



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Análisis del comportamiento viscoelástico de
tuberías de polietileno de alta densidad

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Física

PRESENTA:

Yessica Noemi Vargas Galicia

TUTOR

Dr. Rafaél Bernardo Carmona Paredes



CIUDAD UNIVERSITARIA, CD.MX., 2018



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

HOJA DE CONTACTO PARA ENVÍO DE CITATORIO

Nombre del Alumno(a): Yessica Noemi Vargas Galicia

Carrera: Física

Número de Cuenta: 310337562

Modalidad de titulación: Tesis

Correo electrónico: naomi_ri@ciencias.unam.mx

Grado y Nombre del Propietario: Dr. Fermín Alberto Viniegra Heberlein

Correo electrónico: oguiviniegra@ciencias.unam.mx

Grado y Nombre del Propietario: M. en C. José Luis Jiménez Ramírez

Correo electrónico: jlj@xanum.uam.mx

Grado y Nombre del Propietario: Dr. Rafael Bernardo Carmona Paredes

Correo electrónico: RCarmonaP@iingen.unam.mx

Grado y Nombre del Suplente: Dr. Moisés Berezowsky Verduzco

Correo electrónico: MBerezowskyV@iingen.unam.mx

Grado y Nombre del Suplente: Dr. Roberto Velasco Segura

Correo electrónico: roberto.velasco@icat.unam.mx

*A mis padres Joel y Esperanza
Por impulsarme a estudiar cualquier cosa de la que yo me sintiera capaz.
A mis hermanos Joel y Eduardo
Por ser mis compañeros incondicionales de risas y alegrías.*

Reconocimientos

Agradezco al Instituto de Ingeniería de la UNAM por la beca y los espacios de trabajo que me asignó y sin los cuales la realización de esta tesis no habría sido posible. Al Dr. Carmona Paredes por todas sus enseñanzas, por representar una figura de admiración y modelo a seguir, por haber confiado en mí desde el inicio de mi servicio social y durante toda la realización de este proyecto, gracias al cual mis horizontes sobre el quehacer de un físico se han ampliado.

Para los miembros de mi familia, mis padres que sin importar las circunstancias han sabido ser un equipo que siempre tuvo como prioridad ofrecer a sus hijos educación, a mi hermano menor Eduardo por representar en mi vida una continua alegría desde el momento en que nació y por el que continuamente me motivo para ser una mejor hermana mayor, con un mérito especial agradezco al mayor Joel, no solo por que sus consejos y cariño siempre me aclaran el camino, sino también por ayudarme con la realización de la figura 3.1 y por transmitirme sus conocimientos en el manejo de AutoCad, programa con el que realicé la mayor parte de las figuras de esta tesis.

A la UNAM y la Facultad de Ciencias, las amistades y las múltiples experiencias que me dejó, gracias a las cuales todo este proceso de formación fue mucho más ameno. Teniendo en particular consideración a Michelle, quien me acercó al instituto y con la que ha representado un enorme placer crecer en esta etapa de la vida.

A Vanessa que desde los quince años se convirtió en mi mejor amiga, por que hemos compartido casi una década de confidencias y muchos otros primeros momentos que sin ella no hubiesen sido épicos.

Para aquél que me sonrió por primera vez cuando aún éramos unos niños, que en esta última fase ha sabido alentarme, ofrecerme su incondicional apoyo, tierna admiración y amor, Mijail.

Declaración de autenticidad

Por la presente declaro que, salvo cuando se haga referencia específica al trabajo de otras personas, el contenido de esta tesis es original y no se ha presentado total o parcialmente para su consideración para cualquier otro título o grado en esta o cualquier otra Universidad. Esta tesis es resultado de mi propio trabajo y no incluye nada que sea el resultado de algún trabajo realizado en colaboración, salvo que se indique específicamente en el texto.

Yessica Noemi Vargas Galicia. Ciudad Universitaria, Ciudad de México, 2018

Resumen

Los transitorios hidráulicos son un fenómeno físico presente en todos los sistemas de conducción de agua potable, uno de los materiales más usados actualmente para la fabricación de las tuberías es el polietileno de alta densidad, perteneciente a un grupo de materiales con características intermedias entre un sólido elástico y un fluido viscoso, llamados viscoelásticos. Estos materiales son estudiados a través de modelos mecánicos, como el del sólido lineal estándar basado en tres parámetros E_1 , E_2 y η , que describe la respuesta del material al ser sometido a esfuerzos. Tal descripción hace posible acoplar matemáticamente la conducta del polietileno con la ecuación dinámica, de conservación de masa y constitutiva del fluido, obteniendo al final una ecuación diferencial parcial que describe el problema y cuya solución es posible mediante el uso del método numérico llamado de las características, mismo que permite simular el fenómeno transitorio incluyendo las pérdidas de energía a partir de las condiciones de flujo permanente inicial.

Se intenta entonces reproducir la respuesta viscoelástica para una tubería de 300 m de polietileno de alta densidad, sometida a un fenómeno transitorio, teniendo como principales hipótesis que la velocidad y la fricción son constantes, que la pared del conducto es delgada, y que las deformaciones presentes son pequeñas (*small strain*). Por simetría en análisis se hace en dos dimensiones. Haciendo por último una comparación con datos experimentales pertenecientes al Instituto de Ingeniería de la UNAM, para tubos fabricados con la resina PPI 4710.

Índice general

Índice de figuras	XI
Índice de tablas	XIII
1. Introducción	1
1.1. Presentación	1
1.2. Objetivos	2
1.3. Motivación	3
1.4. Planteamiento del problema	3
1.5. Metodología	4
1.6. Estructura de la tesis	5
2. Fundamentos Teóricos	7
2.1. Polietileno de alta densidad	7
2.1.1. Clasificación de las resinas	10
2.2. Viscoelasticidad	10
2.2.1. Modelo de Maxwell	12
2.2.2. Modelo de Kelvin-Voigt	13
2.2.3. Modelo del Sólido Lineal Estándar	14
2.3. El problema de un tubo de pared delgada sometido a presión interna.	17
2.4. Conceptos básicos de la hidráulica de conductos a presión	20
2.5. Transitorios Hidráulicos	23
2.6. Ecuaciones fundamentales que describen una tubería con pared elástica y fluido compresible	26
2.6.1. Conservación de la masa	26
2.6.2. Velocidad y aceleración	29
2.6.3. Ecuación dinámica	29
2.6.4. Ecuación Constitutiva del fluido	32
3. Descripción del experimento	33
3.1. Diseño y construcción del sistema	33
3.2. Obtención de datos	35

4. Desarrollo de la Metodología	39
4.1. Hipótesis	39
4.2. Implicaciones	39
4.3. Cambios propuestos al Modelo del Sólido Lineal Estándar	40
4.4. Desarrollo matemático	42
5. Modelo Numérico y Resultados	47
5.1. Condiciones iniciales	48
5.2. Implementación del método	49
5.3. Estimación de variables	50
5.3.1. El caso de σ_ν	51
5.4. Resultados	52
5.5. Discusión de los resultados	55
6. Conclusiones	57
A. Desarrollos Complementarios	59
A.1. Método de las características.	59
A.2. Justificación de la hipótesis 1	62
A.3. Ecuación de Darcy-Weisbach	64
Bibliografía	65

Capítulo 1

Introducción

1.1. Presentación

Un plástico es un polímero sintético, los cuales de manera reciente se han convertido en uno de los descubrimientos más importantes para la civilización actual. No existe una fecha determinante de su aparición debido a que el proceso fue paulatino e inició desde finales del siglo XIX. El primer premio nobel adjudicado al estudio de polímeros, fue otorgado en 1953 al químico alemán Hermann Staudinger; desde entonces su uso comenzó a extenderse y Estados Unidos por ejemplo, estos materiales representan el sector con mayor crecimiento en la industria química desde la segunda guerra mundial. Por esta misma razón, se estima que más de una tercera parte de cada dólar destinado a la investigación en química, en dicho país, es gastado en investigación relacionada con polímeros [9]. Y no es para menos, son una clase única de materiales con un rango amplio de aplicaciones y una estructura molecular mucho más compleja que la de materiales más tradicionales como los metales. Esta característica es también la responsable de las múltiples y útiles propiedades que los hacen tan valorados por la industria.

Los plásticos se dividen en dos grupos básicos según su capacidad para ser fundidos y conservar la misma estructura molecular, en el caso afirmativo son llamados termoplásticos y en el caso contrario de denominan termoestables. El polietileno (PE) fue descubierto en 1933, desde entonces y hasta ahora es uno de los materiales termoplásticos más usados, algunas de sus aplicaciones más comunes incluyen la distribución de gas natural, agua potable, así como su empleo en tuberías industriales, mineras y marinas. Es en este sector de la industria de la construcción que este trabajo encuentra su justificación para estudiar el comportamiento viscoelástico del PE de alta densidad.

Dentro de los amplios beneficios que se podrían incluir para las tuberías fabricadas con PE están: su alta resistencia sísmica; la resistencia biológica, una vez instalada la tubería no será afectada por microorganismos ya que el PE no es un medio donde

1. INTRODUCCIÓN

prolifere bacterias, hongos, esporas, etc.; además representan una ventaja en los costos de mantenimiento a largo plazo, su rango de longevidad va de 50 – 100 años siguiendo las especificaciones del fabricante; y no susceptibles a la corrosión galvánica.

Muchas de las propiedades en el desempeño de tuberías de PE son el resultado directo de dos importantes propiedades físicas, una es la ductilidad, que es la habilidad del material para deformarse en respuesta a un esfuerzo sin fracturarse o quebrarse; la segunda es la viscoelasticidad, que como se vera más adelante es el resultado de una muy diversa combinación de elementos que se comportan como un sólido elástico y como fluidos; y resultan en dos únicas propiedades que son empleadas en el diseño de sistemas de tuberías de agua, la deformación y el esfuerzo.

La descripción de estos fenómenos es usualmente desarrollada en las bases de dos aproximaciones, la primera se basa en analogías mecánicas que combinan amortiguadores y resortes, capaces de reproducir de manera aproximada, la respuesta viscoelástica de un sistema real; la segunda es desarrollada bajo las bases de teorías moleculares que toman en cuenta el comportamiento de la estructura.

Por último vale la pena señalar que la investigación de los polímeros no está reservada a una sola disciplina, debido a la complejidad que representan estos materiales y a sus muchas aplicaciones, pueden y deben ser estudiados desde el punto de vista de la química, la física y también de la ingeniería.

1.2. Objetivos

Los objetivos principales de este trabajo se dividen en dos, el primero incluye un breve estudio teórico de la naturaleza molecular del PE de alta densidad, por ser la responsable de su respuesta viscoelástica, analizando de manera más específica el modelo del sólido lineal estándar, del que se pretende buscar una ampliación que incorpore una segunda dimensión espacial.

En segundo lugar con base en los conocimientos del primer punto y empleando el método de las características, se busca realizar una simulación del peculiar amortiguamiento de las ondas de sobrepresión que ofrecen las tuberías de PE de alta densidad.

Debe aclararse que los alcances esperados del modelo en cuestión, son específicos para la resina PPI 4710 (equivalente a la designación europea PE100) de la que se disponen datos experimentales previamente recabados por el Instituto de Ingeniería de la UNAM.

1.3. Motivación

Es posible encontrar trabajos previos para el análisis de tuberías de polietileno, fabricadas con resinas equivalentes a la PPI 4710, e igualmente sometidas a transitorios hidráulicos, como es el caso de [4]; en donde el modelo mecánico empleado por dicho artículo usa seis elementos de Kelvin-Voigt, para una tubería de $270m$ ubicada en el Imperial College London. Aunque el modelo matemático es validado por los datos experimentales y muestra una ventaja con respecto a un análisis elástico, los más de trece parámetros figura 1.1, hacen difícil una interpretación física de los mismos.

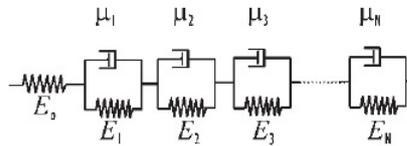


Figura 1.1: Modelo generalizado de Kelvin-Voigt [4].

El modelo del sólido lineal estándar (SLE) es el más frecuente en la literatura para describir el fenómeno viscoelástico, y si bien representa una idealización, tiene como principal ventaja el hecho de que resulta fácil de tratar en términos matemáticos debido a que el número de parámetros con los que se caracteriza al material se reduce a tres E_1 , E_2 y η , por lo que debería ser más sencillo de incorporar con las ecuaciones constitutivas que describen al sistema. Es por ello también que se toma como punto de partida para añadir una segunda dimensión, como se propone en este trabajo, ya que hasta ahora en general, solo se registran aproximaciones considerando únicamente la deformación en una dimensión espacial.

Tomando como precedente el artículo [4] se buscará entonces un modelo matemático capaz de reproducir el amortiguamiento de un fenómeno transitorio, sin olvidar el hecho de que la aplicación necesita procedimientos prácticos.

Un tratamiento más teórico con respecto al problema de un cilindro viscoelástico de pared delgada, que incluya la descripción tensorial de los esfuerzos y deformaciones de la tubería, se encuentra en [10]. Mismo que pone en evidencia el amplio uso del SLE.

1.4. Planteamiento del problema

Los transitorios hidráulicos descritos de manera breve como los cambios súbitos y de corta duración de presión en el flujo de un sistema de tuberías, son capaces de generar

fracturas en las instalaciones, estos fenómenos representan un inconveniente sumamente relevante para la distribución de, por ejemplo, agua potable, ya que provocan fallas y rupturas.

La forma en la que se abordará un problema estará en función del tipo de respuestas buscadas, en este caso se requiere que el material con el que están hechas las tuberías, sea capaz de soportar las deformaciones causadas por las variaciones de la presión. Es así que surge la necesidad de estudiar la naturaleza del material, para identificar modelos que sean capaces de describir y predecir de la manera más cercana y eficiente posible, lo que ocurre con el fenómeno en un caso real.

En resumen y de manera concreta, dentro de este marco el problema en cuestión es estudiar la respuesta disipadora o amortiguada que sufre una tubería enrollada de polietileno de alta densidad (específicamente para la resina PPI 4710), al transportar un fluido (agua en este caso), y de manera particular cuando ésta se ve alterada por las condiciones del sistema que ocasionan un transitorio, considerando por último deformaciones en dos dimensiones.

1.5. Metodología

Usando un modelo teórico mecánico, basado en un mínimo de variables de fácil interpretación física, se busca simular la respuesta viscoelástica en las tuberías de polietileno de alta densidad, caracterizada por la paulatina amortiguación del frente de ondas de un transitorio. Para lo cual, los pasos a seguir serán:

- Identificar el fenómeno físico de aplicación a estudiar, que en este caso resulta ser la viscoelasticidad.
- Obtener de una ecuación diferencial que describe al fenómeno, gracias al modelo del sólido lineal estándar.
- Incorporar esa ecuación con las otras ecuaciones provenientes de la mecánica del medio continuo, que describen al sistema.
- Establecer las hipótesis necesarias para reducir y así dar solución al problema.
- Como resultante de este último punto, proponer una ecuación diferencial que describa de manera global el fenómeno.
- Resolver numéricamente con el método de las características.
- Comparar resultados numérico con los datos experimentales de un transitorio hidráulico, a través de los cuales será posible verificar la teoría y las suposiciones propuestas.

1.6. Estructura de la tesis

El trabajo está dividido en 6 capítulos. En este capítulo se encuentra una breve presentación del material, tratando de destacar la relevancia del mismo, así como también delimitar el objetivo, el problema a resolver y la metodología con la que se ha decidido abordarlo.

El segundo capítulo incluye los fundamentos teóricos que sustentan la investigación y los resultados. Se divide en dos partes, en la primera se buscó hacer un breve análisis de las características en la estructura microscópica del polietileno de alta densidad con la finalidad de complementar y tratar de dar justificación a su comportamiento macroscópico. Continuando en esa línea, se presentan los elementos base con los que se sustentan los modelos mecánicos que describen la viscoelasticidad y se introduce el modelo del SLE. En la segunda mitad, debido a que este es un trabajo de aplicación, se exponen de manera concisa los conceptos fundamentales de la hidráulica de conductos a presión, como el gasto y la carga, el fenómeno de los transitorios y el conveniente desarrollo de los principios de la mecánica del medio continuo que resultan en la ecuación dinámica y de conservación de la masa, necesarias para el posterior desarrollo matemático.

En el tercer capítulo se hace una descripción del experimento del que fueron tomados los datos con los que se comparan los resultados obtenidos con esta investigación; el cuál fue realizado por los ingenieros Rodal Canales, René Aurtrique Ruiz y el Dr. Carmona Paredes, del Instituto de Ingeniería de la UNAM.

El cuarto capítulo expone la metodología empezando con las hipótesis que se plantean para estudiar el problema y sus implicaciones, desarrollando con esto las consecuencias matemáticas del nuevo modelo mecánico propuesto para el material que desembocan en la ecuación diferencial (4.14). Se sigue incorporando (4.14) junto con todas las ecuaciones del capítulo dos, que describen el fenómeno estudiado, hasta llegar a las expresiones (4.38) y (4.40), mismas que son resueltas con el método de las características. Se obtiene un sistema de ecuaciones capaz de ser modelado numéricamente, parte que se explica con detenimiento en el quinto capítulo, donde hacia el final se muestran los resultados del cálculo comparados con el registro de los transitorios, terminando con una breve discusión de los mismos. Las conclusiones del trabajo corresponden al sexto y último capítulo.

El trabajo cuenta con tres apéndices, el primero de ellos es un complemento para entender el método de las características usado en el capítulo cuatro; el segundo amplía la justificación de la hipótesis concerniente a la velocidad del fluido, presentada en el capítulo dos; finalmente en el tercero se introduce la ecuación Darcy-Weisbach de donde se obtiene el factor de fricción f , importante en la simulación numérica.

Capítulo 2

Fundamentos Teóricos

2.1. Polietileno de alta densidad

Los materiales sólidos son divididos en metales, cerámicos y polímeros según la composición química y la estructura atómica que posean. Los polímeros son compuestos orgánicos basados en carbón, hidrógeno y otros elementos no metálicos, que forman macromoléculas llamadas monómeros, unidas entre sí por enlaces de tipo covalente, que a su vez llegan a formar grandes cadenas entrelazadas por fuerzas de Van der Waals o puentes de hidrógeno; estas características en la estructura molecular tienen una fuerte influencia en las propiedades físicas macroscópicas, como lo veremos más adelante.

