



**UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**Análisis de Curvas de Rendimiento en
Bonos; Métodos Paramétricos y No
paramétricos.**

Tesis para obtener título de Actuario presenta:

Miguel Angel Robledo Morales

**Director de Tesis:
Act. Enrique Maturano Rodríguez**



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2018



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

1. Introducción	2
1.1. Contexto, Motivación y Propósito del Proyecto.	2
1.2. Estructura de Tesis.	4
1.3. El Desarrollo del Sistema Financiero Mexicano.	5
1.3.1. Mercados de Valores en México.	12
1.3.2. Tipos de Instrumentos.	23
1.4. Teoría de las Curvas de Rendimiento.	34
1.4.1. Formas que adopta la Curvas de Rendimiento.	35
1.4.2. Teorías que explican la estructura por plazos de los rendimientos.	37
2. Métodos de Aproximación Numéricos	39
2.1. Método No Paramétricos	39
2.1.1. Función Núcleo	40
2.1.2. Estimación Función Núcleo y Polinomios Locales	41
2.1.3. Elección del Parámetro de Suavizado	42
2.2. Aproximación Polinómica Fragmentaria	44
2.2.1. Trazadores de Polinomios Cúbicos	44
2.2.2. Determinar los Valores; Sistemas de Ecuaciones	46
2.3. Regresión Lineal Múltiple	49
2.3.1. Estimación de los Coeficientes de Regresión por Mínimos Cuadrados	50
2.3.2. Propiedades de los Estimadores de Mínimos Cuadrados	52
2.3.3. Estimador de σ^2	53
3. Descripción Tasas Forward y Bonos Cupón Cero	54
3.1. Especulación y cobertura con contratos forward.	54
3.1.1. Valor Final de las Posiciones.	55
3.2. Forward sobre una Acción que No Paga Dividendos.	55
3.3. Precio de Entrega de Equilibrio.	55
3.3.1. Precio de entrega de Equilibrio de una Acción en cualquier Tiempo.	57
3.3.2. Precio de un Forward sobre una Acción.	57
3.4. Valuación de Forward de Tasa de Interés.	58
3.4.1. Tasa Forward Instantánea.	58
3.5. Contratos Forward tipo de Cambio.	60
3.6. Conceptos Básicos de Bonos Cupón Cero.	62
3.6.1. Valuación con Interés Simple.	62
3.6.2. Tasa de Descuento.	63
3.6.3. Valuación con Interés Continuamente Capitalizable.	63
3.6.4. Valuación de Bonos con Especificación de la Tasa Corta.	64
3.6.5. Tasa Corta de interés de Comportamiento Exponencial.	64
3.6.6. Tasa de Interés con Convergencia a un Valor de Largo Plazo.	65

3.7. Valor del Dinero en el Tiempo.	66
4. Estimación de Curvas de Rendimiento	68
4.1. Estimación No Paramétrica: Núcleos de Suavización.	68
4.1.1. Precios y Rendimientos Observados	68
4.1.2. Ponderación por Volumen de los Rendimientos Observados	68
4.1.3. Criterios Local de Estimación	68
4.1.4. Suavización con Kernels	69
4.1.5. Suavización con Kernel Normal	69
4.1.6. Aplicación del Método de suavización con kernel	70
4.2. Estimación con Splines Cúbicos	71
4.2.1. Estimación Polinomial	72
4.2.2. Suavizar la Curva de Rendimiento.	73
4.2.3. Limitaciones del uso de Splines para la Tasa Forward	74
4.2.4. Una aplicación de Splines cúbicos para la Estimación de una curva de Rendimiento	75
4.3. Estimación con el Modelo de Nelson y Siegel	78
4.3.1. Propuesta para la tasa Forward Instantánea.	78
4.3.2. Tasa Forward Instantánea y Curva de Rendimiento	78
4.3.3. Tasa Forward Instantánea; solución con raíces reales y distintas.	82
4.3.4. Tasa Forward Instantánea; solución con raíces reales e iguales.	82
4.3.5. Un Ejemplo de Aplicación del Modelo de Nelson-Siegel	85
5. Conclusiones y Consideraciones Finales	90
5.1. Conclusiones	90
A. Cronología de México en el mercado de deuda.	93
A.1. Características principales de los Cetes y Mbonos	94
A.1.1. MBONOS	94
A.1.2. CETES	95
B. Modelo Nucleos kernels	97
C. Splines Cúbicos	101
D. Modelo de Nelson-Siegel	106
Bibliografía	110
Lista de figuras	116
Lista de tablas	120

Capítulo 1

Introducción

1.1. Contexto, Motivación y Propósito del Proyecto.

La descripción del comportamiento del conjunto de las curvas de rendimiento es importante para la valuación de bonos, para las decisiones de las inversiones, de las política financiera y monetaria, entre otros. Existen varios artículos que demuestran que la curva de rendimiento tiene cierto poder de pronóstico sobre la actividad económica.

Sin embargo, en economías emergentes, esto no se ha explotado lo suficiente; México no es la excepción, la estabilidad en la economía ha permitió la emisión de bonos gubernamentales de más largo plazo a partir de 2001. Con esto, no sólo se ha conseguido sentar las bases para mejorar el acceso y las condiciones de financiamiento de los distintos agentes económicos.

Además ahora ya se cuentan con curvas de rendimiento de tasas de interés profunda y líquida a plazos de vencimiento de hasta 30 años. La existencia de una curva, ha servido como referencia para las emisiones y el desarrollo del mercado de deuda. En México contar con un mercado de deuda maduro brinda más alternativas de financiamiento esto reflejado en mayores plazos y menores costos, también nos enfrentamos a un proceso altamente dinámico y con un mercado secundario líquido y con una amplia participación de diversos inversionistas institucionales nacionales y extranjeros.

El desarrollo de este sector ha sido de gran importancia, con esto se han creado nuevos métodos de evaluación de las curvas de rendimiento ya que tiene información sobre las expectativas de los agentes económicos respecto de la evolución de la economía. Son aquellas que nos permitirán evaluar características de los tipos de instrumentos y sus distintos vencimientos con los que cuenta actualmente el mercado de valores gubernamentales en nuestro país y la manera en que éstos son colocados entre inversionistas.

Cabe destacar que, en tan sólo siete años (1999-2006) se extendió la curva de rendimiento de los valores gubernamentales hasta incluir el plazo de 30 años en bonos y Udibonos. Esta curva de rendimientos ha servido de referencia para la colocación de deuda en pesos para muchos emisores nacionales, e incluso para agentes extranjeros.

Es a partir de los valores gubernamentales de donde se origina la curva de rendimiento que sirve de referencia para las tasas de interés. Además, también sirven de subyacente¹ para diver-

¹Es el valor de referencia para de determinados derivados, como son los futuros, opciones, warrants, swaps y otros productos que no son activos por sí mismos, sino que dependen de la cotización, evolución y precio de otro activo en concreto, este activo se denomina activo subyacente.

Los productos derivados, así como para garantizar distintos tipos de préstamos y operaciones financieras.

Una teoría establece que, bajo ciertos supuestos, para cualquier período en el que se van a mantener bonos, la ganancia esperada debe ser la misma para cualquier combinación de bonos pero con el mismo grado de riesgo (por ejemplo, bonos del mismo emisor). Lo anterior implica que si el bono de una maduración de 6 meses tiene una tasa de 9 por ciento y el bono de 3 meses tiene una tasa de 8 por ciento, para que esta teoría se mantenga, el mercado espera que dentro de 3 meses la tasa de un bono con maduración de 3 meses sea de 10 por ciento. Así, la tasa de interés de un bono de largo plazo se puede expresar como el promedio de las tasas de corto plazo que serán vigentes durante el período de maduración de dicho bono.

Por tanto, con el advenimiento de ciclos económicos más estables, la información que contiene la parte larga de la curva de rendimiento podría ser una herramienta útil de la evolución de la actividad económica futura.

Entonces un análisis no sólo se circunscribe a ser un instrumento de la teoría financiera: valoración de activos, análisis de cartera, arbitraje y cobertura, etc., si no de la monetarias, dada su estrecha vinculación con la formación de expectativas de los agentes, ya que, la estructura temporal posee información sobre las expectativas de los tipos futuros; y a su vez sobre la inflación esperada.

Resumiendo, y con fines de claridad, se establece a continuación el propósito general del trabajo, y los objetivos particulares a fin de poder ofrecer un documento a estudiantes, académicos e inversionistas que permita evaluar los distintos instrumentos de deuda.

Objetivo general.

- El objetivo de este trabajo consiste en realizar un análisis con un mínimo de parámetros, con sus estructuras temporales de tasa de intereses que conserven la forma de las curvas que se construyen a partir de datos históricos observados, así como sus métodos predictivos a corto plazo y largo plazo sobre el comportamiento Cetes y algunos bonos, en México.

Objetivo 1

- Identificar los parámetros de las curvas de rendimiento y variables relevantes así como sus características y propiedades, para determinar las relaciones existentes entre dichas variables, .

Objetivo 2

- Realizar un análisis del poder predictivo de la curva de rendimiento, se utilizan metodologías más recientes para verificar las diferentes de tasas, en los pronósticos con el fin de proporcionar un marco teórico para valorar dichos instrumentos a corto plazo y largo plazo.

Para abordar y lograr el propósito general, y en específico los objetivos particulares, se propone aplicar las siguientes estadísticas:

Al realizar la clasificación se usarán bonos con las mismas características y distintos vencimientos a fin de generar historial de cada instrumento y así obtener gráficos que nos permitan ver

el comportamiento a transcurso del tiempo.

En el estudio de los bonos se usaran distintos métodos por ejemplo el modelo de Splines Cúbicos para generar curvas de rendimiento con la finalidad de encontrar una mejor predicción a corto, mediano plazo y largo plazo.

Para la complementación de estos métodos, se decidió usar el software estadístico R que es de licencia libre, es muy accesible y el modelado de las series es muy practico y versátil por la cantidad de librerías y funciones que se han desarrollado en el manejo de la información y excel que nos permite la elaboración de gráficas.

1.2. Estructura de Tesis.

La tesis está dividida en 5 Capítulos. En el Capítulo 1 se da una introducción, de cómo fue surgiendo el mercado de deuda en México, como ha sido su desarrollo en políticas monetarias que permitan un mejor desarrollo en sector, se muestra los cetes como los primero bonos que se emiten como deuda gubernamental, creación de nuevos instrumentos de deuda que han surgido a través de tiempo. Y su difusión y penetración en sector bancario, bursátil y para ahorradores que desea adquirir ese tipo de instrumentos de deuda.

En el Capítulo 2 se presentan métodos de aproximación, que nos permitan hacer las aproximaciones a las curvas de rendimiento, el primero consiste en un estimador de tipo Kernel que estima la función de densidad en un punto t , donde h es una sucesión de parámetros de suavización llamados ventanas o amplitudes que debe tender a cero lentamente, otro método de aproximación es el polinomio llamado de Splines Cúbicos que cuenta con cuatro parámetros para estimar. El ultimo es el de mínimos cuadrados múltiples es un modelo que se plantea en regresión múltiple donde son las variables independientes o explicativas. La variable respuesta depende de las variables explicativas y de una componente de error que se distribuye según una normal donde el ajuste se realiza por el método de máxima verosimilitud o el método de mínimos cuadrados.

El Capítulo 3 está dividido en dos partes en la primera se habla de tasá Forward, como se valúa sobre una acción donde estos son utilizados para especulación en las coberturas sobre los precio del activo subyacente si estos aumentan o disminuyen, esto se le conoce como estrategias de inversión y condiciones de equilibrio. La segunda parte habla de bonos cupón cero, de estos instrumentos con las tasas que se compra a descuento. Estos contratos son conceptos fundamentales en finanzas es el valor del dinero en el tiempo, donde supone que el riesgo de incumplimiento de cualquier de las partes es nulo.

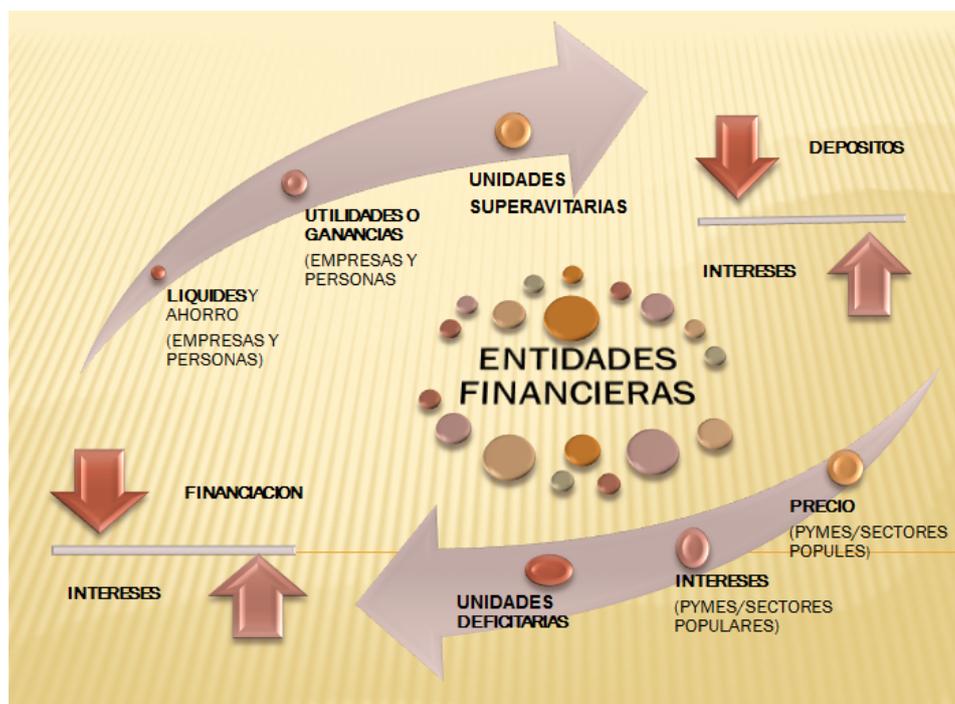
En el cuarto Capítulo se implementan las bases de datos y los conceptos teóricos que se desarrollaron con anterioridad para modelar. Para construir una curva de rendimiento, se aplicaran distintas metodologías. Los métodos de estimación con Kernels, o Núcleos de Suavización, consiste en ajustar una curva a un número dado de puntos donde el estimador se obtiene mediante la ponderación de los errores de ajuste. Los modelos paramétricos son una ecuación diferencial estocástica que conduce la dinámica de las tasa corta o Forward. Se utiliza la técnica de Splines Cúbicos para estimar una estructura de plazos con base en la información de un conjunto de rendimientos a distintos plazos. El modelo de Nelson y Siegel (1987) proporciona un método de estimación paramétrica, es un modelo que no es polinomio que elimina cambios abruptos en la estructura de plazos de la tasa de interés, sobre todo en el largo plazo.

En la parte final, que corresponde al Capítulo 5, se incluyen las conclusiones y consideraciones finales. Se realizan ciertas comparaciones y se indica cuáles fueron las ventajas y desventajas de los modelos para estimación de las curvas de rendimiento para el corto y largo tiempo. Se prepara el terreno para un posible trabajo a futuro, con ideas de cómo se puede mejorar las predicciones para las tasas.

1.3. El Desarrollo del Sistema Financiero Mexicano.

Los mercados financieros contribuyen al crecimiento de una economía ya que permiten la canalización de recursos entre unidades superavitarias y deficitarias², beneficiando ambas partes, también ayudan a identificar y financiar proyectos más eficientes y productivos, permiten transformar y diversificar riesgos, tal que los agentes puedan afrontarlos y asumirlos.

Figura 1.1: La interacción entre las unidades superavitarias y deficitarias, para canalizar los recursos.



Intermediación Financiera e Intermediarios.

Un sistema financiero está integrado por distintos intermediarios financieros, siendo los más conocidos y destacados, los bancos. Otros más son las aseguradoras, afianzadoras, arrendadoras, casas de bolsa y las administradoras de fondos de inversión. Como intermediarios financieros, los bancos son indispensables para la existencia y el buen funcionamiento de cualquier sistema financiero.

²Es un proceso que se divide en dos partes, en donde se entiende que las unidades económicas son cualquier persona o empresa que participe en la economía en un determinado tiempo. Entonces por un lado están las personas o empresas que tienen un excedente en sus utilidades o ganancias (superavitarias). Del otro lado se encuentran las personas o empresas, con un nivel de consumo mayor al de sus ingresos con lo cual no tiene capacidad para generar excedentes (deficitarias)

Los beneficios que ofrecen en general, que es uno de los vehículos mediante los cuales se canalizan recursos entre los agentes económicos que tienen superávit de fondos prestan a aquellos que tienen déficit. Este mercado sirve, además, como un complemento en el financiamiento y en el ahorro bancario.

Su finalidad es proporcionar un sano desarrollo a fin de lograr un sistema estable, accesible, competitivo y eficiente.

- Regulación acorde con mejores prácticas internacionales, México se ha convertido en un miembro fundamental en los órganos que establecen regulación a nivel internacional.
- Sólidas prácticas de supervisión basadas en perfiles de riesgo de los intermediarios regulados y con amplio reconocimiento internacional.
 - Crecimiento de la cartera de crédito y del tamaño del mercado bursátil.
 - Indicadores de solvencia robustos.
 - Rentabilidad de la industria.
 - Mayor número de intermediarios.
 - Estructuras sólidas para soportar episodios de estrés severos y posibilidad de reaccionar rápidamente a las crisis.

Para intermediarios financieros cumplan con el marco legal y la regulación emitida, y que funcionen adecuadamente para proteger los intereses del público. Finalmente, las autoridades facilitan la transparencia mediante el registro, la transmisión y divulgación de información asociada a las transacciones financieras.

Política Monetaria sobre la Economía.

Los bancos centrales son las autoridades responsables de proveer de moneda y de instrumentar el conjunto de acciones a través de las cuales determina las condiciones bajo las cuales proporciona el dinero que circula en la economía, con lo cual influye en el comportamiento de la tasa de interés de corto plazo.

Actualmente, una forma de fomentar el crecimiento económico sostenido es procurando la estabilidad de precios. Al respecto, es importante mencionar que el banco central no tiene un control directo sobre los precios ya que éstos se determinan como resultado de la interacción entre la oferta y demanda de diversos bienes o servicios, sin embargo, a través de la política monetaria central puede influir sobre el proceso de determinación de precios y así cumplir con su meta de inflación.

En general, satisfacen las necesidades de liquidez en la economía, lo que podría definirse como la primera etapa del mecanismo de transición. Los principales elementos de la segunda etapa del mecanismo de transición se pueden explicar:

- a) **Canal de Tasas de Interés.** Las tasas de mediano y largo plazo dependen, entre otros factores, de la expectativa que se tenga para las tasas de interés de corto plazo en el futuro.
- b) **Canal de Crédito.** Un aumento en las tasas de interés disminuye la disponibilidad de crédito en la economía para inversión y consumo.
- c) **Canal del Tipo de Cambio.** Esta puede ser una apreciación del tipo de cambio que puede dar lugar a una reasignación del gasto en la economía esto debido a que el referido ajuste

cambiario tiende a abaratar las importaciones, a encarecer las exportaciones y subastas en dolores.

- d) **Canal del Precio de Otros Activos.** Un aumento en las tasas de interés tiende a hacer más atractiva la inversión en bonos y disminuye la demanda de acciones, por lo que el valor de mercado de estas últimas, así como el de otros activos puede disminuir.
- e) **Canal de Expectativas.** Las decisiones de política monetaria tienen efectos sobre las expectativas acerca del desempeño futuro de la economía y en particular, el de los precios. Es precisamente con base en dichas expectativas que los agentes económicos realizan el proceso por el cual determinan sus precios.

A su vez, las expectativas de inflación tienen efectos sobre las tasas de interés y éstas sobre la demanda y oferta agregada a través de los canales mencionados anteriormente.

Objetivo Operacional de Tasa de Interés.

Para alcanzar el control sobre la inflación a partir del 21 de enero de 2008, se adoptó como objetivo operacional la tasa de interés interbancaria a un día (tasa de fondeo bancario) en sustitución del saldo sobre las cuentas corrientes que la banca mantiene en el propio Banco (objetivo conocido como el corto).

Con esto el Banco de México inyecta o retira diariamente la liquidez faltante o sobrante del sistema a través de Operaciones de Mercado Abierto (subastas de liquidez). Las tasas a las que se remuneran excedentes en las cuentas corrientes o se cobran los sobregiros son de cero y de dos veces la tasa objetivo para el fondeo bancario a plazo de un día, respectivamente.

Al utilizar su objetivo de tasa para cobrar sobregiros y como base para sus Operaciones de Mercado Abierto, con esto provee los incentivos para que las operaciones de fondeo entre los bancos se lleven a cabo a tasas cercanas a dicha tasa objetivo.

El objetivo operacional de tasa de interés tiene varias ventajas.

- Facilita la comprensión de las acciones de política monetaria y su efectividad.
- Da una mayor estabilidad a las tasas de interés de corto plazo y mayor relevancia de la política monetaria sobre toda la curva de rendimiento.
- Homologa la instrumentación de la política monetaria con la que siguen varios bancos centrales del mundo.

Composición del sistema financiero mexicano.

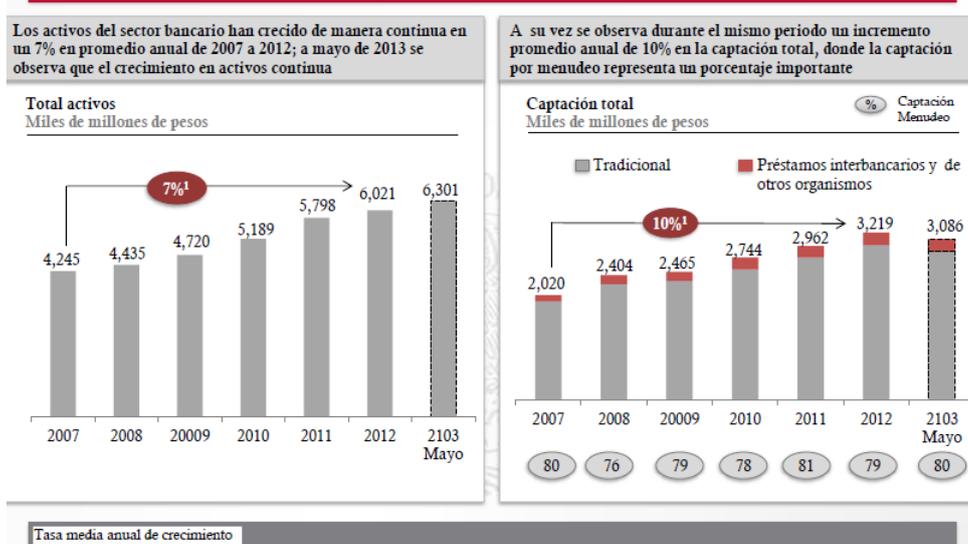
La Banca Múltiple.

Es un sistema bancario sano y bien capitalizado en pleno cumplimiento de los requerimientos, el Sistema Financiero Mexicano no presenta problemas de solvencia ni liquidez que pudieran afectar su estabilidad. Asimismo, existe una supervisión adecuada por parte de las autoridades mexicanas.(figura(1.2))

Existen acuerdos internacionales, como por ejemplo los de Basilea ³, que establecen lineamientos

³compuesto por los gobernadores de los bancos centrales de Alemania, Bélgica, Canadá, España, EE. UU., Francia, Italia, Japón, Luxemburgo, Holanda, el Reino Unido, Suecia y Suiza. Se trataba de un conjunto de recomendaciones para establecer un capital mínimo que debía tener una entidad bancaria en función de los riesgos que afrontaba.

Figura 1.2: El Sector Bancario ha obtenido un Crecimiento Significativo en los últimos años, CNVB, Agosto de 2013



para la regulación, la integración de indicadores de solvencia, solidez y liquidez de los bancos y los límites máximos de financiamiento que pueden otorgar son medidas preventivas para reducir los riesgos podrían amenazar la operaciones del sistema financiero.

Adaptar la regulación conforme a los estándares internacionales pero siendo sensibles a las características del sector en México.(figura(1.3))

Figura 1.3: Sin embargo el sector enfrenta importantes retos

Retos:	Descripción:
a Desconcentración del sector	<ul style="list-style-type: none"> La mayoría de los activos (80%) del sector bancario, así como la mayoría de la cartera total (85%) se encuentran concentrados en 7 instituciones bancarias.
b Mayor penetración Infraestructura financiera formal	<ul style="list-style-type: none"> El sector de la banca múltiple aún no brinda productos y servicios a segmentos significativos de la población: Aunque el número de puntos de acceso por cada 10 mil adultos ha incrementado de manera continua, México aún se encuentra rezagado en comparación a otros países de Latinoamérica.
c Crédito	<ul style="list-style-type: none"> El nivel de penetración crediticia en México es bajo comparado con otros países de Latinoamérica, principalmente para la cartera de MIPyMES.
d Mantener estabilidad y desarrollar la industria	<ul style="list-style-type: none"> Implementar estándares de la regulación internacional pero con la sensibilidad de las características del sector financiero en México a fin de que la regulación garantice la estabilidad y sea conducente al desarrollo del mismo.

- Se priorizan las medidas que fomenten la estabilidad del sistema financiero;
 - Directrices para norma de liquidez de las instituciones, y las disposiciones emitidas con el Banco de México.
 - Requerimientos de capital adicional a las instituciones de banca múltiple o restricción de operaciones con personas vinculadas, cuando se detecte que tienen problemas

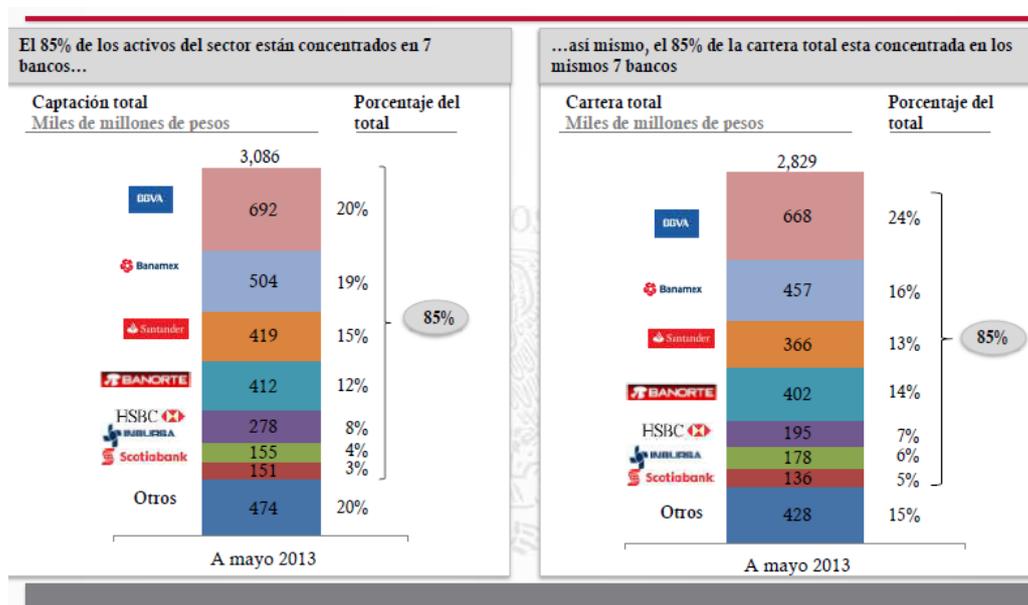
de capitalización o liquidez o estén sujetas a procedimientos de saneamiento o liquidación.

- Mejorar la mecánica operativa de fondos ante condiciones desordenadas de mercado; introducción de metodologías para medir el riesgo de mercado⁴, el desempeño histórico y nivel de endeudamiento de los fondos.
- y en paralelo se trabaja en adaptar la regulación para fomentar el crédito y el crecimiento económico.
 - Lineamientos para incentivar la canalización de recursos al financiamiento del sector productivo, como resultado de la evaluación del desempeño de las instituciones de crédito.
 - Medidas para fomentar la inclusión financiera, las cuales prevén un régimen de corresponsales y medios de pago a través de telefonía para SOFIPOs⁵ y SOCAPs⁶.
 - Régimen especial para que las emisoras realicen ofertas publicas restringidas y que la constitución de fondos sea mas expedita.

Existen 44 bancos.

- 7 bancos concentran el 85 por ciento de los activos totales.
- Los bancos medianos agrupan a los bancos regionales y a los bancos de nicho (figura(1.4)).

Figura 1.4: Se observa una alta concentración del sistema bancario en bancos, CNBV AGOSTO 2013



⁴Es la pérdida potencial en el valor de los activos financieros debido a movimientos adversos en los factores que determinan su precio, también conocidos como factores de riesgo; por ejemplo: las tasas de interés o el tipo de cambio.

⁵Son Entidades de microfinanzas, constituidas como Sociedades Anónimas de Capital Variable, que operan mediante la autorización de la CNBV.

⁶Sociedades Cooperativas de Ahorro y Préstamo, integrantes del sector social sin ánimo especulativo y sin fines de lucro que conforme a la Ley General de Sociedades Cooperativas y de la Ley de Ahorro y Crédito Popular tienen por objeto realizar operaciones de ahorro y préstamo con sus Socios.

- Los BACC son bancos nuevos que facilitarán el acceso a servicios financieros a sectores de la población poco atendidos.

Asimismo, un entorno de tasas de interés muy bajas podrían poner en riesgo la estabilidad financiera. El hecho es que ante tasas de interés muy bajas los participantes en los mercados pueden optar por invertir en activos de mayor riesgo, lo que puede conducir a incrementos insostenibles de los precios de dichos activos.

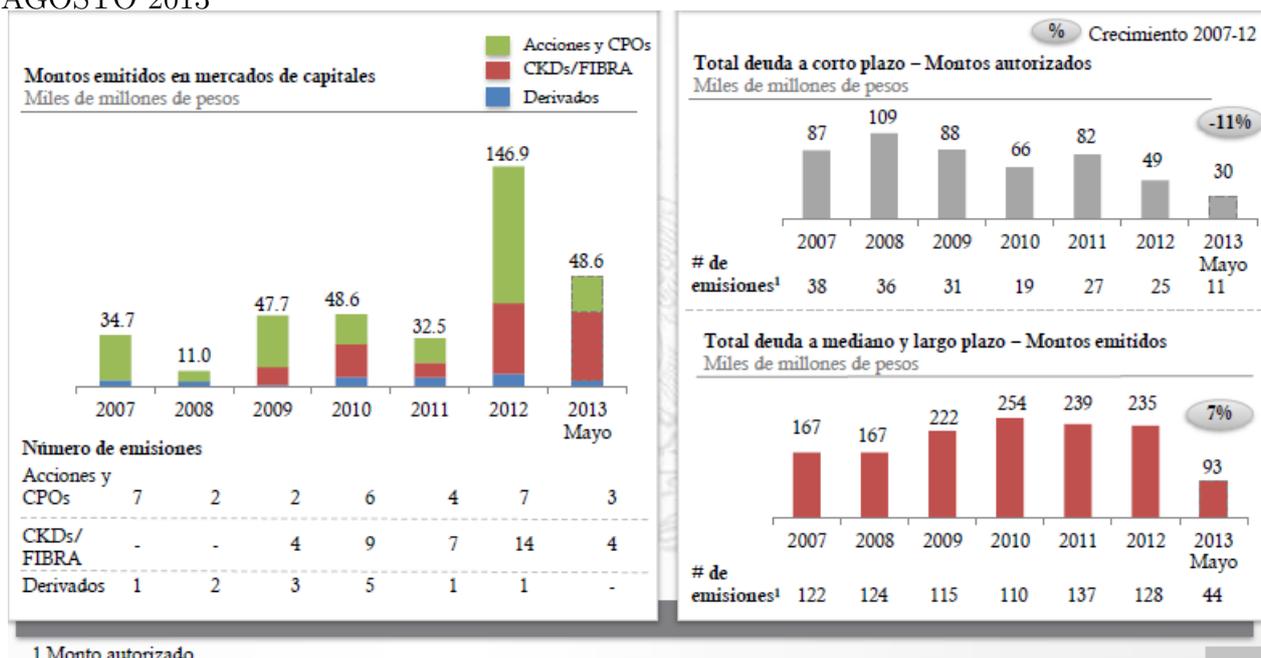
En particular Maddaloni y Peydro han encontrado que en Estados Unidos y en países de la zona del euro, hay reducciones de las tasas de interés de corto plazo están asociadas con un relajamiento en los criterios para el otorgamiento de crédito bancario a empresas y corporaciones.

Altunbas, Gambacorta y Marques-Ibanez investigaron el efecto de las políticas monetarias, sobre el riesgo que toman los bancos utilizando información de instituciones que operan en Estados Unidos y la Unión Europea. Estos autores encuentran evidencia de que periodos prolongados de tasas de interés muy bajas están asociados con una mayor toma de riesgos por parte de las instituciones bancarias.

El Sector Bursátil.

Los mercados financieros son aquéllos en los que se intercambian activos con el propósito principal de movilizar dinero a través del tiempo. Están integrados fundamentalmente por los mercados de deuda, los mercados de acciones, el mercado cambiario y mercado de derivados.(figura(1.5))

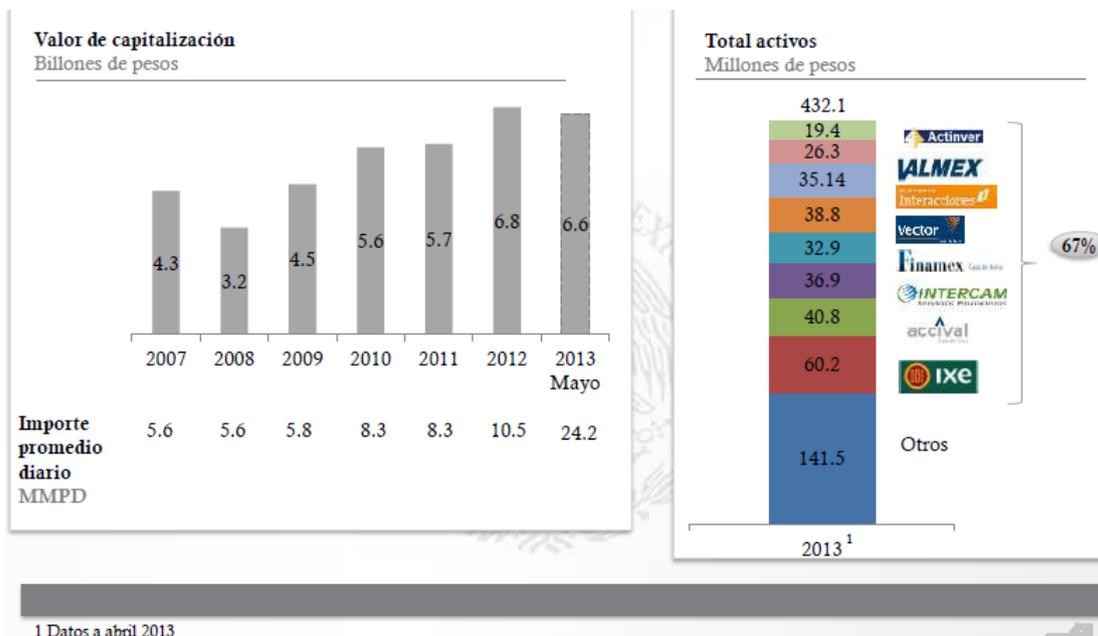
Figura 1.5: El sector bursátil ha tenido un crecimiento estable en los últimos años, CNBV AGOSTO 2013



Las emisiones en el mercado de capitales tuvieron un incremento significativo en 2012 prin-

principalmente por las emisiones de CKDs / Fibras y la oferta de Santander. La caída en deuda de corto plazo es en relación con los programas mayores a un año, mientras que la deuda de mediano y largo plazo muestra un ligero crecimiento.(figura(1.6))

Figura 1.6: A su vez, la Bolsa Mexicana de Valores ha incrementado su valor, CNBV AGOSTO 2013



Sin embargo existen importantes retos por atender para que el mercado de valores en México tenga una mayor profundidad bursátil las cuales son;

- **Transparencia.** Es importante trabajar con transparencia y divulgación de la información de empresas grandes para contribuir al fortalecimiento del mercado de valores.
- **Desconcentración y reducción de costos.** Se deben desarrollar estrategias para confrontar la concentración del mercado en los grupos financieros que denominan los intermediarios y los inversionistas; así como en medidas para reducir el alto costo de emisión.
- **Cambio de percepción y cultural.** Se requiere de una tarea de educación y promoción, para lograr un cambio gradual en la percepción de los empresarios, principalmente en empresas de tradición familiar, para abrir su estructura de capital aprovechando oportunidades en el mercado de valores.
- **Capital de riesgo.** Programas y esfuerzo del gobierno para promover iniciativa entre pequeñas y medianas empresas para el uso de capital de riesgo y capital privado como alternativas para su crecimiento y como una etapa previa para fomentar su entrada al mercado de valores.
- **Regionalización y mercados internacionales.** Participación en mercados regionales de acciones contribuye a incrementar la competencia contra otros mercados fuertes en la región (como Brasil) y a consolidar el mercado mexicano.

Al respecto, en 1999 Alan Greenspan (entonces Presidente de la Reserva Federal de los Estados Unidos) se refirió metafóricamente a una causa de la crisis de las economías asiáticas del momento diciendo que les hizo falta una llanta de refacción. Es decir, dichas economías dependieron en forma casi exclusiva de los bancos para financiarse pues no contaban con otras alternativas de intermediación, como un mercado de deuda en sus propios países.

1.3.1. Mercados de Valores en México.

En México comienza a operar en 1978 cuando el Gobierno Federal emite los primeros Certificados de la Tesorería de la Federación (cetes). En 1977 se emitieron los petrobonos, cuyo rendimiento era determinado por el precio del petróleo. Sin embargo, la flexibilidad de los Cetes para realizar operaciones de compra y venta y operaciones de reporto dentro y fuera de la Bolsa Mexicana de Valores contribuyó a elevar el número de operaciones con este instrumento iniciando de esta forma el desarrollo del mercado de deuda.

Durante la década de los ochenta nacen las primeras casas de bolsa, ofreciendo a los intermediarios nuevas formas de financiamiento encaminadas al mercado de deuda. En los noventas, la liberación de las tasas de interés y la decisión del Gobierno Federal de financiar todo su déficit presupuestal con la emisión de deuda tuvo como consecuencia una mayor participación de los intermediarios en este mercado.

Alrededor de esta década los Pagafes, cuyo rendimiento estaba ligado al tipo de cambio peso-dólar de EE.UU.A.; los Tesobonos, que sustituyeron a los Pagafes; los ajustabonos, que pagaban un rendimiento ajustado por la inflación y fueron reemplazados por los Udibonos; y, los Bondes, que pagaban una tasa revisable cada 28 y 91 días.

En enero de 2000, y con el propósito de impulsar el desarrollo en el mercado de deuda a través de instrumentos de mayor plazo, el Gobierno Federal emitió los primeros bonos a tasa fija con un plazo de 3 años. Actualmente existen referencias de 3, 5, 10, 20 y 30 años.

El mercado de deuda privada se empieza a formar a partir de la reforma financiera de 1988 que terminó con la privatización de la banca en 1991. En este periodo se empiezan a comerciar formalmente los títulos de deuda privada. En 1988 aparecen las aceptaciones bancarias y el papel comercial.

Finalmente, en 2000, nacen los certificados bursátiles, cuya principal característica es la flexibilidad que tienen en cuanto al monto y al plazo de financiamiento.

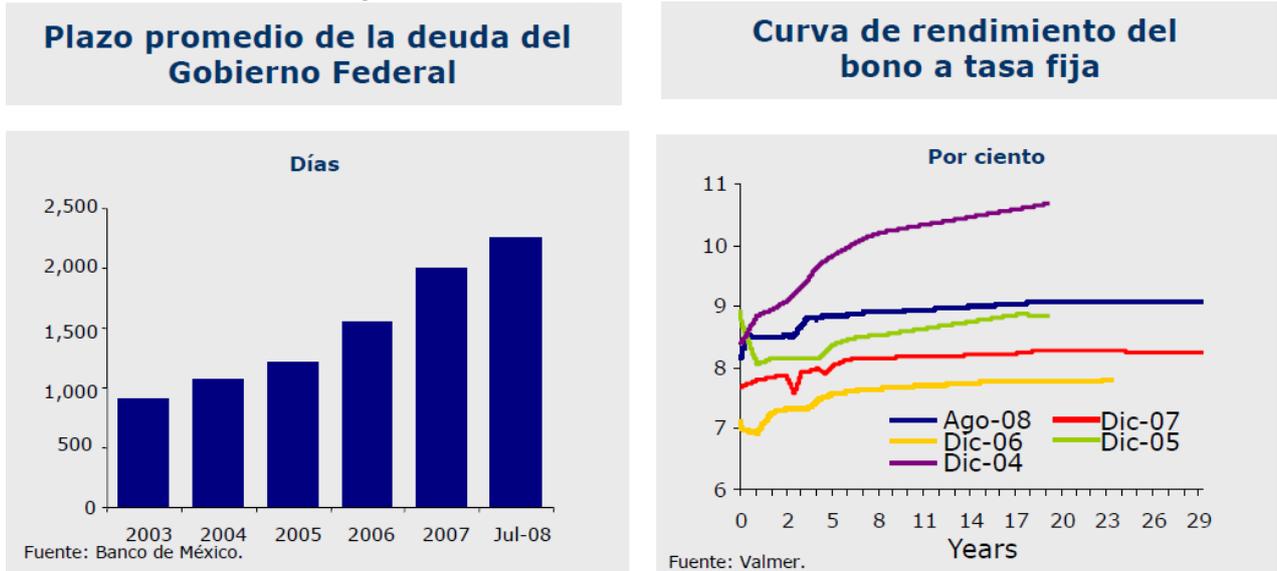
La participación del Gobierno Federal en los Mercados de Deuda.

No solamente porque le permite financiar el gasto del gobierno, sino porque proporciona referencias de tasas de interés y plazos de inversión al resto del mercado. Ofrece opciones de inversión en instrumentos de largo plazo y da profundidad al mercado.

Ha conseguido aumentar el plazo promedio de su deuda. Proporciona una referencia para que otras operaciones alarguen su plazo (figura(1.7)).

