



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

**ESTABILIDAD ESTRUCTURAL DE
LOS SISTEMAS DINÁMICOS**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

ADRIÁN ALBERTO DE FLON GASCA

A S E S O R :

DR ALBERTO LEÓN KUSHNER SCHUNR

CIUDAD DE MÉXICO

2018





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

| | |
|---|---|
| 1. Datos del alumno | 1. Datos del alumno |
| Apellido paterno | De Flon |
| Apellido materno | Gasca |
| Nombre | Adrián Alberto |
| Teléfono | 04455 8180 7619 |
| Universidad Nacional Autónoma de México | Universidad Nacional Autónoma de México |
| Facultad de Ciencias | Facultad de Ciencias |
| Carrera | Matemáticas |
| Número de cuenta | 308534919 |
| 2. Datos del tutor | 2. Datos del tutor |
| Grado | Doctor en Ciencias |
| Nombre | Alberto León |
| Apellido paterno | Kushner |
| Apellido materno | Schnur |
| 3. Datos del sinodal 1 | 3. Datos del sinodal 1 |
| Grado | Doctor en Ciencias |
| Nombre | Adolfo |
| Apellido paterno | Guillot |
| Apellido materno | Santiago |
| 4. Datos del sinodal 2 | 4. Datos del sinodal 2 |
| Grado | Doctor en Ciencias |
| Nombre | Germán Aubín |
| Apellido paterno | Arroyo |
| Apellido materno | Camacho |
| 5. Datos del sinodal 3 | 5. Datos del sinodal 3 |
| Grado | Doctora en Ciencias |
| Nombre | Laura |
| Apellido paterno | Ortiz |
| Apellido materno | Bobadilla |
| 6. Datos del sinodal 4 | 6. Datos del sinodal 4 |
| Grado | Doctor en Ciencias |
| Nombre | Oscar Alfredo |
| Apellido paterno | Palmas |
| Apellido materno | Velasco |
| 8. Datos del trabajo escrito | 8. Datos del trabajo escrito |
| Título | Estabilidad estructural de los sistemas dinámicos |
| Subtítulo | - |
| Número de páginas | 141 |
| Año | 2018 |

Índice general

| | |
|---|------------|
| Introducción | v |
| 1. Variedades diferenciales y campos vectoriales | 1 |
| 1.1. Preliminares de Cálculo | 1 |
| 1.2. El Teorema de Poincaré-Bendixson | 13 |
| 1.3. Topología de funciones C^k | 23 |
| 1.4. Transversalidad | 26 |
| 1.5. Estabilidad Estructural | 28 |
| 2. Estabilidad Estructural local | 39 |
| 2.1. Campos lineales | 40 |
| 2.2. Singularidades y puntos fijos hiperbólicos | 49 |
| 2.3. Estabilidad local | 54 |
| 2.4. Clasificación local | 62 |
| 2.5. Variedad estable e inestable | 67 |
| 2.6. λ -Lema | 76 |
| 3. Teorema de Kupka - Smale | 83 |
| 3.1. Transformación de Poincaré | 83 |
| 3.2. Órbitas cerradas hiperbólicas | 89 |
| 3.3. Campos de Kupka - Smale | 95 |
| 4. El Teorema de Peixoto y generalizaciones | 103 |
| 4.1. Campos de Morse-Smale | 103 |
| 4.2. Densidad de los campos de Morse-Smale | 115 |
| 4.3. Generalizaciones | 125 |
| 4.4. Clases estables de campos y difeomorfismos | 127 |

Introducción

Un campo vectorial sobre una variedad diferencial M genera un flujo el cual, a cada tiempo $t \in \mathbb{R}$ define una aplicación diferenciable $\alpha_t : M \rightarrow M$, la cual varía suavemente respecto al tiempo t . Análogamente, al iterar un difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ obtenemos, para cada tiempo $n \in \mathbb{Z}$, el difeomorfismo f^n . En ambos casos, la trayectoria de los puntos de M al variar el tiempo genera una dinámica sobre M . Como veremos a lo largo del texto, hay cierta dualidad entre la dinámica de un campo vectorial y la de los difeomorfismos. Así, para simplificar, nos referiremos a ambos como sistemas dinámicos. Decimos que dos sistemas dinámicos son topológicamente equivalentes si sus dinámicas son homeomorfas. Es decir, si hay un homeomorfismo $h : M \rightarrow M$ el cual lleva trayectorias de un sistema en trayectorias del otro. El estudio de los sistemas dinámicos es el estudio de los campos vectoriales y difeomorfismos módulo esta relación de equivalencia.

En la búsqueda de clasificar el comportamiento de los sistemas dinámicos aparece, de manera natural, el tema de la estabilidad estructural. Decimos que un sistema dinámico es estructuralmente estable si, bajo pequeñas perturbaciones, su dinámica no cambia. Una pregunta interesante es cual es la relación entre la topología de la variedad y las posibles dinámicas que esta acepta. Un resultado clásico es que no se puede peinar a la esfera. Es decir, todo campo vectorial sobre la esfera S^2 tiene, por lo menos, una singularidad. A diferencia del toro, donde puede haber flujos sin singularidades. Así, una pregunta natural es si existe un campo estructuralmente estable en S^2 con exactamente una singularidad. Como veremos después, la respuesta es que no. Otro resultado interesante acerca de la dinámica en la esfera es el Teorema de Poincaré-Bendixson. El cual nos dice como es el comportamiento a largo plazo de las trayectorias generadas por un campo vectorial.

La importancia del estudio de la estabilidad estructural reside, a mi parecer, principalmente en dos cuestiones. Por un lado, en la aplicación, todo fenómeno observable debe ser estructuralmente estable. Esto debido a que las mediciones son sólo aproximaciones. Por lo que si el fenómeno a estudiar no fuese estable, entonces nuestras mediciones no reflejarían su comportamiento. Es decir, no sería observable. La segunda cuestión es de un aspecto más teórico. Para clasificar la dinámica de los sistemas dinámicos, es necesario restringirse a un subclase. Para mostrar esto, fijémonos en el círculo S^1 . Sea $X^0 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ campo vectorial unitario. Así, todo campo vectorial sobre el círculo es de la forma $X_f = fX^0$, donde $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función suave. Ahora, si tomamos un compacto $K \subseteq S^1$, entonces existe una función f tal que $f^{-1}(0) = K$. Es claro que si dos campos vectoriales tienen dinámicas equivalentes, entonces sus conjuntos de singularidades respectivos deben ser homeomorfos. Luego, existen, por lo menos, tantas dinámicas para campos de vectores como subconjuntos compactos de S^1 . La cual cantidad no numerable. Así, para tener alguna esperanza de clasificar la dinámica de campos vectoriales, necesitamos alguna restricción sobre los sistemas dinámicos a estudiar.

Nos enfocaremos, primero, en estudiar cuales son las condiciones necesarias para que

un sistema dinámico sea estructuralmente estable. En el último capítulo estudiamos brevemente algunas condiciones suficientes para garantizar que un sistema dinámico sea estructuralmente estable. En general, clasificar cuales son los sistemas dinámicos estructuralmente estables sigue siendo un problema abierto.

En el primer capítulo se dan resultados de cálculo y topología diferencial que se usarán a lo largo del texto. Tales como el Teorema de la función implícita, el Teorema de transversalidad de Thom y el Teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales. Se dan las definiciones básicas y damos una demostración del Teorema de Poincaré-Bendixson como una motivación de lo que se busca para los siguientes capítulos. Dotamos al espacio de aplicaciones C^k entre variedades con una topología y se dan las propiedades básicas de esta. En la última sección del capítulo se dan las definiciones de estabilidad estructural y varios ejemplos. Se estudia el caso particular de los difeomorfismos sobre el círculo y se clasifican los difeomorfismos estructuralmente estables sobre este.

En el segundo capítulo se busca generalizar la clasificación dada para el círculo y las pruebas de estabilidad para los ejemplos que se dieron en el capítulo anterior. Para esto se estudia, en las primeras dos secciones, el comportamiento de los campos vectoriales lineales e isomorfismos lineales sobre \mathbb{R}^n . Clasificamos los sistemas dinámicos lineales que son estructuralmente estables. En la tercer sección usamos lo aprendido sobre sistemas dinámicos lineales para aproximar, mediante la diferencial, a los sistemas dinámicos sobre variedades diferenciales. Podemos extender los resultados de sistemas lineales a sistemas que sean “decentes” vía el Teorema de Grobman-Hartman. En la cuarta sección clasificamos los sistemas dinámicos que son localmente estables. En la quinta y sexta sección extendemos propiedades de la dinámica de los sistemas lineales a los sistemas dinámicos.

En el tercer capítulo se estudian las órbitas cerradas de campos vectoriales vía el mapeo de Poincaré. Se definen los sistemas dinámicos de Kupka-Smale y se muestra que, si la variedad es compacta, entonces estos forman un subconjunto residual de los sistemas dinámicos. En una variedad compacta, los sistemas dinámicos forman un espacio de Baire, por lo que ser residual es “grande” en este sentido. Se muestra que todo sistema dinámico estable es un sistema de Kupka-Smale. Así, para que un sistema dinámico sea estructuralmente estable es necesario que sea un sistema de Kupka-Smale.

En el cuarto y último capítulo buscaremos condiciones suficientes para que un sistema dinámico sea estructuralmente estable. Para esto, primero definimos los sistemas de Morse-Smale y mostramos que estos son estructuralmente estables. Para el caso de superficies orientables se da una demostración del Teorema de Peixoto. El cual dice que un campo vectorial sobre una superficie orientable es estructuralmente estable si y sólo si es de Morse-Smale. En la tercer sección se da algunas generalizaciones para dimensiones mayores que 2 y se muestra que en general los sistemas dinámicos que son estructuralmente estables no son densos. Para finalizar, en la cuarta sección se describe un ejemplo debido a Thom de un difeomorfismo sobre el Toro, que es estable, pero no es de Morse-Smale. Este ejemplo motiva la definición de una nueva clase de sistemas dinámicos que son estructuralmente estables, conocidos como sistemas de Anosov. Después se da una definición debida a Smale que generaliza los sistemas de Anosov y de Morse-Smale. Se conjetura que un sistema dinámico es estructuralmente estable si y sólo si pertenece a esta clase. Finalizamos dando el ejemplo de la Herradura de Smale, el cual satisface la definición dada por Smale.

Capítulo 1

Variedades diferenciales y campos vectoriales

En este capítulo recordamos algunos resultados de cálculo, tales como los teoremas de la función implícita y de la función inversa. Mostramos la existencia y unicidad del flujo global para un campo vectorial sobre \mathbb{R}^n . Definimos lo que entendemos por variedad diferenciable C^k y extendemos los resultados de cálculo a variedades diferenciables. Una vez que terminamos con estos preliminares, definimos los conceptos básicos del estudio de los sistemas dinámicos y demostramos sus propiedades básicas.

Para poder hablar acerca de la estabilidad de un sistema dinámico necesitamos decir cuando dos sistemas dinámicos son cercanos. Para esto dotamos al espacio de funciones diferenciales entre una variedad diferenciable M y \mathbb{R}^n de una topología, conocida como topología C^k o topología de Whitney. Mostraremos que el conjunto de campos vectoriales es un subconjunto cerrado, y el conjunto de difeomorfismos es un subconjunto abierto. Resulta que si M es una variedad compacta, entonces tanto el conjunto de espacios vectoriales como el conjunto de difeomorfismos son espacios de Baire separables, lo cual es importante para los resultados de genericidad de los últimos dos capítulos.

1.1. Preliminares de Cálculo

En esta sección daremos algunos resultados que usaremos a lo largo de la tesis. Para las demostraciones faltantes uno puede referirse al libro de Guillemin y Pollack [1]. En particular buscamos establecer la notación que utilizaremos a lo largo de la tesis.

Lema 1.1.1 (Lema de contracción). *Sean (M, d) espacio métrico completo y $T : M \rightarrow M$ aplicación continua. Si T es una contracción, es decir, si hay $k \in \mathbb{R}$ con $0 < k < 1$ tal que, para cualesquiera $x, y \in M$ $d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$, entonces T tiene un único punto fijo $z \in M$ y para cada $x \in M$ se da que $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n x = z$.*

Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $p \in \mathbb{R}^n$. Decimos que f es diferenciable en p si hay $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ función lineal tal que $\forall v \in \mathbb{R}^n$ $f(p+v) = f(p) + Tv + R(v)$ donde $R(v)$ es una función continua y $\lim_{v \rightarrow 0} R(v)/\|v\| = 0$. En este caso llamamos a T la diferencial de f en p y la denotamos por df_p o $Df(p)$. Si para todo $p \in U$ f es diferenciable en p ,

definimos la diferencial de f como la aplicación:

$$\begin{aligned} df : U &\rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \\ p &\mapsto Df(p) \end{aligned}$$

donde $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ es el conjunto de las funciones lineales $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ con la norma $\|\cdot\|_{sup}$ del supremo.

Si df es continua, decimos que f es de clase C^1 , abreviado como $f \in C^1$. Es importante notar que, si f es de clase C^1 , entonces df en las bases canónicas de \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m esta dada por la matriz con entradas $(\frac{\partial f^i}{\partial x_j})$. Es decir, $(Df(p))_{ij} = (\frac{\partial f^i}{\partial x_j}|_p)$

De la misma manera podemos definir $d^2 f_p$, la diferencial de df en p . Entonces $d^2 f_p \in L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)) \cong Bil(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ es un elemento del espacio de funciones bilineales de \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m con la norma del supremo.

Decimos que f es de clase C^2 si la aplicación $d^2 f : U \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ es continua. Recursivamente definimos $d^k f_p$ como la diferencial de $d^{k-1} f$ en p , $d^k f_p \in L^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. f es de clase C^k , abreviado por $f \in C^k$, si $d^k f : U \rightarrow L^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ es continua.

f es de clase C^∞ o suave, abreviado $f \in C^\infty$, si $\forall k \in \mathbb{N} f \in C^k$.

Decimos que $f : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo de clase C^k si $f \in C^k$ y tiene inversa $f^{-1} \in C^k$.

Proposición 1.1.2 (Regla de la cadena). Sean $g : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $f : V \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$ funciones C^k con $V \subseteq \text{img}(f)$. Entonces $f \circ g$ es una función de clase C^k con diferencial dada por $D(f \circ g)(x) = Df(g(x))Dg(x)$

Teorema 1.1.3 (Teorema de la función inversa). Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^k con $k \geq 1$. Si $df_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es isomorfismo para $p \in \mathbb{R}^n$ entonces hay $V \subseteq U$ vecindad abierta de p tal que:

1. $f(V)$ es abierto.
2. $f|_V : V \rightarrow f(V)$ es difeomorfismo C^k biyectivo.
3. $(f|_V)^{-1} : f(V) \rightarrow V$ es C^k diferenciable.

Demostración. Sea $\lambda = df_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ isomorfismo. Considerando $h = \lambda^{-1} \circ f$, al ser λ lineal

$$d\lambda_q = \lambda \quad \forall q \in \mathbb{R}^n.$$

Por lo que

$$dh_p = \lambda^{-1} \circ df_p = \lambda^{-1} \circ \lambda = Id.$$

Bajo una traslación, podemos suponer $p = 0$.

Sea $g(x) = x - h(x)$, entonces $Dg(0) = Id(0) - Dh(0) = Id(0) - Id(0) = 0$. Al ser $h \in C^k$, es claro que también $g \in C^k$. En particular Dg es continua. Por lo tanto existe un $r > 0$ tal que si $x \in \overline{B_r(0)}$, entonces $\|Dg(x)\| \leq 1/2$. Luego, por el teorema del valor medio $\|g(x)\| \leq \|x\|/2 \leq r/2$. Por lo tanto $g[\overline{B_r(0)}] \subseteq \overline{B_{r/2}(0)}$.

Para cada $y \in \mathbb{R}^n$ definimos $g_y(x) = y + x - h(x) = y + g(x)$. Si $\|y\| \leq r/2$ y $\|x\| \leq r$ entonces $\|g_y(x)\| \leq \|y\| + \|g(x)\| \leq r/2 + r/2 = r$.

Por lo que si $y \in \overline{B_{r/2}(0)}$ entonces $g_y|_{\overline{B_r(0)}} : \overline{B_r(0)} \rightarrow \overline{B_r(0)}$. Luego, para $y \in \overline{B_{r/2}(0)}$ y $x_1, x_2 \in \overline{B_r(0)}$ se da la siguiente desigualdad

$$\|g_y(x_1) - g_y(x_2)\| = \|g(x_1) - g(x_2)\| \leq \|Dg(c)\| \|x_1 - x_2\| \leq 1/2 \|x_1 - x_2\|$$

con $c \in \overline{B_r(0)}$.

Esto muestra que g_y es una contracción. Como $\overline{B_r(0)}$ es un espacio métrico completo, g_y tiene un único punto fijo el cual satisface $h(x) = y$. Por lo tanto h es invertible en $\overline{B_r(0)}$. Luego también f es invertible. Falta mostrar que f^{-1} es de clase C^1 en $B_{r/2}(0)$.

Sea $y_1 \in B_{r/2}(0)$, con $y_1 = f(x_1)$, entonces, para cualquier $y \in B_{r/2}(0)$, tenemos que $f(x) = f(x_1) + Df(x_1)(x - x_1) + R(x - x_1)$.

$$\begin{aligned} \|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_1) - Df(x_1)^{-1}(y - y_1)\| &= \|x - x_1 - Df(x_1)^{-1}(f(x) - f(x_1))\| \\ &= \|x - x_1 - Df(x_1)^{-1}(Df(x_1)(x - x_1) \\ &\quad + R(x - x_1))\| \\ &= \|x - x_1 - (x - x_1) - Df(x_1)^{-1}(R(x - x_1))\| \\ &= \|Df(x_1)^{-1}(R(x - x_1))\| \\ &\leq \|Df(x_1)^{-1}\| \|R(x - x_1)\|. \end{aligned}$$

Como $\|x - x_1\| \leq 2\|y - y_1\|$, pues $x, x_1 \in \overline{B_r(0)}$, entonces el limite $\lim_{y \rightarrow y_1} \frac{R(x-x_1)}{\|x-x_1\|} = 0$.

Por lo tanto f es diferenciable. Dado que $Df(x_1)^{-1} = Df(f^{-1}(y_1))^{-1}$, para verificar que $f^{-1} \in C^1$, al ser f^{-1} y Df continuas, sólo falta verificar que la aplicación $Inv : GL(n) \rightarrow GL(n)$ dada por:

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{1}{\det A} \left((-1)^{i+j} M_{ij} \right)_{ij}$$

donde M_{ij} es el menor de A , es continua. De hecho Inv es suave. Ya que si $A_t \in GL(n)$ es una curva con $A_0 = A$, tenemos que para cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ $A_t A_t^{-1} = Id$. Derivando respecto a t ambos lados de la igualdad, por la regla de Leibniz, obtenemos la siguiente expresión:

$$0 = \frac{dA_t A_t^{-1}}{dt} \Big|_{t=0} = A_0 \frac{dA_t^{-1}}{dt} \Big|_{t=0} + \frac{dA_t}{dt} \Big|_{t=0} A_0^{-1}.$$

Despejando

$$\frac{dA_t^{-1}}{dt} \Big|_{t=0} = -A_0^{-1} \frac{dA_t}{dt} \Big|_{t=0} A_0^{-1}.$$

Así mostramos que Df^{-1} es continua. Inductivamente $f \in C^k$ implica $f^{-1} \in C^k$ en una vecindad de p . \square

Teorema 1.1.4 (Teorema de la función implícita). Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $V \subseteq \mathbb{R}^m$ abiertos, $f : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^l$ función C^k , $(a, b) \in U \times V$ con $D_2 f(a, b) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ (la parcial respecto a la segunda variable) isomorfismo. Si $f(a, b) = 0$ hay $g : U_0 \subseteq U \rightarrow V$ función C^k tal que $g(a) = b$ y para cada $x \in U_0$ $f(x, g(x)) = 0$. Para U_0 suficientemente pequeño, g es única.

