$\begin{bmatrix} \dot{\rho}_{\parallel} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\zeta} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\partial_{\psi} P_{\theta} & \partial_{\psi} P_{\zeta} \\ 0 & 0 & \partial_{\rho_{\parallel}} P_{\theta} & -\partial_{\rho_{\parallel}} P_{\zeta} \\ \partial_{\psi} P_{\theta} & -\partial_{\rho_{\parallel}} P_{\theta} & 0 & 0 \\ -\partial_{\psi} P_{\zeta} & \partial_{\rho_{\parallel}} P_{\zeta} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_{\rho_{\parallel}} \mathcal{H} \\ \partial_{\rho_{\psi}} \mathcal{H} \\ \partial_{\rho_{\zeta}} \mathcal{H} \\ \partial_{\rho_{\theta}} \mathcal{H} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.11})$$

Apéndice A. Derivación de las ecuaciones de centro guía en coordenadas magnéticas

---

donde  $D = gq + I + \rho_{\parallel}(gI' - Ig')$ .

Un cálculo directo lleva a reescribir A.11 como las ecuaciones de movimiento

$$\dot{\psi}_p = -\frac{g}{D} \left[ (\mu + \rho_{\parallel}^2 B) \partial_{\theta} B + \partial_{\theta} \Phi \right] + \frac{I}{D} \left[ (\mu + \rho_{\parallel}^2 B) \partial_{\zeta} B + \partial_{\zeta} \Phi \right], \quad (\text{A.12a})$$

$$\dot{\theta} = \frac{\rho_{\parallel} B^2}{D} (1 - \rho_{\parallel} g') + \frac{g}{D} \left[ (\mu + \rho_{\parallel}^2 B) \partial_{\psi_p} B + \partial_{\psi_p} \Phi \right], \quad (\text{A.12b})$$

$$\dot{\zeta} = \frac{\rho_{\parallel} B^2}{D} (q + \rho_{\parallel} I') - \frac{I}{D} \left[ (\mu + \rho_{\parallel}^2 B) \partial_{\psi_p} B + \partial_{\psi_p} \Phi \right], \quad (\text{A.12c})$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{\parallel} = & -\frac{1}{D} (1 - \rho_{\parallel} g') \left[ (\mu + \rho_{\parallel}^2 B) \partial_{\theta} B + \partial_{\theta} \Phi \right] \\ & - \frac{1}{D} (q + \rho_{\parallel} I') \left[ (\mu + \rho_{\parallel}^2 B) \partial_{\zeta} B + \partial_{\zeta} \Phi \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.12d})$$

# Apéndice B

## Equivalencia entre operadores de colisión de Fokker-Planck y operadores de Boozer y Kuo-Petravic

Aquí se muestra que existe una equivalencia entre el operador de colisiones en la ecuación de Fokker-Planck que describe la interacción de una población de partículas de prueba con un plasma de fondo [18] y ecuaciones de Langevin en donde las colisiones aparecen como términos que se agregan a las ecuaciones de centro guía y que están dados por los operadores de Boozer y Kuo-Petravic [20].

La equivalencia entre una ecuación de Fokker-Planck y ecuaciones de Langevin está dada por

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x^\mu}(F^\mu f) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu}(G_\eta^\mu G^{\eta\nu} f), \quad (\text{B.1a})$$

$$dx^i = F^i(x, t)dt + G_j^i(x, t)dW^j, \quad (\text{B.1b})$$

donde la primera ecuación es la de Fokker-Planck y la segunda las ecuaciones de Langevin para las variables de espacio fase  $i, j = (\mathbf{r}, v^2, \lambda)$ . La función  $F^i(x, t)$  contiene la información de la dinámica de las partículas debido a los campos  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}$ . El efecto de colisiones se encuentran en  $F^i(x, t)$  y  $G_j^i(x, t)$  para  $i, j = (v^2, \lambda)$ .  $dW^j$  son números aleatorios.



