



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

RESONANCIA EN SISTEMAS
HIDROELÉCTRICOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Física

PRESENTA:

Brenda Michelle Reyes Camacho

TUTORA

M. en C. Libia Georgina Carmona Paredes

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2018





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mi familia: Victoria, José Luis, Paola y Monse, a quienes amo con todo mi corazón.

Agradecimientos institucionales

Agradezco a mi amada *alma máter*, la Universidad Nacional Autónoma de México, que me ha brindado los años más felices de mi vida y las herramientas necesarias para mi formación científica y personal. Es un honor formar parte de esta comunidad universitaria.

Al Instituto de Ingeniería de la UNAM por proporcionarme la ayuda económica, así como el espacio para realizar esta tesis. De igual manera agradezco a mis compañeros del Instituto por el apoyo brindado, especialmente a David Paniagua quien siempre tuvo la disposición de contestar mis preguntas.

Mi más profundo agradecimiento y admiración a la M. en C. Libia Georgina Carmona Paredes por sus enseñanzas, amabilidad y su infinita paciencia para resolver mis dudas. Muchas gracias, Maestra; sin su apoyo este trabajo no habría sido posible.

A los miembros del jurado: Dr. Ramiro García García, Dra. Beatriz Elizabeth Fuentes Madariaga, Dr. Rafael Bernardo Carmona Paredes y Fís. Luisa Gabriela Del Valle Díaz Muñoz por el tiempo dedicado a la lectura de este trabajo y por sus valiosas aportaciones.

Agradecimientos personales

"Gracias a la vida que me ha dado tanto..."

Violeta Parra

A mi papá, por no escatimar amor, fuerzas ni tiempo para mí. Papá, cada consejo lo llevo atesorado en mi corazón. Gracias por no dejarme desistir, por siempre brindarme amor y cuidado, sé que no hay lugar más seguro para mí que en tus brazos.

A mi mamá, por acobijarme siempre con su amor y fe. Mamá, tú eres el reflejo del amor de Dios en mi vida; con tu dulzura y tus cuidados has alegrado cada uno de mis días. Te admiro tanto porque no hay mujer más sabia, amorosa y bella que tú.

A mis hermanitas, Paola y Monse, con quienes paso los momentos más felices. Tengo grabado en mi mente cuando las conocí por primera vez, y desde entonces no he parado de amarlas. Gracias por siempre tener tiempo para mí, por retroalimentarme y por reírse de mis locuras. Ustedes son el mejor regalo que Dios me ha dado.

A mi abuelita materna, Celia Mora, quien siempre me ha brindado amor, cuidado y deliciosas comidas. Gracias, abuelita por ser tan amorosa conmigo y por su gran apoyo a lo largo de mi vida, y en especial a lo largo de la carrera. De igual manera agradezco a mi abuelito Justo Camacho.

A mi abuelita paterna, Celia Gómez, quien siempre ha estado a mi lado. Gracias, abuelita por amarme y por todos los momentos inolvidables que hemos construido. No se imagina cuanto disfruto conversar con usted y aprender de sus experiencias de vida.

A mis tías: Jenny, por siempre tener tiempo para escucharme y por su generosidad; y Celia Reyes, mi confidente, que siempre tiene una manera de animarme y quien me impulsa a ir más allá de mis prejuicios.

A Noemi, mi mejor amiga, que ha tenido la paciencia de escucharme en los momentos buenos y malos, y quien con su amistad ha hecho de esta época de mi vida memorable. A Heri, mi mejor pugsheen amigo, con quien he compartido momentos muy alegres, quien siempre me ha apoyado y se ha reído de mis bromas más absurdas. A Isaí, mi herbívoro favorito, quien me ha enseñado que lo mejor de la vida no se planea, y quien siempre me saca una sonrisa. A Juan Carlos, quien me ha brindado su amistad incondicional. Asimismo agradezco a Sam, Andrés, Yescas, Iris, Marco, Barquet, y a todos los que me han apoyado académica y personalmente.

Declaración de autenticidad

Por la presente declaro que, salvo cuando se haga referencia específica al trabajo de otras personas, el contenido de esta tesis es original y no se ha presentado total o parcialmente para su consideración para cualquier otro título o grado en esta o cualquier otra Universidad. Esta tesis es resultado de mi propio trabajo y no incluye nada que sea el resultado de algún trabajo realizado en colaboración, salvo que se indique específicamente en el texto.

Brenda Michelle Reyes Camacho. CDMX, México, 2018

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Planteamiento del problema.	1
1.2. Bosquejo del trabajo	2
1.3. Objetivos	2
2. Hidrodinámica	3
2.1. Clasificación de los flujos	3
2.2. Fluido incompresible en tubería rígida	4
2.2.1. Ecuación de continuidad	5
2.2.2. Ecuación dinámica	6
2.2.3. Ecuación general de la energía	8
2.3. Fluido compresible en tubería elástica	11
2.3.1. Ecuaciones para flujo oscilatorio permanente	12
2.4. Resonancia	14
3. Generalidades sobre el funcionamiento de las centrales hidroeléctricas	17
3.1. Esquema de una central hidroeléctrica	17
3.2. Funcionamiento general de las turbinas	18
3.2.1. Potencia	18
3.2.2. Clasificación de turbinas	19
3.3. Turbina Francis	20
3.3.1. Elementos principales de una turbina Francis	20
3.3.2. Comportamiento de un flujo dentro de la turbina	21

3.3.3. Intervalo de operación de las turbinas	25
4. Análisis dinámico de un sistema hidroeléctrico	27
4.1. Método de Análisis	27
4.1.1. Dominio del tiempo	27
4.1.2. Dominio de la frecuencia	27
4.2. Matrices de transferencia	28
4.2.1. Matriz de transferencia de una tubería simple	28
4.3. Análisis dinámico de una tubería simple	33
4.3.1. Frecuencias de resonancia	35
4.4. Análisis dinámico de los elementos de un sistema	38
4.4.1. Bifurcación	38
4.4.2. Válvula	40
4.4.3. Turbina	43
4.5. Excitación	43
4.5.1. La Torcha	44
4.5.1.1. Mecanismo de formación de la torcha	45
4.5.1.2. Estudios previos sobre la torcha	46
4.5.1.3. Resultados obtenidos en mediciones hechas en el laboratorio del IIUNAM y el campo	47
4.6. Análisis dinámico del sistema	49
4.6.1. Factor de amplificación aguas arriba del conjunto turbina-tubo de difusor	50
5. Ejemplos de aplicación	53
5.1. Central Hidroeléctrica Dr. Belisario Domínguez (La Angostura)	53
5.2. Central Hidroeléctrica Leonardo Rodríguez Alcaine (El Cajón)	60
6. Conclusiones	69
Bibliografía	71

Introducción

1.1. Planteamiento del problema.

Un sistema hidroeléctrico puede entrar en resonancia como resultado de ser sometido a una excitación periódica. Esto ocurre cuando las frecuencias de las vibraciones emitidas por los excitadores coinciden con las frecuencias propias del sistema, provocando fluctuaciones de presión y velocidad de una gran amplitud. Lo anterior conlleva a efectos no deseados como ruido, vibraciones y daños estructurales. Si bien en un sistema real, como lo es un sistema hidroeléctrico, la amplitud de las vibraciones generadas por el excitador no llega a ser de una amplitud «infinita», dicha amplificación puede ser lo suficientemente grande como para producir daños en el sistema de tuberías.

El estudio del problema de la resonancia consiste en primeramente determinar las frecuencias propias del sistema hidroeléctrico completo (aducción-turbina-desfogue); posteriormente, calcular las frecuencias emitidas por los excitadores que producirán las máximas amplitudes; y por último, localizar los puntos en el sistema en donde se presentarán dichas amplitudes.

La importancia de estudiar dicho problema radica en las peligrosas consecuencias que implica que un sistema entre en resonancia. Entre los muchos accidentes debidos a la resonancia, los más significativos son los siguientes (10):

- **Planta hidroeléctrica y de bombeo Lac Blanc-Lac Noir (Francia 1934):** El desastre fue provocado por las vibraciones generadas por los álabes directrices de una bomba. Como consecuencia, una de las tuberías colapsó provocando que el techo de la planta de bombeo se dañara, por lo que la estación se inundó y dejó 9 muertos.
- **Planta hidroeléctrica de Kandergrund (Suiza):** Se presentaron rupturas en la galería, lo que provocó inundaciones en la región adyacente. El accidente fue causado por las vibraciones de una válvula.
- **Proyecto hidráulico Bersimis II (Canadá 1961):** Debido a fallas en los sellos de presión en los extremos de la tubería, se generaron auto-oscilaciones que

provocaron un aumento del doble de la presión media.

Si bien el interés de dicho problema ha provocado que se formulen diversas teorías sobre la resonancia, de tal manera que se puedan conocer las frecuencias peligrosas que excitan al sistema, en el presente trabajo se propone el método de las matrices de transferencia debido a que los resultados que se obtienen se acercan a las medidas realizadas en campo (17).

1.2. Bosquejo del trabajo

La tesis se encuentra dividida en 6 capítulos. El primero, capítulo 1, es la introducción. En el capítulo 2 se presentan algunos de los conceptos básicos de la hidráulica; asimismo, se exponen las ecuaciones que rigen el comportamiento de un fluido incompresible dentro de una tubería rígida y de un fluido compresible en una tubería elástica. Además, se explica el fenómeno de resonancia, y se muestran las ecuaciones que lo describen.

En el capítulo 3 se describen los elementos de una central hidroeléctrica. Por otro lado, se aborda la clasificación y funcionamiento de las turbinas en general, para así tratar en específico a la turbina Francis y el comportamiento del agua dentro de ésta.

Posteriormente, en el capítulo 4 se realiza la formulación del método de las matrices de transferencia para los distintos elementos de una central hidroeléctrica, tales como las tuberías, la turbina, el tubo de desfogue, las válvulas y las bifurcaciones, y se realiza el análisis dinámico de todo el sistema. Adicionalmente, se expone la teoría existente sobre los excitadores del sistema, como lo es el vórtice que se forma en el tubo de desfogue de la tubería Francis.

Por último, en el capítulo 5 se realiza la aplicación de dicho método en dos casos específicos: La Angostura y El Cajón. En estos ejemplos se obtienen las frecuencias que ocasionan una oscilación en la carga de presión y los puntos en donde ocurre. El trabajo finaliza con una serie de conclusiones, capítulo 6.

1.3. Objetivos

- Obtener la matriz de transferencia de cada uno de los elementos de un sistema hidroeléctrico.
- Aplicar el método de las matrices de transferencia a dos centrales hidroeléctricas, calcular las frecuencias propias de los sistemas y las emitidas por los excitadores, con el fin de obtener aquellas frecuencias que hagan entrar en resonancia al sistema.

Capítulo 2

Hidrodinámica

La mecánica de fluidos estudia el movimiento de los fluidos, así como las fuerzas que lo originan. En dicho estudio se analiza la capacidad de un flujo para transportar materia y el cambio de propiedades del fluido de un lugar a otro. Para ello se utilizan los siguientes principios básicos del medio continuo (14):

- **Conservación de la materia (Principio de continuidad):** Establece que, para cualquier sistema cerrado, la masa del sistema permanece constante a través del tiempo. A partir de este principio se deriva la ecuación de continuidad que relaciona las variaciones espacio-temporales de la densidad y velocidad.
- **Segunda ley de Newton (Impulso y cantidad de movimiento):** Establece que la variación de la cantidad de movimiento respecto al tiempo es directamente proporcional a las fuerzas resultantes que actúan en una partícula. De esta ley se desprenden dos ecuaciones para los fluidos: la ecuación de la energía y la ecuación de cantidad de movimiento.
- **Primera ley de la termodinámica:** En la dinámica de fluidos, principalmente en los gases, es preciso incluir las leyes de termodinámica concernientes al transporte de calor, tales como la primera y segunda ley. Del principio de la conservación de la energía (Primera ley de la termodinámica) se derivan ecuaciones que relacionan la presión, densidad, temperatura, velocidad, trabajo mecánico y la cantidad de calor transmitido o cedido por el flujo. No obstante, en el estudio de líquidos, dichas ecuaciones permite simplificaciones que resultan en la ecuación de la energía.

2.1. Clasificación de los flujos

Existen diversos criterios para clasificar un flujo; sin embargo, en el caso de conductos a presión, los flujos más importantes son (1):

Flujo permanente y no permanente: Un flujo es permanente si sus principales características, tales como presión y velocidad, permanecen constantes o distan muy

2. HIDRODINÁMICA

poco de sus valores medios para cualquier instante en un punto determinado. En cambio, si las características cambian con respecto al tiempo, el flujo es no permanente.

Flujo uniforme y no uniforme: Si la velocidad del flujo es constante en cualquier punto, el flujo es uniforme. En caso contrario, es un flujo no uniforme.

Flujo transitorio: El flujo transitorio es un caso particular de flujo no permanente. Es el estado intermedio producido por la transición de un flujo permanente a otro.

Flujo oscilatorio permanente: Flujo que surge a partir de un flujo permanente, que al ser alterado por una excitación externa, modifica sus características convirtiéndose en un flujo no permanente que presenta variaciones periódicas de presión y velocidad. Al contrario de los flujos transitorios, nunca alcanzan una condición de flujo permanente.

Flujo tridimensional, bidimensional y unidimensional: Se le llama tridimensional al flujo cuyas características varían en el espacio. Es bidimensional cuando sus variables son idénticas sobre una familia de planos paralelos, y es unidimensional cuando sus características varían en una sola coordenada. Es importante recalcar que todos los flujos son tridimensionales; sin embargo, para facilitar el estudio de estos, se les supone bidimensionales o unidimensionales bajo la consideración de valores medios de las características en cada sección.

2.2. Fluido incompresible en tubería rígida

En el estudio de fenómenos hidráulicos estacionarios es común recurrir como primera aproximación al modelo simplificado de la tubería rígida y fluido incompresible. Este modelo teórico se le conoce como *modelo de columna rígida*, el cual considera que no existen variaciones de diámetro ni de longitud en la tubería y que la densidad del fluido permanece constante a lo largo de todo el flujo (16).

Supuesto esto, considérese una tubería llena de agua en la cual se colocan dos pistones como se muestra en la figura 2.1.

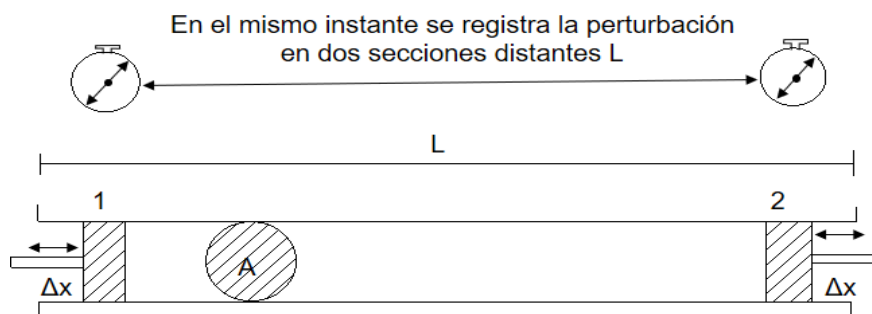


Figura 2.1: Tubería con paredes rígidas y fluido incompresible (16).

Si el primer pistón se desplaza Δx , el volumen del líquido $A\Delta x$ desplazará instantáneamente al pistón 2 una distancia Δx , esto es debido a que el movimiento del agua dentro de la tubería es similar al de un cuerpo sólido. Por ende, podría considerarse que las perturbaciones de presión y velocidad se transmitirán con una velocidad de propagación infinita, aunque en la realidad esta velocidad no es mayor que 1450 m/s en agua a $20 \text{ }^\circ\text{C}$ (16).

A continuación se presentarán las ecuaciones de continuidad y dinámica que describen al fluido incompresible dentro de una tubería rígida.

2.2.1. Ecuación de continuidad

Supóngase un conducto cerrado como el que se muestra en la figura 2.2 en donde la cantidad de fluido que circula a través de cualquier sección en un tiempo determinado es constante. Por ello, si entre las secciones 1 y 2 no existen fuentes ni sumideros de agua, entonces la masa del fluido que atraviesa la sección de área A_1 por unidad de tiempo debe ser igual a la que atraviesa la sección de área A_2 en la misma unidad de tiempo. Esto se expresa con la ecuación:

$$\rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2 \quad (2.1)$$

donde:

- ρ densidad del agua que cruza una sección, en kg/m^3 ;
- A área de la sección transversal, en m^2 ;
- V velocidad media de la sección, en m/s .

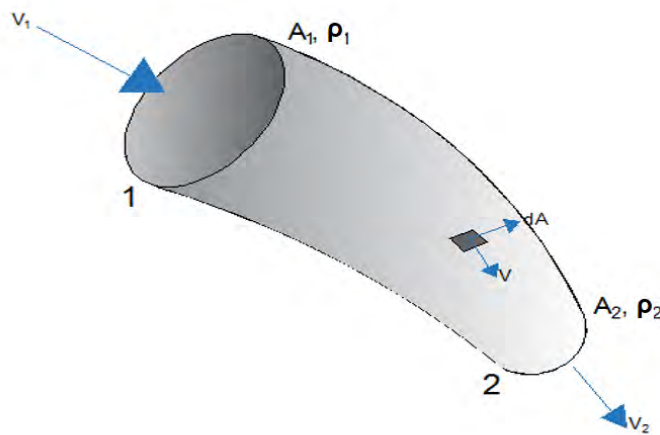


Figura 2.2: Ecuación de continuidad para tubería rígida.

2. HIDRODINÁMICA

Puesto que el líquido es incompresible, se tendrá que $\rho_1 = \rho_2$. Además, si se considera que el flujo no es permanente ni uniforme, el gasto (flujo volumétrico) dependerá de la posición s y el tiempo t :

$$Q(s, t) = A_1(s)V_1(s, t) = A_2(s)V_2(s, t) \quad (2.2)$$

donde:

Q gasto, en m^3/s .

2.2.2. Ecuación dinámica

Si se considera un sistema en el que los efectos termodinámicos en el flujo son despreciables y donde no existe adicción o extracción de energía mecánica, es posible obtener las ecuaciones del movimiento del flujo a través de la segunda ley de Newton. Para esto, es necesario considerar las fuerzas que se oponen al movimiento del fluido, las cuales desarrollan un trabajo mecánico equivalente a la energía disipada al vencer dichas fuerzas.

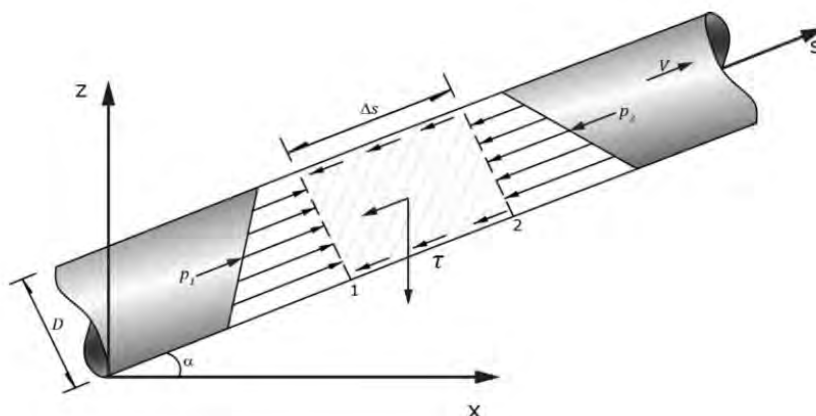


Figura 2.3: Elemento de líquido dentro de una tubería rígida (16).

Considérese un elemento de flujo como el que se muestra en la figura 2.3. Dicho elemento se encuentra dentro de una tubería inclinada un ángulo α con respecto a la horizontal y de diámetro D , limitado por las secciones 1 y 2, y posee valores de velocidad V , presión P , densidad ρ y esfuerzo tangencial de fricción τ . Las componentes de las fuerzas que actúan sobre el elemento en la dirección s son las siguientes:

- a) La componente de la fuerza de cuerpo debida al propio peso del elemento:

$$W = \rho \Delta s \frac{\pi D^2}{4} g \sen \alpha$$

donde:

- W peso, en N ;
- α ángulo del eje de la tubería con respecto a la horizontal;
- g aceleración de la fuerza de gravedad, en m/s^2 ;
- Δs longitud del elemento de volumen, en m .

- b) La fuerza de superficie resultante de las presiones medias P_1 y P_2 en las secciones 1 y 2:

$$F_P = (P_1 - P_2) \frac{\pi D^2}{4}$$

donde:

P presión, en N/m^2 .

- c) La fuerza de superficie debida a la resistencia al movimiento entre la pared de la tubería y el fluido que depende del esfuerzo tangencial de fricción τ el cual solo varía en la dirección perpendicular al elemento:

$$F_\tau = \tau \pi D \Delta s$$

donde:

τ esfuerzo tangencial, en N/m^2 .

