



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Dinámica Clásica de un Espejo Móvil Debida a la Presión
de Radiación

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

PRESENTA:

Carlos Emiliano Beltrán Montes de Oca

TUTOR

Dr. Ricardo Alberto Weder Zaninovich

Ciudad Universitaria, CD. MX. 2018





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Datos del jurado

Datos del alumno	Beltrán Montes de Oca Carlos Emiliano 59731882 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Física 308170317
Datos del Tutor	Dr. Ricardo Alberto Weder Zaninovich
Datos del Sinodal 1:	Dr. Fernando Brambila Paz
Datos del Sinodal 2:	Dr. Neil Charles Bruce Davidson
Datos del Sinodal 3:	Dr. Juan Héctor Arredondo Ruiz
Datos del Sinodal 4:	Dr. Asaf Paris Mandoki
Datos del trabajo escrito:	Dinámica Clásica de un Espejo Móvil Debida a la Presión de Radiación 118 p 2018.

Agradecimientos

*Mi preciosa Elena, el mundo es un lugar extraño, encontrarte solo para volver a perderte*¹, dijo Don Diego de la Vega, un instante antes de dar su último suspiro, y tenía mucha razón; el mundo es un lugar extraño, tras la cotidianidad de nuestra vida diaria se esconden mucho sufrimiento sobre todos los seres, y realidades de las cuales mucha gente no desea hablar, pero también, si somos capaces de buscar, en lo más profundo de nuestra alma, podremos encontrar una fuente inagotable de vida y sabiduría, que es capaz de fluir hacia afuera como el agua fluye libre al bajar de las montañas. Y mientras la vida sigue, y mi mente busca día tras día la sabiduría que se esconde tras los más diminutos sucesos de nuestra existencia; tras la gota de rocío sobre la hoja, tras la verde fronda que brota bajo el suave viento primaveral, tras la diminuta mariposa que vuela inadvertida de un árbol a otro, muchas personas, vidas y voces llegan y se van, cada una de las cuales deja una importante enseñanza en mi existencia. Aquí y ahora quiero agradecer a un pequeño subconjunto de ellas, a unas cuantas personas que, tras el bullicio del mundo a mi alrededor, pueden hacer distinguir su voz por lo importantes que son para mi, y que ayudaron, de una u otra manera a construir no solo este trabajo escrito, si no lo que yo espero sea, en un futuro, un artista consumado del arte de vivir.

Al Doctor Ricardo Weder, por su enorme paciencia y su comprensión. Porque nunca me presionó, aún cuando me iba tan mal que no podía concentrarme siquiera en escribir un párrafo. Por el gran conocimiento y experiencia que compartió conmigo durante estos años. Espero que pueda seguir guiándome en las etapas de mi formación que estan por venir.

A Héctor Méndez, tu escuchaste mi aventuras y desventuras, mis ideas y mis disparates, pero tu oficina siempre fue un lugar donde podía encontrar calma en medio del huracán.

Al Doctor Luis de la Peña, porque compartió conmigo mucha sabiduría, y por sus buenos y amables consejos, su paciencia y comprensión fueron un gran aliciente aún en momentos álgidos y sin sentido. Sin su ayuda, en especial durante los meses previos a la presentación de mi examen profesional, me hubiera sido imposible seguir adelante.

A la organización de los Patriotas de Nueva Inglaterra, por el permiso que se me otorgó para utilizar el logotipo de la organización² y porque, mientras la dupla Tom Brady-Bill Belichick siga junta, domingo con domingo me seguirá mostrando como ser un mejor físico teórico. Por la manera en cómo, en el SuperBowl 51, me demostraron que, como una vez escribió Raul Allegre: “A pesar de lo álgido de las circunstancias la causa no está perdida”, y porque me han enseñado que, más allá del talento o las oportunidades, el trabajo duro es lo único realmente importante.

¹Spielberg, S., Parkes, W.(productores ejecutivos) y Campbell, M. (director). (1998). *La máscara del Zorro*. [Cinta Cinematográfica] EU.: Sony Pictures Entertainment y Amblin Entertainment.

²El logotipo fue tomado de www.patriots.com con permiso explícito de la organización vía correo electrónico.

Debo también agradecer de manera especial al Dr. Asaf Paris, por sus divertidos y atinados comentarios, y sus importantes correcciones.

También hay una persona, una persona especial que decidió irse de mi vida, pero sin cuyo bonito recuerdo me hubiera sido imposible seguir adelante. Ella sabe quién es, y a ella le digo: Gracias por existir.

Finalmente, quiero dedicarle este humilde trabajo, y todo aquel que esté por venir en mi vida profesional y espiritual, a mi madre Rosaura Montes de Oca. Sin sus cálidas palabras, sus sensatos consejos, sin su inigualable cariño, nunca hubiera llegado a ser lo que soy. Ella, como nadie más, da su vida por mí; día con día procura siempre dar todo de sí, para que yo pueda así mismo dar todo de mi. Esta tesis no es solo mía, es de ambos, y ambos la construimos juntos. No existen palabras para decir cuánto te quiero, pues es imposible expresar lo inexpresable. Hoy como nunca antes debo decirte: Gracias.



*Esta tesis fue parcialmente apoyada
por el proyecto PAPIIT-DGAPA
UNAM IN103918*

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Alcance de este trabajo	2
2. Relatividad Especial y Transformaciones de Lorentz	4
2.1. Principios básicos y diagramas espacio-tiempo	4
2.2. Invariancia del intervalo	7
2.3. Las transformaciones de Lorentz	8
2.3.1. Contracción de la longitud y dilatación del tiempo	9
2.3.2. El tiempo propio	11
2.4. El espacio de Minkowski	12
2.5. Dinámica Relativista de una Partícula	14
2.6. Consecuencias sobre la dinámica de objetos extendidos	15
3. Fundamentos de Teoría Electromagnética	18
3.1. Ecuaciones de Maxwell	18
3.2. Condiciones en la frontera	20
3.3. Potenciales Electromagnéticos	22
3.3.1. Transformaciones de Norma	23
3.3.2. La norma de Coulomb y la norma de Lorentz	23
3.4. Covariancia de la Electrodinámica	24
3.4.1. Transformación de los campos electromagnéticos	26
4. Ecuaciones de evolución para un espejo móvil y un campo electromagnético	28
4.1. Descripción del sistema	28
4.1.1. Los campos eléctrico y magnético	33
4.1.2. Polarización y magnetización	34
4.1.3. Corriente libre y carga	35
4.2. Ecuaciones de Maxwell	36
4.2.1. El caso en el que la susceptibilidad y la conductividad son funciones constantes por partes	37
4.3. Análisis de un caso particular	39
4.3.1. Introducción de cantidades adimensionales	40
4.3.2. El caso en el que la susceptibilidad y la conductividad son funciones constantes por partes	43
4.4. Fuerza sobre el espejo	43
4.4.1. El caso en que la susceptibilidad y la conductividad son funciones contantes por partes	45
4.5. Validez de la suposición de que el espejo se encuentra aproximadamente en reposo	46

4.6. Una densidad lagrangiana para el campo electromagnético	49
5. Dinámica Clásica de un Espejo Móvil interactuando con un Campo Electro-	52
magnético	
5.1. Descripción del sistema	52
5.2. Modos para $q(t)$ fijo	54
5.3. Campo electromagnético con un único modo	59
5.3.1. El potencial de la presión de radiación	61
5.3.2. Una aproximación para V_{RWA}	65
5.4. Dinámica Debida a la Presión de la Radiación	66
5.4.1. Régimen de Alta Intensidad	66
5.4.2. Régimen de Baja Intensidad	68
5.4.3. El Caso General	72
5.5. Introducción de Rozamiento	73
5.5.1. Régimen de Baja Intensidad	74
5.5.2. El Caso General	78
5.6. Introducción de un Potencial de Oscilador Armónico	80
5.6.1. El Régimen de Baja Intensidad	80
5.6.2. El Caso General	83
6. Conclusiones	86
Apéndices	90
A. La Aproximación de Onda Rotante	90
B. Análisis de curvas de energía potencial	96
C. Análisis Cualitativo de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales	99
C.1. Sistemas Lineales	99
C.2. Sistemas no lineales.	107
C.2.1. Definiciones y Propiedades	108
C.2.2. El Flujo definido por una Ecuación Diferencial	109
C.2.3. Linealización	110
C.2.4. Órbitas Periódicas y Ciclos Límite	114
C.2.5. El Teorema de la Variedad Estable	115
Bibliografía	116

Capítulo 1

Introducción

Every game is an important game for us. Doesn't matter what's the next week – who we play, whether it's a bye week, Thanksgiving, Christmas, Halloween, Columbus Day. We don't care. We're just trying to go out there and win a game.
Bill Belichick

La radiación electromagnética (al igual que la gravitacional) transporta energía y momento, este último en particular da lugar a la presión de radiación. Pese a que la existencia de una presión de radiación es una predicción directa de las ecuaciones de Maxwell, estas fuerzas ya habían sido postuladas en el siglo XVII por Kepler, quien notó que las colas de los cometas apuntaban en dirección opuesta al sol. La primera evidencia experimental que demostró que la fuerza ejercida por la presión de radiación existía verdaderamente fue realizada por Piotr Lébedev y Nichols y Hull en 1901 [19, 20], sin embargo se necesitó de un análisis muy cuidadoso para poder distinguirla de otras fuerzas, principalmente las fuerzas térmicas. Poco después, en 1909, Einstein dedujo la distribución estadística de las fluctuaciones en la fuerza debida a la presión de la radiación actuando sobre un espejo móvil [21], incluyendo los efectos de la fricción, lo que le permitió revelar la naturaleza discreta de la radiación de cuerpo negro.

Algunos años más tarde, en los años 70's, Arthur Ashkin demostró que la fuerza dipolar producida por el haz de un láser puede utilizarse para controlar partículas dieléctricas [27]. Además debido a la naturaleza no conservativa de la fuerza de la presión de la radiación, esta puede utilizarse para enfriar sistemas atómicos, como fue notado por Hänsch y Schawlow y por Dehmelt y Wineland [22, 23] en 1975.

El papel que juega la presión de radiación y su habilidad para enfriar objetos macroscópicos fue investigado por Braginsky en el contexto de la interferometría [24]. Sus análisis revelaron que dicha fuerza podía ejercer una fricción o un impulso sobre un espejo suspendido armónicamente en una cavidad. Además Braginsky también abordó las consecuencias de las fluctuaciones cuánticas y demostró que las mismas imponen un límite en la precisión con la cual se puede medir la posición de una pequeña masa de prueba. Más aún, un análisis detallado realizado por Carlton Caves [25] esclareció el efecto de estas perturbaciones no lineales sobre los interferómetros. Estos trabajos establecieron un límite cuántico para la precisión de la medición de distancias muy pequeñas, lo cual resultó ser de importancia trascendental en los detectores de ondas gravitacionales [13].

Existen diferentes motivaciones que impulsan el creciente interés en la optomecánica de cavidades. Por un lado se encuentra la detección de pequeñas fuerzas, desplazamientos, masas y aceleraciones. Por el otro la optomecánica cuántica de cavidades abre la posibilidad de manipular y detectar movimiento mecánico en el régimen cuántico utilizando radiación electromagnética, creando con ello estados interactuantes de movimiento mecánico y luz. Estas herramientas formarían la base de un gran número de dispositivos y aplicaciones, como son el procesamiento de información cuántica, donde los dispositivos optomecánicos podrían servir como interfaces de luz coherente y materia. Al mismo tiempo, la optomecánica cuántica de cavidades ofrece una ruta hacia pruebas experimentales de la mecánica cuántica en un régimen de distancias y masas hasta ahora inaccesibles [14, 26].

1.1. Alcance de este trabajo

Dado el creciente interés e importancia que ha adoptado la rama de la optomecánica en años recientes, y en vista de su gran rango de aplicabilidad en distintos ámbitos de la física teórica y experimental, en esta tesis realizamos un análisis y disección de los artículos [17] y [18] en los cuales se estudia uno de los modelos paradigmáticos de la optomecánica de cavidades: un espejo móvil en una cavidad unidimensional sometido a la acción de un campo electromagnético.

En el Capítulo 2 introducimos los conceptos más importantes relacionados con la teoría de la relatividad especial. Establecemos los postulados de Einstein y, con ayuda de los diagramas espacio-tiempo y de la invariancia del intervalo, realizamos una deducción de las transformaciones de Lorentz. Revisamos las modificaciones que se introducen al formalismo Newtoniano de la dinámica de una partícula, y finalmente damos una breve discusión acerca de los efectos que tiene la relatividad de la simultaneidad en la descripción dinámica de objetos extendidos.

En el Capítulo 3 establecemos las bases de la teoría electromagnética de Maxwell. Reescribimos las ecuaciones del electromagnetismo en presencia de medios materiales de modo que se haga referencia explícita solo a aquellas cantidades que el experimental puede controlar. Establecemos las condiciones en la frontera entre dos medios materiales que deben cumplir los campos eléctrico y magnético. Revisamos también brevemente las transformaciones de norma, y finalmente establecemos la conexión con los conceptos relativistas introducidos en el Capítulo 2 mostrando la covariancia de la electrodinámica.

En el cuarto capítulo reproducimos los resultados expuestos en [17]. En este artículo se considera a un espejo móvil en una cavidad unidimensional sometido a un campo electromagnético. Se asume que el espejo esta hecho de un material cuyas propiedades en reposo son: lineal, isotrópico, no magnetizable, ohmico, y sin densidad de carga libre. Utilizando los conceptos introducidos en los Capítulos 2 y 3, se encuentra un conjunto de ecuaciones que gobiernan la dinámica del sistema y se obtienen ecuaciones aproximadas a primer orden en la velocidad y aceleración del espejo móvil. Se encuentra que el movimiento del espejo y su interacción con el campo electromagnético introduce dos efectos en la ecuación de movimiento del espejo. El primero es una masa dependiente del tiempo y de la posición del espejo móvil. El segundo es una fuerza dependiente de la velocidad la cual puede dar lugar a efectos de fricción y que se encuentra relacionada con el enfriamiento de objetos mecánicos.

Finalmente, en el Capítulo 5 se expone lo que puede considerarse el punto central de este trabajo de tesis; una revisión del estudio realizado en [18]. En este artículo, pese a que su publicación fue previa a la de [17], se utilizan las ecuaciones de evolución halladas en este último para analizar el

caso particular de un espejo fijo en $x = 0$ con transparencia cero, y un espejo móvil muy delgado en $q(t) > 0$, y se hace una aproximación a orden cero en la velocidad y aceleración. Se identifican tres regímenes distintos dependiendo de la intensidad del campo y se encuentra que la dinámica puede ser cualitativamente muy distinta en cada uno de ellos; además algunos regímenes resultan ser muy sensibles a los valores que adoptan los parámetros del sistema. Así mismo se determinan condiciones bajo las cuales las ecuaciones de evolución utilizadas constituyen aproximaciones apropiadas de las ecuaciones exactas que gobiernan la dinámica del sistema.

Parece ser importante hacer aquí una observación. A lo largo de esta tesis los vectores los representaremos por letras negritas, y estarán dados en forma de columna, por ejemplo el vector de posición en \mathbb{R}^3 estará dado por:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x, y, z)^T$$

donde T denota el vector transpuesto. 

Capítulo 2

Relatividad Especial y Transformaciones de Lorentz

Aunque apagues a Curry y apagues a Thompson aún queda la llama ardiente de Durant, por eso es tan difícil ganarle a Golden State.
Carlos “El Coach” Morales, hablando de los Golden State Warriors.

En este capítulo se hace un breve repaso de las ideas introducidas por la teoría de la relatividad especial. En particular, se muestra la manera en la que se transforman las coordenadas al pasar de un sistema de referencia inercial a otro. Así mismo se realiza un examen sobre cómo la extensión de los objetos, a la luz de las ideas introducidas por la relatividad especial, produce cambios en la descripción de su movimiento, cuando dicha descripción se realiza desde dos sistemas de referencia inerciales distintos. El contenido de este capítulo está basado primordialmente en [3, 6, 7, 30, 39].

2.1. Principios básicos y diagramas espacio-tiempo

Entre 1904 y 1905, Lorentz y Poincaré demostraron que las ecuaciones de la electrodinámica eran invariantes bajo un conjunto muy especial de transformaciones de coordenadas, llamadas actualmente transformaciones de Lorentz. En 1905, casi al mismo tiempo que Poincaré, y sin conocer el artículo de Lorentz, Einstein formuló la relatividad especial y obtuvo los mismos resultados. La relatividad especial se basa únicamente en dos postulados:

- 1.- Ningún experimento puede medir la velocidad absoluta de un observador inercial; los resultados de cualquier experimento realizado por un observador inercial no dependen de su velocidad respecto a otros observadores inerciales que no estén involucrados en el experimento.
- 2.- La rapidez de la luz en el vacío es la misma para todos los observadores inerciales, e independiente del movimiento relativo de la fuente respecto al observador.

Es sobre la base de estos dos postulados sobre la cual se erige la relatividad especial. En particular, nos permiten deducir la relación entre las coordenadas espacio-tiempo de dos sistemas de referencia inerciales. Sin embargo, antes de proceder a la deducción de dichas ecuaciones de transformación, resulta de mucha utilidad introducir el concepto de diagrama espacio-tiempo, ya que este permite,

de una manera muy simple, deducir muchas de las consecuencias más importantes de los postulados de Einstein.

Consideremos un sistema de referencia inercia \mathbf{S} . Un diagrama espacio-tiempo es un diagrama en el que se dibujan, como eje de las abscisas, las líneas que corresponden a una coordenada espacial, y como eje de las ordenadas se toma el tiempo t multiplicado por la velocidad de la luz c , es decir ct . (Fig. 2.1) Un punto sobre dicho diagrama, con x y t fijos, es llamado un evento.

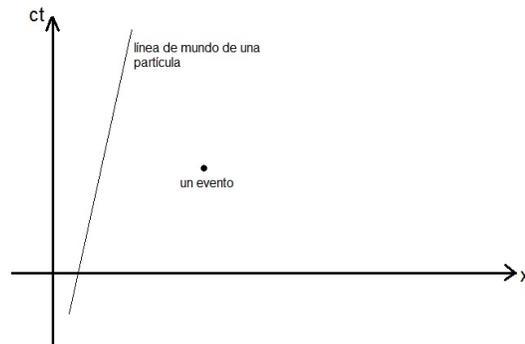


Figura 2.1: Un diagrama espacio-tiempo

Una línea en el espacio proporciona una relación $x(t)$ que puede representar la posición de una partícula en diferentes instantes de tiempo. En el diagrama espacio-tiempo representa una curva y se le llama línea de mundo de la partícula.

Consideremos dos sistemas inerciales de coordenadas \mathbf{S} y $\tilde{\mathbf{S}}$, en donde $\tilde{\mathbf{S}}$ se mueve a una rapidez constante v respecto a \mathbf{S} en una dirección paralela al eje X (Fig. 2.2). Por simplicidad consideraremos que el eje X de ambos sistemas de referencia es paralelo, así mismo supondremos un origen común de tiempos $t = \tilde{t} = 0$, que se elige como el instante en el que el origen espacial de los dos sistemas de coordenadas coincide. Dado que sabemos cómo dibujar el diagrama espacio-tiempo de un observador en el sistema de referencia \mathbf{S} , es razonable preguntarse cómo se podría dibujar el diagrama espacio-tiempo de un observador en el sistema $\tilde{\mathbf{S}}$ visto desde el punto de vista del sistema \mathbf{S} .

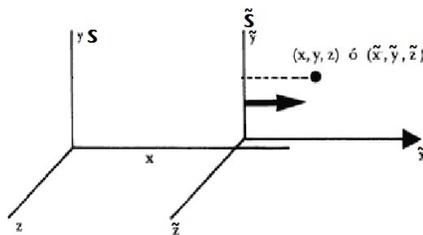


Figura 2.2: Dos sistemas inerciales de referencia

Primeramente, dado que el eje $C\tilde{T}$ corresponde al conjunto de eventos que ocurren en el origen de coordenadas espaciales del sistema $\tilde{\mathbf{S}}$, la línea que corresponde a dicho eje no es sino la línea de mundo de un observador en el origen de coordenadas del sistema $\tilde{\mathbf{S}}$ (Fig. 2.3)

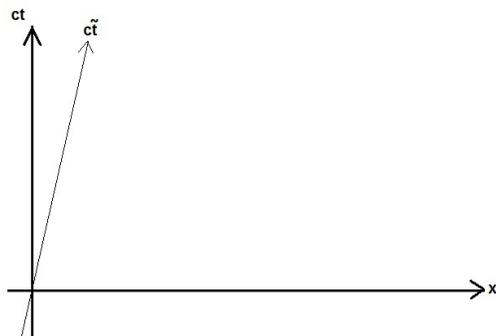


Figura 2.3: El eje temporal de un sistema de referencia que se mueve con velocidad v

Notemos que, desde el punto de vista del observador en el sistema $\tilde{\mathbf{S}}$, si se emite un pulso de luz en el origen de coordenadas espaciales en el instante $c\tilde{t} = -a$, dicho pulso llegará, en el instante $c\tilde{t} = 0$, al punto $\tilde{x} = a$. Si ese pulso es reflejado de vuelta hacia el origen, llegará nuevamente al punto $\tilde{x} = 0$ en el instante $c\tilde{t} = +a$ (Fig 2.4). Esta afirmación es válida sin importar el valor que le asignemos a a .

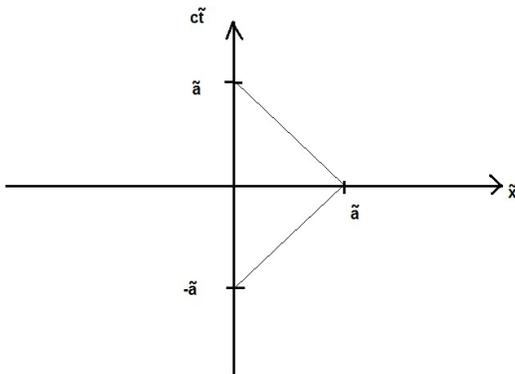


Figura 2.4: Un rayo de luz reflejado en el punto $\tilde{x} = a$

Tomando en cuenta esta última afirmación, podemos entonces dibujar el eje \tilde{X} en el diagrama espacio-tiempo del observador en el sistema \mathbf{S} . Ya sabemos cómo se ve el eje $C\tilde{T}$. Si un pulso luminoso es emitido en el instante $c\tilde{t} = -a$, la trayectoria de dicho pulso, dado que la velocidad de la luz es c , se dibuja como una línea a 45° de pendiente positiva en el diagrama espacio-tiempo del sistema \mathbf{S} (Fig. 2.5). Si dicho pulso es reflejado en el punto $\tilde{x} = a$, este viajará de regreso hacia el origen espacial de $\tilde{\mathbf{S}}$, al cual llegará en el instante $c\tilde{t} = +a$. El trayecto de regreso se representa también como una línea a 45° , pero esta vez de pendiente negativa. La intersección de estas dos líneas representa el punto $\tilde{x} = a$. De esta forma podemos dibujar el eje \tilde{X} como la línea que une dicha intersección con el origen (Fig. 2.5).

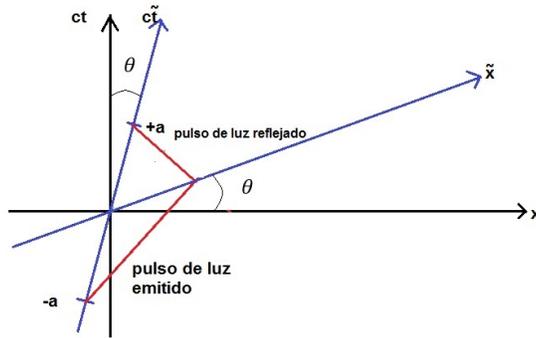


Figura 2.5: Construcción del eje \tilde{X} en el diagrama espacio-tiempo del observador en el sistema \mathbf{S}

Se puede notar que el eje \tilde{X} así construido no coincide con el eje X . Comparando las Figuras 2.5 y 2.4 se puede encontrar la razón; en ambos diagramas la luz se mueve en líneas a 45° , mientras que la línea que representa el eje temporal cambia de inclinación de un diagrama al otro. Esta es una consecuencia del segundo postulado de Einstein, el cual implica que la luz debe moverse en líneas a 45° en el diagrama espacio-tiempo de cualquier observador inercial. Observemos que, el hecho de que los ejes X y \tilde{X} no coincidan trae a la luz un resultado muy importante; los eventos que se encuentran sobre el eje \tilde{X} son los eventos que ocurren todos en el instante $\tilde{t} = 0$, es decir, son eventos simultáneos, sin embargo, como dicho eje no coincide con el eje X , estos mismos eventos ocurren, cada uno, a instantes de tiempo distintos cuando son observados respecto al sistema \mathbf{S} . La invariancia de la velocidad de la luz trae como consecuencia la relatividad de la simultaneidad. El ángulo θ que forma el eje \tilde{X} con el eje X es el mismo que aquel que forman el eje $C\tilde{T}$ y el eje CT : $\tan(\theta) = \frac{v}{c}$ (ver [6] Sec. 1.5).

2.2. Invariancia del intervalo

Existe un singular resultado, el cual es probablemente el resultado más importante en relatividad especial; la invariancia del intervalo. El teorema de la invariancia del intervalo resulta de fundamental importancia, pues no solo constituye una manera de reformular la relatividad especial en términos geométricos, si no que abre el paso a la generalización de dicha teoría; la relatividad general. A pesar de su gran trascendencia en ciertas áreas de la física, en el resto de la tesis no haremos uso de este teorema más allá de usarlo para deducir las transformaciones de Lorentz.

Consideremos dos eventos A y B en la línea de mundo de un mismo haz de luz. Las diferencias Δt , Δx , Δy , Δz entre las coordenadas de A y de B en algún sistema de coordenadas inercial \mathbf{S} satisfacen la relación: $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^2(\Delta t)^2 = 0$. Como consecuencia de la universalidad de la velocidad de la luz, las diferencias coordenadas entre estos mismos dos eventos en cualquier otro sistema inercial de coordenadas $\tilde{\mathbf{S}}$: $\Delta \tilde{x}$, $\Delta \tilde{y}$, $\Delta \tilde{z}$, $\Delta \tilde{t}$, también satisfacen la relación: $(\Delta \tilde{x})^2 + (\Delta \tilde{y})^2 + (\Delta \tilde{z})^2 - c^2(\Delta \tilde{t})^2 = 0$. En vista de ello, dados dos eventos cualesquiera A y B con diferencias de coordenadas Δx , Δy , Δz , Δt respecto de algún sistema inercial, definimos el *intervalo* Δs^2 entre ellos como:

$$\Delta s^2 = -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \quad (2.1)$$

Por la invariancia de la velocidad de la luz, si $\Delta s^2 = 0$ en algún sistema inercial \mathbf{S} , entonces $\Delta \tilde{s}^2 = 0$ respecto de cualquier otro sistema inercial $\tilde{\mathbf{S}}$. Es posible utilizar los dos postulados de

Einstein, en combinación con la suposiciones de que el espacio es homogéneo e isotrópico, y de que el tiempo el homogéneo, para demostrar que el valor del intervalo, para cualesquiera dos eventos, no necesariamente conectados por un haz de luz, es el mismo para todos los observadores inerciales (véase [6] Sec. 1.6):

El valor del intervalo Δs^2 entre cualesquiera dos eventos, es el mismo respecto de todo sistema inercial de referencia.

De esta manera Δs^2 es una propiedad de los eventos mismos, no del sistema de referencia desde el cual se observen.

2.3. Las transformaciones de Lorentz

Las transformaciones de Lorentz expresan las coordenadas de un sistema inercial \mathbf{S} en función de las de otro sistema inercial $\tilde{\mathbf{S}}$ que se mueva respecto del primero.

Volvamos a los sistemas \mathbf{S} y $\tilde{\mathbf{S}}$ que se muestran en la figura 2.2. Dado que los ejes Y y Z son ortogonales a la dirección de movimiento, las coordenadas correspondientes no sufren cambio alguno:

$$\tilde{y} = y$$

$$\tilde{z} = z$$

Consideremos entonces solo la coordenada espacial x y la coordenada temporal t . La homogeneidad e isotropía del espacio, así como la isotropía del tiempo, nos permiten concluir que la transformación de coordenadas entre \mathbf{S} y $\tilde{\mathbf{S}}$ es una transformación lineal (véase [6] Sec. 1.6 y 1.9), es decir, podemos escribir que:

$$\tilde{t} = \alpha t + \beta x \tag{2.2}$$

$$\tilde{x} = \epsilon t + \sigma x \tag{2.3}$$

donde α , β , ϵ y σ son coeficientes que debemos determinar. Refiriéndose a la figura 2.5 queda claro que las ecuaciones de los ejes \tilde{X} y $C\tilde{T}$ respecto al diagrama espacio-tiempo de \mathbf{S} son: $vx/c^2 - t = 0$ para el eje \tilde{X} , que corresponde a los eventos con $\tilde{t} = 0$, mientras que para el eje $C\tilde{T}$ (que corresponde a los eventos con $\tilde{x} = 0$) se tiene que: $x = vt$. Utilizando esto podemos demostrar que los coeficientes en las ecuaciones 2.2 y 2.3 obedecen las siguientes relaciones:

$$\beta = -\frac{\alpha v}{c^2}$$

$$\epsilon = -\sigma v$$

de tal manera que las ecuaciones de transformación podrán escribirse entonces como:

$$\tilde{t} = \alpha \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) \tag{2.4}$$

$$\tilde{x} = \sigma (x - vt) \tag{2.5}$$

Consideremos ahora los tres eventos siguientes en el sistema $\tilde{\mathbf{S}}$: El evento A con coordenadas ($\tilde{x} = 0, \tilde{ct} = 0$), el evento B con coordenadas ($\tilde{x} = 0, \tilde{ct} = a$), y el evento C con coordenadas ($\tilde{x} = a, \tilde{ct} = 0$). Tomemos el par de eventos AB; si particularizamos las ecuaciones de transformación

para A y para B y utilizamos la invariancia del intervalo, podremos encontrar que el valor que debe tener α es:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Análogamente, si tomamos el par de eventos AC y seguimos el mismo procedimiento, hallaremos que el valor que toma σ es el mismo que el de α , es decir:

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Así, las ecuaciones de transformación entre los dos sistemas inerciales serán :

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= \gamma(x - vt) \\ \tilde{y} &= y \\ \tilde{z} &= z \\ \tilde{t} &= \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)\end{aligned}\tag{2.6}$$

donde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$. Este conjunto de ecuaciones se conoce como las transformaciones de Lorentz.

Son válidas para el caso especial en el cual los ejes espaciales X y \tilde{X} son paralelos, y uno de los sistemas se mueve con una velocidad paralela a los ejes X .

2.3.1. Contracción de la longitud y dilatación del tiempo

La longitud de un objeto puede definirse como la distancia entre sus extremos. Sin embargo, si el objeto se encuentra en movimiento relativo respecto a un observador, las posiciones de sus extremos deben medirse simultáneamente. Consideremos una barra en reposo en relación al sistema $\tilde{\mathbf{S}}$ y paralela al eje \tilde{X} (Fig. 2.6). Designemos sus extremos por 1 y 2; entonces su longitud medida en el sistema $\tilde{\mathbf{S}}$ es $L_0 = \tilde{x}_2 - \tilde{x}_1$. Sin embargo, el observador en el sistema \mathbf{S} , el cual ve la barra en movimiento, debe medir las coordenadas x_1 y x_2 de los extremos en el mismo instante de tiempo t , tras lo cual obtiene $L = x_2 - x_1$. Si utilizamos el conjunto de ecuaciones 2.6 encontramos que:

$$\tilde{x}_1 = \gamma(x_1 - vt)$$

y

$$\tilde{x}_2 = \gamma(x_2 - vt)$$

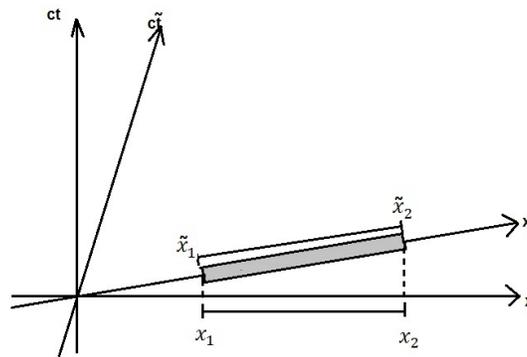


Figura 2.6: Barra en movimiento

de tal manera que:

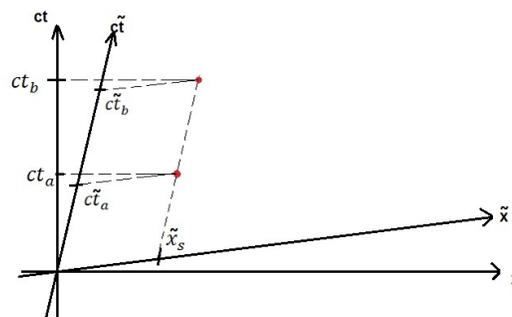
$$\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1 = \gamma(x_2 - x_1)$$

o equivalentemente:

$$L = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} L_0 \quad (2.7)$$

Puesto que el factor $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ es menor que la unidad se sigue que el observador en \mathbf{S} , que ve el objeto en movimiento, mide una longitud menor que la que mide el observador en $\tilde{\mathbf{S}}$, que es el que ve el objeto en reposo. Es decir *los objetos en movimiento parecen más cortos*. Este fenómeno se conoce como *contracción de la longitud* o *contracción de Lorentz-Fitzgerald*.

Un fenómeno similar se da en los intervalos de tiempo. Un intervalo de tiempo puede definirse como el tiempo que transcurre entre dos eventos cualesquiera, medido por un observador. Consideremos dos eventos que ocurren en la misma coordenada \tilde{x}_s respecto a un observador en $\tilde{\mathbf{S}}$ pero en distintos instantes de tiempo (Fig. 2.7). El intervalo de tiempo entre estos dos eventos, medido respecto al sistema $\tilde{\mathbf{S}}$, es $\tilde{T} = \tilde{t}_b - \tilde{t}_a$. Para el observador en \mathbf{S} el intervalo de tiempo es $T = t_b - t_a$.

Figura 2.7: Eventos que ocurren a tiempos distintos pero en el mismo lugar x'_s en \mathbf{S}'

Para encontrar la relación entre los tiempos en los cuales ocurren los dos eventos, según como son registrados por cada uno de los observadores, usamos la Ecuación (2.6). Esto nos da:

$$t_a = \gamma(\tilde{t}_a + \frac{v\tilde{x}_s}{c^2}), \quad t_b = \gamma(\tilde{t}_b + \frac{v\tilde{x}_s}{c^2})$$

de tal manera que:

$$t_b - t_a = \gamma(\tilde{t}_b - \tilde{t}_a)$$

o equivalentemente:

$$T = \frac{\tilde{T}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2.8)$$

Como el factor $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ es mayor que 1, la Ecuación (2.8) indica que T es mayor que \tilde{T} . Es decir, los procesos parecen tomar más tiempo cuando ocurren en un sistema de referencia en movimiento relativo que cuando ocurren en un sistema en reposo relativo. Este fenómeno se conoce como dilatación del tiempo.

2.3.2. El tiempo propio

Supongamos que desde un sistema inercial de referencia se observa un reloj que se mueve de manera arbitraria respecto del mismo. Durante un instante de tiempo infinitesimal dt respecto del sistema inercial dado, podemos introducir otro sistema inercial de referencia respecto del cual el reloj se encuentre en reposo, el cual recibirá el nombre de marco co-móvil.

Durante un intervalo de tiempo infinitesimal dt (indicado por un reloj en reposo respecto de nuestro sistema) el reloj en movimiento recorre una distancia $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$. Calculemos qué intervalo de tiempo $d\tilde{t}$ indica en estas condiciones el reloj en movimiento. En un sistema de coordenadas en el que éste se encuentre en reposo tendremos que $d\tilde{x} = d\tilde{y} = d\tilde{z} = 0$. Por el teorema de la invariancia del intervalo se tendrá que:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -c^2 d\tilde{t}^2$$

con lo cual:

$$d\tilde{t} = \sqrt{-\frac{ds}{c}} = \frac{1}{c} \sqrt{-c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

Pero,

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = v^2$$

donde v es la velocidad del reloj; por consiguiente:

$$d\tilde{t} = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (2.9)$$

Integrando esta expresión podemos obtener el intervalo de tiempo indicado por el reloj en movimiento cuando el tiempo transcurrido según se mide en el sistema en reposo es $t_2 - t_1$:

$$\tilde{t}_2 - \tilde{t}_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (2.10)$$

El tiempo indicado por un reloj que se mueve junto con un objeto dado recibe el nombre de *tiempo propio* de ese objeto. El tiempo propio es un concepto invariante de Lorentz, pues es el tiempo que se mide en el sistema co-móvil con el objeto en movimiento³. Las expresiones (2.9) y (2.10) expresan la relación entre el tiempo propio y el tiempo correspondiente al sistema inercial respecto del cual se considera el movimiento, es decir el tiempo coordenado.

2.4. El espacio de Minkowski

Las ecuaciones de la transformación de Lorentz se pueden poner en una forma vectorial que no particularice para la velocidad relativa ninguna dirección específica (véase [3] Sec. 7.2):

$$\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + \frac{(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\beta}}{\beta^2}(\gamma - 1) - \boldsymbol{\beta}\gamma ct \quad (2.11)$$

$$\tilde{t} = \gamma t - (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r})\frac{\gamma}{c} \quad (2.12)$$

en donde $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$ y $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Las Ecuaciones (2.11) y (2.12) constituyen las ecuaciones de transformación de Lorentz entre dos sistemas de coordenadas de ejes paralelos que se muevan uniformemente uno respecto del otro con velocidad \mathbf{v} en una dirección cualquiera.

La transformación general de Lorentz, definida por (2.11) y (2.12) tiene la forma de una transformación lineal entre dos sistemas de cuatro coordenadas. Minkowski señaló que si como cuarta coordenada de un espacio cartesiano de cuatro dimensiones se tomara $x_4 = ict$, la transformación de Lorentz adoptaría una forma sencilla y conocida. El cuadrado de la norma del vector de posición en dicho cuadri-espacio (llamado espacio de Minkowski) tiene la siguiente forma:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x^2 + y^2 + z^2 - ct^2 \quad (2.13)$$

Observemos que esta última expresión es precisamente la expresión del “intervalo” espacio-temporal introducido en la sección 2.2 que conecta al origen con el evento con coordenadas $(x, y, z, ct)^T$. Es decir, el “intervalo” es la norma de los vectores de posición en el espacio de Minkowski. Del teorema de la invariancia del intervalo se sigue que las transformaciones de Lorentz dejan invariantes las normas de los vectores. Sabemos que las transformaciones que no afectan las normas de los vectores son transformaciones ortogonales. Así pues, las transformaciones de Lorentz son transformaciones ortogonales en el espacio de Minkowski. En dicho espacio, las coordenadas de un punto se denotan como $(x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = ict)$, de tal manera que las Ecuaciones (2.11) y (2.12) adoptan la siguiente forma:

$$\tilde{x}_j = x_j + \frac{\beta_j \sum_{k=1}^3 \beta_k x_k}{\beta^2}(\gamma - 1) + i\beta_j \gamma x_4 \quad (2.14)$$

$$\tilde{x}_4 = -i\gamma \sum_{k=1}^3 \beta_k x_k + \gamma x_4 \quad (2.15)$$

Siendo así, de ahora en adelante los valores de los índices griegos correrán desde 1 hasta 4, es decir: $\mu = 1, 2, 3$ o 4, mientras que los índices latinos tomarán únicamente valores desde 1 hasta 3.

Los vectores en el espacio de Minkowski reciben el nombre de cuatro-vectores (o cuadri-vectores).

³Como diría en alguna de sus clases el Dr. Miguel Alcubierre; es el tiempo del objeto mismo y el de nadie más.

Se definen como todo conjunto de cuatro cantidades (s_1, s_2, s_3, s_4) cuya ecuación de transformación entre dos sistemas de coordenadas esté dada por:

$$\tilde{s}_\mu = \sum_{\nu=1}^4 \frac{\partial x_\nu}{\partial \tilde{x}_\mu} s_\nu \quad (2.16)$$

en donde $\partial x_\nu / \partial \tilde{x}_\mu$ son los elementos de la matriz jacobiana de la transformación de coordenadas (véase [39] Sec. 6). Se pueden dar muchos ejemplos de cuatro-vectores además del cuatro vector de posición (x_1, x_2, x_3, x_4) . Así, se define la cuatro-velocidad u_ν como la variación por unidad de tiempo del vector de posición de una partícula, respecto a su tiempo propio:

$$u_\nu = \frac{dx_\nu}{d\tau} \quad (2.17)$$

cuyas componentes espaciales y temporal son:

$$u_i = \frac{v_i}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad u_4 = \frac{ic}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2.18)$$

donde v_i son las componentes de la velocidad tridimensional de la partícula, y $\beta = v/c$. De manera análoga puede definirse la cuatro-aceleración como la variación por unidad de tiempo del vector cuatro-velocidad, respecto del tiempo propio de la partícula.

La transformación de Lorentz se puede también considerar como una transformación lineal en un espacio *real* de cuatro dimensiones en el cual, la cuarta coordenada se representa como $x_0 = ct$. Para que la luz se propague en todos los sistemas inerciales con rapidez c , el cuadrado de la norma de un vector debe seguir viniendo dado por el lado derecho de (2.13). El paso de fórmulas expresadas en el espacio de Minkowski a las expresadas en el cuatro-espacio real y recíprocamente es fácil puesto que:

$$x_4 = ix_0$$

Es muy común encontrar bibliografía y trabajos en los cuales se utiliza el espacio cuatro-dimensional real en vez del espacio de Minkowski. Más aún, existen autores que abogan por el abandono total de la coordenada imaginaria ict (por ejemplo [7] pág. 51). Una de las objeciones principales en contra de dicha coordenada radica en que el “artificio” de un espacio cartesiano complejo solo es factible en Relatividad Especial; en Relatividad General el espacio es curvo y no se ha encontrado la manera de que dicha coordenada imaginaria funcione en general para espacios curvos. Además, el espacio cuatro-dimensional real se utiliza ampliamente en Teoría Cuántica de Campos y en Relatividad General.

En esta tesis no vamos a hablar de Relatividad General (tristemente) ni Teoría Cuántica de Campos. Las fórmulas en el espacio complejo de Minkowski suelen ser sencillas y claras, sin tener que recurrir al “tensor métrico” ni hacer distinción entre cantidades covariantes o contravariantes (objetos y cantidades de las que no hablaremos aquí). Por estas razones vamos a utilizar de ahora en adelante exclusivamente el formalismo del espacio complejo de Minkowski, de tal manera que los vectores de posición vendrán dados de la siguiente manera: (x, y, z, ict) , mientras que todos los demás cuatro-vectores tendrán como imaginaria su cuarta coordenada.

2.5. Dinámica Relativista de una Partícula

Dado que las ecuaciones de Newton del movimiento de una partícula son invariantes ante una transformación de Galileo, no lo son ante una transformación de Lorentz; deberán entonces generalizarse adecuadamente para obtener una ley de fuerza que satisfaga los requisitos de covariancia de la Relatividad Especial. Las generalizaciones que buscamos deben ser tales que para velocidades pequeñas frente a c las nuevas ecuaciones para una partícula se reduzcan a la forma conocida:

$$\frac{d}{dt}(mv_i) = F_i \quad (2.19)$$

Comencemos considerando el lado izquierdo de (2.19). En la mecánica de Newton obtenemos el momento de una partícula formando el producto de su masa por su velocidad. En mecánica relativista podríamos hacer lo mismo; el único cuatro-vector cuya parte espacial se reduce a \mathbf{v} en el caso de velocidades pequeñas es la cuatro-velocidad u_ν . Ahora bien, para que la masa de la partícula sea auténticamente una característica intrínseca a ella y no dependa del sistema de referencia desde el cual se mida, la masa deberá medirse en el sistema de referencia respecto del cuál la partícula se encuentre en reposo. dicho sistema siempre existe, al menos instantáneamente, y se le llama el “sistema propio” de la partícula. A la masa medida respecto de este sistema inercial es a la cantidad a la que le adjudicaremos el nombre de “masa” de la partícula. Con base en esto, definimos el vector cuatro-momento como el producto del vector cuatro-velocidad definido en (2.17) y la masa de la partícula:

$$\mathbb{P} = mu_\nu = (m\gamma v_x, m\gamma v_y, m\gamma v_z, im\gamma c)^T \quad (2.20)$$

A las tres primeras componentes del vector cuatro-momento les llamaremos el “momento mecánico” de la partícula. Ahora bien, a pesar de que podemos tomar a m como una propiedad invariante de la partícula, sabemos que el tiempo t no es invariante ante una transformación de Lorentz, pero podemos sustituirlo por el tiempo propio τ , el cuál tiende a t cuando $\beta \rightarrow 0$. La generalización que buscamos de las ecuaciones de movimiento de Newton para una partícula tiene entonces la forma:

$$\frac{d}{d\tau}(\mathbb{P}_\nu) = \mathbb{F}_\nu \quad (2.21)$$

donde \mathbb{F}_ν es un cuatro-vector llamado la cuatro-fuerza. Para poder vislumbrar el significado de cada una de las componentes del vector cuatro-fuerza podemos escribir la ecuación (2.21) de forma que se parezca todo lo posible a (2.19). De la relación entre t y τ , y de la definición de cuatro-velocidad, podemos escribir las componentes espaciales de la ecuación (2.21) de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv_i}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = \mathbb{F}_i \sqrt{1-\beta^2} \quad (2.22)$$

Si suponemos que (2.22) debe reducirse a (2.19) en el límite en el cual $\beta \ll 1$ entonces la fuerza Newtoniana \mathbf{F} y las componentes espaciales de la cuatro-fuerza \mathbb{F} se encuentran relacionadas de la siguiente manera

$$\mathbb{F}_i = \gamma F_i \quad (2.23)$$

A las tres primeras componentes de la cuatro-fuerza les llamaremos la *fuerza mecánica* ejercida sobre la partícula. Hasta ahora solo hemos analizado la parte espacial de la ecuación (2.21). Para obtener

la parte temporal del vector cuatro-fuerza formamos el producto escalar de (2.21) con la cuatro-velocidad:

$$\sum_{\nu=1}^4 u_{\nu} \frac{d}{d\tau}(m u_{\nu}) = \sum_{\nu=1}^4 \frac{d}{d\tau} \left(\frac{m}{2} u_{\nu} u_{\nu} \right) = \sum_{\nu=1}^4 \mathbb{F}_{\nu} u_{\nu} \quad (2.24)$$

Como el cuadrado de la norma de u_{ν} es la constante c^2 y la masa m que aquí interviene es, por definición, constante también, el segundo miembro de (2.24) se anula, de tal manera que obtenemos la siguiente expresión:

$$\sum_{\nu=1}^4 \mathbb{F}_{\nu} u_{\nu} = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{1 - \beta^2} + \frac{ic\mathbb{F}_4}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 0 \quad (2.25)$$

La cuarta componente del vector cuatro-fuerza está entonces dada por:

$$\mathbb{F}_4 = \frac{i}{c} \gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (2.26)$$

de tal manera que a partir de la cuarta componente de la ecuación (2.21) encontramos lo siguiente:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (2.27)$$

La expresión

$$T := \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2.28)$$

posee una interpretación física interesante. En el límite, cuando β^2 se hace mucho menor que 1, la ecuación (2.28) se puede desarrollar en la forma:

$$T \simeq mc^2 \left(1 + \frac{\beta^2}{2} \right) = mc^2 + \frac{mv^2}{2} \quad (2.29)$$

Este valor límite no concuerda con la forma no relativista que se esperaba para la energía cinética; existe un término adicional mc^2 , el cual recibe el nombre de *energía en reposo*. Para mantener la transición correcta a valores no relativistas, definimos la energía cinética relativista K como:

$$K := T - mc^2 = mc^2(\gamma - 1) \quad (2.30)$$

Podemos demostrar que la cantidad T dada por la expresión (2.28) presenta la propiedad de que toda situación en la que se conserve el momento mecánico debe conservar también a T . Para verificar esto último solamente debemos observar que, si se conserva el momento mecánico de la partícula entonces, por 2.18, las componentes espaciales del vector cuatro-fuerza serán nulas, con lo cual, en vista de las relaciones (2.23) y (2.27), obtenemos el resultado deseado. Esto significa que, la conservación del momento mecánico exige la conservación del vector cuatro-momento. La conservación del vector cuatro-momento es la generalización relativista de la conservación de la energía y el momento de la mecánica Newtoniana.