Debido a la interacción de largo alcance de la fuerza de Coulomb, las colisiones lejanas de ángulo pequeño son mucho más probables que las de ángulo grande. Ésto permite escribir a la ecuación de Fokker-Planck en las variables de espacio fase  $(\mathbf{r}, \lambda, v^2)$  como [18]

$$\mathcal{L}f = \frac{\nu_d}{2} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ (1 - \lambda^2) \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right] + \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[ v^2 \nu_E \left( v f + \frac{T}{m} \frac{\partial f}{\partial v} \right) \right], \quad (\text{B.2})$$

donde  $\mathcal{L}f$  contiene la parte de la ecuación que describe la dinámica de la función de distribución  $f$  debida a los campos  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{E}$ ,  $\nu_d$  y  $\nu_E$  son las frecuencias de relajación de deflexión y de energía definidas por 3.23.

En estas expresiones  $x = v/v_{\text{th}}$ ,  $\nu_{B,i}$  es la frecuencia de Braginskii para iones,  $\ln \Lambda_i$  es el logaritmo de Coulomb para iones,  $n_i$  la densidad de iones. Además

$$\Phi(x) = \int_0^x dy \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2}, \quad (\text{B.3a})$$

$$\Psi(x) = \frac{\Phi(x) - x\Phi'(x)}{2x^2}. \quad (\text{B.3b})$$

La ecuación B.2 puede reescribirse mediante cálculo de Ito [15] como

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} = & -\nabla_{\mathbf{r}_{GC}} \cdot (\mathbf{a}_{\mathbf{r}_{GC}} f) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ -(a_\lambda + a_\lambda^{\text{Ito}}) f + \frac{1}{\lambda} (b_\lambda^2 f) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial x^2} \left[ -(a_{x^2} + a_{x^2}^{\text{Ito}}) f + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^2} (b_{x^2}^2 f) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

De la ecuación B.4 pueden identificarse los términos

$$a_\lambda^{\text{Ito}} = -\lambda \nu_d, \quad a_{x^2}^{\text{Ito}} = -2\nu_E \left( x^2 - \frac{x}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-x^2}}{\Psi(x)} \right) \quad (\text{B.5a})$$

$$b_\lambda^{\text{Ito}} = \sqrt{(1 - \lambda^2)} \nu_d, \quad b_{x^2}^{\text{Ito}} = 2x \sqrt{\nu_E}, \quad (\text{B.5b})$$

estos corresponden a los operadores de Boozer y Kuo-Petravic.  $a_\lambda^{\text{Ito}}$  y  $a_{x^2}^{\text{Ito}}$  corresponden a convección de las variables  $(v^2, \lambda)$ , mientras que  $b_\lambda^{\text{Ito}}$  y  $b_{x^2}^{\text{Ito}}$  corresponden a dispersión de esas mismas variables.

---

Entonces, las ecuaciones de Langevin se escriben como

$$\frac{d\mathbf{r}_{\text{GC}}}{dt} = \mathbf{a}_{\text{r}_{\text{GC}}}, \quad (\text{B.6a})$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = (a_\lambda + a_\lambda^{\text{Ito}}) + W_\lambda b_\lambda^{\text{Ito}}, \quad (\text{B.6b})$$

$$\frac{dx^2}{dt} = (a_{x^2} + a_{x^2}^{\text{Ito}}) + W_{x^2} b_{x^2}^{\text{Ito}}, \quad (\text{B.6c})$$

Éstas ecuaciones son las mismas que 3.31, donde  $\mathbf{a}_{\text{r}_{\text{GC}}}$  está dada por la aproximación de centro guía.