En consecuencia, al aplicar la segunda ley de Newton al elemento de fluido:

$$ma = m \frac{dV}{dt} = \sum F \quad (2.3)$$

se obtiene la ecuación dinámica:

$$\rho \Delta s \frac{\pi D^2}{4} \frac{dV}{dt} = (P_1 - P_2) \frac{\pi D^2}{4} - \tau \pi D \Delta s - \rho \Delta s \frac{\pi D^2}{4} g \sin \alpha \quad (2.4)$$

Con el fin de obtener una expresión de la ecuación (2.4) que facilite observar los cambios en la velocidad y presión del fluido, se tomarán en cuenta las siguientes igualdades y se dividirá cada término entre el peso del elemento de fluido:

- La pendiente está descrita por $\sin \alpha = \Delta z / \Delta s$
- El peso específico se define como $\gamma = \rho g$
- El esfuerzo tangencial de fricción f es $\tau = f \rho V |V| / 8$
- Cuando Δs tiende a cero, $(P_1 - P_2) / \Delta s = dp / ds$

Puesto que los términos de la ecuación (2.4) representan fuerzas, al dividir la misma entre el peso del elemento ($\rho\Delta s\frac{\pi D^2}{4}g$) dichos términos expresarán ahora fuerzas por unidad de peso. Haciendo esta operación con $\gamma = \rho g$ y considerando que las presiones medias dependen de la posición s del fluido en la tubería cuando ds tiende a cero, se obtendrá:

$$\frac{1}{g} \frac{dV}{dt} = -\frac{1}{\gamma} \frac{dP}{ds} - \frac{fV|V|}{2gD} - \frac{dz}{ds} \quad (2.5)$$

Como ya se mencionó, en el caso de un flujo no permanente y no uniforme la velocidad media del fluido cambia con la posición y el tiempo, es decir, es una función de s y t . Así que la derivada total respecto a t , es:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial s} \frac{ds}{dt} \quad (2.6)$$

De manera que al sustituir la ecuación (2.6) en (2.5), agrupando términos y definiendo $P/\gamma + Z = h$ se llega a la *ecuación diferencial de movimiento para un flujo no permanente dentro de una tubería rígida* (16):

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(h + \frac{V^2}{2g} \right) = -\frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{fV|V|}{2gD} \quad (2.7)$$

donde:

- f factor de fricción, adimensional;
- h carga piezométrica, en m .

2.2.3. Ecuación general de la energía

Los términos de la ecuación (2.7) representan las fuerzas por unidad de peso, por lo que al multiplicarse por ds se obtendrá el trabajo mecánico realizado por cada fuerza (por unidad de peso) a lo largo de la línea de corriente, o bien, la energía equivalente (por unidad de peso):

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(h + \frac{V^2}{2g} \right) ds = -\frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} ds - \frac{fV|V|}{2gD} ds \quad (2.8)$$

La integración de la ecuación anterior sobre una línea de corriente y la sustitución del valor de la carga piezométrica conduce a que:

$$(Z_2 - Z_1) + \left(\frac{P_2 - P_1}{\gamma} \right) + \left(\frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} \right) = - \int \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} - \int \frac{fV|V|}{2gD} \quad (2.9)$$

El término $\int \frac{fV|V|}{2gD}$ representa la energía por unidad de peso utilizada para vencer las fuerzas de fricción la cual se transforma en energía calorífica no aprovechable en el

movimiento. De modo que se considera una *pérdida de energía* que se designa con h_r . Por otro lado, al tratarse de un flujo permanente el primer término de lado derecho desaparece. De esta manera, la ecuación (2.8) será:

$$Z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + \sum_1^2 h_r \quad (2.10)$$

donde:

- Z elevación respecto a un nivel de referencia horizontal de cada punto, en m ;
- P presión instantánea en un punto, en N/m^2 ;
- γ peso específico del fluido, en N/m^3 ;
- V velocidad media instantánea en una sección determinada, en m/s ;
- g aceleración de la fuerza de gravedad, en m/s^2 ;
- $\sum h_r$ suma de todas las pérdidas de energía, en m .

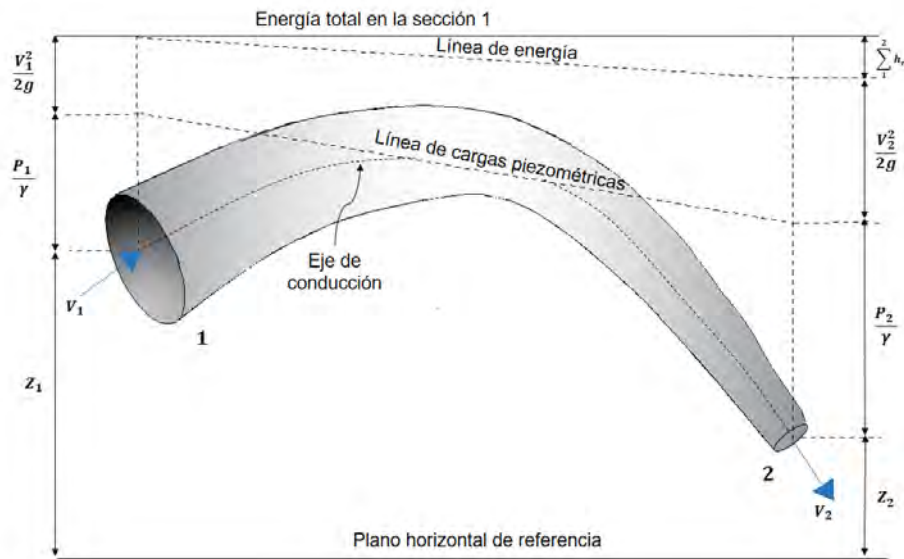


Figura 2.4: Representación ecuación de energía (14).

La ecuación anterior es conocida como la *ecuación de energía* y, en hidráulica, cada término de la ecuación se expresa como la altura con respecto a un nivel de referencia. La representación gráfica de estos tres términos se muestra en la figura (2.4). En específico, cada uno de estos términos se denomina:

- P/γ Carga de presión (Energía interna por unidad de peso)
- Z Carga de posición (Energía potencial por unidad de peso).
- $V^2/2g$ Carga de velocidad (Energía cinética por unidad de peso).

2. HIDRODINÁMICA

A la suma de estos se le denomina carga bruta (H_b), mientras que a la suma de la carga de presión y de elevación se le denomina *carga piezométrica*. La carga bruta se representa gráficamente a través de la llamada *línea de energía* que une los puntos de la energía total en cada sección de la corriente.

Por otra parte, las pérdidas de energía son de dos clases:

- *Pérdidas primarias o por fricción*: Son pérdidas de energía debido a la fricción del fluido contra sí mismo y contra las paredes de la tubería. En 1850, Darcy, Weisbach y otros, dedujeron experimentalmente una fórmula para calcular el valor de dichas pérdidas (14):

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \quad (2.11)$$

donde:

- h_f pérdidas por fricción, en m ;
- f factor de fricción, adimensional;
- V velocidad media, en m/s ;
- D diámetro de la tubería, en m ;
- L longitud el tubo, en m ;
- g aceleración debido a la gravedad, en m/s^2 .

El factor de fricción (f) está función de la rugosidad (ϵ) y el número de Reynolds (Re), esto es:

$$f = f(\epsilon, Re)$$

Dicho factor se puede determinar a través de fórmulas empíricas o el diagrama de Moody.

- *Pérdidas secundarias o locales*: Son aquellas que tienen lugar en las transiciones (estrechamientos o expansiones), codos, válvulas, y en toda clase de accesorios. Cuando la conducción es larga, las pérdidas secundarias tienen poca importancia, pudiendo a veces despreciarse.

Si la energía por unidad de peso que posee un líquido en determinada sección se representa con la ecuación:

$$H = Z + \frac{P}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} \quad (2.12)$$

entonces se tendrá que en una sección determinada la energía de un volumen V del líquido, respecto del plano horizontal de referencia, es:

$$E = \gamma HV \quad (2.13)$$

Puesto que la potencia es la cantidad de trabajo efectuado por unidad de tiempo, se obtiene:

$$P = \frac{dE}{dt} = \gamma H \frac{dV}{dt} \quad (2.14)$$

donde:

- H energía total respecto al plano de referencia, en m ;
- P potencia hidráulica, en W .

Dado que el gasto es el volumen del líquido que pasa a través de una sección por unidad de tiempo, se concluye que la potencia del líquido en movimiento está dada por la ecuación:

$$P = \gamma QH \quad (2.15)$$

donde:

Q gasto instantáneo en una sección determinada $Q = AV$, en m^3/s .

2.3. Fluido compresible en tubería elástica

Considérese el sistema mostrado en la figura 2.5, en el cual se tiene un fluido compresible dentro de una tubería con pared elástica en cuyo extremo izquierdo se ha colocado un pistón.

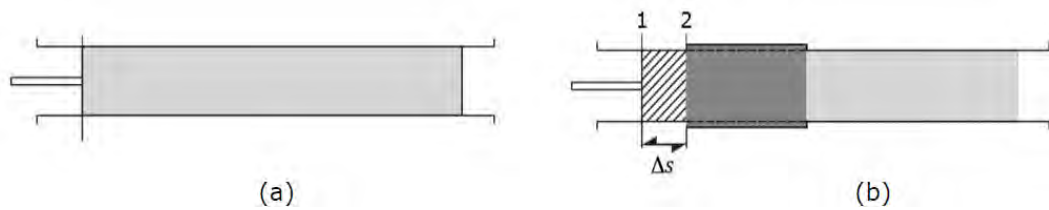


Figura 2.5: Perturbación de un fluido compresible en una tubería elástica (16).

Al moverse el pistón de manera brusca, el fluido se desplazará del punto 1 al 2, y contrario al fluido incompresible en una tubería inelástica, la perturbación no se transmitirá instantáneamente, sino que se transmitirá de forma ondulatoria. En este caso la densidad del fluido cambiará y ocurrirá un aumento de presión, así como un cambio en el diámetro de la tubería.

La perturbación no se verá reflejada instantáneamente en el otro extremo de la tubería, sino que tendrá una velocidad de propagación que dependerá de las características

2. HIDRODINÁMICA

elásticas de la tubería y del fluido, en este caso agua. Esta velocidad de propagación se le conoce como *celeridad* c .

Como resultado de diversos estudios experimentales se han propuesto distintas formas de evaluar la celeridad dependiendo de la instalación de la tubería, en particular de su libertad de movimiento longitudinal o transversal; no obstante, todas ellas incluyen la dependencia en la densidad del fluido, la compresibilidad volumétrica del fluido, el módulo de elasticidad del material de la tubería y la relación entre el diámetro y el espesor de la tubería. Una de estas expresiones es (1):

$$c = \sqrt{\frac{\frac{K}{\rho}}{1 + \frac{KD}{Ee}}} \quad (2.16)$$

donde:

- c celeridad, en m/s ;
- ρ densidad del fluido, en kg/m^3 ;
- K módulo de compresibilidad volumétrica del líquido, en N/m^2 ;
- E módulo de elasticidad del material de la tubería, en N/m^2 ;
- e espesor de la tubería, en m ;
- D diámetro interior de la tubería o túnel, en m .

El modelo teórico que considera un flujo compresible dentro de una tubería elástica se denomina *modelo de columna elástica*.

2.3.1. Ecuaciones para flujo oscilatorio permanente

Las ecuaciones para flujo oscilatorio permanente que a continuación se presentarán, permiten calcular las fluctuaciones de presión y gasto debidas a una perturbación en el sistema.

Con el fin de plantear las ecuaciones fundamentales en conductos a presión, es preciso hacer las siguientes hipótesis (5):

- La carga H y la velocidad V , y por ende el gasto Q , son funciones que dependen de la posición y el tiempo:

$$H = H(x, t) \quad \text{y} \quad V = V(x, t)$$

- La tubería es lo suficientemente larga para despreciar los efectos que producen los extremos.
- El flujo en la tubería es unidimensional.
- La sección transversal de la tubería es circular y su espesor es uniforme en cada sección.

- Las paredes de la tubería son elásticas, es decir, existe una relación lineal entre tensiones y deformaciones. Por otra parte, la densidad del fluido depende linealmente de la presión. Así pues, se puede definir el módulo de elasticidad E de la tubería y el módulo de compresibilidad K del fluido.
- Son válidas las fórmulas de pérdida de carga para flujo estacionario, aun cuando el flujo no lo sea.
- El cambio total de la densidad del fluido con respecto al tiempo es despreciable en comparación a los cambios de carga piezométrica.
- La celeridad es mucho mayor que la velocidad del fluido:

$$\frac{V}{c} \ll 1$$

- Debido a que la variación de la velocidad con respecto a la distancia es muy pequeña en comparación de la variación de esta con respecto al tiempo, el término $V \frac{\partial V}{\partial x} \ll \frac{\partial V}{\partial t}$, así que $\frac{dV}{dt} \approx \frac{\partial V}{\partial t}$

Por consiguiente, al aplicar las hipótesis anteriores a la ecuación (2.7), se obtiene la *ecuación dinámica para flujo oscilatorio permanente* (1):

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{gA} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{fQ^2}{2gDA^2} = 0 \quad (2.17)$$

En la figura 2.6 se muestran gráficamente las variables principales del flujo. Al tratarse de una tubería elástica, puede existir acumulación o pérdida de masa del fluido, y por ende un cambio en las dimensiones del tubo. De modo que el flujo posee distintas características hidráulicas ρ y V a la entrada y a la salida. Es por ello que la ecuación 2.1 no es suficiente para describir al flujo, sino que es necesario emplear términos en derivadas parciales para representar los cambios en el flujo. De manera que la *ecuación de continuidad para flujo oscilatorio permanente* es de la forma (1):

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{gA}{c^2} \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (2.18)$$

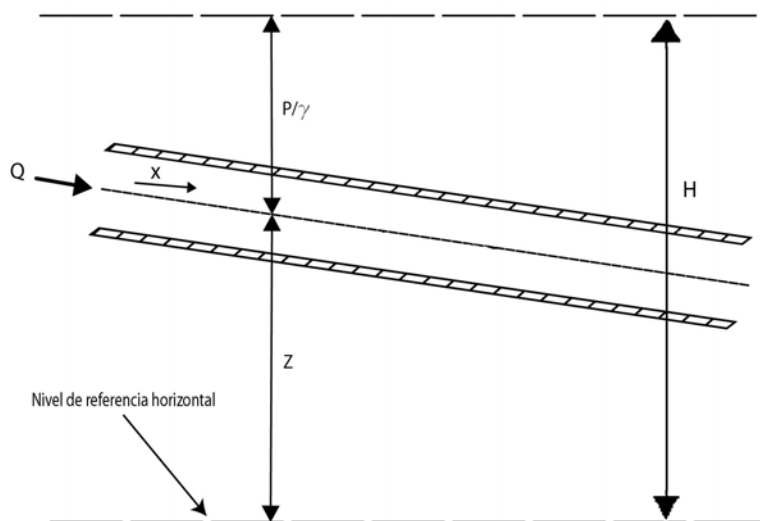


Figura 2.6: Variables principales (5).

donde:

- Q gasto instantáneo en una sección determinada, $Q=Q(x,t)$, en m^3/s ;
- x abscisa medida según el eje de la tubería en el sentido del flujo, en m ;
- H carga piezométrica instantánea en una sección determinada, en m ;
- t tiempo, en s ;
- A área transversal de una sección determinada, en m^2 ;
- g aceleración debido a la gravedad, en m/s^2 ;
- c celeridad, en m/s ;
- f factor de fricción, adimensional;
- D diámetro de una sección transversal, en m .

La solución de las ecuaciones (2.17) y (2.18) permite conocer la evolución de la carga y el gasto a través del tiempo a lo largo de la conducción. No obstante, este sistema de ecuaciones es hiperbólico, no lineal y no homogéneo, y por lo tanto no tiene solución analítica.

2.4. Resonancia

Un flujo oscilatorio permanente presenta oscilaciones de carga y gasto que al cabo de un intervalo de tiempo (periodo) se repiten. Ahora bien, si la amplitud de dichas oscilaciones aumenta con el tiempo, el sistema hidráulico podría tener daños, tales como el estallido de una tubería. A este fenómeno se le conoce como *resonancia*.

La resonancia, desde el punto de vista de la mecánica, es un fenómeno que surge como resultado de someter a un sistema vibratorio a la acción de una fuerza periódica externa, cuya frecuencia es la misma que la frecuencia natural del sistema, obligando a que la amplitud de oscilación de éste se amplifique. Por tanto, al aplicarse de manera sucesiva la fuerza externa, la amplitud aumentará progresivamente hasta que, en teoría, ésta sea infinita. Las frecuencias a las cuales se presente la máxima amplitud se conocen como *frecuencias de resonancia*.

Con el propósito de estudiar este fenómeno se analizará un sistema dinámico simple como el que se muestra en la figura 2.7.

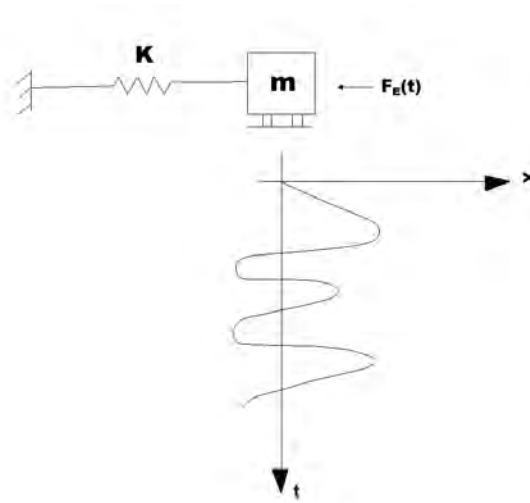


Figura 2.7: Sistema armónico simple (18).

Dicho sistema está constituido por un cuerpo con una masa m que está unido a un extremo fijo mediante un resorte con constante elástica K . Este se desplaza sin fricción debido a una fuerza de excitación $F_e(t) = f \sin \omega t$. Para obtener el desplazamiento $x(t)$, se parte de la ecuación que gobierna a este sistema dinámico:

$$m\ddot{x} + Kx = f \sin \omega t \quad (2.19)$$

Si se considera que el cuerpo parte del reposo, entonces las condiciones iniciales serán $x(0) = \dot{x}(0) = 0$. Y si además se define la frecuencia del sistema ω_0 como:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad (2.20)$$

La ecuación (2.19) resultará ser una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes:

$$\omega_0^2 x + \ddot{x} = \frac{\bar{f}}{m} \sin \omega t \quad (2.21)$$

2. HIDRODINÁMICA

Por tal razón se puede emplear la transformada de Laplace para resolverla, siendo el resultado (18):

$$x(t) = \frac{\bar{f}}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} (\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t) \quad (2.22)$$

Sin embargo, la ecuación anterior no permite saber qué ocurriría si $\omega = \omega_0$, ya que tanto $(\omega_0^2 - \omega^2)$ como $(\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t)$ serían igual a cero. Por lo que se supone que $\omega = \omega_0$ en la ecuación (2.21) y se resuelve nuevamente, obteniendo:

$$x(t) = \frac{\bar{f}}{m} \frac{1}{2\omega_0^2} (\sin \omega_0 t - \omega_0 t \cos \omega_0 t) \quad (2.23)$$

En la ecuación (2.23) se observa que el término $\omega_0 t \cos \omega_0 t$ crecerá con el tiempo, lo que producirá que la amplitud de las oscilaciones aumente. Por lo tanto, la resonancia ocurrirá cuando la frecuencia de la perturbación coincida con la frecuencia del sistema, es decir $\omega = \omega_0$.

No obstante, es conveniente tener una solución a la ecuación (2.21) en términos de una función de receptancia. La *función de receptancia* o también llamada *factor de ampliación* indica qué tanto el sistema es capaz de amplificar las amplitudes impuestas por la fuerza de excitación.

Por consiguiente, se define $H(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$ como la función de receptancia, y se propone la solución:

$$y = H(\omega) \frac{\bar{f}}{m} \sin \omega t \quad (2.24)$$

cuyas primera y segunda derivadas son, respectivamente:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \omega H(\omega) \frac{\bar{f}}{m} \cos \omega t \\ \ddot{y} &= -\omega^2 H(\omega) \frac{\bar{f}}{m} \sin \omega t = -\omega^2 y \end{aligned} \quad (2.25)$$

De (2.24) se obtiene la siguiente expresión:

$$\omega_0^2 y - \omega^2 y = \frac{\bar{f}}{m} \sin \omega t \quad (2.26)$$

Por tal motivo la ecuación (2.24) es una solución particular de (2.19). Esta solución permite conocer fácilmente las condiciones bajo las cuales la resonancia podría ocurrir, ya que solamente considera las oscilaciones producidas por la fuerza de excitación.

En un sistema real, la función de receptancia $H(\omega)$ no alcanza un valor infinito debido a que el sistema posee una cierta amortiguación; sin embargo, puede alcanzar valores lo suficientemente grandes como para provocar daños al sistema.