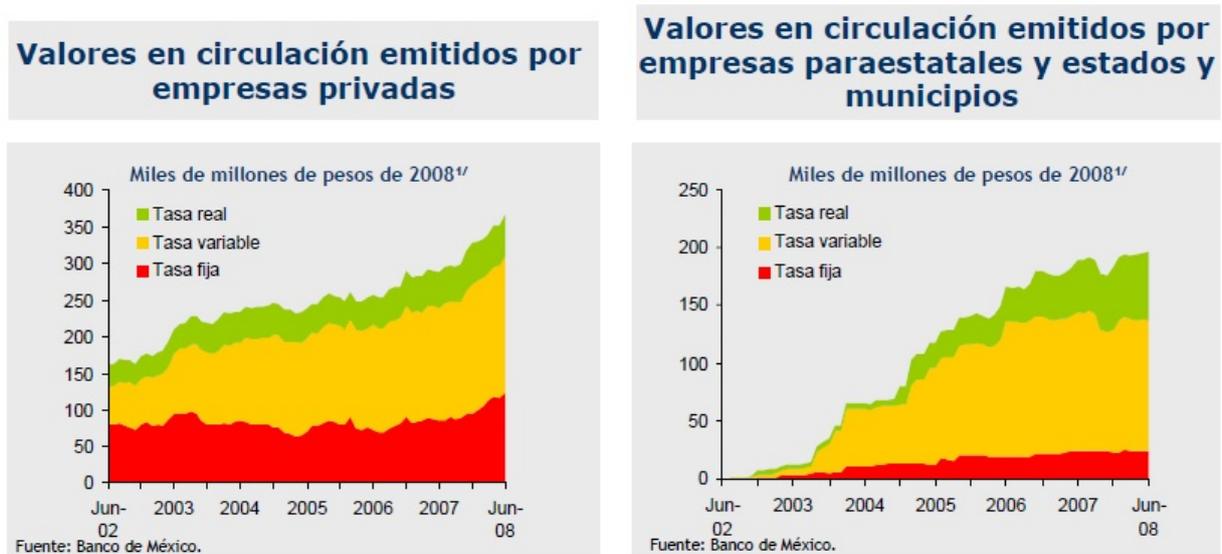
Otros agentes de la economía han obtenido financiamiento a través del mercado de deuda

Figura 1.7: Participación del Gobierno Federal



bursátil en montos cada vez más importantes(figura(1.8)).

Figura 1.8: Participación de iniciativa privada emisión de deuda

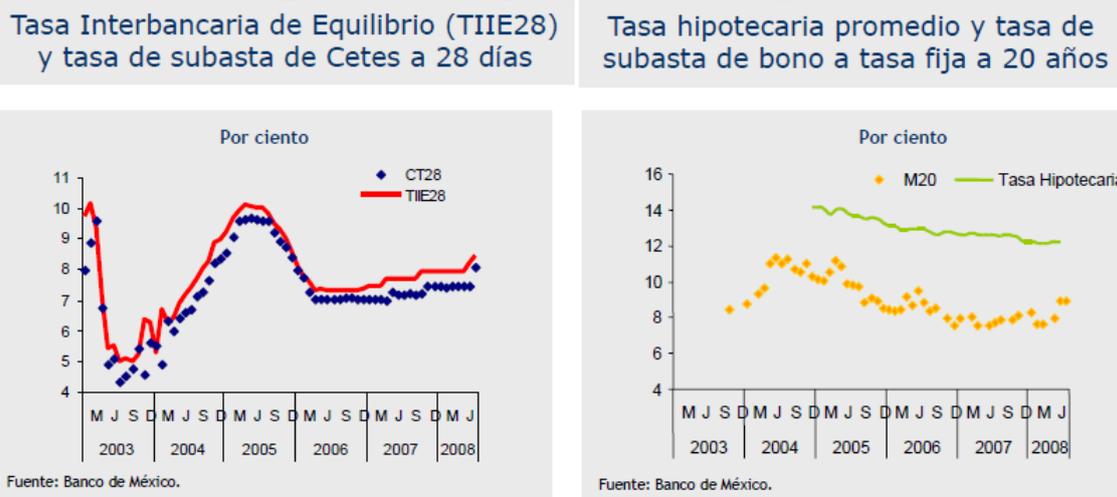


El desarrollo del mercado de deuda ha permitido que se bursátil hipotecas, apoyando así al desarrollo del sector de la vivienda(1.9).

Pero, Karacadag, Sundararajan y Elliott (2003) presentan simbólicamente en una pirámide el orden jerárquico que, según ellos, existe entre los mercados financieros para conseguir su desarrollo.

Además de reconocer la interdependencia entre cada mercado, identifican que el desarrollo de los mercados ubicados en la base de la pirámide es fundamental para lograr el desarrollo de

Figura 1.9: Participación de iniciativa privada



aquellos que se encuentran en la cima. El mercado de valores gubernamentales aparece en el segundo y tercer nivel de acuerdo con esta jerarquía (letras del tesoro y bonos).(figura(1.10))

Figura 1.10: Orden jerárquico de los mercados financieros domésticos



Fuente: Karacadag, Sundararajan y Elliott.

Emisores Libres de Riesgo.

Así, de acuerdo con los expertos del Banco Mundial, un mercado de bonos eficiente se caracteriza por una estructura de mercado competitiva, bajos costos de transacción, bajos niveles de fragmentación, una infraestructura segura y robusta y un alto nivel de heterogeneidad entre participantes.

De la misma forma, el mayor desarrollo del mercado de valores también permite a los inversionistas acceder a una gama más amplia de posibilidades para colocar sus recursos de acuerdo con sus perfiles de inversión. Los valores gubernamentales (denominados en moneda local) se consideran libres de riesgo para los inversionistas privados porque los respalda la confianza y el crédito del gobierno del país.

Para un desarrollo exitoso del Mercado de Valores Gubernamentales.

El desarrollo del mercado de deuda, es un proceso dinámico donde la continuidad y la perseverancia en la estabilidad macroeconómica y financiera son esenciales para construir y mantener la credibilidad del gobierno como emisor de deuda.

Además de contar con un gobierno creíble y estable como emisor, es necesario en el mercado de deuda esté respaldado por Políticas fiscales y monetarias sólidas; un marco legal, impositivo y regulatorio adecuado; un sistema de liquidación de valores seguro y eficiente Sistema Financiero liberalizado que cuente con intermediarios competitivos.

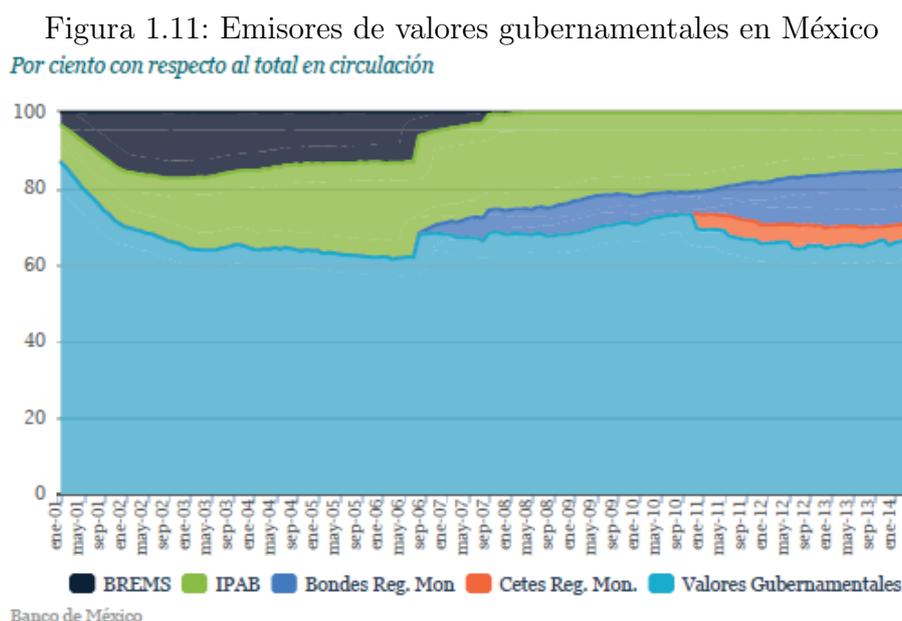
Adicionalmente deben asegurar un diseño de instrumentos atractivos para una base de inversionistas con horizontes de inversión de largo plazo (llamados inversionistas de manos firmes). Es decir, el mercado de deuda forma parte de uno de los canales de transmisión de la política monetaria.

Estrategia en el Desarrollo del Mercado de valores Gubernamentales en México.

En la teoría financiera de carteras de inversión a una tasa libre de riesgo es decir es una tasa de rendimiento de una inversión que no conlleva riesgo de pérdidas por incumplimiento de pago. Emisores libres de riesgo comprenden, además del Gobierno Federal, el Instituto para Protección al Ahorro Bancario (IPAB) y el Banco de México (Banxico), cuyas emisiones de deuda representan el mercado de valores gubernamentales ampliados.

En lo que toca al Gobierno Federal, la Secretaría de Hacienda y Crédito Público (SHCP) tiene total responsabilidad en cuanto al manejo de la deuda federal.

La Figura 1.11 ilustra la composición de los valores gubernamentales ampliados colocados en el mercado, según el emisor para el periodo que va de 2001 a marzo de 2014. Observa que el Gobierno Federal es el principal emisor de títulos libres de riesgo en moneda nacional (valores gubernamentales).



Con respecto al Banco de México se identifican tanto los valores emitidos por cuenta propia (BREMS), como los colocados por el banco central con propósitos de regulación monetaria,

es decir, para retirar liquidez a plazos largos y financiar los activos del banco central (cetes y Bondes D de Regulación Monetaria respectivamente).

En un comienzo, el número y monto de las transacciones eran muy pequeños, el plazo de estos títulos era muy corto, no existía un mercado secundario de instrumentos y el gobierno intervenía mucho en la determinación de las tasas de rendimiento en las subastas primarias, asignando una menor cantidad de títulos que lo anunciado en la convocatoria de la subasta.

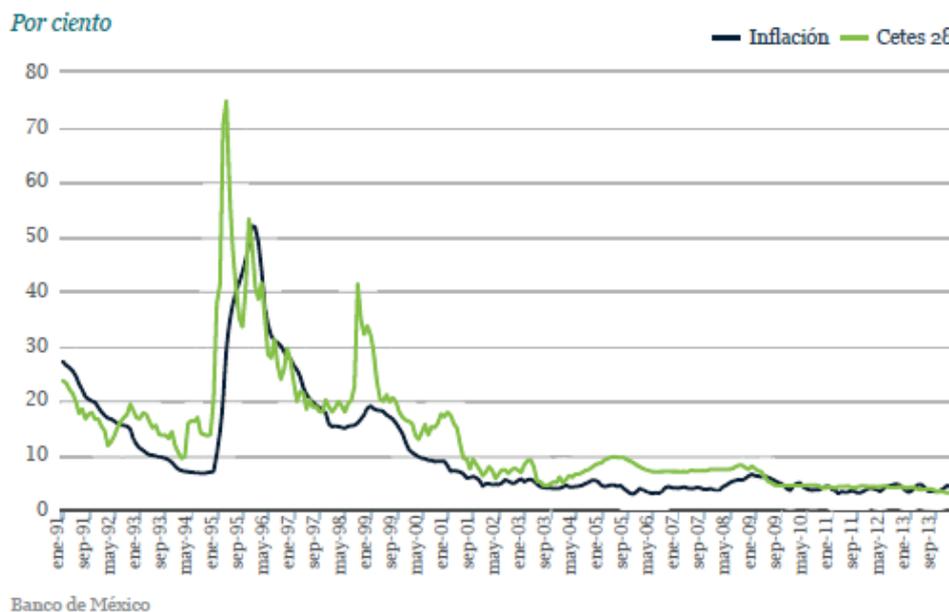
La primera emisión de cetes con plazo de vencimiento a un año ocurrió hasta 1990; aunque, en episodios de tensión en los mercados financieros el gobierno era capaz de colocar cetes únicamente a 7, 14 y 21 días.

El mercado secundario, como refiere Sidaoui (2002), comenzó a desarrollarse en 1982 cuando el gobierno permitió a bancos y casas de bolsa poner posturas en subastas públicas de cetes.

La inestabilidad macroeconómica es un impedimento al desarrollo financiero, en el caso mexicano, los periodos de alta inflación, las devaluaciones del tipo de cambio (asociadas a crisis de balanza de pagos) y los altos niveles de deuda externa limitaron el desarrollo del mercado de deuda de nuestro país.

En efecto, la figura 1.12 muestra cómo durante gran parte de la historia reciente de México, el nivel de las tasas de inflación y de interés estuvo por encima de valores de un dígito.

Figura 1.12: Tasa de inflación y tasa de interés*



La Figura 1.13, por su parte, permite apreciar que el valor del tipo de cambio del peso mexicano frente al dólar estadounidense prácticamente se multiplicó por cuatro en un lapso de 20 años.

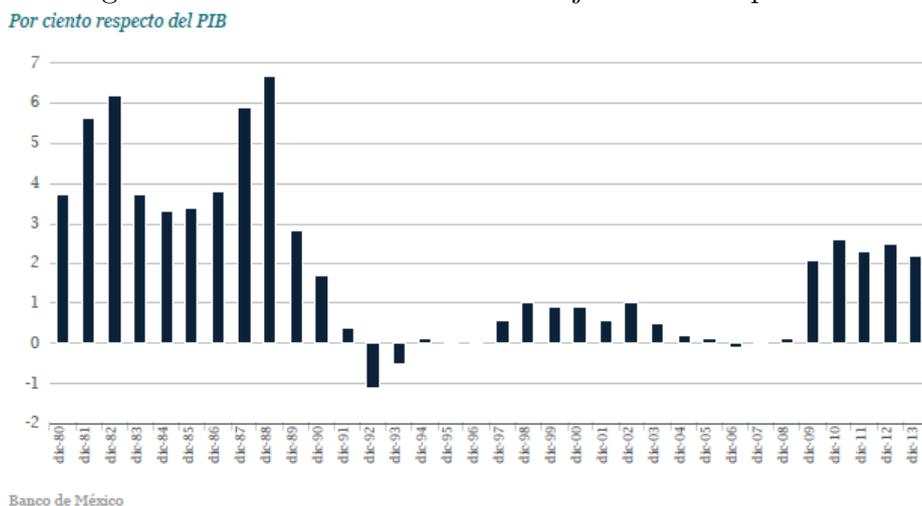
La política fiscal constituye probablemente el cimiento en la construcción de este mercado.

Figura 1.13: Tipo de Cambio*



Por ello, a lo largo de las décadas de los años 1980s y 1990s el Gobierno Federal emprendió un importante ajuste en las finanzas públicas para poder mantener un equilibrio presupuestario, (Figura 1.14).

Figura 1.14: Déficit económico de caja del sector público*^a

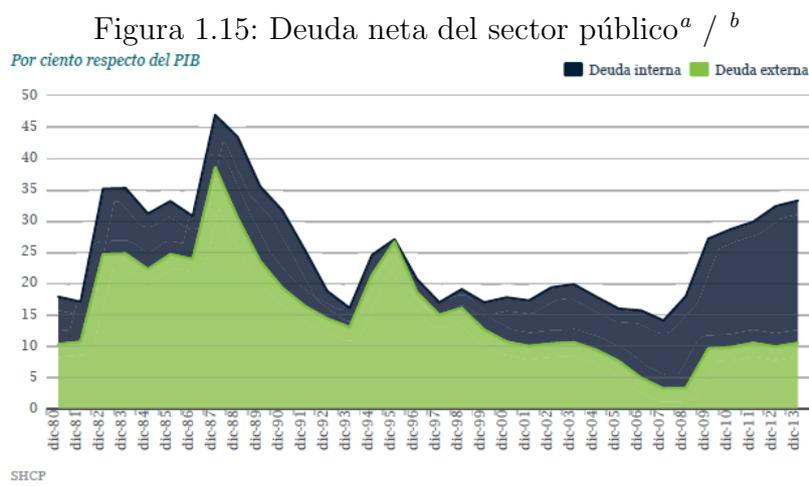


^aValores positivos significan déficit; valores negativos significan superávit.

La mejoría en las finanzas públicas redujo las necesidades de financiamiento del sector público, lo que a su vez permitió primero estabilizar y, posteriormente, reducir el saldo de la deuda pública como porcentaje del PIB. A pesar del avance en la consecución de la estabilidad macroeconómica, durante 1994-1995 México sufrió una severa crisis gemela de la balanza de pagos y, al mismo tiempo, del sistema bancario.

Esta crisis hizo patente los problemas de depender en extremo, por un lado, del financiamiento

externo (el llamado pecado original, ilustrado en la figura 1.15 por la elevada participación de la deuda externa en la deuda total) y, por el otro, tener un patrón de vencimientos muy concentrado en el corto plazo.



^aEn diciembre de 2008 el Gobierno Federal asumió el costo fiscal de la Reforma a la Ley del ISSSTE, el cual ascendió a 270.5 miles de millones de pesos. Debido a ello, la Deuda del Sector Público refleja un salto en dicho mes respecto al nivel que se venía registrando en los meses previos.

^bConforme a las modificaciones del 13 de noviembre de 2008 a la Ley Federal de Presupuesto y Responsabilidad Hacendaría, a partir de 2009 se cancela el esquema de Pidiregas en la inversión de Pemex.

Debido a ello, los pasivos se reclasificaron en deuda no presupuestaria a deuda presupuestaria de Pemex por un total de 898.6 miles de millones de pesos. Esto refleja como un salto en la Deuda Neta del Sector Público. Sin embargo, el monto que representa la suma de la Deuda del Sector Público más los pasivos adicionales no se modifica, ya que estos últimos disminuyen en la misma proporción que el aumento en la Deuda del Sector Público, debido a que en ellos se venían registrando anteriormente los pasivos por los Pidiregas de Pemex.

Particularmente desde el año 2000 la estrategia para el manejo de la deuda pública estuvo encaminada a favorecer el desarrollo del mercado de deuda y a reducir vulnerabilidades financieras del Gobierno Federal. Algunas de las acciones que se han instrumentado como parte de dicha estrategia son:

1. Mejorar la forma de ser predictivo y transparencia de la colocación de valores. Ésta es una de la estrategia y está encauzado a brindar certidumbre al aceptar las condiciones del mercado en la asignación de los recursos.
2. Disminuir el riesgo de re-financiamiento del gobierno a través del aumento gradual del perfil de vencimientos de los valores gubernamentales.
3. Generar emisiones de referencia. En una curva de rendimiento existe una amplia gama de valores emitidos a distintos plazos.
4. Introducir el esquema de Formadores de Mercado. Estos gozan de la opción de comprar al Banco de México valores gubernamentales a la tasa obtenida en la última subasta primaria y de poder pedir en préstamo cualquier título de la cartera de valores gubernamentales.
5. Emitir una curva de bonos cupón cero. Se buscan invertir en instrumentos de mayor plazo que sólo pagan interés al vencimiento, procuraron emitir instrumentos cupón cero a través de la segregación de algunas emisiones de bonos y udibonos en las que se separa el pago del principal de cupones.

6. Introducir la permuta de instrumentos. Era para evitar que vencimientos de valores de monto considerable se concentren en determinadas fechas, a partir de octubre de 2005 el gobierno adoptó una estrategia de permuta de instrumentos a través de la cual se ha extendido el perfil de vencimientos y permitido un mejor manejo de caja.
7. Introducción de instrumentos estructurados (Warrants⁷). Esto para aumentar la presencia de inversionistas extranjeros. En México desde octubre de 1992 se comenzaron a operar en la Bolsa Mexicana de Valores sobre acciones individuales, canastas e índices accionarios. Entre 1992 y 1994 se listaron en la Bolsa de Luxemburgo y la Bolsa de Londres, diversos warrants sobre acciones e índices accionarios mexicanos. En México los warrants sólo pueden emitidos por casas de Bolsa, Bancos y empresas sobre sus propias acciones, por lo que las personas físicas y morales sólo pueden comprarlos y vender los que hubiesen adquirido con anterioridad.
8. Comprar valores gubernamentales en mercado secundario. El Gobierno Federal compró en abril a diciembre de 2008 a precios de mercado algunos de sus valores en el mercado secundario a través de programas de compras transparentes y claras, anunciadas con anticipación y que abarcaron bonos a tasa fija y udibonos, ambos de mediano y largo plazo.
9. Colocar valores gubernamentales de manera sindicada. Finalmente a partir de febrero de 2010 se han realizado colocaciones sindicadas⁸ para algunas emisiones de bonos y udibonos, de esta manera se ha logrado llegar a una mayor base de inversionistas que a través de una subasta primaria tradicional.

Desde una perspectiva regulativa también se han hecho cambios que apoyan el desarrollo del mercado de valores gubernamentales. Uno de los más importantes fue la autorización en 1990 a bancos comerciales y de desarrollo a negociar instrumentos en los mercados secundarios sin la intermediación de casas de bolsa. Además se ha flexibilizado la regulación que enfrentan los fondos de pensiones en sus límites para invertir recursos a distintos plazos y distintos tipos de instrumentos.

El crecimiento de casas de corretaje con sistemas de negociación ha sido importante principalmente para el descubrimiento de precios. Por otro lado empresas internacionales que brindan servicios de liquidación y custodia de valores, tal como Euroclear y Clearstream, tienen arreglos con bancos locales para liquidar ahí operaciones con valores gubernamentales y otros títulos denominados en pesos (cetes, bondes D, udibonos, bonos y acciones).

Como se constata en la figura 1.15 anterior, el Gobierno Federal ha podido sustituir su financiamiento externo con deuda interna, recibiendo ahora un monto mayor de recursos provenientes del mercado interno que del externo. Además, en el proceso también se ha desarrollado una curva de tasas de interés.

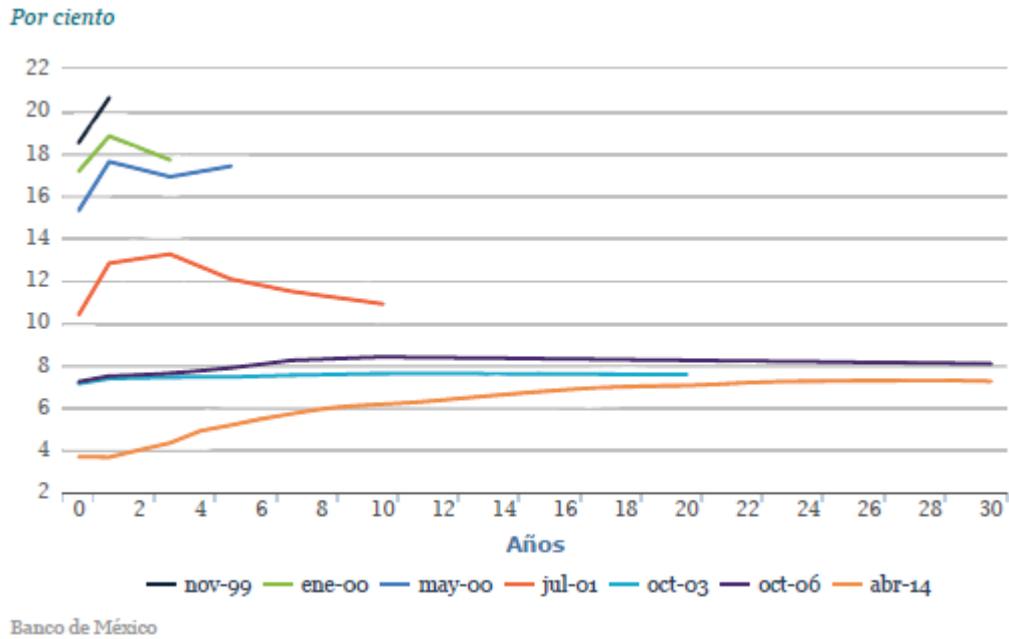
En tan sólo siete años (1999-2006) se extendió la curva de rendimiento de los valores gubernamentales hasta incluir el plazo de 30 años en bonos y udibonos (Figura 1.16). Esta curva de rendimientos ha servido de referencia para la colocación de deuda en pesos para muchos emisores nacionales, e incluso para agentes extranjeros, como mencionan Sidaoui (2009), Santaella

⁷Es un valor negociable emitido por una entidad (general un grupo financiero) a un plazo determinado. Este otorga el derecho (más no lo obligación) mediante el pago de un precio compra (Warrant tipo call) o vender (warrant tipo put), son instrumentos estructurados que brindan la opción de intercambiar valores.

⁸Los valores gubernamentales pueden ser vendidos a una agrupación, o sindicato, de instituciones financieras quienes, por una comisión, compran determinado volumen de valores a un precio de mercado.

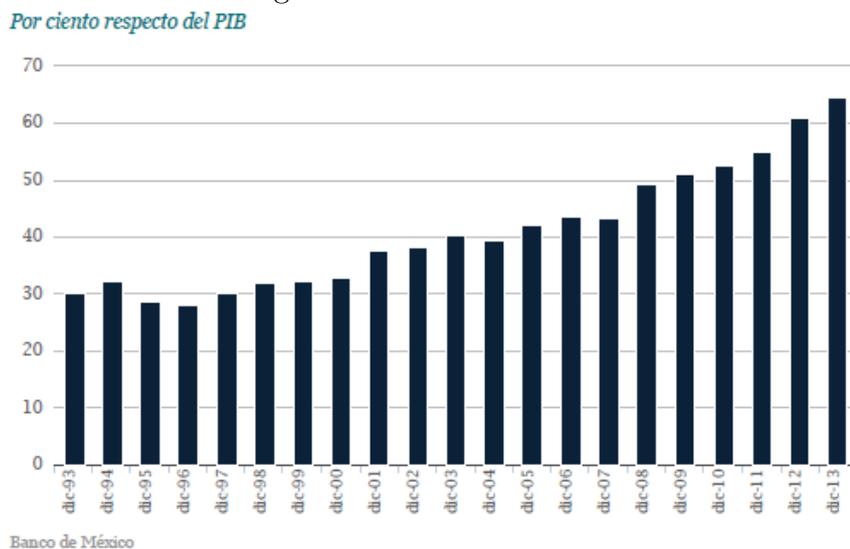
y Pérez (2012).

Figura 1.16: Curva de Rendimientos*



La combinación entre estabilidad y reformas financieras tuvo un impacto positivo en el ahorro financiero, el cual se duplicó como porcentaje del PIB en un periodo de quince años.(Figura 1.17.)

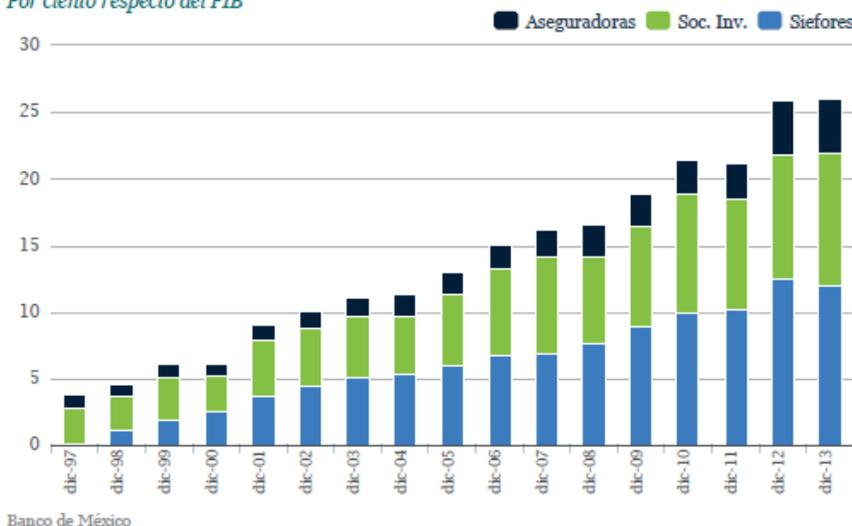
Figura 1.17: Ahorro financiero^a



^aDefinido como M3 menos billetes y monedas

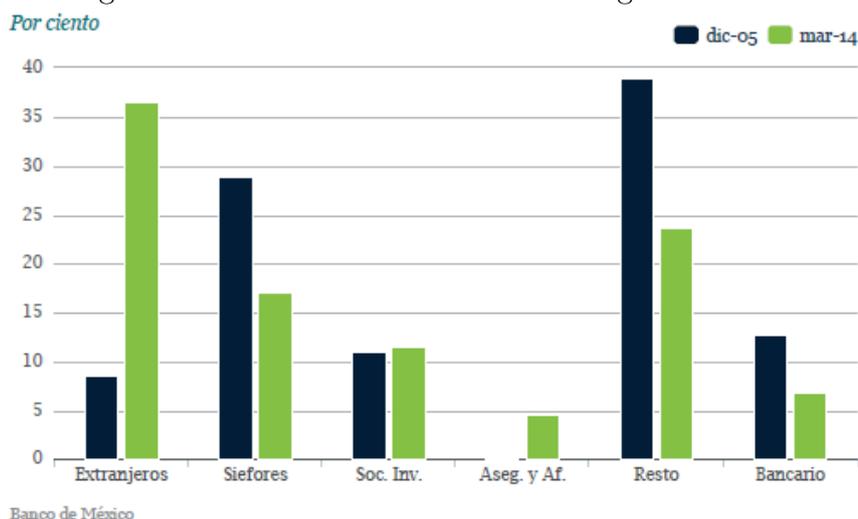
De hecho, los fondos de pensión (Siefores) comenzaron a jugar un papel preponderante en la expansión del ahorro (Figura 1.18.), convirtiéndose en el sector de inversionistas institucionales más importante del país.

Figura 1.18: Cartera de inversionistas institucionales nacionales
Por ciento respecto del PIB



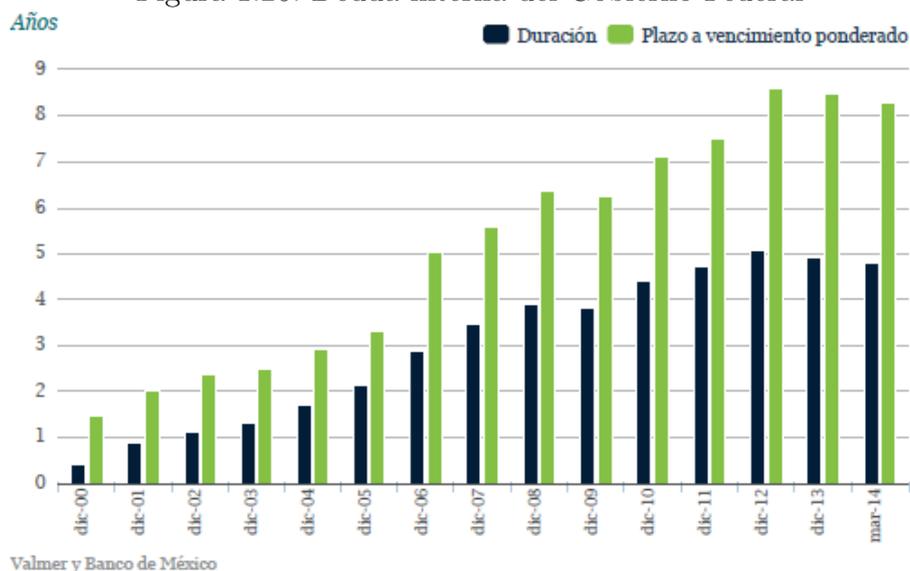
Efectivamente, en 1999 dos tercios de la deuda interna del Gobierno Federal era a tasa flotante (bonds) y una cuarta parte era de corto plazo (cetes), para marzo de 2014 la mitad del saldo vigente de valores gubernamentales correspondía a bonos a tasa fija de largo plazo (Figura 1.19). Esta recomposición en el tipo de valores colocados significa que el plazo y la duración de la deuda gubernamental han aumentado en forma notoria en la última década y media.

Figura 1.19: Distribución de los valores gubernamentales



A su vez, la duración aumentó de poco más de un año en 2002 a 4.81 años en marzo de 2014. Dicha extensión del plazo al vencimiento y en la duración ha implicado una significativa reducción de los riesgos de refinanciamiento y de la tasa de interés para el Gobierno Federal. (Figura 1.20)

Figura 1.20: Deuda interna del Gobierno Federal

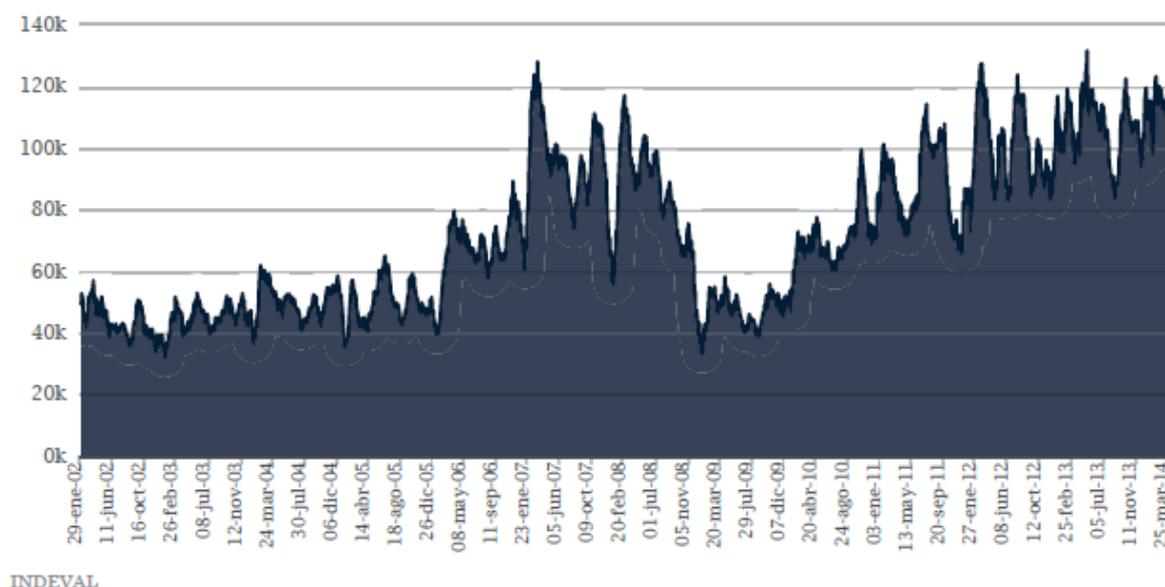


En cuanto a la ampliación de la base de inversionistas, la figura 1.19 ilustra cómo ha sido esta transformación. Este cambio en la composición de la base de inversionistas ha brindado al mercado mexicano de deuda pública una mayor estabilidad y profundidad, pues los tenedores más importantes ahora suelen manejar horizontes de inversión de mayor plazo.

El desarrollo del mercado de deuda gubernamental se ha reflejado en la operación del mismo (Figura 1.21). Los volúmenes operados han crecido, aun tomando en cuenta la presencia de periodos de volatilidad financiera. Por su parte, la liquidez del mercado se ha incrementado, lo que se refleja en menores diferenciales o spreads de compra-venta en los precios de los bonos gubernamentales.

Figura 1.21: Volumen operado de valores gubernamentales en INDEVAL

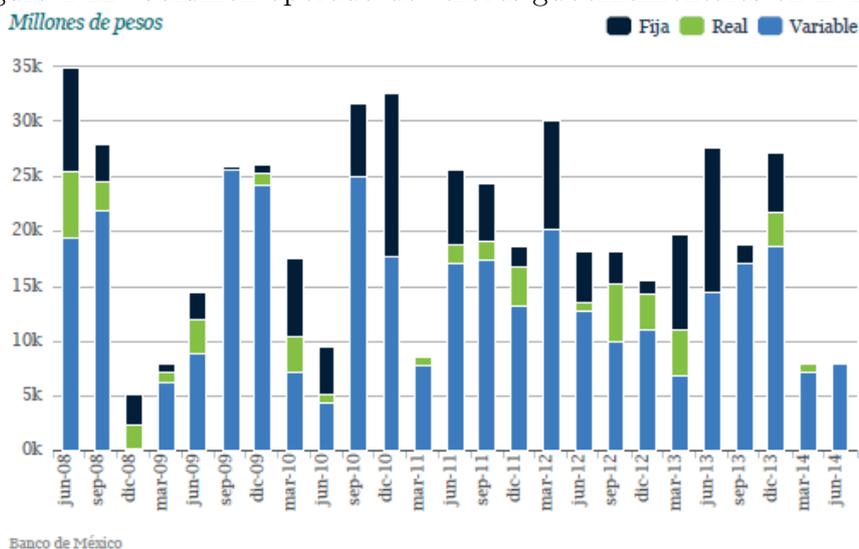
Millones de pesos (promedio móvil de 20 días)



La existencia de una curva de rendimientos libre de riesgo ha servido como referencia para distintos emisores. Esta curva ha facilitado que las instituciones financieras otorguen créditos

hipotecarios hasta por 30 años. Esto ha ocurrido tanto para ayudar a establecer el costo del financiamiento libre de riesgo a largo plazo, como para un manejo de riesgos por parte de los bancos. En algunas empresas, además de tener acceso a créditos a través del sector bancario, han logrado financiar proyectos productivos con la emisión de valores. De hecho, la curva de rendimientos es el ancla principal para las emisiones a tasa variable, la cual es la modalidad más común para las emisiones corporativas (Figura 1.22).

Figura 1.22: Volumen operado de valores gubernamentales en INDEVAL



1.3.2. Tipos de Instrumentos.

En México, el Gobierno Federal emite y coloca actualmente cuatro instrumentos distintos en el mercado de deuda. Éstos son los cetes, los bonos, los bondes y los udibonos. A su vez, el Instituto para la Protección al Ahorro Bancario (IPAB) coloca los llamados Bonos de Protección al Ahorro (BPAS), mismos que, si bien son emitidos por el referido Instituto, cuentan con una garantía de crédito del Gobierno Federal. El Banco de México funge como agente financiero en la colocación de estos valores, tanto de los del Gobierno Federal como de los del IPAB. A continuación se presenta una breve descripción de cada uno de estos títulos.

- **Cetes:** Los Certificados de la Tesorería de la Federación. Estos títulos pertenecen a la familia de los bonos cupón cero, esto es, se comercializan a descuento (por debajo de su valor nominal), no pagan intereses en el transcurso de su vida y liquidan su valor nominal en la fecha de vencimiento.
- **Bondes:** Los Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal (bonds) son valores gubernamentales a tasa flotante, esto significa que pagan intereses y revisan su tasa de interés en diversos plazos (plazos que han ido variando a lo largo de su historia). La tasa de interés que pagan estos títulos se determina componiendo diariamente la tasa a la cual las instituciones de crédito y casas de bolsa realizan operaciones de compraventa y reporto a plazo de un día hábil con títulos bancarios, conocida en el mercado como Tasa ponderada de fondeo bancario.
- **Bonos:** Los Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal con Tasa de Interés Fija (bonos). Los bonos pagan intereses cada seis meses y, a diferencia de los bonds, la tasa de interés

se determina desde la emisión del instrumento y se mantiene fija a lo largo de toda la vida del mismo.

Figura 1.23: Títulos de deuda gubernamental emitidos local en la actualidad^{ab}

Instrumento	Nombre	Valor Nominal	Plazo	Plazo utilizado 2/	Periodo de Interés	Tasa de Interés	Id. de los títulos 1/	1a emisión
Cetes	Certificados de la Tesorería de la Federación	10 pesos	Min: 7 días. Máx: 728 días	28 y 91 días, y cercanos a los seis meses y un año	Bonos cupón cero	Tasa de rendimiento referenciada a la tasa de descuento	BIAAMMDD	19-ene-78
Bondev D	Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal	100 pesos	Múltiplo de 28 días	3, 5 y 7 años	28 días	Tasa ponderada de fondeo bancario en el periodo de interés.	LDAAMMDD	17-ago-06
Bonos	Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal con Tasa de Interés Fija	100 pesos	Múltiplo de 182 días	3, 5, 10, 20 y 30 años	182 días	Fijada por el Gobierno Federal en la emisión	M AAMMDD	27-ene-00
Udibonos	Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal denominados en Unidades de Inversión	100 udis	Múltiplo de 182 días	3, 10 y 30 años	182 días	Fijada por el Gobierno Federal en la emisión	S AAMMDD	30-may-96
BPA182	Bonos de Protección al Ahorro con pago semestral de interés y protección contra la inflación	100 pesos	Múltiplo de 182 días	5 y 7 años	182 días	Cetes de 182 días o cambio del valor de la udi en el periodo	ISAAMMDD	29-abr-04
BPAG91	Bonos de Protección al Ahorro con pago trimestral de interés y tasa de interés de referencia adicional	100 pesos	Múltiplo de 91 días	5 años	91 días	Max [Cetes 91, Tasa Ponderada de Fondeo Gubernamental] vigentes al inicio del periodo de interés.	IQAAMMDD	26-abr-12
BPAG28	Bonos de Protección al Ahorro con pago mensual de interés y tasa de interés de referencia adicional	100 pesos	Múltiplo de 28 días	3 años	28 días	Max [Cetes 28, Tasa Ponderada de Fondeo Gubernamental] vigentes al inicio del periodo de interés.	IMAAMMDD	26-abr-12

^aLa clave de identificación está compuesta por ocho caracteres: El primero y el segundo para identificar el título, y los seis restantes para indicar su fecha de vencimiento (año,mes,día)

^bMás frecuentemente. Fuente: Banco de México

- **Udibonos:** Los Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal denominados en Unidades de Inversión (udibonos) son instrumentos que protegen de la inflación a su tenedor. Los udibonos que pagan intereses cada seis meses en función de una tasa de interés real fija que se determina en la fecha de emisión del título. Devengan intereses en udis que son pagaderos en pesos.
- **BPAS:** El Instituto para la Protección al Ahorro Bancario (IPAB), pagan intereses en plazos iguales a los de cetes. Al que paga cada mes se le identifica como BPAG28, al que

paga cada tres meses se le identifica como BPAG91 y al que paga cada seis meses se le reconoce como BPA182. Los títulos devengan intereses en pesos.

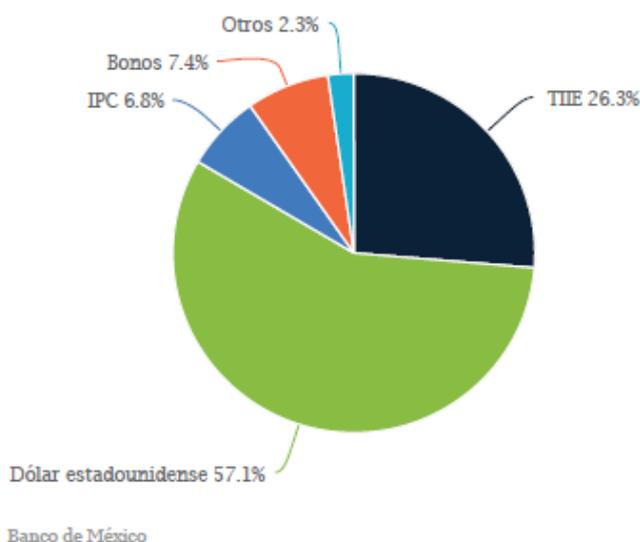
Productos Financieros Derivados.