Demostración. Sea $F(x, y) = (x, f(x, y))$. $D_2 f(a, b)$ invertible implica que

$$DF(a, b) = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ * & D_2 f(a, b) \end{pmatrix}$$

es invertible, por el teorema de la función inversa, F es invertible en una vecindad de (a, b) . La inversa de F tiene la forma $F^{-1}(z, w) = (z, h(z, w))$, Entonces

$$(z, w) = F \circ F^{-1}(z, w) = F(z, h(z, w)) = (z, f(z, h(z, w)))$$

por lo que $f(z, h(z, w)) = w$ o equivalentemente, $f^{-1}(w_0) = \{(z, h(z, w_0))\}$ es la gráfica de una función. Tomando $g(x) = h(x, 0)$, tenemos que $f(x, g(x)) = f(x, h(x, 0)) = 0$.

Para mostrar la unicidad, si $\tilde{g}(a) = b$ y $f(x, \tilde{g}(x)) = 0$ entonces

$$(x, \tilde{g}(x)) = F^{-1} \circ F(x, \tilde{g}(x)) = F^{-1}(x, f(x, \tilde{g}(x))) = F^{-1}(x, 0).$$

Por lo tanto $(x, g(x)) = (x, h(x, 0)) = F^{-1}(x, 0) = (x, \tilde{g}(x))$. Lo muestra que $g(x) = \tilde{g}(x)$. \square

Teorema 1.1.5 (Forma local de inmersiones). Sean $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ función C^k y $p_0 \in U$. Si $df_{p_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ es inyectiva, entonces hay $V \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ vecindad abierta de p_0 , $U_0 \subseteq U$ y $W \subseteq \mathbb{R}^m$ abiertos y $h : V \rightarrow U_0 \times W$ difeomorfismo C^k tal que, si $x \in U_0$, entonces $h \circ f(x) = (x, 0)$. Es decir que, bajo un cambio de coordenadas, f se ve localmente como la inclusión $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ dada por $\varphi(x) = (x, 0)$.

Teorema 1.1.6 (Forma local de submersiones). Sean $f : U \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ función C^k y $(x_0, z_0) \in U$. Si $df_{(x_0, z_0)} : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es suprayectiva entonces hay $U_0 \subseteq U$ vecindad abierta de (x_0, z_0) , $W \subseteq \mathbb{R}^n$ vecindad abierta de $c = f(x_0, z_0)$, $0 \in V \subseteq \mathbb{R}^m$ y $h : V \times W \rightarrow U_0$ difeomorfismo C^k tal que, si $(x, v) \in W \times V$ $f \circ h(x, v) = x$. Es decir, bajo un cambio de coordenadas, f se ve localmente como la proyección $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\pi(x, z) = x$.

Es importante remarcar que, como consecuencia de los Teoremas de forma local de inmersiones y submersiones, una inmersión es localmente inyectiva y una submersión es localmente una aplicación abierta.

Definición. $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ función C^k , con $k \geq 1$.

- Decimos que $x \in U$ es un punto regular de f si df_x es suprayectiva. En caso contrario se dice que x es un punto crítico de f .
- $y \in \mathbb{R}^m$ es un valor regular de f si $\forall x \in f^{-1}\{y\}$ x es punto regular de f . En particular si $y \notin \text{img}(f)$ entonces y es valor regular de f . esto se debe a que $\emptyset = \text{img}(f)$ satisface la definición. Decimos que y es un valor crítico de f si y no es valor regular.

Teorema 1.1.7 (Teorema de Sard). Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ función C^k . Si f es suficientemente diferenciable. De manera más concreta, si $k > \max\{0, n/m - 1\}$, el conjunto de valores críticos de f tiene medida cero en \mathbb{R}^m .

Como consecuencia del Teorema de Sard tenemos que si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ o $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ son de clase C^k , con $k \leq 1$, entonces el conjunto de valores críticos de f y X tienen medida cero. Debido a que estos son los casos que a nosotros nos interesan, no nos preocuparemos por señalar cuando es o no válido el Teorema de Sard.

Daremos ahora algunos resultados básicos de ecuaciones diferenciales en \mathbb{R}^n . Estos fueron tomados del libro de S. Lang [3].

Sea U un abierto de \mathbb{R}^n . Decimos que una aplicación C^k $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo lineal sobre U . Una curva integral de f es una aplicación C^k , $\alpha : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow U$ que satisface la ecuación diferencial $\alpha'(t) = f(\alpha(t))$. Decimos que tiene condición inicial $x \in U$ cuando $\alpha(0) = x$.

Definición. Un flujo local de f es una función $\alpha : (a, b) \times V \longrightarrow U$, donde $V \subseteq E$. La cual satisface que, para $x \in V$, la aplicación definida por

$$\alpha_x(t) := \alpha(t, x).$$

Es una curva integral de f con condición inicial x .

Teorema 1.1.8 (Existencia y unicidad del flujo local). Sean $x_0 \in U$ y $0 < a < 1$ tal que $\overline{B_{2a}(x_0)} \subseteq U$ y $\forall y \in \overline{B_{2a}(x_0)} \|f(y)\| \leq L$ con $L > 0$. Si f satisface una condición de Lipschitz con constante $k > 0$ y $b \in \mathbb{R}$ es tal que $0 < b < a/L$ y $b < 1/k$, entonces existe un único flujo local

$$\alpha : J_b \times B_a(x_0) \longrightarrow U$$

Donde $J_b = (-b, b)$.

Demostración. Sean $I_b = [-b, b]$, $x \in \overline{B_a(x_0)}$ y $M = \{ \alpha : I_b \rightarrow \overline{B_{2a}(x_0)} : \alpha(0) = x \text{ y } \alpha \text{ es continua} \}$.

$M \subseteq C^0(I_b, \overline{B_{2a}(x_0)})$ y M es cerrado. Por lo tanto M es completo con la norma del supremo ($\|\cdot\|$).

Para cada $\alpha \in M$ definimos la aplicación

$$\begin{aligned} S_\alpha : I_b &\longrightarrow E \\ t &\longmapsto x + \int_0^t f(\alpha(u)) du. \end{aligned}$$

Al ser f y α continuas, S_α es continua y

$$\begin{aligned} |S_\alpha(x) - x| &= \left| x + \int_0^t f(\alpha(u)) du - x \right| \\ &= \left| \int_0^t f(\alpha(u)) du \right| \\ &\leq \int_0^t |f(\alpha(u))| du \\ &\leq \int_0^b |f(\alpha(u))| du \\ &\leq \int_0^b L du = bL < a. \end{aligned}$$

Por lo tanto $S_\alpha(t) \in B_a(x) \subseteq \overline{B_{2a}(x_0)}$. Como $S_\alpha(0) = x$ entonces $S_\alpha \in M$. Por lo que podemos definir la aplicación $S : M \rightarrow M$ por $S(\alpha) = S_\alpha$.

Notemos que si $\alpha, \beta \in M$ entonces

$$\begin{aligned}
\|S_\alpha - S_\beta\| &= \sup_{t \in I_b} |S_\alpha(t) - S_\beta(t)| \\
&= \sup_{t \in I_b} \left| x + \int_0^t f(\alpha(u)) \, du - \left(x + \int_0^t f(\beta(u)) \, du \right) \right| \\
&= \sup_{t \in I_b} \left| \int_0^t f(\alpha(u)) \, du - \int_0^t f(\beta(u)) \, du \right| \\
&\leq \sup_{t \in I_b} \int_0^t |f(\alpha(u)) - f(\beta(u))| \, du \\
&\leq \int_0^b |f(\alpha(u)) - f(\beta(u))| \, du \\
&\leq \int_0^b k|\alpha(u) - \beta(u)| \, du \\
&\leq \int_0^b k\|\alpha - \beta\| \, du \\
&= bk\|\alpha - \beta\|.
\end{aligned}$$

Luego S satisface una condición de Lipschitz con constante bk . Dado que $0 < bk < 1$, concluimos que S es una contracción. Por el lema de contracción S tiene un único punto fijo α_x , el cual satisface $\alpha_x = S_{\alpha_x} = x - \int_0^t f(\alpha_x(u)) \, du$ y por lo tanto es una línea integral de f . Es decir $\alpha'(x) = f(\alpha(x))$. Variando $x \in B_a(x_0)$ definimos el flujo $\alpha(x, t) = \alpha_x(t)$, donde α_x es el único punto fijo de S . \square

Proposición 1.1.9. *El flujo local α de f es localmente de clase C^k . Es decir, si $x_0 \in U$ entonces hay $a, b > 0$ tales que el flujo local $\alpha : J_b \times B_a(x_0) \rightarrow U$ es de clase C^k .*

Demostración. Sean $x_0 \in U$ y $a, b > 0$ tales que aseguran la existencia y unicidad local del flujo $\alpha : J_b \times B_a(x_0) \rightarrow U$.

Sabemos que α satisface $D_1\alpha(t, x) = f(\alpha(t, x))$. Luego, al ser α y f continuas, $D_1\alpha$ es continua. Veamos ahora que $D_2\alpha$ es también continua y satisface la igualdad :

$$D_1D_2\alpha(t, x) = Df(\alpha(t, x), D_2\alpha(t, x))$$

Para esto primero definimos $F = C^0(I_b, E)$ y $V \subseteq F$ definido por: $\sigma \in V$ si y solamente si $\sigma[I_b] \subseteq U$. Definimos la siguiente aplicación:

$$T : U \times V \longrightarrow F \quad T(x, \sigma)(t) = x + \int_0^t f(\sigma(s)) \, ds - \sigma(t).$$

Afirmamos que T es de clase C^k y $D_2T(x, \sigma) = \int_0^t (Df \circ \sigma) - Id$. Para esto calculemos:

$$\left\| \int_0^t f \circ (\sigma + h) - \int_0^t f \circ \sigma - \int_0^t Df \circ \sigma(h) \right\| \leq \int_0^t |f \circ (\sigma + h) - f \circ \sigma - (Df \circ \sigma)h|.$$

Evaluando en u :

$$\begin{aligned}
|f(\sigma(u) + h(u)) - f(\sigma(u))Df(\sigma(u))h(u)| &= |Df(z_u)h(u) - Df(\sigma(u))h(u)| \\
&\leq |h(u)||Df(z_u) - Df(\sigma(u))| \\
&\leq \|h\| \sup |Df(z_u) - Df(\sigma(u))|.
\end{aligned}$$

Como Df es continua, entonces $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \sup |Df(z_u) - Df(\sigma(u))| = 0$. Luego

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\left\| \int_0^t f \circ (\sigma + h) - \int_0^t f \circ \sigma - \int_0^t (Df \circ \sigma)h \right\|}{\|h\|} \leq \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \sup |Df(z_u) - Df(\sigma(u))| = 0.$$

Por lo tanto $D_2T(x, \sigma) = \int_0^t Df \circ \sigma - Id$. Notemos que D_2T no depende de x , por lo que es infinitamente diferenciable respecto a x . Así, D_2T es continua y, si Df es diferenciable, entonces también lo es D_2T respecto a σ . Luego D_2T es, por lo menos, de clase C^{k-1} . Al ser T lineal respecto a x , D_1T es de clase C^∞ . Por lo tanto T es C^k .

Notemos que una solución σ a la ecuación $T(x, \sigma) = 0$ es curva integral de f con condición inicial x .

Sean $x_0 \in U$ y $a > 0$ tal que Df es acotada en $B_a(x_0)$ y sea c_1 la cota. Siempre es posible encontrar a ya que Df es continua y por lo tanto $Df^{-1}[B_{c_1}(Df(x_0))]$ es un abierto no vacío. Sea $b < 1/c_1$, entonces $D_2T(x, \sigma)$ es invertible en $B_a(x_0)$. Para verificar esto utilizaremos el hecho de que si una aplicación lineal se encuentra a distancia menor a 1 de la identidad (o a menos la identidad), entonces es invertible. En este caso calcularemos la distancia de D_2T a $-Id$.

$$\begin{aligned} |D_2T(x, \sigma)h(t) + Id(h(t))| &= \left| \int_0^t Df(\sigma(u))h(u) du - h(t) + h(t) \right| \\ &\leq \int_0^t |Df(\sigma(u))| \|h(u)\| du \\ &\leq \int_0^b c_1 \|h\| du \\ &= bc_1 \|h\| < h. \end{aligned}$$

Se sigue que $\|D_2T(x, \sigma) + id\| < 1$. Aplicando ahora el Teorema de la función implícita, tenemos que hay $g : U_0 \subseteq U \rightarrow V$ con $g \in C^k$ tal que $T(x, g(x)) = 0$. Por la unicidad del flujo local tenemos entonces que $g(x) = \alpha_x$ ya que $g(x)$ es curva integral de f . Tomando la diferencial de g , $Dg : B_a(x_0) \rightarrow L(E, F)$ de clase C^{k-1} tenemos que:

$$\alpha_{x+w} - \alpha_x = g(x+w) - g(x) = Dg(x)w + |w|\psi(w).$$

Donde $\lim_{w \rightarrow 0} \psi(w) = 0$, por lo que

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{\alpha(t, x+w) - \alpha(t, x) - Dg(x)w}{|w|} = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{|w|}{|w|} \psi(w) = \lim_{w \rightarrow 0} \psi(w) = 0.$$

Por lo tanto $D_2\alpha(t, x)(w) = Dg(x)w$, la cual es continua. Es decir $D_2\alpha(t, x)$ existe y es continua. Luego $\alpha \in C^1$. Además sabemos que $\alpha(t, x) = x + \int_0^t f(\alpha(u)) du$, por lo que

$$D_2\alpha(t, x) = Id + \int_0^t Df((\alpha(u, x)))D_2\alpha(u, x) du.$$

y entonces

$$D_1D_2\alpha(t, x) = Df(\alpha(t, x))D_2(\alpha(t, x)).$$

Así, como $\alpha \in C^1$ y $Df \in C^{k-1}$, $Df(\alpha(t, x))$ es un campo vectorial por lo menos de clase C^1 y $D_2\alpha(t, x)$ es curva integral de $Df(\alpha(t, x))$. Luego $D_2\alpha(t, x)$ es de clase C^1 y α de clase C^2 . Repitiendo este procedimiento k veces concluimos que α es de clase C^k . \square

Por lo anterior, si f satisface una condición de Lipschitz en $B_a(x)$ entonces existe un único flujo local $\alpha : J_b \times B_a(x) \rightarrow U$. Pero $f \in C^1$ implica que f es localmente Lipschitz continua (consecuencia inmediata del teorema del valor medio). Es decir, para cada $x \in U$ siempre podemos encontrar una $a > 0$ de manera que f satisfaga una condición de Lipschitz en $B_a(x)$. Por lo que f siempre tiene un flujo local.

Lema 1.1.10. *Sean $\alpha_1 : J_1 \rightarrow U$ y $\alpha_2 : J_2 \rightarrow U$ líneas integrales de f . Si estas tienen la misma condición inicial $\alpha_1(0) = \alpha_2(0)$, entonces $\forall t \in J_1 \cap J_2$ se tiene que $\alpha_1(t) = \alpha_2(t)$.*

Demostración. Sea $Q = \{b \in \mathbb{R} : \forall t \in [0, b) \alpha_1(t) = \alpha_2(t)\}$. Por el teorema de existencia y unicidad del flujo local, sabemos que $Q \neq \emptyset$. Si Q no está acotado entonces $\forall t > 0 \alpha_1(t) = \alpha_2(t)$ y no hay nada que hacer. Si Q está acotado, sea $b_0 = \sup Q$. Afirmamos que $b_0 = \sup(J_1 \cap J_2)$. Supongamos que, entonces $b_0 < \sup(J_1 \cap J_2)$ o $b_0 > \sup(J_1 \cap J_2)$. Pero $Q \subseteq (J_1 \cap J_2)$, por lo que necesariamente $b_0 = \sup Q \leq \sup(J_1 \cap J_2)$. Sólo nos queda la posibilidad de que $b_0 < \sup(J_1 \cap J_2)$. Sean $\beta_1(t) = \alpha_1(b_0 + t)$ y $\beta_2(t) = \alpha_2(b_0 + t)$. Como $0 < b_0 < \sup(J_1 \cap J_2)$, β_1 y β_2 están bien definidas en el intervalo $(0, \sup(J_1 \cap J_2))$. Al ser α_1 y α_2 continuas en b_0

$$\beta_1(0) = \alpha_1(b_0) = \lim_{t \rightarrow b_0^-} \alpha_1(t) = \lim_{t \rightarrow b_0^-} \alpha_2(t) = \alpha_2(b_0) = \beta_2(0)$$

y además también se cumple que:

$$\beta_1'(t) = \alpha_1'(b_0 + t) = f(\alpha_1(b_0 + t)) = f(\beta_1(t))$$

Análogamente $\beta_2'(t) = f(\beta_2(t))$. Se sigue que β_1 y β_2 son ambas curvas integrales de f con la misma condición inicial. Por el teorema de existencia y unicidad local β_1 coincide con β_2 en una vecindad del 0. En particular existe un $t_0 > 0$, el cual satisface $\alpha_1(b_0 + t_0) = \beta_1(t_0) = \beta_2(t_0) = \alpha_2(b_0 + t_0)$. Por lo tanto $b_0 + t_0 \in Q$, una contradicción.

Por lo tanto $b_0 = \sup(J_1 \cap J_2)$.

Siguiendo un razonamiento análogo, tomando $P = \{a \in \mathbb{R} : \forall t \in (a, 0] \alpha_1(t) = \alpha_2(t)\}$ llegamos a que $\inf P = a_0 = \inf(J_1 \cap J_2)$.

Concluimos que $\forall t \in J_1 \cap J_2 \alpha_1(t) = \alpha_2(t)$. □

Como consecuencia del lema anterior, para $x \in U$ existe siempre una curva integral α_x de f con condición inicial x maximal. Maximal en el sentido de que si β es otra curva integral de f con $\beta(0) = x$ entonces $\text{dom}(\beta) \subseteq \text{dom}(\alpha_x)$. A continuación veremos que el dominio de α_x , al cual denotaremos por J_x , varía continuamente respecto de x o, equivalentemente, que $\mathfrak{D}(f) = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times U : t \in J_x\}$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Como consecuencia de esto podemos extender el flujo local de f a un flujo maximal (con dominio maximal).

