Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

# ¿Cuál es el Punto?

## T E S I S

que para obtener el titulo de:

Matemático

presenta:

Enrique Bojórquez Gallardo

Director de tesis:

Dr. Mico Djurdjevic

Ciudad Universitaria, Cd. Mx. 2018

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**
**Tesis Digitales**
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

| | |
|---|---|
| 1. Datos del alumno | 1. Datos del alumno |
| Apellido paterno | Bojórquez |
| Apellido materno | Gallardo |
| Nombre(s) | Enrique |
| Teléfono | 5533990918 |
| Universidad Nacional Autónoma de México | Universidad Nacional Autónoma de México |
| Facultad de Ciencias | Facultad de Ciencias |
| Carrera | M |
| Número de cuenta | 307528928 |
| | |
| 2. Datos del tutor | 2. Datos del tutor |
| Grado | Dr |
| Nombre(s) | Mico |
| Apellido paterno | Djurdjevic |
| | |
| 3. Datos del sinodal 1 | 3. Datos del sinodal 1 |
| Grado | Dr |
| Nombre(s) | Ricardo |
| Apellido paterno | Berlanga |
| Apellido materno | Zubiaga |
| | |
| 4. Datos del sinodal 2 | 4. Datos del sinodal 2 |
| Grado | Dr |
| Nonmre(s) | Carlos |
| Apellido paterno | Álvarez |
| Apellido materno | Jiménez |
| | |
| 5. Datos del sinodal 3 | 5. Datos del sinodal 3 |
| Grado | Dr |
| Nombre(s) | Osvaldo |
| Apellido paterno | Téllez |
| Apellido materno | Nieto |

| | |
|---|---|
| 6. Datos del sinodal 4 | 6. Datos del sinodal 4 |
| Grado | M. en C. |
| Nonmre(s) | Luis Jesús |
| Apellido paterno | Turcio |
| Apellido materno | Cuevas |
| | |
| 7. Datos del trabajo escrito | 7. Datos del trabajo escrito |
| Título | ¿Cuál es el Punto? |
| Subtitulo | |
| Número de páginas | 76 |
| Año | 2018 |

# Agradecimientos

Primero que nada gracias a mi familia. Agradezco el apoyo incondicional que siempre han mostrado, han creído en mi y me han dado todas las herramientas necesarias, y mas, para poder lograr cualquier meta que me proponga. Gracias Mamá, Papá, Jana y Hugo, por las pláticas, las risas, la paciencia y sobre todo el amor y cariño. Gracias a mis amigos que también han sido parte vital en este proceso, gracias a las pláticas salieron muchas ideas que ahora son ideas concretizadas en esta tesis, Andrés, Héctor, Paco, Estefi, Lalo, Pau, Javi, por mencionar a algunas de las personas que influenciaron de manera más directa el contenido de la tesis, pero también gracias a los amigos con los que también nutrí otras partes de mi persona, que me ayudaron en este proceso de crecimiento, Julian, Penx, Mariana, Sergio, Adolfo, Santi, Pato, Claudio, Cody, Puig, Sakio, Obregon, Rodolfo... Aqui la lista se puede poner muy larga, pero gracias a todos los que han sido parte de mi vida y de mi proceso.

Gracias a Micho, por haber alimentado mi amor por el mundo de las matemáticas y por enseñarme el lado artístico y místico de esta bella Arte. He aprendido muchísimo de ti y me es un gran honor llamarte amigo y maestro. Gracias a Luis por tu apoyo y tu disposición incondicional, por las pláticas y la amistad, también me siento muy agradecido de contar con tu amistad. Gracias a mis sinodales por su ayuda y dedicación leyendo este trabajo, en especial gracias a Ricardo Berlanga, disfruté muchísimo nuestras pláticas y agradezco tu compromiso y entusiasmo al leer esta tesis. Gracias a mis maestros que aportaron en mi amor por las matemáticas y su filosofía, a Laura, Javier, Osvaldo, Carlos, por mencionar a algunos. Gracias a la UNAM por haber sido mi hogar todos estos años. Gracias...

# Índice general

# Introducción

Algunos dirían que la noción de punto es una noción primitiva, otros, como Euclides, se atreverían a dar una definición. Euclides dice que un punto es "aquello que no tiene partes", lo que naturalmente nos lleva a la pregunta ¿Qué es una parte? ¿Por qué Euclides da una definición a partir de una negación? Define el punto a partir de una ausencia, la ausencia de partes (ahora 'parte' es la noción primitiva). Euclides nos dice que si logramos saber si un objeto tiene o no partes sabremos si es un punto. ¿Cómo entiende a los puntos? ¿como los ladrillos básicos de la geometría? ¿entiende a las figuras geométricas como compuestas por puntos? Al decir que son objetos indivisibles, sin dimensiones, inmediatamente imaginamos a un punto como una estrellita y no como una esfera ó algún otro objeto que pueda hacer referencia a un interior, indivisible. No dice que no hay un mundo interior en el punto, sólo que no podemos acceder a el, y por lo tanto es irrelevante. La forma de visualizar el punto determina la visualización de los demás objetos geométricos. La intersección de dos rectas no paralelas es un punto, el centro de un círculo es un punto, los extremos de un segmento de recta son puntos, dos puntos distintos determinan una única recta, hay una infinidad de puntos en el segmento que une dos puntos... Parece ser que las figuras geométricas sí están compuestas de puntos y el punto es el ladrillo fundamental de la geometría, la figura más elemental. ¿Cómo imaginar algo que no tiene dimensiones? Los puntos representan ubicaciones en el espacio geométrico, la forma de señalar más precisa es identificando puntos. ¿Cómo sabemos si dos puntos son o no el mismo? Una posible respuesta (en un universo euclidiano) sería ver cuantas rectas pasan por estos puntos, si sólo hay una entonces son distintos. Distinguir puntos de esta manera hace uso de su relación con el entorno, con los demás objetos que viven en este espacio.

¿Qué diría Leibniz si le preguntamos sobre el punto? Probablemente nos hablaría de la *mónada*. En su primer borrador de "La Monadología" había escrito y luego borrado "Las *mónadas* no son puntos matemáticos, pues estos puntos sólo son extremidades, y la línea no puede ser compuesta por puntos". Es muy interesante que haya escrito y borrado esto, y que no volviera a hablar de las mónadas como puntos matemáticos. Parece ser que su concepto de mónada incluye el de punto, o que su descripción de la mónada puede llevarnos a tomar como representante al punto matemático. Leibniz considera que las mónadas tienen una estructura interna, y que es ésta la que permite distinguir entre diferentes mónadas pero que esta estructura interna es inalterable por cualquier criatura. No pueden perecer ni surgir naturalmente, ya que no se forman por composición, sólo pueden ser creadas o aniquiladas. No puede entrar ni salir nada de una mónada, no se le pueden asignar o salir de ellas accidentes. Es indivisible, no sólo materialmente, sino conceptualmente. Sin embargo tienen cualidades, y es a partir de la diferencia entre las cualidades de las diferentes mónadas que podemos percibir un cambio en las cosas. Le da a cada mónada una identidad propia y dice que no existen dos seres ( considera a las mónadas como seres) que sean perfectamente iguales en la naturaleza, en las cuales no haya una diferencia interna. Está diciendo que lo que nos permite distinguir entre dos mónadas es su estructura interna. ¿Si nada puede salir o entrar a una mónada, entonces podemos nosotros, seres conscientes, distinguir entre dos mónadas distintas? ¿Puede nuestra consciencia percibir esa estructura? Porque nos está diciendo que es la estructura interna la que nos permite diferenciar entre ellas, a diferencia del caso Euclidiano, en donde es la relación con el exterior el que determina si dos puntos son distintos o no.

¿Hay relación entre el *Punto* de Euclides y la *Mónada* de Leibniz? Si salimos de la Tierra y nos alejamos, veremos como esta gran esfera se va haciendo cada vez mas pequeña hasta convertirse en un punto brillante. A esa distancia es difícil pensar que dentro de ese punto se encuentran tantas historias, tanto movimiento, tanta información. Euclides y Leibniz coincidían en la propiedad de *Indivisibilidad*. Leibniz habla de una estructura *interna*, no se olvida que dentro de ese punto hay un universo de posibilidades, en cambio a Euclides no le importa si hay algo adentro, lo ve como un objeto de dimensión 0. Leibniz distingue entre mónadas de manera *Interna*, Euclides distingue puntos de manera *externa*. ¿Dónde más vemos esta forma de distinguir objetos?

Es difícil saber que entendían estos personajes por el concepto de *punto*. Euclides lo menciona muy poco, no hay un teorema que diga "... y como el punto es aquello que no tiene partes entonces..." . Luego viene Hilbert a dar una conjunto axiómatico más preciso de la geometría Euclidiana. Empieza diciendo que hay 3 objetos primitivos, los puntos, las rectas y los planos, los demás axiomas establecen las relaciones que hay entre estos objetos, pero al final nos acaba diciendo que las rectas se pueden reconstruir a partir de puntos. En cambio Tarski realmente define a la geometría euclidiana a través de propiedades de los puntos, o tuplas de ellos, y nada mas. El espacio geométrico es un conjunto y sus elementos son los puntos. Las rectas, planos y demás figuras geométricas se entienden a partir de relaciones entre puntos. La colinealidad es una relación ternaria, $R(x, y, z)$, que nos dice que $y$ está entre $x$ y $z$. De esta manera podemos entender a una recta que pasa por $x$ y $z$ como el conjunto de puntos $y$ para los que se cumple $R(x, y, z)$ o la relación bajo alguna permutación de estos 3 elementos. Otra de las relaciones primitivas es una 4-aria, $D(x, y, z, u)$ que se entiende como que el segmento $xy$ es congruente al segmento $zu$. Estas son las fórmulas atómicas con las que construye a los lenguajes que serán modelos de la geometría euclidiana 2 dimensional. Podemos ver que bajo esta perspectiva todo es dicho en base a relaciones de puntos, los puntos adquieren un caracter verdaderamente esencial, partimos del punto y llegamos al punto.

En esta tesis hablaré del concepto de *punto* bajo diferentes perspectivas, las cuáles van a estar divididas en dos secciones: Clásica y Cuántica. Cada una tendrá como subsecciones distintas perspectivas dentro de estos marcos conceptuales. El punto depende fuertemente del entorno, lo que permite tener una visión externa, una interna y hacer una comparación. El recorrido por el universo clásico comienza en la *teoría de Conjuntos*, donde un punto es un elemento de un conjunto. *Axioma de Extensionalidad* nos da la forma interna de ver a los puntos y *Axioma del Par* nos permite distinguir entre dos puntos. Y si permitimos salir del contexto de la lógica clásica encontramos una manera externa de ver al punto, como el conjunto de los conjuntos que lo contienen.

Agregando estructura al conjunto podemos analizarlo desde una perspectiva *topológica*. La manera interna de ver al punto permanece igual a la de conjuntos, pero la externa (ultrafiltros principales) muestra un fenómeno muy interesante, la forma de ver al punto cambia cuando variamos la estructura topológica.

Luego viene el contexto de la *teoría de Categorías*. Donde el punto se ve en términos de flechas y nos olvidamos de la estructura interna, solamente vemos al punto en relación a su entorno, al álgebra de flechas y los objetos de la categoría. El punto, relaciones y conceptos de la teoría de conjuntos se traducen al lenguaje de flechas, y la relación de pertenencia vista desde categorías cumple propiedades distintas a la de la teoría de conjuntos.

Ya teniendo varias formas de ver al punto vamos al contexto de la *Lógica* para ver en que se traducen estas cosas. En este contexto contamos con la *Dualidad de Stone*, la cual permite observar y comparar las perspectivas topológicas (elemento en un espacio topológico), algebraicas (ultrafiltros), categóricas (elementos globales), lógica (valuaciones), y cómo ésta dualidad que unifica dos contextos, uno algebraico y otro topológico, tiene como consecuencia el teorema de Completud-Correctud, el cual unifica dentro del contexto de la lógica clásica la *semántica* con la *sintaxis*.

Después le agregaremos variación al punto. Para esto introduciré el concepto de *elemento variable* y como ejemplo veremos el caso de los *modelos Booleano-Valuados*. Tendremos nuestro primer encuentro con un comportamiento probabilístico, el cual será justificado, veremos la construcción de estos modelos y su relación con los elementos estándar. También veremos cómo diferentes nociones de punto, bajo ciertas condiciones, determinan el comportamiento de la extensión genérica de un modelo Booleano-valuado. Con esto finalizamos la sección Clásica.

Para la sección Cuántica daré una breve explicación del marco conceptual dado por la *Geometría Cuántica*, la cuál tiene sus raíces en la física cuántica. Esta rama de las matemáticas nos brinda una nueva noción de punto. Las álgebras C* tienen un rol primordial en esta rama y empezaré analizando el punto a través de la *Dualidad de Gelfand*, la cual unifica a las *Álgebras C* conmutativas con los espacios topológicos localmente compactos*. Haré un análisis del punto muy similar al que se hizo en el caso de Stone, pero veremos más equivalencias dadas por la riqueza estructural de las álgebras C*. Veremos que los puntos del espacio topológico se corresponden con caracteres del álgebra asociada, que a su vez está en biyección con ideales maximales, estados puros y clases de equivalencia unitaria de representaciones irreducibles. El punto desde la física se puede ver como un estado puro, una medida de probabilidad sobre el espacio fase libre de dispersión. Justificamos la conexión que hay entre las medidas de probabilidad y la definición algebraica de estado, lo cual relaciona la definición física de punto con las demás.

Una vez vistas las equivalencias en el caso clásico veremos que no se sostienen en el caso cuántico. Analizaré tres ejemplos: la esfera cuántica (el álgebra de matrices 2x2 con entradas complejas), el plano hiperbólico cuántico (álgebra de Toeplitz) y el toro cuántico (álgebra de rotación). Daré justificaciones de estos nombres y veré en qué sentido se rompen las equivalencias entre los puntos.

# Capítulo 1

# Clásica

## 1.1. Conjuntos

En sus obras Cantor hace mención de dos conceptos: “Mengen” y “Kardinalen”. Mengen es el concepto de conjunto que tenemos hoy en día, Kardinalen se parece al conjunto abstracto propuesto por F.W. Lawvere, en donde podemos visualizar estos objetos como una “bolsa de puntos” en la cual podemos distinguir si dos puntos son distintos o no, pero no nos interesa saber más de ellos. Zermelo, el editor de las obras de Cantor, creía que este concepto era inconsistente ya que no podíamos distinguir entre dos conjuntos abstractos (Kardinalen) con la misma cardinalidad. Es una abstracción de los conjuntos que nos da objetos “arquetípicos”, más puros, donde no nos interesan los detalles, sólo su comportamiento. Estas ideas aparecen en la Teoría de Categorías, en donde sustituimos la noción de identidad por la de isomorfismo, lo que nos permite olvidar ciertos detalles del objeto y enfocarnos en su comportamiento con respecto a los demás objetos.

Zermelo edita y corrige las obras de Cantor y junto con las correcciones hechas por Adolf Fraenkel se obtiene el sistema axiomático que hoy conocemos como ZF. Este sistema caracteriza los objetos de la Teoria de Conjuntos a partir del comportamiento de la relación de pertenencia, $\in$, una relación binaria. Se entiende a $x \in y$ como “$x$ es un elemento de $y$”. Si visualizamos a los conjuntos como “bolsas” esto sugiere que la bolsa que se llama $x$ se encuentra dentro de la bolsa que se llama $y$. Esta relación determina a los "elementos" de un conjunto , los que están a la izquierda (en el dominio) de $\in$, y los "contenedores", los que están a la derecha (en el codominio). Gracias al Axioma del Par cualquier objeto es un elemento, pero no es cierto que todo objeto tenga un elemento (gracias a la existencia del conjunto vacío).

En este mundo (modelo de ZF) la forma de saber si dos objetos son iguales es viendo si tienen los mismos elementos, esto es el Axioma de Extensionalidad, $x = y \iff \forall z(z \in x \longleftrightarrow z \in y)$. La manera de saber si dos objetos son iguales es interna, pero hay que observar que sí hay una dependencia con el entorno, el cual está dado por el modelo en donde estemos trabajando. Puede darse la situación de que dos objetos sean iguales en un modelo pero distintos en otro.

En el universo de Conjuntos ¿Cual es el punto? Los objetos más básicos son los conjuntos, de hecho todos los objetos son conjuntos, asi que inevitablemente tendremos que un punto es un conjunto. Al definir "parte" como "subconjunto" no tendremos puntos (según la definición que da Euclides), ya que $\forall x(x \subseteq x)$. Se puede arreglar esto diciendo que una parte es un subconjunto propio, pero el único conjunto que no tiene subconjuntos propios es el vacío, por lo tanto, bajo esta definición cualquier modelo de la teoría de conjuntos sólo tendría un punto.

Se puede pensar en *puntos* a partir de la relación de pertenencia, lo que da dos posibilidades: los puntos son los objetos del dominio de la relación (los elementos) o los de la imagen (los contenedores). Decir que son los que están en el dominio da a todos los conjuntos, y decir que son los que están en la imagen excluye al vacío. Es natural pensar en *punto* como *elemento*. Esto nos lleva a que los puntos de un conjunto son sus elementos. Podemos pensar en ésta definición de punto como la *definición conjuntista de punto*. Observemos que la noción de punto es relativa a un entorno, decimos 'punto de un conjunto', por lo que la definición conjuntista de puntos implica que para cualquier objeto existe un contexto en el cual es un punto (Axioma del Par). Cualquier conjunto puede ser punto y los puntos de un conjunto son sus elementos.

Extensionalidad da una manera Interna de saber si dos puntos son iguales. Si definimos $\mathcal{B}(x) = \{y \mid x \in y\}$ entonces por Axioma del Par $x \neq y \iff \exists u \exists v((x \in u \wedge x \notin v) \wedge (y \in v \wedge y \notin u)) \iff \mathcal{B}(x) \neq \mathcal{B}(y))$. Por lo que $\mathcal{B}(\_)$ nos da una manera externa de saber si dos elementos son iguales o no, aunque esto no lo podemos ver desde la teoría ya que $\mathcal{B}(x)$ es una clase.

## 1.2. Topología

En el libro de Topología General de Bourbaki definen a un punto como "un elemento de un espacio topológico", a esto le llamaremos *Definición Topológica de Punto*. Un espacio topológico es un conjunto $X$ equipado con una topología $\tau$ donde $\tau \subseteq \wp(X)$ tal que:

1. $X, \emptyset \in \tau$
2. $\forall \mathcal{D}(\mathcal{D} \subseteq \tau \rightarrow \bigcup \mathcal{D} \in \tau)$
3. $\{A_i\}_{1 \leq i \leq n} \subseteq \tau \rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$

Siempre podemos equipar a un conjunto con una topología, como por ejemplo tomar a $\tau = \wp(X)$, por lo tanto la definición topológica de punto es equivalente a la conjuntista. Es interesante que hagan mención de la topología, en este caso el punto depende del entorno. ¿Si vemos al mismo punto conjuntista en dos topologías distintas, es el mismo punto? Para responder a esta pregunta veamos el siguiente resultado.

En cada topología, los conjuntos de vecindades $\mathcal{B}(x)$ cumplen que:

1. $\forall A \in \wp(X)((\exists B \in \mathcal{B}(x) \wedge B \subseteq A) \rightarrow A \in \mathcal{B}(x))$
2. $\forall A_1, ..., A_n \in \mathcal{B}(x)(\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{B}(x))$
3. $\forall A \in \mathcal{B}(x)(x \in A)$
4. $\forall A \in \mathcal{B}(x) \exists U \in \mathcal{B}(x) \forall y \in U(A \in \mathcal{B}(y))$

Estas propiedades caracterizan de manera única a la topología, es decir, si para todo $x \in X$ existen $\mathcal{B}(x)$ que cumplen las 4 propiedades anteriores, entonces hay una única topología tal que $\mathcal{B}(x)$ es el conjunto de vecindades de cada punto en esa topología. Los abiertos de la topología están dados por aquellos elementos $A \in \mathcal{B}(x)$, para cualquier $x$, tal que $\forall y \in A(A \in \mathcal{B}(y))$, es decir, A es vecindad de todos sus puntos. Si la topología es Hausdorff, entonces hay una biyección entre estas familias de abiertos y los puntos, lo que dice que hay una manera externa, dependiente del entorno, para saber si dos puntos son o no el mismo. Si cambiamos la topología, cambia esta familia de vecindades (observemos que cada uno de los $\mathcal{B}(x)$ va a resultar ser un ultrafiltro principal). Tenemos una definición para la cual el entorno sí cambia la percepción del punto.