Generalidades sobre el funcionamiento de las centrales hidroeléctricas

3.1. Esquema de una central hidroeléctrica

Una central hidroeléctrica es una instalación que permite transformar la energía cinética y potencial de la corriente del agua en energía eléctrica por medio de turbinas hidráulicas acopladas a generadores eléctricos.

En las centrales hidroeléctricas por lo general se sigue el siguiente esquema:

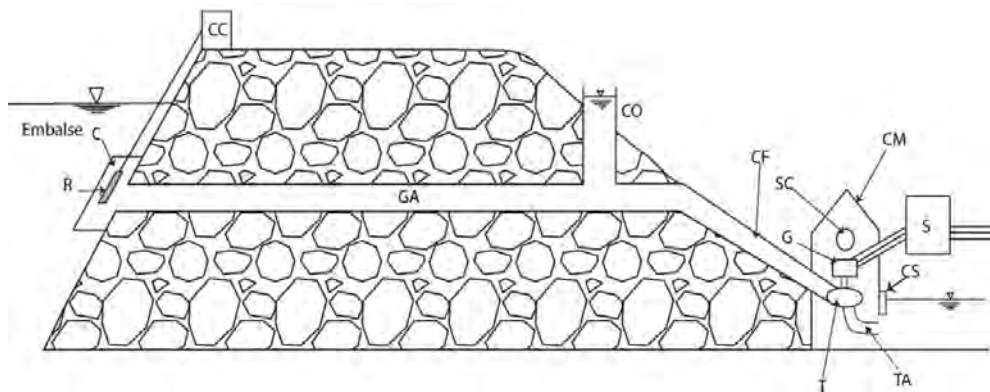


Figura 3.1: Esquema de una central hidroeléctrica (15).

La figura 3.1 muestra un embalse o presa que tiene como objetivo almacenar agua la cual, debido a su altura con respecto a un plano de referencia horizontal, posee energía potencial. Una vez que se pone en marcha la hidroeléctrica, se abre una compuerta (C) que es manejada desde la caseta de control (CC) con el propósito de regular la entrada de agua. A la entrada de la toma se encuentra una estructura de rejillas (R) que impide la entrada de cuerpos extraños al conducto. Posteriormente, el agua se conduce por una tubería llamada galería de alimentación (GA) y sigue su camino por otra tubería que

3. GENERALIDADES SOBRE EL FUNCIONAMIENTO DE LAS CENTRALES HIDROELÉCTRICAS

se conoce como tubería de presión o conducto forzado (CF) dirigiéndose a la casa de máquinas (CM), donde se encuentra la turbina (T). Una vez en la casa de máquinas, el agua, que en ese momento posee energía cinética, acciona la turbina produciéndose una transformación de energía hidráulica a energía mecánica. Por último, el agua sale de la turbina a través del tubo de aspiración o difusor (TA), que puede cerrarse por medio de una compuerta de salida (CS), regresando al cauce principal.

La turbina a su vez está conectada a una flecha la cual aprovecha la energía mecánica para poner en funcionamiento un generador eléctrico (G) que producirá energía eléctrica. El sistema de control (SC) se encarga de enviar la energía eléctrica al centro de consumo con un voltaje y una frecuencia prefijadas. El voltaje es regulado a través de subestaciones elevadoras (S). En México, el voltaje de transmisión es de 230 KV a 440 KV (15).

Por último, con el propósito de reducir las sobrepresiones ocasionadas por las fluctuaciones en la demanda de potencia eléctrica, o para prevenir los efectos de golpe de ariete, se coloca un pozo o cámara de oscilación (CO).

3.2. Funcionamiento general de las turbinas

Una turbina hidráulica es una máquina que aprovecha la energía de una caída de agua y la convierte en energía mecánica de rotación, la cual es transformada en energía eléctrica a través de un generador eléctrico.

3.2.1. Potencia

Se conoce como potencia teórica a la que el agua posee inmediatamente antes de entrar a la turbina, la cual se expresa a través de la ecuación 2.14. En cambio, la potencia real es aquella que es entregada por la turbina al generador, también conocida como *potencia mecánica*.

No toda la carga de la presa (carga bruta H_b) se utilizará, debido a las pérdidas de energía h_r , sino que solamente se utilizará una porción de dicha carga llamada *carga neta* H :

$$H_b - \sum h_r = H \quad (3.1)$$

donde:

- H carga neta, en m ;
- H_b carga bruta, en m ;
- $\sum h_r$ Suma de todas las pérdidas de energía, en m .

En el caso de las máquinas hidráulicas, las pérdidas se ven reflejan a través de la eficiencia (η) que en el caso de las turbinas es el cociente entre la energía mecánica

obtenida y la energía hidráulica disponible. Por consiguiente, a partir de la ecuación (2.15), la potencia se calcula con la ecuación (4):

$$P = \eta \gamma Q H \quad (3.2)$$

en donde:

$$\eta = \frac{\text{Energía mecánica}}{\text{Energía hidráulica}} \quad (3.3)$$

3.2.2. Clasificación de turbinas

Turbinas de impulso: En este sistema el líquido se encuentra sometido a la presión atmosférica y no sufre cambios de presión a través de su paso por la turbina. Dentro de esta categoría se encuentran las turbinas Pelton, y como se observa en la figura 3.2 al aplicar la ecuación de energía entre la sección de entrada y salida se obtendrá que el valor de la carga neta es:

$$H = \frac{V_1^2}{2g} \quad (3.4)$$

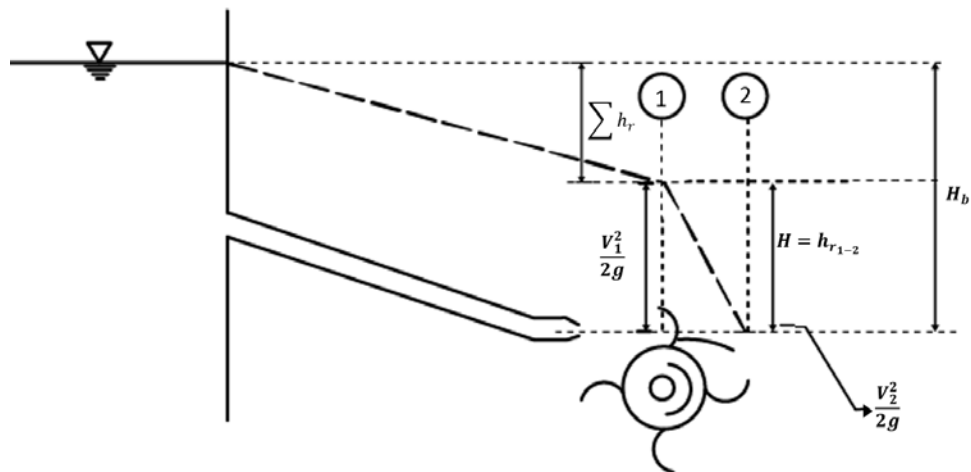


Figura 3.2: Turbina de impulso (4).

Turbinas de reacción: El líquido ingresa a la turbina con una presión superior a la atmosférica y a la salida de ésta presenta una depresión con respecto a la presión inicial. Las turbinas Francis y Kaplan son ejemplos de este tipo de turbinas. En este caso se tiene la siguiente carga neta:

3. GENERALIDADES SOBRE EL FUNCIONAMIENTO DE LAS CENTRALES HIDROELÉCTRICAS

$$H = Z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} \quad (3.5)$$

Análogamente, en la figura 3.3 se muestra la carga de velocidad, presión, elevación, las pérdidas y la carga neta a la entrada y salida de la turbina.

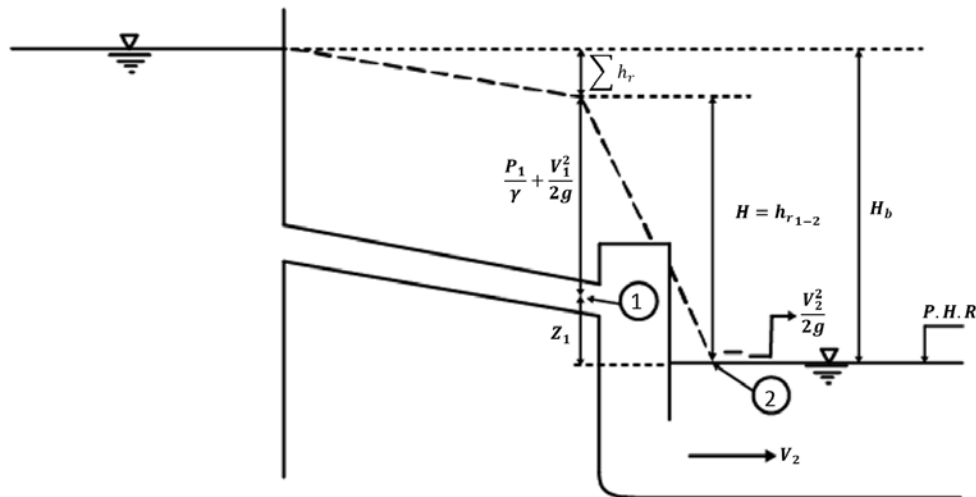


Figura 3.3: Turbina de reacción (4).

3.3. Turbina Francis

Las turbinas Francis son turbinas de reacción, radioaxiales y centrípetas. Trabajan con cargas de 30 m a 400 m y gastos de 30 m^3/s a 200 m^3/s .

3.3.1. Elementos principales de una turbina Francis

En la figura 3.4 se muestran las partes principales de una turbina Francis, las cuales son:

- **Caracol, espiral de alimentación o carcasa:** Estructura hermética que contiene al rodete. El caracol es un tubo de sección circular cuyo diámetro va disminuyendo con el propósito de proporcionar al rodete agua con velocidad y presión constantes.
- **Antedistribuidor:** Sección periférica con álabes fijos soldados cuya función es dirigir el agua hacia el distribuidor.
- **Distribuidor:** Estructura encargada de abastecer y regular el gasto que entra al rodete por medio de álabes móviles.

- **Rodete:** Elemento en forma de disco compuesto por álabes fijos, los cuales se encuentran curvados en dirección contraria al movimiento. El rodete es accionado al entrar en contacto con el fluido. La dirección del fluido respecto al rodete es radioaxial, es decir, entra de forma oblicua y sale de manera paralela al eje del rodete.
- **Tubo de desfogue:** Tubo que permite la salida del agua. El flujo en este conducto es helicoidal; esto se debe a que el agua al abandonar la rueda, posee un movimiento de rotación en torno al eje, y simultáneamente, uno de translación a lo largo del mismo.

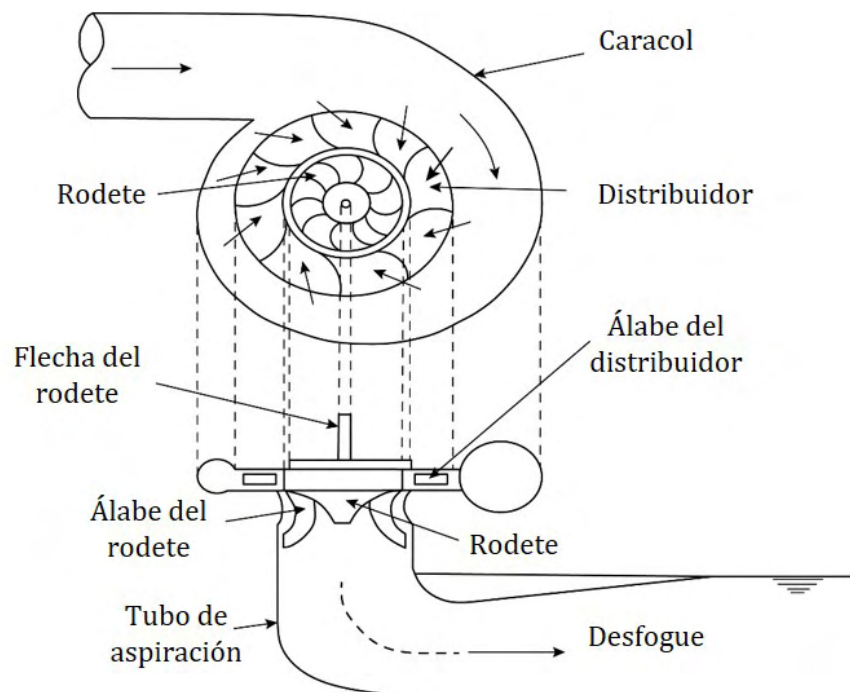


Figura 3.4: Partes principales de una turbina Francis (4).

3.3.2. Comportamiento de un flujo dentro de la turbina

El intercambio de energía hidráulica a energía mecánica es el resultado de la interacción entre el agua y el rodete de la turbina; en específico, los álabes del rodete. Para comprender esto, se estudiará el efecto de una corriente de agua sobre un álabe, que se considerará como una placa en movimiento, como se muestra en la figura 3.5.

En la figura se muestra una corriente de agua que incide sobre el álabe con una fuerza \mathbf{F}_1 durante un intervalo de tiempo Δt . Por la tercera ley de Newton, existe una fuerza \mathbf{F}_2 de igual magnitud y sentido contrario que detiene la corriente. Esta última fuerza, de acuerdo con la segunda ley de Newton, cambiará el momento del agua \mathbf{p} :

3. GENERALIDADES SOBRE EL FUNCIONAMIENTO DE LAS CENTRALES HIDROELÉCTRICAS

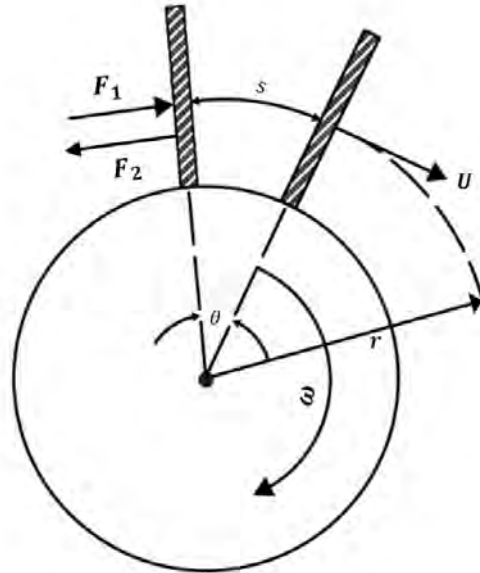


Figura 3.5: Corriente de agua incidiendo sobre los álabes del rodete (4).

$$\mathbf{F}_2 = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} \quad (3.6)$$

Tomando el intervalo de tiempo e integrando la ecuación (3.6) se obtiene la *ley del impulso* o de la *cantidad de movimiento*:

$$\mathbf{F}_2 \Delta t = m \Delta \mathbf{V} \quad (3.7)$$

Dicha ley establece que el cambio en el momento de un objeto es igual al impulso que se aplica, es decir, el cambio de velocidad que sufre una partícula de masa m está relacionado con la fuerza que se le aplica.

Por otro lado, la masa de la corriente de agua es:

$$m = \rho V = \frac{\gamma}{g} Q \Delta t \quad (3.8)$$

Así que al sustituir en la ecuación (3.7) se obtiene que el impulso del rodete ($\mathbf{F}_2 \Delta t$) transmitido al agua, es:

$$\mathbf{F}_2 \Delta t = \frac{\gamma Q}{g} \Delta t \Delta \mathbf{V} = \frac{\gamma Q}{g} \Delta t (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1) \quad (3.9)$$

Y por consiguiente, dado que $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$, el impulso que el rodete está recibiendo del agua es igual a la diferencia entre la cantidad de movimiento a la entrada de la estructura y la cantidad de movimiento que tiene el agua al salir, es decir :

$$\mathbf{F}_1 \Delta t = \frac{\gamma Q}{g} \Delta t (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2) \quad (3.10)$$

En la figura 3.6 se observa la trayectoria que sigue el líquido a su paso por el rodete. Primero, el agua ingresa al rodete en el punto 1 con una velocidad \mathbf{V}_1 conocida como la velocidad absoluta del agua; la cual se descompone en \mathbf{U}_1 , velocidad tangencial al giro del rodete; y \mathbf{W}_1 , la velocidad relativa del fluido con respecto al álabe ($\mathbf{W}_1 = \mathbf{V}_1 - \mathbf{U}_1$) siempre tangente al álabe. A continuación, sigue la trayectoria descrita por la línea punteada, producto de todas las velocidades y de la forma de los álabe. Y finalmente, abandona la estructura por el punto 2 con velocidad absoluta \mathbf{V}_2 . Se conoce como *triángulo de velocidades* al triángulo formado por los vectores V , U Y W .

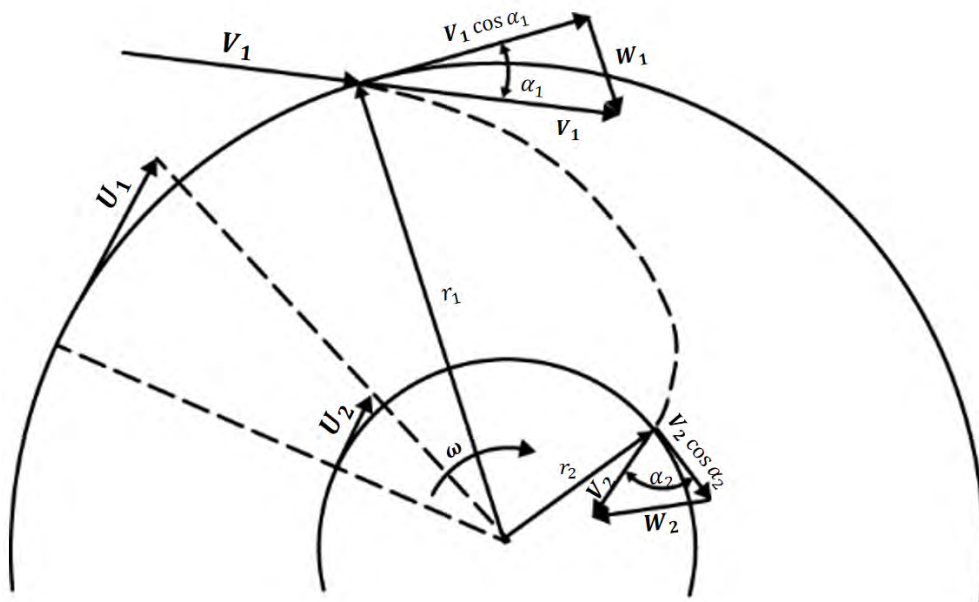


Figura 3.6: Trayectoria seguida por el agua a su paso por el rodete (4).

Como se mencionó en el párrafo anterior, las velocidades tangenciales se representan con la letra U . Esta velocidad indica que un punto del rodete recorre en un minuto una distancia πDN . N es la velocidad angular del rodete en revoluciones por minuto. Por lo que la magnitud de la velocidad tangencial es:

$$U = \frac{\pi DN}{60} \quad (3.11)$$

3. GENERALIDADES SOBRE EL FUNCIONAMIENTO DE LAS CENTRALES HIDROELÉCTRICAS

Y por tanto, la magnitud de la velocidad angular ω es:

$$\omega = \frac{U}{r} = \frac{\pi N}{30} \quad (3.12)$$

donde:

- U velocidad tangencial, en m/s ;
- r radio del rodete, en m ;
- D diámetro del rodete, en m ;
- N velocidad angular de la turbina, en $r.p.m.$

Por otro lado, la torca que hace girar al rodete, llamado comúnmente *par motor* es el producto vectorial entre la fuerza \mathbf{F}_1 y \mathbf{r} .

$$\mathbf{M} = \mathbf{F}_1 \times \mathbf{r} \quad (3.13)$$

En este caso de estudio solo se requiere la proyección del par motor (3.13) sobre las tangentes al rodete, así que de la figura 3.6:

$$M = \frac{\gamma Q}{g} (V_1 \cos \alpha_1 r_1 - V_2 \cos \alpha_2 r_2) \quad (3.14)$$

Por definición la potencia al freno P es el producto escalar entre la torca y la velocidad angular; sin embargo, \mathbf{M} y ω son paralelos entre sí, y por tanto :

$$P = \mathbf{M} \cdot \omega = M\omega \quad (3.15)$$

Así que al sustituir (3.12) y (3.14) en (3.15), se obtiene:

$$P = \frac{\gamma Q}{g} (V_1 U_1 \cos \alpha_1 - V_2 U_2 \cos \alpha_2) \quad (3.16)$$

Esta es la potencia real, ya que el líquido entregó al rodete la energía necesaria para ponerlo en movimiento y vencer las pérdidas en dicho rodete. De modo que a partir de (3.2), se concluye:

$$\eta H = \frac{1}{g} (V_1 U_1 \cos \alpha_1 - V_2 U_2 \cos \alpha_2) \quad (3.17)$$

La ecuación (3.17), conocida como *ecuación de Euler* o *ecuación energética de la turbina*, permite deducir algunas características de diseño que deben reunir los rodetes para proporcionar mayor eficiencia. Por ejemplo, el ángulo de entrada del agua α_1 debe ser lo más pequeño posible (entre 12° y 24°) y el ángulo de salida α_2 debe ser aproximadamente de 90° .

