



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTUDIO ECONOFÍSICO DE LA  
DISTRIBUCIÓN MUNDIAL DEL INGRESO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

PRESENTA:

Ricardo Cayetano Laurrabaquio Alvarado

TUTOR

Marcelo del Castillo Mussot





Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno  
Apellido paterno  
Apellido materno  
Nombre(s)  
Teléfono  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Carrera  
Número de cuenta

2. Datos del tutor  
Grado  
Nombre(s)  
Apellido paterno  
Apellido materno

3. Datos del sinodal 1  
Grado  
Nombre(s)  
Apellido paterno  
Apellido materno

4. Datos del sinodal 2  
Grado  
Nombre(s)  
Apellido paterno  
Apellido materno

5. Datos del sinodal 3  
Grado  
Nombre(s)  
Apellido paterno  
Apellido materno

6. Datos del sinodal 4  
Grado  
Nombre(s)  
Apellido paterno  
Apellido materno

7. Datos del trabajo escrito.  
Título  
Número de páginas  
Año

1. Datos del alumno  
Cayetano  
Laurrabaquio Alvarado  
Ricardo  
555973992  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Física  
309125602

2. Datos del tutor  
Dr  
Marcelo  
del Castillo  
Mussot

3. Datos del sinodal 1  
Dr  
Adonis Germinal  
Cocho  
Gil

4. Datos del sinodal 2  
Dr  
Pedro Eduardo  
Miramontes  
Vidal

5. Datos del sinodal 3  
Dr  
Irving Omar  
Morales  
Agiss

6. Datos del sinodal 4  
Dr  
Jorge Antonio  
Montemayor  
Aldrete

7. Datos del trabajo escrito.  
Estudio Econofísico de la Distribución Mundial del Ingreso  
78  
2018



*Dedicado a  
mi familia*



# Agradecimientos

Quiero agradecer antes que nada a mi familia, que siempre ha sido el pilar más importante de mi vida, he contado en todo momento con ellos para mi crecimiento como persona: a mi hermano, por haber estado toda mi vida junto a mí, enseñándome lo que de verdad importa en la vida, reír. A mi papá, por siempre apoyarme y haber dedicado su tiempo para formarme como persona y como estudiante, con sus juegos de verbos, por siempre inculcarme el apuntar arriba, por impulsarme a creer en lo que puedo hacer, siempre cuidando de mí, por traer el motociclismo a mi vida y finalmente a mi mamá, por haber guiado mi camino a la conclusión de este trabajo y como persona, por impulsarme a creer en mí, apoyarme tan incondicionalmente y la disciplina que sólo una madre puede cultivar, . A Princesa y Peluche por estar siempre para mí en los momentos que más lo necesité y traer tantos momentos felices a mi vida. Los cinco son lo más importante en mi vida, a los cinco, los amo mucho.

A mis tías y tíos, que ayudaron a mis padres en formarme, a mis primos, por alegrar la vida de todos los que le rodean incluyendo la mía, sin ellos no sería lo que hoy soy, gracias a todos ellos. A cada uno lo recuerdo y aprecio de manera importante en mi vida.

A mis amigos, a los cuáles he encontrado a montones en la vida, gracias a mis amigos de la prepa por haber y seguir compartiendo anécdotas tan especiales. A mis amigos y compañeros de la facultad, por haber estado ahí, viviendo lo mismo, de tan variadas carreras, biología, ciencias de la tierra, actuaría, matemáticas y en especial a los de física, por haber vivido éxitos y fracasos juntos, como sólo un verdadero amigo podría compartir.

A las personas que me acompañan día a día, aquellas que hacen extraordinario lo ordinario, a ellas, gracias por existir.

Quiero dedicar este trabajo también a el país que confió en mí al pagar mi educación, desde preescolar, hasta el día de hoy en la presentación de mi grado profesional.

A mis profesores, por transmitirme el hermoso lenguaje de la naturaleza. A mi tutor el doctor Marcelo por su incondicional apoyo en este trabajo.

Finalmente a la física, gracias por todo.

Por mi raza hablará el espíritu.



# Índice general

Capítulos	Página
<b>Agradecimientos</b>	<b>III</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>VI</b>
<b>Índice de tablas</b>	<b>VIII</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
Termodinámica . . . . .	2
<b>Econofísica</b>	<b>7</b>
Econofísica como rama de la física . . . . .	7
Penn World Tables . . . . .	13
<b>Distribuciones</b>	<b>15</b>
Leyes de Pareto y leyes exponenciales . . . . .	15
Log-Normal . . . . .	16
Gama . . . . .	16
Beta discreta . . . . .	17
Multimodalidad . . . . .	18
Leyes de Potencia falsas por mala visualización de datos . . . . .	20
<b>Metodología</b>	<b>23</b>
Obtención de datos . . . . .	23
Bases de datos . . . . .	27
Ajuste de datos . . . . .	28
Ajustes fallidos . . . . .	29
<b>Resultados</b>	<b>31</b>
Resultados BG-Pareto . . . . .	31
Resultados muestra . . . . .	32
Dólares PPP de 1990 . . . . .	35
1820 . . . . .	35
1929 . . . . .	36
1950 . . . . .	37

1960 . . . . .	38
1970 . . . . .	39
1980 . . . . .	40
2000 . . . . .	41
Dóles PPP de 1996 . . . . .	42
1970 . . . . .	42
1980 . . . . .	43
1990 . . . . .	44
1998 . . . . .	45
Dóles PPP de 2005 . . . . .	46
1988 . . . . .	46
1993 . . . . .	47
1998 . . . . .	48
2003 . . . . .	49
2008 . . . . .	50
Parámetros de ajuste . . . . .	50
<b>Conclusiones</b>	<b>53</b>
<b>Código</b>	<b>57</b>
Código implementado . . . . .	57
<b>Índice alfabético</b>	<b>61</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>63</b>

# Índice de figuras

1.	Gama diferencias . . . . .	13
2.	Diferencias PPP . . . . .	14
3.	Falacias leyes de potencias . . . . .	21
4.	Error en WebPlot . . . . .	26
5.	Interfaz en WebPlot . . . . .	26
6.	Muestra de primeros resultados descartados . . . . .	31
7.	Muestra del análisis completo . . . . .	33
8.	Ajuste de distribución beta discreta en 1820, en dólares PPP de 1990 . . . . .	35
9.	Ajuste de distribución bigama en 1820, en dólares PPP de 1990 . . . . .	35
10.	Ajuste de distribución beta discreta en 1929, en dólares PPP de 1990 . . . . .	36
11.	Ajuste de distribución bigama en 1929, en dólares PPP de 1990 . . . . .	36
12.	Ajuste de distribución beta discreta en 1950, en dólares PPP de 1990 . . . . .	37
13.	Ajuste de distribución bigama en 1950, en dólares PPP de 1990 . . . . .	37
14.	Ajuste de distribución beta discreta en 1960, en dólares PPP de 1990 . . . . .	38
15.	Ajuste de distribución bigama en 1960, en dólares PPP de 1990 . . . . .	38
16.	Ajuste de distribución beta discreta en 1970, en dólares PPP de 1990 . . . . .	39
17.	Ajuste de distribución bigama en 1970, en dólares PPP de 1990 . . . . .	39
18.	Ajuste de distribución beta discreta en 1980, en dólares PPP de 1990 . . . . .	40
19.	Ajuste de distribución bigama en 1980, en dólares PPP de 1990 . . . . .	40
20.	Ajuste de distribución beta discreta en 2000, en dólares PPP de 1990 . . . . .	41
21.	Ajuste de distribución bigama en 2000, en dólares PPP de 1990 . . . . .	41
22.	Ajuste de distribución beta discreta en 1970, en dólares PPP de 1996 . . . . .	42
23.	Ajuste de distribución bigama en 1970, en dólares PPP de 1996 . . . . .	42
24.	Ajuste de distribución beta discreta en 1980, en dólares PPP de 1996 . . . . .	43
25.	Ajuste de distribución bigama en 1980, en dólares PPP de 1996 . . . . .	43
26.	Ajuste de distribución beta discreta en 1990, en dólares PPP de 1996 . . . . .	44
27.	Ajuste de distribución bigama en 1990, en dólares PPP de 1996 . . . . .	44
28.	Ajuste de distribución beta discreta en 1998, en dólares PPP de 1996 . . . . .	45
29.	Ajuste de distribución bigama en 1998, en dólares PPP de 1996 . . . . .	45
30.	Ajuste de distribución beta discreta en 1988, en dólares PPP de 2005 . . . . .	46
31.	Ajuste de distribución bigama en 1988, en dólares PPP de 2005 . . . . .	46

32.	Ajuste de distribución beta discreta en 1993, en dólares PPP de 2005 . . . . .	47
33.	Ajuste de distribución bigama en 1993, en dólares PPP de 2005 . . . . .	47
34.	Ajuste de distribución beta discreta en 1998, en dólares PPP de 2005 . . . . .	48
35.	Ajuste de distribución bigama en 1998, en dólares PPP de 2005 . . . . .	48
36.	Ajuste de distribución beta discreta en 2003, en dólares PPP de 2005 . . . . .	49
37.	Ajuste de distribución bigama en 2003, en dólares PPP de 2005 . . . . .	49
38.	Ajuste de distribución beta discreta en 2008, en dólares PPP de 2005 . . . . .	50
39.	Ajuste de distribución bigama en 2008, en dólares PPP de 2005 . . . . .	50

## Índice de tablas

1.	Parámetros para construcción de los ajustes de la figura 7 . . . . .	34
2.	Parámetros de construcción de los ajustes . . . . .	51

# Introducción

*Los límites de mi lenguaje significan los límites de mi mundo.  
Ludwig Wittgenstein*

Muy recientemente (considerando el tiempo de existencia de otras ramas de la Física), se han venido desarrollando dos nuevas ramas importantes de la Física, relacionadas con disciplinas como Economía, Sociología, Historia, entre otras, comúnmente llamadas Econofísica o Sociofísica, esto dependiendo las problemáticas que ataquen. Si bien, físicos con anterioridad habían utilizado herramientas de su campo de estudio para tratar de predecir ciertos fenómenos sociales y económicos [40], éstos, lo hacían justo desde el terreno de las matemáticas, utilizando herramientas tales como la probabilidad, estadística, teoría de juegos, teoría de gráficas, entre otras, que bien han probado su poder de predicción o análisis.

Fue en los años recientes que varios físicos preocupados por el desempleo que se vivía en aquella época, comenzaron a ver las similitudes que ciertos sistemas físicos (sistemas de partículas, sistemas termodinámicos, sistemas climatológicos) tenían con los sistemas financieros, como los de las bolsas de valores, en las que los valores que ahí se ofertan tienen como variable su precio, dichas variable suele ser como se dice en un lenguaje financiero muy volátil, al igual que el valor que puede tener la velocidad o la energía de alguna partícula confinada a un sistema y sujeta a colisiones múltiples al azar. Lo realmente curioso de este azar es que produce un comportamiento predecible y bien estudiado.

Dentro de estos temas se comenzaron a usar series de tiempo y análisis de distribuciones como en Física se trataría las distribuciones de la energía total de un sistema. El inconveniente de este tipo de símil en primera estancia radica en que la cantidad de energía se supone constante desde un principio, a diferencia del valor de las acciones o el dinero en algún sistema económico, por lo que es indispensable tener en mente que para una aproximación más justa de la realidad se tendrían que usar herramientas de Física fuera del equilibrio, en la cual nos encontramos muy distantes de las bien fundamentada y comprobada Física de sistemas en equilibrio. Por lo cual los sistemas económicos se considerarán sistemas estáticos, en el sentido en que se tomará un intervalo de tiempo en la evolución de este fenómeno, como el representativo de todo el sistema en el que el dinero se conserva, es decir la producción o destrucción de éste, ocurre a un tiempo mucho menor al tiempo de intercambio por elementos del sistema.

La Física (como muchas otras disciplinas), busca encontrar respuestas a estos problemas fuera del equilibrio por medio de herramientas de la reciente disciplina de ciencias de la complejidad. En dicha ciencia, se trabaja con sistemas con respuestas no lineales a estímulos externos que provocan normalmente reacciones que llevan a la autoorganización de éstos, algunos ejemplos de estos por sólo mencionar algunos son; sistemas ecológicos, físicos, literarios, biológicos, químicos y lo que es de interés para este trabajo los sistemas sociales y económicos, entre muchos otros ejemplos.

La pregunta que nace de esta cuestión es, si los sistemas complejos están contemplados dentro de la Econofísica y la Sociofísica, a lo que respondería que son ramas distantes tal vez en definición, pero cercanas en enfoques y utilización de herramientas análogas para la resolución de los problemas que se atacan. En este trabajo se usan herramientas y conceptos de la mecánica estadística para atacar el problema de saber la distribución mundial del ingreso, teniendo en mente los peligros que resulten de la simplificación de un sistema tan complejo como este a un sistema “cerrado” (No hay intercambio de energía con el exterior del sistema), ya que bien se sabe que el dinero al este representar una deuda, no siempre tiene el mismo valor, por lo que todo calculo y estadística tendrá que ser normalizado a un valor que si bien será arbitrario, hay que recordar que la asignación de las medidas que utilizamos en la actualidad igualmente son arbitrarias o no usan unidades naturales como los son las unidades de Planck, definidas a través de las constantes universales;  $C$  la velocidad de la luz en el vacío,  $G$  constante universal de gravitación y  $h$  la constante de Planck<sup>1</sup>.

En esta tesis se busca usar un valor lo más independiente posible y en cualquier otro caso se señalará la necesidad (o decisión) de usar ese valor y no otro en caso de necesitarse. Para completar dicho propósito, se recurre al uso de valores de los ingresos en dólares PPA (paridad del poder adquisitivo o PPP por sus siglas en inglés que es la que se usará de aquí en adelante) definidos a través de de las Penn World Tables, que a su vez están definidos por medio del IPC, respaldada por el Banco Mundial, cuya definición, manejo y justificación se dará más adelante.

## Termodinámica

La revolución industrial jugó un papel muy importante para la Física del siglo XVIII, ya que durante este periodo de tiempo se impulsó en gran medida el estudio teórico y experimental a uno de los grandes pilares de la Física, la termodinámica . Y es que gracias a una fuerte industria que demandaba mejores procesos y por ende más eficientes y mejores máquinas, con el objetivo de cumplir las altas demandas que presentaba la población, físicos como Carnot, Boltzmann, Maxwell, entre otros, desarrollaron poco a poco la idea que ahora se nos enseña de manera natural que cantidades como la temperatura, presión y volumen (cantidades macroscópicas) están relacionadas con el interactuar de millones y millones de partículas que conforman el cuerpo y

---

<sup>1</sup>Siendo conscientes de que esto no podrá ser logrado por la econofísica, pues no existe un sistema “natural” por así decirlo, que permanezca invariante, independiente del espacio y tiempo

que éste, en el mundo microscópico nunca estará en equilibrio (ya que siempre en el mundo microscópico el átomo no puede estar en completo estado de inmovilidad).

Es precisamente la idea del equilibrio lo que nos permite hacer estas comparaciones entre Física y Finanzas ya que a nivel microscópico las pequeñas transacciones entre agentes económicos (las partículas en el mundo de la Física) es lo que lleva a un “equilibrio macroscópico” en los valores de los instrumentos financieros como bonos, swaps, PIB, futuros entre otros. En el mundo de la Física, el sistema se auto-regula y distribuye su energía entre los componentes del mismo de tal manera que grandes físicos nos han enseñado a predecir. Estas distribuciones pueden ser dependiendo del espacio fase que se esté analizando de energía, de velocidades, de presión, entre otras variables físicas.

Uno de los conceptos que nos ayuda a medir justamente este equilibrio del sistema es llamada entropía y establece lo siguiente:

$$S = k_B \ln(W) \quad (1)$$

Donde  $S$  es la entropía,  $k_B$  la constante de Boltzmann y  $W$  el número de estados posibles en los que un sistema se puede encontrar.

De la ecuación anterior es apreciable un concepto importante para el entendimiento de la termodinámica y éste es el de estado. En Física un estado representa la descripción de las características que un ente componente del sistema puede tener. Hecho que de manera rápida nos induce a pensar en un símil en la economía, en que un estado puede ser el valor que una acción puede tener y así con el concepto de entropía saber que tantos estados nuestro sistema, ya sea financiero o físico puede tomar. Usaré el hecho de que un estado puede ser representado por un vector de  $n$  entradas, en la que cada entrada puede variar de acuerdo al espacio fase que se analice. Las posibles combinaciones de las entradas del vector son los que reciben el nombre de estado. La interacción del sistema o vector, se llevará a cabo por medio de una matriz de transformación, que en su interior contendrá las reglas por las cuales un estado puede ser llevado a otro dentro del sistema. Este tipo de razonamiento ha tomado gran aceptación entre los economistas, que ahora en lugar de estudiar por separado las disciplinas de microeconomía y macroeconomía, se trata de modelar las interacciones de múltiples agentes microeconómicos y a partir de reglas impuestas al sistema, predecir el comportamiento del sistema macroeconómico, razonamiento calcado de la física estadística, y que, al parecer, está dando excelentes resultados<sup>2</sup>.

Clausius, apoyado del desarrollo ya maduro de la teoría cinética de los gases como menciona [26], madura la idea del movimiento de las partículas en forma aleatoria, pero dominada por las características del sistema, tales como; volumen, presión y temperatura, dando así paso a lo que se conoce como camino libre medio, concepto de

---

<sup>2</sup>Ha dado tan buenos resultados este tipo de relación de distintas áreas que hay programas de posgrado con título en econofísica por ejemplo.

vital importancia para la mecánica estadística, que incluso Gibbs, llamaría a Clausius el padre de esta disciplina por ello.

Fue para el año de 1860 que Maxwell, contribuiría a con su llama famosa distribución de velocidades de partículas en un sistema, inspirado por la ya muy utilizada distribución Gaussiana, una distribución que, para existir, requiere que una vez alcanzado el equilibrio de las velocidades, el sistema no cambiará debido a colisiones de partículas dentro del sistema.

Del estudio de dinámica de los gases, se migró al razonamiento de la teoría de ensambles. Pathria en [26], explica que la manera de proceder en esta teoría es; pensar en que el estado dinámico del sistema, está caracterizado por una coordenada generalizada  $q_i$ , su correspondiente momento generalizado  $p_i$ , ambos inmersos en un espacio fase generalizado por medio de una función  $G$  o punto fase,  $G(q_i, p_i)$ . La evolución de este sistema avanza, de acuerdo a las ecuaciones de movimiento correspondientes, como un Hamiltoniano por ejemplo.

El concepto de ensamble, se adopta al considerar que se tiene un número infinito de copias del sistema a analizar, con las mismas condiciones de restricción (ecuaciones de movimiento, tiempo de corrida, condiciones de frontera, etc.) y se deja evolucionar los infinitos sistemas para analizar las trayectorias en el espacio fase, de los puntos fase, con esto se logra el nacimiento de la mecánica estadística, cuyas herramientas y modo de pensar uso para analizar los agentes económicos, como si éstos, fueran dichas partículas. Este razonamiento, de comparar partículas físicas con agentes económicos, fue ya propuesto con excelentes resultados por Yakovenko [9].

Dentro de la teoría de ensambles, se define la función de densidad  $\rho$ , con la cuál, se puede identificar cuando un sistema se encuentra en equilibrio con una distribución estacionaria, pues ésta cumplirá;  $\partial\rho/\partial t = 0$ , con  $\rho(q_i, p_i; t)$  y  $q_i, p_i$  vectores. Maxwell y Boltzmann, intuyeron que la función  $\rho$ , depende sólo de la energía del sistema  $E$ .

Esto, ayudó a una mayor aceptación de la teoría, pues con esta inclusión, se tiene al teorema del ergódico como caso particular y no como base. El ergódico, supone que después de un tiempo infinito, no importando las condiciones iniciales del sistema, en el espacio fase, la trayectoria compuesta por los puntos fase, llenarán dicho espacio, es decir, el sistema, pasará o visitará por todos los estados posibles o alcanzables con su energía al menos una vez.

Con la aparición de los ensambles, se conectó de manera exitosa al mundo microscópico (las partículas del sistema), con la termodinámica (el cuerpo macroscópico), siendo las medidas conocidas de la termodinámica como presión, volumen, y temperatura por ejemplo, valores promedio o valores esperados del actuar de miles y miles de partículas interactuando en el mundo microscópico, con lo cual, el trabajo de Gibbs conectó estos dos antes distantes mundos dando una estructura mecánica al sistema,

proponiendo que la dinámica de movimiento se obedece por la hasta entonces ya conocida mecánica Lagrangiana y Hamiltoniana.

