



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

PANALES QUIRALES

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:
BRISEIDA GUADALUPE TREJO ESCAMILLA

DIRECTOR DE LA TESIS:
DRA. ISABEL A. HUBARD ESCALERA
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

CIUDAD DE MÉXICO, NOVIEMBRE 2018



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Este trabajo no sería posible sin el apoyo de mi directora de tesis, la Dra. Isabel A. Hubard Escalera, a quien agradezco por su tiempo, motivación, dedicación y sobre todo su paciencia para guiarme durante todo el desarrollo de este trabajo.

Quiero agradecer a mis sinodales: Isabel Hubard, Javier Bracho, Vinicio Gómez, Rafael Villarroel y Eugenia O'Reilly, por leer cuidadosamente este trabajo, así como por sus observaciones y comentarios. A los profesores investigadores del Posgrado en Ciencias Matemáticas de la UNAM por compartir sus conocimientos y contribuir a mi formación académica, en especial a mis maestros del área de Matemáticas Discretas.

Quiero agradecer también a CONACYT y PAPIIT por el apoyo brindado para la realización de mis estudios de maestría.

Agradezco a mi familia por su amor, cariño y apoyo constante. A mis amigos y compañeros con los cuales conviví y juntos aprendimos.

Índice general

Índice general	5
1 Panales y politopos abstractos	9
1.1 Definiciones	9
1.2 Homomorfismos y anti-homomorfismos	20
1.3 Simetrías de politopos	20
1.4 Politopos regulares	23
1.5 Grupo de rotaciones	29
1.6 Politopos quirales	31
2 Panales regulares de rango cuatro	39
2.1 Panales regulares de tipo $\{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}\}$	39
2.2 Polígonos de Petrie y torsiones derechas	45
3 Panales de tipo $\{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}\}_t$	57
3.1 Construcción de panales de tipo $\{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}\}_t$	57
3.2 Panales regulares de tipo $\{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}\}_t$	67
3.3 Panales quirales de tipo $\{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}\}_t$	68
3.3.1 Panal $\{\mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{3}\}_2$	71
3.3.2 Panal $\{\mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{3}\}_3$	71
3.3.3 Panal $\{\mathbf{5}, \mathbf{3}, \mathbf{3}\}_3$	78
Conclusiones	83
A GAP	85
A.1 Panales esféricos regulares de tipo $\{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}\}$	85
A.2 Panales regulares tipo $\{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}\}_t$	88
A.3 Panales quirales de tipo $\{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}\}_t$	90
Bibliografía	93

Introducción

Este trabajo está basado en [6], el objetivo principal es construir panales de rango cuatro, los cuales obtenemos de identificar aristas a distancia t a lo largo de polígonos de Petrie derechos de panales esféricos regulares de rango cuatro. De los panales que resultan algunos son regulares y otros quirales. En un panal regular todas sus simetrías son generadas por ciertas reflexiones (generadores distinguidos). Por otro lado, los panales quirales tienen como simetrías a todas las rotaciones, pero no hay reflexiones, en este trabajo estamos interesados en estos panales quirales.

Antes del estudio de estos panales quirales, en 1927 Brahana inicia el estudio formal de mapas regulares y quirales en [2]. En 1948 se conocían mapas quirales (o poliedros quirales), pues Coxeter en [5] enumera todos los mapas regulares y quirales en el toro. Y en 1980, Coxeter y Moser describen tres familias infinitas de mapas quirales en el toro con símbolos de Schläfli $\{3, 6\}$, $\{6, 3\}$ y $\{4, 4\}$ (ver [8]). Los panales quirales $\{p, q, r\}_t$ que describimos en este trabajo son los primeros ejemplos de rango más grande. Esto dió pie a definir en 1990 politopos (abstractos) quirales (ver [19]). Después de los panales construidos por Coxeter, los primeros ejemplos de estos objetos de rango 4 aparecen en 1994, cuando Schulte y Weiss construyeron ejemplos de panales hiperbólicos en [20] usando la correspondencia entre isometrías del 3-espacio hiperbólico y transformaciones complejas de Möbius. Un año más tarde, en [21], Schulte y Weiss construyen $(n + 1)$ -politopos quirales infinitos empezando con n -politopo quiral finito, pidiendo que sus $(n - 1)$ -caras sean regulares, con lo cual se prueba la existencia de politopos quirales infinitos de rango 5. En 2006, Conder, Hubard y Pisanski construyeron los primeros ejemplos de politopos quirales finitos de rango 5 (ver [4]). Esto lo hicieron usando MAGMA y buscando subgrupos G de grupos de Coxeter W de manera que G que no fuera normal en W , pero que sí fuera normal en el subgrupo de rotaciones W^+ . De esta forma el cociente de W^+ por G puede ser el grupo de automorfismos de un politopo quiral si satisface ciertas propiedades de intersección (que se detallan en el capítulo 2 de [4]). Para 2009, Conder y Devillers usan algoritmos más eficientes y obtienen ejemplos de rango 6, 7 y 8. En 2010, Pellicer construye $(n + 1)$ -politopos quirales con facetas isomorfas a algún politopo regular usando gráficas GPR las cuales representan toda la información del subgrupo de rotaciones de politopos quirales (orientables). Con lo cual se realiza una prueba constructiva de la existencia de n -politopos quirales para cualquier $n \geq 3$ (ver [17]).

Como podemos ver, el trabajo de Coxeter en [6], da origen al estudio de politopos quirales, otros trabajos sobre estos politopos son: [1], [3], [9], [14], [17], [18], [20].

Todos los politopos quirales mencionados anteriormente son abstractos. Pensando geoméricamente, en 2004, McMullen creyó haber demostrado que no existen n -politopos quirales en \mathbb{R}^n (ver [15]), pero en 2014, Bracho, Hubbard y Pellicer encontraron un ejemplo de un 4-politopo quiral en \mathbb{R}^4 (ver [1]), el cual veremos que se puede obtener a partir de uno de los panales quirales construidos por Coxeter. Este trabajo recapitula el trabajo de Coxeter en [6] y motiva a buscar más 4-politopos quirales en \mathbb{R}^4 .

En el capítulo 1, se introducen los conceptos básicos para el desarrollo de esta tesis. Se define panal y como todo panal esférico, euclidiano o hiperbólico es un politopo, se enuncian resultados de politopos, siendo uno de los conceptos fundamentales el de grupo de automorfismos y rotaciones de un politopo regular. Y se definen politopos quirales.

En el capítulo 2, describimos los panales a partir de los cuales vamos a trabajar, estos son los panales regulares de rango cuatro en el espacio euclidiano y esférico. También, notamos la relación que tienen los polígonos de Petrie de los panales regulares descritos y ciertos elementos sus grupos de automorfismos llamados torsiones.

En el capítulo 3, construimos nuevos panales a partir de los descritos en el capítulo 2, llamados panales de tipo $\{p, q, r\}_t$, los cuales son el tema principal de esta tesis. Se ejemplifica con el panal $\{4, 3, 3\}_2$. Luego se clasifican los panales $\{p, q, r\}_t$ en regulares y quirales. Por último se describen a los panales $\{3, 4, 3\}_2$, $\{3, 4, 3\}_3$ y $\{5, 3, 3\}_3$.

En las conclusiones, relacionamos el panal $\{4, 3, 3\}_2$ con el único ejemplo conocido de un 4-politopo quiral en \mathbb{R}^4 encontrado por Bracho, Hubbard y Pellicer en [1].

Por último, en el apéndice A se incluyen cálculos de los panales descritos a lo largo de este trabajo, para lo cual se utilizó GAP (ver [11]).

Capítulo 1

Panales y politopos abstractos

El objetivo de este capítulo es introducir el concepto de panel. Además, como todo panel es un politopo, enunciaremos algunas propiedades y resultados de politopos.

En la sección 1.1, definiremos panel y politopo abstracto. Al hablar de politopo abstracto tenemos que definir j -cara, bandera, sección, condición diamante, conexidad fuerte. Ilustramos estos conceptos con varios ejemplos. Un concepto importante que usaremos los próximos capítulos es el de polígono de Petrie. En la sección 1.2, definiremos isomorfismo y anti-isomorfismo de politopos. La definición principal de la sección 1.3, es la de automorfismo de un politopo, enunciaremos resultados con respecto a cómo actúan los automorfismos en el conjunto de todas las banderas y cómo son los grupos de automorfismos en politopos duales. En la sección 1.4, definiremos politopo regular y generadores distinguidos respecto a una bandera base, los cuales existen si el politopo es regular y viceversa. Además, los automorfismos de una sección de un politopo regular se pueden expresar mediante los generadores distinguidos y cumplen ciertas relaciones. En la sección 1.5, definiremos el grupo de rotaciones de un politopo regular, también describiremos los generadores del estabilizador de una i -cara bajo el grupo de rotaciones de \mathcal{P} . Por último, en la sección 1.6, definiremos politopo quiral.

1.1 Definiciones

El *casco convexo* de un conjunto S , es el conjunto convexo más pequeño que contiene a S . Un n -*politopo convexo* es el casco convexo de un conjunto finito de puntos que están en un espacio de dimensión n . Construiremos panales con estas piezas.

Por ejemplo, el decágono de la figura 1.1 (izq.) se muestra un 2-politopo convexo, mientras que el decágono con forma de estrella de la figura 1.1 (der.) no es convexo. En la figura 1.2, se muestra un cuboctaedro, el cual es un 3-politopo convexo cuyas caras son cuadrados y triángulos. Los sólidos platónicos ilustrados en la figura 1.3 también son 3-politopos convexos.

Definimos a un *hiperplano* como:

$$H(u, \alpha) := \{x \in \mathbb{E}^n \mid \langle x, u \rangle = \alpha\}.$$

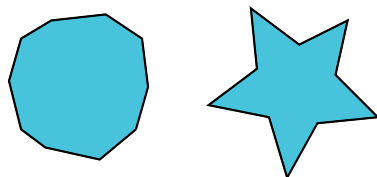


Figura 1.1: 2-politopo convexo (izq.) y 2-politopo no convexo (der.)

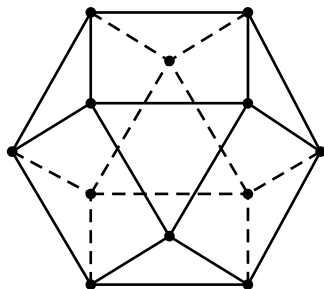


Figura 1.2: Cuboctaedro

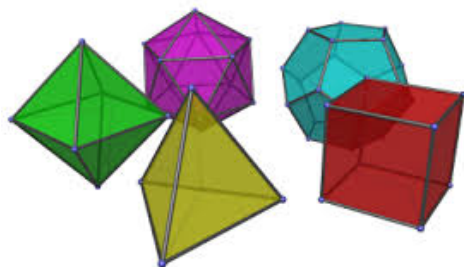


Figura 1.3: Sólidos platónicos

Sea K un conjunto convexo. El hiperplano tiene *soporte* K , si

$$\alpha = \sup\{\langle x, u \rangle \mid x \in K\},$$

donde es un u un vector normal.

Si K es un n -politopo, decimos que la intersección de K y el hiperplano con soporte K es una *cara* de K .

Una *teselación* de rango $n + 1$ es una colección \mathcal{T} de n -politopos convexos, llamados celdas, las cuales cubren un espacio (esférico, euclidiano, hiperbólico), tales que, la intersección de cualesquiera dos celdas distintas es una cara o vacío; por lo que celdas distintas tienen interiores disjuntos.

En [16], McMullen y Schulte definen un panel simplemente como una teselación. Sin embargo, en [6], Coxeter define un panel como una subdivisión de una 3-variedad en celdas poliédricas, todas iguales, de manera que cualquier simetría de rotación de una celda es simetría de la configuración completa. Aunque casi todos los paneles que se consideran en este trabajo satisfacen la definición de Coxeter, optamos por trabajar con la versión de McMullen y Schulte, que es más general.

Por ejemplo, en la figura 1.4 (izq.), se muestra un panel donde sus celdas son cuadrados que cubren el plano euclidiano. Sin embargo los cuadrados colocados como en la figura 1.4 (der.) no son una teselación del plano euclidiano pues algunas aristas se intersectan con dos aristas distintas. Por otro lado, la figura 1.5 cubre al plano euclidiano con hexágonos, parecido a un panel de abejas. Para otros autores (ver [10], [12]), una teselación del plano es una familia de conjuntos llamados celdas o tejas que cubren el plano sin espacios o superposiciones, por ejemplo la figura 1.4 (der.) es una teselación.

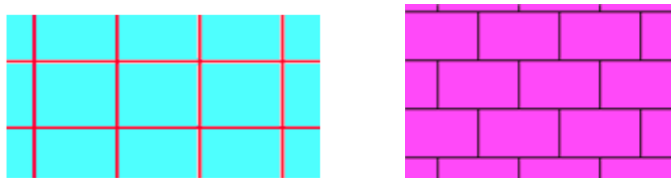


Figura 1.4: Teselación de \mathbb{E}^2 (izq.). No es una teselación (der.)

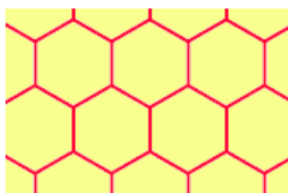
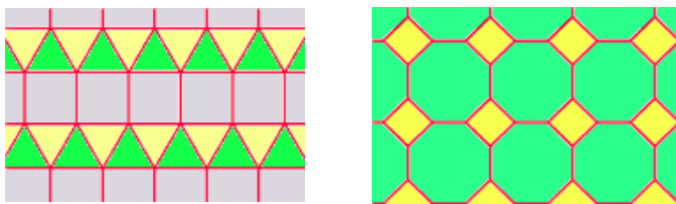
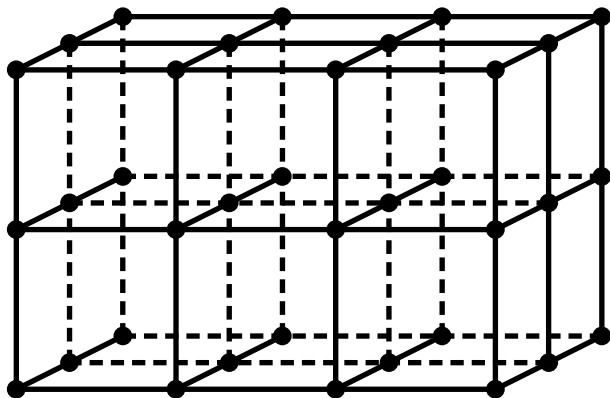
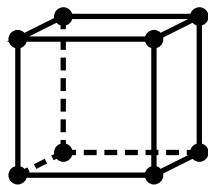
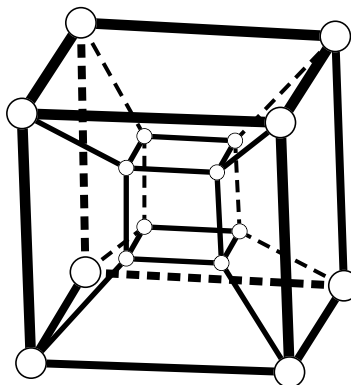


Figura 1.5: Teselación por hexagonos de \mathbb{E}^2

Otras teselaciones de \mathbb{E}^2 se muestran en la figura 1.6, donde las celdas en la figura de la izquierda son triángulos y cuadrados, y las celdas en la figura de la derecha son cuadrados y octágonos.

Figura 1.6: Tesselaciones de \mathbb{E}^2

El espacio euclidiano de dimensión tres se puede cubrir mediante cubos, como se ilustra en la figura 1.7. Por otra parte, el cubo se puede pensar como un panel en S^2 , es decir, cubre a la esfera con cuadrados, como se muestra en la figura 1.8. Otro ejemplo, es el hipercubo, al que consideramos como un panel en S^3 , donde sus celdas son cubos, la figura 1.9 muestra un hipercubo.

Figura 1.7: Tesselación por cubos de \mathbb{E}^3 Figura 1.8: Tesselación por cuadrados de S^2 Figura 1.9: Tesselación por cubos de S^3

Podemos pensar que los elementos de los panales están ordenados por contención. Por ejemplo, en la figura 1.10, el vértice v pertenece a la arista e y a su vez e pertenece a la cara f , es decir, $v \subset e \subset f$. El concepto de politopo abstracto que a continuación definimos, ordena a elementos mediante un conjunto parcialmente ordenado.

Un *politopo abstracto* de rango n o n -*politopo* es un conjunto parcialmente ordenado \mathcal{P} junto con una función de rango (la cual se define como $\text{rango} : \mathcal{P} \rightarrow \{-1, 0, \dots, n\}$ tal que si $F, G \in \mathcal{P}$, con $F < G$ entonces $\text{rango}(F) < \text{rango}(G)$) que satisface las propiedades A), B), C), D) que mencionamos abajo. Al enunciar estas propiedades, definiremos otros conceptos.

Los elementos de rango j de \mathcal{P} se llaman j -*caras*. Las caras de rango 0, 1 y $n - 1$ se llaman *vértices*, *aristas* y *facetas*, respectivamente.

A) \mathcal{P} tiene una cara mínima F_{-1} de rango -1 y una cara máxima F_n de rango n . A estas dos caras las llamamos *caras impropias*. Decimos que una cara es *propia* si no es impropia.

Llamamos *banderas* a las cadenas maximales. Al conjunto de banderas de \mathcal{P} lo denotamos por $\mathcal{F}(\mathcal{P})$.

B) Cada bandera de \mathcal{P} contiene exactamente $n + 2$ caras, incluyendo las caras F_{-1} y F_n . Dado que $F < G$ implica que el $\text{rango}(F) < \text{rango}(G)$, entonces cada bandera tiene exactamente una cara de cada rango.

Dadas dos caras F y G de \mathcal{P} , tales que $F \leq G$, la *sección* G/F de \mathcal{P} es el conjunto de caras $\{H \mid F \leq H \leq G\}$. Si F_0 es un vértice, decimos que la sección F_n/F_0 es la *figura de vértice* de F_0 . Si F_{n-1} es una cara de rango $n - 1$, a la sección F_{n-1}/F_{-1} le llamamos *faceta*. Si $\text{rango}(G) = j$ y $\text{rango}(F) = i$, entonces decimos que el rango de la sección G/F es $j - i - 1$.

C) \mathcal{P} es *fuertemente conexo*. Es decir, cualquier sección \mathcal{Q} con rango mayor que 1 es conexa en el siguiente sentido: para cualesquiera dos caras propias de \mathcal{Q} , digamos F y G , existe una sucesión de caras propias de \mathcal{Q}

$$F = F_0, F_1, \dots, F_k = G,$$

donde F_i y F_{i+1} son *incidentes*, es decir, $F_i < F_{i+1}$ o $F_i > F_{i+1}$, para cada $i \in \{0, \dots, k - 1\}$. Además diremos que todas las secciones de rango 1 son conexas.

D) Para cada $i = 0, 1, \dots, n - 1$, se cumple la *condición diamante*. Es decir, si F y G son caras tal que $F \leq G$ y además el $\text{rango}(F) = j - 1$ y el $\text{rango}(G) = j + 1$, entonces hay exactamente dos caras H de rango j tales que $F < H < G$.

Para ilustrar la definición de politopo usaremos como ejemplo al cubo. En la figura 1.10 marcamos en el cubo, un vértice v , una arista e y una cara f . Y en la figura 1.11 se representa la bandera que contiene a v , e y f de la figura 1.10. Además, en la figura 1.12 se representa la sección F_3/v_1 .

En la figura 1.13 se ilustra en un diagrama el conjunto parcialmente ordenado correspondiente al cubo. Marcamos en color azul la bandera de la figura 1.11 y en color rojo un diamante.

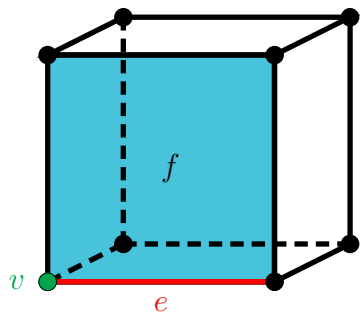


Figura 1.10: Cubo

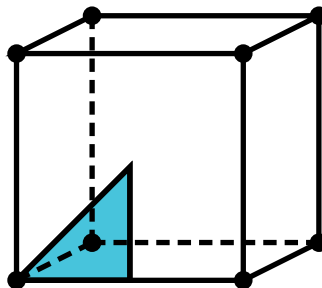


Figura 1.11: Bandera

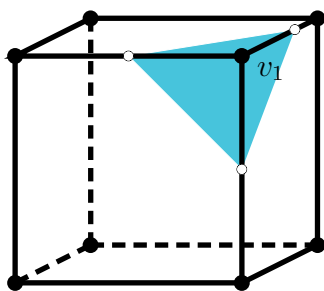


Figura 1.12: Una sección en el cubo

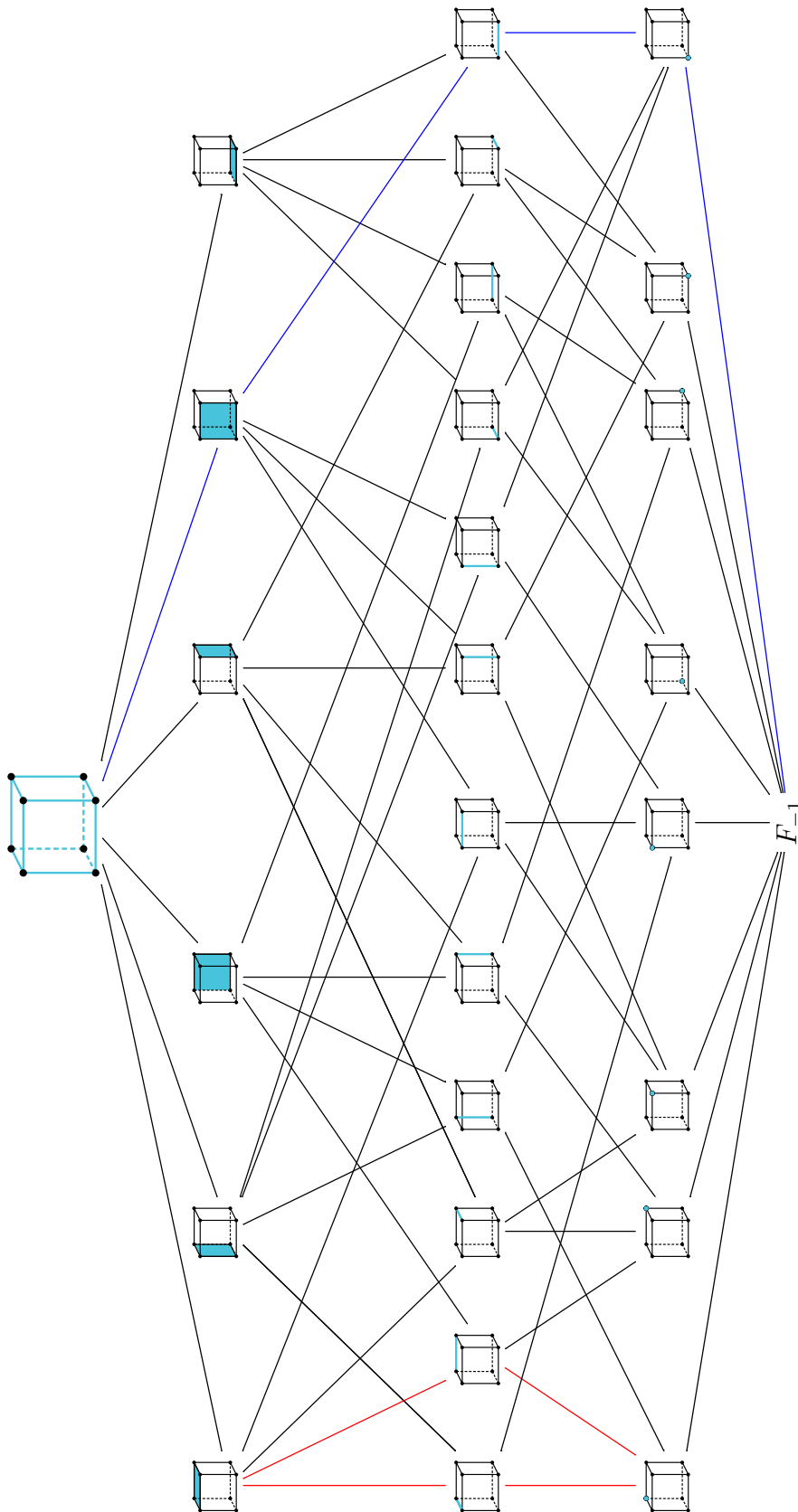
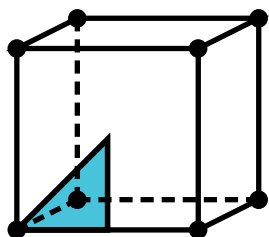
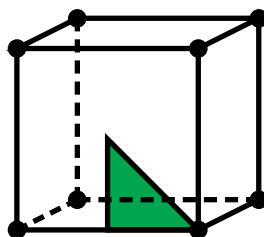


Figura 1.13: Conjunto parcialmente ordenado del cubo. Las aristas en azul representan una bandera y en rojo un diamante.

Sean \mathcal{P} un n -politopo y $\Phi \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$. La condición diamante nos dice que para cada $i \in \{0, \dots, n-1\}$ hay exactamente una bandera que difiere en la i -cara de Φ , la cual es llamada la *bandera i -adyacente* y se denota por Φ^i . Definimos $\Phi^{i,j} := (\Phi^i)^j$ y por inducción se extiende la definición. Además, denotamos por $(\Phi)_i$ a la i -cara de la bandera Φ . Podemos denotar a una bandera Φ escribiendo sus caras pero omitiendo la caras improprias: $\Phi = \{(\Phi)_0, (\Phi)_1, \dots, (\Phi)_{n-1}\}$. Se sigue de las definiciones que $(\Phi^i)^i = \Phi$ y si $|i-j| > 1$, entonces $\Phi^{i,j} = \Phi^{j,i}$, para $i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Por ejemplo, en la figura 1.14 se muestra una bandera a la que llamamos Φ y en la figura 1.15 se muestra su bandera 0-adyacente pues conserva la misma arista y 2-cara de Φ pero cambia el vértice. En la figura 1.16 se dibuja el diagrama del conjunto parcialmente ordenado del cubo, en donde marcamos la bandera 0-adyacente de Φ correspondiente a la figura 1.15.

Figura 1.14: Bandera Φ Figura 1.15: Bandera Φ^0

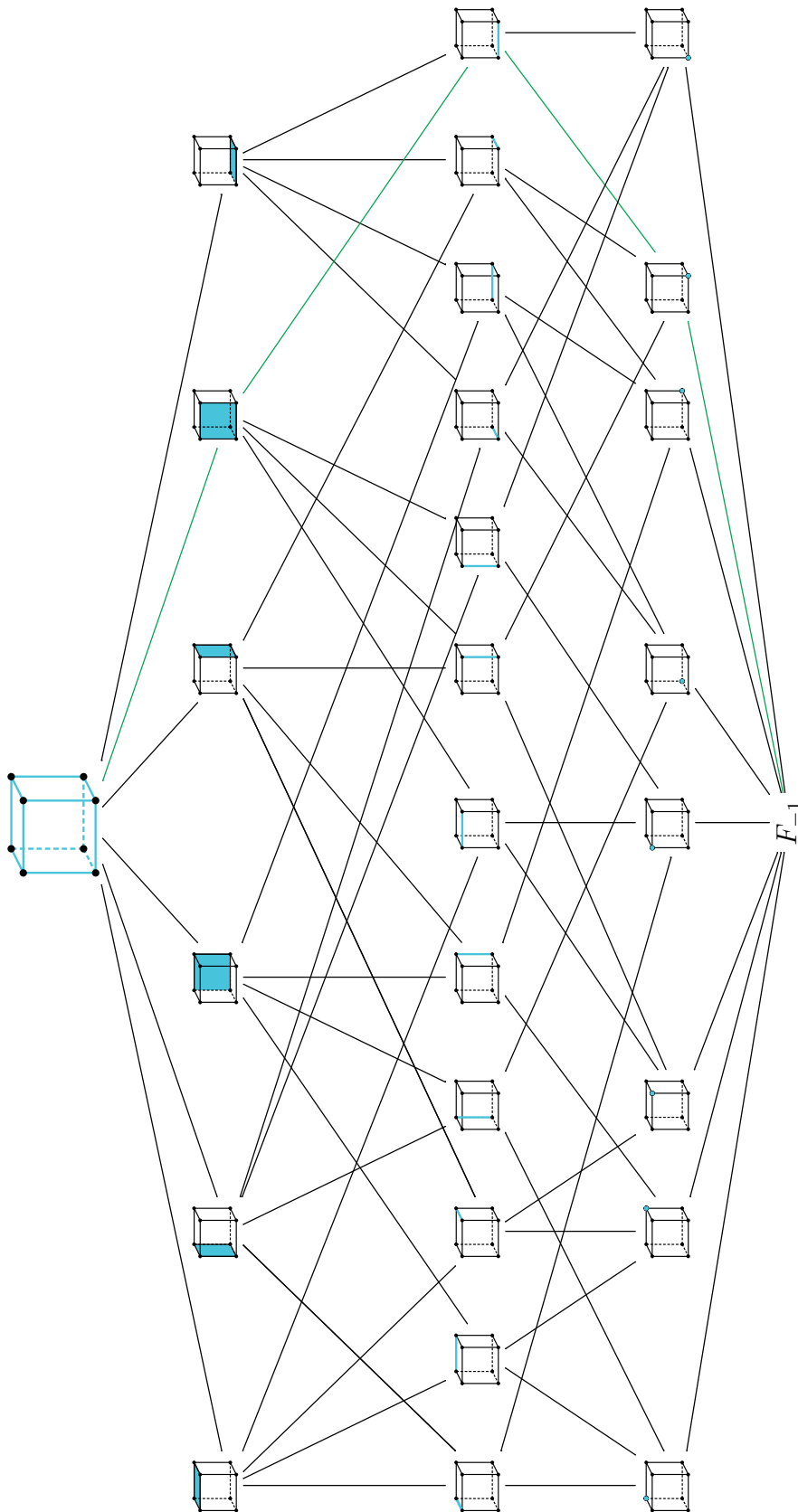


Figura 1.16: Bandera Φ^0

Las secciones de los politopos también son politopos. Para ver esto tomamos $F, G \in \mathcal{P}$ tales que $F \leq G$ y mostraremos que la sección G/F es un politopo abstracto de $\text{rango}(G/F) = \text{rango}(G) - \text{rango}(F) - 1$.

Sean la sección $G/F = \{H \mid F \leq H \leq G\}$ y $m := \text{rango}(G) - \text{rango}(F) - 1$. Definimos la función $r : G/F \rightarrow \{-1, 0, \dots, m\}$ dada por $r(H) = \text{rango}(H) - \text{rango}(F) - 1$.

La sección G/F es un conjunto parcialmente ordenado cuyo elemento mínimo es F y su elemento máximo es G . Además r es su función de rango. Veamos que G/F cumple las otras propiedades que definen a un politopo. Sea Φ una cadena maximal de G/F , consideremos $\bar{\Phi} \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$ tal que $\Phi \subseteq \bar{\Phi}$. Así que

$$\Phi = \bar{\Phi} \setminus \{(\bar{\Phi})_{-1}, \dots, (\bar{\Phi})_{\text{rango}(F)-1}, (\bar{\Phi})_{\text{rango}(G)+1}, \dots, (\bar{\Phi})_n\}.$$

Como Φ tiene una i -cara de cada rango para cada $i \in \{\text{rango}(F), \text{rango}(F)+1, \dots, \text{rango}(G)\}$, entonces $\bar{\Phi}$ tiene $(n+2) - (\text{rango}(F) - 1 + 2) - (n - \text{rango}(G)) = \text{rango}(G) - \text{rango}(F) + 1 = m + 2$ elementos.

Por otra parte, la condición diamante se hereda de \mathcal{P} , pues si tomamos dos caras $A, B \in G/F$ tales que $B \leq A$ y $r(A) - r(B) = 1$, existen exactamente dos caras $H_1, H_2 \in \mathcal{P}$ tales que $F \leq B < H_1, H_2 < A \leq G$.

Finalmente, también se hereda la conexidad fuerte de \mathcal{P} , pues todas las secciones de G/F son secciones de \mathcal{P} y entonces son conexas, por lo tanto, la sección G/F es fuertemente conexa. Con esto concluimos que cualquier sección de \mathcal{P} es un politopo.

Decimos que \mathcal{P} es *fuertemente conexo por banderas*, si cualesquiera dos banderas $\Phi, \Psi \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$ están unidas por una secuencia de banderas:

$$\Phi = \Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_k = \Psi,$$

tal que dos banderas sucesivas Φ_{i-1} y Φ_i son adyacentes, y $\Phi \cap \Psi \subseteq \Phi_i$, para todo i . Ser fuertemente conexo es equivalente a ser fuertemente conexo por banderas. Omitiremos la demostración de esta equivalencia, pero usaremos estas propiedades indistintamente según nos convenga para las próximas demostraciones. El lector interesado puede encontrar una prueba de esta equivalencia en [16].

Definimos a la *gráfica de banderas* $\mathcal{G}_{\mathcal{P}}$ de \mathcal{P} como sigue: los vértices de $\mathcal{G}_{\mathcal{P}}$ son las banderas de \mathcal{P} y si los vértices corresponden a banderas adyacentes entonces hay una arista entre estos vértices.

Notemos que si tenemos la propiedad de ser fuertemente conexo por banderas entonces cualesquiera dos banderas están conectadas por banderas adyacentes, lo cual quiere decir que la gráfica de banderas es conexa, pues existe un camino que une a cualesquiera dos vértices. De forma análoga si $\mathcal{G}_{\mathcal{P}}$ es conexa entonces tenemos la conexidad fuerte por banderas.

En la figura 1.17, se muestra el 2-politopo más pequeño y la figura 1.18, muestra el diagrama del conjunto parcialmente ordenado que lo representa. Notemos que tiene dos vértices y dos aristas, ya que si F_0 y F'_0 son los dos vértices, entonces por la condición diamante existen dos aristas F_1 y F'_1 tales que $F_{-1} < F_1, F'_1 < F_2$. Análogamente se cumple la condición diamante para las otras secciones de rango 1.