El polietileno (PE) es en términos químicos un polímero sintético, lineal, formado por adición a partir de gas de etileno. Como se puede apreciar en la figura 2.1, la unidad básica del hidrocarburo consiste en cuatro átomos de hidrógenos y dos de carbón, los cuales están vinculados entre sí por un doble enlace, que se rompe durante alguna reacción química para unirse a otro formando así una cadena.

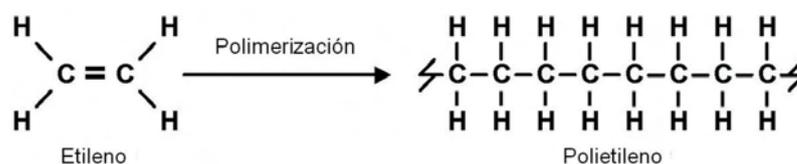


Figura 2.1: Unidad básica y estructura molecular del polietileno.

Las cadenas lineales de este polímero pueden llegar a tener ramificaciones, que son simplemente cadenas secundarias, figura 2.2. Así la cantidad de ramificaciones determina la densidad de una molécula de PE, entre más ramificaciones laterales existan, más baja será la densidad. En la tabla 2.1 se muestran los parámetros de clasificación

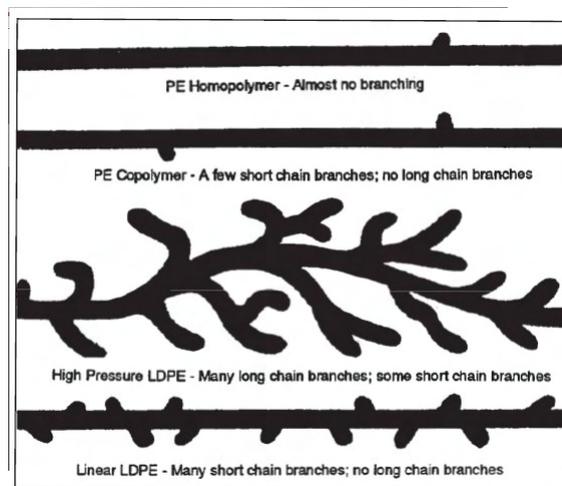


Figura 2.2: Distintos tipos de ramificaciones encontradas en el PE [9].

para los cuatro tipos de PE. Para aplicación en tuberías interesan las resinas de tipo IV o de alta densidad, para las cuales el proceso de polimerización deberá tener una ramificación mínima.

Tipo	Densidad (g/cm^3)
I	0.910 - 0.925 (baja)
II	0.926 - 0.940 (media)
III	0.941 - 0.959 (alta)
IV	0.960 o mas (alta, homopolímero)

Tabla 2.1: Clasificación del polietileno - De acuerdo con la Sociedad Americana para Pruebas de Materiales ASTM por sus siglas en inglés, el PE puede estar dentro de cuatro rangos en función de sus densidad [9].

Otra importante particularidad es que el material es considerado semicristalino, esto es que posee regiones amorfas y otras donde las ramificaciones tienen un gran ordenamiento, figura 2.3. El PE de alta densidad puede consistir en un 90% de regiones cristalinas, comparado con el 40% de los de baja densidad.

Pero ¿cómo todas estas características en su estructura interna resultan en propiedades físicas como la viscoelasticidad? El PE es un polímero lineal, por lo que está compuesto de un gran número de arreglos en cadena, que al estar ligadas por enlaces sencillos son capaces de rotar y curvarse en tres dimensiones; es así que bajo un esfuerzo aplicado, en

las regiones de mayor ordenamiento o cristalinas, los átomos tan solo se desplazan de su posición de equilibrio hasta que la fuerza deje de actuar. Si el esfuerzo es muy grande se producirá una distorsión permanente; mientras que en las regiones amorfas las moléculas no son retenidas por fuerzas intermoleculares (como en las regiones cristalinas), lo que provoca que las cadenas se enrosquen, volviendo a su extensión original promedio una vez que el esfuerzo cesa.

El comportamiento viscoelástico observado en los polímeros es entonces el resultado de estos fenómenos internos, principalmente de la dependencia temporal de los cambios en la forma de las cadenas, los cuales se deben en gran parte a las fuerzas intermoleculares que unen su estructura [8].



Figura 2.3: Representación de la estructura semicristalina de un polímero, donde se aprecian las regiones amorfas y cristalinas [15].

En la figura 2.4, se presenta un claro ejemplo de la formación de estructuras semicristalinas en el polietileno, se observan múltiples láminas puestas entre si de forma paralela, creando múltiples capas, cada una de un espesor aproximado de entre 10 *nm* a 20 *nm* y del orden de 10 μm de longitud.

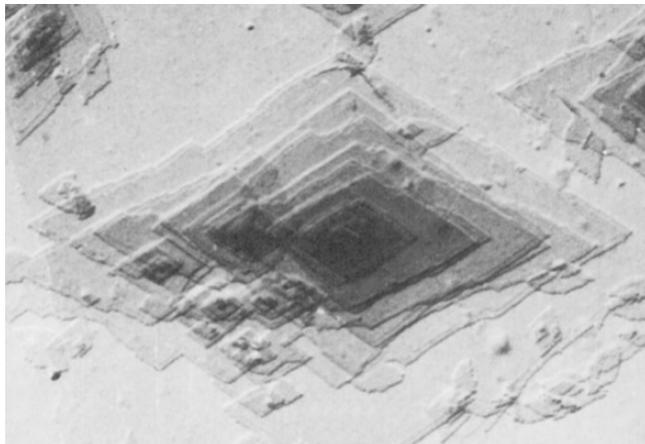


Figura 2.4: Micrografía electrónica de un cristal de polietileno [15].

Ahora bien para continuar será necesario explicar cuáles son las consecuencias macroscópicas de esta propiedad tan singular de los polímeros y cómo podemos estudiarla.

2.1.1. Clasificación de las resinas

Se usa un código de identificación para las resinas, que consiste en cinco caracteres, compuestos por números y letras [9], pongamos como ejemplo el código **PE4710**, en donde:

- PE nos dice que el material de la tubería es polietileno.
- 4, el primer dígito, se refiere a la clasificación de la densidad de la resina, siendo 2 el valor más bajo y 4 el más alto.
- 7, identifica la clasificación estándar del material para la resistencia al crecimiento lento de grietas, teniendo como escala únicamente un rango de 6-7.
- El tercer número combinado con el cuarto, en este caso 10, denota el esfuerzo de diseño hidrostático recomendado para el material por agua a $23^{\circ} C$ en unidades de 100 *psi*, en este ejemplo tendríamos 1000 *psi*.

2.2. Viscoelasticidad

La mecánica clásica de medios continuos estudia la relación entre las fuerzas aplicadas y los desplazamientos o deformaciones de sólidos, líquidos y gases, tradicionalmente se suele separar a estos como elásticos y viscosos y a pesar de que la mayoría de los

materiales encajan bastante bien en alguna de estas dos clasificaciones, representan únicamente los extremos dentro de una gran variedad de respuestas [12].

Los sólidos comúnmente tienen una respuesta elástica bajo estímulos pequeños, esto es poseen la propiedad de volver a su forma inicial después de la aplicación de un esfuerzo, dicho fenómeno es observado en los resortes donde la deformación ξ es directamente proporcional al esfuerzo aplicado σ , lo que matemáticamente se expresa con la ley de Hooke:

$$\sigma = E\xi \quad (2.1)$$

en donde E es el módulo de elasticidad lineal de Young.

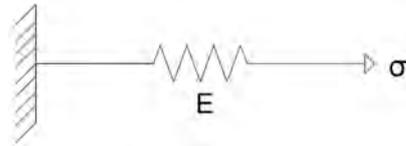


Figura 2.5: Elemento elástico.

Por otro lado, la viscosidad de un material expresa su resistencia a fluir, como lo expresa la ecuación (2.2). Esta característica se puede visualizar al comparar el flujo de agua, caracterizada por tener un bajo coeficiente de viscosidad, con el flujo de sustancias con un coeficiente alto como los aceites o la miel. En una sustancia newtoniana la velocidad de deformación es directamente proporcional a la fuerza aplicada, siendo la constante de proporcionalidad el coeficiente de viscosidad dinámica η . Los amortiguadores que básicamente son aparatos mecánicos que actúan en dirección opuesta a la fuerza, retardan el movimiento y absorben energía, y son usados para representar la viscosidad en los modelos mecánicos como los mostrados en la figura 2.6.

$$\sigma = \eta \frac{d\xi}{dt} \quad (2.2)$$

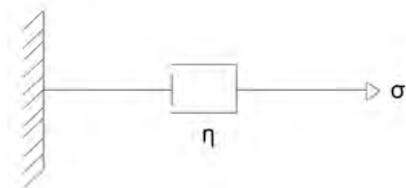


Figura 2.6: Elemento viscoso.

Un material viscoelástico es aquél que ante la aplicación de un esfuerzo exhibe las características de estos dos últimos estados. Supóngase que se aplica un esfuerzo constante durante el intervalo de tiempo que va de t_a a t_r figura 2.7(a). La figura 2.7(b)

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

muestra la deformación o respuesta de un material elástico. En 2.7(c) la respuesta de un material viscoelástico y la figura 2.7(d) la de un material viscoso. La deformación en el primero será aproximadamente instantánea, volviendo a sus dimensiones originales al terminarse el esfuerzo. En el viscoso la respuesta será dependiente del tiempo y los cambios externos no serán totalmente reversible después de haber eliminado la perturbación en el instante t_r . Por último, en el viscoelástico el mismo esfuerzo generará una deformación instantánea (tal como lo haría un sólido elástico), seguida de una respuesta viscosa con dependencia temporal, tratando de regresando lentamente, (aunque no en su totalidad, ni para todos los casos), a su estado original una vez finalizada la carga, [15].

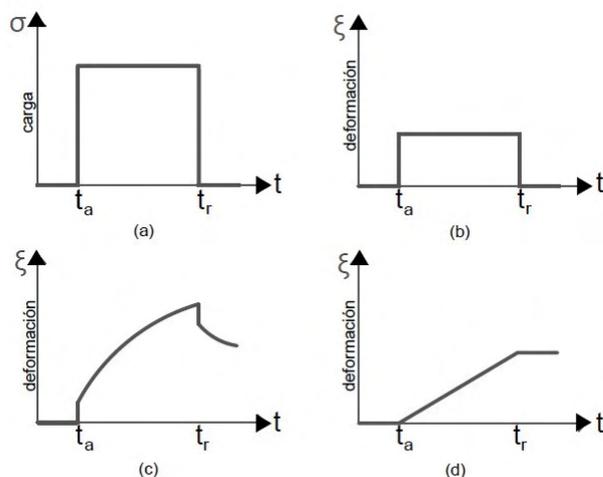


Figura 2.7: Gráfica tiempo vs deformación de la respuesta a un esfuerzo como el mostrado en (a) para un material elástico (b), viscoso (d) y viscoelástico (c).

Es posible caracterizar estos comportamientos, con modelos mecánicos que combinen resortes y amortiguadores, a partir de los cuales se establecen ecuaciones diferenciales que ayudan a describir el sistema en cuestión. Dos de los más sencillos se estudian a continuación.

2.2.1. Modelo de Maxwell

Compuesto por un amortiguador en serie con un resorte figura 2.8. Con base en las ecuaciones (2.1) y (2.2), la deformación ξ del elemento viscoelástico es igual a la suma de las deformaciones del resorte ξ_R más la del amortiguador ξ_A , esto es

$$\xi = \xi_R + \xi_A \quad (2.3)$$

$$\sigma = \sigma_R = \sigma_A \quad (2.4)$$

Lo anterior se cumple para todo tiempo, por lo que [12]

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{d\xi_R}{dt} + \frac{d\xi_A}{dt} \quad (2.5)$$

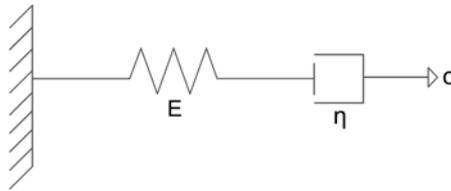


Figura 2.8: Representación gráfica del modelo de Maxwell.

En este caso la respuesta a un esfuerzo como el de la figura 2.7 (a) tiene la forma

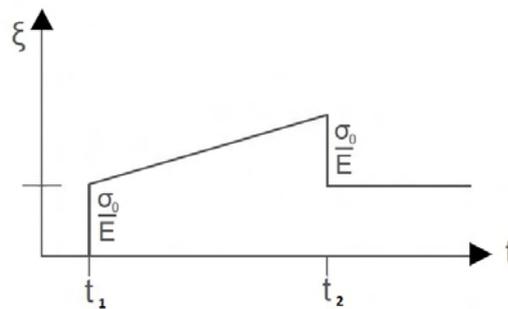


Figura 2.9: Respuesta del modelo de Maxwell durante la aplicación de un esfuerzo inicial σ_0 . Según el modelo, aún a pesar del cese del esfuerzo en el tiempo t_2 , el material no regresa a su forma original, sino que existe una deformación permanente.

2.2.2. Modelo de Kelvin-Voigt

Formado con un amortiguador y un resorte en paralelo figura 2.10. Para este caso se cumplen las condiciones

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

$$\xi_R = \xi_A = \xi \quad (2.6)$$

$$\sigma_R + \sigma_A = \sigma \quad (2.7)$$

Sustituyendo (2.1), (2.2) y (2.6) en (2.7)

$$\eta \frac{d\xi}{dt} + E\xi = \sigma(t) \quad (2.8)$$

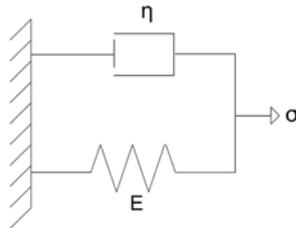


Figura 2.10: Representación gráfica del modelo de Kelvin-Voigt.

Para este caso la respuesta a un esfuerzo como el de la figura 2.7 (a) tiene la forma

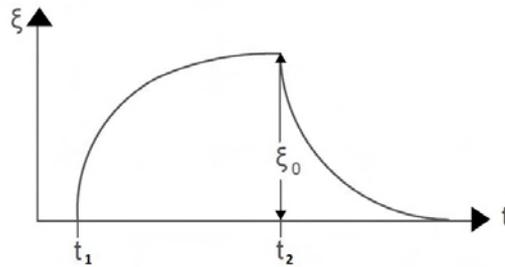


Figura 2.11: Respuesta del modelo de Kelvin-Voigt. La deformación se incrementa hasta el tiempo t_2 , llegando a un valor ξ_0 , a partir de entonces el material comienza a recuperar su forma inicial.

2.2.3. Modelo del Sólido Lineal Estándar

Uno de los modelos más usados y estudiados en el análisis de polímeros es el del sólido lineal estándar representado en la figura 2.12, compuesto por un amortiguador con

constante viscosa η , en serie con un resorte con módulo de elasticidad E_1 , a su vez en paralelo con otro resorte de constante E_2 , [7].

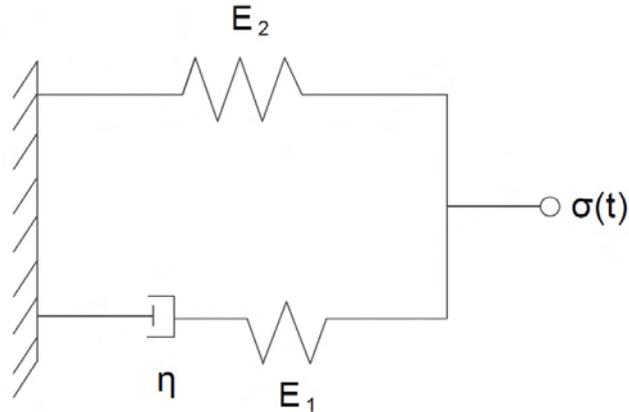


Figura 2.12: Modelo del sólido lineal estándar.