Para comenzar el desarrollo del concepto de entropía, imaginamos un sistema de  $N$  partículas idénticas almacenadas en un espacio en el universo de volumen  $V$ . El autor de [26], señala bien que  $N$  debe de ser del orden de  $10^{23}$ , para tener lo que se llama límite termodinámico,  $N \rightarrow \infty, V \rightarrow \infty$ , con lo cual se tendrá un nuevo concepto llamado densidad de partículas, cuyo concepto es completamente análogo al de densidad  $\rho$  con la masa y volumen. La densidad de partículas es llamada  $n$  y se define como  $n = N/V$ , con lo cual se define igual el concepto de propiedades intensivas y extensivas, siendo las últimas aquellas que son proporcionales al tamaño del sistema. Las primeras por otro lado no dependerán de éste.

Hay que recordar que en la Física contamos con la máxima de que la energía se conserva, nunca se pierde o se crea, por lo cual es lógico pensar que la suma de las energías de cada componente del sistema dará como resultado la energía total de éste. De igual forma, un estado físico es posible si se cumplen dos condiciones, conservación de la energía, la primera ley de la Termodinámica y segundo, que la entropía del sistema siempre aumente o a lo sumo permanezca igual, pero nunca disminuir, esto es la segunda ley de la termodinámica. De igual forma, se verá que un sistema económico teórico, deberá cumplir con la primera y segunda leyes de la termodinámica "económica"; conservación del ingreso, riqueza o dinero (energía), y el valor igual o mayor a cero de la entropía del sistema.



# Econofísica

## Econofísica como rama de la física

Uno de los principales problemas de la econofísica es el hecho de que no pueden llevarse a cabo experimentos para reproducir sus resultados, ya que el objeto de estudio nunca estará en las mismas condiciones iniciales. Es decir, un sistema económico real nunca se encontrará en las mismas condiciones iniciales por más que éste se intente manipular o afectar para llevar a cabo dicho objetivo. Lo más que se tendrá son condiciones similares y el tiempo para conseguir las pueden ser años o nunca llegar.

Por esta razón de no reproducibilidad de resultados, podría llegar a pensarse a la econofísica como pseudo ciencia. Sin embargo, hay que recordar que disciplinas como la astrofísica o meteorología presentan el mismo problema de reproducibilidad de resultados. Para ello, se hace uso de simulaciones computacionales y tratamiento estadístico y probabilístico de los datos, para con ello darle mayor certidumbre y confianza a las predicciones. Es justo como se procede en este trabajo<sup>3</sup>.

Como ya he señalado en la sección de Física es necesario encontrar una medida lo más estándar en economía como en la Física alguien buscaría alguna medida del sistema internacional de medidas para registrar el fenómeno estudiado a través del Newton para la fuerza, la candela para la intensidad lumínica, el gramo para unidades de masa y un gran etcétera.

Dada la naturaleza de lo que conocemos como dinero y su muy variable cambio de valor, se necesita una unidad que sea lo más invariable posible a través del tiempo y región. Estas ideas llevaron a la consolidación de lo que en Economía se conoce como Tablas de Penn, creadas desde el año de 1950 [16].

Este tipo de tablas es lo más cercano a lo que tenemos a una unidad estándar de dinero. Antes de continuar, será de gran ayuda definir lo que se entiende en la tesis por dinero, ingreso y riqueza, para dicha definición, partimos de la definición de la RAE.

---

<sup>3</sup>Teniendo en cuenta claro los peligros que conlleva el comparar ambas ramas de la bien desarrollada astrofísica, aquí sólo lo menciono a manera de símil

Dinero , del latín denarius es un medio de cambio o de pago, de acuerdo con la RAE, si bien para los economistas; representa una mercancía, una deuda para ser más específicos. Dicha deuda es respaldada por los gobiernos con sus reservas (aunque existen en la actualidad criptomonedas, cuyo respaldo se hace a través de una red de usuarios de la misma). El dinero o la deuda, circula de un agente económico a otro al ocurrir una interacción entre ellos. De manera análoga a la que una partícula de gas ideal transfiriera su energía con otra partícula del sistema, por medio de una interacción entre ellos (choque elástico, por ejemplo).

Al igual que una partícula en un sistema físico, representa la abstracción y simplificación de un objeto de la realidad”, capaz de almacenar energía y transmitirla con otra partícula del sistema por medio de cierta interacción, se pensará en las “partículas” del sistema a los llamados agentes económicos , siendo éstos, aquellos elementos con la capacidad de almacenar dinero (energía) y transmitirla con otro agente económico interaccionando uno con el otro.

La riqueza por otra parte es definida de acuerdo con [6] como aquellos objetos o cosas que posee un agente económico y además tiene valor monetario o de cambio.

El ingreso de acuerdo con [5], es la suma de todos los salarios, ganancias, rentas, que se genere por interacción con el sistema en cierto periodo de tiempo, es decir, el ingreso es un tipo de cantidad que puede ser medido en función del dinero por unidad de tiempo.

La forma en que se distribuye el dinero por unidad de tiempo entre los agentes económicos, es decir el ingreso. Ha sido un misterio para todo tipo de profesionales de todos los tiempos; filósofos, políticos, economistas, matemáticos, historiadores, antropólogos, físicos, entre otros. Por el impacto que la distribución del ingreso en la sociedad (sistema económico) genera.

Y es que la desigualdad entre aquellos agentes económicos (empresas, personas, países, ciudades, etc.) puede causar revoluciones, independencias, guerras que cambian drásticamente la futura repartición del ingreso.

Desde que se comenzó a estudiar el fenómeno con el primer intento de Pareto [24] con la comunidad europea, quién propuso una distribución similar a lo que hoy conocemos como ley de potencias. Su trabajo, pionero para el año 1897, fue corregido por Gibrat quien, en 1931, descubrió que sólo las personas con más altos ingresos comparados con los del resto de la población seguían dicha tendencia. Y la sección de agentes con menos ingresos debía seguir otro tipo de distribución o tendencia.

El reto mayor ha sido desde entonces encontrar una distribución que ajuste de manera adecuada a la parte de ingresos altos como a los de la parte baja. Muy parecido a lo que en Física se conoció como catástrofe ultravioleta y fue directriz para los experi-

mentos que verían nacer a la mecánica cuántica.

Lo que se tiene claro es que se presentan dos clases muy bien definidas en los datos recabados por distintos investigadores de distintas disciplinas. La naturaleza y origen de dicho comportamiento es aún desconocida. Aun así, casi todos los estudiosos del tema reportan la cola de distribución siguiendo una ley de Pareto [6].

La parte de ingresos "bajos" es un tema aún de discusión y en el que numerosos estudios intentan esclarecer, aunque es bien sabido que se abren dos corrientes que prefieren o señalan el comportamiento del sistema; los economistas que prefieren señalar la distribución log-normal [15] como señala [6], mientras que los físicos han aparecido en escena proponiendo un desarrollo basado en el intercambio de energía cinética de partículas de una gas, para agentes económicos intercambiando dinero. Esto lleva a que las distribuciones resultantes de dicho análisis sean de tipo gama o Boltzmann Gibbs.

Ambos enfoques, ya sea el económico o físico, se basan en la maximización de las ganancias para el primero y la entropía para el segundo para desarrollar su dinámica. Importante es señalar que el comportamiento de distribuciones divididas en dos clases presentando distribuciones de la familia exponencial y ley de potencias, se ha reportado en física de plasma y astrofísica de acuerdo a [6], llamadas partes térmicas y súper térmicas respectivamente.

En 2014 [12], encuentra que midiendo el ingreso de diversos países (Japón, Reino Unido y Nueva Zelanda), presentan un buen ajuste a la distribución tipo gama:

$$P(x) \approx x^{(n-1)} e^{(x/T)} \quad (2)$$

A la cual se puede asociar a la distribución de Boltzmann Gibbs, pero con moléculas poliatómicas en lugar de monoatómicas, cuyo desarrollo se deriva de un gas ideal monoatómico. Este comportamiento puede ser asociado a agentes similares que combinados forman un agente económico "más grande" como puede ser una familia, una compañía o una ciudad, que se componen de agentes económicos más pequeños.

Sin embargo, el enfoque más aceptado es el que se desarrollará a continuación en el que la aparición de un comportamiento tipo gama, resulta de suponer que las partículas o agentes económicos no comparten toda su energía o dinero en su interacción, que es más acercado a la realidad aún. La manera en la que se ahorre o no energía(dinero) cambiará la distribución en Boltzmann Gibbs o gama o log-normal.

Si se comienza con dos agentes partículas (agentes) interactuando, habrá un cambio en su energía de ambos, a partir de ahora seguiré la deducción y pasos de [6] para llegar a las distribuciones deseadas. Las partículas que interaccionarán se seleccionan al azar y esto garantiza que la dinámica de evolución del sistema no dependa del estado anterior, un proceso markoviano. Es decir:

$$\begin{pmatrix} m_i(t+1) \\ m_j(t+1) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} m_i \\ m_j \end{pmatrix} \quad (3)$$

donde  $m_i(t)$  es el ingreso del agente  $i$  al tiempo  $t$ , y la matriz  $M$  define la interacción entre ellos. Al asumir conservación local del dinero (energía), vemos que el vector de estado  $m_i(t) \geq 0$ .

$$m_i(t+1) = m_i(t) + \Delta m \quad (4)$$

$$m_j(t+1) = m_j(t) - \Delta m \quad (5)$$

usando la conservación local

$$m_i(t) + m_j(t) = m_i(t+1) + m_j(t+1) \quad (6)$$

Recordando que el modelo considera que una pequeña parte de la energía es transferida  $\Delta m$  y definiendo  $\varepsilon_{ij}$  como la fracción aleatoria de cantidad de energía a compartir y  $0 \leq \varepsilon_{ij} \leq 1$ :

$$\Delta m = \varepsilon_{ij}[m_i(t) + m_j(t)] - m_i(t) \quad (7)$$

y al considerar que un largo tiempo pasó (un estado estacionario) con  $t \rightarrow \infty$ , se obtiene que la distribución de dinero (energía) es:

$$P(m) = \frac{1}{T} e^{(-\frac{m}{T})} \quad (8)$$

Definiendo  $T = \frac{M}{N}$ , resulta en la ecuación de Boltzmann Gibbs.

Actualmente no se cuenta con una versión analítica de la derivación de para la distribución tipo gama con rigor matemático, de hecho Lallouache en [20], muestra que si se piensa en un sistema de intercambio de riqueza, basado en un modelo cinético de gases ideales, ambos cerrados e intercambiando sólo una fracción  $0 \leq \lambda \leq 1$  de su energía (riqueza), la distribución gama no es una solución rigurosamente. Si se toma en cuenta la dinámica de los agentes económicos intercambiando ingreso en una interacción entre pares y ahorrando una fracción  $\lambda$  se llega al siguiente comportamiento.

$$m_i(t+1) = \lambda m_i(t) + \varepsilon_{ij}[(1-\lambda)(m_i(t) + m_j(t))] \quad (9)$$

$$m_j(t+1) = \lambda m_j(t) + (1-\varepsilon_{ij})[(1-\lambda)(m_i(t) + m_j(t))] \quad (10)$$

Y un intercambio de ingreso dado por:

$$\Delta m = (1-\lambda)[\varepsilon_{ij}m_i(t) + m_j - m_i(t)] \quad (11)$$

Siguiendo con este razonamiento, sea  $X$ , una variable aleatoria que representa el ingreso de un agente económico, si suponemos que el número de agentes  $N \rightarrow \infty$  y éstos se encuentran en un estado de equilibrio. Entonces  $X$  es un punto fijo de la ecuación de distribución:

$$X = \lambda X_1 + \varepsilon(1 - \lambda)(X_1 + X_2) \quad (12)$$

Asumiendo que las variables asociadas al ingreso de cada agente de la dupla  $X_1, X_2$  y  $X$  (el ingreso elegido al azar) tienen la misma probabilidad de suceder. Teniendo a  $X_1, X_2$  y  $\varepsilon$  estocásticamente independientes de acuerdo con [20].

De la ecuación anterior, pueden obtenerse entonces los  $n$  momentos estadísticos asociados. La idea de comparar momentos estadísticos con los de un sistema físico, puede verse motivado por la interpretación de éstos. En Física, el momento cero corresponde a la masa total de la partícula, estadísticamente sería la probabilidad total del sistema. El primer momento asociado a un sistema físico, dividido por la masa total es el centro de masa, mientras que estadísticamente es el promedio. En caso del sistema económico, se podría hablar de un centro de masa del ingreso.

Siguiendo, el segundo momento asociado a un sistema físico es el momento de inercia, explicando qué tan difícil es mover un cuerpo de acuerdo a la distancia que se aplique a una fuerza con respecto a la distribución de masa del sistema; en el sistema estadístico es la varianza, asociado a qué tan disperso se encuentra el sistema o el ingreso de todos los agentes y qué tan fácil sería mover esto, análogamente a la inercia asociada a la rotación de un sistema físico.

Tiendo esta comparación en cuenta se obtiene que los momentos asociados para la ecuación inmediata anterior son;

$$\forall n \in N, \langle X^n \rangle = \langle (\lambda X_1 + \varepsilon(1 + \lambda))(X_1 + X_2)^n \rangle \quad (13)$$

Resolviendo el binomio de Newton

$$\langle X^n \rangle = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\lambda^{(n-k)}(1 - \lambda)^k}{(k+1)} \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} \langle X^{(n-p)} \rangle \langle X^p \rangle \quad (14)$$

Y usando las condiciones de equilibrio  $\langle X^0 \rangle = 1$  (normalización) y  $\langle X^1 \rangle = 1$ . Se obtienen los momentos.

$$\langle X^2 \rangle = \frac{(\lambda + 2)}{(1 + 2\lambda)} \quad (15)$$

$$\langle X^3 \rangle = \frac{3(\lambda + 2)}{(1 + 2\lambda)^2} \quad (16)$$

$$\langle X^4 \rangle = \frac{(-\lambda^5 + 9\lambda^3 - 2\lambda^2 + 12\lambda + 72)}{(1 + 2\lambda)^2(2\lambda^3 - \lambda^2 + 6\lambda + 3)} \quad (17)$$

Ahora para que la función gama sea solución del problema planteado, sus cuatro momentos estadísticos deberían coincidir Partiendo de la distribución gama:

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \left( \frac{n}{\langle x \rangle} \right)^n x^{(x-1)} e^{\left( \frac{-nx}{\langle x \rangle} \right)} \quad (18)$$

Y un valor de  $n$

$$n = \frac{D(\lambda)}{2} + \frac{3\lambda}{(1-\lambda)} \quad (19)$$

Por lo que al calcular los cuatro primeros momentos  $k = 2, 3, 4$ , basta colocar la condición inicial de normalización  $\langle X \rangle = 1$

$$\langle X^k \rangle = \frac{((n+k-1)(n+k-2)\dots(n+1))}{n^{(k-1)}} \quad (20)$$

$$\langle X^2 \rangle = \frac{(\lambda+2)}{(1+2\lambda)} \quad (21)$$

$$\langle X^3 \rangle = \frac{3(\lambda+2)}{(1+2\lambda)^2} \quad (22)$$

$$\langle X^4 \rangle = \frac{((n+3)(n+2)(n+1))}{n^3} = \frac{(3(\lambda+2)(4-\lambda))}{(1+2\lambda)^3} \quad (23)$$

Con esto se aprecia que la hipótesis de que la distribución gama es solución al problema es errónea, sin embargo los tres primeros momentos coinciden de manera idéntica y a pesar de no ser idénticos los cuartos momentos, la diferencia entre ellos es apenas perceptible, a medida que el ahorro  $\lambda$  crece el error cae, como muestra [20]. Se precia en la siguiente figura (Figura. 1)

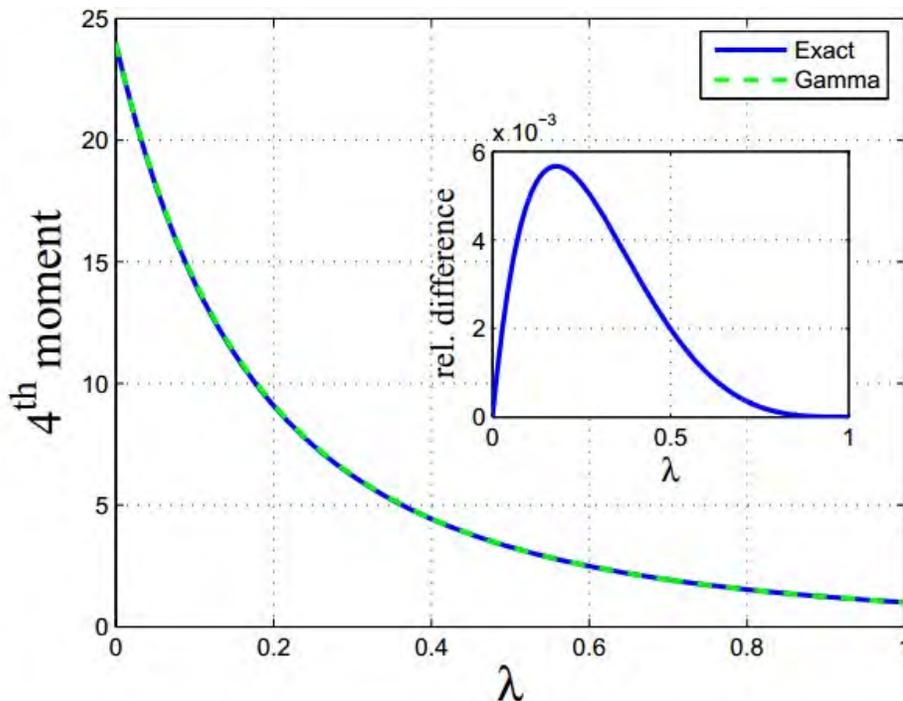


Figura 1: Se muestra la gráfica del cuarto momento en función de  $\lambda$ , se muestra la diferencia relativa que hay entre ambos resultados en la subgráfica, la cual se aprecia es mínima (tomada de [20]).

Con lo anterior se concluye que la distribución gamma es una muy buena aproximación para modelar un sistema económico cerrado, basado en la teoría cinética de gases ideales con ahorro fraccionario de energía (ingreso)  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Para mayor detalle de esto, [6] [20] son buenas referencias para profundizar en el tema.

## Penn World Tables

Las unidades en las que se trabajará en lugar de energía serán medidas de dinero estandarizado conocidas como PPP dollars (Purchasing Power Parities por sus siglas en inglés). Esta unidad de medida, no es absoluta y para su definición se hace uso del producto interno bruto de los países. Esta unidad es diferente sistemáticamente [11] a el valor de cambio de una moneda a otra, ya que este tipo de medida económica no sólo cubre los bienes intercambiados, sino también los bienes y servicios no comerciables. Una diferencia puede verse en la siguiente figura (Figura 2)

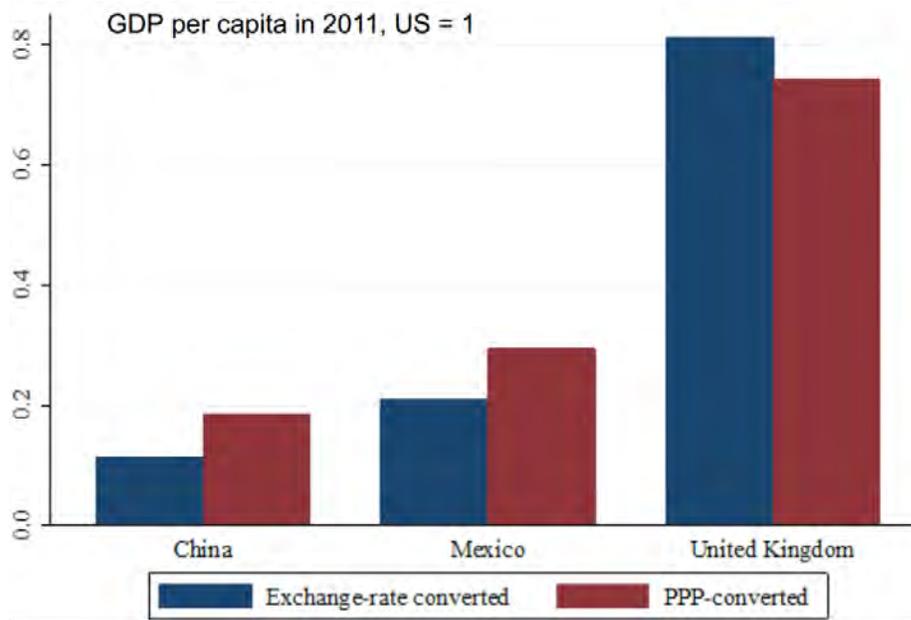


Figura 2: Gráfica que muestra la diferencia que existe entre las unidades de medida económica; tipo de cambio en azul y Dólares PPP. Se usa como estándar los dólares americanos y el comportamiento reflejado en los tres países en la gráfica son repetidos por países con las mismas características; los países en vía de desarrollo tienen un mayor beneficio al convertir su moneda a dólares PPP que los desarrollados por la inclusión de los valores no comerciables. (Tomada de [11])

Es importante señalar que al ser una medida artificial, su valor cambia año con año y países que pudieron tener un alto nivel económico, a la siguiente versión pueden descender en esta escala, en este trabajo se usan tres diferentes generaciones de las Tablas Mundiales de Penn. Si se quiere profundizar en el tema, en [11] habla de ello con más detalle de ello y contiene referencias extensas sobre el tema.