En diciembre de 1998 comenzó a operar en México el Mercado Mexicano de Derivados, conocido como MexDer. Éste y su cámara de compensación (Asigna) son entidades autorreguladas que funcionan bajo la supervisión de la Secretaría de Hacienda y Crédito Público (SHCP), el Banco de México y la Comisión Nacional Bancaria y de Valores (CNBV).

Adicionalmente, el mercado de derivados fortalece los canales de transmisión de la política monetaria, al permitir una expansión del canal de crédito. Finalmente, a través de estos instrumentos es posible contar con mejores herramientas e indicadores financieros que permiten al banco central evaluar las expectativas del mercado.

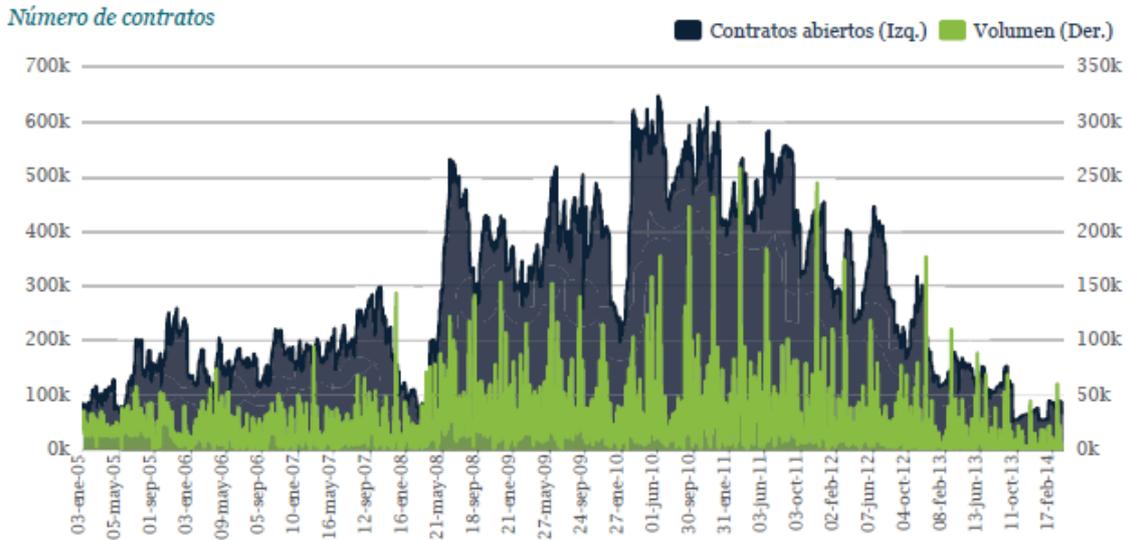
Como se muestra en las figuras 1.24 a 1.27, los contratos más importantes en el MexDer son los futuros de los instrumentos de renta fija, dentro de los que destacan los futuros de la Tasa de Interés Interbancaria de Equilibrio (TIIE) y los de valores gubernamentales (bonos y cetes). En su lugar, el mercado que ha venido evolucionando más dinámicamente es el mercado de swaps de tasa de interés (IRS por sus siglas en inglés Interest Rate Swaps), mismo que por estar referenciado a la TIIE permite una eficiente cobertura del riesgo de tasa de interés. Este mercado se cotiza de manera extrabursátil (OTC por sus siglas en inglés Over The Counter), es decir fuera de bolsas de valores como el MexDer.

Figura 1.24: Volumen de operación futuros MexDer^a
Por ciento



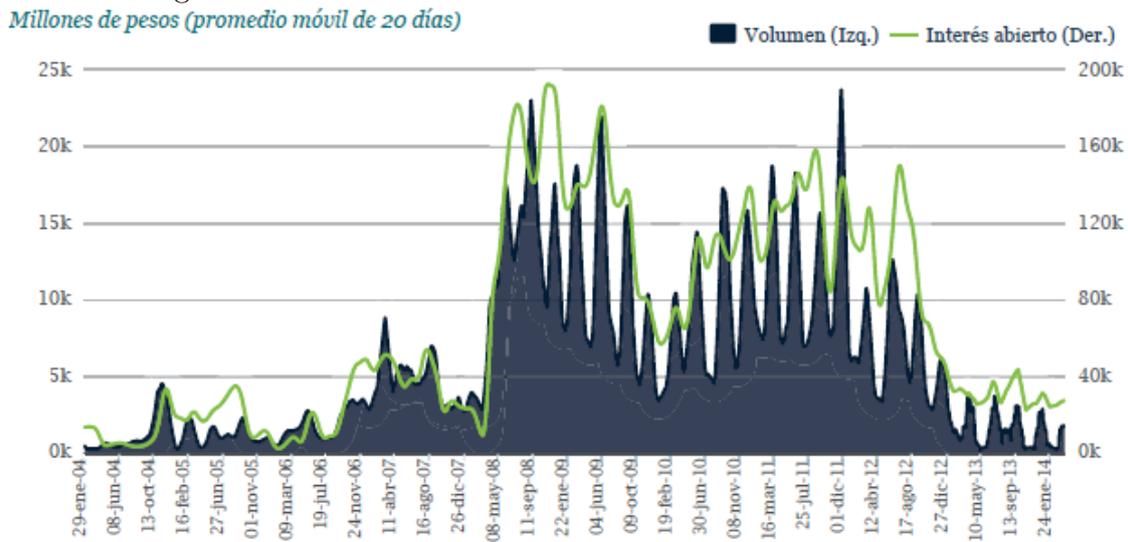
^aMarzo 2014, acumulado anual.

Figura 1.25: Operación de futuros de valores gubernamentales^a



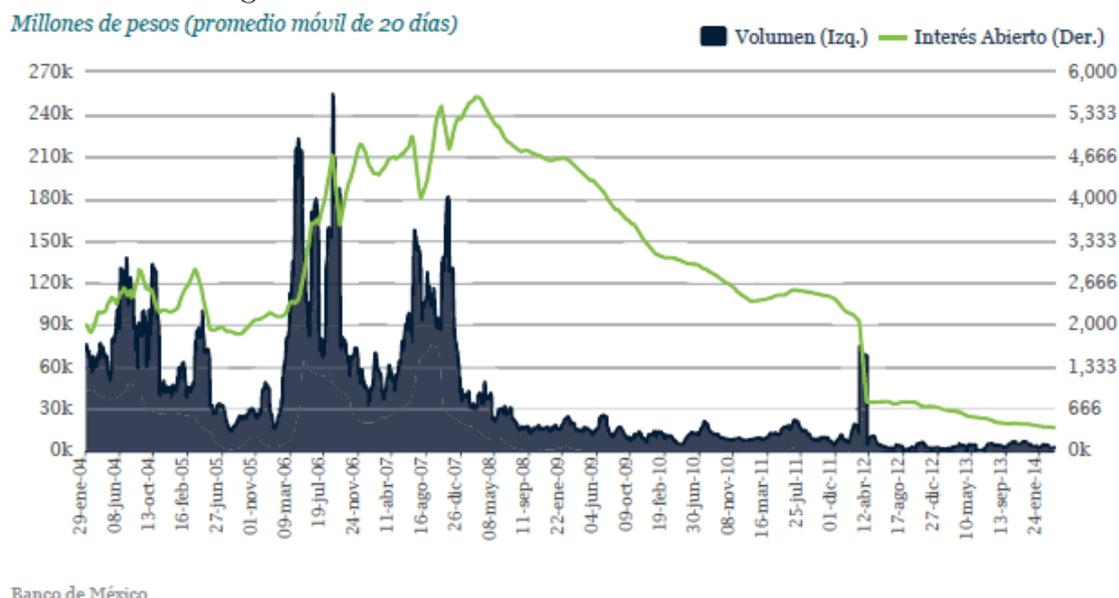
^aIncluye cetes a 3 meses y bonos a 3, 10 y 20 años.

Figura 1.26: Contrato de futuro de bono a 10 años en MexDer



Banco de México

Figura 1.27: Contrato de futuro de TIIE 28 en MexDer



Títulos Físicos y su Titularidad.

En lo que respecta al control de la titularidad de los valores, ésta se lleva a cabo a través del INDEVAL donde se lleva un registro contable de las tenencias de instrumentos en manos de instituciones financieras. Las instituciones financieras, a su vez, llevan un registro contable de las tenencias de sus clientes. De esta forma se garantiza el control en cuanto a la tenencia de los valores.

No obstante cabe aclarar que en México para cada uno de los valores gubernamentales existe físicamente un título múltiple por el total de cada emisión. De ahí que en estricto sentido los valores gubernamentales en México no se encuentran desmaterializados, pero sí inmovilizados, es decir, depositados en un solo lugar.

De hecho, los títulos múltiples de emisiones de valores del Gobierno Federal se custodian físicamente en el Banco de México, mientras que los valores emitidos por el IPAB se encuentran depositados físicamente en el INDEVAL.

El registro contable que lleva el INDEVAL evita las enormes insuficiencias y altos costos de trasladar físicamente los valores gubernamentales que se intercambian.

Emisiones de Referencia y Reaperturas.

Durante los últimos años el Gobierno Federal y el IPAB han adoptado la política de reabrir las emisiones vigentes de prácticamente todos los tipos de valores que emiten con el fin de hacer crecer su tamaño y con ello facilitar el desarrollo de un mercado secundario más líquido.(Figura(1.28) a(1.31)).

Figura 1.28: Emisiones de referencia

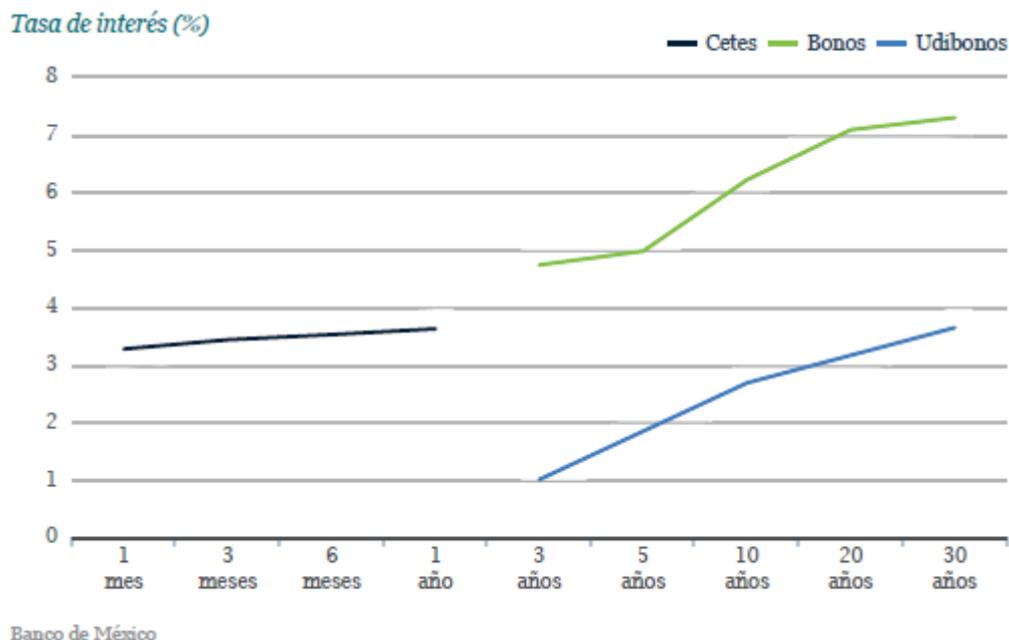


Figura 1.29: Valores gubernamentales en circulación por tipo y plazo

Miles de millones de pesos a valor nominal										
	Meses			Años						
	1	3	6	1	3	5	7	10	20	30
Cetes	129	222	326	255	-	-	-	-	-	-
Bonos	-	68	-	117	476	450	88	307	450	278
Udibonos	-	-	-	118	148	64	145	111	44	355
Bondes D	26	28	27	126	432	371	78	-	-	-
BPAs	-	-	1	11	-	-	-	-	-	-
BPAT	2	-	-	-	5	-	-	-	-	-
BPA182	-	30	26	47	48	152	102	-	-	-
BPAG28	-	-	-	17	97	-	-	-	-	-
BPAG91	6	6	11	25	122	-	-	-	-	-
TOTAL	173	354	392	700	1,405	1,165	413	418	494	633

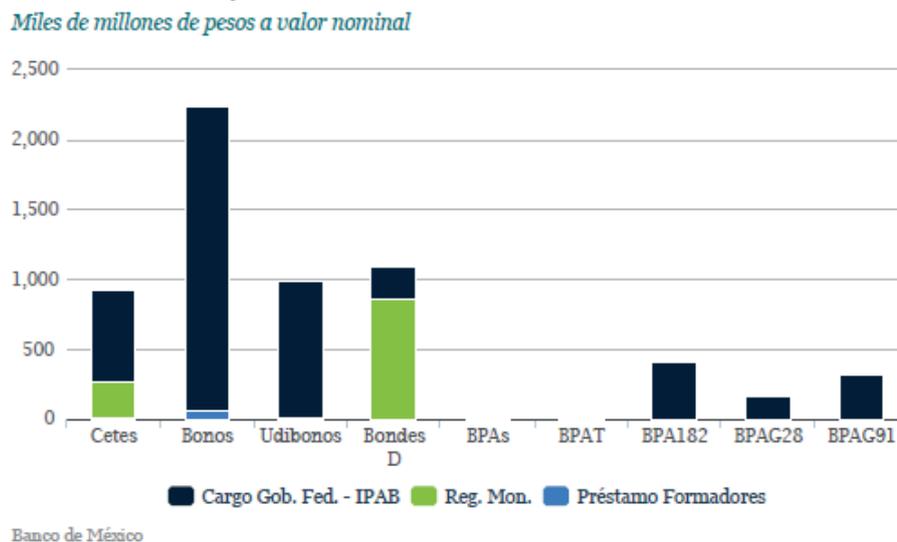
Fuente: Banco de México

Figura 1.30: Composición de valores gubernamentales en circulación

Número de instrumentos y miles de millones de pesos a valor nominal				
	Número de instrumentos	%	Monto en circulación	%
Bonos	22	11.8	2,234.2	36.3
Cetes	23	12.4	932.2	15.2
Udibonos	9	4.8	985.1	16.0
Bondes D	41	22.0	1,089.6	17.7
BPA182	27	14.5	404.3	6.6
BPAT	13	7.0	6.6	0.1
BPAs	7	3.8	12.3	0.2
BPAG28	18	9.7	170.3	2.8
BPAG91	26	14.0	313.1	5.1
TOTAL	186	100	6,147.7	100

Fuente: Banco de México

Figura 1.31: Valores gubernamentales en circulación por tipo de instrumento



Colocación de Valores Gubernamentales.

En México la colocación primaria de valores gubernamentales se ha realizado tradicionalmente mediante la celebración de subastas. Una subasta consiste en la venta pública de bienes al mejor postor.

Las subastas pueden ser a precio múltiple, a precio uniforme o a precio fijo. En ambos casos, se trata de subastas que utilizan sistemas cerrados, es decir, donde el precio de asignación se conoce después del cierre de la subasta. Sólo las subastas de bondes D del Banco de México son a través de un sistema interactivo que permite conocer, en tiempo real, el precio marginal al cual se está colocando la totalidad del monto subastado. De esta forma, los postores pueden mejorar sus posturas, siempre y cuando no haya terminado el tiempo preestablecido para presentar posturas en la subasta.

Tipos de subastas:

En una típica subasta primaria de valores gubernamentales las posturas recibidas se asignan conforme al orden descendente de los correspondientes precios unitarios, es decir que el emisor ordena las ofertas en función del precio, de mayor a menor, y va aceptando las ofertas que son menos costosas para éste hasta que el monto de la subasta se cubra en su totalidad.

- **Subastas a precio múltiple:** Las posturas ganadoras son asignadas al precio que cada postor presentó. Entre las ventajas de este tipo de subasta está que maximiza el ingreso a ser recibido por el emisor, ya que obtiene el máximo precio que cada postor está dispuesto a pagar. Dentro de las desventajas para el emisor está que, en las subastas a precio múltiple.
- **Subastas a precio único:** Todas las posturas ganadoras se asignan al precio que corresponda a la última postura que reciba asignación. A fin de cuentas, el precio que el postor paga, puede ser menor al que estaba dispuesto a pagar, siendo ello una desventaja para el emisor. Otra de las ventajas para el emisor de las subastas a precio uniforme es que éstas disminuyen los incentivos. Para las subastas a precio múltiple y precio único, en caso de haber posturas empatadas y el monto por asignar no sea suficiente para cubrir las totalmente, éstas se reparten a prorrata respecto del monto de la postura en cuestión (para determinar la proporción del monto que recibirá asignación).
- **Subastas a precio fijo:** En México se ha utilizado para que el Gobierno Federal realice

compras de sus propios valores gubernamentales. En este tipo de subasta las posturas se asignan al precio determinado por el Gobierno Federal y hasta por el monto indicado en las posturas.

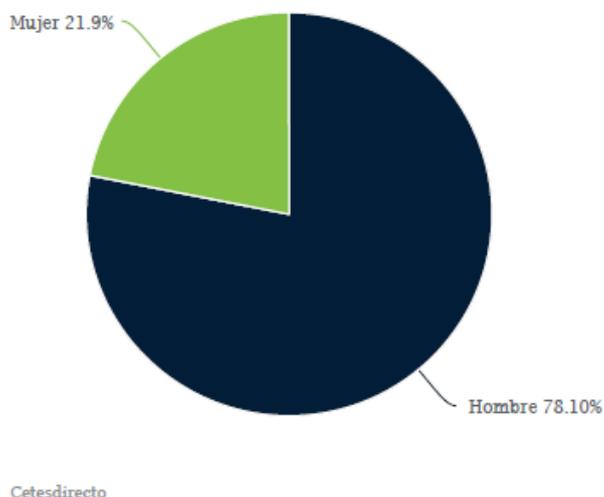
Otra manera de colocar valores es a través de la sindicación. En México, desde febrero de 2010 se realizan colocaciones sindicadas de las nuevas emisiones de bonos y/o udibonos. Algunas de las ventajas de utilizar este método de colocación son las siguientes:

- Se asegura que las nuevas emisiones tengan un importante monto en circulación inicial, lo que, a su vez, facilita a inversionistas que se rigen bajo principios de índices globales el poder replicar estos índices con mayor facilidad. Los índices globales incluyen a este tipo de emisiones desde su sindicación sin tener que esperar a llegar al monto mínimo en circulación.
- Se logra una distribución más amplia y diversificada entre inversionistas locales y extranjeros.
- Se mejoran las condiciones de liquidez en el mercado secundario.

Inversionistas al menudeo (Cetes Directo).

En diciembre de 2010 el Gobierno Federal comenzó a vender títulos en directo al público en general mediante el programa Cetes Directo. A través de este programa los pequeños y medianos ahorradores pueden adquirir toda clase de valores gubernamentales, además de los cetes, en las subastas de cada semana sin tener que hacerlo a través de casas de bolsa o instituciones de crédito (desde monto de \$100 pesos y sin comisiones). Para operar el programa el gobierno otorgó un mandato a Nacional Financiera (NAFIN). La ventanilla frente al público es Banco del Ahorro Nacional y Servicios Financieros (BANSEFI) o bien por contratación directa vía teléfono o internet.(Figura (1.32))

Figura 1.32: Cetesdirecto: Perfil del inversionista por género
Por ciento; distribución en cuanto a saldo invertido

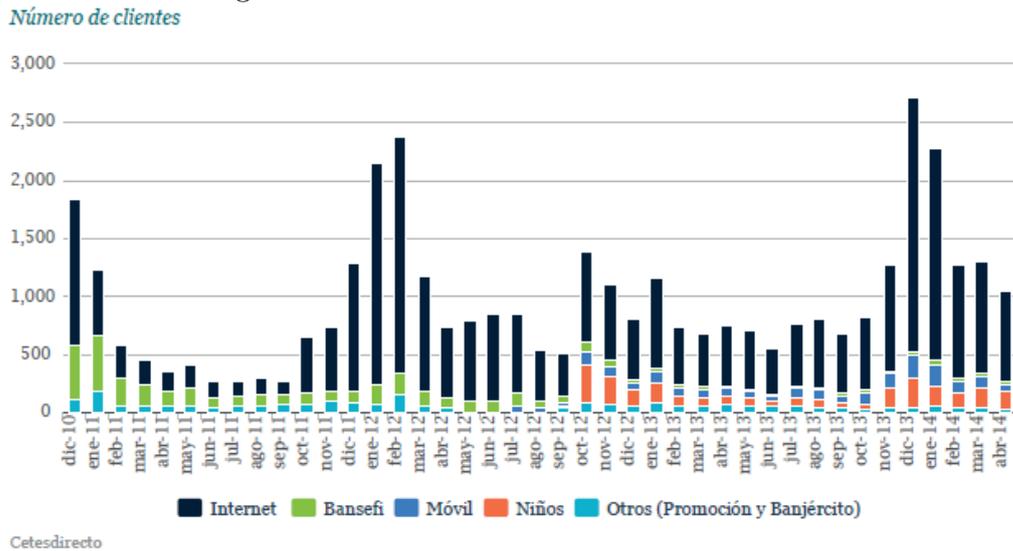


Desde el lanzamiento de Cetesdirecto y hasta abril de 2014 se han registrado más de 107 mil clientes de los cuales el 36.7% ha firmado contrato.(Figuras (1.33) y (1.34)). En palabras del

Figura 1.33: Registro y contratación de programa Cetesdirecto



Figura 1.34: Canal de contratación Cetesdirecto



Gobernador del Banco de México, Agustín Carstens: los cetes ya son vistos como una herramienta de ahorro e inversión popular, al alcance de todos mediante el programa Cetesdirecto; permite acceder a tasas de interés altamente competitivas en el mercado de dinero, que va dirigido; amas de casa que a empleados y trabajadores modestos, sin mayor intermediación y sin cargos o comisiones onerosas.(Figura (1.35) y (1.36))

Figura 1.35: Cetesdirecto: Perfil del inversionista por actividad
Por ciento; distribución en cuanto a saldo invertido

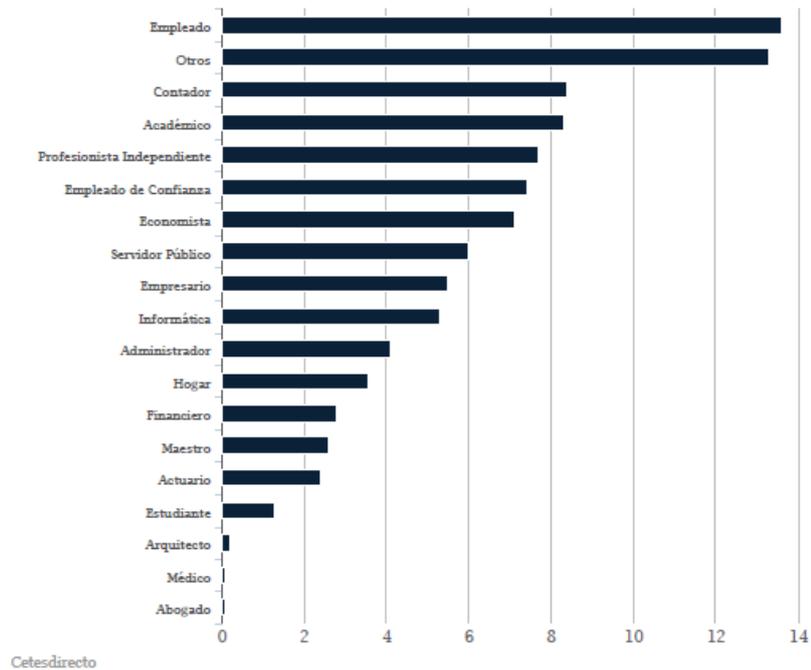
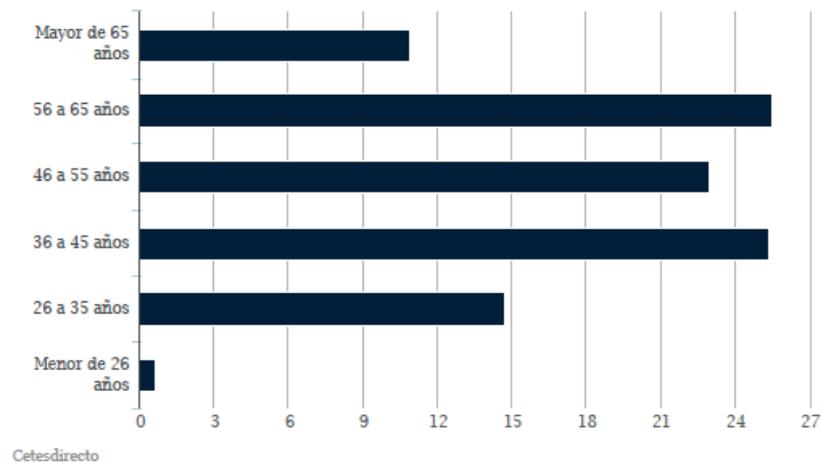


Figura 1.36: Cetesdirecto: Perfil del inversionista por edad
Por ciento; distribución en cuanto a saldo invertido



La introducción de este mecanismo que promueve el ahorro interno de mediano y largo plazo así como el uso de los servicios financieros entre la población. Da una mayor competencia, eficiencia

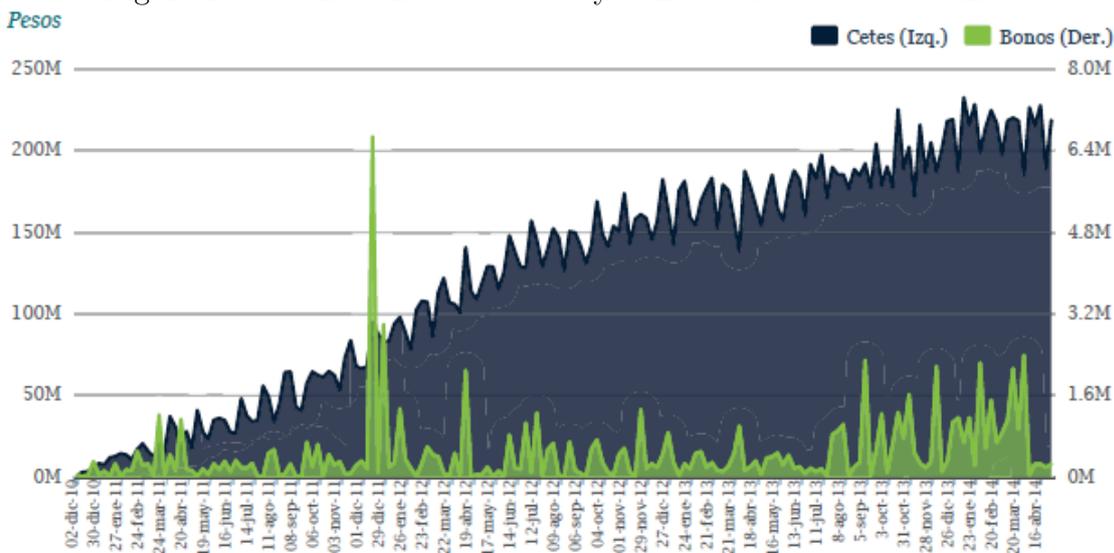
y profundidad al sistema financiero nacional.

El dar acceso al público en general a la adquisición de valores gubernamentales propicia un mayor entendimiento entre la población sobre el manejo y las características de la deuda pública y contribuye a ampliar y hacer más heterogénea la base de inversionistas del Gobierno Federal.

Al 30 de abril de 2014 la posición, a valor nominal, a través del programa Cetesdirecto ascendía a 1,122.872 millones de pesos (mdp) en cetes, 74.550 mdp en bonos, 14.001 millones de udis en udibonos y 10.801 mdp en bondes D.

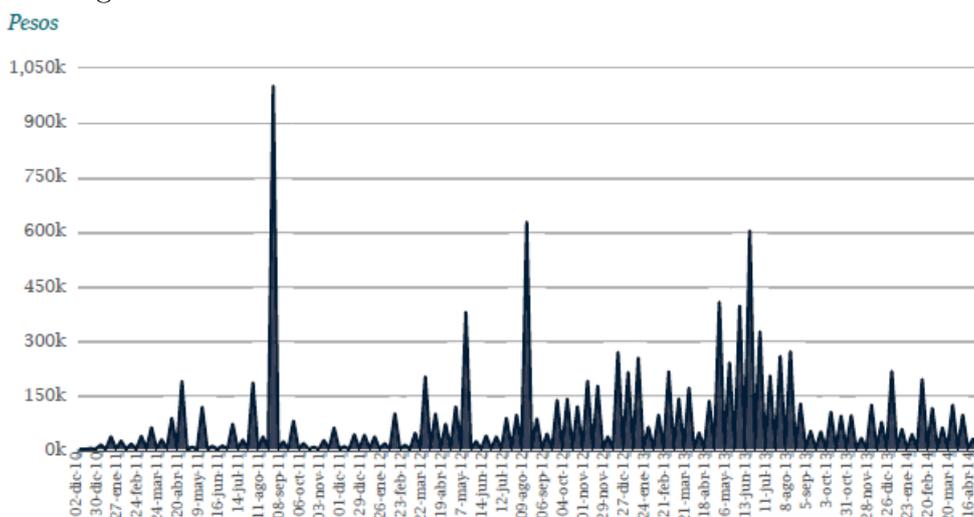
(Figuras (1.37) a (1.39))

Figura 1.37: Venta directa de cetes y bonos a través de Cetesdirecto



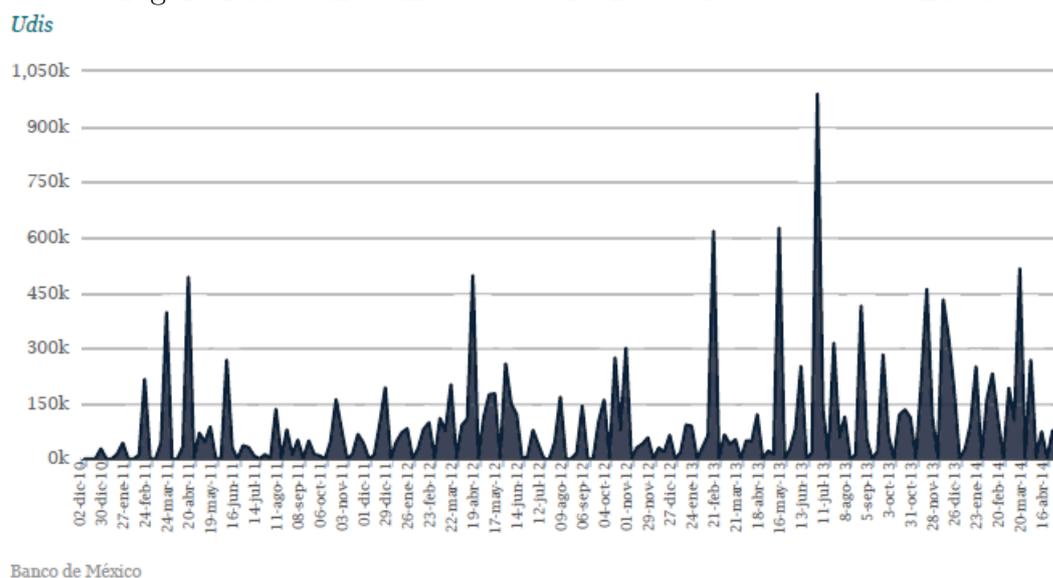
Banco de México

Figura 1.38: Venta directa de bondes D a través de Cetesdirecto



Banco de México

Figura 1.39: Venta directa de udibonos a través de Cetesdirecto



El proceso de desarrollo del mercado de valores gubernamentales en México aquí descrito ha dejado en evidencia que las oportunidades de colocación de instrumentos de deuda se crean a partir de la emisión y del desarrollo del mercado de bonos emitidos por el Gobierno Federal. Por ello, también ya se dijo, estos últimos se consideran como el centro u origen de los demás mercados de instrumentos de deuda que eventualmente se desarrollan en un país.

En México se ha buscado que la evolución del sistema financiero en general, pase de un sistema centrado en el financiamiento bancario, a un sistema multinivel, en el que los mercados de deuda y de capitales complementan la intermediación financiera.

1.4. Teoría de las Curvas de Rendimiento.

La curva de rendimientos es una representación gráfica, muestra en el eje vertical los rendimientos y en el eje horizontal los períodos que faltan para el vencimiento de los títulos, que muestra la relación que existe, entre una fecha determinada, entre los rendimientos de una clase particular de títulos valores y el tiempo que falta para su vencimiento, es decir, la estructura por plazos de los rendimientos.

Es necesario que los títulos a los que se refiere la curva de rendimiento posean las mismas características en cuanto al riesgo, la liquidez y aspectos impositivos, pues se desea aislar aquellos otros factores distintos al plazo de vencimiento, que producen diferencias en tasas de interés.

Una herramienta indiscutible de gestión es el análisis de las curvas de la rendimiento, porque ayudan al gestor de carteras a predecir la dirección de los tipos de interés, y por consiguiente, a diseñar las estrategias de inversión adecuadas en función a sus pronósticos.

La estructura temporal de las tasas de interés, o curva de rendimientos, es la relación entre el tiempo que resta hasta al vencimiento y el rendimiento de los bonos que sean similares en todos los aspectos, excepto que difieren en el vencimiento (por ejemplo, cetes o bonos de un mismo emisor).

Las curvas de rendimiento se construyen en base a los precios con que se negocian los títulos

en un momento dado, a partir de los cuales se calcula los rendimientos correspondientes los títulos específicos para los diferentes plazos de vencimiento. Para ello, todos los bonos deben tener el mismo nivel de riesgo, así como cláusulas de redención características de amortización y situación fiscal.

Esa relación puede adoptar distintas formas, pero las más comunes son la normal o la invertida. La primera indicaría que a mayor plazo hasta el vencimiento mayor es el rendimiento del bono. Sin embargo, la invertida indica que el rendimiento disminuye a medida que aumenta los plazos. La diferencia entre una y otra muestra el sentimiento del mercado en referencia a las tasas futuras de los tipos de interés y el riesgo o volatilidad que existe en dicho mercado. Si el mercado opina que las tasas van a reducirse en el futuro, la curva de rendimiento irá convirtiéndose en plana o invertida.

1.4.1. Formas que adopta la Curvas de Rendimiento.

Dependiendo del tipo de instrumento o de las tasas de que se utilicen es posible construir diferentes tipos de curvas. Existen tres principales tipos de curvas.

Curvas de Bonos con Cupón, o de Rendimientos a la par.

Esta curva es la más utilizada. Los insumos para la elaboración de esta curva son instrumentos más líquidos, que cotizan en el mercado tienen estructuras similares. Estos instrumentos son bonos con cupón, y se utilizan aquellos que coticen a la par (cerca de su valor nominal), preferentemente, los últimos emitidos.

Como las tasas de interés en función del tiempo a vencimiento de los instrumentos, esto hace que las tasas de cupón sean también diferentes. Los rendimientos de estos bonos están sujetos al riesgo de reinversión, por lo que dichas tasas no siempre son las más exactas a la hora de utilizarlas en la valoración.

Curvas de tipos Spot (cupón cero).

La tasa spot (o tasas cupón cero) a un determinado vencimiento es el rendimiento anual de una inversión que no tiene pagos durante su vida; es decir, al rendimiento de un bono cupón cero.

También es conocida como curva de tipos spot (representa un único flujo a la fecha de vencimiento sin ningún pago intermedio). Esa curva mostraría cuál sería el tipo de interés por pedir prestado dinero hoy, que será devuelto en un cierto periodo de tiempo sin pagos intermedios. Las tasas de rendimiento cupón cero son tasas exactas que no están sujetas al riesgo de reinversión; al tener flujos durante su vida que reinvertir.

Cuando se disponen de instrumentos de tasa fija que son cupón cero, como es el caso de los cetes, el tipo de interés a n años del instrumento nos mostraría el tipo spot vigente en el mercado para ese plazo.

Si se cuenta con cetes de deuda es posible tomar sus rendimientos para calcular los siguientes tramos de la curva correspondiente a un mayor plazo, los cetes son instrumentos cupón cero. No siempre se dispone de cotización de los cetes, ya que en algunos casos, o para algunos vencimientos, el mercado puede no ser muy líquido.

En el caso de no disponer de estos instrumentos como referencia es necesario aplicar la técnica de bootstrapping normales que si tengan cupón.

Bootstrapping.

Para aplicar esta técnica es necesario contar con algunas tasas spot que servirán para calcular tipos spot de vencimiento más largos, pero estas solo se emiten hasta 1 año, y para calcular las tasas a 2 años o 3 años, como ya no se disponen de instrumentos cupón cero se utiliza el método bootstrapping.

Esté método consiste en ir calculando las tasas spot restantes a partir de las que están disponibles, ya que los flujos del instrumento no se van a descontar a la TIR, o tasa de rendimiento del bono, como normalmente se hace, sino ahora cada flujo va a ser descontado a la tasa spot corresponde.

Este método parte del supuesto de que un instrumento de tasa fija puede valorarse utilizando el rendimiento a vencimiento (*TIR*) o también valorando cada flujo del instrumento de forma independiente, aplicando su tasa spot (o cupón cero) $r_{0,1}, r_{0,2}, \dots$ llegando a los mismos resultados.

Las siguientes ecuaciones muestran ambos procedimientos de valoración, utilizando la TIR (1.4.1) o utilizando tasas spot (1.4.2) :

$$P = \frac{C_1}{(1+R)^1} + \frac{C_2}{(1+R)^2} + \dots + \frac{C_n + N}{(1+R)^n} \quad (1.4.1)$$

$$P = \frac{C_1}{(1+r_{0,1})^1} + \frac{C_2}{(1+r_{0,2})^2} + \dots + \frac{C_n + N}{(1+r_{0,n})^n} \quad (1.4.2)$$

Donde P es Precio Sucio (es decir, incluye el interés acumulado), C es cupón cero Anual R_i es el porcentaje de la tasa de retorno que usa en el i^{esimo} periodo, N pago de rescate en el momento n .

Curva de tipo forward.

La curva de tipo forward es aquella que muestra la relación de tasas forward a un año, en función al tiempo. Los tipos de interés forward son tipos spot pactados para un determinado plazo (normalmente a un año) que se van a dar en el futuro, dentro de un determinado periodo de tiempo.

El objetivo es tratar de predecir cuál es la tasa a un año que va darse dentro de dos años. A esa tasa se le llama forward porque es una tasa futura y se le añade el indicador $2X3$ o $2 : 3$ que sería la tasa spot del año 2 al 3 (también es representado como $f_{2,3}$).

Creación de la curva de rendimientos forward.

Se obtienen a través de las tasas cupón cero que en el momento presente, se conocen como certeza el tipo forward se calcula a partir de la curva de tipos spot (o curva cupón cero).

Un objetivo es que tenga un periodo de inversión de 2 años podría llevar a cabo su inversión con estas dos opciones: Comprar un bono cupón cero a 2 años, en que tendría un rendimiento anual efectivo de r_2 que sería el rendimiento anual exigido en ese momento para ese instrumento. de

este modo, al finalizar el periodo de inversión, el capital acumulado, más los intereses, estaría en función de $(1 + r_1)(1 + r_2) = (1 + r_2)^2$

Comprar un bono cupón cero a 1 año, y transcurrido ese año comprar otro bono cupón cero, también a 1 año, de forma que el primer año obtendría la tasa de rentabilidad anual de ese instrumento, que sería r_1 , y el segundo año obtendría la tasa de rentabilidad que hubiera en dicho momento que sería $\hat{r}_{1,2}$. El resultado total de la inversión vendría en función de $(1 + r_1)(1 + \hat{r}_{1,2})$ siendo \hat{r} el tipo de interés implícito que habrá en el segundo año.

1.4.2. Teorías que explican la estructura por plazos de los rendimientos.

Existen tres teorías principales para explicar la estructura por plazos de los rendimientos:

1. Expectativas puras.

Esta teoría conjetura que los tipos de interés a largo plazo deben reflejar los tipos de interés a corto plazo futuros esperados. Estos tipos esperados son los que se obtienen a partir de los tipos spot, y son los llamados tipos forward según esta teoría, esos tipos futuros, se van dando en el mercado de tal forma, que para el agente le daría igual operar con un horizonte de tiempo u otro, ya que el resultado de la inversión sería el mismo.

2. Segmentación del mercado.

Esta teoría dice que no es necesario que haya relación alguna entre tipos a corto, medio y largo plazo. El mercado está segmentado por periodos de vencimientos. Los inversores tienen una política de inversión respecto al plazo de la inversión preferido. De esta forma los inversores que operan en el segmento del mercado corto plazo no tienen nada que ver con los que operan en el segmento del mercado de largo plazo.

Esta teoría las instituciones invierten en obligaciones de diferentes vencimientos sin posibilidad del cambio en el vencimiento decidido para la inversión. El tipo de interés a corto plazo es determinada por la oferta y la demanda en el mercado de títulos a corto. El tipo de interés a medida viene determinado por el mercado de activos con un vencimiento a medio plazo, y así sucesivamente.

3. Preferencia de la liquidez.

En esta teoría se argumenta que los tipos de interés a largo plazo deben ser siempre superiores a los tipos de interés a corto. El supuesto básico subyacente en esta teoría es que los inversores prefieren la liquidez que les proporciona un vencimiento a corto plazo de sus inversiones e invertir en fondos durante periodos cortos de tiempo para ir reinvertir en vez de hacer inversiones a largo plazo.

Los inversores toman decisiones de inversión racionales con aversión al riesgo, por lo que introducen en sus planteamientos la hipótesis de preferencia por la liquidez, tal como señalan Rassi, Gourlaouen, Mercier (1984), debido al riesgo financiero por fluctuaciones en los tipos de interés.

Haciendo un mayor detalle, se resalta: frente a varios activos financieros que difieren única y exclusivamente del tiempo a vencimiento de su capital, los inversores preferirán siempre el de menor plazo. En consecuencia, a igualdad de características, los activos de mayor plazo deben

incorporar una prima de rentabilidad que compense la pérdida de liquidez.

Los emisores de bonos, por otro lado, prefieren endeudarse a tasas fijas y por periodos largos de tiempo. Para compensar esa preferencia por el corto plazo es necesario dar una prima o premio, para hacer más atractivos los instrumentos de largo plazo, y así atraer a los inversores.

Por todo ello, los tipos de interés forward deben incorporar no solo el tipo de interés spot esperado de acuerdo con el modelo de las expectativas puras, sino además una prima de riesgo por liquidez, que deberá ser a mayor alejamiento del tiempo. Dicha prima es, además el crecimiento acelerado.

Una de las consecuencias de esta teoría implicará que la mayoría de las curvas de rendimiento tengan pendientes positivas, sobre todo en el tramo largo de la curva.