Esto da otra forma de ver al punto topológico, como ultrafiltro. Este detalle es sumamente importante ya que nos va a dar varias definiciones equivalentes de Punto. Recordemos la definición de filtro en una retícula.

Una retícula $L$ es un conjunto tal que:

Para todo $x, y \in L$ existe $x \wedge y, x \vee y \in L$ tal que $x \wedge y = inf\{x, y\}$ y $x \vee y = sup\{x, y\}$

Un conjunto $F \in L$ es un filtro si y sólo si:

1. $L \neq \emptyset$
2. $\forall x \in F \; \forall y \in L(x \leqslant y \rightarrow y \in F)$
3. $\forall x, y \in F(x \wedge y \in F)$

Un ultrafiltro es un filtro propio (subconjunto propio de la retícula) maximal. Un ultrafiltro $\mathcal{U}$ es principal si y sólo si:

$$\exists a \in L(\mathcal{U} = \{x \in L \mid a \leqslant x\})$$

Los puntos conjuntistas de la topología se van a corresponder con los ultrafiltros principales cuando el espacio topológico sea Hausdorff. Por lo que podemos adoptar una nueva definición de punto, la de ultrafiltros. Esta definición depende de la estructura topológica y va a agregar a nuevos "tipos" de puntos, los ultrafiltros no principales. Llamaremos a los ultrafiltros principales *puntos topológicos clásicos* y a los ultrafiltros no principales *puntos topológicos ideales*.

## 1.3. Categorías

La perspectiva topológica habla de una dependencia con el entorno, una forma de contextualidad. Felix Klein muestra que en la geometría no podemos hablar de figuras geométricas en términos absolutos, tenemos que especificar el grupo de simetrías y ese grupo es el que da la noción de congruencia que define los "tipos" de figuras que habitan en esa geometría. En el caso de la teoría de conjuntos las simetrías son funciones biyectivas, lo que señala que en esta geometría los tipos están caracterizados por la cardinalidad. Es probable que ésta es la idea detrás del Kardinalen, en donde las instancias particulares de estos tipos son de poco interés, nos olvidamos de las cualidades intrínsecas de los elementos y nos quedamos únicamente con que podemos diferenciarlos entre ellos. Estas ideas las volvemos a ver en teoría de categorías, en donde la estructura que nos interesa analizar está capturada en las flechas entre los objetos. Lawvere, en resonancia con las ideas de Cantor, presenta la categoría de *conjuntos abstractos*, $\mathcal{S}$, en donde podemos pensar a los objetos como "bolsas con puntos" y las flechas son funciones entres las bolsas. Los axiomas que definen a esta categoría son:

1. $\mathcal{S}$ es un topos elemental: La estructura de topos está motivada por la categoría de conjuntos. Dentro de un topos hay suficiente estructura como para hablar (en lenguaje conjuntista) de productos, uniones disjuntas, subconjuntos, conjuntos de funciones entre conjuntos, evaluación de funciones, funciones características, construcción de objetos a partir de propiedades (axioma de separación)...

2. El clasificador de subobjetos es $\Omega = \{0, 1\}$: Esto nos dice que la lógica interna es clásica, sólo hay dos valores de verdad, verdadero o falso.

3. $0 \ncong 1$: El vacío y el unitario son distintos. Podemos distinguir entre la nada y algo

4. Axioma del Infinito: Contamos con el poder de tener objetos que tengan una cantidad infinita de cosas.

5. Axioma de Elección: Dada una función suprayectiva podemos encontrar secciones.

6. 1 es separador: Con saber que pasa en los puntos sabemos cómo se comportan las funciones.

Lawvere reinterpretó la relación de pertenencia $\in$ en este contexto, la cual va a tener un comportamiento distinto al de la pertenencia de ZF. Lo que conocemos como "elemento" en la teoría de conjuntos, ahora tiene el nombre de "elemento global". Hay que ver a $x \in A$ en el lenguaje de flechas. El objeto terminal 1 es el "punto arquetípico" y la forma de ver a un elemento dentro de un objeto es representar a este punto dentro del objeto como el elemento que nos interesa, como la flecha $1 \xrightarrow{x} A$ . En la categoría de conjuntos, el objeto terminal es un conjunto unitario, la flecha que representa a un punto es la función que manda al único elemento del objeto terminal en el elemento que queremos tomar.

Evaluar un elemento de $A$ bajo una función $A \xrightarrow{f} B$ va a ser consecuencia de la composición de funciones. La composición $1 \xrightarrow{fx} B$ va a ser un elemento de B bajo ésta nueva definición y por la unicidad de la composición entre flechas, la función está bien definida, es decir, este elemento es único.

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "x"] \arrow[dr, "f\circ x = f(x)"'] & A \arrow[d, "f"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Si tenemos dos flechas $A \xrightarrow{f} B$ y $B \xrightarrow{g} C$, evaluar el elemento $1 \xrightarrow{x} A$ es un caso particular de la asociatividad de la composición entre flechas, retratada en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "x"] \arrow[dr, "fx"'] \arrow[drr, bend left, "(g\circ f)x"] \arrow[drr, bend right=60, "g(fx)"'] & A \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g\circ f"] & \\ & B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

Ya que estamos traduciendo las nociones de conjuntos a este lenguaje, veamos como se ven los subconjuntos, o partes, de un conjunto abstracto. No nos interesa la estructura interna de los elementos, así que ya no hay que procurar el hecho de que los elementos del subconjunto sean idénticos a algunos elementos del conjunto que lo contiene, basta con saber que hay suficientes elementos para representar al objeto como un subconjunto del otro, lo que sugiere que un subconjunto va a estar representado por una flecha mono. Una flecha $A \xrightarrow{f} B$ es mono si para cualesquiera $h, g : C \to A$ tenemos que $f \circ h = f \circ g$ implica $h = g$. En la categoría de conjuntos esto es lo mismo a decir que la función $f$ es inyectiva.

Diremos que la parte $i : U \hookrightarrow A$ está contenida en la parte $j : V \hookrightarrow A$, $i \subseteq_A j$, si $i$ *y* $j$ son monos y existe $U \xrightarrow{k} V$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "k"] \arrow[dr, hook, "i"'] & V \arrow[d, hook, "j"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Decir que un elemento pertenece a una parte, $x \in_A i$, significa que existe $1 \xrightarrow{k} U$ que hace conmutar al diagrama

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "k"] \arrow[dr, "x"'] & U \arrow[d, hook, "i"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Para ver que tan distinto se comporta esta pertenencia en comparación con la de ZF, veamos que cualquier flecha que tenga a 1 en el dominio va a ser mono, gracias a la propiedad universal del objeto terminal. Por lo tanto, los elementos globales son partes, $x \in_A i \Rightarrow x \subseteq_A i$. Al tener identidades para cada objeto también vamos a tener que $x \in_A x$ para todo elemento global. A los elementos globales los llamaré *puntos categóricos.*

Es interesante observar lo que pasa cuando el objeto terminal no es generador y cuando el generador no es terminal. En el caso de espacios vectoriales y grupos tenemos que el objeto terminal es inicial también, ya que para el espacio vectorial que sólo tiene al cero (y el grupo que sólo tiene al neutro) sólo hay una función desde y hacia cualquier otro objeto de la categoría. Si tomamos la definición de punto como elemento global entonces en estas categorías cualquier objeto tiene sólamente un punto. En este caso el objeto terminal no es generador, es decir, no nos permite distinguir entre dos flechas distintas, por lo que esto podría justificar un cambio de definición de punto que diga que son las flechas que van desde el objeto generador al objeto, en el caso de espacios vectoriales va a ser el campo y en el caso de grupos va a ser el grupo de los enteros. Esto cambia nuestra intuición de punto a un objeto que nos permite distinguir, una perspectiva más cercana a la de punto como ubicación en el espacio.

## 1.4. Lógica

En el libro Análisis Matemático de la Lógica, George Boole desarrolla la estructura algebraica de la lógica clásica, ahora conocida como *álgebras de Boole*, que podemos definir de las dos siguientes maneras equivalentes:

1. $A$ es una retícula distributiva con complementos y con al menos dos elementos distintos
2. $(A, \wedge, \vee, *, 0, 1)$ es una estructura algebraica tal que $\forall x, y, z \in A$:

   *a*) $[x \vee y = y \vee x]$ , $[x \wedge y = y \wedge x]$

   *b*) $[x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z]$ , $[x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z]$

   *c*) $[(x \wedge y) \vee y = y]$ , $[(x \vee y) \wedge y = y)]$

   *d*) $[(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)]$ , $[(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)]$

   *e*) $[x \vee x^* = 1]$ , $[x \wedge x^* = 0]$

El supremo e ínfimo de la retícula cumplen las propiedades de la definición algebraica y se puede definir el orden de la retícula a partir de la estructura algebraica como $x \leqslant y \iff x \wedge y = x \iff x \vee y = y$
En la lógica exploramos la estructura del lenguaje matemático, la noción de verdad y la relación entre la semántica y la sintaxis. Analicemos el caso proposicional, en donde el lenguaje se define a partir de un conjunto de variables proposicionales $\Omega = \{P_i\}_{i \in \omega}$, conectivos lógicos: $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$ y una manera recursiva para definir el conjunto de fórmulas $Form(\Omega)$.

Por el lado semántico, al tener una función $f : \Omega \rightarrow \mathbf{2}$ donde $\mathbf{2} = (\{0, 1\}, +, \cdot, * \leqslant)$ es el álgebra de Boole más simple, podemos extender el dominio de $f$ a $Form(\Omega)$ recursivamente como:

Si $f(x), f(y)$ están definidos, $x, y \in Form(\Omega)$, entonces:

$$f(x \wedge y) = f(x) \cdot f(y), f(x \vee y) = f(x) + f(y), f(\neg x) = f(x)*$$

obteniendo un morfismo booleano. Estas funciones son los modelos de dicho lenguaje.

El *teorema de representación de Stone* nos da una relación entre una teoría algebraica (álgebras de Boole), y una topológica (espacios de Stone). Esta equivalencia permite observar a los puntos de una teoría en otra, dandonos definiciones alternativas de punto.

Al tomar un ultrafiltro $\mathcal{U}$ en un álgebra de Boole $\mathcal{A}$, el cociente dado por la relación de equivalencia $a \sim b \iff \exists f \in \mathcal{U}(a \wedge f = b \wedge f)$ construye un álgebra de Boole isomorfa al álgebra $\mathbf{2}$. Gracias a esto a todo ultrafiltro podemos asociarle un morfismo booleano $f_{\mathcal{U}} : \mathcal{A} \to \mathbf{2}$.

Para cualquier morfismo booleano $f : \mathcal{A} \to \mathbf{2}$, $\mathcal{U}_f = f^{-1}(\{1\})$ es un ultrafiltro. Si pasamos de un ultrafiltro, a su morfismo $f_{\mathcal{U}}$ y luego sacamos el ultrafiltro dado por la preimagen del $\{1\}$ regresamos al ultrafiltro inicial, $\mathcal{U}_{f_{\mathcal{U}}} = f_{\mathcal{U}}^{-1}(\{-1\}) = \mathcal{U}$. Comenzando con el morfismo $f : \mathcal{A} \to \mathbf{2}$ tendremos también que $f_{\mathcal{U}_f} = f$. Lo que nos dice que la función que asocia a cada morfismo con codominio $\mathbf{2}$ su ultrafiltro es inversa de la función que le asocia a cada ultrafiltro su morfismo con codominio $\mathbf{2}$, por lo tanto $Ult(\mathcal{A}) \cong 2^{\mathcal{A}}$, donde $2^{\mathcal{A}}$ es el conjunto de morfismos booleanos de $\mathcal{A}$ en 2.

Un espacio topológico $X$ es de Stone si es compacto, Hausdorff y totalmente disconexo. El teorema de representación de Stone nos da dos funtores contravariantes entre la categoría de álgebras de Boole, $\underline{\mathbf{Boole}}$, y la categoría de espacios de Stone, $\underline{\mathbf{Stone}}$. El funtor que va de $\underline{\mathbf{Boole}}$ a $\underline{\mathbf{Stone}}$ manda a cada álgebra de Boole $A$ en su conjunto de ultrafiltros, que podemos identificarlo con $2^A$, el conjunto de morfismos booleanos de $A$ en 2 equipado con la topología $\tau_A$ generada por la familia $\{p(a) \mid a \in A \wedge p(a) = \{f \in 2^A \mid f(a) = 1\}\}$. Estos funtores nos dan una equivalencia entre las categorías $\underline{\mathbf{Boole}}^{op}$ y $\underline{\mathbf{Stone}}$

$$\mathbf{Spec}(\_) : \underline{\mathbf{Boole}} \to \underline{\mathbf{Stone}}$$
$$A \in Ob(\underline{\mathbf{Boole}}) \longmapsto (2^A, \tau_A) \in Ob(\underline{\mathbf{Stone}})$$
$$f : A \to B \in Ar(\underline{\mathbf{Boole}}) \mapsto \hat{f} \in Ar(\underline{\mathbf{Stone}})$$
$$\hat{f} : 2^B \to 2^A$$
$$g \mapsto g \circ f$$

Si $X$ es un espacio de Stone, entonces podemos definir un álgebra de Boole $(A_X = \{Z \subseteq X \mid Z \text{ es abierto y cerrado}\}, \subseteq)$

$$\mathbf{Clopen}(\_) : \underline{\mathbf{Stone}} \to \underline{\mathbf{Boole}}$$
$$X \in Ob(\underline{\mathbf{Stone}}) \mapsto (A_X, \subseteq) \in Ob(\underline{\mathbf{Boole}})$$
$$f : X \to Y \in Ar(\underline{\mathbf{Stone}}) \mapsto \underline{f} : A_Y \to A_X$$
$$Z \mapsto f^{-1}[Z]$$

Los puntos del espacio de Stone asociado a un álgebra de Boole son sus ultrafiltros y cada espacio de Stone es homeomorfo al conjunto de ultrafiltros de un álgebra booleana. ¿Estas ideas están en armonía con la noción de punto categórico? En $\underline{\mathbf{Boole}}$ no hay elemento terminal, así que en esta categoría los objetos no tienen puntos categóricos. En cambio en $\underline{\mathbf{Stone}}$ sí hay, al igual que en conjuntos va a resultar ser isomorfo a un conjunto unitario. Tomemos $X$ un espacio de Stone y un punto categórico ahí, $1 \xrightarrow{x} X$. El funtor **Clopen** es contravariante, entonces manda el objeto terminal a su dual, el objeto inicial. En $\underline{\mathbf{Boole}}$ el objeto inicial es el álgebra $\mathbf{2}$. El funtor manda a cada punto categórico de $X$ en $\underline{\mathbf{Stone}}$ a un ultrafiltro de $\mathbf{Clopen}(X)$. Esto permite representar al punto topológico de manera algebraica, como un ultrafiltro, y hablar de puntos topológicos en un álgebra de Boole. Como tenemos dos tipos de ultrafiltros, los principales y los no principales, tenemos dos tipos de puntos topológicos en las álgebras, los clásicos y los ideales. En la lógica los puntos son los modelos del lenguaje, ya que la propiedad universal del cociente nos da una biyección entre los modelos $\{\theta : \mathit{Form}(\Omega) \to \mathbf{2}\}$ de $\mathit{Form}(\Omega)$ y los puntos $\{\hat{\theta} : \mathcal{L} \to \mathbf{2}\}$ del álgebra de Lindendabum $\mathcal{L}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathit{Form}(\Omega) \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\theta"'] & \mathcal{L} \arrow[d, dashed, "\hat{\theta}"] \\
 & \mathbf{2}
\end{tikzcd}$$

Veamos otra consecuencia del teorema de representación de Stone dentro de la lógica.

La noción de verdad semántica es la *satisfacción* lógica, $\vDash_C$. Un modelo $f$ satisface una fórmula $\phi \in \mathit{Form}(\Omega), f \vDash_C \phi$, si y sólo si

$f(\phi) = 1$. Una tautología es una fórmula $\phi$ que se satisface en todos los modelos y lo escribimos como $\vDash_C \phi$.

La noción de verdad vista desde la sintaxis es la *deducibilidad*, $\vdash$. Para definirla damos los axiomas:

$\forall \phi, \psi, \xi \in Form(\Omega)$

1. $\phi \to (\psi \to \phi)$
2. $[\phi \to (\psi \to \xi)] \to [(\phi \to \psi) \to (\phi \to \xi)]$
3. $(\neg\phi \to \neg\psi) \to (\psi \to \phi)$
4. $(\phi \wedge \psi) \to \phi$
5. $(\phi \wedge \psi) \to \psi$
6. $[\xi \to \phi] \to [(\xi \to \psi) \to (\xi \to [\phi \wedge \psi])]$
7. $\phi \to (\phi \vee \psi)$
8. $\psi \to (\phi \vee \psi)$
9. $[\phi \to \xi] \to [(\psi \to \xi) \to ([\phi \vee \psi] \to \xi)]$

Para todo $\phi$ axioma se satisface que $\vdash \phi$. Para saber si otras fórmulas se deducen usamos la regla de inferencia Modus Ponens, que dice:

$$\vdash \phi \to \psi \text{ y } \vdash \phi \text{ entonces } \vdash \psi$$

Por lo tanto $\vdash \phi$ quiere decir que existe una sucesión finita de fórmulas $\{\phi_1, ..., \phi_n\}$ tal que $\forall i \in \{1, ..., n\}, \phi_i$ es un axioma ó $\exists k, j < i(\phi_k = (\phi_j \to \phi_i))$ y $\phi_n = \phi$, i.e. son axiomas o se deducen de anteriores a partir de Modus Ponens. Cuando sucede esto decimos que $\{\phi_1, ..., \phi_n\}$ es una prueba de $\phi$ . Tenemos dos nociones de verdad, una semántica y una sintáctica.