# Bibliografía

- [1] IEA (International Energy Agency). *Key World Energy Statistics 2018*. 2018.
- [2] Mark Z Jacobson. “Strong radiative heating due to the mixing state of black carbon in atmospheric aerosols”. En: *Nature* 409.6821 (2001), pág. 695.
- [3] Thomas H Johnson. “Inertial confinement fusion: Review and perspective”. En: *Proceedings of the IEEE* 72.5 (1984), págs. 548-594.
- [4] J Ongena y col. “Magnetic-confinement fusion”. En: *Nature Physics* 12.5 (2016), pág. 398.
- [5] A de Bustos Molina. *Kinetic simulations of ion transport in fusion devices*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [6] Per Helander y col. “Stellarator and tokamak plasmas: a comparison”. En: *Plasma Physics and Controlled Fusion* 54.12 (2012), pág. 124009.
- [7] Thomas Howard Stix. “Heating of toroidal plasmas by neutral injection”. En: *Plasma Physics* 14.4 (1972), pág. 367.
- [8] V Erckmann y U Gasparino. “Electron cyclotron resonance heating and current drive in toroidal fusion plasmas”. En: *Plasma physics and controlled fusion* 36.12 (1994), pág. 1869.
- [9] A Sanderson y col. “Analysis of recurrent patterns in toroidal magnetic fields”. En: *IEEE Trans. Vis. Comput. Graph.* 16.6 (2010), págs. 1431-1440.
- [10] SI Braginskii. “Transport processes in a plasma”. En: *Reviews of plasma physics* 1 (1965).
- [11] FL Hinton y RD Hazeltine. “Theory of plasma transport in toroidal confinement systems”. En: *Rev. Mod. Phys.* 48.2 (1976), pág. 239.
- [12] Radu Balescu. *Aspects of anomalous transport in plasmas*. CRC Press, 2005.
- [13] T Sunn Pedersen y col. “Confirmation of the topology of the Wendelstein 7-X magnetic field to better than 1: 100,000”. En: *Nature communications* 7 (2016), pág. 13493.

- [14] Raúl Sánchez y David Newman. “Laboratory Fusion Plasmas: Dynamics of Near-Marginal Turbulent Radial Transport”. En: *A Primer on Complex Systems*. Springer, 2018, págs. 279-311.
- [15] Peter Eris Kloeden, Eckhard Platen y Henri Schurz. *Numerical solution of SDE through computer experiments*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [16] RD Hazeltine y JD Meiss. *Plasma confinement*. Courier Corporation, 2003.
- [17] George Schmidt. *Physics of high temperature plasmas*. Elsevier, 2012.
- [18] MN Rosenbluth, WM MacDonald y DL Judd. “Fokker-Planck equation for an inverse-square force”. En: *Phys. Rev.* 107.1 (1957), pág. 1.
- [19] TS Chen. *A general form of the coulomb scattering operators for Monte Carlo simulations and a note on the guiding center equations in different magnetic coordinate conventions*. Inf. téc. 1988.
- [20] Allen H Boozer y Gioietta Kuo-Petravic. “Monte Carlo evaluation of transport coefficients”. En: *Phys. Fluids* 24.5 (1981), págs. 851-859.
- [21] RB White y MS Chance. “Hamiltonian guiding center drift orbit calculation for plasmas of arbitrary cross section”. En: *Phys. Fluids* 27.10 (1984), págs. 2455-2467.
- [22] HE Mynick. *Neoclassical transport in quasi-axially symmetric stellarators*. Inf. téc. Princeton Univ., Princeton Plasma Physics Lab., NJ (United States), 1997.
- [23] Harry E Mynick. “Transport of energetic ions by low-n magnetic perturbations”. En: *Phys. Fluids B* 5.5 (1993), págs. 1471-1481.
- [24] HE Mynick, TK Chu y AH Boozer. “Class of model stellarator fields with enhanced confinement”. En: *Phys. Rev. Lett* 48.5 (1982), pág. 322.
- [25] W.W. Heidbrink y col. “The phase-space dependence of fast-ion interaction with tearing modes”. En: *Nuclear Fusion* 58.8 (2018), pág. 082027.
- [26] RB White. *The theory of toroidally confined plasmas*. World Scientific Publishing Company, 2013.
- [27] RB White, AH Boozer y R Hay. *Drift Hamiltonian in magnetic coordinates*. Inf. téc. Princeton Univ., 1982.