Capítulo 2

Métodos de Aproximación Numéricos

Los métodos numéricos constituyen procedimientos alternativos provechosos para resolver problemas matemáticos para los cuales se dificulta la utilización de métodos analíticos tradicionales, son una opción posible de solución. Son técnicas sistemáticas cuyos resultados son aproximaciones del verdadero valor que asume la variable de interés; la repetición, a lo cual se le denomina algoritmos iterativos, se compone de un número de pasos finitos que se ejecutan de manera lógica, mejorando aproximación iniciales a cierta cantidad, tal como la raíz de una ecuación, hasta que se cumple con cierta cota de error. A esta operación cíclica de mejora del valor se le conoce como iteración es lo que permite acercarse cada vez más al valor buscado.

2.1. Método No Paramétricos

La idea básica de esta regresión es desarrollar una base de modelo para predecir la respuesta sobre el rango de los datos. Los primeros métodos de regresión se basaron mucho en la estimación No Paramétrica de la función de densidad. La mayor parte de las publicaciones sobre regresión no paramétrica se enfocan hacia una sola regresión, sin embargo, muchas de las ideas básicas se aplican también a más de uno solo.

Se supone que se observa n pares de datos (x_i, y_i) , y que provienen del siguiente modelo de regresión no paramétrico:

$$y_i = m(x_i) + \xi_i$$

Donde $\xi_1 \dots \xi_n$ son variables aleatorias idénticamente distribuidas independientes con $E(\xi_i) = 0$ y $V(\xi) = \sigma^2$, y los valores de la variable explicativa $x_1 \dots x_n$ son conocidos, se dice que el modelo tiene diseño fijo, y dado que la varianza de los errores es constante el modelo es Homocedástico.¹

Considerando (X, Y) una variable aleatoria bivalente con densidad conjunta $f(x, y)$, cabe definir la función de regresión como $m(x) = E(Y|X = x)$, es decir el valor esperado de Y cuando X toma el valor conocido x . Entonces $E(Y|X) = m(X)$, y definiendo $\xi = Y - m(X)$, se tiene que:

$$Y = m(X) + \xi, \quad E(\xi|X) = 0, \quad y \quad V(\xi|X) = \sigma^2$$

Sean (X_i, Y_i) , $i = 1, \dots, n$ una muestra aleatoria simple de (X, Y) . Estos datos siguen el modelo de regresión no paramétrico:

$$Y_i = m(X_i) + \xi_i, \quad i = 1, \dots, n$$

¹Si se supone que la varianza es función de la variable explicativa $x : V(\xi_i) = \sigma^2(x_i)$, el modelo sería Heterocedástico.

Una vez establecido el modelo, el paso siguiente consiste en estimarlo (o ajustarlo) a partir de las n observaciones disponibles. Es decir hay que construir un estimador $\hat{m}(x)$, de la función de regresión y un estimador $\hat{\sigma}^2$ de la varianza del error. Los procedimientos de estimación de $m(x)$ se conocen como métodos de suavizado.

2.1.1. Función Núcleo

Los histogramas son siempre, por naturaleza, funciones discontinuas; sin embargo, en muchos casos es razonable suponer que la función densidad de la variable que se está estimando es continua. En este sentido, los histogramas son estimadores insatisfactorios, tampoco son adecuados para estimar las modas, que se pueden proporcionar intervalos modales, y al ser funciones constantes a trozos, su primera derivada es cero en casi todo punto, lo que les hace completamente inadecuado para estimar la derivada de la función de densidad.

Los estimadores de tipo Núcleo (o Kernel) fueron diseñados para superar estas dificultades. Los estimadores Kernel son los más utilizados y mejor estudiados en la teoría No Paramétrica.

Dada una o mas X_1, \dots, X_n con densidad f , estimamos dicha densidad en un punto t por medio del estimador

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{t - X_i}{h}\right) \quad (2.1.1)$$

donde h es un parámetro fijo de suavizado, llamados ventanas o amplitudes de banda (windows, bandwidths) que deben tender a cero lentamente ($h \rightarrow 0, nh \rightarrow \infty$) para poder asegurar que \hat{f} tiende a la verdadera densidad f de las variables X_i y K es una función que cumple $\int K = 1$.

Ejemplo:

Núcleo gaussiano:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$$

Epanechnikov:

$$\frac{3}{4}(1 - u^2)I_{|u| < 1}$$

donde $I_{|u| < 1}$ es la función que vale 1 si $|u| < 1$ y 0 si $|u| \geq 1$.

Para elegir la ventana h podemos seguir la siguiente regla

$$h = \delta_k \left(\frac{3}{4}\right) \pi^{\frac{1}{10}} S_n n^{-\frac{1}{5}}$$

Donde n es el tamaño de la muestra

$$S_n = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

δ_k depende del núcleo K , y se calcula como:

$$\delta_k = \left(\frac{\int_{-\infty}^{\infty} K^2(t) dt}{\left(\int_{-\infty}^{\infty} u^2 K(t) dt\right)^2}\right)^{\frac{1}{5}}$$

Por ejemplo:

Si K es el núcleo Gaussiano, entonces

$$\delta_k = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{10}}$$

Si K es el núcleo Epanechnikov, entonces

$$\delta_k = (15)^{\frac{1}{5}}$$

2.1.2. Estimación Función Núcleo y Polinomios Locales

La alternativa No Paramétrica a los modelos de regresión, supone que

$$Y = m(X) + \xi$$

donde m es una función que no es confinada dentro de una familia Paramétrica. Se trata de estimar m a partir de una muestra $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$.

Los estimadores núcleo establecen, que los pesos de (X_i, Y_i) en la estimación de m es

$$W_i(t, X_i) = \frac{\frac{1}{nh} K\left(\frac{t-X_i}{h}\right)}{\hat{f}(t)} \quad (2.1.2)$$

donde $K(t)$ es la función de densidad simétrica (por ejemplo, la normal estándar) y $\hat{f}(t)$ es un estimador kernel de la densidad, definido en el apartado anterior.

$W_i(t, X_i)$ es, para cada i , una función de ponderación que da mayor importancia a los valores X_i de la variable auxiliar que está cercanos a t .

A partir de la (2.1.1) se sustituye a \hat{f} en (2.1.2) para obtener una expresión alternativa para $W_i(t, X_i)$

$$W_i(t, X_i) = \frac{K\left(\frac{t-X_i}{h}\right)}{\sum_{j=1}^n K\left(\frac{t-X_j}{h}\right)} \quad (2.1.3)$$

A partir de los pesos W_i puede resolver el problema de mínimos cuadrados ponderados siguientes:

$$\underbrace{\min}_{a,b} \sum_{i=1}^n W_i (Y_i - (a + b(t - X_i)))^2$$

los parámetros a y b dependen de t , porque los pesos W_i también dependen de t , la recta de regresión local ajustada alrededor de T sería:

$$l_t(X) = a(t) + b(t)(t - X)$$

Y la estimación de la función en el punto en donde $X = t$

$$\hat{m}(t) = l_t(t) = a(t)$$

Las funciones núcleo usadas en la estimación no paramétrica de la regresión son las mismas que en la densidad.

Esto es un caso particular, al ajuste local de regresión polinómicas de mayor grado, es decir si pretendemos estimar una forma lineal del tipo:

$$\beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2 + \dots + \beta_q X^q$$

con la salvedad de que en vez del valor X_i en la regresión lineal múltiple se utiliza el valor $(t - X_i)$. El estimador de polinomios locales de grado q se asigna los pesos W_i obtenidos mediante la función núcleo se resuelve el siguiente problema de regresión polinomio ponderado:

$$\min_{\beta_0 \dots \beta_q} \sum_{i=1}^n W_i (Y_i - (\beta_0 + \beta_1(t - X_i) + \dots + \beta_q(t - X_i)^q))^2$$

El modelo de regresión lineal supone que la relación entre la variable de respuesta Y en cada una de las variables independientes es lineal. A veces, es evidente que esta relación no es lineal, por lo que hay que considerar modelos que sean más flexibles. Las técnicas de regresión no paramétricas responden a esta flexibilidad ya que no imponen condiciones sobre la forma de la función $\hat{m}(x)$.

En esta situación, los estimadores más comunes para $\hat{m}(x)$ son estimadores tipo núcleo (como los polinomiales locales), introducen la extensión del estimador polinomial local. A continuación describimos el estimador polinomial local para el caso general de grado P . Consideramos el siguiente problema de mínimos cuadrados ponderados.

Los parámetros $\hat{\beta}_j = \hat{\beta}_j(t)$ dependen del punto t en donde se realiza la estimación, y el polinomio ajustado local alrededor de t sería:

$$P_{q,t}(t - X) = \sum_{j=0}^q \hat{\beta}_j(t - X)^j$$

Siendo $m(t)$ el valor de dicho polinomio estimado en el punto en donde $X = T$:

$$\hat{m}_q(t) = P_{q,t}(0) = \hat{\beta}_0(t)$$

En el caso particular se ajusta a un polinomio de grado cero, se obtiene el estimador de Nadaraya-Watson, o estimador núcleo de la regresión:

$$\hat{m}_k(t) = \frac{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{t-X_i}{h}\right) Y_i}{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{t-X_i}{h}\right)} = \sum_{i=1}^n W(t, X_i) Y_i \quad (2.1.4)$$

2.1.3. Elección del Parámetro de Suavizado

El estimador del parámetro de suavizado h tiene una importancia crucial en el aspecto y propiedades del estimador de función de regresión. Valores pequeños de h dan mayor flexibilidad al estimador y permiten acercarse a todos los datos observados, pero originan altos errores de predicción (sobre - estimación), valores mas altos de h ofrecerán un menor grado de ajustes a los datos pero predicción mejor, pero si h es demasiado elevado tendremos una falta de ajuste a los datos (sub - estimación).

Si la cantidad de datos de que disponemos lo permite, lo habitual es obtener dos muestras una para estimación del modelo (muestra de entrenamiento) y otra muestra para predecir (muestra

de test). En este caso una medida de calidad del parámetro h de suavizado es el error cuadrático medio de la población de la muestra de test:

$$ECMP_{test}(h) = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^n (Y_{i,t} \cdot \hat{m}(X - i, t))^2 \quad (2.1.5)$$

Donde $(X_{i,t}, Y - i, t)$, $i = 1, \dots, n_t$, es la muestra test y $\hat{m}(X)$ es el estimador no paramétrico construido con la muestra de entrenamiento. El valor h que minimice dicho error sería el parámetro de suavización elegido.

Si no se puede disponer de una muestra de test, la alternativa consiste en sacar de la muestra consecutiva cada una de la observaciones X_i , y estimar el modelo con los restantes datos y predecir el dato ausente con el estimador obtenido, para después calcular el error de predicción. Se construye entonces la siguiente medida error de predicción (validación cruzada) para cada h :

$$ECMP_{CV}(h) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{m}_i(X_i))^2 \quad (2.1.6)$$

Donde $\hat{m}_i(X)$, es el estimador obtenido al excluir la observación i -ésima.

El valor h que minimice dicho error de validación cruzada sería el parámetro de suavización elegido.

Teniendo presente que el valor que predecimos \hat{Y}_i no deja de ser una combinación lineal de los valores observados:

$$\hat{Y} = X\hat{\beta} = X_t(X_t'W_tX_t)^{-1}X_t'W_tY = SY$$

Siendo $S = X_t(X_t'W_tX_t)^{-1}X_t'W_t$, matriz que se denomina de suavizado cuyo elemento (i, j) se nombre S_{ij} .

Dado que :

$$ECMP_{CV}(h) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{Y_i - \hat{Y}_i}{1 - S_{ii}} \right)^2 \quad (2.1.7)$$

no es necesario ajustar las n regresiones no paramétricas, sino que basta con evaluar todos los datos y anotar los valores de la diagonal principal de la matriz S .

Una modificación de la función anterior (Validación cruzada generalizada) permite obtener un estimador de la varianza de los errores del modelo:

$$ECMP_{CV}(h) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{Y_i - \hat{Y}_i}{1 - \frac{v}{n}} \right)^2 \quad (2.1.8)$$

Donde $v = \text{Traza}(S) = \sum_{i=1}^n S_{ii}$ Entonces

$$ECMP_{GCV}(h) = \frac{n\sigma_\xi^2}{n - v} \quad (2.1.9)$$

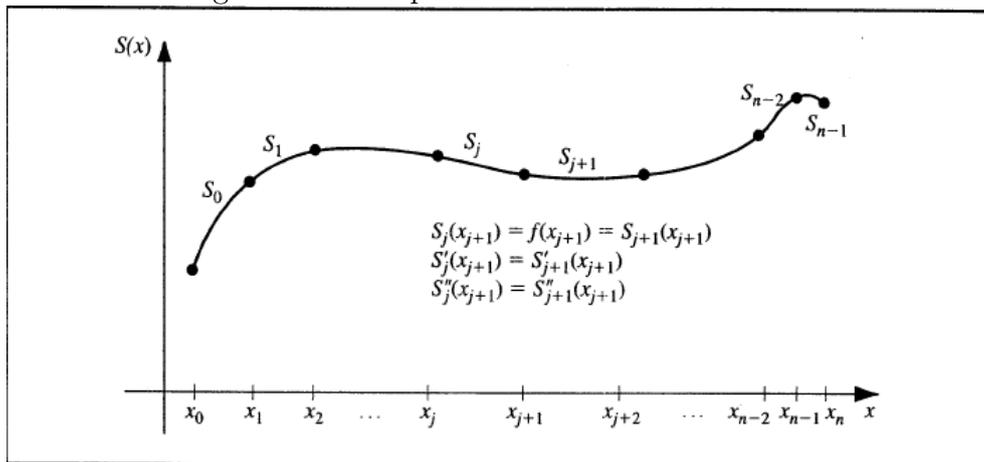
y

$$\sigma_\xi^2 = \frac{1}{n - v} \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2 \quad (2.1.10)$$

2.2. Aproximación Polinómica Fragmentaria

Son aproximación con polinomios cúbico contiene cuatro constantes; así pues, el procedimiento del trazador cúbico ofrece suficiente flexibilidad para garantizar que el interpolador no sólo sea continuamente diferencial en el intervalo, sino que además tenga una segunda deriva continua en el intervalos. Sin embargo, en la construcción del trazo cúbico, no se supone que las derivadas del interpolador concuerdan con las de la función, ni siquiera en los nodos. (véase la figura(2.1).)

Figura 2.1: Interpolación de trazadores cúbicos



Definición 2.2.1 Dada una función f definida en $[a, b]$ y un conjunto de nodos $a = X_0 < X_1 < \dots < X_n = b$ un interpolador del trazo cúbico S para f es una función que cumple con las condiciones siguientes:

- $S(x)$ es polinomio cúbico, denotado $S_j(x)$, en el subintervalo $[x_j, x_{j+1}]$ para cada $j = 0, 1, \dots, n - 1$;
- $S(x_j) = f(x_j)$ para cada $j = 0, 1, \dots, n - 1$;
- $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$ para cada $j = 0, 1, \dots, n - 2$;
- $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$ para cada $j = 0, 1, \dots, n - 2$;
- $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$ para cada $j = 0, 1, \dots, n - 2$;

Una de las siguientes condiciones se cumple si se conocen $f'(x_0)$ y $f'(x_n)$, de frontera se satisface:

- $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ (frontera libre o natural)
- $S'(x_0) = f'(x_0)$ y $S'(x_n) = f'(x_n)$ (frontera sujeta).

2.2.1. Trazadores de Polinomios Cúbicos

Aunque los trazadores cúbicos se definen con otras condiciones de frontera, dadas en f que son suficientes en este caso. Cuando se presentan las condiciones de frontera libre, el trazador recibe el nombre de trazador natural y su gráfica se aproxima a la forma que adoptaría una varilla larga y flexible si la hiciéramos pasar por los puntos

$$\{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))\}.$$

En términos generales, en las condiciones de frontera sujeta se logran aproximaciones más exactas, ya que abarcan más información acerca de la función. Pero para que se cumpla este tipo de condición de frontera, se requiere tener los valores de la derivada en los extremos o bien una aproximación precisa de ellos.

Si queremos construir un interpolador del trazador cúbico que determina función f aplicamos las condiciones de la definición de los polinomios cúbicos:

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3,$$

para cada $j = 0, 1, \dots, n - 1$.

Está claro que

$$S_j(x_j) = a_j = f(x_j),$$

y si se aplica la condición definición (2.2.1)(c)

$$\begin{aligned} a_{j+1} &= S_{j+1}(x_{j+1}) \\ &= S_j(x_{j+1}) \\ &= a_j + b_j(x_{j+1} - x_j) + c_j(x_{j+1} - x_j)^2 + d_j(x_{j+1} - x_j)^3 \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

para cada $j = 0, 1, \dots, n - 2$.

Puesto que los términos $x_{j+1} - x_j$ se utilizarán varias veces en este desarrollo, conviene introducir la notación más simple

$$h_j = x_{j+1} - x_j,$$

para cada $j = 0, 1, \dots, n - 1$. Si también definimos $a_n = f(x_n)$ entonces la ecuación (2.2.11) se tiene

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3 \tag{2.2.12}$$

será válida para cada $j = 0, 1, \dots, n - 1$.

De manera análoga, defina $b_n = S'(x_n)$ y observe que

$$S'_j(x) = b_j + 2c_j(x - x_j) + 3d_j(x - x_j)^2$$

significa que $S'_j(x_j) = b_j$ para cada $j = 0, 1, \dots, n - 1$. Al aplicar la condición definición (2.2.1)(d) se obtiene

$$b_{j+1} = b_j + 2c_j h_j + 3d_j h_j^2, \tag{2.2.13}$$

para cada $j = 0, 1, \dots, n - 1$.

Al definir $c_n = \frac{S''(x_n)}{2}$ aplicar la condición definición (2.2.1)(e), se obtiene otra relación entre los coeficientes de S_j . En este caso, para cada $j = 0, 1, \dots, n - 1$.

$$c_{j+1} = c_j + 3d_j h_j, \tag{2.2.14}$$

Al despejar d_j en la ecuación (2.2.14) y sustituir este valor en las ecuaciones (2.2.12) y (2.2.13), para cada $j = 0, 1, \dots, n - 1$ se obtiene las ecuaciones

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + \frac{h_j^2}{3}(2c_j + c_{j+1}) \tag{2.2.15}$$

y

$$b_{j+1} = b_j + h_j(c_j + c_{j+1}). \tag{2.2.16}$$

La relación final que incluye los coeficientes se obtiene resolviendo la ecuación correspondiente en la forma de la ecuación (2.2.15), primero para b_j ,

$$b_j = \frac{1}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1}), \quad (2.2.17)$$

y entonces con una reducción de índices, para b_{j-1} :

$$b_j = \frac{1}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}) - \frac{h_{j-1}}{3}(2c_{j-1} + c_j).$$

Cuando sustituimos estos valores en la ecuación obtenida de la ecuación (2.2.16), con el índice reducido en 1, obtenemos el sistema de ecuaciones lineales

$$h_{j-1}c_{j-1} + 2(h_{j-1} + h_j)c_j + h_jc_{j+1} = \frac{3}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{3}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}), \quad (2.2.18)$$

para cada $j = 0, 1, \dots, n-1$. Este sistema contiene sólo $\{c_j\}_j^n = 0$ como incógnitas, ya que los valores de $\{h_j\}_{j=0}^{n-1}$ y $\{a_j\}_j^n = 0$ están dados por el espaciado de los nodos $\{x_j\}_j^n = 0$ y los valores de f en éstos.

Una vez que se conoce los valores de $\{c_j\}_j^n = 0$, encontrar el resto de las constantes $\{b_j\}_{j=0}^{n-1}$ partiendo de la ecuación (2.2.17) y $\{d_j\}_{j=0}^{n-1} = 0$ de la ecuación (2.2.14) para construir los polinomios cúbicos $\{S_j(x)\}_{j=0}^{n-1}$ es fácil.

2.2.2. Determinar los Valores; Sistemas de Ecuaciones

El interrogante principal que se plantea en relación con esta construcción es si se puede determinar los valores $\{c_j\}_{j=0}^n$ por medio del sistema de ecuaciones dado en (2.2.18) y, de ser así, si estos valores son únicos.

El siguiente teorema indica que esto es posible cuando se establece una de las dos condiciones de frontera de la parte f de la definición (2.2.1).

Teorema 2.2.1 *Si definimos f en $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ entonces f tendrá un interpolador único de trazador natural en los nodos x_0, x_1, \dots, x_n ; es decir, un interpolador de trazador que cumple con las condiciones de frontera $S''(a) = 0$ y $S''(b) = 0$.*

Demostración. *En este caso, las condiciones de frontera significan que*

$$c_n = S''(x_n)/2 = 0$$

y que

$$0 = S''(x_0) = 2c_0 + 6d_0(x_0 - X_0);$$

así que $c_0 = 0$.

Las dos ecuaciones $c_0 = 0$ y $c_n = 0$ junto con las ecuaciones de (2.2.18) producen un sistema lineal descrito por la ecuación vectorial $Ax = b$, donde A es la matriz $(n+1)$ por $(n+1)$, y donde b y x son vectores.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

La matriz A es estrictamente dominante en sentido diagonal. Por tanto, el sistema lineal tiene una solución única para c_0, c_1, \dots, c_n . La solución del problema de los trazadores cúbicos con las condiciones de frontera $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$.

En el caso de las condiciones de frontera sujetas se obtiene un resultado similar al del teorema (2.2.1).

Teorema 2.2.2 Si f está definida en $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, y es diferenciable en a y b , entonces f tiene un único trazador sujeto que interpola a los nodos x_0, x_1, \dots, x_n , es decir, un interpolador de trazador que cumple con las condiciones de frontera $S'(a) = f'(a)$ y $S'(b) = f'(b)$.

Demostración. Puesto que $f(a) = S'(a) = S'(x_0) = b_0$, podemos ver que la ecuación (2.2.17) con $j = 0$ implica que

$$f'(a) = \frac{1}{h_0}(a_1 - a_0) - \frac{h_0}{3}(2c_0 - c_1).$$

En consecuencia

$$2h_0c_0 + h_0c_1 = \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3f'(a).$$

De manera semejante,

$$f'(b) = b_n = b_{n-1} + h_{n-1}(c_{n-1} + c_n),$$

de modo que la ecuación (2.2.17) con $j = 0$ implica que

$$\begin{aligned} f'(b) &= \frac{a_n - a_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{h_{n-1}}{3}(2c_{n-1} + c_n) + h_{n-1} - 1(c_{n-1} + c_n) \\ &= \frac{a_n - a_{n-1}}{h_{n-1}} + \frac{h_{n-1}}{3}(c_{n-1} + 2c_n), \end{aligned}$$

y que

$$h_{n-1}c_{n-1} + 2h_{n-1}c_n = 3f'(b) - \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}).$$

Las ecuaciones (2.2.18) junto con las ecuaciones

$$2h_0c_0 + h_0c_1 = \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3f'(a)$$

y

$$h_{n-1}c_{n-1} + 2h_{n-1}c_n = 3f'(b) - \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1})$$

$$A = \begin{bmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 & \dots & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & \dots & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3f'(a) \\ \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ 3f'(b) - \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

determinan el sistema lineal $Ax = b$, donde

la matriz A es estrictamente dominante en sentido diagonal, el sistema lineal tiene una solución única para c_0, c_1, \dots, c_n .

Cerca de los extremos del intervalo $[x_0, x_n]$, las condiciones de frontera libre casi siempre dan resultados menos exactos a menos que la función f casualmente satisfaga $f''(x_0) = f''(x_n) = 0$. Una alternativa de la condición de frontera libre que no requiere el conocimiento de la derivada de f es la condición exige que $S'''(x)$ es continua en x_1 y x_{n-1} .

2.3. Regresión Lineal Múltiple

Un modelo de regresión donde interviene más de una variable regresiva se explica en un ajuste y análisis de esos modelos que describen la relación:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \xi \tag{2.3.19}$$

donde y variable dependiente, x_1 y x_2 son variables independientes en este modelo con dos variables regresoras, que usan el término lineal porque la ecuación (2.3.19) es una función lineal de los parámetros desconocidos β_0, β_1 y β_2 , en el que se ha supuesto que el valor esperado del término ξ el error en la ecuación (2.3.19), es cero. El parámetro β_0 es la ordenada al origen del plano de regresión. Si en el intervalo de datos se incluyen $x_1 = x_2 = 0$ entonces β_0 es el promedio de y si es así β_0 no tiene interpretación física. El parámetro β_1 indica el cambio esperado de la respuesta y por cambio unitario en x_1 , cuando x_2 se mantiene constante. De igual modo, β_2 mide el cambio esperado de y por unidad de cambio de x_2 cuando se mantiene constante x_1 . En general, se puede relacionar la respuesta y con k regresiva o variables predicción.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_k x_k + \xi \tag{2.3.20}$$

se llama modelo de regresión lineal múltiple con k variables regresivas. Los parámetros $\beta_j = 0, 1, \dots, k$ se llaman coeficientes de regresión. Este modelo es un espacio de k dimensiones de las variables regresivas x_j . El parámetro β_j representa el cambio esperado en la respuesta y por cambio unitario en x_j cuando todas las demás variables regresivas $x_i (i \neq j)$ se mantienen constantes. Por esta razón, a los parámetros $\beta_j, j = 1, 2, \dots, k$ se les llama con frecuencia coeficientes de regresión parcial.

2.3.1. Estimación de los Coeficientes de Regresión por Mínimos Cuadrados

Para estimar los coeficientes de regresión de la ecuación (2.3.20). Supongamos que se dispone de $n > k$ observaciones, y sea y_i la i -ésima respuesta observada, y x_{ij} la i -ésima observación o nivel del regresiva x_j . Los datos aparecen en el supuesto para el término del error ξ del modelo tiene $E(x) = 0, Var(\xi) = \sigma^2$ y que los errores no están correlacionados.

Figura 2.2: Datos para la regresión múltiple

Observación Respuesta		Variables Regresión			
i	Y	x_1	x_2	...	x_k
1	y_1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1k}
2	y_2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2k}
...
n	y_n	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nk}

Cuando se prueban hipótesis o se establecen intervalos de confianza, se debe suponer que la distribución condicional de Y dadas x_1, x_2, \dots, x_k es normal, con promedio $\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_k x_k$ y varianza σ^2 . Se puede escribir en la siguiente forma el modelo muestra de regresión que corresponde(2.3.20):

$$\begin{aligned}
 y_i &= \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_k x_{ik} + \xi_i \\
 &= \beta_0 + \sum_{j=1}^k \beta_j x_{ij} + \xi, \quad i = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned}
 \tag{2.3.21}$$

La función de mínimos cuadrados es

$$\begin{aligned}
 S(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k) &= \sum_{j=1}^n \xi_i^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n \left(y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^k \beta_j x_{ij} \right)^2
 \end{aligned}
 \tag{2.3.22}$$

Se debe minimizar la función S respecto a $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$. Los estimadores de $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ por mínimos cuadrados deben satisfacer

$$\left. \frac{\partial S}{\partial \beta_0} \right|_{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k} = -2 \sum_{i=0}^n \left(y_i - \hat{\beta}_0 - \sum_{j=0}^k \hat{\beta}_j x_{ij} \right) = 0 \quad (2.3.23)$$

y

$$\left. \frac{\partial S}{\partial \beta_j} \right|_{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k} = -2 \sum_{i=0}^n \left(y_i - \hat{\beta}_0 - \sum_{j=0}^k \hat{\beta}_j x_{ij} \right) x_{ij} = 0 \quad j = 1, 2, 3, \dots, k \quad (2.3.24)$$

Al simplificar las ecuaciones (2.3.23) y (2.3.24) se obtienen ecuaciones normales de mínimos cuadrados.

$$\begin{array}{cccccc} n\hat{\beta}_0 & +\hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_{i1} & +\hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^n x_{i2} & + \cdots & +\hat{\beta}_k \sum_{i=1}^n x_{ik} & = \sum_{i=1}^n y_i \\ \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^n x_{i1} & +\hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_{i1}^2 & +\hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^n x_{i1}x_{i2} & + \cdots & +\hat{\beta}_k \sum_{i=1}^n x_{i1}x_{ik} & = \sum_{i=1}^n x_{i1}y_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^n x_{ik} & +\hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_{ik}x_{i1} & +\hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^n x_{ik}x_{i2} & + \cdots & +\hat{\beta}_k \sum_{i=1}^n x_{ik}^2 & = \sum_{i=1}^n x_{ik}y_i \end{array} \quad (2.3.25)$$

Se ve que para toda $p = k + 1$ ecuaciones normales, es para cada uno de los coeficientes desconocidos de regresión. La solución de las ecuaciones normales serán los estimadores por mínimos cuadrados $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$.

Es más fácil manejar modelos de regresión múltiple cuando se expresan en notación matricial. Eso permite presentar en forma muy compacta al modelo, los datos y los resultados.

En general, y es un vector de $n \times 1$ de las observaciones, X es una matriz de $n \times p$ de los niveles de las variables regresoras. β es un vector de $p \times 1$ de los coeficientes de regresión y ξ es un vector de $n \times 1$ de errores aleatorios.

Se desea determinar el vector $\hat{\beta}$ de estimadores de mínimos cuadrados que minimice

$$S(\beta) = \sum_{i=0}^n \xi_i^2 = \xi' \quad \xi = (y - X\beta)'(y - X\beta)$$

Se ve que $S(\beta)$ se puede expresar como sigue:

$$S(\beta) = y'y - \beta'X'y - y'X\beta + \beta'X'X\beta = y'y - 2\beta'X'y + \beta'X'X\beta$$

ya que $\beta'X'\beta$ es el mismo escalar. Los estimadores de mínimos cuadrados deben satisfacer

$$\left. \frac{\partial S}{\partial \beta_0} \right|_{\hat{\beta}} = -2X'y + 2X'X\hat{\beta} = 0$$

que se simplifica a

$$X'X\hat{\beta} = X'y. \quad (2.3.26)$$

Las ecuaciones(2.3.26) son las ecuaciones normales de mínimos cuadrados. Son la forma matricial de la presentación escalar, ecuaciones(2.3.25). Para resolver las ecuaciones normales se

multiplica ambos lados de (2.3.26) por la inversa de $X'X$. Así, el estimador de β por mínimos cuadrados es

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y \quad (2.3.27)$$

siempre y cuando exista la matriz inversa $(X'X)^{-1}$. La matriz $(X'X)^{-1}$ siempre existe si los regresión son linealmente independiente, esto es, si ninguna columna de la matriz X es una combinación lineal de las demás columnas.

Es fácil ver que la forma matricial de la ecuaciones normales (2.3.26) es idéntica a la forma escalar (2.3.25). Al escribir (2.3.26) con detalle se obtiene

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_{i1} & \sum_{i=1}^n x_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^n x_{ik} \\ \sum_{i=1}^n x_{i1} & \sum_{i=1}^n x_{i1}^2 & \sum_{i=1}^n x_{i1}x_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^n x_{i1}x_{ik} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_{ik} & \sum_{i=1}^n x_{ik}x_{i1} & \sum_{i=1}^n x_{ik}x_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^n x_{ik}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_{i1}y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_{ik}y_i \end{bmatrix}. \quad (2.3.28)$$

Si se hace la multiplicación matricial, se obtiene la forma escalar de las ecuaciones normales (2.3.25). En esta presentación se ve que $X'X$ es una matriz simétrica de pxp y que $X'y$ es un vector columna de $px1$. Nota la estructura especial de la matriz $X'X$. Los elementos diagonales $X'X$ son la sumas de los cuadrados de los elementos en las columnas de X , y los elementos fuera de la diagonal son las sumas de los productos cruzados de los elementos de las columnas de X . Además, que los elementos de $X'y$ son sumas de los productos cruzados de las columnas X por las observaciones y_i .

El modelo ajustado de regresión que corresponde a los niveles de las variables regresión $X' = [1, x_1, x_2, \dots, x_k]$ es

$$\hat{y} = x'\hat{\beta} = \hat{\beta}_0 + \sum_{j=1}^k \hat{\beta}_j x_j.$$

El vector de valores ajustados \hat{y}_i que corresponden a los valores observados y_i es

$$e = y - \hat{y}. \quad (2.3.29)$$

Hay otras maneras de expresar el vector de residuales e , pueden ser útiles, como

$$e = y - X'\hat{\beta} = y - Hy = (I - H)y. \quad (2.3.30)$$

2.3.2. Propiedades de los Estimadores de Mínimos Cuadrados

Las propiedades estadísticas del estimador de mínimos cuadrados $\hat{\beta}$ se demuestra con facilidad. Examinar primero el sesgo:

$$E[\hat{\beta}] = E[(X'X)^{-1}X'y] = E[(X'X)^{-1}X'(X\beta + \xi)] = E[(X'X)^{-1}X'X\beta + (X'X)^{-1}X'\xi] = \beta$$

porque $E(\xi) = 0$ y $(X'X)^{-1}X'X = 1$. Entonces $\hat{\beta}$ es un estimador insesgado de β .

La propiedad de varianza de $\hat{\beta}$ se expresa como la matriz de covarianza

$$Cov(\hat{\beta}) = E \left\{ [\hat{\beta} - E(\hat{\beta})][\hat{\beta} - E(\hat{\beta})]' \right\}$$

que es una matriz simétrica de p por p , cuyo j -ésimo elemento diagonal es la varianza de $\hat{\beta}_j$ y cuyo (ij) -ésimo elemento fuera de la diagonal es la covarianza entre $\hat{\beta}_i$ y $\hat{\beta}_j$. La covarianza de la matriz de $\hat{\beta}$ es

$$Cov(\hat{\beta}) = \sigma^2(X'X)^{-1}$$

por consiguiente, si hacemos $C = (X'X)^{-1}$, la varianza de $\hat{\beta}_j$ es $\sigma^2 C_{jj}$, y la covarianza entre $\hat{\beta}_i$ y $\hat{\beta}_j$ es $\sigma^2 C_{ij}$.

2.3.3. Estimador de σ^2

Como la regresión lineal simple, se puede desarrollar un estimador de σ^2 a partir de la suma de cuadrados de residuales:

$$\begin{aligned} SS_{Res} &= \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n e_i^2 \\ &= e'e \end{aligned}$$

se sustituye $e = y - X\hat{\beta}$ y se obtiene

$$\begin{aligned} SS_{Res} &= (y - X\hat{\beta})'(y - X\hat{\beta}) \\ &= y'y - \hat{\beta}'X'y - y'X\hat{\beta} + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta} \\ &= y'y - 2\hat{\beta}'X'y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta} \end{aligned}$$

como $X'X\hat{\beta} = X'y$, la última ecuación se transforma en

$$SS_{Res} = y'y - \hat{\beta}'X'y \tag{2.3.31}$$

el cuadrado medio residual, o cuadrado medio de residuales es

$$MS_{Res} = \frac{SS_{Res}}{n - p} \tag{2.3.32}$$

el valor esperado de MS_{Res} es σ^2 depende del modelo.

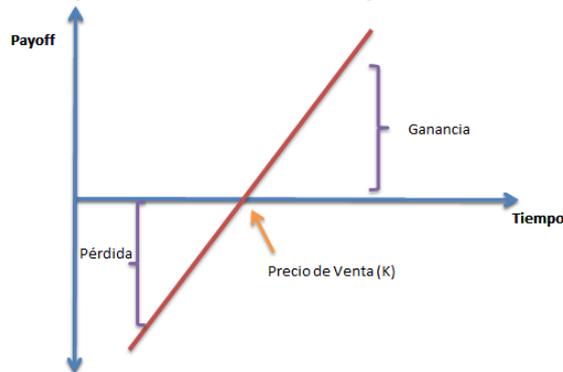
Capítulo 3

Descripción Tasas Forward y Bonos Cupón Cero

3.1. Especulación y cobertura con contratos forward.

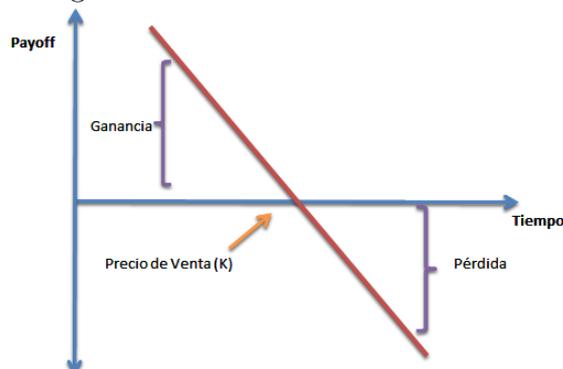
Los contratos forward pueden ser utilizados tanto para especulación como para coberturas. En primer caso, un agente, con expectativas a la alza, que piensa que el precio del activo subyacente aumentará, puede especular tomando una posición larga en un contrato forward sobre el subyacente. (3.1).

Figura 3.1: Posición larga en forwards



Similar, un agente que piensa que el precio del subyacente disminuirá puede especular tomando una posición corta en un contrato forward sobre dicho subyacente (3.2).

Figura 3.2: Posición corta en forwards



Existe una diferencia importante entre especular comprando o vendiendo contratos Forward y especular comprando o vendiendo al activo subyacente. Cuando se compran activos subyacentes en el mercado de contado se requiere de un pago inicial en efectivo igual al valor del subyacente. Sin embargo si se utiliza un contrato Forward sobre el mismo activo, no se requiere de algún pago inicial. Por lo tanto, especular utilizando contratos Forward proporciona al agente ciertas ventajas. El caso de cobertura se puede analizar de manera semejante.

3.1.1. Valor Final de las Posiciones.

Considere un contrato forward sobre una acción con vencimiento en T . Sea S_T el precio de contado (precio "spot") de la acción en la fecha de vencimiento, T . Llegada a la fecha de vencimiento la posición larga paga K y recibe una acción con valor de mercado S_T . El valor final, o perfil de pagos, de la posición larga en el vencimiento, está dado por

$$\text{Payoff} = S_T - K \quad (3.1.1)$$

similar, al valor final de la posición corta, o perfil de pagos de la posición corta en el vencimiento, está dado por

$$\text{Payoff} = K - S_T \quad (3.1.2)$$

observe que el valor final de la posición larga puede ser positivo, en cuyo caso se genera una ganancia, o negativo, con lo cual se produce una pérdida.

En otras palabras, si se pacta a un precio K que resulta ser menor que el precio de la acción en el mercado, S_T , entonces se genera una ganancia igual a $S_T - K$; la situación contraria produce una pérdida de magnitud $K - S_T$. Un análisis semejante de pérdidas y ganancias puede llevarse a cabo para la posición corta. Los perfiles de pago (3.1.1) y (3.1.2) definen un juego de suma cero, es decir, la cantidad que una de las partes gana la otra lo pierde y viceversa.

3.2. Forward sobre una Acción que No Paga Dividendos.

Los contratos Forward sobre una acción, que no paga dividendos durante la vigencia del acuerdo son los productos derivados más simples y también los más fáciles de valorar. Estos contratos, de características muy sencillas, son activamente negociables en los mercados OTC de muchos países.

Un contrato Forward sobre una acción que no paga dividendos es un acuerdo (legal) entre dos partes, establecido al tiempo $t = 0$ (el presente), que obliga a una de las partes a comprar y a la otra a vender una acción en una fecha futura, T , a un precio predeterminado, K . El comprador paga la cantidad pactada, K , hasta la fecha de vencimiento, T , momento en que el vendedor entrega la acción. En todo lo que sigue, el precio pactado, K , será llamado precio de entrega. Es muy importante destacar que al celebrar este tipo de contratos ninguna de las partes incurra en costos.

3.3. Precio de Entrega de Equilibrio.

El propósito de determinar el precio de equilibrio del activo subyacente, en un contrato Forward, se construye una estrategia de inversión que elimina la incertidumbre del precio del activo subyacente en la fecha de vencimiento. Es importante resaltar que el empleo de condiciones de no arbitraje en la estrategia es central en la determinación de dicho precio de entrega de equilibrio.

El valor de la posición larga del contrato Forward, en la fecha de vencimiento, es $S_T - K$, cantidad que se desconoce en el momento en que inicia el contrato, $t = 0$, pues el valor mercado, S_T , no se conocerá sino hasta el tiempo T . No obstante, es posible construir una estrategia de inversión que elimina la incertidumbre, en T , asociada al precio S_T . Sea S_0 el precio de contado de la acción en la fecha de inicio del contrato, $t = 0$. Se toma, primero, una posición larga en un contrato Forward en $t = 0$. Por definición, en el momento en que se inicia el contrato no tiene costo para ninguna de las partes. Al mismo tiempo, se realiza una venta en corto de la acción, es decir, se pide prestada la acción y se vende en el mercado (en una fecha posterior se recompra para regresar junto con una prima), esta operación es posible (y legal) en muchos países.

De esta manera, se tiene un portafolio compuesto por la cantidad en efectivo de la acción vendida, S_0 , por la venta en corto (con prima cero), $-S_0$, y una posición larga en un contrato Forward de valor $V_0 = 0$. En este caso, el valor (o posición) del portafolio combinado, al tiempo $t = 0$, es cero. Específicamente, si Π_0 denota el valor del portafolio en $t = 0$, entonces

$$\Pi_0 = S_0 - S_0 + V_0 = 0$$

Al mismo tiempo, se supone que existe en el mercado una alternativa de inversión libre de riesgo, por ejemplo, una cuenta bancaria o un bono. Si se abre una cuenta bancaria con una inversión inicial $S_0 = 0$ (el efectivo en el portafolio Π_0) y se supone que los intereses son pagados a una tasa de interés (anualizada) libre de riesgo (crédito), contante a todos los plazos y continuamente capitalizable, r , entonces el capital junto con los intereses ganados, I_T , al tiempo T , están dados por:

$$I_T = S_0 e^{rT}. \quad (3.3.3)$$

En todo el razonamiento anterior es importante destacar que en esta economía están permitidas las ventas en corto y los agentes pueden prestar y pedir prestado en un sistema bancario cualquier cantidad a una tasa de interés y libre de riesgo (crédito), r . Se supone por el momento que $I_T \geq K$, es decir, que los intereses alcanzan para pagar K , y recibir la acción por S_T , mismo que se utiliza para cancelar la venta en corto, $-S_T$, sin importar cuál fue el valor final S_T . La posición neta al vencimiento conduce a un portafolio de valor

$$\Pi_T = I_T - K + S_T - S_T = S_0 e^{rT} - K. \quad (3.3.4)$$

En este caso, se generan oportunidades de arbitraje. En efecto si K es menor que $S_0 e^{rT}$, la posición larga tendría una ganancia igual a $S_0 e^{rT} - K > 0$, sin costo y libre de riesgo. En el otro caso, si K es más grande que $S_0 e^{rT}$, convendría entonces entrar en la posición opuesta, al tomar una posición corta en el contrato forward, se produce de nuevo una ganancia, $K - S_0 e^{rT} > 0$, sin costo y libre de riesgo.