Análogamente, los 2-politopos con n vértices, tienen n aristas, para $n > 2$. Si \mathcal{P} es un 2-politopo, decimos que es un *polígono*, si tiene p vértices le llamamos *p-gon*. La figura 1.19 muestra diagrama de Hasse de un n -gon con n finito. Un 2-politopo puede tener una infinidad de vértices y de aristas.

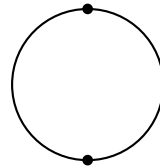


Figura 1.17: 2-gon

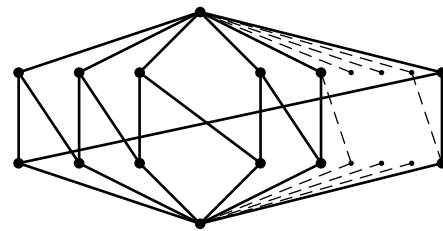
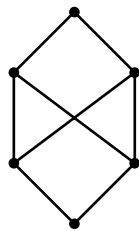


Figura 1.18: Diagrama de un 2-gon Figura 1.19: Diagrama de un n -gon

Sea \mathcal{P} un n -politopo con $n \geq 2$, decimos que \mathcal{P} es *equivelar* si para cada $j = 1, \dots, n-1$, existe un entero p_j , tal que, para cada $\Phi \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$, la sección $(\Phi)_{j+1}/(\Phi)_{j-2}$ es un p_j -gon. En este caso, decimos que \mathcal{P} tiene *símbolo de Schläfli* o *tipo* $\{p_1, p_2, \dots, p_{n-1}\}$. Así que el cubo tiene tipo $\{4, 3\}$ y la teselación por cubos de \mathbb{E}^3 tiene tipo $\{4, 3, 4\}$.

Sea \mathcal{P} un n -politopo. Un *polígono de Petrie* de \mathcal{P} es un camino de aristas de \mathcal{P} que tiene exactamente k aristas consecutivas en la misma k -cara, para cada $k = 2, 3, \dots, n-1$. La figura 1.20 muestra un polígono de Petrie en el cubo, pues tiene exactamente dos aristas consecutivas en cada 2-cara (no hay una tercera arista en la misma 2-cara). Y la figura 1.21 muestra un polígono de Petrie en el hipercubo, pues hay exactamente dos aristas consecutivas en cada 2-cara y tres en cada celda.

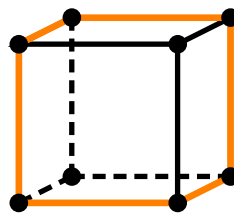


Figura 1.20: Polígono de Petrie en el cubo

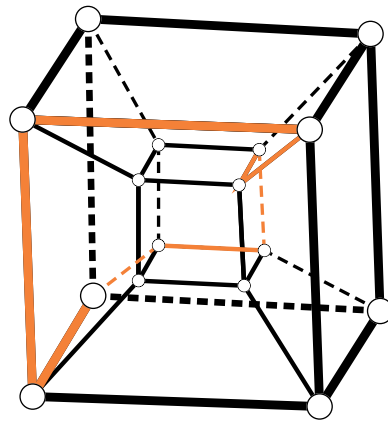


Figura 1.21: Polígono de Petrie en el hipercubo

1.2 Homomorfismos y anti-homomorfismos

Sean \mathcal{P} y \mathcal{Q} politopos. Un *homomorfismo* es una función $\psi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ que preserva incidencias, es decir, si $F, G \in \mathcal{P}$ tales que $F \leq G$, entonces $F\psi \leq G\psi$. Un *isomorfismo* ψ es una función biyectiva, tal que ψ y ψ^{-1} son homomorfismos. Si existe un isomorfismo entre \mathcal{P} y \mathcal{Q} decimos que \mathcal{P} y \mathcal{Q} son *isomorfos* y lo denotamos esto como $\mathcal{P} \cong \mathcal{Q}$.

Sean \mathcal{P} y \mathcal{Q} politopos. Un *anti-homomorfismo* es una función $\psi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ que invierte el orden, es decir, si $F, G \in \mathcal{P}$ tales que $F \leq G$, entonces $F\psi \geq G\psi$. Un *anti-isomorfismo* ψ es una función biyectiva, tal que ψ y ψ^{-1} son anti-homomorfismos.

Sean \mathcal{P} y \mathcal{Q} dos n -politopos. Si existe un anti-isomorfismo $\delta : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$, decimos que \mathcal{P} y \mathcal{Q} son *duales* y δ es una *dualidad*. Usualmente denotamos a \mathcal{Q} como \mathcal{P}^* . Un ejemplo de politopos duales son el cubo y octaedro.

Vamos a demostrar que el dual de un politopo es único bajo isomorfismos. Sean \mathcal{Q} y \mathcal{Q}' politopos duales de \mathcal{P} , es decir, existen los anti-isomorfismos: $\psi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ y $\delta : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}'$. Demostraremos que \mathcal{Q} y \mathcal{Q}' son isomorfos. Como ψ y δ son anti-isomorfismos, estas son funciones biyectivas. Además ψ , δ , ψ^{-1} y δ^{-1} son anti-homomorfismos. Sea $\gamma : \mathcal{Q}' \rightarrow \mathcal{Q}$ dada por $\gamma = \delta^{-1}\psi$. Notemos que γ es biyectiva, pues composición de funciones biyectivas. Por otra parte, sean $F, G \in \mathcal{Q}'$ tales que $F \leq G$, tenemos que $F\delta^{-1} \geq G\delta^{-1}$, pues δ^{-1} es anti-homomorfismo. Se sigue que $F\delta^{-1}\psi \leq G\delta^{-1}\psi$, pues ψ es anti-homomorfismo. Así que $F\gamma \leq G\gamma$, por lo tanto γ es un homomorfismo. Análogamente se demuestra que γ^{-1} es un homomorfismo. Por tanto, \mathcal{Q} y \mathcal{Q}' son politopos isomorfos. De manera similar podemos demostrar que $(\mathcal{P}^*)^* \cong \mathcal{P}$, para cualquier politopo \mathcal{P} .

Si el dual de \mathcal{P} es isomorfo a \mathcal{P} , decimos que \mathcal{P} es *autodual*. Por ejemplo, el politopo dual del tetraedro es él mismo, así que el tetraedro es autodual.

1.3 Simetrías de politopos

Sea \mathcal{P} un n -politopo. Un *automorfismo* o *simetría* de \mathcal{P} es un isomorfismo $\gamma : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$. Por ejemplo, la reflexión en la figura 1.22 es una simetría del cubo y la rotación de $\pi/2$ en

el eje marcado en la figura 1.23 también es simetría del cubo. En la figura 1.24 se muestra un automorfismo del panal $\{4, 3, 4\}$, el cual corresponde al plano de reflexión dibujado en color azul.

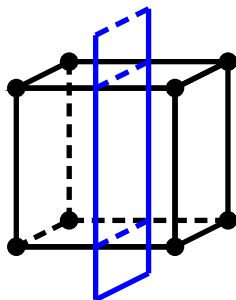


Figura 1.22: Reflexión

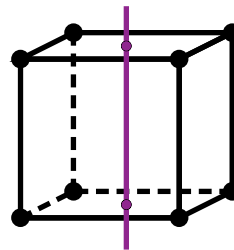


Figura 1.23: Rotación

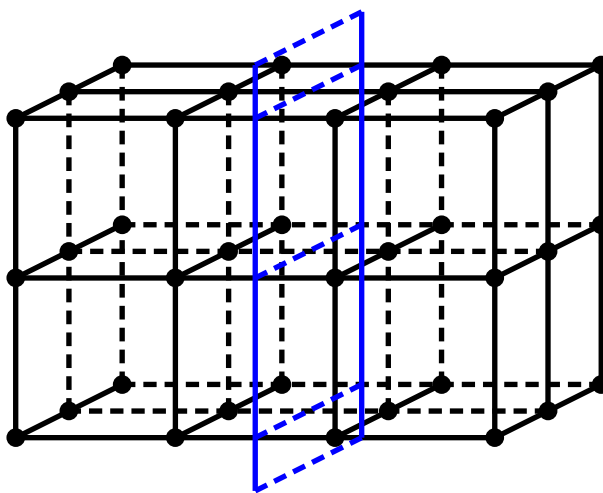


Figura 1.24: Reflexión

Dado que por definición la identidad es un automorfismo y el inverso de cualquier automorfismo también lo es, entonces el conjunto de automorfismos de un politopo \mathcal{P} es un grupo. Denotamos al grupo de automorfismos de \mathcal{P} como $\Gamma(\mathcal{P})$. Se puede considerar la acción de $\Gamma(\mathcal{P})$ en conjuntos de \mathcal{P} , por ejemplo en las banderas, vértices o aristas de \mathcal{P} . Si $\Phi \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$ y $\gamma \in \Gamma(\mathcal{P})$, entonces $\Phi\gamma := \{(\Phi)_0\gamma, (\Phi)_1\gamma, \dots, (\Phi)_{n-1}\gamma\}$. Veamos que cualquier automorfismo γ induce una biyección en las banderas de \mathcal{P} . Sea

$$\begin{aligned} \gamma : \mathcal{F}(\mathcal{P}) &\rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{P}) \\ \Phi &\mapsto \Phi\gamma \end{aligned}$$

y $\Phi, \Psi \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$. Si $\Phi\gamma = \Psi\gamma$, entonces $(\Phi)_i\gamma = (\Psi)_i\gamma$ para cada $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Como γ es una función biyectiva, entonces $(\Phi)_i = (\Psi)_i$ para cada $i \in \{0, \dots, n-1\}$, por lo tanto $\Phi = \Psi$, es decir, γ es inyectiva en $\mathcal{F}(\mathcal{P})$. Por otro lado, γ es suprayectiva en $\mathcal{F}(\mathcal{P})$, pues si $\Psi \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$, existe $\Phi = \Psi\gamma^{-1} \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$ tal que $\Phi\gamma = \Psi$.

Lema 1.3.1. Sea \mathcal{P} un n -politopo, $\gamma \in \Gamma(\mathcal{P})$ y $\Phi \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$. Entonces

$$(\Phi^i)\gamma = (\Phi\gamma)^i,$$

para cada $i = 0, \dots, n-1$.

Demostración. Sea Φ una bandera de \mathcal{P} :

$$\Phi := \{(\Phi)_0, \dots, (\Phi)_i = F, \dots, (\Phi)_{n-1}\},$$

con $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Su bandera i -adyacente es:

$$\Phi^i = \{(\Phi)_0, \dots, (\Phi)_i = H, \dots, (\Phi)_{n-1}\},$$

donde F y H son i -caras distintas. Así que

$$\Phi\gamma = \{(\Phi)_0\gamma, \dots, F\gamma, \dots, (\Phi)_{n-1}\gamma\},$$

y

$$(\Phi^i)\gamma = \{(\Phi)_0\gamma, \dots, H\gamma, \dots, (\Phi)_{n-1}\gamma\}.$$

Como $F \neq H$ entonces $F\gamma \neq H\gamma$ ya que $\gamma : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ es una biyección. Ahora

$$(\Phi\gamma)^i = \{(\Phi)_0\gamma, \dots, G, \dots, (\Phi)_{n-1}\gamma\},$$

como la i -cara de $\Phi\gamma$ es distinta a la i -cara de $(\Phi\gamma)^i$, tenemos que $F\gamma \neq G$.

Por otro lado, notemos que todas j -caras de $\Phi\gamma$, $(\Phi^i)\gamma$ y $(\Phi\gamma)^i$ son iguales para $j \neq i$. Por la condición diamante en la sección $(\Phi)_{i+1}\gamma / (\Phi)_{i-1}\gamma$ tenemos que:

$$(\Phi)_{i-1}\gamma < F\gamma, H\gamma < (\Phi)_{i+1}\gamma.$$

Como $G \neq F\gamma$ entonces $G = H\gamma$. Por lo tanto $(\Phi^i)\gamma = (\Phi\gamma)^i$. \square

Lema 1.3.2. $\Gamma(\mathcal{P})$ actúa libremente en $\mathcal{F}(\mathcal{P})$, es decir, cualquier automorfismo de \mathcal{P} que fije a una bandera es la identidad.

Demostración. Sean $\gamma \in \Gamma(\mathcal{P})$ y $\Phi \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$ tal que $\Phi\gamma = \Phi$. Notemos que γ también fija a la bandera j -adyacente para $j \in \{0, \dots, n-1\}$, pues $\Phi^j\gamma = (\Phi\gamma)^j = \Phi^j$. Como \mathcal{P} es fuertemente conexo por banderas, toda bandera Ψ de \mathcal{P} , se puede escribir como

$$\Psi = \Phi^{i_1, i_2, \dots, i_k}$$

donde $i_j \in \{0, \dots, n-1\}$, para algún $k \in \mathbb{N}$.

$$(\Phi^{i_1, i_2})\gamma = (\Phi^{i_1})^{i_2}\gamma = (\Phi^{i_1}\gamma)^{i_2} = (\Phi^{i_1})^{i_2} = \Phi^{i_1, i_2}.$$

Es decir, γ fija a la bandera Φ^{i_1, i_2} . Análogamente:

$$(\Phi^{i_1, i_2, i_3})\gamma = (\Phi^{i_1, i_2})^{i_3}\gamma = (\Phi^{i_1, i_2}\gamma)^{i_3} = (\Phi^{i_1, i_2})^{i_3} = \Phi^{i_1, i_2, i_3}.$$

Es decir, γ fija a la bandera Φ^{i_1, i_2, i_3} . Por inducción, obtenemos que γ fija a $\Psi = \Phi^{i_1, i_2, \dots, i_k}$. Por lo tanto γ fija a todas banderas de \mathcal{P} , lo que implica que γ fija a todas las caras de \mathcal{P} , así que γ es la identidad. \square

Ahora, sean \mathcal{P} y \mathcal{Q} n -politopos duales, entonces existe un anti-isomorfismo $\delta : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$. Definimos la función $\beta : \Gamma(\mathcal{P}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{Q})$ dada por $\gamma\beta := \delta^{-1}\gamma\delta$ con $\gamma \in \Gamma(\mathcal{P})$ para ver que $\Gamma(\mathcal{P}) \cong \Gamma(\mathcal{Q})$.

Veamos que $\gamma\beta$ es un automorfismo de \mathcal{Q} .

- La función $\gamma\beta$ es biyectiva, pues es composición de funciones biyectivas.
- Sean $F, G \in \mathcal{Q}$, tales que $F \leq G$. Entonces $F\delta^{-1} \geq G\delta^{-1}$, pues δ^{-1} es un anti-homomorfismo. Luego $F\delta^{-1}\gamma \geq G\delta^{-1}\gamma$, pues γ es un homomorfismo. Se sigue que $F\delta^{-1}\gamma\delta \leq G\delta^{-1}\gamma\delta$, ya que δ es un anti-homomorfismo. Por lo tanto $\gamma\beta$ es un homomorfismo. Análogamente se demuestra que $(\gamma\beta)^{-1}$ es un homomorfismo.

Ahora probaremos que β es un isomorfismo de grupos.

- Sean $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma(\mathcal{P})$. Entonces:

$$\begin{aligned} (\gamma_1\gamma_2)\beta &= \delta^{-1}\gamma_1\gamma_2\delta \\ &= \delta^{-1}\gamma_1(\delta\delta^{-1})\gamma_2\delta \\ &= (\delta^{-1}\gamma_1\delta)(\delta^{-1}\gamma_2\delta) \\ &= \gamma_1\beta\gamma_2\beta \end{aligned}$$

Así que β es un homomorfismo.

- Sean $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma(\mathcal{P})$ tales que $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Demostraremos que $\gamma_1\beta \neq \gamma_2\beta$. Como $\gamma_1 \neq \gamma_2$, existe $F \in \mathcal{P}$ tal que $F\gamma_1 \neq F\gamma_2$. Así que $F\delta\delta^{-1}\gamma_1 \neq F\delta\delta^{-1}\gamma_2$. Como δ es una función biyectiva tenemos que $F\delta(\delta^{-1}\gamma_1\delta) \neq F\delta(\delta^{-1}\gamma_2\delta)$. Si $G := F\delta \in \mathcal{Q}$, entonces $G\gamma_1\beta \neq G\gamma_2\beta$. Por lo tanto $\gamma_1\beta \neq \gamma_2\beta$ y β es inyectiva.
- Sea $\alpha \in \Gamma(\mathcal{Q})$. Definimos $\gamma_\alpha := \delta\alpha\delta^{-1} \in \Gamma(\mathcal{P})$. Entonces

$$\begin{aligned} \gamma_\alpha\beta &= \delta^{-1}\gamma_\alpha\delta \\ &= \delta^{-1}\delta\alpha\delta^{-1}\delta \\ &= \alpha \end{aligned}$$

Así que β es suprayectiva.

Por lo tanto $\Gamma(\mathcal{P}) \cong \Gamma(\mathcal{Q})$.

1.4 Politopos regulares

Un n -politopo \mathcal{P} es *regular* si su grupo de automorfismos $\Gamma(\mathcal{P})$ actúa transitivamente en $\mathcal{F}(\mathcal{P})$. Los sólidos platónicos, el panel euclidiano de tipo $\{4, 3, 4\}$ y el toro de la figura 1.25 son ejemplos de politopos regulares y es fácil comprobarlo encontrando sus generadores distinguidos de los cuales hablamos más adelante.

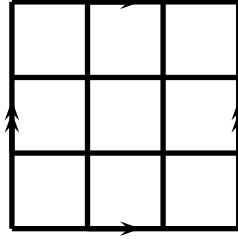


Figura 1.25: Toro teselado con 9 cuadrados

Proposición 1.4.1. *Sea \mathcal{P} un n -politopo y Φ una bandera base de \mathcal{P} . Entonces \mathcal{P} es regular si y solo si para cada $i \in \{0, \dots, n-1\}$ existe un automorfismo ρ_i tal que $\Phi\rho_i = \Phi^i$.*

Demostración. Si \mathcal{P} es regular, entonces $\Gamma(\mathcal{P})$ es transitivo en $\mathcal{F}(\mathcal{P})$, en particular si tomamos la bandera Φ y su bandera i -adyacente Φ^i , existe $\rho_i \in \Gamma(\mathcal{P})$ tal que $\Phi\rho_i = \Phi^i$, para cada $i \in \{0, \dots, n-1\}$.

Ahora suponemos que existe $\rho_i \in \Gamma(\mathcal{P})$ tal que $\Phi\rho_i = \Phi^i$ para cada $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Probaremos que \mathcal{P} es regular, es decir, que para cualquier $\Psi \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$, existe $\varphi \in \Gamma(\mathcal{P})$ tal que $\Phi\varphi = \Psi$.

Como \mathcal{P} es fuertemente conexo por banderas, existe una sucesión de banderas

$$\Phi = \Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_m = \Psi,$$

donde Φ_i y Φ_{i+1} son adyacentes para $i \in \{0, \dots, m-1\}$. Usaremos inducción sobre m para probar que \mathcal{P} es regular.

Si $m = 0$ then $\Phi = \Psi$, entonces $\Phi 1 = \Psi$ y $1 \in \Gamma(\mathcal{P})$, donde 1 denota el elemento identidad de $\Gamma(\mathcal{P})$. Por hipótesis de inducción, para $m \geq 1$, existe $\psi \in \Gamma(\mathcal{P})$ tal que $\Phi\psi = \Phi_{m-1}$. Además, por hipótesis, existe ρ_j tal que $\Phi\rho_j = \Phi^j$. Por otro lado, como Φ_{m-1} y Φ_m son j -adyacentes, para algún $j \in \{0, \dots, n-1\}$. Entonces tenemos:

$$\Psi = (\Phi_{m-1})^j = (\Phi\psi)^j = \Phi^j\psi = \Phi\rho_j\psi.$$

Definimos $\varphi = \rho_j\psi$, así que $\varphi \in \Gamma(\mathcal{P})$ y $\Phi\varphi = \Psi$. Por lo tanto, \mathcal{P} es regular. \square

Llamamos estos automorfismos $\rho_0, \dots, \rho_{n-1}$ *generadores distinguidos de \mathcal{P} con respecto a la bandera base Φ* .

Por ejemplo, las figuras 1.26, 1.27, 1.28 y 1.29 nos muestran los generadores distinguidos de la teselación por cubos de \mathbb{E}^3 con respecto a la bandera base (marcada como un tetraedro en la figuras).

Sean $F, G \in \mathcal{P}$ tales que $F \leq G$ y sea la sección $\mathcal{Q} = G/F$. Si $\gamma \in \Gamma(\mathcal{P})$ es tal que $G\gamma = G$ y $F\gamma = F$, entonces

$$\begin{aligned} \bar{\gamma} : \mathcal{Q} &\rightarrow \mathcal{Q} \\ H &\mapsto H\gamma \end{aligned}$$

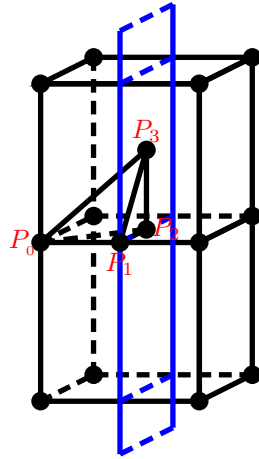


Figura 1.26: R_0

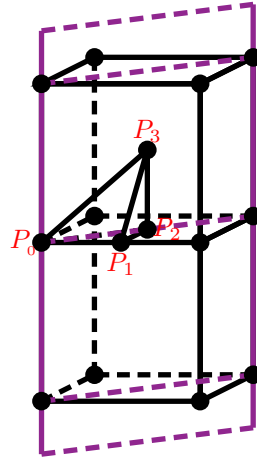


Figura 1.27: R_1

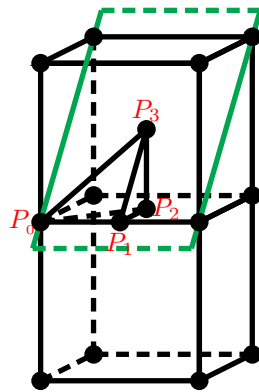


Figura 1.28: R_2

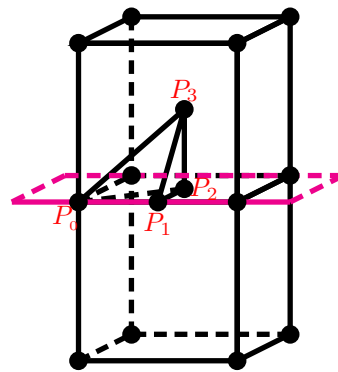


Figura 1.29: R_3

es un automorfismo de \mathcal{Q} , así que podemos pensar a $\bar{\gamma} \in \Gamma(\mathcal{Q})$.

Demostraremos que si \mathcal{P} un n -politopo regular, entonces todas las secciones de \mathcal{P} son politopos regulares.

Sea la sección $\mathcal{Q} = F_j/F_i$ con $-1 \leq i < j \leq n$. Sean $\bar{\Phi}, \bar{\Psi} \in \mathcal{F}(\mathcal{Q})$, extendemos estas banderas de \mathcal{Q} a banderas de \mathcal{P} , es decir, sean $\Phi, \Psi \in \mathcal{P}$ tales que $\bar{\Phi} \subseteq \Phi$ y $\bar{\Psi} \subseteq \Psi$. Como \mathcal{P} es regular, existe $\gamma \in \Gamma(\mathcal{P})$ tal que $\Phi\gamma = \Psi$. Entonces $\bar{\Phi}\bar{\gamma} = \bar{\Psi}$. Por lo tanto \mathcal{Q} es regular.

Además, si \mathcal{P} un n -politopo regular y $\Phi, \Psi \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$ con $i, j \in \{-1, \dots, n\}$ e $i < j$. Entonces las secciones $\mathcal{Q} = (\Phi)_j/(\Phi)_i$ y $\mathcal{K} = (\Psi)_j/(\Psi)_i$ son isomorfas, pues existe $\gamma \in \Gamma(\mathcal{P})$ tal que $\Phi\gamma = \Psi$ y se puede ver que

$$\begin{aligned} \bar{\gamma} : \mathcal{Q} &\rightarrow \mathcal{K} \\ H &\mapsto H\gamma \end{aligned}$$

es un isomorfismo entre \mathcal{Q} y \mathcal{K} . En particular si $j-i=3$, tenemos que existe $p_{j-1} \in \mathbb{N} \cup \infty$ tal que $(\Phi)_j/(\Phi)_i$ es un p_{j-1} -gon para toda bandera $\Phi \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$ y por tanto \mathcal{P} es equivelar, con tipo $\{p_1, p_2, \dots, p_{n-1}\}$.

Sea $J \subseteq \{0, \dots, n-1\}$. Definimos a una cadena Φ_J y al estabilizador de una cadena Φ_J , de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \Phi_J &:= \{F_j \in \Phi \mid j \in J\}, \\ \text{Stab}_{\Gamma(\mathcal{P})}(\Phi_J) &:= \{\gamma \in \Gamma(\mathcal{P}) \mid \Phi_J\gamma = \Phi_J\}. \end{aligned}$$

Lema 1.4.2. Sea \mathcal{P} un politopo regular, Φ una bandera base de \mathcal{P} , $\mathcal{Q} = (\Phi)_j/(\Phi)_i$ y $J = \{-1, \dots, i, j, \dots, n\}$. Si $\alpha \in \Gamma(\mathcal{P})$ tal que $(\Phi)_j\alpha = (\Phi)_j$ y $(\Phi)_i\alpha = (\Phi)_i$ entonces existe un único $\gamma \in \text{Stab}_{\Gamma(\mathcal{P})}(\Phi_J)$ tal que $F\alpha = F\gamma$ para toda cara $F \in \mathcal{Q}$.

Demostración. Sea $\bar{\Phi} = \{(\Phi)_i, \dots, (\Phi)_j\}$ y sea $\Psi := \Phi\alpha \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$. Dado que

$$(\Psi)_i = (\Phi\alpha)_i = (\Phi)_i\alpha = (\Phi)_i$$

y

$$(\Psi)_j = (\Phi\alpha)_j = (\Phi)_j\alpha = (\Phi)_j,$$

entonces $\bar{\Psi} = \{(\Psi)_i, \dots, (\Psi)_j\} = \{(\Phi)_i, (\Psi)_{i+1}, \dots, (\Psi)_{j-1}, (\Phi)_j\}$. Por lo que podemos pensar a $\bar{\Phi}$ y a $\bar{\Psi}$ como banderas de \mathcal{Q} .

Consideremos la bandera

$$\Lambda = \{(\Phi)_{-1}, \dots, (\Phi)_i, (\Psi)_{i+1}, \dots, (\Psi)_{j-1}, (\Phi)_j, \dots, (\Phi)_n\}$$

de \mathcal{P} . Como \mathcal{P} es regular, existe $\gamma \in \Gamma(\mathcal{P})$ tal que $\Phi\gamma = \Lambda$. Notemos que $(\Phi)_k\gamma = \Phi_k$ para todo $k \leq i$ y para todo $k \geq j$. Entonces $\gamma \in \text{Stab}_{\Gamma(\mathcal{P})}(\Phi_J)$. Y como γ actúa en la bandera $\bar{\Phi}$ de \mathcal{Q} de la misma forma en que lo hace α , entonces γ y α inducen el mismo automorfismo de \mathcal{Q} , ya que el grupo de automorfismos de \mathcal{Q} actúa libremente en $\mathcal{F}(\mathcal{Q})$. Por lo tanto $F\alpha = F\gamma$ para toda cara $F \in \mathcal{Q}$.

Ahora demostraremos que γ es único. Supongamos que existe $\beta \in \text{Stab}_{\Gamma(\mathcal{P})}(\Phi_J)$ tal que $F\alpha = F\beta$ para toda cara $F \in \mathcal{Q}$. Por demostrar que $\gamma = \beta$.

Como $F\alpha = F\beta$ para toda $F \in \mathcal{Q}$ entonces $F\beta = F\gamma$ para toda $F \in \mathcal{Q}$. Y como $\beta \in \text{Stab}_{\Gamma(\mathcal{P})}(\Phi_J)$, tenemos que $\Phi_J\beta = \Phi_J$. Entonces $\Phi\gamma = \Phi\beta$. Como $\Gamma(\mathcal{P})$ actúa libremente en $\mathcal{F}(\mathcal{P})$, entonces $\gamma = \beta$, por lo tanto γ es único. \square

Proposición 1.4.3. *Si \mathcal{P} es un n -politopo regular, Φ una bandera base y F_j su j -cara, F_i su i -cara con $-1 \leq i < j \leq n$. Entonces $\text{Stab}_{\Gamma(\mathcal{P})}(\Phi_J) \cong \Gamma(F_j/F_i)$, donde $J = \{-1, \dots, i, j, \dots, n\}$ y $\Phi_J = \{F_{-1}, F_0, \dots, F_i, F_j, \dots, F_n\}$.*

Demostración. Si $\gamma \in \text{Stab}_{\Gamma(\mathcal{P})}(\Phi_J)$, entonces denotamos por $\bar{\gamma}$ al automorfismo de F_j/F_i que induce γ . Por el lema anterior, si $\gamma, \beta \in \text{Stab}_{\Gamma(\mathcal{P})}$ y $\gamma \neq \beta$, entonces inducen automorfismos de F_j/F_i distintos, es decir, $\bar{\gamma} \neq \bar{\beta}$. Por lo tanto, cada elemento de $\text{Stab}_{\Gamma(\mathcal{P})}(\Phi_J)$ induce una automorfismo diferente de $\Gamma(F_j/F_i)$. Es decir, la función $\varphi : \text{Stab}_{\Gamma(\mathcal{P})}(\Phi_J) \rightarrow \Gamma(F_j/F_i)$ que manda a cada $\gamma \in \text{Stab}_{\Gamma(\mathcal{P})}(\Phi_J)$ al automorfismo que induce de F_j/F_i es inyectiva.

Ahora demostraremos que φ es suprayectiva. Sea $\bar{\gamma} \in \Gamma(F_j/F_i)$, veremos que $\bar{\gamma}$ es un automorfismo de F_j/F_i inducido por algún $\gamma \in \text{Stab}_{\Gamma(\mathcal{P})}(\Phi_J)$. Pero antes demostraremos que el $\text{Stab}_{\Gamma(\mathcal{P})}(\Phi_J)$ es transitivo en las banderas de F_j/F_i .

Sea $\bar{\Psi} \in \mathcal{F}(F_j/F_i)$ y extendemos esta bandera a una bandera de \mathcal{P} :

$$\begin{aligned} \Psi &= \{(\Phi)_{-1}, \dots, (\Phi)_{i-1}, (\Psi)_i, \dots, (\Psi)_j, (\Phi)_{j+1}, \dots, (\Phi)_n\} \\ &= \{F_{-1}, \dots, F_i, (\Psi)_{i+1}, \dots, (\Psi)_{j-1}, F_j, \dots, F_n\}, \end{aligned}$$

es decir, $\Phi_J \subseteq \Psi$. Como \mathcal{P} es fuertemente conexo, existe una sucesión de banderas

$$\Phi = \Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_m = \Psi$$

donde banderas consecutivas son adyacentes y $\Phi_J \subseteq \Phi_i$ para cada $i \in \{0, \dots, m\}$.

Por inducción sobre m . Para $m = 0$, $1 \in \text{Stab}_{\Gamma(\mathcal{P})}(\Phi_J)$ y $\Phi_1 = \Psi$. Por hipótesis de inducción existe $\gamma \in \text{Stab}_{\Gamma(\mathcal{P})}(\Phi_J)$ tal que $\Phi\gamma = \Phi_{m-1}$, tenemos que:

$$\Psi = (\Phi_{m-1})^j = (\Phi\gamma)^j = \Phi^j\gamma = \Phi\rho_j\gamma$$

donde $j \notin J$ y ρ_j es un generador distinguido, como $j \notin J$, entonces $F_k\rho_j = F_k$, para todo $k \neq j$ y entonces $\rho_j \in \text{Stab}_{\Gamma(\mathcal{P})}(\Phi_J)$. Se sigue que $\alpha = \rho_j\gamma \in \text{Stab}_{\Gamma(\mathcal{P})}(\Phi_J)$, es decir, $\Phi\alpha = \Psi$. Así que, podemos decir que el $\text{Stab}_{\Gamma(\mathcal{P})}(\Phi_J)$ es transitivo en las banderas de F_j/F_i .

Ahora, tenemos los siguientes hechos:

- La sección F_j/F_j es regular por ser una sección de \mathcal{P} regular y $\Gamma(F_j/F_i)$ actúa libremente en $\mathcal{F}(F_j/F_i)$, entonces la acción de $\Gamma(F_j/F_i)$ en $\mathcal{F}(F_j/F_i)$ es simplemente transitiva.
- Y el $\text{Stab}_{\Gamma(\mathcal{P})}(\Phi_J)$ es transitivo en las banderas de F_j/F_j

Por el inciso a), para cualesquiera banderas $\bar{\Psi}_1, \bar{\Psi}_2 \in \mathcal{F}(F_j/F_i)$, existe $\bar{\gamma} \in \Gamma(F_j/F_i)$ tal que $\bar{\Psi}_1\bar{\gamma} = \bar{\Psi}_2$. Por el inciso b), existe $\bar{\gamma}' \in \text{Stab}_{\Gamma(\mathcal{P})}(\Phi_J)$ tal que $\bar{\Psi}_1\bar{\gamma}' = \bar{\Psi}_2$, pero como $\bar{\gamma}$ es único, entonces $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}'$. Así que, $\bar{\gamma} \in \Gamma(F_j/F_i)$ es inducido por $\gamma \in \text{Stab}_{\Gamma(\mathcal{P})}(\Phi_J)$, por lo tanto φ es suprayectiva. Así que $\text{Stab}_{\Gamma(\mathcal{P})}(\Phi_J) \cong \Gamma(F_j/F_i)$. \square

Proposición 1.4.4. *Sea \mathcal{P} un n -politopo regular y Φ una bandera base de \mathcal{P} . Dado $J \subseteq \{0, \dots, n-1\}$, sea $\Phi_J := \{(\Phi)_j \in \Phi \mid j \in J\}$. Entonces*

$$\text{Stab}_{\Gamma(\mathcal{P})}(\Phi_J) = \Gamma_J := \langle \rho_j \mid j \notin J \rangle.$$

Demostración. Sea $\gamma \in \Gamma_J$ entonces γ se puede escribir como $\gamma = \rho_{i_1} \rho_{i_2} \cdots \rho_{i_k}$, donde $i_l \notin J$, por lo que $\Phi\gamma = \Phi\rho_{i_1} \rho_{i_2} \cdots \rho_{i_k} = \Phi^{i_k, \dots, i_1}$. Dado que $i_l \notin J$ entonces $(\Phi)_j = (\Phi^{i_k, \dots, i_1})_j$ para toda $j \in J$, es decir, $\gamma \in \text{Stab}_{\Gamma(\mathcal{P})}(\Phi_J)$. Se sigue que $\Gamma_J \leq \text{Stab}_{\Gamma(\mathcal{P})}(\Phi_J)$. Nos falta demostrar que $\text{Stab}_{\Gamma(\mathcal{P})}(\Phi_J) \leq \Gamma_J$.