3.3.3. Intervalo de operación de las turbinas

La selección del tipo y cantidad de turbinas depende de la carga y gasto disponibles en el proyecto. Dicha carga se establece a partir de estudios hidrológicos que determinan la capacidad media de la presa que prevalecerá durante la mayor parte del año.

A fin de determinar los intervalos de operación de una turbina se realizan pruebas en un laboratorio con modelos a escala. Para ello es importante que exista similitud entre el modelo y la turbina, es decir que haya semejanza: geométrica, relación proporcional de dimensiones; cinemática, en todos los puntos los triángulos de velocidad sean idénticos; y dinámica, las fuerzas en puntos homólogos sean iguales. A esta relación entre las magnitudes de las turbinas reales y los modelos se le conoce como *leyes de similitud* (4).

Cada turbina está caracterizada por un parámetro que involucra variables de diseño, llamada *velocidad específica*. Este parámetro surge de la *turbina específica* que es una turbina hipotética que trabaja con carga y potencia unitarias. En el sistema métrico esto equivale a que una turbina con 1 metro de carga, generase una potencia de 1 CV (o 1 Kw). A partir de las leyes generales de similitud, que relacionan el funcionamiento entre el modelo y prototipo, se obtiene la velocidad específica N_s de dicha turbina (4):

$$N_s = \frac{N\sqrt{P}}{H^{5/4}} \quad (3.18)$$

Este parámetro se utiliza para seleccionar el tipo y el número de turbinas que se instalarán en la central hidroeléctrica.

Una forma de conocer el desempeño de una turbina es a través del *Diagrama de Colina*, el cual establece una relación entre las condiciones de operación y la eficiencia de esta. El diagrama de colina se realiza con modelos reducidos de turbinas en un laboratorio. Dichos modelos son probados en distintos puntos de operación; y posteriormente, se hacen interpolaciones para encontrar curvas de isoeficiencia. Por último, los resultados se traducen a información que correspondería si se tratase de una *turbina unitaria*. La turbina unitaria es aquella que posee un diámetro de 1 m y que trabaja con una carga de 1 m. Análogamente, al aplicar las leyes generales de similitud, se obtiene la velocidad de giro unitaria N_u , el gasto unitario Q_u y la potencia unitaria P_u (4):

$$\begin{aligned} N_u &= \frac{ND}{\sqrt{H}} \\ Q_u &= \frac{Q}{D^2\sqrt{H}} \\ P_u &= \frac{P}{D^2H^{3/2}} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Existen dos tipos de pruebas, o ensayos, que se aplican a las turbinas: el *ensayo elemen-*

3. GENERALIDADES SOBRE EL FUNCIONAMIENTO DE LAS CENTRALES HIDROELÉCTRICAS

tal, que se realiza manteniendo constante la apertura de los álabes del distribuidor, y el *ensayo completo* que es un conjunto de pruebas en donde cada una tiene una apertura distinta de los álabes del distribuidor.

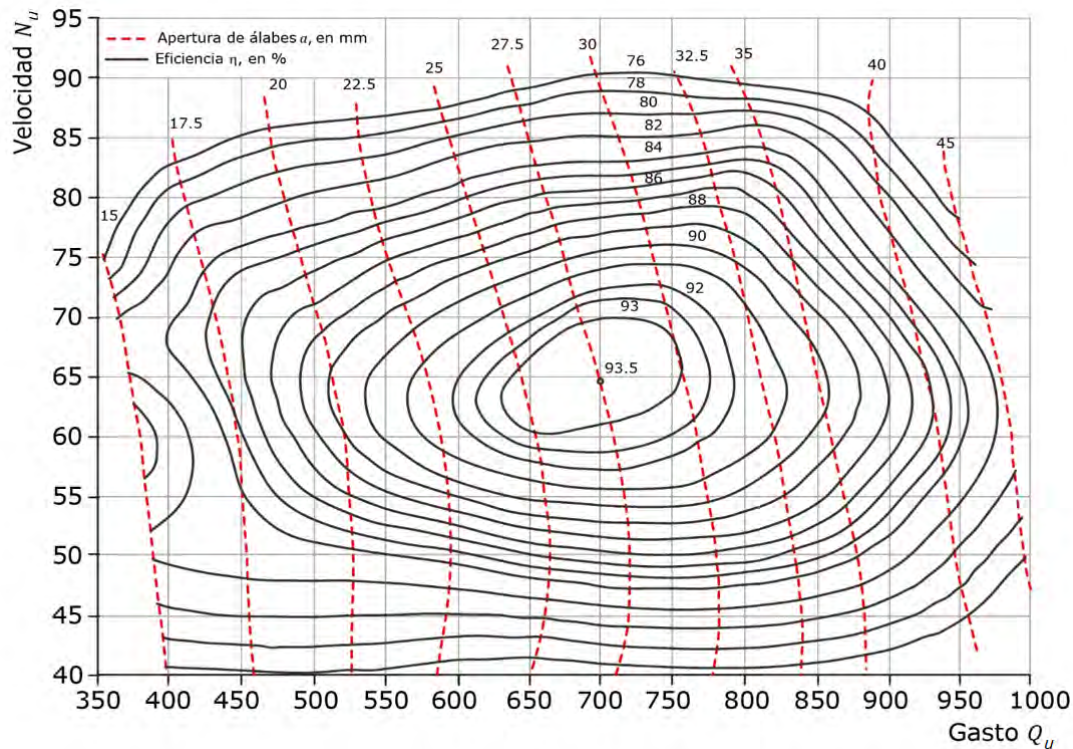


Figura 3.7: Ejemplo de diagrama de colina (Archivo del Instituto de Ingeniería).

La figura 3.7 es un ejemplo de ensayo completo de una turbina Francis donde la variable dependiente es N_u y la independiente es Q_u . Se trazaron las curvas para distintas aperturas del distribuidor; y posteriormente, se unieron los puntos de igual eficiencia para obtener las curvas de isoeficiencia. De igual forma, es posible trazar las curvas en donde la potencia sea la variable dependiente para distintas aperturas del distribuidor. En el caso mostrado en la figura 3.7, la máxima eficiencia es 93.5%.

Análisis dinámico de un sistema hidroeléctrico

4.1. Método de Análisis

El flujo oscilatorio permanente puede ser estudiado en el dominio del tiempo o en el de la frecuencia. Dependiendo del dominio que en el que se esté trabajando, se aplicarán diferentes métodos para el análisis. A continuación se describe brevemente la forma de estudio de un flujo no permanente en cada dominio.

4.1.1. Dominio del tiempo

En este dominio las señales son funciones del tiempo, esto significa que la amplitud de la señal varía con el tiempo. En este enfoque, la solución de las ecuaciones de un flujo no permanente incluye pérdidas por fricción y condiciones de frontera no lineales.

El análisis de un flujo oscilatorio permanente se realiza bajo la consideración inicial de un flujo permanente en el cual se suponen valores medios de la carga de presión y el gasto o bien, condiciones nulas de flujo.

Una vez que el transitorio se desvanece, se establece el estado oscilatorio permanente por lo que se podrán determinar las fluctuaciones en la carga y gasto. La ventaja de trabajar en el dominio del tiempo es que es posible incluir relaciones no lineales en el análisis. En este dominio es posible aplicar los siguientes métodos: método de las características, la diferencia finita, el elemento finito y los métodos espectrales (1).

4.1.2. Dominio de la frecuencia

En este caso las señales representan la cantidad de veces que se presentó un evento en un periodo total de observación. El análisis en este dominio es conveniente cuando se incluyen relaciones lineales.

4. ANÁLISIS DINÁMICO DE UN SISTEMA HIDROELÉCTRICO

El análisis del flujo oscilatorio permanente en dicho dominio consiste en suponer que las variaciones de gasto y presión son de forma sinusoidal. Por tanto, la ecuación de continuidad y dinámica que describen al flujo oscilatorio permanente en el dominio del tiempo son convertidas al dominio de la frecuencia. Por otra parte, las pérdidas por fricción y las condiciones de frontera no lineales son linealizadas, ya que si la amplitud de las oscilaciones es pequeña, el error introducido por linealización es despreciable.

En este caso la fuerza de excitación, que se considera periódica, es descompuesta en diferentes armónicos por análisis de Fourier, y cada armónico es analizado de manera separada. Debido a que todas las ecuaciones y relaciones ahora son lineales, la respuesta del sistema es determinada por una superposición de respuestas individuales.

Existen dos métodos de análisis en el dominio de la frecuencia:

- **Impedancia Hidráulica:** Este método fue aplicado por primera vez por Streeter y Wylie (19) y se basa en suponer que las fluctuaciones de carga de presión y gasto son sinusoidales. Al cociente de oscilación de la carga de presión y gasto se le conoce como *impedancia hidráulica* Z . Para las condiciones de frontera dadas del sistema, se realiza un diagrama entre la impedancia y las frecuencias. Las frecuencias en las que $|Z|$ es máxima son las frecuencias de resonancia del sistema. La desventaja de este método es la cantidad de ecuaciones que se requieren para un sistema de tuberías.
- **Matriz de Transferencia:** El método de la matriz de transferencia, el cual fue propuesto por Chaudhry (1), implica utilizar ecuaciones y relaciones lineales, al igual que una representación sinusoidal de las fluctuaciones del gasto y la carga de presión. Es más simple y sistemático que el de la impedancia hidráulica. En las siguientes secciones se mostrará la aplicación de este método.

4.2. Matrices de transferencia

El estudio del fenómeno de resonancia en una central hidroeléctrica comenzará por el análisis de las fluctuaciones en la carga piezométrica y el gasto que se presenten en cada uno de los componentes básicos de la central: tuberías, bifurcaciones, válvulas, turbina y tubo de desfogue. Posteriormente, se formularán las matrices de transferencia de los mismos; y finalmente, se procederá a resolver la matriz del sistema completo para obtener las oscilaciones de presión y gasto.

4.2.1. Matriz de transferencia de una tubería simple

Considérese un sistema dinámico simple el cual está constituido por una tubería a presión con diámetro constante. Al ocurrir un cambio en las condiciones de frontera se generarán oscilaciones de gasto y carga. Estas oscilaciones pueden ser determinadas con ayuda de la ecuación de continuidad (2.18) y la ecuación dinámica (2.17):

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{gA}{a^2} \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (4.1a)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{gA} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{fQ^2}{2gDA^2} = 0 \quad (4.1b)$$

En un flujo oscilatorio permanente, se puede considerar que para cada sección de la tubería el gasto y la carga están dados por la suma de valores medios constantes, Q_0 y H_0 , más las oscilaciones periódicas que se producen en torno a ellos. Así que el gasto y la carga totales están dados por las siguientes expresiones:

$$Q(x, t) = Q_0(x) + q(x)e^{j\omega t} \quad (4.2a)$$

$$H(x, t) = H_0(x) + h(x)e^{j\omega t} \quad (4.2b)$$

donde:

- $Q(x, t)$ gasto instantáneo en una sección determinada, en m^3/s ;
- $H(x, t)$ carga instantánea en una sección determinada, en m ;
- $Q_0(x)$ gasto medio constante, en m^3/s ;
- $H_0(x)$ carga media constante, en m ;
- $q(x)$ amplitud del gasto oscilante en x , en m^3/s ;
- $h(x)$ amplitud de la carga oscilante en x , en m ;
- x distancia horizontal, en m ;
- t tiempo, en s ;
- ω frecuencia de excitación, en rad/s ;
- j raíz cuadrada de -1.

Al derivar las ecuaciones (4.2) respecto a la posición y el tiempo se obtiene:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = e^{j\omega t} \frac{dq}{dx} \quad (4.3a)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = j\omega q e^{j\omega t} \quad (4.3b)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{f}{2gD} \frac{Q_0^2}{A^2} + e^{j\omega t} \frac{dh}{dx} \quad (4.3c)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = j\omega h e^{j\omega t} \quad (4.3d)$$

Por tanto, al sustituir las igualdades (4.2) en las ecuaciones (4.1) y considerando que $q^2(x) \approx 0$, se concluye:

$$\frac{dq(x)}{dx} + j\omega \frac{gA}{c^2} h(x) = 0 \quad (4.4a)$$

$$\frac{dh(x)}{dx} + \frac{1}{gA} \left(j\omega + \frac{fQ_0}{DA} \right) q(x) = 0 \quad (4.4b)$$

Si se define la celeridad compleja \bar{c} , la cual incluye la fricción, como:

$$\bar{c}^2 = \frac{c^2}{1 - \frac{jfQ_0}{\omega DA}} \quad (4.5)$$

Entonces, al derivar las ecuaciones (4.4) respecto a x y sustituyendo (4.5), resulta:

$$\frac{d^2q(x)}{dx^2} + \frac{\omega^2}{\bar{c}^2} q(x) = 0 \quad (4.6a)$$

$$\frac{d^2h(x)}{dx^2} + \frac{\omega^2}{\bar{c}^2} h(x) = 0 \quad (4.6b)$$

A través de las ecuaciones anteriores se obtienen los valores de las funciones $q(x)$ y $h(x)$. Como se observa, tienen la forma de la ecuación de un oscilador armónico simple, así que sus soluciones son, respectivamente:

$$q(x) = C_1 e^{\bar{\mu}x} + C_2 e^{-\bar{\mu}x} \quad (4.7a)$$

$$h(x) = C_1 e^{\bar{\mu}x} + C_2 e^{-\bar{\mu}x} \quad (4.7b)$$

$$\bar{\mu} = j \frac{\omega}{\bar{c}} \quad (4.7c)$$

Se define una función compleja, la *impedancia característica compleja de la tubería* \bar{Z}_c :

$$\bar{Z}_c = \frac{\bar{\mu}c^2}{j\omega gA} \quad (4.8)$$

Para introducirla en la ecuación (4.7a), se deriva la ecuación (4.7b):

$$\frac{dh(x)}{dx} = \bar{\mu}(C_1 e^{\bar{\mu}x} - C_2 e^{-\bar{\mu}x}) \quad (4.9)$$

El resultado se sustituye en la ecuación (4.4b) y se multiplica por $-j/\omega$:

$$\frac{1}{gA} \left(1 + \frac{j f Q_0}{\omega DA} \right) q(x) - j \frac{\bar{\mu}}{\omega} (C_1 e^{\bar{\mu}x} - C_2 e^{-\bar{\mu}x}) = 0 \quad (4.10)$$

Se sustituye (4.5) y (4.7c) en la ecuación anterior:

$$- \frac{1}{gA} c^2 \frac{\bar{\mu}^2}{\omega^2} q(x) - j \frac{\bar{\mu}}{\omega} (C_1 e^{\bar{\mu}x} - C_2 e^{-\bar{\mu}x}) = 0 \quad (4.11)$$

Finalmente, se inserta el valor de \bar{Z}_c en la ecuación (4.11) y se resuelve para el gasto:

$$q(x) = - \frac{1}{\bar{Z}_c} (C_1 e^{\bar{\mu}x} - C_2 e^{-\bar{\mu}x}) \quad (4.12)$$

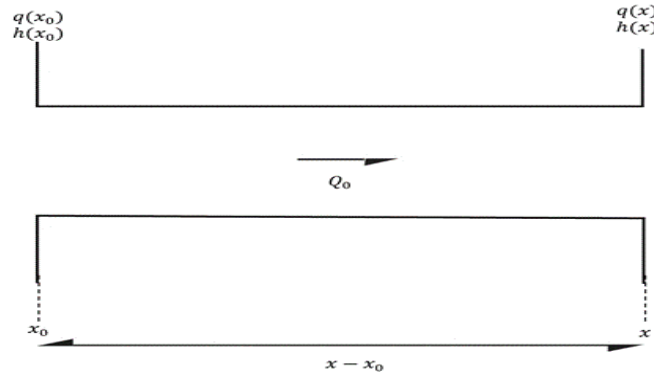


Figura 4.1: Oscilaciones de gasto y carga entre dos secciones de la tubería.

Así que para cualquier sección de la conducción a una distancia x_0 del origen se tendrán oscilaciones de gasto $q(x_0)$ y carga $h(x_0)$ dadas por las ecuaciones (4.12) y (4.7b):

$$q(x_0) = - \frac{1}{\bar{Z}_c} (C_1 e^{\bar{\mu}x_0} - C_2 e^{-\bar{\mu}x_0}) \quad (4.13a)$$

$$h(x_0) = C_1 e^{\bar{\mu}x_0} + C_2 e^{-\bar{\mu}x_0} \quad (4.13b)$$

Al resolver el sistema de ecuaciones (4.13) se obtiene el valor de las constantes C_1 y C_2 :

$$C_1 = \frac{h(x_0) - \bar{Z}_c q(x_0)}{2} e^{-\bar{\mu} x_0} \quad (4.14a)$$

$$C_2 = \frac{h(x_0) + \bar{Z}_c q(x_0)}{2} e^{\bar{\mu} x_0} \quad (4.14b)$$

Por otra parte, las definiciones de coseno y seno hiperbólico son:

$$\cosh(\bar{\mu}(x - x_0)) = \frac{e^{\bar{\mu}(x-x_0)} + e^{-\bar{\mu}(x-x_0)}}{2} \quad (4.15a)$$

$$\sinh(\bar{\mu}(x - x_0)) = \frac{e^{\bar{\mu}(x-x_0)} - e^{-\bar{\mu}(x-x_0)}}{2} \quad (4.15b)$$

De manera que al incorporar las definiciones anteriores y los valores de las constantes C_1 y C_2 en (4.13) se obtienen las *ecuaciones de transferencia*:

$$q(x) = \cosh(\bar{\mu}(x - x_0))q(x_0) + \frac{1}{\bar{Z}_c} \sinh(\bar{\mu}(x - x_0))h(x_0) \quad (4.16a)$$

$$h(x) = \bar{Z}_c \sinh(\bar{\mu}(x - x_0))q(x_0) + \cosh(\bar{\mu}(x - x_0))h(x_0) \quad (4.16b)$$

donde:

- $q(x)$ amplitud del gasto oscilante en x , en m^3/s ;
- $h(x)$ amplitud de la carga oscilante en x , en m ;
- x distancia horizontal, en m ;
- x_0 distancia del origen de las x a la sección x_0 , en m ;
- \bar{Z}_c impedancia característica compleja de la tubería, en s/m^2 ;
- $\bar{\mu}$ constante compleja, en $1/m$;
- \bar{c} celeridad compleja, en m/s ;
- ω frecuencia de excitación, en rad/s ;
- j raíz cuadrada de -1.

El sistema de ecuaciones (4.16) puede escribir a través de matrices, en donde $\bar{\mathbb{M}}_{\mathbb{P}}$ es la matriz de transferencia de la tubería con elementos complejos:

$$\begin{bmatrix} q(x) \\ h(x) \\ 1 \end{bmatrix} = \bar{\mathbb{M}}_{\mathbb{P}} \begin{bmatrix} q(x_0) \\ h(x_0) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

$$\bar{\mathbb{M}}_{\mathbb{P}} = \begin{bmatrix} \cosh(\bar{\mu}(x - x_0)) & \frac{1}{\bar{Z}_c} \sinh(\bar{\mu}(x - x_0)) & 0 \\ \bar{Z}_c \sinh(\bar{\mu}(x - x_0)) & \cosh(\bar{\mu}(x - x_0)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

En dado caso que no se considere la fricción, las ecuaciones (4.5), (4.7c) y (4.8) serán de la forma:

$$\bar{c} = c \quad (4.19a)$$

$$\mu = \frac{\omega}{c} \quad (4.19b)$$

$$Z_c = \frac{c}{gA} \quad (4.19c)$$

En consecuencia, los argumentos de las funciones hiperbólicas en la matriz (4.18) se convierten en complejos puros, por lo que son válidas las siguientes identidades:

$$\cosh(\bar{\mu}(x - x_0)) = \cos(\mu(x - x_0)) \quad (4.20a)$$

$$\sinh(\bar{\mu}(x - x_0)) = -j \sin(\mu(x - x_0)) \quad (4.20b)$$

De modo que al no considerarse la fricción, la matriz $\bar{\mathbb{M}}_{\mathbb{P}}$ toma la siguiente forma:

$$\bar{\mathbb{M}}_{\mathbb{P}} = \begin{bmatrix} \cos(\mu(x - x_0)) & \frac{j}{Z_c} \sin(\mu(x - x_0)) & 0 \\ jZ_c \sin(\mu(x - x_0)) & \cos(\mu(x - x_0)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

donde:

- $\bar{\mathbb{M}}_{\mathbb{P}}$ matriz de transferencia de la tubería cuando $f = 0$;
- x distancia horizontal, en m ;
- x_0 distancia del origen de las x a la sección x_0 , en m ;
- Z_c impedancia característica real de la tubería, en s/m^2 ;
- μ constante, en $1/m$;
- ω frecuencia de excitación, en rad/s ;
- j raíz cuadrada de -1.