Evidente, mientras los agentes puedan tomar ventaja de estas oportunidades, el mercado no puede estar en equilibrio. Esto equivale a decir que si el mercado ésta en equilibrio, entonces no existen oportunidades de arbitraje y Π_T tiene que ser cero. Por lo tanto, el precio de entrega de equilibrio, K^* , de un contrato Forward satisface

$$K^* = S_0 e^{rT}. \quad (3.3.5)$$

De esta manera, el precio de entrega de equilibrio de la acción, K^* , es proporcional al precio de contado de la acción en el presente, S_0 . El factor de proporcionalidad, e^{rT} , es justamente el valor del dinero en el tiempo. Es también frecuente denotar el precio de entrega de equilibrio, o precio Forward, de la acción en el tiempo $t = 0$ como $F_{0,T}$.

3.3.1. Precio de entrega de Equilibrio de una Acción en cualquier Tiempo.

Con el propósito de obtener el precio de entrega de equilibrio de una acción en cualquier tiempo, el supuesto básico, es que los mercados están en equilibrio y, en consecuencia, no existen oportunidades de arbitraje (libre de riesgo).

Se quiere demostrar que si $F_{t,T}$ es el precio de entrega de equilibrio en el tiempo $t \in [0, T]$, entonces

$$F_{t,T} = S_t e^{r(T-t)}. \quad (3.3.6)$$

Suponga, por el contrario, que $F_{t,T} > S_t e^{r(T-t)}$, entonces un agente podría pedir prestado S_t por un periodo $[t, T]$ a una tasa interés libre de riesgo, r , comprar la acción al tiempo t , e inmediatamente después tomar una posición corta en el contrato Forward con precio de entrega $F_{t,T}$. Así, al tiempo T , el agente entrega la acción a cambio $F_{t,T}$, cumpliendo con el contrato Forward, pagando en este momento el préstamo más los intereses generados, es decir, paga $S_t e^{r(T-t)}$, obteniendo una ganancia, libre de riesgo, dada por:

$$F_{t,T} - S_t e^{r(T-t)} > 0. \quad (3.3.7)$$

En consecuencia, $F_{t,T}$, no puede ser el precio de entrega de equilibrio. Por otro lado, si $F_{t,T} < S_t e^{r(T-t)}$, entonces el agente podría llevar a cabo una venta en corto de la acción y tomar una posición larga en un contrato Forward con precio de entrega $F_{t,T}$.

Es decir, a tiempo t , pide prestada la acción y la vende por S_t , cantidad que presta a la tasa r . En la fecha de vencimiento, T , adquiere la acción por $F_{t,T}$, para devolverla a quien se la prestó. Así, el agente obtiene una ganancia, libre de riesgo,

$$S_t e^{r(T-t)} - F_{t,T} > 0. \quad (3.3.8)$$

Esta oportunidad de arbitraje indica, simplemente que $F_{t,T}$ no puede ser el precio de entrega de equilibrio. Las contradicciones (3.3.7) y (3.3.8) demuestran que $F_{t,T} = S_t e^{r(T-t)}$ es, efectivamente, el precio de entrega de equilibrio de una acción en cualquier tiempo t . Como antes $F_{t,T}$ es también llamado el precio Forward de la acción en t .

3.3.2. Precio de un Forward sobre una Acción.

Con base en estrategias de inversión y condiciones de equilibrio, se valúa un contrato Forward sobre una acción que no paga dividendos durante la vida del contrato. Se supone que el riesgo de incumplimiento de cualquiera de las partes es nulo.

A continuación se demuestra que el valor de un contrato Forward sobre una acción en $t \in [t, T]$, para una posición larga, está dado por

$$V_t = (F_{t,T} - K) e^{-r(T-t)}. \quad (3.3.9)$$

En efecto, se toma primero en $t = 0$ una posición larga sobre un contrato Forward con precio de entrega K y vencimiento T . El precio inicial del contrato es $V_0 = 0$. Sin embargo, inmediatamente después, en $t > 0$, el precio del contrato Forward, V_t , ya no es cero. En dicho tiempo t , se toma una posición corta sobre un contrato Forward con precio de entrega $F_{t,T}$ y vencimiento en T . El valor final de este estrategia es

$$\Pi_T = (S_T - K) + (F_{t,T} - S_T) = F_{t,T} - K. \quad (3.3.10)$$

Por definición, el segundo contrato tiene valor cero para ambas partes. Así, el precio de equilibrio en t , del contrato Forward está dado por el valor presente de (3.3.10), es decir,

$$V_t = (F_{t,T} - K)e^{-r(T-t)}$$

lo que coincide plenamente con (3.3.9). Al transcurrir el tiempo $i, e.,$ cuando $t \in (0, T]$, el precio Forward, $F_{t,T}$, cambia, mientras que el precio de entrega, K , se mantiene constante durante la vida del contrato. En general, el precio forward y el precio de entrega no son iguales en $t \in (t, T]$. La ecuación (3.3.9) se puede escribir, con base en (3.3.6) en forma alternativa como

$$V_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}, t \in (t, T]. \quad (3.3.11)$$

3.4. Valuación de Forward de Tasa de Interés.

Para el pago de intereses de una tasa fija a un nominal preestablecido en un tiempo futuro. Estos contratos son también llamado FRA's por las iniciales en inglés de Forward Rate Agreement.

Un contrato Forward de tasa de interés es un acuerdo en el que una de las partes se compromete a pagar, a la contraparte, la cantidad que se genere al aplicar una tasa de interés a un principal predeterminado entre dos fechas futuras.

Considere un contrato Forward de tasa de interés que se establece en $t = 0$. Sea R_K la tasa de interés acordada y suponga que se cuenta con una estructura de plazos lineal capitalizable $\tilde{R}(t, T)$. Los tiempos futuros entre los que se aplica dicha tasa serán denotados por T_1 y T_2 y el principal por N . Al tiempo T_2 una de las partes tiene que pagar a la contraparte $R_K(T_2 - T_1)N$. Si, al tiempo $t > 0$, la tasa forward de mercado es $\varphi(t, T_1, T_2)$, entonces el valor de dicho contrato Forward, en $t > 0$, se calcula, para la posición larga, mediante

$$V_t = \frac{(\varphi(t, T_1, T_2) - R_K)(T_1 - T_2)N}{1 + \tilde{R}(t, T_2)(T_2 - t)} \quad (3.4.12)$$

La tasa R_K es llamada tasa Forward del contrato, lo cual puede presentar confusión con otros conceptos, *v.g.* la tasa Forward de equilibrio o la tasa constante de contrato. En ocasiones, R_K es también llamada tasa FRA.

3.4.1. Tasa Forward Instantánea.

Uno de los conceptos más importantes en el estudio de modelos de tasas de interés es el de tasa Forward. Considere una inversión de una unidad monetaria en un plazo $T - t$ a una tasa de interés continuamente capitalizable, entonces el retorno (principal más intereses) en este plazo es

$$I(t, T) = \exp\{R(t, T)(T - t)\}$$

Si esta cantidad se reinvierte en el periodo $[T, T + \Delta T]$, el retorno total de la inversión, en $T + \Delta T$, está dado por

$$\begin{aligned} I(t, T, T + \Delta T) &= I(t, T)\exp\{f(t, T, T + \Delta T) \Delta T\} \\ &= \exp\{R(t, T)(T - t)\}\exp\{f(t, T, T + \Delta T) \Delta T\} \end{aligned}$$

donde $f(t, T, T + \Delta T)$ es tasa Forward instantánea referencia en t y defina en $[T, T + \Delta T]$. De la misma manera, el retorno de una unidad monetaria en un plazo $[t, T + \Delta T]$ está dado por

$$J(t, T + \Delta T) = \exp\{R(t, T + \Delta T)(T + \Delta T - t)\}.$$

Si el mercado de este tipo de inversiones está en equilibrio, es decir, si no existen oportunidades de arbitraje para generar ganancias extraordinarias, entonces estas dos alternativas de inversión producen el mismo retorno, así $I(t, T, T + \Delta T) = J(t, T + \Delta T)$, equivalentemente

$$R(t, T)(T - t) + f(t, T, T + \Delta T) \Delta T = R(t, T + \Delta T)(T + \Delta T - t)$$

En consecuencia,

$$-\ln B(t, T) + f(t, T, T + \Delta T) \Delta T = -\ln B(t, T + \Delta T),$$

lo cual implica, a su vez que

$$\frac{B(t, T)}{B(t, T + \Delta T)} = \exp\{f(t, T, T + \Delta T) \Delta T\}.$$

Equivalente,

$$f(t, T, T + \Delta T) = - \left(\frac{\ln B(t, T + \Delta T) - \ln B(t, T)}{\Delta T} \right).$$

La tasa Forward instantánea se define, a partir de la ecuación anterior, como :

$$\begin{aligned} f(t, T) &= \lim_{\Delta T \rightarrow 0} f(t, T, T + \Delta T) \\ &= - \frac{\partial \ln B(t, T)}{\partial T}. \end{aligned}$$

Observe que, en virtud, de esta última

$$\begin{aligned} \int_t^T f(t, s) ds &= - \int_t^T d \ln B(t, s) \\ &= -\ln B(t, T) + \ln B(t, t). \end{aligned}$$

Ahora bien, dado que $B(t, t) = 1$, se sigue que

$$\int_t^T f(t, s) ds = -\ln B(t, T). \quad (3.4.13)$$

En virtud de las dos últimas expresiones para $B(t, T)$, se puede concluir que

$$\begin{aligned} B(t, T) &= \exp \left\{ - \int_t^T f(t, s) ds \right\} \\ &= \exp \left\{ - \left(\frac{1}{T - t} \int_t^T f(t, s) ds \right) (T - t) \right\}. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$B(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)},$$

lo cual implica que

$$R(t, T) = \frac{1}{T - t} \int_t^T F(t, s) ds.$$

De la misma manera, la tasa instantánea r_t o tasa de interés del plazo más corto posible, se define mediante el siguiente límite:

$$r_t = \lim_{T \rightarrow t} R(t, T) \equiv R(t, t).$$

Consecuentemente,

$$\begin{aligned} r_t &= \lim_{T \rightarrow t} R(t, T) = \lim_{T \rightarrow t} \frac{1}{T-t} \int_t^T f(t, s) ds \\ &= \lim_{T \rightarrow t} \left(\frac{1}{T-t} f(t, T)(T-t) + (T-t) \right) \\ &= \lim_{T \rightarrow t} f(t, T) + \lim_{T \rightarrow t} \frac{T-t}{T-t} = f(t, t). \end{aligned}$$

La tasa r_t está asociada con un bono con vencimiento infinitesimal. Es común llamar, simplemente, a r_t como tasa corta. Por supuesto, en los mercados no existe bonos de vencimiento instantáneo. Sin embargo, en la práctica se toma a r_t como la tasa de plazo más pequeño disponible en el mercado.

Por último, se proporciona una relación que permite determinar la tasa forward instantánea, $f(t, T)$, a partir la curva de rendimiento, $R(r, T)$. Para ello, observe primero que la ecuación (3.4.13) puede escribirse como

$$\begin{aligned} \int_t^T f(t, s) ds &= -\ln B(t, T) \\ &= R(t, T)(T-t). \end{aligned}$$

En consecuencia después de derivar la expresión anterior con respecto de T , se sigue que

$$f(t, T) = R(t, T) + (T-t) \frac{\partial}{\partial T} R(t, T).$$

3.5. Contratos Forward tipo de Cambio.

Un inversionista entra en una posición larga de un contrato Forward hoy, en el tiempo t , para pactar el precio de una divisa en términos de la moneda en circulación, es decir, para pactar el tipo de cambio. La primera pregunta que hay que contestar es ¿ Cuánto vale hoy una unidad de la divisa que estará disponible hasta el tiempo T ? la respuesta es simple,

$$\frac{1}{1 + r^*(T-t)},$$

donde r^* representa la tasa de interés extranjera libre de riesgo(3.3). Por lo tanto, el valor en t de la divisa en términos de la moneda doméstica es

$$S_t = \frac{D_t}{1 + r^*(T-t)},$$

donde D_t es el tipo de cambio. En consecuencia, el precio Forward, en términos de la moneda en circulación está dado por

$$F_{t,T} = S_t(1 + r(T-t)) = D_t \left(\frac{1 + r(T-t)}{1 + r^*(T-t)} \right) \quad (3.5.1)$$

donde r es la tasa de interés doméstica libre de riesgo. Observa que el precio del contrato Forward sobre tipo de cambio está dado por

$$V_t = \frac{F_{t,T} - K}{1 + r(T-t)} = \frac{D_t}{1 + r^*(T-t)} - \frac{K}{1 + r(T-t)} = S_t - \frac{K}{1 + r(T-t)}. \quad (3.5.2)$$



Figura 3.3: El caso de un exportador que vende en dólares y tiene costo de ventas en Pesos: Dicho contrato tendrá tres componentes principales: el plazo, el monto y un valor determinado para el tipo de cambio del peso frente al dólar.

Si las tasas son continuamente capitalizables, el tipo de cambio Forward queda representado por

$$F_{t,T} = D_t e^{(r-r^*)(T-t)}$$

y el valor del contrato por

$$V_t = (F_{t,T} - K)e^{-r(T-t)} = S_t - Ke^{-r(T-t)},$$

donde

$$S_t = D_t e^{-r^*(t-t)}.$$

La fórmula (3.5.1) también puede ser obtenida alternativamente como sigue. Suponga que, en t , el agente pide prestado al banco N_t unidades monetarias domésticas. De esta manera, en T , tendrá que pagar

$$N_T = N_t(1 + r(T - t)). \quad (3.5.3)$$

Al tiempo t , el inversionista compra N_t^* unidades monetarias extranjeras con la N_t unidades monetarias domésticas al tipo de cambio D_t . Es decir

$$N_t^* = \frac{N_t}{D_t}. \quad (3.5.4)$$

Esta unidad la deposita en una cuenta bancaria en moneda extranjera durante el periodo $T - t$ a la tasa de interés r^* . Al tiempo T , el inversionista recibirá

$$N_T^* = N_t^*(1 + r^*(T - t)). \quad (3.5.5)$$

En virtud de (3.5.4), la expresión anterior se puede escribir como

$$N_T^* = \frac{N_t}{D_t}(1 + r^*(T - t)). \quad (3.5.6)$$

Supongamos ahora que en t , el agente también toma una posición corta en un contrato forward sobre la moneda extranjera en cuestión con vencimiento en T , y por un monto de N_T^* , unidades extranjeras. Suponga que el tipo de cambio pactado es K , con lo cual al vencimiento del contrato el agente recibe

$$M_T = N_T^*K \quad (3.5.7)$$

unidades monetarias domésticas. El tipo de cambio de entrega de equilibrio, $F_{t,T}$, es tal que $M_T = N_T$. En efecto, si $M_T > N_T$, entonces el agente paga al banco N_T y tiene una ganancia

libre de riesgo $M_T - N_T > 0$. Si $M_T < N_T$, el agente sólo invierte en el banco. Por lo tanto, la condición de equilibrio, $M_T = N_T$, conduce a

$$\frac{N_t}{D_t}(1 + r^*(T - t))F_{t,T} = N_t(1 + r(T - t)).$$

lo cual implica

$$F_{t,T} = D_t \left(\frac{1 + r(T - t)}{1 + r^*(T - t)} \right).$$

Este resultado coincide con (3.5.1)

3.6. Conceptos Básicos de Bonos Cupón Cero.

Un bono cupón cero es una promesa de pago (impersonalizada) en la que el emisor se compromete a pagar incondicionalmente una cantidad preestablecida, el valor nominal (o principal), en una fecha futura, la cual será referida como vencimiento del título. El interesado, en adquirir este pagaré entrega una cantidad inicial que se paga por este certificado es menor que la cantidad que se recibe al vencimiento, es decir, se compra a descuento.

Cabe destacar que el propietario de este tipo de instrumentos se encuentra expuesto al riesgo de incumplimiento por parte del emisor. Sin embargo, pero se supondrá que los cupones son libres de riesgos. Así, si el tenedor de un bono cupón cero requiere liquidez antes del vencimiento desea vender este certificado, entonces estará sujeto al riesgo de mercado. Por supuesto, si se espera a la fecha de vencimiento para recibir la cantidad prometida, el riesgo de mercado será inexistente.

3.6.1. Valuación con Interés Simple.

El precio, al tiempo t , de un bono cupón cero que paga una unidad monetaria al vencimiento T será denotado por $B(t, T)$ es rendimiento al vencimiento, $L(t, T)$ es unidad de tiempo, se define como

$$L(t, T) = \frac{1 - B(t, T)}{B(t, T)} \frac{1}{T - t}, \quad t < T \quad (3.6.8)$$

equivalentemente,

$$B(t, T) = \frac{1}{1 + L(t, T)(T - t)} \quad t \leq T. \quad (3.6.9)$$

En este último caso, $L(t, T)$ puede verse como la tasa (anual) del interés del plazo $T - t$ asociada a $B(t, T)$. La diferencia $T - t$, en (3.6.9), se interpreta como la proporción de año a la que se aplica la tasa anual $L(t, T)$. Por último, observe que en la ecuación (3.6.9), la tasa $L(t, T)$ actúa como una tasa de interés simple en el cálculo del valor presente de una unidad monetaria disponible hasta T .

Se supone que el emisor cumplirá sus obligaciones y el tenedor del bono lo mantiene hasta la fecha de vencimiento, entonces $L(t, T)$ puede verse como una tasa de plazo $T - t$ anual y libre de los riesgos de incumplimiento y de mercado. Por supuesto, si el tenedor del instrumento tiene necesidad de liquidez y recurre al mercado para vender el título de deuda en una fecha $\tau \in (t, T)$, entonces quedará expuesto al riesgo mercado. si muchos tenedores de bonos comparten la necesidad de liquidez y quieren deshacerse de su bono, en el tiempo τ , antes del vencimiento, T , entonces el precio, $B(t, T)$, disminuirá (existe un exceso de oferta) y la tasa $L(\tau, T)$, aumentará ya que

$$L(\tau, T) = \left(\frac{1}{B(\tau, T) - 1} \right) \frac{1}{\tau}, \quad t \leq \tau \leq T.$$

Recíprocamente, si pocos tenedores de bonos comparten la necesidad de liquidez y quienes mantener sus bonos hasta el vencimiento (existe un exceso de demanda), entonces el precio, $B(\tau, T)$, aumentará y la tasa, $L(\tau, T)$, disminuirá.

3.6.2. Tasa de Descuento.

Se introduce el concepto de tasa de descuento de un bono cupón cero. Si el bono se vende a una tasa (anual) de descuento, $D(t, T)$, entonces se puede escribir

$$B(t, T) = 1 - D(t, T)(T - t) \quad (3.6.10)$$

De esta manera, al combinar (3.6.9) con (3.6.10), se sigue que

$$1 - D(t, T)(T - t) = \frac{1}{1 + L(t, T)(T - t)}. \quad (3.6.11)$$

Por lo tanto, si $L(t, T)$ es conocida, entonces a partir de la ecuación anterior se determina $D(t, T)$ y viceversa.

3.6.3. Valuación con Interés Continuumamente Capitalizable.

El precio de un bono cupón cero, $B(t, T)$, que se coloca en t y que paga una unidad monetaria al vencimiento T , con tasa de interés continuamente capitalizable al vencimiento en T , $R(t, T)$, se define como:

$$B(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}, \quad t \leq T. \quad (3.6.12)$$

De esta manera, el rendimiento obtenido en el intervalo $[t, T]$ satisface:

$$R(t, T) = \frac{-\ln B(t, T)}{T - t}, \quad t \leq T.$$

La ecuación (3.6.12) se puede justificar como el límite de la aplicación de $L(t, T)$ en intervalos de tiempo que cada vez se hacen mas pequeños. En efecto, suponga primero que $T - t = 1$ (vencimiento en un año), entonces la aplicación de la fórmula de interés compuesto en n subintervalos, de igual longitud, conduce a

$$\left(\frac{1}{1 + \frac{L(t, T)}{n}} \right)^n \rightarrow e^{-L(t, T)}$$

cuando $n \rightarrow \infty$. Si el vencimiento $T - t$ es arbitrario, se sigue que

$$\left(\frac{1}{1 + \frac{L(t, T)(T-t)}{n}} \right)^n \rightarrow e^{-L(t, T)(T-t)} \quad (3.6.13)$$

cuando $n \rightarrow \infty$. Lo anterior equivale a que se aplique $L(t, T)$ en $[t, T]$ y, posteriormente, se subdivide este intervalo en un número infinito de subintervalos de la misma longitud. Observe también que si se utiliza la aproximación $e^x \approx 1 + x$ válida para x suficientemente pequeña ($e^x = 1 + x + (x^2/2!) + (x^3/3!) + \dots$), se tiene que

$$\frac{1}{1 + L(t, T)(T - t)} \approx e^{-L(t, T)(T-t)} \quad (3.6.14)$$

es válida cuando $L(t, T)(T - t)$ es suficientemente pequeña. Es importante hacer una aclaración esencial con respecto de la fórmula (3.6.13). Cuando se aplica interés simple durante $[t, T]$, se supone que no hay pagos intermedios durante dicho periodo. Para destacar esta distinción, en lugar de escribir $L(t, T)$ en el exponente de e , se utilizará $R(t, T)$ cuando se haga diferencia a una tasa de interés continuamente capitalizable.

3.6.4. Valuación de Bonos con Especificación de la Tasa Corta.

Es importante destacar que muchos de los modelos que se encuentran en la literatura para valuar bonos utilizan una especificación exógena sobre el comportamiento de la tasa corta, es decir, especifican exógenamente una ecuación diferencial que determina la dinámica de r_t .

Si se supone que hay un mercado de crédito en el que los agentes pueden prestar y pedir prestado a la tasa corta, r_t , entonces si se presta unidad monetaria en t , $M_t = 1$, el cambio en la cuenta de este mercado de dinero durante d_s está dado por

$$dM_s = M_s r_s d_s \quad t < s. \quad (3.6.15)$$

La cuenta acumulada en este mercado de dinero hasta el tiempo s , denotada por M_s , es la solución de la ecuación diferencial anterior,

$$M_s = 1 \exp \left\{ \int_t^s r_u du \right\} \quad (3.6.16)$$

En otras palabras, la tasa r_s es aplicada en forma continua al principal, o alternativamente,

$$M_s = \exp \left\{ \left(\frac{1}{s-t} \int_t^s r_u du \right) (s-t) \right\}, \quad (3.6.17)$$

es decir, el promedio de la tasa durante $[t, s]$ es aplicada al principal. Si no existen oportunidades de arbitraje entre el mercado de crédito con tasa r_t y el mercado de títulos de deuda de plazo T , entonces el precio de un bono cupón cero, que paga una unidad monetaria al vencimiento, está dado por

$$B(t, T) = \exp \left\{ - \int_t^T r_s ds \right\}. \quad (3.6.18)$$

Es equivalente

$$B(t, T) = \exp \left\{ \left(\frac{1}{T-t} \int_t^T r_s ds \right) (T-t) \right\}. \quad (3.6.19)$$

De esta manera, el precio del bono $B(t, T)$ se descuenta a la tasa corta promedio durante $[t, T]$. Si se denota

$$R(t, T) = \frac{1}{T-t} \int_t^T r_s ds,$$

entonces (3.6.19) se puede escribir como

$$B(t, T) = \exp \{ -R(t, T)(T-t) \} \quad (3.6.20)$$

lo que implica $B(t, t) = B(T, T) = 1$.

3.6.5. Tasa Corta de interés de Comportamiento Exponencial.

Suponga que la dinámica de la tasa corta, r_s , dado valor inicial $r_t > 0$, es conducida por la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dr_s}{D_s} = -ar_s, \quad r_t \text{ dado} \quad s > t.$$

En este caso, la solución de la ecuación anterior satisface

$$r_s = r_t e^{-a(s-t)}, \quad s > t > 0.$$

Es fácil verificar que la estructura de plazos está dada por

$$\begin{aligned} R(t, T) &= \frac{1}{T-t} \int_t^T r_s ds \\ &= \frac{r_t e^{at}}{T-t} \int_t^T e^{-as} ds \\ &= r_t \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a(T-t)} \right). \end{aligned}$$

3.6.6. Tasa de Interés con Convergencia a un Valor de Largo Plazo.

Se examina un modelo de tendencia de una tasa corta con convergencia hacia un valor, b , de largo plazo. Suponga que la tasa corta es conducida por una ecuación diferencial (ordinaria) de la forma

$$\frac{dr_s}{ds} = -ar + ab = a(b - r_s), \quad s \geq t, \quad r_t \geq 0 \quad \text{dada,}$$

donde a y b son constantes positivas y conocidas. La solución de la ecuación diferencial anterior está dada por

$$\begin{aligned} r_s &= r_t e^{-a(s-t)} + e^{-a(s-t)} \int_t^s e^{a(u-t)} ab du \\ &= r_t e^{-a(s-t)} + e^{-a(s-t)} b (e^{a(s-t)} - 1) \\ &= (r_t - b) e^{-a(s-t)} + b. \end{aligned}$$

En este caso, se sigue, inmediatamente, que $\lim_{s \rightarrow \infty} r_s = b$, lo cual determina el valor de largo plazo de la tasa corta. Así mismo, observe también que la estructura de plazos (o curva de rendimiento) satisface

$$\begin{aligned} R(t, T) &= \frac{1}{T-t} \int_t^T r_s ds \\ &= \frac{1}{T-t} \left\{ \int_t^T [(r_t - b) e^{-a(s-t)} + b] ds \right\} \\ &= \frac{r_t - b}{T-t} \int_t^T e^{-a(s-t)} ds + b \\ &= \frac{r_t - b}{(T-t)a} (1 - e^{-a(T-t)}) + b \\ &= \frac{r_t - b}{T-t} \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right) + b. \end{aligned}$$

Esta ecuación se puede también escribir como

$$R(t, T) = \frac{D(t, T)r_t}{T-t} - \frac{A(t, T)}{T-t},$$

donde

$$D(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}$$

y

$$A(t, T) = -b(T-t) + \frac{b}{a} (1 - e^{-a(T-t)}).$$

Instrumentos de deuda	Plazos	Tasa
CETES (Certificados de la Tesorería)	28,91,180 y 360 días	Tasa de descuento.
Bonos M	Largo plazo, que puede alcanzar los 30 años	Tasa de interés fija.
UDIBONOS	3,10,20 y 30 años	Tasa Real, paga unos puntos más que la inflación (alza generalizada de precios en bienes y servicios)
Certificados Bursátiles	Corto y largo plazo	Tasa de interés en pesos y moneda extranjera.

Figura 3.4: El bono al vencimiento y descuento que se coloca a valor nominal, el precio inicial y al vencimiento es el mismo, al momento de su vencimiento se pagará el capital más el interés pactado; de este tipo de instrumentos.

3.7. Valor del Dinero en el Tiempo.

Uno de los conceptos fundamentales en finanzas es el valor del dinero en el tiempo. Si hoy, al tiempo t , se cuenta con M_t unidades monetarias, son varias las cosas que se pueden hacer con ese dinero; por ejemplo, se puede guardar en una alcancía o depositar en una cuenta de ahorro. En el último caso, el banco regresaría posteriormente, en T , el principal, M_t , más una cantidad adicional, $\Delta M_t > 0$, conocida como el interés. Si se supone que la tasa de interés que paga el banco es constante e igual a r y M_0 es el depósito inicial, entonces el interés a un año es $\Delta M_0 = rM_0$ y el retorno de la inversión (capital más intereses), M_1 , calculado con interés simple al final del año está dado por

$$M_1 = M_0 + \Delta M_0 = M_0 + rM_0 = M_0(1 + r) \quad (3.7.21)$$

Si se aplica la fórmula de interés compuesto a dos años, entonces el retorno de la inversión al final del segundo año está dado por:

$$\begin{aligned}
 M_2 &= M_0 + \Delta M_0 + \Delta(M_0 + \Delta M_0) \\
 &= M_0(1 + r) + \Delta(M_0(1 + r)) \\
 &= M_0(1 + r) + rM_0(1 + r) \\
 &= M_0(1 + r)(1 + r) \\
 &= M_0(1 + r)^2.
 \end{aligned} \quad (3.7.22)$$

En general, para n años, cumple que

$$M_n = M_0(1 + r)^n \quad (3.7.23)$$

se supone ahora que durante el intervalo $[t, s]$, $s \leq T$, se realizan m pagos de interés en m períodos de longitud $(s - t)/m$ a una tasa de $r(s - t)/m$. En este caso, al final $[t, s]$ se tendrá

un retorno igual a:

$$M_s = M_t \left(1 + \frac{r(s-t)}{m} \right)^m \quad (3.7.24)$$

Si la frecuencia de estos m pagos de interés durante el año se incrementa y , en consecuencia, la longitud de los períodos de pago disminuye, entonces

$$M_s \rightarrow M_t e^{r(s-t)}, \quad (3.7.25)$$

cuando $m \rightarrow \infty$, ya que $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + (x/n))^n = e^x$. En ese caso, el lado derecho de (3.7.25) representa el retorno (capital más intereses) después de un periodo de tiempo de longitud $s-t$, a una tasa de interés continuamente capitalizable r .

Una forma alternativa de obtener (3.7.25) consiste en utilizar ecuaciones diferenciales. Si se supone que invierte una cantidad M_s al tiempo s , el incremento en M_s después de un tiempo d_s se calcula como

$$dM_s = r M_s ds, \quad M_t \text{ conocida}$$

, equivalente a

$$\frac{dM_s}{M_s} \frac{1}{d_s} = r, \quad M_t \text{ conocida.}$$

En otras palabras, el rendimiento instantáneo de la inversión, por unidad de tiempo d_s , es constante e igual a r . La solución de esta ecuación diferencial satisface

$$M_s = M_t e^{r(s-t)}, \quad s \geq t. \quad (3.7.26)$$

De esta manera, las ecuaciones (3.7.25) ó (3.7.26) relacionan el valor que tiene el dinero hoy t , con su valor en un tiempo futuro, s . Así, M_s proporciona el valor futuro de M_t . Recíprocamente, si M_s estará disponible hasta T , entonces su valor presente M_t , en $t < T$, está dado por

$$M_t = M_s e^{-r(s-t)}.$$

Capítulo 4

Estimación de Curvas de Rendimiento

En el ajuste a la curva de rendimientos ha sido investigada a través del estudio de diferentes formas funcionales que permiten obtener los distintos perfiles de la curva de rendimientos. Así, se describen a continuación algunos de los modelos que podemos considerar, son explicativos de este tipo de ajustes para activos libres de riesgos que pagan cupón. Estos modelos pueden resumirse según el métodos matemáticos utilizados: Núcleos de suavización, las aproximaciones polinomiales, como las funciones Splines cúbicos y el modelo de Nelson y Siegel.

4.1. Estimación No Paramétrica: Núcleos de Suavización.

4.1.1. Precios y Rendimientos Observados

Se considerando N precios observados de bonos con vencimiento $T_1 < T_2 < \dots, < T_j < \dots < T_N$. El plazo al vencimiento $T_j - t$ es expresado como proporción de un año. El bono con vencimiento en T_j , se le llamará bono j . Sea $R_{tj}^{(i)}$ la tasa de rendimiento observados en la operación i , con el bono $j, i = 1, 2, \dots, ij$.

4.1.2. Ponderación por Volumen de los Rendimientos Observados

si $V_{tj}^{(i)}$ es el volumen de operación i , entonces una tasa de rendimientos representada para cada plazo, ponderado por volumen, mediante la ecuación (4.1.1)

$$R_{rj} = \frac{\sum_i R_{tj}^{(i)} V_{tj}^{(i)}}{\sum_i V_{tj}^{(i)}}. \quad (4.1.1)$$

4.1.3. Criterios Local de Estimación

Sé necesita encontrar un estimador $R(t, T)$ de la curva de rendimiento tal que

$$R(t, T_j) = R_{tj} + \xi_{tj}, \quad E[\xi_{tj}] = 0. \quad (4.1.2)$$

Considere el siguiente criterio local para obtener un estimador $R(t, T)$ para distintos plazos T , que consiste con ecuación (4.1.2): **Minimizar**

$$Q_N(R(t, T)) = \sum_{j=1}^N w_j(T) (R(t, T) - R_{rj})^2 \quad (4.1.3)$$

Las ponderaciones $w_j(T)$ se toman de tal manera que éstas sean pequeñas cuando T se encuentra lejos de T_j . La solución $R(t, T)$ que satisface la condición de primer orden está dada por:

$$\tilde{R}(t, T) = \frac{\sum_{j=1}^N w_j(T) R_{tj}}{\sum_{j=1}^N w_j(T)} \quad (4.1.4)$$

4.1.4. Suavización con Kernels

El método de estimación no paramétrica de curvas de rendimiento con núcleos o kernel es suavizar en cualquier función de densidad simétrica $K(w)$, es decir, $K(w) \geq 0, K(w) = K(-w)$ y

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(w) = 1.$$

Las ponderaciones se determinan de acuerdo con

$$w_j(T) = \frac{K[(T - T_j)/h_j]}{h_j} \quad (4.1.5)$$

El figura (4.1) presenta algunas funciones kernel útiles en la práctica.

Figura 4.1: Funciones típicas de kernel

Uniforme	$\frac{1}{2}, w \in [-1, 1]$
Epanechnikov	$\frac{3}{4}(1-w^2), w \in [-1, 1]$
A la cuarta	$\frac{15}{16}(1-w^2)^2, w \in [-1, 1]$
Momento nulo	$\frac{1}{4}(9 - 15w^2), w \in [-1, 1]$
Gaussiana	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}w^2}, w \in (-\infty, \infty)$

4.1.5. Suavización con Kernel Normal

Frecuentemente ,en la práctica, se elige kernel normal

$$K(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-w^2/2}.$$

En este caso, las ponderaciones están dadas por

$$w_j(T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}h_j} e^{-(T-T_j)^2/2h_j^2}. \quad (4.1.6)$$

Nos encontramos, $w_j(T)$ es una densidad normal con media T_j y varianza h_j^2 . Valores pequeños de h_j mejoran el ajuste, pero reducen la suavización, y valores grandes de h_j empeoran el ajuste, pero incrementa la suavización. De esta manera, el ancho de banda h_j determina el grado de suavización de la estimación. En este caso, la regla empírica que se sigue para establecer el ancho de banda es

$$h_j = A(1 - e^{-CT_j}),$$

donde A y C son constantes positivas, usualmente se utilizan

$$A \geq 10$$

y

$$C = A^{-2}.$$

Entonces, el estimador de la tasa de rendimiento para cada plazo, T está dado, de acuerdo con (4.1.4) y (4.1.5), por la siguiente fórmula:

$$\tilde{R}(t, T) = \frac{\sum_{j=1}^N R_{tj} K[(T - T_j)/h_j] h_j^{-1}}{\sum_{j=1}^N K[(T - T_j)/h_j] h_j^{-1}}. \quad (4.1.7)$$

Una vez estimadas las tasas de rendimiento para cada bono cupón cero que al vencimiento paga una unidad monetaria, se calculan los precios correspondientes utilizando la siguiente relación:

$$\tilde{B}(t, T) = e^{-\tilde{R}(t, T)(T-t)}. \quad (4.1.8)$$

Homologación de los distintos plazos concentradas en la fecha base, pero con liquidación posterior

Usualmente, se concentra una operación de compra de bonos para liquidarse días después. Para hacer comparables las tasas de rendimiento de las operaciones con diferentes fechas de liquidación con respecto a la fecha base t , se utiliza un procedimiento de homologación que se describe a continuación. Sea $T_j - \tau$ el plazo entre las fechas de vencimiento del título y de concentración de la operación y $\tau - t$ el plazo más pequeño disponible en el mercado. La tasa de rendimiento homologada, $\tilde{R}_{tj}^{(i)}$, se obtiene mediante la siguiente relación

$$\tilde{R}_{tj}^{(i)} = \frac{r_t(\tau - t) + R_{tj}^{(i)}(T_j - \tau)}{T_j - t}. \quad (4.1.9)$$

una vez homologadas las tasas de rendimiento, se obtienen las tasas de rendimiento ponderadas por volumen para cada una de los distintos plazos operados mediante (4.1.1) y, posteriormente, se utiliza (4.1.7) para calcular el estimador de la curva de rendimiento.

4.1.6. Aplicación del Método de suavización con kernel

Es la estimación No Paramétrica de curvas de rendimiento de los bonos cupón ceros con el método de suavización de kernels. La muestra los datos de tasas de Cetes en operaciones del día 26 de abril del 2017¹. Los datos de mercado se presentan en el la Figura (4.2) muestra la curva de rendimientos estimada con $A=10$ y $C = 0.01$.

Considere el siguiente criterio global para obtener un estimador $R(t, T)$ para todos distintos plazos T :

Minimizar

$$Q_N(R) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} w_j(s) (R(r, s) - R_{tj})^2 ds. \quad (4.1.10)$$

¹Los datos se tomaron del archivo de curvas de Valmer; el proveedor de precios. En esta dirección se muestran las tasas observadas <http://www.valmer.com.mx/es/>

Figura 4.2: Observaciones de Rendimientos Cetes

CETES	FECHA	25/04/2017
PLAZOS	HOY	AYER
1	0.065	0.065
28	0.0652	0.0652
91	0.0668	0.0668
182	0.0683	0.0682
364	0.0699	0.0699

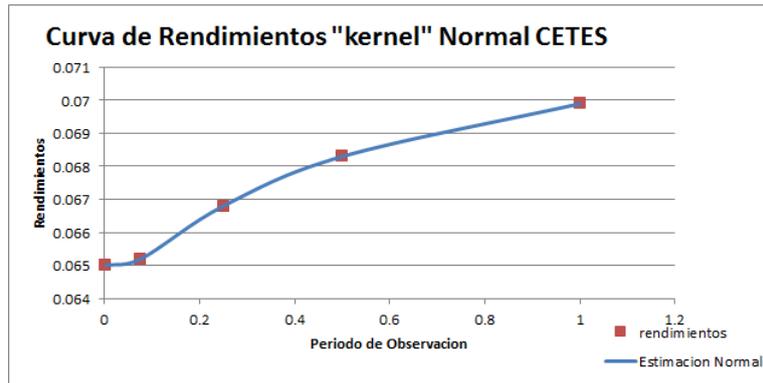


Figura 4.3: Curva de rendimientos estimada con kernel normal esta representada con azul y los puntos rojos son datos observados.

En particular, si las ponderaciones, $w_j(s)$, se eligen como

$$w_j(s) = \delta_T(s) \frac{K[(s - T_j)/h_j]}{h_j}, \quad (4.1.11)$$

donde $\delta_T(s)$ es la función generalizada Delta de Dirac, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_T(s) K[(s - T_j)/h_j] h_j^{-1} ds = K[(T - T_j)/h_j] h_j^{-1}.$$

Así la solución $\tilde{R}(t, T)$ que se obtiene de la condición de primer orden en (4.1.10), coincide con la solución del criterio local en (4.1.4).

4.2. Estimación con Splines Cúbicos

La técnica de Splines Cúbicos se basa en la utilización de una aproximación polinomial, desde un punto de vista del análisis numérico, es una aproximación ha un intervalo, con un error arbitrario elegido, por algún polinomio definido en ese intervalo.

Las funciones polinomiales se han utilizado ampliamente en la investigación econométrica. Cuando en el modelo solo hay regresores correspondientes a una función polinomial. La forma general del modelo polinomial de grado k puede expresarse como

$$y = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2 + \dots + \beta_k x^k + u$$

Los modelos cúbicos se utilizan muy a menudo en economía aplicada para captar variaciones en los efectos marginales, particularmente en las funciones de costes.

4.2.1. Estimación Polinomial

Los métodos de estimación polinomial, son una estructura de plazos, que utilizan polinomios de tercer grado, se le conoce como el método de Spline Cúbicos que satisface un criterio general de suavización. En consecuencia, suponga que la curva de rendimiento asociada a un bono cupón cero de precio $B(t, T)$ es de la siguiente forma:

$$R(\tau) = a + b\tau + c\tau^2 + d\tau^3, \quad \tau = T - t. \quad (4.2.1)$$

De esta manera, el precio de un bono cupón cero se calcula mediante la expresión

$$B(\tau) = e^{-R(\tau)\tau}.$$

Asimismo la tasa Forward (instantánea) continua, satisface la relación

$$f(\tau) = -\frac{\partial \ln B(\tau)}{\partial \tau}$$

En vista de la ecuación anterior, se sigue que el precio, $B(\tau)$, de un bono cupón cero de plazo τ está dado por

$$B(\tau) = \exp\left\{-\int_{\tau_0}^{\tau} f(s)ds\right\}.$$

Así, el precio del bono cupón cero se puede reescribir como:

$$B(\tau) = e^{-a\tau - b\tau^2 - c\tau^3 - d\tau^4}.$$

En este caso, la tasa Forward satisface

$$\begin{aligned} f(\tau) &= R(\tau) + \tau R'(\tau) \\ &= a + b\tau + c\tau^2 + d\tau^3 + \tau(b + 2c\tau + 3d\tau^2) \\ &= a + 2b\tau + 3c\tau^2 + 4d\tau^3. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$f'(\tau) = 2R'(\tau) + \tau R''(\tau)$$

y

$$f''(\tau) = 3R''(\tau) + \tau R'''(\tau).$$

Estas condiciones determinan la diferencia de la tasa forward en términos de las derivadas de la curva de rendimientos. Observa que el orden de las derivas de $f(\tau)$ es menor en uno que las de $R(\tau)$.

4.2.2. Suavizar la Curva de Rendimiento.

Se supone que, al tiempo t , se conocen los rendimientos, $R_{t_0}, R_{t_1}, \dots, R_{t_N}$, de un bono cupón cero a diferentes plazos, T_0, T_1, \dots, T_N . Sea $\tau_i = T_i - t, i = 1, \dots, N$, se desea ajustar una función

$$R_i(\tau) = a_i + b_i\tau + c_i\tau^2 + d_i\tau^3, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.2.2)$$

en cada intervalo $[\tau_{i-1}, \tau_i]$, que se cumpla en los puntos extremos que $R_1(\tau_0) = R_{t_0}$ y $R_N(\tau_N) = R_{t_N}$. De tal forma que se tienen N funciones con un total de $4N$ incógnitas por determinar. En otras palabras, se requiere determinar a_i, b_i, c_i , y d_i para cada uno de los intervalos $[\tau_{i-1}, \tau_i]$, donde $i = 1, \dots, N$, definidos mediante los N puntos de mercado. Estas ecuaciones se evalúan en los puntos extremos de cada intervalos, con lo cual se tiene que

$$R_{t,i-1}(\tau) = a_i + b_i\tau_{i-1} + c_i\tau_{i-1}^2 + d_i\tau_{i-1}^3, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.2.3)$$

y

$$R_{t,i}(\tau) = a_i + b_i\tau_i + c_i\tau_i^2 + d_i\tau_i^3, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.2.4)$$

lo cual produce $2N$ ecuaciones. Por lo tanto, es necesario incorporar ecuaciones adicionales a fin de tener $4N$ ecuaciones con $4N$ incógnitas.