Proposición 1.1.11. *$\mathfrak{D}(f)$ es un conjunto abierto y por lo tanto*

$$\begin{aligned} \alpha : \mathfrak{D}(f) &\longrightarrow U \\ (t, x) &\longmapsto \alpha_x(t) \end{aligned}$$

es un flujo maximal de f .

Demostración. Sean $x_0 \in U$ y $Q = \{b \in \mathbb{R}^+ : \forall t \in [0, b] \exists J_0 \subseteq \mathbb{R} \exists V_0 \subseteq U \text{ tales que } (t, x_0) \in J_0 \times V_0 \subseteq D(f) \text{ y } \alpha \text{ es } C^k \text{ en } (t, x_0)\}$. Por el Teorema de existencia y unicidad del flujo local, sabemos que $0 \in Q$. En particular $Q \neq \emptyset$. Si Q no está acotado no hay nada que hacer y terminamos. Supongamos entonces que Q es acotado superiormente. Sea $b_0 = \sup Q$, afirmamos que $b_0 = \sup J_{x_0}$. Sabemos que $Q \subseteq J_{x_0}$ y por lo tanto $b_0 \leq \sup J_{x_0}$. Supongamos que $b_0 < \sup J_{x_0}$. Entonces $\alpha(t, x_0)$ está bien definido para $0 \leq t \leq b_0$ y es de clase C^k . En particular es continua. Sea $x_1 = \alpha(b_0, x_0)$, por el Teorema de existencia y unicidad local f tiene un flujo local $\beta : J_a \times B_a(x_1) \rightarrow U$ tal que $\beta(0, x_1) = x_1$ y $J_a = (-a, a)$ con $a > 0$. Por otro lado, al ser $\alpha(t, x_0)$ continua, hay $\delta > 0$ que satisface que $\forall t \in (b_0 - \delta, b_0)$ $\alpha(t, x_0) \in B_{a/4}(x_1)$. Tomando $t_1 \in (b_0 - \delta, b_0)$, como $0 < t_1 < b_0$ existen J_1, V_1 tales que $(t_1, x_0) \in J_1 \times V_1 \subseteq \mathfrak{D}(f)$. Luego, para $t \in (t_1 - a, t_1 + a)$ y $x \in V_1$ definimos $\varphi(t, x) = \beta(t - t_1, \alpha(t_1, x))$. Notemos que:

$$D_1\varphi(t_1, x) = D_1\beta(t - t_1, \alpha(t_1, x)) = f(\beta(t - t_1, \alpha(t_1, x))) = f(\varphi(t, x)).$$

Es decir, φ es un flujo local de f que coincide en el tiempo t_1 con α . Por unicidad $\varphi = \alpha$ en $\text{dom}(\varphi) \cap \text{dom}(\alpha)$, pero φ está definida para toda $t \in (t_1 - a, t_1 + a)$. Como $t_1 \in (b_0 - \delta, b_0)$, si tomamos $\delta < a/4$, entonces $|t_1 - b_0| < \delta < a/4$. Esto implica que $t_1 + a > b_0$, por lo que $\forall t \in [b_0, t_1 + a]$ hay J_0 y U_0 tales que $J_0 \times U_0 \subseteq \text{dom}(\varphi)$. Podemos extender α con φ y tendríamos que $J_0 \times U_0 \subseteq \mathfrak{D}(f)$.

Por lo tanto $t_1 + a \in Q$ y $t_1 + a > b_0 = \sup Q$, una contradicción. Por lo tanto $b_0 = \sup J_{x_0}$.

Análogamente para el extremo izquierdo, concluimos que $\mathfrak{D}(f)$ es abierto y α es el único flujo maximal de clase C^k cuyo dominio es $\mathfrak{D}(f)$. \square

El flujo maximal α también es conocido como flujo global.

Extenderemos ahora los resultados anteriores a variedades diferenciales.

Definición. Sea $M \subseteq \mathbb{R}^k$ con la topología inducida. M es una variedad diferenciable de dimensión n si $\forall p \in M$ hay $U \subseteq M$ vecindad abierta de p y $\varphi : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ homeomorfismo con $\varphi^{-1} : V \rightarrow U$ inmersión suave. El par ordenado (φ, U) es una carta local de M en torno a p y U es una vecindad coordenada de p .

- 1) Si $\varphi(p) = 0$, decimos que φ está centrada en p .
- 2) Si φ^{-1} es de clase C^k decimos que M es de clase C^k .

Observación. Por el Teorema de la función implícita, M es localmente la gráfica de una función $f : \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{k-n}$. Luego, si tomamos la proyección $\pi : V \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \tilde{U}$, donde V es una vecindad abierta en \mathbb{R}^k de $\text{graf}(f) = \{(x, f(x)) : x \in \tilde{U}\} \subseteq M$ de manera que $\text{graf}(f) = V \cap M$, entonces π es una submersión suave. Si tomamos la carta de M dada por $\varphi : \text{graf}(f) \rightarrow \tilde{U}$, entonces $\varphi = \pi|_{\text{graf}(f)}$. Es decir, las cartas locales son la restricción de una función suave.

Proposición 1.1.12. Sean $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ cartas locales de M . Si $U \cap V \neq \emptyset$ entonces $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ es de clase C^∞

$$\begin{array}{ccc} U \cap V & \xrightarrow{\text{Id}} & U \cap V \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \psi \\ \varphi(U \cap V) & \xrightarrow{\psi \circ \varphi^{-1}} & \psi(U \cap V) \end{array}$$

Demostración. Por la observación anterior sabemos que hay $h_\varphi, h_\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ funciones suaves tales que $\psi \circ \varphi^{-1} = h_\psi \circ h_\varphi|_{\varphi[U \cap V]}$ \square

Sean M y N variedades diferenciables.

Definición. Una función $f : M \rightarrow N$ es de clase C^k en $p \in M$ si existe una carta local (φ, U) de p y (ψ, V) de $f(p)$ de manera que la función $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es C^k .

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \psi \\ \varphi(U) & \xrightarrow{\tilde{f}} & \psi(V) \end{array}$$

por la proposición anterior, esta definición no depende de las cartas elegidas ya que si $(\bar{\varphi}, \bar{U})$ son otras cartas de M entonces, al ser el cambio de cartas $\varphi \circ \bar{\varphi}^{-1}$ suave, $\tilde{f} \in C^k$ implica $\tilde{f} \circ (\varphi \circ \bar{\varphi}^{-1}) = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ (\varphi \circ \bar{\varphi}^{-1}) = \psi \circ f \circ \bar{\varphi}^{-1} \in C^k$.

Si $\alpha : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M \subseteq \mathbb{R}^N$ con $\alpha(0) = p$. La curva α es diferenciable según la definición anterior siempre y cuando α sea diferenciable en el sentido usual, ya que podemos extender φ a h_φ , y entonces $h_x \circ \alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^m$ suave implica $\alpha : (a, b) \rightarrow M$ suave.

Definición. Definimos el espacio tangente a M en p como el conjunto :

$$T_p M = \{ \alpha'(0) : \alpha(0) = p \text{ y } \alpha : (a, b) \rightarrow M \text{ es } C^\infty \}.$$

Para dotar a $T_p M$ con una estructura de espacio vectorial, tomamos (φ, U) carta centrada en p . Entonces $d\varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow T_p M$ es una biyección. Esto ya que $\beta : (a, b) \rightarrow U$ es una curva suave si y sólo si $(\varphi^{-1} \circ \beta) : (a, b) \rightarrow M$ es curva suave. Por la regla de la cadena, tenemos que $\beta'(0) \in \mathbb{R}^n$ si y sólo si $d\varphi^{-1}(0)\beta'(0) \in T_p M$. Por lo tanto $d\varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow T_p M$ tiene inversa $d\varphi$. Luego, $T_p M$ hereda de una estructura de \mathbb{R} -espacio vectorial n dimensional de manera que $d\varphi^{-1}$ es un isomorfismo.

Sean $f : M \rightarrow N$ suave, $p \in M$, $v \in T_p M$ y $\alpha : (a, b) \rightarrow M$ con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$. Entonces $f \circ \alpha : (a, b) \rightarrow N$ es una curva suave con $f \circ \alpha(0) = f(p)$. Podemos entonces definir la diferencial de f en p como la aplicación $df_p : T_p M \rightarrow T_p N$ definida por $df_p(v) = df_p(\alpha'(0)) := (f \circ \alpha)'(0)$.

Como una variedad diferenciable es localmente \mathbb{R}^n vía cartas locales, tenemos los siguientes resultados:

Proposición 1.1.13. Sean $g : M \rightarrow N$ y $f : N \rightarrow P$ C^k . Se satisface la regla de la cadena: $f \circ g : M \rightarrow P$ es C^k y $d(f \circ g)_p = df_{g(p)} dg_p$.

Demostración. Fijandonos en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} & & f \circ g & & \\ & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\ M & \xrightarrow{g} & N & \xrightarrow{f} & P \\ \downarrow x & & \downarrow y & & \downarrow z \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\tilde{g}} & \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{R}^p \\ & \curvearrowleft & \tilde{g} \circ \tilde{f} & \curvearrowright & \end{array}$$

Como \tilde{f} y \tilde{g} son C^k , también lo es $\tilde{f} \circ \tilde{g}$, pero $\tilde{f} \circ \tilde{g} = (z \circ f \circ y^{-1}) \circ (y \circ g \circ x^{-1}) = z \circ f \circ g \circ x^{-1} = \widetilde{f \circ g}$. Es decir $f \circ g$ es C^k . Para calcular la diferencial

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \xrightarrow{df_{g(p)}dg_p} & & \\
 T_p M & \xrightarrow{dg_p} & T_{g(p)} N & \xrightarrow{df_{g(p)}} & T_{f(g(p))} P \\
 \downarrow dx & & \downarrow dy & & \downarrow dz \\
 \mathbb{R}^m & \xrightarrow{d\tilde{g}_0} & \mathbb{R}^n & \xrightarrow{d\tilde{f}_{\tilde{g}(0)}} & \mathbb{R}^p \\
 & & \xrightarrow{d\tilde{f}_{\tilde{g}(0)}d\tilde{g}_0} & &
 \end{array}$$

Por la regla de la cadena para el espacio Euclidiano y al ser dx, dy y dz isomorfismos, se tiene que $d(f \circ g)_p = dz_p^{-1} \circ d(\tilde{f} \circ \tilde{g})_0 \circ dx_p^{-1} = dz_p^{-1} \circ d\tilde{f}_{\tilde{g}(0)} d\tilde{g}_0 \circ dx_p = df_{g(p)} dg_p$. \square

Definición. Sea $f : M \rightarrow N$

1. Decimos que f es un difeomorfismo de clase C^k si $f \in C^k$ es invertible con $f^{-1} \in C^k$.
2. f es un difeomorfismo local de clase C^k en $p \in M$ si hay $U \subseteq M$ vecindad abierta de p y $V \subseteq N$ vecindad abierta de $f(p)$ de manera que $f|_U : U \rightarrow V$ es un difeomorfismo C^k .

Proposición 1.1.14. Sean $f : M \rightarrow N \in C^k$ y $p \in M$. Si df_p es un isomorfismo entonces f es un difeomorfismo local en p .

Demostración. Tomando cartas locales (φ, U) de M , (ψ, V) de N , se sigue del teorema de la función inversa que $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es difeomorfismo local C^k . Luego también lo es $f = \psi^{-1} \circ \tilde{f} \circ \varphi$. \square

Definición. Decimos que $S \subseteq M$ es una subvariedad C^k de M de dimensión $\dim S = s$ si $\forall p \in S$ hay $V \subseteq \mathbb{R}^s, W \subseteq \mathbb{R}^{m-s}$ abiertos, y $\varphi : U \subseteq M \rightarrow V \times W \subseteq \mathbb{R}^m$ carta local con $\varphi[S \cap U] = V \times \{0\}$. De esta forma $\varphi|_{S \cap U} : S \cap U \rightarrow V \times \{0\}$ es una carta coordenada para S .

Notemos que si $M \subseteq \mathbb{R}^n$ es una variedad C^k entonces M es subvariedad C^k de \mathbb{R}^n . Dada S subvariedad de M , la codimensión de S en M es $\text{codim}(S) = \dim(M) - \dim(S)$.

Proposición 1.1.15. Sea $f : M^n \rightarrow N^{n+m}$ de clase C^k . Para $p \in M$, si df_p es inyectiva entonces hay $(\varphi, U) \text{ } (\psi, V)$ cartas locales centradas en p y $f(p)$ respectivamente tales que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x) = (x, 0)$.

Demostración. Tomando cartas locales cualesquiera centradas en p y $f(p)$. Como df_p es inyectiva si y solamente si $d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})$ es inyectiva podemos usar el teorema de la forma local de inmersiones para \mathbb{R}^n . \square

Definición. Sea $f : M \rightarrow N$ de clase C^k .

- Decimos que f es una inmersión si $\forall p \in M \text{ } df_p$ es inyectiva.
- f es un encaje si f es una inmersión inyectiva y $f : M \rightarrow f[M] \subseteq N$ es homeomorfismo, donde $f[M]$ tiene la topología inducida por N .

Es importante remarcar que una inmersión inyectiva no necesariamente es un encaje. Para mostrar esto definimos la curva $\alpha : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ por $\alpha(t) = (t^2 - 1, t(t^2 - 1))$.

α es una inmersión inyectiva pero no es un encaje. En particular $\alpha[(-1, \infty)]$ no es una subvariedad de \mathbb{R}^2 pues su estructura de variedad diferenciable no proviene de la topología inducida por \mathbb{R}^2 , sino por la topología inducida por el mapeo α .

Proposición 1.1.16. Sean $f : M^{n+m} \rightarrow N^m$ de clase C^k y $p \in M$. Si df_p es suprayectiva entonces hay cartas locales (φ, U) y (ψ, V) centradas en p y $f(p)$ respectivamente tales que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) = (x_1, \dots, x_n)$.

Demostración. Tomando cartas locales, como df_p es suprayectiva si y sólo si $d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})$ es suprayectiva, se sigue de la forma local de submersiones para \mathbb{R}^n . \square

Definición. $q \in N$ es valor regular de f si $\forall p \in f^{-1}\{q\}$ df_p es suprayectiva.

q es valor crítico si no es valor regular.

Observación. $q \notin \text{img}(f) \Rightarrow q$ valor regular.

De la proposición anterior, tenemos que si $q \in \text{img}(f)$ es un valor regular entonces $f^{-1}\{q\}$ es una subvariedad de M de codimensión $m = \dim(N)$. Ya que $p \in f^{-1}\{q\}$ implica que $\psi \circ f(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$. Por lo tanto, tomando $h : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ definida por $h(p) = (\psi \circ f(p), \varphi_{n+1}(p), \dots, \varphi_{n+m}(p))$ llegamos a que $h[U \cap f^{-1}\{q\}] = \{0\} \times \mathbb{R}^m$.

Teorema 1.1.17 (Teorema de Sard para variedades). Sea $f : M \rightarrow N$ C^∞ . El conjunto $\{q \in N : q \text{ es valor crítico de } f\}$ tiene medida cero en N .

Demostración. Como \mathbb{R}^l es segundo numerable, M y $N \subseteq \mathbb{R}^l$ también lo son. Sean $(\varphi_i, U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ y $(\psi_j, V_j)_{j \in \mathbb{N}}$ cartas locales que cubren a M y N respectivamente. Sean $f_{ij} = \psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i[U_i] \rightarrow \psi_j[V_j] \subseteq \mathbb{R}^l$. Definimos al conjunto $C_{ij} = \{y \in \psi_j[V_j] : y \text{ es valor crítico de } f_{ij}\} \subseteq \mathbb{R}^l$ para cada $i, j \in \mathbb{N}$. Por el teorema de Sard para en el espacio euclideo, C_{ij} tiene medida cero en \mathbb{R}^l . Ya vimos que los difeomorfismos preservan medida cero, por lo tanto $\psi_j^{-1}[C_{ij}]$ tiene también medida cero en N . La unión numerable de conjuntos de medida cero tiene medida cero. Luego

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \psi_j^{-1}[C_{ij}] = \{q \in N : q \text{ es valor crítico de } f\}$$

tiene medida cero. \square

Corolario. Sea $f : M \rightarrow N$ de clase C^k . El conjunto $\{q \in N : q \text{ es valor regular de } f\}$ es residual en N , en particular denso.

Demostración. El complemento de un conjunto de medida cero es residual. \square

Definición. Sea $M \subseteq \mathbb{R}^n$ variedad diferenciable y $X : M \rightarrow TM$ aplicación de clase C^k .

- 1) Decimos que X es un campo vectorial C^k sobre M si para cada $p \in M$ $X(p) \in T_p M$. Al conjunto de campos vectoriales C^k sobre M lo denotamos por:

$$\mathfrak{X}^k(M) = \{X : M \rightarrow TM : X \text{ es campo vectorial } C^k \text{ sobre } M\}.$$

- 2) Una curva integral de $X \in \mathfrak{X}^k(M)$ es una curva $\alpha : (a, b) \rightarrow M$ de clase C^k que satisface la ecuación diferencial $\alpha'(t) = X(\alpha(t))$ para toda $t \in \mathbb{R}$. Se dice que α tiene condición inicial p cuando $\alpha(0) = p$.
- 3) Sea $f : M \rightarrow N$ un difeomorfismo C^{k+1} y $X \in \mathfrak{X}^k(M)$. Entonces f induce un campo vectorial sobre N , $Y = f_*X : N \rightarrow TN$, definido por $Y(q) = df_p X(p)$ donde $f(p) = q$. Notemos que si $\alpha : (a, b) \rightarrow M$ es una curva integral de X centrada en p , por la regla de la cadena $\beta = f \circ \alpha$ es curva integral de Y centrada en $f(p)$.

Debido a que el Teorema de Existencia y Unicidad es un resultado local de \mathbb{R}^n , podemos extenderlo vía cartas locales a campos vectoriales sobre variedades diferenciables.

Proposición 1.1.18. Sean E un espacio de Banach, M una variedad diferenciable y $F : E \times M \rightarrow TM$ aplicación C^k tal que $\pi F(\lambda, p) = p$, donde $\pi : TM \rightarrow M$ es la proyección natural. Entonces $\forall \lambda \in E, \forall p \in M$ hay $W \subseteq E$ y $V \subseteq M$ vecindades abiertas de λ y p respectivamente, un $\epsilon > 0$ y una aplicación continua $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \times V \times W \rightarrow M$ tal que $\varphi(0, p, \lambda) = p$ y

$$\frac{d\varphi}{dt}(t, p, \lambda) = F(\lambda, (\varphi(t, p, \lambda))).$$

Si $\alpha : (a, b) \rightarrow M$ es curva integral de $F_\lambda = F(\lambda, -)$ con condición inicial p entonces $\alpha = \varphi_{p, \lambda} = \varphi(-, p, \lambda)$

Demostración. Tomando cartas locales, φ_λ es un flujo local para F_λ . □

Proposición 1.1.19. Sean $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalos abiertos y $\alpha : I \rightarrow M, \beta : J \rightarrow M$ curvas integrales de $X \in \mathfrak{X}^k(M)$. Si $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$ para alguna $t_0 \in I \cap J$ entonces $\forall t \in I \cap J \alpha(t) = \beta(t)$.