La solución de este sistema requiere un análisis por separado de las condiciones que cumple cada rama:

Rama (Kelvin-Voigt)

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_1 + \sigma_2 \\ \xi &= \xi_1 = \xi_2\end{aligned}\tag{2.9}$$

Rama (Maxwell)

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_1 = \sigma_2 \\ \xi &= \xi_1 + \xi_2\end{aligned}\tag{2.10}$$

Mientras que para cada componente tenemos las siguientes igualdades:

$$\sigma_{tot} = \sigma_m + \sigma_{R_2} \text{ con } \sigma_m = \sigma_A = \sigma_{R_1}\tag{2.11}$$

$$\xi_{tot} = \xi_m = \xi_{R_2} \text{ con } \xi_m = \xi_A + \xi_{R_1}\tag{2.12}$$

los subíndices R_1 , R_2 y A en los esfuerzos y deformaciones, hacen referencia a los resortes y al amortiguador. Entonces

$$\sigma = \sigma_{R_1} + \sigma_{R_2} = E_1 \xi_{R_1} + E_2 \xi_{R_2}\tag{2.13}$$

$$\xi = \xi_A + \xi_{R_1} = \xi_{R_2}\tag{2.14}$$

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

tomando la diferencial de (2.11) y la de (2.12) tendremos respectivamente que

$$\frac{d\sigma}{dt} = E_1 \frac{d\xi_{R_1}}{dt} + E_2 \frac{d\xi_{R_2}}{dt} \quad (2.15)$$

entonces

$$\frac{d\xi_{R_1}}{dt} = \frac{1}{E_1} \frac{d\sigma}{dt} - \frac{E_2}{E_1} \frac{d\xi_{R_2}}{dt} \quad (2.16)$$

y

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\xi_A}{dt} + \frac{d\xi_{R_1}}{dt} = \frac{d\xi_{R_2}}{dt} = \frac{\sigma_A}{\eta} + \frac{d\xi_{R_1}}{dt} \quad (2.17)$$

por lo que (2.17) se convierte en

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\sigma_A}{\eta} + \frac{1}{E_1} \frac{d\sigma}{dt} - \frac{E_2}{E_1} \frac{d\xi_{R_2}}{dt} \quad (2.18)$$

pero $\sigma_A = \sigma_{R_1}$ que a su vez cumple la relación $\sigma_{R_1} = E_1 \xi_{R_1}$, por lo que

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{E_1}{\eta} \xi_{R_1} - \frac{1}{E_1} \frac{d\sigma}{dt} - \frac{E_2}{E_1} \frac{d\xi}{dt}, \quad (2.19)$$

se sabe además que $\xi = \xi_{R_2}$, incorporándolo al desarrollo

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{E_1}{\eta} \xi_{R_1} + \frac{1}{E_1} \frac{d\sigma}{dt} - \frac{E_2}{E_1} \frac{d\xi}{dt} \quad (2.20)$$

y de (2.11)

$$\sigma = E_1 \xi_{R_1} + E_2 \xi_{R_2} \quad \text{por lo tanto} \quad \sigma = E_1 \xi_{R_1} + E_2 \xi$$

entonces

$$\xi_{R_1} = \frac{\sigma - E_2 \xi}{E_1}. \quad (2.21)$$

De este modo sustituyendo (2.21) en (2.20):

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\sigma}{\eta} - \frac{E_2}{\eta} \xi \frac{1}{E_1} \frac{d\sigma}{dt} - \frac{E_2}{E_1} \frac{d\xi}{dt}. \quad (2.22)$$

Multiplicando después (2.22) por E_1 y acomodando

$$(E_1 + E_2) \frac{d\xi}{dt} + \frac{E_1 E_2}{\eta} \xi = \frac{d\sigma}{dt} + \frac{E_1}{\eta} \sigma \quad (2.23)$$

que es la ecuación diferencial no homogénea que caracteriza a este sistema. La respuesta de este modelo a un esfuerzo como en el de la figura 2.7(a) es de la forma

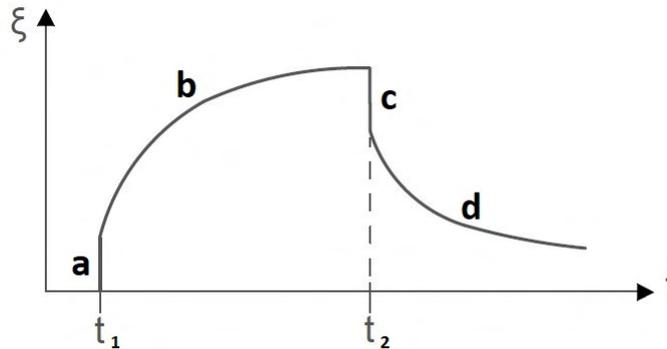


Figura 2.13: La respuesta al esfuerzo de un material viscoelástico se caracteriza por cuatro etapas. En **a** se observa una respuesta elástica, en **b** un periodo de deformación, a partir del cese del esfuerzo en t_2 , se tiene una recuperación elástica en **c**, seguida finalmente por una recuperación retardada, sin llegar en principio a su forma original en **b**.

2.3. El problema de un tubo de pared delgada sometido a presión interna.

Hasta este punto solo se ha hablado de la naturaleza del comportamiento del material, sin embargo se requiere aterrizar estas ideas para una tubería de sección transversal circular. Debido a la naturaleza del problema se elige un sistema de coordenadas cilíndricas (r, θ, z) que por su simetría axial reduce el problema de tres a dos dimensiones. La condición de pared delgada, figura 2.14(a), para un cilindro de diámetro interno D_0 y un grosor inicial e_0 es

$$e_0 \ll D_0, \quad (2.24)$$

la pregunta siguiente será ¿bajo qué tipo de esfuerzos tendrá validez esta hipótesis? Aquellos que produzcan deformaciones lo suficientemente pequeñas (small strain), como

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

para que los cambios en las dimensiones del cilindro puedan ser ignoradas y los esfuerzos sean entonces determinados directamente de las dimensiones iniciales [16].

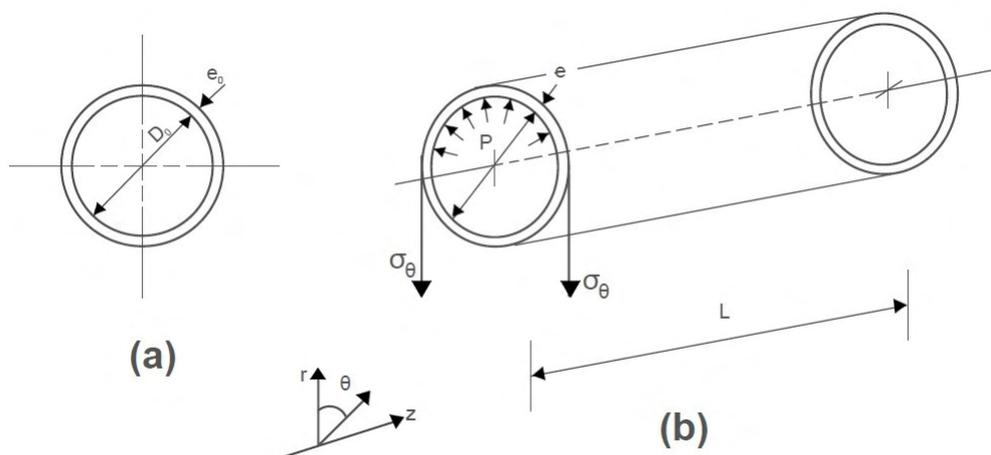


Figura 2.14: (a) Sección circular transversal y (b) sistema de coordenadas para un cilindro de pared delgada sometido a presión interna P .

Considere un cilindro de longitud L con un diámetro interno D , radio interno r y un espesor e sometido a fuerzas radiales internas uniformemente constantes, como el de la figura 2.14(b).

Diagrama de fuerzas

Debido a que la presión solo actúa en dirección radial, la única componente del esfuerzo distinta de cero es la tangencial σ_θ , figura 2.16. El sistema está en equilibrio, por lo que se cumple

$$\sum F = 0, \quad (2.25)$$

descompongamos al cilindro por la mitad figura 2.15, el área sobre la que actúa la presión es $A = 2rL$ mientras que para el esfuerzo tangencial, el área del borde sobre la que actúa es $A_{pared} = 2Le$, por lo que al hacer el balance de fuerzas

$$PA = \sigma_\theta A_{pared} \quad (2.26)$$

entonces

$$P(2rL) = \sigma_\theta(2Le) \quad (2.27)$$

despejando σ_θ se obtiene que

2.3 El problema de un tubo de pared delgada sometido a presión interna.

$$\sigma_{\theta} = \frac{Pr}{e} \quad (2.28)$$

y en términos del diámetro

$$\sigma_{\theta} = \frac{PD}{2e}. \quad (2.29)$$

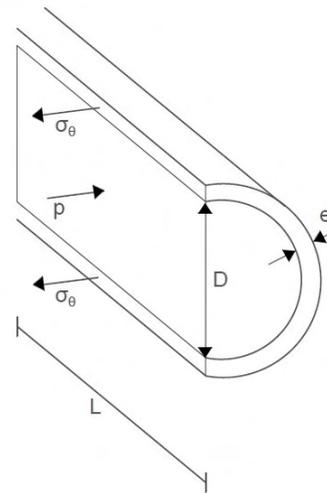


Figura 2.15: Partiendo al cilindro por la mitad, es fácil ver las áreas sobre las que actúan las fuerzas del sistema.

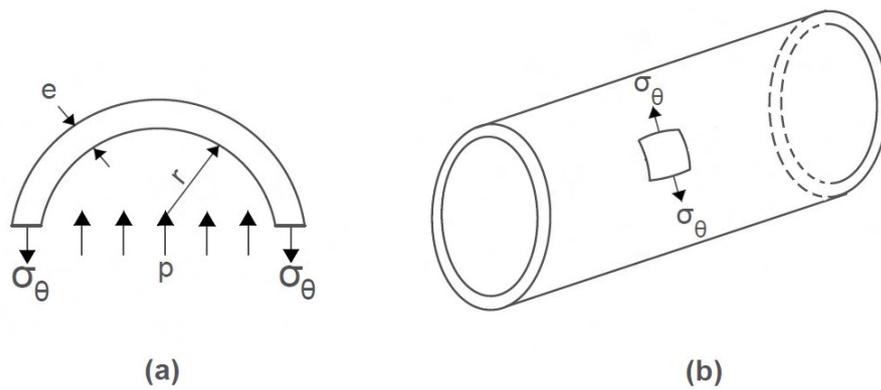


Figura 2.16: (a) diagrama de cuerpo libre para el esfuerzo tangencial desde una perspectiva frontal y (b) esfuerzos actuando en la superficie del tubo.

Finalmente el esfuerzo en la pared σ_r (normal a la superficie del tubo), es cero en la superficie externa e igual a $-P$ en el interior, esto significa que el valor promedio es del orden de $P/2$. Entonces σ_θ es más grande que σ_r por un factor D/e , el cual para cilindros delgados es un número grande. Por consiguiente la condición usada en las soluciones es que $\sigma_r \ll \sigma_\theta$ y que σ_r sea asumido como cero.

La ecuación (2.29) se retomará más adelante cuando sea incorporada al modelo del SLE.

2.4. Conceptos básicos de la hidráulica de conductos a presión

Aunque no es la finalidad de este trabajo dar todos los detalles sobre mecánica de fluidos, es útil dar una pequeña introducción así como exponer de manera breve algunos conceptos que facilitarán el entendimiento de las ecuaciones en las secciones subsecuentes.

En términos simples la hidromecánica es el área de la física que se encarga de estudiar las propiedades mecánicas de los líquidos en movimiento bajo la aplicación de fuerzas. Gracias a su constitución molecular, con enlaces débiles entre sus moléculas, los líquidos poseen características importantes que los distinguen de cualquier otro estado de agregación de la materia: no tienen una forma propia, sino que adoptan la del recipiente que los contenga, lo que implica que puedan cambiar continuamente las posiciones relativas de sus partículas, sin ofrecer gran resistencia al desplazamiento entre ellas, aún cuando éste sea muy grande [13]. Pese a que existen otros criterios para clasificar un fluido, resulta útil estudiarlos en función del “campo de fluido”, (nombre con el que se hace referencia a cualquier región en el espacio donde hay fluido en movimiento); éste puede ser de tipo escalar, vectorial o tensorial. Gracias al concepto de medio continuo es posible determinar o especificar una serie de magnitudes físicas del fluido, como la velocidad, la densidad y las fuerzas actuantes. En general las propiedades de un fluido y sus características mecánicas cambian de un punto a otro dentro su campo.

La capacidad para transportar materia y el mecanismo por el cuál cambian las propiedades de un lugar a otro dentro de un fluido, constituyen el área de estudio de la mecánica de fluidos, los métodos de estudio necesitan establecer como axioma que estos satisfagan los principios básicos de la mecánica del medio continuo, los cuales son:

- **Conservación de la masa.** Hace posible deducir la primera ecuación fundamental o de continuidad, admite además diferentes simplificaciones según sea el tipo de fluido y las hipótesis que se deseen considerar.
- **Segunda ley de Newton.** Como es bien sabido, establece la relación fundamental entre las fuerzas que actúan sobre el fluido fuera del reposo, así como la

variación en el tiempo de la cantidad de movimiento.

- **1^{ra} ley de la termodinámica.** Es la aplicación de la conservación de la energía, a los procesos de calor y termodinámicos, y dice que: el cambio de la energía interna de un sistema es igual al calor añadido al sistema menos el trabajo realizado por el sistema.
- **Segunda ley de la termodinámica.** En términos simples expresa que no es posible que el calor fluya desde un cuerpo frío hacia un cuerpo mas caliente, sin necesidad de producir ningún trabajo que genere este flujo.

Los dos últimos principios toman importancia cuando las condiciones del sistema implican cambios en la temperatura. Por otro lado como se verá en 2.6.3 de la segunda ley de Newton se deduce la ecuación dinámica. La importancia de dicha ecuación para este trabajo, es debida a que establece las relaciones existentes entre las diferentes transformaciones de la energía mecánica del líquido por unidad de peso del mismo [13]. Según la forma en que sea expresada, los términos de los que esta compuesta dan lugar a definiciones de basta relevancia, entre ellos los que conciernen a este análisis son:

Carga de elevación. Es medida desde un plano horizontal de referencia, también se llama carga de posición o elevación y es simplemente la energía potencial E_{pot} de un elemento diferencial de fluido dividida entre el peso W del elemento:

$$\frac{E_{pot}}{W} = \frac{mgz}{mg} = z \quad (2.30)$$

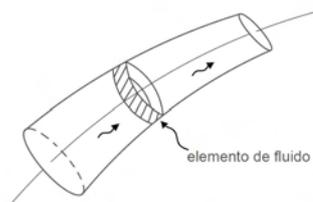
Carga de presión. Es la energía correspondiente al trabajo mecánico ejecutado por las fuerzas debidas a la presión, equivalente a la energía interna del sistema, dividida entre el peso del elemento de fluido:

$$\frac{\frac{mP}{mg}}{mg} = \frac{P}{\rho g} = \frac{P}{\gamma} \quad (2.31)$$

donde $\gamma = \rho g$ es el peso específico del fluido.

Carga de velocidad. Es la energía cinética del elemento del fluido ¹ y que se obtiene

¹El concepto hace referencia al fluido en movimiento pero sin estar contenido por algún recipiente que pueda imponer fricción, tal como se podría observar en el flujo a presión que sale de una manguera.



2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

al dividir la energía cinética E_c entre el peso W

$$\frac{E_c}{W} = \frac{\frac{1}{2}mV^2}{mg} = \frac{V^2}{2g} \quad (2.32)$$

Carga hidráulica. Representa la energía total por unidad de peso que tiene el elemento del fluido en una determinada sección, la cual es medida desde el plano horizontal de referencia, y es la suma de todas las otras “cargas”

$$\mathcal{H} = z + \frac{P}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} \quad (2.33)$$

mientras que la Carga Piezométrica se define como

$$h = z + \frac{P}{\gamma} \quad (2.34)$$

Otro de los conceptos más importantes es el del gasto o caudal representado con la letra Q , tiene su símil en los flujos convectivos que se estudian en la termodinámica. Bajo estos términos, sea B una propiedad física “extensiva”¹ del sistema, entonces para una superficie S se define Φ_B como

$$\Phi_B = \frac{\text{cantidad de B que pasa por S}}{\text{unidad de tiempo}}, \quad (2.35)$$

en el caso estudiado el flujo es de agua, entonces la cantidad B será la masa del fluido. De tal manera que en un intervalo de tiempo dt , el elemento de volumen \forall de fluido $d\forall$ que atraviesa el elemento de superficie dA , esta dado por el producto escalar $d\forall = ds \cdot dA$ donde $ds = vdt$, entonces

$$d\forall = v \cdot dA dt, \quad (2.36)$$

con lo que el flujo de volumen a través de toda la superficies S será [13]

$$\Phi_{\forall} = \frac{d\forall}{dt} = \int \int_A v \cdot dA \quad (2.37)$$

donde la cantidad Φ_{\forall} no es otra cosa que el gasto Q ; cuyas dimensiones son $[m^3/s]$.

¹Son aquellas que dependen de la masa o el tamaño de un cuerpo, y cuyo valor resulta proporcional a las dimensiones del sistema que describe

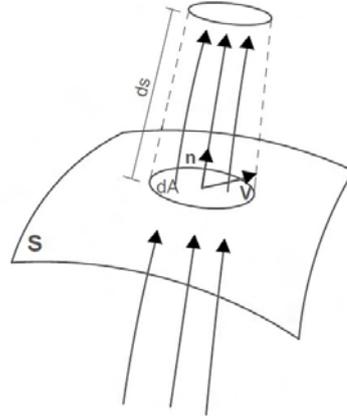


Figura 2.17: Concepto geométrico de gasto

Por otro lado, si todas las líneas de corriente resultan ser normales en cada punto a la superficie, se llama *velocidad media* a través de una superficie S de área A , al promedio calculado como

$$V = \frac{\int \int_A v \cdot dA}{A} = \frac{Q}{A} \quad (2.38)$$

2.5. Transitorios Hidráulicos

En ingeniería hidráulica uno de los retos más importantes es el transporte de fluidos, ya que requiere estudiar desde el tipo de fluido, su contención y conducción, hasta el conjunto de ductos, túneles y tuberías en las que será transportado de su punto de extracción hasta el punto de entrega. Una gran variedad de causas puede alterar este proceso, entre los que se encuentran los transitorios hidráulicos, problema que dio origen y razón al presente trabajo.

Para los fines de este estudio es necesario hablar de los flujos permanentes, definidos como aquellos en los que las principales variables que lo describen, el gasto Q y la presión P , permanecen constantes en una sección determinada, o en su defecto, cuando estas tienen cambios pequeños respecto a su valor medio, sin variar en el tiempo. En el momento en que estas variaciones cambian súbitamente de un instante a otro el flujo se vuelve no permanente [1].

Un caso particular de este tipo de flujo son los transitorios hidráulicos. Existen dos modelos matemáticos para analizar el flujo transitorio en conducciones a presión. El primero llamado de oscilación de masa tiene como suposiciones una tubería rígida (esto es tanto el diámetro como la longitud son invariantes en el tiempo), y un fluido incompresible, lo que se traduce en un valor de la densidad constante. El segundo es

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

un modelo elástico en el que se considera a la conducción de pared elástica y al flujo compresible. Un transitorio hidráulico se produce entre dos estados de flujo permanente. Un ejemplo es el cierre de una válvula de control de flujo fig. 2.18, esta acción genera un frente de sobrepresión que frena al flujo propagándose a gran velocidad en sentido contrario a la dirección original del flujo, incrementando la densidad (región amarilla), elevando la presión y ocasionando también un aumento en el diámetro de la tubería fig. 2.18 b.

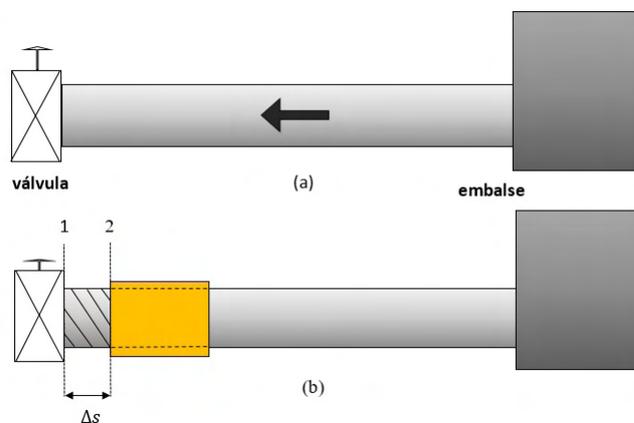


Figura 2.18: Perturbación en un fluido compresible en una tubería no rígida. (a) onda regresando del embalse a la válvula después de haber cerrado el flujo de agua, (b) instantes después de haber regresado al extremo izquierdo, la onda se desplaza nuevamente hacia el embalse.