Para completar el sistema de ecuaciones a partir de la información que se observa del mercado, se procede como sigue. Primero, se fijan los puntos extremos de la aproximación con $R_1(\tau_0) \equiv R_{t_0}$ y $R_N(T_N) \equiv R_{t_N}$. Posteriormente, la primera derivada de $R_i(\tau)$ se iguala a la de $R_{i+1}(\tau)$ en los $N - 1$ puntos de mercado correspondientes a $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{N-1}$, es decir,

$$b_i + 2c_i\tau_i + 3d_i\tau_i^2 - b_{i+1} - 2c_{i+1}\tau_i - 3d_{i+1}\tau_i^2 = 0, \quad i = 1, \dots, N - 1 \quad (4.2.5)$$

De la misma manera, la segunda deriva de $R_i(\tau)$ se iguala a la de $R_{i+1}(\tau)$ en los $N - 1$ puntos de mercado correspondientes a $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}$, así

$$2c_i + 6d_i\tau_i - 2c_{i+1} - 6d_{i+1} = 0, \quad i = 1, \dots, N - 1 \quad (4.2.6)$$

Esto nos da ahora $4N - 2$ ecuaciones con $4N$ incógnitas. Por lo tanto, se necesita dos ecuaciones más para completar el sistema. La primera ecuación, por lo general, siempre será escogida de tal forma que la curva de rendimiento se instantáneamente recta $R''(\tau_0) = 0$ en el lado izquierdo de la curva de rendimiento, es decir,

$$2c_1 + 6d_1\tau_0 = 0. \quad (4.2.7)$$

Mientras el lado derecho de la curva de rendimiento ofrece la oportunidad de imponer otra restricción. Existen dos opciones, una puede ser que la curva de rendimiento sea plana $R'_N(\tau_N) = 0$ (frontera sujeta), o que la curva de rendimiento sea instantáneamente recta $R''_N(\tau_N) = 0$ (Frontera libre o natural) para los vencimientos a futuro. Por lo que se puede seleccionar una de las siguientes ecuaciones para completar el sistema:

$$b_N + 2c_N\tau_N + 3d_N\tau_N^2 = 0 \quad (4.2.8)$$

ó

$$2c_N + 6d_N\tau_N = 0 \quad (4.2.9)$$

lo anterior hace que se tengan $4N$ ecuaciones con $4N$ incógnitas. Una característica importante de este sistema es que todas las ecuaciones son lineales en (a_i, b_i, c_i, d_i) .

4.2.3. Limitaciones del uso de Splines para la Tasa Forward

El método desarrollado, tiene limitaciones, las cuales se resumen a continuación. Observe, primero, que cada punto de mercado está asociado con un rendimiento y que las dos primeras derivadas con respecto al plazo son iguales para cada polinomio que comienza y termina en cada punto de mercado, es decir,

$$R_i(\tau_i) = R_{i+1}(\tau_i)$$

$$R'_i(\tau_i) = R'_{i+1}(\tau_i)$$

y

$$R''_i(\tau_i) = R''_{i+1}(\tau_i).$$

En tiempo continuo, la tasa Forward instantánea $f(\tau)$ puede ser escrita como

$$f(\tau) = R(\tau) + \tau R'(\tau).$$

Por lo tanto, las dos primeras derivadas de $f(\tau)$ en términos de las derivadas de $R(\tau)$ satisfacen

$$f'(\tau) = 2R'(\tau) + \tau R''(\tau)$$

$$f''(\tau) = 3R''(\tau) + \tau R'''(\tau).$$

Así, en cada punto de mercado se tiene que

$$f_i(\tau_i) = f_{i+1}(\tau_i)$$

y

$$f'_i(\tau_i) = f'_{i+1}(\tau_i).$$

Sin embargo, en general,

$$f''_i(\tau_i) \neq f''_{i+1}(\tau_i).$$

Es decir, la segunda derivada de la curva de tasas Forward no es igual en los puntos de mercado ya que no hemos restringido $R'''(\tau)$ en los puntos de mercado. Esto nos lleva a los dos principales problemas asociados con el uso de Splines Cúbicos para rendimientos:

- (i) la curva de tasas Forward no es dos veces diferencial en los puntos de mercado, por lo que no es suave. la primera curva de tasas Forward puede tener picos en sus puntos de mercado.
- (ii) las curvas de tasa Forward asociadas con los "splines" cúbicos basados en la curva de rendimiento puede producir curvas de tasas Forward que no son plausibles.

4.2.4. Una aplicación de Splines cúbicos para la Estimación de una curva de Rendimiento

Se usara la misma información del ejemplo anterior (4.2). En este caso el método Splines conducen al siguiente sistema de 16 ecuaciones con 16 incógnitas.

$$\begin{aligned}
 a_1 + b_1 + c_1 + d_1 &= 0,065 \\
 a_1 + 28b_1 + 784c_1 + 21952d_1 &= 0,0652 \\
 a_2 + 28b_2 + 784c_2 + 21952d_2 &= 0,0652 \\
 a_2 + 91b_2 + 8281c_2 + 753571d_2 &= 0,068 \\
 a_3 + 91b_3 + 8281c_3 + 753571d_3 &= 0,068 \\
 a_3 + 182b_3 + 33124c_3 + 6028568d_3 &= 0,0683 \\
 a_4 + 182b_4 + 33124c_4 + 6028568d_4 &= 0,0683 \\
 a_4 + 364b_4 + 132496c_4 + 48228544d_4 &= 0,0699 \\
 b_1 + 56c_1 + 2352d_1 - b_2 - 56c_2 - 2352d_2 &= 0 \\
 b_2 + 182c_2 + 24843d_3 - b_3 - 182c_3 - 24843d_3 &= 0 \\
 b_3 + 364c_3 + 99372d_3 - b_4 - 364c_4 - 99372d_4 &= 0 \\
 56c_1 + 168d_1 - 56c_2 - 168d_2 &= 0 \\
 182c_2 + 546d_2 - 182c_3 - 546d_3 &= 0 \\
 364c_3 + 1092d_3 - 364c_4 - 1092d_4 &= 0 \\
 2c_1 + 6d_1 &= 0 \\
 364c_3 + 1092d_3 &= 0
 \end{aligned}$$

Si se denota

$$x = (a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2, a_3, b_3, c_3, d_3, a_4, b_4, c_4, d_4)^T$$

$$y = (0,065, 0,0652, 0,0652, 0,068, 0,068, 0,0683, 0,0683, 0,0699, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

y se definen las siguientes matrices

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 28 & 784 & 21952 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 28 & 784 & 21952 \\ 1 & 91 & 8281 & 753571 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 91 & 8281 & 753571 \\ 1 & 182 & 33124 & 6028568 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad F_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 182 & 33124 & 6028568 \\ 1 & 364 & 132496 & 48228544 \end{pmatrix}$$

$$F_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 56 & 2352 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 56 & 168 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad F_6 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -56 & -2352 \\ 0 & 1 & 182 & 24843 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -56 & -168 \\ 0 & 0 & 182 & 546 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -182 & -24843 \\ 0 & 1 & 364 & 99372 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -182 & -546 \\ 0 & 0 & 364 & 1092 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad F_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -364 & -99372 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -364 & -1092 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 364 & 1092 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \\ F_5 & F_6 & F_7 & F_8 \end{pmatrix}$$

entonces el sistema se puede reescribir como $Ax = b$. La solución de este sistema se presenta en (4.4)

Figura 4.4: Vector de solución

i	a_i	b_i	c_i	d_i
1	0.065006022788853	-0.000005985892709	-0.000000055344215	0.000000018448072
2	0.064285911061204	0.000031863645537	-0.000000003353091	0.000000001117697
3	0.060114794597188	0.000100234208241	0.000000005088761	-0.000000001696254
4	0.087218952472487	-0.000122532910761	-0.000000001711212	0.000000000570404

La Figura (4.5) muestra los polinomios $R_i(\tau), i = 1, 2, 3, 4$, que se ajustan a los precios de mercado. Los cuatro segmentos de los polinomios que se aprecian en la taches azul de la gráfica representan tres segmentos de polinomios a fin de resaltar la curva estimada de rendimiento.

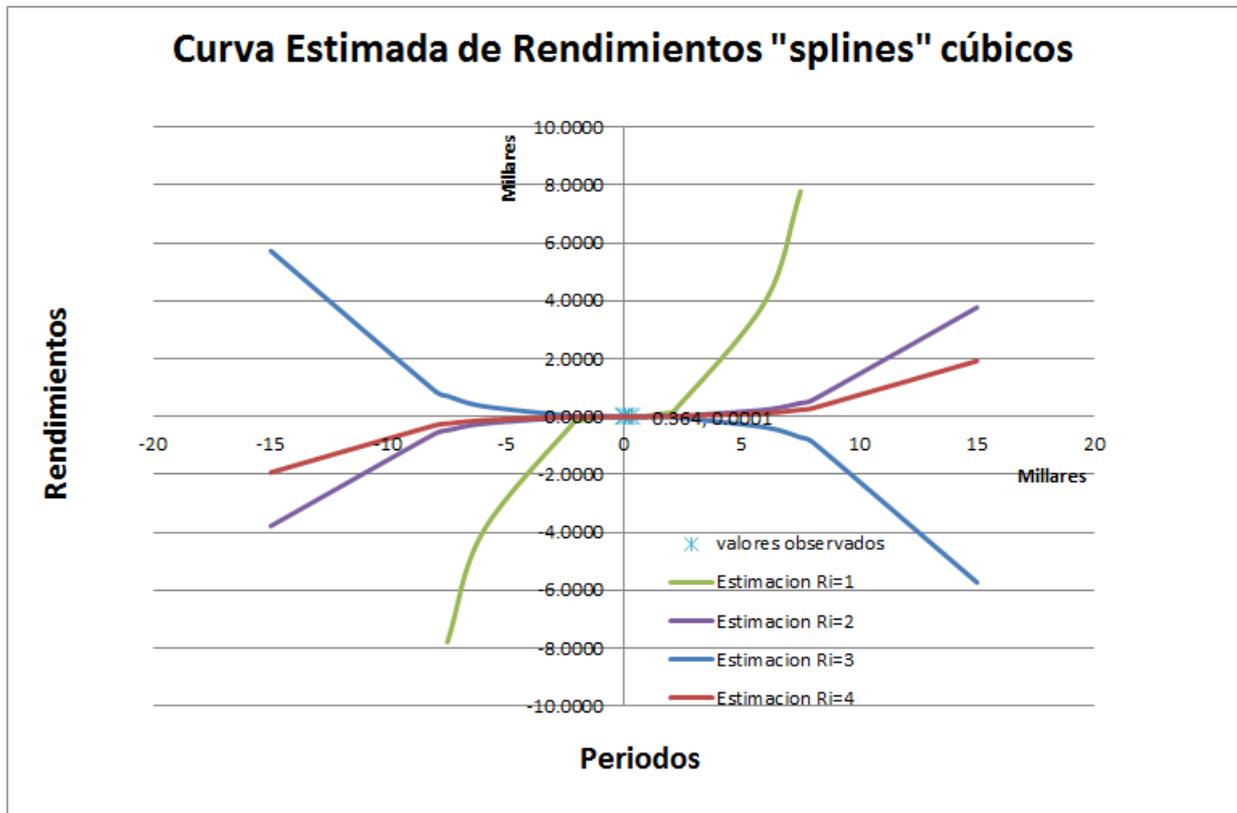


Figura 4.5: Curva de Rendimientos de Cetes con splines cúbicos

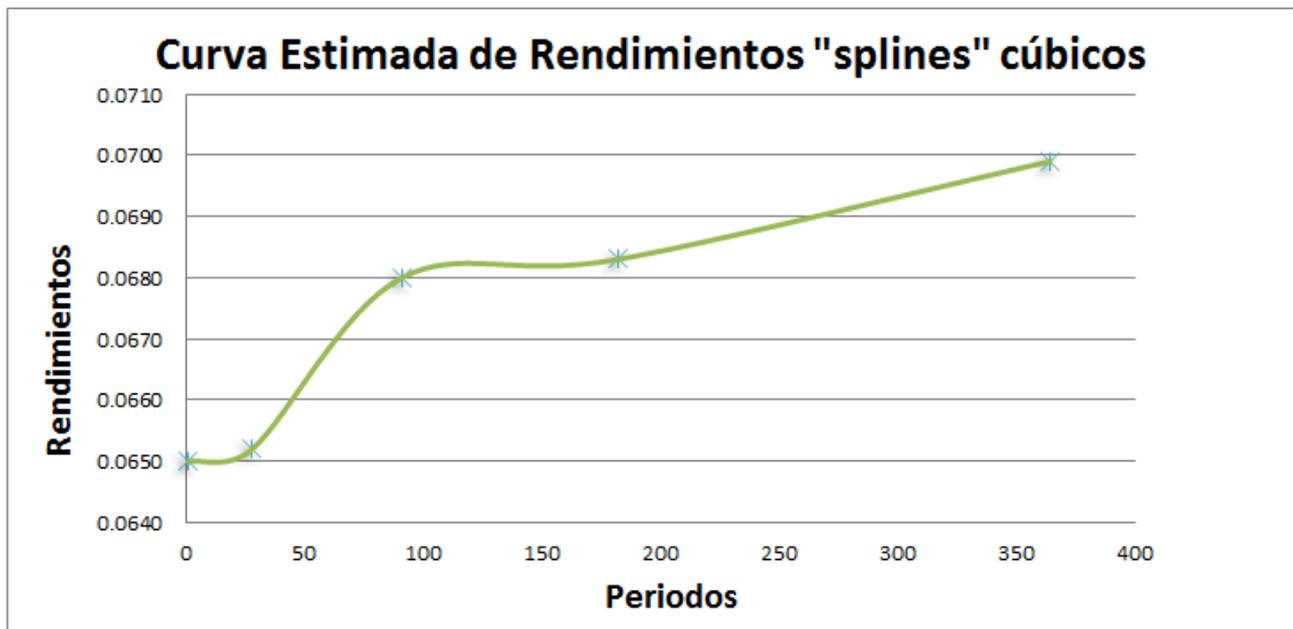


Figura 4.6: Magnificación de la Curva de Rendimientos de Cetes con splines cúbicos

4.3. Estimación con el Modelo de Nelson y Siegel

Nelson y Siegel (1987) desarrollo un método en tiempo continuo que estudia los tipos de interés continuos al contado, Forward implícitos y la función de descuento. Su propuesta consiste en suponer que los tipos de Forward convergen asintóticamente a un cierto nivel. Este método permite cierta flexibilidad a la función de descuento dado que sólo necesita estimar cuatro parámetros, es más suave ya que produce estimaciones más alisadas.

Este método se ajuste de estructuras temporales de tasas de interés que es lo suficiente flexible como para representar las distintas formas que generalmente adoptan estas curvas:

1. Monótonas
2. Jorobadas
3. Encorvadas
4. Sigmoidea
5. En forma S

4.3.1. Propuesta para la tasa Forward Instantánea.

Esta basada en la tasa Forward instantánea que puede ser modelada por la solución es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con raíces iguales y reales. Evidentemente, el modelo no utiliza argumentos de equilibrio general y, en consecuencia, carece de cualquier interpretación económica del comportamiento de los agentes y de los mercados en que estos participan.

4.3.2. Tasa Forward Instantánea y Curva de Rendimiento

Unos de los conceptos centrales en el estudio de modelos de tasas de interés es el tasa Forward instantánea. considere una inversión de una unidad monetaria en un periodo $[t, T]$ a una tasa continuamente capitalizable $R(t, T)$. El monto total, principal más intereses, que genera esta inversión en el vencimiento, T , esta dado por

$$I(t, T) = \exp\{R(t, T)(T - t)\}$$

Si esta cantidad se reinvierte en el periodo $[T, T + \Delta T]$. El monto total de la inversión, en la fecha $T + \Delta T$, es

$$\begin{aligned} L(t, T, T + \Delta T) &= I(t, T)\exp\{f(t, T, T + \Delta T) \Delta T\} \\ &= \exp\{R(t, T)(T - t)\}\exp\{f(t, T, T + \Delta T) \Delta T\}, \end{aligned}$$

donde $f(t, T, T + \Delta T)$ es la tasa Forward aplicable en $[T, T + \Delta T]$ con referencia a la fecha t . Otra alternativa consiste en invertir una unidad monetaria en una plazo igual a la suma de los plazos anteriores, es decir en $[t, T + \Delta T]$. En este caso el monto total que genera este inversión en el vencimiento está dado por

$$J(t, T + \Delta T) = \exp\{R(t, T + \Delta T)(T + \Delta T - t)\}.$$

Si se supone que el mercado de este tipo de inversiones está en equilibrio, entonces no existen oportunidades de arbitraje para generar ganancias en las dos alternativas de inversión anteriormente introducidas. En consecuencia se sigue que $L(t, T, T + \Delta T) = J(t, T + \Delta T)$, es decir,

$$R(t, T)(T - t) + f(t, T, T + \Delta T) \Delta T = R(t, T + \Delta T)(T + \Delta T - t).$$

Dando que $B(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}$, la ecuación anterior se transforma en

$$-InB(t, T) + f(t, T, T + \Delta T) \Delta T = -InB(t, T + \Delta T),$$

lo cual implica, a su vez, que

$$\frac{B(t, T)}{B(t, T + \Delta T)} = \exp\{f(t, T, T + \Delta T) \Delta T\}.$$

Al despejar la tasa forward en la expresión anterior se obtiene

$$f(t, T, T + \Delta T) = -\left(\frac{InB(t, T + \Delta T) - InB(t, T)}{\Delta T}\right).$$

La tasa forward instantánea se define como:

$$f(t, T) \equiv \lim_{\Delta T \rightarrow 0} f(t, T, T + \Delta T) = -\frac{\partial InB(t, T)}{\partial T}. \quad (4.3.1)$$

Observe que e la ecuación anterior se desprende que

$$\int_t^T f(t, s) ds = -\int_t^T dInB(t, s) = -InB(t, T) + InB(t, t).$$

Ahora bien, en virtud de que $B(t, t) = 1$, se obtiene

$$\int_t^T f(t, s) ds = -InB(t, T).$$

Por lo tanto, el precio de un bono cupón cero que paga una unidad monetaria al vencimiento satisface:

$$B(t, T) = \exp\left\{-\int_t^T f(t, s) ds\right\}.$$

Por otro lado, dado que $B(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}$, se puede escribir

$$R(t, T) = \frac{1}{T-t} \int_t^T f(t, s) ds. \quad (4.3.2)$$

La curva de rendimiento se obtiene como el promedio de valores futuros de la tasa forward instantánea.

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Segundo Orden

En las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden con coeficientes constantes, se verán los casos cuando la ecuación característica tiene raíces reales, distintas o iguales.

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Segundo Orden con Raíces Reales y Distintas.

Una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden no homogénea, en $x = x(t)$, con coeficientes constantes y condicionales finales se puede escribir como:

$$\ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + bx(t) - \beta_0 b = 0, \quad t < T, \quad x(T) = A \quad y \quad \dot{x}(T) = B. \quad (4.3.3)$$

Las cantidades a , b y β_0 se suponen conocidas. Primero, se tomara la ecuación diferencial homogénea asociada a (4.3.1), la cual está dada por

$$\ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) + bx(t) = 0, \quad t < T. \quad (4.3.4)$$

La ecuación característica asociada a (4.3.3) se define mediante

$$m^2 + am + b = 0 \quad (4.3.5)$$

las raíces de(4.3.5) se encuentran mediante

$$m_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

Para asegurar que $m_{1,2} \in \mathfrak{R}$, es necesario suponer que $a^2 > 4b$. En este caso, la solución general de la ecuación diferencial homogénea (4.3.3) satisface

$$x_c(t) = \beta_1 e^{m_1(t-T)} + \beta_2 e^{m_2(t-T)}, \quad t < T. \quad (4.3.6)$$

Observe que la sustitución de (4.3.6) en (4.3.3) conduce a

$$(m_1^2 + am_1 + b)\beta_1 e^{m_1(t-T)} + (m_2^2 + am_2 + b)\beta_2 e^{m_2(t-T)} = 0$$

Si se denotan $m_1 = 1/\tau_1$ y $m_2 = 1/\tau_2$, entonces (4.3.6) se puede escribir como

$$x_c(t) = \beta_1 e^{-(T-t)/\tau_1} + \beta_2 e^{-(T-t)/\tau_2}, \quad t < T. \quad (4.3.7)$$

lo que justifica la utilidad de la ecuación característica (4.3.5) en la solución de (4.3.3). Falta ahora determinar una solución particular de la ecuación diferencial no homogénea (4.3.3). Si se supone una solución de la forma

$$x_p(t) = \alpha + \gamma(t - T), \quad (4.3.8)$$

la sustitución de(4.3.8) en (4.3.3) conduce a

$$a\gamma + b[\alpha + \gamma(t - T)] - \beta_0 b = 0.$$

Claramente, $\gamma = 0$, se sigue entonces que $\alpha = \beta_0$. En consecuencia, $x_p(t) = \beta_0$. La solución general de (4.3.3) está dada por

$$x(t) = x_p(t) + x_c(t) = \beta_0 + \beta_1 e^{-(T-t)/\tau_1} + \beta_2 e^{-(T-t)/\tau_2}, \quad t < T. \quad (4.3.9)$$

Si además se eligen A y B en (4.3.3) de tal forma que

$$x(T) = A = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 \quad Y \quad \dot{x}(T) = B = \frac{\beta_1}{\tau_1} + \frac{\beta_2}{\tau_2}, \quad (4.3.10)$$

entonces (4.3.9) es la única solución de (4.3.3) que satisface las condiciones finales en (4.3.10)

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Segundo orden con raíces reales e Iguales

Consideremos ahora la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden no homogénea con coeficientes constantes y condiciones finales de la forma

$$\ddot{x}(t) - 2a\dot{x}(t) + a^2x(t) - \beta_0 a^2 = 0, \quad t < T, \quad (4.3.11)$$

con

$$x(T) = A$$

y

$$\dot{x}(T) = B.$$

Considere, primero, la ecuación diferencial homogénea a (4.3.9) la cual está dada por

$$\ddot{x}(t) - 2a\dot{x}(t) + a^2x(t) = 0, \quad t < T. \quad (4.3.12)$$

La ecuación característica asociada a (4.3.12) se define mediante

$$m^2 - 2am + a^2 = (m - a)^2 = 0 \quad (4.3.13)$$

Es decir, la única raíz de (4.3.13) es a . En este caso, una solución de la ecuación diferencial homogénea (4.3.12) está dada por

$$x_c(t) = \beta_1 e^{a(t-T)}, \quad t < T. \quad (4.3.14)$$

Observe que la sustitución de (4.3.14) en (4.3.12) conduce a

$$(m^2 - 2am + a^2)\beta_1 e^{a(t-T)} = 0 \quad (4.3.15)$$

Otra solución, lineal independiente, de (4.3.12) se obtiene al suponer un candidato de solución de la forma $y_c(t) = u(t)e^{a(t-T)} + au(t)e^{a(t-T)}$. Note que en este caso

$$\dot{y}_c(t) = \dot{u}(t)e^{a(t-T)} + au(t)e^{a(t-T)}$$

y

$$\ddot{y}_c(t) = \ddot{u}(t)e^{a(t-T)} + 2a^2\dot{u}(t)e^{a(t-T)} + au(t)e^{a(t-T)}.$$

Al sustituir las derivadas anteriores en (4.3.12), se tiene que

$$0 = [\ddot{u}(t) + 2a^2\dot{u}(t) + a^2u(t) - 2a\dot{u}(t) - 2a^2u(t) + a^2u(t)]e^{a(t-T)}$$

ó

$$0 = \ddot{u}(t),$$

lo cual implica que

$$u(t) = \alpha + \gamma(t - T).$$

Es decir,

$$y_c(t) = [\alpha + \gamma(t - T)]e^{a(t-T)}. \quad (4.3.16)$$

Resta determinar una solución particular de la ecuación diferencial no homogénea (4.3.11). Si se supone una solución de la forma

$$x_p(t) = \Theta + \phi(t - T), \quad (4.3.17)$$

la sustitución de (4.3.17) en (4.3.11) conduce a

$$-2a\phi + a^2(\Theta + \phi(t - T)) - \beta_0 a^2 = 0$$

En este caso, $\phi = 0$ se sigue entonces que $\Theta = \beta_0$. En consecuencia, $x_p(t) = \beta_0$. La solución general de (4.3.11) está dada por

$$x(t) = x_p(t) + x_c(t) + y_c(t) = \beta_0 + \beta_1 e^{a(t-T)} + \beta_2 [\alpha + \gamma(t - T)]e^{a(t-T)}, \quad t < T. \quad (4.3.18)$$

si además se eligen A y B en (4.3.11) de tal forma que se impongan las condiciones

$$\begin{cases} x(T) = A = \beta_0 + \beta_1 \\ \dot{x}(T) = B = \frac{1}{\gamma}(\beta_1 + \beta_2), \end{cases} \quad (4.3.19)$$

donde $a = 1/\tau$, se sigue que $\alpha = 0, \gamma = -a$ y

$$x(t) = \beta_0 + \beta_1 e^{-(T-t)/\tau} + \beta_2 \left(\frac{T-t}{\tau}\right) e^{-(T-t)/\tau}, \quad t < T. \quad (4.3.20)$$

Así (4.3.20) es la única solución de (4.3.11) que satisface las condiciones finales establecidas en (4.3.19)

4.3.3. Tasa Forward Instantánea; solución con raíces reales y distintas.

La tasa Forward se modela a través de la solución de una ecuación diferencial de segundo grado con raíces reales y distintas, de tal manera que

$$f(t, T) = \beta_0 + \beta_1 e^{-(T-t)/\tau_1} + \beta_2 e^{-(T-t)/\tau_2} \quad (4.3.21)$$

El primer parámetro, β_0 , se ve como la contribución de la tasa Forward en el largo plazo, ya que los otros términos tienden a cero, exponencial, cuando el vencimiento, T , aumenta. Los dos términos siguientes en (4.3.21) pueden verse como la contribución de la tasa Forward en el corto plazo. Estos términos actúan fundamentalmente en vencimientos pequeños ya que cuando el plazo se incrementa tienden rápidamente a cero, evidentemente la tasa Forward de largo plazo satisface $f(t, \infty) = \beta_0$ y la tasa Forward de corto plazo $f(t, t) = r_t = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2$.

En virtud de (4.3.2) y (4.3.21), la curva de rendimiento, de un bono cupón cero, está dada por

$$R(t, T) = \frac{1}{T-t} \int_t^T f(t, s) ds = \beta_0 + \beta_1 \frac{1 - e^{-(T-t)/\tau_1}}{\frac{T-t}{\tau_1}} + \beta_2 \frac{1 - e^{-(T-t)/\tau_2}}{\frac{T-t}{\tau_2}} \quad (4.3.22)$$

Claramente, $R(t, \infty) = \beta_0$. Con el propósito de determinar la tasa corta a partir de la curva de rendimiento, considere el cambio de variable $u = T - t$ en (4.3.22), entonces

$$r_t = \lim_{v \rightarrow 0} R(t, t+v) \\ \beta_0 + \beta_1 \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-v/\tau_1}}{\frac{v}{\tau_1}} + \beta_2 \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-v/\tau_2}}{\frac{v}{\tau_2}}$$

En ese caso la regla de *LHôpital* conduce a

$$r_t = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2.$$

Por lo anterior es importante destacar que las cantidades β_0 y $\beta_0 + \beta_1 + \beta_2$ tienen que ser positivas.

4.3.4. Tasa Forward Instantánea; solución con raíces reales e iguales.

En el caso de que las raíces de la ecuación característica sean reales e iguales a τ , se supone que la tasa Forward es conducida por la ecuación

$$f(t, T) = \beta_0 + \beta_1 e^{-(T-t)/\tau} + \beta_2 \left(\frac{T-t}{\tau}\right) e^{-(T-t)/\tau} = \beta_0 + [\beta_1 + \beta_2 \left(\frac{T-t}{\tau}\right)] e^{-(T-t)/\tau}. \quad (4.3.23)$$

En el modelo de Nelson- Siegel, $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ y τ son cuatro parámetros por determinar. Para estimar estos parámetros a partir de valores de mercado, el modelo resultante es no lineal en τ .

El primer paso es fijar un valor de τ que sea consistente con el comportamiento de la reversión a la media en las tasas de interés y estimar los parámetros restantes. Observe que valores pequeños de τ corresponden a una rápida reducción de las variables independientes y, por lo tanto, conducirán a una curva que se ajusta mejor en el corto plazo.

Los valores grandes de τ incrementan rápidamente los valores de las variables independientes produciendo un mejor ajuste en el largo plazo el procedimiento para seleccionar un valor apropiado de τ consiste en ajustar el modelo, con mínimos cuadrados ordinarios, para diferentes valores de τ , tomando en cuenta que se deben satisfacer las condiciones $R(0, \infty) = \beta_0 > 0$ y $r_t = \beta_0 + \beta_1 > 0$.

1. Como antes, el primer parámetro β_0 , puede verse como la contribución de la tasa Forward en el largo plazo ya que los otros términos rápidamente (tienden exponencial) a cero cuando el vencimiento T , aumenta.
2. segundo término en (4.3.23) puede verse como la contribución de la tasa Forward en el corto plazo ya que al incrementar el plazo tiende rápidamente a cero.
3. El tercer termino se incrementa con el plazo al vencimiento, partiendo de $f(t, t) = 0$, hasta alcanzar un máximo para después tender a cero otra vez.
4. Un valor positivo del parámetro τ determina la velocidad con la que tasa Forward instantánea converge a su valor de largo plazo β_0 . En este caso, es fácil verificar que la curva de rendimiento satisface

$$R(t, T) = \frac{1}{T-t} \int_t^T f(t, s) ds = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \frac{1 - e^{-(T-t)/\tau}}{\frac{T-t}{\tau}} - \beta_2 e^{-(T-t)/\tau}. \quad (4.3.24)$$

En efecto, si se utiliza el cambio de variable $u = -(T-s)/\tau$, entonces

$$\begin{aligned} \int_t^T \left(\frac{T-s}{\tau}\right) e^{-(T-s)/\tau} ds &= -\tau \int_{(T-t)/\tau}^0 u e^u du \\ &= -\tau u e^u \Big|_{-(T-t)/\tau}^0 + \tau \int_{-(T-t)/\tau}^0 e^u du \\ &= -(T-t) e^{-(T-t)/\tau} + \tau(1 - e^{-(T-t)/\tau}). \end{aligned}$$

A partir del resultado anterior se obtiene inmediatamente (4.3.24).

La curva de rendimiento en (4.3.24) se determina a partir del comportamiento futuro de las tasas Forward y en consecuencia por cuatro parámetros, a saber $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ y τ .

La figura (4.7) muestra el comportamiento de $R(0, T)$ con $\tau_1, \beta_0 = 1$ y $\beta_1 = -1$ para diferentes valores de β_2 en un horizonte de $T = 10$ años. Las funciones en la figura (4.7) corresponden, de abajo hacia arriba, a los valores $\beta_2 = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

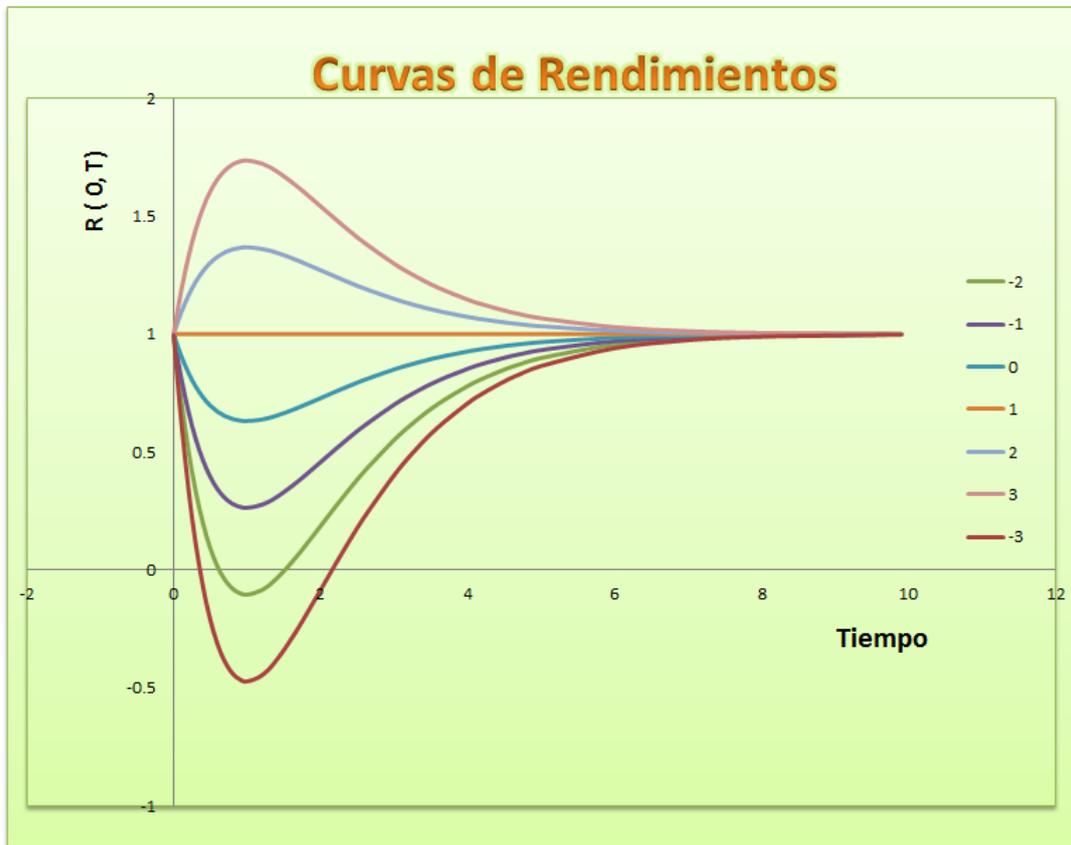


Figura 4.7: Comportamiento de $R(0, T)$ con $\tau = 1$, $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = -1$. Las funciones en la gráfica corresponden, de abajo hacia arriba, a los valores $\beta_2 = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

A continuación se obtiene a tasa corta a partir de la curva de rendimiento. Considere, primero, el cambio de variable en (4.3.24) $u = T - t$, entonces

$$\begin{aligned}
 r_t &= \lim_{v \rightarrow 0} R(t, t + v) \\
 &= \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-v/\tau}}{\frac{v}{\tau_1}} - \beta_2 \lim_{v \rightarrow 0} e^{-v/\tau}.
 \end{aligned}$$

En este caso, la regla de *LHôpital* conduce a $r_t = \beta_0 + \beta_1$, con lo cual, la tasa corta permanece constante en el tiempo, es decir.

$$r_t = r_s = \beta_0 + \beta_1,$$

para $t \neq s$.

Asimismo

$$R(t, \infty) = \lim_{T \rightarrow \infty} R(t, T) = \beta_0,$$

de donde

$$\beta_1 = r_t - R(t, \infty).$$

El proceso de iterativo es el siguiente: se tienen los datos del mercado con distintos plazos T_1, T_2, \dots, T_i , para ciertos valores de τ , parámetros de β_0, β_1 y β_2 se obtiene como la solución de mínimos cuadrados ordinarios el sistema de ecuaciones que en forma matricial se describen a continuación:

$$X = \begin{pmatrix} R(T_1) \\ R(T_2) \\ \vdots \\ R(T_i) \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 1, & \frac{[1-e^{-\frac{T_1}{\tau}}]}{\frac{T_1}{\tau}}, & e^{-\frac{T_1}{\tau}} \\ 1, & \frac{[1-e^{-\frac{T_2}{\tau}}]}{\frac{T_2}{\tau}}, & e^{-\frac{T_2}{\tau}} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & \frac{[1-e^{-\frac{T_i}{\tau}}]}{\frac{T_i}{\tau}}, & e^{-\frac{T_i}{\tau}} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

El sistema de ecuaciones descrito simplemente por $X = MC$

$$\begin{pmatrix} R(T_1) \\ R(T_2) \\ \vdots \\ R(T_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & \frac{[1-e^{-\frac{T_1}{\tau}}]}{\frac{T_1}{\tau}}, & e^{-\frac{T_1}{\tau}} \\ 1, & \frac{[1-e^{-\frac{T_2}{\tau}}]}{\frac{T_2}{\tau}}, & e^{-\frac{T_2}{\tau}} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & \frac{[1-e^{-\frac{T_i}{\tau}}]}{\frac{T_i}{\tau}}, & e^{-\frac{T_i}{\tau}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

y su solución esta representada por ecuaciones normales es decir $C^* = (M^T M)^{-1} M^T X$. Luego se calcula el vector de las tasas estimadas \hat{X} en los mismos plazos de los datos originales con los valores obtenidos; es decir $\hat{X} = MC^*$. En seguida se calcula la suma de los cuadrados de los errores y R^2 ajustada correspondiente al modelos de Nelson y Siegel.

Un valor de τ adecuado será aquel que produzca estimadores estadísticos significativos que cumplan con la condiciones anteriores especificadas. En el caso de que existan varios valores de τ con estas características, se toma entonces aquel que produzca el mayor valor de R^2 . El parámetro β_0 está asociado con el comportamiento de $R(t, T)$ en el largo plazo y la suma $\beta_0 + \beta_1$ con el comportamiento de $R(t, T)$ en el corto plazo.

4.3.5. Un Ejemplo de Aplicación del Modelo de Nelson-Siegel

Se presenta un ejemplo ilustrativo del modelo de Nelson Siegel. Se muestran rendimientos del mercado de Cetes emitidos por el gobierno a distintos plazos, específicamente algunos de los plazos que se operaron el 26 de abril del 2017. Se usará el mismo ejemplo (4.2). Se tienen los datos del mercado con distintos plazos, con distintos valores de $\tau = \{.5, 1, 10, 75, 150, 350\}$, se obtiene el sistema matricial que se describe a continuación:

$$X = \begin{pmatrix} .065 \\ .0652 \\ .0668 \\ .0683 \\ .0699 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 1, & \frac{[1-e^{-\frac{1}{\tau}}]}{\frac{1}{\tau}}, & e^{-\frac{1}{\tau}} \\ 1, & \frac{[1-e^{-\frac{28}{\tau}}]}{\frac{28}{\tau}}, & e^{-\frac{28}{\tau}} \\ 1, & \frac{[1-e^{-\frac{91}{\tau}}]}{\frac{91}{\tau}}, & e^{-\frac{91}{\tau}} \\ 1, & \frac{[1-e^{-\frac{182}{\tau}}]}{\frac{182}{\tau}}, & e^{-\frac{182}{\tau}} \\ 1, & \frac{[1-e^{-\frac{364}{\tau}}]}{\frac{364}{\tau}}, & e^{-\frac{364}{\tau}} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

En virtud de la ecuación (4.3.24), con $t = 0$ se puede escribir

$$R(0, T_i) = \delta_0 + \delta_1 \frac{1 - \exp^{-\frac{T_i}{\tau}}}{\frac{T_i}{\tau}} + \delta_2 \exp^{-\frac{T_i}{\tau}} + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.3.25)$$

donde (ε) esta $1 \leq i \leq N$ es ruido blanco Gaussiano. En este caso, los estimadores de mínimos cuadrados (y de máxima verosimilitud) de los parámetros $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ satisfacen:

$$\hat{\beta}_0 = \hat{\delta}_0, \quad \hat{\beta}_1 = \hat{\delta}_1 + \hat{\delta}_2, \quad y \quad \hat{\beta}_2 = -\hat{\delta}_2$$

Observe que $\hat{\delta}_0$ está asociada a la tasa de largo plazo y $\hat{\delta}_1$ a la tasa corta.

Los estimadores de los parámetros para diferentes valores de τ se muestran en (4.8). Como puede observarse, para los valores de $\tau = .5, \tau = 1$, los parámetros son altamente significativos , $R(0, \infty) = \beta_0 > 0$ y R^2 es alta pero $r_t = \beta_0 + \beta_1 < 0$. Si $\tau = 10, \tau = 75, \tau = 150, \tau = 350$ mejora la significativa estadística de los parámetros la R^2 es también alta, $R(0, \infty) = \beta_0 > 0$ y $r_t = \beta_0 + \beta_1 > 0$.

Figura 4.8: Estimadores de los parámetros para diferentes valores de τ .

τ	$\widehat{\delta}_0$ (Estadístico t)	$\widehat{\delta}_1$ (Estadístico t)	$\widehat{\delta}_2$ (Estadístico t)	R^2
0.5	0.0691583 (86.479)	-0.2378133 (-2.815)	0.7289752 (2.743)	0.9998922
1	0.0691583 (86.479)	-0.1189067 (-2.815)	0.1930116 (2.716)	0.9998922
10	0.0694075 (92.149)	-0.0156525 (-3.156)	0.0116157 (2.419)	0.9999165
75	0.0724172 (159.923)	-0.0123795 (-8.013)	0.0048317 (4.017)	0.9999968
150	0.073631 (52.557)	-0.010167 (-2.586)	0.001338 (0.503)	0.9999951
350	0.068976 (11.257)	0.009008 (0.624)	-0.013186 (-1.562)	0.9999953

Por lo tanto, entre estas seis alternativas, caso $\tau = 75$ proporciona un modelo aceptable.

$$\begin{pmatrix} .065 \\ .0652 \\ .0668 \\ .0683 \\ .0699 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, \frac{[1-e^{-(\frac{1}{75})}]}{(\frac{1}{75})}, e^{-(\frac{1}{75})} \\ 1, \frac{[1-e^{-(\frac{28}{75})}]}{(\frac{28}{75})}, e^{-(\frac{28}{75})} \\ 1, \frac{[1-e^{-(\frac{91}{75})}]}{(\frac{91}{75})}, e^{-(\frac{91}{75})} \\ 1, \frac{[1-e^{-(\frac{182}{75})}]}{(\frac{182}{75})}, e^{-(\frac{182}{75})} \\ 1, \frac{[1-e^{-(\frac{364}{75})}]}{(\frac{364}{75})}, e^{-(\frac{364}{75})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

Figura 4.9: Estimadores del modelo con $\tau = 75$.