# Distribuciones

## Leyes de Pareto y leyes exponenciales

La distribución empírica del ingreso en países como EE. UU., Unión Europea, Reino Unido[9], Australia [3], y México [36], entre otros, presenta una estructura de dos clases<sup>4</sup>, en el sentido de que la mayoría de la población de estos países o regiones pertenece a una clase baja caracterizada por una distribución similar a una función exponencial, mientras que la más alta sigue a una distribución de Pareto (tal como lo descubrió Pareto[24] hace muchos años en varios países). En general, la distribución de ingreso normal o gama parece ajustarse al grueso de la distribución de ingresos y riqueza. Se encontraron resultados similares en los subgrupos de EE. UU. Clasificados por género y raza (blancos y afroamericanos), lo que confirma a los subgrupos la misma distribución de ingresos cualitativa de dos clases [34]. En todos estos casos, la cola superior de Pareto cambia mucho más en el tiempo que las regiones inferiores. La creación y destrucción de dinero en procesos complejos (a través de inversiones, crédito, derivados financieros, grandes crisis del mercado de valores, etc.) están mucho más claramente relacionadas con la cola de Pareto. Para revisiones sobre ingresos y distribuciones de riqueza. Revisemos con cierto detalle un caso particular, el análisis de la distribución del ingreso en EE. UU. En el período 1983-2001 por Silva y Yakovenko [8].

La distribución exponencial en la clase inferior se modeló por analogía con un fenómeno termodinámico, considerando que la conservación del dinero en las interacciones económicas es similar a la conservación de la energía cinética en las colisiones elásticas que representan el comercio de bienes y servicios. Dado que la distribución exponencial en la clase inferior se mostró muy estable en el tiempo después del ajuste de la inflación, mientras que la distribución de la ley de potencia de la clase superior es altamente dinámica y volátil, se concluyó que la clase más baja se encuentra en equilibrio térmico, y La clase alta está fuera de esto. Desde la evolución temporal de la riqueza integrada de personas en la cola de Pareto de ingresos superiores en el período 1983 y 2001, se observó que esta cola de riqueza total de Pareto se encuentra más o menos en fase con el índice bursátil S & P 500 divididos por la inflación. El S & P 500 es un índice ponderado de capitalización publicado por Standard & Poor's

---

<sup>4</sup>Dos clases entendidas como aquellas que perciben un muy alto ingreso por encima de los demás agentes económicos de la distribución

sobre los precios de 500 acciones comunes de gran capitalización de mercado que se negocian activamente en los Estados Unidos. Es decir, la cola de la riqueza de Pareto se correlaciona con el alza y la caída del mercado de valores, ya que se hincha y se contrae después del mercado de valores. Este hecho empírico muestra que algunos de los mecanismos para ganar dinero seguidos por las personas más ricas son diferentes de la mayoría de la población, que en su mayoría intercambia bienes y servicios.

No solo los países presentan este comportamiento, Soriano y Del Castillo [35] han mostrado lo mismo para la riqueza de las empresas más ricas del mundo que cotizan en bolsa por industria y por empleado.

## Log-Normal

En 1931, Robert Gibrat aclaró que la ley de Pareto solo es válida para el rango de altos ingresos [14], mientras que para los rangos de ingresos pequeños y medios sugirió que la distribución del ingreso se describe mediante una densidad de probabilidad log-normal y se propuso una ley de efecto proporcional, que establece que un pequeño cambio en una cantidad es independiente de la cantidad misma. Por lo tanto, la distribución de una cantidad  $dz = dm/m$  debe ser gaussiana, y por lo tanto,  $x$  es log-normal, dando lugar a la ley de Gibrat:

$$P(m) \propto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\log^2(m/m_0)}{2\sigma^2}\right) \quad (24)$$

donde  $\log(m_0) = \langle \log(m) \rangle = \mu$  es el valor medio de la variable logarítmica y  $\sigma^2 = \langle [\log(m) - \log(m_0)]^2 \rangle$  es la varianza correspondiente. El factor  $\beta = 1/\sqrt{2\sigma^2}$ , también conocido como el índice de Gibrat, mide la igualdad de la distribución y empíricamente, se sabe que está entre 2 y 3 [37].

## Gama

El principal argumento a favor de los modelos de intercambio cinético es que millones de pequeñas transacciones que tienen lugar en un lapso muy corto de tiempo pueden generar las características estocásticas esenciales de los modelos de intercambio cinético y las distribuciones correspondientes. Por lo tanto, una interpretación de gas de partículas de las interacciones económicas, motivada por la conservación local del dinero o la energía y las colisiones aleatorias (o interacciones) entre agentes económicos, permite el uso de la descripción estadística utilizada en la física si el dinero funciona como un proxy del ingreso / riqueza. Dado que las distribuciones derivadas para dinero se comparan extremadamente bien con los datos empíricos de ingresos / riqueza, estos modelos proporcionan información importante para dichas distribuciones. Gallegati [13] señaló que “en las economías capitalistas industrializadas, el ingreso definitivamente no se conserva”, lo que ciertamente es cierto. Pero mientras el ingreso y la riqueza en una economía crecen con el tiempo, su crecimiento puede estudiarse como un fenómeno de series temporales con datos tomados en una sola instancia o en un

período de tiempo muy corto para obtener promedios estadísticos durante períodos de tiempo más largos. La propuesta de Dragulescu y Yakovenko para estudiar un sistema económico conservador como un gas de partículas tiene la ventaja de que la distribución resultante, una distribución de energía de Boltzmann-Gibbs, es muy robusta bajo perturbaciones, porque la distribución exponencial es la que maximiza la entropía económica.

Sin embargo, en cualquier comercio, los ahorros vienen naturalmente [32]. Chakraborti y Chakrabarti [6] introdujeron un factor de propensión al ahorro  $\lambda$ , en el cual cada comerciante en el momento  $t$  ahorra una fracción  $\lambda$  de su dinero  $m_i(t)$  y comercios al azar con otro:

$$\begin{aligned} m_i(t+1) &= \lambda m_i(t) + \varepsilon_{ij}[(1-\lambda)(m_i(t) + m_j(t))] \\ m_j(t+1) &= \lambda m_j(t) + (1-\varepsilon_{ij})[(1-\lambda)(m_i(t) + m_j(t))] \end{aligned} \quad (25)$$

donde:

$$\Delta m = (1-\lambda)[\varepsilon_{ij}\{m_i(t) + m_j(t)\} - m_i(t)] \quad (26)$$

Aquí  $\varepsilon_{ij}$  es una fracción aleatoria. Aunque no hay una expresión analítica en el caso de la constante fija  $\lambda$ , se ha utilizado una distribución gama como una buena aproximación de la distribución resultante:

$$f_n(m) = a_n m^{n-1} \exp\left(-\frac{nm}{\langle m \rangle}\right) \frac{1}{\Gamma(n)} \left(\frac{n}{\langle m \rangle}\right)^n \quad (27)$$

donde  $n$  es definida en términos del factor de ahorro  $\lambda$  como:

$$n(\lambda) = 1 + \frac{3\lambda}{1-\lambda} \quad (28)$$

$$P(m) = C e^{-\frac{m}{s}} \quad (29)$$

es el caso especial para  $n = 1$ , es decir  $\lambda = 0$  o lo que es lo mismo no ahorrar nada del ingreso (colisiones elásticas)

## Beta discreta

Diversos fenómenos en tan distintos escenarios parecen presentar lo que se conoce como una ley de potencias, sin embargo, en varios artículos se descartan estas leyes o los ajustes no son perfectos del todo debido a presencia de errores de elemento finito [22].

Estas leyes se presentan en muy variados escenarios como el arte, sociología, biología, finanzas, léxico, redes, sistemas complejos, que su estudio se ha intensificado en los últimos años<sup>5</sup>.

Una de las características de estos sistemas es que al analizarse los datos, en su conjunto parecen no seguir la distribución de ley de potencias para todos los valores, sino para una región [2], normalmente en el centro al graficar los datos en una representación semilogarítmica. Y con esto la ley de potencias queda atrapada entre los extremos de la distribución.

Muy recientemente [22] y [2], han propuesto una función de dos parámetros a determinar, en la cuales los datos son ordenados de acuerdo a un rango de ocurrencia, dando excelentes resultados en el ajuste de datos, pues al usar una regresión lineal para ajustarlos, terminan con valores de  $r^2$  muy cercanos a 1. Esta función se define como sigue:

$$f(r) = A \frac{(N + 1 - r)^b}{r^a} \quad (30)$$

donde  $r$  es el rango del valor analizado,  $N$  el valor máximo que puede alcanzar este rango,  $A$  una constante de normalización y finalmente  $a$  y  $b$  los parámetros libres a determinar y la función como tal recibe el nombre Beta discreta. Es importante mencionar esta distribución puede ser una ley de potencias "pura" si hacemos que uno de los coeficientes  $a = 0$  o  $b = 0$ . Es importante mencionar que los coeficientes tienen su interpretación de acuerdo a [2] en una relación de las correlaciones de los factores del fenómeno a estudiar, de manera más concreta exponen que  $a$  registra que la presencia de correlaciones en un gran rango de los datos, mientras que  $b$ , tiende a registrar los cambios más aleatorios que pudieran llevar a suceder.

En su artículo [22] y [2] profundizan más en el estudio e interpretación de esta función, dando ejemplos tan variados que van desde el análisis de crecimiento de población en dos regiones españolas, tamaño de rectángulos presentes en pinturas, redes complejas y probabilidades de mutación en sistemas booleanos o en la frecuencia de notas presentes en la quinta sinfonía de Beethoven, Los Planetas de Holts, entre otras relacionadas con biología. Todas ellas con excelentes resultados al ajuste de la función propuesta.

## Multimodalidad

Es común encontrar que los fenómenos que ocurren en la naturaleza puedan ser ajustados mediante funciones de distribución de probabilidad. Una de las funciones que primero se aprende a manejar debido a su presencia en un gran número de fenómenos es la distribución normal.

---

<sup>5</sup>Para entender mejor el tema, recomiendo revisar el artículo de [2], completo estudio sobre el comportamiento de estos sistemas, con ejemplos de su ajuste y posibles causas

Una de las características por las cuales se puede caracterizar una distribución es la moda, que se puede interpretar como el valor que más se repite a lo largo del espacio muestral, el resultado de un experimento o medición que más frecuencia tiene. Justamente es esta característica que abre el estudio de un nuevo tipo de distribuciones, las distribuciones multimodales. Como su nombre indica, son distribuciones con dos o más modas. Un ejemplo al que nos atañe es en la economía como se puede observar en [25]. Ejemplos en biología se pueden encontrar por ejemplo en el tamaño de una comunidad trabajadora de hormigas en África [39]. La distribución de las tasas de crecimiento entre los individuos. La distribución de los efectos de la condición física de las mutaciones para ambos genomas completos.[33] y la distribución en genes individuales [17].

Una mezcla de dos distribuciones unimodales con medios diferentes no es necesariamente bimodal y un ejemplo de ello es aquellas distribuciones para las cuales visualmente no se presenta bimodalidad, más que por el criterio de vista que a veces suele ser no tan confiable como una medida matemática y bien fundamentada de cuando es realmente bimodal o multimodal. Para ello se cuenta con argumentos dependiendo de si las desviaciones estándar de la mezcla o conjunto de las dos o más distribuciones, si sus medias difieren al menos en dos veces la desviación estándar común, entonces se puede hablar de una bimodalidad. [28]

A diferencia de lo que podría esperarse en la combinación de dos distribuciones unimodales, no se obtiene necesariamente una distribución binormal, pues tiene que tenerse en cuenta la desviación estándar de cada una de ellas, ya que éstas, al sobreponerse en caso de estar muy cerca las modas, podría tratarse de algo parecido al ruido.<sup>en</sup> los datos, para ello se tiene que hacer test sobre multimodalidad, basados en las condiciones necesarias y suficientes para determinar una distribución multimodal por Ray Lindsay [27]

En [18] se establece que una mezcla de dos distribuciones unimodales, es bimodal, si y sólo si:

$$d > 1 \quad (31)$$

donde,

$$d = \frac{|\mu_1 - \mu_2|}{2\sqrt{\sigma_1\sigma_2}} \quad (32)$$

con  $\sigma_1, \sigma_2$  las desviaciones estándar de cada una de las distribuciones y  $\mu_1, \mu_2$ , los promedios respectivos de cada una de las distribuciones. Es importante señalar que

existen otros tipos de test<sup>6</sup> para determinar si existe o no multimodalidad que pueden ser consultados en otros textos más especializados sobre estadística, pero entre otros

---

<sup>6</sup>En esta tesis uso estos criterios por su facilidad de ejecución en el código computacional

parámetros de caracterización podemos encontrar la separación multimodal, que es la separación entre moda y moda, definida por:

$$S = \frac{\mu_1 - \mu_2}{2(\sigma_1 + \sigma_2)} \quad (33)$$

Y la amplitud de la distribución bimodal

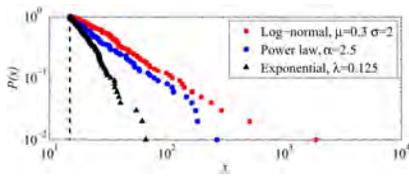
$$A_B = \frac{A_1 - A_2}{A_1} \quad (34)$$

definida por [41], en donde  $A_1$  es la amplitud del pico más alto de la distribución y  $A_2$  la amplitud de la segunda distribución. Con  $A_B < 1$ .

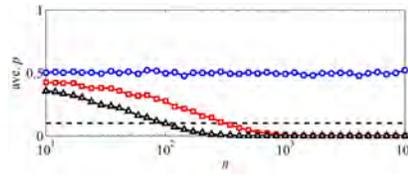
## Leyes de Potencia falsas por mala visualización de datos

En la ciencia nos hemos dedicado a secuestrar términos de la vida cotidiana y darles un nuevo significado. Claro ejemplo de ello es cuando decimos que algo es complejo, atribuible a algo que es difícil de resolver, entender, etc.

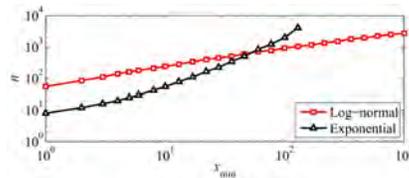
Varios estudios académicos de diversas áreas del conocimiento, han llegado a afirmar que cierto fenómeno presenta un comportamiento de ley de potencias erróneamente, como bien se ha documentado [7]. Esta falacia es provocada por la fe ciega que se tiene en la mala visualización de datos. Ya que es frecuente encontrar en la literatura, aseveraciones sobre datos que exhiben supuestas leyes de potencias, por "ajustar" una línea recta en un plano log-log. Donde el problema, es originado por lo que se entiende por "ajustar". Nuevamente Clauset, demuestra en [7] que una ley de potencias puede ser confundida con distribuciones de tipo log-normal y exponencial. Para lograrlo, crea distribuciones de datos siguiendo este tipo de distribución, tanto en caso finito como continuo. A continuación, muestra un ajuste de línea recta a las tres en un plano log-log. Mostrando que las tres "ajustanz son muy posibles, sino que son leyes de potencias de acuerdo a este criterio. Las siguientes imágenes tomadas del artículo de Clauset, muestran este argumento de manera más clara



(a) CDF's de tres distribuciones continuas



(b) Valor  $p$  promedio para MLE de ley de potencias



(c) Valor de  $n$  necesario para rechazar ley de potencias

Figura 3: (a) Se muestran las CDFs de tres muestras pequeñas ( $n = 5$ ) de tres diferentes distribuciones continuas: una log-normal con  $\mu = 0,3$  y  $\sigma = 2$ , una ley de potencias con  $\alpha = 2,5$  y  $\sigma = 2$ , y una exponencial con  $\lambda = 0,125$ , todas con  $x_{min}$ . Visualmente cada una de las CDF, presenta un comportamiento lineal en escala logarítmica y aparentemente las tres, usando el criterio visual, son leyes de potencias, aunque sólo una lo es verdaderamente. (b) Valor  $p$  promedio para MLE de ley de potencias para las tres distribuciones graficadas en función del número de componentes  $n$ . Se observa que a medida que el número de datos  $n$  aumenta, el valor promedio del  $p$  valor cae para las distribuciones que no son leyes de potencias, como era de esperarse. (c) Se observa el número de datos  $n$  necesarios para rechazar hipótesis de ley de potencias (es decir  $p < 0,1$ ) se muestran las distribuciones log-normal y exponencial como función de  $x_{min}$ . (Tomada de [7])

Para justificar plenamente el uso de una ley de potencias, Clauset propone el uso del p-valor<sup>7</sup>. Valor que mide que tan plausible es el ajuste teórico a los datos. De manera resumida, el p-valor se basa en medir la distancia que hay entre la distribución con los datos empíricos y el modelo hipotético, comparándola con datos generados a partir del mismo modelo, es decir, datos sintéticos que siga la distribución teórica. De esta forma, se define al p-valor como la fracción que hay entre las distancias a la data sintética que son mayores que la empírica.

<sup>7</sup>Que por cierto el p valor y  $r^2$  pierden sentido cuando se hace ajustes con regresiones no lineales



# Metodología

## Obtención de datos

En cualquier estudio científico se tiene que delimitar muy bien el sistema a estudiar. Una vez que se tiene bien determinado el sistema a estudiar es hora de obtener los resultados a analizar. La obtención de dichos resultados dará o no seriedad al trabajo a presentar, esto es conocido como la metodología del estudio y es justo a la metodología de la obtención de resultados que todos los estudiosos de las distribuciones de ingreso mundial (o cualquier otro estudio mundial sociológico y económico) tienen que enfrentarse, y es que no existe un estándar en la estrategia para la recolección de datos económicos ya sea por familia o individual para todo el mundo.

Esto se debe principalmente a que dada la soberanía de cada país, éste no sólo puede, sino que tiene que responder a las necesidades de su país decidiendo cuando y el contenido de las entrevistas a sus nacionales, pero incluso si se contara con dichos estándares utópicos (a pesar de los esfuerzos del Banco Mundial en estandarizar esto), surge el problema de la veracidad de los datos, ya que como todos aquellos investigadores que han emprendido un estudio similar se topan con el hecho de que dichas encuestas (en el caso de contar con ellas) normalmente no representan la realidad del país o región a analizar.

Dicha afirmación puede verse y entenderse de manera muy clara en los extremos de las distribuciones que a fin de cuentas serán los extremos de la población.

Piénsese por un momento en los millones de personas que se encuentran en pobreza extrema en México, a los cuales no podría ser posible siquiera localizar ya sea por su situación de calle o por la inaccesibilidad en la que sus viviendas se encuentran. En el otro extremo de la población tenemos a las personas con un gran ingreso a los que su localización puede ser igual o más difícil, esto debido a la inaccesibilidad de sus viviendas por seguridad privada o la característica de contar con múltiples viviendas hacen esta tarea más difícil. En el caso de localizarse estas personas de alto ingreso hay estudios que muestran cómo es que estos tienden a subestimar sus ingresos con el objetivo de evadir impuestos.

De los puntos anteriores se puede entender que la mayoría de los estudios centran a la población mundial en la clase media, ya que a ellos a quienes están dirigidas las encuestas.

El riesgo pues, viene de la sobre o sub estimación de las clases pobres, ya que la cola de la distribución de más alto ingreso podría cortarse sin afectar la forma de la distribución. Es importante recordar las encuestas en la mayoría de los países es de carácter representativa y por ello depende de que tan justa sea esa representación tanto de las clases medias como las pobres.