Podemos apreciar el trabajo que inició Boole cuando observamos estas nociones desde una perspectiva algebraica. Para hacer esto generalizaremos la noción de satisfacibilidad mediante clases de álgebras de tipo booleano. Observemos que *Form*$(\Omega)$ es casi un álgebra de Boole, digo "casi" porque para que sea un algebra de Boole tenemos que identificar las fórmulas que son lógicamente equivalentes, pero igual tenemos una estructura algebraica dada por los conectivos lógicos. Diremos que un álgebra de tipo booleano $(\mathcal{A}, +, \cdot, *, 0, 1)$ satisface una fórmula $\xi \in Form(\Omega)$, $\mathcal{A} \vDash \phi$, si y sólo si:

Para toda función $\theta : Form(\Omega) \to \mathcal{A}$ que sea un morfismo booleano, es decir:

$\forall \phi, \psi \in Form(\Omega)$ :

$$\theta(\phi \wedge \psi) = \theta(\phi) \wedge \theta(\psi)$$

$$\theta(\phi \vee \psi) = \theta(\phi) \vee \theta(\psi)$$

$$\theta(\neg\phi) = \theta(\phi)^*$$

$$\theta(\perp) = 0$$

Se cumple que $\theta(\xi) = 1$

Por definición tenemos que:

$$\vDash_C \phi \iff \mathbf{2} \vDash \phi$$

Esta noción de satisfacibilidad cumple que si $\mathcal{B}$ es una subálgebra de $\mathcal{A}$ entonces

$$\mathcal{A} \vDash \phi \Rightarrow \mathcal{B} \vDash \phi$$

Ya que si tenemos $\theta : Form(\Omega) \to \mathcal{B}$ entonces al componer por la inclusión $i : \mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{A}$ se obtiene un morfismo $i \circ \theta : Form(\Omega) \to \mathcal{A}$ que por hipótesis $i \circ \theta(\phi) = 1$. Por la inyectividad de la inclusión y que $i(1) = 1$ resulta que $\theta(\phi) = 1$

Si I es un conjunto y definimos a $\mathcal{A}^I = (\{f : I \to \mathcal{A} \mid \text{f es función}\}, \hat{\cdot}, \hat{+}, \star, \hat{0}, \hat{1})$ y a las operaciones coordenada por coordenada como:

$$\forall f, g \in \mathcal{A}^I, i \in I$$

$$(f \hat{\cdot} g)(i) = f(i) \cdot g(i)$$

$$(f \hat{+} g)(i) = f(i) + g(i)$$

$$(f^\star)(i) = f(i)^*$$

$$f(\hat{0})(i) = 0 \quad , \quad f(\hat{1})(i) = 1$$

Dado un morfismo $\theta : Form(\Omega) \to \mathcal{A}^I$ al componer con las proyecciones (que también son morfismos booleanos) $\pi_i : \mathcal{A}^I \to \mathcal{A}$ obtenemos una función $\pi_i \circ \theta : Form(\Omega) \to \mathcal{A}$. Si $\theta(\phi) = 1$ entonces $\theta(\phi)(i) = \pi_i \circ \theta(\phi) = 1$ y por lo tanto

$$\mathcal{A} \vDash \phi \Rightarrow \mathcal{A}^I \vDash \phi$$

Si $I$ es un conjunto $\wp(I) \cong 2^I$, esto y los dos resultados anteriores dicen que para cualquier $X = (X, \bigcap, \bigcup, -, \emptyset)$ algebra de conjuntos donde $X = \wp(I)$ para algún conjunto $I$ o es una subálgebra de $\wp(I)$ entonces:

$$\mathbf{2} \vDash \phi \iff X \vDash \phi$$

Definimos la satisfacción de una fórmula mediante una clase de álgebras $\mathcal{K}$ como,

$$\mathcal{K} \vDash \phi \iff \forall \mathcal{A} \in \mathcal{K}(\mathcal{A} \vDash \phi)$$

*Con* es la clase de todas las álgebras y subalgebras booleanas de la potencia de un conjunto. Acabamos de probar que:

$$\vDash_C \phi \iff \mathbf{2} \vDash \phi \iff Con \vDash \phi$$

La clase de álgebras de conjuntos captura la noción de satisfacción semántica.

Ahora hay que ver qué clase de álgebras es la que caracteriza la noción de *deducibilidad*. Para esto le damos una estructura de álgebra de Boole a *Form*$(\Omega)$ definiendo la relación de equivalencia en *Form*$(\Omega)$:

$$\phi \sim \psi \iff \vdash \phi \longleftrightarrow \psi$$

Esta relación es una congruencia, una relación de equivalencia que se lleva bien con las operaciones booleanas ya que:

$$\forall \phi, \psi, \theta, \xi \in Form(\Omega)((\phi \sim \psi) \text{ y } (\theta \sim \xi))$$

entonces

$$\phi \wedge \theta \sim \psi \wedge \xi$$

$$\phi \vee \theta \sim \psi \vee \xi$$

$$\neg \phi \sim \neg \psi$$

$Form(\Omega)/\sim$ es un álgebra de Boole, conocida como el álgebra de Lindenbaum, en la cual definimos las operaciones de la siguiente manera: $\forall[\psi][\phi] \in Form(\Omega)$ :

$$[\psi] \wedge [\phi] := [\psi \wedge \phi]$$

$$[\psi] \vee [\phi] := [\psi \vee \phi]$$

$$[\psi]^* := [\neg\psi]$$

$$0 := [\bot], 1 := [\top]$$

Al álgebra de Lindenbaum la denotaremos como $\mathcal{L}$. Observemos que:

$$\nvdash \phi \iff \nvdash \phi \leftrightarrow \top \iff [\phi] \neq [\top]$$

Así que si $\nvdash \phi$ la proyección $\pi : Form(\Omega) \to Form(\Omega)/\sim = \mathcal{L}$ cumple que $\pi(\phi) = [\phi] \neq [\top] = \pi(\top) = 1$, i.e., $\pi(\phi) \neq 1$ entonces $\mathcal{L} \nvDash \phi$. Por contrapositiva obtenemos

$$\mathcal{L} \vDash \phi \implies \vdash \phi$$

Cualquier morfismo $\theta : Form(\Omega) \to \mathcal{L}$ que respete las operaciones booleanas va a respetar la regla modus ponens,

$$\theta(\phi \to \psi) = \theta(\phi) = 1 \Rightarrow \theta(\psi) = 1$$

y para cualquier $\phi$ axioma, $\theta(\phi) = [\top]$.

$$\therefore \ \vdash \psi \iff \mathcal{L} \vDash \psi$$

Notemos que la prueba de $\vdash \phi \Rightarrow \mathcal{L} \vDash \phi$ no depende de $\mathcal{L}$, podemos hacer la misma prueba para cualquier álgebra booleana. Si denotamos a $AB$ como la clase de álgebras Booleanas entonces

$$\vdash \phi \implies AB \vDash \phi$$

y como $\mathcal{L}$ es un álgebra Booleana,

$$\vdash \phi \iff AB \vDash \phi$$

Tenemos las siguientes equivalencias:

$$\vDash \phi \iff Con \vDash \phi$$

$$\vdash \phi \iff AB \vDash \phi$$

El Teorema de Representación de Stone dice que toda álgebra Booleana $\mathcal{A}$ es isomorfa a una subálgebra de la potencia de sus ultrafiltros, $\mathcal{A} \preceq \wp(UltA)$ esto implica que:

$$Con \vDash \phi \iff AB \vDash \phi$$

El teorema de completud-correctud "débil" se puede formular como

$$\vDash_C \phi \iff \vdash \phi$$

dando como resultado:

Teorema de Representación de Stone $\Rightarrow$ Teorema de Completud-Correctud Débil

Lo que nos dice que la relación "débil" entre semántica y sintaxis es una consecuencia de la relación entre álgebra y topología.

## 1.5. Elementos Variables

Hasta el momento hemos analizado el concepto de punto como un objeto que tiene *estructura interna constante*. En nuestra experiencia humana solemos nombrar, y de esta manera dividir, un proceso que nos permite descomponer a los objetos de nuestra experiencia en partes. Hemos llevado este acto de división a lugares imperceptibles para los sentidos de forma directa, como el mundo de las partículas elementales y los agujeros negros. Dividir viene acompañado de una relación entre las partes, a veces olvidamos esta relación y creemos que se encuentran completamente separadas las partes. Pero hay veces en las que no perdemos la relación y sabemos como volver a "pegar" las partes para regresar a la unidad que fue dividida. Por lo que cada división viene acompañada de una estructura y determina una perspectiva del mundo, un contexto. Una vez más tenemos una relación entre la estructura interna y la externa. Un ejemplo sería dividir a los objetos en partículas elementales, en ese caso nuestra perspectiva del mundo sería muy distinta, sería difícil distinguir una silla de un perro. Pensar al objeto como algo indivisible es como considerar que su estructura interna es constante, podemos distinguir entre dos objetos distintos pero no podemos percibir las diferencias de manera interna, muy parecido a los conjuntos abstractos. Esa idea es utilizada en el estudio de las partículas elementales, se considera que todos los electrones son idénticos, que tienen las mismas propiedades y lo único que cambia son los accidentes, las ubicaciones espacio-temporales, pero no hay una forma interna del electrón para saber si dos electrones que hayan sido observados son o no el mismo. ¿Que objeto matemático es buen candidato para representar un objeto con vida interna? Una propuesta interesante es la de "elemento variable". Lawvere habla de elementos variables como objetos en un Topos. En general podemos pensarlos como pregavillas sobre una categoría que es la que da la variación. Esta estructura es la que permite entender una dinámica dentro y entre los objetos, la que define la estructura interna, el "pegamento" de las partes del elemento.

Un ejemplo de variación discreta es la categoría de objetos bivariantes, la cual tiene como objetos funciones entre conjuntos $X_0 \xrightarrow{f} X_1$ y las flechas entre los objetos, digamos entre $X_0 \xrightarrow{f} X_1$ y $Y_0 \xrightarrow{g} Y_1$ son pares de flechas $(X_0 \xrightarrow{h} Y_0, X_1 \xrightarrow{k} Y_1)$ tales que $k \circ f = g \circ h$. Se puede entender la variación de esta estructura como un "antes y después" de los objetos. El dominio representa el estado del objeto en el primer tiempo, en el "antes", y el codominio representa el estado del objeto "después", decir que le pasó a un elemento "después" es ver su imagen. Podemos encontrarnos en el caso de funciones no inyectivas, objetos que tienen elementos distintos (antes) que se vuelven el mismo (después) pero no podemos tener un objeto que se divide en dos o más elementos.

Otro ejemplo de variación discreta está en la categoría de endomapas de conjuntos. En esta categoría los objetos son parejas $(X, \alpha)$ donde $X$ es un conjunto y $X \xrightarrow{\alpha} X$ un endomapa de $X$. Las flechas en esta categoría son funciones que respetan la estructura dada por el endomapa. Si $(X, \alpha) \xrightarrow{f} (Y, \beta)$ entonces $X \xrightarrow{f} Y$ y $f \circ \alpha = \beta \circ f$. La variación del objeto está dada por el endomapa. Estos objetos se presentan frecuentemente como sistemas dinámicos discretos o autómatas. Se pueden pensar a los elementos de $X$ como los posibles estados de un sistema donde el endomapa representa su evolución.

Como ya había mencionado, muchos ejemplos de categorías de conjuntos variables son reconstruibles de la categoría de conjuntos abstractos $\mathcal{S}$ como la categoría $\mathcal{S}^{T^{op}}$, donde $T$ es la estructura interna de los objetos que estamos estudiando, "concretizados" en $\mathcal{S}$. Esta categoría tiene como objetos funtores y como flechas transformaciones naturales. De aquí podemos ver que cuando $T = \mathbf{1}$, la categoría con un solo objeto y sólo la flecha identidad, entonces $\mathcal{S}^{\mathbf{1}} \cong \mathcal{S}$. Lo que dice que podemos ver a la categoría de conjuntos abstractos como caso particular de elemento variable, el caso más simple, cuando la variación está dada por $\mathbf{1}$. Por lo que el concepto de punto que hemos estudiado hasta ahora es un caso particular de elementos variables.

Una manera muy interesante en el cual podemos apreciar la magia que surge al darle variación a los elementos es observando el comportamiento de los elementos en un modelo Booleano-valuado, en donde la variación está dada por un álgebra de Boole.

## 1.6. Modelos Booleano valuados

Una de las estructuras que llevó a Lawvere y Tierney a generalizar la teoría de Topos establecida por Grothendieck y Giraud fue el forcing de Cohen. Una manera de realizar este método es a través de modelos Booleano valuados, en donde la variación está dada por un álgebra de Boole.

En general, una estructura $\mathcal{B}$-valuada consiste en un álgebra de Boole $(\mathcal{B}, \wedge, \vee, *, 1, 0)$ una clase $\mathcal{S}$ y dos funciones $\| \cdot = \cdot \|, \| \cdot \in \cdot \|$: $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathcal{B}$ tal que

Para toda $\phi, \psi \in \mathcal{L}$, para cualesquiera $u, v, w \in \mathcal{S}$ y para toda $\varphi(x)$ fórmula con una variable libre:

1. $\| u = u \| = 1$
2. $\| u = v \| = \| v = u \|$
3. $\| u = v \| \wedge \| v = w \| \leq \| u = w \|$
4. $\| u = v \| \wedge \| u \in w \| \leq \| v \in w \|$
5. $\| v = w \| \wedge \| u \in v \| \leq \| u \in w \|$
6. $\| \phi \wedge \psi \| = \| \phi \| \wedge \| \psi \|$
7. $\| \neg\phi \| = \| \phi \|^*$
8. $\| \exists x \varphi(x) \| = \bigvee_{u \in \mathcal{S}} \| \varphi(u) \|$

Donde $\mathcal{L}$ es la extensión del lenguaje de primer orden de la teoría de conjuntos agregando una constante por cada elemento de $\mathcal{S}$

Debido al axioma de regularidad podemos probar que todos los conjuntos se pueden construir a partir de la construcción de la *jerarquía acumulativa* presentada por Von Neumann, definida por recursión transfinita como:

$$V_0 = \emptyset$$

$$V_{\alpha+1} = \wp(V_\alpha)$$

$$V_\gamma = \bigcup_{\beta<\gamma} V_\beta \quad \text{si } \gamma \text{ es límite}$$

$$V = \bigcup_{\alpha \in Ord} V_\alpha$$

Hay otra construcción que nos dará un modelo isomorfo a este pero en donde los elementos ahora serán funciones que tienen como rango el álgebra booleana 2, podemos pensar a cada elemento como una función característica. Este modelo es lo que llamamos un modelo 2-valuado, $V^{(2)}$, construido recursivamente como:

$$V_\alpha^{(2)} = \{x \mid \text{ “}x \text{ es función”} \wedge ran(x) = 2 \wedge \exists \xi < \alpha(dom(x) \subseteq V_\xi^{(2)})\}$$

$$V^{(2)} = \{x \mid \exists \alpha[x \in V_\alpha^{(2)}]\}$$

De esta manera construimos un universo en el que todos los objetos son funciones que tienen como dominio un subconjunto de algún $V_\alpha^{(2)}$ y como codominio el álgebra **2**. De manera análoga podemos hacer la construcción de un modelo $\mathcal{B}$-valuado, donde $\mathcal{B}$ es un álgebra de Boole, de manera recursiva como:

$$V_\alpha^{(\mathcal{B})} = \{x \mid \text{“}x \text{ es función”} \ \wedge \ ran(x) = \mathcal{B} \ \wedge \ \exists \xi < \alpha[dom(x) \subseteq V_\xi^{(\mathcal{B})}]\}$$

$$V^{(\mathcal{B})} = \{x \mid \exists \alpha[x \in V_\alpha^{(\mathcal{B})}]\}$$

$V^{(\mathcal{B})}$ es la $\mathcal{B}$-extensión de $V$.
En este universo tenemos que

$$x \in V^{(\mathcal{B})} \iff A \xrightarrow{x} \mathcal{B} \text{ y } A \subseteq V^{(\mathcal{B})}$$

Una manera de interpretar a $x(y)$, $y \in dom(x)$, es como “la probabilidad booleana de que $y \in x$”. Extendemos el lenguaje de primer orden de la teoría de conjuntos $\mathcal{L}$ que tiene a la igualdad y $\in$ agregando una constante para cada elemento de $V^{(\mathcal{B})}$, sea $\mathcal{L}^{\mathcal{B}}$ este lenguaje extendido. Para cada $\mathcal{L}_0^{(\mathcal{B})}$, los $\mathcal{L}^{\mathcal{B}}$-enunciados, se define su valor booleano en $V^{(\mathcal{B})}$ a través de una función $\| \cdot \|$: $\mathcal{L}_0^{(\mathcal{B})} \to \mathcal{B}$ definido por recursión sobre la complejidad de las fórmulas:

Para las fórmulas atómicas: $\forall u, v \in V^{(\mathcal{B})}$

$$\| u \in v \| = \bigvee_{y \in dom(v)} [v(y) \wedge \| u = y \||]$$

$$\| u = v \| = \bigwedge_{x \in dom(u)} [u(x) \Rightarrow \| x \in v \|] \wedge \bigwedge_{y \in dom(v)} [v(y) \Rightarrow \| y \in u \|]$$

$\forall \phi, \psi \in \mathcal{L}_0^{(\mathcal{B})}$ y para cualquier fórmula $\varphi(x)$ con una variable libre:

$$\| \phi \wedge \psi \| = \| \phi \| \wedge \| \psi \|$$

$$\| \neg\phi \| = \| \phi \|^*$$

$$\| \exists x \varphi(x) \| = \bigvee_{u \in V^{(\mathcal{B})}} \| \varphi(u) \|$$

Por estar en un álgebra de Boole podemos entender a $(a \Rightarrow b)$ como $a^* \vee b$, para cualquier $a, b \in \mathcal{B}$

La satisfacción de un $\phi \in \mathcal{L}^{\mathcal{B}}$-enunciado en $V^{(\mathcal{B})}$ se define como

$$V^{(\mathcal{B})} \vDash \phi \iff \| \phi \| = 1$$

Esto define una estructura $\mathcal{B}$-valuada en donde $u(x) \leq \| x \in u \|$ para toda $x \in dom(u)$ y la satisfacción respeta las reglas de inferencia. Si tenemos una subálgebra completa $\mathcal{A}$ de $\mathcal{B}$ entonces al hacer la misma construcción se obtiene que $V^{(\mathcal{A})} \subseteq V^{(\mathcal{B})}$ y para cualquier $u, v \in V^{(\mathcal{A})}$,

$$\| u \in v \|^{\mathcal{A}} = \| u \in v \|^{\mathcal{B}} \quad , \quad \| u = v \|^{\mathcal{A}} = \| u = v \|^{\mathcal{B}}$$

Entonces para cualquier fórmula, $\varphi(x_1, ..., x_n)$, $\Delta_0$ (acotada) se cumple que para todo $u_1, ..., u_n \in V^{(\mathcal{A})}$,

$$\| \varphi(u_1, ..., u_n) \|^{\mathcal{A}} = \| \varphi(u_1, ..., u_n) \|^{\mathcal{B}}$$

$V^{(\mathcal{A})}$ es un submodelo de $V^{(\mathcal{B})}$.
2 es una subálgebra completa de cualquier álgebra de Boole, entonces $V^{(2)}$ siempre va a ser un submodelo de cualquier modelo Booleano valuado $V^{(\mathcal{B})}$.

Si a cada $x \in V$ lo identificamos con el elemento

$$\hat{x} = \{(\hat{y}, 1) \mid y \in x\} \in V^{(2)} \subseteq V^{(\mathcal{B})}$$

tenemos una asignación inyectiva y el valor Booleano de $\hat{x} \in \hat{y}$ y de $\hat{x} = \hat{y}$ para cualquier $x, y \in V$ va a pertenecer al álgebra 2. Más aún, tendremos que para cualquier fórmula $\varphi(x_1, ..., x_n)$ y $v_1, ..., v_n \in V$,

$$\varphi(v_1, ..., v_n) \leftrightarrow V^{(2)} \vDash \varphi(\hat{v_1}, ..., \hat{v_n})$$

Supongamos que $u \in V^{(2)}$ es tal que $\forall v \in dom(u), \exists y \in V(\hat{y} = v)$. Tomando a $x = \{y \in V \mid u(\hat{y}) = 1\}$ entonces $\| \hat{x} = u \| = 1$, lo que significa que $V^{(2)} \models \hat{x} = u$, por lo que la asignación es biyectiva y por lo tanto $V \cong V^{(2)}$. Esto dice que el modelo $V^{(\mathcal{B})}$ va a tener como submodelo al modelo original $V$. Esta construcción se puede repetir para cualquier modelo transitivo de ZFC esencialmente de la misma manera, por lo que tenemos una forma de extender modelos.

Gracias a este isomorfismo podemos pensar en los objetos del modelo inicial $V$ como los elementos 2-valuados, los que cumplen que su rango está contenido en el álgebra 2, y les llamamos los elementos estándar de $V^{(\mathcal{B})}$. Esta extensión del modelo presenta un comportamiento probabilístico, donde los valores de probabilidad están dados por un álgebra de Boole. La pertenencia, igualdad y propiedades entre los objetos de este universo se satisfacen bajo cierta probabilidad. El comportamiento de esta probabilidad es poco intuitivo ya que el orden que define el álgebra no es un orden lineal. Podemos tener elementos que estén a la "misma distancia" del 0 y del 1 pero que sean incompatibles i.e. $a \wedge b = 0$. Por ejemplo, supongamos que el álgebra $\mathcal{B}$ es atómica y tomamos a dos átomos distintos, $a, b \in \mathcal{B}$. Si $u, w, v \in V^{(\mathcal{B})}$ ¿Qué interpretación le podemos dar a $\| u \in w \| = a$ y a $\| v \in w \| = b$? ¿Este comportamiento pasará en la naturaleza? ¿Cuál es una intuición adecuada para entenderlo?