La demostración de la proposición 1.4.3 implica que $\text{Stab}_{\Gamma(\mathcal{P})}(\Phi_J)$ es transitivo en las banderas que contienen a Φ_J . Ahora, demostraremos que Γ_J también es transitivo en estas banderas.

Sea Ψ una bandera tal que $\Phi_J \subset \Psi$. Como \mathcal{P} es fuertemente conexo por banderas, existe una sucesión de banderas Φ_i que contienen a la cadena Φ_J con $i \in \{0, \dots, m\}$:

$$\Phi = \Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_m = \Psi$$

donde Φ_i y Φ_{i+1} son k_i -adyacentes para $i \in \{0, \dots, m-1\}$ y como para toda $j \in J$, $(\Phi)_j \in \Phi \cap \Psi \subseteq \Phi_i, \Phi_{i+1}$, entonces $k_i \notin J$.

Demostraremos por inducción sobre m que Γ_J es transitivo en las banderas Ψ . Si $m = 0$ entonces $\Phi = \Psi$. Además $\Phi_1 = \Psi$ y $1 \in \Gamma_J$, para cualquier $J \subseteq \{0, \dots, n-1\}$. Por hipótesis de inducción, existe $\psi \in \Gamma_J$ tal que $\Phi\psi = \Phi_{m-1}$. Como Φ_{m-1} y Φ_m son j -adyacentes y $j \notin J$ tenemos:

$$\Psi = (\Phi_{m-1})^j = (\Phi\psi)^j = \Phi^j \psi = \Phi \rho_j \psi,$$

definimos $\varphi := \rho_j \psi$ y $\varphi \in \Gamma_J$ pues $\rho_j \in \Gamma_J$ ya que $j \notin J$. Así que, $\Phi\varphi = \Psi$ donde $\varphi \in \Gamma_J$. Por lo tanto, Γ_J es transitivo en el conjunto de banderas que contienen a Φ_J .

En resumen, tenemos que $\text{Stab}_{\Gamma(\mathcal{P})}(\Phi_J)$ es transitivo en banderas Ψ tales que $\Phi_J \subset \Psi$, es decir, sean Ψ_1, Ψ_2 que contienen a Φ_J , existe $\gamma \in \text{Stab}_{\Gamma(\mathcal{P})}(\Phi_J)$ tal que

$$\Psi_1 \gamma = \Psi_2.$$

Como Γ_J también es transitivo en estas banderas, existe $\gamma' \in \Gamma_J$ tal que

$$\Psi_1 \gamma' = \Psi_2.$$

Pero $\Gamma(\mathcal{P})$ es simplemente transitivo en las banderas Ψ entonces $\gamma = \gamma'$. Así que, $\text{Stab}_{\Gamma(\mathcal{P})}(\Phi_J) \leq \Gamma_J$. Por lo tanto, $\text{Stab}_{\Gamma(\mathcal{P})}(\Phi_J) = \Gamma_J$. \square

Sean \mathcal{P} un n -politopo regular y $\rho_0, \dots, \rho_{n-1}$ los generadores distinguidos de \mathcal{P} con respecto a una bandera Φ . De las proposiciones 1.4.3 y 1.4.4 tenemos que $\Gamma((\Phi)_j / (\Phi)_i) \cong \text{Stab}_{\Gamma(\mathcal{P})}(\Phi_J) = \Gamma_J$.

- Si $J = \emptyset$ entonces $\Gamma(\mathcal{P}) = \text{Stab}_{\Gamma(\mathcal{P})}(\Phi_J) = \Gamma_J = \langle \rho_0, \dots, \rho_{n-1} \rangle$. Por lo tanto $\Gamma(\mathcal{P}) = \langle \rho_0, \dots, \rho_{n-1} \rangle$.

- Consideremos la sección $\mathcal{Q} := (\Phi)_j/(\Phi)_i$ de \mathcal{P} , con $-1 \leq i \leq j \leq n$. Si $J = \{-1, \dots, i, j, \dots, n\}$ entonces $\Gamma(\mathcal{Q}) = \langle \rho_{i+1}, \dots, \rho_{j-1} \rangle$.

Sean \mathcal{P} un n -politopo regular con símbolo de Schläfli $\{p_1, \dots, p_{n-1}\}$ y Φ la bandera base de \mathcal{P} . Como \mathcal{P} es regular, podemos considerar sus generadores distinguidos $\rho_0, \dots, \rho_{n-1}$ y sabemos que $\Phi\rho_i = \Phi^i$ para cada $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Así que

$$\Phi\rho_i^2 = (\Phi^i)\rho_i = (\Phi\rho_i)^i = \Phi^{i,i} = \Phi. \quad (1.1)$$

Además si $|i - j| > 1$, entonces

$$\Phi\rho_i\rho_j = (\Phi^i)\rho_j = (\Phi\rho_j)^i = \Phi^{j,i} = \Phi^{i,j} = \Phi\rho_j\rho_i \quad (1.2)$$

De la ecuación (1.1), vemos que ρ_i^2 fija a la bandera Φ , como $\Gamma(\mathcal{P})$ actúa libremente en $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ tenemos que $\rho_i^2 = 1$. De la ecuación (1.2), ρ_i y ρ_j conmutan cuando $|i - j| > 1$, así que $(\rho_i\rho_j)^2 = 1$. Por otra parte, para una sección $\mathcal{Q} = (\Phi)_{i+1}/(\Phi)_{i-2}$ con $0 < i < n$, el grupo $\Gamma(\mathcal{Q}) \cong \langle \rho_{i-1}, \rho_i \rangle$, por lo tanto $(\rho_{i-1}\rho_i)^{p_i} = 1$. Hemos demostrado entonces el siguiente teorema.

Teorema 1.4.5. *El grupo de automorfismos de un n -politopo regular con símbolo de Schläfli $\{p_1, \dots, p_{n-1}\}$ es:*

$$\Gamma(\mathcal{P}) = \langle \rho_0, \dots, \rho_{n-1} \rangle,$$

que satisfacen las relaciones

$$\rho_i^2 = (\rho_i\rho_j)^2 = (\rho_{k-1}\rho_k)^{p_k} = 1, \quad (1.3)$$

con $i, j \in \{0, \dots, n-1\}$, $k \in \{1, \dots, n-1\}$ e $|i - j| > 1$.

Cuando las relaciones en (1.3) determinan por completo el grupo, entonces el grupo de automorfismos $\Gamma(\mathcal{P})$ se suele denotar como $[p_1, \dots, p_{n-1}]$. Esto sucede por ejemplo, en el caso en que \mathcal{P} sea un politopo convexo (o teselación de la esfera) o una teselación en el espacio euclidiano o hiperbólico.

1.5 Grupo de rotaciones

Sea \mathcal{P} un n -politopo regular con $\Gamma(\mathcal{P}) = \langle \rho_0, \dots, \rho_{n-1} \rangle$ donde $\rho_0, \dots, \rho_{n-1}$ son los generadores distinguidos para alguna bandera base Φ . Definimos:

$$\sigma_i := \rho_{i-1}\rho_i,$$

para $i \in \{1, \dots, n-1\}$. El subgrupo

$$\Gamma^+(\mathcal{P}) := \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \rangle$$

de $\Gamma(\mathcal{P})$ es llamado *subgrupo de rotaciones* de $\Gamma(\mathcal{P})$ o *grupo de rotaciones de \mathcal{P}* . Si \mathcal{P} tiene símbolo de Schläfli $\{p_1, \dots, p_{n-1}\}$ se satisfacen la siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}\sigma^{p_i} &= 1 && \text{para } 1 \leq i \leq n-1, \\ (\sigma_i \sigma_{i+1} \cdots \sigma_j)^2 &= 1 && \text{para } 1 \leq i < j \leq n-1.\end{aligned}$$

Notemos que $[\Gamma(\mathcal{P}) : \Gamma^+(\mathcal{P})]$ es a lo más dos. En el caso que $\Gamma(\mathcal{P}) = [p_1, \dots, p_{n-1}]$, es común denotar al grupo de rotaciones de \mathcal{P} como $[p_1, \dots, p_{n-1}]^+$.

Proposición 1.5.1. *El grupo de rotaciones $\Gamma^+(\mathcal{P})$ es igual a todos los automorfismos que se escriben como palabras pares en términos de los generadores distinguidos $\rho_0, \dots, \rho_{n-1}$, con respecto a una bandera base Φ .*

Demostración. Como $\Gamma^+(\mathcal{P}) = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \rangle$ con $\sigma_i = \rho_{i-1} \rho_i$ para $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Si $\beta \in \Gamma^+(\mathcal{P})$ entonces $\beta = \sigma_{i_1} \sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_k}$, claramente β es una palabra par con respecto a los generadores distinguidos.

Ahora, si $\gamma \in \Gamma(\mathcal{P})$ tal que $\gamma = \rho_{i_1} \rho_{i_2} \cdots \rho_{i_k}$ con k par (sin pérdida de generalidad consideramos que $i_j \neq i_{j+1}$), demostraremos que $\gamma \in \Gamma^+(\mathcal{P})$.

Si $i_j < i_{j+1}$ con $j \in \{1, \dots, k-1\}$ entonces:

$$\begin{aligned}\rho_{i_j} \rho_{i_{j+1}} &= (\rho_{i_j} \rho_{i_{j+1}}) (\rho_{i_{j+1}} \rho_{i_{j+2}}) \cdots (\rho_{i_{j+1}-2} \rho_{i_{j+1}-1}) (\rho_{i_{j+1}-1} \rho_{i_{j+1}}) \\ &= \sigma_{i_{j+1}} \sigma_{i_{j+2}} \cdots \sigma_{i_{j+1}-1} \sigma_{i_{j+1}},\end{aligned}\tag{1.4}$$

así que $\rho_{i_j} \rho_{i_{j+1}} = \sigma_{i_{j+1}} \sigma_{i_{j+2}} \cdots \sigma_{i_{j+1}-1} \sigma_{i_{j+1}} \in \Gamma^+(\mathcal{P})$.

Por otro lado, si $i_j > i_{j+1}$ con $j \in \{1, \dots, k-1\}$ tenemos:

$$\begin{aligned}\rho_{i_j} \rho_{i_{j+1}} &= (\rho_{i_j} \rho_{i_{j-1}}) (\rho_{i_{j-1}} \rho_{i_{j-2}}) \cdots (\rho_{i_{j+1}+2} \rho_{i_{j+1}+1}) (\rho_{i_{j+1}+1} \rho_{i_{j+1}}) \\ &= (\sigma_{i_j})^{-1} (\sigma_{i_{j-1}})^{-1} \cdots (\sigma_{i_{j+1}+2})^{-1} (\sigma_{i_{j+1}+1})^{-1},\end{aligned}\tag{1.5}$$

así que $\rho_{i_j} \rho_{i_{j+1}} = (\sigma_{i_j})^{-1} (\sigma_{i_{j-1}})^{-1} \cdots (\sigma_{i_{j+1}+2})^{-1} (\sigma_{i_{j+1}+1})^{-1} \in \Gamma^+(\mathcal{P})$.

Concatenando $\rho_j \rho_{j+1}$ para $j = \{1, \dots, k-1\}$ escribimos a γ como en (1.4) si $i_j < i_{j+1}$ o como en (1.5) si $i_j > i_{j+1}$. Por lo tanto $\gamma \in \Gamma^+(\mathcal{P})$. \square

Sean \mathcal{P} un n -politopo regular, $\Phi \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$ una bandera base. Para cada $i \in \{0, \dots, n-1\}$ denotamos por F_i a la i -cara de Φ . Sean $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{n-1}$ los generadores distinguidos de \mathcal{P} con respecto a Φ . De la proposición 1.4.4, sabemos que:

$$\text{Stab}_{\Gamma(\mathcal{P})}(F_i) = \langle \rho_j \mid j \neq i \rangle.\tag{1.6}$$

Entonces el estabilizador de F_i bajo $\Gamma^+(\mathcal{P})$ es:

$$\text{Stab}_{\Gamma^+(\mathcal{P})}(F_i) = \langle \rho_j \mid j \neq i \rangle \cap \Gamma^+(\mathcal{P}).$$

Encontraremos este grupo en términos de los generadores de $\Gamma^+(\mathcal{P})$.

Demostraremos que:

$$\text{Stab}_{\Gamma^+(\mathcal{P})}(F_i) = \langle \sigma_j, \sigma_i \sigma_{i+1} \mid j \neq i, i+1 \rangle.\tag{1.7}$$

Veamos primero que $\langle \sigma_j, \sigma_i \sigma_{i+1} \mid j \neq i, i+1 \rangle \leq \text{Stab}_{\Gamma^+(\mathcal{P})}(F_i) = \text{Stab}_{\Gamma(\mathcal{P})}(F_i) \cap \Gamma^+(\mathcal{P})$. Para lo cual tenemos que demostrar que cada generador de $\langle \sigma_j, \sigma_i \sigma_{i+1} \mid j \neq i, i+1 \rangle$ pertenece al $\text{Stab}_{\Gamma^+(\mathcal{P})}(F_i)$. Sea σ_j con $j \neq i, i+1$. Como $\sigma_j = \rho_{j-1} \rho_j$ con $j \neq i, i+1$, entonces $\sigma_j \in \langle \rho_k \mid k \neq i \rangle = \text{Stab}_{\Gamma(\mathcal{P})}(F_i)$ y $\sigma_j \in \Gamma^+(\mathcal{P})$. Por lo tanto $\sigma_j \in \text{Stab}_{\Gamma^+(\mathcal{P})}(F_i)$ para $j \neq i, i+1$. Por otro lado, como $\sigma_i \sigma_{i+1} \in \Gamma^+(\mathcal{P})$ y $\sigma_i \sigma_{i+1} = \rho_{i-1} \rho_{i+1} \in \langle \rho_k \mid k \neq i \rangle = \text{Stab}_{\Gamma(\mathcal{P})}(F_i)$ entonces $\sigma_i \sigma_{i+1} \in \text{Stab}_{\Gamma^+(\mathcal{P})}(F_i)$.

Ahora demostraremos que $\text{Stab}_{\Gamma^+(\mathcal{P})}(F_i) \leq \langle \sigma_j, \sigma_i \sigma_{i+1} \mid j \neq i, i+1 \rangle$. Sea $\gamma \in \text{Stab}_{\Gamma^+(\mathcal{P})}(F_i)$ entonces $\gamma \in \text{Stab}_{\Gamma(\mathcal{P})}(F_i) = \langle \rho_j \mid j \neq i \rangle$ y $\gamma \in \Gamma^+(\mathcal{P})$. Como $\gamma \in \Gamma^+(\mathcal{P})$, de la proposición 1.5.1 sabemos que $\gamma = \rho_{i_1} \rho_{i_2} \cdots \rho_{i_k}$ con k par (sin pérdida de generalidad consideramos que $i_j \neq i_{j+1}$).

Si $i_j < i_{j+1} < i$ entonces:

$$\begin{aligned} \rho_{i_j} \rho_{i_{j+1}} &= (\rho_{i_j} \rho_{i_{j+1}})(\rho_{i_{j+1}} \rho_{i_{j+2}}) \cdots (\rho_{i_{j+1}-2} \rho_{i_{j+1}-1})(\rho_{i_{j+1}-1} \rho_{i_{j+1}}) \\ &= \sigma_{i_{j+1}} \sigma_{i_{j+2}} \cdots \sigma_{i_{j+1}-1} \sigma_{i_{j+1}}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

en este caso no aparece σ_i ni σ_{i+1} en la expresión (1.8).

Si $i_{j+1} < i_j < i$ tenemos:

$$\begin{aligned} \rho_{i_j} \rho_{i_{j+1}} &= (\rho_{i_j} \rho_{i_{j-1}})(\rho_{i_{j-1}} \rho_{i_{j-2}}) \cdots (\rho_{i_{j+1}+2} \rho_{i_{j+1}+1})(\rho_{i_{j+1}+1} \rho_{i_{j+1}}) \\ &= (\sigma_{i_j})^{-1} (\sigma_{i_{j-1}})^{-1} \cdots (\sigma_{i_{j+1}+2})^{-1} (\sigma_{i_{j+1}+1})^{-1}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

en este caso tampoco aparecen σ_i ni σ_{i+1} en la expresión (1.9). Análogamente no aparecen σ_i ni σ_{i+1} en $\rho_{i_j} \rho_{i_{j+1}}$ cuando $i < i_j < i_{j+1}$ o $i < i_{j+1} < i_j$.

Por último, si $i_j < i < i_{j+1}$ (el caso $i_{j+1} < i < i_j$ es análogo):

$$\begin{aligned} \rho_{i_{j+1}} \rho_{i_j} &= \rho_{i_j} \rho_{i_{j+1}} = (\rho_{i_j} \rho_{i_{j+1}})(\rho_{i_{j+1}} \rho_{i_{j+2}}) \cdots (\rho_{i_{j+1}-2} \rho_{i_{j+1}-1})(\rho_{i_{j+1}-1} \rho_{i_{j+1}}) \\ &= \sigma_{i_{j+1}} \sigma_{i_{j+2}} \cdots \sigma_i \sigma_{i+1} \cdots \sigma_{i_{j+1}-1} \sigma_{i_{j+1}}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

En este caso aparecen σ_i y σ_{i+1} exactamente una vez y lo hacen de manera consecutiva por lo que $\rho_{i_j} \rho_{i_{j+1}} \in \langle \sigma_j, \sigma_i \sigma_{i+1} \mid j \neq i, i+1 \rangle$.

Como $\gamma = \rho_{i_1} \rho_{i_2} \cdots \rho_{i_k}$, escribimos a γ concatenando $\rho_j \rho_{j+1}$ para $j = \{1, \dots, k-1\}$ según sea el caso. Por lo tanto $\text{Stab}_{\Gamma^+(\mathcal{P})}(F_i) \leq \langle \sigma_j, \sigma_i \sigma_{i+1} \mid j \neq i, i+1 \rangle$.

1.6 Polítopos quirales

Sea \mathcal{P} un n -politopo. Decimos que \mathcal{P} es *quiral* o *torcido* si su grupo de simetrías $\Gamma(\mathcal{P})$ induce dos órbitas en banderas y banderas adyacentes están en diferentes órbitas.

La condición de que banderas adyacentes están en diferentes órbitas es importante, pues existen politopos de dos órbitas que no cumplen esta condición, como es el caso del cuboctaedro (figura 1.30) pues las banderas 0-adyacentes y 1-adyacentes están en la misma órbita.

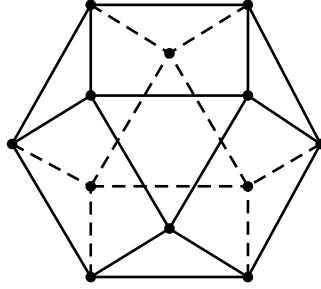


Figura 1.30: El cuboctaedro tiene dos órbitas pero no es quiral

Sea Φ una bandera base de \mathcal{P} un n -politopo quiral. Denotemos como $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ a las dos órbitas en banderas. Si $\Phi \in \mathcal{O}_1$ entonces $\Phi^{i-1}, \Phi^i \in \mathcal{O}_2$ con $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Como Φ^{i-1} y Φ^i están en la misma órbita, existe $\sigma_i \in \Gamma(\mathcal{P})$ tal que $\Phi^{i-1}\sigma_i = \Phi^i$ para cada $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Entonces $\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \rangle \leq \Gamma(\mathcal{P})$ y:

$$\Phi\sigma_i = ((\Phi\sigma_i)^{i-1})^{i-1} = (\Phi^{i-1}\sigma_i)^{i-1} = (\Phi^i)^{i-1} = \Phi^{i,i-1}.$$

De donde se sigue que si $i < j$, entonces:

$$\begin{aligned} \Phi\sigma_i\sigma_{i+1} \cdots \sigma_j &= (\Phi\sigma_i)\sigma_{i+1} \cdots \sigma_j = (\Phi^{i,i-1})\sigma_{i+1} \cdots \sigma_j = (\Phi\sigma_{i+1} \cdots \sigma_j)^{i,i-1} \\ &= ((\Phi^{i+1,i})\sigma_{i+2} \cdots \sigma_j)^{i,i-1} = ((\Phi\sigma_{i+2} \cdots \sigma_j)^{i+1,i})^{i,i-1} \\ &= \Phi^{j,j-1,j-2,\dots,i+1,i,i,i-1} = \Phi^{j,i-1}. \end{aligned}$$

El toro de la figura 1.31 es un ejemplo de un politopo quiral, dibujamos en esta figura a la bandera base Φ . En la figura 1.32 dibujamos a la bandera $\Phi\sigma_1 = \Phi^{1,0}$ y en la figura 1.33 se muestran las banderas $\Phi, \Phi\sigma_1, \Phi\sigma_1^2$ y $\Phi\sigma_1^3$.

La figura 1.34 muestra la bandera $\Phi\sigma_2 = \Phi^{2,1}$. Y en la figura 1.35 se muestran las banderas $\Phi, \Phi\sigma_2, \Phi\sigma_2^2$ y $\Phi\sigma_2^3$.

Si continuamos del mismo modo, es decir, aplicamos $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ a las banderas verdes obtenidas hasta ahora, obtenemos la órbita de Φ bajo $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ (la cual corresponde a las banderas verdes de la figura 1.36). En la figura 1.36 se muestra las dos órbitas en banderas bajo su grupo de simetrías ya que $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle = \Gamma(\mathcal{P})$ (el cual es un resultado que más adelante se demuestra).

Sea Ψ una bandera de \mathcal{P} . Decimos que Ψ es *par con respecto a* Φ si existe una sucesión de banderas

$$\Phi = \Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_{2k-1}, \Phi_{2k} = \Psi,$$

donde cualesquiera dos banderas consecutivas son adyacentes. Decimos que Ψ es *impar (con respecto a* $\Phi)$ si no es par.

Lema 1.6.1. Sea \mathcal{P} un n -politopo quiral y Φ una bandera base. El conjunto de banderas pares e impares con respecto a Φ son las dos órbitas en banderas que induce $\Gamma(\mathcal{P})$.

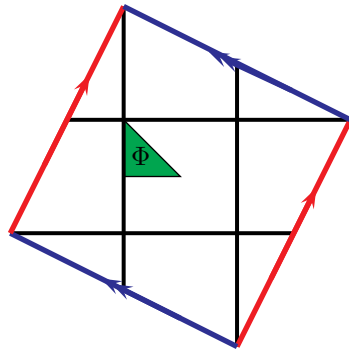


Figura 1.31: Politopo quiral

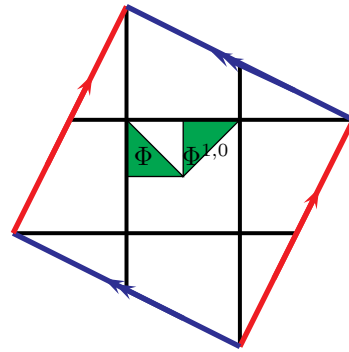


Figura 1.32: $\Phi\sigma_1 = \Phi^{1,0}$

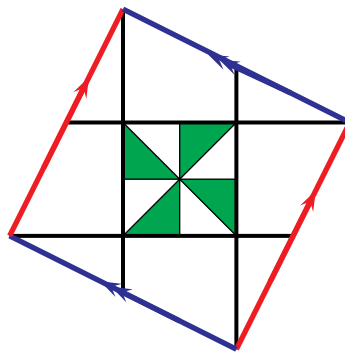


Figura 1.33: $\Phi, \Phi\sigma_1, \Phi\sigma_1^2$ y $\Phi\sigma_1^3$

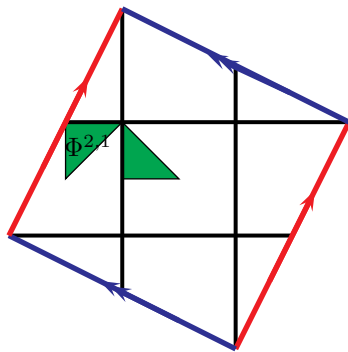


Figura 1.34: $\Phi\sigma_2 = \Phi^{2,1}$

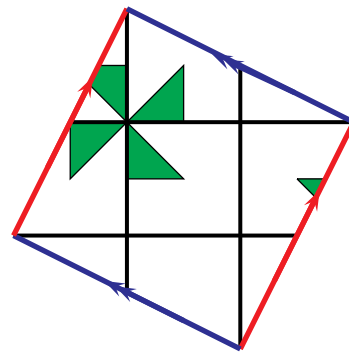


Figura 1.35: $\Phi, \Phi\sigma_2, \Phi\sigma_2^2$ y $\Phi\sigma_2^3$

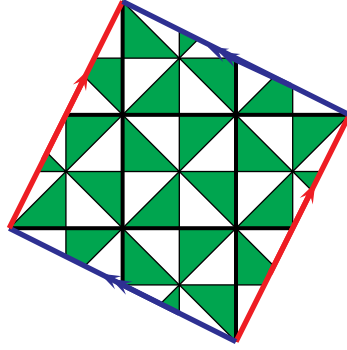


Figura 1.36: Órbitas en banderas

Demostración. Primero probaremos que $\Gamma(\mathcal{P})$ es transitivo en el conjunto de banderas pares.

Sea Ψ una bandera par, es decir,

$$\Phi = \Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_{2k-1}, \Phi_{2k} = \Psi$$

es una sucesión de banderas donde cualesquiera dos banderas consecutivas son adyacentes. Definimos $\Psi_l := \Phi_{2l}$ para $l = 0, \dots, k$. Entonces de la sucesión de banderas

$$\Phi = \Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_{k-1}, \Psi_k = \Psi$$

se tiene que si $\Psi_{l+1} \neq \Psi_l$ entonces Ψ_l y Ψ_{l+1} difieren exactamente en dos caras.

Demostraremos por inducción en k que existe $\varphi \in \Gamma(\mathcal{P})$ tal que $\Phi\varphi = \Psi$. Si $k = 0$ tenemos $\Phi = \Phi_0 = \Psi_0 = \Psi$ entonces 1 cumple que $\Phi 1 = \Psi$.

Sea $k > 0$. Por hipótesis de inducción existe $\sigma \in \Gamma(\mathcal{P})$ tal que $\Phi\sigma = \Psi_{k-1}$. Si $\Psi_k = \Psi_{k-1}$, entonces $\Phi\sigma = \Psi_{k-1} = \Psi_k$. Por otro lado, si $\Psi_k \neq \Psi_{k-1}$, como Ψ_k y Ψ_{k-1} difieren exactamente en dos caras, existen i, j con $i \neq j$ tal que

$$\Psi_k = (\Psi_{k-1})^{i,j} = (\Phi\sigma)^{i,j} = (\Phi^{i,j})\sigma.$$

Veamos que existe $\rho \in \Gamma(\mathcal{P})$ tal que $\Phi\rho = \Phi^{i,j}$.

- Si $i = j$, entonces $\rho = 1$.
- Si $i < j$, definimos $\rho = \sigma_j^{-1}\sigma_{j-1}^{-1}\dots\sigma_{i+1}^{-1}$. Como $\Phi^{i-1}\sigma_i = \Phi^i$ entonces $\Phi^i\sigma_i^{-1} = \Phi^{i-1}$ y se sigue que:

$$\Phi\sigma_i^{-1} = (\Phi\sigma_i^{-1})^{i,i} = (\Phi^i\sigma_i^{-1})^i = (\Phi^{i-1})^i = \Phi^{i-1,i}.$$

Así que:

$$\begin{aligned} \Phi\rho &= \Phi\sigma_j^{-1}\sigma_{j-1}^{-1}\dots\sigma_{i+1}^{-1} = \Phi^{j-1,j}\sigma_{j-1}^{-1}\dots\sigma_{i+1}^{-1} \\ &= (\Phi\sigma_{j-1}^{-1}\dots\sigma_{i+1}^{-1})^{j-1,j} = ((\Phi\sigma_{j-1}^{-1}\dots\sigma_{i+1}^{-1})^{j-2,j-1})^{j-1,j} \\ &= \Phi^{i,i+1,\dots,j-2,j-1,j-1,j} = \Phi^{i,j}. \end{aligned}$$

- Si $j = i - 1$, definimos $\rho = \sigma_i$ pues $\Phi\rho = \Phi\sigma_i = \Phi^{i,i-1} = \Phi^{i,j}$.
- Si $j < i - 1$, definimos $\rho = \sigma_{j+1} \cdots \sigma_i$ ya que $\Phi\rho = \Phi^{i,j}$.

En cualquier caso $\rho \in \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \rangle \leq \Gamma(\mathcal{P})$. Por lo que definimos $\varphi := \rho\sigma \in \Gamma(\mathcal{P})$ y $\Phi\varphi = \Psi_k$ como se quería. Hemos demostrado que $\Gamma(\mathcal{P})$ es transitivo en banderas pares.

Ahora probaremos que $\Gamma(\mathcal{P})$ es transitivo en banderas impares.

Si Ψ es una bandera impar con respecto a Φ , entonces existen Λ una bandera par y $j \in \{0, \dots, n-1\}$ tal que $\Psi = \Lambda^j$. Como Λ está en la órbita de Φ , pues Λ y Φ son banderas pares (las banderas pares son una órbita). Ahora, como \mathcal{P} es quiral, entonces Λ^j no está en la órbita de Φ . Como solo hay dos órbitas en banderas, entonces $\Psi = \Lambda^j$ está en la órbita de Φ^i . Por lo tanto todas las banderas impares están en la órbita de Φ^i . Entonces $\Gamma(\mathcal{P})$ es transitivo en banderas impares.

Por definición banderas adyacentes están en diferentes órbitas. Entonces las dos órbitas en banderas de \mathcal{P} son las banderas pares e impares. \square

Lema 1.6.2. Sea \mathcal{P} un n -politopo quiral. El grupo de automorfismos $\Gamma(\mathcal{P})$ es simplemente transitivo en cadenas Ψ_J donde $J = \{-1, 0, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$ con $i \in \{0, \dots, n-1\}$.

Demostración. Primero demostraremos que $\Gamma(\mathcal{P})$ actúa transitivamente en cadenas Ψ_J . Sean Φ y Ψ la bandera base y una bandera de \mathcal{P} , respectivamente. Entonces

$$\Phi_J = \Phi \setminus \{(\Phi)_i\}$$

y

$$\Psi_J = \Psi \setminus \{(\Psi)_i\}.$$

Por demostrar que existe $\gamma \in \Gamma(\mathcal{P})$ tal que $\Phi_J\gamma = \Psi_J$.

Si Ψ es una bandera par. Como Φ es par, por el lema anterior, existe $\gamma \in \Gamma(\mathcal{P})$ tal que $\Phi\gamma = \Psi$, entonces $\Phi_J\gamma = \Psi_J$.

Por otro lado, si Ψ es impar. Como Φ^i pertenece a la órbita de banderas impares, ya que banderas adyacentes están en diferentes órbitas. Por el lema anterior existe $\alpha \in \Gamma(\mathcal{P})$ tal que $\Phi^i\alpha = \Psi$, se sigue que $\Phi_J\alpha = \Psi_J$. Por lo tanto, $\Gamma(\mathcal{P})$ actúa transitivamente en cadenas Ψ_J .

Ahora demostraremos que $\Gamma(\mathcal{P})$ actúa libremente en cadenas Ψ_J . Sea $\Psi \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$, como la acción es transitiva en cadenas de tipo Ψ_J , existe $\gamma \in \Gamma(\mathcal{P})$ tal que $\Psi_J\gamma = \Psi_J$. Así que

$$(\Psi)_j\gamma = (\Psi)_j \text{ para cualquier } j \neq i.$$

Supongamos que $(\Psi)_i\gamma \neq (\Psi)_i$. Por la condición diamante tenemos que $(\Psi)_i\gamma = (\Psi^i)_i$. Por lo que

$$\Psi\gamma = \Psi^i, \tag{1.11}$$

Si Ψ es una bandera par entonces Ψ^i es impar, pues son banderas adyacentes, es decir, están en diferentes órbitas. Así que la ecuación (1.11) no puede pasar, por lo tanto $(\Psi)_i\gamma = (\Psi)_i$, se sigue que $\Psi\gamma = \Psi$. Como la acción de $\Gamma(\mathcal{P})$ es libre en $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ entonces $\gamma = 1$.

Análogamente, si Ψ es una bandera impar entonces Ψ^i es par, pues son banderas adyacentes. Por lo que la ecuación (1.11) no puede pasar, pues Ψ y Ψ^i están en diferentes órbitas. Así que $(\Psi)_i\gamma = (\Psi)_i$ y por lo tanto tenemos que $\Psi\gamma = \Psi$. Como la acción de $\Gamma(\mathcal{P})$ es libre en $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ entonces $\gamma = 1$.

En cualquier caso si $\Psi_J\gamma = \Psi_J$ entonces $\gamma = 1$. Así que $\Gamma(\mathcal{P})$ actúa libremente en cadenas Ψ_J .

Por lo tanto, la acción de $\Gamma(\mathcal{P})$ en las cadenas de Ψ_J es simplemente transitiva. \square

Como consecuencia del lema 1.6.2, $\Gamma(\mathcal{P})$ actúa transitivamente en las i -caras, para todo $i \in \{0, \dots, n-1\}$.

Teorema 1.6.3. *Sea \mathcal{P} un n -politopo quiral. Entonces*

$$\Gamma(\mathcal{P}) = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \rangle.$$

Demostración. Análogamente a las demostraciones de los lemas 1.6.1 y 1.6.2 se prueba que el grupo $\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \rangle$ es simplemente transitivo en cadenas $\Psi_J = \Psi \setminus \{(\Psi)_i\}$ donde $i \in \{0, \dots, n-1\}$.