En este trabajo se consideran los datos ya recuperados por los artículos y visualizaciones de [19], [31] y [38] y se obtienen directamente de sus artículos <sup>8</sup> por medio de WebPlotDigitizer en su versión 43.9, software científico desarrollado específicamente para la obtención de data a partir de gráficas, mapas o imágenes. Con el recordatorio y peligros en mente que este tipo de recuperación de datos conlleva, es que se realiza esta tesis.

Para la elección de la herramienta que digital para extracción de datos investigué, la confiabilidad de varios softwares disponibles, que además tuvieran información sobre la confiabilidad de los datos obtenidos, es por ello que estudié tres artículos [23] ,[10], [4] y [29]<sup>9</sup>. En ellos se estudiaron la confiabilidad de la extracción de datos por este medio.

Por ejemplo, el estudio de Moeyaert [23], pone a prueba cuatro diferentes softwares (a saber, Ungraph, DataThief, WebPlotDigitizer y XYit) con el mismo propósito sobre múltiples estudios y comprobar que tanto los datos obtenidos por medio de software, se asemejan a los reales, concluyendo que el proceso matemático como tal es limpio y casi a prueba de errores y el factor que más problemas traería consigo es el interfaz de usuario del programa o en muchos casos, la mala calidad de las gráficas de donde los datos son obtenidos o una combinación de ambas. Para confiar en sus resultados, Moeyaert, se apoya en el coeficiente de concordancia de Lin  $\rho_c$ , definido como sigue

$$\rho_c = \frac{(2\sigma_{12})}{((\mu_1 - \mu_2)^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \quad (35)$$

Donde  $\mu_i$  representa el valor medio de  $Y_i$ , la variable dependiente de la variable aleatoria  $X_i$ , del estudio  $i$  y  $\sigma_i$  el valor de la covarianza, respectiva con  $\rho_c \in [-1, 1]$  y mientras más cercano a 1, más confiable las lecturas serán.

Este coeficiente es necesario, ya que como bien anota Lin en [21], no es posible confiar ciegamente.<sup>en</sup> indicadores como el coeficiente de correlación de Pearson, pues este no detecta fallos a partir de la línea de 45° y el método de ajuste de mínimos cuadrados puede fallar si los datos se encuentran muy esparcidos. La confiabilidad del método, se ha comprobado a lo largo de varios estudios, pero en el cual se basó

<sup>8</sup>con excepción de [38] que se obtienen directamente de los autores

<sup>9</sup>Que a la fecha de publicación de esta tesis se encuentra en la versión 4.1

Lin, fue en la creación de conjuntos sintéticos creados con el Método de Monte Carlo, mostrando en todas las simulaciones el ajuste de bondad (basado en la estadística de Kolmogorov), obteniendo un p-valor aceptable para comprobar la confiabilidad sobre  $\rho_c$ .

De manera resumida, el coeficiente de concordancia nos dice que tanto se puede confiar entre las lecturas sobre las tendencias sobre un mismo fenómeno, donde estas lecturas, son repetidas múltiples veces y así atribuir el error que se obtenga al fenómeno observado y no la lectura de ellas.

Con este valor, Moeyart, confirma la confiabilidad sobre las herramientas digitales para la extracción de datos, teniendo como mejor herramienta WebPlotDigitizer, teniendo un valor de concordancia de entre 97% el valor más bajo a 99% el más alto.

De igual forma en [10] muestran que la confiabilidad sobre los datos es alta, en 100% de los casos que se examinaron, 90% de ellos acertaron a la perfección al ser comparadas con los datos reales y las correlaciones entre los extractores de datos, fueron reportadas cercanas a la perfección [10]. Resultados similares fueron alcanzados en [4]. En la referencia digital número [29], se da los resultados de la exactitud y precisión del programa al obtenerse datos de la misma distribución en diferentes presentaciones o visualizaciones, mostrando el valor en el error de la estimación de los datos, siendo muy reducido este error, obteniéndose los mejores resultados para las visualizaciones de tipo líneas sólidas.

Ninguno de los autores declaró conflicto de intereses en la presentación de sus resultados, por lo cual, concluí que la herramienta con la que obtendría los datos que no pudiera obtener de manera de tablas de valores (el único valor fue el de las visualizaciones de Max Roser y el libro [30],[38], de donde se dirigiría al lector a la fuente original de datos disponible para descargar de manera gratuita y sin registros de ningún tipo, a su vez Roser obtuvo los datos de [38], que a su vez obtuvieron los datos de la fuente digital de Clío Infra)<sup>10</sup> sería WebPlotDigitizer.

---

<sup>10</sup>Que es una base de datos abierta al público que contiene datos reunidos por varios investigadores del mundo, tan variados como datos de ingreso, estaturas, entre otros.

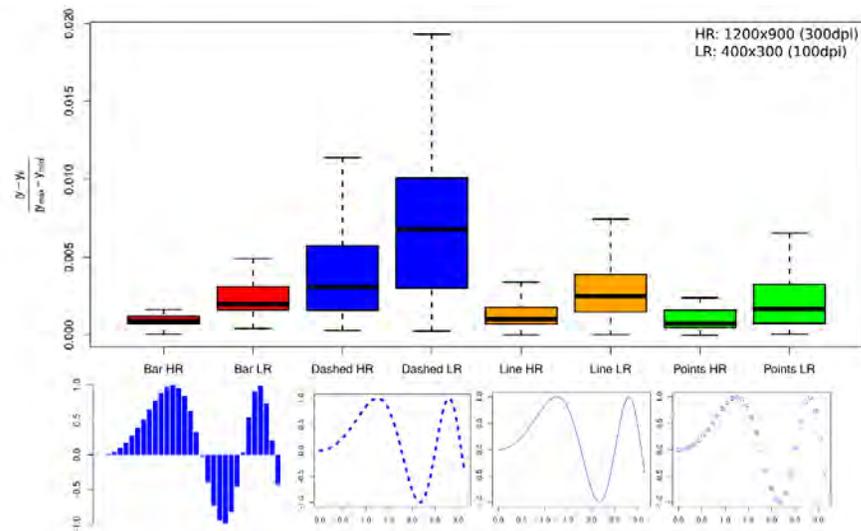


Figura 4: Se muestra el error relativo de WebPlotDigitizer al minar valores de distintos tipos de gráficas; se aprecia que las de menor error son las compuestas por barras, mientras que las que más error presentan son las punteadas o aquellas que presentan discontinuidad en su presentación.

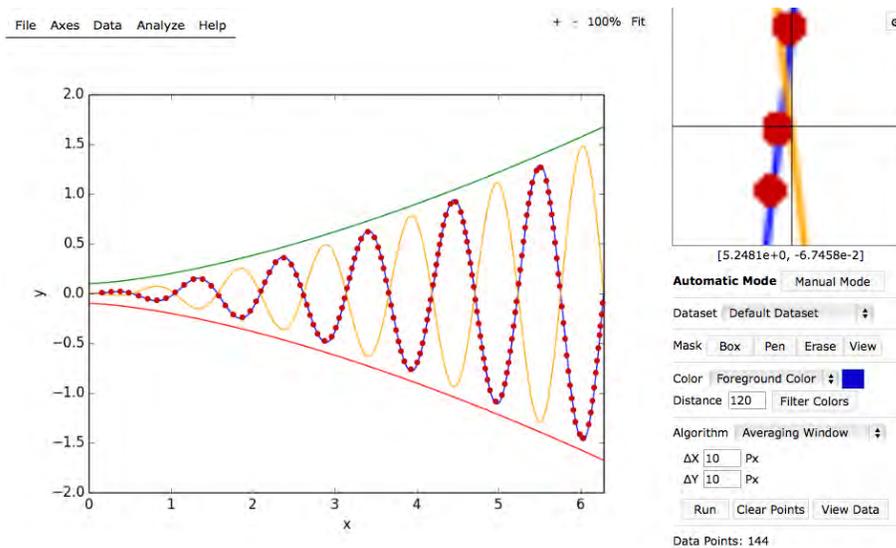


Figura 5: Se muestra la interfaz de WebPlotDigitizer al extraer datos de gráfica de ejemplo y los parámetros disponibles para extracción, tales como el intervalo de marcateo a la gráfica.

## Bases de datos

En la tesis, tres bases de datos diferentes se utilizan para análisis.

Las bases de datos difieren en las metodologías de construcción. Según Branko [19], se pueden distinguir tres tipos de inequidad global. El primero, es el desequilibrio de la inequidad internacional que corresponde a la desigualdad del ingreso per cápita entre los países del mundo y, según el autor, es apropiado para los estudios de ingresos en todos los países. (Un ejemplo de los autores que utilizan este tipo de enfoque son Barro y Sala-I-Martin [31], autor de la segunda base de datos con la que se trabaja), lo que esta metodología no recopila es una medida de la inequidad interpersonal porque no hay un peso asignado. En la distribución a cada individuo depende del país de residencia de este. Es precisamente la segunda metodología que capta esta sensibilidad en los datos. En él, el ingreso per cápita se asigna a la persona dependiendo de su país de residencia.

Es el tercer tipo de metodología que captura la desigualdad del ingreso individual en el mundo de cada individuo al asignarle un ingreso real per se. El problema de esta metodología radica en la inexistencia de una encuesta global para medir los ingresos de las personas. Incluso si hubiera, esta encuesta contendría los problemas que las encuestas de hogares han informado para cada país. Bourguignon, según Branko, muestra que entre 1989 y 2006 la desigualdad internacional sin el concepto de arrepentimiento sigue aumentando, mientras que la inequidad global según el tercer concepto ha disminuido.

La forma en que se construye la base de datos de Salas incluye la preferencia de estimar los datos de las cuentas nacionales cuando los datos de la encuesta no están disponibles, y en el caso de las encuestas existentes, están homologados a dólares de PPA para ser comparados con los de las cuentas nacionales.

El método de construcción de las bases de datos que utilizan la tercera metodología es preferir las encuestas de cada país en las estimaciones (que utilizan indicadores macroeconómicos). Es importante mencionar que al tratarse de un sistema tan grande el

que se estudia, varios errores pueden surgir. Entre ellos, se encuentran ambos extremos de la distribución, pues como la mayoría de los autores discuten en la obtención de sus datos. No importa el tipo de metodología que se utilice, todas presentan problemas que son imposibles de solucionar con exactitud y sólo pueden ser aproximados por distintas razones. A continuación enunciaré sólo algunos de los problemas que se presentan.

El extremo izquierdo de la distribución representa a la población con menos ingresos. Hay población dentro de este segmento que por ejemplo no existe para las encuestas de hogares, pues éstas no tienen hogar o su residencia es de muy difícil acceso para los encuestadores, borrándolos estos hechos de los datos reportados. Además, el lado izquierdo, se sabe tiende a sobre estimar sus ingresos [31], lo cuál es contrario con las personas que se encuentran en el extremo derecho de esta que tienden a subestimar-

los. Ambas clases lo hacen por distintas causas, creo que las primeras (las más pobres) lo hacen por cuestión de orgullo, o de manera aspiracional, mientras que las personas con más ingresos tienden a subestimarlas por cuestiones relacionadas con la inseguridad, evasión de impuestos, entre otras.

El extremo derecho de la población es de igual forma de reportar de manera fidedigna, pues éstos, no tienen una casa, sino varias y estas pueden encontrarse en distintos puntos geográficos, tan distantes como otro estado o país. E incluso de contarse con una sola casa los encuestadores son negados del acceso a los lugares residenciales donde se encuentran.

Podría pensarse que con la ayuda de indicadores macroeconómicos podría resolverse este problema, como el análisis de los impuestos recaudados y el número de personas, pero la realidad es distinta, ya que gracias al lavado de dinero, exportación de capitales a paraísos fiscales y evasión de impuestos, sesgan por completo esta metodología como reconocen los autores de [31] y [19]. Otro gran problema y el principal en mi opinión es que el ingreso de las personas de este rubro no perciben como tal un ingreso fijo como lo haría el resto de personas, sino que su ingreso es muy volátil al provenir de distintos giros como inversiones que son muy volubles. Además parte de su ingreso es convertido a ingresos por medio de arte, compra de inmuebles, entre otros que entra en la categoría de riqueza y no ingreso.

Dicho lo anterior en esta tesis, en lugar de enfocarme el estudio de los extremos me centro en el total de la distribución y la forma que esta pueda tener, siendo consciente del hecho de durante el ajuste podría estarse perdiendo información importante de los dos grupos.

## Ajuste de datos

Ajustar modelos a datos obtenidos de manera experimental o numérica, es una tarea a la que los investigadores se enfrentan día con día. Estos ajustes normalmente se hacen con regresiones lineales si es que el fenómeno se comporta de esa manera. Sin embargo, si el fenómeno estudiado no se comporta de manera lineal, resulta no muy adecuado ajustar los datos de esta forma, pues la aproximación a los datos no será una línea recta <sup>11</sup>

Un problema que surge de la elección del método de ajuste no lineal, viene del hecho que el parámetro  $r^2$  pierde sentido y no nos será posible usarlo para discriminar un ajuste sobre otro. Para entender mejor esto hay que recordar que el valor de  $r^2$  usa la varianza de los datos como del modelo que se ajustará, es decir la varianza del error que se comete, más la varianza de los datos serán la varianza total, y  $r^2$  además es el cociente entre la varianza del modelo a la regresión lineal entre la varianza total que lógicamente producen un valor entre 0 y 1. Para regresiones no lineales, esto no ocurre

<sup>11</sup>Que es a lo que nos referimos cuando hablamos de un ajuste lineal, ya que en una línea curva sigue siendo en todo sentido una línea, se entiende por ajuste lineal a una aproximación por una línea recta.

y además se reportan casos en los que  $r^2$  no aumenta paramejores modelos de ajuste y el valor puede ser demasiado alto en situaciones en las que el ajuste es malo incluso. Por ello en esta tesis no incluyo el reporte de  $r^2$  en los ajustes.

Una vez aclarado el punto anterior, resta saber qué metodología de ajuste no lineal se usará. Los tres más famosos son el método de descenso de gradiente,<sup>12</sup> el método de Gauss-Newton y el de Levenberg-Marquadt.

De manera muy resumida en esta tesis uso el algortimo de Levenberg-Marquardt (LM), pues es una combinación de los otros dos. El algortimo de Gauss-Newton usa la suma del cuadrado de los errores que es reducida en cada paso asumiendo que la función es localmente máxima o mínima y halladando es punto de inflexión, mientras que el algortimo de descenso de gradiente lo que se usa es cambiar los parámetros de ajuste en la dirección en la que el gradiente sea mínimo. El algoritmo LM se comporta como descenso de gradiente cuando los parámetros de ajuste se encuentran lejos del valor óptimo y como Gauss-Newton cuando los parámetros se acercan al valor óptimo. Importante es recalcar que existe riesgo de que este método falle o tarde en encontrar el valor óptimo de los parámetros si comienza en un mínimo pues será posible que se quede rebotando como si fuera una partícula en un pozo de potencial, pero su discusión considero está fuera del alcance de esta tesis<sup>13</sup>.

Por último mencionar que el lenguaje que usé fue Python en su versión 3. Y para ajustar los modelos como se verá en el código<sup>14</sup> usé `curve_fit[1]`, con el método de ajuste `method = lm` (Levenberg-Marquardt), cuya documentación y métodos pueden consultarse en la referencia anterior.

## Ajustes fallidos

Al empezar a trabajar en este trabajo decidimos seguir la corriente de los autores en econofísica más reconocidos en los que se intentaba partir la distribución en dos clases y a partir de ahí hacer un ajuste para cada una de ellas.

El ajuste se hizo con el cuidado que requiere un trabajo así, usando incluso programas como los de [7], cuyo efectividad había sido probada con anterioridad en detectar falsas leyes de potencias en datos que habían sido antes anunciados como tales. La mayoría de estos problemas se debían como ya he detallado una mala visualización de ajuste de datos.

En la sección de resultados mostraré una imagen de cómo eran los resultados preliminares de este tipo de análisis, en el cuál se muestra el esfuerzo por separar a la distribución en dos distribuciones. Este çorte”se llevó a cabo como indica [7] para encontrar

---

<sup>12</sup>Muy utilizado actualmente en técnicas de aprendizaje de máquina (machine learning)

<sup>13</sup>Para su mayor entendimiento considero la revisión de la literatura especializada en métodos numéricos.

<sup>14</sup>Disponible en el apéndice

el valor de  $x_{min}$ , un valor para el cuál los valores mayores a este podría ser tratados como una ley de potencias. En la imagen se mostrará, cómo cada parte ya partida por este valor  $x_{min}$  recibe un tratamiento diferente, siendo por ejemplo la parte baja de la distribución ajustada mediante distribuciones Log-Normal, Gama y exponencial. Debido a un nuevo enfoque que propongo basado en la multimodalidad de la distribución y al mal ajuste de varias de las curvas con el método, decidí usar la multimodalidad como eje para el trabajo. Aclaro que no clamo que el ajuste partiendo la distribución por un  $x_{min}$  se encuentre errad, simplemente es un camino con más por analizar en futuros trabajos y que por ahora presenta resultados peores comparados con los que tienen por eje la multimodalidad.

# Resultados

De la obtención de datos obtenidos de los artículos ya mencionados, se obtienen los siguientes resultados:

## Resultados BG-Pareto

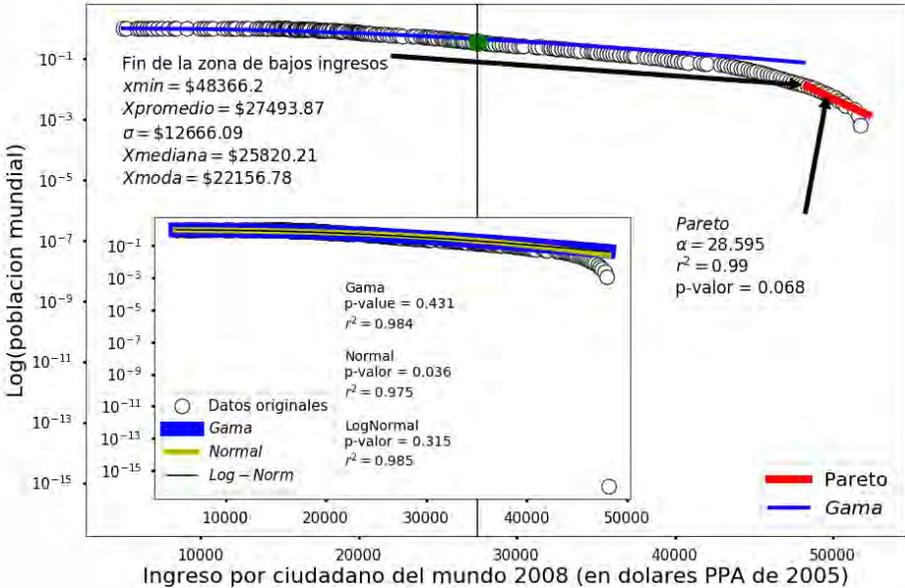
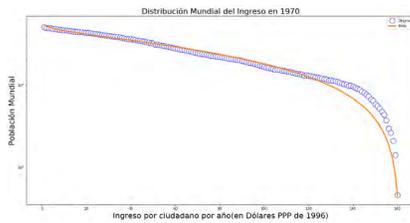


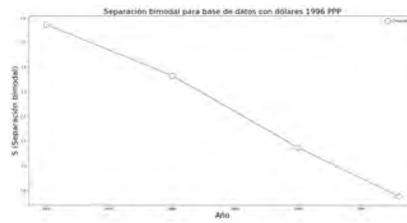
Figura 6: Muestra de los primeros resultados, obtenidos por la motivación de reportes anteriores en los que se postulaba una ruptura de clases por medio de dos distribuciones Boltzmann-Gibbs y Pareto en el extremo derecho. Se aprecia acercamiento de la zona de menores ingresos en la imagen interior con ajuste Gama, Normal Y Log-Normal

## Resultados muestra

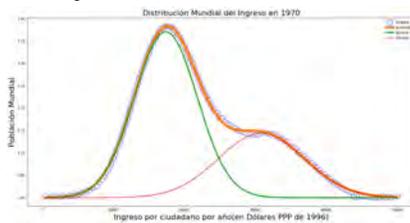
Se aprecia una muestra de la manera en la que son analizados cada año, de cada base de datos obteniéndose un total de 8 figuras para cada año de cada base. Se muestra esta colección de imágenes ya que por cuestión de espacio sólo coloco dos figuras por año, por base que son precisamente los mejores ajustes. La función Beta discreta y la función bigama. En la figura 7 se aprecian los ajustes con distribuciones normales o binormales a la izquierda y las de gama a la derecha. Al contener la palabra sola, las imágenes sólo muestran el ajuste sin las parte que la forman, es decir las dos distribuciones que se unen para formar una sólo que se encuentran representadas en 7e y 7e