Coefficientes	Estimación	Error estándar	Estadístico t	Prob. (> t)
$\widehat{\delta}_0$	0.0724172	0.0004528	159.923	3.91E-05
$\widehat{\delta}_1$	-0.0123795	0.001545	-8.013	0.0152
$\widehat{\delta}_2$	0.0048317	0.0012027	4.017	0.0567

En este caso, el número de datos es cinco y en el modelo se estiman tres parámetros, así el número de grados de libertad es $v = 3$. Si se considera los valores $t_{2,0,025} = 4,303$ y $t_{2,0,005} = 2,920$ de tabla de las colas de la distribución $t_{v,\alpha}$. Por supuesto, otros valores τ se pueden examinarse.

Las Gráficas (4.10) hasta (4.15) presentan las curvas de rendimientos estimadas con el modelo de Nelson-Siegel diferentes valores del parámetros τ . En todos los casos, en el largo plazo, la curva de rendimiento se aproxima, asintóticamente a β_0 .

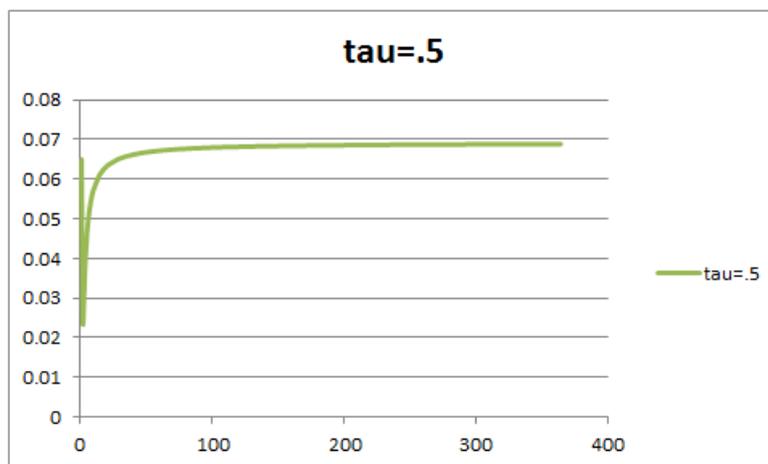


Figura 4.10: Curva de rendimiento estimada con $\tau = 0.5$

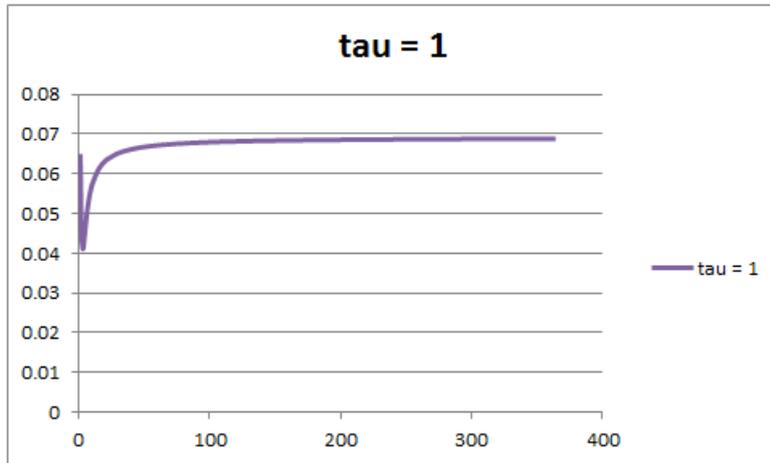


Figura 4.11: Curva de rendimiento estimada con $\tau = 1$

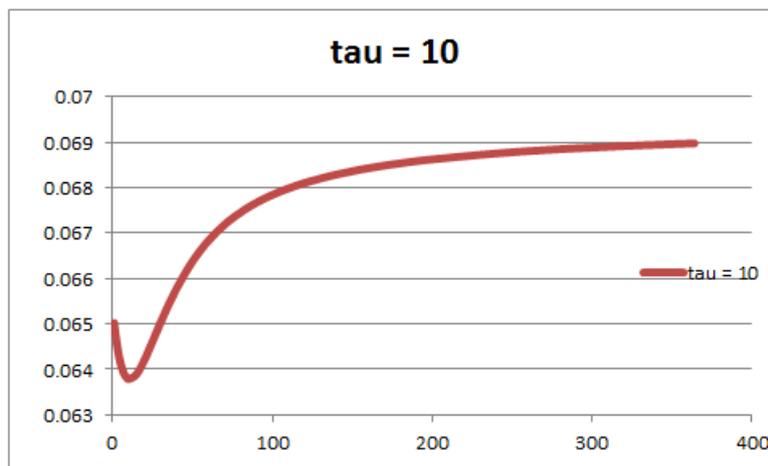


Figura 4.12: Curva de rendimiento estimada con $\tau = 10$

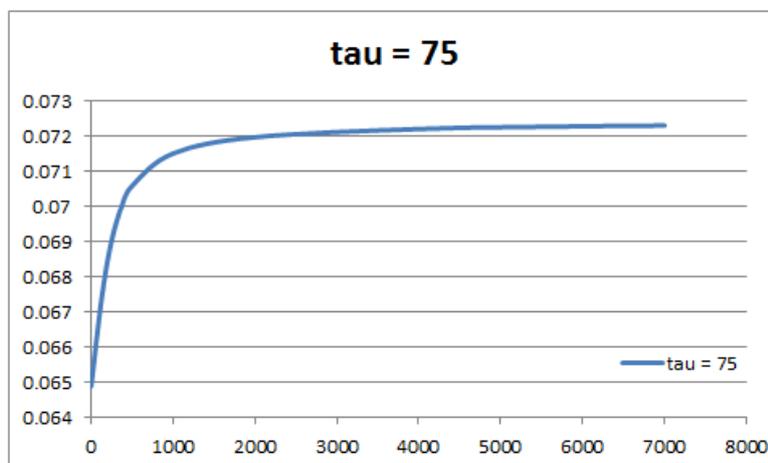


Figura 4.13: Curva de rendimiento estimada con $\tau = 75$

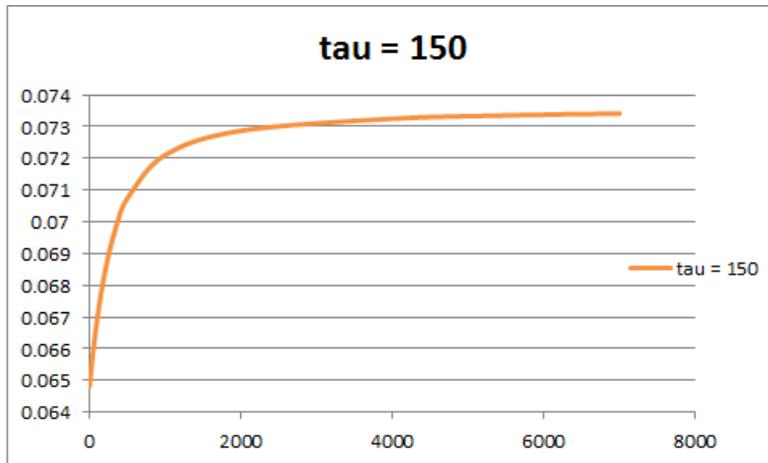


Figura 4.14: Curva de rendimiento estimada con $\tau = 150$

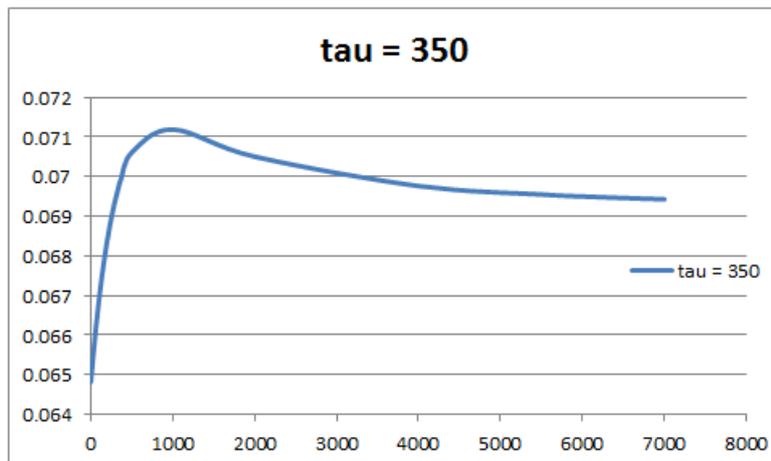


Figura 4.15: Curva de rendimiento estimada con $\tau = 350$

Capítulo 5

Conclusiones y Consideraciones Finales

5.1. Conclusiones

Al realizar la presente Tesis se tuvo la oportunidad de trabajar Mbonos y Cetes, que son instrumentos de deuda del gobierno Mexicano, se estudiaron para conocer de cerca la necesidades y problemas del mismos esto nos permitió proponer métodos paramétricos y no paramétricos para aproximaciones a las curvas de rendimiento a distintos plazos.

En general, al realizar el análisis de los datos y se obtuvieron los resultados esperados y se alcanzaron los objetivos planteados al inicio. En primer resultado importante fue la estimación No Parametricos con los Kernels, después polinomios de Splines Cúbicos y por último el modelo de Nelson y Siegel. A continuación se detalla cada uno de ellos, sus limitaciones y sus alcances de cada uno de los métodos propuestos para estimación de la Curva de Rendimiento para Mbonos y Cetes gobierno Mexicano.

Modelos

Métodos No Paramétricos.

Kernels: Método en el cual se basa en la estimación con núcleos de suavización, en donde el estimador de la curva de rendimiento se obtiene mediante la ponderada de los errores de ajuste.

El método de estimación con Kernels de suavización presenta algunas limitaciones, entre las que se encuentra:

- La curva de rendimiento estimada puede producir puntos de inflexión múltiple.
- La curva de rendimiento puede producir tasas forward negativas en el largo plazo.
- No hay una teoría del comportamiento del mercado de dinero detrás del procedimiento de estimación.

Al evaluar los MBONOS y CETES con los Kernels se presento una aproximación a corto plazo con respecto a las observaciones del mercado, pero no se cuenta con la información respecto a largo plazo. El método propuesto consiste en la simple aplicación de una técnica del análisis numérico para ajustar una curva a un número dado unos puntos.

Métodos Paramétricos.

- I. **Splines Cúbicos:** La estructura estimada se emplea par calcular factores de descuento y tasas Forward a diferentes vencimientos, la estimación polinomial de una curva de

rendimiento sujeto a la condición de que las tasas Forward sean lo más suaves posibles, consistente con los datos observados. El método desarrollado, tiene algunas limitaciones, las cuales se resumen a continuación.

- La segunda derivada de la curva de tasa Forward no es igual en los puntos de mercado ya que no hemos restringido $R''(\tau)$ en los puntos del mercado.
- La curva de tasas Forward no es dos veces diferenciables en los puntos de mercado, por lo que no es suave. La primera derivada de la curva de tasas Forward puede tener picos en sus puntos de mercado.
- Las curva de tasa Forward asociados con los Splines Cúbicos basados en la curva de rendimiento puede producir curvas de tasas Forward que no son plausibles.

Al evaluar los ejemplos se encuentra la estimación polinomial a largo plazo que se comporta como un polinomio de grado tres, donde el modelo nos presenta varias curvas de rendimiento en este caso se necesita tener un historial de comportamiento del rendimiento observados para determinar cual de las curvas presenta el mejor comportamiento a largo plazo, se debe tener en cuenta algunas que no todas las curvas son plausibles para estimar rendimientos. Con respecto a corto plazo se encuentra que curvas presentan un error de ajuste esto se compensa en hacer una magnificación de la curva estimada de rendimientos por obtener la mejor estimación.

II. Modelos Nelson y Siegel: Se concentra en la evolución de la tasa Forward instantánea y no en la dinámica de la tasa corta. Es un modelo no polinomial que elimina cambios abruptos en la estructura de plazos de la tasa de interés, sobre todo en el largo plazo. algunas de sus limitaciones del modelos son:

- Quizás el mayor defecto del modelo es que el ajuste puede dejar algo que desear en ciertos plazos, sobre todo en curvas que contemplan plazos muy largos. Esto se observa en la figura (D.5), dependiendo del valor del parámetro τ , la curva o ajusta bien en el corto plazo o en el largo pero no en ambos. Una conjetura interesante es la de agregar un nuevo termino a la ecuación que pueda arreglar el problema. Además, posiblemente se pueda lograr que este termino le de mejores propiedades de concavidad a la función para facilitar la optimizar, pagando un precio pequeño aumentando solamente un parámetro.
- Para encontrar el valor óptimo de τ no se tiene un estudio adecuado, en los ejemplos lo que se hizo fue tomar intervalos que cumplieran las propiedades del modelos pero se encontró que hay varios parámetros, cumplen pero no todos son óptimos para ajustar con mínimos cuadrados. En algunos casos se llevo acabo un promedio de esté parámetro.

Evidentemente, que los modelos propuestos no son comparables, ya que primero se aproxima a una serie de puntos de densidad de la función, la segunda funciones polinomiales de tercer grado, y el ultimo es una estimación de parámetros con respecto a mínimos cuadrados. Sin embargo, es interesante comparar las propiedades geométricas de las curvas de rendimiento obtenidas con los modelos.

Se han presentado modelos muy versátiles para determinación de la curva de rendimiento para el corto y largo plazo de las tasas. Es importante destacar que en mercado se cuenta con pocos datos, ya que no se negocian bonos a todos los plazos, incluso esta situación se presenta en el mercados secundarios. La escasez de datos podría ser una limitación en la estimación del modelos econométricos.

Consideraciones finales

Trabajo a futuro

Como se observa en la figura (A.1) la emisión de los bonos están sujetas a la estabilidad económica que tiene un país y con sus políticas monetarias, el conocer las tasas de interés del mercado es muy importante ya que nos permite tener una mejor interacción entre unidades superavitarias y deficitarias de ahí su importancia de conocer las curvas de rendimiento, esto para un mejor desarrollo en el mercado, para los cuales se tienen diversos propósitos:

1. Para extracción de tasas de rendimiento y/o descuento.
2. Para interpretación macroeconómica;
 - Política monetaria
 - Expectativas de inflación
 - Crecimiento económico
 - Variación cambiaria.
 - Créditos

Después de estudiar y analizar a fondo este trabajo, surgen ideas de cómo se pueden aplicar las curvas de rendimiento. Una sería la aplicación en los diferentes instrumentos de deuda siempre y cuando tengan las mismas características por los cuales se tienen por ejemplo;

- Derivados
- Créditos
- Los diferentes bonos.

Otra sería buscar expectativas de inflación, como se observa en la figura (A.1) ya que se puede tener un indicador económico o social que permita establecer alguna relación directa con la emisión de los bonos, que se pueda usar para un mejor ajuste en las predicciones, como también sería en el desarrollo del crecimiento económico de cada entidad del país, por último en las variaciones cambiarias. Hoy en día se tiene las curvas de rendimiento que tienen suma importancia para el desarrollo económico del país.

Apéndice A

Cronología de México en el mercado de deuda.

En la figura (A.1), se muestra la serie histórica de los valores del mercado Cetes a 91 días la información se obtuvo de Banco de México.



Figura A.1: Serie histórica de los datos observados Cetes (Banco México) desde 1978 hasta 11/mayo/2017

Los cetes son referentes de la tasa libre de riesgo en México era de 91 días, y que en el año 1978 inicio en 35 % y término en 58 %, cifras volátiles originados por la Nacionalización de la Banca y ya referida devaluación del peso.

Con esto su objeto era pagar a los antiguos dueños, se crearon también los Bonos de Indemnización Bancaria o BIB a 10 años, tasa fija, aún más líquidos pero muy volátiles en tasa.

Entre 1983 y 1984 los Cetes observaron una relativa estabilidad, lo que llevó a realizar emisiones de Cetes de 28 días, y en 1984 se iniciaron las subastas de Cetes de 182 días, entonces surgen las Sociedades de Inversión.

En 1985 se inician una forma regular las subastas de Cetes de 28 días, continúan los de 91 días y se reanudan los de 182 días. El nivel de tasas empieza a incrementarse para llegar al 76 %. Es cuando se decide suspender el mecanismo de subastas y la tasa es fijada por el propio Banco de México.

En 1986 se emiten los PAGAFES (Pagares de la Tesorería de la Federación) que eran básicamente Cetes en dólares. Aunque estaban denominados en dólares controlados, eran liquidados en pesos, aplicándose el tipo de cambio vigente, se emiten los Bonos de Renovación Urbana para pagar los predios nacionalizados después del terremoto de la Ciudad de México de 1985, este año, el nivel de tasas de los Cetes llega a 91 % se regresó al sistema de subastas y en años posteriores rebasó en múltiples ocasiones el 100 %.

El punto álgido se da en octubre de 1987 con el crack bursátil: la inflación anual supera el 150 %, lo que obliga a la firma del Pacto de Solidaridad Económica. Las tasas pasan de 160 % enero de 1988 a 40 % a mediados del año. En esos días también se emiten por primera vez los BONDES o Bonos de Desarrollo, primeros en tener tasa revisable.

En 1989 se emiten por primera vez los TESOBONOS (Bonos de la Tesorería de la Federación) que sustituyen a los Pagafes. Se denominan en dólares libres, en referencia al nivel de cotización del dólar. También debutan los Ajustabonos (Bonos Ajustables del Gobierno Federal) que incorporan tasas fijas de largo plazo por primera vez pero que pagan un rendimiento ajustable a la inflación. El instrumento tuvo una fuerte volatilidad en rendimientos, causando fuertes utilidades o pérdidas a quien lo compraba.

El resto de 1988 y 1989 las tasas continuaron en niveles del 40 %. La década de los 90 inicia con un largo periodo de interés estables en el bono líder que sigue siendo el Cetes, hasta llegar al 11 % en marzo de 1992. Pero la historia ahí no termina, ya que después habrá que analizar el año 1994, un punto de inflexión en la historia económica mexicana.

A.1. Características principales de los Cetes y Mbonos

A.1.1. MBONOS

Los Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal con Tasa de Interés Fija (BONOS) de más reciente creación.

Son emitidos a plazos: Se pueden emitir a cualquier plazo siempre y cuando este sea múltiplo de 182 días, se han emitido entre 3, 5, 10, 20 y 30 años.

Su Valor nominal 100 pesos (cien pesos).

A diferencia de los BONDES, la tasa de interés se determina en la emisión del instrumento y se mantiene fija a lo largo de toda la vida del mismo. MBonos devengan intereses en pesos cada seis meses. Esto es, cada 182 días o al plazo que sustituya a éste en caso de días inhábiles.

Colocación en el mercado de MBONOS

1. **Su colocación primaria:** Es mediante subasta, en la cual los participantes presentan pos-

turas por el monto que desean adquirir y el precio que están dispuestos a pagar dirigida a;

- Instituciones de crédito
- Casas de bolsa
- Sociedades de inversión
- Sociedades de inversión especializada de fondos para el retiro
- Financiera Rural.

2. **En mercado secundario:** Se pueden realizar operaciones de compra-venta en directo y en reporto, así como operaciones de préstamo de valores. Pueden ser utilizados como activo subyacente en los mercados de instrumentos derivados (futuros y opciones) aunque a la fecha nunca han sido utilizados para estos efectos. Las compra-ventas en directo de estos títulos se pueden realizar ya sea cotizando su precio o su rendimiento al vencimiento.

Clave de identificación.

Debido a que cada emisión de estos títulos cuenta con una tasa de interés fija desde que nace hasta que vence, los MBONOS no pueden ser fungibles entre sí a menos que pagaran exactamente la misma tasa de interés. Es por ello que la clave de identificación de la emisión está constituida por ocho caracteres, el primero para identificar el título (*M*), el segundo un espacio en blanco y los seis restantes para indicar su fecha de vencimiento (año, mes, día).

Por ejemplo:

Clave de identificación de BONOS que se emiten el 27 de enero de 2010 a plazo de 3 años (1092 días) y que vencen el 23 de enero de 2013:

M 130123

A.1.2. CETES

Los Certificados de la Tesorería de la Federación (CETES). Estos títulos pertenecen a la familia de los bonos cupón cero, esto es, se comercializan a descuento (por debajo de su valor nominal), no devengan intereses en el transcurso de su vida y liquidan su valor nominal (diez pesos), en la fecha de vencimiento. Sin embargo, la tasa de interés del título está implícita en la relación que existe entre su precio de adquisición, el valor nominal del título y su plazo a vencimiento.

Se pueden emitir a cualquier plazo siempre y cuando su fecha de vencimiento coincida con un jueves o la fecha que sustituya a este en caso de que fuera inhábil. De hecho, estos títulos se han llegado a emitir a plazos mínimos de 7 días y plazos máximos de 728 días.

Actualmente se emiten a plazos:

- 28 días
- 91 días
- cercanos a seis meses y un años.

La colocación de los CETES en el mercado.

1. **Colocación primaria:** Se realiza mediante subastas, en la cual los participantes presentan posturas por el monto que desean adquirir y la tasa de descuento que están dispuestos a pagar.

Esta dirigida a;

- Instituciones de crédito.
- Casas de bolsa.
- Sociedades de inversión
- Sociedades de Inversión especializadas en fondos para el retiro
- Financiera Rural.

2. **Colocación secundaria:** Sin embargo, la convención actual del mercado se cotiza a través de su tasa de rendimiento. Se realizan operaciones de Compra-venta en directo de estos títulos se pueden realizar ya sea cotizando su precio, su tasa de descuento o su tasa de rendimiento Reporto. Actualmente se puede utilizar como operaciones de préstamo de valores. En adición, pueden ser utilizados como activo subyacente en los mercados de instrumentos derivados (futuros y opciones).

La clave de identificación.

Estos pueden ser emitidos con anterioridad y emitidos recientemente pueden tener la misma clave de identificación siempre y cuando venzan en la misma fecha. Para ello, la referida clave está compuesta por ocho caracteres, los primeros dos para identificar el título (*BI*), y los seis restantes para indicar su fecha de vencimiento (año,mes,día). Como se puede observar, lo relevante para identificar un CETE es su fecha de vencimiento, esto significa que dos CETES que pudieron ser emitidos en fechas distintas pero que vencen el mismo día cuentan con la misma clave de identificación, por lo que son indistinguibles entre sí.

Por ejemplo;

Los CETES que se emiten el 24 de agosto de 2015 a plazo de 28 días y que vencen el 21 de septiembre de 2015:

BI150921

Apéndice B

Modelo Nucleos kernels

En la figura (B.1) se presentan los valores del mercado *MBONOS* con fecha 08/05/2017 la información se obtuvo de Valmer (Grupo BMV), y estimación con método no paramétrica de la curva rendimiento con núcleos de suavización con distintas función de kernel.

Estimación No Paramétrica de Curvas de Rendimiento: Núcleos de Suavización.					
PLAZOS	FECHA	BONOSM			
		08/05/2017	Gaussiana	Epanechnikov	A la Cuarta
38		0.0656	0.0656	0.0656	0.0656
220		0.0668	0.0668	0.0668	0.0668
402		0.0683	0.0683	0.0683	0.0683
584		0.0685	0.0685	0.0685	0.0685
947		0.0697	0.0697	0.0697	0.0697
1130		0.0706	0.0706	0.0706	0.0706
1494		0.0711	0.0711	0.0711	0.0711
1858		0.0713	0.0713	0.0713	0.0713
2404		0.0715	0.0715	0.0715	0.0715
2768		0.0716	0.0716	0.0716	0.0716
3223		0.0719	0.0719	0.0719	0.0719
3678		0.0726	0.0726	0.0726	0.0726
4406		0.0731	0.0731	0.0731	0.0731
5134		0.0741	0.0741	0.0741	0.0741
6408		0.0748	0.0748	0.0748	0.0748
7136		0.0751	0.0751	0.0751	0.0751
7864		0.0753	0.0753	0.0753	0.0753
9320		0.0755	0.0755	0.0755	0.0755

Figura B.1: Son datos observados BonosM (Valmer Grupo BMV), y los resultados de Estimaciones Kernel

En figura (B.2) se presenta la Curva de Rendimiento estimada con $A = 10$ y $C = 0,01$ con Núcleo de Suavizado Normal, donde cuadros rojos representan los valores del mercado observa que la estimación de la curva da una buena aproximación a los valores *MBOMOS*.

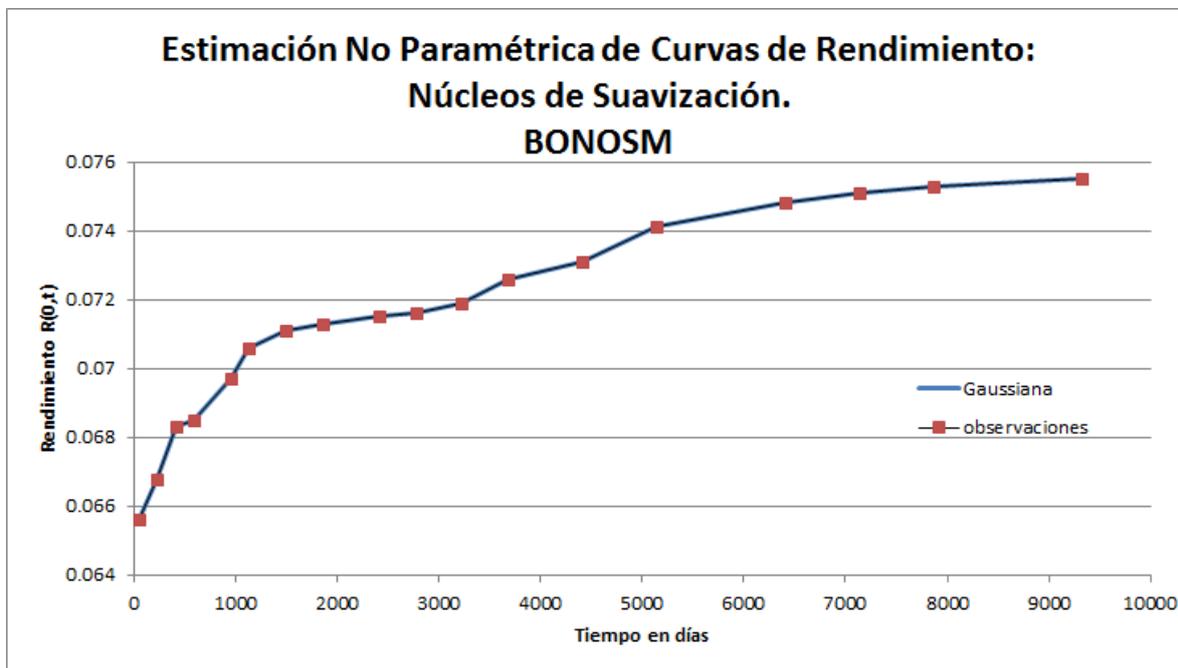


Figura B.2: Curva de Rendimiento: Núcleo de Suavizado Normal, y los datos observados

En la figura (B.3) se presentan los valores del mercado *CETES* con fecha 08/05/2017 la información se obtuvo de Valmer (Grupo BMV), y estimación con método no paramétrica de la curva rendimiento con núcleos de suavización con distintas función de kernel.

Estimación No Paramétrica de Curvas de Rendimiento: Núcleos de Suavización. CETES				
PLAZOS	FECHA 10/05/2017	Gaussiana	Epanechnikov	A la Cuarta
1	0.0651	0.0651	0.0651	0.0651
28	0.0649	0.0649	0.0649	0.0649
91	0.0676	0.0676	0.0676	0.0676
182	0.0696	0.0696	0.0696	0.0696
364	0.0709	0.0709	0.0709	0.0709

Figura B.3: Son datos observados Cetes (Valmer Grupo BMV), y los resultados de Estimaciones Kernel

En figura (B.4) se presenta la Curva de Rendimiento es estimada con $A = 10$ y $C = 0,01$ con Núcleo de Suavizado Epanechnikov, donde cuadros rojos representan los valores del mercado observa que la estimación de la curva da una buena aproximación a los valores *CETES*.

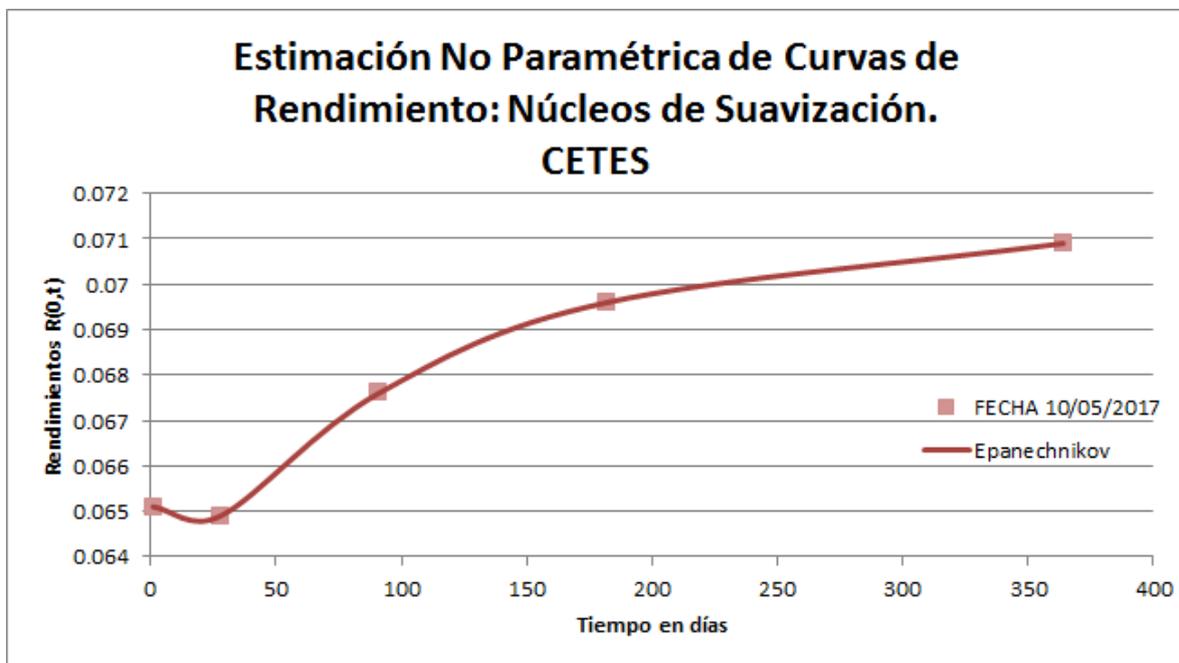


Figura B.4: Curva de Rendimiento: Núcleo de Suavizado Epanechnikov y los datos observados

```

#####Datos observados de BONOSM FECHA 08/05/2017
(VAR MER Grupo BMV)#####
#####
#####
#x<-
c(38,220,402,584,947,1130,1494,1858,2404,2768,3223,3678,44
06,5134,6408,
#+7136,7864,9320)
#y<-
c(.0656,.0668,.0683,.0685,.0697,.0706,.0711,.0713,.0715,.0716,
+.0719,.0726,.0731,.0741,.0748,.0751,.0753,.0755)
#####Datos observados de CETES FECHA 10/05/2017 (VARMER
Grupo BMV)#####
#####
#####
x<-c(1,28,91,182,364)
y<-c(.0651,.0649,.0676,.0696,.0709)
A<-c(10)
C<-A^2
h=(1-exp(-C*y))*A
#####Normal Gaussian a#####
w<-matrix(0, ncol =length(y), nrow = length(x))
for(j in 1:length(y)){
for(i in 1:length(x)){
w[i,j]=1/(sqrt((pi*2*h[i])))*exp(-(x[i]-y[j])^2/(2*h[i]^2))
)}
}
k<-1/(sqrt(2*pi))*exp(-(w/2))
R1<-matrix(0, ncol =length(y), nrow = length(x))
for(j in 1:length(y)){
for(i in 1:length(x)){
R1[i,j]<-y[i]*k[i,j]
}}
SR1<-apply(R1,1,sum) # sumas por filas
Sk<-apply(k,1,sum)#sumas por filas
#valores estimados
Rendi<-SR1/Sk # Resultados estimados con Normal
#####son ponderacion de w#####
we<-matrix(0, ncol =length(y), nrow = length(x))
for(j in 1:length(y)){
for(i in 1:length(x)){
we[i,j]=x[i]-y[j]
}}
#####Epanechnikov#####
ke<-((3/4)*(1-we^2))/h
R1E<-matrix(0, ncol =length(y), nrow = length(x)) # Rendimiento
Epanechnikov
for(j in 1:length(y)){
for(i in 1:length(x)){
R1E[i,j]<-y[i]*ke[i,j]
}}
SR1E<-apply(R1E,1,sum) # sumas por filas
Ske<-apply(ke,1,sum)#sumas por columnas
#valores estimados

rendiEp<-SR1E/Ske # Rendimientos de Epanechnikov
#####A la cuarta #####
kec<-((15/16)*(1-we^2)^2)/h
R1C<-matrix(0, ncol =length(y), nrow = length(x)) #Rendimiento
Epanechnikov
for(j in 1:length(y)){
for(i in 1:length(x)){
R1C[i,j]<-y[i]*ke[i,j]
}}
SR1C<-apply(R1C,1,sum) # sumas por filas
Skec<-apply(kec,1,sum)#sumas por columnas
#valores estimados
rendiCu<-SR1C/Ske #Rendimiento A la cuarta
#####graficas#####
par(mfrow=c(2,2))
plot(x,y,type="l",pch=1,lwd=2.5, col="blue",
xlab="Periodos",ylab="Rendimiento",
main="Curva de Rendimiento Originales",
col.main="red",ylim=c(.060,.095))
#####Gráfica Normal#####
plot(x,Rendi,type="l",pch=22,lwd=2.5, col="red",
xlab="Periodos",ylab="Rendimiento",
main="Curva de Rendimiento Estimada
Normal",sub="ejemplo",ylim=c(.060,.095))
legend("topleft",c("kernel Normal"),cex=0.6,
col=c("blue", "red", "chocolate"),bty="n", fill=rainbow(3))
#####Gráfica Epanechnikov#####
plot(x,rendiEp,type="l",pch=22,lwd=2.5, col="darkorchid4",
xlab="Periodos",ylab="Rendimiento",
main="Curva de Rendimiento Estimada
Epanechnikov",sub="ejemplo",ylim=c(.060,.095))
legend("topleft",c("kernel Epanechnikov"), cex=0.6,
col=c("blue", "red", "chocolate"),bty="n", fill=rainbow(3))
#####Gráfica A la Cuarta#####
plot(x,rendiCu,type="l",pch=22,lwd=2.5, col="chartreuse3",
xlab="Periodos",ylab="Rendimiento",
main="Curva de Rendimiento A la
Cuarta",sub="ejemplo",ylim=c(.060,.095))
legend("topleft",c("kernel A la Cuarta"), cex=0.6,
col=c("blue", "red", "chocolate"),bty="n", fill=rainbow(3))

cbind(Rendi)###Resultados Estimación Normal##
cbind(rendiEp)###Resultados Estimación Epanechnikov###
cbind(rendiCu)###Resultados Estimación A la Cuarta###

```

Figura B.5: Código en R para General las Estimaciones con Núcleos

Apéndice C

Splines Cúbicos

En esta parte se evalúan con el método paramétrico de los Splines Cúbicos que nos permiten estimar una estructura de plazos con base a rendimientos, como son los de *MBONOS* como de *CETES* se observan las curvas de rendimientos para corto y largo plazo así como se comportan al transcurso del tiempo.

En la figura (C.1) se presentan los valores del mercado *MBONOS* con fecha 08/05/2017, la información que se obtuvo de Valmer (Grupo BMV), y estimación para calcular factores de descuento y tasas Forward a diferentes vencimientos y que estas sean lo mas suaves posibles.

Estimación Paramétrica de Curvas de Rendimiento:		
Splines Cúbicos:		
M_BONOS		
PLAZOS	FECHA 10/05/2017	Estimaciones
36	0.0658	0.0658
218	0.067	0.067
400	0.0691	0.0691
582	0.0694	0.0694
945	0.0702	0.0702
1128	0.0712	0.0712
1492	0.0715	0.0715
1856	0.0716	0.0716
2402	0.0718	0.0718
2766	0.0719	0.0719
3221	0.0722	0.0722
3676	0.0727	0.0727
4404	0.0734	0.0734
5132	0.0744	0.0744
6406	0.0751	0.0751
7134	0.0754	0.0754
7862	0.0758	0.0758
9318	0.0759	0.0759

Figura C.1: Son datos observados MBonos (Valmer Grupo BMV), y los resultados de Splines Cúbicos

La figura (C.2) es la estimación con Splines Cubicos, se obtuvo mediante al programa estadístico R donde se representa una buena aproximación los datos de los valores observados de *MBONOS*.

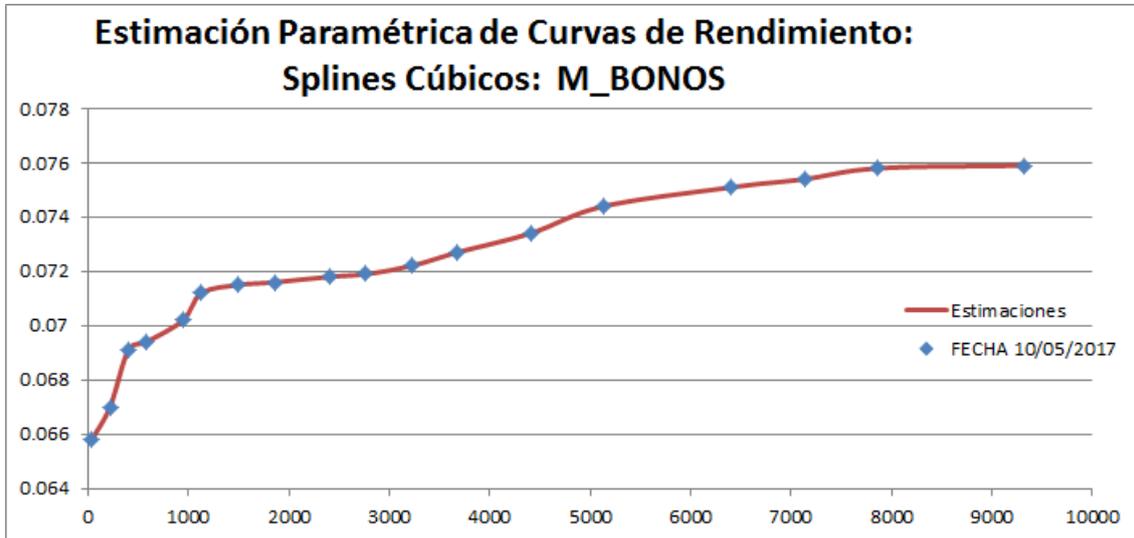


Figura C.2: Curva de Rendimientos: MBonos (Valmer Grupo BMV), Splines Cúbicos

```
#####Datos Observados de M_BONOS#####3
x<-c(36,218,400,582,945,1128,1492,1856,2402,2766,3221,3676,4404,5132,6406,
+7134,7862,9318) # PLAZOS

y<-c(0.0658,0.067,0.0691,0.0694,0.0702,0.0712,0.0715,0.0716,0.0718,0.0719,
+0.0722,0.0727,0.0734,0.0744,0.0751,0.0754,0.0758,0.0759) #RENDIMIENTOS
##PARA GENERAR LOS SPLINES EN R#####3
sp<-spline(y,n=length(y), method = "fmm",ties = mean)
sp$y ## ESTIMACIONES CON SPLINES
###GRÁFICAS ###
plot(x,y)
points(x,sp$y,type='l',col='red')
```

Figura C.3: Código en R para Generar las Estimaciones con Splines Cúbicos

En figura (C.4) información del mercado de valores de los *CETES* con fecha 10/05/17 con distintos plazos, y resultados de estimación de Splines Cúbicos.

Estimación Paramétrica de Curvas de Rendimiento: Splines Cúbicos CETES		
PLAZOS	FECHA 10/05/2017	Estimación
1	0.0651	0.065100002
28	0.0649	0.064900002
91	0.0676	0.067600003
182	0.0696	0.069599999
364	0.0709	0.0709

Figura C.4: Plazos y valores del mercado de: CETES (Valmer Grupo BMV), y estimaciones con Splines Cúbicos

Muestra en la figura (C.5) los polinomios $R_i(T)$, $i = 1, 2, 3, 4$, que se ajustan a los precios de mercados. Los cuatro segmentos del polinomio que se aprecia en la interceptan de las curvas es la curva estimada de rendimiento, como su comportamiento y tendencia a largo plazo de las mismas.

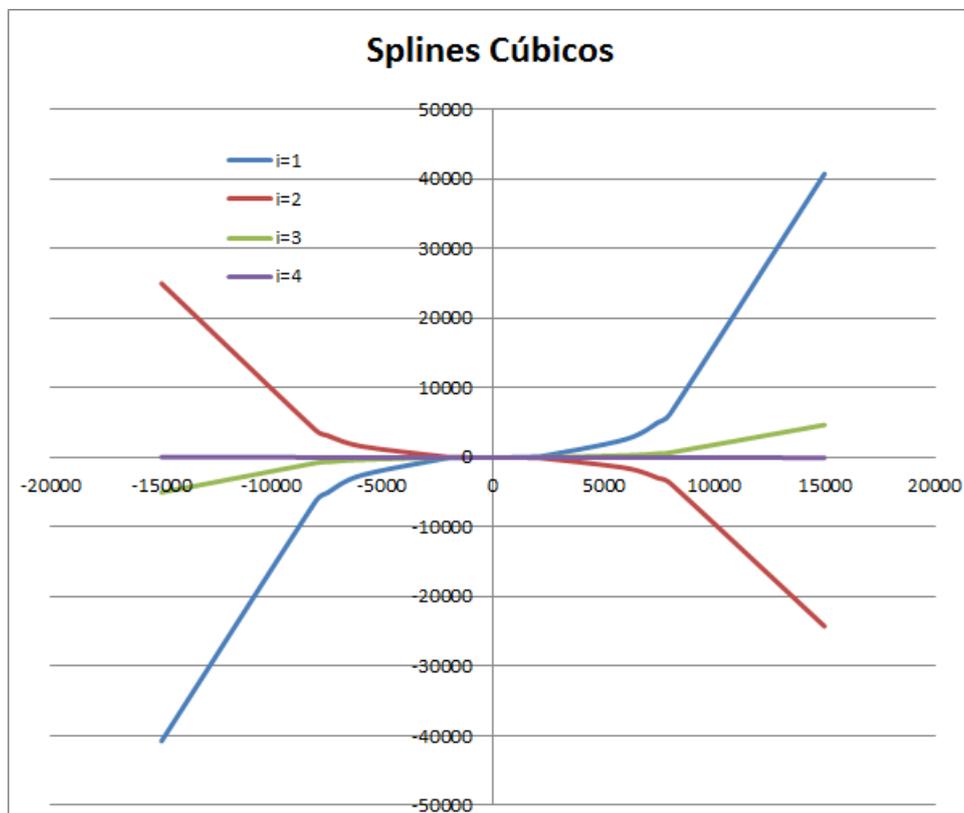


Figura C.5: Análisis de Curva de Rendimientos en tiempo: CETES (Valmer Grupo BMV), Splines Cúbicos

En la figura (C.6) se observa como se interceptan las diferentes curvas de cada uno de los polinomios en los valores del mercado *CETES*.