2.6. Consecuencias sobre la dinámica de objetos extendidos

A la luz de los conceptos de la relatividad especial, la descripción de la dinámica de los objetos con extensión espacial toma matices distintas si se realizan cambios entre sistemas de referencia inerciales.

Consideremos una barra de longitud δ_0 cuando está en reposo, moviéndose orientada sobre el eje X del sistema inercial del laboratorio (el sistema \mathbf{S}). Sea $q(t)$ el punto medio de dicha barra a lo largo del eje X. Como la barra se está moviendo, su longitud (medida respecto al sistema \mathbf{S}) será dependiente del tiempo debido al fenómeno de la contracción de la longitud, es decir: $\delta = \delta(t)$.

Sea $t_0 \in \mathbb{R}$ fijo. Consideremos un nuevo sistema de referencia inercial (al que llamaremos \mathbf{S}') obtenido a partir del sistema \mathbf{S} a través de una traslación espacio-temporal, donde t_0 es el nuevo origen del tiempo y $(q(t_0), 0, 0)$ es el nuevo origen espacial. En este nuevo sistema de referencia, entonces, el origen de coordenadas espaciales se encuentra justamente en el punto medio de la barra. Notemos que en dicho sistema se cumple que:

$$q'(0) = 0, \quad \frac{dq'}{dt'}(0) = \dot{q}(t_0), \quad \frac{d^2q'}{dt'^2}(0) = \ddot{q}(t_0) \quad (2.31)$$

Introduciremos ahora un tercer sistema inercial de referencia, al que llamaremos sistema \mathbf{S}'' , en el cual la barra está instantáneamente en reposo.

Definamos

$$v_0 := \frac{dq}{dt}(t_0) = \dot{q}(t_0)$$

Notemos que v_0 puede ser positiva o negativa.

El sistema inercial \mathbf{S}'' es un sistema de referencia que se mueve con velocidad constante $v_0 \hat{\mathbf{x}}'$, de tal manera que las coordenadas espacio-temporales de cualquier evento en dicho sistema, están relacionadas con las coordenadas espacio-temporales de dicho evento en el sistema \mathbf{S}' a través de las transformaciones de Lorentz:

$$\begin{aligned} x'' &= \gamma(x' - v_0 t') \\ y'' &= y' \\ z'' &= z' \\ t'' &= \gamma\left(t' - \frac{v_0 x'}{c^2}\right) \end{aligned} \quad (2.32)$$

donde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}$.

Consideremos pues, un evento cuyas coordenadas en \mathbf{S}' están dadas por:

$$b' = (q'(t'), y', z', ict')^T$$

entonces, b' es un evento asociado a un punto medio de la barra. Utilizando las ecuaciones 2.32, las coordenadas de dicho evento en el sistema \mathbf{S}'' vendrán dadas por:

$$b'' = (q''(t''), y'', z'', ict'')^T$$

con

$$\begin{aligned} q''(t'') &= \gamma(q'(t') - vt') \\ t'' &= \gamma\left(t' - \frac{v_0 x'}{c^2}\right) \end{aligned}$$

La velocidad y la aceleración del punto medio de la barra en el sistema inercial \mathbf{S}'' , en términos de aquellas medidas en el sistema \mathbf{S}' son:

$$\frac{dq''}{dt''}(t'') = \frac{\dot{q}(t' + t_0) - v_0}{1 - \frac{v_0}{c^2}\dot{q}(t' + t_0)} \quad (2.33)$$

$$\frac{d^2q''}{dt''^2}(t'') = \frac{\ddot{q}(t' + t_0)}{\gamma^3[1 - \frac{v_0}{c^2}\dot{q}(t' + t_0)]^3} \quad (2.34)$$

A partir de estas relaciones podemos obtener que, en el instante $t'' = 0$ se tiene:

$$t'' = 0, \quad \frac{dq''}{dt''}(0) = 0 \quad (2.35)$$

$$q''(0) = 0, \quad \frac{d^2q''}{dt''^2}(0) = \gamma^3\ddot{q}(t_0) \quad (2.36)$$

Estas relaciones implican que el punto medio de la barra $q''(t'')$ esta en reposo en el origen de coordenadas del sistema \mathbf{S}'' en el instante $t'' = 0$ aunque puede tener una aceleración distinta de cero. Sin embargo, esto no significa que los demás puntos de la barra estén en reposo en el sistema \mathbf{S}'' en el instante $t'' = 0$. Es aquí donde los argumentos relativistas acerca de la relatividad de la simultaneidad tienen consecuencias sobre la descripción dinámica de un cuerpo con extensión. Aunque todos los puntos de la barra se muevan a la misma velocidad en el sistema \mathbf{S}' , esto no se cumple necesariamente en el sistema \mathbf{S}'' ya que los eventos con coordenadas $(x' \neq 0, t' = 0)$ en \mathbf{S}' tienen coordenadas $(x'' \neq 0, t'' \neq 0)$ en \mathbf{S}'' (Fig. 2.8)

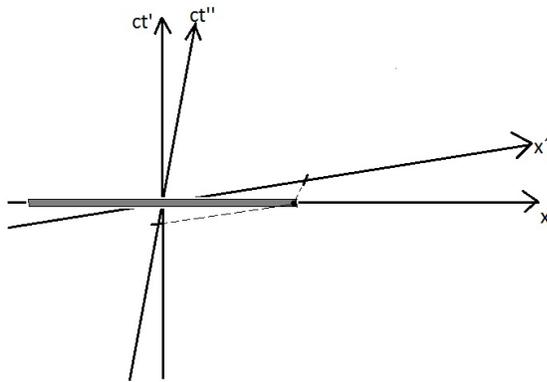


Figura 2.8:

Supongamos entonces que \mathbf{S}'' es un sistema inercial en el cual todos los puntos de la barra se encuentran instantáneamente en reposo en el instante $t'' = 0$. Esta condición sigue sin ser suficiente para asegurar que todos los puntos de la barra se encuentren en reposo, o en su defecto se muevan a la misma velocidad que el punto medio, respecto del sistema \mathbf{S}'' en el instante $t'' = 0$. Esto se debe a la extensión misma de la barra ya que, al ocupar (en \mathbf{S}') puntos con $x' \neq 0$, se sigue que la barra ocupa, en el sistema \mathbf{S}'' , puntos con $t'' \neq 0$. Vemos entonces cómo, la extensión espacial de la barra la obliga a ocupar instantes de tiempo distintos en distintos sistemas de referencia.



Capítulo 3

Fundamentos de Teoría Electromagnética

Talent sets the floor, but character sets the ceiling
Bill Belichick.

3.1. Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones fundamentales de la electrodinámica reciben el nombre de ecuaciones de Maxwell. En unidades Gaussianas, pueden expresarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}\tag{3.1}$$

Estas cuatro ecuaciones diferenciales, junto con la ley de fuerza de Lorentz:

$$\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)\tag{3.2}$$

resumen todo el contenido teórico de la electrodinámica clásica. Notemos que incluso la ecuación de continuidad:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}\tag{3.3}$$

puede obtenerse a partir de ellas aplicando el operador divergencia a la ley de Ampere-Maxwell (cuarta ecuación en el conjunto (3.1)).

Las ecuaciones de Maxwell en la forma (3.1) son completas y correctas. Sin embargo, cuando se trabaja con materiales sujetos a polarizaciones eléctricas y magnéticas existe una forma más conveniente de escribirlas. Para materiales polarizados existirán acumulaciones de carga y corriente “acotados” sobre las que no es posible ejercer un control directo. En ese caso resulta más conveniente reformular las ecuaciones de Maxwell de manera que en ellas se haga referencia explícita solo a aquellas cantidades que se pueden controlar directamente: las cargas y corrientes “libres”.

Sabemos que una polarización eléctrica \mathbf{P} produce una densidad de carga acotada:

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (3.4)$$

y una corriente de polarización:

$$\mathbf{J}_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (3.5)$$

Así mismo, una polarización magnética \mathbf{M} produce una densidad de corriente acotada:

$$\mathbf{J}_b = \nabla \times \mathbf{M} \quad (3.6)$$

En vista de esto, la densidad de carga total poseerá dos contribuciones:

$$\rho = \rho_f + \rho_b = \rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P}$$

mientras que la densidad de corriente poseerá tres contribuciones:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_b + \mathbf{J}_p = \mathbf{J}_f + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

Definiendo el vector de desplazamiento eléctrico \mathbf{D} y el vector \mathbf{H} como:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} \\ \mathbf{H} &= \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}. \end{aligned}$$

las ecuaciones de Maxwell en presencia de medios materiales, en términos de las cargas y corrientes “libres”, toman la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= 4\pi\rho_f \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_f + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Aunque el conjunto de ecuaciones (3.7) separa de forma conveniente las cargas y corrientes en partes “libre” y “acotada”, posee la desventaja de que contiene tanto a \mathbf{E} y \mathbf{D} , como a \mathbf{B} y \mathbf{H} . Por consiguiente dicho conjunto debe ser complementado con relaciones constitutivas apropiadas, que expresen a \mathbf{D} y a \mathbf{H} en términos de \mathbf{E} y \mathbf{B} . Estas relaciones dependen de la naturaleza particular de cada medio; para medios lineales se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \chi_e \mathbf{E} \\ \mathbf{M} &= \frac{\chi_m}{(1 + \chi_m)\mu_0} \mathbf{B} \end{aligned} \quad (3.8)$$

de forma que:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= (1 + 4\pi\chi_e)\mathbf{E} \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu_0(1 + \chi_m)} \mathbf{B} \end{aligned} \quad (3.9)$$

3.2. Condiciones en la frontera

Las ecuaciones de Maxwell (3.7) son ecuaciones diferenciales que se aplican localmente en cada punto del espacio-tiempo (\mathbf{x}, \mathbf{t}) . Por medio del teorema de la divergencia y del teorema de Stokes [32], estas ecuaciones pueden reescribirse en forma integral. Sean V un volumen finito de espacio, S la superficie cerrada (o unión de superficies) que rodea a dicho volumen, da un elemento de área en la superficie y $\hat{\mathbf{n}}$ la normal unitaria exterior a la superficie en da apuntando hacia afuera. Si aplicamos el teorema de la divergencia a la primera y a la segunda de las ecuaciones en (3.7) obtenemos lo siguiente:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da = 4\pi \iiint_V \rho dV' \quad (3.10)$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da = 0 \quad (3.11)$$

De manera análoga, sean S' una superficie abierta con contorno cerrado C , $d\mathbf{l}$ el elemento de línea sobre dicho contorno, da un elemento de área en S' y $\hat{\mathbf{n}}'$ un vector unitario normal en da apuntando en la dirección dada por la regla de la mano derecha utilizando el sentido de integración alrededor del contorno C . Entonces aplicando el teorema de Stokes a la segunda y tercera ecuación en (3.7) obtenemos:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{S'} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}}' \, da \quad (3.12)$$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{c} \int_S \left[4\pi \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}}' \, da \quad (3.13)$$

Esta forma de las ecuaciones de Maxwell puede utilizarse directamente para deducir las relaciones que cumplen las componentes tangencial y normal de los campos al cruzar una superficie que divide dos medios diferentes, con posiblemente una densidad superficial de carga o de corriente en la interfase. Un arreglo geométrico apropiado se muestra en la Figura 3.1. Suponemos que la superficie frontera posee una densidad superficial de carga σ y una densidad superficial de corriente \mathbf{K} . El volumen V es una pequeña caja, la cual tiene la mitad de su volumen en uno de los medios y la otra mitad en el otro, con la normal $\hat{\mathbf{n}}$ sobre su tapa superior apuntando del medio 1 hacia el medio 2. Una mitad del contorno rectangular C se encuentra dentro de uno de los medios y la otra mitad se encuentra dentro del otro, este circuito se encuentra orientado de tal manera que su plano es perpendicular a la superficie, y por tanto su vector normal es tangente a dicha superficie (en la Figura \mathbf{t} apunta hacia afuera de la página). Primeramente apliquemos las ecuaciones (3.10) y (3.11) a la pequeña caja de volumen V . En el límite en el que la caja es muy poco profunda las superficies de los lados no contribuyen a las integrales en el lado izquierdo de (3.10) y (3.11), únicamente las tapas superior e inferior tienen una contribución. Si las tapas superior e inferior son paralelas, tangentes a la superficie de interfase, y de área Δa , entonces la integral del lado izquierdo en (3.10) es:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da = (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, \Delta a$$

y de manera análoga ocurre con (3.11). Si la densidad de carga ρ es tal que existe una densidad superficial de carga σ en la interfase, entonces la integral del lado derecho de (3.10) es

$$\iiint_V \rho \, dV' = \sigma \, \Delta a$$

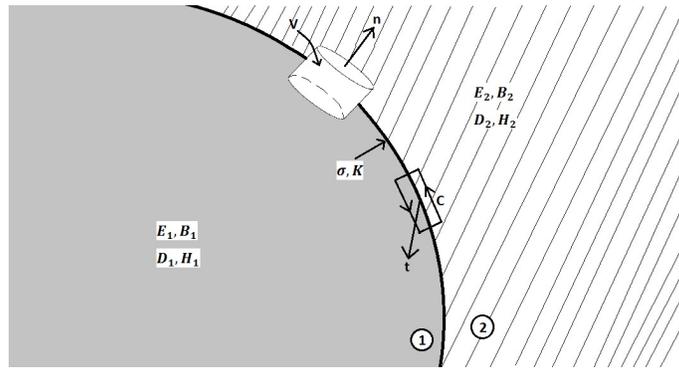


Figura 3.1: Diagrama esquemático de una superficie límite (línea negra curva) entre medios diferentes. Suponemos que la superficie frontera posee una densidad superficial de carga σ y una densidad superficial de corriente \mathbf{K} . El volumen V es una pequeña caja, la cual tiene la mitad de su volumen en uno de los medios y la otra mitad en el otro, con la normal $\hat{\mathbf{n}}$ sobre su tapa superior apuntando del medio 1 hacia el medio 2. Una mitad del contorno rectangular C se encuentra dentro de uno de los medios y la otra mitad se encuentra dentro del otro, este circuito se encuentra orientado de tal manera que su plano es perpendicular a la superficie, y por tanto su vector normal es tangente a dicha superficie es decir, \mathbf{t} apunta hacia afuera de la página.

Por lo tanto, las componentes normales \mathbf{D} y \mathbf{B} en cada lado de la interfase se encuentran relacionadas por:

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} &= 4\pi\sigma \\ (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} &= 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Es decir, la componente normal de \mathbf{B} es continua en la interfase, mientras que la discontinuidad en la componente normal de \mathbf{D} en cada punto es proporcional a la densidad superficial de carga en ese punto.

De manera análoga podemos utilizar el circuito de Stokes infinitesimal C para determinar las discontinuidades en las componentes tangenciales de \mathbf{E} y \mathbf{H} . Si los lados más cortos del contorno C son de longitud despreciable, de manera que el contorno no penetre mucho en el interior de cada medio, y cada uno de los lados más largos es paralelo a la superficie y tiene longitud Δl , entonces la integral del lado izquierdo de (3.12) será

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = (\mathbf{t} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \Delta l$$

y análogamente para el lado izquierdo de (3.13). El lado derecho de (3.13) se anula debido a que $\partial\mathbf{B}/\partial t$ es finita en la superficie y además el área del circuito tiende a cero conforme la longitud de los lados más cortos tiende a cero. El lado derecho de (3.13) no se anula en general, sin embargo, si existe una densidad de corriente superficial \mathbf{K} sobre la interfase entonces se tendrá que

$$\int_{S'} \left[\mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \right] \cdot \mathbf{t} \, da = \frac{4\pi}{c} \mathbf{K} \cdot \mathbf{t} \, \Delta l$$

Las componentes tangenciales de \mathbf{E} y \mathbf{H} a cada lado de la interfase se encuentran relacionadas de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) &= 0 \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{K}\end{aligned}\tag{3.15}$$

En (3.15) se sobreentiende que la densidad de carga superficial \mathbf{K} tiene únicamente componentes paralelas a la superficie. La componente tangencial de \mathbf{E} al cruzar la superficie de interfase es continua, mientras que la componente tangencial de \mathbf{H} es discontinua por una cantidad que es proporcional a la magnitud de la densidad de corriente superficial \mathbf{K} y cuya magnitud es paralela a $\mathbf{K} \times \hat{\mathbf{n}}$.

Las ecuaciones (3.14) y (3.15) se utilizan para resolver las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial en diferentes regiones y poder conectar las soluciones de manera que se obtenga el valor de los campos sobre todo el espacio.

3.3. Potenciales Electromagnéticos

Las ecuaciones de Maxwell constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de primer orden entre las componentes de los campos eléctrico y magnético. Dado que cada campo posee en general tres componentes, resulta más apropiado recurrir a la formulación de dichos campos en términos de potenciales, a modo de obtener un número menor de ecuaciones de segundo orden.

Puesto que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, y como la divergencia de un rotacional es siempre nula ([32]) podemos definir un potencial vectorial \mathbf{A} tal que:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}\tag{3.16}$$

De la ley de Faraday (tercer ecuación del conjunto (3.1)) se tendrá que:

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0\tag{3.17}$$

Dado que toda función vectorial cuyo rotacional sea nulo puede ser expresada como el gradiente de una función escalar, podemos definir el potencial escalar ϕ tal que:

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi$$

de tal manera que:

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\tag{3.18}$$

Definidos de esta manera, los potenciales \mathbf{A} y ϕ satisfacen automáticamente las dos ecuaciones de Maxwell homogéneas. El comportamiento dinámico de \mathbf{A} y ϕ se determina mediante las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas (tercera y cuarta ecuación del conjunto (3.1)), las cuales toman la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) &= -4\pi \rho \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) &= -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}\end{aligned}\tag{3.19}$$

Con esto hemos reducido el conjunto completo de cuatro ecuaciones de Maxwell a solamente dos. Pero dichas ecuaciones son todavía ecuaciones simultáneas. Para desacoplar el sistema podemos aprovechar todavía una arbitrariedad implicada en la definición de los dos potenciales.

3.3.1. Transformaciones de Norma

Dado que el campo magnético \mathbf{B} se relaciona con el potencial vectorial \mathbf{A} a través de la ecuación (3.16), dicho potencial vectorial es, en cierto modo, arbitrario, pues se le puede sumar el gradiente de una función escalar f cualquiera:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f$$

sin que ello altere el valor del campo magnético \mathbf{B} . Para que el campo eléctrico también resulte inalterado debemos transformar simultáneamente el potencial escalar:

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}$$

Con una transformación de este tipo, ninguna de las cantidades físicas \mathbf{E} y \mathbf{B} sufre cambio alguno. A este tipo de transformaciones les llamamos transformaciones de norma, y pueden ser usadas para ajustar el valor de la divergencia de \mathbf{A} de tal manera que las ecuaciones (3.19) se simplifiquen. Aunque existen muchas normas distintas nosotros hablaremos de dos muy importantes.

3.3.2. La norma de Coulomb y la norma de Lorentz

La norma de Coulomb

Exijamos que

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (3.20)$$

para todo t . En este caso, de acuerdo al conjunto (3.19), el potencial escalar satisfará la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 \phi = -4\pi\rho \quad (3.21)$$

cuya solución es (cuando ϕ tiende a cero en el infinito):

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (3.22)$$

Dada la similitud de ésta última ecuación con la ley de Coulomb en electrostática, esta norma recibe el nombre de *norma de Coulomb*. Con esta elección, el potencial vectorial \mathbf{A} satisface la ecuación de ondas no homogénea:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \quad (3.23)$$

La ventaja de la norma de Coulomb es que el potencial escalar es relativamente fácil de calcular una vez que se conocen las fuentes; la desventaja es que el potencial vectorial es particularmente difícil de calcular.

La norma de Lorentz

Si en vez de pedir que la divergencia del potencial escalar sea cero pedimos que:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (3.24)$$

para todo t , entonces los potenciales escalar y vectorial satisfarán el siguiente par de ecuaciones desacopladas:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= -4\pi \rho \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Esta elección para la divergencia de $\nabla \cdot \mathbf{A}$ recibe el nombre de *norma de Lorentz*.

Una de las ventajas que presenta la norma de Lorentz es el tratamiento igualitario que reciben ϕ y \mathbf{A} : el mismo operador diferencial:

$$\square^2 := -\nabla^2 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (3.26)$$

llamado el D'Alembertiano, se aplica en ambas ecuaciones:

$$\begin{aligned} \square^2 \phi &= 4\pi \rho \\ \square^2 \mathbf{A} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Este tratamiento igualitario de ϕ y \mathbf{A} es particularmente útil en el contexto de la relatividad especial, en donde el D'Alembertiano es la generalización natural del Laplaciano. En la siguiente sección veremos como las ecuaciones del electromagnetismo adoptan una forma particularmente sencilla y muy útil teóricamente en el contexto de la relatividad especial, cuando se hace uso de la norma de Lorentz.

3.4. Covariancia de la Electrodinámica

La invariancia de las ecuaciones de la electrodinámica bajo las transformaciones de Lorentz fué demostrada por Lorentz y Poincaré antes de la formulación de la teoría especial de la relatividad. Esta invariancia de forma o *covariancia* de las ecuaciones de Maxwell y de la ley de fuerza de Lorentz implica que las diversas cantidades electromagnéticas ρ , \mathbf{J} , \mathbf{E} , \mathbf{B} que entran dentro de estas ecuaciones se transforman de una manera bien definida bajo las transformaciones de Lorentz, de tal manera que todos los términos de las ecuaciones pueden tener un comportamiento consistente bajo estas transformaciones.

La invariancia experimental de la carga eléctrica y el requisito de la covariancia de la ley de fuerza de Lorentz determinan las propiedades del campo electromagnético bajo transformaciones de Lorentz.

Por simplicidad comencemos con las ecuaciones de Maxwell microscópicas, sin \mathbf{D} ni \mathbf{H} . Consideremos la ecuación de continuidad (Ec. 3.3). Las cantidades ρ y \mathbf{J} son parte de un mismo cuatro-vector,

el cuatro-vector de corriente eléctrica (véase [1] sec. 11.9):

$$J = (J_x, J_y, J_z, ic\rho,) \quad (3.28)$$

De tal manera que la ecuación de continuidad puede escribirse de manera manifiestamente covariante:

$$\sum_{\mu=1}^4 \frac{\partial J_{\mu}}{\partial x_{\mu}} = 0 \quad (3.29)$$

donde las coordenadas se enumeran de la siguiente manera: $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ y $x_4 = ict$.

Consideremos ahora las ecuaciones diferenciales para el potencial escalar ϕ y el potencial vectorial \mathbf{A} en la norma de Lorentz (Ecuaciones (3.25)). Del lado derecho de (3.25) se encuentran las componentes del cuatro-vector de corriente eléctrica, de modo que la covariancia de Lorentz requiere que los potenciales ϕ y \mathbf{A} sean también las componentes de un cuatro-vector, el cuatro-vector de potencial:

$$A = (A_x, A_y, A_z, i\phi) \quad (3.30)$$

de tal manera que las ecuaciones de onda (3.25) y la condición de Lorentz (3.24) toman formas manifiestamente covariantes:

$$\begin{aligned} \square^2 A_{\alpha} &= -\frac{4\pi}{c} J_{\alpha} \\ \sum_{\alpha=1}^4 \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} &= 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

en donde el operador \square^2 es el operador D'Alembertiano definido en (3.26).

Los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} se expresan, de acuerdo con las Ecuaciones (3.16) y (3.18), en términos de los potenciales de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \end{aligned}$$

Estas ecuaciones implican que los campos eléctrico y magnético son los elementos de un tensor de segundo rango, llamado tensor electromagnético o tensor de Faraday, cuyas componentes son:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_{\nu}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x_{\nu}} \quad (3.32)$$

las cuales pueden ponerse en forma matricial de la siguiente manera:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -iE_x \\ -B_z & 0 & B_x & -iE_y \\ B_y & -B_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

Para completar la demostración de la covariancia de la electrodinámica, debemos reescribir las ecuaciones de Maxwell mismas en una forma explícitamente covariante. Comenzamos con las ecuaciones inhomogéneas:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho \\ \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}\end{aligned}$$

las cuales, en términos del tensor de Faraday $F^{\mu\nu}$ y del cuatro-vector de corriente J^μ toman la siguiente forma (la cual es explícitamente covariante):

$$\sum_{\alpha=1}^4 \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} = \frac{4\pi}{c} J_\beta \quad (3.34)$$

Análogamente, las dos ecuaciones homogéneas:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0\end{aligned}$$

en términos de $F_{\alpha\beta}$ quedan de la siguiente manera:

$$\frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial F_{\gamma\alpha}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} = 0 \quad (3.35)$$

Con las definiciones de J_α , A_α y $F_{\alpha\beta}$ así como las ecuaciones (3.34) y (3.35), queda establecida la covariancia de las ecuaciones de Maxwell.

En el caso de las ecuaciones de Maxwell macroscópicas, necesitamos hacer una distinción entre dos tensores de campo; $F_{\alpha\beta}$ formado por las componentes de los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} y el tensor $M_{\alpha\beta}$ el cual se forma a partir de $F_{\alpha\beta}$ reemplazando E_j por $-P_j$ y B_j por M_j , respectivamente. De esta manera, las componentes de $M_{\alpha\beta}$ son las componentes cartesianas de la polarización y la magnetización, las cuales pueden ponerse en forma matricial de la siguiente manera:

$$M_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & M_z & -M_y & iP_x \\ -M_z & 0 & M_x & iP_y \\ M_y & -M_x & 0 & iP_z \\ -iP_x & -iP_y & -iP_z & 0 \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

A partir de estos dos tensores, formamos el tensor $H_{\mu\nu} := F_{\mu\nu} - 4\pi M_{\mu\nu}$. Siendo así, las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas se reescriben en forma manifiestamente covariante de la siguiente manera:

$$\sum_{\nu=1}^4 \frac{\partial H_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi}{c} J_\mu \quad (3.37)$$

3.4.1. Transformación de los campos electromagnéticos

Dado que los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} son los elementos de un tensor de rango dos $F^{\alpha\beta}$, sus valores en algún sistema de referencia inercial $\tilde{\mathbf{S}}$ pueden ser expresados en términos de los valores en otro sistema de referencia \mathbf{S} mediante la ecuación de transformación de las componentes de un tensor:

$$F_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} = \sum_{\gamma=1}^4 \sum_{\delta=1}^4 \frac{\partial x_{\tilde{\alpha}}}{\partial x_{\gamma}} \frac{\partial x_{\tilde{\beta}}}{\partial x_{\delta}} F_{\gamma\delta} \quad (3.38)$$

lo mismo ocurre en el caso del tensor $M_{\mu\nu}$ cuyas componentes se transforman según la ecuación:

$$M_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} = \sum_{\gamma=1}^4 \sum_{\delta=1}^4 \frac{\partial x_{\tilde{\alpha}}}{\partial x_{\gamma}} \frac{\partial x_{\tilde{\beta}}}{\partial x_{\delta}} M_{\gamma\delta} \quad (3.39)$$

Para la transformación de Lorentz dada por el conjunto de ecuaciones (2.6), la cual corresponde a una transformación a lo largo del eje x_1 con velocidad v , de un sistema \mathbf{S} a un sistema $\tilde{\mathbf{S}}$, las ecuaciones de transformación para las distintas componentes de los campos eléctrico y magnético toman la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_x &= E_x & \tilde{E}_y &= \gamma(E_y - \beta B_z) & \tilde{E}_z &= \gamma(E_z + \beta B_y) \\ \tilde{B}_x &= B_x & \tilde{B}_y &= \gamma(B_y + \beta E_z) & \tilde{B}_z &= \gamma(B_z - \beta E_y) \end{aligned} \quad (3.40)$$

en donde $\beta = \frac{v}{c}$. La inversa de la transformación dada en las ecuaciones (3.40) se obtiene intercambiando las cantidades primadas por las no primadas y cambiando β por $-\beta$.

Dado que las fuentes del campo electromagnético ρ y \mathbf{J} son partes de un mismo cuatro-vector, al cambiar de sistema de referencia dichas cantidades se transforman de la siguiente manera:

$$J_{\mu} = \sum_{\nu=1}^4 \frac{\partial x_{\mu}}{\partial x_{\nu}} J_{\nu} \quad (3.41)$$

Una de las consecuencias más importantes de las ecuaciones de transformación de los campos eléctrico y magnético es que \mathbf{E} y \mathbf{B} no tienen existencia independiente. Por ejemplo, un campo que, en un sistema de referencia dado aparece como un campo puramente eléctrico, en otro sistema inercial puede aparecer como la combinación de un campo eléctrico y uno magnético. Esto significa que ambos campos están completamente íntimamente relacionados, de manera que, más que hablar de \mathbf{E} y \mathbf{B} separadamente, deberíamos hablar de un *campo electromagnético* $F^{\alpha\beta}$. 

Capítulo 4

Ecuaciones de evolución para un espejo móvil y un campo electromagnético

*It is not wanting to win that makes you a winner,
it's refusing to fail.
Peyton Manning.*

En este capítulo reproducimos los conceptos y resultados que se exponen en [17]. Estudiamos un sistema compuesto por un espejo móvil y un campo electromagnético. El objetivo es utilizar los conceptos introducidos en los capítulos anteriores para establecer las ecuaciones clásicas exactas que gobiernan la evolución del sistema espejo-campo a partir de primeros principios. A partir de dichas ecuaciones exactas se deducen ecuaciones aproximadas, que son correctas a primer orden en la velocidad y la aceleración del espejo. Como consecuencia de estos resultados encontramos que el movimiento del espejo y su interacción con el campo producen una masa dependiente de la posición del espejo y del tiempo, la cual se encuentra relacionada con la *masa efectiva* tomada en diversos tratamientos fenomenológicos de estos sistemas ([26] Sec. II B.). Además de ello encontramos una fuerza dependiente de la velocidad, la cual se encuentra relacionada con el enfriamiento de objetos mecánicos. Por su parte, el campo electromagnético obedece una ecuación de onda cuyos coeficientes dependen de la posición, la velocidad y la aceleración del espejo, más términos adicionales que son pequeños cuando la escala de tiempo de evolución del espejo es mucho más grande que la escala de tiempo de evolución del campo.

4.1. Descripción del sistema

El sistema a estudiar se compone de una lámina delgada móvil, (a la cual, de ahora en adelante, denominaremos de forma genérica como “espejo”) y un campo electromagnético. Asumiremos que el espejo tiene longitud y ancho infinitos, y un grosor δ_0 cuando está en reposo. Además de esto haremos la suposición de que el material del espejo posee las siguientes propiedades cuando se encuentra en reposo (a dichas propiedades les llamaremos *propiedades en reposo del espejo*):

- Es un material lineal e isotrópico, con susceptibilidad eléctrica χ .
- Es no-magnetizable ($\mathbf{M} = \mathbf{0}$).
- Es ohmico, con conductividad σ .

- No posee densidad de carga libre.

A menos que se especifique lo contrario, supondremos que las funciones χ y σ son derivables con primera derivada continua en todo el espacio, además de que χ y σ se supondrán iguales a cero fuera de la región ocupada por el espejo.

Para establecer las ecuaciones de evolución del sistema espejo-campo primero introduciremos un sistema de referencia inercial para su descripción asociado al laboratorio, al que llamaremos sistema **LS**:

El sistema **LS** será un sistema inercial en el cual construimos un sistema coordenado cartesiano orientado a derechas, eligiendo tres direcciones mutuamente perpendiculares para cada uno de los ejes coordenados. Las coordenadas de cualquier evento en dicho sistema serán denotadas por (x, y, z, ict) siendo $\mathbf{r} := (x, y, z)$ y c la velocidad de la luz en el vacío. El espejo solo podrá moverse a lo largo del eje x y ocupará la región $R(t)$ definida como (Fig 4.1):

$$R(t) = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 : |x - q(t)| \leq \frac{\delta(t)}{2}\} \quad (4.1)$$

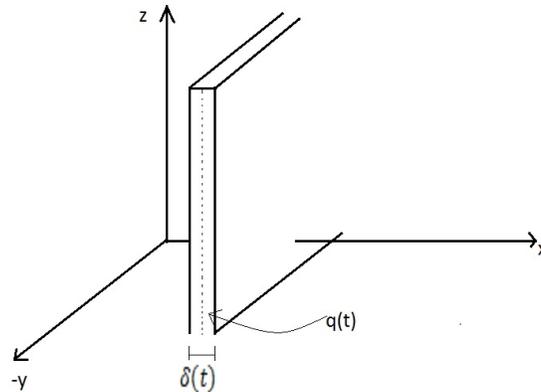


Figura 4.1: Espejo Móvil

Aquí $q(t)$ es la posición del plano medio del espejo a lo largo del eje x , mientras que $\delta(t)$ es el grosor en esta misma dirección. Debido al fenómeno de contracción de Lorentz-Fitzgerald, el grosor $\delta(t)$ es una función dependiente del tiempo. En adelante llamaremos a $\delta(t)$ el grosor y a $q(t)$ el punto medio del espejo en el sistema **LS**. Además de todo esto, asumiremos también que:

- Fuera de la región definida por $R(t)$ solo hay vacío.
- Todas las cantidades electromagnéticas serán funciones únicamente de x y de t

El principal objetivo ahora es deducir la forma que tienen las cantidades $\mathbf{P}(x, t)$, $\mathbf{M}(x, t)$, $\mathbf{J}_f(x, t)$ y $\rho_f(x, t)$ respecto del sistema del laboratorio. Dado que las velocidades consideradas en este tipo de sistemas son pequeñas comparadas con la velocidad de la luz, resulta tentador calcular dichas cantidades asumiendo que las propiedades que posee el espejo cuando se encuentra en reposo son aún válidas cuando está en movimiento. Sin embargo, dado que en las siguientes secciones demostraremos que dicho enfoque desprecia muchos fenómenos importantes, utilizaremos aquí una manera distinta

para determinar las cantidades mencionadas. El procedimiento a seguir puede resumirse de la siguiente manera; a cada instante de tiempo en el sistema \mathbf{LS} consideraremos otro sistema inercial \mathbf{MS} en donde el punto medio del espejo $q(t)$ se encuentre instantáneamente en reposo. En dicho sistema, si la velocidad y la aceleración del espejo son suficientemente pequeñas, el espejo se encontrará instantáneamente en reposo durante un pequeño intervalo de tiempo. Aprovechando esto, utilizaremos las propiedades en reposo del espejo para calcular la polarización, la magnetización, la densidad de corriente y la densidad de carga libre en el sistema \mathbf{MS} . Después de esto, usaremos las transformaciones de Lorentz para calcular los valores de dichas cantidades en el sistema del laboratorio.

Sea $t_0 \in \mathbb{R}$ fijo. Consideremos un nuevo sistema de referencia inercial (al cual denotaremos por \mathbf{LS}_0) el cual se obtiene a partir del sistema \mathbf{LS} por medio de una traslación en el espacio y en el tiempo, siendo t_0 el nuevo origen del tiempo y $(q(t_0), 0, 0)$ el nuevo origen espacial. Es decir, si las coordenadas de un evento en \mathbf{LS}_0 se denotan por (x', y', z', ict') , entonces dichas coordenadas se encuentran relacionadas con las coordenadas correspondientes (x, y, z, ict) en el sistema \mathbf{LS} a través del siguiente cambio de coordenadas:

$$\begin{aligned} x' &= x - q(t_0) & y' &= y \\ t' &= t - t_0 & z' &= z \end{aligned} \quad (4.2)$$

En este caso nuevamente definimos $\mathbf{r} := (x', y', z')$. Ahora $\mathbf{E}'(x', t')$ denota el campo eléctrico en \mathbf{LS}_0 . De manera análoga se denotarán las demás cantidades electromagnéticas en \mathbf{LS}_0 , como son el campo magnético $\mathbf{B}'(x', t')$, la polarización $\mathbf{P}'(x', t')$, la magnetización $\mathbf{M}'(x', t')$, la densidad de corriente libre $\mathbf{J}'_f(x', t')$ y la densidad de carga libre $\rho_f(x', t')$. Observemos que una cantidad $f'(x', t')$ en \mathbf{LS}_0 se encuentra relacionada con la correspondiente cantidad $f(x, t)$ en \mathbf{LS} de la siguiente manera.

$$f'(x', t') = f(x' + q(t_0), t' + t_0) \quad (4.3)$$

además, respecto al sistema \mathbf{LS}_0 , el espejo ocupará la región

$$R'(t') = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 : |x' - q'(t')| \leq \frac{\delta'(t')}{2}\} \quad (4.4)$$

en donde

$$q'(t') = q(t' + t_0) - q(t_0), \quad \delta'(t') = \delta(t' + t_0) \quad (4.5)$$

son el punto medio y el grosor a lo largo del eje x' .

En particular, en el instante $t' = 0$ el espejo ocupa la región:

$$R'(0) = \{\mathbf{r}' \in \mathbb{R}^3 : |x'| \leq \frac{\delta(t_0)}{2}\} \quad (4.6)$$

y su punto medio q' satisface que:

$$q'(0) = 0, \quad \frac{dq'}{dt'}(0) = \dot{q}(t_0), \quad \frac{d^2q'}{dt'^2}(0) = \ddot{q}(t_0) \quad (4.7)$$

El sistema \mathbf{LS}_0 es un sistema inercial en el cual el origen de coordenadas espaciales se encuentra justo en el punto que ocupa el punto medio del espejo en el instante t_0 , mientras que el origen del tiempo se ha colocado en el instante t_0 .

Ahora introduciremos un nuevo sistema de referencia en el cual el espejo esté instantáneamente en reposo. Definamos:

$$\nu_0 = \dot{q}(t_0), \quad \beta_0 := \frac{\nu_0}{c}, \quad \gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} \quad (4.8)$$

en donde ν_0 , y por consiguiente β_0 pueden ser positivos o negativos.

Consideremos ahora un nuevo sistema de referencia inercial \mathbf{MS}_0 el cual se mueve a una velocidad $\nu_0 \hat{\mathbf{x}}'$ respecto al sistema \mathbf{LS}_0 . Si las coordenadas de cualquier evento en este nuevo sistema inercial están denotadas por (x'', y'', z'', ict'') , entonces dichas coordenadas están relacionadas con las correspondientes coordenadas (x', y', z', ict') en el sistema \mathbf{LS}_0 a través de las transformaciones de Lorentz (Eqs. (2.6)).

$$\begin{aligned} x'' &= \gamma(x' - vt') \\ y'' &= y' \\ z'' &= z' \\ t'' &= \gamma\left(t' - \frac{vx'}{c^2}\right) \end{aligned} \quad (4.9)$$

El origen espacio-temporal ($\mathbf{r}' = \mathbf{0}, ict' = 0$) del sistema \mathbf{LS}_0 coincide con el origen espacio-temporal ($\mathbf{r}'' = \mathbf{0}, ict'' = 0$) del sistema \mathbf{MS}_0 . En el sistema \mathbf{MS}_0 todas las cantidades electromagnéticas aparecerán con una doble prima; $\mathbf{E}''(x'', t'')$ y $\mathbf{B}''(x'', t'')$ denotan al campo eléctrico y magnético respectivamente, $\mathbf{P}''(x'', t'')$ y $\mathbf{M}''(x'', t'')$ denotan a la polarización y la magnetización, mientras que $\mathbf{J}''(x'', t'')$ y $\rho_f''(x'', t'')$ son la densidad de corriente libre y la densidad de carga libre respectivamente.

Dado que el espejo es un cuerpo rígido con extensión espacial, la discusión dada en la sección 2.6 acerca de las consecuencias que en la descripción de la dinámica de los objetos extendidos tiene la relatividad especial son de mucha importancia en el sistema que estamos analizando. Consideremos un evento cuyas coordenadas en el sistema \mathbf{LS}_0 están dadas por:

$$b' = (q'(t'), y', z', ict')^T \quad (4.10)$$

Dicho evento es un evento asociado con un punto medio del espejo. Usando el conjunto de ecuaciones (4.9) dicho evento tendrá las siguientes coordenadas en el sistema \mathbf{MS}_0 :

$$b'' = (q''(t''), y'', z'', ict'')^T \quad (4.11)$$

con

$$\begin{aligned} q''(t'') &= \gamma_0[q'(t') - \nu_0 t'] \\ t'' &= \gamma_0\left[t' - \frac{\nu_0}{c^2} q'(t')\right] \end{aligned} \quad (4.12)$$

La velocidad y aceleración del punto medio del espejo en el sistema \mathbf{MS}_0 están relacionadas con aquellas mismas en el sistema \mathbf{LS}_0 a través del conjunto de ecuaciones (2.33) y (2.34), las cuales tienen, como casos particulares, las relaciones (2.35) y (2.36). Las conclusiones dadas en la sección 2.6 son válidas también aquí: el punto medio del espejo $q''(t'')$ está en reposo en el origen de coordenadas del sistema \mathbf{MS}_0 en el instante $t'' = 0$ aunque puede tener una aceleración distinta de cero, sin embargo, esto no significa que los demás puntos de éste estén también en reposo respecto del sistema \mathbf{MS}_0 en el instante $t' = 0$. Aunque todos los puntos del espejo se muevan a la misma velocidad en el

sistema \mathbf{LS}_0 , esto no se cumple necesariamente en el sistema \mathbf{MS}_0 ya que los eventos con coordenadas $(x' \neq 0, t' = 0)$ en \mathbf{LS}_0 tienen coordenadas $(x'' \neq 0, t'' \neq 0)$ en \mathbf{MS}_0 .

En lo subsecuente asumiremos que \mathbf{MS}_0 es un sistema de referencia en el cual todos los puntos del espejo se encuentran instantáneamente en reposo en el instante $t'' = 0$. Dicha suposición se satisfará solo de manera aproximada si el espejo no se mueve con velocidad constante.

La región que ocupa el espejo en el sistema \mathbf{MS}_0 en el instante $t'' = 0$ es:

$$R''(0) = \left\{ \mathbf{r}'' \in \mathbb{R}^3 : |x''| \leq \frac{\delta_0}{2} \right\} \quad (4.13)$$

en donde δ_0 es su grosor a lo largo del eje x'' cuando está en reposo.

Sin embargo, la condición de que el espejo se encuentre instantáneamente en reposo en el instante $t'' = 0$ respecto del sistema inercial \mathbf{MS}_0 sigue sin ser suficiente para poder utilizar las condiciones en reposo de aquel y calcular así las diversas cantidades electromagnéticas respecto del sistema inercial \mathbf{LS}_0 en el instante $t' = 0$. Esto es así ya que, de acuerdo a lo discutido en la sección 2.6, y de acuerdo al conjunto de ecuaciones (4.9), los eventos con coordenadas $(x' \neq 0, t' = 0)$ en \mathbf{LS}_0 tienen coordenadas $(x'' \neq 0, t'' \neq 0)$ en \mathbf{MS}_0 de tal manera que puede suceder que no todos los puntos del espejo estén en reposo respecto a \mathbf{MS}_0 en el instante $t'' = 0$. De esta manera, es necesario asumir entonces que el espejo se encuentra aproximadamente en reposo respecto del sistema \mathbf{MS}_0 no solo en el instante $t'' = 0$, si no durante un pequeño intervalo de tiempo centrado en $t'' = 0$ para poder utilizar las propiedades en reposo del espejo.

Para determinar dicho intervalo de tiempo podemos observar primero que, de (4.9) podemos obtener la siguiente relación:

El conjunto de puntos

$$x' \in \left[-\frac{\delta(t_0)}{2}, \frac{\delta(t_0)}{2} \right], t' = 0$$

en el sistema \mathbf{LS}_0 corresponde al conjunto de puntos:

$$\begin{aligned} x'' &\in \left[-\gamma_0 \frac{\delta(t_0)}{2}, \gamma_0 \frac{\delta(t_0)}{2} \right] \\ t'' &\in \left[-\gamma_0 |\beta_0| \frac{\delta(t_0)}{2c}, \gamma_0 |\beta_0| \frac{\delta(t_0)}{2c} \right] \end{aligned} \quad (4.14)$$

Es decir, puntos x' en el espejo al tiempo $t' = 0$ respecto del sistema \mathbf{LS}_0 corresponden a puntos x'' en el espejo en algún instante correspondiente al intervalo del lado derecho de la ecuación (4.14). Si se supone que el espejo se encuentra en reposo respecto al sistema \mathbf{MS}_0 para todo instante t'' en dicho intervalo, entonces es posible utilizar las propiedades en reposo de este para el conjunto de eventos (x'', t'') correspondientes a (x', t') tal que x' se encuentre dentro del espejo y $t' = 0$.

Tomando en cuenta la discusión anterior, haremos la suposición de que el espejo se encuentra aproximadamente en reposo respecto del sistema \mathbf{MS}_0 durante el intervalo de tiempo:

$$[-t''_1, t''_1], \quad t''_1 = \gamma_0 |\beta_0| \frac{\delta(t_0)}{2c} \quad (4.15)$$

En la sección 4.5 demostraremos que el espejo se encuentra efectivamente aproximadamente en reposo respecto al sistema \mathbf{MS}_0 durante el intervalo de tiempo (4.15) si y solo si se encuentra sujeto a pequeñas aceleraciones respecto del sistema \mathbf{MS}_0 . Esto último ocurre si y solo si la magnitud de los campos eléctrico y magnético no es muy grande, ya que la fuerza que afecta la dinámica del espejo depende de dichos campos. Adicionalmente, en la sección 4.5 se demuestra que dichos requisitos se satisfacen en la mayoría de las situaciones experimentales. Sumado a la suposición ya mencionada, se supondrá también que el espejo se encuentra aproximadamente en reposo durante el intervalo de tiempo dado en (4.15) si el punto medio $q''(t'')$ se mueve una distancia mucho más pequeña que $\frac{\delta_0}{2}$ durante este intervalo de tiempo. Recordemos que δ_0 es el grosor del espejo a lo largo del eje x'' cuando está en reposo.

De las suposiciones anteriores se sigue que la región ocupada por el espejo respecto del sistema \mathbf{MS}_0 para $t'' \in [-t''_1, t''_1]$ está dada por:

$$R''(t'') = R''(0) = \{\mathbf{r}'' \in \mathbb{R}^3 : |x''| \leq \frac{\delta_0}{2}\} \quad (4.16)$$

Es necesario observar que el intervalo x'' en (4.16) debe coincidir con el intervalo x'' dado en (4.14) ya que ambos corresponden a la región ocupada por el espejo en \mathbf{MS}_0 a lo largo del eje x'' y además este se encuentra instantáneamente en reposo respecto del sistema \mathbf{MS}_0 para $t'' \in [-t''_1, t''_1]$. Entonces:

$$\delta(t_0) = \frac{\delta_0}{\gamma_0} \quad (4.17)$$

Esta última ecuación dice que el espejo sufre una contracción de Lorentz-Fitzgerald a lo largo del eje x con respecto a un observador situado en el sistema \mathbf{LS} .

4.1.1. Los campos eléctrico y magnético

Dado que, como se vio en la sección 3.4, los campos eléctrico y magnético son en realidad partes de un tensor de rango dos anti-simétrico (el tensor de Faraday), al cambiar de un sistema de referencia a otro, se transforman según el conjunto de ecuaciones (3.40). La forma tensorial de las ecuaciones de transformación dada en (3.38) resulta sumamente útil en el marco de la relatividad especial, sin embargo, para los fines del estudio que estamos realizando, escribiremos las ecuaciones de transformación (3.40) en forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}'(x', t') \\ \mathbf{B}'(x', t') \end{pmatrix} = M_0 \begin{pmatrix} \mathbf{E}''(x'', t'') \\ \mathbf{B}''(x'', t'') \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

donde:

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_0\beta_0 \\ 0 & 0 & \gamma_0 & 0 & -\gamma_0\beta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_0\beta_0 & 0 & \gamma_0 & 0 \\ 0 & \gamma_0\beta_0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_0 \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

En este caso (x', t') son las coordenadas en \mathbf{LS}_0 y (x'', t'') son las coordenadas correspondientes en el sistema \mathbf{MS}_0 , con la conexión entre ellas dada por (4.9). En esta notación, la componente j -ésima del vector columna en la derecha de la ecuación 4.18 es la j -ésima componente del campo eléctrico $E'_j(x', t')$ si $j = 1, 2, 3$ o la j -ésima componente del campo magnético $B'_{j-3}(x', t')$ si $j = 4, 5, 6$. Lo

mismo ocurre para el vector columna del lado derecho de (4.18). Notemos que (4.18) y (4.19) proporcionan las ecuaciones de transformación correctas, según se dan en (3.40).