4.3. Análisis dinámico de una tubería simple

Las fluctuaciones del gasto y las carga que se presentan en un estado permanente oscilatorio, en una tubería sin fricción, están relacionados en la sección inicial x_0 y en la sección final x por medio de la ecuación:

$$\begin{bmatrix} q(x) \\ h(x) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\mu(x - x_0)) & \frac{j}{Z_c} \sin(\mu(x - x_0)) & 0 \\ jZ_c \sin(\mu(x - x_0)) & \cos(\mu(x - x_0)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(x_0) \\ h(x_0) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

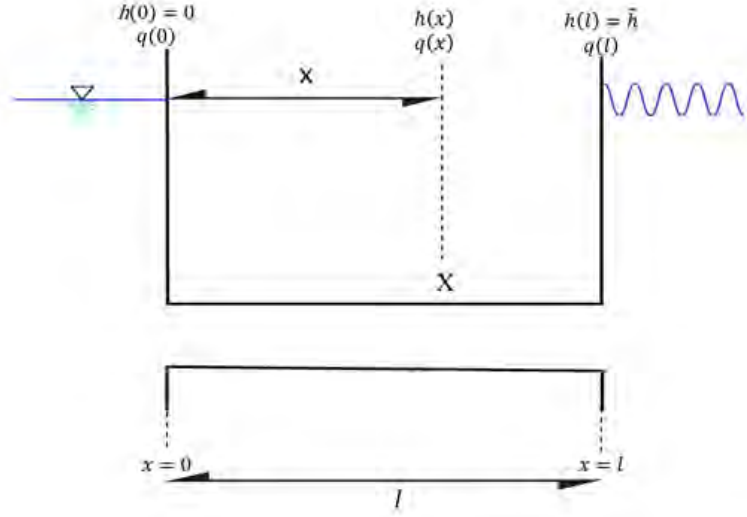


Figura 4.2: En el extremo aguas arriba no existe una oscilación de la carga, mientras que el extremo aguas abajo hay una excitación de la carga.

Considérese una tubería como la mostrada en la 4.2, en el extremo aguas arriba de la conducción ($x_0 = 0$) el nivel permanece fijo, es decir que no hay fluctuaciones en la carga de presión y $h(x_0) = 0$. Por otro lado, en el extremo aguas abajo ($x = l$) se tiene que la amplitud de oscilación tiene una variación senoidal que se designa con \tilde{h} . Por lo que al sustituir dichos valores en la (4.22) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} q(l) \\ h(l) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\mu(0-l)) & \frac{j}{Z_c} \sin(\mu(0-l)) & 0 \\ jZ_c \sin(\mu(0-l)) & \cos(\mu(0-l)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(0) \\ h(0) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Recordando que la función coseno es par ($\cos(-x) = \cos(x)$) y la función seno impar ($\sin(-x) = -\sin(x)$) se concluye que (4.23) tomará la forma:

$$\begin{bmatrix} q(l) \\ \tilde{h} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\mu l) & -\frac{j}{Z_c} \sin(\mu l) & 0 \\ -jZ_c \sin(\mu l) & \cos(\mu l) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(0) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Al resolver el anterior sistema de ecuaciones (4.24) se obtiene:

$$\tilde{h} = -q(0)jZ_c \sin(\mu l) \quad (4.25)$$

A través de la ecuación (4.22) es posible relacionar las perturbaciones de una sección

X que diste x del extremo aguas arriba ($x_0 = 0$), en donde no existe fluctuación de carga. Así que:

$$\begin{bmatrix} q(x) \\ h(x) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\mu x) & -\frac{j}{Z_c} \sin(\mu x) & 0 \\ -jZ_c \sin(\mu x) & \cos(\mu x) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(0) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

De donde al resolver para $h(x)$ resulta:

$$h(x) = -q(0)jZ_c \sin(\mu x) \quad (4.27)$$

Al dividir (4.27) entre (4.25) y sustituir (4.19b) se obtienen la relación entre la carga de presión en cualquier sección X y la perturbación aguas abajo \tilde{h} :

$$H(\omega) = \frac{h(x)}{\tilde{h}} = \frac{\sin(\frac{\omega}{c}x)}{\sin(\frac{\omega}{c}l)} \quad (4.28)$$

donde:

- $H(\omega)$ factor de amplificación;
- $h(x)$ carga piezométrica oscilante en x , en m ;
- x distancia horizontal, en m ;
- ω frecuencia de excitación, en rad/s ;
- c celeridad, en m/s ;
- \tilde{h} variación de la carga piezométrica, en m ;
- l sección de la tubería en donde está la excitación, en m .

El factor de amplificación $H(\omega)$ indica qué tan grande es la amplitud de la oscilación en una sección X , comparada con la amplitud de la oscilación de la excitación.

Por otro lado, la matriz de transferencia es modular. Esto quiere decir que es posible obtener la matriz de transferencia de la conducción completa a partir de las matrices de transferencia de las tuberías de diferentes características que la forman. La multiplicación de las matrices de transferencia de cada tramo (de aguas abajo a aguas arriba) dará como resultado la matriz de transferencia de la tubería completa. Es por ello que se puede obtener la matriz de transferencia del sistema completo si se multiplican las matrices de transferencia de los elementos que lo componen, tales como bifurcaciones, válvulas, turbina, etc.

4.3.1. Frecuencias de resonancia

El análisis del factor de amplificación $H(\omega)$ permite obtener las frecuencias de resonancia y los puntos en donde se presenta la mayor amplitud de oscilaciones.

Los valores máximos que tomará el factor de ampliación se presentarán cuando se cumplan las siguientes condiciones:

1. $\sin\left(\frac{\omega}{c}l\right) \approx 0$
2. $\sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) = 1$

La primera condición se satisface cuando el argumento de la función seno es:

$$\frac{\omega}{c}l = (n + 1)\pi \quad n \in \mathbb{Z} \quad (4.29)$$

Por lo que la frecuencia de excitación ω toma los siguientes valores:

$$\omega_n \simeq \frac{(n + 1)\pi c}{l} \quad (4.30)$$

Las frecuencias ω_n con las cuales el factor de ampliación $H(\omega)$ alcanzará su valor máximo se les conoce como *frecuencias de resonancia* o *frecuencias propias* de la tubería. La más pequeña de ellas, ω_0 se llama *frecuencia fundamental* y las sucesivas ω_1, ω_2 , etc. se conocen como *armónicos*.

1. Frecuencia fundamental ω_0

En este caso $n = 0$, por lo que de la ecuación (4.30) resulta:

$$\omega_0 \simeq \frac{\pi c}{l} \quad (4.31)$$

Dicha frecuencia se presentará en los puntos de la tubería que cumplan la condición 2. Al sustituir (4.31) en la condición 2 se obtiene la sección de la tubería en donde se presentará resonancia:

$$\sin\left(\frac{\omega_0}{c}x\right) \approx \sin\left(\frac{\pi}{l}x\right) = 1 \quad (4.32a)$$

$$\frac{\pi}{l}x = \frac{4m + 1}{2}\pi \quad (4.32b)$$

$$x = \frac{4m + 1}{2}l \quad m \in \mathbb{Z} \quad (4.32c)$$

Puesto que $x \leq l$, m solamente puede ser cero. De modo que cuando el sistema sea excitado con una frecuencia ω_0 , la amplitud máxima de la oscilación de la carga se presentará en el punto $x = l/2$ de la tubería.

2. Primer armónico de la frecuencia de excitación ω_1

En el caso $n = 1$:

$$\omega_1 \simeq \frac{2\pi c}{l} \quad (4.33)$$

Análogamente, al sustituir (4.33) en la condición 2:

$$\sin\left(\frac{\omega_1}{c}x\right) \approx \sin\left(\frac{2\pi}{l}x\right) = 1 \quad (4.34a)$$

$$\frac{2\pi}{l}x = \frac{4m+1}{2}\pi \quad (4.34b)$$

$$x = \frac{4m+1}{4}l \quad m \in \mathbb{Z} \quad (4.34c)$$

De igual manera $x \leq l$, por lo que m solamente puede tomar el valor cero. Así pues, la amplificación de carga debida a la frecuencia ω_1 se presentará en el punto $x = l/4$.

Para cada una de las frecuencias de resonancia del sistema se dirá que una sección X es *nodo* si no hay amplificación de la perturbación y *antinodo* si la ampliación de la perturbación de la carga es máxima.

Los resultados anteriores se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 4.1: Ubicación de nodos y antinodos para las ω_0 y ω_1 .

Frecuencia ω	$x = 0$	$x = \frac{l}{4}$	$x = \frac{l}{2}$	$x = \frac{3l}{4}$	$x = l$
$\omega_0 \simeq \pi \frac{c}{l}$	Nodo	—	Antinodo	—	\tilde{h}
$\omega_1 \simeq 2\pi \frac{c}{l}$	Nodo	Antinodo	Nodo	Antinodo	\tilde{h}

Cuando $x = l$ la amplitud de la perturbación de la carga será \tilde{h} , ya que se supone que la excitación ocurre en la proximidad de la tubería.

Los nodos y antinodos de los siguientes armónicos ($n > 1$) se encuentran a partir de la ecuación (4.30).

4.4. Análisis dinámico de los elementos de un sistema

4.4.1. Bifurcación

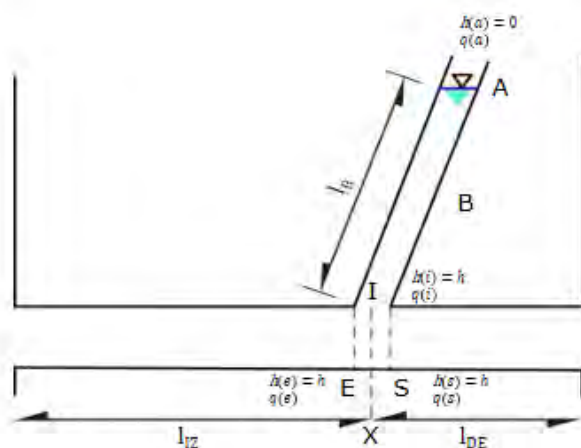


Figura 4.3: Tubería con bifurcación.

En la figura 4.3 se muestra una tubería en cuya sección X se ha conectado una bifurcación B , la cual podría simular un pozo de oscilación. Dicha bifurcación posee una longitud l_B , área A_B y celeridad c_B .

Una vez que el sistema esté en el estado oscilatorio permanente, en el extremo inferior de la bifurcación I existirá una oscilación de carga $h(i) = h$, mientras que en el extremo superior A se presentará una oscilación de carga $h(a) = h_a$. Sin embargo, debido a que las oscilaciones son muy rápidas, el gasto que entre por la bifurcación generará variaciones de nivel muy pequeñas en A , de tal manera que se puede considerar que $h(a) = 0$.

Por otra parte, en la entrada de la bifurcación E se presentará una fluctuación de gasto $q(e)$; a la salida S , una fluctuación $q(s)$; y la fluctuación de gasto que ascenderá por la bifurcación se denominará $q(i)$. Por el principio de continuidad se cumplirá:

$$q(e) = q(i) + q(s) \quad (4.35)$$

Ahora bien, la bifurcación funciona como una tubería simple entre los extremos I y A y puesto que su longitud es l_B , a partir de (4.22) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} q(a) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\mu l_B) & -\frac{j}{Z_B} \sin(\mu l_B) & 0 \\ -jZ_B \sin(\mu l_B) & \cos(\mu l_B) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(i) \\ h \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Al resolver el sistema anterior se concluye:

$$q(i) = \frac{\cos(\mu l_B)}{jZ_B \sin(\mu l_B)} h = \frac{h}{jZ_B \tan(\mu l_B)} \quad (4.37)$$

Sustituyendo (4.37) en (4.35), se tendrá:

$$q(s) = q(e) - \frac{h}{jZ_c \tan(\mu l_B)} \quad (4.38)$$

Por otro lado, para las secciones E y S se tiene el mismo valor de la amplitud de la oscilación de la carga; es decir, h . De modo que para estas dos secciones la tubería principal, se puede establecer la siguiente relación:

$$\begin{bmatrix} q(s) \\ h \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{jZ_B \tan(\mu l_B)} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(e) \\ h \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

Del arreglo matricial (4.39) se deduce que la *matriz de transferencia por bifurcación* $\mathbb{M}_{\mathbb{B}}$, que relaciona las secciones de la tubería principal antes y después de la bifurcación, es:

$$\mathbb{M}_{\mathbb{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{jZ_B \tan(\mu l_B)} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

donde:

- $\mathbb{M}_{\mathbb{B}}$ matriz de transferencia por bifurcación;
- e distancia horizontal del origen a la sección E , en m ;
- s distancia horizontal del origen a la sección S , en m ;
- Z_B impedancia característica real de la bifurcación, en s/m^2 ;
- μ constante, en $1/m$;
- l_B longitud de la bifurcación, en m ;
- j raíz cuadrada de -1 .

4.4.2. Válvula

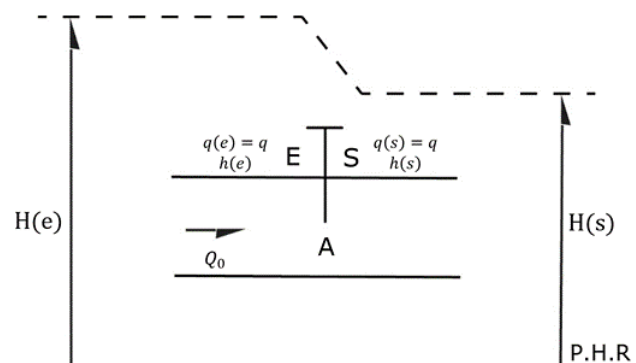


Figura 4.4: Tubería con válvula

La figura 4.4, muestra una tubería provista con una válvula con área de apertura A por la cual fluye un gasto Q . Si la carga a la entrada de la válvula E es $H(e)$, y a la salida S es $H(s)$, entonces el gasto está dado por la fórmula (18):

$$Q = C_V A (H(e) - H(s))^{1/2} \quad (4.41)$$

donde:

- Q gasto que fluye a través de la válvula, en m^3/s ;
- C_V coeficiente de gasto, adimensional;
- A área de la abertura de la válvula, en m^2 ;
- e distancia horizontal del origen a la sección E , en m ;
- s distancia horizontal del origen a la sección S , en m ;
- $H(e)$ carga aguas arriba, en m ;
- $H(s)$ carga aguas abajo, en m .

Aunque C_V es un coeficiente que depende de A , para pequeñas variaciones de la apertura puede considerarse constante, de modo que es posible introducir el coeficiente $K_V = C_V A$ en la ecuación (4.41). Por tanto, se obtiene la siguiente relación entre la carga aguas arriba, aguas abajo y el gasto:

$$H(s) = H(e) - K_V Q^2 \quad (4.42)$$

donde:

- K_V coeficiente de pérdida de la válvula, en s^2/m^5 .

Por otra parte, para una condición inicial 0, la ecuación (4.42) toma la siguiente forma:

$$H_0(s) = H_0(e) - K_{V_0} Q_0^2 \quad (4.43)$$

donde:

- Q_0 gasto que fluye a través de la válvula en la condición inicial, en m^3/s ;
- $H_0(e)$ carga aguas arriba en la condición inicial, en m ;
- $H_0(s)$ carga aguas abajo en la condición inicial, en m ;
- K_{V_0} coeficiente de pérdida de la válvula en la condición inicial ($K_{V_0} = C_V A_0$), en s^2/m^5 .

Si el gasto y la carga son perturbados por una excitación periódica en la frontera aguas abajo, se puede hacer uso de las ecuaciones (4.2) que establecen que para cualquier instante el gasto y las cargas totales serán:

$$Q = Q_0 + q \quad (4.44a)$$

$$H(e) = H_0(e) + h(e) \quad (4.44b)$$

$$H(s) = H_0(s) + h(s) \quad (4.44c)$$

donde:

- q amplitud de la oscilación del gasto a través de la válvula, en m^3/s ;
- $h(e)$ amplitud de la oscilación de la carga a la entrada de la válvula, en m ;
- $h(s)$ amplitud de la oscilación de la carga a la salida de la válvula, en m .

Así que al sustituir las ecuaciones (4.44) en (4.42) se obtiene:

$$H_0(s) + h(s) = H_0(e) + h(e) - K_{V_0} (Q_0 + q)^2 \quad (4.45)$$

Al despejar K_{V_0} de la ecuación (4.43), sustituirlo en la ecuación (4.45) y tomando en consideración que la amplitud de la oscilación del gasto es pequeña de tal manera que $q^2 \approx 0$, resulta:

$$H_0(s) + h(s) = H_0(e) + h(e) - \left(\frac{H_0(e) - H_0(s)}{Q_0^2} \right) (Q_0^2 + 2Q_0q) \quad (4.46)$$

Resolviendo para $h(s)$ y simplificando:

$$h(s) = h(e) - \left(\frac{2(H_0(e) - H_0(s))}{Q_0} \right) q \quad (4.47)$$

Al definir la *impedancia de la válvula* Z_V como:

$$Z_V = \frac{2(H_0(e) - H_0(s))}{Q_0} \quad (4.48)$$

4. ANÁLISIS DINÁMICO DE UN SISTEMA HIDROELÉCTRICO

La ecuación (4.47) se reducirá:

$$h(s) = h(e) - Z_v q \quad (4.49)$$

Puesto que la variación de gasto q es igual a la entrada E y a la salida S de la válvula, entonces las oscilaciones de gasto y carga entre las dos secciones están relacionadas a través del siguiente arreglo:

$$\begin{bmatrix} q \\ h(s) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -Z_v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ h(e) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

Se le conoce como *matriz de transferencia de una válvula* M_v a la matriz:

$$M_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -Z_v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

donde:

- M_v matriz de transferencia de una válvula;
- Z_v impedancia de la válvula, en s/m^2 .

Cabe destacar que a pesar de que la válvula permanezca estacionaria, la sola presencia de esta en la tubería altera al sistema a través de su impedancia.

Ahora bien, si la fuente de excitación es un elemento que forma parte del sistema, como una válvula que produce pequeñas vibraciones, en lugar de un excitador aguas abajo, entonces a la ecuación (4.49) se le añade una perturbación en la carga \tilde{h} :

$$h(s) = h(e) - Z_v q + \tilde{h} \quad (4.52)$$

donde:

- \tilde{h} excitación de la carga ocasionada por la válvula que vibra, en m .

De manera que se obtiene el siguiente arreglo matricial:

$$\begin{bmatrix} q \\ h(s) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -Z_v & 1 & \tilde{h} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ h(e) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

Se le conoce como *matriz de transferencia de una válvula oscilante* M_{vO} a la matriz:

$$M_{vO} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -Z_v & 1 & \tilde{h} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

donde:

- \mathbb{M}_{VO} matriz de transferencia de una válvula;
- Z_v impedancia de la válvula, en s/m^2 ;
- \tilde{h} excitación de la carga ocasionada por la válvula, en m .

4.4.3. Turbina

En la literatura existen diversas propuestas para representar a la turbina, como la de De Siervo (13) que propone calcular una serie de parámetros, los cuales en la práctica son difíciles de estimar. Otra propuesta consiste en modelar a la turbina como una válvula oscilante, ya que actúa como un regulador de fluido gracias a sus álabes, además de que se supone que es el excitador del sistema (5).

A pesar de que este último modelo pudiese parecer simple, para el propósito de este trabajo que es el estudio del problema de la resonancia, brinda resultados aceptables.

Así pues, la matriz de transferencia de la turbina será igual a la matriz de transferencia de un válvula que vibra (4.55a), cuya impedancia está representada por la ecuación (4.55b)(5) :

$$\mathbb{M}_{\text{TU}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -Z_T & 1 & \tilde{h} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.55a)$$

$$Z_T = 2 \frac{H_0}{Q_0} \quad (4.55b)$$

donde:

- \mathbb{M}_{TU} matriz de transferencia de una turbina;
- Z_T impedancia de la turbina, en s/m^2 ;
- Q_0 gasto en condición inicial, en m^3/s ;
- H_0 caída neta en la condición de operación inicial, en m ;
- \tilde{h} excitación de la carga, en m .

4.5. Excitación

Existen dos principales excitadores (17):

- Movimiento de precedencia del vórtice (Torcha): Se forma en el tubo de desfogue cuando la turbina trabaja entre el 55 % y el 75 % de potencia de su diseño.
- El rodete mismo: Cuando se opera en torno al 20 % a 40 % de la potencia de diseño.

4. ANÁLISIS DINÁMICO DE UN SISTEMA HIDROELÉCTRICO

El primer tipo de excitación se ha estudiado más por lo que se tratará en los siguientes apartados.