$V^{(\mathcal{B})}$ es un modelo de ZFC, así que podemos ver a los puntos conjuntistas en este modelo. Habíamos dicho que los puntos de un conjunto son sus elementos pero ahora tenemos que la afirmación de que un conjunto sea elemento de otro sólo puede darse de forma probabilística. Vamos a tener "puntos probabilísticos" ya que no se puede afirmar siempre si un elemento en $V^{(\mathcal{B})}$ es un punto de otro. Se puede dar la probabilidad booleana de que lo sea, lo que cambia la intuición de punto conjuntista. Para dar una representación visual de este comportamiento podemos usar una analogía con colores. Digamos que estamos viendo a todo el universo y ver a un conjunto es asignarle colores a los objetos del universo, en donde se colorean blancos si pertenecen con probabilidad 1, negros si no pertenecen (la probabilidad es 0), y para ayudar a la analogía suponemos que es atómica el álgebra de Boole así que a cada átomo se le corresponde un color, y según la teoría del color la unión de colores se irá acercando al blanco. En el caso clásico (2-valuado) sólo se quedarán iluminados los elementos del conjunto, pero si no es 2-valuado entonces habrá colores distintos para objetos incompatibles, tonos oscuros para los elementos que tengan poca probabilidad booleana de pertenecer y colores muy brillantes, casi blancos, para los que tengan una gran probabilidad de pertenecer. Cambiar de conjunto corresponde a una coloración distinta del universo, y habrá muchos "tipos" de puntos, tantos como colores y tonos, que corresponden a los elementos del álgebra de Boole.

En este contexto aparece un enunciado equivalente al axioma de Elección, el Principio del Máximo. Dice que para cualquier fórmula $\phi(x)$ existe una $u \in V^{(\mathcal{B})}$ tal que $\| \exists x \phi(x) \| = \| \phi(u) \|$. Si no tenemos axioma de Elección entonces existe una fórmula $\phi(x)$ tal que para cualquier $u \in V^{(\mathcal{B})}$, $\| \exists \phi(x) \| \neq \| \phi(u) \|$. Como $\| \exists x \phi(x) \| = \bigvee_{u \in V^{(\mathcal{B})}} \| \phi(u) \|$ entonces $\| \phi(u) \| \leq \| \exists x \phi(x) \|$. Así que sin la protección del axioma de elección, es posible que tengamos que $\| \exists x \phi(x) \| = 1$ pero $\| \phi(u) \| \neq 1$ para todo $u \in V^{(\mathcal{B})}$. Alguien satisface la fórmula pero ese alguien no tiene nombre.

Dado que estamos en un ambiente probabilístico tiene sentido considerar mezclas de elementos. Dados dos subconjuntos $\{a_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{B}$ y $\{u_i\}_{i \in I} \subseteq V^{(\mathcal{B})}$, definimos a la mezcla $\Sigma_{i \in I} a_i \cdot u_i$ de $\{u_i\}_{i \in I}$ con respecto a $\{a_i\}_{i \in I}$ como el elemento $u \in V^{(\mathcal{B})}$ tal que $dom(u) = \bigcup_{i \in I} dom(u_i)$ y para $z \in dom(u)$,

$$u(z) = \bigvee_{i \in I} [\ a_i \wedge \| z \in u_i \|\ ]$$

Una partición de la unidad es un conjunto $\{a_i\}_{i \in I}$ tal que $\bigvee \{a_i\}_{i \in I} = 1$ y para toda $a, b \in \{a_i\}_{i \in I}$ si $a \neq b$ entonces $a \wedge b = 0$. Hay dos resultados que justifican el hecho de que llamemos a este elemento "mezcla".

1. Si $\{x_i\}_{i \in I} \subseteq V$ es tal que si $i \neq j \to x_i \neq x_j$ entonces

   $$\exists x \in V^{(\mathcal{B})} \text{ tal que } a_i = \| x = \hat{x_i} \| \text{ para toda } i \in I$$

2. Sea $\{u_i\}_{i \in I} \subseteq V^{(\mathcal{B})}$ y supongamos que $v \in V^{(\mathcal{B})}$ satisface que

   $$a_i \leq \| v = u_i \|$$

para toda $i \in I$ se tiene que $V^{(\mathcal{B})} \models v = \Sigma_{i \in I} a_i \cdot u_i$

Más evidencia del comportamiento probabilístico surge cuando observamos ciertas clases de objetos importantes en teoría de conjuntos, como los ordinales y los definibles. Un ordinal es un elemento transitivo y bien ordenado por $\in$. Esto se puede escribir mediante una fórmula, $Ord(x)$ que es $\Delta_0$, y como es acotada se tiene que los ordinales en $V$ siguen siendo ordinales en $V^{(\mathcal{B})}$. A los ordinales $\hat{\alpha} \in V^{(\mathcal{B})}$, donde $\alpha \in V$ es ordinal, les llamamos ordinales estándar. Como ahora estamos en un universo más grande vamos a tener más elementos que cumplan ser ordinales, pero algo muy interesante es que para saber "que tan ordinal" es el elemento basta ver que tan parecido es a los ordinales estándar. Dicho en fórmulas,

$$\| Ord(u) \| = \bigvee_{\alpha \in ORD} \| u = \hat{\alpha} \|$$

Otro resultado muy interesante es el siguiente,

$\| Ord(u) \| = 1 \iff$ existe un conjunto A de ordinales y una partición de la unidad $\{a_\xi\}_{\xi \in A}$ tal que $\| u = \Sigma_{\xi \in A} a_\xi \cdot \hat{\xi} \| = 1$

¡Los ordinales de $V^{(\mathcal{B})}$ son mezclas de los ordinales estándar! Esto pasa también para los definibles de $V^{(\mathcal{B})}$ pero en ese caso $A$ es un conjunto de definibles estándar.

Los ordinales son definibles, así que podemos resumir esto diciendo que los nuevos definibles son mezclas de los definibles estándar, lo que fortalece la intuición de que nos encontramos en un universo probabilístico, pasamos de la certidumbre a la incertidumbre de una manera bastante interesante y no trivial.

Podemos repetir ésta construcción para cualquier modelo transitivo $M$ de "ZFC" (ya que por el teorema de incompletud no puede ser de todo el sistema axiomático pero por el teorema de Reflexión podemos tomarlo de todos los axiomas que hemos usado hasta la fecha, los cuales forman un conjunto finito, pero para no cargar demasiado la notación no pondré las comillas en ZFC) en donde $M \in V$ y obtener un modelo $M^{(B)}$ en el cual se satisface

$$M \models \text{“B es un álgebra de Boole completa”}$$

esto se cumple si para cualquier $X \in \wp(B) \bigcap M = \wp^{(M)}(B)$ entonces $\bigvee X, \bigwedge X$ existen y están en $M$.

$M^{(B)}$ es la relativización de $V^{(B)}$ a $M$, $M^{(B)} = (V^{(B)})^{(M)}$ y $\mathcal{L}_M^{(B)} = (\mathcal{L}^{(B)})^{(M)}$ también dicho de otra manera $M^{(B)}$ es la B-extensión de M. Los resultados que se vieron para $V^{(\mathcal{B})}$ van a ser válidos aquí. El valor booleano de los enunciados de éste lenguaje es la restricción a $\mathcal{L}_M^{(B)}$, y la satisfacción en el modelo se define como $M^{(B)} \vDash \phi$ si $\parallel \phi \parallel = 1$. Esta construcción vuelve a dar un modelo Booleano valuado de ZFC en donde $M \hookrightarrow M^{(B)}$ gracias a la asignación $x \mapsto \hat{x} = \{(\hat{y}, 1) \mid y \in x\}$ para cada $x \in M$.

Dado un ultrafiltro $U$ en $B$, definimos la relación de equivalencia $\sim_U$ en $M^{(B)}$ como

$$x \sim_U y \iff \parallel x = y \parallel \in U$$

y denotamos $x^U = \{y \in M^{(B)} \mid x \sim_U y\}$.

Definimos $\in_U$ como

$$x^U \in_U y^U \iff \parallel x \in y \parallel \in U$$

y el cociente de $M^{(B)}$ por $U$ como

$$M^{(B)}/U = (\{x^U \mid x \in M^{(B)}\}, \in_U)$$

Por inducción sobre la complejidad de las fórmulas y utilizando el Principio del Máximo para el caso existencial, el cual tenemos ya que estamos en un modelo de ZFC, se prueba que:

$$M^{(B)}/U \vDash \phi[x_1^U, ..., x_n^U] \iff \parallel \phi(x_1, ..., x_n) \parallel \in U$$

Esto implica que

$$M^{(B)} \vDash \phi \Rightarrow M^{(B)}/U \vDash \phi$$

lo que quiere decir que $M^{(B)}$ es un submodelo de $M^{(B)}/U$. En particular tenemos que $M^{(B)}/U$ es un modelo de ZFC.

Si $\in_U$ es una relación bien fundada, por el Lema del Colapso Transitivo de Mostowski existe un conjunto transitivo, $M[U]$ tal que la función $h$ definida recursivamente como

$$h : M^{(B)}/U \to M[U]$$

$$x^U \mapsto \{h(y^U) \mid \parallel y \in x \parallel \in U\}$$

es una biyección que satisface

$$y^U \in_U x^U \leftrightarrow h(y^U) \in h(x^U)$$

Esto permite definir un mapeo $i : M^{(B)} \to M[U]$ como

$$i(x) = h(x^U) = \{i(y) \mid \parallel y \in x \parallel \in U\}$$

A este mapeo se le conoce como el *mapeo canónico de $M^{(B)}$ sobre $M[U]$*. Como $h$ es un isomorfismo entre $M^{(B)}/U$ y $M[U]$ entonces para cualquier fórmula $\phi(v_1, ..., v_n)$ y cualesquiera $x_1, ..., x_n \in M^{(B)}$ se cumple

$$M[U] \vDash \phi[i(x_1), ..., i(x_n)] \iff M^{(B)}/U \vDash \phi[x_1^U, ..., x_n^U] \iff \parallel \phi(x_1, ..., x_n) \parallel \in U$$

Con estos $\in$-morfismos tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r] \arrow[dr] & M^{(B)} \arrow[r] \arrow[d] & M^{(B)}/U \arrow[dl] \\
& M[U] &
\end{tikzcd}$$

Definimos a $U_* \in M^{(B)}$ como $dom(U_*) = \{\hat{x} \mid x \in B\} = dom(\hat{B})$ y $U_*(\hat{x}) = x$ para $x \in B$. Notemos que este elemento no depende de $U$.

Como $\parallel x \in U_* \parallel = \bigvee_{y \in B} [\, y \wedge \parallel x = \hat{y} \parallel \,]$ entonces para $x \in B$

$$\parallel \hat{x} \in U_* \parallel = x$$

lo que implica que para cualquier $B$-enunciado $\varphi$, si $b = \parallel \phi \parallel$

$$\parallel \hat{b} \in U_* \parallel = b$$

entonces
$$M^{(B)} \vDash [\| \hat{\varphi} \| \in U_* \leftrightarrow \varphi]$$
El papel que tiene $U_*$ es el de representar los valores booleanos que van a tener los enunciados que son verdaderos en $M^{(B)}$.

$U$ es $M$-genérico si para todo $X \in \wp(B) \cap M$
$$\bigvee X \in U \rightarrow X \cap U \neq \emptyset$$
Ya definimos suficiente herramienta para ver resultados interesantes cuando $U$ es M-genérico.

- Todos los ordinales de $M^{(B)}/U$ son los ordinales estándar
- $M^{(B)}/U \vDash Ord[x^U] \iff x^U = \hat{\alpha}^U$ para algún $\alpha \in Ord^{(M)}$
- $\in_U$ es una relación bien fundada
- $\forall x \in M(j(x) = x)$ lo que implica que $M \subseteq M[U]$
- $j[M]$ es transitivo
- $\forall b \in U(j(b) = b)$ y $i(U_*) = U$
- $U \in M[U]$
- $M^{(B)} \vDash$ '$U_*$ es un ultrafiltro M-genérico en $\hat{B}$"

A $U_*$ se le conoce como el *ultrafiltro genérico canónico en* $M^{(B)}$ y a $M[U]$ la *extensión genérica de* $M$. $M[U]$ va a resultar ser el mínimo $\in$-modelo transitivo de ZF tal que $M \subseteq M[U]$ y $U \in M[U]$.

Regresemos al punto. Habíamos hablado de los puntos topológicos en un álgebra de Boole como sus ultrafiltros en donde a los principales les llamamos "clásicos" y a los no principales "ideales". ¿Hay diferencia en las construcciones si las hacemos a partir de un punto ideal o de un punto clásico? Afortunadamente si la hay, y es MUY interesante. Resulta que en el caso en el que $M \vDash V = L$ tenemos que $M[U] \vDash V = L \iff U = U_a$ para algún átomo $a$. La prueba se encuentra en el Apéndice. Por lo tanto

$$M[U] \vDash V = L \iff U = U_a \text{ para algún átomo } a$$
$$M[U] \vDash V = L \iff U \text{ es ultrafiltro principal}$$
$$M[U] \vDash V = L \iff U \text{ es un punto clásico}$$
$$M[U] \nvDash V = L \iff U \text{ es un punto ideal } M\text{-genérico}$$

Esto nos da información sobre la diferencia entre los puntos clásicos (ultrafiltros principales) e ideales (no principales) en el caso $M \vDash V = L$. Tenemos que todos los puntos clásicos viven en el modelo y los ideales no necesariamente. Como $M[U]$ y $M$ tiene a los mismos definibles entonces si un punto es ideal entonces no es definible.

# Capítulo 2

# Cuántica

El siguiente análisis se hará dentro del marco conceptual de la Geometría Cuántica. Esta es una rama de las matemáticas que relaciona métodos y conceptos de diversas ramas, como análisis funcional, geometría diferencial y álgebras C* no conmutativas, a través de ideas que nacen junto con la teoría de la mecánica cuántica. La Geometría Cuántica también es conocida como Geometría No Conmutativa, así que lo que hace a una geometría "Cuántica" es la no conmutatividad. En la teoría Cuántica formalizada en los espacios de Hilbert tenemos que el espacio de Hilbert representa el sistema físico, los vectores son los estados y los operadores hermitianos las observables del sistema. Los vectores propios de un operador hermitiano forman una base ortogonal del espacio de Hilbert, y si dos operadores conmutan entonces comparten los vectores propios. Si tenemos un estado y le aplicamos un operador hermitiano nos va a dar el estado del sistema después de la medición, por lo que si dos operadores conmutan entonces obtendremos el mismo estado después de las mediciones sin importar cuál observamos primero. Si no conmutan esto no es necesariamente cierto, puede ser que al medir primero una observable y después la otra nos de un estado distinto a hacer la medición en el otro orden, un fenómeno cuántico, también relacionado con el principio de incertidumbre, en donde obtenemos la desigualdad dada por Heisenberg debido a la no conmutatividad del operador de posición con el de momento.

¿Qué es un espacio? Esta pregunta puede llevarnos a otra tesis muy interesante. En un principio se entendía el concepto de "espacio" como una abstracción del espacio 3-dimensional que percibimos en nuestra vida diaria. Un espacio euclidiano que se creía que era absoluto al igual que los teoremas que se derivan de los axiomas que caracterizan a la geometría euclidiana. Con la llegada de las otras geometrías se vió que la estructura geométrica no era algo dado a priori, lo que llevó a abandonar la creencia de que los teoremas de la Geometría Euclidiana eran verdades absolutas, y a darle más importancia a la relación que hay entre los objetos, y no a su naturaleza.

Luego llegó Felix Klein con su programa de Erlangen, en el cual nos dice que la estructura geométrica de un espacio está capturada en el grupo de automorfismos. Esto permitió grandes avances en la rama de la geometría algebraica, en donde se dan pruebas de teoremas de la geometría clásica a través de la teoría de grupos. Esto dió inicio a grandes teoremas y a poder ver dos ramas aparentemente distintas como dos caras de la misma moneda, y eventualmente nos permitió construir diccionarios para poder estudiar objetos geométricos en términos algebraicos y viceversa.

Una noción (clásica) de espacio es un conjunto con una estructura. Digo que es clásico porque partimos de un conjunto, un objeto con puntos, y pronto veremos que en el caso cuántico vamos a encontrarnos con espacios sin puntos. Si nuestra estructura es una medida del espacio, esta está capturada por la *-álgebra de las funciones medibles que van del conjunto a los complejos; la topológica está dada por las funciones continuas, la diferencial por las suaves... Lo que nos dice que podemos entender al espacio dentro del formalismo de álgebras C*. Todas estas álgebras son conmutativas, lo cual nos dice que seguimos en un contexto clásico, ahora hay que encontrar una generalización adecuada para hablar de espacios geométricos dados por álgebras no conmutativas, lo que nos lleva a la Geometría Cuántica.

Debido a que la tesis sólo se ocupa del concepto de punto, iremos directo al punto. Afortunadamente contamos con la Dualidad de Gelfand, la cual nos permite ver con mucha claridad la relación entre espacios topológicos y álgebras C*. Haré un análisis parecido al caso de la Dualidad de Stone, en donde veremos qué pasa con los puntos cuando son transformados por el funtor correspondiente.

## 2.1. Álgebras C* Conmutativas con 1

Otro lugar interesante para explorar es la categoría de Álgebras C* conmutativas con unidad, $\underline{\mathbf{AlgC^*_{conm,1}}}$. Un álgebra C*, $\mathscr{A} = (A, \cdot, +, *, 1, \| \|)$, es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ completo bajo su norma tal que: $\forall x, y, z \in \mathscr{A}\ \forall \lambda \in \mathbb{C}$

1. $x(yz) = (xy)z$
2. $x(y+z) = xy + xz; (y+z)x = yx + zx$
3. $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$
4. $(x+y)^* = x^* + y^*$
5. $(\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*$
6. $(xy)^* = y^* x^*$
7. $x^{**} = x$
8. 1x=x1=x
9. $\| xx^* \| = \| x \|^2$

Y es Conmutativa si adicionalmente cumple que

$$\forall x, y \in \mathscr{A} (xy = yx)$$

Le damos estructura C* a $C(X) = \{f : X \to \mathbb{C}\}$ definiendo las operaciones de la siguiente manera:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$
$$(f^*)(x) = \overline{f(x)}$$
$$\| f \| = sup\{| f(x) | : x \in X\}$$

Definida de esta manera, $C(X)$ es un álgebra C* conmutativa y tiene unidad, que es la función constante 1.

La primera equivalencia que exploraremos es la que hay entre ideales maximales y puntos del espacio topológico.

Sea $I \trianglelefteq \mathscr{A}$ un ideal maximal. Si existen $x_1, x_2 \in X$ tal que

$$\forall f \in I(f(x_1) = f(x_2) = 0)$$

entonces definimos $I_{x_i} = \{f \in C(X) \mid f(x_i) = 0\}, i = 1, 2$. Si $f, g \in I_{x_i}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ entonces $(\lambda f + g)(x_i) = \lambda f(x_i) + g(x_i) = 0$ y $f(x_i^*) = \overline{f(x_i)} = 0$. $I_{x_i}$ es un subespacio vectorial cerrado bajo la operación *. Si $h \in C(X)$ y $f \in I_{x_i}$ entonces $f \cdot h(x_i) = h(x_i)f(x_i) = f(x_i)h(x_i) = h \cdot f(x_i) = h(x_i)0 = 0$, por lo tanto, $I_{x_i}$ es un ideal bilateral de $\mathscr{A}$. Entonces $I \subseteq I_{x_i}$ y como $I$ es ideal maximal $I = I_{x_i}$. Por el lema de Urysohn $C(X)$ separa puntos, para cualesquiera dos puntos distintos existe una función que los manda a puntos distintos, así que $x_1 = x_2$, así que hay a lo más un punto en la intersección de los núcleos de las funciones del ideal.