Tenemos que $\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \rangle \leq \Gamma(\mathcal{P})$. Si $\gamma \in \Gamma(\mathcal{P})$ queremos ver que $\gamma \in \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \rangle$. Sea $\Psi \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$ entonces $\Psi_J = \Psi \setminus \{(\Psi)_i\}$ y $\Psi_J\gamma$ es alguna cadena de \mathcal{P} , digamos Λ_J , es decir,

$$\Psi_J\gamma = \Lambda_J,$$

además γ es único. Por otro lado $\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \rangle$ también es simplemente transitivo en cadenas Ψ_J . Es decir, existe $\gamma' \in \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \rangle$ tal que $\Psi_J\gamma' = \Lambda_J$, donde γ' es único. Entonces $\gamma = \gamma'$. Así que $\gamma \in \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \rangle$. Por lo tanto $\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \rangle \geq \Gamma(\mathcal{P})$ y finalmente $\Gamma(\mathcal{P}) = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \rangle$ como se quería. \square

Sea $\Phi \in \mathcal{O}_1$. Por definición de quiralidad, el grupo de simetrías induce dos órbitas en banderas, donde $\Phi\gamma \in \mathcal{O}_1$, para cualquier $\gamma \in \Gamma(\mathcal{P})$ y $\Phi^i \in \mathcal{O}_2$, entonces no existe $\gamma \in \Gamma(\mathcal{P})$ tal que $\Phi\gamma = \Phi^i \in \mathcal{O}_2$, es decir, no hay “reflexiones” como simetrías. Entonces nos será útil definir $\Gamma^+(\mathcal{P}) := \Gamma(\mathcal{P}) = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \rangle$. Así que el estabilizador de F_i una i -cara de un politopo quiral \mathcal{P} será como en la ecuación (1.7), es decir,

$$\text{Stab}_{\Gamma^+(\mathcal{P})}(F_i) = \text{Stab}_{\Gamma(\mathcal{P})}(F_i) = \langle \sigma_j, \sigma_i\sigma_{i+1} \mid j \neq i, i+1 \rangle. \quad (1.12)$$

Lema 1.6.4. *Sea \mathcal{P} un n -politopo y denotemos al conjunto de todas las órbitas en banderas de \mathcal{P} bajo la acción de $\Gamma(\mathcal{P})$ como $\text{Orb}(\mathcal{P})$. Sean $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \text{Orb}(\mathcal{P})$ y $\Phi \in \mathcal{O}_1$. Si $\Phi^i \in \mathcal{O}_2$ para cada $i \in \{0, \dots, n-1\}$, entonces para cualquier bandera $\Psi \in \mathcal{O}_1$, $\Psi^i \in \mathcal{O}_2$.*

Demostración. Sea $\Phi \in \mathcal{O}_1$ y $\Phi^i \in \mathcal{O}_2$ para cada $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Por otro lado, sea Ψ cualquier bandera en \mathcal{O}_1 . Como $\Phi, \Psi \in \mathcal{O}_1$, entonces existe $\gamma \in \Gamma(\mathcal{P})$ tal que $\Phi\gamma = \Psi$. Entonces tenemos que:

$$\Psi^i = (\Phi\gamma)^i = \Phi^i\gamma,$$

así que Φ^i y Ψ^i están en la misma órbita, es decir, $\Psi^i \in \mathcal{O}_2$. \square

Proposición 1.6.5. *Sea \mathcal{P} un n -politopo no regular y sean $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \text{Orb}(\mathcal{P})$ donde $\mathcal{O}_1 \neq \mathcal{O}_2$ con $\Phi \in \mathcal{O}_1$. Si $\Phi^i \in \mathcal{O}_2$ para cada $i \in \{0, \dots, n-1\}$, entonces \mathcal{P} tiene exactamente dos órbitas en banderas.*

Demostración. Primero observaremos que $\Phi^{j,i} \in \mathcal{O}_1$ para $i, j \in \{0, \dots, n-1\}$. Como $\Phi \in \mathcal{O}_1$, entonces $\Phi^i, \Phi^j \in \mathcal{O}_2$, es decir, existe $\alpha \in \Gamma(\mathcal{P})$ tal que:

$$\Phi^j = \Phi^i \alpha = (\Phi \alpha)^i.$$

Por otro lado, tenemos:

$$\Phi^{j,i} = ((\Phi \alpha)^i)^i = \Phi \alpha,$$

es decir, Φ y $\Phi^{j,i}$ están en la misma órbita, por lo tanto $\Phi^{j,i} \in \mathcal{O}_1$.

Sea $\Psi \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$, como \mathcal{P} es fuertemente conexo por banderas, existe una sucesión de banderas, tal que:

$$\Phi = \Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_m = \Psi,$$

donde Φ_i y Φ_{i+1} son adyacentes para $i \in \{0, \dots, m-1\}$. Usaremos inducción sobre m para probar que si Ψ es cualquier bandera par con respecto a Φ (es decir, si $m = 2k$) está en \mathcal{O}_1 .

Si $m = 0$, entonces $\Phi = \Phi_0 = \Psi$ por lo tanto $\Psi \in \mathcal{O}_1$. Por hipótesis de inducción, para $m \geq 1$, la bandera $\Phi_{m-2} \in \mathcal{O}_1$, es decir, Φ y Φ_{m-2} están en la misma órbita, entonces existe $\gamma \in \Gamma(\mathcal{P})$ tal que $\Phi \gamma = \Phi_{m-2}$.

$$\Phi_m = (\Phi_{m-2})^{j,l} = (\Phi \gamma)^{j,l} = (\Phi^{j,l}) \gamma,$$

para algunos $j, l \in \{0, \dots, n-1\}$. Por la observación anterior, sabemos que $\Phi^{j,l} \in \mathcal{O}_1$, así que $(\Phi^{j,l}) \gamma \in \mathcal{O}_1$. Por lo tanto $\Phi_m \in \mathcal{O}_1$.

Enseguida demostraremos que las banderas impares con respecto a Φ están en la órbita \mathcal{O}_2 , ahora $m = 2k + 1$.

Como Φ_{m-1} es una bandera par, entonces $\Phi_{m-1} \in \mathcal{O}_1$, es decir, Φ y Φ_{m-1} están en la misma órbita, entonces existe $\gamma \in \Gamma(\mathcal{P})$ tal que $\Phi \gamma = \Phi_{m-1}$. Así que:

$$\Psi = \Phi_m = (\Phi_{m-1})^k = (\Phi \gamma)^k = \Phi^k \gamma,$$

es decir, Φ^k y Ψ están en la misma órbita, pero sabemos por hipótesis que $\Phi^k \in \mathcal{O}_2$, por lo tanto $\Psi \in \mathcal{O}_2$.

Por la conexidad fuerte por banderas, cualquier bandera de \mathcal{P} se puede escribir como una bandera par o impar con respecto a Φ , por lo tanto hay exactamente dos órbitas en banderas. \square

Proposición 1.6.6. *Sea \mathcal{P} un n -politopo no regular y Φ una bandera base. Si existen $\sigma_i \in \Gamma(\mathcal{P})$ tales que $\Phi \sigma_i = \Phi^{i,i-1}$ para cada $i \in \{1, \dots, n-1\}$, entonces \mathcal{P} es quiral.*

Demostración. Primero notemos que como $\Phi \sigma_i = \Phi^{i,i-1}$ para cada $i \in \{1, \dots, n-1\}$, tenemos que $(\Phi \sigma_i)^{i-1} = (\Phi^{i,i-1})^{i-1}$ de donde se sigue que:

$$\Phi^{i-1} \sigma_i = \Phi^i, \tag{1.13}$$

es decir, Φ^{i-1} y Φ^i están en la misma órbita.

Ahora, supongamos que $\Phi \in \mathcal{O}_1$. Como \mathcal{P} no es regular, existe $i \in \{0, \dots, n-1\}$ tal que $\Phi^i \notin \mathcal{O}_1$, con $\Phi^i \in \mathcal{O}_2$.

- Como se cumple la ecuación (1.13), tenemos que $\Phi^{i-1}\sigma_i = \Phi^i$, es decir, Φ^{i-1} y Φ^i están en la misma órbita, así que, $\Phi^{i-1} \in \mathcal{O}_2$. Luego, como $\Phi^{i-2}\sigma_{i-1} = \Phi^{i-1}$, es decir, Φ^{i-2} y Φ^{i-1} están en la misma órbita, entonces $\Phi^{i-2} \in \mathcal{O}_2$. Continuando del mismo modo, obtenemos que $\Phi^j \in \mathcal{O}_2$, para todo $j \in \{0, \dots, i\}$.
- Por otro lado, tenemos que $\Phi^i\sigma_{i+1} = \Phi^{i+1}$, es decir, Φ^i y Φ^{i+1} están en la misma órbita, entonces, $\Phi^{i+1} \in \mathcal{O}_2$. Luego, como $\Phi^{i+1}\sigma_{i+2} = \Phi^{i+2}$, es decir, Φ^{i+1} y Φ^{i+2} están en la misma órbita, entonces $\Phi^{i+2} \in \mathcal{O}_2$. Continuando del mismo modo, obtenemos que $\Phi^j \in \mathcal{O}_2$, para todo $j \in \{i+1, \dots, n-1\}$.

Por lo tanto, $\Phi^i \in \mathcal{O}_2$ para cada $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Así que se cumplen las hipótesis de la proposición 1.6.5. Por lo tanto \mathcal{P} tiene exactamente dos órbitas en banderas. Luego por el lema 1.6.4, tenemos que banderas adyacentes están en diferentes órbitas. Se sigue que \mathcal{P} es quirral. \square

Capítulo 2

Panales regulares de rango cuatro

En este capítulo estudiaremos los panales (o teselaciones) regulares del espacio euclidiano \mathbb{E}^3 y de la esfera S^3 ; los panales regulares en el espacio hiperbólico H^3 se estudian en [6]. Todos ellos son politopos regulares de rango cuatro. En la sección 2.1 describiremos estos panales, sus grupos de simetrías y sus subgrupos de rotaciones. En la sección 2.2, observaremos la relación que tienen los polígonos de Petrie y ciertos elementos de sus grupos de rotaciones, llamados torsiones.

2.1 Panales regulares de tipo $\{p,q,r\}$

De ([7], §7) y ([13], §23) sabemos que solo hay un panel regular en \mathbb{E}^3 y tiene símbolo de Schläfli $\{4, 3, 4\}$. Además hay seis panales regulares esféricos de rango cuatro de tipo:

$$\{3, 3, 3\}, \{4, 3, 3\}, \{3, 3, 4\}, \{3, 4, 3\}, \{5, 3, 3\}, \{3, 3, 5\}.$$

En la tabla 2.1 aparecen estos panales con su respectivo número de vértices, aristas, caras y celdas. El nombre del panel es acorde al número de celdas que tiene.

Tipo	Panel	No. de vértices	No. de aristas	No. de caras	No. de celdas
$\{3, 3, 3\}$	5-celda	5	10	10	5
$\{4, 3, 3\}$	8-celda	16	32	24	8
$\{3, 3, 4\}$	16-celda	8	24	32	16
$\{3, 4, 3\}$	24-celda	24	96	96	24
$\{5, 3, 3\}$	120-celda	600	1200	720	120
$\{3, 3, 5\}$	600-celda	120	720	1200	600

Tabla 2.1: Panales regulares esféricos de rango cuatro

El 8-celda y el 16-celda son panales duales, así como el 120-celda y 600-celda. Y los panales 5-celda y 24-celda son autoduales.

Además, comúnmente se piensa que los panales 5-celda, 8-celda, 16-celda, 120-celda y 600-celda son análogos al tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro respectivamente. El 24-celda es el único que no tiene un panel análogo de rango tres.

Recordemos lo que significa tener un panel de tipo $\{p, q, r\}$: todas las caras del panel son polígonos de p vértices, dada una celda C , alrededor de cada vértice v hay q caras de C , y alrededor de cada arista hay r celdas.

Describiremos los panales mencionados. Comenzaremos con el único panel regular en \mathbb{E}^3 cuyo símbolo de Schläfli es $\{4, 3, 4\}$. Como es una teselación por cubos de \mathbb{E}^3 , las caras son cuadrados, alrededor de cada vértice hay tres caras que pertenecen a una misma celda y alrededor de cada arista hay cuatro cubos, como se muestra en la figura 2.1. Es un panel con un número infinito de vértices, aristas, caras y celdas.

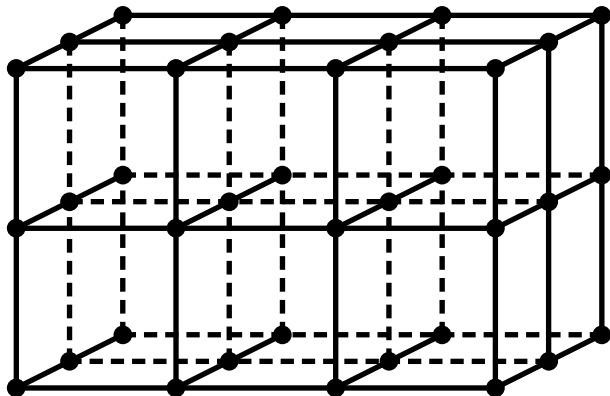


Figura 2.1: Panel de tipo $\{4, 3, 4\}$.

Ahora describiremos a los panales regulares en S^3 . El 5-celda o 4-simplejo tiene símbolo de Schläfli $\{3, 3, 3\}$, este es una teselación de S^3 cuyas celdas son tetraedros. Así que, sus caras son triángulos y en cada vértice v de una celda C dada, hay tres triángulos de C alrededor de v . Por último, hay tres tetraedros alrededor de cada arista. La figura 2.2 muestra un 5-celda.

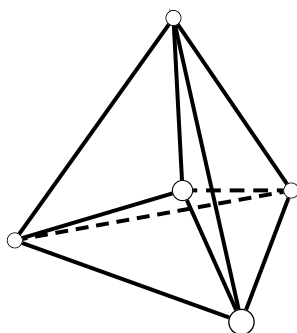


Figura 2.2: 5-celda

El 8-celda o hipercubo es una teselación de S^3 que tiene como celdas a ocho cubos, tres de ellos alrededor de cada arista. Tiene símbolo de Schläfli $\{4, 3, 3\}$. La figura 2.3 es un hipercubo. El 16-celda es el dual del hipercubo, tiene tipo $\{3, 3, 4\}$. Es una teselación

de S^3 cuyas celdas son tetraedros, difiere del 5-celda por que alrededor de cada arista hay cuatro tetraedros.

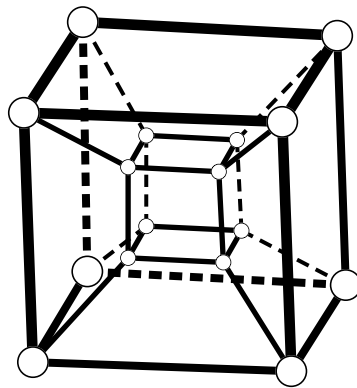


Figura 2.3: 8-celda o hipercubo

El 24-celda tiene tipo $\{3, 4, 3\}$. Es una teselación de S^3 cuyas celdas son octaedros y alrededor de cada arista hay tres octaedros. En la figura 2.4 marcamos algunos octaedros en la proyección del 24-celda.

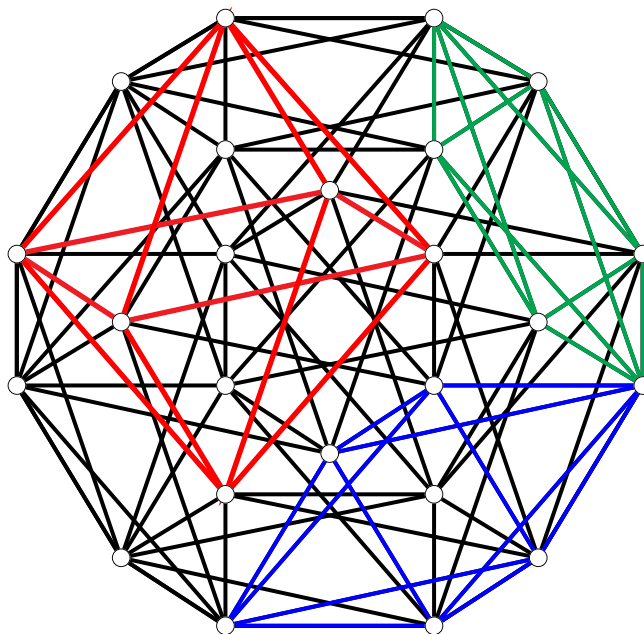


Figura 2.4: 24-celda

El 120-celda es una teselación de S^3 que tiene por celdas a dodecaedros. Tiene símbolo de Schláfli $\{5, 3, 3\}$, es decir, hay tres dodecaedros alrededor de cada arista. Dado que es más difícil de visualizar, daremos una forma de construirlo:

- Formamos una pila de nueve dodecaedros como en la figura 2.5. Al quinto dodecaedro de la pila le llamaremos la celda central del 120-celda.

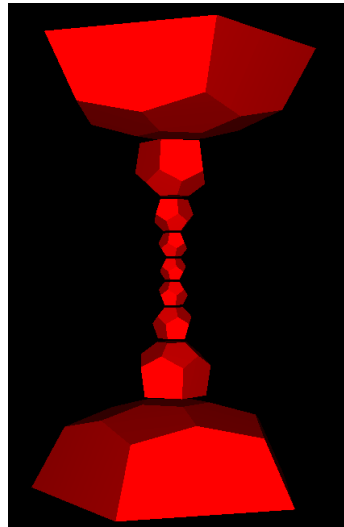


Figura 2.5: Pila de dodecaedros

- Alrededor de la pila construida, colocamos un anillo de diez nuevos dodecaedros, como se muestra en la figura 2.6.

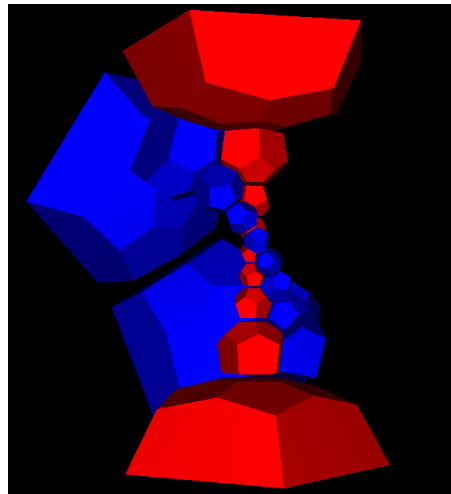


Figura 2.6: Anillo de dodecaedros

- Nuevamente colocamos otro anillo de diez dodecaedros alrededor de la pila, como el anillo de color rosa en la figura 2.7. Análogamente continuamos con el mismo proceso hasta cubrir la pila de dodecaedros de color rojo, en total cinco anillos cubren a esta pila. Tenemos hasta este momento 59 dodecaedros.
- Una vez cubierta la pila de dodecaedros con los cinco anillos de dodecaedros. Cubrimos lo que queda con otro anillo de dodecaedros como el de color gris de la figura 2.8.

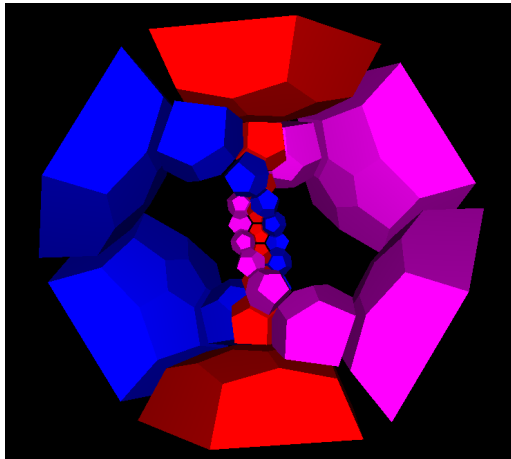


Figura 2.7: Otro anillo de dodecaedros

Continuamos con el mismo procedimiento como se ilustra en la figura 2.9. Ahora usamos seis anillos de este tipo. Así que en total tenemos 119 dodecaedros y contando el dodecaedro exterior que se forma al tener todos los anillos de dodecaedros juntos como se muestra en la figura 2.10, tenemos finalmente 120 dodecaedros que forman el 120-celda.

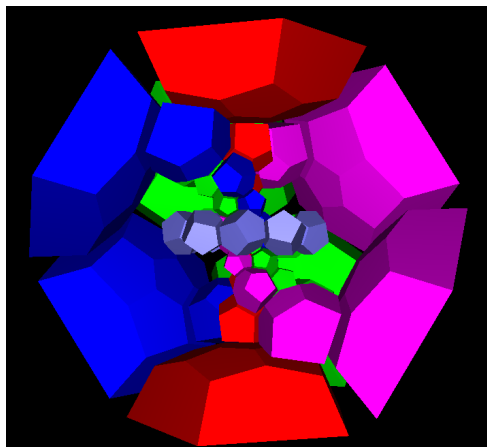


Figura 2.8:

El 600-celda es el dual del 120-celda. Tiene tipo $\{3, 3, 5\}$, es decir, hay cinco tetraedros alrededor de cada arista.

De los panales mencionados conocemos sus grupos de simetrías y sus grupos de rotaciones. Del teorema 1.4.5, el grupo de simetrías de \mathcal{P} un politopo regular de tipo $\{p, q, r\}$ es:

$$[p, q, r] = \langle R_0, R_1, R_2, R_3 \mid R_0^2 = R_1^2 = R_2^2 = R_3^2 = (R_0R_1)^p = (R_1R_2)^q = (R_2R_3)^r \\ = (R_0R_2)^2 = (R_0R_3)^2 = (R_1R_3)^2 = 1 \rangle,$$

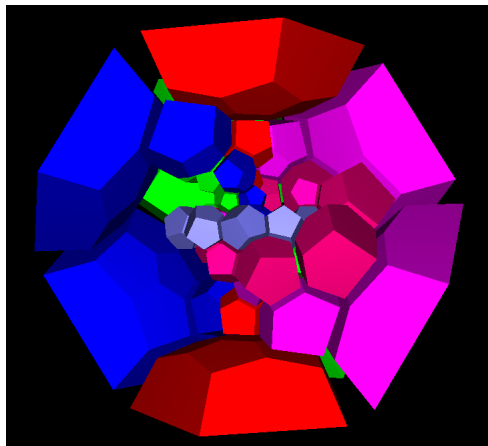


Figura 2.9:

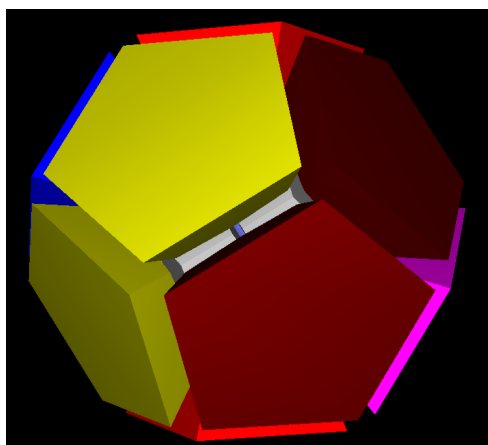


Figura 2.10:

donde los generadores distinguidos son la reflexiones en hiperplanos que, abusando de la notación, denotamos también por R_0 , R_1 , R_2 y R_3 , respectivamente.

Por otro lado, su grupo de rotaciones es:

$$[p, q, r]^+ = \langle A, B, C \mid A^p = B^q = C^r = (AB)^2 = (ABC)^2 = (BC)^2 = 1 \rangle,$$

donde $A = R_0R_1$, $B = R_1R_2$ y $C = R_2R_3$.

2.2 Polígonos de Petrie y torsiones derechas

Recordemos que un polígono de Petrie de un panal tiene cualesquiera dos aristas consecutivas en una 2-cara; pero tres consecutivas no están en una 2-cara, tiene tres aristas consecutivas en una celda pero no cuatro.

Notemos que en panales $\{p, q, r\}$ dadas tres aristas consecutivas de un polígono de Petrie, el polígono de Petrie está completamente determinado. Además, estas tres aristas también determinan a la celda a la que pertenecen. Dada una bandera le asociamos un polígono de Petrie dando tres aristas consecutivas en la forma que describimos más adelante. Notaremos que dos banderas distintas pueden determinar el mismo polígono de Petrie (empezando en distintos caminos de tres aristas).

Por ejemplo, la bandera $\Phi := P_0P_1P_2P_3$ del panal $\{4, 3, 4\}$ de la figura 2.11, contiene al vértice D , a la arista CD , a la cara $BCDF$ y a la celda superior. Le asociamos el polígono de Petrie $DCBA$ de la siguiente forma. Las tres aristas del polígono de Petrie que pertenecen a la celda superior son: la arista CD que es un elemento de Φ , la arista BC que pertenece a la cara $BCDF$ que también es un elemento de Φ y la arista AB , pues el camino no puede continuar con la arista BF puesto que no pueden haber tres aristas consecutivas sobre la cara $BCDF$, como la otra cara de la celda superior que contiene a la arista BC es $ABCG$, el camino tiene que continuar por AB . Así que, el camino de tres aristas del polígono de Petrie que está asociado a la bandera Φ y que pertenece a la celda superior es $ABCD$.

Análogamente, el camino de tres aristas del polígono de Petrie asociado a la bandera $\Psi := P'_0P'_1P'_2P'_3$ es $EDCB$. Así que, los polígonos de Petrie asociados a las banderas Φ y Ψ son $DCBA$ y $EDCB$ respectivamente; ambos determinan el mismo polígono de Petrie $EDCBA$ que aparece en color naranja en la figura 2.11.

Sean R_0, R_1, R_2, R_3 los generadores distinguidos respecto a la bandera base $\Phi = P_0P_1P_2P_3$ del panal $\{4, 3, 4\}$. Como ya vimos, $ABCD$ es el camino de tres aristas que corresponde al polígono de Petrie asociado a la bandera Φ . Veamos qué pasa con el camino $ABCD$ cuando aplicamos $R_0R_1R_2R_3$ al panal $\{4, 3, 4\}$.

Observamos en las figuras 2.12 a 2.16, cuando aplicamos $R_0R_1R_2R_3$ al panal $\{4, 3, 4\}$, el camino $ABCD$ se transforma en $BCDE$, es decir, el camino de tres aristas del polígono de Petrie correspondiente a la bandera Φ , avanza una arista en el polígono de Petrie completo ($\dots ABCDE \dots$), avanzando de una celda a otra, pues $BCDE$ es un camino de tres aristas que pertenecen a la celda inferior.

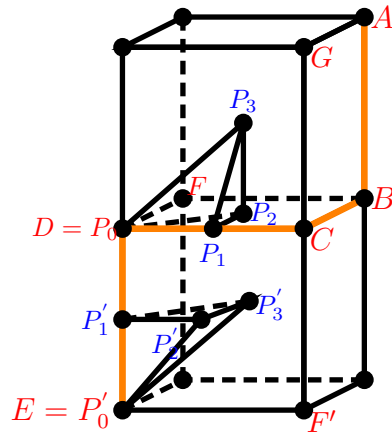


Figura 2.11: Polígono de Petrie en un panel tipo $\{4,3,4\}$.

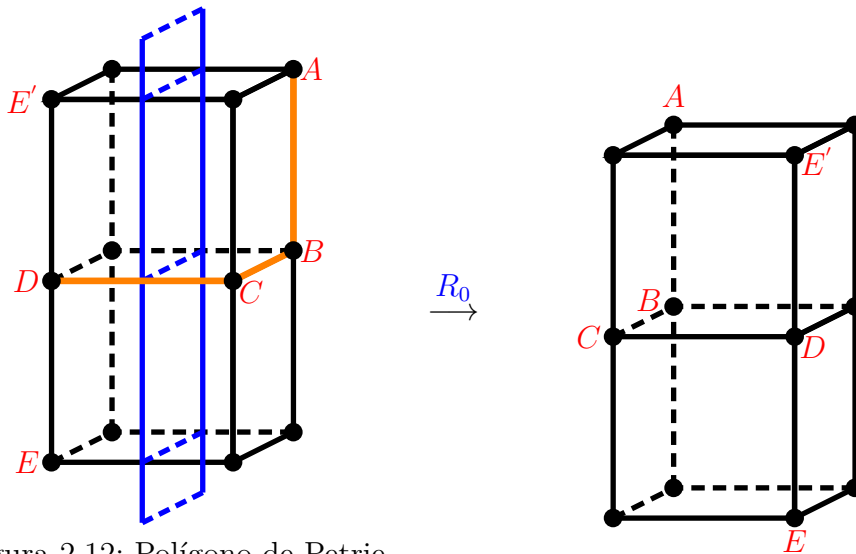


Figura 2.12: Polígono de Petrie ($ABCD$) y R_0

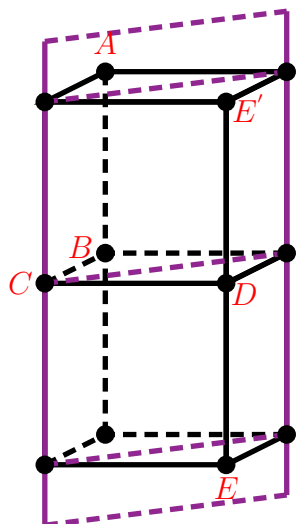


Figura 2.13: R_1

$\xrightarrow{R_1}$

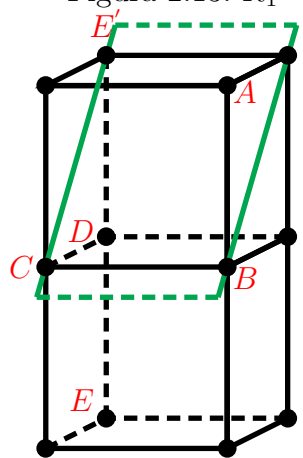
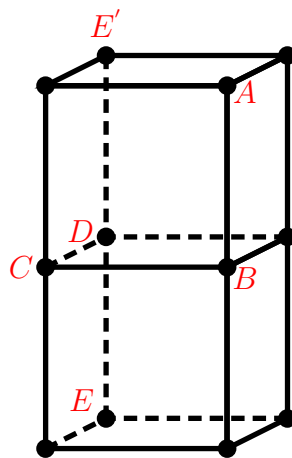


Figura 2.14: R_2

$\xrightarrow{R_2}$

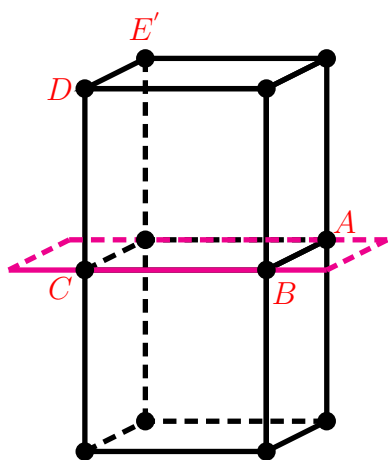
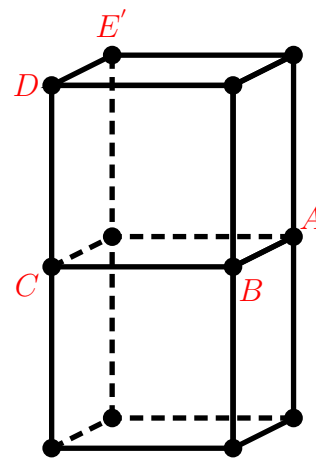


Figura 2.15: R_3

$\xrightarrow{R_3}$

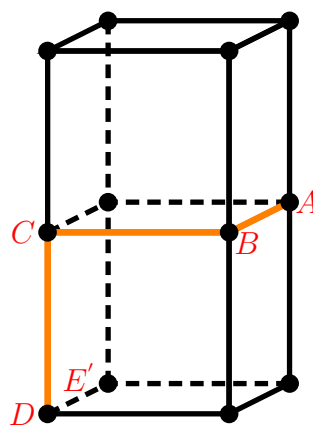


Figura 2.16: Imagen del polígono de Petrie bajo $R_0R_1R_2R_3$

Veamos que lo anterior sucede en general, es decir, si aplicamos $R_0R_1R_2R_3$ a cualquier panal regular de tipo $\{p, q, r\}$, el camino de tres aristas del polígono de Petrie asociado a la bandera base Φ avanza de una celda a otra. Tomemos como referencia la figura 2.17, enseguida describimos el polígono de Petrie asociado a la bandera base $\Phi = P_0P_1P_2P_3$ cuyas aristas pertenecen a la celda C_1 , este polígono contiene a la arista $e_1 = v_0v_1$ que es la extensión de P_0P_1 , luego la 2-cara F_1 que corresponde al plano $P_0P_1P_2$ indica que el polígono de Petrie debe tener a la arista que esté sobre esta misma 2-cara y celda C_1 , la cual es $e_2 = v_1v_2$ en nuestro dibujo y después el polígono de Petrie continua con la arista $e_3 = v_2v_3$ que se obtiene cambiando a una 2-cara que contenga a e_2 y que esté sobre la misma celda C_1 como nos indica el punto P_3 de la bandera base. Así que, el camino del polígono de Petrie asociado a la bandera Φ es $e_1e_2e_3$, estas aristas pertenecen a la celda C_1 (alternativamente, es $v_0v_1v_2v_3$).