4.1.2. Polarización y magnetización

Nuestro objetivo ahora es encontrar expresiones para la polarización y la magnetización del espejo en el sistema \mathbf{LS} en el instante t_0 , o equivalentemente, determinar dichas cantidades en el sistema \mathbf{LS}_0 en el instante $t' = 0$.

Al igual que sucede con los campos eléctrico y magnético, la polarización y la magnetización forman parte de un tensor de rango dos anti simétrico, llamado el tensor de momentos. Esto significa que, al pasar de un sistema de coordenadas a otro, se transforman de acuerdo con la expresión (3.39). Explícitamente, la relación entre la polarización y la magnetización en \mathbf{LS}_0 y \mathbf{MS}_0 , estará dada por:

$$\begin{aligned} P'_x &= P''_x, & P'_y &= \gamma_0(P''_y - \beta_0 M''_z), & P'_z &= \gamma_0(P''_z + \beta_0 M''_y) \\ M'_x &= M''_x, & M'_y &= \gamma_0(M''_y + \beta_0 P''_z), & M'_z &= \gamma_0(M''_z - \beta_0 P''_y) \end{aligned} \quad (4.20)$$

Dicho conjunto de ecuaciones puede expresarse en forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}'(x', t') \\ \mathbf{M}'(x', t') \end{pmatrix} = M_0^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{P}''(x'', t'') \\ \mathbf{M}''(x'', t'') \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

la cual es completamente equivalente a la ecuación (3.39). En este conjunto de ecuaciones, la j -ésima componente del vector columna del lado izquierdo es la j -ésima componente de la polarización $P'_j(x', t')$ si $j = 1, 2, 3$, mientras que es la componente de la magnetización $M'_{j-3}(x', t')$ si $j = 4, 5, 6$.

Dado que hemos supuesto que el espejo se encuentra aproximadamente en reposo durante el intervalo de tiempo (4.15) y además el espejo es lineal, isotrópico y no magnetizable cuando se encuentra en reposo, tenemos entonces las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}''(x'', t'') &= \chi(x'') \mathbf{E}''(x'', t'') \\ \mathbf{M}''(x'', t'') &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.22)$$

para todo x y $t \in [-t''_1, t''_1]$. Como un punto x' dentro del espejo en el instante $t' = 0$ en \mathbf{LS}_0 corresponde a un punto x'' dentro del espejo en algún instante $t \in [-t''_1, t''_1]$ en \mathbf{MS}_0 , entonces las ecuaciones (4.22) se satisfacen para todos los puntos (x'', t'') que corresponden a $x' \in [-\delta(t_0)/2, \delta(t_0)/2]$ y $t' = 0$. De esta manera, podemos aplicar las ecuaciones (4.18), (4.21) y (4.22) para obtener que para $x' \in [-\delta(t_0)/2, \delta(t_0)/2]$ y $t' = 0$ se tiene que:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}'(x', 0) \\ \mathbf{M}'(x', 0) \end{pmatrix} = M_0^{-1} \begin{pmatrix} \chi(\gamma_0 x') I_3 & O_{3 \times 3} \\ O_{3 \times 3} & O_{3 \times 3} \end{pmatrix} M_0^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{E}'(x, 0) \\ \mathbf{B}'(x', 0) \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

Al deducir esta última relación, hemos utilizado el conjunto de ecuaciones (4.9) con $t' = 0$ para obtener que $\chi(x'') = \chi(\gamma_0 x')$. En la relación (4.23), y en lo que sigue de la tesis, I_3 denota la matriz identidad 3×3 y $O_{n \times m}$ es la matriz cero $n \times m$.

Además, dado que fuera del espejo hay vacío, debemos tener que $\mathbf{P}'(x', 0) = \mathbf{M}'(x', 0) = \mathbf{0}$ para $|x'| > \delta(t_0)/2$. Esto significa que

$$\chi(x'') = \sigma(x'') = 0 \quad (4.24)$$

para $x'' \notin (-\delta_0/2, \delta_0/2)$. Utilizando esta última relación junto con (4.17) en (4.23) obtenemos precisamente que $\mathbf{P}'(x', 0) = \mathbf{M}'(x', 0) = \mathbf{0}$ para $|x'| > \delta(t_0)/2$. De esta manera, (4.23) es válida para todo x' . Si expandimos el producto en (4.23), usamos la ecuación (4.3) y el hecho de que t_0 es arbitrario, concluimos que

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(x, t) &= \gamma(t)^2 \chi_{LS}(x, t) [\mathbf{E}(x, t) + \beta(t) \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{B}(x, t) - \beta^2(t) E_1(x, t) \hat{\mathbf{x}}] \\ \mathbf{M}(x, t) &= -\beta(t) \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{P}(x, t)\end{aligned}\quad (4.25)$$

donde

$$\beta(t) := \frac{\dot{q}(t)}{c} \quad \gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2(t)}} \quad (4.26)$$

y

$$\chi_{LS}(x, t) = \chi[\gamma(t)(x - q(t))] \quad (4.27)$$

Es decir, aunque el espejo es lineal, isotrópico y no magnetizable cuando se encuentra en reposo, para un observador en el sistema \mathbf{LS} , para el cual el espejo se encuentra en movimiento relativo, éste aparece con una magnetización y una polarización que dependen no solamente de los campos eléctrico y magnético, si no también de la velocidad relativa del espejo.

4.1.3. Corriente libre y carga

Ya que el espejo tiene densidad de carga libre cero y satisface la ley de Ohm cuando se encuentra en reposo, y además se encuentra, al menos aproximadamente, en reposo durante el intervalo de tiempo (4.15), tendremos entonces que:

$$\rho_f''(x'', t'') = 0 \quad \mathbf{J}_f''(x'', t'') = \sigma(x'') \mathbf{E}''(x'', t'') \quad (4.28)$$

para todo x'' y para todo $t \in [-t_1'', t_1'']$. De la ecuación (4.28) se sigue que el cuatro-vector de corriente en \mathbf{MS}_0 está dado por:

$$J_\alpha''(x'', t'') = (\sigma(x'') \mathbf{E}''(x'', t''), 0)^T \quad (4.29)$$

para todo x'' y $t \in [-t_1'', t_1'']$

La conexión entre (4.29) y el cuatro-vector de corriente $J'_\alpha(x', t')$ en \mathbf{LS}_0 está dada por la ecuación de transformación (3.41), la cual puede ponerse en forma matricial de la siguiente manera:

$$J'_\alpha(x', t') = M_1 J_\alpha''(x'', t'') \quad (4.30)$$

donde

$$M_1 = \begin{pmatrix} \gamma_0 & 0 & 0 & -i\gamma_0\beta_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\gamma_0\beta_0 & 0 & 0 & \gamma_0 \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

Utilizando la suposición de que el espejo se encuentra en reposo durante el intervalo de tiempo $t \in [-t_1'', t_1'']$ y un argumento similar al utilizado con la polarización y la magnetización, encontramos que la densidad de carga libre $\rho_f(x, t)$ y la densidad de corriente libre $\mathbf{J}_f(x, t)$ en el sistema \mathbf{LS} están dadas por:

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_f(x, t) &= \gamma(t)\sigma_{LS}(x, t)[\mathbf{E}(x, t) + \beta(t)\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{B}(x, t)] \\ \rho_f(x, t) &= \frac{\gamma(t)}{c}\beta(t)\sigma_{LS}(x, t)E_1(x, t)\end{aligned}\quad (4.32)$$

con

$$\sigma_{LS}(x, t) = \sigma[\gamma(t)(x - q(t))]\quad (4.33)$$

A partir del conjunto de relaciones (4.32) podemos hacer las siguientes observaciones:

- A pesar de que el espejo tiene densidad de carga libre igual a cero cuando se encuentra en reposo, aparece cargado cuando se observa desde el sistema inercial \mathbf{LS} , siempre y cuando $E_1(x, t) \neq 0$.
- A pesar de que el espejo es Ohmico cuando se encuentra en reposo, no obedece la ley de Ohm cuando se observa desde el sistema \mathbf{LS} .

4.2. Ecuaciones de Maxwell

Ya hemos realizado una descripción del sistema físico que estudiaremos así como de la manera en que realizaremos su descripción. Ahora procederemos a escribir propiamente las ecuaciones que rigen la dinámica del sistema espejo-campo. Comenzaremos escribiendo las ecuaciones del propio campo electromagnético.

En el sistema \mathbf{LS} , las ecuaciones de Maxwell, en unidades Gaussianas, pueden escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{B}(x, t) &= \frac{4\pi}{c}[\mathbf{J}_f(x, t) + \mathbf{J}_b(x, t)] + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(x, t) \\ \nabla \times \mathbf{E}(x, t) &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(x, t) \\ \nabla \cdot \mathbf{E}(x, t) &= 4\pi[\rho_f(x, t) + \rho_b(x, t)] \\ \nabla \cdot \mathbf{B}(x, t) &= 0\end{aligned}\quad (4.34)$$

donde $\rho_f(x, t)$ y $\mathbf{J}_f(x, t)$ son las densidades de carga y corriente libre respectivamente dadas en (4.32) y $\rho_b(x, t)$ y $\mathbf{J}_b(x, t)$ son las densidades de carga y corriente acotadas. Utilizando (4.25) encontramos que:

$$\rho_b := -\nabla \cdot \mathbf{P}(x, t) = -\chi_{LS}(x, t)\nabla \cdot \mathbf{E}(x, t) - E_x(x, t)\frac{\partial}{\partial t}\chi_{LS}(x, t)\quad (4.35)$$

y

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_b := \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}(x, t) + c\nabla \times \mathbf{M}(x, t) &= f_1(x, t) - \beta(t)f_2(x, t) + \gamma(t)^2\chi_{LS}(x, t)\left\{\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(x, t) + \right. \\ + \beta(t)\left[c\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x}(x, t) + \hat{\mathbf{x}} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(x, t) - c\frac{\partial E_x}{\partial x}(x, t)\hat{\mathbf{x}}\right] &+ \beta(t)^2\left[c\nabla \times \mathbf{B}(x, t) - \frac{\partial E_x}{\partial t}(x, t)\hat{\mathbf{x}}\right] + \\ \left. + \frac{d\beta}{dt}(t)[\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{B}(x, t) - 2\beta E_x(x, t)\hat{\mathbf{x}}]\right\}\end{aligned}\quad (4.36)$$

en donde:

$$\begin{aligned}f_1(x, t) &= [\mathbf{E}(x, t) + \beta(t)\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{B}(x, t)]\left(\beta(t)x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right)\gamma(t)^2\chi_{LS}(x, t) \\ f_2(x, t) &= \hat{\mathbf{x}}E_x(x, t)\left(c\frac{\partial}{\partial x} + \beta(t)\frac{\partial}{\partial t}\right)\gamma(t)^2\chi_{LS}(x, t)\end{aligned}\quad (4.37)$$

Cuando el espejo se encuentra en reposo tendremos que $\beta(t) = 0$, de tal manera que $\chi_{LS}(x, t) = \chi(x - q)$, y entonces el lado derecho de (4.36) se reduce a $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}(x, t) = \chi(x - q) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(x, t)$, como es de esperarse.

4.2.1. El caso en el que la susceptibilidad y la conductividad son funciones constantes por partes

Hasta ahora hemos considerado que la susceptibilidad $\chi(x'')$ y la conductividad $\sigma(x'')$ son funciones continuas con derivada continua. En esta sección consideraremos el caso particular en el que dichas funciones están dadas por las siguientes expresiones:

$$\chi(x'') = \begin{cases} \chi_0 & \text{si } |x''| \leq \frac{\delta_0}{2} \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases} \quad (4.38)$$

$$\sigma(x'') = \begin{cases} \sigma_0 & \text{si } |x''| \leq \frac{\delta_0}{2} \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Utilizando (4.17) y el hecho de que $t_0 \in \mathbb{R}$ es arbitrario, podemos concluir que:

$$\delta(t) = \frac{\delta_0}{\gamma(t)} \quad (4.39)$$

A partir de esta última relación y de las ecuaciones (4.27), (4.33), y (4.38), obtenemos las siguientes expresiones para la susceptibilidad y conductividad en el sistema **LS**:

$$\chi_{LS}(x, t) = \begin{cases} \chi_0 & \text{si } |x - q(t)| \leq \frac{\delta(t)}{2} \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases} \quad (4.40)$$

$$\sigma_{LS}(x, t) = \begin{cases} \sigma_0 & \text{si } |x - q(t)| \leq \frac{\delta(t)}{2} \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Todos los resultados que hemos obtenido hasta ahora son válidos para las expresiones (4.38). Sin embargo, dado que éstas son funciones por partes, debemos ahora tomar en cuenta las condiciones en la fronteras del espejo para los campos **E** y **B**. Es decir, primero debemos resolver el conjunto de ecuaciones (4.34) dentro de la región ocupada por el espejo, después debemos resolver ese mismo conjunto de ecuaciones fuera de esa región, y finalmente debemos unir las soluciones en ambas regiones utilizando las condiciones en las fronteras $x = q(t) \pm \frac{\delta(t)}{2}$. Para obtener dichas condiciones en las fronteras procederemos de la siguiente manera: dado que el espejo se encuentra en reposo respecto del sistema **MS**₀ durante el intervalo de tiempo $[-t''_1, t''_1]$, entonces, respecto a ese sistema y en ese intervalo de tiempo son válidas las condiciones en la frontera dadas en la sección 3.2, utilizando una transformación de Lorentz podremos encontrar las condiciones en la frontera que son válidas respecto al sistema **LS**₀ en el instante t'_0 . Posterior a esto usamos la ecuación (4.3) para hallar las condiciones en la frontera correctas respecto al sistema **LS**. Eso es precisamente lo que procederemos a hacer ahora.

Dado que el espejo se encuentra en reposo respecto del sistema inercial \mathbf{MS}_0 durante el intervalo de tiempo $[-t''_1, t''_1]$ dado en (4.15), podemos usar las condiciones en la frontera dadas en la sección 3.2, es decir, el conjunto de ecuaciones (3.14) y (3.15) las cuales podemos reescribir, para el caso que estamos considerando ahora, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}''(x''_0+, t'') \cdot \hat{\mathbf{x}}'' &= \mathbf{B}''(x''_0-, t'') \cdot \hat{\mathbf{x}}'' \\ \mathbf{E}''(x''_0+, t'') \times \hat{\mathbf{x}}'' &= \mathbf{E}''(x''_0-, t'') \times \hat{\mathbf{x}}''\end{aligned}\quad (4.41)$$

y

$$\begin{aligned}[\mathbf{D}''(x''_0+, t'') - \mathbf{D}''(x''_0-, t'')] \cdot \hat{\mathbf{x}}'' &= 4\pi\sigma''_f(x''_0, t'') \\ \hat{\mathbf{x}}'' \times [\mathbf{H}''(x''_0+, t'') - \mathbf{H}''(x''_0-, t'')] &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{K}''_f(x''_0, t'')\end{aligned}\quad (4.42)$$

en donde $x''_0 = \pm\delta_0/2$ y $t'' \in [-t''_1, t''_1]$ y:

$$f(a\pm) = \lim_{x'' \rightarrow a\pm} f(x'')\quad (4.43)$$

En el conjunto de ecuaciones (4.42) las cantidades $\sigma''_f(x''_0, t'')$ y $\mathbf{K}''_f(x''_0, t'')$ son la densidad de carga libre y la densidad de corriente inducidas en la frontera o superficie del espejo. Además, a partir de (4.22) encontramos que el vector de desplazamiento eléctrico $\mathbf{D}''(x'', t'')$ y el campo auxiliar $\mathbf{H}''(x'', t'')$ están dados por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}''(x'', t'') &:= \mathbf{E}''(x'', t'') + 4\pi\mathbf{P}''(x'', t'') = [1 + a\pi\chi(x'')]\mathbf{E}''(x'', t'') \\ \mathbf{H}''(x'', t'') &:= \mathbf{B}''(x'', t'') - 4\pi\mathbf{M}''(x'', t'') = \mathbf{B}''(x'', t'')\end{aligned}\quad (4.44)$$

para todo x'' y $t'' \in [-t''_1, t''_1]$.

Dado que el espejo satisface la ley de Ohm y tiene densidad de carga libre igual a cero cuando se encuentra en reposo, y además se encuentra en reposo en el sistema \mathbf{MS}_0 durante el intervalo de tiempo $[-t''_1, t''_1]$ dado en (4.15), tendremos entonces que

$$\mathbf{K}''_f(x''_0, t'') = 0, \quad \sigma''_f(x''_0, t'') = 0\quad (4.45)$$

para $x''_0 = \pm\frac{\delta_0}{2}$ y $t'' \in [-t''_1, t''_1]$.

Utilizando (4.41) a (4.45) podemos demostrar que se cumple el siguiente conjunto de relaciones:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}''(x''_0+, t'') &= \mathbf{B}''(x''_0-, t'') \\ E''_j(x''_0+, t'') &= E''_j(x''_0-, t'') \\ E''_x(\frac{\delta_0}{2}+, t'') &= (1 + 4\pi\chi_0)E''_x(\frac{\delta_0}{2}-, t''), \\ E''_x(-\frac{\delta_0}{2}-, t'') &= (1 + 4\pi\chi_0)E''_x(-\frac{\delta_0}{2}+, t'')\end{aligned}\quad (4.46)$$

con $j = y, z$ y para $x''_0 = \pm\frac{\delta_0}{2}$, $t'' \in [-t''_1, t''_1]$.

A partir de las ecuaciones (2.32) y (4.17) se sigue que aquellos eventos con coordenadas espaciotemporales en \mathbf{LS}_0 :

$$(x'_0 = \pm\frac{\delta(t_0)}{2}, t'_0 = 0)\quad (4.47)$$

tienen como coordenadas, en el sistema \mathbf{MS}_0 :

$$(x_0'' = \pm \frac{\delta_0}{2}, t_0'' \mp \beta_0 \frac{\delta_0}{2c}) \quad (4.48)$$

De las condiciones a la frontera dadas en (4.46) y de la relación entre los campos eléctrico y magnético observados desde los sistemas inerciales \mathbf{LS}_0 , \mathbf{MS}_0 obtenemos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}'(x_0'+, 0) &= \mathbf{B}'(x_0'-, 0), \\ E_j'(x_0'+, 0) &= E_j'(x_0'-, 0) \\ E_x'(\frac{\delta(t_0)}{2}+, 0) &= (1 + 4\pi\chi_0)E_x'(\frac{\delta(t_0)}{2}-, 0), \\ E_x'(-\frac{\delta(t_0)}{2}-, 0) &= (1 + 4\pi\chi_0)E_x'(-\frac{\delta(t_0)}{2}+, 0) \end{aligned} \quad (4.49)$$

para $j = y, z$ y con $x_0' = \pm \frac{\delta(t_0)}{2}$.

Utilizando la ecuación (4.3) para conectar los valores de las cantidades que aparecen en (4.49) con sus respectivos valores en \mathbf{LS} y recordando que $t_0 \in \mathbb{R}$, podemos concluir que las condiciones a la frontera que debe satisfacer el espejo en el sistema inercial \mathbf{LS} son:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(x_0+, t) &= \mathbf{B}(x_0-, t), \\ E_j(x_0+, t) &= E_j(x_0-, t) \\ E_x(x_1-, t) &= (1 + 4\pi\chi_0)E_x(x_1+, t), \\ E_x(x_2+, t) &= (1 + 4\pi\chi_0)E_x(x_2-, t) \end{aligned} \quad (4.50)$$

con $j = y, z$, $x_0 = q(t) \pm \delta(t)/2$, $x_1 = q(t) - \delta(t)/2$, $x_2 = q(t) + \delta(t)/2$ y $t \in \mathbb{R}$. Estas ecuaciones nos dicen que el campo magnético $\mathbf{B}(x, t)$ y las componentes tangenciales del campo eléctrico $E_j(x, t)$, ($j = y, z$) son continuas en las fronteras $x = q(t) \pm \delta(t)/2$ del espejo, mientras que la componente normal del campo eléctrico $E_x(x, t)$ posee una discontinuidad distinta de cero.

4.3. Análisis de un caso particular

En el resto de este capítulo consideraremos que el campo eléctrico incidente se encuentra linealmente polarizado en la dirección z . Entonces, en vista de las ecuaciones (4.32) y (4.35), no hay carga libre ni carga acotada respecto al sistema \mathbf{LS} , y los campos eléctrico y magnético pueden ser derivados a partir de un potencial escalar y vectorial dados por:

$$\mathbf{A}(x, t) = A_0(x, t)\hat{\mathbf{z}}. \quad \phi(x, t) = 0 \quad (4.51)$$

Los campos eléctrico y magnético serán entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(x, t) &= \nabla \times \mathbf{A}(x, t) = -\frac{\partial A_0}{\partial x}(x, t)\hat{\mathbf{y}}, \\ \mathbf{E}(x, t) &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}(x, t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_0}{\partial t}(x, t)\hat{\mathbf{z}} \end{aligned} \quad (4.52)$$

Con esta elección particular para el campo electromagnético, todas las ecuaciones de Maxwell en (4.34) se satisfacen automáticamente salvo la primera, que es la ecuación de Ampere-Maxwell, la cual

toma la forma:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_1(x, t)}{c^2} \frac{\partial^2 A_0}{\partial t^2}(x, t) + \frac{\alpha_2(x, t)}{c} \frac{\partial^2 A_0}{\partial x \partial t}(x, t) + \frac{\alpha_3(x, t)}{c} \frac{\partial A_0}{\partial x}(x, t) + \\ + \frac{\alpha_4(x, t)}{c^2} \frac{\partial A_0}{\partial t}(x, t) = \alpha_0(x, t) \frac{\partial^2 A_0}{\partial x^2}(x, t) \end{aligned} \quad (4.53)$$

con:

$$\begin{aligned} \alpha_0(x, t) &= 1 - 4\pi\gamma(t)^2\beta(t)^2\chi_{LS}(x, t) \\ \alpha_1(x, t) &= 1 + 4\pi\gamma(t)\chi_{LS}(x, t) \\ \alpha_2(x, t) &= 8\pi\gamma(t)^2\beta(t)\chi_{LS}(x, t) \\ \alpha_3(x, t) &= 4\pi \frac{d\beta}{dt}(t)[\gamma(t)^2\chi_{LS}(x, t) + \beta(t)f_0(x, t)] + 4\pi\gamma(t)\sigma_{LS}(x, t)\beta(t) \\ \alpha_4(x, t) &= 4\pi f_0(x, t) \frac{d\beta}{dt}(t) + 4\pi\gamma(t)\sigma_{LS}(x, t) \end{aligned} \quad (4.54)$$

y

$$\begin{aligned} f_0(x, t) &= \gamma(t)^4\beta(t)\{2\chi(x'') + x'' \frac{d\chi}{dx''}(x'')\} \\ x'' &= \gamma(t)[x - q(t)] \end{aligned} \quad (4.55)$$

Una observación importante respecto a (4.53) es que sus coeficientes son dependientes de la posición y del tiempo. Esto implica que, en general, la dinámica del campo descrita por (4.53) no está restringida a un único modo normal, es decir, esperamos que (4.53) no posea soluciones separables de la forma $F(x)G(t)$.

Para simplificar la ecuación (4.53), en la siguiente subsección haremos uso de dos hechos importantes:

- La posición del espejo normalmente evoluciona en una escala de tiempo que es mucho mayor que aquella en la que el campo evoluciona. Esto significa que, desde el punto de vista del propio campo electromagnético, el espejo se encuentra "quieto" o más específicamente fijo, en el punto $q(t)$.
- Podemos examinar particularmente el caso en el cual la velocidad y la aceleración del espejo son pequeñas.

4.3.1. Introducción de cantidades adimensionales

En el resto de este capítulo asumiremos que:

1. λ_0 es la longitud de onda característica del campo electromagnético
2. $\nu_0 = c/\lambda_0$ es la frecuencia característica del campo.
3. A_{00} es el valor característico de $A_0(x, t)$
4. ν_{osc}^{-1} es la escala de tiempo en la cual la posición del punto medio del espejo $q(t)$ cambia apreciablemente.

La longitud la mediremos en unidades de λ_0 y el tiempo en unidades de ν_0^{-1} , es decir, definimos ξ , τ y τ_{osc} de tal manera que $x = \lambda_0 \xi$ y $t = \nu_0^{-1} \tau = \nu_{osc}^{-1} \tau_{osc}$

Definamos:

$$\begin{aligned} \epsilon_{pert} &= \frac{\nu_{osc}}{\nu_0}, & \tilde{q}(\tau_{osc}) &= \frac{q(\nu_{osc}^{-1} \tau_{osc})}{\lambda_0} \\ \tilde{\chi}(\xi) &= \chi(\lambda_0 \xi), & \tilde{q}(\tau) &= \frac{q(\nu_0^{-1} \tau)}{\lambda_0} \\ \tilde{\sigma}(\xi) &= \frac{\sigma(\lambda_0 \xi)}{\nu_0}, & \tilde{\delta}_0 &= \frac{\delta_0}{\lambda_0} \\ \tilde{A}_0(\xi, t) &= \frac{1}{A_{00}} A_0(\lambda_0 \xi, \nu_0^{-1} \tau), \end{aligned} \tag{4.56}$$

Podemos observar que todas estas son cantidades adimensionales y que ϵ_{pert} compara la escala de tiempo ν_0^{-1} en la cual el campo cambia apreciablemente con la escala de tiempo ν_{osc}^{-1} en la cual la posición del punto medio del espejo $q(t)$ cambia apreciablemente. Ya que en la mayoría de las situaciones experimentales normalmente se tiene que $\nu_0^{-1} \ll \nu_{osc}^{-1}$, es decir, el campo evoluciona en una escala de tiempo mucho menor que el espejo, esperamos que $\epsilon_{pert} \ll 1$. Más aún, observemos que

$$\tilde{q}(\tau) = \tilde{q}(\epsilon_{pert} \tau) \tag{4.57}$$

Utilizando las cantidades definidas en (4.56) podemos reescribir la ecuación (4.53), la cual toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \alpha_1(x, t) \frac{\partial^2 \tilde{A}_0}{\partial \tau^2}(\xi, \tau) + \alpha_2(x, t) \frac{\partial^2 \tilde{A}_0}{\partial \xi \partial \tau}(\xi, \tau) + \frac{\alpha_3(x, t)}{\nu_0} \frac{\partial \tilde{A}_0}{\partial \xi}(\xi, \tau) + \\ + \frac{\alpha_4(x, t)}{\nu_0} \frac{\partial \tilde{A}_0}{\partial \tau}(\xi, \tau) = \alpha_0(x, t) \frac{\partial^2 \tilde{A}_0}{\partial \xi^2}(\xi, \tau) \end{aligned} \tag{4.58}$$

con $x = \lambda_0 \xi$ y $t = \nu_0^{-1} \tau$.

Ahora procederemos a deducir una ecuación aproximada para $\tilde{A}_0(\xi, \tau)$ para el caso especial en el cual la velocidad y la aceleración del espejo son pequeñas. Para hacer esto supondremos que existen $\epsilon_p \in \mathbb{R}$ y $\tilde{Q}(\tau)$ tales que:

$$\frac{d\tilde{q}}{d\tau}(\tau) = \epsilon_p \tilde{Q}(\tau) \tag{4.59}$$

donde $0 < \epsilon_p \ll 1$ cumple la función de un parámetro de perturbación. Es importante señalar que $\epsilon_{pert} \neq \epsilon_p$. La ecuación (4.59) sirve como una definición de $\tilde{Q}(\tau)$. Podemos hacer más preciso el significado de (4.59) de la siguiente manera. A partir de (4.26) y (4.56) tenemos que:

$$\frac{\dot{q}(\nu_0^{-1} \tau)}{c} = \beta(\nu_0^{-1} \tau) = \frac{d\tilde{q}}{d\tau}(\tau) \tag{4.60}$$

Esta ecuación muestra que ϵ_p en (4.59) es un parámetro de perturbación que indica que la velocidad del espejo es mucho mas pequeña que la velocidad de la luz c . A partir de (4.59) se sigue que:

$$\frac{d^2 \tilde{q}}{d\tau^2}(\tau) = \epsilon_p \frac{d\tilde{Q}}{d\tau}(\tau) \tag{4.61}$$

Entonces (4.60) implica que:

$$\frac{\ddot{q}(\nu_0^{-1}\tau)}{c\nu_0} = \frac{1}{\nu_0} \frac{d\beta}{dt}(\nu_0^{-1}\tau) = \frac{d^2\tilde{q}}{d\tau^2}(\tau) \quad (4.62)$$

de manera que ϵ_p en (4.61) es un parámetro de perturbación que indica que la aceleración del espejo es mucho más pequeña que la velocidad de la luz c multiplicada por la frecuencia característica del campo. A partir de toda esta discusión se sigue que una aproximación a primer orden en ϵ_p corresponde a una aproximación a primer orden en la velocidad $\dot{q}(t)$ y en la aceleración $\ddot{q}(t)$ del espejo.

Utilizando (4.56), (4.59) y (4.61) y despreciando términos de orden ϵ_p^n con $n \geq 2$, la ecuación (4.58) toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{A}_0}{\partial \xi^2}(\xi, \tau) = & \{1 + 4\pi\tilde{\chi}[\xi - \tilde{q}(\tau)]\} \frac{\partial^2 \tilde{A}_0}{\partial \tau^2}(\xi, \tau) + 4\pi\tilde{\sigma}[\xi - \tilde{q}(\tau)] \frac{\partial \tilde{A}_0}{\partial \tau}(\xi, \tau) + \\ & + 8\pi\tilde{\chi}[\xi - \tilde{q}(\tau)] \frac{d\tilde{q}}{d\tau}(\tau) \frac{\partial^2 \tilde{A}_0}{\partial \xi \partial \tau}(\xi, \tau) + 4\pi\tilde{\sigma}[\xi - \tilde{q}(\tau)] \frac{d\tilde{q}}{d\tau}(\tau) \frac{\partial \tilde{A}_0}{\partial \xi}(\xi, \tau) + \\ & + 4\pi\tilde{\chi}[\xi - \tilde{q}(\tau)] \frac{d^2\tilde{q}}{d\tau^2}(\tau) \frac{\partial \tilde{A}_0}{\partial \xi}(\xi, \tau) \end{aligned} \quad (4.63)$$

De esta manera (4.63) es correcta a primer orden en ϵ_p .

Observemos que $\tilde{q}(\tau)$ es una función de la escala de tiempo característica del campo. Resulta mejor expresar la ecuación (4.63) en términos de la cantidad adimensional $\tilde{q}(\tau_{osc})$ ya que esta última cantidad es función de la escala de tiempo característica del espejo $\tau_{osc} = \nu_{osc}t = \epsilon_{pert}\tau$ y esto permite que las dos escalas de tiempo involucradas en la evolución del sistema aparezcan explícitamente en términos del parámetro de perturbación. Utilizando la expresión $\tilde{q}(\tau) = \tilde{q}(\epsilon_{pert}\tau)$, la ecuación (4.63) puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{A}_0}{\partial \xi^2}(\xi, \tau) = & \{1 + 4\pi\tilde{\chi}[\xi - \tilde{q}(\epsilon_{pert}\tau)]\} \frac{\partial^2 \tilde{A}_0}{\partial \tau^2}(\xi, \tau) + 4\pi\tilde{\sigma}[\xi - \tilde{q}(\epsilon_{pert}\tau)] \frac{\partial \tilde{A}_0}{\partial \tau}(\xi, \tau) \\ & + \epsilon_{pert} 8\pi\tilde{\chi}[\xi - \tilde{q}(\epsilon_{pert}\tau)] \frac{d\tilde{q}}{d\tau_{osc}}(\epsilon_{pert}\tau) \frac{\partial^2 \tilde{A}_0}{\partial \xi \partial \tau}(\xi, \tau) + \epsilon_{pert} 4\pi\tilde{\sigma}[\xi - \tilde{q}(\epsilon_{pert}\tau)] \frac{d\tilde{q}}{d\tau_{osc}}(\epsilon_{pert}\tau) \frac{\partial \tilde{A}_0}{\partial \xi}(\xi, \tau) + \\ & \epsilon_{pert}^2 4\pi\tilde{\chi}[\xi - \tilde{q}(\epsilon_{pert}\tau)] \frac{d^2\tilde{q}}{d\tau_{osc}^2}(\epsilon_{pert}\tau) \frac{\partial \tilde{A}_0}{\partial \xi}(\xi, \tau) \end{aligned} \quad (4.64)$$

Notemos que la ecuación (4.64) es una ecuación de onda con amortiguamiento mas términos adicionales multiplicados por ϵ_{pert} y ϵ_{pert}^2 , los cuales constituyen pequeñas perturbaciones cuando $\epsilon_{pert} \ll 1$.

Utilizando las definiciones (4.56) podemos expresar (4.63) con dimensiones, obteniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A_0}{\partial x^2}(x, t) = & \frac{1 + 4\pi\chi[x - q(t)]}{c^2} \frac{\partial^2 A_0}{\partial t^2}(x, t) + 4\pi \frac{\sigma[x - q(t)]}{c^2} \frac{\partial A_0}{\partial t}(x, t) + \\ & + 8\pi \frac{\chi[x - q(t)]}{c^2} \dot{q}(t) \frac{\partial^2 A_0}{\partial x \partial t}(x, t) + 4\pi \frac{\sigma[x - q(t)]}{c^2} \dot{q}(t) \frac{\partial A_0}{\partial x}(x, t) + 4\pi \frac{\chi[x - q(t)]}{c^2} \ddot{q}(t) \frac{\partial A_0}{\partial x}(x, t) \end{aligned} \quad (4.65)$$

Esta ecuación es correcta a primer orden en $\dot{q}(t)$ y $\ddot{q}(t)$ ya que proviene de una ecuación adimensional que es correcta a primer orden en ϵ_p .

4.3.2. El caso en el que la susceptibilidad y la conductividad son funciones constantes por partes

Si la susceptibilidad y la conductividad están dadas por (4.38), entonces lo que se debe hacer es resolver las ecuaciones (4.53), (4.58), (4.63), (4.64) y (4.65) adentro y afuera del espejo y unir las soluciones utilizando las condiciones a la frontera dada por (4.50). Esto último equivale a pedir que $A_0(x, t)$, $\partial A_0/\partial x(x, t)$ y $\partial A_0/\partial t(x, t)$, o equivalentemente que $\tilde{A}_0(\xi, \tau)$, $\partial \tilde{A}_0/\partial \tau(\xi, \tau)$ y $\partial \tilde{A}_0/\partial \xi(\xi, \tau)$ sean continuas en las fronteras del espejo. Las fronteras del espejo se encontrarán localizadas en $x = q(t) \pm \delta(t)/2$ si se utiliza (4.53) o (4.58). Si, por otro lado, se usa (4.63), (4.64) o (4.65), las fronteras estarán localizadas en $x = q(t) \pm \delta_0/2$ debido a que, en estos casos, se estaría haciendo una aproximación a primer orden en ϵ_p .

4.4. Fuerza sobre el espejo

En las ecuaciones (4.53), (4.58), (4.63), (4.64) y (4.65), las cuales gobiernan la evolución del campo electromagnético, el punto medio del espejo posee una posición $q(t)$ determinada por un agente externo. En esta sección determinaremos la fuerza que el campo electromagnético mismo ejerce en el espejo y, por consiguiente, la ecuación de movimiento que gobierna su dinámica. La ecuación de evolución del campo electromagnético combinada con la ecuación de movimiento del espejo constituyen un conjunto auto-consistente de ecuaciones diferenciales que gobiernan la evolución dinámica del sistema espejo-campo.

Consideremos el elemento de volumen:

$$V(t) = \left[q(t) - \frac{\delta(t)}{2}, q(t) + \frac{\delta(t)}{2} \right] \times [y_0, y_1] \times [z_0, z_1] \quad (4.66)$$

con $y_0 < y_1$ y $z_0 < z_1$.

Recordemos que, con la elección particular de $\mathbf{A}(x, t)$ tomada en (4.51), no habrá carga libre ni carga acotada. De esta manera, la fuerza Newtoniana ejercida sobre el elemento de volumen $V(t)$ del espejo al tiempo t está dada por la ley de fuerza de Lorentz (3.2) la cual, en forma integral, es [1]:

$$\mathbf{F}(t) = \frac{1}{c} \iiint_{V(t)} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) d^3r \quad (4.67)$$

donde hemos despreciado la contribución del campo eléctrico debido a que este se encuentra polarizado en la dirección z (Ec. (4.52)), mientras que el espejo solo puede moverse en la dirección x . La expresión anterior puede ser reescrita utilizando la densidad de momento electromagnético $\mathbf{g}_{em}(x, t)$ y el tensor de esfuerzos de Maxwell $T(x, t)$, dados por [1]:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{em}(x, t) &= \frac{1}{4\pi c} \mathbf{E}(x, t) \times \mathbf{B}(x, t) \\ T(x, t) &= \frac{1}{4\pi} \left[\mathbf{E}(x, t) \mathbf{E}(x, t)^T - \frac{1}{2} \mathbf{E}(x, t)^2 I_3 + \mathbf{B}(x, t) \mathbf{B}(x, t)^T - \frac{1}{2} \mathbf{B}(x, t)^2 I_3 \right] \end{aligned} \quad (4.68)$$

En este conjunto de ecuaciones, \mathbf{E} y \mathbf{B} son tomados como vectores columna. Utilizando (4.68) podemos reescribir la ecuación para la fuerza ejercida sobre $V(t)$ obteniendo:

$$\mathbf{F}(t) = \oint_{\partial V(t)} T(x, t) \hat{\mathbf{n}}(t) da - \iiint_{V(t)} \frac{\partial \mathbf{g}_{em}}{\partial t} d^3r \quad (4.69)$$

en donde $\partial V(t)$ es la superficie que delimita a $V(t)$, $\hat{\mathbf{n}}(t)$ es el vector unitario normal a $\partial V(t)$ y exterior a $V(t)$, y $T(x, t)\hat{\mathbf{n}}(t)$ representa el producto de una matriz por un vector columna.

Utilizando (4.52), (4.66), (4.68) y (4.69) podemos encontrar que:

$$\mathbf{F}(t) = \hat{\mathbf{x}} \left\{ -\frac{1}{8\pi} \left[\frac{\partial A_0}{\partial x}(x, t) \right]^2 \Big|_{x=q(t)-\delta(t)/2}^{x=q(t)+\delta(t)/2} + \frac{1}{4\pi c^2} \int_{q-\delta(t)/2}^{q(t)+\delta(t)/2} \frac{\partial^2 A_0}{\partial t^2} \frac{\partial A_0}{\partial x} dx \right\} (y_1 - y_0)(z_1 - z_0) \quad (4.70)$$

En lo subsecuente escribiremos:

$$h(x, t) \Big|_{x=a}^{x=b} = h(b, t) - h(a, t) \quad (4.71)$$

Supongamos que el espejo tiene una masa por unidad de volumen ρ_{MO} uniforme cuando se encuentra en reposo. Entonces su densidad de masa respecto del sistema \mathbf{LS} está dada por $\rho_M = \gamma(t)\rho_{MO}$. Utilizando la ecuación (4.39) se sigue que la cantidad de masa del espejo contenida en el volumen $V(t)$ está dada por:

$$M = \iiint_{V(t)} \rho_M(t) d^3r = \delta(t)(y_1 - y_0)(z_1 - z_0)\gamma(t)\rho_{MO} = M_0(y_1 - y_0)(z_1 - z_0) \quad (4.72)$$

con M_0 la masa por unidad de área, es decir:

$$M_0 = \rho_{MO}\delta_0 \quad (4.73)$$

Consideremos ahora que la cantidad de espejo contenida en el volumen $V(t)$ es una única partícula de masa M dada por la ecuación (4.72). Entonces su momento mecánico relativista, como fue definido en la Sección 2.5, estará dado por:

$$\mathbf{P}_{mec}(t) = (y_1 - y_0)(z_1 - z_0)M_0\gamma(t)\dot{q}(t)\hat{\mathbf{x}} \quad (4.74)$$

Utilizando (2.22) la ecuación de movimiento del espejo será:

$$\frac{d\mathbf{P}_{mec}}{dt} = \mathbf{F}(t) \quad (4.75)$$

En base a (4.70) y (4.74), podemos simplificar (4.75) para obtener:

$$\frac{dp(t)}{dt} = f(t) \quad (4.76)$$

donde $p(t)$ es el momento mecánico por unidad de área perpendicular al eje x y $f(t)$ es la presión ejercida por el campo a lo largo del eje x , es decir:

$$p(t) = M_0\gamma(t)\dot{q}(t)$$

$$f(t) = -\frac{1}{8\pi} \left[\frac{\partial A_0}{\partial x}(x, t) \right]^2 \Big|_{q(t)-\delta(t)/2}^{q(t)+\delta(t)/2} + \frac{1}{4\pi c^2} \int_{q(t)-\delta(t)/2}^{q(t)+\delta(t)/2} \frac{\partial A_0}{\partial x} \frac{\partial^2 A_0}{\partial t^2} dx \quad (4.77)$$

La ecuación (4.76) combinada con (4.53) constituye el sistema de ecuaciones auto-consistentes que gobiernan la evolución temporal del sistema espejo-campo.

Para simplificar la expresión (4.76) debemos usar la ecuación para $A_0(x, t)$. Haremos esto a primer orden en $\dot{q}(t)$ y $\ddot{q}(t)$, o equivalentemente, a primer orden en ϵ_p . Sustituyendo $\partial^2 A_0(x, t)/\partial t^2$ de (4.65) en la $f(t)$ dada por (4.77) y simplificando, obtenemos:

$$M(q(t), t)\ddot{q}(t) = F_0(q(t), t) - F_1(q(t), t)\frac{\dot{q}(t)}{c} \quad (4.78)$$

donde

$$\begin{aligned} F_0 &= -\frac{1}{2} \int_{q(t)-\delta_0/2}^{q(t)+\delta_0/2} \frac{\chi(x-q(t))}{1+4\pi\chi(x-q(t))} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial A_0}{\partial x} \right]^2 dx - \frac{1}{c^2} \int_{q(t)-\delta_0/2}^{q(t)+\delta_0/2} \frac{\sigma(x-q(t))}{1+4\pi\chi(x-q(t))} \frac{\partial A_0}{\partial x} \frac{\partial A_0}{\partial t} dx, \\ F_1 &= \frac{1}{c} \int_{q(t)-\delta_0/2}^{q(t)+\delta_0/2} \left\{ \frac{\sigma(x-q(t))}{1+4\pi\chi(x-q(t))} + \frac{\chi(x-q(t))}{1+4\pi\chi(x-q(t))} \right\} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial A_0}{\partial x} \right]^2 dx \\ M &= M_0 + \frac{1}{c^2} \int_{q(t)-\delta_0/2}^{q(t)+\delta_0/2} \frac{\chi(x-q(t))}{1+4\pi\chi(x-q(t))} \left[\frac{\partial A_0}{\partial x} \right]^2 dx \end{aligned} \quad (4.79)$$

Notemos que (4.65) combinada con (4.78) constituyen un conjunto auto-consistente de ecuaciones para la dinámica del sistema espejo-campo correcto a primer orden en ϵ_p .

Como consecuencia de las ecuaciones anteriores, podemos observar que el movimiento del espejo y su acoplamiento al campo electromagnético da lugar a dos efectos importantes:

- El primero es una masa dependiente de la posición y del tiempo la cual se encuentra relacionada con la masa efectiva tomada en diversos tratamientos fenomenológicos del sistema.
- El segundo es una fuerza dependiente de la velocidad, ésta puede dar lugar a una fuerza disipativa, o fricción, la cual se encuentra relacionada con el enfriamiento de objetos mecánicos.

4.4.1. El caso en que la susceptibilidad y la conductividad son funciones contantes por partes

Los resultados antes mencionados son válidos para cualquier conjunto de funciones $\chi(x'')$, $\sigma(x'')$ continuas y derivables que sean cero fuera del espejo. En particular, podemos suponer que las expresiones para dichas cantidades están dadas por (4.38). En este caso se tendrá que $\chi(x-q(t)) = \chi_0$ y $\sigma(x-q(t)) = \sigma_0$ para $|x-q(t)| \leq \delta_0/2$, de tal manera que los factores que las involucran pueden ser sacados fuera de las integrales. En particular, el primer término en $F_0(q(t), t)$ dado en (4.79) puede ser integrado explícitamente..

El caso más simple que se puede estudiar para la dinámica del sistema espejo-campo ocurre cuando se considera que el material del espejo no es conductor, de tal forma que $\sigma_0 = 0$ y a su

vez se realiza una aproximación a orden cero en $\dot{q}(t)$ y en $\ddot{q}(t)$ tanto en la ecuación para el campo electromagnético, como en la ecuación de movimiento del espejo. En este caso, las ecuaciones (4.65) y (4.78) se reducen a:

$$M_0\ddot{q} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\chi_0}{1 + 4\pi\chi_0} \right) \left[\frac{\partial A_0}{\partial x}(x, t) \right]_2 \Big|_{q(t)-\delta(t)/2}^{q(t)+\delta(t)/2} \quad (4.80)$$

$$\frac{\partial^2 A_0}{\partial x^2}(x, t) = \frac{1 + 4\pi\chi(x - q(t))}{c^2} \frac{\partial^2 A_0}{\partial t^2}(x, t)$$

Observemos que el término dependiente del tiempo que modificaba a M_0 en la última ecuación de (4.79) no está presente en (4.80) debido a que este proviene de correcciones en la fuerza que afecta al espejo a primer orden en $\dot{q}(t)$ y $\ddot{q}(t)$.

El objetivo del siguiente capítulo consiste en reproducir los resultados expuestos en [18], en el cual se realiza un estudio de la dinámica que describen el conjunto de ecuaciones (4.80) para el caso especial en el cual hay un espejo fijo en $x = 0$ y un espejo móvil muy delgado, este último pudiendo moverse libremente en la región $x > 0$. Así mismo se considera que el espejo móvil es muy delgado, de tal manera que su susceptibilidad eléctrica puede aproximarse por medio de una función delta de Dirac: $\chi(x'') = \chi_0\delta(x'')$. Encontraremos entonces una serie de resultados sumamente interesantes, como pronto se verá :D .

4.5. Validez de la suposición de que el espejo se encuentra aproximadamente en reposo

Hasta ahora hemos supuesto que el espejo se encuentra aproximadamente en reposo respecto del sistema inercial \mathbf{MS}_0 durante el intervalo de tiempo $[-t''_1, t''_1]$ dado en (4.15) si el punto medio $q''(t'')$ respecto de \mathbf{MS}_0 se mueve una distancia mucho menor que $\delta_0/2$ durante ese intervalo de tiempo. En esta sección estableceremos condiciones necesarias para que esto pase en el caso específico en el cual la susceptibilidad esté dada por (4.38), la conductividad sea cero ($\sigma(x'') = 0$) y el campo electromagnético se encuentre dado por las expresiones (4.51) y (4.52).

Supondremos primero que el espejo se encuentra en reposo respecto del sistema \mathbf{MS}_0 durante el intervalo de tiempo $[-t''_1, t''_1]$ y deduciremos la fuerza por unidad de área que actúa sobre el espejo en el sistema \mathbf{MS}_0 .

De acuerdo a la Sección 3.4, los potenciales \mathbf{A} y $\phi(x, t)$ son en realidad las componentes de un cuatro-vector, el cuatro-vector de potencial A_μ (ecuación (3.30)). Si a dichos potenciales respecto al sistema \mathbf{LS}_0 los denotamos como $\mathbf{A}'(x', t')$, $\phi'(x', t')$, y a los potenciales respecto al sistema \mathbf{MS}_0 los denotamos por $\mathbf{A}''(x'', t'')$ y $\phi''(x'', t'')$, entonces las cantidades en uno y otro sistema de referencia están conectadas por las transformaciones de Lorentz, que en forma matricial pueden ponerse de la siguiente manera:

$$A_\mu(x, t) = A'_\mu(x', t') = M_1 A''_\mu(x'', t'') \quad (4.81)$$

en donde $A_\mu = (A_x, A_y, A_z, i\phi)$ y la matriz M_1 está dada por (4.31). Notemos que (4.3) se cumple, con \mathbf{A} y ϕ en lugar de f . Utilizando (4.51) y (4.81) obtendremos que:

$$\mathbf{A}''(x'', t'') = A_0(x, t)\widehat{\mathbf{z}}, \quad \phi''(x'', t'') = 0 \quad (4.82)$$

Entonces, potenciales como los que se dan en (4.51) respecto a \mathbf{LS} , implican que los campos en \mathbf{MS}_0 pueden ser obtenidos a partir de potenciales $\mathbf{A}''(x'', t'') = A_0''(x'', t'')\widehat{\mathbf{z}}''$ y $\phi''(x'', t'') = 0$ con fórmulas similares a las dadas en (4.52).