(a) Ajuste de distribución Beta discreta



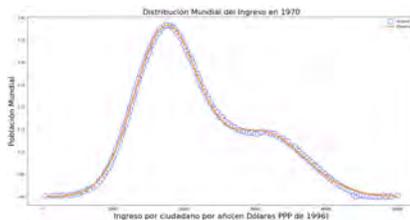
(b) Separación bimodal



(c) Ajuste de distribución Binormal



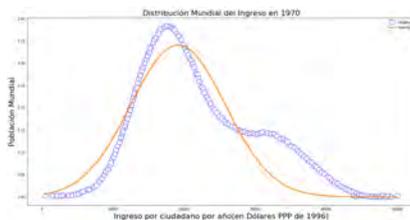
(d) Ajuste de distribución bigama



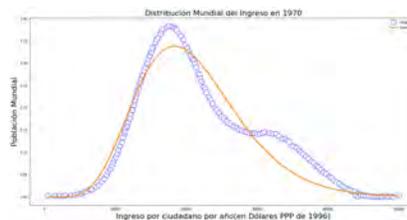
(e) Ajuste de distribución Binormal sola



(f) Ajuste de distribución bigama sola



(g) Ajuste de distribución normal



(h) Ajuste de distribución gama

Figura 7: Muestra del análisis que se hace para cada año, de cada base de datos, aquí se tomó un año al azar para ilustrar los resultados que se obtienen y por cuestiones de espacio no será posible para todos los años, en ( a ) se ve el ajuste de la función beta discreta, en ( b ) la separación bimodal de todos los años de esa base de datos que se aprecia va disminuyendo con el paso del tiempo, en ( c ) el ajuste binormal a los datos, pero con las dos distribuciones normales que la componen. De igual manera en ( d ) pero con la función gama en vez de una distribución normal. En ( e ) el ajuste de la binormal, sin las dos funciones normales que la componen. Para ( f ) lo mismo, pero con la distribución gama. Finalmente en ( g ) y ( h ) se aprecia el ajuste de la función normal y gama, unimodales respectivamente

	Parametros_Binormal	Sigma_Binormal	Parametros_Normal	Sigma_Normal	Parametros_Gama	Sigma_Gama	Parametros_Bigama	Sigma_Bigama	Parametros_Beta	Sigma_Beta
mu1	17423.8646	23.7147213								
sigma1	4425.81075	17.9584376								
A1	0.37098145	0.00126734								
mu2	30894.7558	86.4783235								
sigma2	6049.21547	75.5565183								
A2	0.14490829	0.00084271								
mu			19150.9767	188.219974						
sigma			6655.8613	209.053057						
A			0.34088221	0.0082889						
shape					7.94571401	0.29114373				
scale					2642.52671	109.434199				
K					5981.95636	106.669471			579.997769	61.9053413
shape1							12.7041569	0.11797602		
scale1							1494.32228	15.9526282		
K1							4830.91298	22.5554771		
shape2							51.6489705	1.75838567		
scale2							650.328054	21.779492		
K2							1394.11663	24.601772		
a									0.05128379	0.00596183
b									0.89289126	0.01923008