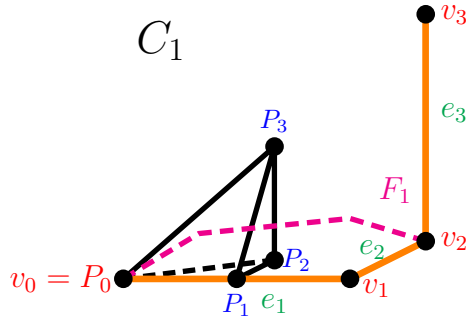


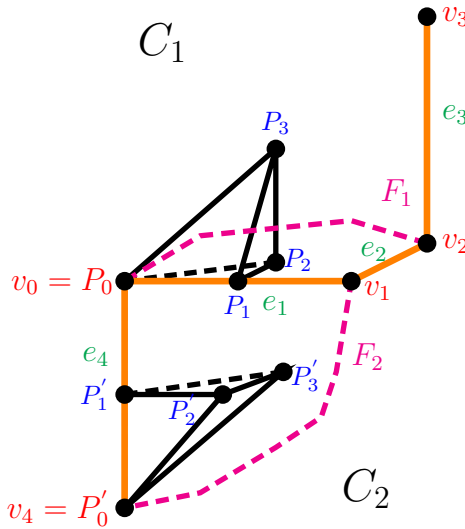
Figura 2.17: Bandera base Φ y su polígono de Petrie asociado ($v_0v_1v_2v_3$)

Veamos a qué bandera es enviada la bandera Φ cuando le aplicamos $R_0R_1R_2R_3$.

$$\begin{aligned} \Phi R_0R_1R_2R_3 &= (\Phi R_0)R_1R_2R_3 = (\Phi^0)R_1R_2R_3 = (\Phi R_1R_2R_3)^0 = ((\Phi R_1)R_2R_3)^0 \\ &= ((\Phi^1)R_2R_3)^0 = ((\Phi R_2R_3)^1)^0 = (((\Phi R_2)R_3)^1)^0 = (((\Phi^2)R_3)^1)^0 \\ &= (((\Phi R_3)^2)^1)^0 = (((\Phi^3)^2)^1)^0 = \Phi^{3,2,1,0}, \end{aligned}$$

Ahora veamos cuáles son los elementos de la bandera $\Phi^{3,2,1,0}$, nos basaremos en la figura 2.18. La bandera Φ^3 conserva el vértice v_0 , la arista e_1 y la 2-cara F_1 , cambiando la celda, llamémosle a esta celda C_2 . Ahora cambiaremos a la 2-cara F_1 , conservando a los elementos v_0, e_1 y C_2 , llamémos F_2 a la 2-cara a la que nos movemos, así obtenemos la bandera $\Phi^{3,2}$. Luego nos movemos a la arista e_4 , en donde conservamos a v_0, F_2 y C_2 , consiguiendo así a $\Phi^{3,2,1}$. Por último, cambiaremos el vértice v_0 por el vértice v_4 , manteniendo e_4, F_2 y C_2 , para obtener la bandera $\Phi^{3,2,1,0}$. Entonces los elementos de la bandera $\Phi^{3,2,1,0}$ son: $v_4, e_4 = v_4v_0, F_2 = e_4e_1 \dots, C_2 = F_2F_1 \dots$.

El camino de tres aristas del polígono de Petrie asociado a la bandera $\Phi^{3,2,1,0}$ contiene a la arista $e_4 = v_4v_0$ el cual es un elemento de $\Phi^{3,2,1,0}$. El camino continua con la arista que contiene a v_0 y que pertenece a la cara $F_2 \in \Phi^{3,2,1,0}$, esta arista es e_1 . Las caras que contienen a e_1 y que pertenecen a $C_2 \in \Phi^{3,2,1,0}$ son F_1 y F_2 , pero como el camino no puede tener tres aristas consecutivas en F_2 , entonces tiene que continuar sobre una arista en F_1 , esta arista es e_2 . Así que, el camino de tres aristas del polígono de Petrie asociado a la bandera $\Phi^{3,2,1,0}$ es $e_4e_1e_2$, cuyas aristas están en C_2 .


 Figura 2.18: Bandera $\Phi^{3,2,1,0}$ y su polígono de Petrie asociado $(v_4v_0v_1v_2)$

En resumen, al aplicar $R_0R_1R_2R_3$ al panal regular de tipo $\{p, q, r\}$, tenemos que $\Phi R_0R_1R_2R_3 = \Phi^{3,2,1,0}$, es decir, el camino de tres aristas del polígono de Petrie asociado a la bandera Φ en C_1 es $e_1e_2e_3$ y es enviado al camino de tres aristas del polígono de Petrie asociado a la bandera $\Phi^{3,2,1,0} = P'_0P'_1P'_2P'_3$, el cual es $e_4e_1e_2$, cuyas aristas están en C_2 . El polígono de Petrie determinado por los caminos $e_1e_2e_3$ y $e_4e_1e_2$ es el mismo. En otras palabras, $R_0R_1R_2R_3$ recorrió una arista en el polígono de Petrie $e_4e_0e_1e_3$, es decir, lo podemos pensar como la “rotación” de un paso del polígono de Petrie. Si denotamos por h al número de aristas del polígono de Petrie, tenemos que $(R_0R_1R_2R_3)^h = 1$. Notemos que en panales regulares esféricos h es finito y su valor se encuentra en la tabla 2.2.

Regresando al caso $\{4, 3, 4\}$, el polígono de Petrie $(\dots ABCDE\dots)$ se extiende en forma de “hélice” a lo largo de la torre de cubos, por lo tanto, h es infinito. También, en panales regulares hiperbólicos de tipo $\{p, q, r\}$, h es un número infinito.

Ilustramos un polígono de Petrie del 5-celda, hipercubo, 24-celda y 120-celda en las figuras 2.19, 2.20, 2.21 y 2.22 respectivamente. Notemos que h es igual en los panales que son duales: sean h y h' el tamaño de los polígonos de Petrie de P y P^* respectivamente, y sean R_0, R_1, R_2, R_3 y R'_0, R'_1, R'_2, R'_3 los generadores distinguidos de $\Gamma(\mathcal{P})$ y $\Gamma(\mathcal{P}^*)$ con respecto a las banderas base de \mathcal{P} y \mathcal{P}^* respectivamente, mostraremos que $h' = h$. Sabemos que $(R_0R_1R_2R_3)^h = 1$ y existe una dualidad $\delta : P \rightarrow P^*$, tal que $R_i \xrightarrow{\delta} R'_{3-i}$. Así que,

$$1' = (1)\delta = ((R_0R_1R_2R_3)^h)\delta = ((R_0\delta)(R_1\delta)(R_2\delta)(R_3\delta))^h = (R'_3R'_2R'_1R'_0)^h = (R'_0R'_1R'_2R'_3)^{-h},$$

entonces $h|h'$. Análogamente $h'|h$ y por lo tanto $h = h'$.

Recordemos que el grupo de simetrías $[p, q, r]$ tiene la presentación:

$$\begin{aligned} [p, q, r] = \langle R_0, R_1, R_2, R_3 \mid R_0^2 = R_1^2 = R_2^2 = R_3^2 = (R_0R_1)^p = (R_1R_2)^q = (R_2R_3)^r \\ = (R_0R_2)^2 = (R_0R_3)^2 = (R_1R_3)^2 = 1 \rangle. \end{aligned} \quad (2.1)$$

h	$\{p, q, r\}$
5	$\{3, 3, 3\}$
8	$\{4, 3, 3\}, \{3, 3, 4\}$
12	$\{3, 4, 3\}$
30	$\{5, 3, 3\}, \{3, 3, 5\}$

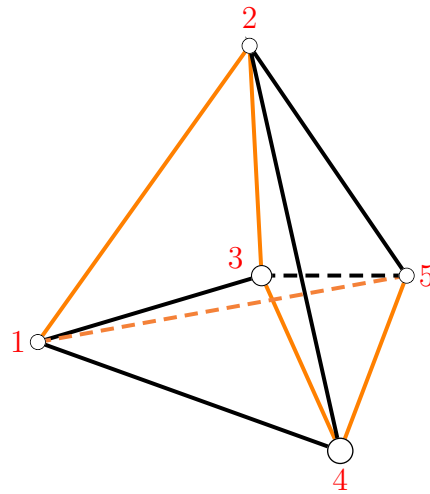
Tabla 2.2: Longitud del polígono de Petrie, h .

Figura 2.19: Polígono de Petrie en el 5-celda

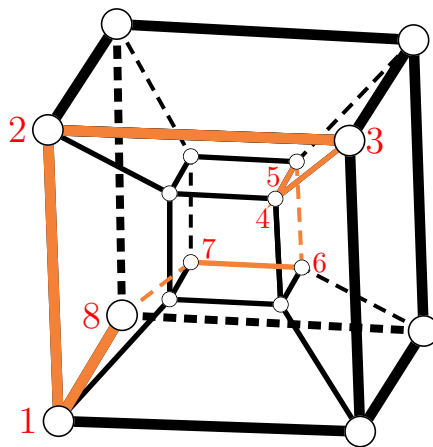


Figura 2.20: Polígono de Petrie en el hipercubo

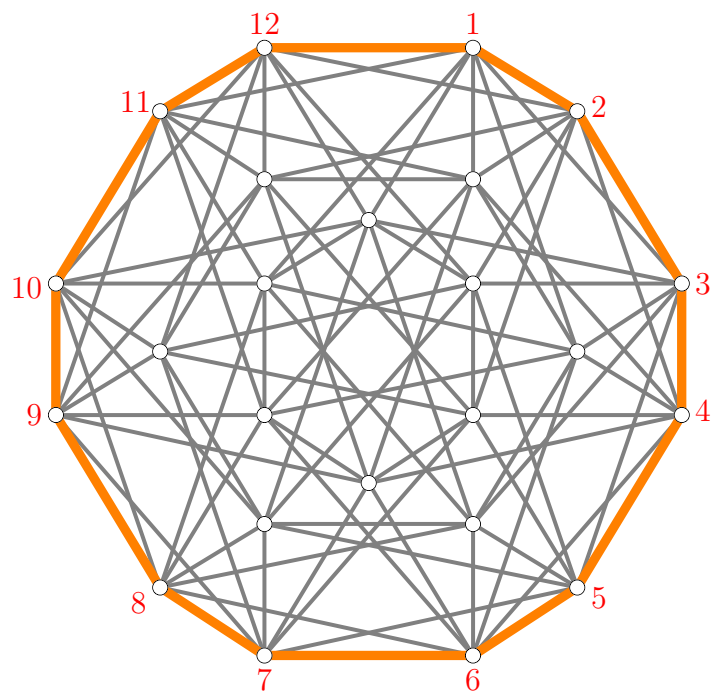


Figura 2.21: Polígono de Petrie en el 24-celda

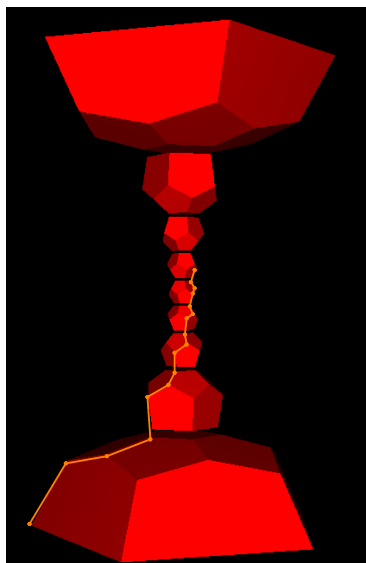


Figura 2.22: Polígono de Petrie en el 120-celda

Llamemos a sus relaciones \mathcal{R} , así que escribimos $[p, q, r] = \langle R_0, R_1, R_2, R_3 \mid \mathcal{R} \rangle$.

Y el grupo de rotaciones de $\{p, q, r\}$ es generado de la siguiente forma:

$$[p, q, r]^+ = \langle A, B, C \mid A^p = B^q = C^r = (AB)^2 = (ABC)^2 = (BC)^2 = 1 \rangle, \quad (2.2)$$

donde $A = R_0R_1$, $B = R_1R_2$, $C = R_2R_3$. Si \mathcal{R}_1 son las relaciones, denotemos al grupo $[p, q, r]^+$ como $\langle A, B, C \mid \mathcal{R}_1 \rangle$.

Sean $L = R_1R_3 = R_3R_1$, $M = R_0R_3 = R_3R_0$, $N = R_0R_2 = R_2R_0$ y \mathcal{R}_2 las relaciones del grupo:

$$\langle L, M, N \mid L^2 = M^2 = N^2 = (LM)^p = (LMN)^q = (MN)^r = 1 \rangle, \quad (2.3)$$

Del mismo modo, denotaremos al grupo (2.3) como $\langle L, M, N \mid \mathcal{R}_2 \rangle$.

Teorema 2.2.1. $\langle A, B, C \mid \mathcal{R}_1 \rangle = \langle L, M, N \mid \mathcal{R}_2 \rangle$.

Demostración. Claramente $\langle A, B, C \mid \mathcal{R}_1 \rangle$ y $\langle L, M, N \mid \mathcal{R}_2 \rangle$ son subgrupos de $[p, q, r]$, pues son cerrados bajo la operación y satisfacen las condiciones de ser grupos. Nuevamente escribimos las relaciones \mathcal{R}_1 y \mathcal{R}_2 :

$$\mathcal{R}_1 = \{A^p, B^q, C^r, (AB)^2, (ABC)^2, (BC)^2\}.$$

$$\mathcal{R}_2 = \{L^2, M^2, N^2, (LM)^p, (LMN)^q, (MN)^r\}.$$

Notemos que las relaciones \mathcal{R}_1 y \mathcal{R}_2 son consecuencia de \mathcal{R} .

Escribimos a $\langle A, B, C \mid \mathcal{R}_1 \rangle$ en términos de L, N, M :

$$A = ML, \quad B = LMN, \quad C = NM.$$

Así que,

$$\begin{aligned} A^p &= (ML)^p = (LM)^p, \quad B^q = (LMN)^q, \quad C^r = (NM)^r = (MN)^r, \\ (AB)^2 &= (MLLMN)^2 = N^2, \quad (ABC)^2 = (MLLMNNM)^2 = M^2, \\ (BC)^2 &= (LMNNM)^2 = L^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\langle A, B, C \mid \mathcal{R}_1 \rangle = \langle ML, LMN, NM \mid \mathcal{R}_2 \rangle \leq \langle L, M, N \mid \mathcal{R}_2 \rangle$.

Por otra parte, escribimos al grupo $\langle L, M, N \mid \mathcal{R}_2 \rangle$ en términos de A, B, C :

$$L = BC, \quad M = ABC, \quad N = AB.$$

Así que,

$$\begin{aligned} L^2 &= (BC)^2, \quad M^2 = (ABC)^2, \quad N^2 = (AB)^2, \quad (LM)^p = (BCABC)^p = A^p, \\ (LMN)^q &= (BCABCAB)^q = B^q, \quad (MN)^r = (ABCAB)^r = C^r. \end{aligned}$$

Entonces, $\langle L, M, N \mid \mathcal{R}_2 \rangle = \langle BC, ABC, AB \mid \mathcal{R}_1 \rangle \leq \langle A, B, C \mid \mathcal{R}_1 \rangle$.

Por lo tanto,

$$\langle A, B, C \mid \mathcal{R}_1 \rangle = \langle L, M, N \mid \mathcal{R}_2 \rangle.$$

□

Por otro lado, $R_0R_1R_2R_3 = AC$ y $R_2R_3R_0R_1 = CA$ son conjugados pues

$$A(CA)A^{-1} = AC.$$

Por lo tanto CA y AC tienen el mismo orden. Notemos que

$$CA = R_2R_3R_0R_1 = R_2R_0 \cdot R_3R_1 = NL.$$

Entonces si $(AC)^h = 1$, también $(CA)^h = (NL)^h = 1$. Además $(LN)^h = 1$ pues NL y LN son conjugados ya que $N^{-1}(NL)N = LN$.

Decimos que $w \in [p, q, r]$ es una *torsión* si existe $\alpha \in [p, q, r]$ tal que la acción por conjugación $\alpha w \alpha^{-1}$ es igual a $R_0R_1R_2R_3$. Por lo tanto,

$$w = \alpha^{-1}(R_0R_1R_2R_3)\alpha.$$

Sea P_0 el polígono de Petrie asociado a la bandera base Φ . Recordemos que P_0 también es el polígono de Petrie asociado a la bandera $\Phi^{3,2,1,0}$ y esta bandera es obtenida de enviar a Φ bajo la torsión $R_0R_1R_2R_3$, así que, podemos decir que P_0 es el polígono de Petrie correspondiente a la torsión $R_0R_1R_2R_3$. Dada $\alpha \in [p, q, r]$, como $w = \alpha^{-1}(R_0R_1R_2R_3)\alpha$ es la torsión que mueve a P_0 mediante α , diremos que el polígono de Petrie $P_0\alpha$ resultante de aplicarle α a P_0 corresponde a la torsión w .

Decimos que $w \in [p, q, r]$ es una *torsión derecha* si existe $\alpha \in [p, q, r]^+$ tal que la acción por conjugación $\alpha w \alpha^{-1}$ es igual a $R_0R_1R_2R_3$. Por ejemplo, $LN = R_3R_1R_0R_2$ es una torsión derecha pues:

$$\begin{aligned} (M)LN(M)^{-1} &= (R_0R_3)LN(R_0R_3)^{-1} \\ &= (R_0R_3)R_3R_1R_0R_2(R_0R_3)^{-1} \\ &= (R_0R_3)R_3R_1R_0R_2(R_3^{-1}R_0^{-1}) \\ &= R_0R_3R_3R_1R_0R_2R_3R_0 \\ &= R_0R_1R_0R_2R_3R_0 \\ &= R_0R_1R_2R_0R_3R_0 \\ &= R_0R_1R_2R_3R_0R_0 \\ &= R_0R_1R_2R_3, \end{aligned} \tag{2.4}$$

donde $\alpha = M = R_0R_3 \in [p, q, r]^+$. A los polígonos de Petrie correspondientes a las torsiones derechas les llamamos *polígonos de Petrie derechos*.

Sea $w \in [p, q, r]$, si existe $\alpha \in [p, q, r]^+R_0$ tal que

$$\alpha w \alpha^{-1} = R_0R_1R_2R_3,$$

decimos que w es una *torsión izquierda*. Por ejemplo,

$$LMNM = R_1R_3R_3R_0R_0R_2R_0R_3 = R_1R_2R_0R_3 = R_1R_0R_2R_3,$$

es una torsión izquierda pues:

$$\begin{aligned} (R_0)LMNM(R_0)^{-1} &= (R_0)R_1R_0R_2R_3(R_0) \\ &= R_0R_1R_2R_0R_0R_3 \\ &= R_0R_1R_2R_3, \end{aligned}$$

donde $\alpha = R_0$. A los polígonos de Petrie correspondientes a torsiones izquierdas les llamamos *polígonos de Petrie izquierdos*.

En resumen:

$$\begin{aligned} LN &= R_3R_1R_0R_2 \text{ es una torsión derecha y,} \\ LMNM &= R_1R_0R_2R_3 \text{ es una torsión izquierda.} \end{aligned}$$

Un elemento $w \in [p, q, r]$ es una torsión si es una torsión derecha o una torsión izquierda dado que $[p, q, r] = [p, q, r]^+ \cup [p, q, r]^+R_0$. Veamos que $[p, q, r]$ es transitivo en torsiones cuando pensamos a $[p, q, r]$ actuando por conjugación en sí mismo. Sean $w_1, w_2 \in [p, q, r]$ torsiones, es decir, existen $\alpha_1, \alpha_2 \in [p, q, r] = [p, q, r]^+ \cup [p, q, r]^+R_0$ tales que:

$$\begin{aligned} \alpha_1 w_1 \alpha_1^{-1} &= R_0 R_1 R_2 R_3, \\ \alpha_2 w_2 \alpha_2^{-1} &= R_0 R_1 R_2 R_3, \end{aligned}$$

de donde $w_2 = \alpha_2^{-1}(R_0 R_1 R_2 R_3)\alpha_2$. Así que

$$(\alpha_2^{-1}\alpha_1)w_1(\alpha_2^{-1}\alpha_1)^{-1} = \alpha_2^{-1}(\alpha_1 w_1 \alpha_1^{-1})\alpha_2 = \alpha_2^{-1}(R_0 R_1 R_2 R_3)\alpha_2 = w_2.$$

Por lo tanto, existe $\alpha := \alpha_2^{-1}\alpha_1 \in [p, q, r]$ tal que $\alpha w_1 \alpha^{-1} = w_2$. Así que, $[p, q, r]$ es transitivo en torsiones.

Análogamente veamos que $[p, q, r]^+$ es transitivo en torsiones derechas. Si $\alpha_1, \alpha_2 \in [p, q, r]^+$ (tomadas como arriba) entonces $\alpha = \alpha_2^{-1}\alpha_1 \in [p, q, r]^+$. Por lo tanto, $\alpha w_1 \alpha^{-1} = w_2$. Así que, $[p, q, r]^+$ es transitivo en torsiones derechas.

También $[p, q, r]^+$ es transitivo en torsiones izquierdas. Notemos que si $\alpha_1, \alpha_2 \in [p, q, r]^+R_0$ entonces $\alpha := \alpha_2^{-1}\alpha_1 \in [p, q, r]^+$. Ahora, si w_1 y w_2 son torsiones izquierdas, es decir, existen $\alpha_1, \alpha_2 \in [p, q, r]^+R_0$ tales que:

$$\begin{aligned} \alpha_1 w_1 \alpha_1^{-1} &= R_0 R_1 R_2 R_3, \\ \alpha_2 w_2 \alpha_2^{-1} &= R_0 R_1 R_2 R_3, \end{aligned}$$

Como $\alpha = \alpha_2^{-1}\alpha_1 \in [p, q, r]^+$, entonces $\alpha w_1 \alpha^{-1} = w_2$. Así que, $[p, q, r]^+$ es transitivo en torsiones izquierdas.

En la tabla A.1 del apéndice A.1 aparecen el número de torsiones de los panales esféricos regulares, así como el número sus torsiones derechas e izquierdas. GAP no calcula el número de torsiones para los panales $\{5, 3, 3\}$ y $\{3, 3, 5\}$ debido a que el orden de estos grupos es grande.

Por otra parte, notamos que LN y $LMNM$ son torsiones derecha e izquierda respectivamente y además son conjugados en $[p, q, r]$ pues

$$R_3(LMNM)R_3^{-1} = R_3(R_1R_0R_2R_3)R_3^{-1} = R_3R_1R_0R_2 = LN. \quad (2.5)$$

Entonces $(LN)^h = (LMNM)^h = 1$. En otras palabras LN y $LMNM$ son conjugados en $[p, q, r]$, pero no son conjugados en $[p, q, r]^+$, pues $R_3 \in [p, q, r]$ pero $R_3 \notin [p, q, r]^+$. En la sección 3.3 veremos que en el grupo $[p, q, r]^+ / \langle\langle (LN)^t \rangle\rangle$, como las torsiones LN y $LMNM$ no son conjugadas en $[p, q, r]^+$, entonces LN y $LMNM$ no tienen que tener el mismo orden, es decir, si h y h' es el número de aristas en los polígonos de Petrie derechos e izquierdos, respectivamente, entonces

$$(LN)^h = (LMNM)^{h'} = 1,$$

donde no necesariamente se va a cumplir que $h = h'$.

Capítulo 3

Panales de tipo $\{p, q, r\}_t$

En el capítulo 2 describimos ciertos panales regulares. A partir de ellos, en este capítulo obtendremos nuevos panales. En la sección 3.1 describiremos la construcción de los panales $\{p, q, r\}_t$ a partir de los panales esféricos regulares que se detallan en el capítulo 2, y se demuestra que los elementos de cierto grupo son simetrías; introduciremos esta sección tomando como ejemplo al hipercubo para construir el panel $\{4, 3, 3\}_2$. En la sección 3.2, obtendremos panales regulares de tipo $\{p, q, r\}_t$ y en la sección 3.3, obtendremos panales quirales de tipo $\{p, q, r\}_t$, describiendo en las subsecciones 3.3.1, 3.3.2 y 3.3.3 a los panales $\{3, 4, 3\}_2$, $\{3, 4, 3\}_3$ y $\{5, 3, 3\}_3$ respectivamente.

3.1 Construcción de panales de tipo $\{p, q, r\}_t$

Tomemos un panel esférico regular de tipo $\{p, q, r\}$ y sean h el número de aristas de sus polígonos de Petrie y t tal que $t|h$. Recordemos que $LN \in [p, q, r]^+$ es una torsión derecha, sean $Z = \langle (LN)^t \rangle$ y \bar{Z} la cerradura normal de Z en $[p, q, r]^+$.

Sea X_i el conjunto de i -caras de $\{p, q, r\}$ y $X = \bigcup X_i$ los elementos de $\{p, q, r\}$. Definiendo Y_i como las órbitas de X_i bajo \bar{Z} , decimos que Y_i son las i -caras de $\{p, q, r\}_t$ y que $Y = \bigcup Y_i$ los elementos de $\{p, q, r\}_t$. Por ejemplo, si x es una arista en $\{p, q, r\}$, ahora $x\bar{Z}$ es una arista en $\{p, q, r\}_t$. Es decir, tomamos elementos en $\{p, q, r\}$ y los identificamos bajo $\bar{Z} = \langle (LN)^t \rangle$ para obtener $\{p, q, r\}_t$. En vez de hacer esto podríamos identificar aristas a distancia t a lo largo de polígonos de Petrie derechos y el resultado es el mismo.

Por ejemplo, para construir el panel $\{4, 3, 3\}_2$, tomamos el panel esférico regular $\{4, 3, 3\}$. Sea $a \in X_1$, la arista en color verde de la figura 3.1. A continuación describimos, por medio de dibujos $a\bar{Z} \in Y_1$. Para esto veamos la órbita de a bajo $\bar{Z} = \langle (LN)^2 \rangle$. Como $(LN)^2, (LN)^4, (LN)^6 \in \bar{Z}$ aplicaremos estos elementos de \bar{Z} a a .

Recordemos que $LN = R_1R_3R_2R_0$, pues $L = R_1R_3 = R_3R_1$ y $N = R_0R_2 = R_2R_0$. Así que, de la figura 3.1 a 3.2 aplicamos $LN = R_1R_3R_2R_0$ a la arista $a \in X_1$, nuevamente aplicamos LN y se muestra en la figura 3.3 la arista $a(LN)^2$.

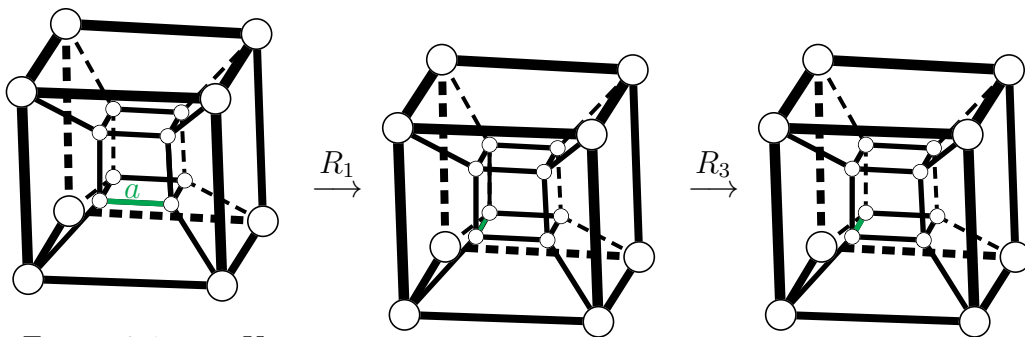


Figura 3.1: $a \in X_1$

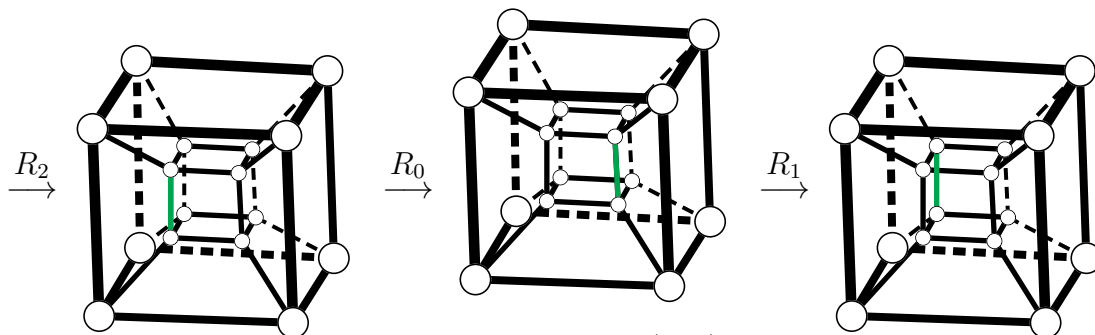


Figura 3.2: $a(LN)$

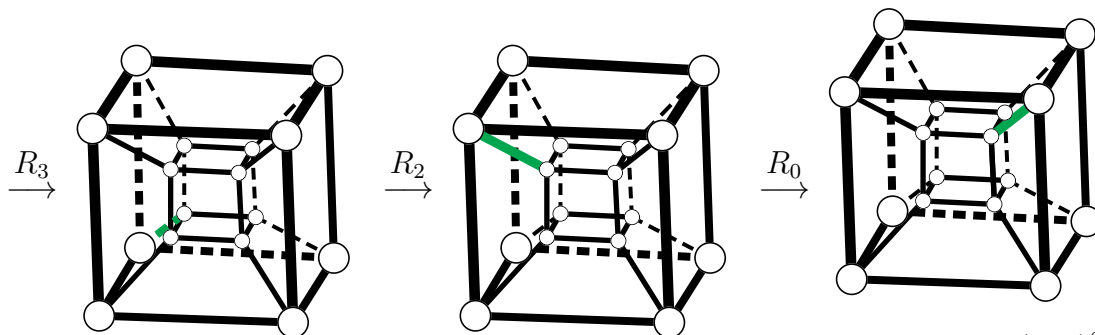


Figura 3.3: $a(LN)^2$

Análogamente seguimos aplicando LN para obtener en la figuras 3.4 y 3.5 que corresponden a $a(LN)^4$ y $a(LN)^6$ respectivamente.

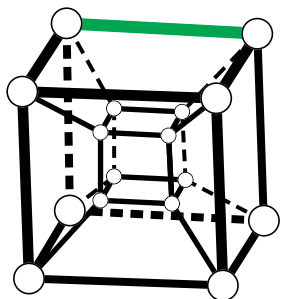


Figura 3.4: $a(LN)^4$

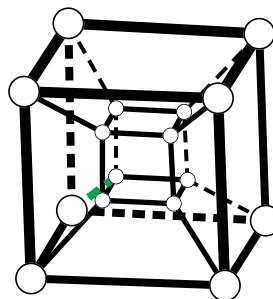


Figura 3.5: $a(LN)^6$

En la figura 3.6 se muestran las aristas de las figuras 3.1, 3.3, 3.4, 3.5 que corresponden a a , $a(LN)^2$, $a(LN)^4$, $a(LN)^6$ respectivamente, estas aristas pertenecen a la órbita de a bajo \bar{Z} . Del apéndice A.3 sabemos que $R_1R_2R_1R_0R_1R_2R_3R_0$ es un generador de \bar{Z} , aplicaremos este elemento a las aristas de la figuras 3.6. Así, en la figura 3.7 aparecen las aristas a las que fueron enviadas las aristas de la figura 3.6 bajo $R_1R_2R_1R_0R_1R_2R_3R_0$. Entonces las aristas de las figuras 3.6 y 3.7 son todas las identificaciones de la arista a bajo \bar{Z} , es decir, estas aristas son una sola arista de $\{4, 3, 3\}_2$.

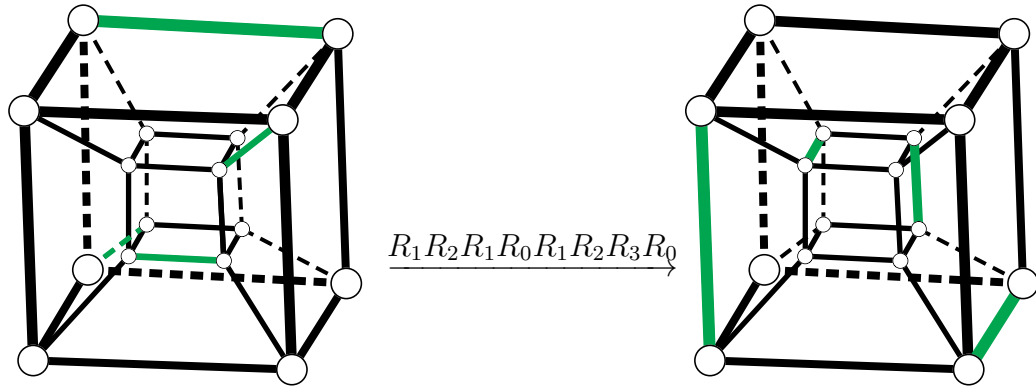


Figura 3.6: Aristas en la órbita de a bajo \bar{Z}

Figura 3.7: Otras aristas en la órbita de a bajo \bar{Z}

Si continuamos identificando las aristas del hipercubo bajo \bar{Z} obtenemos el dibujo de la figura 3.8, donde aristas del mismo color pertenecen a la misma órbita.

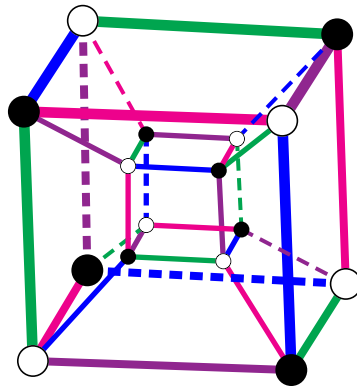
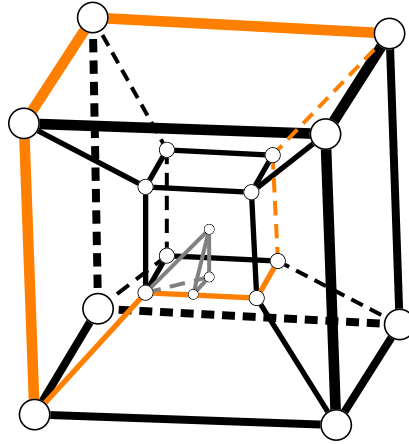


Figura 3.8: Identificaciones de aristas en $\{4, 3, 3\}$ bajo \bar{Z}

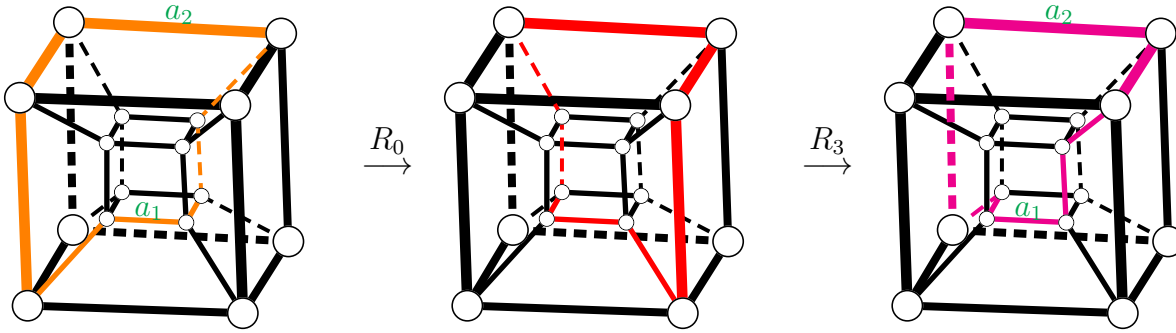
Ahora, describiremos cómo obtener el panel $\{4, 3, 3\}_2$, identificando aristas distancia dos a lo largo de polígonos de Petrie derechos, y compararemos esto con lo que hicimos anteriormente.