Observando la primera ecuación de (4.80) es posible darse cuenta de que el lado derecho de dicha expresión proporciona la presión correcta sobre el espejo a orden cero en $\beta(t)$ y $\dot{\beta}(t)$, lo que significa que nos da la fuerza por unidad de área que afecta al espejo, cuando el espejo se encuentra en reposo. Entonces, para determinar la fuerza que afecta al espejo respecto del sistema \mathbf{MS}_0 durante el intervalo de tiempo $[-t_1'', t_1'']$ simplemente tenemos que considerar el lado derecho de la primer ecuación en (4.80) y reemplazar $(\partial A_0/\partial x)(x, t)$ por $(\partial A_0''/\partial x'')(x'', t'')$ y $q(t)$ por $q''(t'')$, y usar el hecho de que $\mathbf{B}''(x'', t'') = \nabla'' \times \mathbf{A}''(x'', t'') = -(\partial A_0''/\partial x'')(x'', t'')\widehat{\mathbf{y}}''$. De esta manera, a partir de (4.80), la fuerza por unidad de área afectando al espejo en el instante $t'' = 0$ respecto del sistema inercial \mathbf{MS}_0 está dada por:

$$f_0 = -\frac{\chi_0}{2(1 + 4\pi\chi_0)} |\mathbf{B}''(x'', 0)|^2 \Big|_{x''=-\delta_0/2}^{x''=+\delta_0/2} \quad (4.83)$$

en donde hemos utilizado que $q''(0) = 0$. Esta expresión para la presión es válida si el espejo se encuentra aproximadamente en reposo. Lo que haremos ahora es utilizar la expresión que hemos encontrado para la presión en la ecuación de movimiento del espejo, para entonces determinar si en verdad el espejo se mueve una distancia despreciable.

De acuerdo con (4.76), la ecuación de movimiento del espejo en el sistema \mathbf{MS}_0 es:

$$\frac{d}{dt''} \left[M_0 \gamma_1(t'') \frac{dq''}{dt''} \right] \simeq f_0 \quad (4.84)$$

donde:

$$\gamma_1(t'') = \left\{ 1 - \left[\frac{1}{c} \frac{dq''}{dt''} \right]^2 \right\}^{-1/2} \quad (4.85)$$

En la expresión (4.84) hemos aproximado la presión que actúa en el espejo respecto del sistema \mathbf{MS}_0 en el instante t'' con la presión que actúa en el instante $t'' = 0$.

Si

$$\left(\frac{f_0 t_1''}{M_0 c} \right)^2 \ll 1 \quad (4.86)$$

entonces la solución de (4.84) con las condiciones iniciales $q''(0) = 0$ y $(dq''/dt'')(0) = 0$ es:

$$q''(t'') \simeq \frac{f_0}{2M_0} (t'')^2 \quad t'' \in [0, t_1''] \quad (4.87)$$

A partir de la ecuación (4.87), el espejo se encontrará aproximadamente en reposo durante el intervalo de tiempo $[0, t_1'']$ si:

$$\left| \frac{f_0}{2M_0} (t_1'')^2 \right| \ll \frac{\delta_0}{2} \quad , \quad \left| \frac{f_0}{cM_0} t_1'' \right|^2 \ll 1 \quad (4.88)$$

La primera condición en (4.88) nos dice que el punto medio del espejo debe tener un desplazamiento mucho más pequeño que la mitad del grosor del espejo cuando está en reposo. La segunda condición nos dice que el cuadrado de la velocidad del punto medio del espejo debe ser mucho más pequeño que c^2 . Todas estas condiciones están dadas respecto al sistema \mathbf{MS}_0 .

Una condición suficiente para (4.88) puede ser obtenida de la siguiente forma. Supongamos que

$$|\mathbf{E}(x, t)| \leq E_{max} \quad |\mathbf{B}(x, t)| \leq B_{max} \quad (4.89)$$

en donde E_{max} y B_{max} son las intensidades máximas de los campos eléctrico y magnético, respectivamente. Utilizando las ecuaciones de transformación ((4.18)) en combinación con (4.52) se sigue que:

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}''(x'', 0)| &\leq \gamma_0(E_{max} + |\beta_0|B_{max}) \\ |\mathbf{B}''(x'', 0)| &\leq \gamma_0(B_{max} + |\beta_0|E_{max}) \end{aligned} \quad (4.90)$$

Usando (4.90) en (4.88) podemos demostrar que (4.88) se cumplirá siempre que:

$$\begin{aligned} B_{max} &\ll \sqrt{\frac{2\pi\rho_{MO}c^2}{\gamma_0^2|\beta_0|}} \\ y \\ |\beta_0|E_{max} &\ll \sqrt{\frac{2\pi\rho_{MO}c^2}{\gamma_0^2|\beta_0|}} \end{aligned} \quad (4.91)$$

Podemos ilustrar los resultados anteriores utilizando un ejemplo experimental concreto. En [40] se introduce un arreglo experimental que puede ser analizado a partir del modelo que hemos desarrollado aquí. En esa referencia se tiene un espejo con las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} L = W &= 10^{-3}(m) \\ \delta_0 &= 50 \times 10^{-9}(m) \\ M &= 4 \times 10^{-11}(kg) \end{aligned} \quad (4.92)$$

en donde $L = (y_1 - y_0)$ y $W = (z_1 - z_0)$. Observemos que la altura y la anchura del espejo es este arreglo particular son mucho mayores que el grosor, de tal manera que el modelo aproximado que hemos desarrollado aquí (considerando al espejo como infinito en dos direcciones espaciales) resulta perfectamente razonable.

Dado que el lado derecho de la ecuación (4.91) es estrictamente decreciente respecto a β_0 y si tomamos valores de β_0 menores que $1/2$ obtendremos cotas mayores, consideraremos que $\beta_0 = 1/2$.

Para tener una mejor relación entre las expresiones que hemos deducido aquí y las cantidades utilizadas en el laboratorio, reescribiremos las expresiones anteriores en unidades MKS , en lugar del sistema Gaussiano que hemos venido utilizando hasta ahora:

$$\mathbf{E}^{MKS} = \frac{\mathbf{E}^{GAUSS}}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} \quad \mathbf{B}^{MKS} = \frac{\mathbf{B}^{GAUSS}}{c\sqrt{4\pi\epsilon_0}} \quad (4.93)$$

en donde los exponentes denotan las unidades en las cuales se encuentran cada una de las cantidades.

A partir de (4.91), (4.93), los parámetros dados en (4.92) y el valor de $\beta_0 = 1/2$, obtenemos

las siguientes cotas para los campos eléctrico y magnético máximos en unidades MKS:

$$\begin{aligned} E_{max}^{MKS} &\ll \frac{1}{|\beta_0|\sqrt{4\pi\epsilon_0}} \sqrt{\frac{2\pi\rho_{MO}c^2}{\gamma_0^2|\beta_0|}} \simeq 5.2 \times 10^{15} \left(\frac{V}{m}\right) \\ B_{max}^{MKS} &\ll \frac{1}{c\sqrt{4\pi\epsilon_0}} \sqrt{\frac{2\pi\rho_{MO}c^2}{\gamma_0|\beta_0|}} \simeq 10^7 (T) \end{aligned} \quad (4.94)$$

Consideremos que el campo electromagnético de un láser se encuentra descrito por una onda plana. En el sistema de unidades *MKS*, la potencia incidente (en watts) sobre el espejo estará dada por [2]:

$$P = LW \frac{c\epsilon_0}{2} (E_{max}^{MKS})^2 \quad (4.95)$$

La relación entre las amplitudes de los campos eléctrico y magnético en una onda plana viene dada por la siguiente expresión [2]:

$$B = \frac{1}{c} E \quad (4.96)$$

Utilizando esta última relación, despejando E_{max}^{MKS} de (4.95) y sustituyendo los valores dados en (4.92), obtenemos los siguientes valores para las magnitudes máximas de los campos eléctrico y magnético en función de la potencia incidente del láser:

$$E_{max}^{MKS} = 2.7\sqrt{P} \times 10^4 \left(\frac{V}{m}\right) \quad (4.97)$$

$$B_{max}^{MKS} = \sqrt{P} \times 10^{-4} (T)$$

Si, por ejemplo, consideramos que la potencia del láser es de $P = 2$ watts, podemos observar inmediatamente que las dos cantidades en (4.97) son mucho más pequeñas que las cotas establecidas en (4.94).

La conclusión que sacamos de todo esto es que la suposición de que el espejo se encuentra aproximadamente en reposo durante el intervalo de tiempo $[-t_1'', t_1'']$ resulta perfectamente razonable para la mayoría de las situaciones experimentales.

4.6. Una densidad lagrangiana para el campo electromagnético

En esta sección encontraremos una densidad lagrangiana para el campo electromagnético en el caso especial en el cual la conductividad es cero: $\sigma(x'') = 0$.

Debido a que (4.22) son válidas durante el intervalo de tiempo $[-t_1'', t_1'']$, la densidad lagrangiana para el campo electromagnético, en el sistema \mathbf{MS}_0 , está dada por [1]:

$$\mathcal{L}'' = \frac{1}{8\pi} [\mathbf{E}'' \cdot \mathbf{D}'' - \mathbf{B}'' \cdot \mathbf{H}''] = \frac{1}{8\pi} [\epsilon(x'') \mathbf{E}''^2 - \mathbf{B}''^2] \quad (4.98)$$

para $t'' \in [-t_1'', t_1'']$ y siendo:

$$\epsilon(x'') = 1 + 4\pi\chi(x'') \quad (4.99)$$

la función dieléctrica. La densidad lagrangiana anterior puede escribirse en forma matricial como sigue:

$$\mathcal{L}'' = \frac{1}{8\pi} \begin{pmatrix} \mathbf{E}'' \\ \mathbf{B}'' \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \epsilon(x'')I_3 & O_{3 \times 3} \\ O_{3 \times 3} & -I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}'' \\ \mathbf{B}'' \end{pmatrix} \quad (4.100)$$

Utilizando las ecuaciones de transformación (4.18) y (4.3) podemos expresar la densidad lagrangiana dada en (4.100) respecto del sistema \mathbf{LS} , obteniendo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8\pi} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}^T (M_0^{-1})^T \begin{pmatrix} \epsilon(x'')I_3 & O_{3 \times 3} \\ O_{3 \times 3} & -I_3 \end{pmatrix} M_0^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{E}'' \\ \mathbf{B}'' \end{pmatrix} \quad (4.101)$$

con $x'' = \gamma(t)[x - q(t)]$.

Podemos particularizar la expresión (4.101) para el caso específico dado en (4.51) y (4.52) con lo cual obtenemos lo siguiente:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8\pi} \left\{ \left[\frac{1}{c} \frac{\partial A_0}{\partial t}(x, t) \right]^2 - \left[\frac{\partial A_0}{\partial x}(x, t) \right]^2 \right\} + \frac{\gamma(t)^2 \chi_{LS}(x, t)}{2} \left[\frac{1}{c} \frac{\partial A_0}{\partial t}(x, t) + \beta(t) \frac{\partial A_0}{\partial x}(x, t) \right]^2 \quad (4.102)$$

La densidad lagrangiana dada en (4.102) es la suma de una parte debida al campo electromagnético libre y otra debida a la presencia del espejo. Las ecuaciones de Lagrange asociadas a \mathcal{L} son [3]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_t A_0(x, t)]} \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_x A_0(x, t)]} \right\} = 0 \quad (4.103)$$

en donde ∂_t es la derivada parcial respecto de t y ∂_x es la derivada parcial respecto de x . Las ecuaciones de Lagrange (4.103) aplicadas a (4.102) nos permiten obtener la ecuación (4.53).

Para obtener las ecuaciones aproximadas para el campo electromagnético (por ejemplo, las ecuaciones a primer orden en la velocidad y aceleración del espejo) a partir de una densidad Lagrangiana, podríamos estar tentados a utilizar una expresión del siguiente tipo:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \beta(t)\mathcal{L}_1 + \frac{1}{2}\beta(t)^2\mathcal{L}_2 + \dots \quad (4.104)$$

sin embargo enfrentamos un problema. El término $\beta(t)^n \mathcal{L}_n/n!$ introduce términos de orden ϵ_p^n y ϵ_p^{n+1} en las ecuaciones de Lagrange para el campo debido a que debemos calcular derivadas respecto a t , y además factores como $\chi[x - q(t)]$ están presentes. De esto se sigue que ecuaciones de orden n en $\dot{q}(t)$ y $\ddot{q}(t)$ para el campo, no pueden ser obtenidas exactamente a partir de un lagrangiano de la forma (4.104) simplemente despreciando los términos \mathcal{L}_m con $m > n$, debido a que términos de orden $n + 1$ tendrían que ser despreciados de las ecuaciones de Lagrange mismas para obtener las ecuaciones de movimiento correctas. Esto prueba que, aparentemente, no es posible obtener una densidad Lagrangiana aproximada de un orden dado que lleve a las ecuaciones de evolución del campo correctas sin tener que descartar términos en los resultados finales, y no sólo en la densidad lagrangiana misma. El argumento anterior es válido para una susceptibilidad eléctrica $\chi(x'')$ continua y diferenciable. Para una susceptibilidad constante por partes, como la dada en (4.38), las derivadas de $\chi[x - q(t)]$ son cero, tanto adentro como afuera del espejo, de manera que se obtienen las ecuaciones correctas a orden n en $\dot{q}(t)$ y $\ddot{q}(t)$ para el campo si se desprecian términos de orden \mathcal{L}_m con $m > n$.

Concluimos este capítulo haciendo notar que el tratamiento de la dinámica del espejo que hemos expuesto aquí, proveniente de [17], no se restringe a, por ejemplo, movimientos oscilatorios. De

hecho,este tratamiento permite acelerar el espejo hasta velocidades relativistas, siempre y cuando dicha aceleración se haga de forma gradual.

Capítulo 5

Dinámica Clásica de un Espejo Móvil interactuando con un Campo Electromagnético

*No hay un rival como tal
sino que Golden State es su propio rival
Carlos “El Coach” Morales*

En el capítulo anterior establecimos las ecuaciones de evolución para un espejo móvil, el cuál solo puede moverse en una dirección, interactuando con un campo electromagnético. Este capítulo está dedicado a reproducir lo expuesto en [18], es decir se estudia un caso particular para la ecuación 4.80. Específicamente, haremos la suposición de que el espejo móvil es sumamente delgado, de tal manera que podrá modelarse como una función delta de Dirac δ , y se encontrará interactuando con el campo electromagnético de un láser a través de la presión de radiación, a este sistema agregaremos un espejo fijo en $x = 0$. Partimos entonces de las ecuaciones de Maxwell-Newton obtenidas en [17] y dadas en el capítulo anterior, pero tomadas a orden cero en la velocidad y aceleración, válidas cuando la velocidad y la aceleración del espejo móvil son pequeñas. Consideramos los modos exactos del sistema completo sin dividirlos en modos dentro de la cavidad y modos afuera de ella, tal como se hace en [18], lo cual permite incorporar características como la transparencia del espejo y las frecuencias de resonancia de la cavidad dependientes de la posición del espejo directamente en dichos modos.

Ponemos también especial atención a establecer las condiciones bajo las cuales el modelo revisado es válido.

5.1. Descripción del sistema

El sistema que ahora estudiaremos consiste en un espejo perfecto (con transparencia igual a cero, o equivalentemente reflectividad igual a uno) fijo y un espejo móvil, ambos paralelos al plano yz . El espejo fijo se encuentra localizado en $x = 0$, mientras que el espejo móvil se encuentra en $x = q(t) > 0$ en el instante t y tiene un grosor δ_{mov} cuando se encuentra en reposo (Figura 5.1). El espejo móvil poseerá las mismas características electromagnéticas cuando esta en reposo que consideramos en el capítulo anterior, es decir: será un material dieléctrico (y por tanto, no conductor) lineal e isotrópico y no magnetizable. Análogamente a como lo hicimos en el capítulo anterior, consideraremos que el campo eléctrico se encuentra linealmente polarizado a lo largo del eje z . Los campos eléctrico y

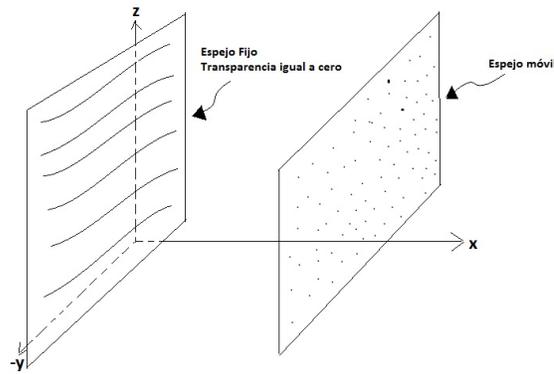


Figura 5.1: Espejo móvil y espejo fijo en $x = 0$. La líneas y puntos son solo ilustrativas. Indican que cada espejo tiene propiedades distintas.

magnético estarán entonces dados por el potencial vectorial (4.51) a partir de las ecuaciones (4.52). Bajo las condiciones descritas, la ecuación de evolución del potencial vectorial \mathbf{A} será (4.53), con la condición a la frontera:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\partial A_0}{\partial t}(x, t) = 0 \quad (5.1)$$

la cual proviene de imponer que $\mathbf{E}(x, t) = \mathbf{0}$ para $x < 0$. Esto debe ser así por la presencia del espejo perfecto en $x = 0$.

En el capítulo anterior se obtuvo una ecuación de evolución para $A_0(x, t)$ que es correcta a primer orden en la velocidad y aceleración del espejo móvil (Ec. (4.65)). En el presente capítulo simplificaremos aún más las cosas y consideraremos la evolución del campo electromagnético solamente hasta términos de orden cero en la velocidad y aceleración. Con base en esta suposición, y tomando en cuenta que la conductividad del espejo móvil es cero, la ecuación diferencial para $A_0(x, t)$ vendrá dada por la segunda de las expresiones en (4.80), es decir:

$$\frac{\partial^2 A_0}{\partial x^2}(x, t) = \frac{1 + 4\pi\chi(x - q(t))}{c^2} \frac{\partial^2 A_0}{\partial t^2}(x, t) \quad (5.2)$$

Con base en (4.59), (4.60) y (4.62), podemos afirmar que la ecuación (5.2) es una aproximación bastante precisa cuando se satisfacen las siguientes condiciones:

$$\left| \frac{\dot{q}(t)}{c} \right|, \quad \left| \frac{\ddot{q}(t)}{c\omega_0} \right| \ll 1 \quad (5.3)$$

En el resto de este capítulo asumiremos que el espejo móvil es sumamente delgado comparado con la longitud de onda característica del campo, es decir:

$$\delta_{mov} \ll \lambda_0 := \frac{2\pi c}{\omega_0} \quad (5.4)$$

de tal manera que podemos aproximar la susceptibilidad eléctrica χ como una función delta de Dirac:

$$\chi(x) = \chi_0 \delta(x - q(t)) \quad (5.5)$$

en donde χ_0 tiene unidades de longitud. Este modelo puede obtenerse directamente de (5.2) si tomamos los siguientes límites: $\delta_{mov} \rightarrow 0$, $\rho_0 \rightarrow +\infty$ (la densidad en reposo del espejo móvil) y $\chi \rightarrow +\infty$,

de tal manera que $\rho_0 \delta_{mov} = M_{mov} = \text{constante}$, y $\delta_{mov} \chi = \chi_0 = \text{constante}$.

La descripción de la evolución del sistema *espejo+campo* no puede hacerse sin la ecuación de movimiento del espejo móvil. Con base en las suposiciones que hemos establecido hasta aquí, y utilizando (4.78) y (4.79), la ecuación de movimiento del espejo móvil vendrá dada por la primera de las expresiones en (4.80), es decir:

$$M_0 \ddot{q}(t) = -\frac{1}{8\pi} \left[\left(\frac{\partial A_0}{\partial x}(q(t)+, t) \right)^2 - \left(\frac{\partial A_0}{\partial x}(q(t)-, t) \right)^2 \right] \quad (5.6)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Aquí M_0 es la masa por unidad de área y:

$$\frac{\partial A_0}{\partial x}(q(t)\pm, t) = \lim_{x \rightarrow q(t)\pm} \frac{\partial A_0}{\partial x}(x, t) \quad (5.7)$$

de acuerdo con la definición (4.43). Observemos $(\bullet \smile \bullet)$ (lo anterior se supone que es una carita feliz observando, aunque no lo parezca) que el lado derecho de (5.6) es la presión de radiación ejercida por el campo electromagnético sobre el espejo móvil, el cuál se encuentra instantáneamente en la posición $q(t)$.

Debemos hacer notar que son varios los fenómenos que no estamos tomando en cuenta en las ecuaciones (5.2) y (5.6), debido a que solo estamos considerando términos a orden cero en la velocidad y aceleración del espejo móvil, es decir, estamos despreciando términos del orden de $\dot{q}(t)/c$, $\ddot{q}(t)/(c\omega_0)$ y potencias mayores de cada uno de ellos. Considerando las expresiones (4.78) y (4.79), las primeras correcciones que aparecen en el lado derecho de (5.6) cuando se consideran potencias mayores para $\dot{q}(t)$ y $\ddot{q}(t)$ son; un término proporcional a $\dot{q}(t)/c$, el cuál representa una fuerza de disipación, y una fuerza dependiente de la aceleración, proporcional a $\ddot{q}(t)/c\omega_0$. Las ecuaciones (5.2) y (5.6) resultan buenas aproximaciones cuando se cumplen las condiciones (5.3), ya que estas últimas implican que los efectos producidos por la fuerza de disipación y la fuerza dependiente de la aceleración, son muy pequeños. Más aún, (5.3) implica que el espejo móvil tiene una velocidad y una aceleración lo suficientemente pequeñas como para considerar que el campo electromagnético evoluciona como si el espejo estuviera fijo en la posición $q(t)$.

Nuestro siguiente objetivo es resolver las ecuaciones (5.2) y (5.6) para conocer la evolución dinámica del sistema. Como primer paso calcularemos los modos del campo electromagnético para $q(t)$ fijo.

5.2. Modos para $q(t)$ fijo

Supongamos que los modos asociados al campo $A_0(x, t)$ tiene la siguiente forma funcional:

$$A_{0,k}(x, t) = V_k(x, q(t)) e^{-i\omega t} \quad (5.8)$$

donde k etiqueta el modo con número de onda k . Sustituyendo esta última expresión en (5.2), encontramos la ecuación diferencial para $V_k(x, q(t))$:

$$\frac{d^2 V_k}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} V_k = 0 \quad (5.9)$$

la cuál, en vista de que el espejo en $q(t)$ es un dieléctrico, se encuentra sometida a las siguientes condiciones a la frontera:

$$V_k(q(t)+, q(t)) = V_k(q(t)-, q(t)) \quad (5.10)$$

$$V_k(0+, q(t)) = 0 \quad (5.11)$$

$$\frac{dV_k}{dx}(q(t)+, q(t)) - \frac{dV_k}{dx}(q(t)-, q(t)) = -4\pi\chi_0 \frac{\omega^2}{c^2} V_k(q(t), q(t)) \quad (5.12)$$

Notemos que (5.11) es consecuencia de (5.1), mientras que (5.12) surge a causa de la discontinuidad introducida por la Delta de Dirac, ecuación (5.5). Además, hemos usado la notación introducida en (5.7).

La soluciones a (5.9) sujetas a las condiciones a la frontera (5.10), (5.11) y (5.12) son:

$$V_k(x, q(t)) = \begin{cases} L_k [q(t)] \sin(kx) & \text{si } 0 \leq x \leq q(t) \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\{k [x - q(t)] + \delta_k(q(t))\} & \text{si } x > q(t) \end{cases} \quad (5.13)$$

Aquí $k > 0$, $\omega = ck$, y:

$$\begin{aligned} L_k [q(t)] &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \{1 + (4\pi\chi_0 k)^2 \sin^2(kq(t)) - 4\pi\chi_0 k \sin(2kq(t))\}^{-1/2}, \\ \sin\{\delta_k(q(t))\} &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} L_k [q(t)] \sin [kq(t)], \\ \cos\{\delta_k [q(t)]\} &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} L_k [q(t)] \{\cos [kq(t)] - 4\pi\chi_0 k \sin [kq(t)]\}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Para k fijo, el coeficiente de transmisión para ondas incidentes desde la derecha, el cuál está definido como el cociente de la intensidad de la onda transmitida a través del espejo móvil entre el de la onda incidente, puede ser calculado también a partir de las condiciones a la frontera (5.10)-(5.12), obteniéndose la siguiente expresión:

$$T = \left[1 + \left(\frac{4\pi\chi_0 k}{2} \right)^2 \right]^{-1} \quad (5.15)$$

Por lo tanto, la transparencia del espejo móvil será pequeña si $T \ll 1$ o, equivalentemente, si $4\pi\chi_0 k \gg 1$.

Ahora que ya tenemos los modos para $A_0(x, t)$, los utilizaremos para describir una onda plana monocromática, proveniente de un láser, que incide sobre la cavidad desde la derecha. Para poder hacer esto debemos eliminar la fase dependiente de la posición del espejo móvil $e^{-i\delta_k[q(t)]} e^{ikq(t)}$ asociada con e^{-ikx} en la solución correspondiente a la región $x > q(t)$ en (5.13). Para ello introducimos un corrimiento de fase de la siguiente manera:

$$\tilde{V}_k(x, q(t)) = e^{i\Phi_k[q(t)]} V_k(x, q(t)) = \begin{cases} \frac{i}{2} L_k [q(t)] e^{i\{\delta_k[q(t)] - kq(t)\}} (e^{-ikx} - e^{ikx}) & \text{si } 0 \leq x \leq q(t) \\ \frac{i}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \{e^{-ikx} - e^{ikx} e^{i2\{\delta_k[q(t)] - kq(t)\}}\} & \text{si } x > q(t) \end{cases} \quad (5.16)$$

con

$$\phi_k [q(t)] = \delta_k [q(t)] - kq(t) \quad (5.17)$$

De esta manera, la onda plana e^{-ikx} en la expresión (5.16) correspondiente a la región $x > q(t)$ puede ser asociada a un láser monocromático incidiendo desde la derecha, ya que su fase no depende de la posición del espejo móvil. Así mismo, (5.16) expresa los modos del campo electromagnético en términos de ondas entrantes y salientes. Más específicamente, (5.16) describe una onda plana entrante con amplitud 1 y una onda reflejada con amplitud de dispersión $e^{i2\{\delta_k[q(t)]-kq(t)\}}$ debida a la presencia del espejo móvil. El factor i en dicha fórmula esta presente de manera que ésta se reduzca a $\tilde{V}(x, q(t)) = (2/\pi)^{1/2} \sin(kx)$ cuando $\chi_0 = 0$, es decir, cuando el espejo móvil es totalmente transparente. El factor $\sqrt{2/\pi}$ es necesario para que se satisfaga la condición de ortogonalidad que presentaremos más adelante.

Antes de continuar daremos algunas propiedades de las funciones $L_k[q(t)]$ para $q(t) \geq 0$. Sea $k > 0$ fijo y $\chi_0 > 0$. Observando la primera expresión en (5.14) podemos notar que $L_k[q(t)]$ se puede reescribir de la siguiente manera:

$$L_k(q) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[1 + \frac{(4\pi\chi_0k)^2}{2} - 4\pi\chi_0k \sin(2kq) - \frac{(4\pi\chi_0k)^2}{2} \cos(2kq) \right]^{-1/2} \quad (5.18)$$

De aquí se sigue entonces que:

$$\frac{dL_k}{dq}(q_n) = 0 \Leftrightarrow \tan(2kq_n) = \frac{2}{4\pi\chi_0k} \quad (5.19)$$

Asumiremos ahora que la transparencia del espejo móvil es muy pequeña, esto se traduce en que:

$$4\pi\chi_0k \gg 1 \quad (5.20)$$

Utilizando (5.20) se sigue que en una primera aproximación, si despreciamos el término $2/(4\pi\chi_0k)$ en el lado derecho de (5.19), se tendrá que $q_n \simeq n\pi/(2k)$ con $n \in \mathbb{N}$. Si utilizamos el método de Newton-Raphson sobre (5.19) obtenemos una mejor aproximación. Tras una primera iteración se sigue:

$$q_n \simeq \frac{1}{2k} \left(n\pi + \frac{2}{4\pi\chi_0k} \right) \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (5.21)$$

Evaluando ahora la segunda derivada $d^2L_k(q)/dq^2$ en el $q = q_n$ dado en (5.21), encontramos que q_{2n} son los puntos en donde $L_k(q)$ alcanza sus valores máximos, mientras que q_{2n+1} son los puntos en donde dicha función alcanza sus mínimos. Más aún, utilizando los valores aproximados para q_n dados en (5.21) y aproximando $\sin[2/(4\pi\chi_0k)]$ y $\cos[2/(4\pi\chi_0k)]$ por sus polinomios de Taylor de grado cuatro alrededor del cero, se sigue de (5.18) que:

$$\begin{aligned} L_k(q_{2n}) &\simeq \sqrt{\frac{2}{\pi}} (4\pi\chi_0k) \\ L_k(q_{2n+1}) &\simeq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{1}{4\pi\chi_0k} \right) \left[1 + \frac{2}{(4\pi\chi_0k)^2} - \frac{1}{(4\pi\chi_0k)^4} \right]^{-1/2} \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{1}{4\pi\chi_0k} \right) \end{aligned} \quad (5.22)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. En la igualdad aproximada para $L_k(q_{2n})$ y en la última igualdad para $L_k(q_{2n+1})$ se despreciaron respecto a 1 términos del orden de $1/(4\pi\chi_0k)^2$ y más pequeños. Además de esto, a partir de (5.21) encontramos que la distancia entre máximos consecutivos es aproximadamente $q_{2(n+1)} - q_{2n} \simeq \pi/k$ con $n \in \mathbb{N}$, la cual corresponde a la mitad de la longitud de onda característica del campo: $\lambda/2 = \pi/k$. La distancia entre mínimos consecutivos es esta misma cantidad. Notemos también que, conforme la transparencia del espejo disminuye, los valores que alcanza $L_k(q)$ en los

puntos máximos se incrementan, mientras que los valores en los puntos mínimos disminuyen.

Otra propiedad muy importante es el hecho de que $L_k^2(q)$ puede aproximarse por una función Lorentziana si la transparencia del espejo móvil es pequeña y restringimos q a un intervalo alrededor de q_{2n} cuyos puntos extremos no se encuentren cerca de los mínimos $q_{2n\pm 1}$. Para mostrarlo procederemos de la siguiente manera.

Definamos:

$$\begin{aligned}\xi &:= 4\pi\chi_0 k \\ v &:= k(q - q_{2n}) \\ f_0(q) &:= 1 + \frac{\xi^2}{2} - \xi \sin(2kq) - \frac{\xi^2}{2} \cos(2kq)\end{aligned}\tag{5.23}$$

Aproximando $f_0(q)$ a través de su polinomio de Taylor de segundo orden alrededor de q_{2n} , aproximando a su vez q_{2n} por el valor en el lado derecho de (5.21), aproximando también $\sin 2/\xi$ y $\cos(2/\xi)$ por sus respectivos polinomios de Taylor de orden cuatro alrededor del cero, simplificando y despreciando términos de orden $1/\xi^2$ y más pequeños respecto de 1, se sigue entonces que:

$$f_0(q) \simeq \frac{1}{\xi^2} + \xi^2 v^2\tag{5.24}$$

Sustituyendo (5.24) en la fórmula para $L_k(q)$ se obtiene la siguiente aproximación Lorentziana para $L_k^2(q)$:

$$L_k^2(q) \simeq \left(\frac{2}{\pi\xi^2}\right) \frac{1}{k^2(q - q_{2n})^2 + \frac{1}{\xi^4}}\tag{5.25}$$

Esta aproximación para $L_k^2(q)$ será bastante precisa cuando el error al aproximar $f_0(q)$ por su polinomio de Taylor de segundo orden alrededor de q_{2n} sea pequeño, es decir, cuando:

$$\left|\frac{1}{2}f_0''(q_{2n})\left(\frac{v}{k}\right)^2\right| \gg \left|\frac{1}{3!}f_0'''(q^{(0)})\left(\frac{v^3}{k}\right)\right|\tag{5.26}$$

con $q^{(0)}$ un punto en el intervalo abierto cuyos puntos finales son q y q_{2n} . Podemos simplificar la expresión (5.26), obteniéndose la siguiente desigualdad:

$$|v| \ll \frac{3}{2}\tag{5.27}$$

Utilizando la definición de v obtendremos que (5.27) puede escribirse como $|q - q_{2n}| \ll 3/(2k)$. Dado que $|q_{2n\pm 1} - q_{2n}| = \pi/(2k)$, se sigue que (5.20) y (5.27) simplemente dicen que la aproximación Lorentziana para $L_k^2(q)$ es muy buena cuando la transparencia del espejo móvil es pequeña y, sumado a esto, restringimos los valores de q a un intervalo alrededor de uno de los máximos q_{2n} cuyos puntos extremos se encuentren lejos de los puntos mínimos $q_{2n\pm 1}$ de $L_k(q)$. Esta aproximación tiene como parámetro de escala $\frac{1}{\xi^2}$, el cual especifica el ancho medio correspondiente al máximo medio. Notemos que dicho parámetro de escala es independiente del valor de n en q_{2n} , y que decrece conforme la transparencia del espejo disminuye. Más aún, observemos que $v \in [-1/\xi^2, 1/\xi^2]$ si y sólo si $kq \in [kq_{2n} - 1/\xi^2, kq_{2n} + 1/\xi^2]$.

Ahora discutiremos el comportamiento de $L_k[q(t)]$ y su relación con las frecuencias de resonancia de la cavidad, para el caso específico en el que $\xi \gg 1$. Sea $k > 0$ fijo. Conforme el espejo móvil se mueve (valga la redundancia), la función $L[q(t)]$ será muy grande sólo cuando $q(t) \simeq q_{2n}$ para algún

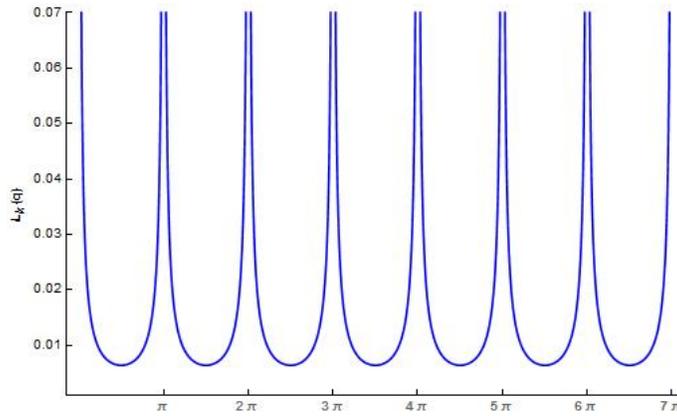


Figura 5.2: $L_k(q)$ como función de q (en unidades de metros) para $\chi_0 = 10m$ y $k = 1m^{-1}$

$n \in \mathbb{N}$. Ello implica que el modo $V_k(x, q)$ en (5.13) es mucho más grande dentro de la cavidad (es decir, en $0 \leq x \leq q = q_{2n}$) que afuera de ella (en $x > q = q_{2n}$). Esto significa que la frecuencia angular de oscilación del campo $\omega = ck$ coincide con una de las frecuencias de resonancia de la cavidad. De (5.22) y (5.25) se sigue que esto último se cumple si y sólo si $kq \in |kq_{2n} - 1/\xi^2, kq_{2n} + 1/\xi^2|$, es decir, sí y sólo si $k|q - q_{2n}| \leq (4\pi\chi_0 k)^{-2}$. La Figura 5.2 muestra la gráfica de $L_k(q)$ como función de q para los valores particulares $\chi_0 = 10m$ y $k = 1m^{-1}$.

Una de las características más importantes de (5.13) es el hecho de que dichas funciones forman un conjunto continuo, ortonormal y completo [41]. Adaptando dichas condiciones a los modos $\tilde{V}[x, q(t)]$ se sigue que:

$$\delta(k - k') = \int_0^{+\infty} \epsilon[x - q(t)] \tilde{V}_k[x, q(t)]^* \tilde{V}_{k'}[x, q(t)] dx \quad (5.28)$$

y entonces cualquier función $f(x) \in \mathcal{L}^2[0, +\infty)$ puede expresarse en la siguiente forma:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} f_k[q(t)] \tilde{V}_k[x, q(t)] dk \quad (5.29)$$

con el k -ésimo modo $f_k[q(t)]$ dado por:

$$f_k[q(t)] = \int_0^{+\infty} \epsilon[x - q(t)] \tilde{V}_k[x, q(t)]^* f(x) dx \quad (5.30)$$

Utilizando (5.29) y (5.30), se sigue entonces que:

$$A_0(x, t) = \int_0^{+\infty} Q_k[t, q(t)] \tilde{V}_k[x, q(t)] dk \quad (5.31)$$

con:

$$Q_k[t, q(t)] = \int_0^{+\infty} \epsilon[x - q(t)] \tilde{V}_k[x, q(t)]^* A_0(x, t) dx \quad (5.32)$$

Sustituyendo la expresión (5.31) en (5.2) usando que $\epsilon[x - q(t)] = 1 + 4\pi\chi(x - q(t))$, despreciando términos proporcionales a $\dot{q}(t)/c$, $\ddot{q}(t)/(c\omega_0)$ y potencias mayores de ellos y utilizando la relación

(5.28), obtenemos la siguiente ecuación diferencial para los modos $Q_k[t, q(t)]$:

$$\frac{d^2}{dt^2}Q_k[t, q(t)] + \omega_k^2 Q_k[t, q(t)] = 0 \quad (5.33)$$

con $\omega_k = ck$, $k > 0$, y $t \in \mathbb{R}$. Los términos proporcionales a $\dot{q}(t)/c$, $\ddot{q}(t)/(c\omega_0)$ y potencias mayores de ellos los hemos eliminado porque fueron términos de este orden los que fueron también eliminados para obtener la ecuación de evolución (5.2).

La solución de (5.33) se obtiene de manera inmediata para $k > 0$ y $t \in \mathbb{R}$:

$$Q_k[t, q(t)] = g(k)e^{-i\omega_k t} + g(k)^* e^{i\omega_k t} e^{-2i\Phi_k[q(t)]} \quad (5.34)$$

Aquí hemos utilizado la condición de que $A_0(x, t)$ sea una cantidad real. La función $g(k)$ es una función arbitraria del número de onda k ; dicha arbitrariedad nos da la libertad de escoger la forma de esta función de manera que podamos describir distintas situaciones físicas. Utilizaremos esta propiedad en la siguiente sección.

5.3. Campo electromagnético con un único modo

En la sección anterior utilizamos el conjunto de funciones $\tilde{V}_k[x, q(t)]$ para expresar al potencial $A_0(x, t)$ y encontramos una expresión para los coeficientes del desarrollo $Q_k[t, q(t)]$ que es correcta a orden cero en la velocidad y aceleración del espejo móvil. Utilizaremos ahora la arbitrariedad de la función $g(k)$ en (5.34) para describir la siguiente situación física;

Un láser monocromático incide desde el lado derecho (de derecha a izquierda) sobre el sistema de espejos, y se mantiene siempre encendido. Cuando el láser se enciende, la onda plana asociada con él viaja hacia la izquierda, es parcialmente reflejada por el espejo móvil en $q(t) > 0$, y es totalmente reflejada por el espejo fijo en $x = 0$. Después de un periodo de transición, se forma muy aproximadamente una onda estacionaria y, dado que el láser se mantiene siempre encendido, dicha situación estacionaria se mantiene.

Lo que queremos entonces es describir la dinámica del sistema después del periodo de transición descrito anteriormente, para ello supondremos en lo que resta de este capítulo que:

$$g(k) = g_0 e^{i\phi_0} \delta(k - k_N^0) \quad (5.35)$$

con $k_N^0 > 0$, $g_0 > 0$ y $\phi_0 \in \mathbb{R}$. Es decir, el campo electromagnético tendrá un único modo. Con esta elección, la onda estacionaria que se produce después del periodo de transición vendrá definida por el modo dado en (5.13) con $k = k_N^0$. Si sustituimos (5.34) y (5.35) en (5.31) y elegimos el origen temporal de manera que $\phi_0 = 0$, se sigue que:

$$A_0(x, t) = 2g_0 \cos \left\{ \omega_0 t + k_N^0 q(t) - \delta_{K_N^0}[q(t)] \right\} V_{k_N^0}[x, q(t)] \quad (5.36)$$

con $\omega_0 := \omega_{k_N^0} = ck_N^0$. Utilizando los modos complejos $\tilde{V}_k[x, q(t)]$ podemos expresar $A_0(x, t)$ de la siguiente manera:

$$A_0(x, t) = \text{Re} \left\{ 2g_0 \tilde{V}_{k_N^0}[x, q(t)] e^{-i\omega_0 t} \right\} \quad (5.37)$$

donde Re denota la parte real de un número complejo.

Observemos que el campo electromagnético no decae con el tiempo debido a que el láser se mantiene siempre encendido. Más aún, el campo dentro de la cavidad no decae irreversiblemente con el tiempo debido a que el láser lo alimenta continuamente. La restricción a un único modo es posible solamente cuando despreciamos términos del orden de $\dot{q}(t)/c$ y superiores, como lo hemos hecho aquí. Si mantenemos términos de orden superior a cero, entonces (como se observa en el capítulo anterior) las amplitudes de campo correspondientes a diferentes números de onda se mezclan, y no sería posible hacer una elección como en (5.35).

El siguiente paso es resolver la ecuación de movimiento del espejo móvil, ecuación (5.6). Sustituyendo (5.36) en (5.6) esta última toma la siguiente forma:

$$M_0 \ddot{q}(t) = \left(\frac{g_0 \omega_0}{\pi c} \right)^2 f_{RWA} [k_N^0 q(t)] \left(1 + \cos \left\{ 2\omega_0 t + 2k_N^0 q(t) - 2\delta_{k_N^0} [q(t)] \right\} \right) \quad (5.38)$$

con:

$$f_{RWA}(x) := -\frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{1 + (4\pi\chi_0 k_N^0)^2 \sin^2(x) - (4\pi\chi_0 k_N^0) \sin(2x)} \right] \quad (5.39)$$

Expresaremos ahora (5.39) en términos de cantidades adimensionales.

Definamos:

$$\begin{aligned} \Delta &= \sqrt{\frac{g_0^2 \omega_0^3}{\pi^2 M_0 c^3}} & \xi_N &= 4\pi\chi_0 k_N^0 \\ \Omega &= \frac{2\omega_0}{\Delta} & x(\tau) &= k_N^0 q \left(\frac{\tau}{\Delta} \right) \end{aligned} \quad (5.40)$$

Aquí Δ tiene unidades de $1/s$, $\tau = t\Delta$ es una escala de tiempo adimensional y ξ , Ω y $x(\tau)$ son todas cantidades adimensionales. Notemos que en estas definiciones hemos considerado a $1/k_N^0$ como la longitud característica del sistema, mientras que $1/\Delta$ es la unidad de tiempo característica. Es decir, hemos elegido medir longitudes en unidades de uno entre el número de onda del campo electromagnético, mientras que el tiempo es medido en unidades de una cantidad que involucra la intensidad del campo g_0 y su frecuencia angular ω_0 , y la masa por unidad de área M_0 del espejo móvil. La forma de Δ es sugerida por la ecuación diferencial (5.38) y puede pensarse como el inverso de la escala de tiempo en la cuál la posición del espejo móvil cambia apreciablemente. Entonces $\Omega = (4\pi/\Delta)/(2\pi/\Omega_0)$ puede interpretarse como la escala de tiempo en la cual el espejo cambia su posición apreciablemente dividida entre la escala de tiempo en la que el campo evoluciona de forma apreciable. Dado que el campo evoluciona en una escala de tiempo que es mucho más pequeña que la escala de tiempo del espejo, como lo mencionamos al inicio de la sección 4.3, se espera que $\Omega > 1$. Además, de (5.15) y (5.40), la transmitividad del espejo móvil estará dada por:

$$T = \left[1 + \left(\frac{\xi_N}{2} \right)^2 \right]^{-1} \quad (5.41)$$

de tal manera que la transparencia será pequeña si ξ_N es grande.

Utilizando (5.40) podemos reescribir (5.38) de la siguiente manera:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}(\tau) = \left\{ 1 + \cos \left[\Omega t + 2x(\tau) - 2\delta_{k_N^0} \left(\frac{x(\tau)}{k_N^0} \right) \right] \right\} f_{RWA}[x(\tau)] \quad (5.42)$$

y f_{RWA} toma la forma:

$$f_{RWA}(x) = -\frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{1 + \xi^2 \sin^2(x) - \xi \sin(2x)} \right] \quad (5.43)$$

Observemos que $1 + \xi^2 \sin^2(x) - \xi \sin(2x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Se utiliza la notación $f_{RWA}(x)$ porque el término en el lado derecho de (5.42) se reducirá a $f_{RWA}[x(\tau)]$ en la aproximación de onda rotante (en inglés *Rotating Wave Approximation*)⁴.

En lo subsecuente, las derivadas respecto a τ se denotarán por una prima, mientras que las derivadas respecto al tiempo t se denotarán por un punto.

5.3.1. El potencial de la presión de radiación

La fuerza adimensional $f_{RWA}(x)$ puede obtenerse a partir de un potencial adimensional $V_{RWA}(x)$:

$$f_{RWA}(x) = -\frac{d}{dx} V_{RWA}(x) \quad (5.44)$$

Si $(2n - 1)\pi/2 \leq x \leq (2n + 1)\pi/2$ y $x \geq 0$ con $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces $V_{RWA}(x)$ está dado por:

$$V_{RWA}(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \arctan[(1 + \xi^2) \tan(x) - \xi] - \frac{1}{2} [\arctan(\xi) + n\pi] \quad (5.45)$$

Recordemos que $\arctan(x) \in (-\pi/2, +\pi/2)$ para $x \in \mathbb{R}$.

Antes de continuar, deduciremos algunas propiedades importantes de la fuerza f_{RWA} y el potencial $V_{RWA}(x)$ que será de utilidad en lo que resta de este capítulo.

Consideremos el denominador de (5.43):

$$g(x) := 1 + \xi^2 \sin^2(x) - \xi \sin(2x) \quad (5.46)$$

Dado que $\sin(x) \leq 1$ y $[a \sin(x) - 1]^2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$, entonces $g(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$. En lo subsecuente asumiremos que:

$$\xi \gg 1 \quad (5.47)$$

De la ecuación (5.41) se sigue que la condición (5.47) significa que la transparencia del espejo móvil es muy pequeña. Como:

$$\frac{dg}{dx} = 2\xi^2 \sin(x) \cos(x) - 2\xi \cos(2x)$$

⁴La Aproximación de Onda Rotante es utilizada en óptica cuántica para obtener soluciones analíticas aproximadas de la ecuación de Schrödinger, en ella los términos que oscilan muy rápidamente son despreciados. En el apéndice A damos una introducción elemental al tema

Entonces la condición $g'(x_n) = 0$ implica que:

$$\tan(2x_n) = \frac{2}{\xi} \quad (5.48)$$

Como $\xi \gg 1$, entonces podemos, en una primera aproximación, tomar $\tan(2x_n) \approx 0$ de tal manera que $x_n \approx \frac{n\pi}{2}$ con $n \in \mathbb{Z}^+$. Si utilizamos este valor aproximado de x_n como aproximación inicial, podemos aplicar el método de Newton-Raphson a (5.48). Tras una primera iteración hallamos que:

$$x_n \simeq \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{\xi} \quad (5.49)$$

Dado que $\xi \gg 1$ la primera iteración resulta una aproximación suficientemente buena. Más aún, calculando numéricamente las soluciones de la ecuación trascendente $g'(x_n) = 0$ encontramos que los valores dados en el lado derecho de (5.49) son una muy buena aproximación al correspondiente valor exacto de x_n si $\xi \geq 5$ ya que el error relativo $|x_n - (n\pi/2 + 1/\xi)|/|x_n|$ resulta ser menor que 10^{-2} si $\xi \geq 5$ y menor que 10^{-3} si $\xi \geq 10$. Notemos además que x_n coincide con kq_n dado en (5.21).