Si no hay ninguno, $\forall f \in I\ \exists x \in X(f(x) \neq 0)$, entonces eso significa que $\{Ker(f) \mid f \in I\}$ no tiene la propiedad de la intersección finita, por lo tanto existen $f_1, ..., f_n \in I$ tal que $\bigcap_{i=1}^n Ker(f_i) = \emptyset$. Como $I$ es un espacio vectorial cerrado bajo * entonces $g = \Sigma_{i=1}^n f_i \overline{f}_i \in I$ y $g(x) \neq 0$ para todo $x \in X$, lo que implica que es invertible por lo que existe $g^{-1} \in \mathscr{A}$, como $I$ es ideal entonces $g \cdot g^{-1} = 1 \in I$ y como la unidad está en el ideal entonces $I = \mathscr{A}$.

$$\therefore \forall I \trianglelefteq \mathscr{A}(\text{ I es maximal } \Rightarrow \exists x \in X(I = \{f \in C(X) \mid f(x) = 0\}))$$

Ya vimos que dado $y \in X$ entonces $I_y = \{f \in C(X) \mid f(y) = 0\}$ es un ideal bilateral *. Si no es maximal, entonces por el axioma de elección tenemos que podemos encontrar un ideal maximal $J$ que lo contenga, pero por lo que acabamos de probar existe $x_0 \in X$ tal que $J = I_{x_0}$. Usando que $C(X)$ separa puntos, si $y \neq x_0$ tendremos una función $f \in C(X)$ tal que $f(y) \neq f(x_0)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $f(y) \neq 0$, en caso contrario hacemos lo mismo para $f(x_0)$. Como $f(y) \neq 0$, entonces $f(y) \cdot 1 - f = h \in I_y - I_{x_0}$ lo cual es una contradicción ya que $I_y \subseteq J = I_{x_0}$ por lo tanto $y = x_0$ entonces $I_y$ es maximal.

$$\therefore I \text{ maximal} \iff \exists x_0 \in X(I = I_{x_0})$$

Hay una biyección entre ideales maximales y puntos del espacio topológico. Una definición algebraica de los puntos en el contexto de las álgebras $C^*$.

Otra definición de punto que podemos dar en este contexto es a partir de los caracteres del álgebra. Un caracter, $\kappa : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ es una función que cumple $\forall x, y \in \mathscr{A}\ \forall \lambda \in \mathbb{C}$:

1. $\kappa(x + \lambda y) = \kappa(x) + \lambda\kappa(y)$
2. $\kappa(xy) = \kappa(x)\kappa(y)$
3. $\kappa(x^*) = \overline{\kappa(x)}$
4. $\exists x \in \mathscr{A}(\kappa(x) \neq 0)$

Veamos que hay una biyección entre los caracteres y los ideales maximales. Tomemos un caracter $\kappa : C(X) \to \mathbb{C}$ y lo asociamos con el ideal maximal $Ker(\kappa)$. Es ideal bilateral ya que para cualquier$f \in C(X)$, si $g \in Ker(\kappa)$ entonces $\kappa(fg) = \kappa(f)\kappa(g) = \kappa(g)\kappa(f) = \kappa(f) \cdot g = 0$ por lo tanto $fg, gf \in Ker(\kappa)$. También es cerrado bajo la operación * ya que

$$g \in Ker(\kappa) \implies \kappa(g^*) = \overline{\kappa(g)} = \overline{0} = 0$$

Y como existe $x \in C(X)$ tal que $\kappa(x) \neq 0$ entonces $\kappa$ es suprayectivo y $C(X)/Ker(\kappa) \cong \mathbb{C}$, lo que nos dice que $Ker(\kappa)$ tiene codimensión 1, lo que implica que es maximal.
Para el regreso tomemos $I \trianglelefteq C(X)$ ideal maximal y $g \notin I$. Sea $J = \{fg + y \mid f \in C(X), y \in I\}$ entonces $J$ es ideal y $I \subsetneq J$. Por la maximalidad de $I, C(X) = J$, lo que nos dice que $1 = fg + y$ para algún $f \in C(X), y \in I$, es decir, para cualquier $[g] = g + I \in C(X)/I$ con $[g] \neq [0]$, existe $[f] = f + I$ tal que $[f][g] = fg + I = 1 = [1]$, lo que significa que todo elemento es invertible.

$I$ es ideal maximal entonces es cerrado, entonces $C(X)/I$ es un álgebra de Banach donde todo elemento es invertible, por el teorema de Gelfand-Mazur, $C(X)/I \cong \mathbb{C}$. Sea $h$ el isomorfismo $C(X)/I \xrightarrow{h} \mathbb{C}$. Este isomorfismo es único ya que si hubiera otro, $C(X)/I \xrightarrow{k} \mathbb{C}$,entonces $h \circ k^{-1} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es un isomorfismo y como preserva la operación *, en este caso la conjugación, y es multiplicativo entonces $h \circ k^{-1} = Id$ ya que el único *-isomorfismo (multiplicativo) de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ es la identidad, por lo tanto $h = k$, lo que implica que el isomorfismo dado es único.

Tenemos $C(X) \xrightarrow{\pi_I} C(X)/I \xrightarrow{h} \mathbb{C}$, como ambas son *-morfismos entonces $C(X) \xrightarrow{h\circ\pi_I} \mathbb{C}$ es un caracter tal que $Ker(h \circ \pi_I) = I$, y por la unicidad del isomorfismo con $\mathbb{C}$, si dos caracteres tienen el mismo núcleo, entonces son el mismo. Hemos probado la siguiente equivalencia:

$$\text{ideales maximales} \iff \text{caracteres del álgebra}$$

La equivalencia entre ideales maximales y puntos mezclada con la de ideales maximales y caracteres da una tercera equivalencia que es entre puntos y caracteres. Una forma de entender esta biyección es de la siguiente manera. Si $x \in X$ entonces se le puede asociar el caracter $\kappa_x : f \mapsto f(x)$. Lo que nos dice que el caracter asociado a $x$ es la evaluación en ese punto y el ideal maximal asociado es $Ker(\kappa_x) = I_x = \{f \in C(X) \mid f(x) = 0\}$. Viendo la relación de caracteres y puntos de esta manera, podemos ver que en éstas álgebras los puntos están caracterizados por como actúan los elementos del álgebra en ellos. Saber cual es la imagen del punto para cada función es toda la información que necesitamos para saber de que punto estamos hablando.

Tenemos estas equivalencias:

$$x \in \text{X} \iff \text{ideales maximales de C(X)} \iff \text{caracteres } \kappa : C(X) \to \mathbb{C}$$

Esta prueba vale para cualquier álgebra C* conmutativa. El caso general es un resultado conocido como el teorema de Gelfand-Naimark, que establece la equivalencia entre $\underline{\mathbf{AlgC^*_{conm,1}}}$ y la categoría de espacios Topológicos Hausdorff compactos, $\underline{\mathbf{Comp}}$. Una implicación de este teorema es que si tenemos un álgebra C* conmutativa con unidad $\mathscr{A}$ entonces existe un espacio topológico Hausdorff Compacto $X$ tal que $\mathscr{A} \cong C(X)$, donde el isomorfismo es isométrico. El espacio $X$ que le asocia al álgebra es el conjunto $\hat{\mathscr{A}} = \{\Phi : \mathscr{A} \to \mathbb{C} \mid \Phi \text{ es un *-morfismo}\}$, los caracteres del álgebra, conocido como el espectro del álgebra, equipado con la topología *-débil.

Como consecuencia de este teorema se pueden construir dos funtores contravariantes:

$$\hat{}: \underline{\mathbf{AlgC^*_{conm,1}}} \longrightarrow \underline{\mathbf{Comp}}$$

$$\mathscr{A} \in Ob(\underline{\mathbf{AlgC^*_{conm,1}}}) \longmapsto \hat{\mathscr{A}} \in Ob\ (\underline{\mathbf{Comp}})$$

$$f : \mathscr{A} \to \mathscr{B} \in Ar(\underline{\mathbf{AlgC^*_{conm,1}}}) \longmapsto \hat{f} : \hat{\mathscr{B}} \to \hat{\mathscr{A}} \in Ar(\underline{\mathbf{Comp}})$$

$$\hat{f} : \Phi \longmapsto \Phi \circ f$$

y como $C(X) = \{f : X \to \mathbb{C} \mid \text{f es continua}\}$ es un álgebra $C^*$ entonces se puede definir el funtor:

$$C(\_) : \underline{\mathbf{Comp}} \longrightarrow \underline{\mathbf{AlgC^*_{conm,1}}}$$

$$X \in Ob(\underline{\mathbf{Comp}}) \longmapsto C(X) \in \mathrm{Ob}(\underline{\mathbf{AlgC^*_{conm,1}}})$$

$$f : X \to Y \in Ar(\underline{\mathbf{Comp}}) \longmapsto C(f) : C(Y) \to C(X) \in Ar(\underline{\mathbf{AlgC^*_{conm,1}}})$$

$$C(f) : g \longmapsto g \circ f$$

¿ Cómo se ven los puntos topológicos en el contexto algebraico? Tomemos un objeto $X \in Ob(\underline{\mathbf{Comp}})$ y un elemento categórico en él, $1 \xrightarrow{x} X$, lo cual corresponde a un punto topológico. Por la contravarianza del funtor $C(\_)$, esta flecha en la categoría $\underline{\mathbf{AlgC^*_{conm,1}}}$ se transforma a $C(X) \xrightarrow{C(x)} C(1)$. El objeto $C(1)$ es un objeto inicial de $\underline{\mathbf{AlgC^*_{conm,1}}}$, más aún, como el objeto terminal de $\underline{\mathbf{Comp}}$ es un espacio unitario entonces $C(1) = \mathbb{C}$. El funtor manda al punto categórico del espacio topológico, los puntos topológicos, a una flecha $C(X) \xrightarrow{C(x)} \mathbb{C}$, un caracter del álgebra $C(X)$. Otra forma de ver lo que ya se había probado de “manera interna” ahora a través de los funtores, una “manera externa” de ver la correspondencia entre estos conceptos de punto. Una vez más se puede apreciar la armonía que hay entre la definición categórica de punto en los espacios topológicos, los teoremas de representación y las definiciones algebraicas de punto.

## 2.2. Física

Nuestro análisis del punto desde el enfoque de la física parte de la mecánica clásica. El enfoque de esta rama es el estudio de las leyes que describen el movimiento de los cuerpos que se encuentran bajo la influencia de fuerzas. Tomemos un sistema en el cual tenemos una cantidad finita, $n$, de grados de libertad. Un *estado* del sistema está determinado por sus coordenadas de posición y momento, $(\bar{p}, \bar{q}) \in \mathbb{R}^{2n}$ en un instante de tiempo. El conjunto de todos los posibles estados es el *espacio fase*, $\mathcal{F}$. El estado del sistema nos da información sobre la posible evolución del sistema, dada por el movimiento del punto $(\bar{p}, \bar{q})$ según las ecuaciones de Hamilton. Una manera más realista de entender a los estados es como *medidas de probabilidad* sobre el espacio fase, ya que no contamos con la información que nos dice con máxima precisión el estado de un sistema.

Un medida de probabilidad es una función

$$\rho : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

para la cual la probabilidad de encontrar puntos de la medida sobre todo el espacio fase es 1

$$\int_{\mathcal{F}} \rho(\bar{q}, \bar{p}) dqdp = 1$$

La medida de probabilidad de un subconjunto $E \subseteq \mathcal{F}$ está dada por

$$\rho(E) = \int_E \rho dqdp$$

Si tenemos dos estados $\rho_1, \rho_2$ entonces la combinación convexa de ellos es también un estado $\rho = a_1\rho_1 + a_2\rho_2$ donde $a_1 + a_2 = 1$ y $0 \leq a_1, a_2 \leq 1$. Un estado que es combinación convexa de otros estados se le llama *estado mixto*. Si un estado no puede ser escrito como una combinación convexa no trivial, entonces se le llama *estado puro*. Los estados puros en mecánica clásica son las funciones delta, concentradas en un punto, es decir hay un punto en el espacio fase en donde la medida es distinta de 0 y vale 0 en todos los demás puntos. En este contexto físico podemos pensar a los puntos como elementos en el espacio fase, los cuales se corresponden con los estados puros. Los puntos físicos son los estados que tienen la "máxima información epistémicamente posible".

Para hablar de puntos tenemos que decir en que espacio viven los puntos, puede ser clásico o cuántico. Un contexto generalizado de los sistemas físicos son las álgebras $C^*$ unitales conmutativas. El caso cuántico se debe a que el álgebra $C^*$ sea no conmutativa. La razón detrás de esto tiene sus orígenes en el *principio de incertidumbre*. El Teorema de Gelfand-Naimark nos dice que si el álgebra $C^*$ es conmutativa con unital, entonces es isomorfa a $C(X)$, donde $X$ es un espacio topológico Hausdorff compacto. El teorema de representación de Riesz-Kakutani nos dice que cualquier funcional lineal $\varphi : C(X) \to \mathbb{C}$ es de la forma

$$\varphi(f) = \int_X f(x)d\mu(x)$$

para una medida $\mu$, y si $\varphi$ es positivo, es decir, $\forall f \in C(X)(0 \leq \varphi(f \cdot f^*))$, entonces la medida es positiva. Esto nos sugiere que en las álgebras $C^*$ podemos pensar a los estados como funcionales lineales positivos y normalizados. De esta manera generalizamos la noción de *punto físico* al contexto de álgebras $C^*$. Lo que motiva la definición de estado en un álgebra $C^*$, $\mathcal{A}$, que es un funcional $\rho : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ tal que:

$\forall x, y \in \mathcal{A}, \lambda \in \mathbb{C}$

1. $\rho(\lambda x + y) = \lambda\rho(x) + \rho(y)$
2. $0 \leq \rho(xx^*)$
3. $\rho(1_{\mathcal{A}}) = 1$

A continuación estudiaremos la relación que hay entre los estados de un álgebra $C^*$ y sus representaciones. Primero daremos unas definiciones.

Una *-representación de $\mathcal{A}$ en un espacio de Hilbert $H$ es un *-homomorfismo $D : \mathcal{A} \to B(H)$, donde $B(H)$ es el conjunto de operadores acotados sobre $H$. En $B(H)$ tendremos como operaciones a la suma de operadores, la composición y el adjunto. Estaremos trabajando con álgebras unitales así que también pedimos que $D(1_{\mathcal{A}}) = Id$. Un vector $\psi \in H$ es cíclico si $\overline{\{D(a)\psi \mid a \in \mathcal{A}\}} = H$. Un subespacio $M \subseteq H$ es $D$-invariante si $D(a)(M) \subseteq M$ para toda $a \in \mathcal{A}$.

Dadas dos representaciones $D : \mathcal{A} \to B(H), D' : \mathcal{A} \to B(H')$ decimos que son unitariamente equivalentes si existe una transformación unitaria $U : H \to H$, $U^{-1} = U^*$, tal que para toda $a \in \mathcal{A}$

$$D(a) = U \circ D'(a) \circ U^*$$

esta relación es una relación de equivalencia.

La construcción de Gelfand-Naimark-Segal (GNS), asocia a cada estado $\rho$ una tripleta $(D_\rho, H_\rho, \psi_\rho)$ donde $D_\rho$ es una *-representación, $H_\rho$ un espacio de Hilbert y $\psi_\rho$ un vector cíclico. La representación es única salvo equivalencia unitaria y $\rho(x) = \langle \psi, D(x)\psi \rangle$, siendo $\langle\ ,\ \rangle$ el producto interior definido en el espacio de Hilbert $H_\rho$. La construcción se encuentra en el apéndice:

Cada representación cíclica $D : \mathcal{A} \to B(H)$ con vector cíclico $\psi$, $\| \psi \| = 1$, nos define un estado $\rho_D : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ como

$$\rho_D(x) = \langle \psi, D(x)\psi \rangle$$

Por la linearidad del producto interior en el argumento derecho y de la representación, es lineal. Es positivo ya que

$$\rho_D(x^*x) = \langle \psi, D(x^*x)\psi \rangle = \langle D(x)\psi, D(x)\psi \rangle = \| D(x)\psi \|^2 \geq 0$$

y normalizado porque $\rho_D(1_{\mathcal{A}}) = \| \psi \|^2 = 1$.

Hay una correspondencia entre estados y clases de equivalencia unitaria de representaciones cíclicas con vector cíclico de norma 1.

Nuestra definición de *punto físico* estaba dada como un *estado puro* de nuestra álgebra. ¿Qué cara tienen las representaciones asociadas a un estado puro? Son irreducibles.

Una representación $D : \mathcal{A} \to B(H)$ es irreducible si los únicos subespacios cerrados D-invariantes son $\{0\}$ y $H$. A continuación daremos las ideas para la prueba de esta correspondencia.

Tomemos un subespacio cerrado $M \leq H$ del espacio de Hilbert. Como $H = M \oplus M^\perp$ podemos asociarle un proyector ortogonal $P$, tal que, $P = P^2 = P^*$ $Ker(P) = M^\perp, P\mid_M = Id$. Si $M$ es $D$-invariante y tomamos un vector $\psi \in H$, entonces $P\psi \in M$ y por la $D$-invarianza de $M$, $D(x)P\psi \in M$, para cualquier $x \in \mathcal{A}$. $\therefore PD(x)P\psi = D(x)P\psi$ para cualquier $\psi \in H, x \in \mathcal{A}$. Por lo tanto,

$$D(x)P = PD(x)P$$

Como $(ab)^* = b^*a^*$, $P = P^*$ y $D(x)^* = D(x^*)$ entonces $PD(x^*) = PD(x^*)P$. Esto pasa para cualquier $x \in \mathcal{A}$, en particular para $x^*$, lo que nos dice que,

$$PD(x) = PD(x)P = D(x)P$$

$P$ conmuta con todos los operadores en la imagen de $D$.

Ahora tomemos un proyector $P$ que conmuta con todos los operadores y un vector $\xi \in M$. Entonces

$$P\xi = \xi \ \text{ y } \ PD(x)\xi = D(x)P\xi = D(x)\xi$$

esto pasa si $D(x)\xi \in M$ para todo $x \in \mathcal{A}$ i.e. $D$ es $M$-invariante.

Lo que nos da una manera de saber si una representación es $M$-invariante a partir del proyector $P_M$ asociado al subespacio cerrado $M$.

$$D \text{ es } M\text{-invariante} \iff \forall x \in \mathcal{A}(P_M D(x) = D(x)P_M)$$

Por lo que una representación es irreducible si y sólo si el único proyector que conmuta con todos los operadores en la imagen de $D$ es la Identidad y el que manda todos al 0.

Otra equivalencia que nos va a servir es que una representación $D$ es irreducible si y sólo si los únicos operadores acotados que conmutan con todos los $D(x)$ son de la forma $\lambda Id$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Debido a que los estados son funcionales positivos, $0 \leq \rho(x^*x)$ para todo $x \in \mathcal{A}$, podemos equipar al conjunto de estados del algebra, $S(\mathcal{A})$, con un orden parcial. Si $p$ y $q$ son estados, decimos que

$$p \textit{ domina a } q, q \leq p, \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \forall x \in \mathcal{A}(q(x^*x) \leq t \cdot p(x^*x))$$

Sabemos que dada una *-representación cíclica, con vector cíclico $\psi$, $\rho(x) = \langle \psi, D(x)\psi \rangle$ es un estado. Cualquier estado $q$ dominado por $\rho$ va a cumplir que existe un único operador $T$ tal que para cualquier $\varphi \in H$ $\langle \varphi, T\varphi \rangle \geq 0$ (es positivo), $\| T\psi \| = 1$, $q(x) = \langle \psi, TD(x)T\psi \rangle$ y $T$ conmuta con cada $D(x)$. Cualquier operador $T$ positivo que conmute con todos los $D(x)$ y $\| T\psi \| = 1$ nos define un estado $q(x) = \langle \psi, TD(x)T\psi \rangle$ dominado por $\rho$.