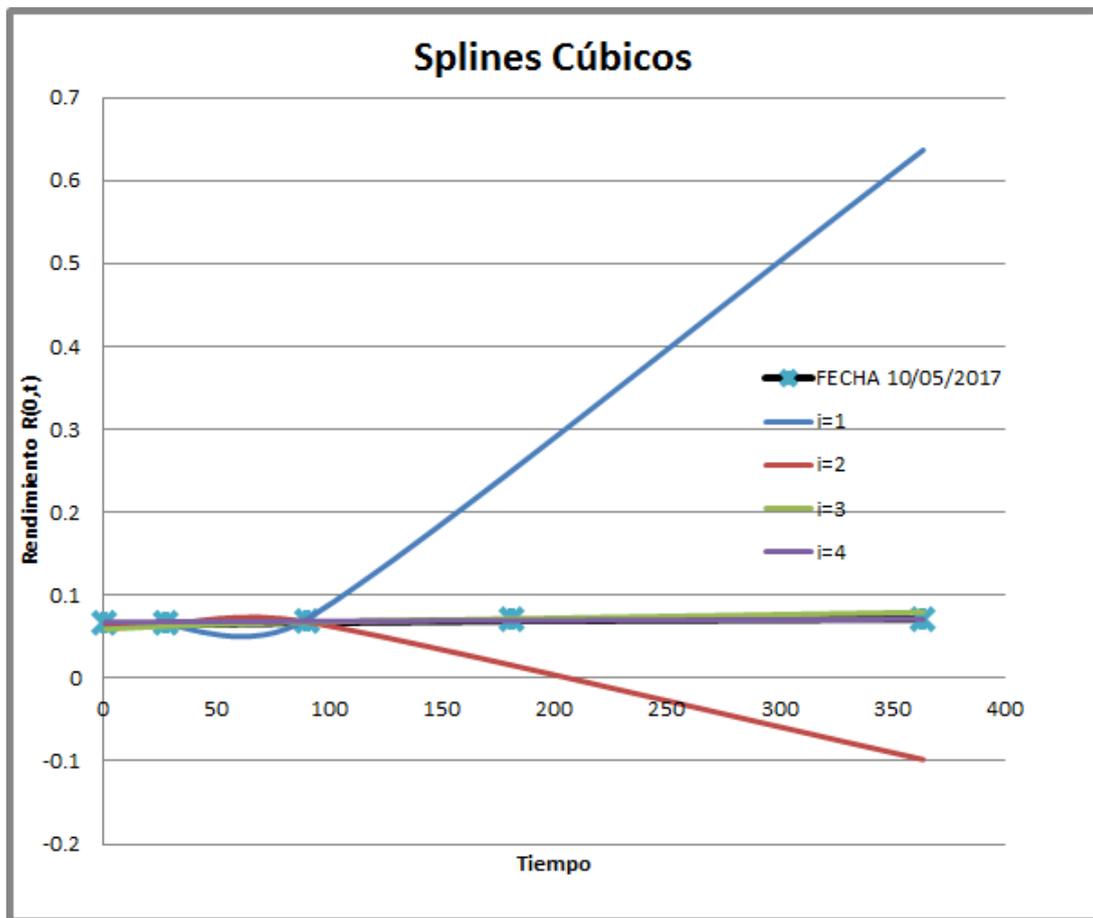


Figura C.6: Análisis Curva de Rendimientos para encontrar mejor estimación: CETES (Valmer Grupo BMV), Splines Cúbicos

En la figura (C.7), se magnifican los cuatros segmentos de polinomios a fin resaltar la curva estimada de rendimiento.

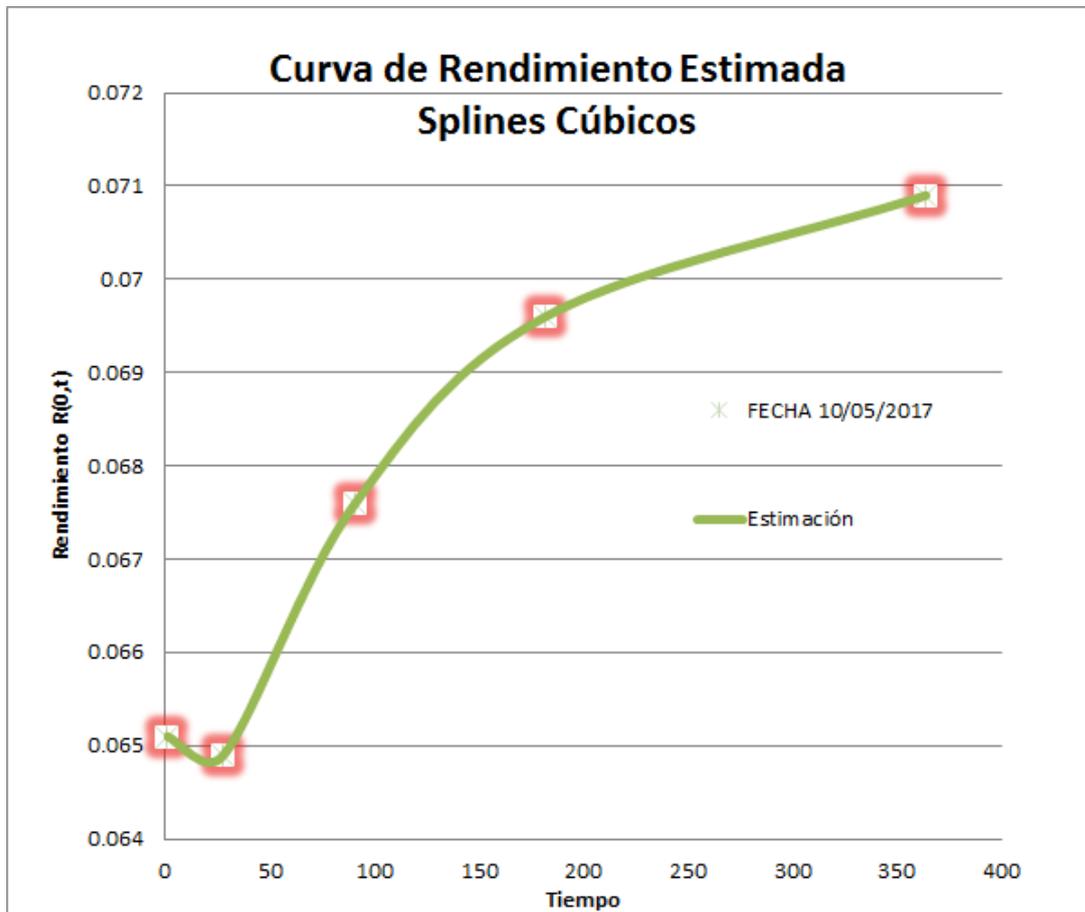


Figura C.7: Curva de Rendimientos: CETES (Valmer Grupo BMV), Splines Cúbicos

Apéndice D

Modelo de Nelson-Siegel

El modelo de Nelson y Siegel (1978) proporciona un método de estimación paramétrica de una curva de rendimientos, en la evolución de la tasa Forward instantánea y no en la dinámica de la tasa corta. La curva de rendimiento se obtiene como el promedio de valores futuros de la tasa Forward instantánea y no como el promedio de valores futuros de la tasa corta. Es un modelo no polinomial que elimina cambios abruptos en la estructura de plazos de la tasa de interés, sobre todo en el largo plazo.

Donde:

$$R(0, T_i) = \beta_0 + \beta_1 \frac{1 - \exp^{-\frac{T_i}{\tau}}}{\frac{T_i}{\tau}} + \beta_2 \exp^{-\frac{T_i}{\tau}}$$

$R(0, T_i)$ = Tasa de interés spot

β_0 = Representa la tasa de interés a la cual converge la curva en el largo plazo

β_1 = El signo de este parámetro indica si el corto plazo de la curva estará por abajo (-) o por arriba del largo plazo (+)

β_2 = Determina la magnitud y la dirección de la joroba

$(T - t)$ = Plazo en días de cada nodo de la curva

τ = Parámetro positivo que indica el plazo aproximado en que se dará la joroba

En esta sección se presentan dos ejemplos ilustrativos del modelo de Nelson y Siegel. En el cuadro (D.1) que muestra los rendimientos de *MBONOS* con fecha de 08/05/17, en el cuadro (D.6) muestra los valores rendimientos de los *CETES* con fecha de 10/05/17, emitidos por el gobierno mexicano a distintos plazos.

En el figura (D.1), se observan las curvas de rendimiento con diferentes plazos de *MBONOS* y estimación del parámetro si su valor es $\tau = 973$ se representa la mejor estimación ya que mejora la significativamente estadística de los demás parámetros y R^2 es alta por lo tanto se proporciona un modelo aceptable. En el cuadro (D.2) se presentan los diferentes valores de τ y sus respectivos estadísticos y valores en R^2 .

Estimación Paramétrica de Curvas de Rendimiento: Nensol y Siegel.			
M_BONOS			
PLAZOS	FECHA	08/05/2017	Estimación $\tau = 973$ y $\beta_0=0.0763581$
38		0.0656	0.06636021
220		0.0668	0.067059621
402		0.0683	0.067698331
584		0.0685	0.068281622
947		0.0697	0.069298635
1130		0.0706	0.069746175
1494		0.0711	0.070525682
1858		0.0713	0.071179706
2404		0.0715	0.071972935
2768		0.0716	0.072401967
3223		0.0719	0.072850159
3678		0.0726	0.073219896
4406		0.0731	0.073687691
5134		0.0741	0.074043995
6408		0.0748	0.074491168
7136		0.0751	0.074679128
7864		0.0753	0.074833414
9320		0.0755	0.075070879

Figura D.1: Son datos observados *MBONOS* (Valmer Grupo BMV), y los resultados de Estimaciones Modelo de Nelson y Siegel.

Se tienen los datos del mercado con distintos plazos, con distintos valores de $\tau = \{ 25.5, 135, 575, 747, 973 \}$, se obtiene el sistema matricial que se describe a continuación:

$$\begin{pmatrix} 0.0656 \\ 0.0668 \\ 0.0683 \\ 0.0685 \\ 0.0697 \\ 0.0706 \\ 0.0711 \\ 0.0713 \\ 0.0715 \\ 0.0716 \\ 0.0719 \\ 0.0726 \\ 0.0731 \\ 0.0741 \\ 0.0748 \\ 0.0751 \\ 0.0753 \\ 0.0755 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & \frac{[1-e^{-\frac{38}{\tau}}]}{\frac{38}{\tau}}, & e^{-\frac{38}{\tau}} \\ 1, & \frac{[1-e^{-\frac{220}{\tau}}]}{\frac{220}{\tau}}, & e^{-\frac{220}{\tau}} \\ 1, & \frac{[1-e^{-\frac{402}{\tau}}]}{\frac{402}{\tau}}, & e^{-\frac{402}{\tau}} \\ 1, & \frac{[1-e^{-\frac{584}{\tau}}]}{\frac{584}{\tau}}, & e^{-\frac{584}{\tau}} \\ 1, & \frac{[1-e^{-\frac{947}{\tau}}]}{\frac{947}{\tau}}, & e^{-\frac{947}{\tau}} \\ 1, & \frac{[1-e^{-\frac{1130}{\tau}}]}{\frac{1130}{\tau}}, & e^{-\frac{1130}{\tau}} \\ 1, & \frac{[1-e^{-\frac{1494}{\tau}}]}{\frac{1494}{\tau}}, & e^{-\frac{1494}{\tau}} \\ 1, & \frac{[1-e^{-\frac{1858}{\tau}}]}{\frac{1858}{\tau}}, & e^{-\frac{1858}{\tau}} \\ 1, & \frac{[1-e^{-\frac{2404}{\tau}}]}{\frac{2404}{\tau}}, & e^{-\frac{2404}{\tau}} \\ 1, & \frac{[1-e^{-\frac{2768}{\tau}}]}{\frac{2768}{\tau}}, & e^{-\frac{2768}{\tau}} \\ 1, & \frac{[1-e^{-\frac{3223}{\tau}}]}{\frac{3223}{\tau}}, & e^{-\frac{3223}{\tau}} \\ 1, & \frac{[1-e^{-\frac{3678}{\tau}}]}{\frac{3678}{\tau}}, & e^{-\frac{3678}{\tau}} \\ 1, & \frac{[1-e^{-\frac{4406}{\tau}}]}{\frac{4406}{\tau}}, & e^{-\frac{4406}{\tau}} \\ 1, & \frac{[1-e^{-\frac{5134}{\tau}}]}{\frac{5134}{\tau}}, & e^{-\frac{5134}{\tau}} \\ 1, & \frac{[1-e^{-\frac{6408}{\tau}}]}{\frac{6408}{\tau}}, & e^{-\frac{6408}{\tau}} \\ 1, & \frac{[1-e^{-\frac{7136}{\tau}}]}{\frac{7136}{\tau}}, & e^{-\frac{7136}{\tau}} \\ 1, & \frac{[1-e^{-\frac{7864}{\tau}}]}{\frac{7864}{\tau}}, & e^{-\frac{7864}{\tau}} \\ 1, & \frac{[1-e^{-\frac{9320}{\tau}}]}{\frac{9320}{\tau}}, & e^{-\frac{9320}{\tau}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

τ	$\widehat{\delta}_0$ (Estadístico t)	$\widehat{\delta}_1$ (Estadístico t)	$\widehat{\delta}_2$ (Estadístico t)	R^2
25.5	0.0734337(160.100)	-0.0734321(-5.679)	0.1346526(4.575)	0.9996276
135	0.0740631(183.032)	-0.0235964(-7.01)	0.0165024(4.011)	0.9997751
575	0.068976(11.257)	0.009008(0.624)	-0.013186(-1.562)	0.9999207
747	0.0759944(179.539)	-0.0135368 (-7.073)	0.0036438(1.955)	0.9999331
973	0.0763581(159.852)	-0.0123321(-6.241)	0.0021800(1.196)	0.9999407

Figura D.2: Estimación de los parámetros para diferentes valores de τ para MBONOS

Las figura (D.3) presenta las curvas de rendimiento estimadas con el modelo de Nelson y Siegel para diferentes valores del parámetro τ . En todos los casos, en el largo plazo, la curva de rendimiento se aproxima, asintóticamente a β_0 .

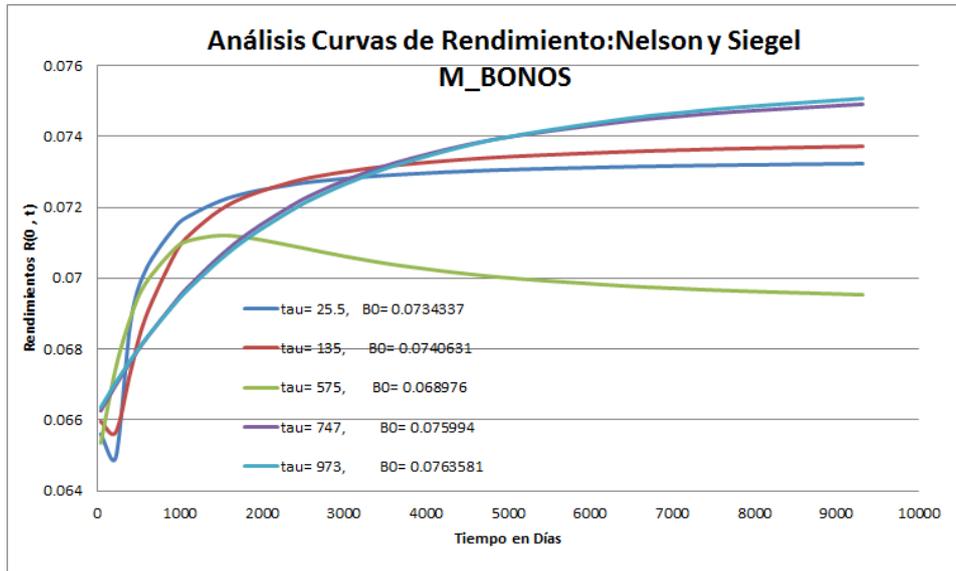


Figura D.3: Análisis de las Curva de Rendimientos corto y largo plazos MBONOS

$$\begin{pmatrix} 0.0656 \\ 0.0668 \\ 0.0683 \\ 0.0685 \\ 0.0697 \\ 0.0706 \\ 0.0711 \\ 0.0713 \\ 0.0715 \\ 0.0716 \\ 0.0719 \\ 0.0726 \\ 0.0731 \\ 0.0741 \\ 0.0748 \\ 0.0751 \\ 0.0753 \\ 0.0755 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & \frac{[1-e^{-\frac{38}{973}}]}{\frac{38}{973}}, & e^{-\frac{38}{973}} \\ 1, & \frac{[1-e^{-\frac{220}{973}}]}{\frac{220}{973}}, & e^{-\frac{220}{973}} \\ 1, & \frac{[1-e^{-\frac{402}{973}}]}{\frac{402}{973}}, & e^{-\frac{402}{973}} \\ 1, & \frac{[1-e^{-\frac{584}{973}}]}{\frac{584}{973}}, & e^{-\frac{584}{973}} \\ 1, & \frac{[1-e^{-\frac{947}{973}}]}{\frac{947}{973}}, & e^{-\frac{947}{973}} \\ 1, & \frac{[1-e^{-\frac{1130}{973}}]}{\frac{1130}{973}}, & e^{-\frac{1130}{973}} \\ 1, & \frac{[1-e^{-\frac{1494}{973}}]}{\frac{1494}{973}}, & e^{-\frac{1494}{973}} \\ 1, & \frac{[1-e^{-\frac{1858}{973}}]}{\frac{1858}{973}}, & e^{-\frac{1858}{973}} \\ 1, & \frac{[1-e^{-\frac{2404}{973}}]}{\frac{2404}{973}}, & e^{-\frac{2404}{973}} \\ 1, & \frac{[1-e^{-\frac{2768}{973}}]}{\frac{2768}{973}}, & e^{-\frac{2768}{973}} \\ 1, & \frac{[1-e^{-\frac{3223}{973}}]}{\frac{3223}{973}}, & e^{-\frac{3223}{973}} \\ 1, & \frac{[1-e^{-\frac{3678}{973}}]}{\frac{3678}{973}}, & e^{-\frac{3678}{973}} \\ 1, & \frac{[1-e^{-\frac{4406}{973}}]}{\frac{4406}{973}}, & e^{-\frac{4406}{973}} \\ 1, & \frac{[1-e^{-\frac{5134}{973}}]}{\frac{5134}{973}}, & e^{-\frac{5134}{973}} \\ 1, & \frac{[1-e^{-\frac{6408}{973}}]}{\frac{6408}{973}}, & e^{-\frac{6408}{973}} \\ 1, & \frac{[1-e^{-\frac{7136}{973}}]}{\frac{7136}{973}}, & e^{-\frac{7136}{973}} \\ 1, & \frac{[1-e^{-\frac{7864}{973}}]}{\frac{7864}{973}}, & e^{-\frac{7864}{973}} \\ 1, & \frac{[1-e^{-\frac{9320}{973}}]}{\frac{9320}{973}}, & e^{-\frac{9320}{973}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

Las figura (D.5) presenta la curva de rendimiento estimada con el modelo de Nelson y Siegel, del parámetro $\tau = 973$. En el largo plazo, la curva de rendimiento se aproxima, asintóticamente a $\beta_0 = 0,0763581$. De igual forma se puede evaluar con otro valores de τ siempre se proporcionen un R^2 alto y presente los demás parámetro sean altamente significativos estadísticamente.

Coefficients: tau= 973	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
β_0	0.0763581	0.0004777	159.852	0.0000000000000002***
β_1	-0.0123321	0.0019758	-6.241	0.0000158***
β_2	0.00218	0.0018231	1.196	0.25

Figura D.4: Estimación de los coeficientes con valor de $\tau = 973$ y $\beta_0 = 0,0763581$

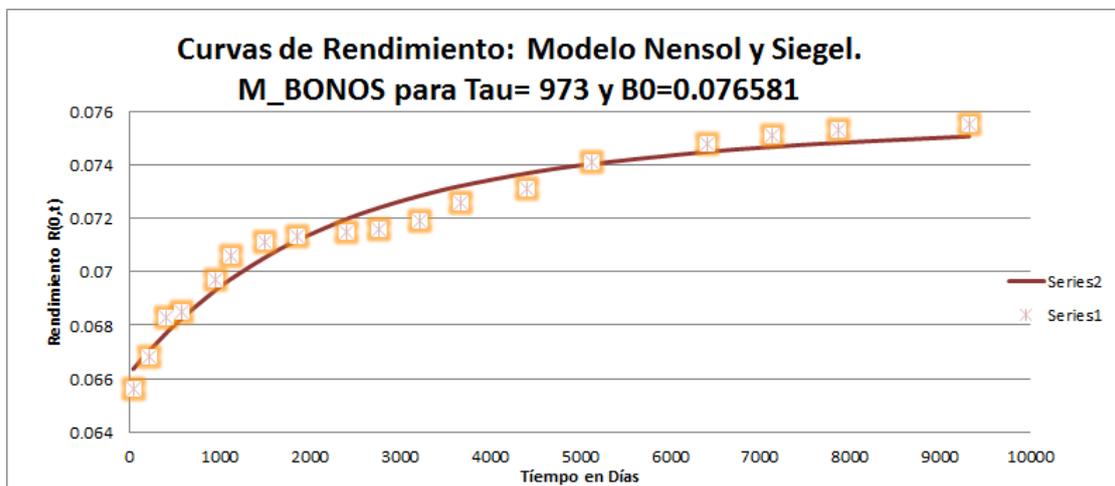


Figura D.5: Curva de Rendimientos Estimación $\tau = 973$ y $\beta_0 = 0,0763581$

En el figura (D.6), se observan las curvas de rendimiento con diferentes plazos de *CETES* y la estimación de $\tau = 27$ es el estadístico mas significativo ya que presenta R^2 , más alto entonces por lo tanto es un modelo es aceptable. En el figura (D.7) se presentan los diferentes valores de τ y sus respectivos estadísticos y valores en R^2

Estimación Paramétrica de Curvas de Rendimiento: Modelo de Nelson y Siegel. CETES		
PLAZOS	FECHA 10/05/2017	Estimación Tau=27,B0=0.0722387
1	0.0651	0.065079486
28	0.0649	0.064963654
91	0.0676	0.067516251
182	0.0696	0.069619264
364	0.0709	0.070921139

Figura D.6: Son datos observados CETES (Valmer Grupo BMV), y los resultados de Estimaciones Modelo de Nelson y Siegel

Se tienen los datos del mercado con distintos plazos, con distintos valores de $\tau = \{ 31.1, 27, 75, 268, 350 \}$, se obtiene el sistema matricial que se describe a continuación:

$$\begin{pmatrix} 0.0651 \\ 0.0649 \\ 0.0676 \\ 0.0696 \\ 0.0709 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & \frac{[1-e^{-(\frac{1}{\tau})}]}{(\frac{1}{\tau})}, & e^{-(\frac{1}{\tau})} \\ 1, & \frac{[1-e^{-(\frac{28}{\tau})}]}{(\frac{28}{\tau})}, & e^{-(\frac{28}{\tau})} \\ 1, & \frac{[1-e^{-(\frac{91}{\tau})}]}{(\frac{91}{\tau})}, & e^{-(\frac{91}{\tau})} \\ 1, & \frac{[1-e^{-(\frac{182}{\tau})}]}{(\frac{182}{\tau})}, & e^{-(\frac{182}{\tau})} \\ 1, & \frac{[1-e^{-(\frac{364}{\tau})}]}{(\frac{364}{\tau})}, & e^{-(\frac{364}{\tau})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

τ	$\widehat{\delta}_0$ (Estadístico t)	$\widehat{\delta}_1$ (Estadístico t)	$\widehat{\delta}_2$ (Estadístico t)	R^2
3.1	0.0705183 (97.280)	-0.0533128 (-4.312)	0.0554350 (3.973)	0.9999131
27	0.0722387 (831.32)	-0.0177629(-43.669)	0.0106666(28.88)	0.9999995
75	0.073623(46.395)	-0.012438(-2.297)	0.003452(0.819)	0.9999613
268	0.06469(6.132)	0.02181(0.839)	-0.02196(-1.388)	0.9999634
350	0.05393(3.170)	0.04950(1.234)	-0.03888(-1.658)	0.9999647

Figura D.7: Estimación de los parámetros para diferentes valores de τ para los CETES

Las figura (D.8) muestra las curvas de rendimiento estimadas con el modelo de Nelson y Siegel para diferentes valores del parámetro τ . En todos los casos, en el largo plazo, la curva de rendimiento se aproxima a largo plazo, asintóticamente a β_0 en algunos casos estas curvas se aproximan por abajo de β_0 en otros casos lo hacen por arriba de β_0 .

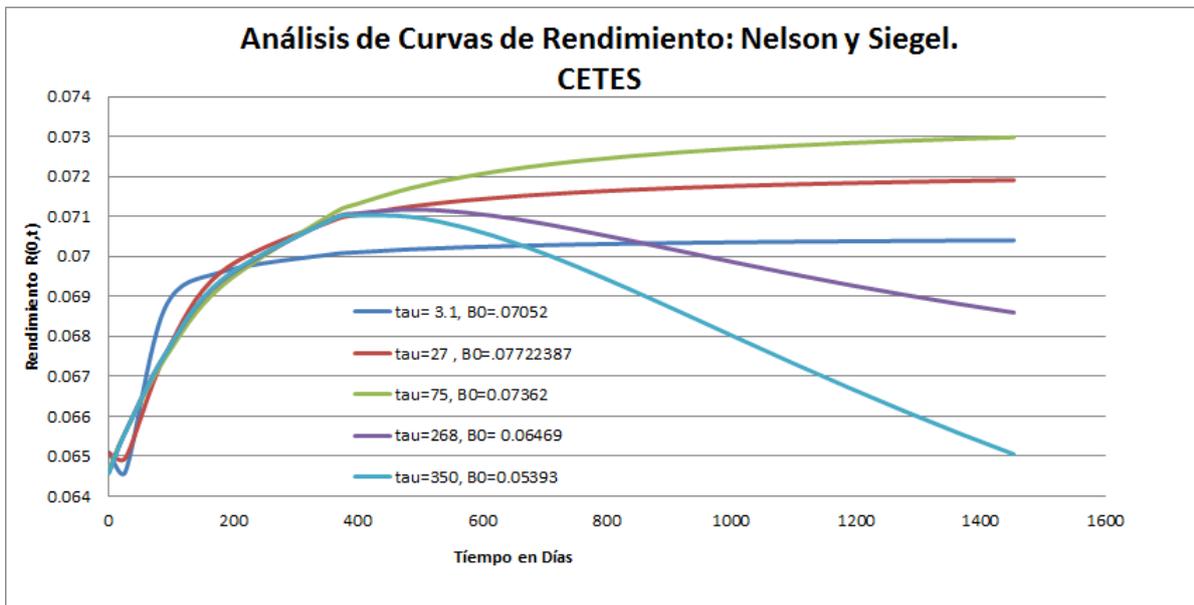


Figura D.8: Análisis de las Curva de Rendimientos corto y largo plazo CETES

Las figura (D.10) muestra la curvas de rendimiento estimada con el modelo de Nelson y Siegel, del parámetro $\tau = 27$. En el largo plazo, la curva de rendimiento se aproxima por abajo , asintóticamente a $\beta_0 = 0,0722383$. De igual forma se puede evaluar con otro valores de τ siempre que haya un R^2 alto y que los demás parámetros sean altamente significativos estadísticamente.

$$\begin{pmatrix} 0.0651 \\ 0.0649 \\ 0.0676 \\ 0.0696 \\ 0.0709 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & \frac{[1-e^{-\frac{1}{27}}]}{(\frac{1}{27})}, & e^{-\frac{1}{27}} \\ 1, & \frac{[1-e^{-\frac{28}{27}}]}{(\frac{28}{27})}, & e^{-\frac{28}{27}} \\ 1, & \frac{[1-e^{-\frac{91}{27}}]}{(\frac{91}{27})}, & e^{-\frac{91}{27}} \\ 1, & \frac{[1-e^{-\frac{182}{27}}]}{(\frac{182}{27})}, & e^{-\frac{182}{27}} \\ 1, & \frac{[1-e^{-\frac{364}{27}}]}{(\frac{364}{27})}, & e^{-\frac{364}{27}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

Coefficients:				
Valor de tau= 27	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
β_0	0.0722387	0.0000869	831.32	0.00000145***
β_1	-0.0177629	0.0004069	-43.66	0.000524***
β_2	0.0106666	0.0003694	28.88	0.001197**

Figura D.9: Estimación de los coeficientes con valor de $\tau = 27$ y $\beta_0 = 0,0722383$ para los cetes

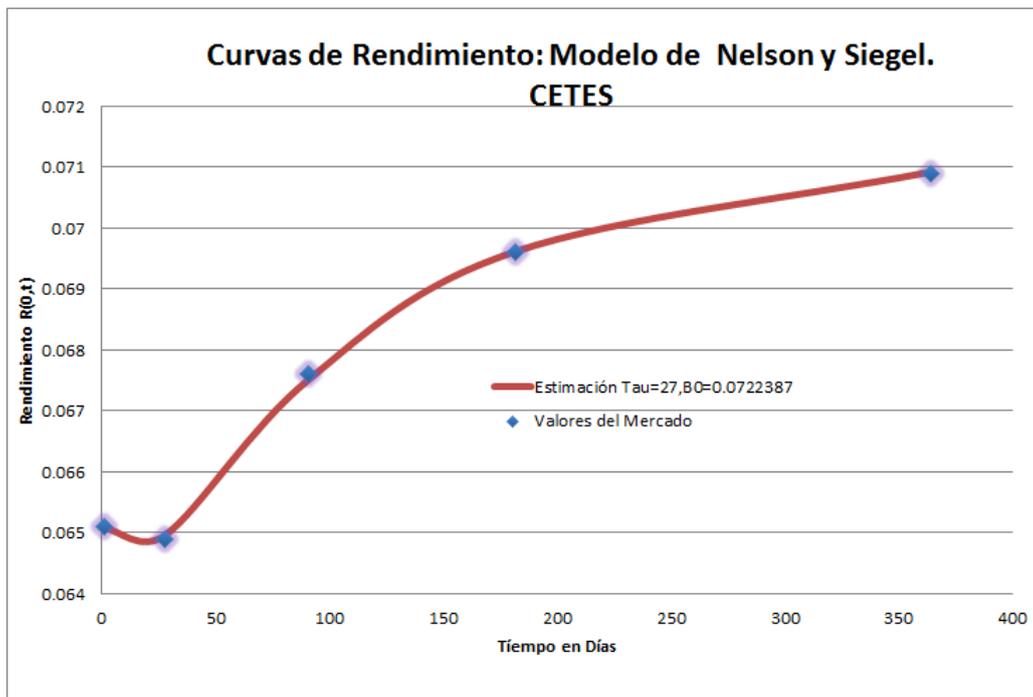


Figura D.10: Curva de Rendimientos CETES en distintos plazos con $\tau = 27$ y $\beta_0 = 0,0722383$

A continuación se muestra el código en el programa estadístico R con el cual ya una vez seleccionado el τ en el modelo de Nelsol y Siegel, se estudio a los diferentes coeficientes del modelos con ayuda de diferentes paquetes que ofrece el programa y que nos permite encontrar la mejor aproximación a nuestros valores del mercado, el programa encuentra los valores de coeficientes como es R cuadrada ajustada, matriz de covarianza, una predicción, que se comportan como normal.

```
x<-c(38,220,402,584,947,1130,1494,1858,2404,2768,3223,3678,4406,5134,6408,
+7136,7864,9320)
y<-c(.0656,.0668,.0683,.0685,.0697,.0706,.0711,.0713,.0715,.0716,.0719,
+.0726,.0731,.0741,.0748,.0751,.0753,.0755)
#x<-c(1,28,91,182,364)
#y<-c(0.0651,0.0649,0.0676,0.0696,0.0709)
#beta00<-c(1,1,1,1,1)
beta00<-c(1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)
tau1<-973
beta11<- (1-exp(-(x/tau1)))/(x/tau1)
beta22<- exp(-(x/tau1))
#Modelo de Regresión Múltiple
fitt<-lm(y ~ beta00-1 + beta11 + beta22)
summary(fitt)
resumen=summary(fitt)
attributes(resumen)
#la matriz varianza covarianza de los betas
resumen$Cov
#el R cuadrado de la regresión
resumen$R.sq
#el R ajustado
resumen$adj.
#la estadística F de a prueba global
resumen$fstat
#para obtener los valores de producidos con el modelos
fitt$fitted
plot(fitt$fitted)
#los residuales
fitt$res
#graficar los residuales
#plot(fitt$res)
#probar normalidad de los residuales
shapiro.test(fitt$res)
#los residuales provienen de una dist Normal
#para predecir datos futuros
data.prueba=data.frame(beta00,beta11,beta22)
predict(fitt,data.prueba[1:5,])
fitt
tau1
```

Bibliografía

- [1] ABREU GOODGER GAVIN BRENDAN, ACOSTA ARELLANO MARÍA REBECA, L. T. C. C. M. J. J. G. G. M. D. G. P. J. R. J. V. L. S. C. J. A. T. R. C. Y. T. V. M. S. El mercado de valores gubernamentales en México. *Banco de México* (2014).
- [2] BANCO DE MÉXICO. Importancia del banco de México en el sistema financiero mexicano. *Banco de México* (Agosto 2008).
- [3] BANCO DE MÉXICO. Reporte sobre el sistema financiero. *Sistema Financiero* (Noviembre 2016).
- [4] BURDEN, R. L., AND FAIRES, J. *Análisis Numérico*, Séptima ed. Thomson.
- [5] CESF. Informe anual sobre el estado que guarda la estabilidad del sistema financiero en México y sobre las actividades realizadas para el consejo de estabilidad del sistema financiero. *Banco de México* (Marzo 2016).
- [6] CÁSTOR GUISANDE GONZÁLEZ, A. V. L. *Gráficos Estadísticos y mapas con R*. Ediciones Días de Santos, 2012.
- [7] DOUGLAS C. MONTGOMEY, ELIZABETH A. PECK, G. G. V. *Introducción al Análisis de Regresión Lineal*. Editorial Continental, 2002.
- [8] GREENE, W. H. *Análisis Econométrico*, 3ra ed. Prentice Hall, 1999.
- [9] HULL, J. C. *Introducción a los Mercados de Futuros y Opciones*, Octava ed. Pearson, 2014.
- [10] JOSUÉ FERNANDO CORTÉS ESPADA Y MANUEL RAMOS-FRANCIA. Un modelo macro-económico de la estructura temporal de tasas de interés en México. *Banco de México* (Julio 2008).
- [11] LUIS FERRUZ AGUDO, MARÍA PILAR PORTILLO TARRAGONA, J. L. S. M. *Dirección financiera del Riesgo de Interés*, Segunda ed. Pirámide, 2009.
- [12] MARIO REYNA CERECERO, D. S. C. Y. H. S. B. La curva de rendimiento y su relación con la actividad económica: Una aplicación para México. *Banco de México* (Diciembre 2008).
- [13] MARTÍNEZ, F. V. *Riesgos Financieros y Económicos: Productos Derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*, Segunda ed. Cengage Learning, 2011.
- [14] NOVALES, A. C. *Econometría*, segunda ed. McGraw Hill, 2012.
- [15] PLIEGO, F. J. M. *Introducción a la Estadística Económica y Empresarial*. Editorial AC, 1994.

- [16] SHCP Y CNVB. La perspectiva de la cnbv sobre el sistema financiero mexicano. *CNBV* (Agosto 2013).
- [17] V.K, R. *An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistics*, segunda ed. John Wiley & Son, 2015.

Índice de figuras

1.1. La interacción entre las unidades superavitarias y deficitarias, para canalizar los recursos.	5
1.2. El Sector Bancario ha obtenido un Crecimiento Significativo en los últimos años, CNVB, Agosto de 2013	8
1.3. Sin embargo el sector enfrenta importantes retos	8
1.4. Se observa una alta concentración del sistema bancario en bancos, CNBV AGOSTO 2013	9
1.5. El sector bursátil ha tenido un crecimiento estable en los últimos años, CNBV AGOSTO 2013	10
1.6. A su vez, la Bolsa Mexicana de Valores ha incrementado su valor, CNBV AGOSTO 2013	11
1.7. Participación del Gobierno Federal	13
1.8. Participación de iniciativa privada emisión de deuda	13
1.9. Participación de iniciativa privada	14
1.10. Orden jerárquico de los mercados financieros domésticos	14
1.11. Emisores de valores gubernamentales en México	15
1.12. Tasa de inflación y tasa de interés*	16
1.13. Tipo de Cambio*	17
1.14. Déficit económico de caja del sector público*	17
1.15. gráfica	18
1.16. Curva de Rendimientos*	20
1.17. ahorro financiero	20
1.18. Cartera de inversionistas institucionales nacionales	21
1.19. Distribución de los valores gubernamentales	21
1.20. Deuda interna del Gobierno Federal	22
1.21. Volumen operado de valores gubernamentales en INDEVAL	22
1.22. Volumen operado de valores gubernamentales en INDEVAL	23
1.23. instrumentos finan	24
1.24. Volumen de operación futuros MexDer	25
1.25. Volumen de operación futuros MexDer	26
1.26. Contrato de futuro de bono a 10 años en MexDer	26
1.27. Contrato de futuro de TIIE 28 en MexDer	27
1.28. Emisiones de referencia	28
1.29. Valores gubernamentales en circulación por tipo y plazo	28
1.30. Composición de valores gubernamentales en circulación	28
1.31. Valores gubernamentales en circulación por tipo de instrumento	29
1.32. Cetesdirecto: Perfil del inversionista por género	30
1.33. Registro y contratación de programa Cetesdirecto	31
1.34. Canal de contratación Cetesdirecto	31
1.35. Cetesdirecto: Perfil del inversionista por actividad	32
1.36. Cetesdirecto: Perfil del inversionista por edad	32

1.37. Venta directa de cetes y bonos a través de Cetesdirecto	33
1.38. Venta directa de bonos D a través de Cetesdirecto	33
1.39. Venta directa de udibonos a través de Cetesdirecto	34
2.1. Interpolación de trazadores cúbicos	44
2.2. Datos para la regresión múltiple	50
3.1. Posición larga en forwards	54
3.2. Posición corta en forwards	54
3.3. El caso de un exportador que vende en dólares y tiene costo de ventas en Pesos: Dicho contrato tendrá tres componentes principales: el plazo, el monto y un valor determinado para el tipo de cambio del peso frente al dólar.	61
3.4. El bono al vencimiento y descuento que se coloca a valor nominal, el precio inicial y al vencimiento es el mismo, al momento de su vencimiento se pagará el capital más el interés pactado; de este tipo de instrumentos.	66
4.1. Funciones típicas de kernel	69
4.2. Observaciones de Rendimientos Cetes	71
4.3. Curva de rendimientos estimada con kernel normal esta representada con azul y los puntos rojos son datos observados.	71
4.4. Vector de solución	76
4.5. Curva de Rendimientos de Cetes con splines cúbicos	77
4.6. Marnificación de la Curva de Rendimientos de Cetes con splines cúbicos	77
4.7. Comportamiento de $R(0, T)$ con $\tau = 1, \beta_0 = 1, \beta_1 = -1$. Las funciones en la gráfi- ca corresponden, de abajo hacia arriba, a los valores $\beta_2 = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$	84
4.8. Estimadores de los parámetros para diferentes valores de τ	86
4.9. Estimadores del modelo con $\tau = 75$	87
4.10. Curva de rendimiento estimada con $\tau = 0.5$	87
4.11. Curva de rendimiento estimada con $\tau = 1$	88
4.12. Curva de rendimiento estimada con $\tau = 10$	88
4.13. Curva de rendimiento estimada con $\tau = 75$	88
4.14. Curva de rendimiento estimada con $\tau = 150$	89
4.15. Curva de rendimiento estimada con $\tau = 350$	89
A.1. Serie histórica de los datos observados Cetes (Banco México) desde 1978 hasta 11/mayo/2017	93
B.1. Son datos observados BonosM (Valmer Grupo BMV), y los resultados de Esti- maciones Kernel	97
B.2. Curva de Rendimiento: Núcleo de Suavizado Normal, y los datos observados	98
B.3. Son datos observados Cetes (Valmer Grupo BMV), y los resultados de Estima- ciones Kernel	98
B.4. Curva de Rendimiento: Núcleo de Suavizado Epanechnikov y los datos observados	99
B.5. Código en R para General las Estimaciones con Núcleos	100
C.1. Son datos observados MBonos (Valmer Grupo BMV), y los resultados de Splines Cúbicos	101
C.2. Curva de Rendimientos: MBonos (Valmer Grupo BMV), Splines Cúbicos	102
C.3. Código en R para Generar las Estimaciones con Splines Cúbicos	102
C.4. Plazos y valores del mercado de: CETES (Valmer Grupo BMV), y estimaciones con Splines Cúbicos	103

C.5. Análisis de Curva de Rendimientos en tiempo: CETES (Valmer Grupo BMV), Splines Cúbicos	103
C.6. Análisis Curva de Rendimientos para encontrar mejor estimación: CETES (Valmer Grupo BMV), Splines Cúbicos	104
C.7. Curva de Rendimientos: CETES (Valmer Grupo BMV), Splines Cúbicos	105
D.1. Son datos observados <i>MBONOS</i> (Valmer Grupo BMV), y los resultados de Estimaciones Modelo de Nelson y Siegel.	107
D.2. Estimación de los parámetros para diferentes valores de τ para <i>MBONOS</i>	108
D.3. Análisis de las Curva de Rendimientos corto y largo plazos <i>MBONOS</i>	109
D.4. Estimación de los coeficientes con valor de $\tau = 973$ y $\beta_0 = 0,0763581$	110
D.5. Curva de Rendimientos Estimación $\tau = 973$ y $\beta_0 = 0,0763581$	110
D.6. Son datos observados CETES (Valmer Grupo BMV), y los resultados de Estimaciones Modelo de Nelson y Siegel	111
D.7. Estimación de los parámetros para diferentes valores de τ para los CETES	111
D.8. Análisis de las Curva de Rendimientos corto y largo plazo CETES	112
D.9. Estimación de los coeficientes con valor de $\tau = 27$ y $\beta_0 = 0,0722383$ para los cetes	113
D.10. Curva de Rendimientos CETES en distintos plazos con $\tau = 27$ y $\beta_0 = 0,0722383$	113

Índice de cuadros