La figura 3.9 muestra el polígono de Petrie de la torsión $R_0R_1R_2R_3$, la cual definimos como derecha. Dibujamos la bandera base en color gris. En la ecuación (2.4), mostramos que LN es una torsión derecha, pues $M(LN)M^{-1} = R_0R_1R_2R_3$. Se sigue que,

$$LN = M^{-1}(R_0R_1R_2R_3)M.$$

Figura 3.9: Torsión derecha $R_0R_1R_2R_3$

Es decir, cuando rotamos por M al polígono de Petrie correspondiente a la torsión derecha $R_0R_1R_2R_3$ de la figura 3.9, obtenemos el polígono de Petrie correspondiente a la torsión derecha LN de la figura 3.10 (der).

Figura 3.10: Torsión derecha $R_0R_1R_2R_3$ (izq). Le aplicamos la rotación $M = R_0R_3$ para obtener la torsión derecha LN (der).

Análogamente, ahora rotamos por $LM = R_1R_3R_3R_0 = R_1R_0$ al polígono de Petrie de la figura 3.9, el cual corresponde a la torsión $R_0R_1R_2R_3$. Obtenemos el polígono de Petrie de la figura 3.11 (der), es decir,

$$\begin{aligned}
 (ML)^{-1}(R_0R_1R_2R_3)(ML) &= (ML)^{-1}(R_0R_1R_2R_3)(ML) \\
 &= (LM)(R_0R_1R_2R_3)(ML) \\
 &= (R_1R_0)(R_0R_1R_2R_3)(R_0R_1) \\
 &= R_1R_1R_2R_3R_0R_1 \\
 &= R_2R_3R_0R_1 \\
 &= R_2R_0R_3R_1 \\
 &= NL.
 \end{aligned}$$

Así que el polígono de Petrie de la figura 3.11 (der) corresponde a la torsión NL .

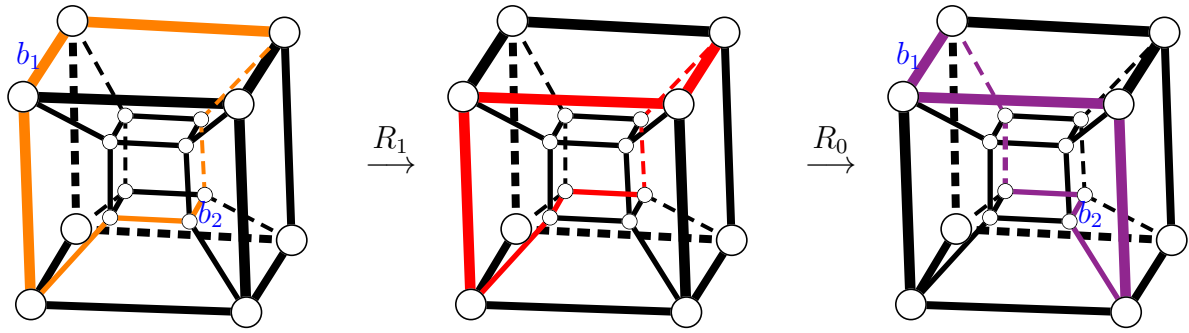


Figura 3.11: Torsión derecha $R_0R_1R_2R_3$ (izq). Le aplicamos la rotación $LM = R_1R_0$ para obtener la torsión derecha NL (der).

Nuevamente vamos a rotar al polígono de Petrie de la figura 3.9 correspondiente a $R_0R_1R_2R_3$, pero ahora rotaremos por el elemento $LMN = R_1R_3R_3R_0R_0R_2 = R_1R_2$, es decir,

$$\begin{aligned} (R_1R_2)^{-1}(R_0R_1R_2R_3)(R_1R_2) &= (LMN)^{-1}(R_0R_1R_2R_3)(LMN) \\ &= (LMN)^{-1}(MLNM)(LMN) \end{aligned}$$

Así que el polígono de Petrie derecho de la figura 3.9 es enviado en el polígono de Petrie derecho de la figura 3.12 (der).

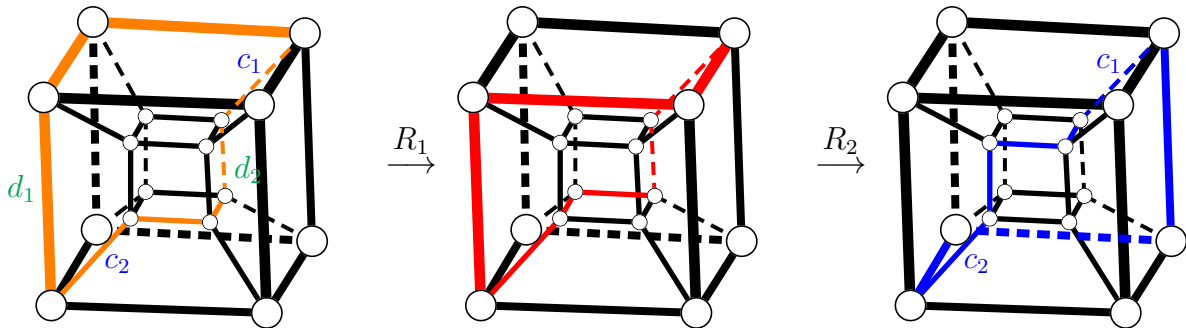


Figura 3.12: Torsión derecha $R_0R_1R_2R_3$ (izq). Le aplicamos la rotación $LMN = R_1R_2$ para obtener la torsión derecha $(LMN)^{-1}(MLNM)(LMN)$ (der).

Continuamos rotando por $(ML)^2 = (R_0R_3R_3R_1)^2 = (R_0R_1)^2$ al polígono de Petrie de la figura 3.12 (der). Obtenemos el polígono de Petrie de la figura 3.13. Así que podemos considerar que rotamos por $LMN(ML)^2$ al polígono de Petrie de la figura 3.9 y obtenemos al polígono de Petrie de la figura 3.13 correspondiente a la torsión $(LMN(ML)^2)^{-1}(MLNM)(LMN(ML)^2)$ pues:

$$\begin{aligned} (R_1R_2(R_0R_1)^2)^{-1}(R_0R_1R_2R_3)(R_1R_2(R_0R_1)^2) \\ &= (LMN(ML)^2)^{-1}(R_0R_1R_2R_3)(LMN(ML)^2) \\ &= (LMN(ML)^2)^{-1}(MLNM)(LMN(ML)^2). \end{aligned}$$

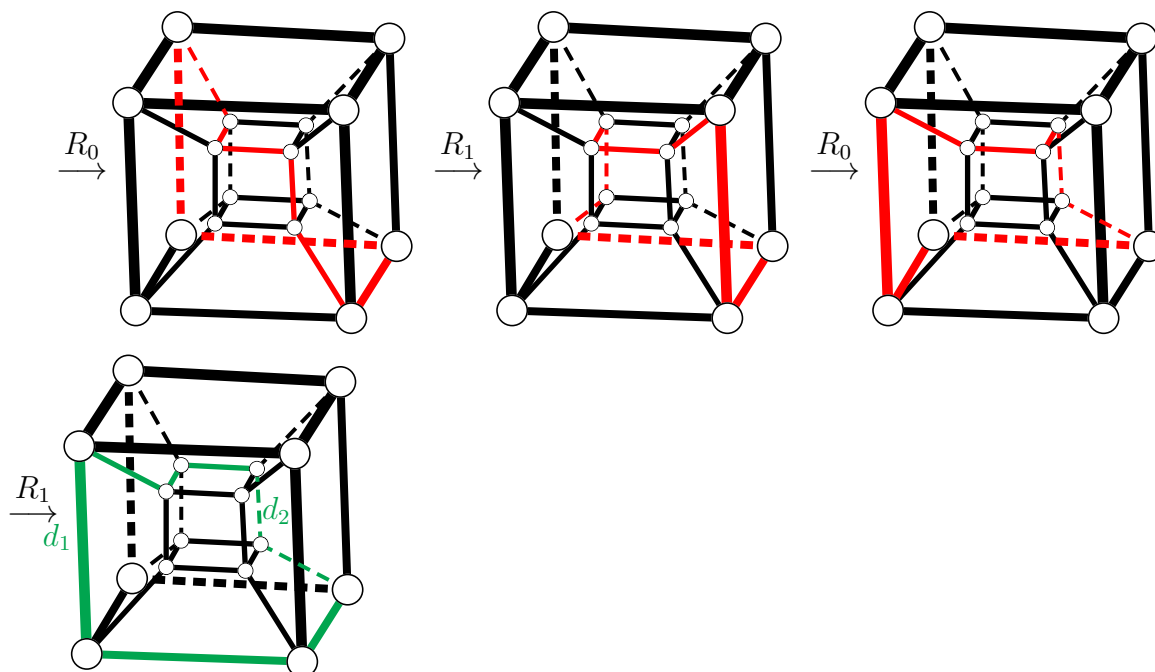


Figura 3.13: Aplicamos la rotación $(ML)^2 = (R_0R_1)^2$ para obtener la torsión derecha $(LMN(ML)^2)^{-1}(MLNM)(LMN(ML)^2)$.

Identificamos las aristas a distancia dos a lo largo del polígono del Petrie correspondiente a la torsión derecha $R_0R_1R_2R_3$, representamos a las aristas identificadas con el mismo color como en la figura 3.14.

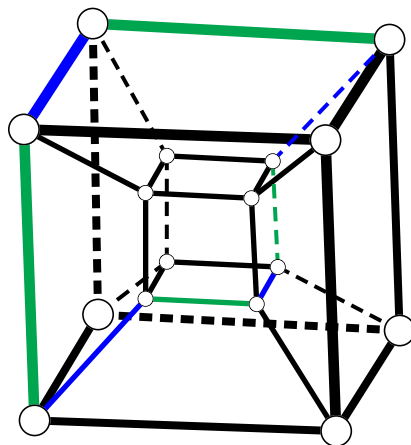


Figura 3.14: Torsión derecha $R_0R_1R_2R_3$

Notemos que los polígonos de Petrie derechos de la figura 3.10 tienen en común a las aristas a_1 y a_2 . Entonces estas aristas son de color verde (como se aprecia en la figura 3.14) en el polígono de Petrie derecho de la figura 3.10 (der) y como estamos identificando aristas a distancia dos a lo largo del polígono de Petrie, las aristas del polígono de Petrie de la

figura 3.10 (der) se identifican como en la figura 3.15 (las aristas de color gris están identificadas pues son parte del polígono de Petrie, más adelante les asignamos un color).

Análogamente los polígonos de Petrie derechos de la figura 3.11 tienen en común a las aristas b_1 y b_2 . Entonces la figura 3.11 (der) tiene aristas identificadas como se muestra en la figura 3.16. Del mismo modo, después les asignaremos color a las aristas de color gris.

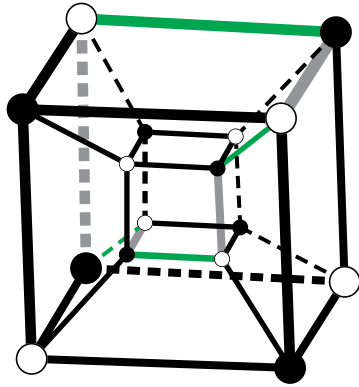


Figura 3.15: Aristas identificadas

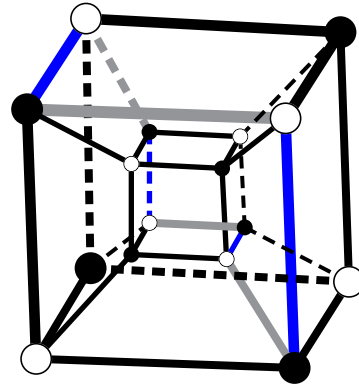


Figura 3.16: Aristas identificadas

También vemos que los polígonos de Petrie derechos de la figura 3.12 tienen en común a las aristas c_1 y c_2 . Entonces estas aristas son de color azul (como en la figura 3.14) en el polígono de Petrie derecho de la figura 3.12 (der) y como estamos identificando aristas a distancia dos a lo largo del polígono de Petrie, las aristas del polígono de Petrie de la figura 3.12 (der) se identifican como en la figura 3.17 (las aristas de color gris están identificadas, más adelante les asignamos un color).

Además el polígono de Petrie derecho de la figura de la figura 3.12 (izq) y de la figura 3.13 tienen en común a las aristas d_1 y d_2 (estas son aristas azules, como se aprecia en la figura 3.14). Entonces la figura 3.13 tiene aristas identificadas como se muestra en la figura 3.18. Del mismo modo, después les asignaremos color a las aristas de color gris.

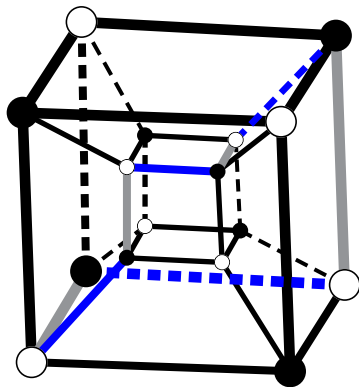


Figura 3.17: Aristas identificadas

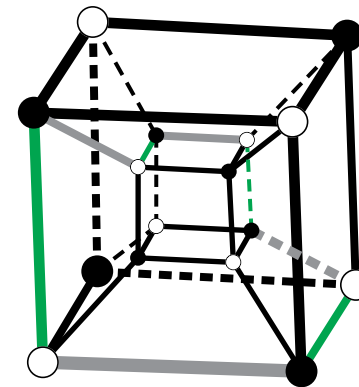


Figura 3.18: Aristas identificadas

Usando todos los polígonos de Petrie derechos e identificando aristas a distancia dos a lo largo de estos, vemos que las aristas de las figuras 3.15, 3.16, 3.17 y 3.18 son todas

las identificaciones de aristas verdes y azules en el hipercubo. Análogamente se identifican las aristas de color gris de estas figuras (checando las aristas grises de todos polígonos de Petrie derechos que se intersectan e identificando estas aristas a distancia dos a lo largo de los polígonos de Petrie mencionados). De esta forma obtenemos la figura 3.19. Notemos que esta figura es justo la figura 3.8 que obtuvimos identificando aristas bajo \bar{Z} .

Vemos en la figura 3.20 que el panal $\{4, 3, 3\}_2$ tiene 2 vértices, 4 aristas, 3 caras cuadradas y 1 celda que coincide con los cálculos del apéndice A.3 al hacer las cuentas de los subgrupos y clases laterales inducidos por \bar{Z} (se explica con detalle en la sección 3.3 como obtener el número de vértices, aristas, caras y celdas de los panales tipo $\{p, q, r\}_t$ sin realizar el dibujo del panal).

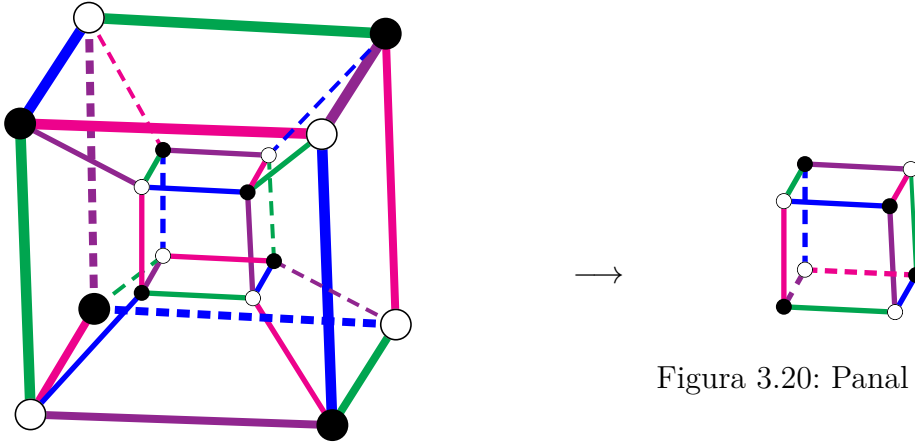


Figura 3.19: Identificaciones de aristas en $\{4, 3, 3\}$ con polígonos de Petrie derechos

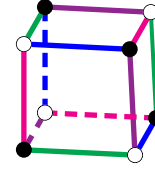


Figura 3.20: Panal $\{4, 3, 3\}_2$

Ya vimos en el ejemplo que para obtener el panal de tipo $\{p, q, r\}_t$ podemos tomar elementos en $\{p, q, r\}$ e identificarlos bajo $\bar{Z} = \langle (LN)^t \rangle$ o identificar aristas a distancia t a lo largo de polígonos de Petrie derechos, enseguida vamos a justificar esto en general.

Notemos que como $\bar{Z} \triangleleft [p, q, r]^+$, entonces $\alpha \bar{Z} \alpha^{-1} = \bar{Z}$ para todo $\alpha \in [p, q, r]^+$. Recordemos que LN es una torsión derecha pues $M \in [p, q, r]^+$ y

$$M(LN)M^{-1} = R_0R_1R_2R_3,$$

lo cual implica

$$(M(LN)M^{-1})^t = M(LN)^tM^{-1} = (R_0R_1R_2R_3)^t,$$

como $(LN)^t \in \bar{Z}$ entonces $M(LN)^tM^{-1} \in M\bar{Z}M^{-1} = \bar{Z}$, por lo tanto $(R_0R_1R_2R_3)^t \in \bar{Z}$. Si w es una torsión derecha, entonces existe $\alpha \in [p, q, r]^+$ tal que

$$\alpha w \alpha^{-1} = R_0R_1R_2R_3,$$

de donde tenemos:

$$w = \alpha^{-1}R_0R_1R_2R_3\alpha,$$

lo cual implica:

$$w^t = (\alpha^{-1}R_0R_1R_2R_3\alpha)^t = \alpha^{-1}(R_0R_1R_2R_3)^t\alpha,$$

como $\alpha^{-1}(R_0R_1R_2R_3)^t\alpha \in \alpha^{-1}\bar{Z}\alpha = \bar{Z}$ entonces $w^t \in \bar{Z}$. Recordemos que cada torsión derecha tiene asociado un polígono de Petrie, así que la órbita de las aristas de $\{p, q, r\}$ bajo \bar{Z} identifica las aristas a distancia t en cualquier polígono de Petrie derecho.

Si $x, y \in X$ decimos que $x \leq y$ si $x \subseteq y$. Análogamente, si $\hat{x}, \hat{y} \in Y$ decimos que $\hat{x} \leq \hat{y}$ si existen $x, y \in X$ tales que $\hat{x} = x\bar{Z}$, $\hat{y} = y\bar{Z}$ y $x \leq y$. Un homomorfismo es una función

$$f : \{p, q, r\}_t \longrightarrow \{p, q, r\}_t,$$

que preserva el orden, es decir, si $\hat{x}, \hat{y} \in Y$ tal que $\hat{x} \leq \hat{y}$ entonces $\hat{x}f \leq \hat{y}f$. Una simetría de $\{p, q, r\}_t$ es un isomorfismo $g : \{p, q, r\}_t \longrightarrow \{p, q, r\}_t$, es decir, es una biyección de los elementos de $\{p, q, r\}_t$ tal que g y g^{-1} son homomorfismos.

Proposición 3.1.1. *Los elementos de $[p, q, r]^+/\bar{Z}$ son simetrías de $\{p, q, r\}_t$.*

Demostración. Sean Y los elementos de $\{p, q, r\}_t$, $\hat{w} \in Y$ y $\hat{g} \in [p, q, r]^+/\bar{Z}$. La acción de $[p, q, r]^+/\bar{Z}$ en Y :

$$* : Y \times [p, q, r]^+/\bar{Z} \rightarrow Y,$$

está dada por $\hat{w} * \hat{g} = \hat{w}\hat{g}$.

Veamos que la acción de $[p, q, r]^+/\bar{Z}$ sobre Y está bien definida. Sean $\hat{x}, \hat{y} \in Y$ y $\hat{g}, \hat{h} \in [p, q, r]^+/\bar{Z}$ tales que $\hat{x} = \hat{y}$ y $\hat{g} = \hat{h}$. Es decir, tenemos:

$$\hat{x} = x\bar{Z} = y\bar{Z} = \hat{y},$$

para algunos $x, y \in X$, donde X son los elementos de $\{p, q, r\}$. Así que $x^{-1}y \in \bar{Z}$. Y como $\hat{g} = \hat{h}$ tenemos que:

$$\hat{g} = g\bar{Z} = h\bar{Z} = \hat{h}$$

para algunos $g, h \in [p, q, r]^+$. Se sigue que $g^{-1}h \in \bar{Z}$. Por lo tanto:

$$\hat{x}\hat{g} = x\bar{Z}g\bar{Z} = x(x^{-1}y)\bar{Z}g(g^{-1}h)\bar{Z} = y\bar{Z}h\bar{Z} = \hat{y}\hat{h}.$$

Así que la acción de $[p, q, r]^+/\bar{Z}$ sobre Y está bien definida.

Sea $\hat{g} \in [p, q, r]^+/\bar{Z}$, podemos escribir a $\hat{g} = g\bar{Z}$ donde $g \in [p, q, r]^+$. Empezaremos demostrando que \hat{g} es inyectiva. Sean $\hat{x}, \hat{y} \in Y$ tales que $\hat{x}\hat{g} = \hat{y}\hat{g}$. Entonces existen $x, y \in X$ tales que $\hat{x} = x\bar{Z}$ y $\hat{y} = y\bar{Z}$ y se tienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} xg\bar{Z} &= (x\bar{Z})g\bar{Z} \\ &= \hat{x}g\bar{Z} \\ &= \hat{x}\hat{g} \\ &= \hat{y}\hat{g} \\ &= \hat{y}g\bar{Z} \\ &= (y\bar{Z})g\bar{Z} \\ &= yg\bar{Z}. \end{aligned}$$

Entonces como $xg\bar{Z} = yg\bar{Z}$, existe $z \in \bar{Z}$ tal que $xg = ygz$. Por lo tanto, tenemos:

$$\begin{aligned} x &= ygzg^{-1} \\ &= y(gzg^{-1}) \\ &= yz', \end{aligned}$$

donde $z' = gzg^{-1} \in \bar{Z}$. Por lo tanto $\hat{x} = x\bar{Z} = yz'\bar{Z} = y\bar{Z} = \hat{y}$, así que \hat{g} es inyectiva.

Ahora demostraremos que \hat{g} es suprayectiva. Sea $\hat{y} \in Y$, entonces existe $y \in X$ tal que $\hat{y} = y\bar{Z}$. Como g es suprayectiva ya que es una simetría de $\{p, q, r\}$, existe $x \in X$ tal que $xg = y$. Por lo tanto, tenemos:

$$\hat{y} = y\bar{Z} = xg\bar{Z} = xg\bar{Z}\bar{Z} = x\bar{Z}g\bar{Z} = x\bar{Z}\hat{g}.$$

Por lo tanto existe $x\bar{Z} \in Y$ tal que $(x\bar{Z})\hat{g} = \hat{y}$.

Finalmente veamos que \hat{g} preserva el orden, para lo que utilizaremos que g preserva el orden en X . Sean $\hat{x}, \hat{y} \in Y$ tales que $\hat{x} \leq \hat{y}$. Tomemos $x, y \in X$ tales que $x \leq y$, $\hat{x} = x\bar{Z}$ y $\hat{y} = y\bar{Z}$. Entonces:

$$\begin{aligned} x \leq y &\Leftrightarrow xg \leq yg \Leftrightarrow (xg)\bar{Z} \leq (yg)\bar{Z} \Leftrightarrow (xg)\bar{Z}\bar{Z} \leq (yg)\bar{Z}\bar{Z} \\ &\Leftrightarrow (x\bar{Z})g\bar{Z} \leq (y\bar{Z})g\bar{Z} \Leftrightarrow (x\bar{Z})\hat{g} \leq (y\bar{Z})\hat{g} \Leftrightarrow \hat{x}\hat{g} \leq \hat{y}\hat{g}. \end{aligned}$$

Así que \hat{g} y \hat{g}^{-1} preservan el orden.

Por lo tanto \hat{g} es una simetría de $\{p, q, r\}_t$ y los elementos de $[p, q, r]^+/\bar{Z}$ son simetrías de $\{p, q, r\}_t$. \square

Recordemos que el grupo $[p, q, r]^+$ tiene una presentación en términos de los generadores L, N, M :

$$\langle L, M, N \mid L^2 = M^2 = N^2 = (LM)^p = (LMN)^q = (MN)^r = 1 \rangle, \quad (3.1)$$

donde $L = R_1R_3 = R_3R_1$, $M = R_0R_3 = R_3R_0$, $N = R_0R_2 = R_2R_0$, y R_0, R_1, R_2, R_3 son los generadores distinguidos de $[p, q, r]$ con respecto a la bandera base Φ .

Sean $\sigma_1 = (ML)\bar{Z}$, $\sigma_2 = (LMN)\bar{Z}$, $\sigma_3 = (NM)\bar{Z}$. Entonces:

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}\sigma_1 &= (\Phi\bar{Z})(ML)\bar{Z} = \Phi(ML)\bar{Z}\bar{Z} = \Phi(ML)\bar{Z} = \Phi(R_0R_1)\bar{Z} = (\Phi R_0R_1)\bar{Z} \\ &= (\Phi^0R_1)\bar{Z} = (\Phi R_1)^0\bar{Z} = (\Phi^1)^0\bar{Z} = (\Phi^{1,0})\bar{Z}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Por otro lado, como $z \in \bar{Z}$ es una simetría de $\{p, q, r\}$, tenemos:

$$(\Phi^{1,0})z = ((\Phi^1)^0)z = ((\Phi^1)z)^0 = ((\Phi z)^1)^0 = (\Phi z)^{1,0},$$

por lo tanto $(\Phi^{1,0})\bar{Z} = (\Phi\bar{Z})^{1,0} = \hat{\Phi}^{1,0}$. Así, de la ecuación (3.2), se sigue que $\hat{\Phi}\sigma_1 = \hat{\Phi}^{1,0}$. Análogamente, tenemos que: $\hat{\Phi}\sigma_2 = \hat{\Phi}^{2,1}$ y $\hat{\Phi}\sigma_3 = \hat{\Phi}^{3,2}$. Esto demuestra la siguiente proposición.

Proposición 3.1.2. *Si $t|h$, entonces el panal $\{p, q, r\}_t$ es regular o quiral.*

Demostración. Se sigue de la observación anterior y de las proposiciones 1.4.1 y 1.6.6. \square

3.2 Paneles regulares de tipo $\{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}\}_t$

Sean $\{p, q, r\}$ un panel esférico regular y h la longitud de sus polígonos de Petrie. Denotaremos por $[p, q, r]_t^+$ al grupo $[p, q, r]^+ / \bar{Z}$ donde $Z = \langle (LN)^t \rangle$, \bar{Z} es la cerradura normal de Z en $[p, q, r]^+$ y $t|h$. Y denotaremos por $[p, q, r]_t$ al grupo $[p, q, r] / \hat{Z}$ donde \hat{Z} es la cerradura normal de Z en $[p, q, r]$.

Si $\{p, q, r\}$ no es el panel $\{3, 3, 3\}$, entonces usando GAP, se puede ver que si h es par, entonces $(LN)^{h/2}$ es la inversión central, es decir, si \mathbf{x} es un vértice de $\{p, q, r\}$, donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, entonces $\mathbf{x}((LN)^{h/2}) = -\mathbf{x}$. Para construir el panel $\{p, q, r\}_{h/2}$ identificamos puntos antipodales, es decir, sea $\mathbf{x} \sim -\mathbf{x}$, el panel esférico $\{p, q, r\}$ se convierte en un panel en el espacio proyectivo, así que identificamos vértices que están a $t = h/2$ de distancia a lo largo del polígono de Petrie. En la tabla 3.1, aparecen los valores de h para cada panel $\{p, q, r\}$. Como $h = 5$ para el panel $\{3, 3, 3\}$, entonces $\{3, 3, 3\}_{5/2}$ no tiene sentido.

h	$\{p, q, r\}$	$\{p, q, r\}_{h/2}$
5	$\{3, 3, 3\}$	—
8	$\{4, 3, 3\}, \{3, 3, 4\}$	$\{4, 3, 3\}_4, \{3, 3, 4\}_4$
12	$\{3, 4, 3\}$	$\{3, 4, 3\}_6$
30	$\{5, 3, 3\}, \{3, 3, 5\}$	$\{5, 3, 3\}_{15}, \{3, 3, 5\}_{15}$

Tabla 3.1: Paneles proyectivos de tipo $\{p, q, r\}_{\frac{h}{2}}$

En el apéndice A.2, mostramos que en los paneles esféricos regulares $\{p, q, r\}$ donde h es par, se tiene: $\langle (LN)^{h/2} \rangle \triangleleft [p, q, r]^+$ y $\langle (LN)^{h/2} \rangle \triangleleft [p, q, r]$. El grupo de simetrías de $\{p, q, r\}_{h/2}$ es entonces $[p, q, r]_{h/2} = [p, q, r] / \langle (LN)^{h/2} \rangle$, su grupo de rotaciones es $[p, q, r]_{h/2}^+ = [p, q, r]^+ / \langle (LN)^{h/2} \rangle$ y el índice $[[p, q, r]_t : [p, q, r]_t^+] = 2$. Por lo tanto, el panel $\{p, q, r\}_{h/2}$ es regular.

Sea \mathcal{P} un panel de tipo $\{p, q, r\}_{h/2}$, el cual ya sabemos que es regular. De la ecuación (1.6), sabemos que el estabilizador de una i -cara F_i de $\{p, q, r\}_t$ es:

$$\text{Stab}_{\Gamma(\mathcal{P})}(F_i) = \langle R_j \mid j \neq i \rangle,$$

donde $\Gamma(\mathcal{P}) = [p, q, r]_{h/2}$.

Recordemos que Y_i son las i -caras del panel $\mathcal{P} = \{p, q, r\}_t$, como \mathcal{P} es regular, $\Gamma(\mathcal{P})$ actúa transitivamente en Y_i . Por el teorema órbita-estabilizador, podemos conocer el número de vértices, aristas, caras y celdas de los paneles $\{p, q, r\}_t$, ya que $|\text{orb}_G(x)| = [G : \text{Stab}_G(x)]$. El panel $\{p, q, r\}_{h/2}$, tendrá la mitad de vértices, aristas, caras y celdas de $\{p, q, r\}$.

En la tabla 3.2 calculamos el orden de $[p, q, r]_{h/2}$ y $[p, q, r]_{h/2}^+$, el número de vértices, aristas, caras y celdas de los paneles de tipo $\{p, q, r\}_{h/2}$, así como el grupo abstracto de $[p, q, r]_{h/2}^+$. Los cálculos de los primeros tres renglones de la tabla se encuentran en A.2. GAP no calcula el grupo isomorfo a $[5, 3, 3]_{15}^+$ y $[3, 3, 5]_{15}^+$, este grupo lo obtuvimos de la tabla 2 de [6].

Panal	$ \llbracket p, q, r \rrbracket_{h/2}^+ $	V	E	F	C	$\llbracket p, q, r \rrbracket_{h/2}^+$
$\{4, 3, 3\}_4$	96	8	16	12	4	$((C2 \times C2 \times C2 \times C2) : C3) : C2$
$\{3, 3, 4\}_4$	96	4	12	16	8	$((C2 \times C2 \times C2 \times C2) : C3) : C2$
$\{3, 4, 3\}_6$	288	12	48	48	12	$(A4 \times A4) : C2$
$\{5, 3, 3\}_{15}$	3600	300	600	360	60	$A_5 \times A_5$
$\{3, 3, 5\}_{15}$	3600	60	360	600	300	$A_5 \times A_5$

Tabla 3.2: Panales regulares de tipo $\{p, q, r\}_{h/2}$

Por último, si $\{p, q, r\}_t$ es regular, veremos que LN y $LMNM$ (torsión derecha e izquierda respectivamente) son conjugados en $[p, q, r]_t$.

Si $\{p, q, r\}_t$ es regular, tenemos que $[p, q, r]_t = [p, q, r]/\bar{Z}$, entonces $R_3 \in R_3\bar{Z}$ es una simetría de $[p, q, r]_t$. De la ecuación (2.5) tenemos:

$$R_3(LMNM)R_3^{-1} = LN.$$

Así que, LN y $LMNM$ son conjugados en $[p, q, r]_t$. Por lo tanto LN y $LMNM$ tienen el mismo orden.

3.3 Panales quirales de tipo $\{p, q, r\}_t$

Vamos a analizar el panal $\{p, q, r\}_t$ donde $t|h$. Primero, no estamos interesados en los panales $\{p, q, r\}_t$ tales que su grupo $[p, q, r]_t^+ = |\llbracket p, q, r \rrbracket^+ / \langle (LN)^t \rangle| = 1$, pues la única “rotación” de $\{p, q, r\}_t$ es la identidad. Por ejemplo, para cualquier panal $\{p, q, r\}$ cuando $t = 1$ o para el panal de tipo $\{5, 3, 3\}_2$, el grupo $[p, q, r]_t^+ = 1$. Por otro lado, si $t = h$ entonces $\{p, q, r\}_t = \{p, q, r\}$, los cuales son panales regulares. Y ya sabemos de la sección anterior, que si $t = h/2$ entonces $\{p, q, r\}_t$ es regular.

Descartando los casos anteriores, nos queda por analizar los valores de t de la tabla 3.3. Veremos que para todos estos valores obtenemos panales de tipo $\{p, q, r\}_t$ que son quirales.