Evaluando $g''(x)$ en $x = x_n$ y utilizando la aproximación dada en (5.49) obtenemos que x_{2n} son los puntos mínimos de $g(x)$, mientras que x_{2n+1} son los máximos. Dado que:

$$f_{RWA}(x) = -\frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{g(x)} \right] \quad (5.50)$$

se sigue entonces que x_{2n} son los máximos, mientras que x_{2n+1} son los mínimos relativos para $f_{RWA}(x)$ para cada $n \in \mathbb{Z}^+$. Si sustituimos (5.49) en $f_{RWA}(x)$ y preservamos solo términos de orden ξ^2 y 1 (siendo despreciados los términos de orden ξ^{-2} y menores) se sigue que:

$$f_{RWA}(x_n) \simeq \begin{cases} \frac{\xi^2}{2} - \frac{7}{18} & \text{si } n \text{ es par} \\ -\frac{1}{2} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \quad (5.51)$$

De una manera completamente análoga podemos calcular los ceros de $f_{RWA}(x)$ utilizando la suposición (5.47) y el método de Newton-Raphson. Como resultado de esto obtendremos que $f_{RWA}(x) = 0$ si y solo si $x = x_n^*$ o $x = x_n^{**}$ con:

$$x_n^* = n\pi \quad y \quad x_n^{**} \simeq n\pi + \frac{2}{\xi} \quad (5.52)$$

siendo $n\pi$ un cero exacto de $f_{RWA}(x)$.

De (5.49), (5.51) y (5.52) se sigue que $f_{RWA}(x)$ tiene máximos locales en los puntos x_{2n} con $n \in \mathbb{N}$ y además:

$$x_n^* = n\pi \leq x_{2n} \simeq n\pi + \frac{1}{\xi} \leq x_n^{**} \simeq n\pi + \frac{2}{\xi} \quad (5.53)$$

Ahora mostraremos un hecho sumamente importante, que es que $f_{RWA}(x)$ puede ser aproximada por una función Lorentziana en la vecindad de cada uno de sus puntos máximos x_{2n} . En lo subsecuente tomaremos $n \in \mathbb{Z}^+$ y

$$u := x - \left(n\pi + \frac{1}{\xi} \right) \quad (5.54)$$

Utilizando la serie de Taylor de $\tan(x)$ alrededor de 0 encontramos que:

$$\tan(x) \simeq u + \frac{1}{\xi} \quad (5.55)$$

El lado derecho de (5.55) será una aproximación bastante precisa para el lado izquierdo si la primera corrección al lado derecho es mucho más pequeña que $(u + \xi^{-1})$, esto es, si $1 \gg 3^{-1}(u + \xi^{-1})^2$. Utilizando (5.55) en la expresión (5.45) para $V_{RWA}(x)$ y despreciando a 1 con respecto a ξ^2 en el factor $(1 + \xi^2)$ a causa de la suposición (5.47), se sigue que:

$$V_{RWA}(x) \simeq \frac{1}{2} \left[u + \left(n\pi + \frac{1}{\xi} \right) \right] - \frac{1}{2} [\arctan(\xi) + n\pi] - \frac{1}{2} \arctan(\xi^2 u) \quad (5.56)$$

para $(2n-1)\pi/2 \leq x \leq (2n+1)\pi/2$ y $x \geq 0$. Si derivamos respecto de x la expresión (5.56) obtenemos que:

$$f_{RWA}(x) \simeq -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\xi^2(u^2 + \xi^{-4})} \quad (5.57)$$

para $(2n-1)\pi/2 \leq x \leq (2n+1)\pi/2$, $x > 0$ y u dado por (5.54). Las aproximaciones en (5.56) y (5.57) serán bastante precisas si $1 \gg 3^{-1}(u + \xi^{-1})^2$ y $\xi \gg 1$. De (5.57) se sigue que:

$$f_{RWA}(x)(n\pi + \frac{1}{\xi} \pm \frac{1}{\xi^2}) \simeq \frac{\xi^2}{4} \simeq \frac{1}{2} f_{RWA}(x_{2n}) \quad (5.58)$$

La primera aproximación en (5.58) se obtiene preservando solo términos del orden ξ^2 (se desprecian términos del orden ξ y menores), mientras que para la segunda aproximación hemos utilizado (5.51).

De (5.44) tenemos que $f_{RWA}(x) = -(dV_{RWA}/dx)$. Por lo tanto, los puntos críticos x_n^* y x_n^{**} de $V_{RWA}(x)$ están dados por (5.52). Evaluando d^2V_{RWA}/dx^2 en dichos puntos críticos, encontramos que $x_n^* = n\pi$ son puntos máximos, mientras que $x_n^{**} \simeq n\pi + 2/\xi$ son mínimos para $V_{RWA}(x)$. Más aún, para $n \in \mathbb{Z}^+$ tendremos que:

$$\begin{aligned} V_{RWA}(n\pi) &= 0 \\ V_{RWA}(n\pi + \frac{2}{\xi}) &\simeq -\arctan(\xi) \end{aligned} \quad (5.59)$$

La primera igualdad en (5.59) es exacta, mientras que la segunda se obtiene despreciando términos de orden $1/\xi$ y menores. Además tenemos que

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} V_{RWA}(n\pi + \frac{2}{\xi}) = -\frac{\pi}{2}$$

Notemos que $V_{RWA}(n\pi) = 0$ de manera que $V_{RWA}(x)$ tiene una discontinuidad en los puntos $n\pi$ en el límite $\xi \rightarrow +\infty$.

Ahora haremos a un lado la suposición de que $\xi \gg 1$ dada en (5.47) y demostraremos que

$$-\pi/2 < V_{RWA}(x) \leq 0 \quad (5.60)$$

para todo $x \geq 0$, sin importar el valor de ξ .

Primeramente observemos que la desigualdad $V_{RWA}(x) \leq 0$ para todo $x \geq 0$ se obtiene al notar

que $V_{RWA}(x)$ es una función continua periódica cuyo valor máximo, de acuerdo con (5.59), es precisamente 0, además dicho valor lo alcanza en los puntos x_n^* dados por (5.52).

Para la cota inferior $-\pi/2 < V_{RWA}(x)$ para todo $x \geq 0$ procederemos como sigue. De la definición de $V_{RWA}(x)$ dada en (5.45) y de (5.59) tendremos que:

$$\begin{aligned} V_{RWA} \left[(2n+1) \frac{\pi}{2} \right] &= -\frac{1}{2} \arctan(\xi) \geq -\frac{\pi}{4} \\ V_{RWA}(n\pi) &= 0 \end{aligned} \quad (5.61)$$

para cada $n \in \mathbb{Z}^+$. Entonces, todo lo que queda por demostrar es que $-\pi/2 < V_{RWA}(x)$ para todo $x \geq 0$ con $x \neq n\pi$ y $x \neq (2n+1)\pi/2$, con $n \in \mathbb{Z}^+$.

Sean $x \geq 0$ y $n \in \mathbb{Z}^+$ fijos, con $(2n-1)\pi/2 < x < (2n+1)\pi/2$ y $x \neq n\pi$. De esta manera podemos considerar a V_{RWA} como una función de ξ y escribir $V_{RWA}(x, \xi)$. A partir de la definición de $V_{RWA}(x)$ dada en (5.45) tendremos, para $\xi \geq 0$, que:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} V_{RWA}(x, \xi) = -\frac{1}{2(\xi^2 + 1)} - \frac{1}{2} \frac{2\xi \tan(x) - 1}{[(1 + \xi^2) \tan(x) - \xi]^2 + 1} \quad (5.62)$$

Se sigue entonces que:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} V_{RWA}(x, \xi) < 0 \quad \text{para } \xi \geq 0 \quad (5.63)$$

Entonces $V_{RWA}(x, \xi)$ como función de $\xi \geq 0$ es estrictamente decreciente y además se tiene que:

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} V_{RWA}(x, \xi) < V_{RWA}(x, \xi) \quad (5.64)$$

Utilizando la función escalón de Heaviside:

$$H(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 1 & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

y a partir de (5.45), se sigue que:

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} V_{RWA}(x, \xi) = \frac{x}{2} - n \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} H[\tan(x)] > -\frac{\pi}{2} \quad (5.65)$$

Así, de (5.64) y (5.65) obtenemos la desigualdad $-\pi/2 < V_{RWA}(x, \xi)$. Por lo tanto, $-\pi/2 < V_{RWA}(x)$ para todo $x \geq 0$.

En la Figura 5.3 se muestra una gráfica de la fuerza adimensional $f_{RWA}(x)$ para $\xi = 1$, y del potencial $V_{RWA}(x)$ para distintos valores de ξ :

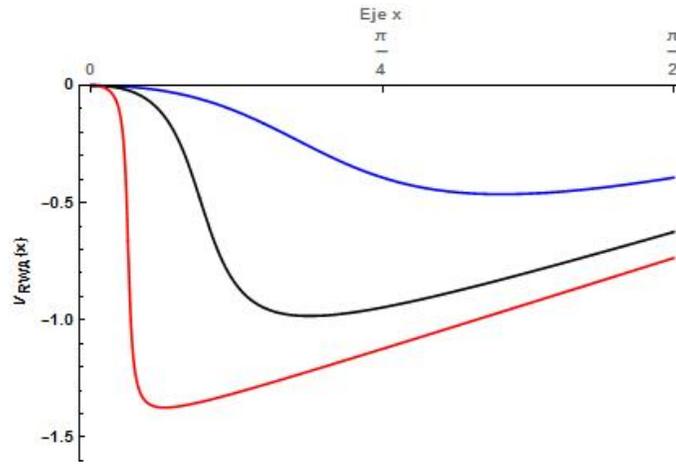


Figura 5.4: Acercamiento al comportamiento de $V_{RWA}(x)$ para: $\xi = 1$ (Línea de color azul), $\xi = 3$ (Línea de color negro) y $\xi = 10$ (Línea de color rojo)

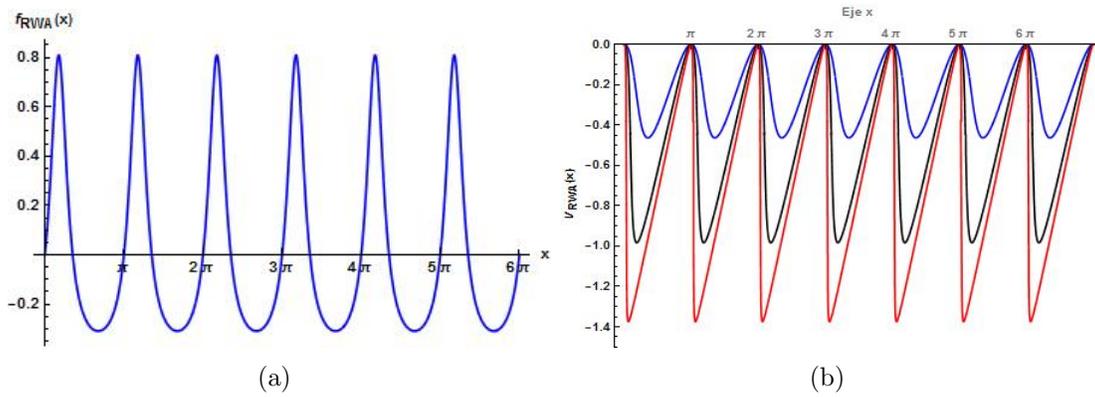


Figura 5.3: La figura (a) muestra una gráfica de la fuerza adimensional $f_{RWA}(x)$ para el caso particular $\xi = 1$. La figura (b) muestra una gráfica de $V_{RWA}(x)$ para: $\xi = 1$ (Línea de color azul), $\xi = 3$ (Línea de color negro) y $\xi = 10$ (Línea de color rojo)

5.3.2. Una aproximación para V_{RWA}

A partir de la Figura 5.3 podemos observar que $V_{RWA}(x)$ se aproxima a una función diente de sierra cuando $\xi \rightarrow +\infty$. Más aún, en la Figura 5.4 podemos apreciar un acercamiento al comportamiento de la función $V_{RWA}(x)$ para distintos valores de ξ para la pared correspondiente al intervalo $(0, \pi/2)$. Por tanto, podemos realizar una aproximación polinómica de V_{RWA} para valores de ξ suficientemente grandes (digamos $\xi \gg 10$) de la siguiente manera. Definamos:

$$m_+ := \frac{V_{RWA}(\frac{2}{\xi})}{\frac{2}{\xi} - \pi} \simeq \frac{1}{2} \quad (5.66)$$

entonces:

$$V_{RWA}(x) \simeq V_{RWA}^{approx}(x) \quad (5.67)$$

con:

$$V_{RWA}^{approx}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } n\pi \leq x < n\pi + \frac{1}{\xi} \\ V_{RWA}(\frac{2}{\xi}) & \text{si } n\pi + \frac{1}{\xi} \leq x \leq n\pi + \frac{2}{\xi} \\ V_{RWA}(\frac{2}{\xi}) + m_+ \left[x - (n\pi + \frac{2}{\xi}) \right] & \text{si } n\pi + \frac{2}{\xi} \leq x \leq (n+1)\pi \end{cases} \quad (5.68)$$

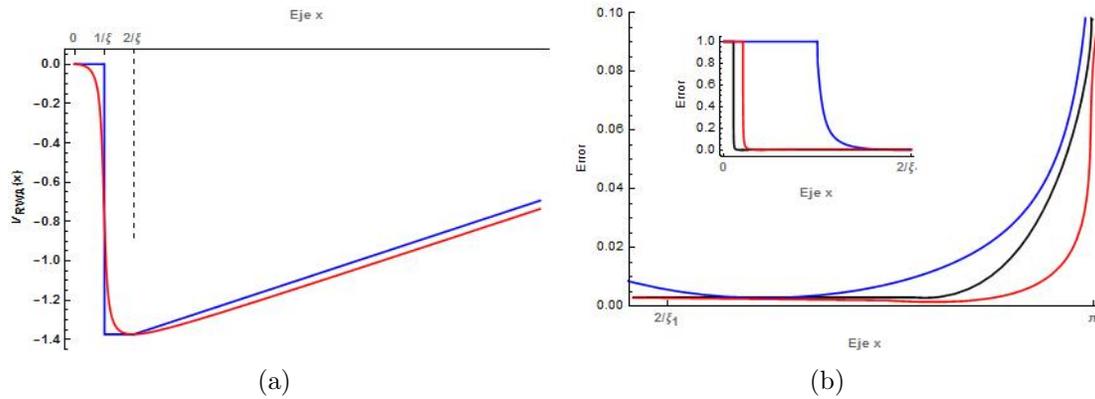


Figura 5.5: La figura (a) Muestra un acercamiento a la función $V_{RWA}(x)$ (Línea Roja) y a la función aproximada V_{RWA}^{approx} (Línea azul) correspondientes al valor $\xi = 10$ en el intervalo $(0, \pi/2)$. La figura (b) muestra una gráfica del error relativo $|V_{RWA}(x) - V_{RWA}^{approx}(x)|/|V_{RWA}(x)|$ para $\xi = 10$ (Línea azul), $\xi = 100$ (Línea Negra) y $\xi = 150$ (Línea Roja) en el intervalo $[2/50, \pi]$. La pequeña figura interior muestra un acercamiento al intervalo $[0, 2/50]$

Podemos observar que el punto $x = n\pi + \frac{1}{\xi}$ corresponde aproximadamente a un punto máximo x_{2n} para $f_{RWA}(x)$ (Expresión (5.49)).

La Figura 5.5(a) compara la función exacta $V_{RWA}(x)$ con la aproximación $V_{RWA}^{approx}(x)$ dada en (5.68) en el intervalo $(0, \pi/2)$ para el caso específico $\xi = 10$. La 5.5(b) ilustra el comportamiento del error relativo $|V_{RWA}(x) - V_{RWA}^{approx}(x)|/|V_{RWA}(x)|$ para distintos valores de ξ . A partir de ellas resulta evidente que la aproximación dada en (5.68) es muy buena excepto en franjas delgadas alrededor de los puntos $x = 0$, $x = 1/\xi$ y $x = \pi$. La razón de eso es que la función $V_{RWA}^{approx}(x)$ no toma en cuenta el hecho de que V_{RWA} se curva suavemente al llegar a dichos puntos. A pesar de ello, la región sobre la cual $V_{RWA}^{approx}(x)$ es una buena aproximación para $V_{RWA}(x)$ se incrementa conforme $\xi \rightarrow +\infty$.

A partir de (5.44) y (5.68) podemos obtener una aproximación para $f_{RWA}(x)$:

$$f_{RWA}^{approx}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } n\pi < x < n\pi + \frac{2}{\xi} \quad \text{y } x \neq n\pi + \frac{1}{\xi} \\ -m_+ & \text{si } n\pi + \frac{2}{\xi} < x < (n+1)\pi \end{cases} \quad (5.69)$$

De esta manera, para valores de ξ grandes, la función $f_{RWA}(x)$ es aproximadamente una fuerza adimensional constante por partes cuya magnitud y dirección dependen de si el espejo móvil se encuentra a la izquierda o a la derecha de los puntos mínimos $x_n^{**} \simeq \pi + 2/\xi$ del potencial $V_{RWA}(x)$.

5.4. Dinámica Debida a la Presión de la Radiación

La expresión (5.42) es una ecuación diferencial no lineal de segundo orden. En los siguientes apartados la estudiamos en tres regímenes distintos, de acuerdo a la intensidad del campo electromagnético incidente.

5.4.1. Régimen de Alta Intensidad

El régimen de intensidad alta se encuentra definido por la condición $\Omega \ll 1$. Para entender el porqué del nombre, examinaremos la naturaleza de la condición anterior. Utilizando (5.40) podemos

ver que $\Omega \ll 1$ es equivalente a $g_0^2 \gg \frac{4\pi^2 M_0 c^3}{\omega_0}$. En virtud de (5.35), g_0 resulta ser directamente proporcional a la amplitud del campo electromagnético. Para ver cuál es el significado físico de esto consideremos el caso especial de una onda plana monocromática de amplitud E_0 , la intensidad de la radiación I viene dada por la expresión:

$$I = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2$$

y la presión de radiación es (véase [2] Sec. 9.2):

$$P = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2$$

De esta manera, por analogía, se sigue que g_0^2 es directamente proporcional a la presión de la radiación incidente sobre el espejo móvil. Esto significa que, si imponemos la condición $\Omega \ll 1$, la cual es equivalente a $g_0^2 \gg \frac{4\pi^2 M_0 c^3}{\omega_0}$, se sigue entonces que la presión de radiación sobre el espejo móvil resulta ser muy grande, pero ¿qué tan grande?. Para responder a esta pregunta recordemos que $\Omega = 2\omega_0/\Delta$, resulta entonces que la escala de tiempo característica de la evolución del espejo móvil ($1/\Delta$) es mucho más pequeña que la escala de tiempo característica para la evolución del campo ($2\pi/\omega_0$), es decir el espejo evoluciona, en este caso, mucho más rápido de lo que lo hace el campo (el espejo “ve” al campo como si éste último no evolucionara). Por consiguiente, este régimen es incompatible con las ecuaciones (5.2) y (5.6) y con el modelo desarrollado hasta ahora, pues en todo lo anteriormente expuesto hemos considerado que el espejo se encuentra instantáneamente en reposo respecto al sistema del laboratorio. Como consecuencia, este límite no será considerado en esta tesis.

Para terminar esta sección derivaremos una condición que muestra explícitamente que el régimen de alta intensidad es incompatible con el modelo planteado hasta ahora. Consideremos la segunda condición en (5.3). De (5.42) es fácil ver que:

$$|x''(\tau)| \leq 2f_{RWA}(x_{2n}) \quad (5.70)$$

donde x_{2n} es un punto máximo para $f_{RWA}(x)$. Por otro lado, si utilizamos las definiciones (5.40), y en vista de que $\tau = t\Delta$ usamos la regla de la cadena, podemos hallar que:

$$\frac{\ddot{q}(t)}{c\omega_0} = \frac{4x''(\tau)}{\Omega^2}$$

Entonces se sigue de (5.70) que:

$$8f_{RWA}(x_{2n}) \ll \Omega^2 \Rightarrow \left| \frac{\ddot{q}(t)}{c\omega_0} \right| \ll 1 \quad (5.71)$$

Es importante hacer notar que la condición $8f_{RWA}(x) \ll \Omega^2$ nos dice esencialmente que $\Omega \gg 1$, debido a que $8f_{RWA}(x) \gg 1$ (Véase Ec.. (5.51)).

Ya que la condición expresada en (5.71) necesita que $\Omega \gg 1$ y el régimen de alta intensidad requiere que $\Omega \ll 1$, concluimos entonces que el régimen de alta intensidad del campo electromagnético incidente es en general incompatible con el modelo presentado para describir la dinámica del espejo móvil. Podemos notar que este resultado es razonable, puesto que un campo de alta intensidad inducirá una presión de radiación muy alta sobre el espejo móvil y, por consiguiente, puede someterlo a aceleraciones muy altas.

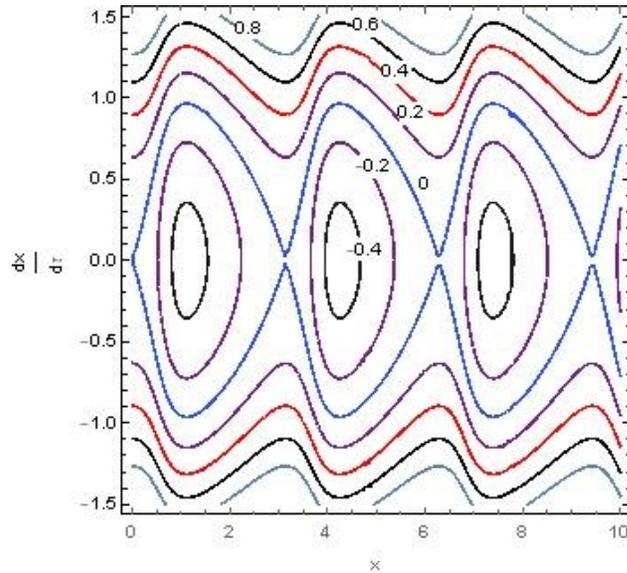


Figura 5.6: Gráfica de las curvas de nivel de la energía del espejo móvil $E(x, x')$ como función de x y x' para $\xi = 1$. Se muestran las líneas correspondientes a los valores $E(x, x') = \pm 0,4, \pm 0,2, 0, 0,6, 0,8$.

5.4.2. Régimen de Baja Intensidad

El régimen de baja intensidad, también llamado el *régimen de la aproximación de onda rotante* o *régimen RWA* por su nombre en inglés, está definido por la condición:

$$\frac{2\pi}{\Omega} \ll 1 \quad (5.72)$$

El término *régimen de baja intensidad* proviene del hecho de que $2\pi/\Omega$ es proporcional a g_0 [véase Ec. (5.40)], y g_0 es proporcional a la presión de la radiación sobre el espejo móvil, mientras que el nombre *régimen RWA* proviene del hecho de que la condición (5.72) debe satisfacerse para poder aplicar la aproximación de onda rotante.

En el régimen RWA el término del coseno en la ecuación (5.42) oscila muy rápidamente, de tal manera que, integrando sobre la trayectoria completa de movimiento, dicho término promedia a cero. Por consiguiente podemos aplicar la aproximación de onda rotante y obtener la siguiente ecuación de movimiento aproximada:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}(\tau) = f_{RWA}[x(\tau)] \quad (5.73)$$

El valor que adquiere en este caso Ω proviene del hecho de que este parámetro involucra dos escalas de tiempo distintas; la escala de tiempo característica de la evolución del espejo $1/\Delta$ y la escala de tiempo característica de la evolución del campo $2\pi/\omega_0$ la cuál es mucho más pequeña que la primera.

Ahora analizaremos y resolveremos en buena aproximación la ecuación (5.73). A partir de (5.73) hallamos que la energía adimensional $E[x(\tau), x'(\tau)]$ del espejo móvil dada por:

$$E[x(\tau), x'(\tau)] = \frac{1}{2}[x'(\tau)]^2 + V_{RWA}[x(\tau)] \quad (5.74)$$

es una constante de movimiento. La Figura 5.6 muestra algunas curvas de nivel de la energía E como

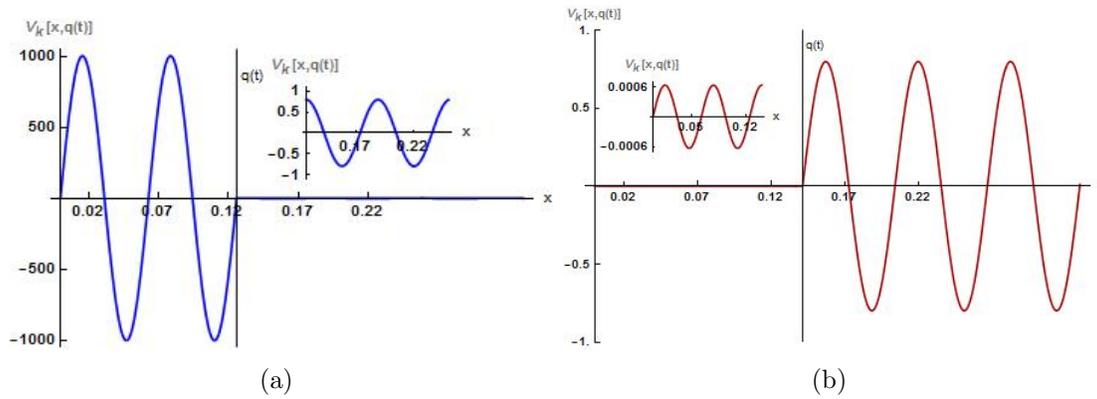


Figura 5.7: Gráfica de $V_{k_N^0}[x, q(t)]$ como función de x cuando el espejo móvil se encuentra localizado en la posición $q(t)$, con $\chi_0 = 1m$, $k_N^0 = 100m^{-1}$, $n = 4$ y $\xi = 4\pi \times 100$. En ambas figuras la línea vertical negra muestra la posición del espejo móvil. En (a) se tiene que $k_N^0 q(t) = n\pi + 1/\xi$ de modo que ω_0 coincide con una de las frecuencias de resonancia de la cavidad. La pequeña figura interior muestra a $V_{k_N^0}[x, q(t)]$ fuera de la cavidad. En (b) se tiene que $k_N^0 q(t) = (n + 1/2)\pi$ de modo que ω_0 es muy distinta de cualquiera de las frecuencias de resonancia de la cavidad. La pequeña figura interior muestra a $V_{k_N^0}[x, q(t)]$ dentro de la cavidad.

función de x y x' para $\xi = 1$.

Como el espejo móvil se mueve bajo la acción del potencial $V_{RWA}(x)$, y además se conserva la energía total de dicho sistema, entonces su movimiento se encuentra acotado a uno de los pozos del potencial si y sólo si $E(x, x') \leq 0$, en cuyo caso el espejo ejecuta un movimiento periódico, adquiriendo su velocidad máxima v_0 cuando se encuentre en uno de los puntos mínimos x_n^{**} del potencial $V_{RWA}(x)$. Más aún, el requerimiento de que $E(x, x') \leq 0$ permite encontrar una cota superior para el valor de la velocidad máxima v_0 pues, en vista de (5.60), obtenemos:

$$v_0 \leq \sqrt{2|V_{RWA}(x_n^{**})|} \leq \sqrt{\pi} \quad (5.75)$$

Además, los puntos máximos $x_n^* = n\pi$ de $V_{RWA}(x)$ son puntos de equilibrio inestable, pues cualquier perturbación sobre el espejo móvil lo haría “caer” a uno de los pozos del potencial (Ver Apéndice B).

Podemos entender el origen físico del movimiento periódico del espejo móvil analizando el comportamiento del modo $V_{k_N^0}[x, q(t)]$ de $A_0(x, t)$ en (5.36). Supongamos que el espejo se encuentra inicialmente localizado en la posición $q(t) = q_{2n}$, de tal manera que ω_0 coincida con una de las frecuencias de resonancia de la cavidad, de acuerdo con (5.21). En ese caso $V_{k_N^0}[x, q(t)]$ tendrá una amplitud muy grande dentro de la cavidad, y una muy pequeña fuera de ella; ver Figura 5.7(a). Como resultado de esto, la presión de radiación es mucho mayor del lado izquierdo que del lado derecho, y el espejo es empujado hacia la derecha. Conforme el espejo se mueve hacia la derecha, la frecuencia ω_0 se volverá distinta de cualquiera de las frecuencias de resonancia de la cavidad, y con ello la amplitud de $V_{k_N^0}[x, q(t)]$ se volverá más pequeña. En algún punto la amplitud de $V_{k_N^0}[x, q(t)]$ será mucho más pequeña dentro de la cavidad que afuera de ella; véase la Figura 5.7(b), con lo cual la presión de la radiación será mucho mayor fuera de la cavidad que dentro de ella. Como resultado de esto último, el espejo móvil se moverá cada vez más lento y eventualmente comenzará a moverse hacia la izquierda. Entonces el espejo alcanzará nuevamente la posición de resonancia q_{2n} , y entonces $V_{k_N^0}[x, q(t)]$ incrementará su amplitud dentro de la cavidad. En algún punto determinado la amplitud del modo $V_{k_N^0}[x, q(t)]$ se volverá mucho mayor dentro de la cavidad que afuera de ella; véase la

Figura 5.7. Entonces el espejo comenzará a moverse cada vez mas lento hasta que eventualmente comience a moverse hacia la derecha otra vez. Este proceso se repite una y otra vez, y es lo que da lugar al movimiento periódico mencionado anteriormente. Notemos que en el caso de movimiento acotado y $\xi \gtrsim 5$, para cada pozo de potencial existe solo una posición para el espejo móvil, a saber $kq_{2n} = x_{2n} \simeq n\pi + 1/\xi$ con $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que la frecuencia ω_0 del campo electromagnético coincide con una de las frecuencias de resonancia de la cavidad.

El movimiento no acotado del espejo, por otro lado, podemos entenderlo refiriéndonos al potencial $V_{RWA}(x)$. Si el espejo móvil posee una energía positiva (ver Figura 5.6), entonces adquiere una aceleración conforme se acerca a uno de los mínimos del potencial, mientras que se desacelera cuando se acerca a uno de los máximos. En este caso, la presión de la radiación nunca es suficientemente intensa como para desacelerar el espejo móvil hasta el punto de detenerlo, como si ocurre en el caso de movimiento acotado.

Ahora supongamos que $\xi \gg 1$ (digamos $\xi \gtrsim 10$), esto es, que el espejo tiene una transparencia muy pequeña. En este caso podemos utilizar la aproximación dada en (5.69) para resolver analíticamente la ecuación de movimiento (5.73). Solo consideraremos el caso en el cual $E(x, x') < 0$. Notemos que no podemos describir de manera lo suficientemente precisa el movimiento acotado del espejo dentro de una pequeña banda alrededor de $E(x, x') = 0$ porque el espejo no puede alcanzar el punto $x = n\pi$ con la aproximación dada en (5.69).

Supongamos que el espejo se encuentra en el pozo n -ésimo y exijamos que la solución sea continua. En vista de nuestra discusión anterior, es claro que el espejo alcanza el punto $n\pi + 2/\xi$ con una velocidad (adimensional) $v_0 > 0$. Siendo así, supondremos que τ_0 es un instante de tiempo tal que $x(\tau_0) = n\pi + 2/\xi$ y $v_0 = (dx/d\tau)(\tau_0)$. Entonces la solución analítica puede expresarse de la siguiente manera:

$$x_{RWA}(\tau) = \begin{cases} (n\pi + \frac{2}{\xi}) + v_0(\tau - \tau_k) - \frac{m_+}{2}(\tau - \tau_k)^2 & \text{si } \tau_k \leq \tau \leq \tau'_k \\ (n\pi + \frac{2}{\xi}) - v_0(\tau - \tau'_k) & \text{si } \tau'_k \leq \tau \leq \tau''_k \\ (n\pi + \frac{1}{\xi}) + v_0(\tau - \tau''_k) & \text{si } \tau''_k \leq \tau \leq \tau_{k+1} \end{cases} \quad (5.76)$$

con $k \in \mathbb{Z}$ un índice que enumera los ciclos de movimiento del espejo. Para cualquier $k \in \mathbb{Z}$ se tendrá que:

$$\begin{aligned} \tau'_k - \tau_k &= \frac{2v_0}{m_+} \\ \tau_{k+1} - \tau''_k &= \tau''_k - \tau'_k = \frac{1}{\xi v_0} \end{aligned} \quad (5.77)$$

Observemos además que $x(\tau_k) = x(\tau'_k) = n\pi + 2/\xi$ y $v_0 = (dx/d\tau)(\tau_k) = (dx/d\tau)(\tau'_k)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

De (5.76) y (5.77) se sigue que el movimiento acotado tiene un periodo P dado por:

$$P = \frac{2v_0}{m_+} + \frac{2}{\xi v_0} \quad (5.78)$$

cuyo mínimo absoluto P_{min} ocurre para $v_0 = \sqrt{m_+/\xi} \simeq 1/\sqrt{2\xi}$ el cual, utilizando la aproximación dada en (5.66), puede expresarse de la siguiente manera :

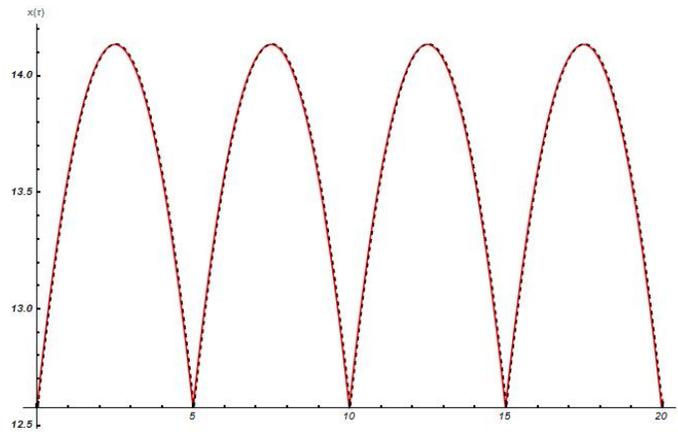


Figura 5.8: Gráfica de la solución $x(\tau)$ (línea sólida roja) de (5.73) obtenida numéricamente para el caso particular $\xi = 100$ y las condiciones iniciales $x(0) = 4\pi + 1/\xi$, $x'(0) = 0$. La línea negra punteada representa la gráfica de la solución aproximada $x_{RWA}(\tau)$ dada en (5.76) para el mismo valor de la energía $\Xi = E(4\pi + 1/\xi, 0)$. Las correspondientes condiciones iniciales para $x_{RWA}(\tau)$ son entonces $x(0) = 4\pi + 1/\xi$, $x'(0) = x'_0$

$$P_{min} = \frac{4}{\sqrt{m+\xi}} \simeq 4\sqrt{\frac{2}{\xi}} \quad (5.79)$$

La Figura (5.8) muestra (línea roja sólida) la solución $x(\tau)$ de la ecuación de movimiento (5.73) obtenida numéricamente para el caso $\xi = 100$ y las condiciones iniciales $x(0) = 4\pi + 1/\xi$ y $x'(0) = 0$. Estas condiciones iniciales corresponden al caso en el cual el espejo comienza a moverse desde el reposo a partir de una posición en la cual la frecuencia del campo electromagnético ω_0 coincide con una de las frecuencias de resonancia de la cavidad. Además, $\Xi := E(4\pi + 1/\xi, 0)$ es la energía del espejo móvil. La figura también muestra la gráfica de la solución aproximada $x_{RWA}(\tau)$ (línea negra punteada) dada en (5.76) correspondiente a la misma energía Ξ . Es importante observar que, para que ambas soluciones, la solución numérica y la solución aproximada, correspondan al mismo valor de la energía, debemos ajustar el valor de la velocidad inicial. De acuerdo con la aproximación dada en (5.68) las correspondientes condiciones iniciales para $x_{RWA}(\tau)$ son $x(0) = 4\pi + 1/\xi$ y $x'(0) = x'_0(0)$ con

$$x'_0(0) = \sqrt{2 \left[\Xi - V_{RWA} \left(\frac{2}{\xi} \right) \right]} \quad (5.80)$$

Notemos que la solución aproximada $x_{RWA}(\tau)$ concuerda muy bien con la solución numérica $x(\tau)$.

Para finalizar el análisis del régimen de baja intensidad, daremos condiciones suficientes para que las expresiones en (5.3) sean válidas. En lo subsecuente no nos restringiremos al caso de movimiento acotado, ni tampoco asumiremos que $\xi \gg 1$.

A partir de (5.74) sabemos que la energía total del espejo móvil es una constante de movimiento; es decir:

$$E[x(\tau), x'(\tau)] = E_0 \quad (\tau \in \mathbb{R}) \quad (5.81)$$

De (5.74) y (5.81) podemos resolver para $x'(\tau)$ y utilizar las cotas para $V_{RWA}(x)$ dadas en (5.60)

para concluir que

$$|x'(\tau)| \leq v_{max} := \sqrt{2E_0 + \pi} \quad (5.82)$$

De las definiciones dadas en (5.40) y utilizando regla de la cadena, podemos relacionar las derivadas de $x(\tau)$ con las derivadas de $q(t)$ de la siguiente manera:

$$\frac{\dot{q}(t)}{c} = \frac{2}{\Omega} x'(\tau), \quad \frac{\ddot{q}(t)}{c\omega_0} = \frac{4}{\Omega^2} x''(\tau) \quad (5.83)$$

Combinando (5.82) y (5.83) obtenemos una condición suficiente para que la primera desigualdad en (5.3) sea válida:

$$2\sqrt{2E_0 + \pi} \ll \Omega \Rightarrow \left| \frac{\dot{q}(t)}{c} \right| \ll 1 \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (5.84)$$

Una condición suficiente para la segunda desigualdad en (5.3) está dada en (5.71). Observemos que (5.71) y (5.84) esencialmente dicen que las desigualdades en (5.3) se satisfacen si $\Omega \gg 1$.

Si ahora solo consideramos el movimiento acotado del espejo (esto es $E_0 \leq 0$) y que la transparencia del espejo móvil es muy pequeña (es decir $\xi \gg 1$), entonces de (5.71) y (5.84) se sigue que:

$$4\xi^2 \ll \Omega^2 \Rightarrow \left| \frac{\ddot{q}(t)}{c\omega_0} \right|, \quad \left| \frac{\dot{q}(t)}{c} \right| \ll 1 \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (5.85)$$

en donde hemos utilizado que $f_{RWA}(x_{2n}) \simeq \xi^2/2$; ver Eq. (5.58).

5.4.3. El Caso General

En esta subsección consideraremos la ecuación de movimiento (5.42) sin realizar ninguna suposición especial respecto a los valores que puede tomar Ω . En este caso el espejo se encontrará sometido a una fuerza externa dependiente del tiempo, de modo que ya no poseerá como constante de movimiento a la energía total. Como consecuencia de ello, la dinámica resultará mucho más compleja en este caso. Si el espejo móvil se encuentra inicialmente confinado a uno de los pozos del potencial $V_{RWA}(x)$, en instantes de tiempo posteriores podría “saltar” fuera de él y permanecer confinado por algún tiempo en otro. Además de ello, también es posible que el espejo realice oscilaciones en torno a un punto, de manera similar a como ocurre en el régimen de baja intensidad, si el valor de Ω es suficientemente grande. La Figura 5.9 ilustra este tipo de comportamientos para distintos valores del parámetro Ω y además los compara con la solución obtenida en el régimen de baja intensidad (línea negra punteada). Observemos que $x(\tau)$ tiende a la solución del régimen de baja intensidad cuando se incrementa el valor de Ω .

Ahora daremos condiciones suficientes para que las desigualdades expresadas en (5.3) sean válidas. Una condición suficiente para la aceleración del espejo móvil está dada en (5.71). Ilustraremos dicha condición utilizando los parámetros de la Figura 5.9. Ya que $\xi = 10$ y $\Omega \geq 50$, de (5.51) tendremos que $8f_{RWA}(x_{2n}) \simeq 400 \ll 2500 \leq \Omega^2$. De (5.71) se sigue que la segunda condición en (5.3) se satisface para los parámetros de la Figura 5.9.

Consideremos ahora la velocidad del espejo móvil. Si $|x'(\tau)| \leq v_{max}$, de (5.83) se sigue que:

$$2v_{max} \ll \Omega \Rightarrow \left| \frac{\dot{q}(t)}{c} \right| \ll 1, \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (5.86)$$

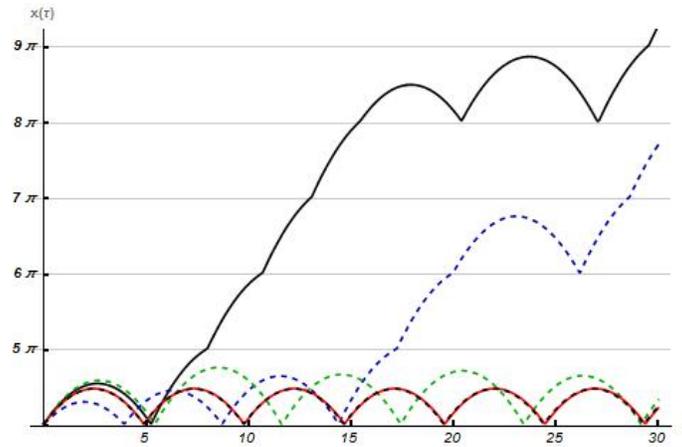


Figura 5.9: $x(\tau)$ calculada numéricamente a partir de (5.42) con $\Omega = 50$ (línea azul punteada), $\Omega = 100$ (línea negra sólida), $\Omega = 300$ (línea verde punteada) y $\Omega = 700$ (línea roja sólida) para el caso $\xi = 10$ y las condiciones iniciales $x(0) = 4\pi + 1/\xi$, $x'(0) = 0$. Las líneas horizontales indican los extremos de los pozos de potencial de $V_{RWA}(x)$. Además la figura incluye la solución numérica de la ecuación de movimiento (5.73) que corresponde al caso de baja intensidad (línea negra punteada).

El problema aquí es que, como la energía total del sistema no es más una cantidad conservada, no hay manera de hallar una cota superior para la velocidad, como lo fue en (5.82). Sin embargo, podemos utilizar los parámetros de la Figura 5.9 para ilustrar (5.86). Como para todas las soluciones numéricas ilustradas en la Figura 5.9 se tiene que $|x'(\tau)| \leq 2,0$ para el intervalo de tiempo τ mostrado, entonces $2v_{max} \leq 4 \ll 50 \leq \Omega$. Por lo tanto, a partir de (5.86) se obtiene que se satisface la primera condición en (5.3) para los parámetros dados de la Figura 5.9.

5.5. Introducción de Rozamiento

Vimos en la sección anterior que, dependiendo de la intensidad del campo electromagnético, el espejo puede realizar oscilaciones libres en torno a uno de los mínimos del potencial $V_{RWA}(x)$, o bien moverse “saltando” de un pozo de potencial a otro. En cualquier caso, el espejo seguirá en movimiento indefinidamente. Sin embargo, en la realidad siempre existe algo de rozamiento que puede acabar por anular el movimiento. Con frecuencia basta suponer sencillamente que dicha fuerza de rozamiento es proporcional a alguna potencia de la velocidad. En general las fuerzas de resistencia reales son más complicadas, pero esta hipótesis de ser proporcional a alguna potencia dada de la velocidad puede resultar muy útil, especialmente en aquellos casos en los que ésta no varía excesivamente. Como ejemplo más sencillo del movimiento del espejo móvil sometido tanto a la presión de radiación como a una fuerza de rozamiento, examinaremos el caso en el que la fuerza resistente es proporcional a la velocidad. En este caso la ecuación de movimiento del espejo está dada por:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}(\tau) + \Gamma \frac{dx}{d\tau}(\tau) = \left\{ 1 + \cos \left[\Omega\tau + 2x(\tau) - 2\delta_{k_N^0} \left(\frac{x(\tau)}{k_N^0} \right) \right] \right\} f_{RWA}[x(\tau)] \quad (5.87)$$

La ecuación (5.87) se obtiene sumando al lado derecho de (5.6) la fuerza de fricción $-\gamma\dot{q}(t)$ y posteriormente usando las definiciones dadas en (5.40) para expresar la ecuación en términos de cantidades adimensionales. Además γ tiene unidades de Ns/m^3 y $\Gamma = \gamma/M_0\Delta$ es una cantidad adimensional. Notemos que γ , y por consiguiente también Γ , es una constante que debe ser positiva para que la fuerza de rozamiento sea realmente resistente, pues una fuerza del tipo $-\gamma\dot{q}(t)$ con $\gamma < 0$ tendría

siempre el mismo sentido que la fuerza debida a la presión de radiación, y no el opuesto a ésta.

De manera análoga a como lo hicimos en la sección anterior, examinaremos el régimen de intensidad baja y el caso general por separado.

5.5.1. Régimen de Baja Intensidad

El régimen de baja intensidad se encuentra definido por la condición (5.72) y nos permite realizar la aproximación de onda rotante en (5.87):

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}(\tau) + \Gamma \frac{dx}{d\tau}(\tau) = f_{RWA}[x(\tau)] \quad (5.88)$$

En este caso, como la ecuación de movimiento posee un término proporcional a la velocidad del espejo móvil, no es posible realizar un análisis basado en la conservación de la energía, similar a como se hizo en la sección anterior. Sin embargo, podemos obtener valiosa información acerca de la dinámica descrita por (5.88) si, en vez de eso, realizamos un análisis de la estabilidad lineal de dicha (5.88)⁵. Dicha ecuación puede ser escrita como un sistema no lineal de ecuaciones diferenciales de primer orden, de la siguiente manera:

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} x(\tau) \\ y(\tau) \end{pmatrix} = \mathbf{f}[x(\tau), y(\tau)] = \begin{pmatrix} y(\tau) \\ -\Gamma y(\tau) + f_{RWA}[x(\tau)] \end{pmatrix} \quad (5.89)$$

con $y(\tau) = x'(\tau)$. Utilizando (5.44) se sigue que los puntos fijos del sistema (5.89) están determinados por los máximos y mínimos de $V_{RWA}(x)$. Explícitamente, los puntos fijos de (5.89) están dados por $(x_n^*, y_n^*) = (n\pi, 0)$ y $(x_n^{**}, y_n^{**}) \simeq (n\pi + 2/\xi, 0)$, con $n \in \mathbb{Z}^+$; véase (5.52).

La linealización del sistema (5.89) en los puntos fijos, revela que $(x_n^*, y_n^*) = (n\pi, 0)$ son puntos de ensilladura topológicos, mientras que $(x_n^{**}, y_n^{**}) = (n\pi + 2/\xi, 0)$ son puntos atractores, es decir, espirales o nodos (véase Teorema 7, Apéndice C).

En particular, los puntos atractores serán espirales (o focos) estables si

$$\frac{\Gamma}{2} < \sqrt{\left| \frac{df_{RWA}}{dx}(x_n^{**}) \right|} \simeq \sqrt{\xi} \quad (5.90)$$

mientras que dichos atractores serán nodos estables si

$$\frac{\Gamma}{2} \geq \sqrt{\left| \frac{df_{RWA}}{dx}(x_n^{**}) \right|} \simeq \sqrt{\xi} \quad (5.91)$$

(véase Teorema 7, Apéndice C). Notemos que en (5.90) y (5.91) el valor en el extremos derecho se obtiene despreciando términos de orden $1/\xi^2$ y menores respecto a 1.

La Figura 5.10 muestra la imagen en el espacio fase de (5.89) para $\xi = 10$, e ilustra los distintos tipos de comportamiento que este sistema puede tener. Notemos que el espejo móvil exhibe un comportamiento muy similar al del movimiento oscilatorio amortiguado en el caso de la espiral estable, y un comportamiento similar al del oscilador sobreamortiguado en el caso del nodo estable (véase [4] Sec. 3.5).