Tabla 1: Parámetros para construcción de los ajustes de la figura 7

## Dólares PPP de 1990

1820

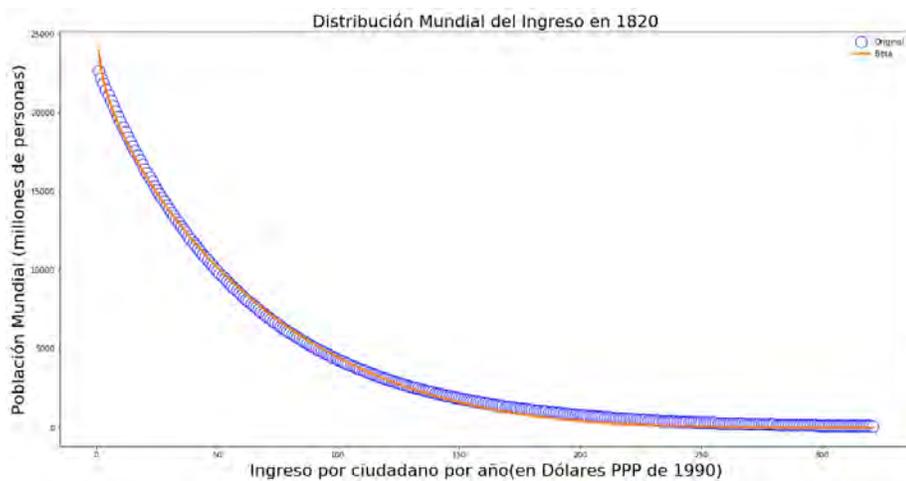


Figura 8: Ajuste de distribución beta discreta en 1820, en dólares PPP de 1990

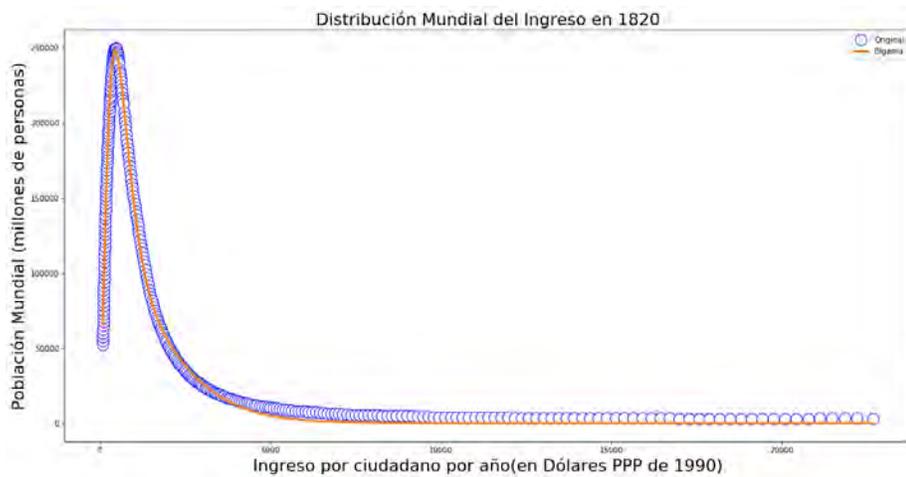


Figura 9: Ajuste de distribución bigama en 1820, en dólares PPP de 1990

1929

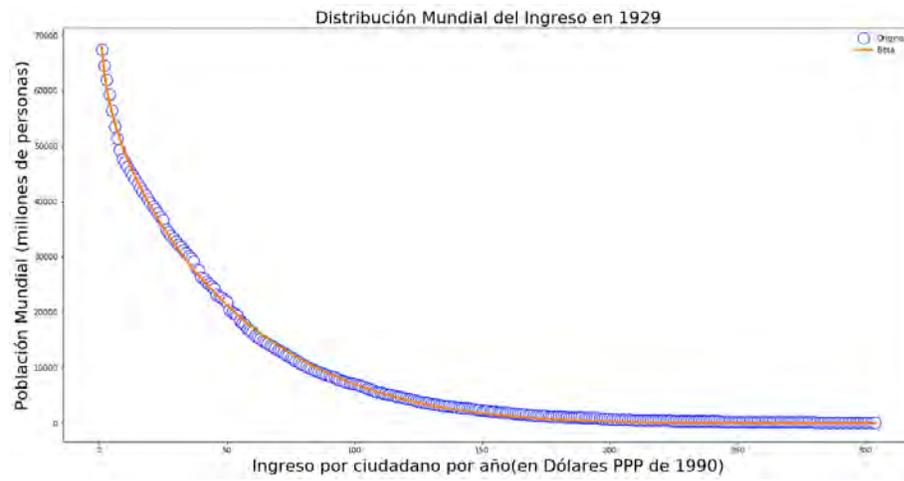


Figura 10: Ajuste de distribución beta discreta en 1929, en dólares PPP de 1990

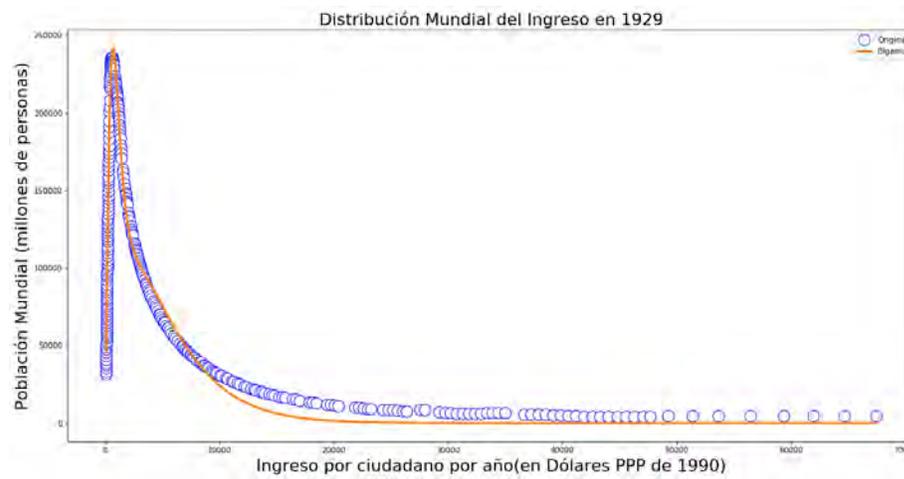


Figura 11: Ajuste de distribución bigama en 1929, en dólares PPP de 1990

1950

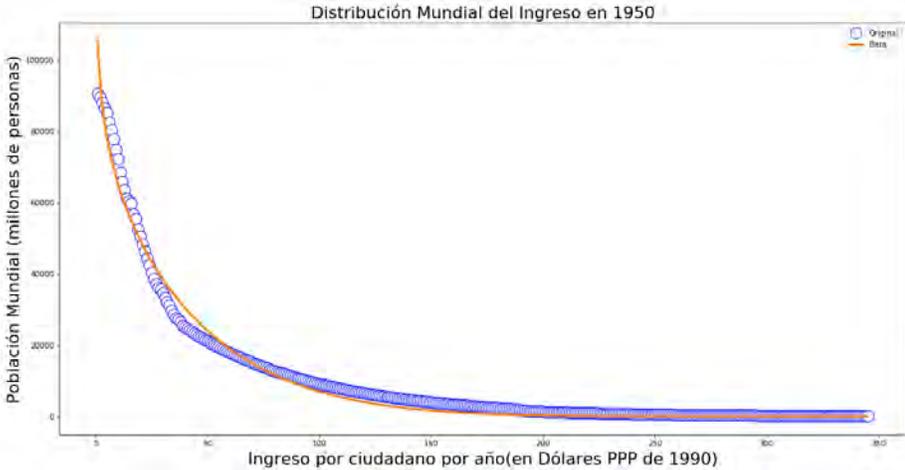


Figura 12: Ajuste de distribución beta discreta en 1950, en dólares PPP de 1990

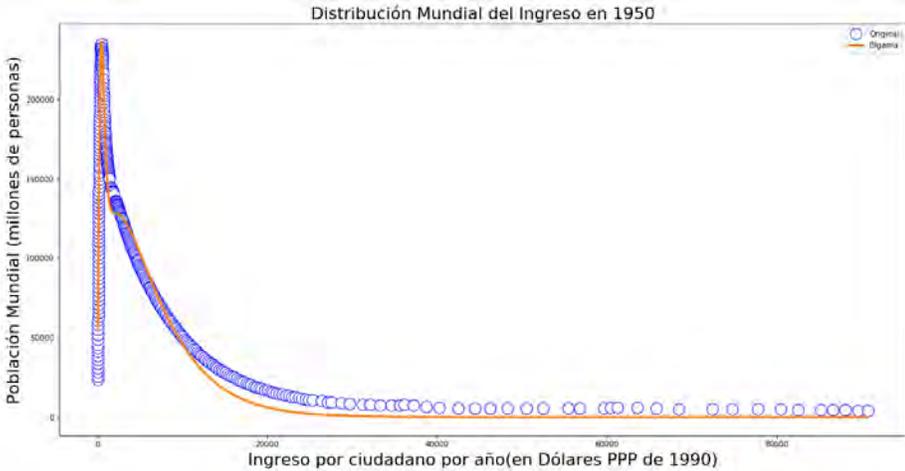


Figura 13: Ajuste de distribución bigama en 1950, en dólares PPP de 1990

1960

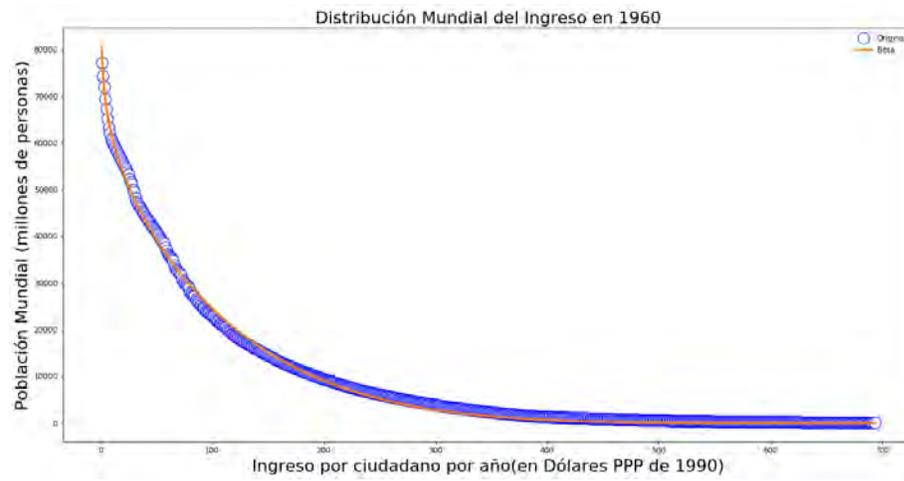


Figura 14: Ajuste de distribución beta discreta en 1960, en dólares PPP de 1990

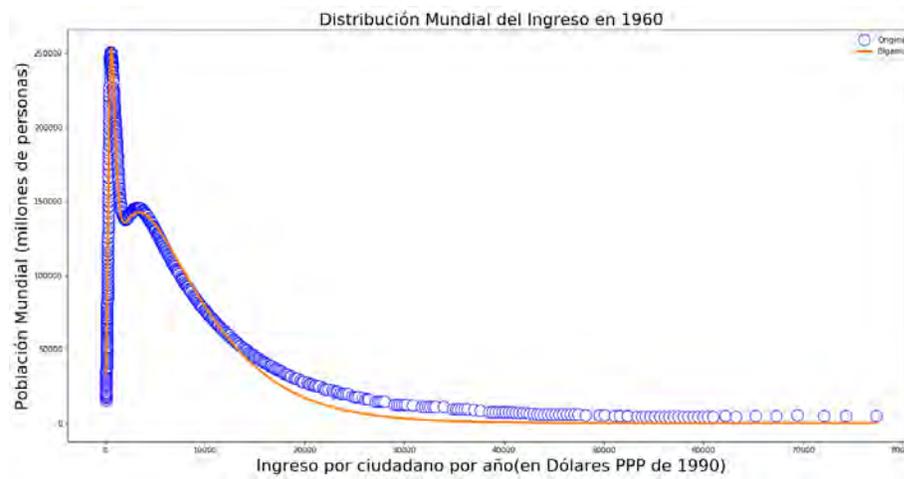


Figura 15: Ajuste de distribución bigama en 1960, en dólares PPP de 1990

1970

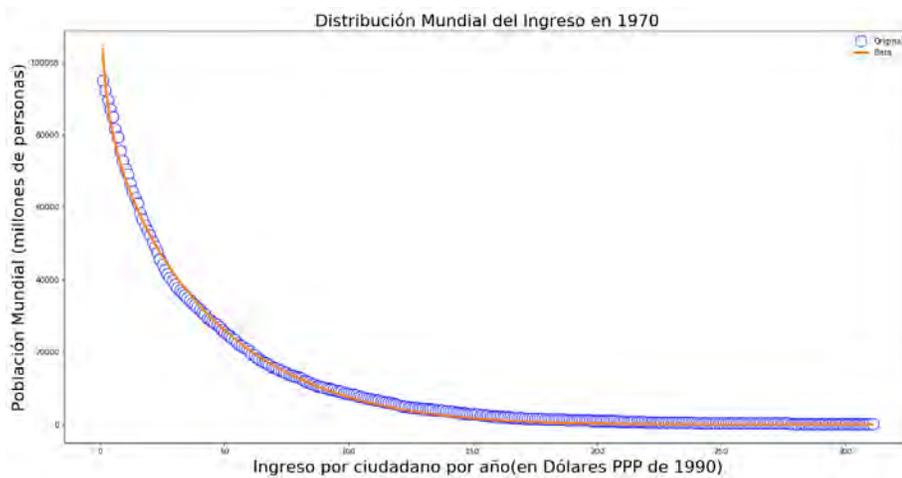


Figura 16: Ajuste de distribución beta discreta en 1970, en dólares PPP de 1990

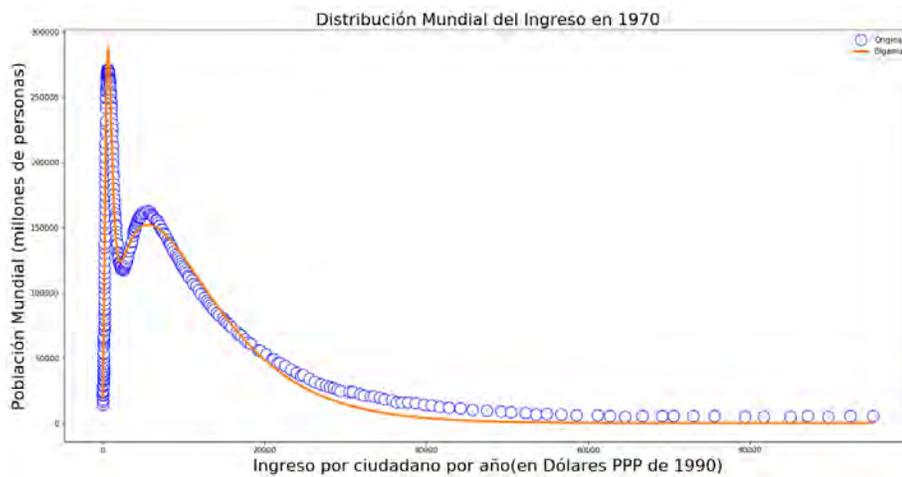


Figura 17: Ajuste de distribución bigama en 1970, en dólares PPP de 1990

1980

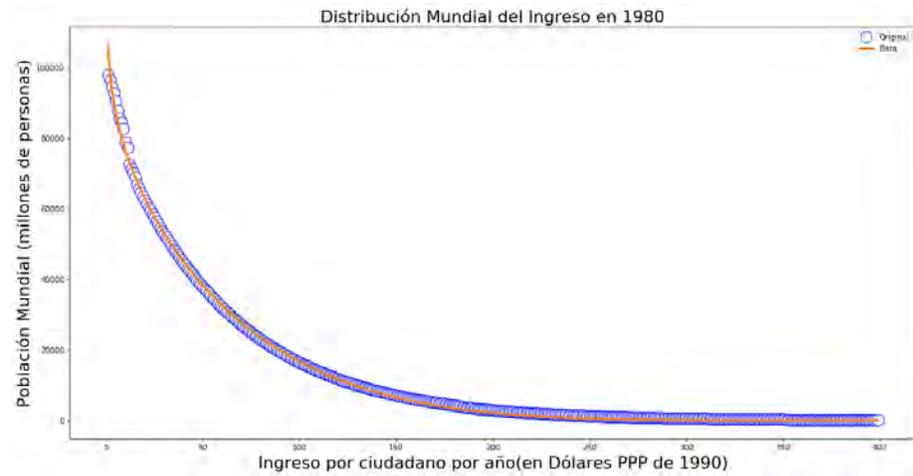


Figura 18: Ajuste de distribución beta discreta en 1980, en dólares PPP de 1990

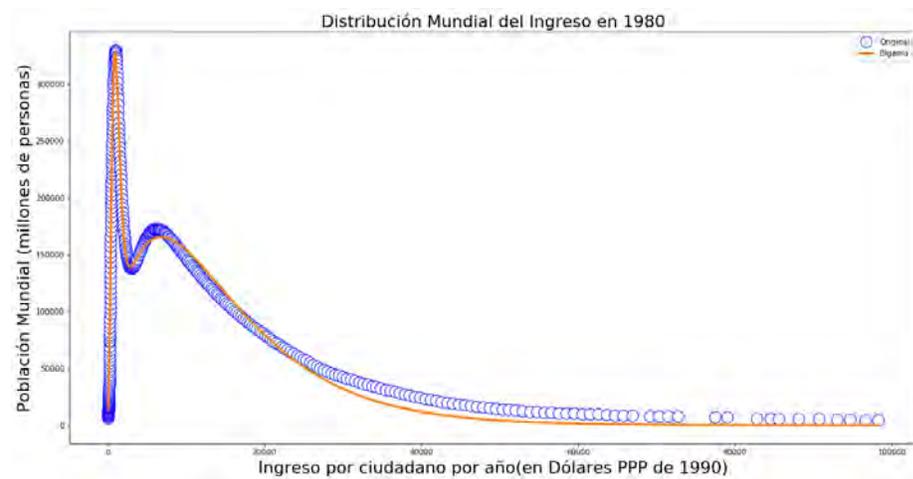


Figura 19: Ajuste de distribución bigama en 1980, en dólares PPP de 1990

2000

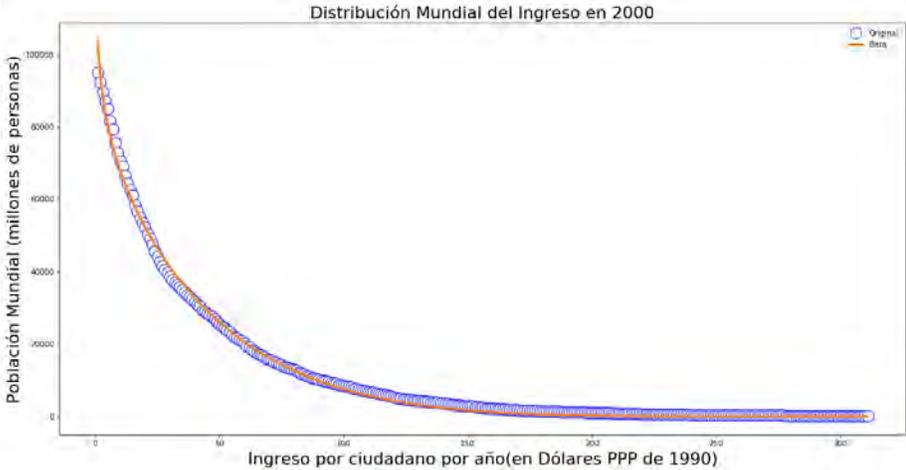


Figura 20: Ajuste de distribución beta discreta en 2000, en dólares PPP de 1990

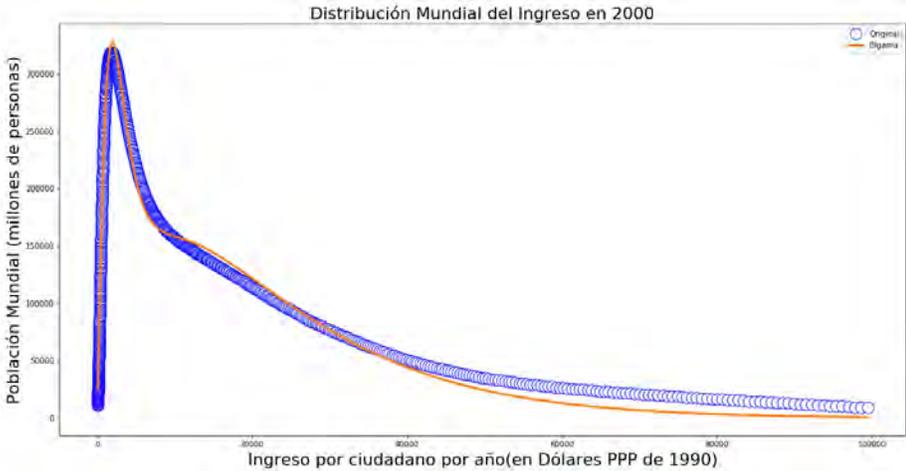


Figura 21: Ajuste de distribución bigama en 2000, en dólares PPP de 1990

## Dólares PPP de 1996

1970

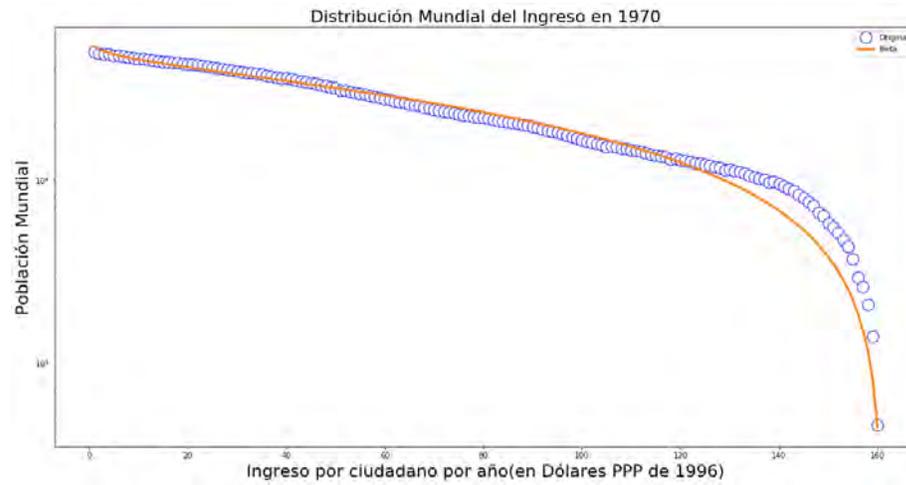


Figura 22: Ajuste de distribución beta discreta en 1970, en dólares PPP de 1996

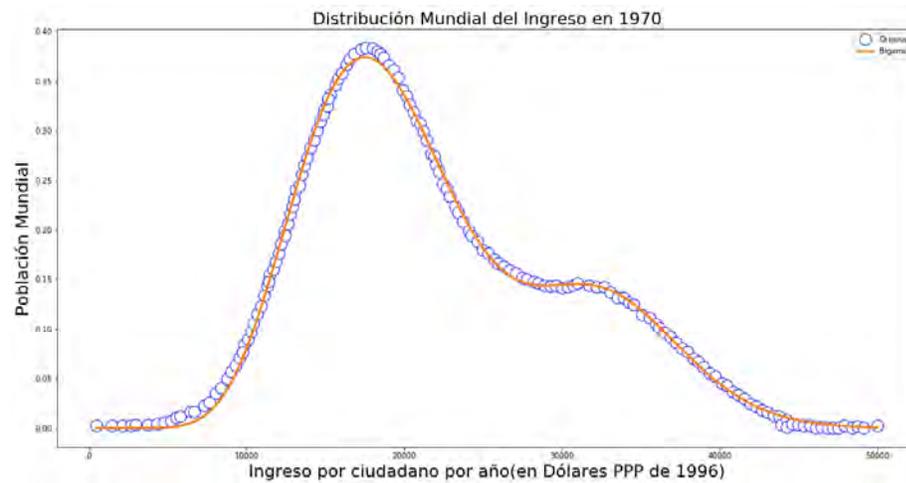


Figura 23: Ajuste de distribución bigama en 1970, en dólares PPP de 1996

1980

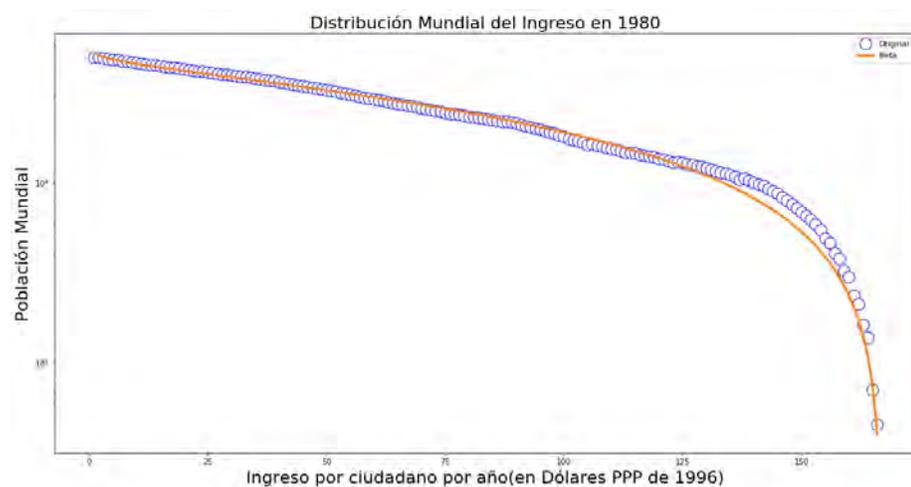


Figura 24: Ajuste de distribución beta discreta en 1980, en dólares PPP de 1996

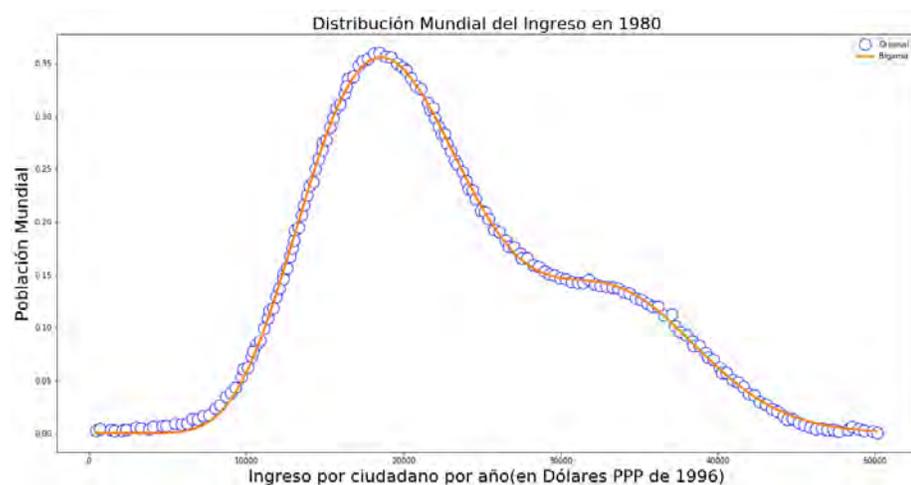


Figura 25: Ajuste de distribución bigama en 1980, en dólares PPP de 1996

1990

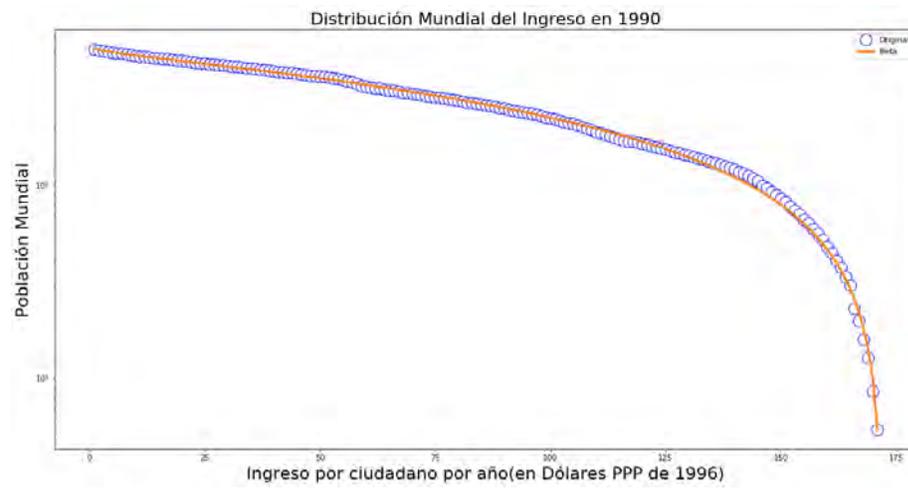


Figura 26: Ajuste de distribución beta discreta en 1990, en dólares PPP de 1996

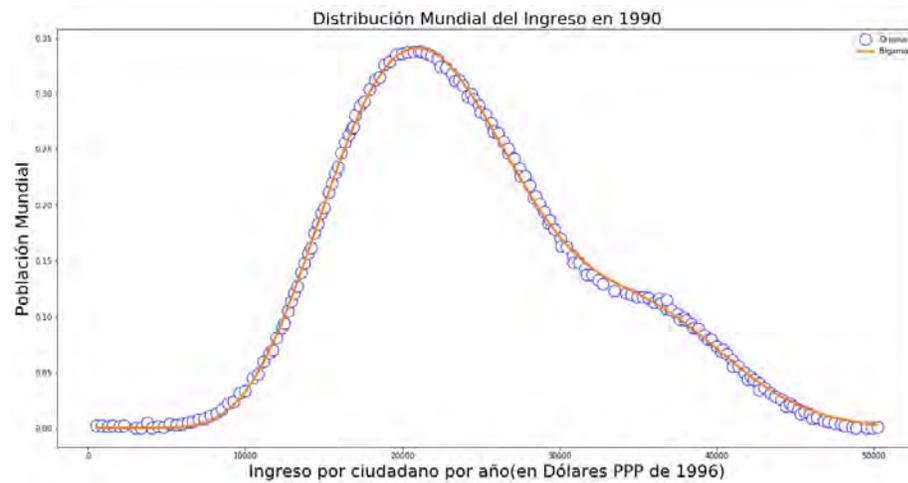


Figura 27: Ajuste de distribución bigama en 1990, en dólares PPP de 1996

1998

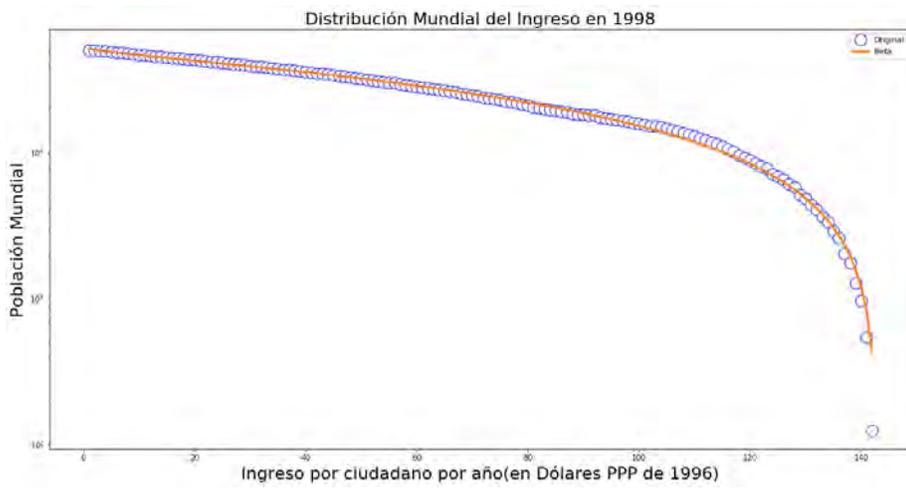


Figura 28: Ajuste de distribución beta discreta en 1998, en dólares PPP de 1996

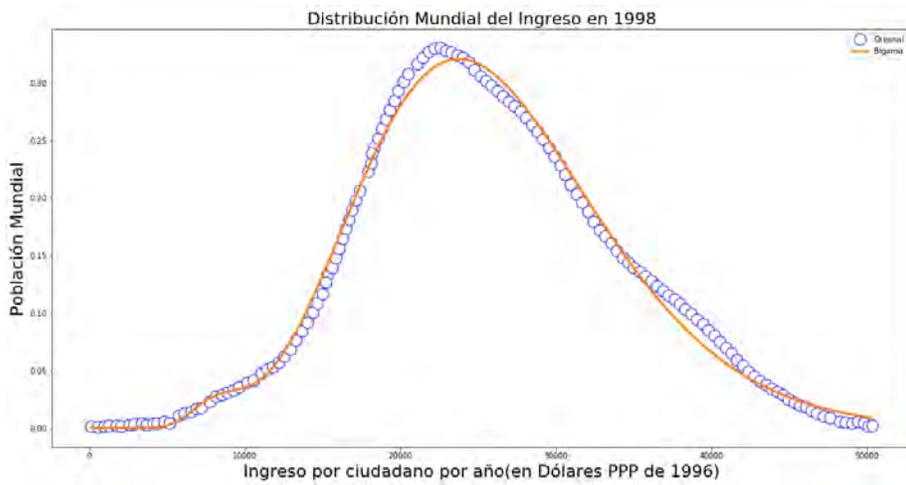


Figura 29: Ajuste de distribución bigama en 1998, en dólares PPP de 1996

## Dólares PPP de 2005

1988

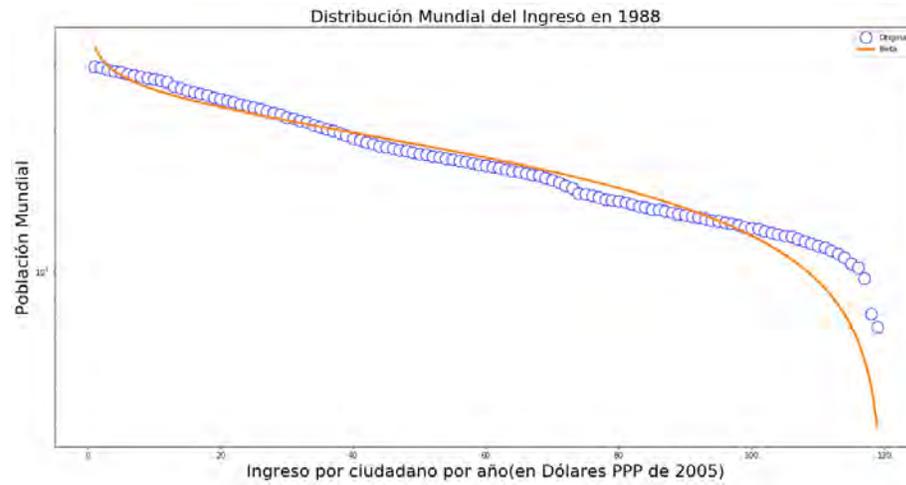


Figura 30: Ajuste de distribución beta discreta en 1988, en dólares PPP de 2005

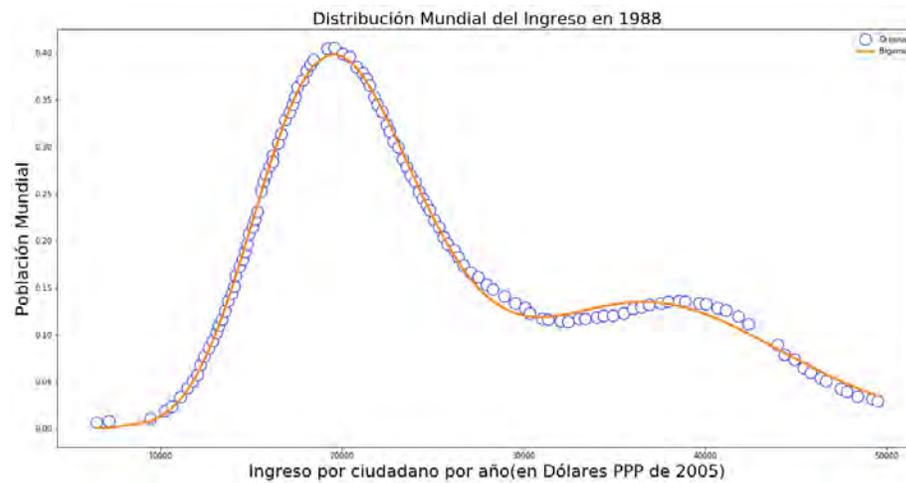


Figura 31: Ajuste de distribución bigama en 1988, en dólares PPP de 2005

1993

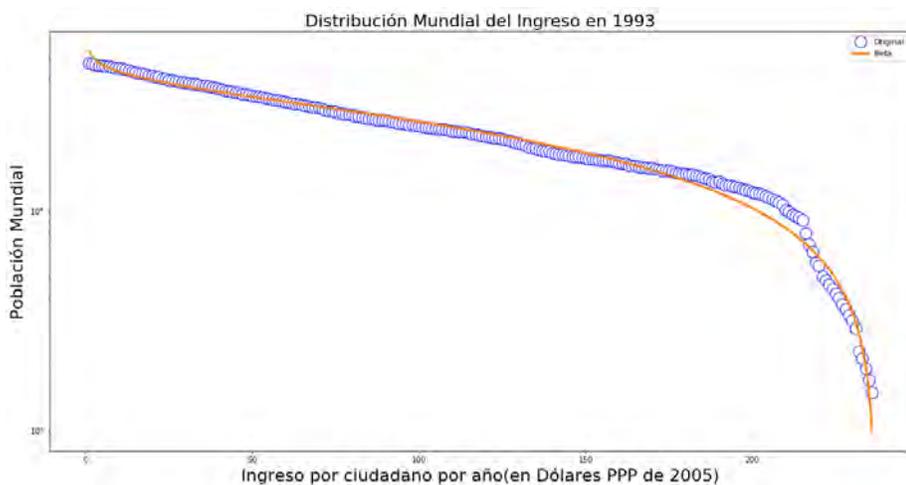


Figura 32: Ajuste de distribución beta discreta en 1993, en dólares PPP de 2005

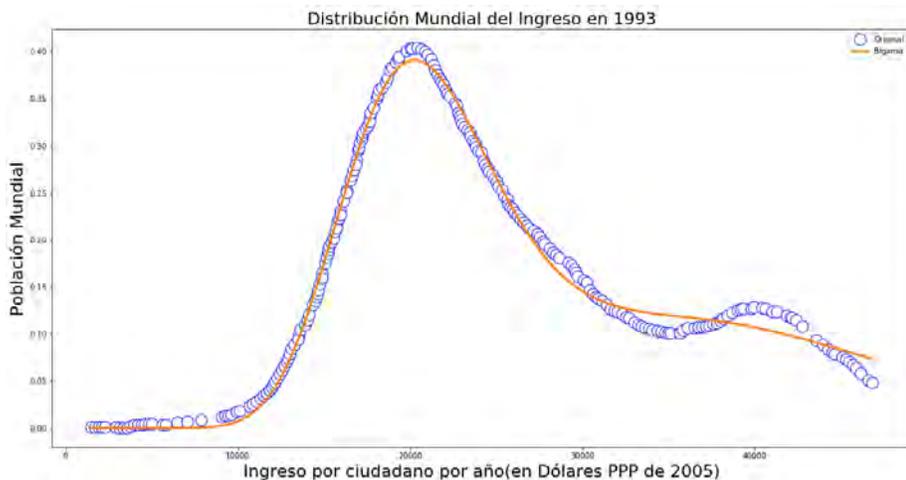


Figura 33: Ajuste de distribución bigama en 1993, en dólares PPP de 2005

1998

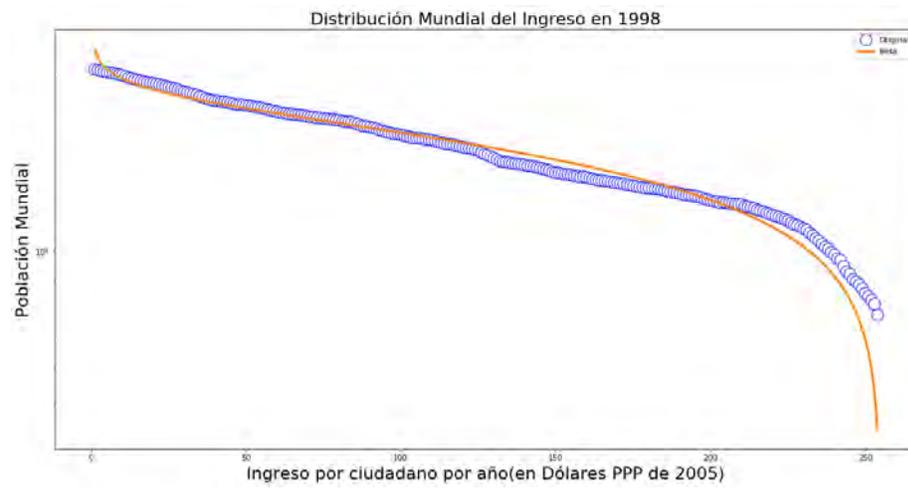


Figura 34: Ajuste de distribución beta discreta en 1998, en dólares PPP de 2005

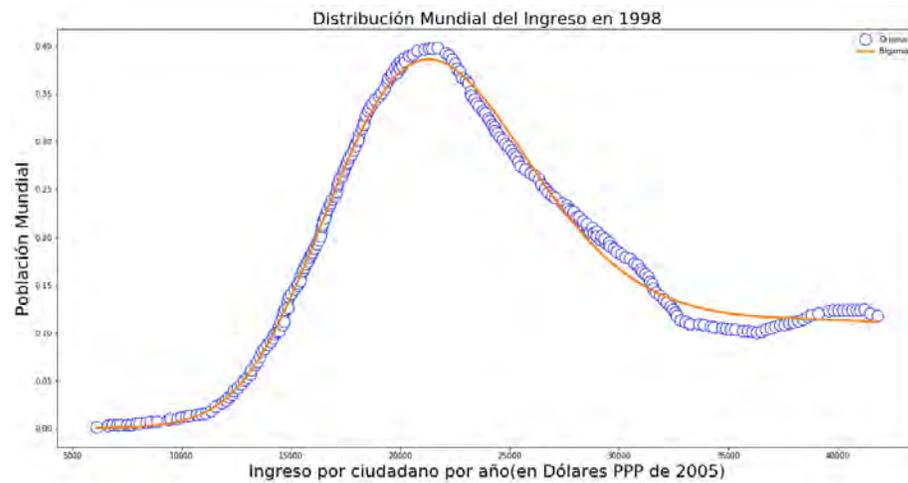


Figura 35: Ajuste de distribución bigama en 1998, en dólares PPP de 2005

2003

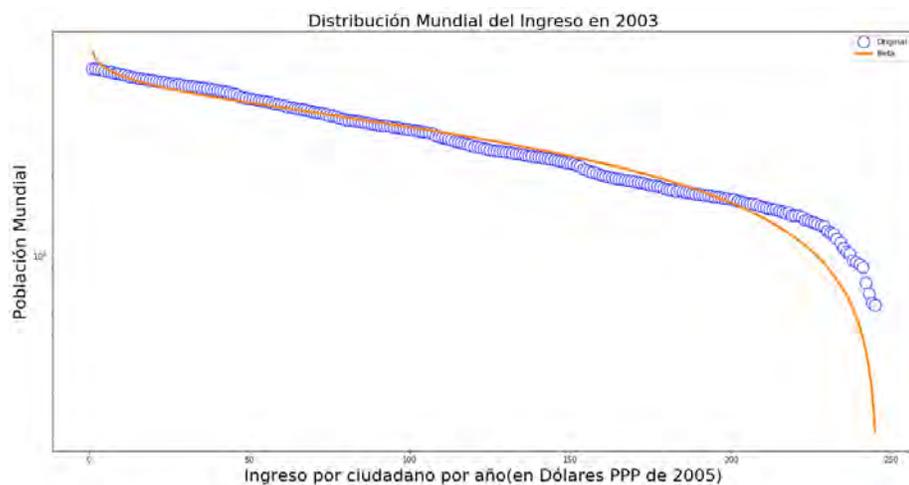


Figura 36: Ajuste de distribución beta discreta en 2003, en dólares PPP de 2005

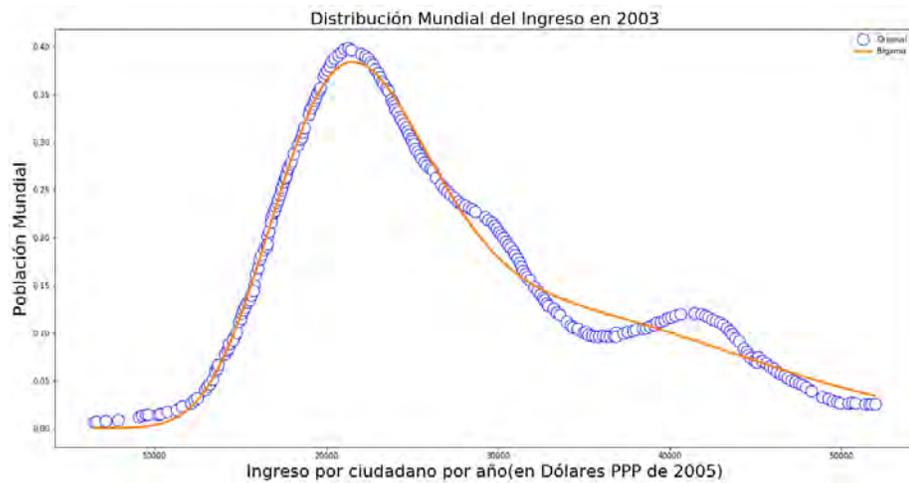


Figura 37: Ajuste de distribución bigama en 2003, en dólares PPP de 2005

2008

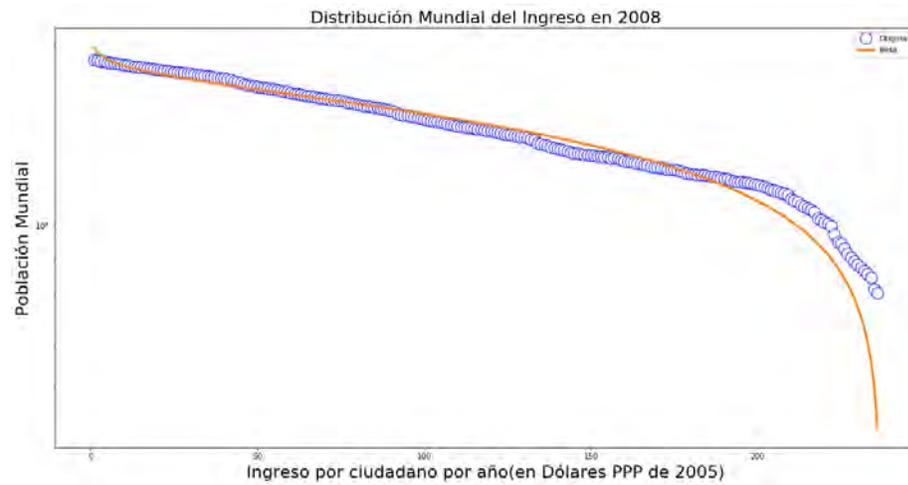


Figura 38: Ajuste de distribución beta discreta en 2008, en dólares PPP de 2005

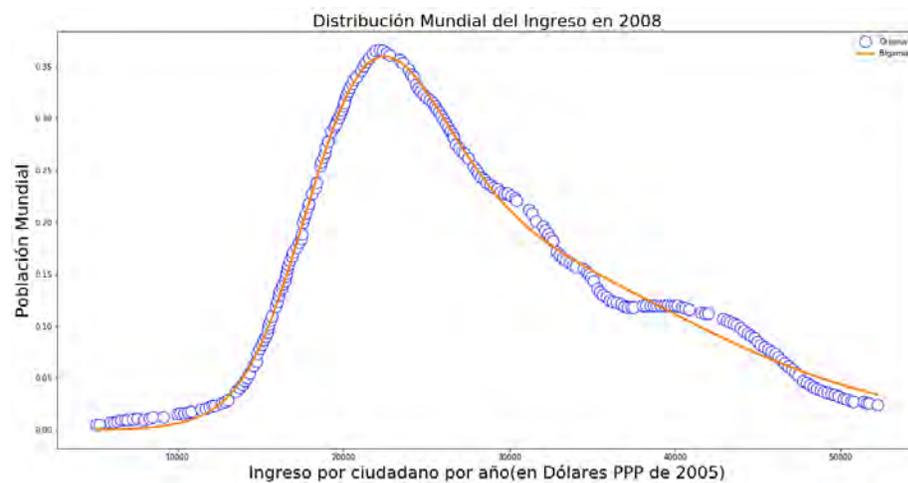


Figura 39: Ajuste de distribución bigama en 2008, en dólares PPP de 2005

## Parámetros de ajuste

1990 PPP	1820		1929		1950		1960		1970		1980		2000	
	Parametros_Bigama	Sigma_Bigama												
shape1	2.879344	0.134774	1.7859	0.108363	1.583394	0.046217	1.671165	0.017616	1.90139	0.038456	4.401406	0.062618	2.472711	0.035378
scale1	226.4983	15.5868	2970.152	179.1618	4121.498	165.8076	5030.156	83.18165	6308.968	204.3128	271.9993	5.205951	1174.55	28.88385
K1	1.63E+08	24499607	7.48E+08	22166927	1.15E+09	19696377	1.66E+09	12679235	2.5E+09	35148637	3.4E+08	5539671	9.29E+08	29394997
shape2	2.254113	0.464251	2.833937	0.11483	3.584024	0.154536	4.28335	0.073532	4.028776	0.070323	1.859538	0.025304	1.753344	0.042225
scale2	858.1587	116.6897	341.5708	19.869	187.2833	10.55123	179.5264	3.961161	232.151	5.712338	7951.976	174.076	13042.54	377.9657
K2	1.8E+08	25483117	2.12E+08	16189634	1.2E+08	6748747	1.46E+08	2807709	2.45E+08	5492498	3.36E+09	33653334	4.91E+09	58734902
	Parametros_Beta	Sigma_Beta												
K	3.96E-06	8.05E-07	7.34E-08	1.64E-08	2.06E-11	1.95E-11	3.34E-10	8.06E-11	2.06E-09	8.05E-10	1.18E-08	2.49E-09	2.06E-09	8.05E-10
a	0.053088	0.003234	0.079844	0.002916	0.13523	0.008853	0.088725	0.002387	0.112266	0.004313	0.09369	0.002426	0.112266	0.004313
b	3.902562	0.034522	4.819731	0.038626	6.189552	0.160437	5.06178	0.036299	5.496552	0.067345	4.981084	0.034853	5.496552	0.067345
1996 PPP	1970		1980		1990		1998							
	Parametros_Bigama	Sigma_Bigama												
shape1	12.70416	0.117976	12.60873	0.096665	65.9651	3.214936	10.70682	0.141245						
scale1	1494.322	15.95263	1599.025	14.25081	568.4329	27.08383	2447.686	34.34791						
K1	4830.913	22.55548	4891.786	19.44176	733.306	24.58718	6182.69	35.21992						
shape2	51.64897	1.758386	50.77883	1.397101	11.81098	0.101749	23.0249	9.349619						
scale2	650.3281	21.77949	686.9644	18.49324	1936.602	19.58357	377.2524	159.1101						
K2	1394.117	24.60177	1349.627	20.74467	5487.882	24.76707	102.5051	19.30794						
	Parametros_Beta	Sigma_Beta												
K	579.9978	61.90534	494.9416	35.73331	585.4162	18.986	466.8456	19.21111						
a	0.051284	0.005962	0.042087	0.003987	0.016136	0.001904	0.019	0.002405						
b	0.892891	0.01923	0.915587	0.012899	0.868844	0.005687	0.950366	0.007568						
2005 PPP	1988		1993		1998		2003		2008					
	Parametros_Bigama	Sigma_Bigama												
shape1	20.28379	0.229294	21.63152	0.481025	21.85397	0.624178	22.61969	0.786897	29.15174	1.176487				