Demostración. La demostración es analoga al Teorema de Unicidad Local para \mathbb{R}^n . □

Por el Teorema de existencia y unicidad local para $X \in \mathfrak{X}^k(M)$ y $p \in M$ existe una curva integral de X con condición inicial p . Por la proposición anterior, hay una curva integral maximal. Es decir para cada $p \in M$ existe α curva integral de X con $\alpha(0) = p$ y, si β es otra curva integral de X con $\beta(0) = p$, entonces $\text{dom}(\beta) \subseteq \text{dom}(\alpha)$.

1.2. El Teorema de Poincaré-Bendixson

Proposición 1.2.1. Sean M variedad compacta y $X \in \mathfrak{X}^k(M)$. Hay $\phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ aplicación C^k tal que $\forall p \in M \phi(0, p) = p$ y $\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, p) = X(\phi(t, p))$. Es decir, X tiene un flujo global definido sobre todo \mathbb{R} .

Demostración. Sean $p \in M$ y $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ con $\alpha : (a, b) \rightarrow M$ curva integral maximal. Afirmamos que $b = \infty$, para mostrar esto supongamos que $b < \infty$. Sea $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ sucesión creciente con $t_n \rightarrow b$. Al ser M compacta y α continua, podemos suponer que la sucesión $\{\alpha(t_n)\}_{n=1}^\infty$ es convergente, digamos a $q \in M$. Sea $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \times V_q \rightarrow M$ flujo local de X en q . Tomamos $n_0 \in \mathbb{N}$ de manera que $b - \epsilon/2 < t_{n_0} < b$ y $\alpha(t_{n_0}) \in V_q$. Definimos la siguiente función

$$\begin{aligned} \gamma(a, t_{n_0} + \epsilon) &\longrightarrow M \\ t &\longmapsto \begin{cases} \alpha(t) & \text{si } t \leq t_{n_0} \\ \beta(t - t_{n_0}, \alpha(t_{n_0})) & \text{si } t \geq t_{n_0} \end{cases} \end{aligned}$$

Como $\alpha(t_{n_0}) = \beta(t_{n_0} - t_{n_0}, \alpha(t_{n_0}))$, γ es una curva integral de X . Tomando ϵ suficientemente pequeña, $t_{n_0} > 0$ y $\gamma(0) = p$, pero $(a, b) \subsetneq (a, t_{n_0} + \epsilon)$, una contradicción ya que α es curva integral maximal. Luego $b = \infty$ y, de manera análoga, $a = -\infty$. Por lo tanto el flujo global ϕ es definible en todo \mathbb{R} . \square

A partir de ahora consideraremos en general que M es una variedad diferenciable compacta. Esto para garantizar la existencia de un flujo global definido en todo \mathbb{R} . Dado $X \in \mathfrak{X}^k(M)$ denotaremos al flujo global de X por $X_t(p) := \phi(t, p)$, donde ϕ es el flujo global de la proposición anterior.

Definición. Sean $X \in \mathfrak{X}^k(M)$ y $p \in M$.

- $O(p) = \{X_t(p) : t \in \mathbb{R}\}$ es la órbita de p .
- $O^+(p) = \{X_t(p) : t \geq 0\}$ órbita positiva de p .
 $O^-(p) = \{X_t(p) : t \leq 0\}$ órbita negativa de p .
- Decimos que p es una singularidad de X si $X(p) = 0$. En este caso tenemos que $O(p) = \{p\}$
- Si $X(p) \neq 0$ decimos que p es un punto regular de X . Si p es punto regular entonces la curva $\alpha(t) = X_t(p)$ es una inmersión de \mathbb{R} en M , de aquí se desprenden dos casos:
 - a) Si α no es inyectiva, por la unicidad de las curvas integrales, $\alpha[\mathbb{R}]$ es difeomorfo a S^1 . En este caso decimos que $O(p)$ es una órbita cerrada de periodo τ , donde $\tau = \min\{t > 0 : \alpha(0) = \alpha(t)\}$.
 - b) Si α es inyectiva se dice que $O(p)$ es una órbita regular.
- Definimos el ω límite de p como $\omega(p) = \{q \in M : \text{hay } \{t_n\} \subseteq \mathbb{R}^n \text{ sucesión tal que } t_n \rightarrow \infty \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} X_{t_n}(p) = q\}$.
- Definimos el α límite de p como $\alpha(p) = \{q \in M : \text{hay } \{s_n\} \subseteq \mathbb{R} \text{ sucesión tal que } s_n \rightarrow -\infty \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} X_{s_n}(p) = q\}$.

En otras palabras el ω -límite de p son los puntos de acumulación de $O^+(p)$. Es decir, el comportamiento “a futuro” de p bajo el campo vectorial X . De ahí el nombre de ω -límite, ya que ω es la última letra del alfabeto griego. Análogamente el α -límite es el comportamiento en “el pasado” de p , siendo α la primer letra del alfabeto griego.

Observación. Debido a que hay una dualidad entre el ω -límite de un campo X y el α -límite del campo $-X$ dada por $\omega_X(p) = \alpha_{-X}(p)$, toda propiedad que probemos para los ω -límites será también válida para los α -límites.

A continuación demostraremos algunas propiedades básicas de los ω -límites (y por ende también de los α -límites).

Proposición 1.2.2. *Sean M variedad compacta, $X \in \mathfrak{X}^k(M)$ y $p \in M$. Se cumple lo siguiente:*

- 1) $\omega(p) \neq \emptyset$.
- 2) $\omega(p)$ es cerrado.
- 3) $\omega(p)$ es invariante bajo el flujo X_t . Es decir, si $q \in \omega(p)$ entonces $O(q) \subseteq \omega(p)$.

4) $\omega(p)$ es conexo.

Demostración.

- 1) Sea $\{t_n\}$ sucesión creciente entonces $\{X_{t_n}(p)\}$ es una sucesión en M . Al ser M compacto $X_{t_n}(p)$ tiene una subsucesión convergente, es decir $X_{s_n}(p) \rightarrow q$ cuando $n \rightarrow \infty$. Luego $q \in \omega(p)$.
- 2) Sea $q \in M - \omega(p)$. Como no hay una sucesión $\{t_n\}$ tal que $X_{t_n} \rightarrow q$ entonces hay $V \subseteq M$ vecindad abierta de q tal que $V \cap O(p) = \emptyset$. Luego, si $m \in V$ entonces $m \notin \omega(p)$. Por lo tanto $M - \omega(p)$ es abierto y $\omega(p)$ cerrado.
- 3) Sea $q \in \omega(p)$ y $\{t_n\}$ sucesión creciente tal que $X_{t_n} \rightarrow q$. Si tomamos $m \in O(q)$ entonces hay $s_0 \in \mathbb{R}$ con $X_{s_0}(q) = m$. Por continuidad del flujo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_{s_0+t_n}(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} X_{s_0}X_{t_n}(p) = X_{s_0} \lim_{n \rightarrow \infty} X_{t_n}(p) = X_{s_0}(q) = m.$$

Por lo que $m \in \omega(p)$.

- 4) Supongamos $\omega(p)$ desconexo. Sean V_1, V_2 abiertos no vacíos de M tales que $\omega(p) \subseteq V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap \omega(p) \neq \emptyset \neq V_2 \cap \omega(p)$ y $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Sea $K = M - (V_1 \cup V_2)$, K es compacto. Tomamos $q_1 \in \omega(p) \cap V_1$ y $q_2 \in \omega(p) \cap V_2$, hay $\{t_n\}$ y $\{\hat{t}_n\}$ sucesiones crecientes tales que $X_{t_n}(p) \rightarrow q_1$ y $X_{\hat{t}_n}(p) \rightarrow q_2$, tomando subsucesiones de ser necesario, podemos suponer $\forall i \in \mathbb{N} \quad t_i > \hat{t}_i$ con $X_{t_i}(p) \in V_1$ y $X_{\hat{t}_i}(p) \in V_2$. Por la continuidad del flujo para cada $i \in \mathbb{N}$ hay $s_i \in (t_i, \hat{t}_i)$ de manera que $X_{s_i}(p) \in K$. Por lo tanto la sucesión $\{X_{s_i}\}$ está contenida en K , al ser K compacto está tiene una subsucesión convergente digamos a $q \in K$, pero esto significa que $q \in \omega(p) \cap K = \omega(p) - (V_1 \cup V_2)$ lo que es una contradicción ya que $\omega(p) \subseteq V_1 \cup V_2$.

Por lo tanto $\omega(p)$ es conexo.

□

Algunos ejemplos de ω -límites:

Ejemplo. Daremos un campo $X \in \mathfrak{X}^\infty(S^2)$ que tiene solamente dos singularidades y no tiene órbitas cerradas. Describiremos el comportamiento de sus órbitas.

Sea $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ la esfera unitaria. El plano tangente a S^2 en $(x_0, y_0, z_0) \in S^2$ está dado por $T_{(x_0, y_0, z_0)}S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (x_0, y_0, z_0), (x, y, z) \rangle = 0\}$ donde $\langle -, - \rangle$ es el producto escalar usual de \mathbb{R}^3 . Definimos el siguiente campo vectorial sobre S^2 :

$$\begin{aligned} X : S^2 &\longrightarrow TS^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (-xz, -yz, x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Verifiquemos primero que $X(x, y, z) \in T_{(x, y, z)}S^2$.

$$\langle (x, y, z), X(x, y, z) \rangle = \langle (x, y, z), (-xz, -yz, x^2 + y^2) \rangle = -x^2z - y^2z + (x^2 + y^2)z = 0.$$

Ahora describiremos el comportamiento de las órbitas de X .

Afirmamos que $p_N = (0, 0, 1)$ y $p_S = (0, 0, -1)$ son las únicas singularidades, y $\forall (x, y, z) \in S^2$ con $z \neq \pm 1$ se tiene que $\omega(x, y, z) = \{p_N\}$ y $\alpha(x, y, z) = \{p_S\}$.

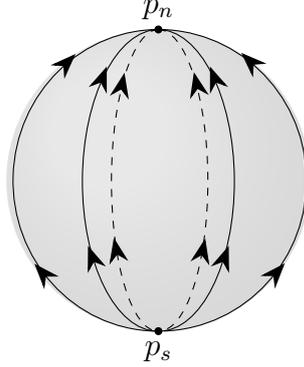


Figura 1.1: Flujo de X

$$\begin{aligned} X(p_N) &= X(0, 0, +1) = (0, 0, 0) \\ X(p_S) &= X(0, 0, -1) = (0, 0, 0) \end{aligned}$$

Con lo que p_N y p_S son singularidades. Si $(x, y, z) \in S^2$ es tal que $z \neq \pm 1$ entonces, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ implica que $x^2 + y^2 = 1 - z^2 \neq 0$. Luego $X(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$. Es decir, p_N y p_S son las únicas singularidades.

Notemos que, si $(x, y, z) \neq p_N, p_S$ entonces $x^2 + y^2 > 0$. Por lo tanto el vector $X(x, y, z) = (-xz, -yz, x^2 + y^2)$ apunta “hacia arriba” en el sentido de que su coordenada z es positiva.

Definimos para cada $0 \leq r < 1$

$$\begin{aligned} \beta_r : \mathbb{R} &\longrightarrow S^2 \\ t &\longmapsto (r \cos t, r \sin t, 1 - r^2) \end{aligned}$$

$\|\beta_r(t)\| = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ y β_r' es ortogonal a X ya que

$$\begin{aligned} \langle \beta_r'(t), X(\beta_r(t)) \rangle &= \langle (-r \sin t, r \cos t, 0), (-r(1 - r^2) \cos t, -r(1 - r^2) \sin t, r^2) \rangle \\ &= r^2(1 - r^2) \sin t \cos t - r^2(1 - r^2) \sin t \cos t + 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $r = x^2 + y^2$ entonces el ω -límite de (x, y, z) debe estar por encima de $\beta_r[\mathbb{R}] \subseteq S^2$. Como esto es para cada $r \in [0, 1)$, concluimos que $\omega(x, y, z) = \{p_N\}$ (si $z \neq -1$), de manera análoga $\alpha(x, y, z) = \{p_S\}$ (si $z \neq 1$).

Ejemplo. Daremos ahora un campo $X \in \mathfrak{X}^k(S^2)$ con dos singularidades y una única órbita cerrada. Definamos el campo $X \in \mathfrak{X}^\infty(S^2)$ por

$$X(x, y, z) = (xz^2, yz^2, 0) + (x^2 + y^2)(-y, x, -z)$$

Antes que nada verifiquemos que en efecto $X(x, y, z) \in T_{(x,y,z)}S^2$.

$$\begin{aligned} \langle (x, y, z), X(x, y, z) \rangle &= \langle (x, y, z), (xz^2, yz^2, 0) + (x^2 + y^2)(-y, x, -z) \rangle \\ &= x^2z^2 + y^2z^2 + (x^2 + y^2)(-xy + xy - z^2) \\ &= z^2(x^2 + y^2) - z^2(x^2 + y^2) = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto X está bien definida.

Afirmamos que:

- p_N y p_S son las únicas singularidades de X y el ecuador $\{(x, y, z) \in S^2 : z = 0\}$ es una órbita cerrada.
- (x, y, z) en el hemisferio norte ($z > 0$) $\implies \alpha(x, y, z) = p_N$ y $\omega(x, y, z) =$ el ecuador.
- (x, y, z) en el hemisferio sur ($z < 0$) $\implies \alpha(x, y, z) = p_S$ y $\omega(x, y, z) =$ el ecuador.

$$X(p_N) = X(0, 0, 1) = (0, 0, 1) + (0^2 + 0^2)(-0, 0, -1) = (0, 0, 0).$$

$$X(p_S) = X(0, 0, -1) = (0 - 1, 0 - 1, 0) + (0^2 + 0^2)(-0, 0, 1) = (0, 0, 0).$$

$$\text{Para } z = 0, \text{ tenemos que } X(x, y, 0) = (x \cdot 0, y \cdot 0, 0) + (x^2 + y^2)(-y, x, 0) = (-y, x, 0).$$

Definimos la siguiente curva en S^2 .

$$\begin{aligned} \beta : \mathbb{R} &\longrightarrow S^2 \\ t &\longmapsto (\cos t, \sin t, 0) \end{aligned}$$

Notemos que $\beta[\mathbb{R}] = \{(x, y, 0) \in S^2\}$. Si calculamos la derivada de β

$$\beta'(t) = (-\sin t, \cos t, 0) = X(\cos t, \sin t, 0) = X(\beta(t)).$$

Llegamos a que β es curva integral de X . Tomando $n \in \mathbb{N}$ es claro que

$$\beta(0) = (\cos 0, \sin 0, 0) = (\cos 2\pi n, \sin 2\pi n, 0) = \beta(2\pi n).$$

Luego β es órbita cerrada de periodo 2π . Hasta ahora sabemos que, para $z = 1$ o $z = -1$, (x, y, z) es una singularidad de X . Si $z = 0$ entonces la órbita de (x, y, z) es una órbita cerrada de periodo 2π .

Consideremos ahora $(x_0, y_0, z_0) \in S^2$ con $0 < z_0 < 1$, entonces $0 < x_0^2 + y_0^2 < 1$. Tomando una carta local $\varphi : \{(x, y, z) \in S^2 : z > 0\} \longrightarrow B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^2$ definida por $\varphi(x, y, z) = (x, y)$ con inversa $\varphi(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$.

Sea $Y = \varphi_* X$. Al ser φ difeomorfismo y por la definición de Y , φ lleva órbitas de X en órbitas de Y , se sigue que

$$(x, y, z) \in \omega_X(x_0, y_0, z_0) \Leftrightarrow \varphi(x, y, z) = (x, y) \in \omega_Y(x_0, y_0).$$

Calculemos ahora explícitamente el campo Y .

$$D\varphi(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tomando $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$:

$$\begin{aligned} Y(x, y) &= D\varphi(x, y, z)X(x, y, z) \\ &= D\varphi(x, y, z)[(x(1 - x^2 - y^2), y(1 - x^2 - y^2), 0) + (x^2 + y^2)(-y, x, -z)] \\ &= (1 - x^2 - y^2)(x, y) + (x^2 + y^2)(-y, x) \end{aligned}$$

Sean $r = \|(x_0, y_0)\| = (x_0^2 + y_0^2)^{1/2}$ y $S_r^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\| = r\}$. Para $(x, y) \in S_r^1$, como $(-y, x)$ es ortogonal a (x, y) ,

$$\begin{aligned} \langle Y(x, y), (-y, x) \rangle &= \langle (1 - x^2 - y^2)(x, y) + (x^2 + y^2)(-y, x), (-y, x) \rangle \\ &= (1 - x^2 - y^2)\langle (x, y), (-y, x) \rangle + (x^2 + y^2)\langle (-y, x), (-y, x) \rangle \\ &= 0 + \|(x, y)\|^2\|(-y, x)\|^2 \\ &= \|(x, y)\|\|(-y, x)\|r^2. \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} \langle Y(x, y), Y(x, y) \rangle &= \langle (1 - r^2)(x, y) + r^2(-y, x), (1 - r^2)(x, y) + r^2(-y, x) \rangle \\ &= (1 - r^2)\|(x, y)\|^2 + r^2\|(-y, x)\|^2 \\ &= r^2 - r^4 + r^4 = r^2. \end{aligned}$$

Es decir $\|Y(x, y)\| = \|(x, y)\|$. Luego $\langle Y(x, y), (-y, x) \rangle = \|Y(x, y)\|\|(-y, x)\|r^2$. Recordando que para $u, v \in \mathbb{R}^2$ se tiene la siguiente igualdad $\langle u, v \rangle = \|u\|\|v\|\cos\theta(u, v)$ donde $\theta(u, v)$ es el ángulo entre u, v . Si sustituimos $u = Y(x, y)$ y $v = (-y, x)$, como $0 < r < 1$, entonces $0 < \theta(Y(x, y), (-y, x)) < 2\pi$. Por lo tanto $Y(x, y)$ apunta hacia “afuera” de S_r^1 . Dicho de otra forma, $\|Y_t(x, y)\|$ es estrictamente creciente. Por lo tanto $\omega_Y(x, y) \cap B_r(0) = \emptyset$. Luego $\omega_X(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}) \cap S_+^2 = \emptyset$. Por la unicidad de las curvas integrales $O(x, y, z) \subseteq S_+^2$, por lo tanto para $(x, y, z) \in S_+^2$. Se sigue que $\omega(x, y, z)$ está contenido en el ecuador. Pero $\omega(x, y, z)$ es cerrado, no vacío e invariante bajo el flujo, por lo que necesariamente $\omega(x, y, z) = \{(x, y, 0) \in S^2\}$. Análogamente si $-1 < z < 0$ entonces $\omega(x, y, z) = \{(x, y, 0) \in S^2\}$.

Por otro lado, $\|Y_t(x, y)\|$ estrictamente creciente implica que el $\lim_{t \rightarrow -\infty} \|Y(x, y)\| = 0$. Por lo tanto $\alpha_Y(x, y) = 0$.

$$\text{Por lo tanto } z \neq 0 \implies \alpha_X(x, y, z) = \begin{cases} p_N & \text{para } z > 0. \\ p_S & \text{para } z < 0. \end{cases}$$

Denotemos por T^2 el toro de revolución en \mathbb{R}^3 .