⁵Véase Apéndice C

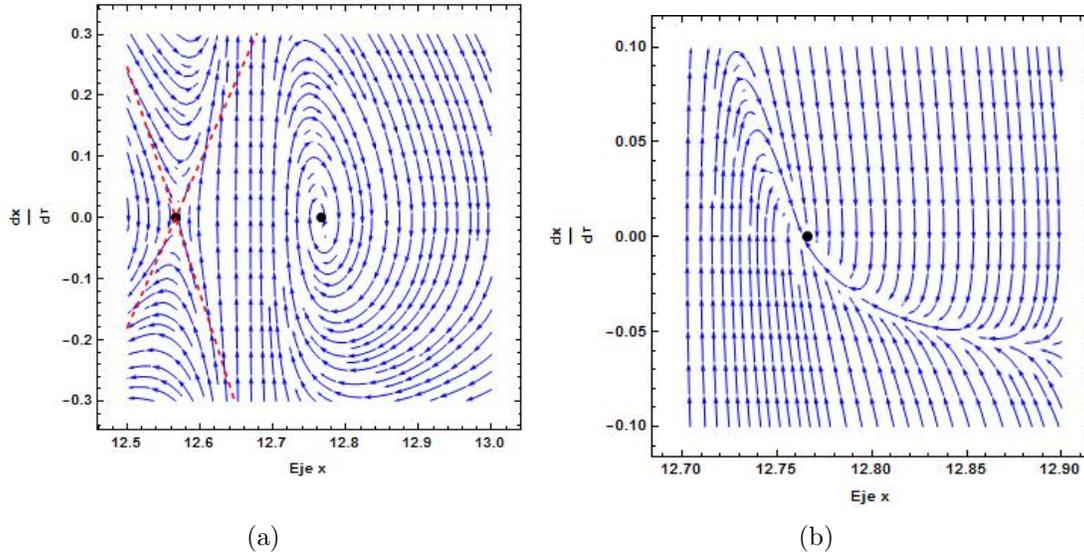


Figura 5.10: La figura (a) ilustra la imagen en el espacio fase del espejo móvil en el caso particular en el cual $\xi = 10$ y $\Gamma = 1$. El punto negro en el lado izquierdo indica el punto de ensilladura (x_n^*, y_n^*) , mientras que el punto negro en el lado derecho indica la espiral estable $(x_n^{**}, y_n^{**}) \simeq (4\pi + 2/\xi, 0)$. Además, las líneas rojas punteadas indican las variedades estable e inestable del punto de ensilladura. La figura (b) ilustra el diagrama fase del espejo móvil en el caso en el cual $\xi = 10$ y $\Gamma = 7$. El punto negro indica el nodo estable $(x_n^{**}, y_n^{**}) \simeq (4\pi + 2/\xi, 0)$

La Figura 5.10(a) también muestra las variedades estable e inestables del punto de ensilladura calculadas utilizando la linealización de (5.89) (véase Secs. C.1 y C.2.5 del Apéndice C), las cuales constituyen rectas unidimensionales cuyas ecuaciones son:

$$x' = \lambda_{\pm}(x - k\pi) \quad (5.92)$$

con $k \in \mathbb{Z}^+$ y λ_{\pm} los valores propios de la matriz de coeficientes del sistema linealizado en el punto de ensilladura:

$$\lambda_{\pm} = -\frac{\Gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 + \xi} \quad (5.93)$$

La variedad estable corresponde al signo negativo, mientras que la variedad inestable corresponde al signo positivo.

Dado que $\nabla \cdot \mathbf{f}(x, y) = -\Gamma < 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, con $\mathbf{f}(x, y)$ dado por (5.89), del Criterio de Bendixson (Véase Teorema 9, Apéndice C), se sigue que no existen trayectorias cerradas en el espacio fase. Esto último tiene su origen físico en el hecho de que la energía del espejo móvil, como fue definida en (5.74), es siempre decreciente (véase Sección B.2 Apéndice B):

$$E[x(\tau), x'(\tau)] = E[x(0), x'(0)] - \Gamma \int_0^{\tau} [x'(\tau')]^2 d\tau' \quad (5.94)$$

pues el último término en (5.94) representa el trabajo realizado por la fuerza de fricción a lo largo de la trayectoria del espejo.

Para $\tau \gg 1$ el espejo móvil siempre tiende a la posición x_n^{**} de uno de los mínimos de $V_{RWA}(x)$. Las únicas excepciones con las trayectorias asociadas con las variedades estables de los puntos de ensilladura, pues en ellas el espejo móvil tiende a un máximo x_n^* de $V_{RWA}(x)$. El comportamiento que hemos descrito anteriormente puede considerarse consecuencia de la teoría de Poincaré-Bendixson en \mathbb{R}^2 (véase Apéndice C), del hecho de que no existen trayectorias cerradas en el espacio fase, así como de que la energía del espejo móvil esta siempre disminuyendo (de manera que las trayectorias en el espacio fase son todas acotadas para $\tau \geq 0$).

Tomando $\xi \gtrsim 5$ y utilizando (5.21), (5.25), y (5.51) (depreciando el término 7/18) encontramos que la frecuencia ω_0 del campo coincide muy aproximadamente con una de las frecuencias de resonancia de la cavidad si y sólo si la posición adimensional $x = k_N^0 q$ del espejo móvil satisface que

$$|x - x_{2n}| \leq \frac{1}{\xi^2}$$

con $x_{2n} = k_N^0 q_{2n} \simeq n\pi + 1/\xi$. Para $\xi \gtrsim 5$ tenemos que $|x - x_{2n}| \simeq 1/\xi \gg 1/\xi^2$ si $x = x_n^* = n\pi$ o $x = x_n^{**} \simeq n\pi + 2/\xi$; véase (5.59). Por lo tanto, el espejo móvil termina en una posición que es muy diferente de aquella en la cual ω_0 coincide con alguna de las frecuencias de resonancia de la cavidad si $\xi \gtrsim 5$.

Utilizando las aproximaciones dadas en (5.68) y (5.69) podemos hallar una solución analítica para la ecuación de movimiento (5.87) en el caso en que $\xi \gg 1$ y $E[x(0), x'(0)] < 0$. Dicha solución analítica puede expresarse de la siguiente manera:

$$x_{RWA}(\tau) = \left(n\pi + \frac{2}{\xi}\right) - \left(\frac{v_0}{\Gamma} + \frac{m_+}{\Gamma^2}\right) e^{-\Gamma(\tau-\tau_0)} - \frac{m_+}{\Gamma}(\tau - \tau_0) + \frac{m_+}{\Gamma^2} + \frac{v_0}{\Gamma} \quad (5.95)$$

si $(n\pi + 2/\xi) \leq x_{RWA}(\tau) \leq (n+1)\pi$ para $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_1$ y un $n \in \mathbb{Z}^+$, mientras que:

$$x_{RWA}(\tau) = \left(n\pi + \frac{2}{\xi}\right) + \frac{x'_{RWA}(\tau_1)}{\Gamma} [1 - e^{-\Gamma(\tau-\tau_1)}] \quad (5.96)$$

si $(n\pi + 1/\xi) \leq x_{RWA}(\tau) \leq (n\pi + 2/\xi)$ para $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$. Debemos hacer notar aquí que τ_0 es un instante de tiempo tal que $x(\tau_0) = (n\pi + 2/\xi)$ y $x'(\tau_0) = v_0 > 0$.

La Figura 5.11 muestra una comparación entre la solución aproximada $x_{RWA}(\tau)$ y la solución numérica $x(\tau)$ de (5.88) para $\xi = 100$ y dos valores distintos de Γ . Las condiciones iniciales son $x(0) = 4\pi + 1/\xi$ y $x'(0) = 0$ de manera que el espejo móvil comienza a moverse desde el reposo y desde una posición en la cual ω_0 coincide con una de las frecuencias de resonancia de la cavidad. Como en las secciones previas, para poder hacer uso de la solución analítica (5.95) y (5.96) de manera que la energía inicial de esta última y la de la solución numérica sean la misma debemos ajustar la velocidad inicial $x'(0) = x'_0(0)$ como en (5.80), con $\Xi = E(4\pi + 1/\xi, 0)$ la energía inicial. Notemos que la solución numérica y la solución aproximada concuerdan muy bien para instantes de tiempo no muy grandes en el caso de la Figura 5.11(a), la cual corresponde al caso en que $\Gamma = 0,5$ y $(x_n^{**}, y_n^{**}) \simeq (4\pi + 2/\xi, 0)$ es una espiral estable. Por otra parte, ambas soluciones no concuerdan bien en general para el caso representado en la Figura 5.11(b), que corresponde a $\Gamma = 22$ y $(x_n^{**}, y_n^{**}) \simeq (4\pi + 1/\xi, 0)$ un nodo estable. Las diferencias entre la solución numérica y la solución aproximada se deben principalmente a dos hechos. Por un lado, la aproximación a $V_{RWA}(x)$ dada en (5.68) no toma en cuenta la curvatura del potencial, pues la sustituye por un cambio abrupto. Además, para instantes de tiempo suficientemente grandes, el espejo móvil pasa más tiempo cerca de los mínimos x_n^{**} de $V_{RWA}(x)$ donde la

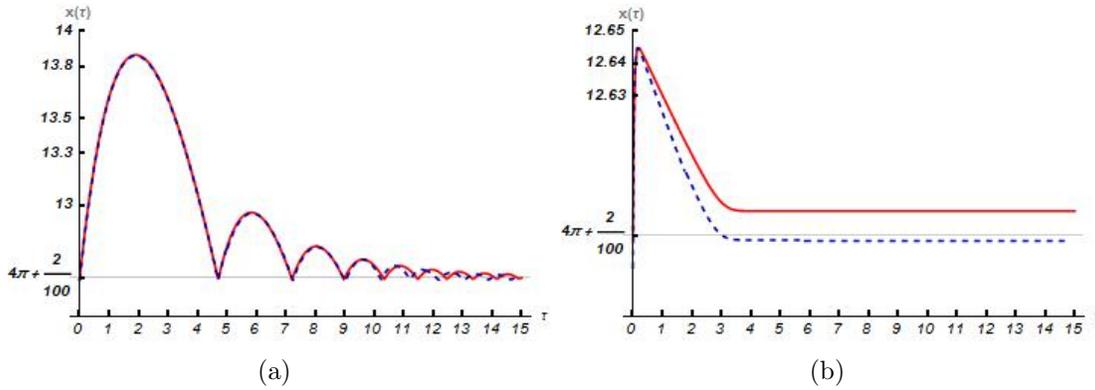


Figura 5.11: Comparación entre la solución numérica (línea roja sólida) de (5.88) y la solución aproximada dada en (5.95) y (5.96) (línea azul punteada) para $\xi = 100$ y las condiciones iniciales $x(0) = (4\pi + 1/\xi)$ y $x'(0) = 0$. La figura (a) muestra el caso en el cual $\Gamma = 0,5$ y en la figura (b) se muestra el caso $\Gamma = 22$

curvatura es importante. Sin embargo, la solución analítica $x_{RWA}(\tau)$ nos permite entender, al menos de manera cualitativa, el comportamiento del espejo. De (5.95) se sigue que el espejo móvil tiene un comportamiento que es dinámicamente análogo al de una partícula sometida a la acción de una fuerza constante (un campo gravitacional por ejemplo) y sujeta a una fuerza de fricción proporcional a la velocidad cuando se encuentra en la región entre el mínimo $x_n^{**} \simeq (n\pi + 2/\xi)$ y el máximo $x_{n+1}^* = (n+1)\pi$ de $V_{RWA}(x)$. Por otro lado, de (5.96) podemos notar que el comportamiento dinámico del espejo es análogo al de una partícula sujeta únicamente a una fuerza de fricción, cuando se encuentra en la región entre $x_{2n} \simeq (n\pi + 1/\xi)$ (que corresponde a un máximo para $f_{RWA}(x)$) y x_n^{**} . Más aún, el espejo rebota elásticamente sobre una pared de potencial impenetrable si alcanza el punto x_{2n} .

Para finalizar el análisis de este régimen, daremos condiciones suficientes para que (5.3) sea válida. En la discusión siguiente no asumiremos necesariamente que $\xi \gg 1$ ni que $E[x(0), x'(0)] < 0$.

De (5.74) y (5.94) se tiene que (5.82) sigue siendo válida, con $E_0 = E[x(0), x'(0)]$ y $\tau \geq 0$. Por tanto, (5.84) es aún válida con $E_0 = E[x(0), x'(0)]$ y $t \geq 0$. Utilizando (5.82) con $E_0 = E[x(0), x'(0)]$ y $\tau \geq 0$ en combinación con (5.83) y (5.88) se sigue que:

$$\left| \frac{\ddot{q}(t)}{c\omega_0} \right| \leq \frac{f_{RWA}(x_{2n}) + \Gamma\sqrt{2E_0 + \pi}}{(\Omega/2)^2}, \quad (t \geq 0) \quad (5.97)$$

Aquí hemos utilizado que x_{2n} es un máximo de $f_{RWA}(x)$ de acuerdo con (5.51). Por lo tanto,

$$4f_{RWA}(x_{2n}) + 4\Gamma\sqrt{2E_0 + \pi} \ll \Omega^2 \Rightarrow \left| \frac{\ddot{q}(t)}{c\omega_0} \right| \ll 1, \quad (t \geq 0) \quad (5.98)$$

Notemos que (5.98) es similar a (5.71), con la única diferencia de que en (5.98) se suma el término $4\Gamma\sqrt{2E_0 + \pi}$ debido a la presencia de la fricción.

Al igual que en el caso de la dinámica debida únicamente a la presión de la radiación, las condiciones dadas en (5.84) y (5.98) esencialmente dicen que el modelo presentado aquí es válido si Ω es suficientemente grande.

Si suponemos ahora que $\xi \gg 1$, es decir, que la transparencia del espejo móvil es muy pequeña,

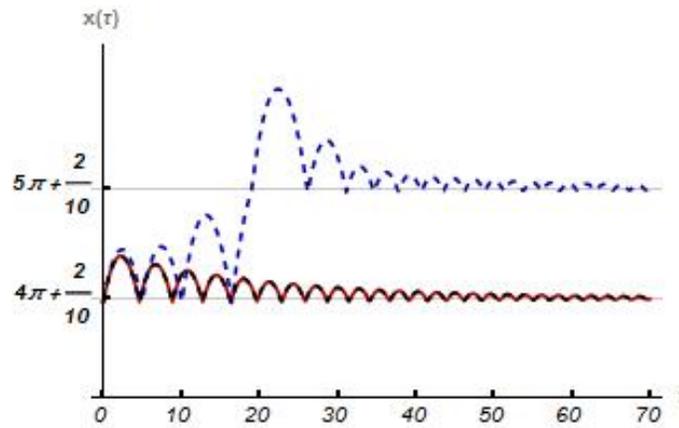


Figura 5.12: $x(\tau)$ calculada numéricamente a partir de (5.87) con $\xi = 10$, $\Gamma = 0,07$, $\Omega = 100$ (línea azul punteada), $\Omega = 500$ (línea roja sólida), y las condiciones iniciales $x(0) = 4\pi + 1/\xi$, $x'(0) = 0$. Además la figura incluye la solución numérica de la ecuación de movimiento (5.88) que corresponde al caso de baja intensidad (línea negra punteada). Las líneas horizontales en $(4\pi + 2/\xi)$ y $(5\pi + 2/\xi)$ muestran las posiciones aproximadas de los mínimos x_n^{**} de $V_{RWA}(x)$.

y que $E_0 \leq 0$, de modo que el espejo se encuentra inicialmente confinado a uno de los pozos del potencial, entonces las condiciones (5.84) y (5.98) toman la siguiente forma particular:

$$4\Omega\sqrt{\pi} + 2\xi^2 \ll \Omega^2 \Rightarrow \left| \frac{\dot{q}(t)}{c} \right|, \left| \frac{\ddot{q}(t)}{c\omega_0} \right| \ll 1, \quad (t \geq 0) \quad (5.99)$$

Aquí hemos utilizado (5.51) para evaluar $f_{RWA}(x_{2n})$.

5.5.2. El Caso General

En esta subsección consideramos la ecuación de movimiento (5.87) sin hacer ninguna consideración específica respecto a los valores que puede tomar Ω . En este caso el espejo móvil no poseerá a la energía total como cantidad conservada, ni es posible en general hacer un análisis de la estabilidad lineal del sistema, debido a que la fuerza a la que se encuentra sometido es dependiente del tiempo. Como ocurrió en la sección 5.4, la dinámica del espejo resulta ser mucho más compleja. Los resultados obtenidos numéricamente muestran que, dependiendo del valor que tomen los parámetros Ω , Γ y ξ , el espejo puede tener distintos comportamientos; por ejemplo puede simplemente tender a un mínimo de $V_{RWA}(x)$ como sucedía anteriormente o, si la fricción es suficientemente pequeña, puede “saltar” entre un pozo de potencial y otro hasta finalmente asentarse en uno de los mínimos de $V_{RWA}(x)$; véase la Figura 5.12. Se encontraron incluso trayectorias periódicas alrededor de los mínimos de $V_{RWA}(x)$; véase la Figura 5.13. Una cuestión interesante y que queda aún por resolver es el hecho de caracterizar y demostrar formalmente la existencia de este tipo de trayectorias periódicas. En las Figuras 5.12 y 5.13 la solución $x(\tau)$ fue calculada numéricamente a partir de (5.87) para distintos valores de los parámetros ξ , Ω y Γ y para condiciones iniciales tales que el espejo comienza a moverse desde el reposo y desde una posición en la que ω_0 coincide con una de las frecuencias de resonancia de la cavidad. La Figura 5.12 también muestra la solución $x_{RWA}(\tau)$ calculada numéricamente a partir de (5.88) (línea negra punteada). Notemos que $x(\tau)$ con $\Omega = 500$ es prácticamente la misma que $x_{RWA}(\tau)$. Además, como se hace notar en [18], se encuentra evidencia numérica de que la dinámica del espejo es muy sensible a los valores de sus parámetros, ya que incluso pequeños cambios en ellos pueden llevar a dinámicas completamente diferentes.

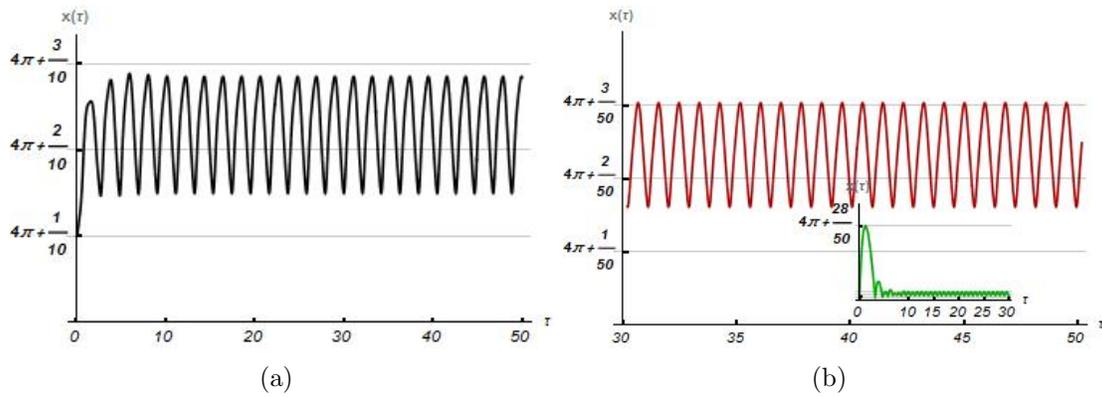


Figura 5.13: $x(\tau)$ calculada numéricamente de (5.87) para $\Gamma = 1$ y las condiciones iniciales $x(0) = 4\pi + 1/\xi$, $x'(0) = 0$. La figura (a) muestra el caso $\xi = 10$ y $\Omega = 6$, mientras que en la figura (b) se tiene que $\xi = 50$ y $\Omega = 14$, la figura interior en (b) muestra el comportamiento de la solución en el intervalo de tiempo $\tau \in [0, 30]$. Las líneas horizontales indican la posición del punto $(n\pi + 3/\xi)$ y las posiciones aproximadas de los máximos $x_{2n} \simeq n\pi + 1/\xi$ de $f_{RWA}(x)$ y de los mínimos $x_n^{**} \simeq n\pi + 2/\xi$ de $V_{RWA}(x)$.

Nuevamente, como hemos hecho en apartados anteriores, daremos condiciones suficientes para que las desigualdades dadas en (5.3) sean válidas. Utilizando (5.83) y (5.87) obtenemos los siguiente:

$$2v_{max} \ll \Omega, \quad 4\Gamma v_{max} + 8f_{RWA}(x_{2n}) \ll \Omega^2 \Rightarrow \left| \frac{\dot{q}(t)}{c} \right|, \quad \left| \frac{\ddot{q}(t)}{c\omega_0} \right| \ll 1 \quad (5.100)$$

con $t \geq 0$, v_{max} una cota superior de $|x'(\tau)|$ para $\tau \geq 0$ y x_{2n} un máximo para $f_{RWA}(x)$. Si $\xi \gg 1$, entonces estas condiciones se reducen a:

$$2v_{max} \ll \Omega, \quad 4\Gamma v_{max} + 4\xi^2 \ll \Omega^2 \quad (5.101)$$

Aquí hemos utilizado (5.51) para evaluar $f_{RWA}(x_{2n})$.

Ahora ilustraremos las condiciones dadas en (5.101) utilizando los parámetros de la Figura 5.12. La figura tiene $\xi = 10$, $v_{max} \leq 2$, $\Omega \geq 100$, de modo que $4\Gamma v_{max} + 4\xi^2 \leq 400,56 \ll 10^4 \leq \Omega^2$, lo que significa que se satisface (5.3) para $t \geq 0$.

Ahora consideremos los casos ilustrados en la Figura 5.13. La Figura 5.13(a) tiene $\xi = 10$, $\Omega = 6$, $\Gamma = 1$, $|x'(\tau)| \leq 0,26$, y $|x''(\tau)| \leq 1,8$ para $\tau \geq 0$. Utilizando (5.83) se sigue que:

$$\left| \frac{\dot{q}(t)}{c} \right| \leq 0,087, \quad \left| \frac{\ddot{q}(t)}{c\omega_0} \right| \leq 0,2$$

para $t \geq 0$. En base a estos resultados podemos entonces argumentar que las condiciones expresadas en (5.3) no se satisfacen. Esto significa que las soluciones mostradas en la Figura 5.13(a) no son físicas, pues para describir apropiadamente la dinámica del espejo móvil cuando se encuentra sometido a estos valores particulares de ξ , Ω y Γ debemos introducir términos de, por lo menos, primer orden en la velocidad y aceleración. Por otro lado, para la Figura 5.13(b) se tiene que $\xi = 50$, $\Omega = 14$, $\Gamma = 1$, $|x'(\tau)| \leq 0,1$ y $|x''(\tau)| \leq 1,5$ para $\tau \geq 15$. Si utilizamos (5.83) obtendremos que:

$$\left| \frac{\dot{q}(t)}{c} \right| \leq 0,015, \quad \left| \frac{\ddot{q}(t)}{c\omega_0} \right| \leq 0,03$$

para $\tau = t\Delta \geq 15$. Esto significa que (5.3) se satisface para $\tau \geq 15$. Sin embargo, si tenemos $\tau < 15$, entonces (5.3) no se satisface ya que el espejo se encuentra sometido a aceleraciones muy grandes (pues en ese caso se tiene que $|x''(\tau)| \leq 460$ si $\tau \geq 0$). Por lo tanto, el modelo que utilizamos aquí es válido únicamente para instantes de tiempo muy grandes, en donde predomina un comportamiento estacionario del espejo.

5.6. Introducción de un Potencial de Oscilador Armónico

En la sección anterior demostramos que en el régimen de baja intensidad, y para $\xi \simeq 5$, la adición de una fuerza de fricción lleva al espejo a un estado final tal que se encuentra en reposo en una posición en la cual ω_0 resulta ser muy diferente de cualquiera de las frecuencias de resonancia de la cavidad. En diversos tratamientos fenomenológicos y experimentales, el espejo móvil ejecuta oscilaciones pequeñas en torno a una posición de equilibrio q_E tal que ω_0 coincide con una de las frecuencias de resonancia de la cavidad (véase por ejemplo [14] y [26]). Para lograr reproducir un comportamiento de este tipo, en esta sección supondremos que el espejo móvil se encuentra sometido a un potencial de oscilador armónico. La ecuación de movimiento que gobierna la dinámica de este sistema es:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}(\tau) + \Gamma \frac{dx}{d\tau}(\tau) + \omega_s^2[x(\tau) - x_E] = \left\{ 1 + \cos \left[\Omega\tau + 2x(\tau) - 2\delta_{k_N^0} \left(\frac{x(\tau)}{k_N^0} \right) \right] \right\} f_{RWA}[x(\tau)] \quad (5.102)$$

La ecuación (5.102) se obtiene sumando al lado derecho de (5.6) la fuerza $-\gamma\dot{q}(t) - k_s[q(t) - q_E]$ y posteriormente usando las definiciones dadas en (5.40) para expresar la ecuación en términos de cantidades adimensionales. Aquí γ tiene unidades de Ns/m^3 , mientras que k_s tiene unidades de N/m^3 . Además $\Gamma = \gamma/M_0\Delta$, $\omega_s = \sqrt{k_s/(M_0\Delta^2)}$ y $x_E = k_N^0 q_E$ son cantidades adimensionales.

En el resto de esta sección asumiremos que $x_E = x_{2n} \simeq (n\pi + 1/\xi)$, para algún $n \in \mathbb{Z}^+$, de manera que el potencial de oscilador armónico se encuentra centrado en una posición donde ω_0 coincide con una de las frecuencias de resonancia de la cavidad.

5.6.1. El Régimen de Baja Intensidad

El régimen de baja intensidad se encuentra definido por la condición (5.72). Esto nos permite eliminar la dependencia explícita en el tiempo de (5.102) para obtener lo siguiente:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}(\tau) + \Gamma \frac{dx}{d\tau}(\tau) + \omega_s^2[x(\tau) - x_E] = f_{RWA}[x(\tau)] \quad (5.103)$$

Esta última ecuación puede ser reescrita de la siguiente manera:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}(\tau) + \Gamma \frac{dx}{d\tau}(\tau) = -\frac{dV_{ef}}{dx}[x(\tau)] \quad (5.104)$$

donde $V_{ef}(x)$ es el potencial total afectando el movimiento del espejo, el cual está dado por:

$$V_{ef}(x) = V_{RWA}(x) + \frac{1}{2}\omega_s^2(x - x_E)^2 \quad (5.105)$$

Ahora realizaremos un análisis de la estabilidad lineal de (5.103). El sistema no lineal de primer orden asociado con (5.103) es:

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} x(\tau) \\ y(\tau) \end{pmatrix} = \mathbf{f}_s[x(\tau), y(\tau)] \quad (5.106)$$

con $y(\tau) = x'(\tau)$ y

$$\mathbf{f}_s(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ -\Gamma y - \omega_s^2(x - x_E) + f_{RWA}(x) \end{pmatrix} \quad (5.107)$$

Como $\nabla \cdot \mathbf{f}_s = -\Gamma < 0$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$, entonces el criterio de Bendixon nos permite concluir que no existen órbitas cerradas en el espacio fase asociado a este sistema. Más aún, los puntos fijos (x_n^s, y_n^s) de (5.106) están dados por:

$$y_n^s = 0, \quad f_{RWA}(x_n^s) = \omega_s^2(x_n^s - x_E) \quad (5.108)$$

donde $n \in \mathbb{Z}^+$ y x_n^s es solución de la segunda ecuación dada en (5.108). Notemos que x_n^s es un punto crítico del potencial total $V_{ef}(x)$, ya que la segunda ecuación en (5.108) puede escribirse como:

$$\left(\frac{dV_{ef}}{dx} \right) (x_n^s) = 0$$

Evaluando numéricamente la segunda ecuación en (5.108) encontramos que, para un valor dado de ω_s , existe una solución para x_n^s en cada intervalo $[n\pi, (n+1)\pi]$, y además, que dicha solución se encuentra siempre a la derecha del punto máximo $x_E = x_{2n}$ de $f_{RWA}(x)$ para cada $n \in \mathbb{Z}^+$. Siendo así, de aquí en adelante tomaremos a x_n^s como la primera (y posiblemente única solución) de la segunda ecuación en (5.108). Además, un análisis numérico de (5.105) y (5.108) permite deducir que x_n^s es un mínimo del potencial total $V_{ef}(x)$. De (5.53) se sigue que x_n^s se encuentra localizado entre un máximo x_{2n} de $f_{RWA}(x)$ y un mínimo x_n^{**} de $V_{RWA}(x)$ si $\xi \gg 1$, es decir, $x_{2n} \simeq n\pi + 1/\xi < x_n^s < n\pi + 2/\xi \simeq x_n^{**}$ si $\xi \gg 1$.

Un análisis de la estabilidad lineal de (5.106) muestra que el punto fijo (x_n^s, y_n^s) es siempre un punto atractor. Para demostrar este resultado utilizamos el hecho de que $f'_{RWA}(x_n^s) < 0$, ya que $f_{RWA}(x)$ es estrictamente decreciente desde su máximo x_{2n} hasta el punto x_n^{**} donde es cero (véase la Figura 5.3) y x_n^s está localizado entre ellos. En particular (x_n^s, y_n^s) será una espiral estable si:

$$\left(\frac{\Gamma}{2} \right)^2 < \omega_s^2 - \frac{df_{RWA}}{dx}(x_n^s) \quad (5.109)$$

(véase Teorema 7, Apéndice C). Por otro lado, dicho punto es un nodo estable si :

$$\left(\frac{\Gamma}{2} \right)^2 \geq \omega_s^2 - \frac{df_{RWA}}{dx}(x_n^s) \quad (5.110)$$

En la Figura (5.14) se muestra la imagen en el espacio fase de (5.107) para el caso $\xi = 10$. En ella se pueden observar estos comportamientos. En general, el espejo móvil tiende a un mínimo o un máximo de $V_{ef}(x)$ si $\tau \rightarrow +\infty$. Esto se sigue de la teoría de Poincaré-Bendixson en \mathbb{R}^2 y del hecho de que la energía del espejo móvil es decreciente, de modo que no existen trayectorias cerradas en el espacio fase.

Ahora utilizaremos la aproximación de $f_{RWA}(x)$ dada en (5.69) para resolver analíticamente la

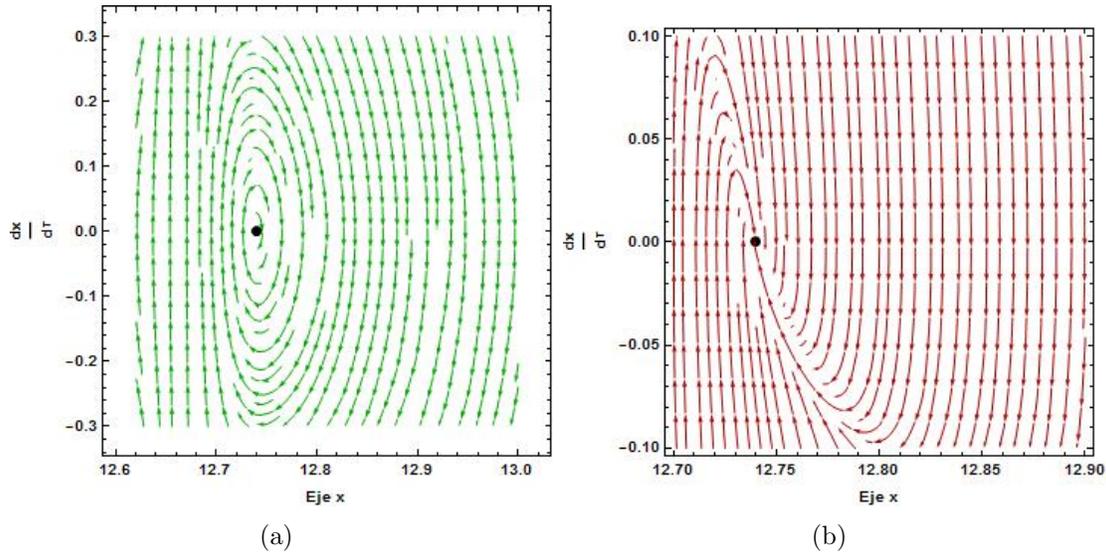


Figura 5.14: La Figura (a) muestra el diagrama fase del espejo móvil en el caso particular en el cual $\xi = 10$, $\Gamma = 0,5$ y $\omega_s = \sqrt{5}$. La Figura (b) ilustra el diagrama fase en el caso en el cual $\xi = 10$, $\Gamma = 9$ y $\omega = \text{sqrt}5$. En ambos casos, el punto negro indica la posición del punto atractor (x_n^s, y_n^s) .

ecuación (5.103) en el caso en que $\xi \gg 1$. La citada solución analítica es:

$$x_{RWA}(\tau) = A_1 e^{\frac{1}{2}(-\Gamma+\lambda)\tau} + B_1 e^{-\frac{1}{2}(\Gamma+\lambda)\tau} + \frac{\omega_s^2 x_E - m_+}{\omega_s^2} \quad (5.111)$$

si $(n\pi + 2/\xi) \leq x_{RWA}(\tau) \leq (n+1)\pi$ para $0 \leq \tau \leq \tau_1$ y algún $n \in \mathbb{Z}^+$, mientras que:

$$x_{RWA}(\tau) = A_2 e^{\frac{1}{2}(-\Gamma+\lambda)(\tau-\tau_1)} + B_2 e^{-\frac{1}{2}(\Gamma+\lambda)(\tau-\tau_1)} \quad (5.112)$$

si $(n\pi + 1/\xi) \leq x_{RWA}(\tau) \leq (n\pi + 2/\xi)$ para $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$. Aquí, A_k y B_k con $k = 1, 2$ son constantes de integración cuyo valor se determina a partir de las condiciones iniciales. Además $\lambda := \sqrt{\Gamma^2 - 4\omega_s^2}$. Sin embargo, es claro que la aproximación para $x(\tau)$ dada por $x_{RWA}(\tau)$ en (5.111) y (5.112) no es lo suficientemente buena, y la evolución predicha es cualitativamente diferente. Esto puede verse notando que (5.111) y (5.112) tienden a un punto muy distinto de x_n^s cuando $\tau \rightarrow +\infty$. Por tanto, dicha solución no resulta satisfactoria. En la siguiente subsección daremos una aproximación analítica que describe de manera cualitativamente correcta la solución de (5.102) en el caso general.

Ahora estableceremos condiciones suficientes para que se satisfagan las expresiones en (5.3). Primero consideremos la condición sobre la velocidad del espejo. De (5.104) se sigue que la energía adimensional del espejo móvil está dada por:

$$E_s[x(\tau), x'(\tau)] = \frac{1}{2}[x'(\tau)]^2 + V_{ef}[x(\tau)] \quad (5.113)$$

y además, como función de τ , es una función decreciente:

$$E_s[x(\tau), x'(\tau)] = E_s^0 - \Gamma \int_0^\tau [x'(\tau')]^2 d\tau' \quad (5.114)$$

con $E_s^0 := E_s[x(0), x'(0)]$ y $\tau \geq 0$. Por tanto, podemos acotar la velocidad del espejo móvil utilizando (5.60), (5.83), (5.113) y (5.114), obteniendo lo siguiente:

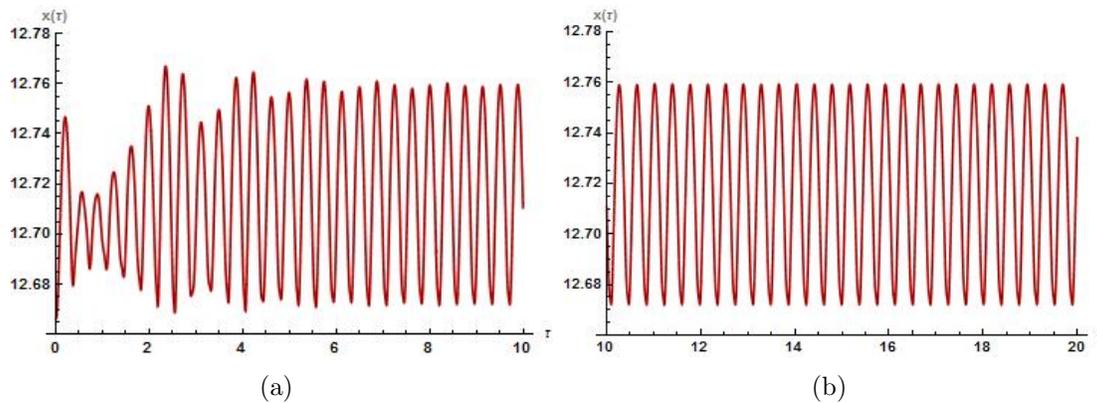


Figura 5.15: Gráfica de la solución $x(\tau)$ de (5.102) calculada numéricamente para el caso en el cual $\xi = 10$, $\Gamma = 1$, $\omega_s = 100$ y $\Omega = 50$. La figura (a) muestra el intervalo de tiempo $\tau \in [0, 10]$ en el cual se pueden apreciar los efectos transitorios. La figura (b) muestra el intervalo de tiempo $\tau \in [10, 20]$ en el que predomina el efecto estacionario

$$\left| \frac{\dot{q}(t)}{c} \right| \leq \frac{2}{\Omega} \sqrt{2E_s + \pi}, \quad (t \geq 0) \quad (5.115)$$

Nuevamente, esta condición esencialmente nos dice que $\Omega \gg 1$.

Consideremos ahora la condición sobre la aceleración. Utilizando la desigualdad del triángulo y las relaciones (5.49), (5.51), (5.83) y (5.103) se sigue que:

$$\left| \frac{\ddot{q}(t)}{c\omega_0} \right| \leq \frac{8}{\Omega^2} f_{RWA}(x_{2n}) + \frac{2\Gamma}{\Omega} \left| \frac{\dot{q}(t)}{c} \right| + \frac{4\omega_s^2}{\Omega^2} |x(\tau) - x_E| \quad (5.116)$$

con $t \in \mathbb{R}$ y $\tau = t\Delta$. Nuevamente, la segunda condición en (5.3) se satisfará si Ω es suficientemente grande.

Notemos que, como consecuencia, el régimen de baja intensidad resulta ser compatible con las condiciones expresadas en (5.3), pues en ambos casos se requiere que Ω sea suficientemente grande.

5.6.2. El Caso General

En esta subsección trataremos el caso general en (5.102), en el cual el espejo móvil no posee una dinámica conservativa, ni es posible realizar un análisis de estabilidad, debido a que la fuerza total a la que se encuentra sometido depende explícitamente del tiempo.

En la Figura 5.15 se muestra el comportamiento de la solución numérica $x(\tau)$ de (5.102) cuando $\xi = 10$, $\Gamma = 1$, $\omega_s = 100$ y $\Omega = 50$. En (a) se puede apreciar que el espejo realiza un movimiento oscilatorio ligeramente distorsionado respecto a las oscilaciones senoidales armónicas sin embargo, para tiempos suficientemente grandes, esa distorsión tiende a desaparecer y el espejo termina ejecutando oscilaciones armónicas, como puede apreciarse en 5.15(b). Por ello al comportamiento ilustrado en 5.15(a) le llamaremos el efecto transitorio, mientras que al ilustrado en 5.15(b) le llamaremos el efecto estacionario. En lo subsecuente consideraremos que

$$u(\tau) = x(\tau) - x_E, \quad u_n = x_n^s - x_E \quad (5.117)$$

Primero daremos una aproximación analítica a la solución que describe los efectos estacionarios en el caso en el cual la transparencia del espejo móvil es pequeña (es decir, $\xi \gg 1$).

Notemos que la fricción y el potencial de oscilador armónico acotan el movimiento del espejo móvil a solamente una cantidad finita de pozos del potencial $V_{RWA}(x)$; esto es, para todo $\tau \in \mathbb{R}$ se tiene que:

$$n\pi \leq x(\tau) \leq (n+m)\pi \quad \text{para algunos } n, m \in \mathbb{Z}^+ \quad (5.118)$$

Entonces, por (5.14), podemos considerar que $\delta_{k_N^0}[q(t)] \in [-\pi, m\pi]$, de tal manera que (5.102) se reduce a:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}(\tau) + \Gamma \frac{dx}{d\tau}(\tau) + \omega_s^2[x(\tau) - x_E] \simeq [1 + \cos(\Omega\tau)]f_{RWA}[x(\tau)] \quad (5.119)$$

para $\tau \gg 1$. Supongamos que $\xi \gg 1$ y $|\xi^2 u(\tau)| \ll 1$ para $\tau \gg 1$. Entonces (5.119) toma la siguiente forma aproximada:

$$u''(\tau) + \Gamma u'(\tau) + \omega_s^2 u(\tau) \simeq \frac{\xi^2 - 1}{2} [1 + \cos(\Omega\tau)] \quad (5.120)$$

Aquí hemos utilizado la aproximación lorentziana para $f_{RWA}(x)$ dada en (5.57) y las suposiciones $\xi \gg 1$ y $|\xi^2 u(\tau)| \ll 1$ para $\tau \gg 1$ para obtener que:

$$f_{RWA}[u(\tau) + x_E] \simeq -\frac{1}{2} + \frac{\xi^2}{2} \frac{1}{[\xi^2 u(\tau)]^2 + 1} \simeq -\frac{1}{2} + \frac{\xi^2}{2} \quad (5.121)$$

La ecuación (5.120) corresponde a la de un oscilador armónico sometido a una fuerza impulsora senoidal (véase [4] Sec. 3.6). El término transitorio decae exponencialmente a cero cuando $\tau \rightarrow +\infty$ y la solución estacionaria $u_{est}(\tau)$ está dada por:

$$u_{est}(\tau) = \frac{\xi^2 - 1}{2\omega_s^2} + \frac{\xi^2 - 1}{2\sqrt{\Gamma^2\Omega^2 + (\Omega^2 - \omega_s^2)^2}} \cos(\Omega\tau - \theta) \quad (5.122)$$

$$\theta = \arccos \left[\frac{\omega_s^2 - \Omega^2}{\sqrt{\Gamma^2\Omega^2 + (\Omega^2 - \omega_s^2)^2}} \right]$$

A pesar de que las condiciones bajo las cuales se obtuvo la solución (5.122) son bastante restrictivas, $u_{est}(\tau)$ proporciona una descripción cualitativamente correcta de la solución exacta. La solución estacionaria exacta se comporta asintóticamente como $u(\tau) \simeq u_0 + A \cos(\Omega\tau - \psi)$, donde $u_0 \simeq u_n$, dada en (5.117). Por consiguiente (5.122) permite identificar, a tanto la frecuencia Ω de las oscilaciones estacionarias del espejo, como el hecho de que la resonancia en la amplitud de dichas oscilaciones estacionarias ocurre cuando $\Omega = \omega_s$. Esto significa que la resonancia en la amplitud ocurre cuando la frecuencia angular del potencial de oscilador armónico ω_s es igual al doble de la frecuencia angular ω_0 del campo electromagnético.

La Figura 5.16(a) ilustra $u(\tau)$ (línea sólida roja) calculada numéricamente de (5.102) en instantes de tiempo tales que el término transitorio es despreciable, y compara dicha solución numérica

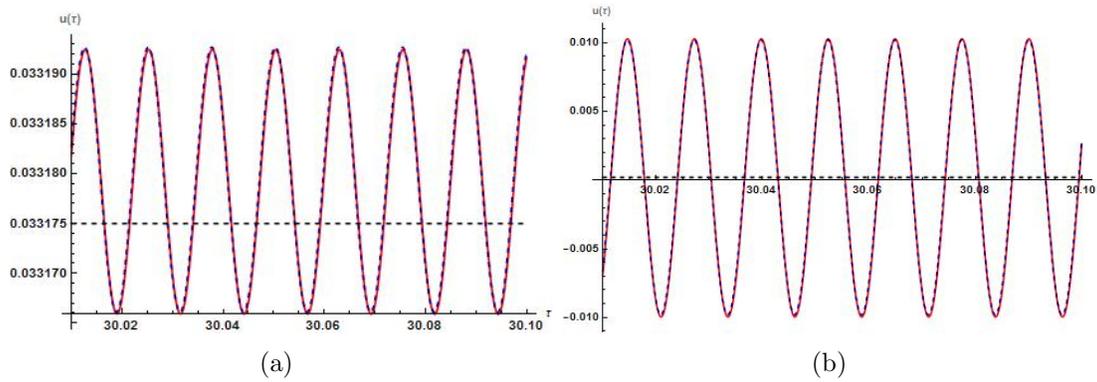


Figura 5.16: Gráfica de $u(\tau) = x(\tau) - x_E$ (línea roja sólida) calculada numéricamente de (5.102), la función $u_0 + A \cos(\Omega\tau - \psi)$ (línea azul punteada), y $u_n = x_n^s - x_E$ (línea horizontal negra punteada) para $\xi = 10$, $\Gamma = 1$ y $\Omega = 500$. La figura (a) muestra el caso en que $\omega_s = 10$, $A = 1,33 \times 10^{-5}$, $\psi = (\pi + 1)/2$, $u_0 = u_n + 4,4 \times 10^{-6}$, y $u_n = 0,033175$. La figura (b) muestra el caso $\omega_s = 500$, $A = 10^{-2}$, $\psi = (\pi + 3)/2$, $u_0 = u_n = 2 \times 10^{-4}$.

con la función $u_0 + A \cos(\Omega\tau - \psi)$ (línea azul punteada) dada en (5.117) con $A = 1,33 \times 10^{-5}$, $\psi = (n + 1)/2$, y $u_0 = u_n + 4,4 \times 10^{-6}$, con $u_n = 0,033175$. Los parámetros son $\xi = 10$, $\Gamma = 1$, $\omega_s = 10$ y $\Omega = 500$. Notemos que el sistema se encuentra lejos de la resonancia (ya que $\Omega \gg \omega_s$). Por tanto, el espejo móvil ejecuta pequeñas oscilaciones alrededor de u_n . Más aún, el espejo oscila fuera de la región $[-\xi^{-2} = -0,01, \xi^{-2} = 0,01]$ donde ω_0 coincide con una de las frecuencias de resonancia de la cavidad.

La Figura 5.16(b) ilustra $u(\tau)$ (línea sólida roja) calculada numéricamente de (5.102) y compara dicha solución numérica con la función $u_0 + A \cos(\Omega\tau - \psi)$ (línea azul punteada) dada en (5.117) con $A = 10^{-2}$, $\psi = (n + 3)/2$, y $u_0 = u_n = 2 \times 10^{-4}$. Los parámetros son $\xi = 10$, $\Gamma = 1$, $\omega_s = \Omega = 500$. Observemos que, en este caso, el espejo móvil oscila en la región $[-\xi^{-2} = -0,01, \xi^{-2} = 0,01]$ donde ω_0 coincide con una de las frecuencias de resonancia de la cavidad.

Para finalizar esta sección (y casi esta tesis, aunque aún falta un poco más) daremos condiciones suficientes para la validez de (5.3). De una manera análoga a como se ha realizado ya repetidamente en las secciones anteriores, puede mostrarse de (5.102) que (5.116) aún es válida. Sin embargo, en el caso presente no hay manera directa de acotar la velocidad del espejo móvil ya que la fuerza que actúa sobre él depende explícitamente del tiempo. Sin embargo, usando la aproximación $u(\tau)$ dada en (5.122) en combinación con (5.83) podemos obtener la siguiente estimación:

$$\left| \frac{\dot{q}(t)}{c} \right| \lesssim \frac{|\xi^2 - 1|}{\sqrt{\Gamma^2 \Omega^2 + (\Omega^2 - \omega_s^2)^2}} \quad (\tau \gg 1) \quad (5.123)$$

De (5.116) y (5.123) se sigue que se cumplirá (5.3) si, por ejemplo, $\Omega \gg \xi$, Γ , ω_s , de manera que el sistema se encuentre lejos de la resonancia. Notemos que los parámetros en la Figura 5.16(a) satisfacen esta condición, pero en la Figura 5.16(b) no, de modo que, al menos en el primer caso, el modelo si es aplicable. 

Capítulo 6

Conclusiones

*We'll continue to work hard to do a better job
in every area going forward. I don't know where
those little things will come from but we'll continue
to be diligent on them.
Bill Belichick*

En esta tesis hemos realizado un análisis de la dinámica clásica de un espejo móvil sometido a la presión de la radiación y a dos fuerzas externas independientes de ella, a saber, un potencial de oscilador armónico y una fuerza de disipación, reproduciendo con ello lo expuesto en [17] y [18]; en el segundo capítulo establecemos los principios físicos más importantes de la relatividad especial, incluyendo los postulados de Einstein, la invariancia del intervalo, las transformaciones de Lorentz y la dinámica relativista de una partícula. Así mismo analizamos las consecuencias que tiene la relatividad de la simultaneidad sobre dinámica de objetos extendidos.

En el tercer capítulo introducimos las ecuaciones fundamentales de la electrodinámica; las Ecuaciones de Maxwell y, en presencia de medios materiales, las reescribimos de manera que se pueda hacer referencia explícita a las fuentes que el experimental puede controlar directamente. Tras revisar brevemente la teoría de los potenciales electromagnéticos y las transformaciones de norma, establecemos una relación con los conceptos introducidos en el capítulo dos, haciendo explícita la covariancia de la electrodinámica.