Panal	h	Valores de t
$\{3, 3, 3\}$	5	-
$\{4, 3, 3\}$	8	2
$\{3, 3, 4\}$	8	2
$\{3, 4, 3\}$	12	2, 3, 4
$\{5, 3, 3\}$	30	3, 5, 6, 10
$\{3, 3, 5\}$	30	3, 5, 6, 10

Tabla 3.3: Valores de t

Por la proposición 3.1.2, sabemos que $\{p, q, r\}_t$ es regular o quiral. Y como vimos en la sección anterior, LN y $LMNM$ tienen el mismo orden en los panales regulares $\{p, q, r\}_t$.

En el apéndice A.3 se calcula con GAP el orden de los LN y $LMNM$ para los panales $\{p, q, r\}_t$ donde t son los valores de la tabla 3.3. Estos cálculos aparecen en tabla 3.4. Observamos que como los ordenes de LN y $LMNM$ son distintos, los panales $\{p, q, r\}_t$ son quirales, para los valores de t en la tabla 3.3.

Panal	t	Orden de LN	Orden de $LMNM$	$[p, q, r]_t^+$
$\{p, q, r\}$				
$\{4, 3, 3\}$	2	2	4	S_4
$\{3, 3, 4\}$	2	2	4	S_4
$\{3, 4, 3\}$	2,4	2	3	S_4
	3	3	6	$(C_3 \times A_4) : C_2$
$\{5, 3, 3\}$	3, 6	3	5	A_5
	5, 10	5	3	A_5
$\{3, 3, 5\}$	3, 6	3	5	A_5
	5, 10	5	3	A_5

Tabla 3.4: Panales $\{p, q, r\}_t$ quirales y sus grupos de simetrías

En la ecuación (3.3) escribimos a $[p, q, r]_t^+$ como una presentación:

$$[p, q, r]_t^+ = \langle L, N, M \mid L^2 = N^2 = M^2 = (LM)^p = (LMN)^q = (MN)^r = (LN)^t = 1 \rangle \quad (3.3)$$

Los grupos de simetrías de los siguientes panales de tipo:

$$\{p, q, r\}_t, \{r, q, p\}_t, \{t, q, p\}_r, \{p, q, t\}_r, \{r, q, t\}_p, \{t, q, r\}_p$$

son isomorfos. Por ejemplo, los grupos de simetrías de $\{p, q, r\}_t$ y $\{r, q, p\}_t$ son isomorfos, pues son panales duales, y la presentación de uno se obtiene al intercambiar L y N en la presentación del otro.

Comprobaremos que el panal $\{t, q, p\}_r$, tiene el mismo grupo de simetrías de $\{p, q, r\}_t$. Sean L', N', M' los generadores del grupo de simetrías de $\{p', q', r'\}_{t'}$, donde $L' = N$, $N' = M$, $M' = L$, es decir,

$$\begin{aligned} [p', q', r']_{t'}^+ &= \langle L', N', M' \mid L'^2 = N'^2 = M'^2 = (L'M')^{p'} = (L'M'N')^{q'} \\ &= (M'N')^{r'} = (L'N')^{t'} \rangle \\ &= \langle N, M, L \mid N^2 = M^2 = L^2 = (NL)^{p'} = (NLM)^{q'} \\ &= (LM)^{r'} = (NM)^{t'} \rangle \end{aligned} \quad (3.4)$$

de las ecuaciones (3.3) y (3.4) inmediatamente vemos que $r' = p$. Además $p' = t$, $q' = q$, $t' = r$, ya que:

- Como LN y NL son conjugados, pues

$$N(LN)N^{-1} = NL,$$

tienen el mismo orden, es decir, $(NL)^t = 1$. Por tanto $p' = t$.

- Como LMN y LMN son conjugados, pues

$$N(LMN)N^{-1} = NLM,$$

entonces LMN y NLM tienen el mismo orden, es decir, $(NLM)^q = 1$. Por lo tanto $q' = q$.

- Como MN y NM son conjugados, pues

$$N(MN)N^{-1} = NM,$$

tenemos que MN y NM tienen el mismo orden. Por lo tanto $(NM)^r = 1$, entonces $t' = r$.

Entonces $p' = t$, $q' = q$, $r' = p$, $t' = r$. Por tanto, el grupo de simetrías del panel de tipo $\{t, q, p\}_r$ es igual al grupo de simetrías del panel de tipo $\{p, q, r\}_t$. Además, como $\{p, q, t\}_r$ es el panel dual de $\{t, q, p\}_r$, entonces tienen grupo de simetrías isomorfos. Análogamente para los panales $\{r, q, t\}_p$ y $\{t, q, r\}_p$ se demuestra que tienen el mismo grupo de simetrías. La tabla 3.4 muestra los grupos de simetrías de los panales $\{p, q, r\}_t$, donde varios cálculos los completamos con la observación anterior, por ejemplo el panel $\{p, q, r\}_t$ tienen el mismo grupo de simetrías que $\{r, q, p\}_t$.

Para los valores t de la tabla 3.3, los panales $\{p, q, r\}_t$ son quirales. Del lema 1.6.2, sabemos que $\Gamma(\{p, q, r\}_t) = [p, q, r]_t^+$ actúa transitivamente en Y_i , donde Y_i es el conjunto de i -caras de $\{p, q, r\}_t$, para todo $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. Con esta observación calcularemos el número de elementos de la órbita de una i -cara de $\{p, q, r\}_t$ quiral. Y con esto determinaremos el número de i -caras de $\{p, q, r\}_t$ quiral para $i \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Si \mathcal{P} es un panel $\{p, q, r\}_t$ quiral entonces $\Gamma^+(\mathcal{P}) = \Gamma(\mathcal{P}) = [p, q, r]_t^+$ y de la ecuación (1.6), sabemos que el estabilizador de F_i una i -cara de $\{p, q, r\}_t$ es:

$$\text{Stab}_{\Gamma^+(\mathcal{P})}(F_i) = \text{Stab}_{\Gamma(\mathcal{P})}(F_i) = \langle \sigma_j, \sigma_i \sigma_{i+1} \mid j \neq i, i+1 \rangle,$$

así que, los estabilizadores para un vértice, arista, cara y celda de $\{p, q, r\}_t$ quiral bajo $\Gamma(\mathcal{P})$ son:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_2, \sigma_3 \rangle &= \langle LMN, NM \rangle, \quad \langle \sigma_3, \sigma_1 \sigma_2 \rangle = \langle NM, N \rangle, \quad \langle \sigma_1, \sigma_2 \sigma_3 \rangle = \langle ML, L \rangle, \\ \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle &= \langle ML, LMN \rangle, \end{aligned}$$

respectivamente, donde L, M, N son los generadores de la presentación de la ecuación (3.2).

Por otro lado, si Y_i son las i -caras del panel quiral $\mathcal{P} = \{p, q, r\}_t$, sabemos que el grupo de simetrías de \mathcal{P} está dado por $\Gamma(\mathcal{P}) = \Gamma^+(\mathcal{P}) = [p, q, r]_t^+ / \bar{Z}$. Por el teorema órbita-estabilizador, podemos conocer el número de vértices, aristas, caras y celdas de los panales $\{p, q, r\}_t$, ya que

$$|\text{Orb}_{\Gamma^+(\mathcal{P})}(x)| = [\Gamma^+(\mathcal{P}) : \text{Stab}_{\Gamma^+(\mathcal{P})}(x)],$$

donde $x \in Y_i$ es una i -cara de \mathcal{P} . Como la $\text{Orb}_{\Gamma^+(\mathcal{P})}(x) = \{x\gamma \mid \gamma \in \Gamma^+(\mathcal{P})\}$ y además $\Gamma(\mathcal{P}) = \Gamma^+(\mathcal{P}) = [p, q, r]_t^+$ actúa transitivamente en Y_i , entonces la cardinalidad de

$\{p, q, r\}$	t	Vértices	Aristas	Caras	Celdas	$[p, q, r]_t^+$	$ [p, q, r]_t^+ $
$\{4, 3, 3\}$	2	2	4	3	1	S_4	24
$\{3, 3, 4\}$	2	1	3	4	2	S_4	24
$\{3, 4, 3\}$	2,4	1	4	4	1	S_4	24
	3	3	12	12	3	$(C_3 \times A_4) : C_2$	72
$\{5, 3, 3\}$	3,6	5	10	6	1	A_5	60
	5,10	5	10	6	1	A_5	60
$\{3, 3, 5\}$	3,6	1	6	10	5	A_5	60
	5,10	1	6	10	5	A_5	60

Tabla 3.5: Paneles quirales de tipo $\{p, q, r\}_t$

$\text{Orb}_{\Gamma^+(\mathcal{P})}(x)$ nos dice el número de i -caras de \mathcal{P} . En la tabla 3.5 se muestra el número de vértices, caras y celdas de los paneles $\{p, q, r\}_t$ y con GAP en el apéndice A.3 se realizan estos cálculos, pues sabemos calcular $[\Gamma^+(\mathcal{P}) : \text{Stab}_{\Gamma^+(\mathcal{P})}(x)]$.

Como podemos ver en la tabla 3.5, para los paneles $\{p, q, r\}$ cuyo valor t está en la misma fila, se tiene el mismo número de vértices, aristas, caras y celdas para los paneles $\{p, q, r\}_t$, por lo tanto son el mismo panel. Por ejemplo, para el panel $\{5, 3, 3\}$, los paneles $\{5, 3, 3\}_3$ y $\{5, 3, 3\}_6$ son isomorfos, también los paneles $\{5, 3, 3\}_5$ y $\{5, 3, 3\}_{10}$ son isomorfos. Sabemos que los paneles $\{p, q, r\}_t$ con valores de t en diferente fila, tienen diferente orden para su torsión derecha LN y su torsión izquierda $LMNM$, si tienen el mismo número de vértices, aristas, caras y celdas estamos hablando de paneles $\{p, q, r\}_t$ isomorfos. Por ejemplo, el panel $\{5, 3, 3\}_3$ es isomorfo al panel $\{5, 3, 3\}_5$. En las siguientes secciones vamos a describir a los paneles $\{p, q, r\}_t$ no isomorfos, es decir a $\{3, 4, 3\}_2$, $\{3, 4, 3\}_3$ y $\{5, 3, 3\}_3$, con excepción de los paneles $\{3, 3, 4\}_2$ y $\{3, 3, 5\}_3$ pues estos son los paneles duales de $\{4, 3, 3\}_2$ y $\{3, 3, 5\}_3$, respectivamente y sus grupos de simetrías son isomorfos.

3.3.1 Panel $\{3, 4, 3\}_2$

De la figura 3.21 a la figura 3.44 se ilustran todos los polígonos de Petrie correspondientes a torsiones derechas del panel esférico $\{3, 4, 3\}$.

Análogamente, como obtuvimos el panel de tipo $\{4, 3, 3\}_2$, identificamos aristas y vértices a distancia dos en los polígonos de Petrie derechos del panel $\{3, 4, 3\}_2$ de la figura 3.46, en la que aristas del mismo color están identificadas.

3.3.2 Panel $\{3, 4, 3\}_3$

Con los mismos polígonos de Petrie derechos de las figuras 3.21 a 3.44 se construye el panel $\{3, 4, 3\}_3$, lo único que cambia es que ahora tenemos tres colores en cada polígono de Petrie, ya que $t = 3$. Sabemos de la tabla 3.5 que el panel $\{3, 4, 3\}_3$ tiene tres celdas y 12 aristas. En las figuras 3.47 y 3.48 se muestran las tres distintas celdas en $\{3, 4, 3\}_3$.

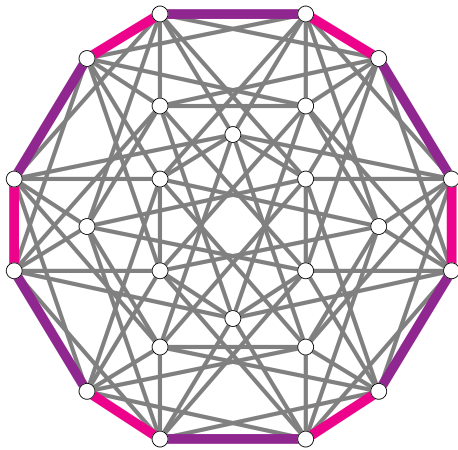


Figura 3.21: Polígono de Petrie 1

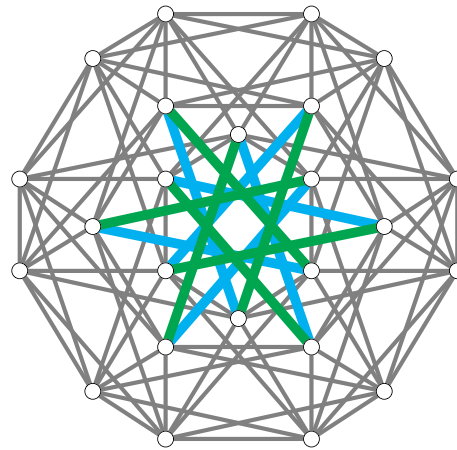


Figura 3.22: Polígono de Petrie 2

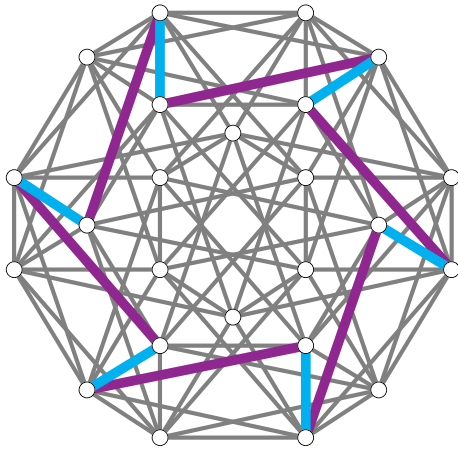


Figura 3.23: Polígono de Petrie 3

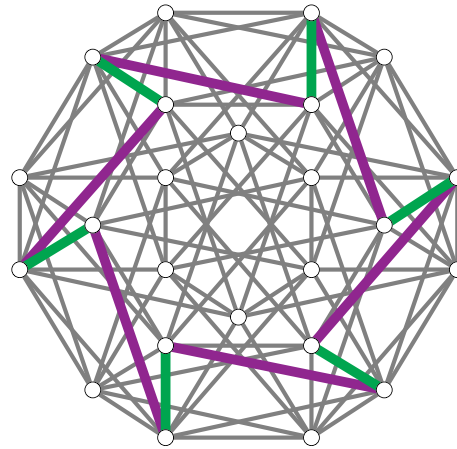


Figura 3.24: Polígono de Petrie 4

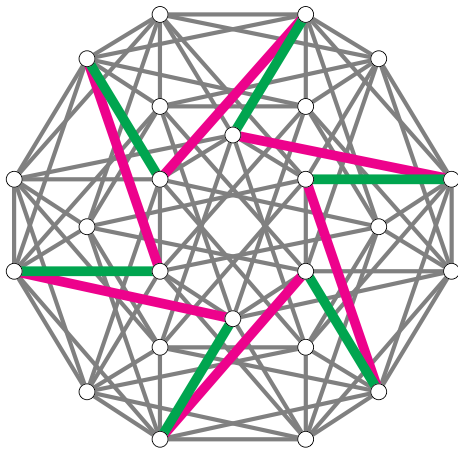


Figura 3.25: Polígono de Petrie 5

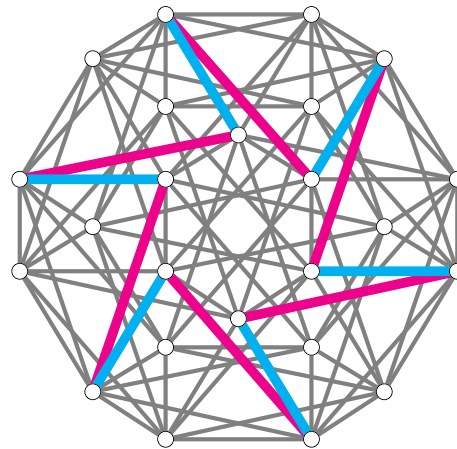


Figura 3.26: Polígono de Petrie 6

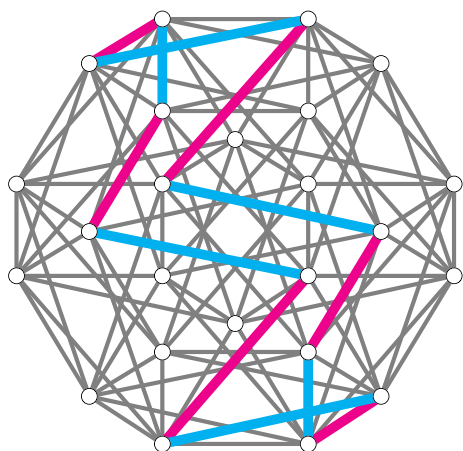


Figura 3.27: Polígono de Petrie 7

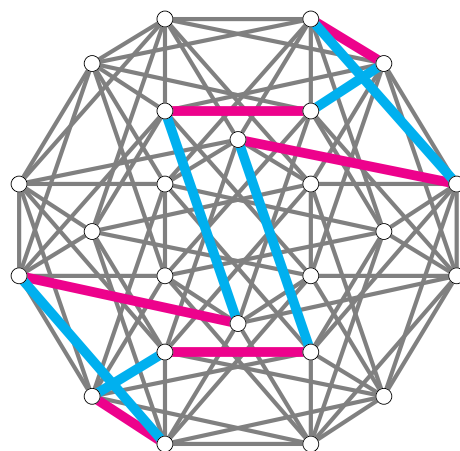


Figura 3.28: Polígono de Petrie 8

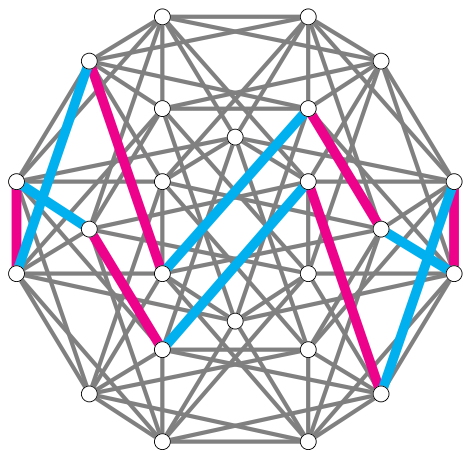


Figura 3.29: Polígono de Petrie 9

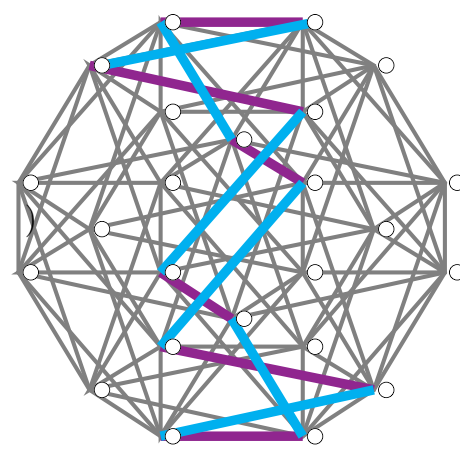


Figura 3.30: Polígono de Petrie 10

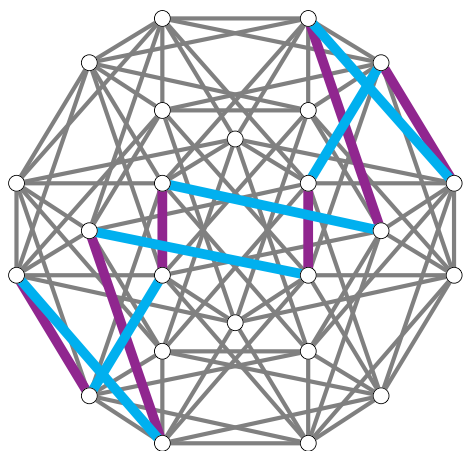


Figura 3.31: Polígono de Petrie 11

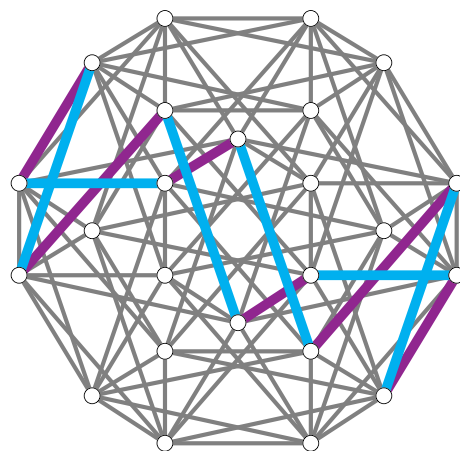


Figura 3.32: Polígono de Petrie 12

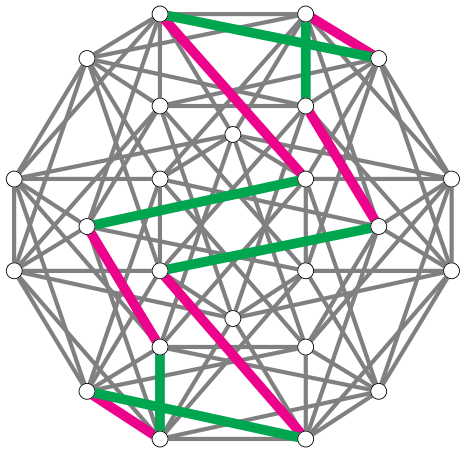


Figura 3.33: Polígono de Petrie 13

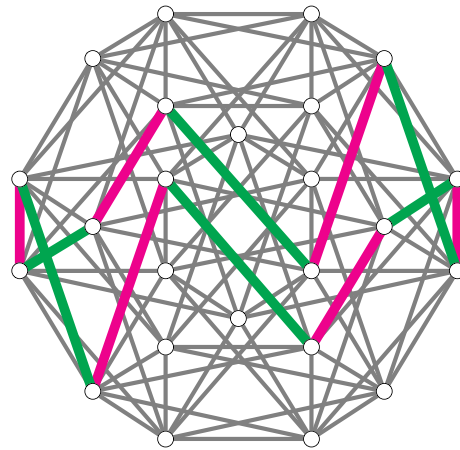


Figura 3.34: Polígono de Petrie 14

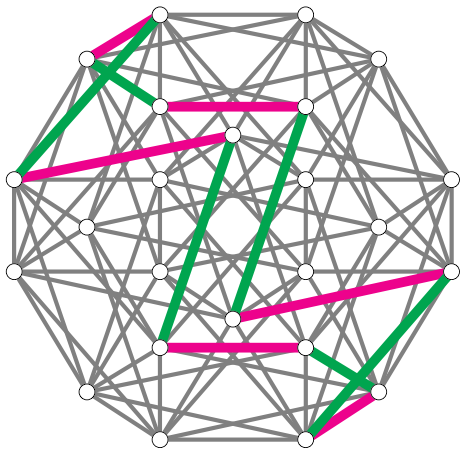


Figura 3.35: Polígono de Petrie 15

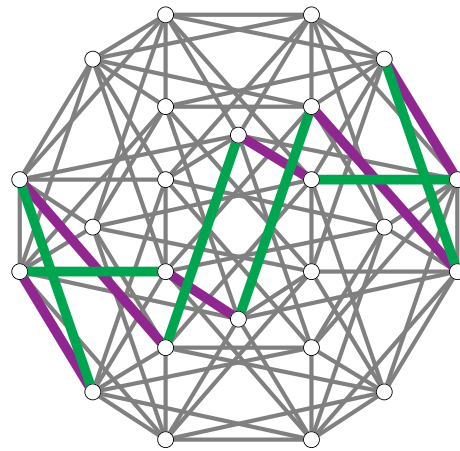


Figura 3.36: Polígono de Petrie 16

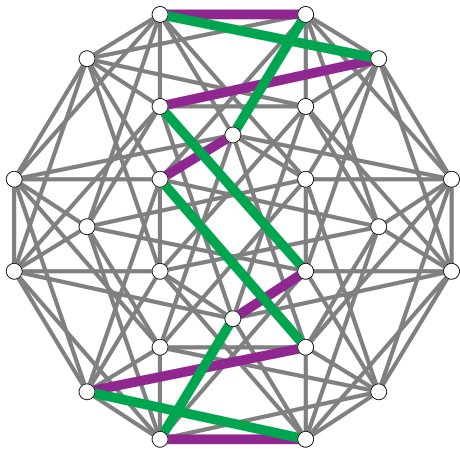


Figura 3.37: Polígono de Petrie 17

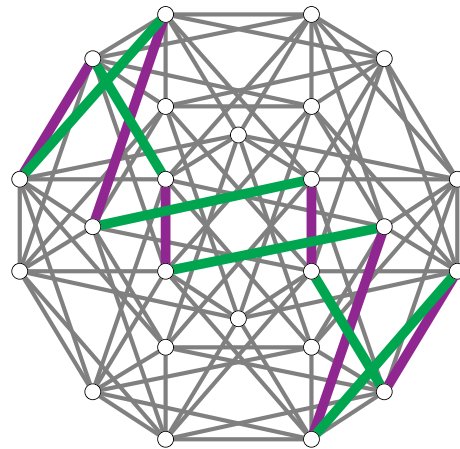


Figura 3.38: Polígono de Petrie 18

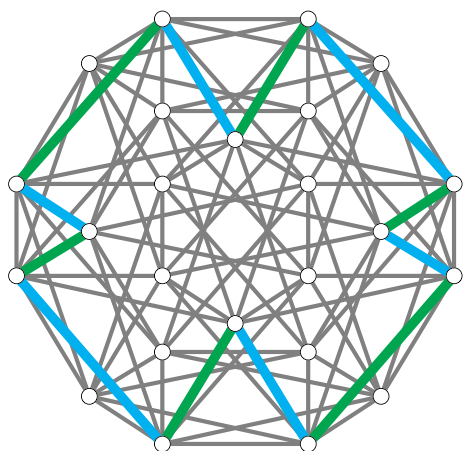


Figura 3.39: Polígono de Petrie 19

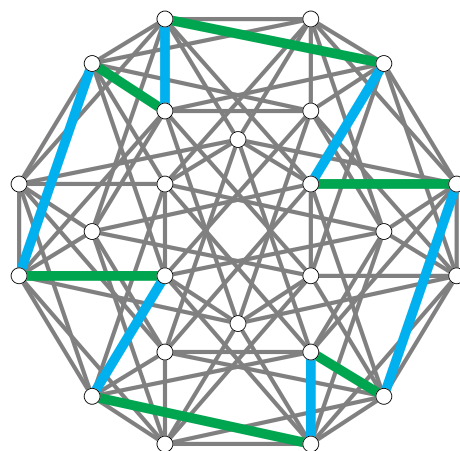


Figura 3.40: Polígono de Petrie 20

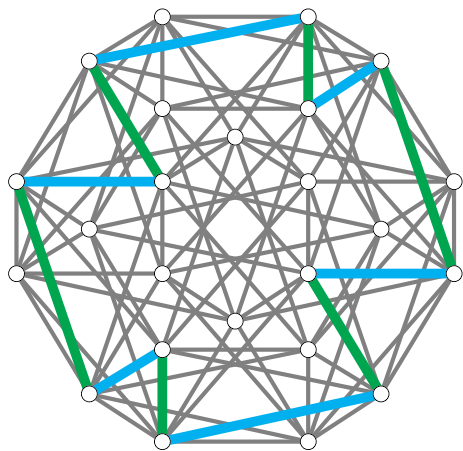


Figura 3.41: Polígono de Petrie 21

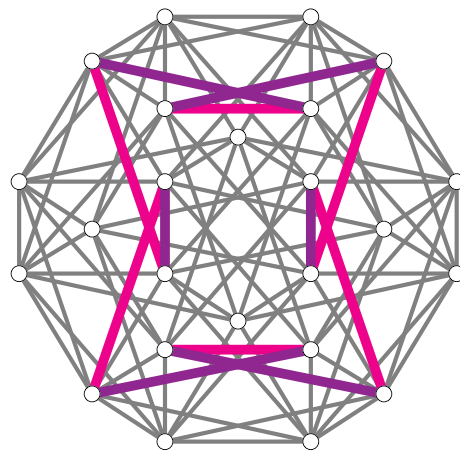


Figura 3.42: Polígono de Petrie 22

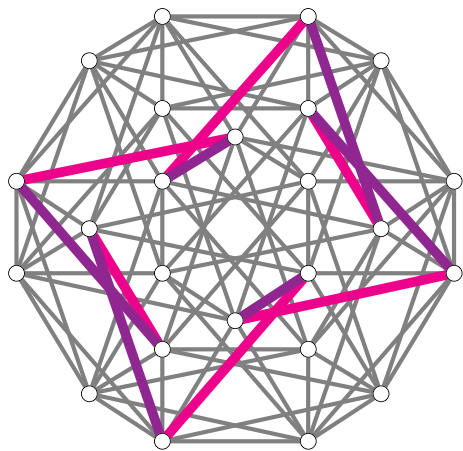


Figura 3.43: Polígono de Petrie 23

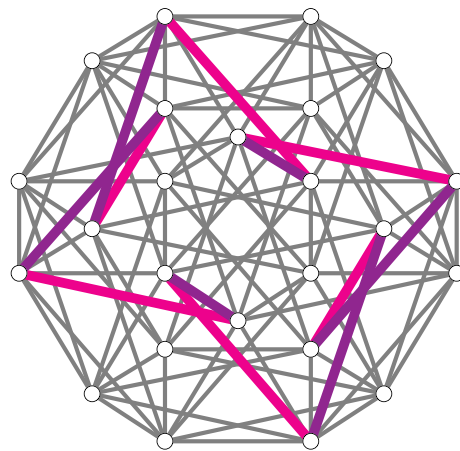


Figura 3.44: Polígono de Petrie 24

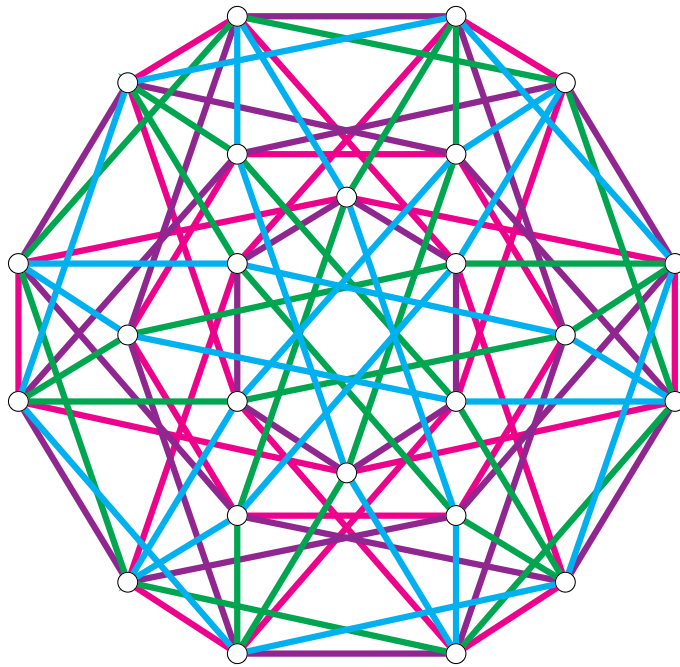


Figura 3.45: Identificaciones en $\{3, 4, 3\}$

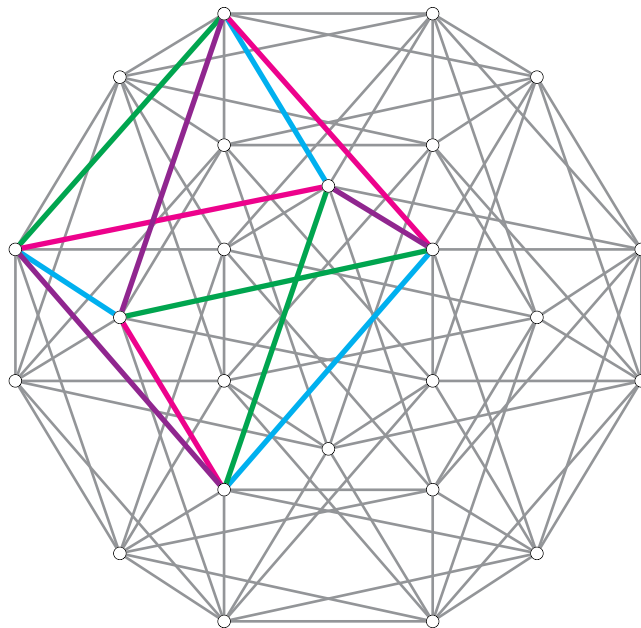


Figura 3.46: Panel $\{3, 4, 3\}_2$, donde aristas del mismo color están identificadas.

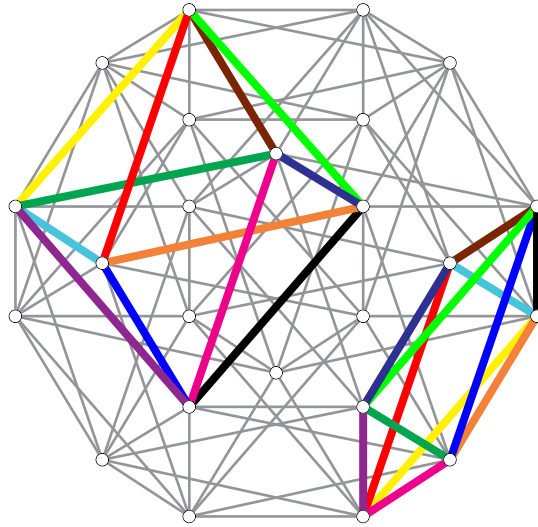


Figura 3.47: Celdas distintas en $\{3, 4, 3\}_3$, donde aristas del mismo color están identificadas.

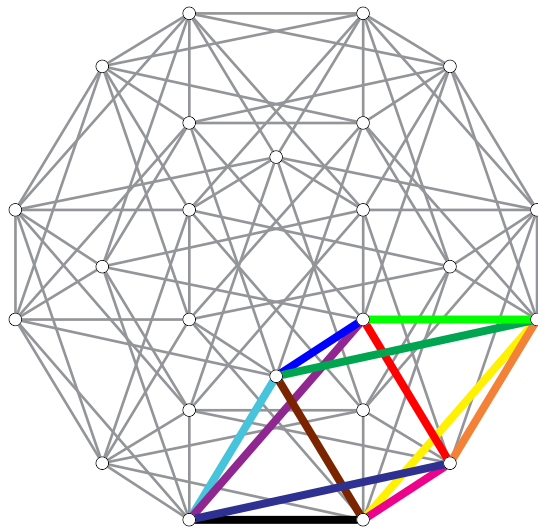


Figura 3.48: Otra celda distinta en $\{3, 4, 3\}_3$, donde aristas del mismo color en esta figura y en la figura 3.47 están identificadas.