Al estar en un orden parcial vamos a tener estados $\rho$ que se comportan como átomos, $\forall q \in S(\mathcal{A})(q \leq \rho \Rightarrow q = \rho)$. Veamos que los átomos de $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ son los puntos extremales, lo que justifica llamarlos estados puros.

$\mathcal{S}(\mathcal{A})$, es un conjunto convexo. Sea el estado $\rho$ un átomo del orden parcial y supongamos que existen dos estados $q_1, q_2$ y un $t \in (0, 1)$ tal que $\rho = tq_1 + (1 - t)q_2$. Despejando a $q_1$ obtenemos

$$q_1(x^*x) = (1/t)\rho(x^*x) + (t - 1)q_2(x^*x) \leq (1/t)\rho(x^*x)$$

ya que $(t - 1)q_2(x^*x) \leq 0$ entonces $q_1 \leq \rho$ y como $\rho$ es un átomo entonces $q_1 = \rho$. Podemos repetir el procedimiento con $q_2$. Entonces $\rho$ no puede ser visto como una combinación convexa no trivial de otros estados, $\rho$ es un punto extremal de $\mathcal{S}(\mathcal{A})$.

Ahora supongamos que $\rho$ no es un átomo, existe un estado $q$ dominado por $\rho$. Por lo tanto existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in \mathcal{A}(q(x^*x) \leq t\rho(x^*x))$. Despejando obtenemos $1/tq(x^*x) \leq \rho(x^*x)$. Sea $\eta(x) = \rho(x) - 1/tq(x)$, es lineal y positiva. Como $\eta(1_{\mathcal{A}}) = 1 - 1/t$ y $1_{\mathcal{A}}$ es positivo y $1/t \in (0, 1)$ entonces $0 < 1 - 1/t$. Sea $\alpha(x) = \eta(x)/(1 - 1/t)$. $\alpha$ es un estado y $\rho(x) = (1 - 1/t)\alpha(x) + 1/tq(x)$, por lo tanto $\rho$ no es un punto extremal de $\mathcal{S}(\mathcal{A})$.

$$\text{átomo} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{punto extremal}$$

Esta equivalencia conecta la estructura de orden con la estructura geométrica de $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ y nos permite llamarle estado puro a los átomos y a los puntos extremales.

Tomemos un estado puro $\rho$ y su tripleta $(D_\rho, \psi_\rho, H_\rho)$ asociada por la construcción GNS. Si $P$ es un proyector que actúa sobre $H_\rho$ y conmuta con $D_\rho(x)$ para cualquier $x \in \mathcal{A}$ entonces la imagen de $P$ es $D_\rho$-invariante. Si $T = (1/ \| P\psi_\rho \|)P$ entonces $\| T\psi_\rho \| = 1$, $0 \leq T$ y es un operador lineal. Podemos construir un estado $q(x) = \langle \psi_\rho, TD_\rho(x)\psi_\rho \rangle$ dominado por $\rho$ pero $\rho$ es puro entonces $q(x) = \rho(x)$ lo que significa que $P = Id$. Así que el único subespacio invariante no trivial es el total, i.e. $D_\rho$ es irreducible.

Sea $D_\rho$ irreducible. Si $q \leq \rho$ entonces existe $T$ un operador que conmuta con todos los $D_\rho(x)$, esto significa que $T = \lambda Id$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$. Como $\| T\psi_\rho \| = 1$ entonces $| \lambda | = 1$ y como $T$ es positivo entonces $\lambda = 1$, por lo tanto $q = \rho$ i.e. $\rho$ es un estado puro.

Juntando estas dos pruebas obtenemos que:

$$\rho \text{ es estado puro} \iff D_\rho \text{ es irreducible}$$

Una equivalencia de la definición de punto motivada por la física.

Conectemos las nuevas definiciones de punto con las anteriores. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C* unital y conmutativa. Habíamos denotado a $\hat{\mathcal{A}}$ como los caracteres del álgebra. Todo caracter, $\kappa$, es un funcional lineal, normalizado, y gracias a que es multiplicativo y respeta la operación * es positivo. Lo que quiere decir que todo caracter es un estado.

$$\hat{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{S}(\mathcal{A})$$

De hecho se cumple que los caracteres van a ser precisamente los estados puros, de nuevo la prueba se encuentra en el Apéndice.

Tenemos varias definiciones equivalentes de punto en el contexto de las álgebras $C^*$ conmutativas unitales: caracteres, ideales maximales, estados puros, clases de equivalencia unitaria de representaciones irreducibles y puntos del espacio topológico asociado al álgebra. En el caso cuántico no se van a respetar estas equivalencias, de hecho, si nuestra álgebra es un espacio de operadores de un espacio de Hilbert de dimensión mayor o igual a 2 entonces no va a haber caracteres, pero puede haber estados puros o ideales maximales (los cuales no pueden ser bilaterales). En estos casos ocurre un fenómeno que llamaremos "difracción cuántica del punto". En éstas álgebras la definición de punto que tomemos nos mostrará una imagen y distintas definiciones nos pueden dar distintas imágenes. Observaremos éste fenómeno en unas álgebras no conmutativas muy interesantes: La Esfera Cuántica ($M_2(\mathbb{C})$), el Plano Hiperbólico Cuántico (álgebra de Toeplitz ) y el Toro Cuántico (álgebra de rotación).

## 2.3. Ejemplos

### 2.3.1. Esfera Cuántica

La queridísima álgebra de matrices de 2x2 con entradas complejas, $M_2(\mathbb{C})$. Un álgebra $C^*$ en donde definimos a la norma de una matriz como

$$\| A \| = sup\{\| Ax \| | \, x \in \mathbb{C}^2, \| x \| = 1\}$$

Es unital, la unidad está dada por la matriz identidad $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y, muy importante, es no conmutativa.

El centro de ésta álgebra es

$$Z(M_2(\mathbb{C})) = \{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$$

¿Por qué le llamamos esfera? Felix Klein nos dice que podemos caracterizar a las geometrías a partir de su grupo de simetrías, que vienen siendo los automorfismos del álgebra. Hay un subgrupo de simetrías que son exclusivas del comportamiento cuántico de un álgebra, las simetrías internas, que son los automorfismos definidos a partir de la conjugación por un elemento del álgebra, si $a \in \mathcal{A}$ entonces $x \mapsto axa^{-1}$ es un automorfismo interno. Si el álgebra es conmutativa entonces el único automorfismo interno es la identidad. Esto justifica que le llamemos simetrías cuánticas a este grupo. En $M_2(\mathbb{C})$, todos los automorfismos son internos. Si denotamos a $\mathbb{C}^* = \{\lambda I \mid \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}\}$ y al grupo de Mobius como $M(2) = \{f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0\}$ entonces:

$$Aut(M_2(\mathbb{C})) \cong GL(2, \mathbb{C})/\mathbb{C}^* \cong SL(2, \mathbb{C})/\{I, -I\} \cong M(2)$$

Los automorfismos son los mismos que los de la esfera de Riemann. Estos automorfismos no preservan necesariamente la estructura *, si pedimos que lo hagan, $f(a^*) = f(a)^*$, entonces obtenemos al subgrupo de simetrías que denotaremos como $Aut^*(M_2(\mathbb{C}))$. La condición de que preserve la estructura interna obliga al elemento por el cual estamos conjugando a ser unitario, ya que

$$f_a(x^*) = f_a(x)^* \Leftrightarrow ax^*a^{-1} = (axa^{-1})^* = (a^{-1})^*x^*a^*$$

$$\Leftrightarrow a^*ab^* = b^*a^*a$$

Esto nos dice que $a^*a \in Z(M_2(\mathbb{C}))$, el centro del álgebra, por lo tanto

$$a^*a = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \ \text{ y } \ a^* = \lambda a^{-1} \text{ donde } \lambda \geq 0$$

Como $f_a = f_{\mu a}$ para cualquier $\mu \in \mathbb{C}^*$, si definimos a $c = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}a$ tenemos que

$$c^* = a^{-1} \ , \ c^*c = \frac{1}{\lambda}a^*a = \frac{1}{\lambda}\lambda a^{-1}a = 1$$

por lo tanto $f_a = f_c$ donde $c^* = c^{-1}$, es unitario.

Tenemos los siguientes isomorfismos:

$$Aut^*(\mathbb{C}) \cong U(2)/U(1) \cong SU(2)/\{I, -I\} \cong SO(3)$$

los *-automorfismos son las simetrías de la 2-esfera.
Una de las razones por la cual le llamamos a esta álgebra la Esfera Cuántica.
Una base de esta álgebra son las matrices de Pauli junto con la identidad

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

Estas matrices cumplen que:

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = I$$

$$\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3$$

$$\sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1$$

$$\sigma_3\sigma_1 = -\sigma_1\sigma_3 = i\sigma_2$$

Lo que tiene como consecuencia que el álgebra no tiene caracteres, ya que si $\kappa$ es un caracter entonces

$$\kappa(\sigma_j)^2 = \kappa(\sigma_j^2) = 1 \Leftrightarrow \kappa(\sigma_j) = 1 \ \forall j \in \{1, 2, 3\}$$

$$\kappa(\sigma_3) = \kappa(\sigma_1\sigma_2) = -\kappa(\sigma_2\sigma_1) = -\kappa(\sigma_2)\kappa(\sigma_1) = -\kappa(\sigma_1)\kappa(\sigma_2) = -\kappa(\sigma_3)$$

$$\therefore \kappa(\sigma_3) = -\kappa(\sigma_3) \Leftrightarrow \kappa(\sigma_3) = 0$$

Tenemos la contradicción $1 = \kappa(\sigma_i) = 0$, por lo tanto no hay caracteres. El espacio geométrico asociado al álgebra no tiene puntos bajo la definición de punto como caracter.

Podemos definir un producto escalar en el álgebra con la traza como,

$$(a, b) \mapsto tr(a^* b)$$

Por el teorema de Riesz, para cada funcional del álgebra, en particular para cualquier estado $\rho : M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, existe una única matriz, $\hat{\rho}$, tal que

$$\rho(x) = tr(\hat{\rho}x)$$

De ahora en adelante utilizaré la notación de Dirac. En esta notación la forma de esta matriz es,

$$\hat{\rho} = \Sigma_{i,j}\rho(\mid j \,\rangle\langle\, i \mid) \mid i \,\rangle\langle\, j \mid$$

con $\mid i \,\rangle, \mid j \,\rangle$ elementos de una base ortonormal.
Para ver que el teorema de Riesz si asocia a cada estado una matriz de densidad, tomemos $z = \Sigma_i z_i \mid i \,\rangle \in M_2(\mathbb{C})$, entonces

$$\langle z, \hat{\rho}z\rangle = \langle z, \Sigma_{i,j}\rho(\mid i \,\rangle\langle\, j \mid) \mid j \,\rangle\langle\, i \mid z\rangle = \Sigma_{i,j}\rho(\mid i \,\rangle\langle\, j \mid)\langle z, j\rangle\langle i, z\rangle =$$

$$= \Sigma_{i,j}\rho(\mid i \,\rangle\langle\, j \mid)\overline{z_j}z_i = \rho(\mid z \,\rangle\langle\, z \mid) \geq 0$$

y como $\rho(1) = 1$ entonces $tr(\hat{\rho}^* 1) = tr(\hat{\rho}) = 1$. Lo que nos dá una inyección de los estados en los operadores de densidad. La biyección la podemos ver observando que dado una matriz de densidad, $\hat{\rho}$, podemos definir a un estado con el mapeo $x \mapsto tr(\hat{\rho}x)$. Lo que nos da la biyección entre ellos. Esta biyección es afín, va a mandar a los estados puros en operadores de densidad extremales, que resultarán ser proyectores 1-dimensionales de la forma $\mid \phi \,\rangle\langle\, \phi \mid$ con $\parallel \phi \parallel = 1$.

Para probar que así se ven los puntos extremales del conjunto de operadores de densidad, recordemos que si tenemos una base ortonormal de un espacio de Hilbert, $\{v_i\}_{i\in I}$ el conjunto de diadas $\{\mid v_i\rangle\langle v_j \mid\}_{i,j\in I}$ es una base de $B(H)$. Tomemos una matriz de densidad $\hat{\rho}$, como es autoadjunta entonces hay una base ortonormal de vectores propios de la matriz, denotemoslos $\mid \phi \rangle, \mid \psi \rangle$. Entonces la matriz de densidad puede ser escrita como $\hat{\rho} = \lambda_1 \mid \phi \rangle\langle \phi \mid + \lambda_2 \mid \psi \rangle\langle \psi \mid$. Como su traza es 1 entonces $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ y por ser positiva $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$. Esto nos dice que puede ser visto como una combinación convexa de proyectores 1-dimensionales, y como la transformación entre estados y operadores de densidad es afín entonces si el estado asociado es puro, eso quiere decir que un valor propio es 1 y el otro 0. Por lo tanto

$$\hat{\rho} = \mid \phi \rangle\langle \phi \mid$$

con $\parallel \phi \parallel = 1$.

Si tomamos una diada $\mid \phi \rangle\langle \phi \mid$ con $\parallel \phi \parallel = 1$, como ya vimos que es parte de una base de $M_2(\mathbb{C})$ entonces no podemos escribirla como combinación convexa de otros operadores de densidad, ya que estos operadores son combinaciones lineales de los elementos de la base y por la independencia lineal eso significa que los coeficientes de los otros elementos son 0, lo que nos dice que los operadores de la forma $\mid \phi \rangle\langle \phi \mid$ son puntos extremales, así que sus estados asociados son estados puros. Esto nos dice que los estados puros están en correspondencia con proyectores 1-dimensionales.

Toda matriz autoadjunta, de traza 1 puede ser vista de la siguiente manera

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix}$$

con $x, y, z \in \mathbb{R}$. Si la matriz es una matriz de densidad, entonces sus valores propios son positivos, por lo que el determinante también va a ser positivo. Como vimos que si tiene asociado un estado puro entonces la matriz, $\hat{\rho}$ , es de la forma $\mid \phi \rangle\langle \phi \mid$ con $\parallel \phi \parallel = 1$, lo que nos dice que $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$ y $1 = tr(\hat{\rho}) = tr(\hat{\rho}^2)$ por lo tanto

$$1 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (1+z)^2 + x^2 + y^2 & * \\ * & x^2 + y^2 + (1-z)^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1 + x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Esto nos dice que si entendemos a los puntos como estados puros entonces en esta álgebra son parametrizados por la 2-esfera.

Otro resultado que se relaciona con nuestros propósitos, es que esta álgebra es simple, no tiene ideales propios no triviales, lo que nos dice que bajo esa interpretación de punto, tampoco los hay. En conclusión tenemos que no hay puntos como caracteres o como ideales maximales (no triviales), como estados puros se encuentran parametrizados por la 2-esfera, y las simetrías que no preservan la estructura * están dadas por el grupo de Mobius, que son las simetrías de la esfera de Riemann, y las que si preservan la estructura * son las de la 2-esfera y todas son internas, es decir, cuánticas!

### 2.3.2. Plano Hiperbólico Cuántico

Sea $\ell^2(\mathbb{N})$ el espacio que tiene como elementos sucesiones $(\eta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tales que $\Sigma_{i=0}^{\infty} \mid \eta_i \mid^2 < \infty$, y consideremos el operador "shift" $S$ en $\ell^2$ definido como:

$$S(\eta_1, \eta_2, ...) = (0, \eta_1, \eta_2, ...)$$

Si denotamos a la base canónica ortonormal como $\{\mid n\rangle : n \in \mathbb{N}\}$ en donde $\mid n\rangle$ es la sucesión que tiene 1 en la n-ésima entrada y 0 en las demás, entonces

$$S \mid n\rangle = \mid n+1\rangle$$

$$S^* \mid n\rangle = \mid n-1\rangle$$

$$S^* \mid 0\rangle = 0$$

donde $\mid 0\rangle$ es el vector que tiene 1 en la primera coordenada y 0 en las demás. El operador S es isométrico, $S^*S = I$, pero no es unitario ya que $SS^* \neq I$, de hecho $SS^* = I - \mid 0\rangle\langle 0 \mid$ donde $\mid 0\rangle\langle 0 \mid$ es el proyector sobre la primera entrada. Gracias a esto, en el álgebra $C^*$ generada por $S$, $C^*(s)$, vamos a tener a los operadores que proyectan sobre la entrada $n$ y la trasladan a la entrada $m$ como

$$\mid m\rangle\langle n \mid = S^m(1 - SS^*)S^{*n}$$

Esto implica que el espacio de matrices infinitas con un número finito de entradas distintas de 0, $M_\infty(\mathbb{C})$, va a estar contenido en $C^*(S)$ ya que cualquier matriz de esta forma puede ser vista como combinación lineal de los operadores $\mid m\rangle\langle n \mid$. La cerradura de $M_\infty(\mathbb{C})$ es $\mathcal{K}(\ell^2)$, el espacio de operadores compactos de $\ell^2$. Esto mas el hecho de que $C^*(S)/\mathcal{K}(\mathbb{C}) \cong C(\mathcal{S}^1)$ ($\mathcal{S}^1$ es el círculo unitario) nos da la siguiente sucesión corta exacta conocida como la extensión de Toeplitz de $C(\mathcal{S}^1)$

$$0 \to \mathcal{K}(\ell^2) \to C^*(S) \to C(\mathcal{S}^1) \to 0$$

Una de las razones por las que llamamos a esta álgebra Plano Hiperbólico Cuántico es porque nos gusta ponerle cuántico a las álgebras no conmutativas, y también porque bajo la misma filosofía del ejemplo anterior y del siguiente, las simetrías de esta álgebra tiene como subgrupo al cociente de las simetrás del modelo del disco de Poincaré, $SU(1,1) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} :\mid a \mid - \mid b \mid= 1\}$ módulo $\{I, -I\}$

$$SU(1,1)/\{I,-I\} \hookrightarrow Aut(C^*(S))$$

En la filosofía de la mecánica cuántica, los vectores propios representan estados del sistema. Veamos cuales son los vectores propios en esta álgebra. $S$ no tiene vectores propios. Si lo hubiera, digamos que $\mid \phi\rangle = \Sigma_{n\geq 0} a_n \mid n\rangle$ es uno, i.e., $S \mid \phi\rangle = \lambda \mid \phi\rangle$, y como

$$S \mid \phi\rangle = S(\Sigma_{n\geq 0} a_n \mid n\rangle) = \Sigma_{n\geq 0} a_n S \mid n\rangle = \Sigma_{n\geq 0} a_n \mid n+1\rangle$$

tenemos que

$$\lambda \mid \phi\rangle = \Sigma_{n\geq 0} a_n \mid n+1\rangle = \Sigma_{n\geq 0} a_{n-1} \mid n\rangle$$

Lo que nos dice que $\lambda a_n = a_{n-1}$. Esto implica que todos los coeficientes son 0, por lo tanto no hay vectores propios.
En cambio $S^*$ si tiene. Supongamos que $\mid \phi\rangle$ es uno de ellos y está normalizado y veamos que forma tiene.

$$S^* \mid \phi\rangle = S^*(\Sigma_{n\geq 0} a_n \mid n\rangle) = \Sigma_{n\geq 0} a_n S^* \mid n\rangle = \Sigma_{n\geq 0} a_n \mid n-1\rangle$$

$$\Rightarrow \lambda \mid \phi\rangle = \Sigma_{n\geq 0} a_{n+1} \mid n\rangle$$

$$\Rightarrow \lambda a_n = a_{n+1} \Rightarrow a_n = \lambda^n a_0$$

$$\Rightarrow \mid \phi\rangle = \Sigma_{n\geq 0} \lambda^n a_0 \mid n\rangle$$

Supusimos que $\parallel \phi \parallel = 1$, esto quiere decir que

$$1 = \Sigma_{n\geq 0} \mid a_0 \mid^2 \mid \lambda \mid^{2n} = \mid a_0 \mid (\Sigma_{n\geq 0}(\mid \lambda \mid^2)^n)$$

lo que nos arroja una bien conocida y querida serie geométrica, la cual sabemos que es convergente si y solamente si $\mid \lambda \mid^2 < 1$.

$$\Rightarrow \mid a_0 \mid = (1- \mid \lambda \mid^2)^{1/2}$$

Esto nos dice que para cualquier punto dentro del círculo unitario, tenemos asociado un vector propio de $S^*$ que lo tiene como valor propio. Si $z \in \mathbb{C}(\mid z \mid = 1)$ entonces llamemos $\mid \phi_z\rangle$ a su vector propio asociado.

$$\mid \phi_z\rangle = (1- \mid z \mid^2)^{1/2} \Sigma_{n\geq 0} z^n \mid n\rangle$$

Otra razón por la cual llamamos a esta álgebra Plano Hiperbólico Cuántico, se debe a una bella relación entre una propiedad física y una matemática. En Mecánica Cuántica tenemos que la probabilidad de transición de un estado $\mid \phi\rangle$ a otro $\mid \psi\rangle$ está dada por $\mid \langle\phi \mid \psi\rangle \mid^2$. Algo interesante en este universo sucede cuando observamos la probabilidad de no transición entre dos estados de $S^*$. Sean $z, w \in \mathbb{C}$ tal que $\parallel z \parallel = \parallel w \parallel = 1$ y sus estados asociados $\mid \phi_z\rangle, \mid \phi_w\rangle$. Entonces la probabilidad de no transición está dada por

$$1 - \mid \langle\phi_z \mid \phi_w\rangle \mid^2 = \frac{\mid w - z \mid^2}{\mid 1 - \overline{z}w \mid^2}$$

Si ahora tomamos el límite $w \to z$ obtenemos

$$\frac{dz\overline{dz}}{(1 - \mid z \mid^2)^2}$$

la métrica hiperbólica!