Al llegar al embalse, que mantiene su nivel constante, el frente de onda se reflejará como un frente de baja presión, volviendo la presión de la tubería a su valor inicial. De regreso a la válvula, en todo momento cerrada, la presión en el conducto está por debajo del valor correspondiente al flujo establecido; y de nuevo en el embalse se reflejará ahora como onda de sobrepresión, restituyendo en valor de la presión. Esta propagación de perturbaciones, se amortiguará gracias a la fricción y disipación de energía que se refleja en la deformación de la tubería.

Los cambios en las propiedades del flujo que ocurran en una región dada, tardan un cierto tiempo en ser detectadas en otra parte de la conducción [5].

Con el fin de ejemplificar el fenómeno descrito, se muestra en la gráfica 2.19 la evolución de las presiones transitorias y su atenuación en el tiempo, para una tubería de polietileno de alta densidad. La curva que podría describirse como una función sinusoidal decreciente fue obtenida con los datos de una medición experimental realizada con el modelo descrito en la figura 3.1, de la empresa Policonductos en San Luis Potosí, en el

año 2014, para una tubería de 82mm de diámetro interior y 110m de longitud [11].

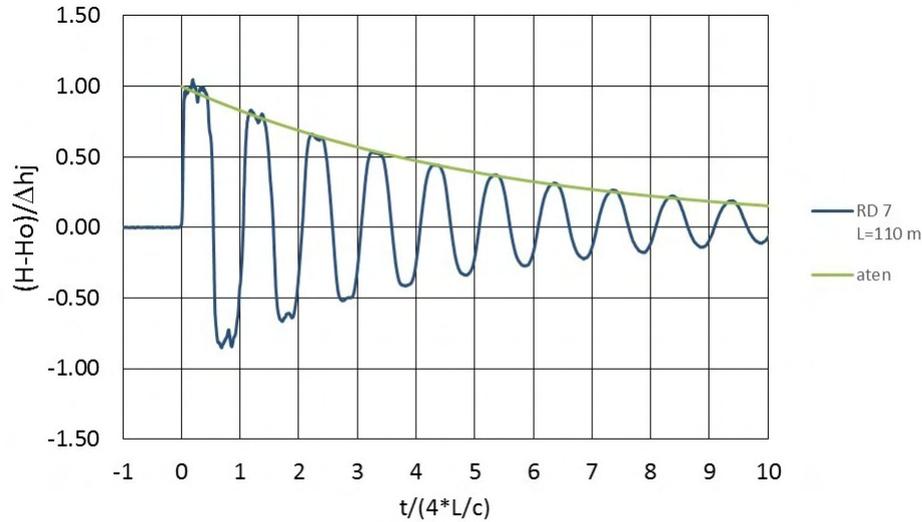


Figura 2.19: Perturbación en un fluido compresible en una tubería no rígida. Se ha graficado la evolución de la carga piezométrica a través del tiempo (H vs t) [11].

En tuberías de pared elástica la velocidad de propagación de este frente de perturbación se denomina celeridad y se calcula, para tuberías de sección circular, con la siguiente ecuación empírica [2] que depende tanto de las dimensiones y tipo de material del tubo, como de las propiedades del líquido transportado:

$$a = \sqrt{\frac{1}{\rho \left[\frac{1}{k} + \frac{D}{eE} \phi \right]}} \quad (2.39)$$

Donde D es el diámetro interior de la tubería, e el espesor, ρ la densidad del fluido, E el módulo de elasticidad del material de la tubería, k representa el módulo de compresibilidad volumétrica del líquido, y ϕ es un coeficiente relacionado con las condiciones de anclaje de la conducción.

En la sección siguiente se presenta el desarrollo de ecuaciones que representan a este tipo de transitorios en tuberías de pared viscoelástica.

2.6. Ecuaciones fundamentales que describen una tubería con pared elástica y fluido compresible

2.6.1. Conservación de la masa

Se presenta primero el caso de un fluido compresible, es decir aquél cuya densidad depende de la presión, y que además fluye por una tubería rígida. Con base en la figura 2.21 para hacer el balance de masa se toma en cuenta que la tubería tiene dos secciones transversales y constantes A , separadas entre si por una distancia Δs , figura 2.20.

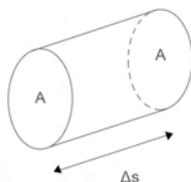


Figura 2.20: Sección de la tubería considerada para hacer el balance de masa.

Representando la masa como $m = \rho \forall$ y el volumen $\forall = A\Delta s$, entonces:

$$\underbrace{\rho V A \Delta t}_{\substack{\text{m entrante en} \\ \forall \text{ durante } \Delta t}} - \underbrace{\left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial s} \Delta s\right) \left(V + \frac{\partial V}{\partial s} \Delta s\right) A \Delta t}_{\text{m saliente de } \forall \text{ durante } \Delta t} = \underbrace{\left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta t\right) A \Delta s - \rho A \Delta s}_{\text{m acumulada en } \forall \text{ durante } \Delta t} \quad (2.40)$$

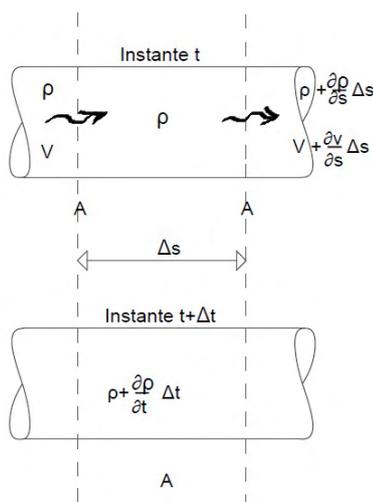


Figura 2.21: Balance de masa en una tubería de pared rígida y con un fluido compresible.

desarrollando la expresión anterior

$$\cancel{\rho V A \Delta t} - \left[\cancel{\rho V A \Delta t} + \rho \frac{\partial V}{\partial s} + V \frac{\partial \rho}{\partial s} A \Delta s \Delta t + \frac{\partial \rho}{\partial s} \frac{\partial V}{\partial s} \Delta s \Delta s A \Delta t \right] = \cancel{\rho A \Delta s} + \frac{\partial \rho}{\partial t} A \Delta s \Delta t - \cancel{\rho A \Delta s} \quad (2.41)$$

luego entonces

$$- \left(\rho \frac{\partial V}{\partial s} + V \frac{\partial \rho}{\partial s} + \frac{\partial \rho}{\partial s} \frac{\partial V}{\partial s} \Delta s \right) A \Delta s \Delta t = \frac{\partial \rho}{\partial t} A \Delta s \Delta t. \quad (2.42)$$

Al simplificar algebraicamente se obtiene la expresión

$$- \rho \frac{\partial V}{\partial s} - \frac{V \partial \rho}{\partial s} - \frac{\partial \rho}{\partial s} \frac{\partial V}{\partial s} \Delta s = \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.43)$$

reescribiendo y haciendo $\Delta s \rightarrow 0$ encontramos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial V}{\partial s} + V \frac{\partial \rho}{\partial s} = 0. \quad (2.44)$$

Debido al hecho de que las variaciones de ρ se producen por los cambios de la presión P en el interior del conducto, se pueden escribir las siguientes igualdades:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial t}; \quad \frac{\partial \rho}{\partial s} = \frac{\partial \rho}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial s} \quad (2.45)$$

finalmente al sustituir (2.45) en (2.44) se obtiene:

$$\frac{\partial \rho}{\partial P} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + V \frac{\partial P}{\partial s} \right) + \rho \frac{\partial V}{\partial s} = 0. \quad (2.46)$$

Ahora es posible considerar a la tubería elástica, con lo que el área se vuelve dependiente del tiempo y la posición, esto es $A = A(s, t)$. Introduciendo este hecho en el balance de masa (ec. 2.40) y con base en la fig. (2.22) se tiene:

$$\underbrace{\rho V A \Delta t}_{\substack{\text{m entrante en} \\ \forall \text{ durante } \Delta t}} - \underbrace{\left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial s} \Delta s \right) \left(V + \frac{\partial V}{\partial s} \Delta s \right) \left(A + \frac{\partial A}{\partial s} \Delta s \right) \Delta t}_{\text{m saliente de } \forall \text{ durante } \Delta t} = \text{m acumulada en } \forall \text{ durante } \Delta t \quad (2.47)$$

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

donde el término $\frac{\partial A}{\partial s}\Delta s$ en la ecuación (2.47) hace referencia al cambio en el área del tubo (del caso no rígido) en Δs . Al desarrollar la expresión y multiplicando por $A\Delta s/A\Delta s$, es posible llegar a

$$= -\left[\rho \frac{V}{A} \frac{\partial A}{\partial s} + \rho \frac{\partial V}{\partial s} + \frac{\rho}{A} \frac{\partial V}{\partial s} \frac{\partial A}{\partial s} \Delta s + V \frac{\partial \rho}{\partial s} + \frac{V}{A} \frac{\partial \rho}{\partial s} \frac{\partial A}{\partial s} \Delta s + \frac{\partial \rho}{\partial s} \frac{\partial V}{\partial s} \Delta s + \frac{1}{A} \frac{\partial \rho}{\partial s} \frac{\partial V}{\partial s} \frac{\partial A}{\partial s} (\Delta s)^2\right] A \Delta s \Delta t \quad (2.48)$$

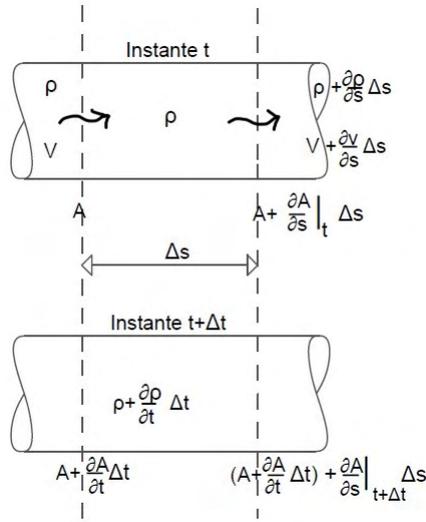


Figura 2.22: Balance de masa en una tubería de pared elástica y con un fluido compresible.

Igualando y dividiendo (2.48) entre $A\Delta s\Delta t$, y considerando que $\Delta t \rightarrow 0$ y $\Delta s \rightarrow 0$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial V}{\partial s} + V \frac{\partial \rho}{\partial s} + \frac{\rho}{A} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\rho}{A} V \frac{\partial A}{\partial s} = 0 \quad (2.49)$$

en la cual es posible sustituir las relaciones (2.45), debido a que las variaciones en A son producto de los cambios en la presión interna de la tubería, por lo tanto [6]:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial P} + \frac{\rho}{A} \frac{\partial A}{\partial P}\right) \left(\frac{\partial P}{\partial t} + V \frac{\partial P}{\partial s}\right) + \rho \frac{\partial V}{\partial s} = 0, \quad (2.50)$$

esta ecuación describe la conservación de masa para un fluido compresible en una tubería no rígida.

2.6.2. Velocidad y aceleración

Para la velocidad del fluido dentro de la tubería se tendrá como **hipótesis 1** válida para cualquier posición s y para todo tiempo t la siguiente relación

$$\left| \frac{\partial V}{\partial t} \right| \gg \left| V \frac{\partial V}{\partial s} \right| \quad (2.51)$$

que se justifica en el apéndice A.2.

Si se admite una distribución uniforme de velocidades en el flujo dentro de la tubería, y notando que $V = V(s, t)$, al aplicar la derivada total con respecto a t , la aceleración será:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial V}{\partial s} \frac{ds}{dt} \\ &= \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial s}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

2.6.3. Ecuación dinámica

Considérese una sección de tubería con longitud Δs , las fuerzas que actúan sobre dicha sección serán: el peso del elemento F_w , el esfuerzo cortante sobre la superficie lateral que esta en contacto con la pared de la tubería F_s y por último, la presión ejercida sobre las tapas F_{P_1} , F_{P_2} y $F_{P_{12}}$ [3].

Haciendo uso de la segunda ley de Newton, la fuerza total es la suma vectorial de las fuerzas que actúan sobre el volumen de control, figura 2.23.

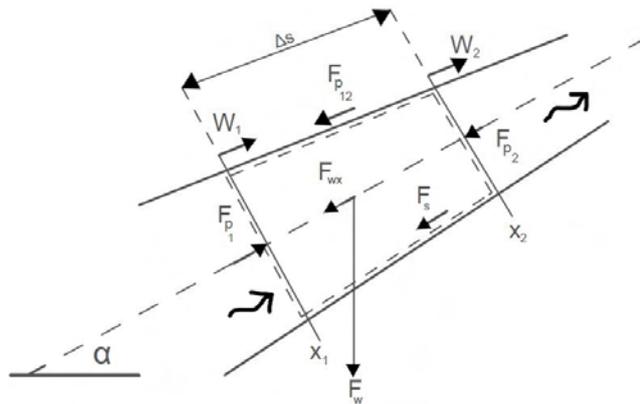


Figura 2.23: Diagrama de fuerzas para la ecuación dinámica.

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

$$\sum F = F_{P_1} + (-F_{P_2}) + (-F_{P_{12}}) + (-F_{wx}) - F_s \quad (2.53)$$

donde cada uno de los término corresponde a

$$\text{Fuerza debida a la presión en la sección 1} \quad F_{P_1} = P_1 A_1 \quad (2.54)$$

$$\text{Fuerza debida a la presión en la sección 2} \quad F_{P_2} = P_2 A_2 \quad (2.55)$$

Fuerza de presión en los lados convergentes

$$F_{p_{12}} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)(A_1 - A_2) \quad (2.56)$$

Componente del peso del fluido a lo largo de la linea central del conducto

$$F_{wx} = \rho g A \Delta s \cdot \sin \alpha \quad (2.57)$$

donde α es el ángulo el formado por el conducto con el eje horizontal, considerado positivo para un conducto inclinado hacia arriba en dirección de la corriente. Y por último

$$\text{Esfuerzo cortante} \quad F_s = \tau_0 \pi D \Delta s \quad (2.58)$$

Tomando la dirección del flujo aguas abajo como positivo, el lado derecho de la ecuación (2.53) se transforma en

$$\sum F = \frac{1}{2}(P_1 - P_2)(A_1 + A_2) - \rho g A \Delta s \cdot \sin \alpha - \tau_0 \pi D \Delta s \quad (2.59)$$

ya que en nuestro caso, el área del conducto no cambia $A = A_1 = A_2$ y se optará por escribir $\gamma = \rho g$ y $A = \pi D^2/4$. Así recordando que por la segunda ley $F = m \cdot a$, la relación anterior queda como¹

$$\underbrace{\rho \Delta s \pi \frac{D^2}{4}}_m \underbrace{\frac{dV}{dt}}_a = \underbrace{(P_1 - P_2) \pi \frac{D^2}{4} - \tau_0 \pi D \Delta s - \gamma \Delta s \pi \frac{D^2}{4} \sin \alpha}_F \quad (2.61)$$

¹Por completez se demostrará que el primer elemento del lado izquierdo de la ecuación (2.61), representa la masa. El volumen \forall de una figura es igual al área de la base por la altura, para un cilindro de longitud Δs , como el volumen de control con el que se está trabajando

$$\begin{aligned} \forall &= \Delta s \pi \frac{D^2}{4} \\ \Rightarrow m &= \frac{m}{\forall} \forall = \rho \forall = \rho \Delta s \pi \frac{D^2}{4} \end{aligned} \quad (2.60)$$

Al dividir (2.61) entre el peso del elemento del fluido considerado, el cual se define como $W = mg$; y para este caso empleando la definición de masa que se ha usado, se tiene que

$$W = \Delta s \pi \frac{D^2}{4} g, \quad (2.62)$$

además en la sección 2.4 se definió $\gamma = \rho g$ como el peso específico del fluido.

$$\Rightarrow \frac{1}{g} \frac{dV}{dt} = \frac{(P_1 - P_2)}{\gamma \Delta s} - \frac{4\tau}{\gamma D} - \sin \alpha, \quad (2.63)$$

si aplicamos el límite cuando $\Delta s \rightarrow 0$ y como se había mencionado, las presiones en el eje dependen de s , entonces resultará que

$$\frac{1}{g} \frac{dV}{dt} = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial P}{\partial s} - \frac{4\tau}{\gamma D} - \sin \alpha. \quad (2.64)$$

Para un esfuerzo cortante τ ejercido por la pared sobre el fluido, como primera aproximación se adoptará,

$$\tau_0(s, t) = f \rho \frac{V^2}{8} \quad (2.65)$$

donde f es el coeficiente de Darcy-Weisbach y representa las pérdidas por fricción del sistema, apéndice A.3. Luego, sustituyendo el segundo término de la izquierda en la ecuación (2.64) por la relación (2.52) y aplicando la **hipótesis 1** (ec. 2.51)

$$\frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial P}{\partial s} - \frac{fV^2}{2gD} - \sin \alpha \quad (2.66)$$

además de la definición de carga piezométrica¹ $h = \frac{P}{\gamma} + z$ se tiene que $P = \gamma(h - z)$, entonces la derivada parcial de P con respecto a s

$$\frac{\partial P}{\partial s} = \gamma \frac{\partial(h - z)}{\partial s} = \gamma \left(\frac{\partial h}{\partial s} - \frac{\partial z}{\partial s} \right) \quad (2.67)$$

$$= \gamma \frac{\partial h}{\partial s}, \quad (2.68)$$

es así que la generalización de (2.66) para este modelo queda expresada de la siguiente manera

$$\frac{\partial h}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{fV|V|}{2gD} = 0. \quad (2.69)$$

¹Como observación, esta será $h = \frac{P}{\gamma}$ cuando el sistema de referencia se tome considerando $z = 0$.

donde para tomar en cuenta el sentido positivo o negativo del flujo debe considerarse $V^2 = V|V|$.