Ejemplo. Describiremos, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, un campo vectorial $Y^\lambda \in \mathfrak{X}^\infty(T^2)$. Mostraremos que para $\lambda \in \mathbb{Q}$ las órbitas de Y^λ son todas órbitas cerradas. Para $\lambda \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, las órbitas de Y^λ son todas regulares y densas en T^2 .

Sea $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ parametrización del toro dada por

$$\varphi(u, v) = ((2 + \cos 2\pi v) \cos 2\pi u, (2 + \cos 2\pi v) \sin 2\pi u, \sin 2\pi v).$$

φ es un difeomorfismo local C^∞ . Por otro lado, si $\varphi(u, v) = \varphi(\bar{u}, \bar{v})$, entonces

- 1) $(2 + \cos 2\pi v) \cos 2\pi u = (2 + \cos 2\pi \bar{v}) \cos 2\pi \bar{u}$.
- 2) $(2 + \cos 2\pi v) \sin 2\pi u = (2 + \cos 2\pi \bar{v}) \sin 2\pi \bar{u}$.
- 3) $\sin 2\pi v = \sin 2\pi \bar{v}$.

De la tercera identidad concluimos que $v - \bar{v} \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto $2 + \cos 2\pi v = 2 + \cos 2\pi \bar{v}$, lo que implica que $\cos 2\pi u = \cos 2\pi \bar{u}$ y por lo tanto también $u - \bar{u} \in \mathbb{Z}$.

Es decir: $\varphi(u, v) = \varphi(\bar{u}, \bar{v}) \iff (u - \bar{u}, v - \bar{v}) \in \mathbb{Z}^2$.

Ahora, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ definimos

$$X^\lambda : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad X^\lambda(u, v) \longmapsto (1, \lambda).$$

Sea $Y^\lambda = \varphi_* X^\lambda : T^2 \longrightarrow TT^2$, $X \in \mathfrak{X}^\infty(\mathbb{R}^2) \Rightarrow Y \in \mathfrak{X}^\infty(T^2)$.

Verifiquemos que:

- Para $\lambda \in \mathbb{Q}$, toda órbita de Y^λ es cerrada.
- Para $\lambda \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, toda órbita Y^λ es densa en T^2 .

Para mostrar esto, sea $l_c \subseteq \mathbb{R}^2$ la recta con pendiente λ que pasa por el punto $(0, c)$. Parametrizamos $l_c = \{(t, c + \lambda t) : t \in \mathbb{R}\}$ por $\beta_c(t) = (t, c + \lambda t)$. Notemos entonces que $\beta'_c(t) = (1, \lambda) = X^\lambda(\beta_c(t))$. Por lo tanto las rectas l_c son las órbitas de X^λ , lo que implica que $\varphi[l_c] \subseteq T^2$ son las órbitas de Y^λ .

Supongamos ahora que $\lambda \in \mathbb{Q}$, digamos $\lambda = p/q$ con p y q primos relativos. Entonces

$$\beta_c(0) - \beta_c(q) = (0, c) - (q, c + (p/q)q) = (-q, -p) \in \mathbb{Z}^2.$$

Luego, $\varphi(\beta_c(0)) = \varphi(\beta_c(q))$. Como $\varphi \circ \beta_c$ es línea integral de Y^λ , llegamos a que $\varphi \circ \beta_c$ es órbita cerrada. Si tomamos $0 < t_0 < q$, entonces $\beta_c(0) - \beta_c(t_0) = (-t_0, (p/q)t_0)$. Por lo tanto, para $t_0 \notin \mathbb{Z}$, tenemos $\varphi(\beta_c(0)) \neq \varphi(\beta_c(t_0))$. Si $t_0 \in \mathbb{Z}$ entonces $(pt_0)/q \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$, ya que p y q son primos relativos y $0 < t_0 < q$. En este caso también llegamos a que $\varphi(\beta_c(0)) \neq \varphi(\beta_c(t_0))$. Concluimos que $\varphi \circ \beta_c$ tiene periodo q .

Así, si $\lambda \in \mathbb{Q}$, todas las órbitas de Y^λ son cerradas de periodo q , donde $\lambda = p/q$.

Supongamos ahora que $\lambda \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Fijemos $c_0 \in \mathbb{R}$, sea $C = \{c \in \mathbb{R} : \varphi[l_c] = \varphi[l_{c_0}]\}$. Si C es denso en \mathbb{R} , entonces $\cup_{c \in C} l_c$ es denso en \mathbb{R}^2 . Al ser φ continua y suprayectiva $\varphi[l_{c_0}] = \varphi[\cup_{c \in C} l_c]$ es denso en T^2 con lo que terminamos.

Verifiquemos que C es denso en \mathbb{R} . Para esto nos fijamos en $G = \{(m\lambda + n) : n, m \in \mathbb{Z}\}$. Debido a que $c \in C$ si y sólo si $c - c_0 \in G$, entonces G es denso en \mathbb{R} si y sólo si C es denso en \mathbb{R} . Pero $(G, +, 0)$ es un subgrupo de $(\mathbb{R}, +, 0)$, por lo tanto G es discreto o denso en \mathbb{R} .

Veamos que G no es discreto. Para cada $m \in \mathbb{Z}$ existe un $n_m \in \mathbb{Z}$ de manera que $m\lambda + n_m \in [0, 1]$. Denotemos por $u_m = m\lambda + n_m$. Sean $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ con $m_1 \neq m_2$. Tenemos dos casos $u_{m_1} - u_{m_2} \in [0, 1]$ o $u_{m_2} - u_{m_1} \in [0, 1]$. Supongamos sin pérdida de generalidad que: $u_{m_1} - u_{m_2} = (m_1 - m_2)\lambda + (n_1 - n_2) \in [0, 1]$. Si $u_{m_1} = u_{m_2}$ entonces $(m_1 - m_2)\lambda = n_1 - n_2$. Pero $\lambda \notin \mathbb{Q}$ implica $(m_1 - m_2)\lambda \notin \mathbb{Z}$, lo cual es una contradicción ya que $n_1 - n_2 \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto $u_{m_1} \neq u_{m_2}$. Así, tenemos una sucesión de elementos distintos $\{u_m\}_{m \in \mathbb{Z}} \subseteq [0, 1]$. Al ser $[0, 1]$ compacto, hay un punto de acumulación. Con lo que podemos concluir que G no es discreto y por lo tanto $\varphi[l_{c_0}]$ es denso en T^2 .

Haciendo variar $c_0 \in \mathbb{R}$ concluimos que, para $\lambda \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, toda órbita de Y^λ es densa en T^2 .

Sea M variedad diferenciable y $g_p : T_p M \longrightarrow \mathbb{R}$ forma bilineal positiva definida. Una métrica riemanniana para M es una función C^k $g : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\forall p \in M$ $g|_{T_p M} = g_p$. Es decir, g varía diferenciablemente respecto a p .

Sean M variedad diferenciable con g métrica riemanniana sobre M , y $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^{k+1} . Definimos el campo gradiente de f , $X := \text{grad}(f) : M \longrightarrow TM$, como el único vector $X(p) \in T_p M$ tal que $\forall v \in T_p M$ $df_p(v) = g(X(p), v)$.

Ejemplo. Los campos gradientes forman una clase interesante de ejemplos. A continuación daremos dos características importantes de los campos gradientes. Sean $p \in M$ y $X = \text{grad}(f)$, entonces

- p es singularidad de X si y solamente si $df_p(v) = 0 \quad \forall v \in T_p M$.
- Si p es punto regular de X . Entonces $df_p(X(p)) = g(X(p), X(p)) > 0$ es siempre positivo. En particular X no tiene órbitas cerradas. Ya que $O(p) = \gamma$ órbita cerrada implica que γ es una subvariedad compacta de M . Se sigue que $f|_\gamma : \gamma \rightarrow \mathbb{R}$ alcanza su máximo y su mínimo en γ . En particular hay un $q \in \gamma$ tal que $df_q = 0$ y por lo tanto q es una singularidad de X , una contradicción.

En particular, si f es una función sobre M , con M variedad compacta, f alcanza su máximo y su mínimo en M . Por lo que $\text{grad}(f)$ tiene, por lo menos, dos singularidades.

Así, $\text{grad}(f)$ es un campo vectorial sin órbitas cerradas y con singularidades.

A continuación estudiaremos el comportamiento de la dinámica de campos vectoriales C^k en la esfera S^2 . Debido al teorema de la curva de Jordan, el comportamiento de las órbitas en la esfera no es muy complicado, a diferencia del Toro donde puede llegar a haber órbitas densas. La estructura de los ω -límites en la esfera quedan descritos por el Teorema de Poincaré-Bendixson, el cual demostraremos al final de esta sección.

Lema 1.2.3. *Si $\Sigma \subseteq S^2$ es un sección transversal a $X \in \mathfrak{X}^k(S^2)$ en $p \in S^2$, entonces $O^+(p)$ intersecta a Σ en una secuencia monótona, es decir, si p_i es la i -ésima intersección de Σ con $O^+(p)$ entonces $p_i \in [p_{i-1}, p_{i+1}]$.*

Demostración. Fijémonos en la curva dada por el segmento $[p_{i-1}, p_i] \subseteq \Sigma$ y la curva generada por el flujo que une p_{i-1} con p_i . Esta es una curva cerrada sin autointersecciones, por el teorema de la curva de Jordan delimita un disco D , pero $O^+(p) \subseteq D$. Se sigue que $p_{i+1} \in D \cap \Sigma$. Concluimos que $p_i \in [p_{i-1}, p_{i+1}]$. \square

Observación. Si γ es una trayectoria entonces $\omega(\gamma) \cap \Sigma$ es, a lo más, un punto.

Lema 1.2.4. *Si el ω -límite de una trayectoria γ no contiene singularidades entonces $\omega(\gamma)$ es una órbita cerrada.*

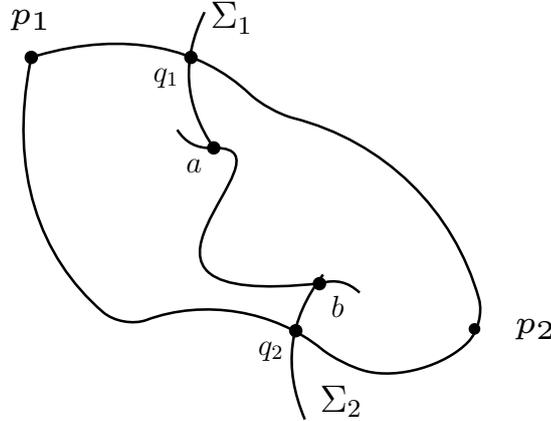
Demostración. Sea $p \in \omega(\gamma)$. Veamos que $O(p)$ es cerrada, para esto tomamos $x \in \omega(p)$ entonces $x \in \omega(\gamma)$. Por lo tanto $X(x) \neq 0$ y podemos tomar una sección transversal $\Sigma \subseteq S^2$ a X por x . Por el lema anterior, $O^+(p)$ intersecta a Σ en una secuencia monótona $\{p_n\}$ con $p_n \rightarrow x$, pero $\{p_n\} \subseteq \omega(\gamma) \cap \Sigma$, por la observación anterior esto implica que la sucesión $\{p_n\}$ es constante, por lo que $p_n = x \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto $\omega(p)$ es una órbita cerrada. \square

Lema 1.2.5. *Sean $p_1, p_2 \in S^2$ singularidades distintas con $p_1, p_2 \in \omega(p)$ para alguna $p \in S^2$. A lo más existe una trayectoria $\gamma \subseteq \omega(p)$ tal que $\alpha(\gamma) = p_1$ y $\omega(\gamma) = p_2$.*

Demostración. Supongamos que existen dos órbitas distintas, γ_1 y γ_2 , las cuales satisfacen: $\alpha(\gamma_1) = p_1 = \alpha(\gamma_2)$ y $\omega(\gamma_1) = p_2 = \omega(\gamma_2)$. Fijándonos en la curva C_1 dada por las trayectorias γ_1, γ_2^{-1} (γ_2 recorrida en sentido inverso). Por el Teorema de la curva de Jordan, C_1 separa a S^2 en dos discos, uno de los cuales contiene a p . Sean Σ_1 y Σ_2 segmentos transversales a γ_1 y γ_2 respectivamente, con $q_1 \in \gamma_1 \cap \Sigma_1$ y $q_2 \in \gamma_2 \cap \Sigma_2$.

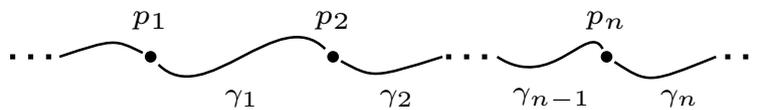
Como γ_1 y $\gamma_2 \subseteq \omega(p)$, hay $a, b \in S^2$ tales que Σ_1 interseca $O^+(p)$ en a y Σ_2 interseca $O^+(p)$ en b .



Si nos fijamos en la curva que une los puntos $abq_2p_2q_1a = C$. Es una curva simple cerrada, por lo que separa S^2 en dos discos, A y B . Por el Lema 1.23 $O^+(p) \cap (q_2, b) = \emptyset$ por lo que $O^+(b) \subseteq A$, pero $p_1 \in \omega(p) = \omega(b)$ y $p_1 \in B$, una contradicción. Luego, $\gamma_1 = \gamma_2$. \square

Teorema 1.2.6 (Teorema de Poincaré - Bendixson). Si $X \in \mathfrak{X}^k(S^2)$ tiene un número finito de singularidades y $p \in S^2$ entonces ocurre una de las siguientes:

- 1) $\omega(p)$ es una singularidad.
- 2) $\omega(p)$ es una órbita cerrada.
- 3) $\omega(p)$ está constituido por singularidades p_1, \dots, p_n y órbitas regulares tales que, si $\gamma \subseteq \omega(p)$, entonces $\alpha(\gamma) = p_i$ y $\omega(\gamma) = p_{i+1}$.



Demostración.

- 1) Si $\omega(p)$ no contiene puntos regulares, por la conexidad del ω -límite, $\omega(p) = \{q\}$.
- 2) Si $\omega(p)$ no tiene puntos singulares entonces, por el Lema 1.2.4 $\omega(p)$, es una órbita cerrada.
- 3) Supongamos ahora que $\omega(p)$ tiene tanto puntos regulares como puntos singulares. Sea $\gamma \subseteq \omega(p)$ trayectoria regular. Por conexidad, sabemos que si $\omega(\gamma)$ no contiene puntos regulares entonces $\omega(\gamma) = p_i$. Supongamos que hay $q \in \omega(\gamma)$ punto regular y sea Σ segmento transversal con $q \in \Sigma$. Dado que $\gamma \subseteq \omega(p)$, γ interseca a Σ en sólo un punto.

Por el Lema 2.2.3 $\gamma \cap \Sigma = \{q\}$ implica $\omega(\gamma)$ trayectoria cerrada y $\omega(p) = \omega(\gamma)$. Pero esta es una contradicción ya que $\omega(p)$ contiene puntos singulares.

Por lo tanto $\omega(\gamma) = \{p_i\}$. Análogamente $\alpha(\gamma) = \{p_j\}$. Por el Lema 2.2.5, γ es la única trayectoria que une p_i con p_j , por la conexidad del ω -límite, $\omega(p)$ es una cadena de singularidades p_1, \dots, p_n unidas por trayectorias γ_i de manera que γ_i es la única trayectoria que une $p_i = \alpha(\gamma_i)$ con $p_{i+1} = \omega(\gamma_i)$. \square

Corolario (1). $X \in \mathfrak{X}^k(S^2)$ tiene por lo menos una singularidad.

Demostración. Sea $X \in \mathfrak{X}^k(S^2)$. Supongamos que X no tiene singularidades, en particular, X tiene un número finito. Tomamos $p \in M$ un punto cualquiera, por el Teorema de Poincaré-Bendixson, $\omega(p)$ es una órbita cerrada que separa a S^2 en dos discos. Sean D_1 y D_2 estos discos. Nos fijamos en el disco cerrado $D = D_1 \cup \omega(p)$. Para cada $q \in D$, $\omega(q)$ es una órbita cerrada. Sea τ_q el periodo de $\omega(q)$ entonces, al ser cada τ_q positivo y D compacto, $\tau = \min\{\tau_q : q \in D\}$ es también positivo, esto se sigue de la continuidad del flujo. Si nos fijamos ahora en el difeomorfismo $X_{\tau/2}|_D : D \rightarrow D$, es un difeomorfismo en el disco cerrado que no tiene puntos fijos, lo que es una contradicción al teorema del punto fijo de Brouwer. Por lo tanto X tiene por lo menos un punto fijo. \square

Corolario. (2) El teorema de Poincaré-Bendixson también es válido en el plano proyectivo. Es decir, para $X \in \mathfrak{X}^k(P^2\mathbb{R})$ con una cantidad finita de singularidades. El ω -límite de $p \in P^2\mathbb{R}$ es una singularidad, una órbita cerrada, o está constituido por singularidades p_i y órbitas regulares γ_i tales que $p_i = \alpha(\gamma_i)$ y $\omega(\gamma_i) = p_{i+1}$.

Demostración. Consideramos $P^2\mathbb{R} = S^2 / \sim$, donde \sim es la relación de equivalencia dada por $p \sim (-p)$. Entonces $X \in \mathfrak{X}^k(P^2\mathbb{R})$ implica que hay $\tilde{X} \in \mathfrak{X}^k(S^2)$ tal que $\pi_*\tilde{X} = X$, donde π es la proyección $\pi(p) = [p]$ la clase de equivalencia de p . Por lo que si X tiene un número finito de singularidades, entonces también \tilde{X} tiene un número finito de singularidades.

Sea $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ carta local de S^2 de manera que $\pi|_U$ es inyectiva. Entonces $\varphi \circ \pi^{-1} : \pi[U] \rightarrow \mathbb{R}^2$ es carta local de $P^2\mathbb{R}$. Notemos que la representación de X y \tilde{X} en estas cartas es la misma. Es decir, $Y = (\varphi \circ \pi^{-1})_*X = \varphi_* \circ \pi_*^{-1}X = \varphi_*\tilde{X}$. Sea β curva integral de Y , entonces $\varphi^{-1} \circ \beta$ y $(\varphi \circ \pi)^{-1} \circ \beta$ son curvas integrales de \tilde{X} y X , respectivamente. Es claro que $\pi \circ (\varphi \circ \pi)^{-1}\beta = \varphi^{-1}\beta$. Luego, π lleva órbitas de \tilde{X} en órbitas de X . Al ser π suprayectiva, toda órbita de X proviene de una órbita de \tilde{X} . Al ser π una aplicación cerrada, debe preservar los ω -límites. Es decir $\pi(\omega_{\tilde{X}}(p)) = \omega_X([p])$, se sigue que $\omega_X([p])$ cumple lo mismo que $\omega_{\tilde{X}}(p)$. \square

Corolario. (3) Supongamos que $F \subseteq M^2$ es una región homeomorfa a un anillo, o a la banda de Möbius, y $X \in \mathfrak{X}^k(M)$ es tal que $X_t[F] \subseteq F \ \forall t \in \mathbb{R}$. Entonces el teorema de Poincaré-Bendixson es válido en F .