En este ejemplo vemos que si hay puntos como caracteres, y son precisamente el círculo unitario, contrario a lo que pasaba en el caso clásico del modelo de Poincaré en donde la frontera del disco representaba el horizonte. Y los puntos como estados, "puntos estocásticos" siguiendo la filosofía de Edward Prugovecki, van a estar parametrizados por el interior del disco unitario. Una difracción cuántica muy bonita.

### 2.3.3. Toro Cuántico

Definimos al álgebra de rotación $\mathcal{A}_\theta$ de la siguiente manera: tomamos el anillo de polinomios,$\mathcal{P}_4$, de 4 variables no conmutativas $U, U^*, V, V^*$ con unidad, 1. Luego, consideramos el ideal $\mathcal{I}$ generado por $\{U^*U - 1, UU^* - 1, V^*V - 1.VV^* - 1, VU - e^{2\pi i\theta}UV\}$. Tomamos el cociente $\mathcal{A}_\theta/\mathcal{I} = \mathcal{A}_\theta^0$. Esta álgebra tiene estructura * y cada elemento $x \in \mathcal{A}_\theta^0$ puede ser visto como una suma finita $x = \Sigma_{n,m\in\mathbb{Z}}\lambda_{nm}U^nV^m$. Ahora definimos una norma a partir de las representaciones del álgebra:

$$\| x \| := sup\{\| Dx \| | D \text{ es una representación de } \mathcal{A}_\theta^0\}$$

Ya tenemos todos los ingredientes para definir el álgebra de nuestro interés, $\mathcal{A}_\theta = \overline{\mathcal{A}_\theta^0}$, donde la cerradura la tomamos sobre la norma que acabamos de definir.

$\mathcal{A}_\theta$ es un álgebra $C^*$. Si $\theta = 0, 1$ entonces $\mathcal{A}_\theta \cong C(\mathbb{T}^2)$, donde $\mathbb{T}^2$ es el toro clásico. En este caso podemos observar que el álgebra es conmutativa. Una de las primeras razones por la cual llamamos a esta álgebra Toro Cuántico.

Otra razón es que podemos definir una acción del Toro Clásico sobre el álgebra, $\mathbb{T}^2 \times \mathcal{A}_\theta \to \mathcal{A}_\theta$, que nos va a permitir ver al Toro Clásico como una subgrupo de los automorfismos de $\mathcal{A}_\theta$. Sea $(\alpha, \beta) \in \mathbb{T}^2 = U(1) \times U(1)$, definimos $T_{\alpha,\beta}$ a partir de su comportamiento sobre los generadores, entonces $T_{\alpha.\beta}(U) = \alpha U$ y $T_{\alpha,\beta}(V) = \beta V$. Estas transformaciones forman un grupo ya que $T_{\alpha,\beta} \circ T_{\gamma,\delta} = T_{\alpha\gamma,\beta\delta}$, $I = T_{1,1}$ y $T_{\alpha,\beta}^{-1} = T_{\overline{\alpha},\overline{\beta}}$, y son *-automorfismos, lo que nos da un morfismo de grupos $T : \mathbb{T}^2 \to Aut(\mathcal{A}_\theta)$, $(\alpha, \beta) \mapsto T_{\alpha,\beta}$. Los automorfismos internos $f_U(a) = UaU^*$ y $f_V(a) = VaV^*$ podemos verlos como $T_{1,\overline{z}}, T_{z,1}$ respectivamente, donde $z = e^{2\pi i\theta}$. Gracias a esto tenemos que si $(\alpha, \beta) \in \{(e^{2\pi in\theta, e^{2\pi im\theta}|n,m\in\mathbb{Z}})\}$ entonces $T_{\alpha,\beta}$ es un automorfismo interno. Cuando $\theta$ es irracional el conjunto de estas parejas es denso en $\mathbb{T}^2$.

Cuando $| n | + | m | \neq 0$ tenemos que

$$\int\int_{\mathbb{T}^2} T_{\alpha,\beta}(U^nV^m)\frac{d\alpha}{2\pi}\frac{d\beta}{2\pi} = 0$$

Entonces si $x = \Sigma_{n,m\in\mathbb{Z}}\lambda_{nm}U^nV^m$ tenemos que

$$\int\int_{\mathbb{T}^2} T_{\alpha,\beta}(x)\frac{d\alpha}{2\pi}\frac{d\beta}{2\pi} = \lambda_{00}\cdot 1$$

Ahora supongamos que $\theta$ es irracional, y que $\mathcal{I} \triangleleft \mathcal{A}_\theta$ es un ideal no trivial. Sea $x \in \mathcal{I} - \{0\}$ y consideremos el conjunto $M_x = \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{T}^2 \mid T_{\alpha,\beta}(x^*x) \in \mathcal{I}\}$. Si $\alpha = e^{2\pi in\theta}$ y $\beta = e^{2\pi im\theta}$ entonces $T_{\alpha,\beta}$ es un automorfismo interno, lo que quiere decir que para estos automorfismos $T_{\alpha,\beta}(x^*x) \in \mathcal{I}$. Al ser $\theta$ irracional, tenemos que $M_x$ es denso en $\mathbb{T}^2$ y como $\mathcal{I}$ es cerrado entonces tenemos que $M_x = \mathbb{T}^2$. La integral es un límite de sumas finitas y el ideal es un espacio vectorial, esto implica que:

$$\int\int_{\mathbb{T}^2} T_{\alpha,\beta}(x^*x)\frac{d\alpha}{2\pi}\frac{d\beta}{2\pi} \in \mathcal{I}$$

Si $x^*x = \Sigma_{n,m\in\mathbb{Z}}\mu_{nm}U^nV^m$ entonces

$$\mu_{00}\cdot 1 \in \mathcal{I}$$

lo que significa que tenemos un escalar en el ideal, por lo tanto $\mathcal{I} = \mathcal{A}_\theta$. En otras palabras, si $\theta$ es irracional, entonces $\mathcal{A}_\theta$ es un álgebra simple.

Un resultado de la teoría de álgebras $C^*$ es que si $\mathcal{A}$ es un álgebra $C^*$ con unidad, entonces su conjunto de estados es no vacío. El conjunto de estados es convexo y compacto en la topología *-débil, y por el teorema de Krein-Milman tenemos que va a ser la cerradura convexa de sus puntos extremales. Por la construcción GNS tenemos que los puntos extremales están asociados con representaciones irreducibles, así que al haber estados puros tenemos representaciones irreducibles del álgebra. El toro cuántico es un álgebra $C^*$ unital, por lo que tenemos una representación irreducible, sea $D : \mathcal{A}_\theta \to B(H)$ una de ellas. Al ser $\theta$ racional tenemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $z^n = 1$, esto quiere decir que para cualquier $k, l \in \mathbb{Z}$

$$D(U)^{kn}D(V)^{ln} \in \{a \in B(H) \mid \forall b \in Im(D)(ab = ba)\} = \{\lambda\cdot 1 \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$$

Entonces estos operadores son linealmente dependientes en $B(H)$, lo que implica que en $D(\mathcal{A}_\theta)$ hay a lo más $n^2$ operadores linealmente independientes, en otras palabras, $D(\mathcal{A}_\theta)$ es de dimensión finita. Al ser un espacio de dimensión finita sobre un campo algebraicamente cerrado, tenemos que todo operador tiene vector propio. Sea $\phi$ un vector propio de $D(V)$ con valor propio $\lambda$, como la representación respeta la propiedad $VU = zUV$ tenemos que

$$D(V)D(U)\phi = zD(U)D(V)\phi = z\lambda D(U)\phi$$

$$\Rightarrow D(V)D(U)^2\phi = z^2D(U)^2D(V)\phi = z^2\lambda D(U)^2\phi$$

Por lo que $D(U)\phi, D(U)^2\phi$ son vectores propios de $V$ con valores propios $z\lambda, z^2\lambda$ respectivamente. Nos interesa el caso $z \neq 1$ así que estos valores propios son distintos, lo que nos dice que $D(U), D(U)^2$ son linealmente independientes.

$$\therefore 2 \leq dimD(\mathcal{A}_\theta) \leq n^2$$

El núcleo de la representación, $Ker(D)$, es un ideal de $\mathcal{A}_\theta$, y como $\mathcal{A}_\theta$ es de dimensión finita y por el primer teorema de isomorfismo tenemos que $\mathcal{A}_\theta/Ker(D) \cong D(\mathcal{A}_\theta)$, lo que implica que

$$2 \leq dim\mathcal{A}_\theta - dimKer(D) \leq n^2$$

$$\therefore \{0\} \neq Ker(D) \neq \mathcal{A}_\theta$$

Hemos encontrado un ideal propio en el caso racional, lo que nos dice que

$$\mathcal{A}_\theta \text{ es simple} \Leftrightarrow \theta \text{ es irracional}$$

Concluyendo con este bello ejemplo, hemos obtenido que sólo hay caracteres cuando el álgebra es conmutativa, es decir $\theta = 0, 1$, y son precisamente los puntos del toro clásico. Si no es conmutativa no tenemos caracteres, y tendremos que no hay puntos como ideales solamente cuando $\theta$ es irracional.

# Capítulo 3

# Conclusión

Hemos visto varias formas de ver matemáticamente al concepto de punto. Dimos definiciones del punto dentro de diferentes teorías: Conjuntos, Topología, Categorías, Álgebras $C^*$, Lógica, Física, y luego las unimos mediante ciertas dualidades muy especiales: la de Stone y la de Gelfand. En este trayecto nos dimos cuenta que podemos ver que el punto es algo que depende fuertemente de su entorno. Para hablar de punto primero tenemos que responder a la pregunta ¿En dónde está el punto?. Ya vimos que en el caso clásico (conmutativo), hay varias definiciones de punto que coinciden: punto topológico, caracter, ideal maximal, categórico, representaciones irreducibles, estados puros... pero al irnos a un entorno cuántico (no conmutativo), perdemos la equivalencia entre estas definiciones y ahora hay que tener saber bajo que definición de punto estamos observando a los puntos. Esto nos dice que, por lo menos en la investigación que se hizo en esta tesis, no hay una definición absoluta de punto. El punto es relativo, contextual. Vimos que en el caso topológico al ver al punto como un ultrafiltro como al cambiar la topología cambia la percepción del punto. En teoría de modelos puede ser el caso de que haya dos puntos distintos en un modelo pero iguales en otro. Nos encontramos ante la Contextualidad.

Es importante hacer énfasis en el papel que tienen las Dualidades que se utilizaron. Ellas nos permitieron ver cómo se traducen ciertas definiciones de punto dadas en una teoría a otra, de ver los puntos de una "a través del espejo". En el reflejo vimos nuevas maneras de percibir al punto. En el caso de la Dualidad de Stone, los puntos ategóricos de los espacios de Stone son puntos en el sentido topológico (y conjuntista) y en el espejo se veían como funciones de un álgebra de Boole al 2, y como toda álgebra de Boole se corresponde a un álgebra de Lindenbaum entonces se corresponden a modelos de un lenguaje proposicional, y también pueden ser vistos como ultrafiltros que pueden ser principales o no principales. El espejo nos permite ver de varias formas al mismo concepto, lo que permite tener un entendimiento más rico de dicho concepto. ¿ Será posible que si entendemos suficientemente bien como se dan estas traducciones de conceptos, entonces podamos encontrar nuevas dualidades? ¿ O las traducciones son posibles gracias a que tenemos a las dualidades? Las dualidades nos permiten ver ciertas teorías como universos en donde uno es el reflejo del otro. ¿ Qué es este espejo en el cual se reflejan? ¿ Hay alguna manera de verlo de manera general? ¿ Comparten algo las distintas dualidades? Estas son preguntas que me gustaría continuar explorando. Un primer paso para entender la estructura de la Dualidad es entendiendo cuales son las características que comparten las traducciones de punto entre estos dos universos.

Al agregar variación pudimos explorar los universos Booleano-valuados. Nuestro primer encuentro con un comportamiento estocástico de los puntos. Es muy interesante ver que esto se justifica viendo que los nuevos elementos Booleano-valuados se corresponden con mezclas Booleanas de los elementos estándar en el caso de los definibles. Y que si el modelo inicial cumple que todos sus elementos son definibles entonces la extensión gen'erica a través de un ultrafiltro contiene propiamente al modelo inicial si y solamente si el ultrafiltro genérico es no principal. Un movimiento hermoso, en donde partimos de un mundo donde hay certeza, donde los valores de verdad solamente son verdadero y falso, y nos vamos a la incertidumbre, una bastante bien portada, para luego regresar a la certeza y si lo hacemos a partir de estos ultrafiltros que no tienen fin, en donde podemos pensar al punto que representan como un tipo de baricentro del ultrafiltro, entonces si ese punto no se puede ver en el mundo, al regresar a un modelo 2-valuado lo vamos a tener, existirá aquella estrella que antes no veíamos directamente, que podíamos ver gracias a que había un conjunto de estrellas que la señalaban y en este viaje a través de la incertidumbre aprendimos y concretizamos su existencia. Esta variación puede verse como un cambio del clasificador de subobjetos del topos, de uno clásico y bivaluado a un álgebra de Boole y luego de regreso. Es interesante ver que efecto tiene el modificar el objeto que determina la lógica interna de la estructura, y cómo esa lógica determina nuestra perspectiva sobre los puntos. Una difracción clásica del punto

Después nos fuimos a explorar las ideas que nos presenta la teoría de la Geometría Cuántica, la cual nos permite ver aquello que es imperceptible de manera clásica. Una vez más, gracias al poder de las dualidades, en este caso la Dualidad de Gelfand, pudimos dar definiciones de punto en una dinámica análoga al caso de la dualidad de Stone, pero aquí pudimos ver más correspondencias con otros objetos algebraicos. Lo cuál nos permitió ver de varias maneras el punto y apreciar el fenómeno de difracción cuántica dado en 3 bellos ejemplos de esta teoría. Le encontramos sentido a poder estudiar espacios sin puntos, espacios vacíos (bajo una definición de punto), pero con una estructura bellísima, con simetrías cuánticas que justificaban sus respectivos nombres. Una vez más observamos como el punto, bajo la definición de estado puro y como consecuencia del principio de incertidumbre, adquiere un comportamiento estocástico. El espacio está construido de puntos, pero estos puntos ahora tienen una naturaleza fluctuante. Estas ideas están en resonancia con las ideas de Edward Prugovečki, que propone construir el espacio-tiempo en base a este comportamiento estocástico. La geometría regresa a sus orígenes físicos...

# Apéndice A

# Apéndice

**Teorema 1.** *Si* $M \vDash V = L$ *entonces* $M[U] \vDash V = L \iff U = U_a$ *para algún átomo* $a$

*Demostración.* Sea $U$ un ultrafiltro principal. Por definición existe un elemento $a \in B, a \neq 0$ que es un átomo y $U = U_a = \{b \in B \mid a \leq b\}$. Afirmación: $U_a$ es M-genérico. Si no lo es entonces existe $X \in \wp(B) \cap M$ tal que $\bigvee X \in U_a$ y para todo $x \in X(x^* \in U_a)$, porque $U_a$ es un ultrafiltro. Entonces tenemos que $a \leq x^*$ para todo $x \in X$, por lo tanto $a \leq \bigwedge_{x \in X}\{x^*\} = \bigwedge X^* = (\bigvee X)^*$, entonces $(\bigvee X)^* \in U_a$. $\bigvee X \in U_a$ entonces $a \leq \bigvee X, (\bigvee X)^*$ por lo tanto $a = 0$, lo que es una contradicción. Concluimos que existe $x \in X \cap U_a$, i.e. $U_a$ es $M$-genérico.

Debido a que $B \in M$ y $M$ es transitivo entonces $B \subseteq M$, lo que quiere decir que $a \in M$. $M$ es modelo de ZFC así que utilizando el Axioma de Separación se puede construir a $U_a = \{b \in B \mid a \leq b\}$ por lo tanto $U_a \in M$. Como $M[U_a]$ es el mínimo modelo que cumple $M \subseteq M[U]$ y $U_a \in M$ entonces $M = M[U_a]$.

Esto prueba que la extensión genérica de un modelo transitivo $M$ a través de un ultrafiltro principal es él mismo. Así que si al sacar la extensión genérica se obtiene un modelo distinto, con más elementos, es porque el ultrafiltro que se utilizó es no principal.