2.6.4. Ecuación Constitutiva del fluido

Dos de las principales características del sistema, la compresibilidad del fluido y el comportamiento elástico de la tubería, no han sido hasta ahora prescindibles en el análisis de las subsecciones previas, sin embargo en (2.50) y (2.69) hay parámetros que aún no están explícitamente determinados, estos son el área $A(s, t)$, la presión $P(s, t)$, la velocidad $V(s, t)$ y la densidad $\rho(s, t)$.

La compresibilidad se define como la tasa de cambio de la densidad de un fluido con respecto a los cambios de presión, y en este caso será igual a una densidad de referencia ρ_0 (a partir de la cual se consideran las variaciones de ρ), sobre K el módulo de compresibilidad del fluido en cuestión:

$$\frac{\partial \rho}{\partial P} = \frac{\rho_0}{K} \quad (2.70)$$

esta ecuación lleva el nombre de ecuación constitutiva del fluido. Considerando que el flujo de interés en este trabajo es agua, entonces, como **hipótesis 2** se tendrá que:

$$\left| \frac{\Delta \rho}{\rho_0} \right| \ll 1 \quad (2.71)$$

Considerando una sección cualquiera de la tubería, (2.70) puede escribirse como

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_0} = \frac{\Delta P}{K} \quad (2.72)$$

K para el agua es del orden de $2 \times 10^8 \text{ kg/m}^2$. En tuberías industriales [6], los incrementos de presión no llegan a rebasar por ejemplo los $5 \times 10^5 \text{ kg/m}$, entonces al sustituir valores en esta última relación, se vería que

$$\frac{\Delta P}{K} \cong 2.5 \times 10^{-3} \quad (2.73)$$

lo que justifica la relación (2.71).

Capítulo 3

Descripción del experimento

Los datos con los que se sustenta este trabajo fueron tomados de un experimento previo realizado por los ingenieros Eduardo Antonio Rodal Canales y René Autrique Ruiz en el 2014, en instalaciones experimentales de la empresa Policonductos en San Luis Potosí, México; con la finalidad de medir las celeridades en ondas de presión en tuberías de polietileno de alta densidad. Cabe resaltar que las pruebas que a continuación se detallan, fueron desarrollados bajo el marco de una colaboración entre industria y la Universidad Nacional Autónoma de México.

3.1. Diseño y construcción del sistema

El propósito general es estudiar los fenómenos transitorios, tratando de simular las condiciones habituales de operación en los sistemas de tuberías como los existentes en plantas hidroeléctricas o en las redes de distribución de agua a lo largo de una ciudad.

Es así que el modelo consistió en un arreglo de tuberías de polietileno de alta densidad de diferentes diámetros y longitudes, conectados a su vez a una o dos bombas centrífugas que succionaban agua de una fosa de nivel constante y permitieron regular las presiones y por tanto, las velocidades de flujo. Para asegurar una presión constante de agua fueron colocados tanques hidroneumáticos en los extremos “aguas arriba” y “aguas abajo” del sistema y se instaló también una válvula neumática de cierre rápido en el extremo aguas abajo. Las especificaciones técnicas de los elementos del arreglo son los siguientes:

- Polietileno fabricado con resina PPI 4710 (equivalente a la designación europea PE100).
- Bombas centrífugas de 11KW capaces de trabajar en serie o en paralelo.
- Válvula neumática de cierre rápido (0.02s).

3. DESCRIPCIÓN DEL EXPERIMENTO

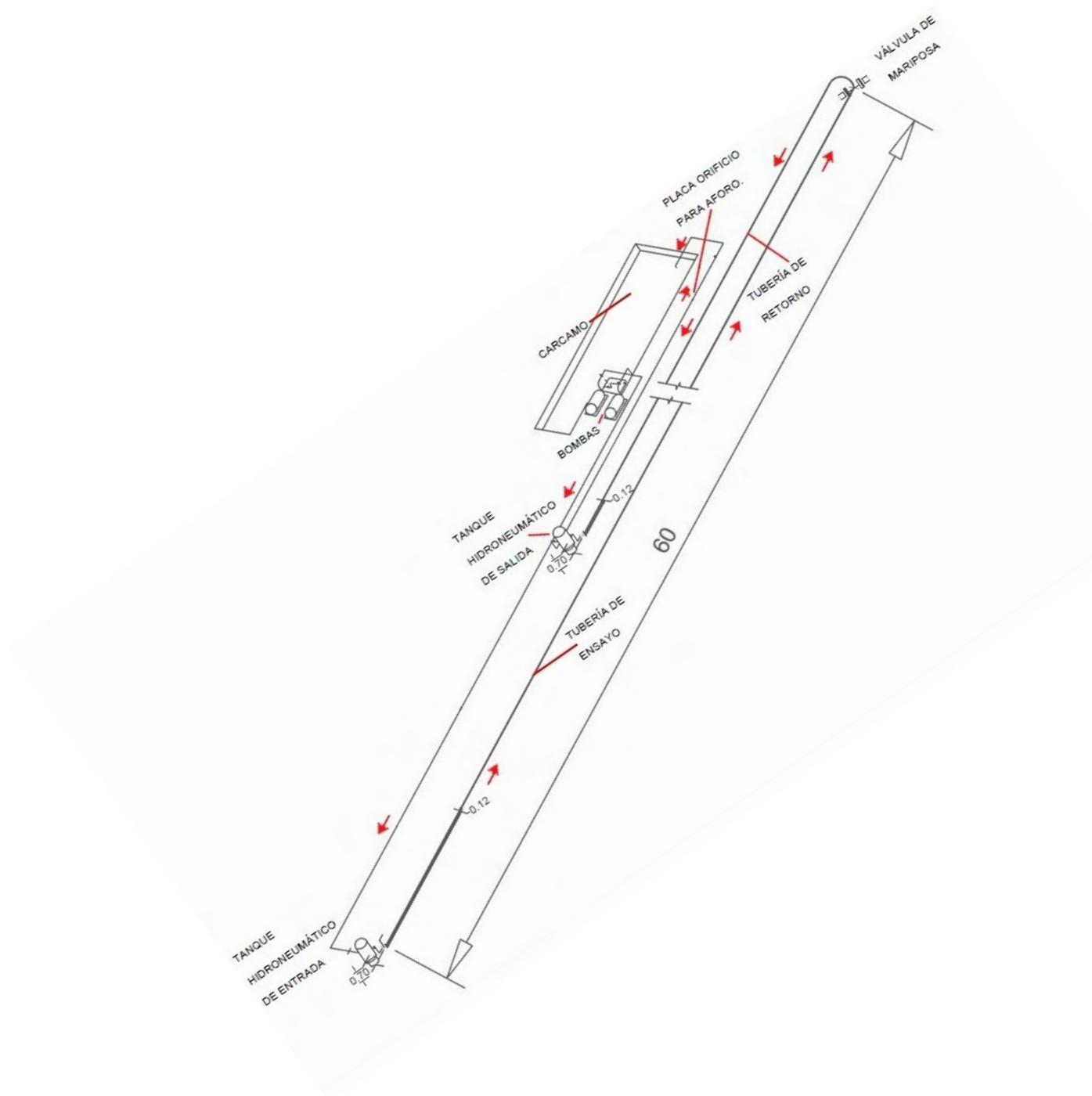


Figura 3.1: Plano a escala del arreglo experimental, cada unidad representa un metro.



((a)) Tubería recta.



((b)) Tubería enrollada.

Figura 3.2: Las pruebas fueron realizadas según la longitud deseada, en alguna de las dos configuraciones [11].

El experimento consistió en establecer una condición fija y cerrar rápidamente la válvula en el extremo aguas abajo de la tubería para provocar un golpe de ariete.

3.2. Obtención de datos

Las variables a medir fueron esencialmente dos, las presiones en condiciones de flujo estacionario y las presiones transitorias cambiantes en el tiempo. Las primeras se midieron con manómetros tipo Bourdon y las segundas con cuatro transductores de presión de 0 a 500 psi ¹ y una frecuencia de muestreo de 500 Hz , colocados estratégicamente a lo largo de la tubería para registrar el desarrollo del transitorio. Durante todas las pruebas se procuró apagar las bombas simultáneamente, al realizar el cierre de válvulas aguas abajo, evitando con esto el incremento de la presión en el tanque aguas arriba.

¹La unidad psi hace referencia a una libra por pie cuadrado

$$1 \text{ psi} = 47.88 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ psi} = 0.7 \text{ mca}$$

con mca = metro columna de agua. Esta unidad con frecuencia usada en hidráulica, surge de considerar la presión que ejerce una columna de agua de 10m.

3. DESCRIPCIÓN DEL EXPERIMENTO

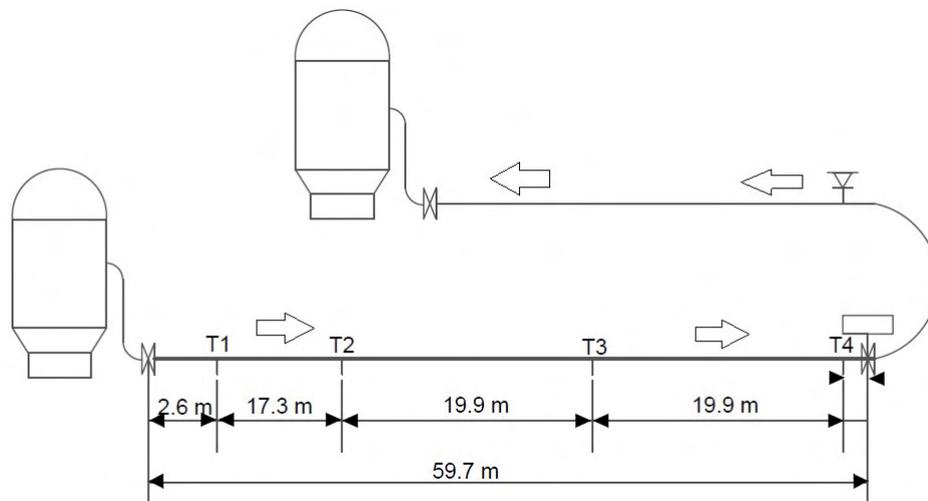


Figura 3.3: Ubicación de los transductores.

La figura 3.3 muestra una vista frontal del experimento, y la ubicación de cada uno de los cuatro transductores que registraron las sobrepresiones. En la tabla 3.1 se muestran las condiciones de gasto y velocidad del flujo para las pruebas realizadas. A partir de estas condiciones se provocó el transitorio hidráulico mediante el cierre de la válvula en el extremo aguas abajo de la tubería.

L (m)	D_{nom} (m)	D_{ext} (m)	Q (l/s)	V (m/s)	Tubería	N° pruebas
60	0.1	0.11	4 a 17.6	0.8 a 1.96	recta	46
110	0.1	0.11	5 a 7	1.0 a 1.4	recta	6
150	0.05	0.06	4.2 a 6.8	2.0 a 3.2	enrollada	6
300	0.05	0.06	4.2 a 6.8	2.0 a 3.2	enrollada	6

Tabla 3.1: Configuraciones de pruebas - Se muestran las especificaciones para cuatro longitudes diferentes de tubería, dos variantes en el diámetro, el diámetro exterior o nominal D_{nom} y exterior D_{ext} , el gasto Q, la velocidad, el estado de la tubería y el número de pruebas realizado para cada caso.

La figura 3.4 muestra la evolución de las presiones transitorias para cada una de las longitudes de prueba. Puede verse que la frecuencia de las oscilaciones de presión es función de la longitud de la tubería, pero se mantiene constante durante el transitorio,

condición que se toma como base en el modelo matemático que se presenta en el capítulo 4.

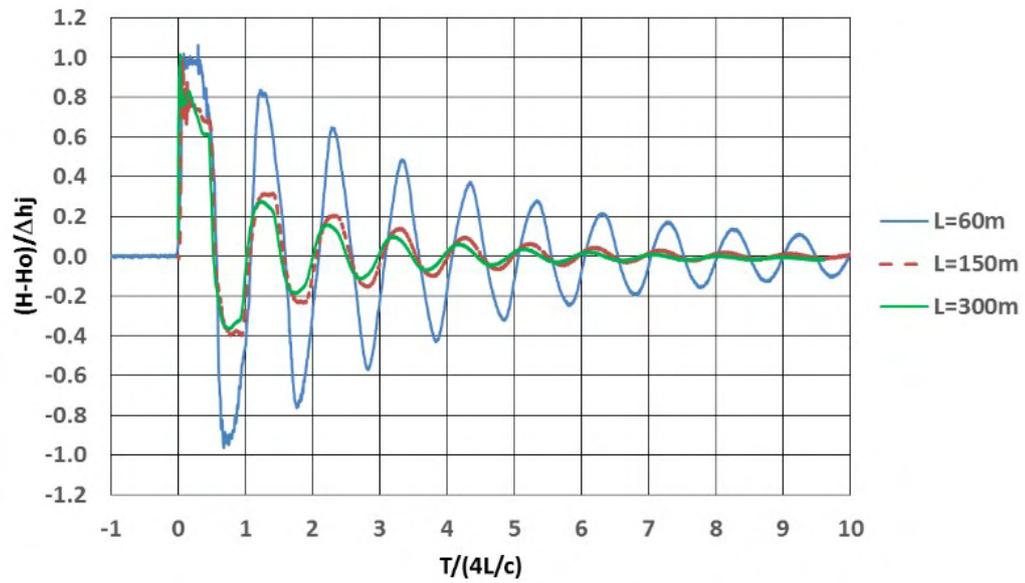


Figura 3.4: Evolución de las presiones transitorias para tres de las cuatro longitudes, se ha graficado (H vs t), el tiempo esta normalizado con la longitud; tomado de [11].

Capítulo 4

Desarrollo de la Metodología

4.1. Hipótesis

Haciendo una síntesis, y como ya se mencionaba en la introducción, el problema en estudio será el siguiente: el sistema a analizar es una tubería fabricada con polietileno de alta densidad, por la que fluye agua sometida a cambios repentinos de presión inducidos por la interrupción súbita del flujo mediante el cierre de una válvula. Se considerarán como hipótesis que:

- **3.** La pared de la tubería es delgada, lo que se representa con la ecuación (2.24).
- **4.** Las deformaciones se presentan en dos dimensiones y además son pequeñas (*small strain*).
- **5.** El material de la tubería es viscoelástico.

Nota: se ha respetado la numeración con respecto a las hipótesis 1 y 2 previamente expuestas.

4.2. Implicaciones

- **Hipótesis 3.** Debido al fenómeno transitorio el tubo de la figura 2.14(b), estará sometido a fuerzas radiales en el interior del tubo y tangenciales en el exterior.
- **Hipótesis 4.** En un caso real las fuerzas que actúan sobre el sólido en cuestión, no son unidimensionales sino que tienen componentes en las tres dimensiones, (r, θ, z) como corresponde a las coordenadas cilíndricas. Esta segunda hipótesis considera que las deformaciones en el eje z son lo suficientemente pequeñas para ser despreciadas, dejando únicamente un estado de deformación plana, así, es

posible suponer que el esfuerzo ejercido consta de dos componentes, la primera σ_θ , dada por la ecuación (2.29), en respuesta a la presión (radial y uniforme a lo largo de la tubería) ejercida por el agua; y un σ_ν para hacer referencia al producido por el material que se opone a tal deformación.

- **Hipótesis 5.** Ya que la singularidad del problema es la viscoelasticidad, el primer paso para resolverlo es buscar un modelo mecánico que pueda describir la respuesta viscoelástica acertadamente. Es así que basados en el caso unidimensional se toma el modelo del sólido lineal estándar, que fue previamente estudiado en el capítulo 2.

En la figura 4.1 se hace una representación del nuevo modelo que ahora incorpora los esfuerzos σ_θ y σ_ν .

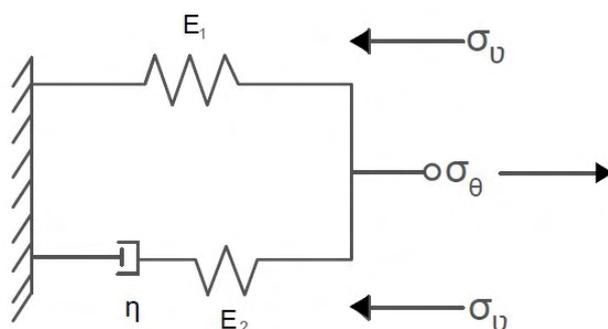


Figura 4.1: Modelo del sólido lineal estándar modificado.