Demostración. Como el resto de la variedad $M - F$ no es de importancia, tomando $f : F \rightarrow S^2$ encaje, podemos suponer $F \subseteq M$ donde $M = S^2$ o $M = \mathbb{R}P^2$. Según si F es un anillo o la banda de Möbius, $S^2 - F$ son dos discos disjuntos, $\mathbb{R}P^2 - F$ es un disco.

Así, supongamos que X tiene una cantidad finita de singularidades en F entonces, tomando $p \in F$, como $\omega(p) \subseteq F$, la misma demostración que se dio en el teorema es válida. \square

1.3. Topología de funciones C^k

Para poder hablar de la estabilidad estructural de un sistema dinámico, necesitamos un concepto de cercanía. Para esto, dotaremos al espacio de aplicaciones C^k entre variedades de una topología.

Si el dominio M es una variedad compacta, obtenemos los siguientes resultados importantes: Tanto el conjunto de campos vectoriales como el de difeomorfismos son espacios de Baire separables. Los sistemas dinámicos suaves son densos en sus respectivos espacios: $\mathfrak{X}^\infty(M) \subseteq \mathfrak{X}^k(M)$ y $\text{Dif}^\infty(M) \subseteq \text{Dif}^k(M)$.

Para esta sección utilizaremos una cubierta de M con las siguientes características. Sea $\{(\varphi_i, U_i)\}_{i=1}^n$ un cubierta de M tal que $\varphi_i[U_i] = B_2(0)$ y $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ hay $V_i \subseteq U_i$ abierto tal que $\bigcup_{i=1}^n V_i = M$ y $\varphi_i[V_i] = B_1(0)$, en particular $\varphi_i[\overline{V_i}] = \overline{B_2(0)}$. A una cubierta que satisfaga lo anterior la llamaremos una buena cubierta de M .

Definición. Sea M variedad diferenciable compacta.

El conjunto $C^k(M, \mathbb{R}^s) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R}^s : f \text{ es } C^k\}$ es un espacio vectorial con la suma puntual $(f + g)(p) = f(p) + g(p)$ y multiplicación por escalares $(\lambda f)(p) = \lambda(f(p))$

Dotamos a $C^k(M, \mathbb{R}^s)$ de una norma de la siguiente manera: Sea $\{(\varphi_i U_i)\}_{i=1}^n$ una buena cubierta abierta de M .

Si $f \in C^k(M, \mathbb{R}^s)$ definimos $f^i = f \circ \varphi_i^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s$. Definimos la norma C^k de f como $\|f\|_k = \max\{\sup_{u \in B_1(0)} \{\|f^i(u)\|, \|df^i(u)\|, \dots, \|d(f^i)^k(u)\|\}\}$. Es inmediato de las propiedades de máximos, supremos y debido a que está definida en base de normas, que esta es una norma sobre $C^k(M, \mathbb{R}^s)$ cuya topología no depende de las bases $\{V_i\}$, $\{U_i\}$ escogidas.

Proposición 1.3.1. $(C^k(M, \mathbb{R}^s), \|\cdot\|)$ es un espacio métrico completo, de Baire y separable.

Demostración. Al ser M compacto, $(C^0(M, \mathbb{R}^s), \|\cdot\|)$ es un espacio métrico, de Baire y separable. Por otro lado, es claro de la definición de esta métrica que $\|\cdot\|_k \leq \|\cdot\|_0 = \|\cdot\|_{\text{sup}}$. Por lo tanto la convergencia en $C^k(M, \mathbb{R}^s)$ es uniforme y $C^k(M, \mathbb{R}^s) \subseteq C^0(M, \mathbb{R}^s)$ es un subconjunto cerrado, por lo que también es un espacio métrico completo, de Baire y separable. \square

Lema 1.3.2. Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^s$ función de clase C^l , con U abierto. Para $K \subseteq U$ compacto y $\epsilon > 0$ existe una $g \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^s)$ tal que $\|f - g\|_l < \epsilon$ en K .

Demostración. Sea $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ C^∞ tal que $\varphi|_K = 1$ y con soporte contenido en U . Fijámonos en la función $h = \varphi f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^s$, h cumple que $h|_K = f|_K$ y h tiene soporte contenido en U , y $h \in C^l(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^s)$ ya que f y φ son C^l . Al ser K compacto existe una $\delta > 0$ tal que $\sup\{\|d^j h(u+v) - d^j h(u)\| : u \in K \text{ y } \|v\| < \delta\} < \epsilon$, esto para $j \in \{1, \dots, l\}$. Sea $\varphi_\delta : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ función auxiliar tal que $\varphi_\delta(v) = 0$ si $\|v\| > \delta$ y $\int_{B_\delta(0)} \varphi_\delta(v) dv = 1$. Definimos g como la función:

$$g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^s$$

$$u \mapsto \int_{B_\delta(0)} \varphi_\delta(v) h(u+v) dv$$

Notemos que bajo el cambio de variable $z = u + v$, $dz = dv$ entonces

$$g(u) = \int_{B_\delta(0)} \varphi_\delta(v)h(u+v)dv = \int_{B_\delta(u)} \varphi_\delta(z-u)h(z)dz.$$

Luego, tenemos que la diferencial j -ésima de g es de la forma:

$$\begin{aligned} d^j g &= \int_{B_\delta(0)} \varphi_\delta(v)d^j h(u+v)dv \\ &= (-1)^j \int_{B_\delta(u)} \varphi_\delta(z-u)h(z)dz. \end{aligned}$$

Como φ_δ es C^∞ , también lo es g y

$$\begin{aligned} \|d^j g(u) - d^j h(u)\| &= \left\| \int_{B_\delta(0)} \varphi_\delta(v)d^j h(u+v)dv - d^j h(u) \int_{B_\delta(0)} \varphi_\delta(v)dv \right\| \\ &= \left\| \int_{B_\delta(0)} \varphi_\delta(v)(d^j h(u+v) - d^j h(u))dv \right\| \\ &\leq \sup\{\|d^j h(u+v) - d^j h(u)\| : \|v\| < \delta\} \int_{B_\delta(0)} \varphi_\delta(v)dv \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Como $h|_K = f|_K$ entonces $\|g - f\|_l < \epsilon$ en K . □

Lema 1.3.3. *Sea M variedad diferenciable compacta. Entonces $C^\infty(M, \mathbb{R}^s) \subseteq C^k(M, \mathbb{R}^s)$ es denso.*

Demostración. Sea $f \in C^k(M, \mathbb{R}^s)$, definimos $f_i = f \circ \varphi_i^{-1} : B_2(0) \rightarrow \mathbb{R}^s$. Por el lema 1.3.2, dado que $\overline{B_1(0)} \subseteq B_2(0)$ es compacto, existe una $g_i \in C^\infty(\mathbb{R}^s, \mathbb{R}^s)$. La cual satisface $g_i|_{B_1(0)} = f_i|_{B_1(0)}$ y $\|g_i - f_i\|_k < \epsilon/n$.

Sea $\{\psi_j\}_{j \leq n}$ partición de la unidad subordinada a $\{U_i\}$. Definimos $g : M \rightarrow \mathbb{R}^s$ por $g = \sum_{i=1}^n \psi_i(g_i \circ \varphi_i)$. Al ser φ_i, g_i y ψ_i aplicaciones suaves, tenemos $g \in C^\infty(M, \mathbb{R}^s)$ y

$$\begin{aligned} \|g - f\|_k &= \left\| \sum_{i=1}^n [\psi_i(g_i \circ \varphi_i) - \psi_i f] \right\|_k \\ &\leq \sum_{i=1}^n \psi_i \|g_i \circ \varphi_i - f\|_k \\ &= \sum_{i=1}^n \psi_i \|g_i - f_i\|_k \\ &< \sum_{i=1}^n \psi_i \frac{\epsilon}{n} = \epsilon. \end{aligned}$$

□

Ahora, si tomamos $N \subseteq \mathbb{R}^s$ subvariedad cerrada (Por el teorema de Whitney toda variedad es encajable como un conjunto cerrado en algún \mathbb{R}^s .), entonces $C^k(M, N) \subseteq C^k(M, \mathbb{R}^s)$ es un subespacio métrico completo, de Baire y separable.

Sean $N_1 \subseteq \mathbb{R}^{s_1}, N_2 \subseteq \mathbb{R}^{s_2}$ subvariedades cerradas y $\phi : N_1 \rightarrow N_2$ aplicación C^l con $k \leq l \leq \infty$. Definimos la aplicación $\phi_* : C^k(M, N_1) \rightarrow C^k(M, N_2)$ por $\phi_*(f) = \phi \circ f$. Como $\phi \in C^l(N_1, N_2)$, $\phi \circ f$ es C^k .

Proposición 1.3.4. *La aplicación ϕ_* es continua*

Demostración. Podemos extender ϕ a una función C^k , $\tilde{\phi} : \mathbb{R}^{s_1} \rightarrow \mathbb{R}^{s_2}$ tal que $\tilde{\phi}|_{N_1} = \phi$. Sea (φ_i, U_i) un buen atlas de M . Sean $f, g \in C^k(M, N_1)$. Al ser $\tilde{\phi}, f$ y g funciones C^k , y φ_i^{-1} ser suave se sigue que, para cada $\epsilon > 0$ hay $\delta > 0$ tal que, si $\|f \circ \varphi_i^{-1} - g \circ \varphi_i^{-1}\| < \delta$, entonces $\|\tilde{\phi} \circ f \circ \varphi_i^{-1} - \tilde{\phi} \circ g \circ \varphi_i^{-1}\| < \epsilon$. Esto para cada carta φ_i , al ser un número finito de cartas entonces $\|f - g\|_k < \delta$ implica $\|\phi \circ f - \phi \circ g\|_k = \|\tilde{\phi} \circ f - \tilde{\phi} \circ g\| < \epsilon$. Lo que muestra la continuidad de ϕ_* . \square

Proposición 1.3.5. *Sean M y N variedades diferenciables, con M compacta. El conjunto de aplicaciones suaves $C^\infty(M, N) \subseteq C^k(M, N)$ es denso.*

Demostración. Por el teorema de Whitney, podemos suponer que $N \subseteq \mathbb{R}^s$ es una subvariedad cerrada. Sea $N \subseteq V \subseteq \mathbb{R}^s$ vecindad tubular de N . Dado que $C^\infty(M, \mathbb{R}^s) \subseteq C^k(M, \mathbb{R}^s)$ es denso, si nos fijamos en la proyección $\pi : V \rightarrow N$, por el lema anterior π_* es continua y suprayectiva ($f \in C^k(M, N) \Rightarrow \pi_*(f) = f$). Por lo tanto $\pi_*[C^\infty(M, \mathbb{R}^s)] \subseteq C^k(M, N)$ es denso, pero π es suave, es decir: $h \in C^\infty(M, \mathbb{R}^s) \Rightarrow \pi \circ h \in C^\infty(M, N)$. Se sigue que $\pi_*[C^\infty(M, \mathbb{R}^s)] \subseteq C^\infty(M, N)$. Por lo tanto $C^\infty(M, N)$ es denso en $C^k(M, N)$. \square

Proposición 1.3.6. *Si M es una variedad compacta entonces $\text{Dif}^k(M) \subseteq C^k(M, M)$ es abierto*

Demostración. Sea $f \in \text{Dif}^k(M)$. Por el teorema de la función inversa, para cada $p \in M$ hay $V_p \subseteq M$ y $\tilde{V}_p \subseteq C^k(M, M)$ vecindades abiertas de p y f respectivamente tales que $\forall g \in \tilde{V}_p, g|_{V_p}$ es difeomorfismo. Como M es compacto y $\{V_p\}$ cubre M , podemos tomar una subcobertura finita $\{V_1, \dots, V_n\}$ de M . Sea δ su número de Lebesgue. Tomando $\tilde{V} = \bigcap_{i \leq n} \tilde{V}_i$. Por lo que $g \in \tilde{V}$ implica que g es un difeomorfismo local. Para $p, q \in M$:

$$d(p, q) < \delta \implies p, q \in V_i \implies g(p) \neq g(q).$$

Sea $\rho = \inf \{d(f(p), f(q)) : p, q \in M \text{ y } d(p, q) < \delta\}$, $\rho > 0$. Luego, si g es tal que $\|f - g\|_k < \rho/2$. Entonces para cada $p, q \in M$ con $d(p, q) \geq \delta$ se tiene que $d(g(p), g(q)) \geq \rho/2 > 0$. Por lo tanto, disminuyendo \tilde{V} de ser necesario, $\forall g \in \tilde{V}$, g es inyectiva.

Por otro lado, M compacta y g submersión implica g suprayectiva. Luego, g es un difeomorfismo local biyectivo y por lo tanto g es un difeomorfismo.

Por lo tanto $\tilde{V} \subseteq \text{Dif}^k(M)$. \square

De la proposición anterior se sigue que $\text{Dif}^k(M)$ es un espacio de Baire separable con $\text{Dif}^\infty(M) \subseteq \text{Dif}^k(M)$ denso.

Finalmente, consideremos el espacio $\mathfrak{X}^k(M)$ de campos vectoriales sobre M . Supongamos que $M \subseteq \mathbb{R}^s$. Así, tenemos que $\mathfrak{X}^k(M) \subseteq C^k(M, \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^s)$ es un subespacio cerrado. Ya que si $\{X_i\} \subseteq \mathfrak{X}^k(M)$ es una sucesión convergente, digamos $X_i \rightarrow X$, entonces para cada $p \in M$ $X(p) \in T_p M$. Es decir, la sucesión $X_i(p)$ converge necesariamente a un punto de $T_p M$, por lo que $X(p) \in T_p M$ y $X \in \mathfrak{X}^k(M)$. Concluimos que $\mathfrak{X}^k(M)$ es un espacio de Baire separable.

Al buscar condiciones necesarias para la estabilidad de los sistemas dinámicos, encontramos que la clase de los sistemas dinámicos estables están contenidos en un conjunto residual. Como estamos trabajando en variedades compactas, el conjunto de sistemas dinámicos es un espacio de Baire. Por lo que un conjunto residual es, en cierto sentido, grande.

1.4. Transversalidad

En general, la intersección de dos subvariedades no es una subvariedad. Es natural entonces preguntarnos que condiciones nos garantizan que la intersección de subvariedades continúe siendo una subvariedad. Esto nos lleva al concepto de transversalidad. La cual es, en cierto sentido, una generalización de valores regulares.

Definición. Sea $S \subseteq N$ subvariedad C^k y $f : M \rightarrow N$ aplicación C^l con $k, l \geq 1$. Decimos que f es transversal a S en $p \in M$, denotado $f \bar{\cap}_p S$, si $f(p) \notin S$ o $df_p[T_p M] + T_q S = T_q N$, donde $q = f(p)$.

Decimos que f es transversal a S , denotado por $f \bar{\cap} S$, si lo es para cada $p \in M$.

Observación. Es importante notar lo siguiente:

- Si $f(M) \cap S = \emptyset$ entonces $f \bar{\cap} S$.
- $\dim(M) < \dim(S)$ implica que $(f \bar{\cap} S \Leftrightarrow f(M) \cap S = \emptyset)$.
- Si f es una submersión entonces $f \bar{\cap} S$, para cualquier subvariedad S de M .

Dadas $S_1, S_2 \subseteq N$ subvariedades, decimos que son transversales ($S_1 \bar{\cap} S_2$) si $i \bar{\cap} S_2$, donde $i : S_1 \hookrightarrow N$ es la inclusión.

Recordemos que toda subvariedad es, por lo menos localmente, la imagen inversa de un valor regular. De manera más precisa: Si $q \in S \subseteq N^m$ hay $V_q \subseteq N$ vecindad abierta de q y $\varphi : V_q \rightarrow \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{m-s}$ difeomorfismo tal que $\varphi(S \cap V_q) = \mathbb{R}^s \times \{0\}$. Así $S \cap V_q = (\pi_1 \circ \varphi)^{-1}\{0\}$, donde $\pi_2 : \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{m-s} \rightarrow \mathbb{R}^s \times \{0\}$ es la proyección. Ahora, para $f : M \rightarrow N$ es una aplicación C^k , dada $p \in M$ y $q = f(p)$. Tomamos $U_p \subseteq M$ vecindad de p de manera que $f[U_p] \subseteq V_q$ tenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.4.1. $f \bar{\cap} S \Leftrightarrow 0$ es valor regular de $\pi_2 \circ \varphi \circ f|_{U_p}$ para cada $p \in M$.

Demostración. Recordando que $T_0 \mathbb{R}^s \times \{0\} = \text{Ker}(d\pi_2)$.

$$\begin{aligned}
 f \bar{\cap} S &\Leftrightarrow df_p(T_p M) + T_q S = T_q N \\
 &\Leftrightarrow d\varphi_q(df_p(T_p M)) + d\varphi_q(T_p S) = d\varphi_q(T_p N) \\
 &\Leftrightarrow d(\varphi \circ f)_p(T_p M) + T_0 \mathbb{R}^s \times \{0\} = T_0 \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{m-s} \\
 &\Leftrightarrow d\pi_2(d(\varphi \circ f)_p(T_p M)) = T_0 \{0\} \times \mathbb{R}^{m-s} \\
 &\Leftrightarrow d(\pi_2 \circ \varphi \circ f)_p(T_p M) = T_0 \{0\} \times \mathbb{R}^{m-s} \\
 &\Leftrightarrow 0 \text{ es valor regular de } \pi_2 \circ \varphi \circ f.
 \end{aligned}$$

□

Corolario. Si $f \bar{\cap} S$ entonces $f^{-1}(S) \subseteq M$ es subvariedad de M , las cuales satisfacen: $\text{codim}(f^{-1}(S)) = \text{codim}(S)$.

Proposición 1.4.2. Sean $S \subseteq N$ subvariedad cerrada y M compacta. El conjunto $\{f \in C^k(M, N) : f \bar{\cap} S\}$ es abierto en $C^k(M, N)$.

Demostración. Sea $f \in C^k(M, N)$ con $f \bar{\cap} S$. Para cada $q \in N$ tomamos (V_q, φ_q) carta local C^k de N tal que $\varphi_q(S \cap V_q) = \mathbb{R}^s \times \{0\}$. Al ser 0 valor regular se cumple que $\forall p \in f^{-1}(S) \exists U_p \subseteq M$ tal que $f(U_p) \subseteq V_q$ y $\pi \circ \varphi_q \circ f$ es una submersión. Sea

$\tilde{V}_p \subseteq C^k(M, N)$ vecindad abierta de f tal que, si $g \in \tilde{V}_p$ entonces $\pi \circ \varphi_{g(p)} \circ g$ es submersión. Tomamos $\{U_{p_i}\}_{i=1}^n$ subcubierta finita de $f^{-1}[S]$ y $\tilde{V} = \bigcap_{i \leq n} \tilde{V}_{p_i}$. Si $g \in \tilde{V}$ entonces $\pi \circ \varphi_{g(p)} \circ g$ es submersión en p y 0 es valor regular de $\pi \circ \varphi_{g(p)} \circ g$. Como esto es para cada $p \in U$, por el Lema anterior, g es transversal a S en $U = \bigcup_{i \leq n} U_i$.