Una vez revisados los conceptos más relevantes de las teorías electromagnética y relativista para los fines que incumben al presente trabajo, en el capítulo cuatro comenzamos con la revisión de lo establecido en [17] considerando una lámina delgada móvil, a la cual denominamos de forma genérica en el resto de la tesis como “espejo” y un campo electromagnético. Asumimos que el espejo tiene longitud y ancho infinitos, y un grosor δ_0 cuando esta en reposo, y además que solo podrá moverse solamente en la dirección x respecto del sistema de referencia del laboratorio. Así mismo consideramos que el espejo tiene una respuesta eléctrica lineal, es isotrópico, ohmico, no magnetizable y conductor. Obtenemos así una ecuación de evolución para el campo electromagnético (Ec.(4.53)) la cual nos permite, tras realizar una primera aproximación, obtener las ecuaciones de evolución para el sistema espejo-campo correctas a primer orden en la velocidad y aceleración del espejo móvil (Ecs. (4.65) y (4.78)). Encontramos entonces que el campo electromagnético satisface una ecuación de onda con un término de amortiguación y coeficientes lentamente variables mas términos que son pequeños cuando el espejo evoluciona en una escala de tiempo mucho mayor a la escala de tiempo de evolución del campo. Estas propiedades tiene su origen en el hecho de que el espejo aparece con

una polarización y una magnetización distintas de cero cuando se encuentra en movimiento, lo cual es resultado de las propiedades de los campos y las cantidades electromagnéticas bajo transformaciones de Lorentz. Por otro lado, encontramos que el espejo satisface una ecuación de movimiento con dos términos especiales los cuales son resultado del movimiento del espejo y su acoplamiento al campo electromagnético. El primero de dichos términos es una masa dependiente de la posición y del tiempo. El segundo es una fuerza dependiente de la posición la cual se encuentra relacionada con el enfriamiento de objetos mecánicos. Además el hecho de que existan dos escalas de tiempo distintas, una asociada a la evolución rápida del campo electromagnético y otra asociada a la evolución del espejo móvil, nos permite realizar un análisis de la dinámica del espejo separándola en tres regímenes distintos, lo cuál realizamos en el Capítulo 5. Es importante notar que el tratamiento expuesto en [17], que es el que desglosamos aquí, es bastante general y no se encuentra restringido a, digamos, movimientos oscilatorios. De hecho este tratamiento permite que el espejo pueda acelerar lentamente hasta alcanzar velocidades relativistas.

En el Capítulo 5, y reproduciendo lo expuesto en [18], utilizamos las ecuaciones de evolución establecidas en el Capítulo 4 para analizar en detalle la dinámica de un espejo móvil muy delgado con transparencia distinta de cero, sometido a un campo electromagnético que incide perpendicularmente, y un espejo fijo perfecto. Específicamente, consideramos la siguiente situación: Una onda plana monocromática de frecuencia ω_0 incide sobre el sistema de espejo desde la derecha. La onda es parcialmente reflejada por el espejo móvil en $q(t) > 0$ y totalmente reflejada por el espejo fijo en $x = 0$. Una vez que ha pasado el periodo transitorio, se forma una onda estacionaria. Entonces la dinámica del espejo móvil es descrita una vez que ha pasado el periodo transitorio. Al establecer las ecuaciones de evolución, hacemos uso de los resultados dados en el Capítulo 4, suponemos que el espejo móvil es sumamente delgado, de modo que podemos aproximararlo como una función Delta de Dirac, y realizamos una aproximación a orden cero en la velocidad y aceleración del espejo móvil. Notemos que es posible hacer esto porque la presencia del espejo fijo solamente se traduce en la imposición de una condición a la frontera en las ecuaciones dadas en el Capítulo 4. Como consecuencia de estas aproximaciones, podemos suponer que el campo esta compuesto por un único modo, y entonces la fuerza dependiente de la posición del espejo y la masa dependiente de la posición y del tiempo, no aparecen.

Establecemos también condiciones bajo las cuales las ecuaciones de evolución que se están utilizando resultan ser buenas aproximaciones de las ecuaciones exactas. Ello equivale a exigir que la velocidad y aceleración del espejo móvil sean lo suficientemente pequeñas, de modo que se pueda considerar que el campo electromagnético evoluciona como si el espejo se encontrara fijo respecto del laboratorio. Podemos entonces identificar tres regímenes distintos, de acuerdo a la intensidad del campo electromagnético incidente; el régimen de baja intensidad, el régimen de alta intensidad, y el caso general. En el primero ocurre cuando la intensidad del campo electromagnético es tal que la escala de tiempo característica de la evolución del espejo móvil es mucho mayor que la escala de tiempo característica de la evolución del campo, lo que significa precisamente que el campo evoluciona como si el espejo estuviera fijo. El segundo régimen aparece cuando sucede lo contrario, es decir, cuando la escala de tiempo de la evolución del espejo es mucho menor que la del campo. El tercer caso involucra los valores intermedios. Encontramos entonces que el régimen de alta intensidad resulta ser incompatible con el modelo establecido, pues en dicho régimen la intensidad del campo es tan alta que puede provocar velocidades y aceleraciones muy altas en el espejo móvil, sin embargo, el régimen de baja intensidad resulta ser compatible con el modelo establecido, además en dicho régimen, y en ausencia de fuerzas dependientes de la velocidad, el espejo exhibe una dinámica tal que su energía total es una cantidad conservada. El régimen intermedio es también compatible con el modelo, pero

solo bajo cierto rango de parámetros.

Al considerar la dinámica debida únicamente a la presión de la radiación encontramos comportamientos distintos, según el régimen que se considere. En el régimen de baja intensidad la energía total es una cantidad conservada, lo cuál nos permite realizar un análisis de la curva del potencial al cual se encuentra sometido y de las curvas de nivel en el espacio fase para distintos valores de la energía total, y obtener valiosa información de la dinámica del sistema a partir de ellas sin la necesidad de resolver directamente la ecuación de movimiento (como se enseña en los cursos de Licenciatura). Dicho análisis encuentra confirmados sus resultados al realizar una aproximación polinómica sobre la fuerza que actúa sobre el espejo móvil y hallar la solución analítica aproximada de la ecuación de movimiento correspondiente, así como al resolver numéricamente la ecuación de movimiento exacta. Encontramos así que el espejo puede tener un movimiento acotado, o uno no acotado en donde se acelera conforme se acerca a un mínimo y se desacelera conforme se acerca a un máximo del potencial de la presión de la radiación. En el caso en el cual la trayectoria es acotada, el espejo móvil se encuentra restringido a moverse dentro de uno de los pozos de potencial y además ejecuta oscilaciones no-armónicas alrededor de uno de los mínimos del potencial. Fuera del régimen de baja intensidad, el espejo se encuentra sometido a una fuerza explícitamente dependiente del tiempo, por lo cual la energía total ya no es una cantidad conservada, y la dinámica resulta ser mucho más compleja. Los resultados numéricos muestran que el espejo puede realizar nuevamente oscilaciones en torno a un punto, o puede en otros casos saltar de un pozo de potencial a otro.

Cuando introducimos una fuerza de fricción dependiente de la velocidad del espejo y consideramos el régimen de baja intensidad, el espejo móvil ya no es un sistema conservativo, y pierde continuamente energía. En este caso un análisis de la curva que representa al potencial ya no es útil, pero aún podemos extraer información sobre la dinámica del espejo si realizamos un análisis de la estabilidad lineal de la ecuación diferencial de movimiento. Hallamos entonces que el espejo tiende a establecerse en un mínimo (o un máximo) del potencial de la presión de la radiación. Fuera del régimen de baja intensidad la dinámica resulta nuevamente mucho más compleja, pues la fuerza externa depende explícitamente del tiempo, y entonces el espejo puede pasar de un pozo de potencial a otro antes de establecerse en uno de los mínimos (o máximos). Además se encuentra evidencia numérica de que, para cierto rango de parámetros, el espejo puede aún realizar oscilaciones armónicas alrededor de uno de los mínimos. Es importante señalar que la fuerza de fricción introducida aquí es conceptualmente muy distinta de aquella encontrada al establecer la ecuación de movimiento a primer orden en el Capítulo (4), pues esta última aparece cuando se consideran términos de orden uno en la velocidad y aceleración del espejo móvil, y tiene su origen físico en la interacción del espejo con el campo, mientras que la fricción considerada en el Capítulo (5) se debe a algún agente externo, aire por ejemplo, o podemos pensar que el espejo se encuentra sujeto a un sistema de rieles o ruedas que lo someten a una fuerza de fricción pero le permiten moverse debido a la presión de la radiación.

En el régimen de baja intensidad y si consideramos que, adicionalmente a la fricción, existe un potencial de oscilador armónico (un resorte Hookiano por ejemplo) centrado en una de las posiciones de resonancia de la cavidad, el espejo móvil siempre tiende a un mínimo (o un máximo) del potencial total, el cual es la suma del potencial de la presión de radiación y el potencial de oscilador armónico. Fuera del régimen de baja intensidad el espejo posee un periodo de movimiento transitorio, tras el cual ejecuta oscilaciones armónicas alrededor de uno de los mencionados mínimos. Más aún, existen resonancia en la amplitud cuando la frecuencia del oscilador armónico es igual a dos veces la frecuencia del campo electromagnético.

Un punto importante que debemos considerar es el siguiente: puede preguntarse porqué se necesita un tratamiento relativista, especialmente cuando el espejo no se mueve a velocidades cercanas a las de la luz (aunque bien podría hacerlo). Si se piensa detenidamente podemos encontrar la respuesta a ello a partir de considerar lo siguiente; aunque conocemos las propiedades electromagnéticas que tiene el espejo cuando se encuentra en reposo, tales como la polarización y la magnetización, en realidad necesitamos conocer esas propiedades en el sistema del laboratorio, un sistema respecto del cual el espejo puede encontrarse en movimiento. Una manera es utilizar transformaciones de Galileo [28], argumentando que la velocidad del espejo no es muy alta, y encontrar ecuaciones constitutivas para el espejo en el sistema del laboratorio, sin embargo dicho enfoque resulta sumamente restrictivo, pues produce que se ignoren fenómenos que pueden ser reelevantes en ciertos ámbitos y, además no aparecen características que si aparecen cuando se consideran transformaciones de Lorentz, tales como la masa dependiente del tiempo y la fuerza dependiente de la velocidad del espejo. Aunque estos términos son pequeños si la velocidad del espejo no es muy alta, dan lugar a fenómenos muy importantes relacionados con la masa efectiva y el enfriamiento de objetos mecánicos. Además, la electrodinámica es generalmente covariante, como se demuestra en el Capítulo (3), y entonces un tratamiento relativista no solamente resulta más natural, si no que posibilita realizar una expansión en potencias de la velocidad del espejo, lo que permite obtener términos de corrección en el caso de pequeñas velocidades y aceleraciones. Además, el tratamiento relativista nos ayuda a obtener aproximaciones consistentes para el campo y el espejo a un orden dado de la velocidad y aceleración.

Finalmente debemos mencionar que existen varios puntos que constituyen problemas abiertos para los cuales existe campo para una investigación futura:

- Primero, investigar la descripción lagrangiana del campo electromagnético, de modo que se obtengan las ecuaciones de evolución correctas a un orden dado sin tener que descartar términos en las ecuaciones de Lagrange.
- Segundo, investigar el comportamiento del espejo móvil en el régimen de alta intensidad del campo, incluyendo en la ecuación de movimiento términos de primer orden en la velocidad y aceleración. En este caso se espera que efectos tales como la fuerza disipativa resultado de la interacción con el campo y la mezcla de distintas amplitudes de campo, correspondientes a distintos números de onda, se vuelvan relevantes.
- Tercero, la demostración formal de la existencia de trayectorias periódicas en el caso general, cuando el espejo se encuentra sometido a la presión de la radiación y a una fuerza disipativa proporcional a la velocidad. Notemos que este punto se encuentra en estrecha relación con el segundo, pues se demostró que estas trayectorias periódicas aparecen para valores de los parámetros que no satisfacen la condición de que la velocidad del espejo móvil sea mucho más pequeña que la velocidad de la luz, y que la aceleración sea mucho más pequeña que la velocidad de la luz multiplicada por la frecuencia angular característica del campo. 

Apéndice A

La Aproximación de Onda Rotante

La aproximación de onda rotante es ampliamente utilizada en óptica cuántica y física de materia condensada. En ella, los términos con una frecuencia de oscilación muy alta son despreciados. Para tener una idea concreta acerca de cómo funciona esta aproximación, consideraremos un modelo semi-clásico de la interacción de un átomo y el campo eléctrico oscilante de una onda electromagnética con un único modo. En este modelo el átomo es un sistema cuántico con solo dos niveles de energía, mientras que la radiación electromagnética será tratada como un sistema clásico, es decir, ignoraremos el carácter discreto de la radiación.

Supongamos que la radiación incidente posee una frecuencia ν . Sean $|a\rangle$ y $|b\rangle$ el estado excitado y el estado base del átomo, es decir, los estados propios del Hamiltoniano del átomo sin perturbar \hat{H}_0 , con valores propios $\hbar\omega_a$ y $\hbar\omega_b$, respectivamente (véase la Figura A.1). La función de onda dependiente del tiempo para el átomo puede escribirse entonces como:

$$|\psi(t)\rangle = C_a(t)|a\rangle + C_b(t)|b\rangle \quad (\text{A.1})$$

donde C_a y C_b son las amplitudes de probabilidad de encontrar el átomo en el estado $|a\rangle$ o $|b\rangle$ respectivamente. La correspondiente ecuación de Schrödinger es:

$$\frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = -\frac{i}{\hbar}\hat{H}|\psi(t)\rangle \quad (\text{A.2})$$

con:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1 \quad (\text{A.3})$$

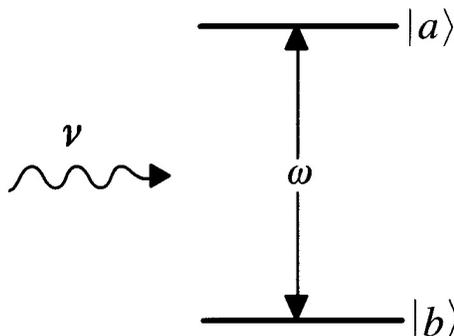


Figura A.1: Interacción entre un átomo de dos niveles y radiación electromagnética con un único modo. Esta figura fue tomada de [10]

donde \widehat{H}_0 representa al Hamiltoniano del átomo sin perturbar, y \widehat{H}_1 es el Hamiltoniano de la interacción del átomo con la radiación incidente. Utilizando la relación de completez, es decir $|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b| = 1$, podemos escribir a \widehat{H}_0 de la siguiente manera:

$$\widehat{H}_0 = \hbar\omega_a|a\rangle\langle a| + \hbar\omega_b|b\rangle\langle b| \quad (\text{A.4})$$

Análogamente, el Hamiltoniano de interacción \widehat{H}_1 puede escribirse como:

$$\widehat{H}_1 = -exE(t) = -(\rho_{ab}|a\rangle\langle b| + \rho_{ba}|b\rangle\langle a|)E(t) \quad (\text{A.5})$$

donde $\rho_{ab} = \rho_{ba}^* = e\langle a|x|b\rangle$ es el elemento de matriz del momento dipolar eléctrico. Aquí hemos supuesto que el campo eléctrico esta linealmente polarizado a lo largo del eje x . En la aproximación dipolar eléctrica, el campo puede expresarse como:

$$E(t) = \zeta \cos(\nu t) \quad (\text{A.6})$$

donde ζ es la amplitud del campo y $\nu = ck$ es la frecuencia. Utilizando (A.2) las ecuaciones de evolución para las amplitudes C_a y C_b son:

$$\frac{dC_a}{dt} = -i\omega_a C_a + i\Omega_R e^{-i\phi} \cos(\nu t) + C_b \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{dC_b}{dt} = -i\omega_b C_b + i\Omega_R e^{i\phi} \cos(\nu t) + C_a \quad (\text{A.8})$$

donde

$$\Omega_R := \frac{|\rho_{ab}|\zeta}{\hbar} \quad (\text{A.9})$$

y ϕ es la fase de $\rho_{ab} = |\rho_{ab}|e^{i\phi}$. A fin de resolver el conjunto de ecuaciones (A.7) y (A.8) definamos:

$$c_a = C_a e^{i\omega_a t} \quad (\text{A.10})$$

$$c_b = C_b e^{i\omega_b t} \quad (\text{A.11})$$

Si utilizamos las definiciones introducidas en (A.10) y (A.11), de (A.7) y (A.8) se sigue que:

$$\frac{dc_a}{dt} = i\frac{\Omega_R}{2} e^{-i\phi} c_b [e^{i(\omega+\nu)t} + e^{i(\omega-\nu)t}] \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{dc_b}{dt} = i\frac{\Omega_R}{2} e^{i\phi} c_a [e^{-i(\omega+\nu)t} + e^{-i(\omega-\nu)t}]$$

donde $\omega := \omega_a - \omega_b$ es la frecuencia de transición entre los niveles del átomo. Supongamos ahora que $|\omega - \nu| \ll \omega + \nu$. Entonces aquellos términos proporcionales a $e^{\pm i(\omega+\nu)t}$ tendrán una frecuencia de oscilación muy grande en comparación con los términos $e^{\pm i(\omega-\nu)t}$. La *Aproximación de Onda Rotante* (*RWA* por sus siglas en inglés) establece que, bajo estas condiciones, si integramos sobre un periodo de tiempo largo, la integración de los términos $e^{\pm i(\omega+\nu)t}$ promedia a cero, de manera que podemos despreciarlos de entrada en la ecuación diferencial. Aunque las oscilaciones puntualmente no son cero, pues habrá instantes en los cuales pueden tener un valor grande, el cual dependerá de la amplitud, la integral de dichos términos, sobre un periodo de tiempo suficientemente grande, se aproxima a cero. Si aplicamos la *Aproximación de Onda Rotante* al sistema de ecuaciones (A.12) obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{dc_a}{dt} &= i\frac{\Omega_R}{2}e^{-i\phi}c_b e^{i(\omega-\nu)t} \\ \frac{dc_b}{dt} &= i\frac{\Omega_R}{2}e^{i\phi}c_a e^{-i(\omega-\nu)t}\end{aligned}\tag{A.13}$$

Generalmente esta resulta ser una buena aproximación. Además, existen casos especiales en los cuales los términos rápidamente oscilantes $e^{\pm i(\omega+\nu)t}$ no aparecen (Véase. [10] Sec. 5.2.3).

Supongamos que el átomo se encuentra en el estado $|a\rangle$ en un instante inicial $t = 0$, entonces la solución del sistema de ecuaciones (A.13) es:

$$\begin{aligned}c_a(t) &= \left[\cos\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) - \frac{i\Delta}{\Omega_R} \sin\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) \right] e^{i\frac{\Delta}{2}t} \\ c_b(t) &= \left[i\frac{\Omega}{\Omega_R} e^{i\phi} \sin\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right) \right] e^{-i\frac{\Delta}{2}t}\end{aligned}\tag{A.14}$$

donde $\Delta := \omega - \nu$ y $\Omega = \sqrt{\Omega_R^2 + \Delta^2}$.

Para poder apreciar cómo la aproximación de onda rotante produce resultados satisfactorios, no solo al considerar sistemas cuánticos interactuantes sino también en sistemas clásicos, mostraremos a continuación dos ejemplos.

Consideremos primero un átomo de Hidrógeno sometido a la acción de un campo eléctrico linealmente polarizado con una amplitud de⁶ $\zeta = 8.926 \times 10^{20}(N/C)$.

La función de onda del estado base es $\psi_{1,0,0} = |1, 0, 0\rangle$. El primer estado excitado de la energía $n = 2$ es cuatro veces degenerado pues a las funciones de onda distintas: $\psi_{2,0,0} = |2, 0, 0\rangle$, $\psi_{2,1,0} = |2, 1, 0\rangle$, $\psi_{2,1,-1} = |2, 1, -1\rangle$ y $\psi_{2,1,1} = |2, 1, 1\rangle$ ⁷ les corresponde el mismo valor de la energía. Cuando el átomo se encuentra sometido a la acción de un campo magnético externo uniforme y constante cuya intensidad es mucho mayor que el campo magnético intrínseco producido por el electrón en su movimiento orbital, los estados de la energía adquieren una dependencia respecto al número cuántico m (Efecto Zeeman), de manera que los niveles de energía estarán dados, sin considerar el acoplamiento espín-órbita, por (véase [9] Sec. 6.4):

$$E_{n,m} = - \left[\frac{m}{2\hbar^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \right] \frac{1}{n^2} + \mu_0 B(m_l + 2m_s)\tag{A.15}$$

donde m_l y $m_s = \pm\frac{1}{2}$ son los valores propios de las proyecciones sobre el eje z de los operadores $\hat{\mathbf{L}}$ (momento angular orbital) y $\hat{\mathbf{S}}$ (espín) respectivamente, B es la magnitud del campo magnético aplicado, el cual se encuentra orientado en la dirección z , y μ_0 es el magnetón de Bohr. Para simplificar el

⁶Las amplitudes de campo máximas que se han alcanzado en la actualidad son del orden de $10^{13}N/C$ (véase [1] Sec. I.4), por lo que la amplitud que presentamos aquí no es realista. Hemos elegido este valor puesto que, para amplitudes del orden de 10^5 o menores, el valor de Ω_R es del orden de $10^{-17}PHz$, de tal manera que el error por redondeo, al realizar cálculos computacionales, se vuelve muy significativo, y por tanto resulta imposible obtener soluciones aceptables.

⁷Los subíndices denotan los valores de los números cuánticos n , l y m respectivamente. Así, $\psi_{2,1,1} := |2, 1, 1\rangle$ corresponde al estado $n = 2$, $l = 1$ y $m = 1$.

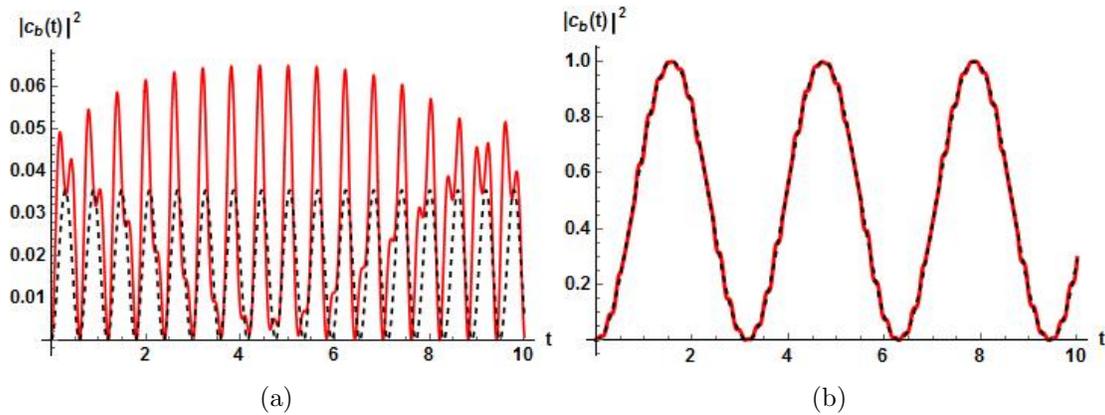


Figura A.2: Comparación entre $|c_b(t)|^2$ calculada numéricamente (línea roja) a partir de (A.7) y (A.8), y la solución analítica dada en (A.14) (línea negra punteada). La Figura A.2(a) ilustra el caso en que $\nu = 5PHz$, mientras que en A.2(b) se tiene que $\nu = \omega = 15,4PHz$. El tiempo se mide en femtosegundos ($1fs = 10^{-15}s$).

modelo despreciaremos los efectos debidos al espín, con ello, las funciones propias del Hamiltoniano con campo magnético y sin campo coincidirán (véase [8] Sec. 13.5), lo que nos permitirá calcular los elementos de matriz $\rho_{ab} = \rho_{ba}^* = e\langle a|x|b\rangle$. Si el campo magnético es suficientemente intenso, la diferencia de energía entre los estados $|1, 0, 0\rangle$ y $|2, 1, 1\rangle$ será mucho más grande que la diferencia de energía entre $|1, 0, 0\rangle$ y $|2, 1, -1\rangle$. Como los elementos de matriz $\langle 2, 0, 0|x|1, 0, 0\rangle$ y $\langle 2, 1, 0|x|1, 0, 0\rangle$ son nulos, solo serán posibles las transiciones entre el estado base y los estados $|2, 1, \pm 1\rangle$. Además, como el estado $|2, 1, -1\rangle$ es aquel que, del conjunto de estados con $n = 2$, tiene el menor valor de energía, de acuerdo con la ecuación (A.15), entonces podemos considerar solamente la transición entre $|1, 0, 0\rangle = |b\rangle$ y $|2, 1, -1\rangle = |a\rangle$, cuyas funciones de onda en el espacio de posición están dadas por:

$$\psi_{1,0,0}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}$$

$$\psi_{2,1,-1}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{64\pi a^5}} r e^{-r/2a} \sin(\theta) e^{-i\phi}$$

donde a es el radio de Bohr. En vista de esto, supongamos que el átomo de hidrógeno constituye un sistema de dos niveles. Si el campo magnético aplicado es de 1 Tesla, entonces se tendrá que $\Omega_R = 1,98 \times 10^{15}Hz \simeq 2PHz$ y $\omega = 15,4PHz$. En la Figura A.2 se muestra la comparación entre $|c_b(t)|^2$ calculada numéricamente (línea roja) a partir de (A.7) y (A.8), y la solución analítica dada en (A.14) (línea negra punteada). La Figura A.2(a) ilustra el caso en el cual $\nu = 5PHz$, mientras que en A.2(b) se tiene que $\nu = \omega = 15,4PHz$.

La aproximación de onda rotante se basa en la suposición de que $|\omega - \nu| \ll \omega + \nu$. En A.2(a) se tendrá que $\Delta = 10,4PHz$, $\Omega = 10,6PHz$, $\Omega_R = 2PHz$, de modo que $|\omega - \nu| = 10,4PHz$ y $\omega + \nu = 20,4PHz$, es decir, en este caso no se cumple la condición $|\omega - \nu| \ll \omega + \nu$ y no podemos esperar que la aproximación de onda rotante sea satisfactoria. Por otro lado, en A.2(b) se tendrá que $\Delta = 0PHz$, $\Omega = \Omega_R = 1,998PHz$ y $|\omega - \nu| = 0PHz$ mientras que $\omega + \nu = 30,8PHz$. En este caso $|\omega - \nu| \ll \omega + \nu$, de modo que la aproximación de onda rotante constituye una aproximación apropiada. La Figura A.2 apoya estos argumentos. En A.2(a) la solución numérica y la solución aproximada difieren mucho una de la otra, y la solución analítica dada en (A.14) no proporciona la probabilidad de transición correcta. Por otro lado en A.2(b) la solución analítica aproximada reproduce muy bien

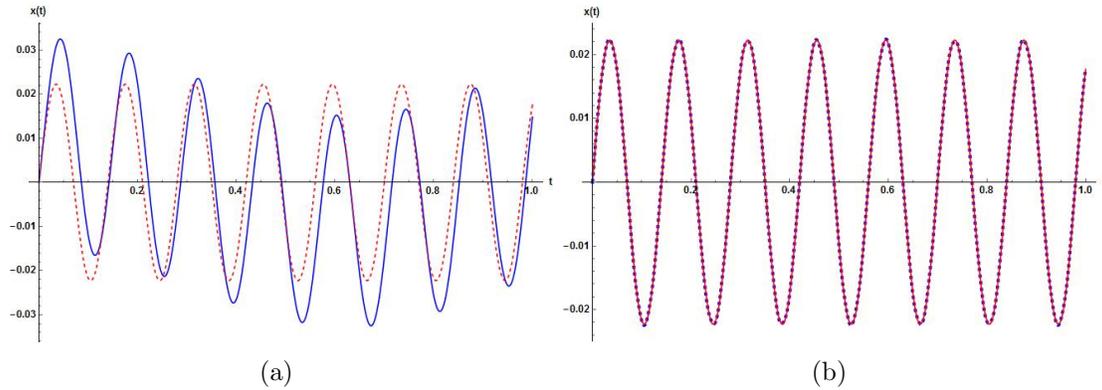


Figura A.3: Solución $x(t)$ obtenida resolviendo numéricamente (A.17) (línea azul continua) cuando $\omega = 4,49 \times 10^{16} Hz$. En (a) se tiene que $\omega_0 = 5 \times 10^{15} Hz$, y en (b) en tenemos $\omega_0 = 300 \times 10^{16} Hz$. Se muestra también la solución analítica de (A.18) (línea azul punteada)

el comportamiento de la solución numérica.

Como segundo ejemplo, ahora dentro del campo de la mecánica clásica, de interacción entre ondas electromagnéticas y materia, consideremos el caso de un medio material en el que cada átomo puede considerarse como un oscilador clásico amortiguado. Este modelo permite describir la interacción entre un átomo y un campo eléctrico oscilante asociado con una onda electromagnética (véase [2] Sec. 9.4.3, [15] Sec. 1.3 y [34]). Específicamente consideraremos una nube de carga (electrón) unida a un núcleo positivo el cual le permite oscilar alrededor de su posición de equilibrio. Utilizaremos la coordenada x para etiquetar la desviación respecto de la posición de equilibrio. Para x suficientemente pequeño podemos, en buena aproximación, describir el movimiento de la nube cargada como el de un oscilador amortiguado sujeto a un campo eléctrico sinusoidal. Tal sistema obedece a la ecuación de movimiento de Abraham-Lorentz ([2] Sec. 9.4.3, [15] Sec. 1.3 y [34]):

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega^2x(t) = \frac{e}{m}E(t) \quad (\text{A.16})$$

donde ω es la frecuencia natural de oscilación del átomo y e es la carga eléctrica del electrón. El término de amortiguamiento $2\gamma\dot{x}(t)$ es producto de la pérdida de energía de los electrones debida a la radiación que estos mismos emiten durante su oscilación. En la presencia de una onda plana monocromática de frecuencia ω_0 polarizada en la dirección x , la ecuación (A.16) toma la siguiente forma:

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega^2x(t) = \frac{e}{m}E_0 \cos(\omega_0 t) \quad (\text{A.17})$$

Si la frecuencia de la radiación incidente es mucho mayor que la frecuencia natural de oscilación del átomo, es decir si $\omega \ll \omega_0$, entonces el término no homogéneo en (A.17) tendrá una frecuencia de oscilación muy alta y, para un periodo de tiempo, su integración promediará a cero, de manera muy similar a como ocurre en el caso cuántico con los términos $e^{\pm i(\omega-\nu)t}$. Entonces en este caso podemos despreciar dicho término de la ecuación diferencial. Este es el análogo de la aproximación de onda rotante para sistemas clásicos. Para frecuencias de oscilación del orden de $\omega \simeq 10^{16}$, el término de amortiguamiento resulta ser mucho más pequeño que el término oscilatorio (véase [2] Problema 11.18) y puede despreciarse. Siendo así, la ecuación (A.17) se transforma en la ecuación de un oscilador armónico simple con frecuencia angular de oscilación ω :

$$\ddot{x}(t) + \omega^2x(t) = 0 \quad (\text{A.18})$$

La Figura A.3 muestra la solución $x(t)$ obtenida resolviendo numéricamente (A.17) (línea azul continua) cuando $\omega = 4,49 \times 10^{16} Hz$ y compara dicha solución con la obtenida de (A.18) (línea roja punteada). En A.3(a) se tiene $\omega_0 = 5 \times 10^{15} Hz$, de modo que no se cumple la condición $\omega_0 \gg \omega$ esto significa que no podemos aplicar la aproximación de onda rotante; por otra parte en A.3(b) tenemos $\omega_0 = 300 \times 10^{16} Hz$, con lo cual $\omega_0 \gg \omega$, y entonces la solución de (A.18) concuerda con la obtenida de (A.17). En ambos casos hemos considerado que $E_0 = 1 \times 10^5 N/C$.

Una cuestión que permanece abierta como objeto de investigación futura, es dar condiciones rigurosas para que la aproximación de onda rotante pueda aplicarse. 

Apéndice B

Análisis de curvas de energía potencial

Aunque el concepto de energía no era tan popular en los tiempos de Newton como lo es hoy en día, las formulaciones más modernas de la mecánica clásica, la formulación Lagrangiana y la Hamiltoniana, están basadas fuertemente en el concepto de energía [3].

Consideremos una partícula puntual de masa m moviéndose en una dimensión, y sometida únicamente a una fuerza conservativa \mathbf{F} tal que $\mathbf{F} = -\nabla V$. Definimos entonces la energía total del sistema de la siguiente manera:

$$E = T + V = \frac{1}{2}m[\dot{x}(t)]^2 + V \quad (\text{B.1})$$

La conservación de la energía total se establece diciendo que:

$$\frac{dE}{dt}(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (\text{B.2})$$

en cuyo caso podemos reescribir la ecuación (B.1) como:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]} \quad (\text{B.3})$$

e integrar, para obtener lo siguiente:

$$t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x')]} \quad (\text{B.4})$$

Con ello hemos resuelto formalmente el problema dinámico, es decir, hemos encontrado la solución $x(t)$. Lo único que queda por hacer es insertar el valor particular $V(x)$ del potencial en cuestión y utilizar técnicas de integración, lo cuál puede no resultar sencillo.

Podemos, sin embargo, obtener bastante información acerca del movimiento de la partícula simplemente examinando la gráfica del potencial al que se encuentra sometida, como por ejemplo la Figura B.1. Primero notemos que, como $\frac{1}{2}mv^2 = T \geq 0$, entonces para cualquier movimiento físicamente realizable se tendrá que $E \geq V(x)$. Como consecuencia de esto se sigue que, de acuerdo a la Figura B.1, el movimiento es acotado para el valor de la energía E_2 .

Una partícula con energía E_2 tendrá un movimiento periódico entre los puntos x_b y x_c , llamados *puntos de retorno*. Si una partícula tuviera una energía $E = 0$, el único valor que podría tomar x es $x = 0$, es decir, la partícula estaría en reposo (cuando en lugar de la coordenada x se considera

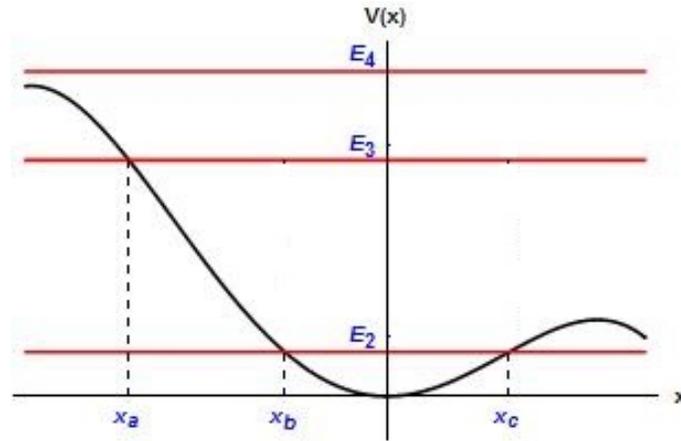


Figura B.1: Curva de una función de energía potencial $V(x)$ en donde se indican varios valores para la energía E . Para ciertos valores de E , por ejemplo $E = 0$ o E_2 , el movimiento es acotado.

la coordenada radial, la partícula tendría un único valor en r , es decir, ejecutaría un movimiento circular).

El movimiento de una partícula con energía E_3 es bastante sencillo; en este caso la partícula viene desde $x = +\infty$, se detiene e invierte su dirección de movimiento en x_a para comenzar a moverse hacia la derecha hacia $x = +\infty$. Para una partícula con energía E_4 , el movimiento resulta no acotado y la partícula puede tener cualquier posición. Sin embargo, debido a la presencia del potencial, el valor de su rapidez cambiará ya que depende de la diferencia entre E_4 y $V(x)$. Si se está moviendo hacia la derecha, se acelerará cuando se acerque a los mínimos de la energía potencial y se ralentizará cuando se acerque a los máximos, pero continuará su movimiento hacia $x = +\infty$ (tal como sucedía con el espejo móvil en la sección 5.4.2 cuando su energía era $E > 0$).

El movimiento de una partícula con energía E_2 es, de hecho, similar al de una masa sometida a un potencial de oscilador armónico, pues el potencial real, en la región $x_b < x < x_c$ puede aproximarse como $V(x) \simeq \frac{1}{2}kx^2$. Una partícula con energía ligeramente mayor que $E = 0$ oscilará alrededor del punto $x = 0$. Decimos entonces que $x_0 = 0$ es un **punto de equilibrio**, pues si se coloca una partícula en x_0 con velocidad $v = 0$ permanecerá ahí en reposo. Más aún, si la partícula se coloca inicialmente a un lado de x_0 eventualmente regresará a x_0 , es por ello que a dicho punto le llamamos **punto de equilibrio estable**, los puntos de equilibrio estable son siempre los mínimos locales potencial $V(x)$. Si el punto en cuestión fuera no un mínimo, sino un máximo local, el comportamiento de la partícula sería el inverso; al colocarla exactamente en dicho punto con velocidad cero, permanecería ahí, pero si se coloca a un lado, la partícula adquiriría una velocidad que la haría alejarse de dicho punto, por esta razón los máximos del potencial reciben el nombre de **puntos de equilibrio inestable**.

En general, podemos expresar el potencial $V(x)$ como una serie de Taylor alrededor de un punto de equilibrio. Por simplicidad supongamos que el punto de equilibrio se encuentra en $x = 0$. Entonces tendremos que:

$$V(x) = V_0 + x \left(\frac{dV}{dx} \right) (0) + \frac{x^2}{2!} \frac{d^2V}{dx^2}(0) + \frac{x^3}{3!} \frac{d^3V}{dx^3}(0) + \dots \quad (\text{B.5})$$

El valor de la energía potencial en $x = 0$ es una constante que podemos elegir como $V(0) = 0$ sin

pérdida de generalidad. Si $x = 0$ es un punto de equilibrio, entonces :

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)(0) = 0 \quad (\text{B.6})$$

y la ecuación (B.5) toma la siguiente forma:

$$V(x) = \frac{x^2}{2!} \frac{d^2V}{dx^2}(0) + \frac{x^3}{3!} \frac{d^3V}{dx^3}(0) + \dots \quad (\text{B.7})$$

Cerca del punto de equilibrio $x = 0$, el valor de x es pequeño, y cada término en la ecuación (B.7) se puede considerar más pequeño que el inmediato anterior. Por tanto podemos considerar solamente el primer término en (B.7) y escribir:

$$V(x) \simeq \frac{x^2}{2!} \left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)(0) \quad (\text{B.8})$$

Podemos entonces determinar si el punto de equilibrio $x = 0$ es de equilibrio estable o inestable examinando esta última ecuación. Si $x = 0$ es de equilibrio estable, entonces $V(x)$ debe ser mayor (más positivo) a cada lado de $x = 0$. Como x^2 es siempre positivo, las condiciones de equilibrio son:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)(0) > 0 & \quad \text{Equilibrio Estable} \\ \left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)(0) < 0 & \quad \text{Equilibrio Inestable} \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Si $(d^2V/dx^2)(0)$ es igual a cero, entonces es necesario analizar términos de orden mayor. 

Apéndice C

Análisis Cualitativo de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

En este apéndice recogemos los resultados de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales ordinarias más importantes para los fines de el presente trabajo . Como veremos, los teoremas y definiciones proporcionados por esta teoría nos permiten obtener valiosa información acerca del comportamiento de las soluciones de una ecuación diferencial o un sistema de ellas sin la necesidad de encontrar las soluciones explícitas. Nuestro tratamiento no pretende ser exhaustivo , de modo que evitaremos dar las demostraciones de los resultados presentados, remitiendo al lector a la bibliografía pertinente.(Véase [12] y [35]). A lo largo de este apéndice denotaremos por \vec{x} a los elementos de \mathbb{R}^n , además consideraremos que, si $\delta > 0$ y $\vec{s} \in \mathbb{R}^n$:

$$B_\delta(\vec{s}) := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : |\vec{x} - \vec{s}| < \delta\}$$

donde $|\vec{x}|$ denota la métrica cartesiana usual en \mathbb{R}^n , es decir:

$$|\vec{x}| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$$

C.1. Sistemas Lineales

En esta primera sección presentamos un breve estudio de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} \tag{C.1}$$

con condición inicial $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$, donde $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, A es una matriz $n \times n$ con coeficientes en \mathbb{R} y

$$\dot{\vec{x}} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}$$

Definimos la *imagen en el espacio fase* de un sistema de ecuaciones diferenciales como el que se da en (C.1), como el conjunto de curvas solución de dicho sistema en el espacio \mathbb{R}^n . El sistema dinámico definido por el sistema lineal (C.1) es la función $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por la solución $\vec{x}(t, \vec{x}(0))$.

Teorema. Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión finita n y m respectivamente, sobre el campo F . Definamos

$$L(V, W) := \{T : V \rightarrow W \text{ funciones lineales}\}$$

y $M_{m \times n}(F)$ el espacio de matrices de $m \times n$ con coeficientes en F . Entonces $M_{m \times n}(F)$ y $L(V, W)$ son isomorfos.

(Véase [36] Sec. 3.3). En vista de esto, de ahora en adelante, utilizaremos los conceptos de operador lineal T en \mathbb{R}^n y matriz A de $n \times n$ con coeficientes en \mathbb{R} de manera indistinta.

Un sistema como el presentado en (C.1) podrá reducirse a un sistema de ecuaciones diferenciales desacopladas mediante un cambio de base a través del siguiente teorema:

Teorema 1. Si los valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de una matriz A de $n \times n$ son reales y distintos, entonces el conjunto de vectores propios correspondientes $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ es una base de \mathbb{R}^n , la matriz $P = [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_n]$ cuyas columnas son los vectores propios \vec{v}_k es invertible y

$$B := P^{-1}AP = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$$

Se dice que dos matrices A y B de $n \times n$ son *similares* si existe una matriz Q de $n \times n$ tal que:

$$A = Q^{-1}BQ$$

Entonces B y A , como se definieron en el Teorema 1, son similares.

Definamos una transformación lineal de coordenadas:

$$\vec{y} = P^{-1}\vec{x}$$

donde P es la matriz invertible definida en el Teorema 1. Entonces:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= P\vec{y} \\ \dot{\vec{y}} &= P^{-1} \cdot \vec{x} = P^{-1}AP\vec{y} \end{aligned}$$

y, de acuerdo con el Teorema 1, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones desacopladas:

$$\dot{\vec{y}} = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]\vec{y}$$

cuya solución es:

$$\vec{y}(t) = \text{diag}[e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}]\vec{y}(0)$$

Como $\vec{y}(0) = P^{-1}\vec{x}(0)$ y $\vec{x}(t) = P\vec{y}(t)$, entonces la solución de (C.1) es

$$\vec{x}(t) = PE(t)P^{-1}\vec{x}(0) \tag{C.2}$$

donde $E(t)$ es la matriz diagonal $E(t) = \text{diag}[e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}]$.

Supongamos que la matriz A tiene k valores propios negativos: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ y $n - k$ valores propios positivos: $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$, y además que los vectores propios correspondientes $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ son distintos. Entonces los subespacios estable e inestable, E^s y E^u respectivamente, del sistema lineal

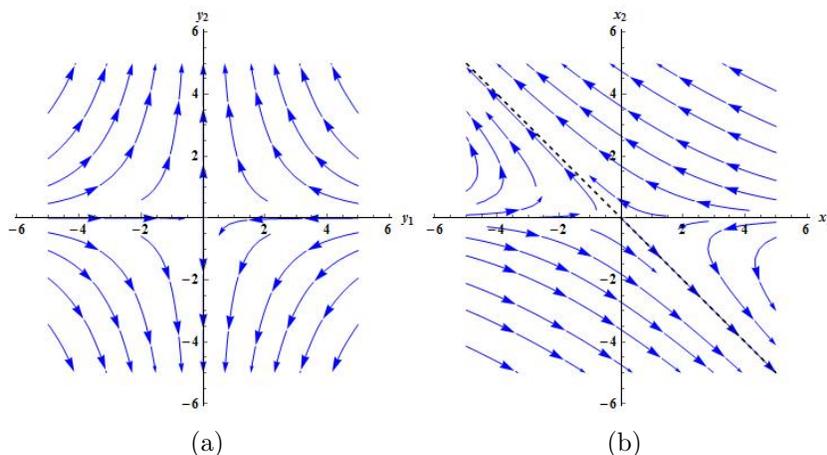


Figura C.1: Imagen en el espacio fase del sistema del Ejemplo 1

(C.1) son los subespacios vectoriales de \mathbb{R}^n generados por $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ y $\{\vec{v}_{k+1}, \dots, \vec{v}_n\}$, es decir (véase [36], Sec. 2.2):

$$\begin{aligned} E^s &= \text{Span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\} \\ E^u &= \text{Span}\{\vec{v}_{k+1}, \dots, \vec{v}_n\} \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Ejemplo 1. Consideremos el sistema lineal:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 - 3x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_2 \end{aligned}$$

El cual puede escribirse en la forma dada en (C.1) con

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Los valores propios de A son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 2$ y los correspondientes vectores propios son:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matriz P y su inversa están dados por:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces, bajo la transformación de coordenadas $\vec{y} = P^{-1}\vec{x}$, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones desacopladas:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -y_1 \\ \dot{y}_2 &= 2y_2 \end{aligned}$$

La imagen en el espacio fase del sistema $\vec{y} = P^{-1}\vec{x}$ se muestra en la Figura C.1(a) y su solución general es $y_1(t) = c_1 e^{-t}$, $y_2(t) = c_2 e^{2t}$. La dirección de las flechas indica la dirección de movimiento a lo largo de las curvas solución conforme el parámetro t se incrementa. La solución general $\vec{x}(t)$ del sistema original es:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1 e^{-t} + c_2 (e^{-t} + e^{2t}) \\ x_2(t) &= c_2 e^{2t} \end{aligned}$$

y la imagen en el espacio fase de este se muestra en C.1(b). Notemos que aquellas soluciones que comienzan sobre el eje x_1 se acercan al origen conforme $t \rightarrow +\infty$, mientras que aquellas soluciones que comienzan sobre la recta $x_2 = -x_1$ se alejan del origen conforme $t \rightarrow +\infty$. El subespacio estable es el conjunto de vectores de la forma $\alpha \vec{v}_1$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ y corresponde al eje x_1 , el subespacio inestable está dado por el conjunto de vectores $\beta \vec{v}_1$ con $\beta \in \mathbb{R}$ y corresponde a la recta negra punteada en la Figura C.1(b) cuya ecuación es $x_2 = -x_1$

Definición 1. Sea A una matriz $n \times n$. Entonces para $t \in \mathbb{R}$ definimos:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

siempre que dicha serie converja. La exponencial de un operador (matriz) tiene propiedades similares a la función exponencial en \mathbb{R} :

Proposición 1. Sean P y T transformaciones lineales en \mathbb{R}^n

a) Si $S = PTP^{-1}$, entonces $e^S = Pe^T P^{-1}$

b) Si S y P conmutan, es decir si $PS = SP$, entonces $e^{S+P} = e^S e^P$

c) La inversa de la transformación lineal e^S es $(e^S)^{-1} = e^{-S}$

d) Si

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

entonces

$$e^A = e^a \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}$$

e) Si

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

entonces

$$e^A = e^a \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La introducción de la exponencial de un operador nos permite establecer el teorema fundamental para sistemas lineales de ecuaciones diferenciales ordinarias, el cual dice así:

Teorema 2. Sea A una matriz $n \times n$. Dado $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, la solución del problema de valores iniciales:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}} &= A\vec{x} \\ \vec{x}(0) &= \vec{x}_0 \end{aligned} \tag{C.4}$$

existe en \mathbb{R}^n y es única. Dicha solución viene dada por:

$$\vec{x}(t) = e^{At} \vec{x}_0 \tag{C.5}$$

Si utilizamos el teorema de la forma canónica de Jordan (véase [12] sec. 1.8 o [36] sec. 10.9) podremos demostrar que dada A una matriz 2×2 , existe una matriz invertible P 2×2 tal que:

$$B := P^{-1}AP$$

tiene alguna de las siguientes formas:

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad (\text{C.6})$$

Por la Proposición 1, la matriz e^{At} estará dada por:

$$e^{At} = Pe^{Bt}P^{-1} \quad (\text{C.7})$$

y entonces, por el Teorema 1, encontrar la forma de la matriz e^{At} es equivalente a resolver el sistema lineal dado en (C.1).