4.5.1. La Torcha

La producción de energía eléctrica en las centrales requiere de gran flexibilidad dado que la demanda del mercado es variable y no es posible almacenar dicha energía. Dicha flexibilidad se logra a través de las turbinas, las cuales pueden operar en distintos rangos fuera de su punto de máxima eficiencia. En el caso de las turbinas Francis la carga la fija el nivel del agua de la presa, el cual permanece constante para un intervalo de tiempo amplio, por lo que para cambiar el punto de operación se modifica el gasto, y esto se realiza abriendo o cerrando los álabes, según la demanda. Mientras que la velocidad de la turbina se modifica al cambiar la frecuencia de generación.

Las turbinas Francis son máquinas radioaxiales, por lo que al salir el agua del rodete se genera un flujo helicoidal, cuyo centro se le conoce como *la torcha*. Cuando se opera fuera de la potencia de diseño, el flujo adquiere un movimiento de precesión en torno al eje del tubo de desfogue, de tal manera que toma la forma de un tirabuzón, como se muestran en las figuras 4.5 y 4.6, ocasionando severas fluctuaciones de presión. (18).



Figura 4.5: El flujo helicoidal toma la forma de un tirabuzón.

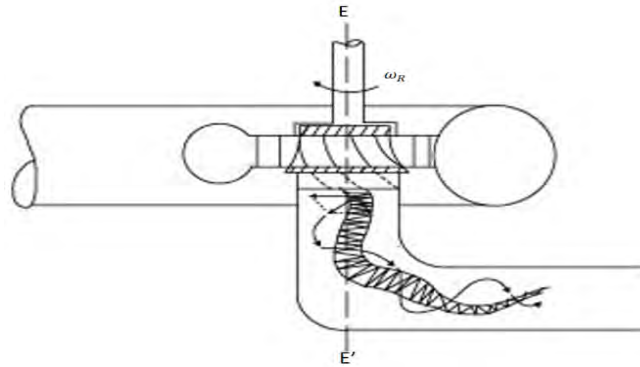


Figura 4.6: Ubicación de la torcha dentro del tubo de desfogue.

4.5.1.1. Mecanismo de formación de la torcha

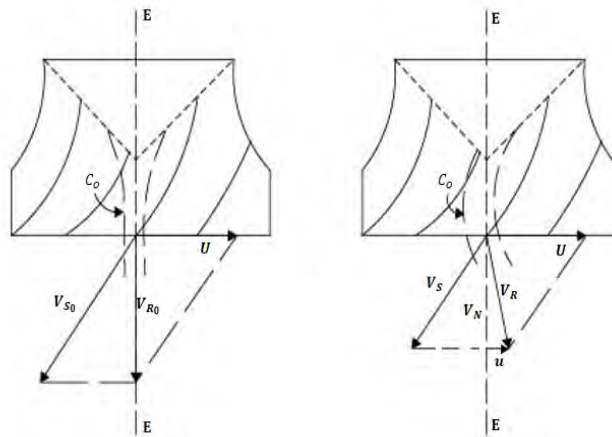


Figura 4.7: Tubería con bifurcación.

En las figura 4.7 se muestra un corte esquemático vertical de la turbina, en donde U es la velocidad tangencial de rotación de la rueda, V_s la velocidad de salida del agua, V_R la resultante de estas velocidades, $E - E$ el eje del tubo de desfogue y Co el núcleo de la torcha.

En la figura izquierda se representan las condiciones de diseño (0). En dicho caso V_{R0} es paralela al eje $E - E$, y por ende a Co . De modo que existe simetría radial, por lo que la presión es uniforme y no se registran pulsaciones.

En cambio, en la figura derecha se muestra una reducción de gasto, por lo que se disminuye la magnitud de V_s . Debido a que existe un mecanismo llamado *gobernador* que mantiene la velocidad de rotación de la turbina constante, V_R ya no será paralela

al eje $E - E$, de manera que existirá una componente u que causará que Co se desvíe. Como resultado, se romperá la simetría radial, las velocidades de un lado serán mayores y con ello las presiones menores.

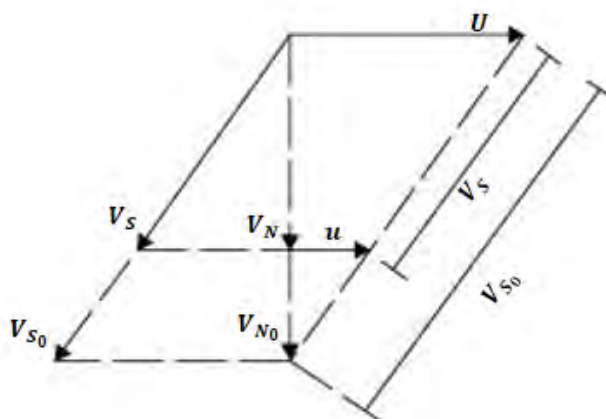


Figura 4.8: Triángulo de velocidades que se forma en el tubo de desfogues.

En la figura 4.8 se observa el triángulo de velocidades de 4.7 de donde puede concluirse:

$$\frac{u}{U} = \frac{V_{s0} - V_s}{V_{s0}} \quad (4.56)$$

O bien:

$$u = U \left(1 - \frac{V_s}{V_{s0}} \right) \quad (4.57)$$

Ahora bien, como la velocidad de rotación del núcleo de la torcha ω_E es:

$$\omega_E = \frac{u}{U} \omega_R \quad (4.58)$$

y la velocidad de salida es proporcional al gasto, entonces se tendrá la relación:

$$\omega_E = \left(1 - \frac{Q}{Q_D} \right) \omega_R \quad (4.59)$$

La ecuación (4.59) indica que el movimiento de precesión de la torcha se presentará para gastos de operación diferentes que el de diseño.

4.5.1.2. Estudios previos sobre la torcha

A continuación se muestran los resultados más relevantes de estudios sobre la torcha.

Tabla 4.2: Resultados de estudios previos sobre la torcha

1940 Rheingans (12)	Observó que los sistemas hidroeléctricos eran excitados por pulsaciones de presión con una frecuencia ω_E que dependía de la velocidad de rotación del rodete ω_R de la siguiente manera: $\omega_E = 0.2\omega_R$ a $0.33\omega_R$
1960 Dériaz (3)	Descubrió que cuando una Turbina Francis opera debajo de su potencia de diseño, se genera un flujo helicoidal cuyo centro, la torcha, tiene un movimiento de precesión y es la zona de presiones más bajas.
1971 Mollenkopf (8)	Observó que los diagramas de colina se limitan en tres zonas: <ul style="list-style-type: none"> ■ Central: La torcha no se presenta. ■ Gastos pequeños: La torcha gira en sentido de la rotación de la máquina. ■ Gastos grandes: La torcha gira en sentido inverso de la rotación de la máquina.
1972 Kubota (7)	Encontró que la amplitud de las oscilaciones de presión dependía de lo siguiente: <ul style="list-style-type: none"> ■ Relación Q/Q_D: Crecen para valores comprendidos entre 0.45 y 0.55. ■ Coeficiente de Cavitación σ: Se alcanza la máxima amplitud para un intervalo de 0.1 a 0.25.
1978 Hosoi (6)	Propuso aumentar el intervalo de ω_E de 0.25 a $0.55 \omega_R$ al disminuir el gasto de la rueda.
1980 Nishi (9)	Observó que las fluctuaciones de presión dependían de la posición de la torcha en torno al eje del tubo difusor. Por otro lado, concluyó que una reducción del gasto y, al mismo tiempo de la carga, lleva consigo un aumento en la frecuencia de excitación.

Dichos resultados serán utilizados más adelante en este trabajo para determinar las condiciones de operación en las que se podría presentar el movimiento de precesión de la torcha, así como para determinar los intervalos de excitación de la torcha.

4.5.1.3. Resultados obtenidos en mediciones hechas en el laboratorio del IIUNAM y el campo

A partir de 1981 se comenzaron a realizar estudios en el Instituto de Ingeniería respecto a la torcha. Para ello se construyeron dos generadores de vórtices: el primero se conectó a distintos tubos difusores, mientras que el segundo se conectó a una instalación que simulaba un sistema hidroeléctrico.

4. ANÁLISIS DINÁMICO DE UN SISTEMA HIDROELÉCTRICO

De estos estudios se concluyó lo siguiente (18):

- La torcha emite dos o tres señales. Una vez que una de estas señales coincida con la frecuencia fundamental de la tubería se presentará el fenómeno de resonancia.
- Es necesario que, además, se presenten ciertos valores de la carga H y el gasto Q para que haya amplificación.

Adicionalmente, se realizaron mediciones en los siguientes sistemas hidroeléctricos mexicanos provistos de turbinas Francis: Angostura, Caracol, Chicoasén y Malpaso. De donde se obtuvo un parámetro r para potencias de operación entre el 20% a 50% de la potencia de diseño, el cual depende de la relación H/H_D . A continuación se muestra la relación obtenida (18):

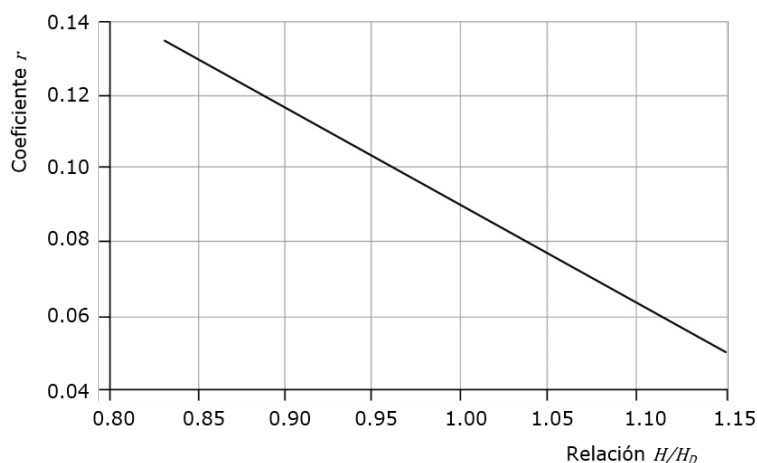


Figura 4.9: Valores del parámetro r para potencias de operación entre el 20% a 50% de la potencia de diseño.

Cuanto mayor es la carga H , menor es el valor de r ; y entre menor es el valor de r , mayores son las oscilaciones de presión. Cuando se esté trabajando bajo las condiciones de diseño o para potencias mayores que el 50%, no se presentará el movimiento de precesión de la torcha, por lo que el parámetro r será igual a uno.

Con base en los resultados obtenidos en el laboratorio y en el campo se concluyó que la matriz de transferencia del tubo difusor es de la siguiente forma (18):

$$M_{TD} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & \tilde{h} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

donde:

- M_{TD} matriz de transferencia del tubo difusor;
- r parámetro de la matriz de transferencia del tubo difusor;
- \tilde{h} excitación de la carga, en m .

4.6. Análisis dinámico del sistema

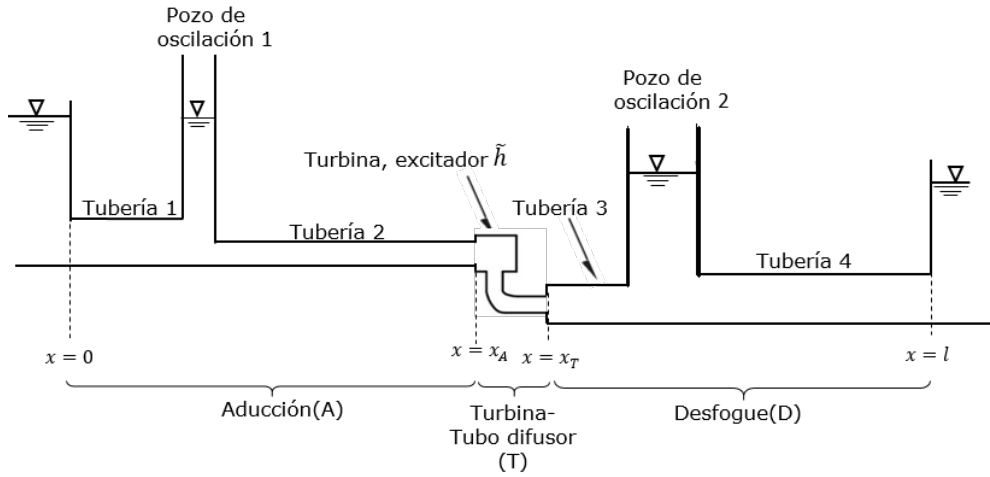


Figura 4.10: Esquema de sistema hidroeléctrico.

Considérese un sistema hidroeléctrico como el que se muestra en la figura 4.10, el cual está compuesto por la aducción (A), el conjunto turbina-tubo difusor (T), en donde se encuentran los excitadores: la turbina y el tubo difusor, y el desfogue (D). Debido al carácter modular de la matriz de transferencia, el producto de las matrices de transferencia del desfogue, del conjunto turbina-tubo difusor y de la aducción (en el orden aguas abajo a aguas arriba) dará como resultado la matriz de transferencia del sistema.

Puesto que la aducción está provista por dos tuberías y en una bifurcación (pozo de oscilación), la matriz de transferencia de la aducción \mathbb{A} será:

$$\begin{bmatrix} q(x_A) \\ h(x_A) \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} P2_{11} & P2_{12} & 0 \\ P2_{21} & P2_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Tubería 2}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & B1_{12} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Pozo de oscilación 1}} \underbrace{\begin{bmatrix} P1_{11} & P1_{12} & 0 \\ P1_{21} & P1_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Tubería 1}} \begin{bmatrix} q(0) \\ h(0) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

\mathbb{A}

Análogamente, la matriz de transferencia del conjunto turbina-tubo de desfogue \mathbb{T} tendrá la forma:

$$\begin{bmatrix} q(x_T) \\ h(x_T) \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & TD_{22} & TD_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Tubo difusor}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ TU_{21} & 1 & TU_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Turbina}} \begin{bmatrix} q(x_A) \\ h(x_A) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

Finalmente, la matriz de transferencia del desfogue \mathbb{D} es:

$$\begin{bmatrix} q(l) \\ h(l) \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} P4_{11} & P4_{12} & 0 \\ P4_{21} & P4_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Tubería 4}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & B2_{12} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Pozo de oscilación 2}} \underbrace{\begin{bmatrix} P3_{11} & P3_{12} & 0 \\ P3_{21} & P3_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Tubería 3}} \begin{bmatrix} q(x_T) \\ h(x_T) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

Así que la matriz de transferencia de todo el sistema \mathbb{S} será:

$$\begin{bmatrix} q(l) \\ h(l) \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\mathbb{D}\mathbb{T}\mathbb{A}}_{\mathbb{S}} \begin{bmatrix} q(0) \\ h(0) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

donde:

- \mathbb{A} matriz de transferencia de la aducción;
- \mathbb{T} matriz de transferencia del conjunto turbina-tubo desfogue;
- \mathbb{D} matriz de transferencia del desfogue;
- \mathbb{S} matriz de transferencia del sistema;
- $q(x)$ amplitud de la oscilación del gasto en la sección x , en m^3/s ;
- $h(x)$ amplitud de la oscilación de la carga en la sección x , en m .

4.6.1. Factor de amplificación aguas arriba del conjunto turbina-tubo de difusor

Considérese la sección x_A de la figura 4.10, la amplitud de la carga oscilante se obtiene a través de una ecuación similar a la ecuación 4.64. Sin embargo, en este caso la matriz de transferencia está determinada por las matrices de los elementos que están entre el embalse y la sección x_A que en este caso dan como resultado la matriz de transferencia de la aducción. Por lo que se tendría:

$$\begin{bmatrix} q(x_A) \\ h(x_A) \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbb{A} \begin{bmatrix} q(0) \\ h(0) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

Al multiplicar el segundo renglón de la matriz \mathbb{A} por el vector columna del lado derecho de la ecuación 4.65, resulta la siguiente ecuación:

$$h(x_A) = a_{21}q(0) \quad (4.66)$$

El valor de $q(0)$ se obtuvo de la ecuación (4.64), por lo que al sustituirlo en la ecuación 4.66 y al dividir entre la \tilde{h} se obtiene el factor de amplificación en la sección $x = x_A$:

$$FA(x_A) = \left| \frac{h(x_A)}{\tilde{h}} \right| = \frac{|a_{21}||d_{22}|}{|s_{21}|} \quad (4.67)$$

donde:

$FA(x_A)$	factor de amplificación en la sección x_A ;
a_{21}	elemento 21 de la matriz \mathbb{A} ;
d_{22}	elemento 22 de la matriz \mathbb{D} ;
s_{21}	elemento 21 de la matriz del \mathbb{S} ;
$q(0)$	amplitud de la oscilación del gasto en la sección x_0 , en m^3/s ;
$q(x_A)$	amplitud de la oscilación del gasto en la sección x_A , en m^3/s ;
$h(x_A)$	amplitud de la oscilación de la carga en la sección x_A , en m ;
\tilde{h}	excitación de la carga, en m .

Ejemplos de aplicación

El propósito de los ejemplos aquí presentados es el de obtener el factor de amplificación de la carga aguas arriba de la turbina, para así verificar que las frecuencias que ocasionan dichas amplificaciones no coincidan con las frecuencias de excitación del sistema. Dichas frecuencias corresponden a los intervalos de la torcha ($0.25\omega_R$ a $0.33\omega_R$), y al del rodete ($0.85\omega_R$ a $1.05\omega_R$). Asimismo, se calculará el factor de amplificación en función de la posición.

5.1. Central Hidroeléctrica Dr. Belisario Domínguez (La Angostura)

La Angostura se encuentra en el cauce del Río Grijalva en el municipio de Venustiano Carranza, Chiapas, México. La potencia instalada es de 900 MW (2).

En la siguiente figura se muestra un esquema simplificado de La Angostura. Las características de los elementos que la conforman se muestran en la tabla 5.1 (18).

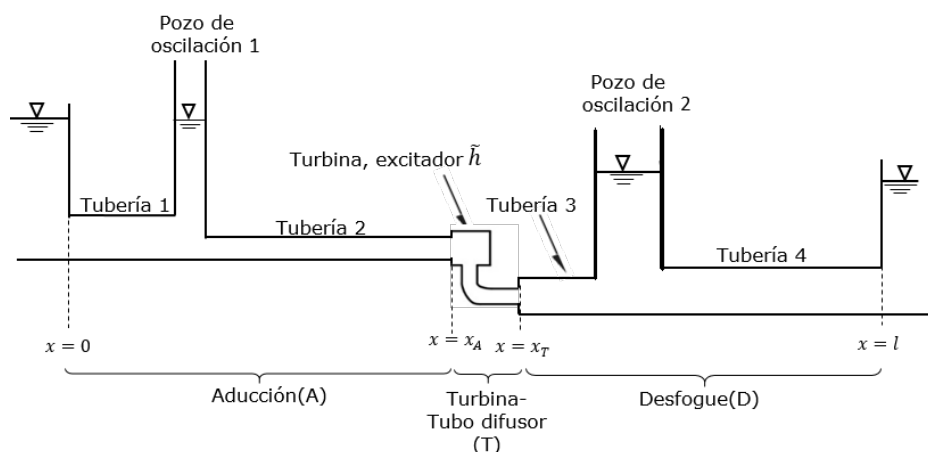


Figura 5.1: Esquema de la Central Hidroeléctrica La Angostura.

5. EJEMPLOS DE APLICACIÓN

Tabla 5.1: Características de los elementos de La Angostura.

Elemento	Longitud (<i>m</i>)	Área (<i>m</i> ²)	Celeridad (<i>m/s</i>)
Tubería 1	84.92	111.18	1278
Tubería 2	164.10	41.06	1316.4
Tubería 3	62.60	78.18	1277.6
Tubería 4	387.4	114.99	1265
Pozo de oscilación 1	59.66 ¹	18.31	1200
Pozo de oscilación 2	15 ¹	128.17	1277.6

¹ Altura de la columna de agua.