Al ser U abierto, $M - U$ es compacto. consideremos $S \subseteq N \subseteq \mathbb{R}^s$. Como $f[M - U] \cap S = \emptyset$, para $x \in M - U$ la distancia $d(f(x), S) > 0$ y $\rho = \inf\{d(f(x), S) : x \in M - U\} > 0$. Por lo tanto, si tomamos g de manera que $\|f - g\| < \rho$ entonces $\forall x \in M - U \quad g(x) \notin S$. Es decir $g \bar{\cap}_x S$.

Por lo tanto, disminuyendo \tilde{V} de ser necesario: $g \in \tilde{V} \Rightarrow g \bar{\cap} S$. □

Proposición 1.4.3. *Sea $F : \Lambda \times M \rightarrow N$, con Λ , M y N variedades C^k . Para $S \subseteq N$ subvariedad de N , definimos el conjunto $T_s = \{\lambda \in \Lambda : F_\lambda \bar{\cap} S\}$. Si $F \bar{\cap} S$ entonces T_s es residual en Λ .*

Demostración. Sea $\pi : \Lambda \times M \rightarrow \Lambda$ la proyección en Λ . Como $F \bar{\cap} S$, $F^{-1}(S) \subseteq \Lambda \times M$ es una subvariedad, la cual abreviaremos por $W = f^{-1}(S)$. Restringiendo $\pi_S = \pi|_W$, tomamos $\lambda \in \Lambda$ valor regular de π_S . Entonces $\pi_S(x) = \lambda$ y $\pi_S(T_x W) = T_\lambda \Lambda$. Veamos que $F_\lambda \bar{\cap} S$. Notando que $F_\lambda(p) = F(\lambda, p)$ y $DF_\lambda(p)(T_p M) = DF(\lambda, p)(T_{(\lambda, p)}(\{\lambda\} \times M))$. Sea $v \in T_q N$ donde $q = F_\lambda(p)$. Sabemos que $DF(\lambda, p)(T\Lambda \times M) + T_q S = T_q N$, por lo tanto hay $(a, e) \in T_{(\lambda, p)} T(\Lambda \times M)$ tal que $v - DF(\lambda, p)(a, e) \in T_q S$. Por otro lado, al ser λ valor regular de π_S , para $(a, u) \in T_p W$, $D\pi_S(a, u) = a$, por lo que $DF(\lambda, p)(a, u) \in T_q S$. Así, tomando $w = e - u \in T_p M$. $DF(\lambda, p)(a, e) = DF(\lambda, p)(a, u) + DF(\lambda, p)(0, w)$.

$$\begin{aligned} v &= v - DF(\lambda, p)(a, u) + DF(\lambda, p)(a, u) \\ &= v - (DF(\lambda, p)(a, e) - DF(\lambda, p)(0, w)) + DF(\lambda, p)(a, u) \\ &= (v - DF(\lambda, p)(a, e) + DF(\lambda, p)(a, u)) + DF_\lambda(p)(w). \end{aligned}$$

Como $v - DF(\lambda, p)(a, e) \in T_q S$, $DF(\lambda, p)(a, u) \in T_q S$ y $DF_\lambda(p)(w) \in T_p M$, concluimos que $v \in T_q S + DF_\lambda(p)(T_p M)$. □

Corolario. (1) *Sean $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ función suave y $S \subseteq \mathbb{R}^n$ una subvariedad. El conjunto $\{v \in \mathbb{R}^n : (f + v) \bar{\cap} S\}$ es residual.*

Demostración. Sea $F : \mathbb{R}^n \times M \rightarrow \mathbb{R}^n \quad F(v, p) = f(p) + v$ es submersión. Por lo tanto $F \bar{\cap} S$. □

Corolario. (2) *Si $S \subseteq \mathbb{R}^n$ subvariedad y M variedad compacta. Si S es cerrado entonces $\{f \in C^k(M, \mathbb{R}^n) : f \bar{\cap} S\} = T_s$ es residual y abierto.*

Demostración. Se sigue de la proposición 1.4.2 y el primer corolario. □

Teorema 1.4.4 (Teorema de transversalidad de Thom). *Si M es una variedad compacta y $S \subseteq N$ es una subvariedad cerrada, entonces $\{f \in C^k(M, N) : f \bar{\cap} S\}$ es abierto y denso en $C^k(M, N)$.*

Demostración. Por la proposición 1.4.2, sabemos que $\{f \in C^k(M, N) : f \bar{\cap} S\}$ es abierto. Sólo falta demostrar la densidad.

Sean $f \in C^k(M, N)$ y $\psi : V \subseteq N \rightarrow \mathbb{R}^m$ carta local centrada en $f(p)$. Sea $U_p \subseteq M$ vecindad abierta de p tal que $f(\bar{U}_p) \subseteq V$. Tomamos $\tilde{V}_p \subseteq C^k(M, N)$ vecindad de f tal que $\forall g \in \tilde{V}_p \quad g(\bar{U}_p) \subseteq V$. Fijándonos en la función $y \circ f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$, como $y \circ f \in C^k(M, \mathbb{R}^m)$,

para casi toda $v \in \mathbb{R}^m$ $(y \circ f) + v \bar{\cap} y[S]$. Por lo tanto $\forall \epsilon > 0 \exists v \in \mathbb{R}^m$ con $\|v\| < \epsilon$ y $((y \circ f) + v) \bar{\cap} y(S)$. Así, si tomamos $g_v = \psi^{-1}(\psi \circ f + v)$, entonces $\|g_v - f\|_k < \epsilon$ y $g_v \bar{\cap} S$ en U_p . La familia de estas vecindades $\{U_p\}$ cubre M , tomando una subcubierta finita $\{U_i\}_{i \leq l}$ y $\tilde{V} = \bigcap_{i \leq l} \tilde{V}_i$ hay $g_v \in \tilde{V}$ tal que $\|g_v - f\|_k < \epsilon$ y $g_v \bar{\cap} S$ en $\bigcup_{i \leq l} U_i = M$. \square

1.5. Estabilidad Estructural

Buscamos estudiar el comportamiento topológico del espacio de órbitas asociado a un sistema dinámico. En este caso nos enfocamos en las órbitas de un campo vectorial, más adelante veremos que estas están ligadas al estudio de difeomorfismos. Es natural entonces preguntarse cuando dos espacios de órbitas tienen la misma descripción. Para esto, definimos las siguientes relaciones de equivalencia:

Definición. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}^k(M)$ donde M es una variedad diferenciable.

- Decimos que X es topológicamente equivalente a Y si existe $h : M \rightarrow M$ homeomorfismo que manda órbitas de X en órbitas de Y y que mantenga la orientación. Es decir, $h[O_X(p)] = O_Y(h(p))$ con $h[O_X^+(p)] = O_Y(h(p))$
- Decimos que X es conjugado de Y si hay $h : M \rightarrow M$ homeomorfismo tal que $\forall p \in M \forall t \in \mathbb{R}, hX_t(p) = Y_t h(p)$.

Observación. X y Y conjugados $\implies X$ y Y topológicamente equivalentes.

Directo de la definición tenemos el siguiente resultado:

Proposición 1.5.1 (1). *Si X y Y topológicamente equivalentes, entonces*

1. p es singularidad de X si y solamente si $h(p)$ es singularidad de Y
2. $O(p)$ es órbita cerrada de X si y solamente si $O(h(p))$ es órbita cerrada de Y . Si X y Y son conjugados entonces $O(p)$ y $(O(h(p)))$ tienen el mismo periodo.
3. $h(\omega(p)) = \omega(h(p))$ y $h(\alpha(p)) = \alpha(h(p))$.

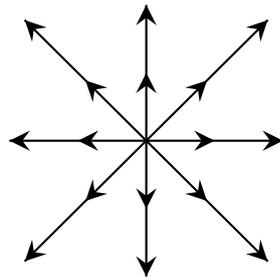
Algunos ejemplos:

Ejemplo. Definimos dos campos lineales $X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(\mathbb{R}^2)$ por $X(x, y) = (x, y)$ y $Y(x, y) = (x + y, -x + y)$. Los flujos de X y Y están dados por

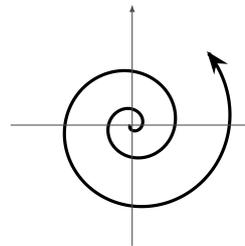
$$X_t(c_1, c_2) = (c_1 e^t, c_2 e^t) \quad Y_t(c_1, c_2) = e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t & \sen t \\ -\sen t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Queremos definir $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ homeomorfismo que conjugue X y Y . Dado que $0 \in \mathbb{R}^2$ es la única singularidad, es necesario que $h(0) = 0$. Por otro lado $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ es transversal a X y a Y . Ya que si $(x, y) \in S^1$, como $T_{(x,y)}S^1 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : \langle (a, b), (x, y) \rangle = 0\}$, entonces $X(x, y) = (x, y) \notin T_{(x,y)}S^1$ y $Y(x, y) = (x + y, y - x) \notin T_{(x,y)}S^1$ pues

$$\begin{aligned} \langle (x, y), (x, y) \rangle &= x^2 + y^2 = 1 \neq 0 \\ \langle (x + y, y - x), (x, y) \rangle &= x^2 + xy + y^2 - xy = x^2 + y^2 = 1 \neq 0. \end{aligned}$$



(a) Flujo de X



(b) Flujo de Y

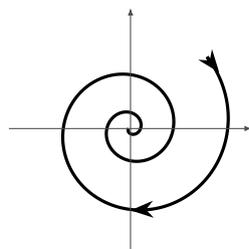
Así, para $p \in S^1$ definimos $h(p) = p$. Si $q \in \mathbb{R}^2 - (S^1 \cup \{0\})$ entonces hay un único $t_q \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que $X_{t_q}(q) \in S^1$. Esto ya que, a excepción del origen, las órbitas de X son crecientes no acotadas. Definimos $h(q) = Y_{-t_q}h(X_{t_q}(q)) = Y_{-t_q}X_{t_q}(q)$ ($h|_{S^1} = Id_{S^1}$). Como el flujo global de X y Y es continuo, h es continua con inversa $h^{-1}(q) = X_{-t_q}h^{-1}Y_{t_q}(q) = X_{t_q}Y_{t_q}$ que, por lo mismo, es también continua. Es decir, h es un homeomorfismo. Notemos que podemos escoger cualquier homeomorfismo de S^1 para extenderlo a \mathbb{R}^2 .

Ejemplo. Daremos ahora un ejemplo de dos campos que no son topológicamente equivalentes. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(\mathbb{R}^2)$ campos lineales con matrices asociadas en la base canónica

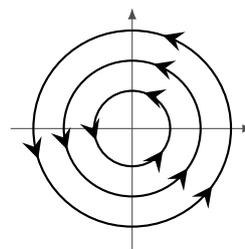
$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sus flujos globales dados por:

$$X_t(c_1, c_2) = e^{t/2} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad Y_t(c_1, c_2) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$



(a) Flujo de X



(b) Flujo de Y

X y Y no pueden ser topológicamente equivalentes, ya que Y tiene una infinidad de órbitas cerradas (todas sus órbitas lo son) mientras que X no tiene órbitas cerradas.

Decimos que un sistema dinámico es estructuralmente estable si el comportamiento de sus órbitas no se altera bajo pequeñas perturbaciones al campo X . Más formalmente tenemos la siguiente definición para campos vectoriales, más adelante daremos una análoga para difeomorfismos:

Definición. Un campo $X \in \mathfrak{X}^k(M)$ es estructuralmente estable si hay $V \subseteq \mathfrak{X}^k(M)$ vecindad abierta de X tal que $\forall Y \in V$, X es topológicamente equivalente a Y .

Si X no es estable diremos que es inestable.

Ejemplos de campos vectoriales que no son estables son los siguientes:

Ejemplo. Consideremos los campos $X^\lambda \in \mathfrak{X}^\infty(T^2)$ del ejemplo 1.3 en la sección 2. Estos campos no son estables, ya que $\lambda \in \mathbb{Q}$ implica que X^λ puede ser aproximado por campos X^δ con $\delta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ que no tienen órbitas cerradas. Al contrario de X^λ , cuyas órbitas son todas cerradas. Análogamente para $\lambda \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. El campo X^λ es aproximado por campos X^δ con $\delta \in \mathbb{Q}$.

En el cuarto capítulo veremos que, si M tiene dimensión 2 y $X \in \mathfrak{X}^k(M)$ tiene una infinidad de órbitas cerradas, entonces X es inestable.

Ejemplo. Sea $\Pi \subseteq \mathbb{R}^3$ el plano tangente al toro de revolución $T^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ definido por $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -1\}$. Tomamos

$$\varphi(u, v) = ((2 + \cos 2\pi v) \cos 2\pi u, (2 + \cos 2\pi v) \sin 2\pi u, \sin 2\pi v).$$

parametrización del toro. Sea $f : T^2 \rightarrow \mathbb{R}$ donde $f(p)$ es la distancia de p a Π

$$f(x, y, z) = |z - 1| = 1 - z \quad ((x, y, z) \in T^2 \Rightarrow -1 \leq z \leq 1).$$

Sea $X = \text{grad}(f)$. Tomando cartas locales:

$$f(\varphi(u, v)) = 1 - \sin 2\pi v \Rightarrow \text{grad}(f) = (0, -2\pi \cos 2\pi v).$$

en la base canónica de \mathbb{R}^2 .

Por lo tanto $X(u, v) = 0 \iff \cos 2\pi v = 0 \iff v = \pm\pi/2$. Por lo que X tiene como singularidades al conjunto

$$\{f(u, \pm\pi/2) : u \in \mathbb{R}\} = \{(2 \cos(2\pi u), 2 \sin(2\pi u), \pm 1 : u \in [0, 2\pi)\}.$$

Ahora, si tomamos $\bar{\Pi}$ el plano Π bajo una pequeña rotación y $\bar{f} : T^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la distancia de este nuevo plano a p . Sea $Y = \text{grad}(\bar{f})$. Entonces $Y(u, v) = 0$ cuando \bar{f} alcanza un máximo o un mínimo, pero sólo hay 4 planos paralelos a $\bar{\Pi}$ que son tangentes a T^2 , y estos cortan a T^2 en un único punto. Estos 4 puntos son los máximos y mínimos de \bar{f} . Se sigue que Y sólo tiene 4 singularidades y por lo tanto no puede ser topológicamente equivalente a X .

Ejemplo. En este ejemplo construiremos dos campos vectoriales sobre la esfera. A pesar de ser campos topológicamente equivalentes, mostraremos que sólo uno es estructuralmente estable.

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ función suave con las siguientes características:

- $\forall t \neq 0 \quad f(t) > 0$.
- $\forall t > 1 \quad f(t) = 1/t$.
- $f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = \dots = 0$.

Definimos $\tilde{X} \in \mathfrak{X}^\infty(\mathbb{R}^2)$ por $\tilde{X}(r \cos \theta, r \sin \theta) = (rf(r) \cos \theta, rf(r) \sin \theta)$. Es claro que $0 \in \mathbb{R}^2$ es la única singularidad de \tilde{X} y $D\tilde{X}(0) = 0$. Si $\|p\| > 1$ entonces $\|\tilde{X}\| = 1$.

Sea ahora

$$\begin{aligned} \pi : S^2 - \{p_N\} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right). \end{aligned}$$

La proyección estereográfica, con inversa

$$\pi^{-1}(x, y) = \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{-1+x^2+y^2}{1+x^2+y^2} \right).$$

y con diferencial

$$d\pi_{(x,y)}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2-2x^2+2y^2}{(1+x^2+y^2)^2} & \frac{2+2x^2-2y^2}{(1+x^2+y^2)^2} \\ \frac{4xy}{(1+x^2+y^2)^2} & \frac{-4xy}{(1+x^2+y^2)^2} \\ \frac{4x}{(1+x^2+y^2)^2} & \frac{4y}{(1+x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}.$$

Notemos que $\|d\pi_{(x,y)}^{-1}\| \rightarrow 0$ cuando $\|(x, y)\| \rightarrow \infty$. Podemos entonces definir $X \in \mathfrak{X}^k(S^2)$ como:

$$X = \begin{cases} d\pi_{\pi(p)}^{-1} \tilde{X}(\pi(p)) & p \neq p_N \\ 0 & p = p_N \end{cases}$$

Dado que rectas por el origen en \mathbb{R}^2 van a meridianos de S^2 bajo π , las órbitas de X son las mismas que las del campo $Y(x, y, z) = (-xz, -yz, x^2 + y^2)$ del ejemplo 1.1 en la primer sección.

Por lo tanto X y Y son topológicamente equivalentes (*text* Id_{S^2} es un homeomorfismo que satisface la definición). Más adelante comprobaremos que Y es topológicamente estable. Veremos ahora que X , aunque es topológicamente equivalente a un campo estable, es inestable. Para esto, aproximaremos \tilde{X} por un campo \tilde{Z} con una órbita cerrada. De manera que fuera de una vecindad compacta del origen \tilde{Z} coincida con \tilde{X} . Así, podemos definir Z de igual manera que definimos X . Entonces Z será próximo a X , pero Z tiene una órbita cerrada más que X . Luego, Z no puede ser topológicamente equivalente a X .

Sea $\tilde{Z} \in \mathfrak{X}^\infty(\mathbb{R}^2)$ $\tilde{Z}(r \cos \theta, r \sin \theta) = (rl(r) \cos \theta + rg(r) \sin \theta, -rg(r) \cos \theta + rl(r) \sin \theta)$ donde $l, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciables que satisfacen:

- $l(0) = l(a^2) = 0$.
- $l(t) = 1/t$ para $t > 2$.
- $l(t) < 0$ para $0 < t < a$.
- $l(t) > 0$ para $t > a$.
- $g(0) = g(t) = 0$ para $t \geq c$.
- $g(t) > 0$ para $0 < t < c$.
- $g'(a) = 0$.
- $g(a) = b$.

donde $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ y $a < 2$.

Sea $S_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\| = a\} = \{(a \cos \theta, a \sin \theta) : \theta \in \mathbb{R}\}$ el círculo de radio a centrado en el origen. Notemos que

$$\begin{aligned} \tilde{Z}(a \cos \theta, a \sin \theta) &= (al(a) \cos \theta + ag(a) \sin \theta, -ag(a) \cos \theta + al(a) \sin \theta) \\ &= (ab \sin \theta, -ab \cos \theta). \end{aligned}$$

Luego $\beta(t) = (-ab \cos \theta, ab \sin \theta)$ es curva integral de \tilde{Z} y $\alpha[R] = S_{ab}$ es decir, S_{ab} es órbita cerrada de \tilde{Z} . Fuera del disco de radio 2 se tiene que $\tilde{Z} = \tilde{X}$ por lo que \tilde{Z} también se proyecta a un campo $Z \in \mathfrak{X}^\infty(S^2)$. Así, como \tilde{Z} es C^k -cercano a \tilde{X} , entonces Z es C^k -cercano a X , pero Z tiene a $\pi_{-1}[S_{ab}]$ como órbita cerrada, se sigue que Z y X no pueden ser topológicamente equivalentes. Con lo que concluimos que X es inestable.

Tenemos pues un ejemplo de dos campos $X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(S^2)$ que son topológicamente equivalentes pero uno es estable y el otro inestable.

A continuación estudiaremos los campos vectoriales sobre S^1 .