4.3. Cambios propuestos al Modelo del Sólido Lineal

Estándar

La consideración hecha en el modelo del sólido lineal estándar en la que se suponía que las ramas se deforman igual, será igualmente válida, por lo que

$$\xi = \xi_1 = \xi_2 \quad (4.1)$$

luego, sobre el elemento viscoelástico, según la hipótesis dos, actuarán las dos componentes del esfuerzo, σ_θ y σ_ν . Basándonos en la ecuación (2.11) del modelo original, tendríamos la siguiente relación para el esfuerzo total del sistema

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_\theta - \sigma_\nu = \sigma_{total} \quad (4.2)$$

donde σ_ν tiene signo negativo ya que el esfuerzo del material se opone a la alteración. Este mismo se pensara proporcional a la velocidad de deformación, entonces

$$\sigma_\nu = \eta_\nu \frac{d\xi}{dt}; \quad (4.3)$$

donde η_ν es la viscosidad dinámica por tiempo en la dirección del flujo. La rama superior, o rama 1, compuesta con un solo elemento elástico cumplirá que

$$\sigma_1 = E_1 \xi, \quad (4.4)$$

para la rama 2, ó de Maxwell, las relaciones son:

$$\sigma_2 = \sigma_{R_2} = \sigma_A \quad (4.5)$$

$$\xi = \xi_{R_2} + \xi_A \quad (4.6)$$

por otro lado los elementos viscoso y elástico de esta rama se describen respectivamente con las ecuaciones:

$$\frac{d\xi_A}{dt} = \frac{\sigma_A}{\eta} \quad (4.7)$$

$$\sigma_2 = \sigma_{R_2} = E_2 \xi_{R_2} \quad (4.8)$$

al sustituir (4.4) y (4.8) en (4.2) y dividir ambos lados de la igualdad por E_2

$$\frac{E_1 \xi + E_2 \xi_{R_2}}{E_2} = \frac{\sigma_\theta - \sigma_\nu}{E_2}, \quad (4.9)$$

despejando ξ_{R_2} de la ecuación (4.9)

$$\xi_{R_2} = \frac{\sigma_\theta - \sigma_\nu - E_1 \xi}{E_2}. \quad (4.10)$$

Por otro lado, al derivar (4.6) y sustituyendo (4.7) resulta

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{d\xi_{R_2}}{dt} + \frac{\sigma_A}{\eta}, \quad (4.11)$$

de las igualdades (4.5) y (4.8) se tiene que $\sigma_A = \sigma_2$, entonces $\sigma_A = E_2 \xi_{R_2}$, de tal manera que la ecuación anterior será

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{E_2 \xi_{R_2}}{\eta} + \frac{d\xi_{R_2}}{dt}, \quad (4.12)$$

y derivando con respecto al tiempo en ambas partes de la ecuación (4.10)

$$\frac{d\xi_{R2}}{dt} = \frac{\frac{d\sigma_\theta}{dt} - \frac{d\sigma_\nu}{dt} - E_1 \frac{d\xi}{dt}}{E_2}, \quad (4.13)$$

así, para llegar a una expresión que solo este en términos de la variable ξ , se sustituye (4.10) y (4.13) en la ecuación (4.12). Finalmente después de un poco de álgebra:

$$(E_1 + E_2) \frac{d\xi}{dt} + \frac{E_1 E_2}{\eta} \xi = \frac{d\sigma_\theta}{dt} - \frac{d\sigma_\nu}{dt} + \frac{E_2}{\eta} (\sigma_\theta - \sigma_\nu) \quad (4.14)$$

que resulta ser la nueva ecuación diferencial que describe al sistema. Es decir, la ecuación (4.14) es la ecuación constitutiva del material que forma la pared del tubo. Si se compara esta con la ecuación (2.23) se observa que el único cambio está en el término del lado derecho de la igualdad, debido a que el esfuerzo tiene ahora dos componentes.

4.4. Desarrollo matemático

Para poder validar el modelo tomando como base de comparación los datos experimentales de los transitorios hidráulicos presentados en el capítulo 3, se necesita incorporar todas las ecuaciones que describen el fenómeno. De la ecuación (4.14) teniendo como primera aproximación que las deformaciones están en función del cambio en el diámetro de la tubería

$$\xi = \frac{D - D_0}{D_0} \quad (4.15)$$

de donde se sigue que, para cambios pequeños en las deformaciones

$$\delta\xi = \frac{\delta D}{D_0} \Rightarrow \frac{\delta\xi}{\delta t} = \frac{1}{D_0} \frac{\delta D}{\delta t}, \quad (4.16)$$

por otra parte las variaciones en el área están en función de la presión, es decir $A = A(P)$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{\delta A}{\delta P} &= \frac{\pi}{2} D \frac{\delta D}{\delta P} = \frac{2}{D} \frac{\pi D^2}{4} \frac{\delta D}{\delta P} = \frac{2A}{D} \frac{\delta D}{\delta P} \\ &\Rightarrow \frac{\delta D}{\delta P} = \frac{D}{2} \frac{1}{A} \frac{\delta A}{\delta P} \end{aligned} \quad (4.17)$$

y recordando la expresión para una tubería de pared delgada (ec. 2.29), donde e representa el espesor de la misma

$$\sigma_\theta = \frac{PD}{2e} \quad (4.18)$$

sustituyendo ahora (4.15), (4.16) y (4.18) en (4.14) y reacomodando términos se obtiene:

$$\frac{1}{D_0} \frac{\delta D}{\delta t} (E_1 + E_2) + \frac{E_1 E_2}{\eta} \left(\frac{D - D_0}{D_0} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{P(t)D(t)}{2e} \right) - \frac{d\sigma_\nu}{dt} + \frac{E_2}{\eta} \left(\frac{PD}{2e} - \sigma_\nu \right) \quad (4.19)$$

efectuando la derivada

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{P(t)D(t)}{2e} \right) = \left[P(t) \frac{\partial D(t)}{\partial t} + D(t) \frac{\partial P(t)}{\partial t} \right] \frac{1}{2e}, \quad (4.20)$$

por otro lado debido a que las variaciones de D son consecuencia de las variaciones de P , entonces se puede escribir

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\partial D}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (4.21)$$

tomando en cuenta (4.20), (4.21) y pasando términos a la derecha

$$\left[(E_1 + E_2) \frac{1}{D_0} - \frac{P}{2e} \right] \frac{\partial D}{\partial P} + \frac{E_1 E_2}{\eta} \left(\frac{D - D_0}{D_0} \right) - \frac{D}{2e} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{d\sigma_\nu}{dt} - \frac{E_2}{\eta} \left(\frac{PD}{2e} - \sigma_\nu \right) = 0. \quad (4.22)$$

El siguiente paso será sustituir (4.17) (pasando de incrementos a parciales), en la expresión (4.22), para después despejar las variaciones del área y la presión, esto es

$$\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\frac{D}{e} \frac{\partial P}{\partial t} - 2 \frac{E_1 E_2}{\eta} \frac{D - D_0}{D_0} - 2 \frac{d\sigma_\nu}{dt} + \frac{E_2}{\eta} \left(\frac{PD}{e} - 2\sigma_\nu \right)}{(E_1 + E_2) \frac{D}{D_0} - \frac{PD}{2e}} \quad (4.23)$$

Como se vio en los fundamentos, sección 2.6.1, la conservación de la masa para un fluido compresible en una tubería no rígida esta dado por la ecuación (2.50), en donde si se incorpora la hipótesis (2.51), se tendrá que

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial P} + \frac{\rho}{A} \frac{\partial A}{\partial P} \right) \frac{\partial P}{\partial t} + \rho \frac{\partial V}{\partial s} = 0, \quad (4.24)$$

y ya que el fluido es agua, también se toma en cuenta la ecuación (2.70), así sustituyendo (4.23) en (4.24), y trabajando un poco con la expresión, es posible llegar a:

$$\rho_0 \left[\frac{1}{K} + \frac{\frac{\rho}{\rho_0} \frac{D_0}{E_1 e}}{\left(1 + \frac{E_1}{E_2} \right) - \frac{PD_0}{2eE_1}} \right] \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{2\rho \frac{E_2}{\eta} \left[\frac{D_0}{D} - \left(1 - \frac{PD_0}{2eE_1} \right) - \frac{1}{E_1} \left(\sigma_\nu + \frac{\eta}{E_2} \frac{d\sigma_\nu}{dt} \right) \right]}{\left(1 + \frac{E_2}{E_1} \right) - \frac{PD_0}{2eE_1}} + \rho \frac{\partial V}{\partial s} = 0, \quad (4.25)$$

donde K representa el módulo de compresibilidad del agua.

4. DESARROLLO DE LA METODOLOGÍA

En la sección 2.6.3 se había visto que $\frac{\rho_0}{\gamma} = \frac{1}{g}$, y fue definida la carga piezométrica como¹ $H = \frac{P}{\gamma} + z$, despejando P en esta igualdad:

$$\begin{aligned} P = \gamma(H - z) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial t} &= \gamma \left(\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial z'}{\partial t} \right) \\ &\therefore \frac{\partial P}{\partial t} = \gamma \frac{\partial H}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.26)$$

además recordando que a representa la celeridad, se definirá:

$$\frac{1}{a^2} = \frac{1}{\rho_0} \left[\frac{1}{K} + \frac{\frac{D_0}{eE_1}}{1 + \frac{E_2}{E_1} - \frac{PD_0}{2eE_1}} \right] \quad (4.27)$$

por lo anterior la ecuación (4.25) se reduce a

$$\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{g}{a^2} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{2\frac{E_2}{\eta} \left[\frac{D_0}{D} - \left(1 - \frac{PD_0}{2eE_1} \right) - \frac{1}{E_1} \left(\sigma_\nu + \frac{\eta}{E_2} \frac{d\sigma_\nu}{dt} \right) \right]}{\left(1 + \frac{E_2}{E_1} \right) - \frac{PD_0}{2eE_1}} = 0 \quad (4.28)$$

donde se tiene como **hipótesis 6** que el líquido es incompresible, es decir:

$$\frac{\rho}{\rho_0} \cong 1. \quad (4.29)$$

Solo falta entonces hacer uso de una de las ecuaciones fundamentales que describen el problema de la tubería, la ecuación dinámica (2.69)

$$\frac{\partial H}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{fV|V|}{2gD} = 0. \quad (4.30)$$

Para resolverla, se debe recordar que $V = (s, t)$, entonces la derivada total con respecto al tiempo

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial s} \frac{ds}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t} \frac{dt}{dt} = \frac{\partial V}{\partial s} \frac{ds}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t} \quad (4.31)$$

entonces

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{dV}{dt} \mp a \frac{\partial V}{\partial s} \quad (4.32)$$

ya que por definición $\frac{ds}{dt} = \pm a$. Por lo que la ecuación dinámica (4.30) puede escribirse como:

$$\frac{\partial H}{\partial s} + \frac{1}{g} \left[\frac{dV}{dt} \pm a \frac{\partial V}{\partial s} \right] + \frac{fV|V|}{2gD} = 0, \quad (4.33)$$

¹Se aclara que a partir de este punto se representa a la carga piezométrica con la letra mayúscula H , pero no debe confundirse con la carga hidráulica total que se ha tomado en este trabajo como \mathcal{H} .

Por otro lado despejando $\frac{\partial V}{\partial s}$ de la ecuación (4.28)

$$\frac{\partial V}{\partial s} = \left\{ \frac{g}{a^2} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{2\frac{E_2}{\eta} \left[\frac{D_0}{D} - \left(1 - \frac{PD_0}{2eE_1} \right) - \frac{1}{E_1} \left(\sigma_\nu + \frac{\eta}{E_2} \frac{d\sigma_\nu}{dt} \right) \right]}{\left(1 + \frac{E_2}{E_1} \right) - \frac{PD_0}{2eE_1}} \right\} \quad (4.34)$$

luego sustituyendo en (4.33) y reacomodando términos

$$\frac{1}{a} \left(\pm \frac{\partial H}{\partial t} + a \frac{\partial H}{\partial s} \right) + \frac{1}{g} \frac{dV}{dt} \pm \frac{2a\frac{E_2}{\eta} \left[\frac{D_0}{D} - \left(1 - \frac{PD_0}{2eE_1} \right) - \frac{1}{E_1} \left(\sigma_\nu + \frac{\eta}{E_2} \frac{d\sigma_\nu}{dt} \right) \right]}{\left(1 + \frac{E_2}{E_1} \right) - \frac{PD_0}{2eE_1}} + \frac{fV|V|}{2gD} = 0, \quad (4.35)$$

recordando que $H = H(s, t)$, por lo tanto la derivada total de H con respecto a t

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial s} \frac{ds}{dt} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial s} \frac{ds}{dt} + \frac{\partial H}{\partial t} \quad (4.36)$$

para

$$\frac{ds}{dt} = +a \quad (4.37)$$

la ecuación (4.35) se puede reducir en la forma:

$$\frac{d}{dt} \left(V + \frac{g}{a} H \right) + \frac{2a\frac{E_2}{\eta} \left[\frac{D_0}{D} - \left(1 - \frac{PD_0}{2eE_1} \right) - \frac{1}{E_1} \left(\sigma_\nu + \frac{\eta}{E_2} \frac{d\sigma_\nu}{dt} \right) \right]}{\left(1 + \frac{E_2}{E_1} \right) - \frac{PD_0}{2eE_1}} + \frac{fV|V|}{2D} = 0 \quad (4.38)$$

se obtiene una expresión análoga para el caso en que

$$\frac{ds}{dt} = -a \quad (4.39)$$

$$\frac{d}{dt} \left(V + \frac{g}{a} H \right) - \frac{2a\frac{E_2}{\eta} \left[\frac{D_0}{D} - \left(1 - \frac{PD_0}{2eE_1} \right) - \frac{1}{E_1} \left(\sigma_\nu + \frac{\eta}{E_2} \frac{d\sigma_\nu}{dt} \right) \right]}{\left(1 + \frac{E_2}{E_1} \right) - \frac{PD_0}{2eE_1}} + \frac{fV|V|}{2D} = 0. \quad (4.40)$$

Observando que al imponer las condiciones (4.37) y (4.39) se eliminando la variable independiente s en (4.35), que ahora depende únicamente del tiempo.

El procedimiento que aquí se ha usado para pasar de ecuaciones diferenciales parciales a ordinarias que pueden ser resueltas numéricamente, es llamado método de las características, que se explica en el apéndice A.1. Aplicando en método de las características se obtienen las ecuaciones (4.41) a (4.47) con las que se buscará el valor de $\frac{d\sigma_\nu}{dt}$ que mejor reproduzca los resultados experimentales.

Se tomará como constante a evaluar numéricamente el término $\frac{d\sigma_\nu}{dt}$, por lo que, al final siguiendo el método citado obtendremos que

$$(V_P - V_A) + \frac{g}{a}(H_P - H_A) + F_A^+ = 0 \quad (4.41)$$

con

$$F_A^+ = \left[\frac{fV|V_A|}{2D_A} + \frac{2a \frac{E_2}{\eta} \left[\frac{D_0}{D_A} - \left(1 - \frac{P_A D_0}{2eE_1} \right) - \frac{1}{E_1} \left(\sigma_\nu + \frac{\eta}{E_2} \frac{d\sigma_\nu}{dt} \right) \right]}{1 + \frac{E_2}{E_1} - \frac{P_A D_0}{2eE_1}} \right] \Delta t \quad (4.42)$$

y de la ecuación (4.40)

$$(V_P - V_B) - \frac{g}{a}(H_P - H_B) + F_B^- = 0 \quad (4.43)$$

donde

$$F_B^- = \left[\frac{fV|V_B|}{2D_B} + \frac{2a \frac{E_2}{\eta} \left[\frac{D_0}{D_B} - \left(1 - \frac{P_B D_0}{2eE_1} \right) - \frac{1}{E_1} \left(\sigma_\nu + \frac{\eta}{E_2} \frac{d\sigma_\nu}{dt} \right) \right]}{1 + \frac{E_2}{E_1} - \frac{P_B D_0}{2eE_1}} \right] \Delta t \quad (4.44)$$

Se dispone ahora de un sistema de ecuaciones en el que las incógnitas a determinar serán H_P y V_P . Con este fin sumando (4.41) y (4.43) resulta:

$$V_P = \frac{1}{2} \left[V_A + V_B + \frac{g}{a}(H_A - H_B) - F_A^+ - F_B^- \right], \quad (4.45)$$

luego al restar (4.43) de (4.41)

$$H_P = \frac{a}{2g} \left[V_A - V_B + \frac{g}{a}(H_A + H_B) - F_A^+ + F_B^- \right] \quad (4.46)$$

y de esta manera la presión será:

$$P_P = \gamma(H_P - z) \quad (4.47)$$

Los subíndices A y B en estas ecuaciones corresponden a dos puntos iniciales del transitorio, donde los valores H , V y D son conocidos (instante t_j), mientras que P hace referencia al valor que toman estas mismas variables en un instante de tiempo posterior ($t_j + \Delta t$), ver figura 5.2.

En el siguiente capítulo se presentan el modelo numérico y los resultados de aplicar las ecuaciones (4.42), (4.44), (4.45), (4.46) y (4.47) al problema de estudio de esta tesis.

Capítulo 5

Modelo Numérico y Resultados

El análisis de las ecuaciones (4.41) a (4.47) permite entender que si se conocen los valores de las constantes H , V y P para más de dos puntos iniciales del fenómeno, es posible calcular sus valores para los siguientes instantes del desarrollo de la onda de sobrepresión, haciendo un cálculo recursivo. Basados en esta idea fijémonos en la malla de la figura 5.1. Si se divide a la tubería en n partes iguales de longitud Δx , los vértices de cada sección serán llamados nodos o puntos de la cuadrícula. Las secciones finales de la tubería harán referencia a las fronteras y las secciones intermedias excluyendo a los extremos serán los nodos interiores.

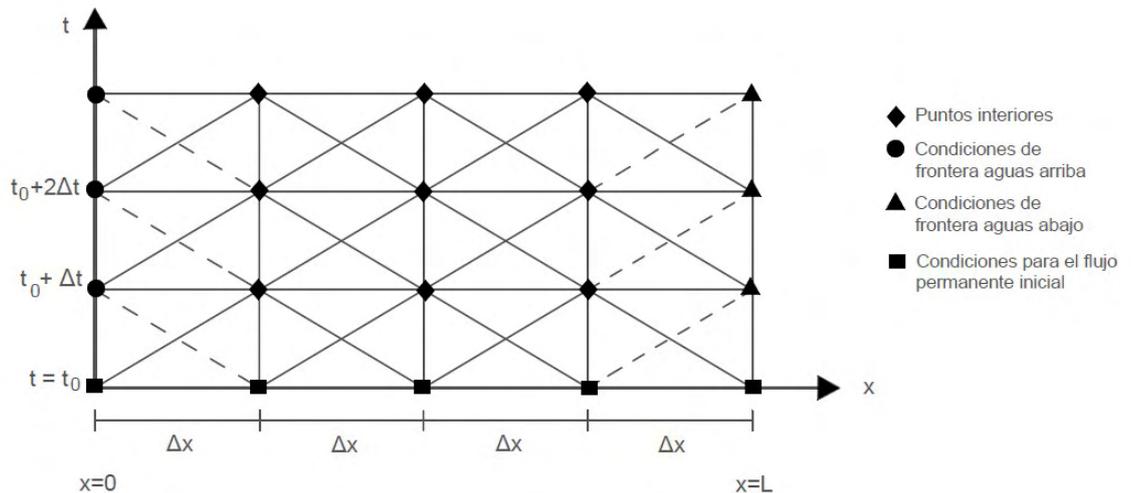


Figura 5.1: Malla usada para la aplicación del método de las características en un fenómeno transitorio, L representa la longitud de la tubería.