Daremos ahora una descripción de las distintas imágenes en el espacio fase que son posibles para el sistema lineal dado en (C.1), con A una matriz 2×2 . Empezaremos describiendo las imágenes del espacio fase del sistema lineal:

$$\dot{\vec{y}} = B\vec{y} \quad (\text{C.8})$$

donde la matriz $B = P^{-1}AP$ tiene alguna de las formas dadas en (C.6). De esta manera la imagen en el espacio fase del sistema lineal dado en (C.1) se obtendrá a partir de la de (C.8) a través de una transformación lineal de coordenadas $\vec{x} = P\vec{y}$, como ocurrió en el Ejemplo 1.

Si

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad (\text{C.9})$$

de la Definición 1 y la Proposición 1 se sigue que la solución del problema de valores iniciales dado en (C.8) con $\vec{y}(0) = \vec{y}_0$ estará dada por:

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix} \vec{y}_0, \quad \vec{y}(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{y}_0 \quad \text{o} \quad \vec{y}(t) = e^{at} \begin{pmatrix} \cos(bt) & -\sin(bt) \\ \sin(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix} \vec{y}_0$$

respectivamente. Las distintas imágenes en el espacio fase que resultan de estas soluciones son las siguientes:

Caso I. $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ con $\lambda < 0 < \mu$

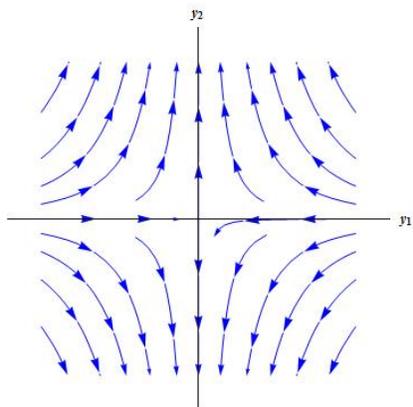


Figura C.2: Un punto de ensilladura en el origen

La imagen en el espacio fase del sistema lineal dada en (C.8) está dado en la Figura C.2. En este caso se dice que el sistema tiene un punto de ensilladura en el origen. Si $\mu < 0 < \lambda$, entonces las flechas en la Figura C.2 invertirán su dirección. Siempre que A tenga dos valores propios de signo opuesto, la imagen en el espacio fase del sistema lineal (C.1) se obtendrá a partir de la dada en la Figura C.2 a partir de una transformación lineal de coordenadas, y los correspondientes espacios estable e inestable de (C.1) estarán determinados por los vectores propios de A como en el Ejemplo 1. Las cuatro trayectorias distintas de cero que se acercan al origen conforme $t \rightarrow \pm\infty$ se llaman las *separatrices* del sistema.

Caso II. $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ con $\lambda \leq \mu < 0$ o $B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ con $\lambda < 0$

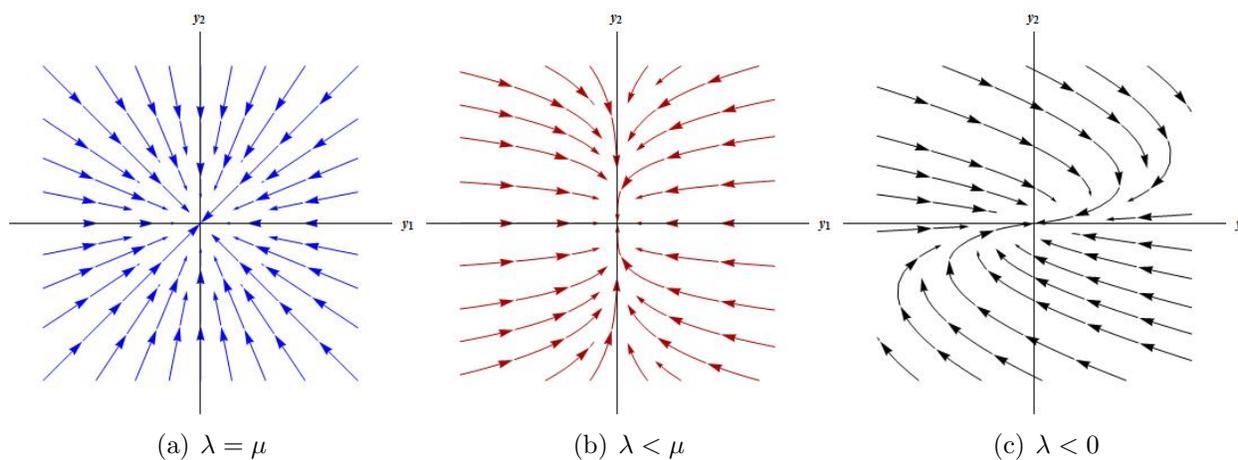


Figura C.3: Un nodo estable en el origen

Las distintas imágenes en el espacio fase se muestran en la Figura C.3. En cada uno de estos casos se dice que el origen es un *nodo estable*. Se llama un *nodo propio* si $\lambda = \mu$ y un *nodo impropio* en los otros dos casos. Nuevamente, si $\lambda \geq \mu > 0$ o si $\lambda > 0$, las flechas en la Figura C.4 invierten su dirección y en este caso se dice que el origen es un *nodo inestable*. Siempre que la matriz A del sistema lineal tenga dos valores propios del mismo signo, la imagen en el espacio fase del sistema (C.1) será linealmente equivalente a una de las imágenes mostradas en la Figura C.3. La estabilidad del nodo está determinada por el signo de los valores propios; estable si $\lambda \leq \mu < 0$ e inestable si $\lambda \geq \mu > 0$. Observa por favor que en todos los casos cada trayectoria se acerca al origen a lo largo

de una línea tangente bien definida $\theta = \theta_0$ conforme $t \rightarrow +\infty$.

Caso III. $B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ con $a < 0$

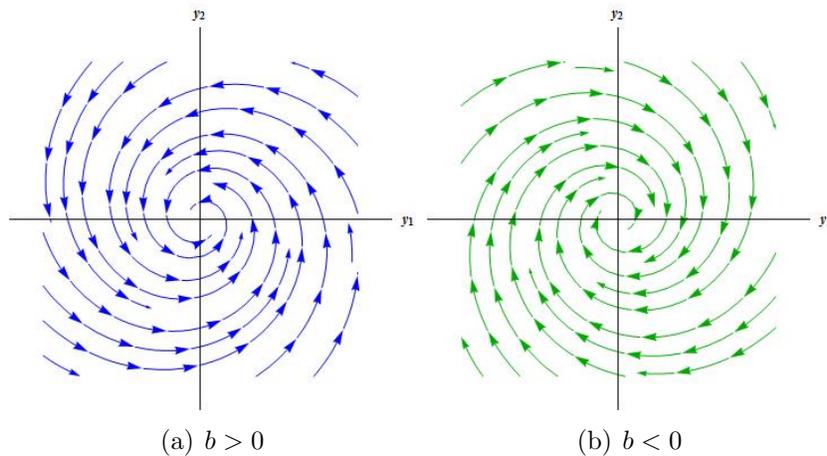


Figura C.4: Un foco (o espiral) estable en el origen

En este caso, la imagen en el espacio fase del sistema lineal dado en (C.8) esta dada por una de gráficas en la Figura C.4. En este caso se dice que el origen es un *foco o espiral estable*⁸. Si $a > 0$ las flechas invierten su dirección, de modo que las espirales se alejan del origen conforme $t \rightarrow +\infty$, en este caso se dice que el origen es un *foco o espiral inestable*⁹. Así pues, siempre que A tenga un par de valores propios complejos conjugados uno del otro, con parte real distinta de cero, la imagen del espacio fase del sistema (C.1) es linealmente equivalente a una de las mostradas en la Figura C.4. Notemos en este caso que si $\theta(t)$ es el ángulo que el vector $\vec{x}(t)$ hace con el eje x_1 , entonces se tendrá que $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \infty$ y además $\lim_{t \rightarrow \infty} |\vec{x}(t)| = 0$

Caso IV. $B = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$ La imagen en el espacio fase en este caso se muestra en la Figura C.5. En este caso se dice que el sistema tiene un *centro* en el origen. Siempre que A tenga un par de valores propios imaginarios puros conjugados uno del otro, la imagen en el espacio fase del sistema lineal (C.1) será linealmente equivalente a una de las mostradas en la Figura C.5. Notemos que las trayectorias dadas en C.5 se encuentran sobre círculos con $|\vec{x}(t)| = \text{constante}$. Las trayectorias del sistema lineal (C.1) se encontrarán todas sobre elipses.

⁸Al autor de esta tesis estas trayectorias le recuerdan a un agujero negro :D

⁹Al autor de esta tesis estas trayectorias le hacen recordar a un hipotético agujero blanco

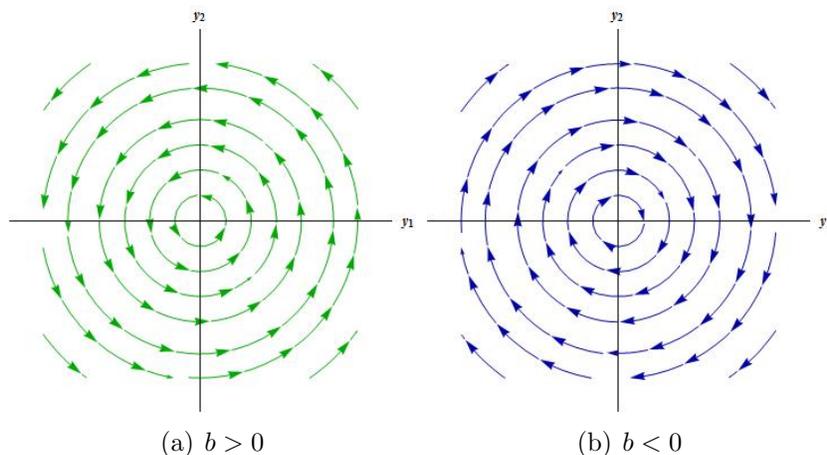


Figura C.5: Un centro en el origen

Caso V. $B = B_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ o $B = B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Si alguno de los vectores propios de A es igual a cero, es decir, si $\det A = 0$, entonces se dice que el origen es un *punto de equilibrio degenerado* de (C.1). La imágenes en el espacio fase de un sistema de esta naturaleza serán linealmente equivalentes a las mostradas en la Figura C.6

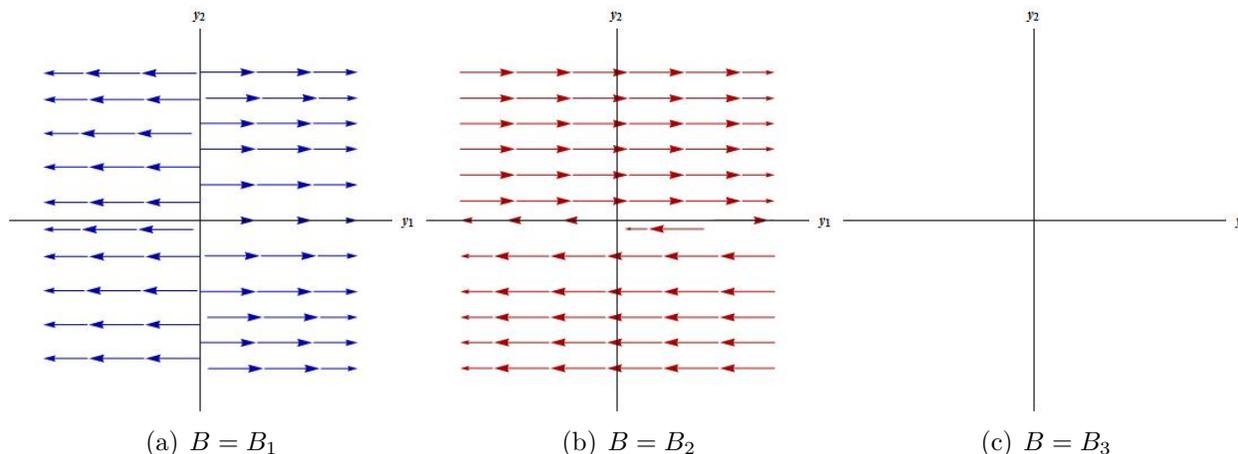


Figura C.6: Un punto de equilibrio degenerado en el origen

Definición 2. El sistema lineal dado en (C.1) se dice que tiene un punto de ensilladura, un nodo, un foco, un centro o un punto de equilibrio degenerado en el origen si su imagen en el espacio fase es linealmente equivalente a una de las imágenes en el espacio fase mostradas en las Figuras C.2, C.3, C.4, C.5 o C.6. Es decir, si la matriz A es similar a una de las matrices B dadas en (C.9)

Si $\det(A) \neq 0$, entonces existe un método sencillo para determinar si el sistema lineal dado por (C.1) tiene un punto de ensilladura, un nodo, un foco o un centro en el origen. Este método lo proporciona el siguiente teorema:

Teorema 3. Sean $d := \det(A)$ y $\tau := \text{Traza}(A)$ y consideremos el sistema lineal dado por:

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} \quad (1)$$

a) Si $d < 0$ entonces (1) tiene un punto de ensilladura en el origen

- b) Si $d > 0$ y $\tau^2 - 4d \geq 0$ entonces (1) tiene un nodo en el origen. El nodo es estable si $\tau < 0$ y es inestable si $\tau > 0$
- c) Si $d > 0$, $\tau^2 - 4d < 0$ y $\tau \neq 0$, entonces (1) tiene un foco en el origen. El foco es estable si $\tau < 0$ y es inestable si $\tau > 0$.
- d) Si $d > 0$ y $\tau = 0$ entonces (1) tiene un centro en el origen.

Definición 3. Un nodo estable o foco estable de (C.1) se llama un sumidero. Un Nodo o foco inestable se llama una fuente.

Finalizaremos esta sección definiendo la noción de flujo de un sistema de ecuaciones diferenciales y la noción de invariancia respecto al flujo.

Por el Teorema 2, la solución al problema de valores iniciales asociado a (C.1) está dada por:

$$\vec{x}(t) = e^{At}\vec{x}_0$$

Puede considerarse que la función $e^{At} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ describe el movimiento de distintos puntos \vec{x}_0 a lo largo de la trayectorias del sistema (C.1). esta función se denomina el *flujo del sistema lineal C.1*.

Proposición 2. El flujo e^{At} satisface las siguiente propiedades:

- I) $\phi_0(\vec{x}) = \vec{x}$
- II) $\phi_s(\phi_t(\vec{x})) = \phi_{s+t}(\vec{x})$ para todo $s, t \in \mathbb{R}$
- III) $\phi_{-t}(\phi_t(\vec{x})) = \phi_t(\phi_{-t}(\vec{x})) = \vec{x}$ para todo $t \in \mathbb{R}$

La proposición 2 es consecuencia de la Definición 1 y de la Proposición 1.

Definición 4. Si todos los valores propios de la matriz A tienen parte real distinta de cero, entonces el flujo $e^{At} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se llama un flujo hiperbólico y (C.1) se denomina un sistema lineal hiperbólico.

Definición 5. Un subespacio vectorial $E \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice que es invariante respecto al flujo $e^{At} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ si $e^{At}(E) \subseteq E$ para todo $t \in \mathbb{R}$

C.2. Sistemas no lineales.

En esta sección estudiaremos brevemente sistemas no lineales de ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\dot{\vec{x}} = \mathbf{f}(\vec{x}) \tag{C.10}$$

donde $\mathbf{f} : E \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y E es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n ¹⁰. En general no siempre es posible resolver analíticamente el sistema no lineal dado en (C.10), sin embargo, podemos obtener una gran cantidad de información cualitativa acerca del comportamiento local de la solución si utilizamos algunos de los resultados que presentaremos en esta sección. Como primer punto recordaremos el concepto de diferencial $D\mathbf{f}$ de una función $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (véase [32]). De ahora en adelante $C(E)$ denotará al conjunto de funciones continuas $F : E \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

¹⁰Para la definición de conjunto abierto véase [33]

C.2.1. Definiciones y Propiedades

Definición 6. La función $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable en $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ si existe una transformación lineal $D\mathbf{f}(\vec{x}_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que satisface:

$$\lim_{|\vec{h}| \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{f}(\vec{x}_0 + \vec{h}) - \mathbf{f}(\vec{x}_0) - D\mathbf{f}(\vec{x}_0)(\vec{h})|}{|\vec{h}|} = 0$$

La transformación lineal $D\mathbf{f}(\vec{x}_0)$ se llama la diferencial de \mathbf{f} en \vec{x}_0

Es posible demostrar que si \mathbf{f} es una función diferenciable, entonces la diferencial $D\mathbf{f}$ está dada por la matriz jacobiana $n \times n$

$$D\mathbf{f}(\vec{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x}_0) \end{bmatrix}$$

cuyas componentes son las derivadas parciales de las componentes de \mathbf{f} (véase [32] teorema 8.9 sec. 8.18). Denotaremos por $C^1(E)$ al conjunto de funciones $\mathbf{f} : E \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continuas, diferenciables y cuya diferencial $D\mathbf{f}$ es continua en E .

Definición 7. Supongamos que $\mathbf{f} \in C(E)$ donde E es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n .

a) $\vec{x}(t)$ es una solución del sistema de ecuaciones diferenciales (C.10) en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ si $\vec{x}(t)$ es diferenciable en I y para todo $t \in I$ se tiene que $\vec{x}(t) \in E$ y

$$\dot{\vec{x}} = \mathbf{f}(\vec{x}(t))$$

b) Dado $\vec{x}_0 \in E$, $\vec{x}(t)$ es una solución del problema de valor inicial:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \mathbf{f}(\vec{x}), \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$$

en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, si $t_0 \in I$, $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ y $\vec{x}(t)$ es una solución del sistema (C.10) en el intervalo I

De manera análoga al caso de los sistemas lineales, se puede establecer un teorema de existencia y unicidad para sistemas no lineales.

Teorema 4. Sean E subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y $\vec{x}_0 \in E$, y supongamos que $\mathbf{f} \in C^1(E)$. Entonces existe un $a > 0$ tal que el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}} &= \mathbf{f}(\vec{x}) \\ \vec{x}(0) &= \vec{x}_0 \end{aligned} \tag{C.11}$$

tiene una solución única $\vec{x}(t)$ en el intervalo $[-a, a]$

El Teorema 4 garantiza que el sistema no lineal (C.11) tiene una solución única en un intervalo $(-a, a)$, sin embargo, resulta natural preguntarnos si dicho intervalo es el subconjunto más “grande” en el cuál dicha solución puede estar definida. El siguiente teorema responde a esta interrogante.

Teorema 5. Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y supongamos que $\mathbf{f} \in C^1(E)$. Entonces para cada punto $\vec{x}_0 \in E$, existe un intervalo máximo J en el cual la solución del problema de valor inicial (C.11) existe y es única, es decir, si dicho problema de valor inicial tiene otra solución $\vec{y}(t)$ en otro intervalo I , entonces $I \subseteq J$ y $\vec{y}(t) = \vec{x}(t)$ para todo $t \in I$. Más aún, el intervalo máximo J es un subconjunto abierto (α, β) de \mathbb{R}

Definición 8. El intervalo (α, β) en el teorema 5 se llama el intervalo máximo (o maximal) de existencia de la solución $\vec{x}(t)$ del problema de valores iniciales (C.11) o simplemente el intervalo máximo de existencia del problema de valores iniciales (C.11)

Como los puntos extremos α y β del intervalo I pueden depender de \vec{x}_0 (véase [12] Ejercicio. 1 Sec. 2.5) de ahora en adelante denotaremos al intervalo máximo de existencia de (C.11) como $I(\vec{x}_0)$.

C.2.2. El Flujo definido por una Ecuación Diferencial

En la sección anterior definimos el flujo $e^{At} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ del sistema lineal:

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$$

el cual, para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ satisfacía las siguientes tres propiedades:

- I) $\phi_0(\vec{x}) = \vec{x}$
- II) $\phi_s(\phi_t(\vec{x})) = \phi_{s+t}(\vec{x})$ para todo $s, t \in \mathbb{R}$
- III) $\phi_{-t}(\phi_t(\vec{x})) = \phi_t(\phi_t(\vec{x})) = \vec{x}$ para todo $t \in \mathbb{R}$

Definición 9. Sean E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y $\mathbf{f} \in C^1(E)$. Para $\vec{x}_0 \in E$, sea $\phi(t, \vec{x}_0)$ la solución del problema de valores iniciales (C.11) definida en su intervalo de existencia máximo $I(\vec{x}_0)$. Para $t \in I(\vec{x}_0)$, la función $\phi_t : E \rightarrow E$ definida como:

$$\phi_t(\vec{x}_0) = \phi(t, \vec{x}_0)$$

se llama el flujo de la ecuación diferencial (C.10). A ϕ_t también se le llama el flujo del campo vectorial $\mathbf{f}(\vec{x})$.

Supongamos que el punto \vec{x}_0 permanece fijo, entonces la función $\phi(\cdot, \vec{x}_0) : I \rightarrow E$ define una trayectoria del sistema de ecuaciones dado en (C.10) que pasa a través del punto $\vec{x}_0 \in E$. A la curva en el espacio fase asociada con $\phi(\cdot, \vec{x}_0) : I \rightarrow E$ la denotaremos de ahora en adelante por Γ :

$$\Gamma_{\vec{x}_0} := \{\vec{x} \in E : \vec{x} = \phi(t, \vec{x}_0), \vec{x}_0 \in E, t \in \mathbb{R}\}$$

También nos referiremos a $\Gamma_{\vec{x}_0}$ como la trayectoria de (C.10) que pasa a través del punto \vec{x}_0 en el instante $t = 0$. Si el punto \vec{x}_0 no tiene un papel importante en la discusión, denotaremos la trayectoria simplemente por Γ .

Si imaginamos que la ecuación diferencial dada en (C.10) describe el movimiento de un fluido, entonces una trayectoria solución asociada a (C.10) describirá el movimiento de una sola partícula individual, mientras que el flujo ϕ asociado a dicha ecuación diferencial describirá el movimiento del fluido entero.

Dado $E \subseteq \mathbb{R}^n$, definimos el conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times E$ de la siguiente manera:

$$\Omega = \{(t, \vec{x}_0) \in \mathbb{R} \times E \mid t \in I(\vec{x}_0)\}$$

Teorema 6. Sean E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y $\mathbf{f} \in C^1(E)$.

a) Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{R} \times E$ y $\phi \in C(\Omega)$.

- b) Para todo $\vec{x}_0 \in E$, si $t \in I(\vec{x}_0)$ y $s \in I(\phi_t(\vec{x}_0))$ entonces $t + s \in I(\vec{x}_0)$ y $\phi_{s+t}(\vec{x}_0) = \phi_s(\phi_t(\vec{x}_0))$
- c) Si $(t, \vec{x}_0) \in \Omega$, entonces existe un conjunto abierto U que contiene a \vec{x}_0 tal que $\{t\} \times U \subseteq \Omega$. Se sigue entonces que el conjunto $V = \phi_t(U)$ es un subconjunto abierto contenido en E y que

$$\phi_{-t}(\phi_t(\vec{x})) = \vec{x}$$

para todo $\vec{x} \in U$ y

$$\phi_t(\phi_t(\vec{y})) = \vec{y}$$

para todo $\vec{y} \in V$.

Es decir, los flujos para sistemas no lineales también poseen las propiedades I – III.

Definición 10. Sean E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , $\mathbf{f} \in C^1(E)$ y $\phi_t : E \rightarrow E$ el flujo del sistema de ecuaciones diferenciales (C.10) definido para todo $t \in \mathbb{R}$. Se dice que:

- a) el conjunto $S \subseteq E$ es invariante respecto al flujo ϕ_t si $\phi_t(S) \subseteq S$ para todo $t \in \mathbb{R}$
- b) el conjunto $S \subseteq E$ es positivamente (o negativamente) invariante respecto al flujo ϕ_t si $\phi_t(S) \subseteq S$ para todo $t \geq 0$ (o $t \leq 0$).

Definición 11. Sean E y \mathbf{f} como en la Definición 10

- a) Un punto $\vec{p} \in E$ es un ω punto límite de la trayectoria $\phi(\cdot, \vec{x}_0)$ del sistema (C.10) si existe una sucesión $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números reales con $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$, tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n, \vec{x}) = \vec{p}$$

- b) Se dice que $\vec{q} \in E$ es un α punto límite de la trayectoria $\phi(\cdot, \vec{x}_0)$ del sistema (C.10) si existe una sucesión $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números reales con $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = -\infty$, tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n, \vec{x}) = \vec{q}$$

El conjunto de todos los ω puntos límite de una trayectoria Γ se denomina el ω conjunto límite de Γ y se denota por $\omega(\Gamma)$. El conjunto de todos los α puntos límite de una trayectoria Γ se denomina el α conjunto límite de Γ y se denota por $\alpha(\Gamma)$. El conjunto de todos los puntos límite de Γ , $\alpha(\Gamma) \cup \omega(\Gamma)$ se denomina el conjunto límite de Γ

Proposición 3. $\alpha(\Gamma)$ y $\omega(\Gamma)$ son conjuntos invariantes respecto al flujo ϕ_t de (C.10)

C.2.3. Linealización

Definición 12. Un punto $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ se dice que es un punto de equilibrio o punto crítico de (C.10) si $\mathbf{f}(\vec{x}_0) = 0$. Un punto de equilibrio \vec{x}_0 se dice que es un punto de equilibrio hiperbólico de (C.10) si ninguno de los valores propios de la matriz $D\mathbf{f}(\vec{x}_0)$ tiene parte real distinta de cero. El sistema lineal:

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$$

donde $A = D\mathbf{f}(\vec{x}_0)$ se llama la linealización de (C.10) en \vec{x}_0

Notemos que si \vec{x}_0 es un punto de equilibrio de (C.10) y $\phi_t : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ es el flujo del sistema de ecuaciones (C.10), entonces $\phi_t(\vec{x}_0) = \vec{x}_0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. En consecuencia, \vec{x}_0 recibe el nombre de *punto fijo del flujo* ϕ_t ; también se le llama *punto crítico* o *punto singular del campo vectorial* $\mathbf{f} : E \rightarrow \mathbb{R}^n$.

En la Sección C.1 realizamos una clasificación de los diversos comportamientos que podía tener la imagen en el espacio fase del sistema lineal (C.1):

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$$

donde $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, diciendo que, en el origen podía tener un centro, un foco o espiral, un nodo o un punto de ensilladura.

Supongamos que $\vec{x}_0 = 0$ es un punto de equilibrio del sistema (C.10), entonces $\mathbf{f}(0) = 0$ y utilizando el teorema de Taylor para campos vectoriales (véase [32] Sec. 2.10 y [12] Sec. 2.6):

$$\mathbf{f}(\vec{x}) = D\mathbf{f}(0)\vec{x} + \frac{1}{2}D^2\mathbf{f}(0)(\vec{x}, \vec{x})\dots$$

Esto significa que la función lineal $D\mathbf{f}(0)\vec{x}$ representa una buena primera aproximación a la función no lineal $\mathbf{f}(\vec{x})$ en puntos cercanos a $\vec{x} = 0$, con lo cual resulta razonable esperar que el comportamiento del sistema no lineal dado en (C.10) en puntos cercanos a $\vec{x} = 0$ se aproxime al comportamiento de su linealización en este mismo punto.

Clasificaremos ahora los distintos tipos de puntos de equilibrio que puede tener un sistema de ecuaciones no lineales en \mathbb{R}^2 . Para ello resulta conveniente introducir coordenadas polares (r, θ) y reescribir el sistema (C.10) en términos de dichas coordenadas. En esta sección tomaremos $x_1 := x$, $x_2 = y$, además consideraremos que $\vec{x} = (x, y)^T$, donde $(x, y)^T$ denota al transpuesto del vector columna $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, así mismo se tendrá también que $f_1(x, y) = P(x, y)$ y $f_2(x, y) = Q(x, y)$. El sistema no lineal (C.10) puede escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(x, y) \\ \dot{y} &= Q(x, y) \end{aligned} \tag{C.12}$$

y en coordenadas polares (r, θ) toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= P(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \cos(\theta) + Q(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \sin(\theta) \\ \dot{\theta} &= Q(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \cos(\theta) - P(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \sin(\theta) \end{aligned} \tag{C.13}$$

Escribir el sistema de ecuaciones diferenciales dado en (C.10) en coordenadas polares revelará la naturaleza de los distintos puntos de equilibrio que puede tener en el origen. El siguiente ejemplo muestra cómo sucede esto.

Ejemplo 2. *Consideremos el sistema:*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - x^3 - xy^2 \\ \dot{y} &= x - y^3 - x^2y \end{aligned}$$

En coordenadas polares, para $r > 0$, este sistema toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -r^3 \\ \dot{\theta} &= 1 \end{aligned}$$

de manera que la solución vendrá dada por: $r(t) = r_0(1 + 2r_0^2 t)^{-1/2}$ para $t > -1/(2r_0^2)$ y $\theta(t) = \theta_0 + t$. Observemos que $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = 0$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \infty$. La imagen en el espacio fase, en una vecindad del origen, viene dada por la Figura C.7. En este caso decimos que el origen es un foco estable del sistema no lineal.

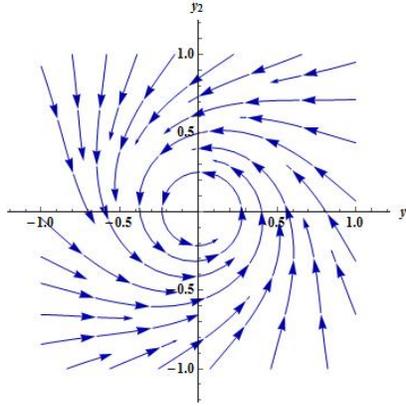


Figura C.7: Imagen en el espacio fase del sistema del Ejemplo 2

Ahora daremos definiciones precisas de los distintos tipos de puntos de equilibrio que el sistema no lineal (C.12) puede tener en \mathbb{R}^2 .

Definición 13. Un punto de equilibrio \vec{x}_0 del sistema no lineal (C.10) es un punto de equilibrio aislado si existe un subconjunto abierto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $\vec{x}_0 \in S$ y además no existe ningún otro punto de equilibrio que pertenezca a S .

En las siguientes definiciones asumiremos que $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ es un punto de equilibrio aislado del sistema no lineal (C.12) que ha sido trasladado al origen. Además $r(t, r_0, \theta_0)$ y $\theta(t, r_0, \theta_0)$ denotarán la solución del sistema no lineal (C.13) con $r(0) = r_0$ y $\theta(0) = \theta_0$

Definición 14. Se dice que el origen es un centro del sistema no lineal (C.10) si existe $\delta > 0$ tal que toda curva solución de (C.10) contenida en el conjunto $B_\delta(0) - \{0\}$ es una curva cerrada con 0 en su interior.

La notación $B_\delta(0) - \{0\}$ representa la diferencia entre los conjuntos $B_\delta(0)$ y $\{0\}$, es decir:

$$B_\delta(0) - \{0\} := \{\vec{x} \neq 0 : \vec{x} \in B_\delta(0)\}$$

Definición 15. El origen se denomina una espiral estable (o foco estable) del sistema (C.10) si existe un $\delta > 0$ tal que para $0 < r_0 < \delta$ y $\theta_0 \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t, r_0, \theta_0) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |\theta(t, r_0, \theta_0)| = \infty$$

Se dice que el origen es una espiral inestable (o foco inestable) si

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} r(t, r_0, \theta_0) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} |\theta(t, r_0, \theta_0)| = \infty$$

Cualquier trayectoria de (C.10) que satisfaga que $r(t) \rightarrow 0$ y $|\theta(t)| \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \pm\infty$ se dice que gira en espiral hacia el origen conforme $t \rightarrow \pm\infty$

Definición 16. Se dice que el origen es un foco central del sistema (C.10) si existe una sucesión de curvas solución Γ_n cerradas, con Γ_{n+1} en el interior de Γ_n tal que $\Gamma_n \rightarrow 0$ conforme $n \rightarrow \infty$ y tal que cada trayectoria entre Γ_n y Γ_{n+1} gira en espiral hacia Γ_n o Γ_{n+1} conforme $t \rightarrow \pm\infty$

Definición 17. Se dice que el origen es un nodo estable de (C.10) si existe $\delta > 0$ tal que para $0 < r_0 < \delta$ y $\theta_0 \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t, r_0, \theta_0) = 0$$

y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t, r_0, \theta_0)$$

existe, es decir, cada trayectoria en un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 alrededor del origen, pero que no contenga a 0, se acerca al origen a lo largo de una línea tangente bien definida conforme $t \rightarrow \infty$. Se dice que el origen es un nodo inestable si existe un $\delta > 0$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} r(t, r_0, \theta_0) = 0$$

y

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \theta(t, r_0, \theta_0)$$

existe para todo $r_0 \in (0, \delta)$ y $\theta_0 \in \mathbb{R}$. Se dice que el origen es un nodo propio de (C.10) si es un nodo, ya sea estable o inestable, y cada línea recta que pase a través del origen es tangente a alguna trayectoria de (C.10)

Definición 18. Se dice que el origen es un punto de ensilladura topológico de (C.10) si existen dos trayectorias Γ_1 y Γ_2 que tienden al origen cuando $t \rightarrow \infty$, y dos trayectorias Γ_3 y Γ_4 que tienden al origen cuando $t \rightarrow -\infty$, y si existe $\delta > 0$ tal que todas las demás trayectorias que comienzan en $B_\delta(0) - \{0\}$ dejan el conjunto $B_\delta(0)$ cuando $t \rightarrow \pm\infty$. Las trayectorias $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ reciben el nombre de separatrices.

Los siguientes teoremas nos permiten relacionar el comportamiento de los sistemas lineales y el de los sistemas no lineales. Dado E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 que contiene al origen, $C^2(E)$ denotará al conjunto de funciones $\mathbf{f} : E \rightarrow \mathbb{R}^2$ continuas para las cuales $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ tienen segundas derivadas parciales continuas en E .

Teorema 7. Sean E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 que contiene al origen y $\mathbf{f} : E \rightarrow \mathbb{R}^2$. Supongamos que el origen es un punto de equilibrio hiperbólico del sistema no lineal (C.10)

- Si $\mathbf{f} \in C^1(E)$ entonces el origen es un punto de ensilladura topológico de (C.10) si y sólo si el origen es un punto de ensilladura de la linealización de (C.10) en $\vec{x}_0 = 0$.
- Sea $\mathbf{f} \in C^2(E)$. Entonces el origen es un nodo estable (o inestable) del sistema no lineal (C.10) si y sólo si es un nodo estable (o inestable) de la linealización de (C.10) en $\vec{x}_0 = 0$. El origen es un foco estable (o inestable) del sistema no lineal (C.10) si y sólo si es un foco estable (o inestable) de la linealización de (C.10) en $\vec{x}_0 = 0$.

Teorema 8. Sean E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 que contiene al origen y $\mathbf{f} \in C^1(E)$.

- Supongamos que el origen es un centro de la linealización de (C.10) en $x_0 = 0$. Entonces el origen será, o bien un centro, un foco, o un foco central del sistema no lineal (C.10).
- Si el origen es un punto de equilibrio aislado de (C.10). Entonces o cada conjunto abierto que contiene al origen contendrá una curva, solución de (C.10), cerrada y con 0 en su interior, o bien existirá una trayectoria que tiende al origen cuando $t \rightarrow \pm\infty$.

C.2.4. Órbitas Periódicas y Ciclos Límite

En esta subsección discutiremos muy brevemente órbitas periódicas y ciclos límite del flujo $\phi(t, \vec{x})$ asociado al sistema no lineal (C.10). Recordemos que, si $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ y A y B son dos subconjuntos de \mathbb{R}^n , se definen (véase [38] Cap. 5, pág. 78):

$$d(\vec{x}, A) := \inf\{|\vec{x} - \vec{u}| : \vec{u} \in A\}$$

$$d(A, B) := \inf\{|\vec{u} - \vec{v}| : \vec{v} \in B, \vec{u} \in A\}$$

Definición 19. *Un ciclo u órbita periódica de (C.10) es cualquier curva solución de (C.10) cerrada que no es un punto de equilibrio de (C.10). Una órbita periódica Γ se dice que es estable si para cada $\epsilon > 0$ existe un abierto U que contiene a Γ , tal que para todo $\vec{x} \in U$ y $t \geq 0$ se tiene que $d(\phi(t, \vec{x}), \Gamma) < \epsilon$. Se dice que una órbita periódica Γ es inestable si no es estable; y se dice que Γ es asintóticamente estable si para todo punto \vec{x} en un abierto U que contengan a Γ se tiene que:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\phi(t, \vec{x}), \Gamma) = 0$$

Los ciclos del sistema (C.10) corresponden a soluciones periódicas de (C.10) ya que $\phi(\cdot, \vec{x}_0)$ define una curva solución de (C.10) que es cerrada si y sólo si para todo $t \in \mathbb{R}$ $\phi(t + T, \vec{x}_0) = \phi(t, \vec{x}_0)$ para algún $T > 0$. El mínimo valor de T para el cual esta igualdad es válida se llama el periodo de la órbita $\phi(\cdot, \vec{x}_0)$. Notemos que un centro, como fue definido en la Sección C.1, es un punto de equilibrio rodeado de una banda continua de ciclos. En general, el periodo T variará continuamente conforme nos movemos a través de curvas continuas que intersecten los distintos ciclos; sin embargo, en el caso de un centro del sistema lineal (C.1), el periodo es el mismo para cada órbita que rodee al origen.

En la siguiente definición consideraremos únicamente órbitas periódicas de un sistema no lineal (C.10) bidimensional, con $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$.

Definición 20. *Un ciclo límite Γ de un sistema no lineal (C.10) bidimensional es un ciclo de (C.10) si Γ es el α o el ω conjunto límite de alguna trayectoria de (C.10) diferente de Γ . Si un ciclo Γ es el ω conjunto límite de todas las trayectorias contenidas en algún conjunto abierto que contenga a Γ , entonces se dice que Γ es un ω ciclo límite; si Γ es el α conjunto límite de todas las trayectorias contenidas en algún conjunto abierto que contenga a Γ , entonces se dice que Γ es un α ciclo límite.*

El siguiente teorema es de fundamental importancia en el estudio cualitativo de sistemas de ecuaciones diferenciales en el plano pues permite clasificar todos los posibles comportamientos que dicho sistema puede tener en el espacio fase. Aquí enunciaremos una versión un tanto restringida de dicho teorema, útil para los propósitos de este trabajo de tesis

Recordemos que dado un subconjunto $F \subseteq \mathbb{R}^2$, una cubierta abierta de F es toda familia $\{V_s\}$ de subconjuntos abiertos de \mathbb{R}^2 , tal que $F \subseteq \bigcup_s V_s$. Y se dice que F es compacto si toda cubierta abierta de F tiene una subcubierta finita (véase [33] Sec. 26).

Teorema 9. (Teorema de Poincaré-Bendixson) *Supongamos que $\mathbf{f} \in C^1(E)$ conde E es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 , y que (C.10) tiene una curva solución Γ contenida en un subconjunto compacto F de E . Si $\omega(\Gamma)$ no contiene puntos de equilibrio de (C.10), entonces $\omega(\Gamma)$ es una órbita periódica de (C.10)*

Una demostración de este teorema, y algunas generalizaciones del mismo, pueden encontrarse en [12] Sec. 3.7.

Es importante notar que bajo las mismas hipótesis del Teorema 9, se obtienen las mismas conclusiones para el α conjunto límite de Γ (véase [12], Sec. 3.7).

Para determinar la imagen en el espacio fase de un sistema de ecuaciones diferenciales, es necesario determinar el número de ciclos límite alrededor de cada punto crítico del sistema. El siguiente teorema debido a Bendixson establece algunas condiciones bajo las cuales el sistema:

$$\dot{\vec{x}} = \mathbf{f}(\vec{x})$$

definido en \mathbb{R}^2 , con $f_1(x, y) = P(x, y)$ y $f_2(x, y) = Q(x, y)$, no tiene ciclos límite.

Teorema 10. (Criterio de Bendixson) *Sea $\mathbf{f} \in C^1(E)$ donde E es una región simplemente conexa en \mathbb{R}^2 . Si la divergencia del campo vectorial \mathbf{f} es distinta de cero y no cambia de signo en todo E , entonces (C.10) no tiene órbitas cerradas contenidas enteramente en E .*

Desafortunadamente no es posible, en general, determinar el número exacto de ciclos límite de un sistema bidimensional, por lo cual este problema permanece abierto (véase [12] Sec. 3.9).

C.2.5. El Teorema de la Variedad Estable

Finalizaremos este, por cierto algo extenso, apéndice enunciando el teorema de la variedad estable, el cual establece generalizaciones de los conceptos de subespacio estable y subespacio inestable definidos en (C.3) para sistemas lineales. El teorema de la variedad estable es uno de los resultados más importantes dentro de la teoría cualitativa de sistemas de ecuaciones diferenciales y su demostración puede encontrarse en [12] Sec. 2.7. Para la definición de variedad diferenciable véase [37] Sec. 1.1.

Teorema 11. Teorema de la Variedad Estable *Sean E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n que contiene al origen, $\mathbf{f} \in C^1(E)$ y ϕ_t el flujo del sistema no lineal dado en (C.10). Supongamos que $\mathbf{f}(0) = 0$ y que $D\mathbf{f}(0)$ tiene k valores propios cuya parte real es negativa y $n - k$ valores propios cuya parte real es positiva. Entonces existe una variedad diferenciable S de dimensión k tangente al subespacio estable E^s de la linealización de (C.10) en 0 tal que para todo $t \geq 0$, $\phi_t(S) \subseteq S$, y además para todo $\vec{x}_0 \in S$ se tiene que:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, \vec{x}_0) = 0$$

Además, existe una variedad diferenciable U de dimensión $n - k$ tangente al subespacio inestable E^u de la linealización de (C.10) en 0 tal que para todo $t \leq 0$, $\phi_t(U) \subseteq U$, y además para todo $\vec{x}_0 \in U$ se tiene que:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t, \vec{x}_0) = 0$$

A S se le llama *la variedad estable asociada al sistema no lineal* (C.10), mientras que U recibe el nombre de *variedad inestable asociada a* (C.10). 

Bibliografía

- [1] J. D. JACKSON, *Classical Electrodynamics*, 3a. edic. (John Wiley and Sons, New York, 1999)
- [2] D. J. GRIFFITHS, *Introduction to Electrodynamics*, 3a. edic. (Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1999)
- [3] H. GOLDSTEIN, *Classical Mechanics*, 2a. edic. (Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, 1980)
- [4] J. B. MARION Y S. T. THORNTON, *Classical Dynamics of Particles and Systems*, 3a. edic. (Harcourt Brace Jovanovich, San Diego, 1988)
- [5] J. V. JOSE Y E. J. SALETAN, *Classical Dynamics. A Contemporary Approach*, (Cambridge University Press, New York, 1998)
- [6] B. F. SCHUTZ, *A First Course in General Relativity*, 2a. edic. (Cambridge University Press, Cambridge, 2009)
- [7] CH. W. MISNER, K. S. THORNE Y J. A. WHEELER, *Gravitation*, (W. H. Freeman, San Francisco, 1973)
- [8] L. DE LA PEÑA, *Introducción a la Mecánica Cuántica*, 3a ed. correg. y aum. (UNAM : Fondo de Cultura Económica, México, D.F. 2006)
- [9] D. J. GRIFFITHS, *Introduction to Quantum Mechanics*, 2a. edic. (Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey 2005)
- [10] M. O. SCULLY Y M. S. ZUBAIRY, *Quantum Optics*, (Cambridge University Press, Cambridge 1997)
- [11] R. BURDEN, Y J. D. FAIRES, *Numerical Analysis*, 9a. edic. (Brooks/Cole, Cengage Learning, Boston, Massachusetts 2011)
- [12] L. PERKO, *Differential Equations and Dynamical Systems*, 3a. edic. (Springer Verlag ,New York 2001)
- [13] D. BLAIR, L. JU Y Y. MA, *Optomechanics for Gravitational Wave Detection — from resonant bars to next generation laser interferometers*, (Oxford University Press, Oxfordshire) Disponible en dcc.ligo.org/LIGO-P1600131/public
- [14] M. ASPELMEYER, T. J. KIPPENBERG, F. MARQUARDT, EDITORES, *Cavity optomechanics*, (Springer, Berlin 2014)

- [15] P. MEYSTRE, Y M. SARGENT III, *Elements of quantum optics*, 4a. edic. (Springer, Berlin 2007)
- [16] V. B. BRAGINSKY Y F. Y. KHALILI, *Quantum Measurement*, (Cambridge University Press, Cambridgeshire 1992)
- [17] L. O. CASTAÑOS Y R. WEDER, *Equations of a Moving Mirror and the Electromagnetic Field*, Phys. Scr. 90 068011(2015)
- [18] L. O. CASTAÑOS Y R. WEDER, *Classical Dynamics of a thin Moving Mirror Interacting with a Laser*, Phys. Rev. A. 89. 063807(2014)
- [19] P.N. LEBEDEV, *Experimental Examination of Light Pressure*, Ann. der Physik, 6, 433(1901)
Traducción del ruso por Soloviev V
- [20] E. F. NICHOLS Y G. F. HULL, *A Preliminary Communication on the Pressure of Heat and Light Radiation*, Phys. Rev. (Series I) 13, 307(1901)
- [21] F. E. IRONS, *Reappraising Einstein's 1909 application of fluctuation theory to Planckian radiation*, Am. J. Phys. 72, 1059 (2004)
- [22] D. J. WINELAND Y WAYNE M. ITANO, *Laser cooling of atoms*, Phys. Rev. A 20, 1521(1979)
- [23] T.W. HÄNSCH, Y A.L. SCHAWLOW, *Cooling of gases by laser radiation*, Optic Comm. 13, I (1974)
- [24] V. B. BRAGINSKY Y A. B. MANUKIN, *Ponderomotive Effects of Electromagnetic Radiation*, Sov. Phys. JETP 25, 4(1967)
- [25] C. M. CAVES, *Quantum-Mechanical Radiation-Pressure Fluctuations in an Interferometer*, Phys. Rev. Lett. 45, 75(1980)
- [26] M. ASPELMEYER, T. J. KIPPENBERG Y F. MARQUARDT, *Cavity Optomechanics*, Rev. Mod. Phys. 86, 1391 (2014)
- [27] A. ASHKIN, *Optical Trapping and Manipulation of Neutral Particles Using Lasers*, (World Scientific, Hackensack, New Jersey 2006)
- [28] G. ROUSSEAU, *Forty Years of Galilean Electromagnetism*, Eur. Phys. J. Plus (2013) 128: 81. Disponible en <https://doi.org/10.1140/epjp/i2013-13081-5>
- [29] R. SHANKAR, *Principles of Quantum Mechanics*, 2a. edic. (Springer Science+Business Media, New York, 1994)
- [30] R. M. WALD, *General Relativity*, (University of Chicago Press, Chicago, Illinois, 1984)
- [31] T. M. APOSTOL, *Calculus I*, 2a. edic. (Reverté, Barcelona: México 2009)
- [32] T. M. APOSTOL, *Calculus II*, 2a. edic. (Reverté, Barcelona: México 2010)
- [33] J. R. MUNKRES, *Topology*, 2a. edic. (Prentice Hall Upper Saddle River, New Jersey , 2000)
- [34] J. BOSSE, *Lorentz atom revisited by solving Abraham-Lorentz equation of motion*, ar-Xiv:1604.05688 [quant-ph]

- [35] F. BRAUNER Y J. A. NOHEL, *The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations*, (Dover Publications, New York, 1969)
- [36] H. A. RINCÓN MEJÍA, *Álgebra Lineal*, (UNAM, Facultad de Ciencias, Coordinación de Servicios Editoriales, México, D.F. 2001)
- [37] H. S. MORGADO Y O. A. PALMAS, *Geometría Riemanniana*, (UNAM, Facultad de Ciencias, Coordinación de Servicios Editoriales, México, D.F. 2007)
- [38] N. L. CAROTHERS, *Real Analysis*, (Cambridge University Press, New York, 2000)
- [39] L. D. LANDAU Y E. M. LIFSHITZ, *Teoría Clásica de los Campos*, 2a. edic. (Reverte, México 1973)
- [40] J. D. THOMPSON Y OTROS, *Strong dispersive coupling of a high finesse cavity to a micromechanical membrane*, Nature 452 06715
- [41] B. BASEIA Y H.M. NUSSENZVEIG, *Semiclassical Theory of Laser Transmission Loss*, Optica Acta: International Journal of Optics, 31:1, 39-62