Si estamos trabajando en un modelo en donde se satisface $M \vDash V = L$ entonces se obtiene un modelo distinto si y sólo si el ultrafiltro por el cual se construye la extensión genérica es no principal. Primero veamos que $U_*$ es $M$-Genérico en $M^(B)$. Sea $X \in \wp^(M)(B)$ si $\bigvee X \in U_*$ eso quiere decir que $\| \bigvee X \in U_* \| = 1$, es decir

$$\bigvee_{b \in B} U_*(\hat{b}) \wedge \| \hat{b} = \bigvee X \| = 1$$

y como $\bigvee X \in B$ entonces $\| \hat{b} = \bigvee X \| \in \{0,1\}$, lo que quiere decir que

$$1 = U_*((\bigvee X)^{)} = \bigvee X$$

y esto quiere decir que

$$1 = \bigvee_{b \in B} U_*(\hat{b}) \wedge \| \hat{b} \in X \|$$

Lo que quiere decir que $\| U_* \cap X \neq \emptyset \| = 1$ y acabamos de probar que:

$$M^{(B)} \models \text{“}U_* \text{ es un ultrafiltro M-genérico”}$$

en particular

$$M^{(B)} \models \text{“}U_* \text{ es un ultrafiltro”}$$

Sea $\varphi(x) =$ “$x$ es un ultrafiltro”. Como

$$\| \varphi(y) \| \wedge \| x = y \| \leq \| \varphi(x) \|$$

entonces para cualquier $y \in M$,

$$\| U_* = \hat{y} \| \leq \| \varphi(\hat{y}) \| \in \{0,1\}$$

$$\rightarrow \quad \bigvee_{y \in M} \| U_* = \hat{y} \| = \bigvee_{y \text{ ultrafiltro}} \| U_* = \hat{y} \|$$

Por otro lado

$$\| U_* = \hat{y} \| = \bigwedge_{\hat{b} \in dom(U_*) = \hat{B}} (U_*(\hat{b}) \Rightarrow \| \hat{b} \in \hat{y} \|) \wedge \bigwedge_{\hat{z} \in dom \hat{y}} (\hat{y}(\hat{z}) \Rightarrow \| \hat{z} \in U_* \|)$$

Si $y$ es un ultrafiltro en $B$ entonces $y \subseteq B$ y $\forall \hat{z} \in dom(\hat{y})(\| \hat{z} \in U_* \| = z)$

$$\rightarrow \quad \| U_* = \hat{y} \| = \bigwedge_{b \in B} (b \Rightarrow \| \hat{b} \in \hat{y} \|) \wedge \bigwedge_{z \in dom(\hat{y})} (1 \Rightarrow z)$$

Recordemos que si $b \in B - y$ entonces $\| \hat{b} \in \hat{y} \| = 0$, si $b \in y$ entonces $\| \hat{b} \in \hat{y} \| = 1$, $(b \Rightarrow 0) = b^*$, $b \Rightarrow 1 = 1$, $1 \Rightarrow b = b$, y que por ser $y$ un ultrafiltro entonces si $b \notin y \to b^* \in y$

$$\to \quad \| U_* = \hat{y} \| = (\bigwedge_{b \in y} 1) \wedge (\bigwedge_{b \in B - y} b^*) \wedge (\bigwedge_{z \in dom(\hat{y})} z) = \bigwedge_{z \in dom(\hat{y})} z$$

$$\therefore \ \| U_* = \hat{y} \| = \bigwedge_{z \in dom(\hat{y})} z$$

Sea $A = \{a \in B \mid \ a \text{ es un átomo}\}$. Si $a = \bigwedge_{z \in dom(\hat{y})} z \neq 0$ entonces $a$ es un átomo y $y = U_a$, por lo tanto

$$\bigvee_{y \in M} \| U_* = \hat{y} \| = \bigvee A$$

Ya vimos que si $U = U_a$ entonces $M = M[U_a]$ así que se satisface que

$$\forall x \in M^{(B)} \ \ \exists y \in M \ ( \ \| x = \hat{y} \| \in U_a \ )$$
$$\therefore \ \ \forall x \in M^{(B)} \ \exists y \in M \ ( \ a \leq \| x = \hat{y} \| \ )$$

Sea $u = \Sigma_{a \in A} a \cdot \hat{a}$, como $A \subseteq M$ entonces $\forall a \in A (\| u = \hat{a} \| = a)$. Por construcción $dom(u) = \bigcup_{a \in A} dom(\hat{a})$ y si $v \in a$ entonces $u(\hat{v}) = a$. Entonces para cualquier $x \in M$

$$\| \hat{x} \in u \| = \bigvee_{\hat{v} \in dom(u)} u(\hat{v}) \wedge \ \| \hat{v} = \hat{x} \| \leq \bigvee A$$

$$\to \quad \bigvee_{y \in M} \| u \ = \ \hat{y} \| = \bigvee_{a \in A} \| u = \hat{a} \| \vee \bigvee_{b \in M - A} \| u = \hat{b} \|$$

Como

$$\| u = \hat{b} \| = \bigwedge_{v \in dom(u)} (u(v) \Rightarrow \| v \in \hat{b} \|) \wedge \bigwedge_{\hat{w} \in dom(\hat{b})} (\hat{b}(\hat{w}) \Rightarrow \| \hat{w} \in u \|)$$

$\hat{b}(\hat{w}) \in \{0, 1\}$ y como $\forall x \in M(\| \hat{x} \in u \| \leq \bigvee A)$ si $b \neq \emptyset$ entonces existe $\hat{w} \in dom(\hat{b})$ tal que $\hat{b}(\hat{w}) = 1$ y si $b = \emptyset$ entonces $\hat{b}(\hat{w}) \Rightarrow \| \hat{w} \in u \| = 1$, lo que implica que

$$\bigwedge_{\hat{w} \in dom(\hat{b})} (\hat{b}(\hat{w}) \Rightarrow \| \hat{w} \in u \|) \leq \bigvee A$$

Entonces

$$\| u = \hat{b} \| \leq \bigwedge_{v \in \bigcup_{a\in A} dom(\hat{a})} (u(v) \Rightarrow \| v \in \hat{b} \|) \wedge \bigvee A$$

En el caso $b = \bigcup A$ tenemos que para cualquier $v \in \bigcup_{a\in A} dom(\hat{a})$ se cumple $\| v \in \hat{b} \| = 1$ entonces

$$\bigwedge_{v \in \bigcup_{a\in A} dom(\hat{a})} (u(v) \Rightarrow \| v \in \hat{b} \|) = \bigvee_{v \in \bigcup_{a\in A} dom(\hat{a})} u(v)$$

Debido a que $0 \notin A$ entonces para cualquier $a \in A$ existe $v \in dom(\hat{a}$ tal que $\| v \in \hat{a} \| = 1$. Por definición $u(v) = \bigvee_{a\in A} [\ a \wedge \ \| v \in \hat{a} \| \ ]$ y como $v \in dom(\hat{a}) \subseteq M^{(2)}$ entonces $\| v \in \hat{a} \| \in \{0, 1\}$ para cualquier $v \in dom(u)$ así que

$$\bigvee_{v \in \bigcup_{a\in A} dom(\hat{a})} u(v) = \bigvee A$$

por lo tanto

$$\| u = \hat{b} \| = \bigvee A$$

Tenemos que para cualquier $y \in M$ existe $u \in M^{(B)}$ tal que $\| u = \hat{y} \| = \bigvee A$ entonces

$$\bigvee_{y\in M} \| u = \hat{y} \| = \bigvee A$$

$$\rightarrow \bigwedge_{x\in M^{(B)}} \bigvee_{y\in M} \leq \bigvee A$$

Con este resultado y observando que cuando probamos que para toda $a \in A$, $a \leq \bigvee_{y\in M} \| x = \hat{y} \|$ fue para cualquier $x \in M^{(B)}$ entonces

$$\bigwedge_{x\in M^{(B)}} \bigvee_{y\in M} \| x = \hat{y} \| = \bigvee A$$

Si $L(x) =$ "$x$ es definible" entonces $\| L(x) \| = \bigvee_{u\in L} \| x = \hat{u} \|$ así que si $M \models V = L$ entonces

$$\| V = L \| = \bigwedge_{x\in M^{(B)}} \| L(x) \| = \bigwedge_{x\in M^{(B)}} \bigvee_{y\in L} \| x = \hat{y} \| = \bigwedge_{x\in M^{(B)}} \bigvee_{y\in M} \| x = \hat{y} \|$$

$$= \bigvee A = \bigvee_{y \in M} \| U_* = \hat{y} \| = \bigvee_{y \in L} \| U_* = \hat{y} \| = \| L(U_*) \|$$

$$\therefore \| V = L \| = \| L(U_*) \| = \bigvee A$$

Para cualquier átomo $a \in A$ tenemos que $a \leq \| V = L \| = \bigvee A \in U_a$ por lo tanto

$$U = U_a \rightarrow M[U] \vDash V = L$$

Ahora supongamos que $M[U] \vDash V = L$ y fijemonos en el conjunto

$$D_A = A \cup \{y \in B - \{0\} \mid y \leq (\bigvee A)^*\}$$

Sea $x \in B$.

Si $x \leq (\bigvee A)^*$ entonces $x \in D_A$.

Si $x \nleq (\bigvee A)^*$ entonces

$$0 \neq x \wedge (\bigvee A) = \bigvee_{a \in A} (x \wedge a)$$

Por lo tanto existe $a \in A$ tal que $x \wedge a \neq 0$. $a$ es un átomo entonces $x = a$. Esto nos dice que $D_A$ es denso y como U es ultrafiltro genérico entonces $D_A \cap U \neq \emptyset$.

Sea $x \in D_A \cap U$. Si $x \in \{y \in B - \{0\} \mid y \leq (\bigvee A)^*\}$ entonces $x \leq (\bigvee A)^*$, esto implica que $(\bigvee A)^* \in U$ pero por la hipótesis tenemos que $\| L = V \| = \bigvee A \in U$ lo que nos da que $\bigvee A, (\bigvee A)^* \in U$, esto no puede ser ya que implica que $0 \in U$. Entonces $x \in A$, hay un átomo en U entonces U es el ultrafiltro principal generado por ese átomo, $U = U_x$. Estos resultados juntos nos dicen que si $M \vDash V = L$ entonces

$$M[U] \vDash V = L \iff U = U_a \text{ para algún átomo } a$$

$\square$

**Teorema 2.** *Construcción G.N.S. Dado un estado $\rho : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ existe un espacio de Hilbert, $H_\rho$, una *-representación $D_\rho : \mathcal{A} \rightarrow B(H_\rho)$ y un vector cíclico unitario, $\psi_\rho$, tal que $\rho(a) = \langle \psi_\rho, D_\rho(a)\psi_\rho \rangle$ para toda $a \in \mathcal{A}$*

*Demostración.* Definimos $\langle x, y\rangle := \rho(x^*y)$ entonces $\langle\ ,\ \rangle$ es un semi producto interior definido en $\mathcal{A}$, antilineal en el primer argumento y lineal en el segundo, positivo, pero puede ser degenerado, i.e. $\langle x, x\rangle = 0$ y $x \neq 0$. Para volverlo un producto interior sacamos el cociente $\mathcal{A}/I$, donde $I = \{x \in \mathcal{A} \mid \rho(x^*x) = 0\}$. Gracias a la desigualdad de Cauchy-Schwarz se cumple que

$$\mid \rho(x^*y) \mid^2 \leq\ \rho(x^*x)\rho(y^*y)$$

lo que implica que $I = \{x \in \mathcal{A} \mid \rho(x^*y) = 0\}$ es un ideal bilateral. Por lo que $X = \mathcal{A}/I$ es un espacio pre-Hilbert, ya que no necesariamente es completo, con respecto al producto interior $\langle x + I, y + I\rangle = \rho(x^*y)$.

Para cada $x \in \mathcal{A}$ definimos $\theta_x : X \to X$ como $\theta_x(y + I) = xy + I$, este operador está bien definido porque $I$ es ideal. Esto define una *-representación sobre $X$, $x \mapsto \theta_x$. Ahora tomemos a $H_\rho = \overline{X}$ y $D_\rho(x)$ como la única extensión de $\theta_x$ a un operador lineal acotado en $H_\rho$. Como $X$ es denso en $H_\rho$ entonces las propiedades algebraicas de $\theta_x$ se extienden a $D_\rho(x)$, por lo que

$$D_\rho : x \mapsto D_\rho(x)$$

es una *-representación de $\mathcal{A}$ en $H_\rho$.

Ahora consideremos a $\psi_\rho = 1_\mathcal{A} + I \in X$. $\| \psi_\rho \| = 1$ y para cualquier $x \in \mathcal{A}$,

$$\rho(x) = \rho(1^*_\mathcal{A} x) = \langle 1_\mathcal{A} + I, x + I\rangle = \langle 1_\mathcal{A} + I, x \cdot 1_\mathcal{A} + I\rangle = \langle \psi_\rho,\ D_\rho(x)\psi_\rho\rangle$$

$X$ es denso en $H_\rho$ y $D_\rho(x)\psi_\rho = x \cdot 1_\mathcal{A} + I = x + I$ entonces $\psi_\rho$ es cíclico. Hemos construido la tripleta que se buscaba

Dada otra tripleta $(D'_\rho, H'_\rho, \psi'_\rho)$ que cumple $\rho(x) = \langle \psi'_\rho,\ D'_\rho(x)\psi'_\rho\rangle$ entonces $\langle \psi_\rho,\ D_\rho(x)\psi_\rho\rangle = \langle \psi'_\rho,\ D'_\rho(x)\psi'_\rho\rangle$. Sean $x, y \in \mathcal{A}$. Como las representaciones son multiplicativas, $D(xy) = D(x)D(y)$, tenemos que:

$$\langle D_\rho(x)\psi_\rho,\ D_\rho(y)\psi_\rho\rangle = \langle \psi_\rho,\ D_\rho(x)^* D_\rho(y)\psi_\rho\rangle = \langle \psi_\rho,\ D(x^*y)\psi_\rho\rangle$$

$$= \langle \psi'_\rho,\ D'_\rho(x^*y)\psi'_\rho\rangle = \langle D'_\rho(x)\psi'_\rho,\ D'_\rho(y)\psi'_\rho\rangle$$

Tomando $x = y$ tenemos que

$$\forall x \in \mathcal{A}(\| D_\rho(x) \| = \| D'_\rho(x) \|)$$

Definimos el mapeo $U_0 : D_\rho(\mathcal{A})\psi_\rho \to D'_\rho(\mathcal{A})\psi'_\rho$ como $U_0(D_\rho(x)\psi_\rho) = D'_\rho(x)\psi'_\rho$. Es una isometría lineal de un espacio denso de $H_\rho$ en un espacio denso de $H'_\rho$, por lo que podemos extenderla a un mapeo unitario $U : H \to H'$ que cumple

$$U \circ D_\rho(x) \circ U^*(D'_\rho(y)\psi'_\rho) = U \circ D_\rho(x) \circ U^*(UD_\rho(y)\psi_\rho) = U \circ D_\rho(x)(D_\rho(y)\psi_\rho)$$

$$= U \circ D_\rho(xy)\psi_\rho = D'_\rho(xy)\psi'_\rho = D'_\rho(x)(D'_\rho(y)\psi'_\rho)$$

Como $\psi_\rho, \psi'_\rho$ son cíclicos, esto quiere decir que

$$\{D_\rho(y)\psi_\rho \mid y \in \mathcal{A}\} \text{ y } \{D'_\rho(y)\psi'_\rho \mid y \in \mathcal{A}\}$$

son conjuntos densos en $H_\rho, H'_\rho$ respectivamente, lo que implica que la igualdad anterior se da para todos los elementos de $H_\rho$.

Así que para toda $x \in \mathcal{A}$

$$U \circ D_\rho(x) \circ U^* = D'_\rho(x)$$

por lo tanto $D_\rho$ y $D'_\rho$ son unitariamente equivalentes

La construcción de la representación a partir del estado es única salvo equivalencia unitaria. □

**Teorema 3.** *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra $C^*$ conmutativa entonces $\hat{\mathcal{A}} = \partial\mathcal{S}(\mathcal{A})$, es decir, $\kappa$ es caracter si y sólo si es un estado puro*

*Demostración.* Supongamos que existen $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathcal{A}), t \in (0,1)$ tal que $\kappa = t\phi + (1-t)\psi$. Como $\kappa$ es multiplicativo $\forall a \in \mathcal{A}, \kappa(a^2) = \kappa(a)^2$. Si $f \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ podemos definir un semi producto interior con el mapeo $(a,b) \mapsto f(a^*b)$, lo que nos da la desigualdad $\| f(a^*b) \| \leq f(a^*a)^{1/2} f(b^*b)^{1/2}$, en particular se cumple $f(a)^2 \leq f(a^*a)$ y si $a = a^*$ entonces $f(a)^2 \leq f(a^2)$.

$\kappa$ es caracter si y sólo si es un estado puro

Sea $a = a^*$, como $\kappa(a^2) = \kappa(a)^2$ entonces

$$0 = \kappa(a^2) - \kappa(a)^2 = t\phi(a^2) + (1-t)\psi(a) - (t\phi(a) - (1-t)\psi(a))^2 \geq$$

$$\geq t\phi(a)^2 + (1-t)\psi(a)^2 - (t^2\phi(a)^2 + 2t(1-t)\phi(a)\psi(a) + (1-t)^2\psi(a)^2) =$$

$$= \phi(a)^2(t - t^2) + (t - t^2)\psi(a)^2 - 2(t - t^2)\phi(a)\psi(a) =$$

$$= (t - t^2)(\phi(a)^2 + \psi(a)^2 - 2\phi(a)\psi(a)) = (t - t^2)(\phi(a) - \psi(a))^2 \geq 0$$

$$\therefore \phi(a) = \psi(a)$$

$$\therefore \kappa \in \partial\mathcal{S}(\mathcal{A}) \therefore \hat{\mathcal{A}} \subseteq \partial\mathcal{S}(\mathcal{A})$$

Si ahora tomamos a $f \in \partial\mathcal{S}(\mathcal{A})$, donde $\partial\mathcal{S}(\mathcal{A})$ es la frontera de $\mathcal{S}(\mathcal{A})$, los estados puros. $f$ es lineal y normalizado, nos gustaria mucho que fuera multiplicativo. Para ver esto tomemos $a, b, c \in \mathcal{A}, 0 \leq c \leq 1, 0 \leq b$ entonces existen $u, v, d \in \mathcal{A}$ tal que

$$c = d^*d, 1 - c = u^*u, b = v^*v$$

y como $\mathcal{A}$ es conmutativa

$$bc = v^*vd^*d = d^*v^*vd = (vd)^*vd \geq 0 \text{ y } b - bc = b(1-c) \geq 0 \therefore 0 \leq bc \leq b$$

Definamos a $g : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ como $g(z) = f(zc)$ para toda $z \in \mathcal{A}$. Sí $b \geq 0$ entonces $g(b) = f(bc) \geq 0$ y hereda la linealidad debido a la distributividad del álgebra, por lo que $g$ es un funcional positivo. $g$ es dominado por $f$, ya que si $b \geq 0$ entonces $bc \geq 0$ y $f(b) - g(b) = f(b) - f(bc) = f(b(1 - c)) \geq 0$. $f$ es un estado puro entonces $\exists t \in \mathbb{R}(g = tf)$

$$\Rightarrow f(ac) = g(a) = tf(a) = tf(1)f(a) = g(1)f(a) = f(c)f(a)$$

$$\Rightarrow \forall a \in \mathcal{A}, \forall c \in \mathcal{A}(0 \leq c \leq 1 \to f(ac) = f(a)f(c))$$

Podemos extender este resultado a todos los elementos del álgebra ya que todo elemento $b \in \mathcal{A}$ puede ser descompuesto como $b = x + iy$ donde $x = x^*, y = y^*$. Todo elemento positivo (si es hermitiano entonces es positivo) puede ser descompuesto como

$$x = x_+ - x_-, y = y_+ - y_-$$

donde $x_+, x_-, y_+, y_- \geq 0$. Tenemos que $b = x_+ - x_- + i(y_+ - y_-)$, si llamamos $b_0 = x_+, b_1 = y_+ - y_-, b_2 = x_-$ entonces

$$b = \Sigma_{k=0}^{2} i^k \parallel b_k \parallel \frac{b_k}{\parallel b_k \parallel}$$

así que

$$f(ab) = f(a(\Sigma_{k=0}^{2} i^k \parallel b_k \parallel \frac{b_k}{\parallel b_k \parallel}) = \Sigma_{k=0}^{2} i^k \parallel b_k \parallel f(a\frac{b_k}{\parallel b_k \parallel}) =$$

$$= f(a)(\Sigma_{k=0}^{2} i^k \parallel b_k \parallel f(\frac{b_k}{\parallel b_k \parallel})) = f(a)f(b)$$

$f$ es un estado multiplicativo, por lo tanto es un caracter, $\partial\mathcal{S}(\mathcal{A}) \subseteq \hat{\mathcal{A}}$.

$$\therefore \hat{\mathcal{A}} = \partial\mathcal{S}(\mathcal{A})$$

$\kappa$ es caracter si y sólo si es un estado puro

$\square$

# Bibliografía

[1] John L. Bell (2005) *Set Theory. Boolean-Valued Models and Independence Proofs*. (3era Edición) Oxford University Press. Oxford

[2] N. Bourbaki (1989) *General Topology. Chapters 1-4*. Springer-Verlag. Berlin

[3] Robert S. Doran (1986) *Characterizations of C* Algebras*. Marcel Dekker, Inc. New York

[4] F. William Lawvere, Robert Rosebrugh. *Sets for Mathematics* (2003) Cambridge University Press. Cambridge

[5] Walter Rudin (1991) *Functional Analysis*. (2a Edición) McGraw Hill Inc. New York

[6] Anthony Sudbery (1986) *Quantum Mechanics and the particles of nature*. Cambridge University Press. Cambridge

[7] V.S. Varadarajan (1968) *Geometry of Quantum Theory*. Springer-Verlag. Berlin

[8] N.E. Wegge-Olsen (1993) *K-Theory and C* Algebras*. Oxford University Press. Oxford