5.1. Condiciones iniciales

Las condiciones para el flujo permanente inicial y del sistema en general deberán ser valores conocidos en $t = t_0$, esto con la finalidad de realizar el cálculo de V_P , H_P y P_P en $t = t_0 + \Delta t$. Este estado preliminar del fenómeno estudiado, se impone con las siguientes consideraciones para el diámetro, la velocidad, la presión y la carga total del sistema.

Diámetro.

En reposo se cumple la condición de flujo estacionario, lo cual implica que el valor del diámetro de la tubería es fijo, por lo que apoyándonos en la ecuación constitutiva del material (2.23), teniendo en cuenta estas consideraciones, es posible reducirla a:

$$\frac{E_1 E_2}{\eta} \frac{D_i - D_0}{D_0} = \frac{E_2}{\eta} \sigma, \quad (5.1)$$

el término D_i se interpreta como el diámetro exterior en condiciones estacionarias previas al transitorio, lo que se conoce como diámetro nominal. En esta última ecuación, se ha utilizado la relación (4.15) para expresar la deformación ξ . Si además se aplica la **hipótesis 4** ecuación (2.29), se tendrá que el esfuerzo, tomando en cuenta su componente tangencial, será

$$\frac{E_1 E_2}{\eta} \frac{D_i - D_0}{D_0} = \frac{E_2}{\eta} \frac{P D_i}{2e} \quad (5.2)$$

es así que despejando D_i se obtiene la primera de estas condiciones iniciales

$$D_i = \left(\frac{D_n}{1 - \frac{P_i D_n}{2e E_1}} \right) \quad (5.3)$$

Velocidad y Presión.

La condición para la velocidad promedio sale de la ecuación del gasto (2.38)

$$V_i = \frac{Q}{0.25\pi D_i^2} \quad (5.4)$$

Mientras que para la presión, corresponde a la ecuación (4.47), donde por el sistema de referencia elegido $z = 0$

$$P_i = \gamma(H_i - 0) \quad (5.5)$$

Carga piezométrica.

Recordando que este concepto hace referencia a la suma de las energías del sistema, la expresión debe considerar la carga inicial, antes de que el sistema se vea alterado por los transitorios menos las pérdidas de energía debidas a la fricción, lo cual se expresa como

$$H_i = H_{i-1} - 8f\Delta x \frac{Q^2}{g\pi^2 D_{prom}} \quad (5.6)$$

esta es una expresión en diferencias finitas, donde el último término es la fórmula de Darcy-Weisbach para la fricción [13]. Al evaluar el término H_{i-1} para $i = 1$ el subíndice se vuelve cero, lo que representa la condición de flujo estacionario inicial.

5.2. Implementación del método

En esta tesis, se consideran únicamente diez puntos de cálculo, por lo que de las ecuaciones (5.3) hasta la (5.6) se evaluarán para $i = 0, 1, 2, 3, \dots, 10$, cabe aclarar que los estados iniciales (impuestos en un principio), se denotan con $i = 0$. Posteriormente, para determinar el estado de los nodos interiores en el instante $t = t_0 + \Delta t$, implicará aplicar la ecuación (4.41) hasta la (4.44), de donde se obtienen tanto V_P y H_P , como F_A^+ y F_B^- , con los que se hace posible calcular los valores en el instante siguiente, es decir $t = t_0 + 2\Delta t$, usando el mismo procedimiento. De esta manera se calculan paso por paso todos los instantes del desarrollo del transitorio para el tiempo que sea requerido. En general para los nodos finales se necesitará imponer condiciones de frontera especiales.

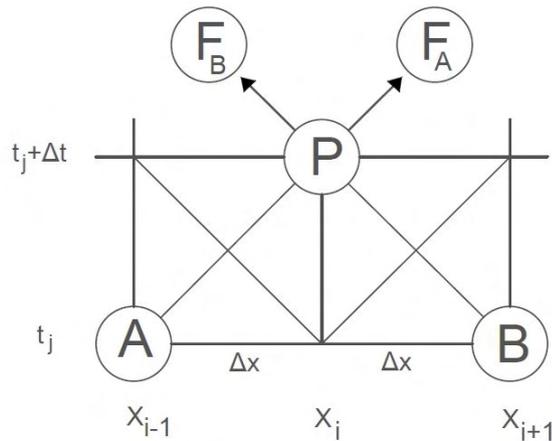


Figura 5.2: Acercamiento a las líneas características para el método de diferencias finitas.

5.3. Estimación de variables

El cálculo anterior puede llevarse a cabo solo si se conoce el valor explícito de todas las variables en las expresiones usadas, como en el caso de (4.42) y (4.44). El modelo requiere conocer también E_2 y η que no tienen valores registrados en la literatura, por ello son directamente estimados del modelo aquí descrito.

El valor E_1 para la resina usada *PPI 4710* es de $2.21 \times 10^8 \text{Pa}$, mientras que el modulo de elasticidad instantáneo E_2 del material, se calcula despejando directamente de la expresión para la celeridad a , ecuación (4.27), dando como resultado

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\rho_0 \frac{D_0}{e}}{E_1 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{\rho_0}{K} \right)} - 1 \quad (5.7)$$

Para el caso de η , fue calculado a través de determinar cuál era el valor que mejor se ajustaba a los resultados experimentales, basándose en la afectación que ejerce sobre los mismos el término E_2/η , presente en las expresiones para las líneas características F_A^+ y F_B^- ; encontrando como valor final 0.28. Usando el valor $E_2 = 6.79 \times 10^8 \text{Pa}$ obtenido con (5.7), se puede deducir que si

$$\frac{E_2}{\eta} = 0.28 \quad \Rightarrow \quad \eta = 2.24 \times 10^9 \text{Pa} \quad (5.8)$$

Comparado con otros valores (tabla 5.1), el orden de magnitud hallado $\times 10^9$, aparece intermedio entre el valor registrado para los polímeros y el vidrio fundido.

Fluido	η (Pa·s)
agua	10^{-3}
miel	10^{-1}
polímeros fundidos	10^3
vidrio fundido (500°C)	10^{12}
vidrio	10^{40}

Tabla 5.1: Coeficiente de viscosidad para distintos tipos de materiales.

Constante	valor	Constante	valor
D_n/e	14.0027	$(E_2/\eta)D_n\Delta t$	1.43×10^{-3}
E_2/η	0.28	$2aE_2/\eta$	172.48
Δx	30	$D_n/2eE_1$	3.17×10^{-8}
$E_1 + E_2$	8.97×10^8	E_1/E_2	3.063

Tabla 5.2: Constantes usadas en el cálculo numérico.

E_1	modulo de elasticidad instantáneo [Pa]
E_2	modulo de elasticidad a largo plazo [Pa]
Δx	unidad en la que se ha dividido el tubo [m]
$2aE_2/\eta$	celeridad por E_2 dividida entre el coeficiente de viscosidad [m/s]
$D_n/2eE_1$	diámetro nominal entre dos veces el espesor y E_1 [$1/Pa$]

5.3.1. El caso de σ_ν

Para poder calcular numéricamente tanto σ_ν como $\frac{d\sigma_\nu}{dt}$ presentes en los términos F_A^+ y F_B^- , se requiere de una interpretación física basada en el comportamiento del material durante el fenómeno transitorio. A medida que la onda viaja a lo largo de la tubería, ocurre un aumento o disminución en el diámetro, se propone expresar este fenómeno usando un polinomio de segundo grado:

$$D = a_0 + a_1z + a_2z^2 \quad (5.9)$$

donde z representa la coordenada axial sobre el eje de la tubería.

Ya que finalmente σ_ν es una fuerza que ejerce un cambio sobre el diámetro, por la segunda ley de Newton

$$\sigma_\nu \propto \frac{d^2D}{dz^2} \quad (5.10)$$

para establecer la igualdad se define la constante de proporcionalidad k , entonces

$$\sigma_\nu = k \frac{d^2D}{dz^2} \quad (5.11)$$

derivando (5.9), la ecuación anterior nos quedaría como

$$\sigma_\nu = k \cdot 2a_2. \quad (5.12)$$

Ahora el problema es encontrar el coeficiente a_2 , si se piensa en puntos adyacentes de cálculo, la ecuación (5.9) puede escribirse como:

$$\begin{aligned}
 D_{i-1} &= a_0 + a_1 z_{i-1} + a_2 (z_{i-1})^2 \\
 D_i &= a_0 + a_1 z_i + a_2 (z_i)^2 \\
 D_{i+1} &= a_0 + a_1 z_{i+1} + a_2 (z_{i+1})^2
 \end{aligned}
 \tag{5.13}$$

resolviendo el sistema de ecuaciones anterior se encuentra que

$$a_2 = \frac{(D_i - D_{i+1})(z_i - z_{i-1}) - (D_i - D_{i-1})(z_i - z_{i+1})}{(z_i^2 - z_{i+1}^2)(z_i - z_{i-1}) - (z_i^2 - z_{i-1}^2)(z_i - z_{i+1})}
 \tag{5.14}$$

$$a_1 = \frac{(D_i - D_{i-1})(z_i - z_{i+1}) - a_2(z_i^2 - z_{i-1}^2)(z_i - z_{i+1})}{(z_i - z_{i-1})(z_i - z_{i+1})}
 \tag{5.15}$$

$$a_0 = D_{i-1} - a_1 \cdot z_{i-1} - a_2 \cdot z_{i-1}^2
 \tag{5.16}$$

Evaluando el tiempo en (5.12) para el punto inicial t y los instantes subsecuentes $t + \Delta t$ y $t + 2\Delta t$

$$\begin{aligned}
 t &\longleftrightarrow \sigma_\nu = k \cdot 2a_2(t) \\
 t + \Delta t &\longleftrightarrow \sigma_\nu = k \cdot 2a_2(t + \Delta t) \\
 t + 2\Delta t &\longleftrightarrow \sigma_\nu = k \cdot 2a_2(t + 2\Delta t) \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

así con base en la definición de diferencias finitas [14] se establece una aproximación para la primera derivada de (5.12), esto es:

$$\frac{d\sigma_\nu}{dt} \approx \frac{a_2(t + \Delta t) - a_2(t)}{\Delta t} (2k)
 \tag{5.17}$$

5.4. Resultados

Todo el cómputo del modelo anteriormente descrito, se llevó a cabo en una hoja de cálculo en Excel 2016. Ya que los transistores registraron la carga piezométrica H en cuatro puntos de la tubería, ésta variable fue el parámetro usado para la verificación de la teoría.

Las gráficas que a continuación se muestran, fueron hechas con el mismo programa, se expone en amarillo la señal registrada con los transductor y en azul la calculada con el método. Se escogió el punto de cálculo, más cercano a la ubicación del transistor (tabla 5.3) para hacer la comparación del valor calculado H_i con el valor medido experimentalmente, T_i . Así, por ejemplo, la señal T_4 ubicado a 299.7m se grafica junto con el cálculo de H_{10} que representa la carga a los 300m de la tubería.

Registro	T_1	H_1	T_2	H_3	T_3	H_6	T_4	H_{10}
Ubicación (m)	2.6	30	99.9	90	199.8	180	299.7	300

Tabla 5.3: Comparación de la ubicación de los transductores con las señales tomadas para la respectiva comparación de los resultados.

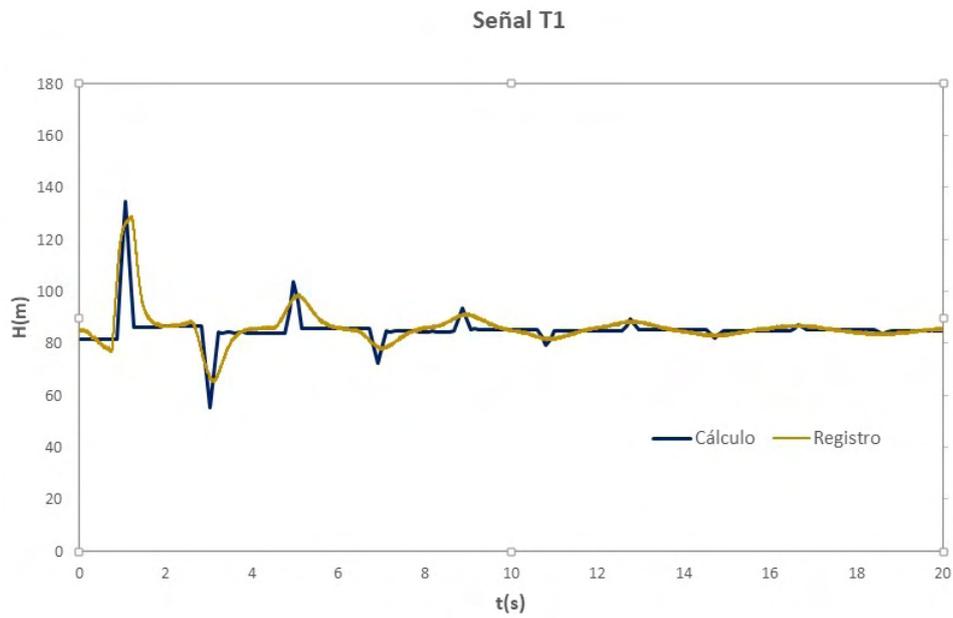


Figura 5.3: Registro del transductor T_1 comparado con H_1 .

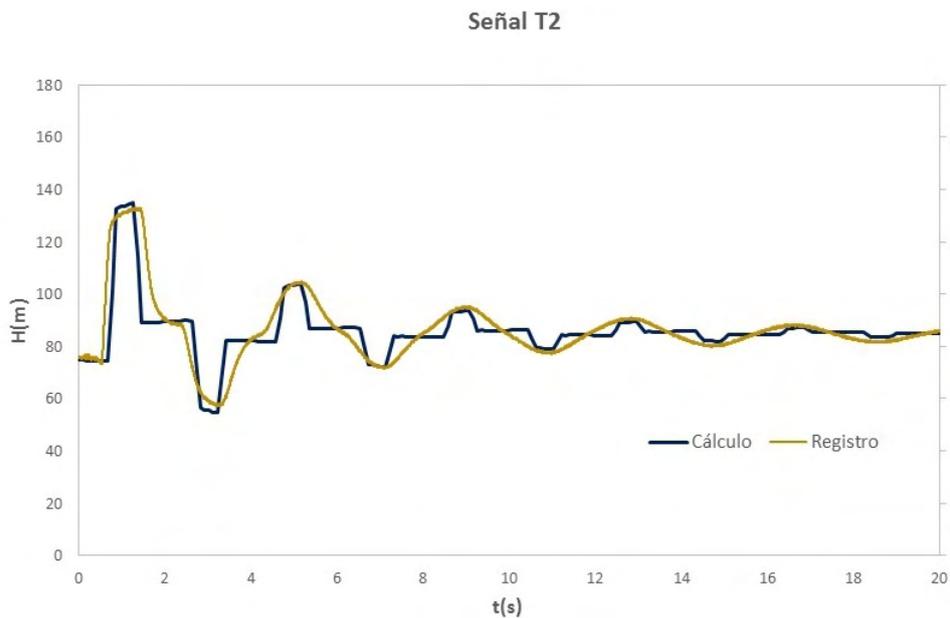


Figura 5.4: Registro del transductor T_2 comparado con H_3 .



Figura 5.5: Registro del transductor T_3 comparado con H_6 .

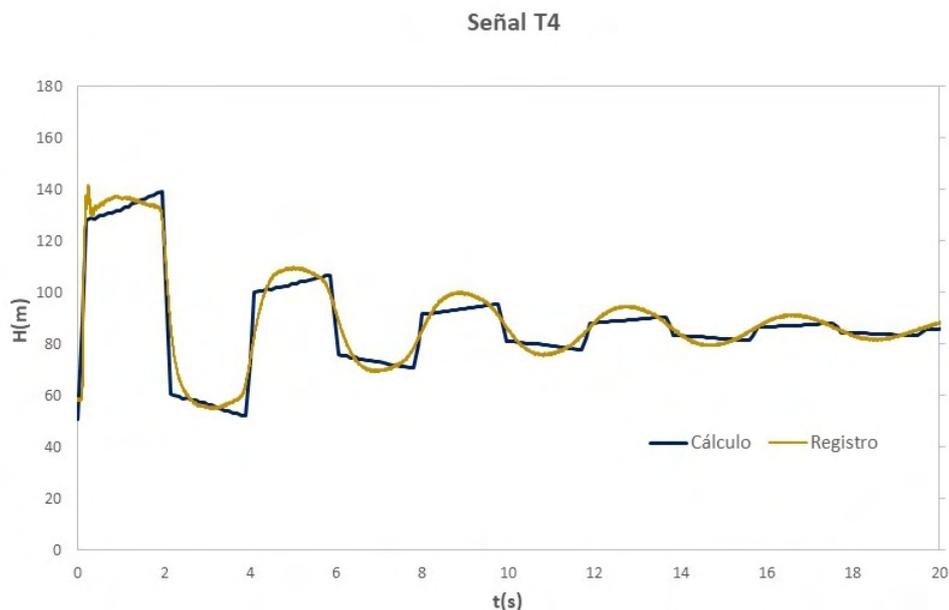


Figura 5.6: Registro del transductor T_4 comparado con H_{10} .

5.5. Discusión de los resultados

Los datos del registro experimental estaban expresados en litros entre pulgada cuadrada (*psi*), mientras que el cálculo esta representado en el SI. Para hacer la debida conversión se toman en cuenta las siguientes equivalencias

$$1 \frac{lb}{in^2} = 0.07 \frac{kg}{cm^2} \quad (5.18)$$

$$10 \text{ mca} = 1 \frac{kg}{cm^2} \quad (5.19)$$

Usando el mismo proceder que en el caso de η , para la variable k , (propuesta en la sección 5.3.1 como variable de proporcionalidad para la representación del esfuerzo σ_ν); se encontró que el único valor que estabilizaba las señales azules dejándolas lo más cercanas posibles a lo observado por el experimento, en todos los casos, es cuando $k = 1 \times 10^{11}$.

Por otra parte, los transductores capturaron datos cada $0.002s$, si se considera que la celeridad o aceleración de la onda transitoria se registra con un valor de $308m/s$, y que

5. MODELO NUMÉRICO Y RESULTADOS

se puede hacer la aproximación para la celeridad $a \approx \Delta x / \Delta t$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \Delta x &= a \cdot \Delta t = (308m/s)(0.002s) \\ \therefore \Delta x &= 0.616m\end{aligned}$$

esto estaría indicando que para el cálculo deberían tomarse en principio 487 puntos para una tubería de $300m$, sin embargo los datos calculados se obtuvieron para cada $0.9740s$, con $\Delta x = 30m$. Después de ajustar los resultados usando (5.18) y (5.19), la comparación de ambas señales hace posible observar que el cálculo coincide en periodo, amplitud y amortiguamiento a través del tiempo, durante toda la longitud de la tubería. Esto es, el modelo fue capaz de reproducir la respuesta viscoelástica del polietileno de alta densidad para un fenómeno transitorio.