scale1	1011.178	12.7628	966.6673	25.79073	1004.27	30.58539	976.1297	40.76078	769.2074	31.92408				
K1	4447.775	26.61005	4078.955	149.0199	3883.471	142.0599	4016.584	265.5759	2419.675	123.3615				
shape2	30.39311	1.34835	12.63038	2.266678	6.05078	0.760897	13.60247	2.876571	9.001262	0.332334				
scale2	1263.534	55.89253	3098.708	559.2866	7841.532	1257.845	2740.055	526.7551	3681.968	115.3117				
K2	2268.705	41.79955	3033.894	251.7542	5049.028	515.1696	2812.26	309.3761	4441.082	133.9939				
	Parametros_Beta	Sigma_Beta												
K	5476.647	688.293	1566.662	108.5884	4182.895	262.772	3437.729	280.0515	1931.985	163.599				
a	0.130676	0.009236	0.086008	0.003936	0.095902	0.004106	0.08795	0.005069	0.071388	0.005002				
b	0.494703	0.023636	0.646595	0.011391	0.444675	0.009905	0.522336	0.013066	0.627247	0.013803				

Tabla 2: Parámetros de construcción de los ajustes mostrados en las secciones mostradas anteriormente, divididas por cada base de datos, en ellas se encuentran los valores necesarios para reproducir las figuras mostradas, es decir de la función de distribución gama discreta y bigama. Aunque se cuentan con todos los parámetros necesarios ara las demás distribuciones, acopañadas como anexo de manera digital de esta tesis.



# Conclusiones

De los primeros resultados mostrados como Resultados BG-Pareto es inmediata la conclusión de que la parte alta de la distribución, que se presumía Pareto en un principio, no cumple con esta característica, pues el  $p$  valor es prueba de que las series de datos no cumplen con esta característica. Algo importante a notar es que de acuerdo con [?] definiendo una propiedad llamada coherencia de la muestra, se sigue que un conjunto de datos que presentan comportamiento de ley de potencias, al someterse a la operación matemática de la unión, este comportamiento desaparece, es decir si se tiene un conjunto de conjuntos de datos de forma tal que sigan una ley de Zipf, la ley de Zipf no se satisface para subconjuntos o la unión de conjuntos “Zipfianos”. Por lo que podemos ver en diversos estudios, la ley de potencias para la parte alta de la distribución del ingreso presenta una ley de Zipf, al ser varios países los que presentan esta característica, la unión de ellos no necesariamente tiene que seguir el mismo comportamiento.

De la misma forma, la obtención de datos, tanto la recabada por los autores a través de bases de datos del banco mundial y otras fuentes, como la realizada por esta tesis, presentan problemas para los datos en los extremos de la distribución. Esto se debe principalmente a que, en la mayoría de los casos, los países realizan encuestas de hogares para la obtención de los datos y por la soberanía de los países, estas encuestas no están estandarizadas y su realización presenta fallos sistemáticos.

El principal fallo de las encuestas viene del hecho de que las personas que se encuentran en los extremos de las distribuciones son difíciles de localizar, o hasta imposibles. En cualquiera de los dos casos, ya sea la parte de extrema pobreza, los cuales viven en zonas muy remotas en las que es en extremo difícil acceder o simplemente no cuentan con vivienda. De hecho, varios artículos reportan una sobre estimación de este grupo de personas en la distribución, ya que las personas más pobres tienden a inflar el ingreso percibido en las encuestas. En el otro extremo se tiene a las personas que cuentan con no sólo una casa por ejemplo y cuya localización se vuelve problemática. Aún si estas personas llegaran a ser localizadas, el valor del ingreso percibido es subestimado por la inseguridad de cada país, por ejemplo, o la evasión de impuestos, práctica común en varios países. Dados los antecedentes anteriores, las encuestas no

son el único medio para conseguir la información, ya que varios países no cuentan con

estos instrumentos, se recurre a derivar dicha información a partir de datos como el producto interno bruto, por ejemplo. Al inferir estos datos, es lógico que se pierdan exactitud en los valores reportados pues se pierden grados de libertad en la inferencia. Aunado a eso, la recopilación de datos para esta tesis, introduce error al que ya se había presentado, por ello, es que es difícil predecir o explicar un comportamiento en los extremos de las distribuciones.

En el lugar en el que las predicciones son bastante buenas, es en la parte media de las distribuciones, y de hecho ahí cae más del 80% de los datos, por lo que se considera que el ajuste a esta parte representa el comportamiento general o promedio del sistema.

Con base en ello, se aprecia un notable corrimiento del sistema a un mundo más homogéneo y menos desigual. En los años en los que parecían presentarse dos distribuciones en una, se borra con el paso del tiempo los picos, parte del motivo de ello, podría ser la inserción de países como China, India o Rusia (antes URSS) que vinieron a llenar el hueco en el sistema económico, junto con el aparente fenómeno en el que el sistema busca homogenizar a sus componentes.

En cuanto a esta parte de la distribución se pusieron a prueba tres modelos cinéticos de gases ideales; Boltzmann-Gibbs (el más robusto y sencillo de la mecánica de los gases ideales), Gama (modelo en el que las partículas ahorran una fracción constante de su energía-ingreso- en la interacción entre pares) y finalmente log-normal (las partículas ahora guardan una fracción aleatoria de su energía en la interacción entre pares). La función que presentó un mejor ajuste, tanto en correlación como en p valor, fue el ajuste hecho por la función gama, sugiriendo de esta forma que el mundo económicamente y más específicamente el ingreso del mundo puede modelarse de muy buena manera como un sistema de gas ideal con factor de ahorro de energía entre colisiones. Y que este sistema además está buscando su estado de equilibrio acabando con la desigualdad a medida que el tiempo corre.

Aún queda mucho por explorar en cuanto este tipo de análisis como he mencionado anteriormente. El eje rector por el cuál los nuevos resultados enfocados en multimodalidad presentan muchos mejores ajustes y una explicación más acorde a lo que podríamos esperar: Existen principalmente dos clases sociales en nuestro "sistema económico" cuya existencia se deja ver en la estructura de los diversos datos, además, en las tres bases de datos se aprecia que estas tienden a converger en una sola población más homogénea.