3.3.3 Panal $\{5, 3, 3\}_3$

Sea el dodecaedro de la figura 3.49, la celda central del panal $\{5, 3, 3\}$, en donde marcamos la bandera base y las aristas del dodecaedro correspondientes polígono de Petrie en el panal $\{5, 3, 3\}$.

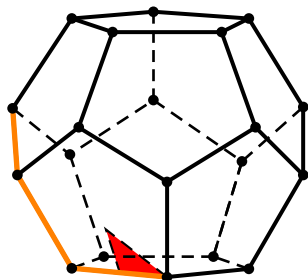


Figura 3.49: Bandera base y polígono de Petrie asociado en $\{5, 3, 3\}$

Luego en las figuras 3.50 a 3.52 representamos a los generadores distinguidos (reflexiones) con respecto a la bandera base. Queremos construir un panal $\{5, 3, 3\}_3$, en la figura 3.53 etiquetamos los vértices del polígono de Petrie asociado a la bandera base. De la tabla 3.4, vemos que este panal tiene una sola celda, por lo tanto veremos cómo están identificados los vértices y aristas en dicha celda.

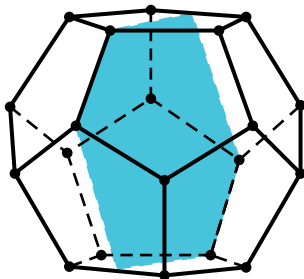


Figura 3.50: R_0

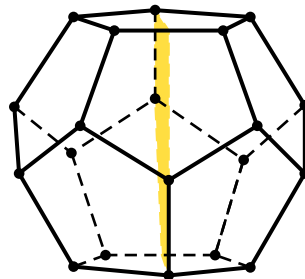


Figura 3.51: R_1

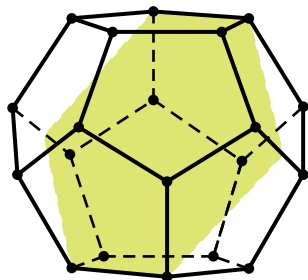


Figura 3.52: R_2

Rotamos por $LMN = R_1R_2$ al polígono de Petrie derecho de la figura 3.53 (izq) y obtenemos el polígono de Petrie derecho de la figura 3.53 (der), como estamos identificando puntos a distancia $t = 3$, el vértice marcado en la figura 3.53 (der) también es d . Y luego nuevamente rotamos por $LMN = R_1R_2$ a este último Petrie y obtenemos el Petrie derecho de la figura 3.54 (der), en donde encontramos otro vértice identificado con d .

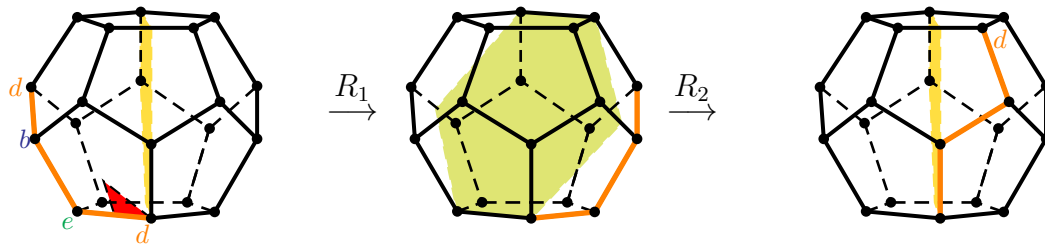


Figura 3.53: En color naranja el polígono de Petrie asociado a la torsión derecha $R_0R_1R_2R_3$ (izq). Le aplicamos la rotación $LMN = R_1R_2$ (der).

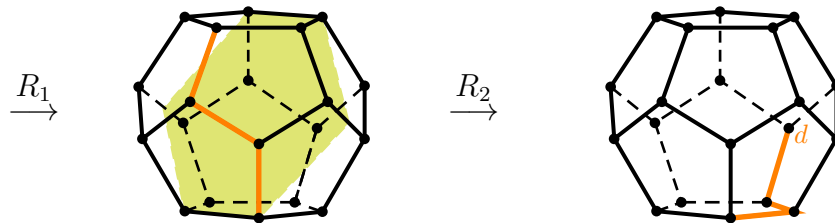


Figura 3.54: Rotamos nuevamente por $LMN = R_1R_2$.

Ahora, rotamos por $LM = R_1R_0$ al polígono de Petrie asociado a la bandera base de figura 3.55 (izq) y obtenemos un vértice identificado con e en figura 3.55 (der). Usaremos el grupo de rotaciones del dodecaedro central para identificar puntos y así obtener el panal $\{5, 3, 3\}_3$, por lo que rotamos $\frac{2\pi}{3}$ y $(\frac{2\pi}{3})^2$ sobre el eje marcado en azul y obtenemos los vértices identificados con e en las figuras 3.56 y 3.57.

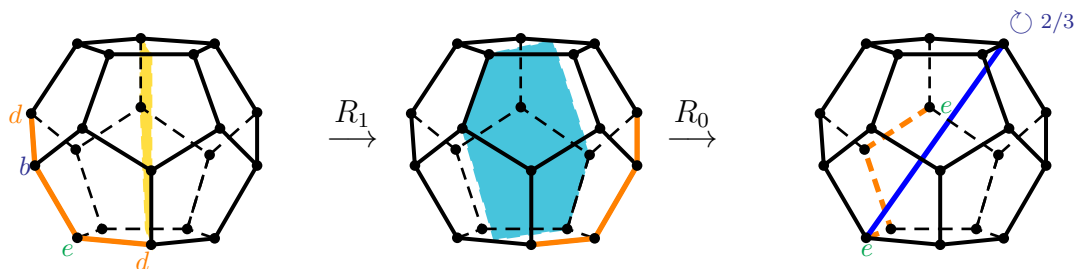


Figura 3.55: En color naranja el polígono de Petrie asociado a la torsión derecha $R_0R_1R_2R_3$ (izq). Le aplicamos la rotación $LM = R_1R_0$ (der).

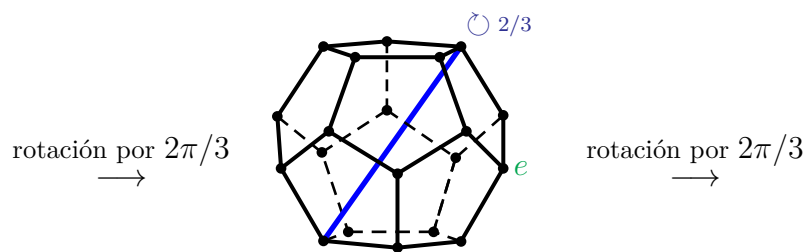


Figura 3.56: Vértice e

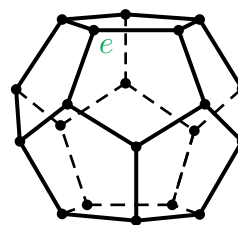


Figura 3.57: Vértice e

Análogamente, rotamos por $MLN = R_0R_1R_0R_2$ al polígono de Petrie derecho asociado a la torsión derecha $R_0R_1R_2R_3$ (primer dibujo de la figura 3.58) y nos queda el polígono de Petrie derecho (último dibujo de la figura 3.58), donde podemos identificar al vértice b . Por último rotamos $\frac{2\pi}{3}$ y $(\frac{2\pi}{3})^2$ sobre el eje marcado en azul en el último dibujo de la figura 3.58 y obtenemos los vértices identificados de la figura 3.59.

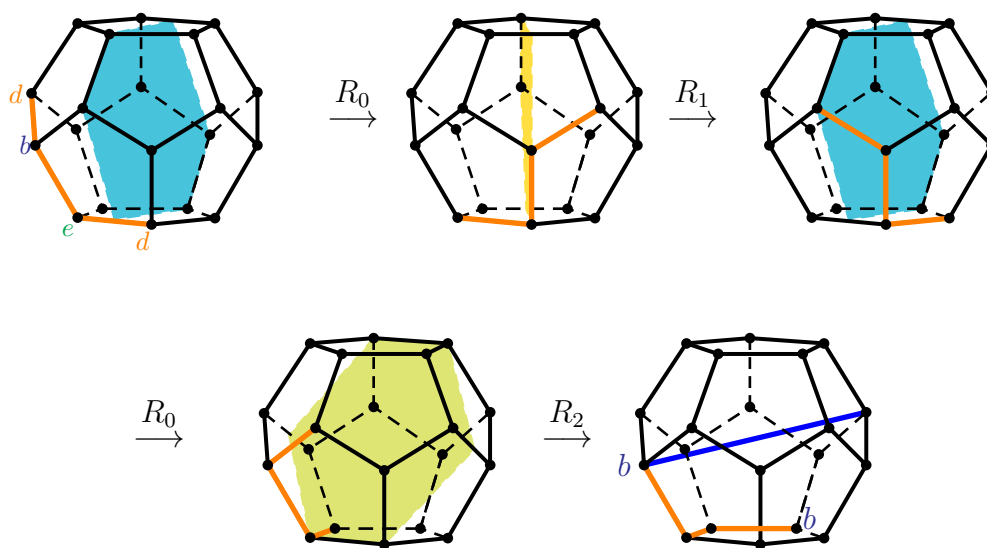


Figura 3.58: En naranja el polígono de Petrie asociado a la torsión derecha $R_0R_1R_2R_3$ (primer dodecaedro). Le aplicamos la rotación $MLN = R_0R_1R_0R_2$ (último dodecaedro).

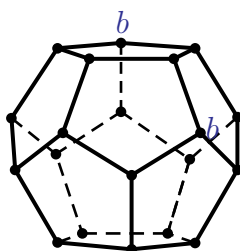


Figura 3.59: Vértice b

En la figura 3.60 se muestran los vértices que se han identificados en la celda central de $\{5, 3, 3\}$.

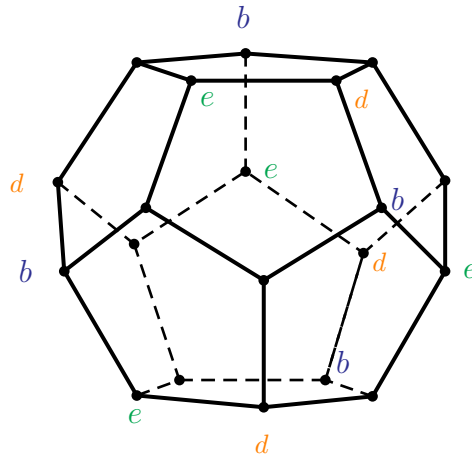


Figura 3.60: Vértices identificados en la celda central de $\{5, 3, 3\}$

Sabemos de la tabla 3.4, que hay cinco vértices en total en $\{5, 3, 3\}_3$ y como sus caras son pentágonos entonces etiquetamos los vértices que faltan en la cara marcada de la figura 3.61.

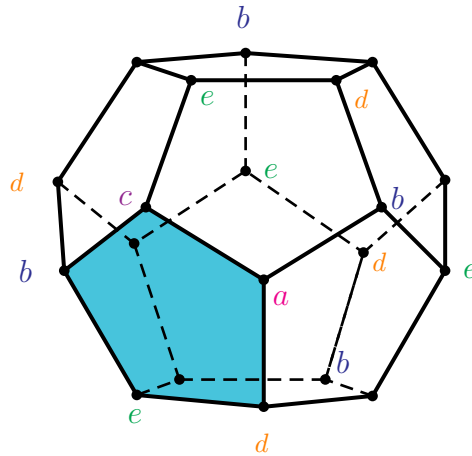


Figura 3.61: Vértices a y c

Completamos las identificaciones de la figura 3.61 pensando en formar caras pentagonales, con lo cual obtenemos en la figura 3.62 el panal $\{5, 3, 3\}_3$ en donde no coloreamos las aristas pero hay identificaciones de estas, por ejemplo la arista ab aparece tres veces en la figura 3.62. Finalmente en la figura 3.63 se muestra el panal $\{5, 3, 3\}_3$ en donde las aristas del mismo color están identificadas.

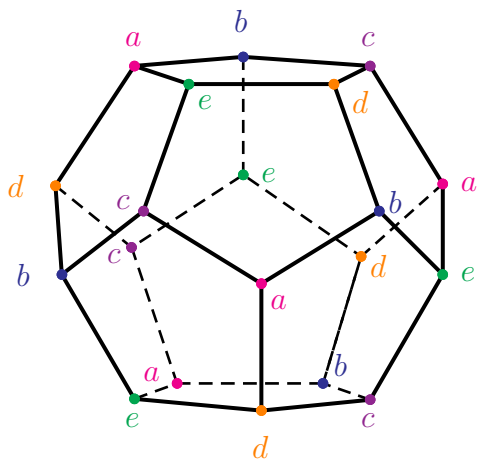


Figura 3.62: Panal $\{5, 3, 3\}_3$, donde vértices del mismo color están identificados.

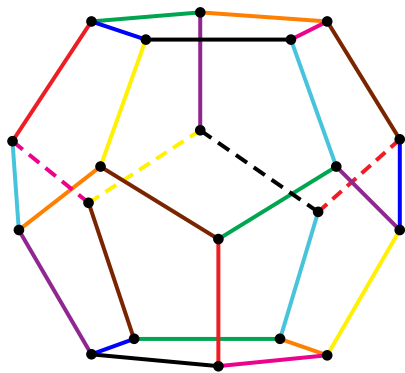


Figura 3.63: Panal $\{5, 3, 3\}_3$, donde aristas del mismo color están identificadas.

Conclusiones

En este trabajo, se describieron los panales esféricos regulares de rango cuatro de tipo $\{p, q, r\}$ y a partir de estos se construyeron nuevos panales $\{p, q, r\}_t$ identificando aristas a distancia t a lo largo de los polígonos de Petrie derechos de los panales $\{p, q, r\}$. Describimos sus grupos de automorfismos y los clasificamos en regulares o quirales, para describirlos con detalle se requirió teoría de politopos abstractos.

En las tablas 3.6 y 3.7 se muestran los panales regulares $\{p, q, r\}_{h/2}$ y los panales quirales $\{p, q, r\}_t$ respectivamente (solo se muestran los panales $\{p, q, r\}_t$ no isomorfos, con excepción de los panales $\{3, 3, 4\}_2$ y $\{3, 3, 5\}_3$ pues son duales a $\{4, 3, 3\}_2$ y $\{5, 3, 3\}_3$, respectivamente y sus grupos de simetrías son isomorfos). En ambas tablas se muestra el número de vértices, aristas, caras y celdas de los panales $\{p, q, r\}_t$, así como sus grupos $[p, q, r]_t^+$.

$\{p, q, r\}_t$	V	E	F	C	$[p, q, r]_{h/2}^+$
$\{4, 3, 3\}_4$	8	16	12	4	$((C2 \times C2 \times C2 \times C2) : C3) : C2$
$\{3, 4, 3\}_6$	12	48	48	12	$(A4 \times A4) : C2$
$\{5, 3, 3\}_{15}$	300	600	360	60	$A_5 \times A_5$

Tabla 3.6: Panales regulares de tipo $\{p, q, r\}_{h/2}$

$\{p, q, r\}$	t	V	E	F	C	$[p, q, r]_t^+$
$\{4, 3, 3\}$	2	2	4	3	1	$S4$
$\{3, 4, 3\}$	2	1	4	4	1	$S4$
	3	3	12	12	3	$(C3 \times A4) : C2$
$\{5, 3, 3\}$	3	5	10	6	1	$A5$

Tabla 3.7: Panales quirales de tipo $\{p, q, r\}_t$

Recordemos que la figura 3.19 muestra una coloración de aristas en $\{4, 3, 3\}$, cuya coloración indica las aristas identificadas para construir el panal $\{4, 3, 3\}_2$. Esta coloración se obtuvo identificando las aristas a distancia dos a lo largo de los polígonos de Petrie derechos.

Por otro lado en [1], se construye un 4-politopo quiral en \mathbb{R}^4 a partir de la figura 3.64, donde los vértices y aristas son los vértices y aristas del hipercubo de la figura 3.64, las 2-caras son las componentes conexas de dos colores, las 3-caras son las componentes conexas

de tres colores. Notemos que la figura 3.19 y 3.64 es la misma. Resulta que este es el único ejemplo conocido de un 4-politopo quiral en \mathbb{R}^4 .

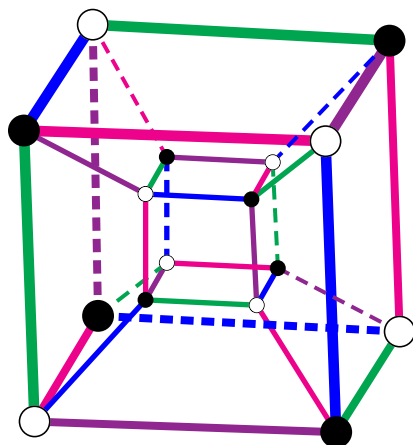


Figura 3.64: 4-politopo quiral en \mathbb{R}^4

Surge la siguiente pregunta, con las identificaciones encontradas en los panales $\{3, 3, 4\}$, $\{3, 4, 3\}$, $\{5, 3, 3\}$ y $\{3, 3, 5\}$ para construir los panales $\{3, 3, 4\}_2$, $\{3, 4, 3\}_2$, $\{3, 4, 3\}_3$, $\{5, 3, 3\}_3$ y $\{3, 3, 5\}_3$ ¿se podrán encontrar 4-politopos quirales en \mathbb{R}^4 de forma análoga como se hace en [1]?

Otra pregunta que queda por responder es si podemos obtener panales quirales de rango mayor a cuatro, usando técnicas similares a las descritas en este trabajo, es decir, usando torsiones (y sus correspondientes polígonos de Petrie) y haciendo cociente con estas.

Apéndice A

GAP

A.1 Panales esféricos regulares de tipo $\{p, q, r\}$

Hipercubo

A continuación, definimos un grupo libre g con cuatro generadores. Luego, redefinimos las variables de g por las letras R_0, R_1, R_2, R_3 , las cuales usamos para los generadores de $[4, 3, 3]$. Después, definimos en G el grupo $[4, 3, 3]$ y obtenemos el orden de G . En F definimos el subgrupo de rotaciones de $\{4, 3, 3\}$ y también calculamos su orden.

```
gap> g:=FreeGroup("R0","R1","R2","R3");
<free group on the generators [ R0, R1, R2, R3 ]>
gap> R0:=g.1;;
gap> R1:=g.2;;
gap> R2:=g.3;;
gap> R3:=g.4;;
gap> G:=g/[R0^2,R1^2,R2^2,R3^2,(R0*R1)^4,(R1*R2)^3,(R2*R3)^3,(R0*R2)^2,
(R0*R3)^2,(R1*R3)^2];
<fp group on the generators [ R0, R1, R2, R3 ]>
gap> Order(G);
384
gap> F:=Subgroup(G,[G.2*G.4,G.1*G.4,G.1*G.3]);
Group([ R1*R3, R0*R3, R0*R2 ])
gap> Order(F);
192
```

Se verifica que $[4, 3, 3]^+ \triangleleft [4, 3, 3]$ y $[[4, 3, 3] : [4, 3, 3]^+] = 2$.

```
gap> IsNormal(G,F);
true
gap> Index(G,F);
2
```

Se redefinen los generadores de $F = [4, 3, 3]^+$, es decir, $L = R_1R_3$, $M = R_0R_3$ y

$N = R_0R_2$.

```
gap> L:=F.1;;
gap> M:=F.2;;
gap> N:=F.3;;
```

Ahora obtendremos las torsiones del grupo $G = [4, 3, 3]$. Primero listamos los elementos de G .

```
gap> e:=Elements(G);;
```

Definimos una lista l de tamaño $(Size(G))(Size(G))$ cuyas entradas son todas cero.

```
gap> l:=[];; gap> for i in [1..(Size(G)*Size(G))] do l[i]:=0; od;
```

En el siguiente código, tomamos un elemento $e[j]$ de G y lo conjugamos con todos elementos $e[i]$ de G , es decir, $e[i]e[j](e[i])^{-1}$, donde $i \in \{1, \dots, Size(G)\}$. Queremos checar, cuándo $e[i]e[j](e[i])^{-1}$ es igual a $R_0R_1R_2R_3 = MLNM$. Así, conoceremos los elementos de $[4, 3, 3]$ que son torsiones derechas, donde $j \in \{1, \dots, Size(F)\}$. La lista l contiene las torsiones derechas.

```
gap> for j in [1..Size(G)] do
>   for i in [1..Size(G)] do
>     if e[i]*e[j]*Inverse(e[i])=M*L*N*M then l[(j-1)*Size(G)+i]:=e[j]; fi;
>   od;
> od;
gap> l;;
```

Si quitamos las torsiones repetidas y las entradas iguales a cero de l , obtenemos todas las torsiones. En total son 48 torsiones.

Análogamente como obtuvimos a las torsiones obtendremos las torsiones derechas. Veremos que hay 24 torsiones derechas. Tomamos $w \in [4, 3, 3]$, veremos si existen elementos $\alpha \in [4, 3, 3]^+$ tales que $\alpha w \alpha^{-1} = R_0R_1R_2R_3 = MLNM$.

```
gap> w:=Elements(G);;
gap> a:=Elements(F);;
```

Nuevamente definimos una lista m de ceros:

```
gap> m:=[];;
gap> for i in [1..(Size(G)*Size(F))] do m[i]:=0; od;
```

Guardamos las torsiones en la lista m .

```
gap> for j in [1..Size(G)] do
>   for i in [1..Size(F)] do
>     if a[i]*w[j]*Inverse(a[i])=M*L*N*M then m[(j-1)*Size(F)+i]:=w[j];
>     fi;
>   od;
```

```
> od;
> m;;
```

Quitamos los elementos repetidos de la lista m y obtenemos las 24 torsiones derechas. Para obtener las torsiones izquierdas, primero definimos $w \in [4, 3, 3]$ y $cl[2] = [4, 3, 3]^+ R_0$.

```
gap> w:=Elements(G);;
gap> cl:=RightCosets(G,F);
[RightCoset(Group([R1*R3,R0*R3,R0*R2 ] ),<identity ...>),
RightCoset(Group([R1*R3, R0*R3, R0*R2 ]),R0)]
gap> a:=Elements(cl[2]);;
```

Nuevamente definimos una lista n de ceros:

```
gap> n:=[];;
gap> for i in [1..(Size(G)*Size(F))] do n[i]:=0; od;
```

Guardamos las torsiones izquierdas en la lista n , donde $a[i] \in [4, 3, 3]^+ R_0$.

```
gap> for j in [1..Size(G)] do
>   for i in [1..Size(F)] do
>     if a[i]*w[j]*Inverse(a[i])=M*L*N*M then n[(j-1)*Size(F)+i]:=w[j];
>     fi;
>   od;
> od;
> n;;
```

Quitamos los elementos repetidos de la lista n y obtenemos las 24 torsiones izquierdas. Los cálculos de los panales esféricos regulares que restan se encuentran en la tabla A.1 pero omitimos los detalles.

Panal	Orden $[p, q, r]$	Orden $[p, q, r]^+$	No. torsiones	No. torsiones der. e izq.
$\{4, 3, 3\}$	384	192	48	24
$\{3, 3, 4\}$	384	192	48	24
$\{3, 3, 3\}$	120	60	24	12
$\{3, 4, 3\}$	1152	576	96	48
$\{5, 3, 3\}$	14400	7200	–	–
$\{3, 3, 5\}$	14400	7200	–	–

Tabla A.1: Panales regulares esféricos

A.2 Paneles regulares tipo $\{p, q, r\}_t$

Panal de tipo $\{4, 3, 3\}_4$

A continuación, definimos un grupo libre g con cuatro generadores. Luego, redefinimos las variables de g por las letras R_0, R_1, R_2, R_3 las cuales usamos para los generadores de $[4, 3, 3]$. Después, G es el grupo $[4, 3, 3]$.

```
gap> g:=FreeGroup("R0","R1","R2","R3");
<free group on the generators [ R0, R1, R2, R3 ]>
gap> R0:=g.1;
R0
gap> R1:=g.2;
R1
gap> R2:=g.3;
R2
gap> R3:=g.4;
R3
gap> G:=g/[R0^2,R1^2,R2^2,R3^2,(R0*R1)^4,(R1*R2)^3,(R2*R3)^3,(R0*R2)^2,(R0*R3)^2,(R1*R3)^2];
<fp group on the generators [ R0, R1, R2, R3 ]>
gap> Order(G);
384
```

Definimos en S al grupo $\langle(LN)^4\rangle$, en NG a la cerradura normal de $\langle(LN)^4\rangle$ en $G = [4, 3, 3]$ y en C al grupo cociente $[4, 3, 3]/\langle(LN)^4\rangle$.

```
gap> S:=Subgroup(G, [(G.2*G.4*G.1*G.3)^4]);
Group([ (R1*R3*R0*R2)^4 ])
gap> NG:=NormalClosure(G,S);
Group(<fp, no generators known>)
gap> C:=FactorGroup(G,NG);
<permutation group with 4 generators>
gap> Order(C);
192
```

El subgrupo de rotaciones $[4, 3, 3]^+$ está definido en F y redefinimos las variables por L, M y N .

```
gap> F:=Subgroup(G,[G.2*G.4,G.1*G.4,G.1*G.3]);
Group([ R1*R3, R0*R3, R0*R2 ])
gap> Order(F);
192
gap> L:=F.1;
R1*R3
gap> M:=F.2;
```

R0*R3

```
gap> N:=F.3;
```

R0*R2

Veamos que $\langle(LN)^4\rangle$ es normal en $F = [4, 3, 3]^+$ y $P = [4, 3, 3]^+ / \langle(LN)^4\rangle$.

```
gap> z:=Subgroup(F,[(L*N)^4]);
```

```
Group([(R1*R3*R0*R2)^4]); gap> IsNormal(F,z);
```

true

```
gap> P:=FactorGroup(F,z);
```

```
<permutation group with 3 generators>
```

```
gap> Order(P);
```

96

Calcularemos el $[C : P]$, es decir, $[[p, q, r]_t : [p, q, r]_t^+]$ y los grupos de $[p, q, r]_t$ y $[p, q, r]_t^+$, donde $:$ en GAP significa producto semidirecto.

```
gap> Index(C,P);
```

2

```
gap> StructureDescription(C);
```

```
"(((C2 x C2 x C2 x C2) : C3) : C2) : C2"
```

```
gap> StructureDescription(P);
```

```
"((C2 x C2 x C2 x C2) : C3) : C2"
```

Veamos que $P = F/z$ es isomorfo a el grupo con la presentación H .

```
gap> H:=f/[L^2,N^2,M^2,(L*M)^4,(L*M*N)^3,(M*N)^3,(L*N)^4];
```

```
<fp group on the generators [ L, N, M ]>
```

```
gap> IsomorphismGroups(P,H);
```

La instrucción `IsomorphismGroups(P,H)` nos devuelve el isomorfismo entre los grupos P y H , como sucede en este caso, simplemente no mostramos el isomorfismo. Si P y H no fueran isomorfos, GAP regresa el valor `fail`.

Ahora, se calcula el orden de los elementos LN y $LMNM$ en $H = [4, 3, 3]_4^+$.

```
gap> Order(H.1*H.2);
```

4

```
gap> Order(H.1*H.3*H.2*H.3);
```

4

Los cálculos de los otros panales regulares $\{p, q, r\}_t$ se obtienen análogamente y están en la tabla 3.2.

A.3 Paneles quirales de tipo $\{p, q, r\}_t$

Panel de tipo $\{4, 3, 3\}_2$

Primero definimos en F al grupo $[4, 3, 3]^+$.

```
gap> f:=FreeGroup("L","N","M");
<free group on the generators [ L, N, M ]>
gap> L:=f.1;;
gap> N:=f.2;;
gap> M:=f.3;;
gap> F:=f/[L2,N2,M2,(L*M)4,(L*M*N)3,(M*N)3];
<fp group on the generators [ L, N, M ]>
```

Podemos escribir al grupo $P = [4, 3, 3]^+ / \langle\langle (LN)^2 \rangle\rangle$ o con la presentación de G :

```
gap> z:=NormalClosure(F, Subgroup(F, [(F.1*F.2)2]));
Group(<fp, no generators known>)
gap> P:=FactorGroup(F,z);
gap> G:=f/[L2,N2,M2,(L*M)4,(L*M*N)3,(M*N)3,(L*N)2];
<fp group on the generators [ L, N, M ]>
gap> IsomorphismGroups(P,G);
gap> Size(G);
24
```

El orden de los de las torsiones LN y $LMNM$ es dos y cuatro respectivamente. Además encontramos que $G = [4, 3, 3]_2^+ = S_4$:

```
gap> Order(G.1*G.2);
2
gap> Order(G.1*G.3*G.2*G.3);
4
gap> StructureDescription(G);
"S4"
```

Obtenemos el número de vértices, aristas, caras y celdas:

```
gap> V:=Subgroup(G,[G.1*G.3*G.2,G.2*G.3]);
Group([ L*M*N, N*M ])
gap> Index(G,V);
2
gap> E1:=Subgroup(G,[G.2*G.3,G.2]);
Group([ N*M, N ])
gap> Index(G,E1);
4
gap> F1:=Subgroup(G,[G.3*G.1,G.1]);
Group([ M*L, L ])
```

```

gap> Index(G,F1);
3
gap> C:=Subgroup(G,[G.3*G.1,G.1*G.3*G.2]);
Group([ M*L, L*M*N ])
gap> Index(G,C);
1

```

Análogamente calculamos los datos de la tabla 3.4 y 3.5.

Cerradura normal de Z en $[4, 3, 3]^+$

Definimos en G al grupo $[4, 3, 3]$ y en F al grupo $[4, 3, 3]^+$ y en z definimos la cerradura normal de $\langle(LN)^2\rangle$ en $[4, 3, 3]^+$. Con la instrucción $z; GAP$ que nos regresa los generadores de $\overline{\langle(LN)^2\rangle}$.

```

gap> g:=FreeGroup("R0","R1","R2","R3");
<free group on the generators [ R0, R1, R2, R3 ]>
gap> R0:=g.1;
R0
gap> R1:=g.2;
R1
gap> R2:=g.3;
R2
gap> R3:=g.4;
R3
gap> G:=g/[R0^2,R1^2,R2^2,R3^2,(R0*R1)^4,(R1*R2)^3,(R2*R3)^3,(R0*R2)^2,(R0*R3)^2,(R1*R3)^2];
<fp group on the generators [ R0, R1, R2, R3 ]>
gap> F:=Subgroup(G,[G.2*G.4,G.1*G.4,G.1*G.3]);
Group([ R1*R3, R0*R3, R0*R2 ])
gap> L:=F.1;
R1*R3
gap> M:=F.2;
R0*R3
gap> N:=F.3;
R0*R2
gap> z:=NormalClosure(F,Subgroup(F,[(L*N)^2]));
Group(<fp, no generators known>)
gap> z;
Group(<fp, no generators known>)
gap> Elements(z);;
gap> z;
Group([ R1*R0*R2*R1*R3^-1*R2^-1*R1^-1*R0^-1, R1*R2*R1*R0*R1^-1*R2^-1*R3^-1*R0^-1 ])

```


Bibliografía

- [1] J. Bracho, I. Hubard, and D. Pellicer. A finite chiral 4-polytope in \mathbb{R}^4 . *Discrete Comput. Geom.*, 52(4):799–805, 2014.
- [2] H. R. Brahana. Regular maps and their groups. *American Journal of Mathematics*, 49(2):268–284, 1927.
- [3] M. Conder, I. Hubard, E. O’Reilly-Regueiro, and D. Pellicer. Construction of chiral 4-polytopes with alternating or symmetric automorphism group. *Journal of Algebraic Combinatorics*, 42(1):225–244, 2015.
- [4] M. Conder, I. Hubard, and T. Pisanski. Constructions for chiral polytopes. *J. of the London Mathematical Society*, 77(1):115–129, 2006.
- [5] H.S.M. Coxeter. Configurations and maps. pages 18–38, 1948.
- [6] H.S.M. Coxeter. *Twisted Honeycombs*. Conference Board of the Mathematical Sciences. 1970.
- [7] H.S.M. Coxeter. *Regular Polytopes*. Dover books on advanced mathematics. Dover Publications, 1973.
- [8] H.S.M. Coxeter and W.O.J. Moser. *Generators and relations for discrete groups*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Springer-Verlag, 1980.
- [9] G. Cunningham and D. Pellicer. Chiral extensions of chiral polytopes. 330, 2014.
- [10] A.I.R. Galarza and J. Seade. *Introduction to Classical Geometries*. Birkhäuser Basel, 2007.
- [11] The GAP Group. *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.8.10*, 2018.
- [12] B. Grünbaum and G.C. Shephard. *Tilings and Patterns*. Freeman, 1986.
- [13] D. Hilbert and S. Cohn-Vossen. *Geometry and the Imagination*. AMS Chelsea Publishing. AMS Chelsea Pub., 1999.

- [14] I. Hubard and A. I. Weiss. Self-duality of chiral polytopes. *J. Comb. Theory Ser. A*, 111(1):128–136, 2005.
- [15] P. McMullen. Regular polytopes of full rank. 32:1–35, 2004.
- [16] P. McMullen and E. Schulte. *Abstract Regular Polytopes*. Number v. 92 in Abstract Regular Polytopes. Cambridge University Press, 2002.
- [17] D. Pellicer. A construction of higher rank chiral polytopes. *Discrete Math.*, 310(6-7):1222–1237, 2010.
- [18] E. Schulte. Chiral polyhedra in ordinary space, I. *Discrete & Computational Geometry*, 32(1):55–99, 2004.
- [19] E. Schulte and A. I. Weiss. Chiral polytopes. In *Applied Geometry And Discrete Mathematics, Proceedings of a DIMACS Workshop, Providence, Rhode Island, USA*, pages 493–516, 1991.
- [20] E. Schulte and A. I. Weiss. Chirality and projective linear groups. *Discrete Mathematics*, 131(1-3):221–261, 1994.
- [21] E. Schulte and A. I. Weiss. Free extensions of chiral polytopes. pages 641–654, 1995.