Trabajar con diez puntos de cálculo, resultó práctico y otorgó información suficiente para hacer una comparación entre el experimento y la teoría. Un factor a considerar si se requiriera refinar el cómputo y hacer a las señales obtenidas más cercanas a las originales, sería entonces el aumento en el número de puntos de cálculo.

Es importante aclarar que el modelo usado no toma en cuenta agentes físicos como la temperatura, el hecho de que la fricción no es un valor estacionario sino cambiante y el desgaste que se genera en la tubería con la frecuente exposición a transitorios hidráulicos que sufren los sistemas de conducción en la práctica. Los anteriores simbolizan aspectos a trabajar en proyectos futuros si se deseara continuar con esta línea de exploración, y que a su vez podría mejorar los resultados.

Finalmente, aunque no es cuestionable que se puede hacer un tratamiento más riguroso en la desviación de errores de los datos medidos, no incluida en este trabajo, es preciso recordar que se buscaba practicidad con el modelo matemático desarrollado, lo que incluía una rápida y concisa equiparación con la respuesta amortiguada del polietileno de alta densidad.

Capítulo 6

Conclusiones

Como el nombre del trabajo lo indica la finalidad era hacer un análisis del comportamiento viscoelástico, mismo que se comenzó con un breve estudio de la estructura y propiedades a nivel molecular del material; la investigación continuó con el modelo mecánico del sólido lineal estándar, que describe la singular respuesta del polímero. El uso de dicho modelo otorgó la ventaja de caracterizar al polietileno de alta densidad por tres parámetros de fácil interpretación física, con E_1 para simbolizar la respuesta elástica a largo plazo, E_2 a la de corto plazo y una respuesta viscosa de deformación lenta con η .

El desarrollo matemático, que considera la velocidad y la fricción como constantes, logró incorporar todas las ecuaciones que describen en su totalidad al problema, estas son la ecuación dinámica, la ecuación de conservación de la masa, junto con las que hacen referencia al fluido con el que se trabaja (agua) y finalmente la del material de la tubería. De esta misma exposición fue posible calcular los parámetros necesarios para el cálculo del transitorio, al encontrar una expresión explícita en (5.7) para encontrar E_2 y en (5.8) para el caso de η .

Teniendo como meta que en esta labor no se perdiera el enfoque de la aplicación, los resultados teóricos fueron puestos a prueba para la resina clasificada como *PPI 4710*, de la que se disponían datos experimentales. A pesar de las simplificaciones hechas en las hipótesis, tales como que la pared de la tubería es delgada y que las deformaciones son pequeñas, la evolución de la presión transitoria calculada con el método de las características mostró una buena reproducción del amortiguamiento del material a través de los 300m de la tubería.

Es posible afirmar que los objetivos plantados al inicio se cumplieron con éxito, al encontrar que un análisis que incluyó no solo a la parte experimental sino la parte física del fenómeno, ayudaron a un mejor entendimiento del problema estudiado. Aunque el modelo esta hecho para una resina en especial, su implementación se puede ampliar a otras si se conocen variables como la celeridad de la onda de sobrepresión y el módulo

6. CONCLUSIONES

de elasticidad a largo plazo E_1 ; siendo posible incluso tomarlo como base para describir otros materiales viscoelásticos.

Apéndice A

Desarrollos Complementarios

A.1. Método de las características.

Es un método usado para resolver ecuaciones diferenciales parciales (EDP) de primer orden lineales, cuasilineales y no lineales en general. Está basado en una interpretación geométrica de la EDP que conduce a una sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) no lineal y no siempre fácil de resolver. En particular para la aplicación estudiada en este trabajo, permite simular el fenómeno transitorio incluyendo las pérdidas de energía, a partir de las condiciones para flujo permanente inicial y las de frontera correspondientes al sistema.

Con el propósito de ilustrar este procedimiento, se usarán las ecuaciones de continuidad y dinámica que permiten estudiar el golpe de ariete

$$L_1 = \frac{\partial Q}{\partial t} + gA \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{fQ|Q|}{2DA} = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$L_2 = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{a^2}{gA} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.2})$$

donde

- Q gasto
- h carga piezométrica ($h = z + p/\gamma$)
- x posición a lo largo de la tubería
- t tiempo
- A área del conducto
- D diámetro del conducto

A. DESARROLLOS COMPLEMENTARIOS

siendo Q y h variables dependientes y x y t variables independientes. Es posible combinar estas dos últimas relaciones linealmente, de tal manera que $L = L_1 + \lambda L_2$, entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{\partial Q}{\partial t} + gA \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{fQ|Q|}{2DA} + \lambda \left(gA \frac{\partial h}{\partial t} + a^2 \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial t} + \lambda a^2 \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + \lambda gA \left(\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{fQ|Q|}{2DA} = 0\end{aligned}\quad (\text{A.3})$$

donde se ha multiplicado por gA en ambos términos de la ecuación (A.2). Luego ya que $h = h(x, t)$ y $Q = Q(x, t)$, al derivar con respecto a t ambas variables

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial h}{\partial t} \frac{dt}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial Q}{\partial t} \frac{dt}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (\text{A.5})$$

definiendo el multiplicador desconocido λ como

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda} &= \frac{dx}{dt} = \lambda a^2 \\ \text{por lo tanto} \quad \lambda &= \pm \frac{1}{a}\end{aligned}\quad (\text{A.6})$$

donde $x = x(t)$ es la ecuación de la curva característica, luego

$$\frac{dx}{dt} = \pm \frac{1}{a} a^2 = \pm a \quad (\text{A.7})$$

entonces, es posible igualar el primer término de la ecuación (A.3) con (A.5) y y el segundo con (A.4) para obtener

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \lambda a^2 \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{dQ}{dt} \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{dh}{dt} \quad (\text{A.9})$$

al sustituir finalmente en (A.3)

$$\left(\frac{dQ}{dt} + gA \frac{dh}{dt} \right) + \frac{fQ|Q|}{2DA} = 0 \quad (\text{A.10})$$

$$\text{si } \frac{dx}{dt} = a \quad (\text{A.11})$$

y

$$\left(\frac{dQ}{dt} - gA \frac{dh}{dt} \right) + \frac{fQ|Q|}{2DA} = 0 \quad (\text{A.12})$$

$$\text{si } \frac{dx}{dt} = -a, \quad (\text{A.13})$$

La reducción del sistema de EDP (A.1) y (A.2) en las EDO (A.10) y (A.12) es llamado el método de las características. Las ecuaciones (A.11) y (A.13) representan dos rectas en el plano $x - t$, y se conocen como líneas características negativa cuando la pendiente sea $m = -1/a$ y positiva en el caso de que $m = 1/a$, a lo largo de las cuales se cumplen las ecuaciones (A.10) y (A.12) denominadas de compatibilidad fig. (A.1).

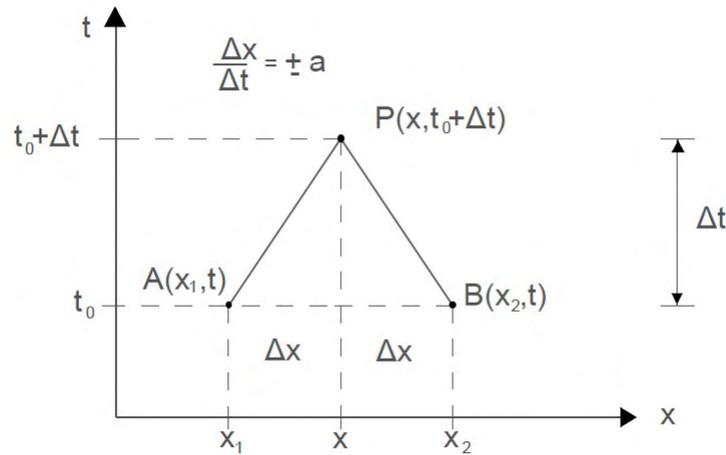


Figura A.1: Líneas características en el plano $x - t$.

Volviendo al propósito inicial de ilustrar el método, se calculará la presión transitoria H y el gasto Q en el instante $t = t_0 + \Delta t$, asumiendo conocidas estas variables cuando $t = t_0$.

Apoyados en la figura anterior, esta idea equivaldría a imponer un valor fijo para estas variables en los puntos A y B , con la finalidad de determinar sus valores en el punto P . Multiplicando el lado izquierdo de (A.10) por dt

$$\int_A^P dQ + \frac{gA}{a} \int_A^P dh + \frac{f}{2DA} \int_A^P Q|Q|dt = 0$$

entonces

$$Q_P - Q_A + \frac{gA}{a}(h_P - h_A) + \frac{f}{2DA} \int_A^P Q|Q|dt = 0 \quad (\text{A.14})$$

El último término de esta expresión corresponde a las pérdidas por fricción y no es fácil de calcular debido a que no se conocen explícitamente las variaciones de Q con respecto a t . Sin embargo para resolverlo se hará una aproximación de primer orden [3], evaluando la integral como:

$$\begin{aligned} \frac{f}{2DA} \int_A^P Q|Q|dt &\simeq \frac{f}{2DA} Q_A|Q_A|(t_P - t_A) \\ &= \frac{f}{2DA} Q_A|Q_A|\Delta t \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

en otras palabras, Q permanece constante de A a P para la evaluación de este término. Finalmente, (A.14) quedará de la forma

$$Q_P - Q_A + \frac{gA}{a}(h_P - h_A) + \frac{gA}{a} Q_A|Q_A| \cdot \Delta t = 0 \quad (\text{A.16})$$

agrupando términos

$$\left[Q + \frac{gA}{a}h \right]_P - \left[Q + \frac{gA}{a}h \right]_A + F_A^+ = 0 \quad (\text{A.17})$$

donde

$$F_A^+ = \frac{gA}{a} Q_A|Q_A| \cdot \Delta t \quad (\text{A.18})$$

De manera similar para (A.12) se obtiene

$$Q_P - Q_B - \frac{gA}{a}(h_P - h_B) + \frac{gA}{a} Q_B|Q_B| \cdot \Delta t = 0 \quad (\text{A.19})$$

que al final también puede ser escrita como

$$\left[Q - \frac{gA}{a}h \right]_P - \left[Q - \frac{gA}{a}h \right]_B + F_B^- = 0 \quad (\text{A.20})$$

con

$$F_B^- = \frac{gA}{a} Q_B|Q_B| \cdot \Delta t \quad (\text{A.21})$$

A.2. Justificación de la hipótesis 1

Para argumentar la hipótesis que dice que

$$\left| \frac{\partial V}{\partial t} \right| \gg \left| V \frac{\partial V}{\partial s} \right| \quad (\text{A.22})$$

volviendo al sistema de ecuaciones conformado por (A.1) y (A.2). La primera de ellas no es una expresión lineal debido al último término, si ahora se supone a la fricción f igual a 0, entonces las soluciones posibles se simplificarán de manera considerable. Teniendo así que

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + gA \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.23})$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{a^2}{gA} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.24})$$

donde ahora se hará el siguiente cambio de variable

$$\eta = x + at \quad \varepsilon = x - at$$

realizando el cambio, las variables originales estarán en función de estas nuevas variables como $Q(\eta, \varepsilon)$ y $h(\eta, \varepsilon)$. Después de un poco de desarrollo, (que puede encontrarse de manera detallada en [6]), se llega a que la solución general del sistema, es

$$Q - Q_0 = F(x - at) + G(x + at) \quad (\text{A.25})$$

$$h - h_0 = \frac{a}{gA} [F(x - at) - G(x + at)] \quad (\text{A.26})$$

donde (A.25) esta en función de las ondas F y G .

Ahora asumiendo la siguiente hipótesis, para los cambios en el diámetro de la tubería

$$\left| \frac{\Delta D}{D_0} \right| \ll 1 \quad \forall x, t \quad (\text{A.27})$$

es posible admitir que $Q \simeq VA_0$. Haciendo uso de la ecuación (A.25) obtendremos que

$$V - V_0 = \frac{1}{A_0} [F(x - at) - G(x + at)] \quad (\text{A.28})$$

Derivando respecto a x y t , se tiene

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{A_0} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial G}{\partial x} \right) \quad (\text{A.29})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{1}{A_0} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial G}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dt} \right) \right] \\ &= \frac{1}{A_0} \left[\frac{\partial F}{\partial \varepsilon} (-a) + \frac{\partial G}{\partial \eta} (a) \right] \\ &= \frac{a}{A_0} \left[\frac{\partial G}{\partial \eta} - \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

al comparar $V\partial/V\partial x$ con $\partial V/\partial t$, se observa que

$$\frac{|V\frac{\partial V}{\partial x}|}{|\frac{\partial V}{\partial t}|} = \frac{V}{A_0} \frac{|\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial G}{\partial x}|}{|\frac{\partial G}{\partial \eta} + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}|} = \frac{V}{a} \cdot M \quad (\text{A.31})$$

experimentalmente el factor V/a es muy pequeño, pues la velocidad V no supera los 10m/s , en tuberías industriales, como las usadas en el experimento $V/a \simeq 0.001$, que es un valor adimensional. Por otro lado el factor M tiene que ver con la forma de las ondas F y G . La hipótesis dos implica que M no sea grande frente a V/a , lo cuál ocurre cuando una de las ondas predomina frente a la otra. Para fenómenos rápidos como los transitorios $M \simeq 1$.

A.3. Ecuación de Darcy-Weisbach

La resistencia al flujo que presentan los conductos, se vuelven importantes en estructuras largas, es un problema que debe tomar en cuenta los tipos de flujo, el físico y también ingeniero Osborne Reynolds, obtuvo un criterio para distinguir entre el flujo laminar y turbulento que se sigue usando hoy en día y se le conoce como número de Reynolds. Para un conducto cilíndrico a presión se define como [13]

$$Re = \frac{VD}{\nu} \quad (\text{A.32})$$

donde V representa la velocidad media, D el diámetro del conducto y ν la viscosidad cinemática del fluido. En 1850 Darcy y Weisbach dedujeron de manera experimental una fórmula que permitía calcular las pérdidas por fricción en un tubo no poroso

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \quad (\text{A.33})$$

y donde

- h_f pérdida por fricción [m]
- f factor de fricción [-]
- L longitud del tubo [m]
- D diámetro del tubo [m]
- V velocidad media [m/s]
- g aceleración de la gravedad [m/s²]

despejando entonces f obtenemos que

$$f = h_f \frac{D}{L} \frac{2g}{V^2} \quad (\text{A.34})$$

de donde se ha obtenido el valor de f usado en los resultados.

Bibliografía

- [1] Cafaggi, A., Rodal, E., and Sánchez, A. (2012). *Sistemas de Bombeo*. Facultad de Ingeniería, UNAM, México. [23](#)
- [2] Carmona, L., Sánchez, A., and Carmona, R. (2015). *Manual de Diseño de Obras Civiles*, chapter A.2.8 Transitorios Hidráulicos en Conductos a Presión, page 37. IIUNAM, CFE, México. [25](#)
- [3] Chaudry, M. (2014). *Applied Hydraulic Transients*. Springer, New York, 3rd edition. [29](#), [62](#)
- [4] Covas D., Stoianov I., Ramos H., Graham N., Maksimovic C., and Butler D. (June 2004). Water hammer in pressurized polyethylene pipes: conceptual model and experimental analysis. *Urban Water Journal*, 1(2):177–197. [xi](#), [3](#)
- [5] Guarga, F., Sánchez, J., Carmona, R., and Aguilar, L. (1985a). *Diseño y operación hidráulica de conducciones de agua a presión. Fascículo II: llenado, vaciado y operación estacionaria de las conducciones de agua a presión*. IIUNAM, Ciudad de México. [24](#)
- [6] Guarga, F., Sánchez, J., Carmona, R., and Aguilar, L. (1985b). *Diseño y operación hidráulica de conducciones de agua a presión. Fascículo III: Transitorios Hidráulicos en conducciones de agua a presión*. IIUNAM, Ciudad de México. [28](#), [32](#), [63](#)
- [7] Malvern, E. (1969). *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice-Hall, Inc., USA. [15](#)
- [8] Palin, G. R. (1967). *Plastic for Engineers*. Pergamon Press, Great Britain, 1st edition. [9](#)
- [9] Plastic Pipe Institute Inc. (2009). *Handbook of Polyethylene Pipe*. PPI, Irving Texas, 2nd edition. [xi](#), [1](#), [8](#), [10](#)
- [10] Riande, E., Díaz-Calleja, R., Prolongo, M., Mesegosa, R., and Salom, C. (2000). *Polymer Viscoelasticity, Stress and strain in practice*. Marcel Dekker, Inc., New York. [3](#)

BIBLIOGRAFÍA

- [11] Rodal, E. and Autrique, R. (2014). Medición experimental de ondas de presión en tuberías de polietileno de alta densidad. Santiago de Chile. XXVI Congreso Latinoamericano de Hidráulica. [xii](#), [xii](#), [xii](#), [25](#), [35](#), [37](#)
- [12] Rosen, S. L. (1993). *Fundamental Principles of Polymeric Materials*. Jhon Wiley & Sons, Inc., USA, 2nd edition. [11](#), [13](#)
- [13] Sotelo, G. (1997). *Hidráulica General. Vol. I: Fundamentos*. Limusa Noriega Editores, México. [20](#), [21](#), [22](#), [49](#), [64](#)
- [14] Spivak, M. (2009). *Cálculo infinitesimal*. Editorial Reverté, S. A., México, 2nd edition. [52](#)
- [15] William D. Callister, J. (2007). *Materials Science and Engineering. An Introduction*. Jhon Wiley & Sons, Inc., USA, 7th edition. [xi](#), [xi](#), [9](#), [10](#), [12](#)
- [16] Williams, J. G. (1980). *Stress Analysis of Polymers, 2nd (revised) Ed.* Ellis Horwood Limited, England. [18](#)