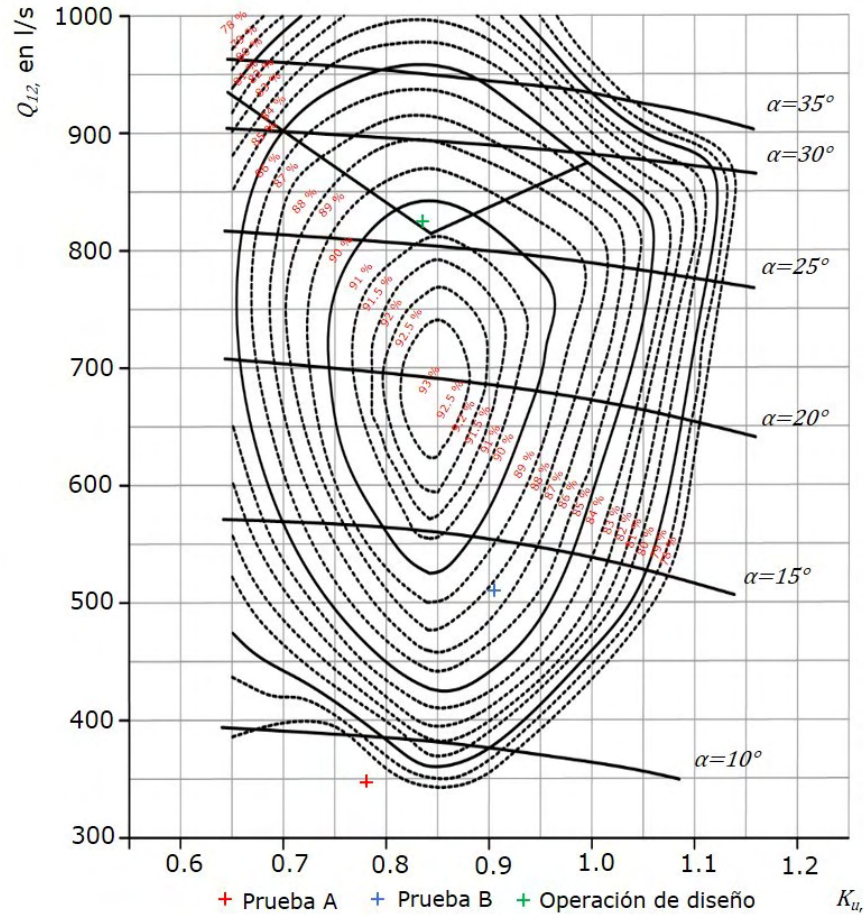


Figura 5.2: Diagrama de Colina de la C.H. La Angostura (Archivo del Instituto de Ingeniería).

Primero se seleccionaron tres condiciones de operación a partir del diagrama de colina de La Angostura figura 5.2. La primera condición fue la de diseño y las otras dos se eligieron en intervalo de potencia de operación de entre el 20% y 50% de la potencia de diseño y con Q/Q_D cercano a 0.55. Con ayuda de las ecuaciones (3.19) se obtuvo la carga y el gasto, de tal manera que las condiciones de operación son las mostradas en la tabla 5.2.

5. EJEMPLOS DE APLICACIÓN

Tabla 5.2: Condiciones de operación

Condición de trabajo	Carga (m)	Gasto (m^3/s)	Potencia (MW)
Diseño	91.5	218	184
A	104.26	98.1	80
B	77.34	124.26	80

Al sustituir la información de las tablas 5.1 y 5.2 se obtuvo la impedancia de la turbina con la ecuación (4.55b), mientras que el parámetro r se obtuvo de la gráfica 4.9 al calcular la relación entre la carga de operación y la carga de diseño. Estos resultados se muestran en la tabla 5.3. Posteriormente, se graficó el factor de amplificación aguas arriba de la turbina en función de la frecuencia, la cual tiene un incremento de 0.0001 Hz. Adicionalmente, se muestran las zonas de excitación de la torcha y del rodete, en donde se tomó en cuenta que la velocidad de giro de las turbinas Francis de la C.H La Angostura es de 2.14 Hz (18).

Tabla 5.3: Impedancia, relación Q/Q_D , H/H_D y parámetro r

Condición de trabajo	Z_T (s/m^2)	Q/Q_D	H/H_D	r
Diseño	0.838	1	1	1
A	2.126	0.45	1.14	0.053
B	1.245	0.57	0.83	0.131

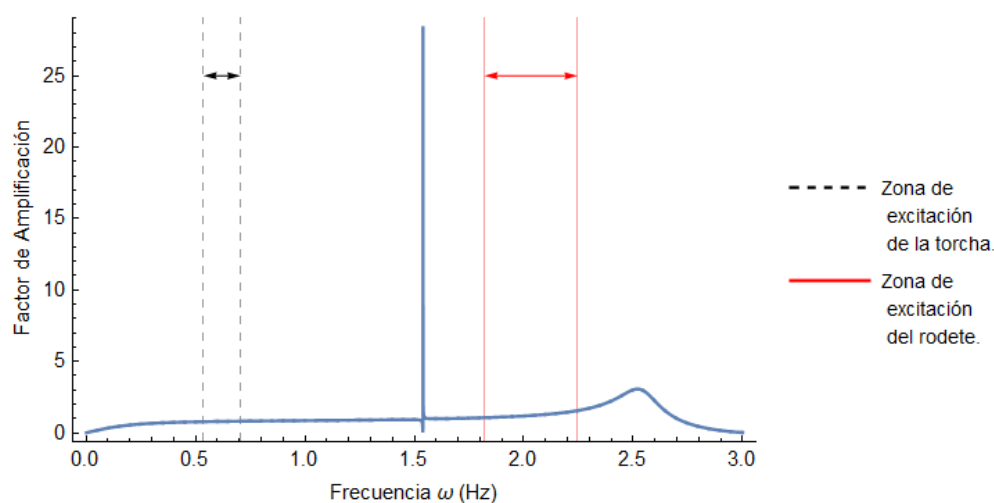


Figura 5.3: Factor de amplificación aguas arriba de la turbina, para el punto de diseño.

En la figura 5.3 se observa el factor de amplificación en función de la frecuencia para las condiciones de operación de diseño, $H = 77.34 \text{ m}$ y $Q = 124.26 \text{ m}^3/\text{s}$. Se puede observar un máximo absoluto en la frecuencia $\omega = 1.54 \text{ Hz}$ con un factor de amplificación $FA = 28.46$ y uno relativo en la frecuencia $\omega = 2.522 \text{ Hz}$ con factor de amplificación $FA = 3.07$. Sin embargo, ninguno de estas frecuencias está dentro del intervalo de excitación de la torcha, ni en el del rodete, así que no representa un peligro, como era de esperarse.

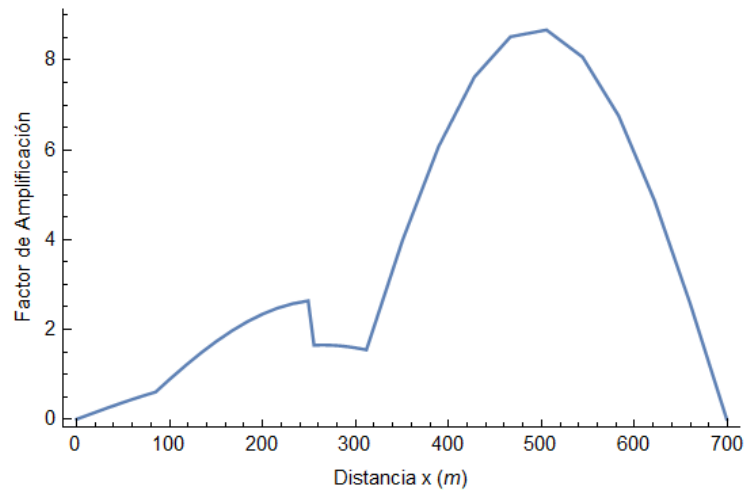


Figura 5.4: Máximos del factor de amplificación para el intervalo de frecuencias 0.001 a 3.0 Hz en función de la distancia, para el punto de diseño.

En la figura 5.4 se muestran los máximos del factor de amplificación obtenidos en el intervalo de frecuencia 0.001 a 3 Hz en función de la distancia. En estas condiciones de operación el valor máximo del factor de amplificación se presenta después de la turbina, la cual se encuentra ubicada a 249.02 m del embalse. Esto se debe a que después de la turbina se encuentra la tubería 4 que está en medio del pozo de oscilación 2 y de la salida; los últimos dos representan nodos de presión, por lo que justo a la mitad de la tubería 4 se presenta un antinodo de presión.

5. EJEMPLOS DE APLICACIÓN

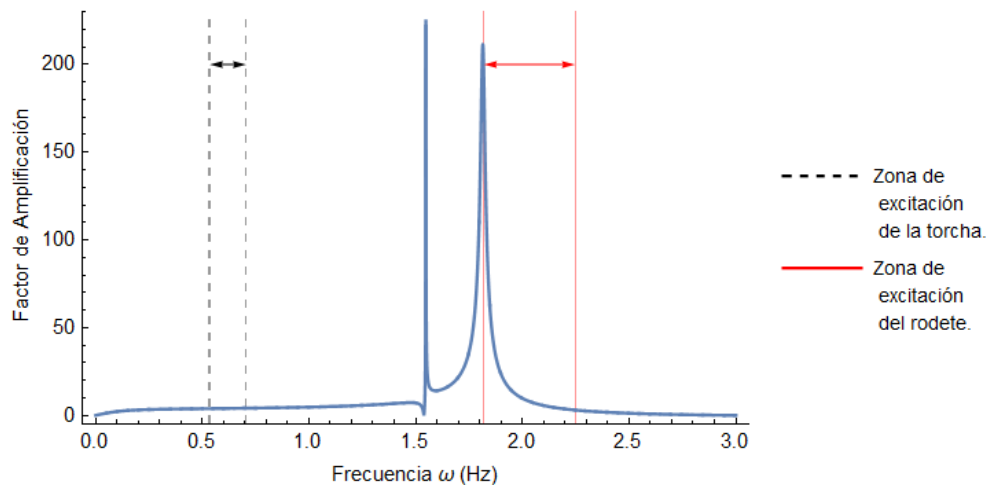


Figura 5.5: Factor de amplificación aguas arriba de la turbina, para la condición de operación A.

En el caso de la prueba A, la figura 5.5 muestra dos máximos: $\omega = 1.548$ Hz y $\omega = 1.813$ Hz con factores de amplificación de $FA = 225$ y $FA = 211.9$, respectivamente. La última frecuencia está cerca de la zona de excitación del rodete por lo que es probable que se presenten oscilaciones de carga a la entrada de la turbina, y debido al valor del factor de amplificación, las oscilaciones tendrán una amplitud considerable.

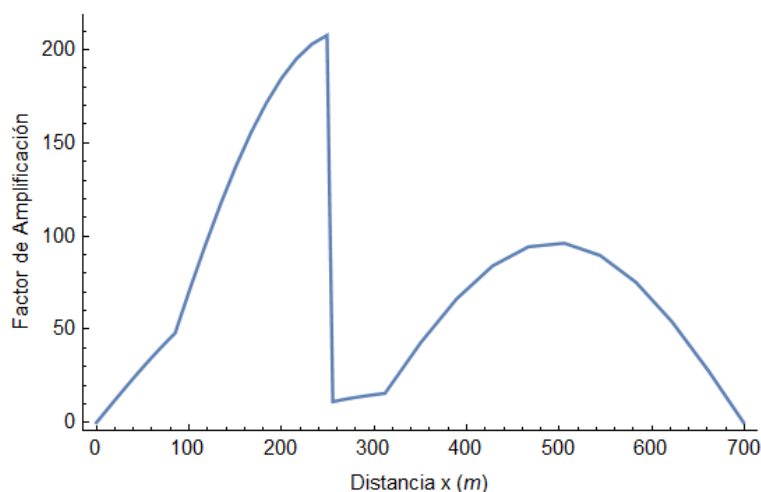


Figura 5.6: Máximos del factor de amplificación para el intervalo de frecuencias 0.001 a 3.0 Hz en función de la distancia, para la condición de operación A.

En la figura 5.6 se observa la envolvente de máximos del factor de amplificación en función de la distancia. El valor máximo se presenta a la entrada de la turbina, y debido al área del pozo de oscilación 2 que se encuentra en el desfogue (a 311.62 m del embalse), la amplitud de la oscilación disminuye drásticamente.

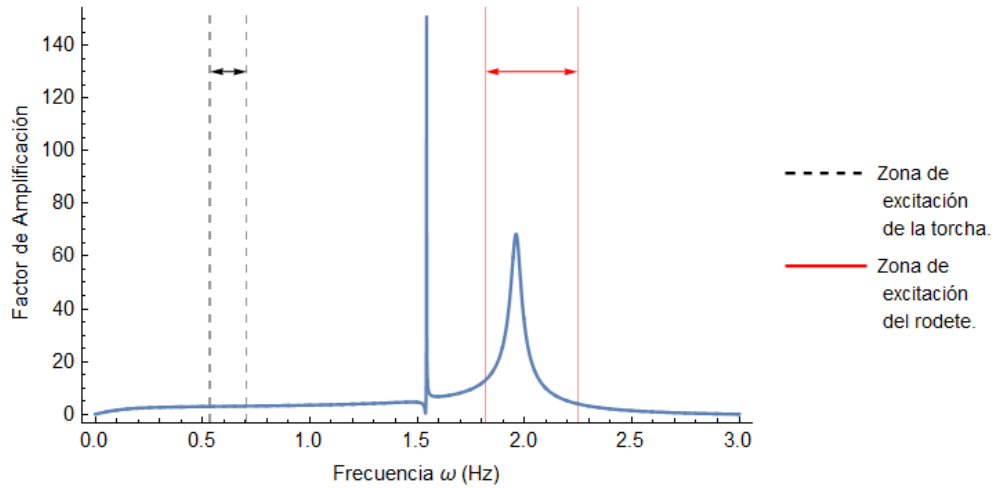


Figura 5.7: Factor de amplificación aguas arriba de la turbina, para la condición de operación B.

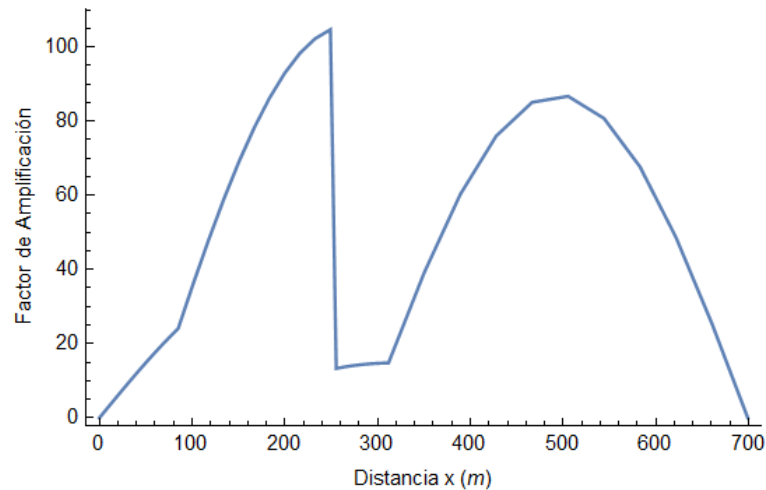


Figura 5.8: Máximos del factor de amplificación para el intervalo de frecuencias 0.001 a 3.0 Hz en función de la distancia, para la condición de operación B.

Las figuras 5.7 y 5.8 representan las condiciones de operación B. En dichas condiciones

5. EJEMPLOS DE APLICACIÓN

se presentan dos máximos: $\omega = 1.544 \text{ Hz}$ y $\omega = 1.962 \text{ Hz}$ con factores de amplificación de FA = 151.4 y FA = 68.67, respectivamente. A pesar de que el primer máximo tiene una mayor amplitud, el segundo se encuentra dentro del intervalo de excitación del rodete y, por ende, con esta frecuencia se presentarán peligrosas oscilaciones de carga aguas arriba de la turbina.

5.2. Central Hidroeléctrica Leonardo Rodríguez Alcaine (El Cajón)

El Cajón se ubica en el cauce del Río Grande de Santiago en el municipio de Santa María del Oro, Nayarit. Tiene una capacidad de generación de 750 MW.

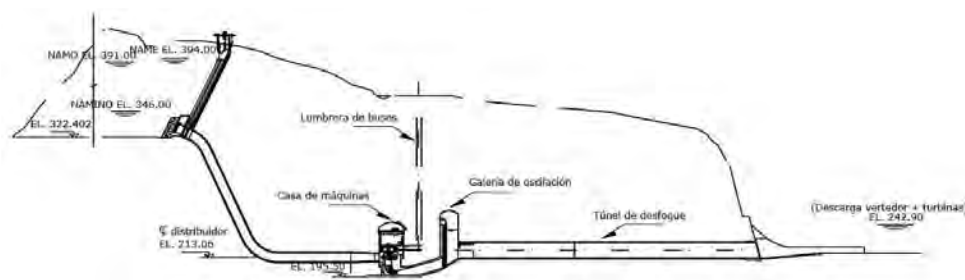


Figura 5.9: Esquema de la Central Hidroeléctrica El Cajón (Archivo del Instituto de Ingeniería).

En la figura 5.9 se muestra el esquema de la C.H el Cajón. El Cajón lo conforma: la aducción, 8 tuberías con celeridad de 1481.35 m/s ; el conjunto turbina-tubo de desfogue, dos turbinas Francis con velocidad de giro de 2.5 Hz ; y el desfogue, 2 tuberías con celeridad de 1481.35 m/s y un pozo de oscilación.

La información de los elementos del desfogue se muestra en la tabla 5.4:

Tabla 5.4: Información sobre los elementos del desfogue

Elemento	Geometría	Longitud (m)	Área (m^2)
Pozo de oscilación	Circular	66.6 ¹	201.06
Tubería 6	Portal	310.33	174.855

¹ Altura de la columna de agua.

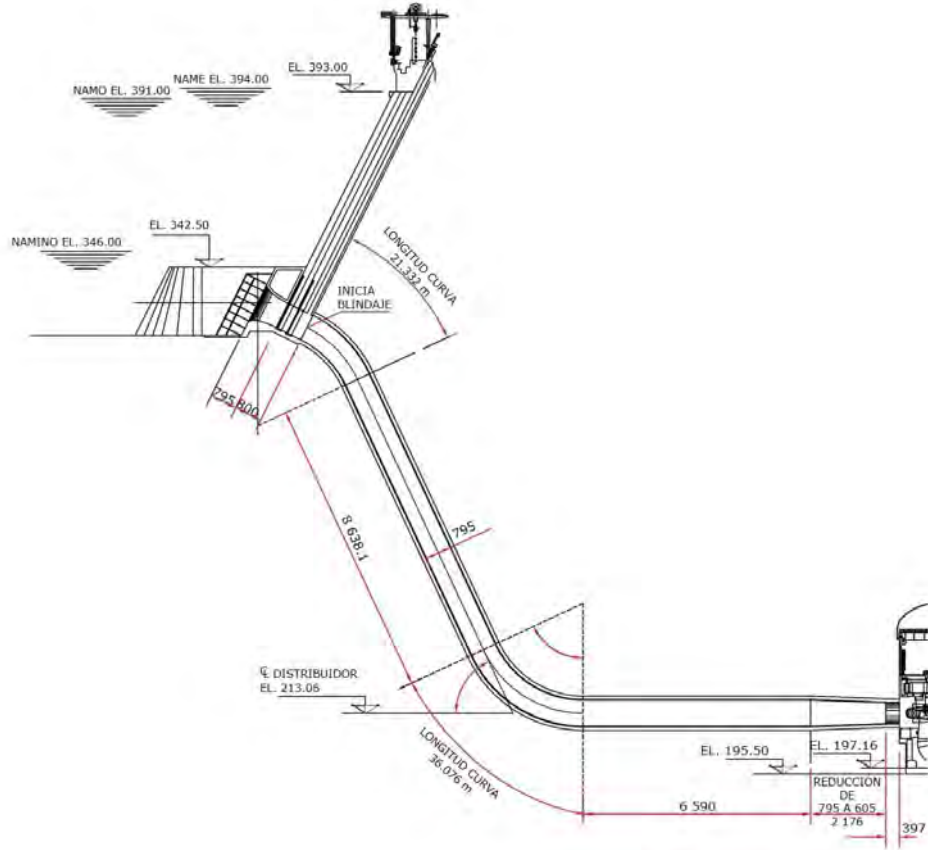


Figura 5.10: Características geométricas de la aducción de la C. H. Cajón (Archivo del Instituto de Ingeniería).

Ahora bien, como se observa en la figura 5.10, la aducción está compuesta por 8 secciones que varían en diámetro y geometría a lo largo de una longitud de 21.76 m. A fin de agrupar las secciones en función al diámetro se calcula el *diámetro equivalente* de las secciones no circulares y de las reducciones. Para ello se considera que la velocidad equivalente del agua debe ser igual al promedio de las velocidades a la entrada y salida de las secciones, y finalmente se incorpora la ecuación de continuidad (2.2) para obtener el diámetro equivalente (5.1b)(11).

$$V_{eq} = \frac{V_e + V_s}{2} \quad (5.1a)$$

$$D_{eq} = D_e D_s \sqrt{\frac{2}{D_e^2 + D_s^2}} \quad (5.1b)$$

5. EJEMPLOS DE APLICACIÓN

donde:

- V_{eq} velocidad equivalente, en m/s ;
- D_{eq} diámetro equivalente, en m ;
- V_e velocidad a la entrada de la sección, en m/s ;
- V_s velocidad a la salida en de la sección, en m/s ;
- D_e diámetro a la entrada de la sección, en m ;
- D_s diámetro a la salida en de la sección, en m .

En la tabla 5.5 se presentan las características geométricas de los distintos tramos de la aducción, mientras que en la tabla 5.6 se muestran dichas secciones agrupadas en función del diámetro. La información de ambas tablas fue obtenida de la referencia (11).