La razón por la cuál se usa la función de distribución bigama y no binormal, es que esta es más cercana a la realidad al presentar el factor de ahorro, pues un agente económico en una transacción no transmite todo su ingreso, como haría la binormal. Esto induce la pequeña asimetría que se nota en los resultados y que ajusta tan bien a los datos recopilados, además hay que recordar que la función normal puede ser recuperada de la gama como la definí, por lo cuál puede tratarse a esta como una extensión. Los resultados que muestran los ajustes beta discreta, invitan a un análisis más profundo sobre su relación con una ley de potencias, cuyo estudio se deja para futuros traba-

jos, siendo un buen punto para terminar, la presunción de que el mundo en materia económica tiende a presentar una bimodalidad y esta al paso del tiempo se tiene a unir en una sola moda y un mundo con ingresos más homogéneos.



# Código

## Código implementado

Listing 1: Ejemplo del código que se uso para cada uno de los años y bases de datos paa obtener los resultados mostrados en la tesis

```
1 from pylab import *
2 from scipy.optimize import curve_fit
3 import pandas as pd
4 import numpy as np
5 import scipy.special as sps
6
7 def Gama(x, shape, scale, K):
8     return K*x**(shape-1)*(np.exp(-x/scale))/(sps.gamma(shape)*scale**shape)
9
10 def Bigama(x, shape1, scale1, K1, shape2, scale2, K2):
11     return Gama(x, shape1, scale1, K1)+Gama(x, shape2, scale2, K2)
12
13 def Normal(x, mu, sigma, A):
14     return A*exp(-(x-mu)**2/2/sigma**2)
15
16 def Binormal(x, mu1, sigma1, A1, mu2, sigma2, A2):
17     return Normal(x, mu1, sigma1, A1)+Normal(x, mu2, sigma2, A2)
18
19 def Beta(x, a, b, K):
20     return K*(len(x)+1-x)**b/1/x**a
21
22 Salas = pd.read_csv("Salas.csv")
23
24 anio = 1970
25 x, y = (Salas.Income_1970.dropna(), Salas.Martin_1970.dropna())
26
27 expected_Normal = (15000,2000,0.30)#centro, desviacion estandar, maximo
28 params_Normal, cov_Normal=curve_fit(Normal, x, y, expected_Normal,
29 method='lm')
30 sigma_Normal=sqrt(diag(cov_Normal))
31
32 plt.figure(figsize=(20,10))
33
34 plot(x, y, 'o', markersize=15, markerfacecolor=[1,1,1],
35 markeredgecolor=[0,0,1], label = "Original")
36
```

```

37 plot(x, Normal(x,*params_Normal), lw=3, label='Normal')
38
39 title('Distribucion_Mundial_del_Ingreso_en_%s'%anio, fontsize = 22)
40 xlabel('Ingreso_por_ciudadano_por_anio(en_Dolares_PPP_de_1996)',
41        fontsize = 22)
42 ylabel('Poblacion_Mundial', fontsize = 22)
43
44 legend()
45
46 savefig('Salas_1970_Normal.png', bbox_inches='tight')
47
48 Param_1970_Normal = pd.DataFrame(data=
49 {'Parametros_Normal':params_Normal, 'Sigma_Normal':sigma_Normal},
50 index=Normal._code_.co_varnames[1:])
51
52 #Param_1970_Normal.to_csv("Salas_Param_1970_Normal.csv",
53 encoding='utf-8', index=True)
54
55 expected_Binormal = (15000,2000,0.30, 25000,1000,0.10)
56 params_Binormal, cov_Binormal = curve_fit(Binormal, x, y, expected_Binormal,
57 method='lm')
58 sigma_Binormal = sqrt(diag(cov_Binormal))
59
60 plt.figure(figsize=(20,10))
61
62 plot(x, y, 'o', markersize=15, markerfacecolor=[1,1,1],
63      markeredgcolor=[0,0,1], label = "Original")
64 plot(x, Binormal(x,*params_Binormal), lw=3, label='Binormal')
65
66 title('Distribucion_Mundial_del_Ingreso_en_%s'%anio, fontsize = 22)
67 xlabel('Ingreso_por_ciudadano_por_anio(en_Dolares_PPP_de_1996)',
68        fontsize = 22)
69 ylabel('Poblacion_Mundial', fontsize = 22)
70
71 legend()
72
73 savefig('Salas_1970_Binormal_sola.png', bbox_inches='tight')
74
75 Param_1970_Binormal = pd.DataFrame(data=
76 {'Parametros_Binormal':params_Binormal, 'Sigma_Binormal':sigma_Binormal},
77 index=Binormal._code_.co_varnames[1:])
78 #Param_1970_Binormal.to_csv("Salas_Param_1970_Binormal.csv",
79 encoding='utf-8', index=True)
80
81 a = (abs(params_Binormal[0]-params_Binormal[3]))
82 b = 2*sqrt(params_Binormal[1]*params_Binormal[4])
83
84 test_multimodal = a/b
85
86 ase = params_Binormal[0]-params_Binormal[3]
87 bse = (params_Binormal[1] + params_Binormal[4])
88 bse = bse/2
89
90 separacion_1970 = ase/bse
91
92 if test_multimodal >=1:
93     print("Es_multimodal")

```

```

94
95 ase = params_Binormal[0]-params_Binormal[3]
96 bse = (params_Binormal[1] + params_Binormal[4])
97 bse = bse/2
98 separacion_1970 = ase/bse
99
100 plt.figure(figsize=(20,10))
101 plot(x,y,'o',markersize=15,markerfacecolor=[1,1,1],
102 markeredgecolor=[0,0,1],label="Original")
103 plot(x,Binormal(x,*params_Binormal),lw=8,label='Binormal')
104 plot(x,Normal(x,*params_Binormal[0:3]),lw=4,label='Normal_1')
105 plot(x,Normal(x,*params_Binormal[3:6]),lw=2,label='Normal_2')
106
107 title('Distribucion_Mundial_del_Ingreso_en_%s'%anio,fontsize=22)
108 xlabel('Ingreso_por_ciudadano_por_anio(en_Dolares_PPP_de_1996)',
109 fontsize=22)
110 ylabel('Poblacion_Mundial',fontsize=22)
111
112 legend()
113
114 savefig('Salas_1970_Binormal_partes.png',bbox_inches='tight')
115
116 expected_Gama=(12,1494,4830)
117 params_Gama,cov_Gama=curve_fit(Gama,x,y,expected_Gama,method='lm')
118 sigma_Gama=sqrt(diag(cov_Gama))
119
120 plt.figure(figsize=(20,10))
121 plot(x,y,'o',markersize=15,markerfacecolor=[1,1,1],
122 markeredgecolor=[0,0,1],label="Original")
123 plot(x,Gama(x,*params_Gama),lw=3,label='Gama')
124
125 title('Distribucion_Mundial_del_Ingreso_en_%s'%anio,fontsize=22)
126 xlabel('Ingreso_por_ciudadano_por_anio(en_Dolares_PPP_de_1996)',
127 fontsize=22)
128 ylabel('Poblacion_Mundial',fontsize=22)
129
130 legend()
131
132 savefig('Salas_1970_Gama.png',bbox_inches='tight')
133
134 Param_1970_Gama=pd.DataFrame(data=
135 {'Parametros_Gama':params_Gama,'Sigma_Gama':sigma_Gama},
136 index=Gama._code_.co_varnames[1:])
137 #Param_1970_Gama.to_csv("Salas_Param_1970_Gama.csv",
138 encoding='utf-8',index=True)
139
140 expected_Bigama=(8,2600,5900,8,3000,6000)
141 params_Bigama,cov_Bigama=curve_fit(Bigama,x,y,expected_Bigama,
142 method='lm')
143 sigma_Bigama=sqrt(diag(cov_Bigama))
144
145 plt.figure(figsize=(20,10))
146 plot(x,y,'o',markersize=15,markerfacecolor=[1,1,1],
147 markeredgecolor=[0,0,1],label="Original")
148 plot(x,Bigama(x,*params_Bigama),lw=3,label='Bigama')
149
150 title('Distribucion_Mundial_del_Ingreso_en_%s'%anio,fontsize=22)

```

```

151 xlabel('Ingreso_por_ciudadano_por_ano(en_Dolares_PPP_de_1996)',
152        fontsize = 22)
153 ylabel('Poblacion_Mundial', fontsize = 22)
154
155 legend()
156
157 savefig('Salas_1970_Bigama_sola.png', bbox_inches='tight')
158
159 Param_1970_Bigama = pd.DataFrame(data=
160 { 'Parametros_Bigama': params_Bigama, 'Sigma_Bigama': sigma_Bigama },
161  index=Bigama._code_.co_varnames[1:])
162 #Param_1970_Bigama.to_csv("Salas_Param_1970_Bigama.csv",
163  encoding='utf-8', index=True)
164
165 plt.figure(figsize=(20,10))
166 plot(x,y,'o', markersize=15, markerfacecolor=[1,1,1],
167      markeredgecolor=[0,0,1], label = "Original")
168 plot(x, Bigama(x,*params_Bigama), lw=8, label='Bigama')
169 plot(x, Gama(x,*params_Bigama[0:3]), lw=4, label='Gama_1')
170 plot(x, Gama(x,*params_Bigama[3:6]), lw=2, label='Gama_2')
171
172 title('Distribucion_Mundial_del_Ingreso_en_%s'%ano, fontsize = 22)
173 xlabel('Ingreso_por_ciudadano_por_ano(en_Dolares_PPP_de_1996)',
174        fontsize = 22)
175 ylabel('Poblacion_Mundial', fontsize = 22)
176
177 legend()
178
179 savefig('Salas_1970_Bigama_partes.png', bbox_inches='tight')
180
181 x, y = (Salas.Income_1970.dropna(), Salas.Martin_1970.dropna())
182 Y_nueva = x[:-1]
183 rango = array((range(1, len(Y_nueva)+1)))
184
185 expected_Beta = (1,2,3)
186 params_Beta, cov_Beta = curve_fit(Beta, rango, Y_nueva, expected_Beta,
187  method='lm')
188 sigma_Beta = sqrt(diag(cov_Beta))
189
190 plt.figure(figsize=(20,10))
191 semilogy(rango, Y_nueva, 'o', markersize=15, markerfacecolor=[1,1,1],
192          markeredgecolor=[0,0,1], label = "Original")
193 semilogy(rango, Beta(rango,*params_Beta), lw=3, label='Beta')
194
195 title('Distribucion_Mundial_del_Ingreso_en_%s'%ano, fontsize = 22)
196 xlabel('Ingreso_por_ciudadano_por_ano(en_Dolares_PPP_de_1996)',
197        fontsize = 22)
198 ylabel('Poblacion_Mundial', fontsize = 22)
199
200 legend()
201
202 savefig('Salas_1970_Beta.png', bbox_inches='tight')
203
204 Param_1970_Beta = pd.DataFrame(data=
205 { 'Parametros_Beta': params_Beta, 'Sigma_Beta': sigma_Beta },
206  index=Beta._code_.co_varnames[1:])
207 #Param_1970_Beta.to_csv("Salas_Param_1970_Beta.csv",

```

```
208 encoding='utf-8', index=True)
209
210 Salas_Parametros_1970 = pd.concat([Param_1970_Binormal,
211 Param_1970_Normal,
212 Param_1970_Gama, Param_1970_Bigama, Param_1970_Beta], axis=1, sort=False)
213 Salas_Parametros_1970.to_csv("Salas_Parametros_1970.csv",
214 encoding='utf-8', index=True)
215
216 separaciones = np.negative([separacion_1970, separacion_1980,
217 separacion_1990, separacion_1998])
218 años = [1970, 1980, 1990, 1998]
219
220 plt.figure(figsize=(20,10))
221 plot(años, separaciones, 'o-', markersize=15, markerfacecolor=[1,1,1],
222 markeredgecolor=[0,0,1], label = "Separacion")
223 title('Separacion_bimodal_para_base_de_datos_con_dolares_1996_PPP',
224 fontsize = 22)
225 xlabel('Año', fontsize = 22)
226 ylabel("S_(Separacion_bimodal)", fontsize = 22)
227 legend()
228
229 savefig('Salas_separacion_bimodal.png', bbox_inches='tight')
```

# Índice alfabético

- Agente económicos, 4
- Agentes económicos, 8
- Ajuste, 28
  - Lineal, 28
- Banco Mundial, 2, 23
- Centro de Masa, 11
- Clío Infra, 25
- Conservación
  - energía, 5
  - ingreso, 5
- Dólares PPP, 14
- Deuda, 8
- Dinero, 8
- Distribución, 19
  - Beta Discreta, 18
  - Bimodal, 19
  - Boltzmann-Gibbs, 9, 17
  - energía, 1
  - Exponencial, 15
  - Gama, 9–11
  - Ley de Potencias, 17
  - Log-Normal, 16
  - Multimodal, 19
- Econofísica, 1
- Encuesta, 24
- Entropía, 3, 5
- Espacio fase, 4
- estado, 3
- Evasión Impuestos, 23
- Factor de ahorro, 17
- Gauss-Newton, 29
- Ingreso, 8
- Levenberg-Marquadt, 29
- Ley de Gibrat, 16
- Moda, 19
- p-valor, 21
- Penn world tables, 2
- PPA, *véase también* PPP
- PPP, 2
- Proceso Markoviano, 9
- Riqueza, 8, 10
- Sistema
  - cerrado, 2
  - complejo, 2
- Sociofísica, 1
- Termodinámica, 2
- WebPlotDigitizer, 24

# Bibliografía

- [1] Curve fit documentación en github. <https://github.com/scipy/scipy/blob/v1.1.0/scipy/optimize/minpack.py#L511-L799>. Consultado: 2018-05-23.
- [2] R Alvarez-Martinez, G Martinez-Mekler, and G Cocho. Order–disorder transition in conflicting dynamics leading to rank–frequency generalized beta distributions. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 390(1):120–130, 2011.
- [3] Anand Banerjee, Victor M Yakovenko, and Tiziana Di Matteo. A study of the personal income distribution in australia. *Physica A: statistical mechanics and its applications*, 370(1):54–59, 2006.
- [4] Brittany U Burda, Elizabeth A O’Connor, Elizabeth M Webber, Nadia Redmond, and Leslie A Perdue. Estimating data from figures with a web-based program: Considerations for a systematic review. *Research synthesis methods*, 8(3):258–262, 2017.
- [5] Karl E Case and Ray C Fair. *Principles of microeconomics*. Pearson Education, 2007.
- [6] Bikas K Chakrabarti, Anirban Chakraborti, Satya R Chakravarty, and Arnab Chatterjee. *Econophysics of income and wealth distributions*. Cambridge University Press, 2013.
- [7] Aaron Clauset, Cosma Rohilla Shalizi, and Mark EJ Newman. Power-law distributions in empirical data. *SIAM review*, 51(4):661–703, 2009.
- [8] Adrian Drăgulescu and Victor M Yakovenko. Evidence for the exponential distribution of income in the usa. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, 20(4):585–589, 2001.
- [9] Adrian Drăgulescu and Victor M Yakovenko. Exponential and power-law probability distributions of wealth and income in the united kingdom and the united states. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 299(1-2):213–221, 2001.
- [10] Daniel Drevon, Sophie R Fursa, and Allura L Malcolm. Intercoder reliability and validity of webplotdigitizer in extracting graphed data. *Behavior modification*, 41(2):323–339, 2017.

- [11] Robert Feenstra, Robert Inklaar, and Marcel Timmer. Recasting international income differences: The next-generation penn world table. 2013.
- [12] Juan C Ferrero. The statistical distribution of money and the rate of money transference. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 341:575–585, 2004.
- [13] Mauro Gallegati and Antonio Palestrini. The complex behavior of firms' size dynamics. *Journal of Economic Behavior & Organization*, 75(1):69–76, 2010.
- [14] Robert Gibrat. *Les inégalités économiques: applications: aux inégalités des richesses, à la concentration des entreprises, aux populations des villes, aux statistiques des familles, etc: d'une loi nouvelle: la loi de l'effet proportionnel*. Librairie du Recueil Sirey, 1931.
- [15] Corrado Gini. Measurement of inequality of incomes. *The Economic Journal*, 31(121):124–126, 1921.
- [16] Alan Heston, Robert Summers, and Bettina Aten. *Penn World Tables...* Computing in the Humanities and social sciences, University of Toronto, 1998.
- [17] Ryan T Hietpas, Jeffrey D Jensen, and Daniel NA Bolon. Experimental illumination of a fitness landscape. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, page 201016024, 2011.
- [18] Hajo Holzmann and Sebastian Vollmer. A likelihood ratio test for bimodality in two-component mixtures with application to regional income distribution in the eu. *ASIA Advances in Statistical Analysis*, 92(1):57–69, 2008.
- [19] Christoph Lakner and Branko Milanovic. *Global income distribution: from the fall of the Berlin Wall to the Great Recession*. The World Bank, 2013.
- [20] Mehdi Lallouache, Aymen Jedidi, and Anirban Chakraborti. Wealth distribution: To be or not to be a gamma? *arXiv preprint arXiv:1004.5109*, 2010.
- [21] I Lawrence and Kuei Lin. A concordance correlation coefficient to evaluate reproducibility. *Biometrics*, pages 255–268, 1989.
- [22] Gustavo Martínez-Mekler, Roberto Alvarez Martínez, Manuel Beltrán del Río, Ricardo Mansilla, Pedro Miramontes, and Germinal Cocho. Universality of rank-ordering distributions in the arts and sciences. *PLoS One*, 4(3):e4791, 2009.
- [23] Mariola Moeyaert, Daniel Maggin, and Jay Verkuilen. Reliability, validity, and usability of data extraction programs for single-case research designs. *Behavior modification*, 40(6):874–900, 2016.
- [24] Vilfredo Pareto. *Cours d'économie politique*, volume 1. Librairie Droz, 1964.
- [25] Peter CB Phillips. A remark on bimodality and weak instrumentation in structural equation estimation. *Econometric Theory*, 22(5):947–960, 2006.

- [26] Paul D. Beale R. K. Pathria. *Statistical Mechanics*. Butterworth-Heinemann, 2011.
- [27] Surajit Ray, Bruce G Lindsay, et al. The topography of multivariate normal mixtures. *The Annals of Statistics*, 33(5):2042–2065, 2005.
- [28] CA Robertson and JG Fryer. Some descriptive properties of normal mixtures. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1969(3-4):137–146, 1969.
- [29] Ankit Rohatgi.
- [30] Max Roser.
- [31] Xavier Sala-i Martin. The world distribution of income: falling poverty and... convergence, period. *The Quarterly Journal of Economics*, 121(2):351–397, 2006.
- [32] Paul Anthony Samuelson. *Economics*. Economics, 1998.
- [33] Rafael Sanjuán. Mutational fitness effects in rna and single-stranded dna viruses: common patterns revealed by site-directed mutagenesis studies. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London B: Biological Sciences*, 365(1548):1975–1982, 2010.
- [34] A Christian Silva and Victor M Yakovenko. Temporal evolution of the “thermal” and “superthermal” income classes in the usa during 1983–2001. *EPL (Europhysics Letters)*, 69(2):304, 2004.
- [35] P Soriano-Hernández, M del Castillo-Mussot, I Campirán-Chávez, and JA Montemayor-Aldrete. Wealth of the world’s richest publicly traded companies per industry and per employee: Gamma, log-normal and pareto power-law as universal distributions? *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 471:733–749, 2017.
- [36] P Soriano-Hernández, M del Castillo-Mussot, O Córdoba-Rodríguez, and R Mansilla-Corona. Non-stationary individual and household income of poor, rich and middle classes in mexico. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 465:403–413, 2017.
- [37] Wataru Souma. Physics of personal income. In *Empirical science of financial fluctuations*, pages 343–352. Springer, 2002.
- [38] Jan Luiten Van Zanden, Joerg Baten, Marco Mira d’Ercole, Auke Rijpma, Conal Smith, and Marcel Timmer. *How was life?: Global well-being since 1820*. OECD publishing, 2014.
- [39] Neal A Weber. Dimorphism in the african oecophylla worker and an anomaly (hym.: Formicidae). *Annals of the Entomological Society of America*, 39(1):7–10, 1946.

- [40] Victor M Yakovenko and J Barkley Rosser Jr. Colloquium: Statistical mechanics of money, wealth, and income. *Reviews of Modern Physics*, 81(4):1703, 2009.
- [41] Chidong Zhang, Brian E Mapes, and Brian J Soden. Bimodality in tropical water vapour. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society: A journal of the atmospheric sciences, applied meteorology and physical oceanography*, 129(594):2847–2866, 2003.