Tabla 5.5: Características geométricas de las secciones de la Aducción.

Tuberías	Geometría	Diámetro (m)
1	Rectangular	6.994 ¹
2	Rectangular	6.994 ¹
3	Circular	7.95
4	Circular	7.95
5	Circular	7.95
6	Circular	7.95
7	Circular	6.809 ¹
8	Circular	6.05

¹ Diámetro equivalente.

Tabla 5.6: Secciones de la aducción agrupadas en función de su diámetro.

Tuberías	Diámetro (m)	Longitud (m)	Celeridad (m/s)
1	6.994 ¹	15.95	1481.35
2	7.95	209.698	1481.35
3	6.809 ¹	21.76	1481.35
4	6.05	3.97	1481.35

¹ Diámetro equivalente.

5.2 Central Hidroeléctrica Leonardo Rodríguez Alcaine (El Cajón)

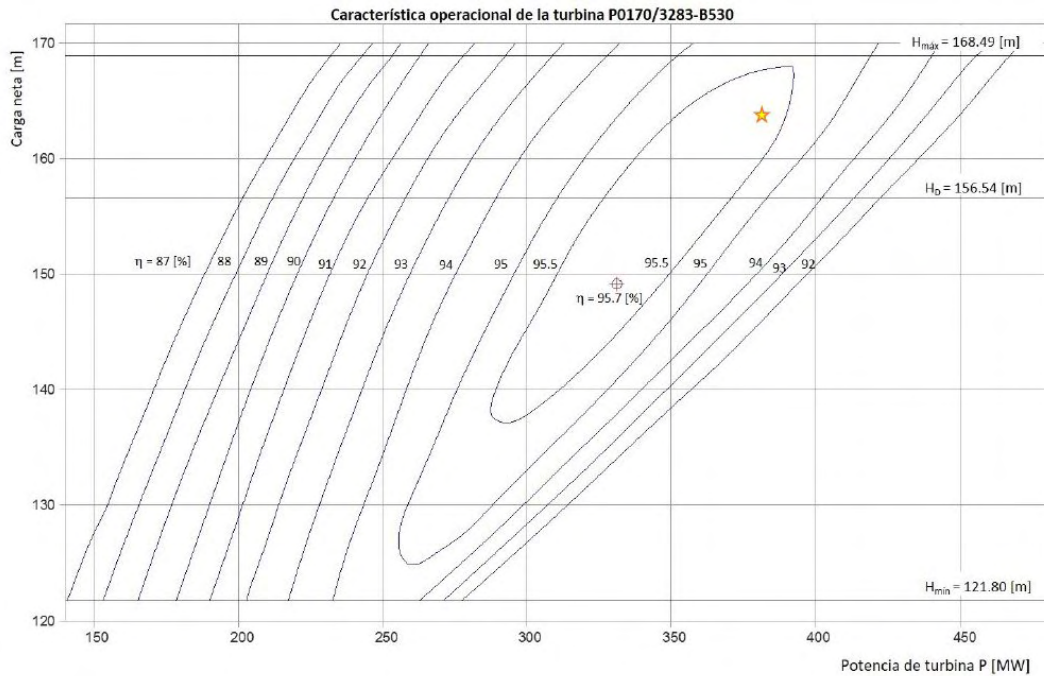


Figura 5.11: Diagrama de Colina de la C.H. El Cajón (Archivo del Instituto de Ingeniería).

Al igual que en el caso de la Angostura, se seleccionaron tres condiciones de operación utilizando el diagrama de colina del Cajón 5.11, las cuales se muestran en la tabla 5.7. Para obtener el gasto se empleó la ecuación (5.2) la cual se obtuvo de la ecuación (3.2), en donde se tomó en cuenta que la eficiencia del generador es de 98 %.

$$P = \eta_t \eta_g \gamma Q H \quad (5.2)$$

5. EJEMPLOS DE APLICACIÓN

donde:

- P potencia generada, en W ;
- H carga neta, en m ;
- γ peso específico del agua, en N/m^3 ;
- η_t eficiencia de la turbina, adimensional;
- η_g eficiencia del generador, adimensional.

Tabla 5.7: Condiciones de operación

Condición de trabajo	Carga (m)	Gasto (m^3/s)	Potencia (MW)
Diseño	156.54	259.7	373.31
A	130	138.1	155
B	140	141.3	169

Por otra parte, se sustituyeron los datos de las tablas 5.4 y 5.6 para obtener la impedancia de la turbina y el parámetro r . Los resultados se presentan en la tabla 5.8. Asimismo, se graficó el factor de ampliación aguas arriba de la turbina en función de la frecuencia con un incremento de $0.0001 Hz$

Tabla 5.8: Impedancia, relación Q/Q_D , H/H_D y parámetro r

Condición de trabajo	Z_T (s/m^2)	Q/Q_D	H/H_D	r
Diseño	1.206	1	1	1
A	1.883	0.52	0.83	0.137
B	1.982	0.55	0.88	0.122

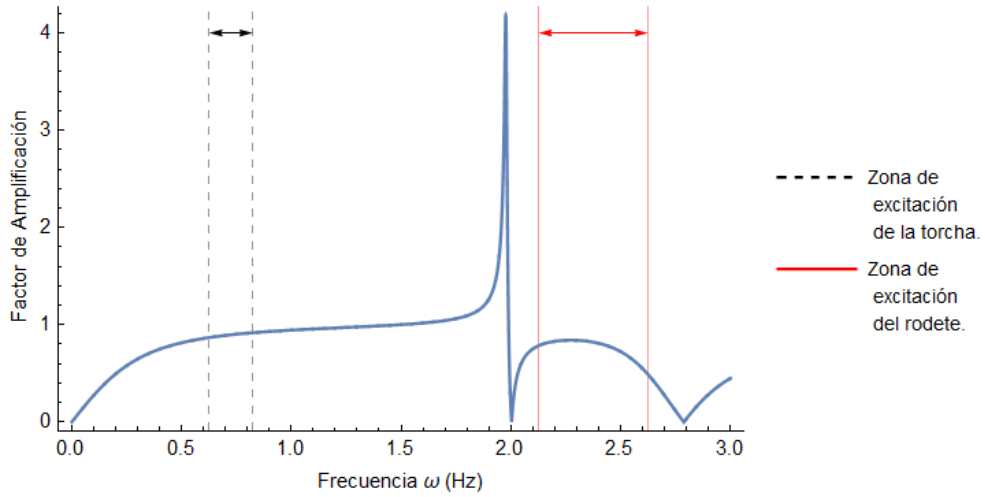


Figura 5.12: Factor de amplificación aguas arriba de la turbina, para el punto de diseño.

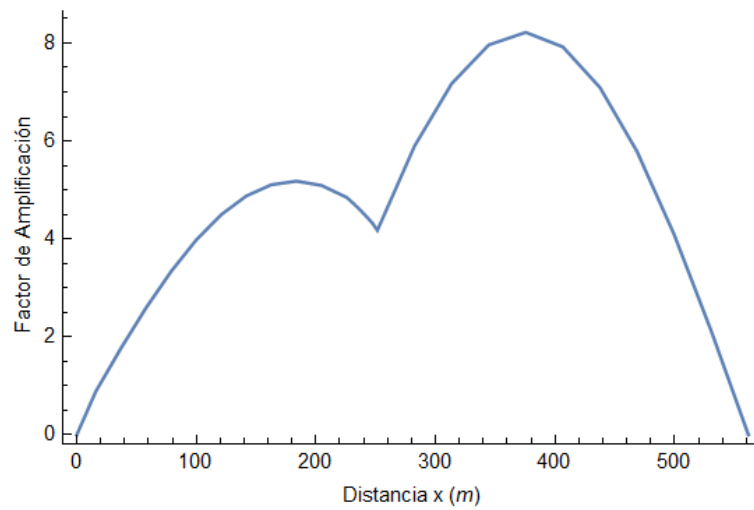


Figura 5.13: Máximos del factor de amplificación para el intervalo de frecuencias 0.001 a 3.0 Hz en función de la distancia, para el punto de diseño.

Las figuras 5.12 y 5.13 representan las condiciones de operación en el punto de diseño. En la frecuencia $\omega = 1.977 \text{ Hz}$ se presenta un máximo con un factor de amplificación de $FA = 4.208$. El valor de esta amplificación es prácticamente despreciable, ya que como es de esperarse, en el punto de diseño no se presentan oscilaciones de carga.

5. EJEMPLOS DE APLICACIÓN

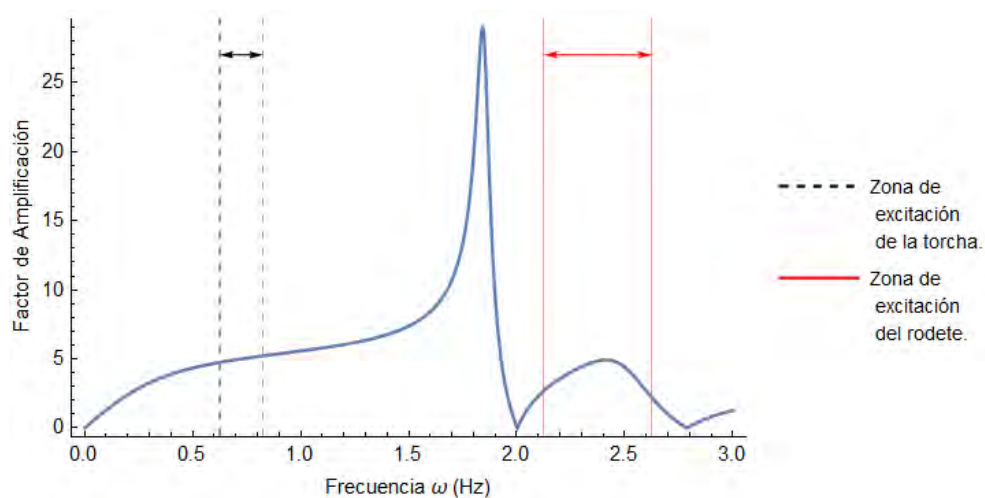


Figura 5.14: Factor de amplificación aguas arriba de la turbina, para la condición de operación A.

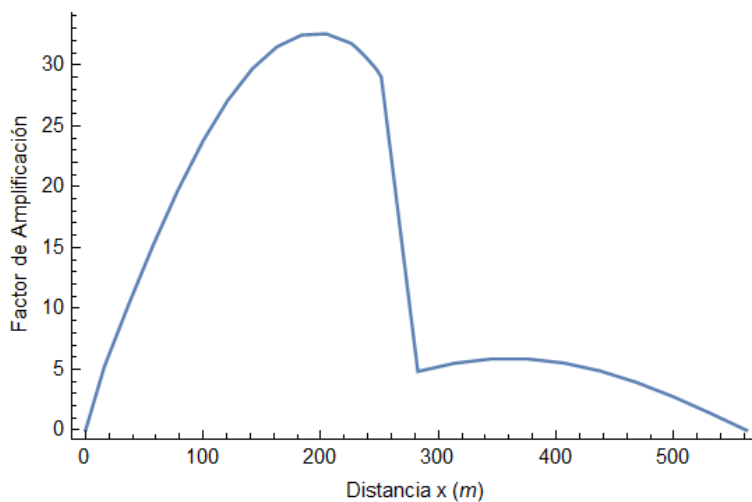


Figura 5.15: Máximos del factor de amplificación para el intervalo de frecuencias 0.001 a 3.0 Hz en función de la distancia, para la condición de operación A.

En el caso de la condición A, figura 5.14, se presentan un máximos en $\omega = 1.838$ Hz con el factor de amplificación de $FA = 29.11$, éste no se encuentra dentro de ningún intervalo de excitación. La figura 5.15 indica que el valor máximo de la amplificación ocurre a la entrada de la turbina (a 251.38 m).

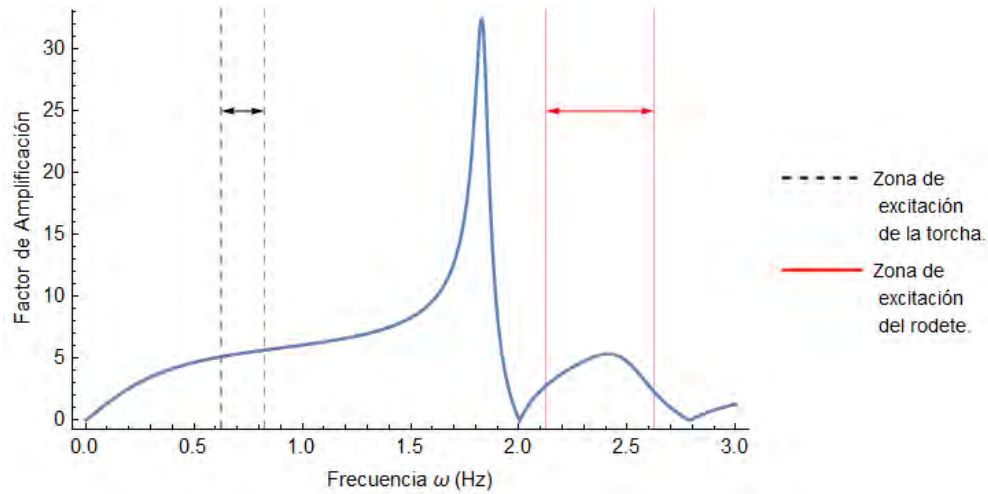


Figura 5.16: Factor de amplificación aguas arriba de la turbina, para la condición de operación B.

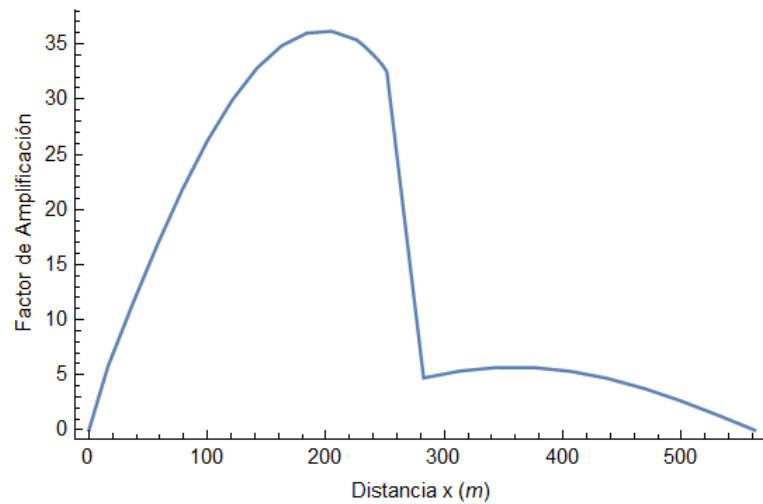


Figura 5.17: Máximos del factor de amplificación para el intervalo de frecuencias 0.001 a 3.0 Hz en función de la distancia, para la condición de operación B.

Las figuras 5.16 y 5.17 muestran la variación del factor de amplificación en función de la frecuencia y la distancia, respectivamente, para la condición de trabajo B. En la primer gráfica se observa un máximo en $\omega = 1.826$ Hz con $FA = 32.69$. Dicha frecuencia está fuera de los intervalos de excitación, por lo que no representa un peligro.

Conclusiones

En este trabajado se ha presentado el método de las matrices de transferencia y su aplicación a dos ejemplos específicos La Angostura y El Cajón. De este trabajo se obtuvieron las siguientes conclusiones:

1. Al aplicar el método de las matrices de transferencia a La Angostura resultó que se presentaban oscilaciones en la carga cuando se trabajaba con valores de la relación Q/Q_D (Gasto de operación entre gasto de diseño) cercanos a 0.55. Dichas oscilaciones ocurrían en frecuencias del orden de $0.8\omega_R$ a $1.05\omega_R$, siendo ω_R la velocidad de rotación de la turbina. Estos resultados concuerdan con la literatura y con datos obtenidos experimentalmente (18).
2. En el caso de El Cajón las frecuencias que provocaban una amplificación de la carga no coincidían con las frecuencias de excitación del sistema. Además, la magnitud del factor de amplificación, en las tres condiciones de operación, era considerablemente menor al de La Angostura. Así que de lo anterior se concluye que difícilmente El Cajón entrará en resonancia.
3. El método de las matrices de transferencia es un método simple y brinda resultados aceptables como una primera aproximación. A pesar de ello, es necesario seguir implementándolo. Esto se podría realizar al incluir el efecto de la fricción, ya que esto provocaría que hubiese un desplazamiento de las frecuencias obtenidas, así que estas nuevas frecuencias podrían coincidir con las frecuencias de excitación del sistema; o bien, alejarse de estas últimas. Por otra parte, se podría mejorar el modelo de la turbina y profundizar un poco más en el estudio de los excitadores del sistema.

Bibliografía

- [1] Chaudhry, M. H. (2014). *Applied Hydraulic Transientes*. New York: Springer. 3, 12, 13, 27, 28
- [2] Comisión Federal de Electricidad (Octubre de 2010). *Hidroeléctricas*. Recuperado de <https://web.archive.org/web/20110301091554/http://www.cfe.gob.mx/QuienesSomos/estadisticas/listadocentralesgeneradoras/Paginas/listadohidroelectricas.aspx>. 53
- [3] Deriaz, P. (1960). A contribution to the understanding of flow in draft tubes of francis turbines. Conferencia llevada a cabo en Hydraulic Machinery Equipment Symposium por la International Association for Hydraulic Research section for Hydraulic Machinery Equipment and Cavitation, Francia. 47
- [4] Gardea, H. (1992). *Aprovechamientos Hidroeléctricos y de Bombeo*. México: Trillas. 19, 20, 21, 22, 23, 25
- [5] Guarga, R. (1982). *Resonancia en sistemas de conductos a presión*. México: CFE. 12, 14, 43
- [6] Hosoi, Y. (1978). Contributions to model tests of draft tube surges of francis turbines. Conferencia llevada a cabo en Joint Symposium on Design and Operation of Fluid Machinery, Colorado, Estados Unidos. 47
- [7] Kubota, T. (1972). Cavitation characteristics of forced vortex core in the flow of the francis turbine. *Fuji Electric*, 18(3). 47
- [8] Mollenkopf, G. y Raabe, J. (1970). Measurements of fluctuations of velocity and pressure in the draft tube of a francis turbine. Conferencia llevada a cabo en Hydraulic Machinery Equipment Symposium por la International Association for Hydraulic Research section for Hydraulic Machinery Equipment and Cavitation, Estocolmo, Suecia. 47
- [9] Nishi, M. (1980). Study on swirl flow and surge in an elbow type draft tube. Conferencia llevada a cabo en Hydraulic Machinery Equipment Symposium por la International Association for Hydraulic Research section for Hydraulic Machinery Equipment and Cavitation, Tokio, Japón. 47

BIBLIOGRAFÍA

- [10] Popescu, M., Arsenie, D. y Vlase, P. (2003). *Applied Hydraulic Transients: For Hydropower Plants and Pumping Stations*. Rumania: CRC Press. [1](#)
- [11] Ramírez, I. H. (2017). *Método del orificio dinámico como alternativa para calcular la sobrepresión y sobrevelocidad en sistemas hidroeléctricos durante la etapa de factibilidad. Caso de estudio C.H. El Cajón*. (Tesina de especialidad). UNAM, México. [61](#), [62](#)
- [12] Rheingans, W. (1940). Power swings in hydroelectric power plants. *ASME*, 62(174). [47](#)
- [13] Siervo, F. y Leva, F. (1977). Linear mathematical models of hydraulic turbines for frequency regulation studies. *L'Energia Elettrica*, 54(2). [43](#)
- [14] Sotelo, G. (1997). *Hidráulica General*. México: Limusa. [3](#), [9](#), [10](#)
- [15] Sánchez, J. L. (1981). *Aspectos hidrodinámicos de plantas hidroeléctricas*. México: CFE. [17](#), [18](#)
- [16] Sánchez, J. L., Carmona, R. B., Carmona, L. G. y Moreno, L. (1985). Fascículo III: Transitorio hidráulicos en conducciones de agua a presión. *Diseño y operación hidráulicos de agua a presión*. [4](#), [5](#), [6](#), [8](#), [11](#)
- [17] Sánchez, J. L., Carmona, R. B. y Carmona, L. G. (1987). *Consideraciones sobre la Posibilidad de Resonancia en Sistemas Hidroeléctricos que Operan con Turbinas Francis*. México: CFE. [2](#), [43](#)
- [18] Sánchez, J. L., Carmona, R. B. y Carmona, L. G. (1988). *Análisis de la Posibilidad de Resonancia en Sistemas Hidroeléctricos que Operan con Turbinas Francis*. México: CFE. [15](#), [16](#), [40](#), [44](#), [48](#), [53](#), [56](#), [69](#)
- [19] Wylie, E. B., Streeter, V. L., and Suo, L. (1993). *Fluid Transients in Systems*. New Jersey: Prentice Hall. [28](#)