Sea $X^0 \in \mathfrak{X}^\infty(S^1)$ definido por $X^0(\cos \theta, \sin \theta) = (-\sin \theta, \cos \theta)$. El campo X es nunca cero. Luego, si $X \in \mathfrak{X}^k(S^1)$ es un campo vectorial cualquiera, entonces existe una única función $f \in C^k(S^1, \mathbb{R})$ tal que $X = fX^0$. Se sigue que $X(p) = 0$ si y sólo si $f(p) = 0$. Por otro lado, sabemos que para cada $K \subseteq S^1$ compacto hay $f \in C^k(S^1, \mathbb{R})$ tal que $f^{-1}\{0\} = K$, por lo que $X = fX^0$ tiene como singularidades exactamente los puntos de K . Por lo tanto hay tantas clases de equivalencia de campos vectoriales (módulo equivalencia topológica) como subconjuntos compactos de S^1 (módulo homeomorfismo) la cual es una cantidad no numerable! Así, para clasificar los campos estables en el círculo, nos gustaría restringirnos a un subconjunto “decente” de $\mathfrak{X}^k(S^1)$.

Por el Teorema de transversalidad de Thom, sabemos que, si una subvariedad $S \subseteq M$ es cerrada, entonces la propiedad de ser transversal a S es una propiedad abierta. Consideremos la sección cero del haz tangente TS^1 definida por $S_0 = \{(p, 0) \in TS^1\}$. S_0 es una subvariedad de TS^1 . Notemos que $p \in S^1$ es una singularidad de X si y solamente si $X(p) \in S_0$. Luego, $X \pitchfork_p S_0$ si y sólo si p no es una singularidad de X o $DX(p) \neq 0$. Lo que motiva la siguiente definición.

Definición. Decimos que $p \in S^1$ es una singularidad no degenerada o hiperbólica de $X \in \mathfrak{X}^k(S^1)$ si y solamente si $DX(p) \neq 0$. Equivalentemente, si $X = fX^0$ entonces $Df(p) \neq 0$.

Si $Df(p) < 0$, decimos que p es una singularidad atractora. Si $Df(p) > 0$, decimos que p es una singularidad repulsora.

Sea $G = \{X \in \mathfrak{X}^k(S^1) : \text{las singularidades de } X \text{ son hiperbólicas}\}$.

Es importante notar que si $Df(p) \neq 0$ entonces hay una vecindad abierta $V \subseteq S^1$ de p tal que f es inyectiva en V . Por lo tanto p es una singularidad aislada. Al ser S^1 compacto, esto implica que $X \in G$ tiene un número finito de singularidades.

Proposición 1.5.2. *G es abierto y denso.*

Demostración. Sea $X \in \mathfrak{X}^k(S^1)$ con $X = fX^0$. Definimos

$$\begin{aligned} \tilde{f} : S^1 &\longrightarrow TS^1 \cong S^1 \times \mathbb{R} \\ p &\longmapsto (p, f(p)) \\ d\tilde{f}_p &= \text{Id}_{s_1} \times df_p \end{aligned}$$

Así, $p \in S^1$ es singularidad hiperbólica si y solamente si $\tilde{f} \bar{\cap} S^1 \times \{0\}$. Como el conjunto $S^1 \times \{0\} \subseteq S^1 \times \mathbb{R}$ es cerrado y S^1 es compacto, el conjunto $\{f \in C^k(S^1, \mathbb{R}) : \tilde{f} \bar{\cap} S^1 \times \{0\}\}$ es abierto y denso. \square

Sea $X \in G$, con $X = fX^0$. Por la continuidad de df las singularidades atractoras ($df_p < 0$) y repulsoras ($df_p > 0$) deben alternarse, en particular el número de singularidades debe ser par.

Sean $X, Y \in G$ con el mismo número de singularidades. Sean a_1, \dots, a_n y a'_1, \dots, a'_n las singularidades atractoras de X y Y respectivamente. Sean b_1, \dots, b_n y b'_1, \dots, b'_n las singularidades repulsoras de X y Y respectivamente. Definimos $h : S^1 \rightarrow S^1$ por $h(a_i) = a'_i$ y $h(b_i) = b'_i$. Extendemos h a los intervalos (a_i, b_i) y (a'_i, b'_i) de la siguiente manera: Fijamos $p_i \in (a_i, b_i)$ y $p'_i \in (a'_i, b'_i)$ puntos cualesquiera y definimos $h(p_i) = p'_i$. Dado $q \in (a_i, b_i)$ hay un único $t_q \in \mathbb{R}$ tal que $X_{t_q}(q) = p_i$ definimos $h(q) = Y_{-t_q} h X_{t_q}(q)$. Por la continuidad del flujo h es continua con inversa $h^{-1}(h(q)) = X_{-t_q} h^{-1} Y_{t_q}(h(q))$ continua, donde $h^{-1}(p'_i) = p_i$.

Por lo tanto h es un homeomorfismo que conjuga X y Y .

Podemos concluir que $X, Y \in G$ son conjugados si y sólo si X y Y tienen el mismo número de singularidades. Al ser G abierto y denso, $X \in \mathfrak{X}^k(S^1)$ es estructuralmente estable si y sólo si $X \in G$. Tenemos así clasificados los campos C^k de S^1 que son estructuralmente estables.

Durante el estudio de campos vectoriales surge de manera natural el estudio de los difeomorfismos C^k . Por un lado $\forall t \in \mathbb{R} X_t \in \text{Dif}^k(M)$. Por otro lado, como veremos en el capítulo tres, los difeomorfismos nos serán útiles para el estudio de órbitas cerradas asociadas a campos vectoriales. Debido a esto, y al interés intrínseco de los difeomorfismos, estudiaremos a continuación los conceptos básicos de los difeomorfismos C^k en una variedad diferenciable M .

Definición. Sea $f \in \text{Dif}^k(M)$ y $p \in M$.

- Definimos la órbita de p respecto a f como $O(p) = \{f^n(p) : n \in \mathbb{Z}\}$. Dividimos la órbita de p en $O^+(p) = \{f^n(p) : n \in \mathbb{N}\}$ y $O^-(p) = \{f^{-n}(p) : n \in \mathbb{N}\}$, la órbita positiva y la órbita negativa p respectivamente.
- Si $O(p)$ es finita, entonces se dice que p es un punto periódico de f . El periodo de p es $\min\{n \in \mathbb{N} : f^n(p) = p\}$.
- Si $f(p) = p$ decimos que p es un punto fijo de f .
- Definimos el ω -límite de p como el conjunto $\omega(p) = \{q \in M : \text{hay } \{n_i\} \subseteq \mathbb{N} \text{ sucesión creciente tal que } \lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_i}(p) = q\}$ y el α -límite de p como $\alpha(p) = \{q \in M : \text{hay } \{m_i\} \subseteq \mathbb{N} \text{ sucesión creciente tal que } \lim_{i \rightarrow \infty} f^{-m_i}(p) = q\}$.

De manera similar a los campos vectoriales, los ω -límites y α -límites de difeomorfismos C^k están relacionados por la aplicación inversa. Es decir: $\forall p \in M \omega_f(p) = \alpha_{f^{-1}}(p)$. Por lo que toda proposición válida para los ω -límites es también válida para los α -límites.

Observación. Otra forma de caracterizar $\omega(p)$ es por el conjunto de puntos de acumulación de $O^+(p)$. Análogamente $\alpha(p)$ se caracteriza por el conjunto de puntos de acumulación de $O^-(p)$.

Proposición 1.5.3. Sean $f \in \text{Dif}^k(M)$, con M compacta, y $p \in M$. Se satisfacen los siguientes enunciados:

- 1) $\omega(p) \neq \emptyset$.
- 2) $x \in O(p) \implies \omega(x) = \omega(p)$.
- 3) $\omega(p)$ es cerrado.
- 4) p periódico $\implies \omega(p) = O(p)$. Si además p no es punto fijo entonces $\omega(p)$ es disconexo.

Demostración.

- 1) Si la variedad M es compacta, entonces la sucesión $\{f^n(p)\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente, es decir hay $\{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_i}(p) = q$. Luego $q \in \omega(p)$.
- 2) Notemos primero que, si $x \in O(p)$, entonces hay $N \in \mathbb{Z}$ tal que $f^N(p) = x$, despejando obtenemos $f^{-N}(x) = p$, se sigue que $p \in O(x)$, por lo que podemos concluir que $O(p) = O(x)$. Luego, tienen el mismo conjunto de puntos de acumulación, es decir $\omega(p) = \omega(x)$.
- 3) Sea $q \in M - \omega(p)$, hay $V \subseteq M$ abierto ajeno a $O(p)$ con $q \in V$. Si $x \in V$ entonces $x \notin \omega(p)$. Es decir $V \subseteq M - \omega(p)$. Luego $M - \omega(p)$ es abierto y $\omega(p)$ cerrado.
- 4) Supongamos p periódico, sea $x \in \omega(p)$, entonces hay $\{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ sucesión creciente tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_i}(p) = x$, pero $f^{n_i}(p) \in O(p)$, Como $O(p)$ es un conjunto finito entonces la sucesión $\{f^{n_i}(p)\}$ tiene un número finito de elementos distintos, como es convergente entonces hay $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n_i \geq N \ f^{n_i}(p) = f^N(p) = x$.

Sean $y \in O(p)$ y n_0 el periodo de p , entonces $\forall q \in O(p) \ f^{j n_0}(q) = q$. Tomando la sucesión $n_j = j n_0$ entonces $\lim_{j \rightarrow \infty} f^{n_j}(y) = \lim_{j \rightarrow \infty} y = y$. Por lo tanto, $y \in \omega(p)$.

Si $O(p)$ es un conjunto finito con más de un elemento implica que la órbita $O(p)$ es disconexa.

□

De manera análoga al estudio de campos vectoriales, nos interesa estudiar el comportamiento topológico de las órbitas de difeomorfismos C^k . Para esto definimos la siguiente relación de equivalencia:

Definición. Dados difeomorfismos $f, g \in \text{Dif}^k(M)$. Decimos que f y g son topológicamente equivalentes o conjugados si hay $h : M \rightarrow M$ homeomorfismo tal que $h \circ f = g \circ h$, equivalentemente $h f h^{-1} = h \circ f \circ h^{-1} = g$.

Observación. como $(h f h^{-1})^2 = h f^2 h^{-1}$ se tiene que $\forall n \in \mathbb{N} \ h f^n h^{-1} = g^n$.

$$\text{Por lo tanto } p \in M \implies \begin{cases} h[O_f(p)] = O_g(p) \\ h[\omega_f(p)] = \omega_g(p) \\ h[\alpha_f(p)] = \alpha_g(p) \end{cases}$$

A continuación daremos algunos ejemplos de difeomorfismos que son conjugados entre si.

Ejemplo. Sean $f, g \in \text{Dif}^\infty(\mathbb{R})$ difeomorfismos definidos por $f(x) = x/2 \ g(x) = x/3$. Mostraremos que f y g son conjugados. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a > 0$ y $b < 0$. Definimos primero $h_1 : [f(a), a] \rightarrow [g(a), a]$ que satisfaga $h_1(a) = a \ h_1(f(a)) = g(a)$, y $h_2 : [b, f(b)] \rightarrow [b, g(b)]$ que satisfaga $h_2(b) = b \ h_2(f(b)) = g(b)$ homeomorfismos cualesquiera.

Si $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ hay un único $n_x \in \mathbb{Z}$ tal que

$$f^{n_x} \in \begin{cases} (f(a), a] & \text{si } x > 0 \\ [b, f(b)) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Definimos

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad x \longmapsto \begin{cases} g^{-n_x} h_1 f^{n_x}(x) & x > 0 \\ g^{-n_x} h_2 f^{n_x}(x) & x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Definida de esta forma, h es un homeomorfismo, ya que g , h_i y f lo son y coinciden en $x = 0$.

Ejemplo. Sean $f, g \in \text{Dif}^\infty(\mathbb{R}^2)$ con $f(x, y) = (x/2, 2y)$, $g(x, y) = (x/3, 4y)$. Sean $f_1, f_2, g_1, g_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f_1(x) = \frac{x}{2} \quad g_1(x) = \frac{x}{3} \quad f_2(y) = 2y \quad g_2(y) = 4y$$

de manera análoga al ejemplo anterior construimos dos homeomorfismos $h_1, h_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $h_1 f_1 = g_1 h_1$ y $h_2 f_2 = g_2 h_2$. Definimos el homeomorfismo

$$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto (h_1(x), h_2(y))$$

entonces $h f(x, y) = h(f_1(x), f_2(y)) = (h_1 f_1(x), h_2 f_2(y)) = (g_1 h_1(x), g_2 h_2(y)) = g h(x, y)$. Es decir, h es un homeomorfismo que conjuga f y g .

Ejemplo. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(\mathbb{R}^2)$ campos vectoriales lineales con matrices en la base canónica

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ya vimos en el ejemplo 1.6 de esta sección que estos campos no son conjugados. Nos fijamos en los difeomorfismos $f = X_1$ y $g = Y_1$, los flujos de X y Y en el tiempo 1 respectivamente.

Recordemos que Y_t es una rotación centrada en el origen. En particular g deja círculos centrados en el origen fijos. Es decir, si $S_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\| = r\}$ entonces $g[S_r] = S_r$. En particular, para $(0, r) \in S_r$ con $r > 0$, al ser S_1 cerrado, necesariamente $\omega_g(0, r) \subseteq S_r$. Pero $f^n(0, 1)$ diverge.

Por lo tanto f y g no pueden ser topológicamente equivalentes.

A partir de la definición de equivalencia topológica de difeomorfismos, el concepto de estabilidad estructural es inmediato.

Definición. Sea $f \in \text{Dif}^k(M)$. Decimos que f es estable si hay $V \subseteq \text{Dif}^k(M)$ vecindad abierta de f tal que $\forall g \in V$ g es conjugado de f . Decimos que f es inestable si no es estable.

Observación. Un campo vectorial X no estable tienen asociado el difeomorfismo X_1 también inestable. Ya que si X y Y son cercanos entonces los difeomorfismos X_1, Y_1 son también cercanos y $O_{X_1}(p) \subseteq O_X(p)$, $O_{Y_1}(p) \subseteq O_Y(p)$. En particular, los difeomorfismos asociados a los ejemplos 1,7, 1,8 y 1,9 son inestables.

Ejemplo. Sea $X \in \mathfrak{X}^k(S^1)$ campo estable con singularidades. Nos fijamos en el difeomorfismo $f = X_1 \in \text{Dif}^k(S^1)$. Los puntos fijos de f son las singularidades de X .

Sean $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n$ los puntos fijos de f ordenados. Con a_i atractores y b_i repulsores. Si $g \in \text{Dif}^k(S^1)$ es cercano a f , por la continuidad de f y df , g tiene el mismo número de puntos fijos $a'_1, b'_1, \dots, a'_n, b'_n$. Con a_i cercano a a'_i y b_i cercano a b'_i . Fijamos $p_i \in (a_i, b_i)$ y $q_i \in (b_i, a_{i+1})$ de manera que $a'_i \in [q_i, p_{i+1}]$ y $b'_j \in [p_j, q_j]$. Entonces f y g son contracciones en $[q_i, p_{i+1}]$ y expansiones en $[p_i, q_i]$.

Definimos $h(a_i) = a'_i, h(b_i) = b'_i, h(p_i) = p_i, h(q_i) = q_i, h(f(p_i)) = g(p_i), h(f(q_i)) = g(q_i)$ y $h[p_i, f(p_i)] = f[p_i, g(p_i)]$ homeomorfismo cualquiera, $h[f(q_i), q_i] = [g(q_i), q_i]$ homeomorfismo cualquiera. Si $c \in S^1$ no es un punto fijo, entonces $c \in (p_i, q_i)$ para una única $i \in \{1, \dots, n\}$ y entonces existe una única $n_c \in \mathbb{Z}$ $f^{n_c} \in [p_i, f(p_i)] \cup (f(q_i), q_i]$. Extendemos h como $h(c) = g^{-n_c} h f^{n_c}(c)$.

Por lo tanto f es estable.

Ejemplo. Sea $X^0 \in \mathfrak{X}^k(S^1)$ campo unitario. Considerando $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$, S^1 es órbita cerrada de X^0 con periodo 2π y flujo

$$X_t^0 = \begin{pmatrix} \cos t & -\text{sen } t \\ \text{sen } t & \cos t \end{pmatrix}.$$

En la base canónica de \mathbb{R}^2 . Tomamos el difeomorfismo generado en el tiempo 1

$$f = X_1^0 = \begin{pmatrix} \cos 1 & -\text{sen } 1 \\ \text{sen } 1 & \cos 1 \end{pmatrix}.$$

Así, f es una rotación irracional de S^1 . Por lo que $\forall p \in S^1$ $O_f(p)$ es densa en S^1 . Ahora, si tomamos $t_0 \in \mathbb{R}$ cercano a 1 de manera que existan $n, m \in \mathbb{Z}$ con $nt_0 = 2\pi m$. Si nos fijamos en el difeomorfismo generado en el tiempo t_0 .

$$g = X_{t_0}^0 \implies g^n = X_{nt_0}^0 = X_{2\pi m}^0 = \begin{pmatrix} \cos 2\pi m & -\text{sen } 2\pi m \\ \text{sen } 2\pi m & \cos 2\pi m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se sigue que $\forall p \in S^1$ $O_g(p)$ es cerrada. Como ninguna órbita de f es cerrada, f y g no pueden ser conjugados. Concluimos que f es inestable.

Veamos ahora por que pedimos en ambas definiciones de equivalencia topológica que $h : M \rightarrow M$ sea un homeomorfismo y no un difeomorfismo. Sea $f \in \text{Dif}^k(S^1)$ como en el ejemplo 1.13. Sabemos que f es estable. Sean $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$ la sucesión alternante de puntos fijos, con a_i atractores y b_i repulsores. Sea $(c, d) \subseteq S^1$ intervalo tal que $a_1 \in (c, d)$ es el único punto fijo de f . Tomamos $\varphi : (c, d) \rightarrow (-\epsilon, \epsilon)$ carta local centrada en a_1 . Sea $\psi : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow [0, \epsilon]$ aplicación C^∞ que cumpla:

- $\text{supp}(\psi) \subseteq (-2, 2)$.
- $\psi(t) = \epsilon \quad \forall t \in [-1, 1]$.

Como $a_1 \in (c, d)$ es atractor, $f(c, d) \subseteq (c, d)$. Nos fijamos entonces en la expresión de f en cartas locales, $\tilde{f} = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow (-\epsilon, \epsilon)$. Entonces $0 = \varphi(a_1)$ es el único punto fijo de \tilde{f} , el cual es un atractor. Definimos ahora $\tilde{g}(t) = (1 + \psi(t))\tilde{f}$. Por las propiedades

de ψ , \tilde{g} y \tilde{f} coinciden fuera del intervalo $(-2, 2)$ y $\tilde{g}'(0) = (1 + \epsilon)f'(0) \neq f'(0)$. Si nos fijamos en la aplicación

$$g : S^1 \longrightarrow S^1$$

$$p \longmapsto \begin{cases} f(p) & p \notin (c, d) \\ \varphi^{-1} \circ \tilde{g} \circ \varphi(p) & p \in (c, d) \end{cases}$$

Entonces $g \in \text{Dif}^k(S^1)$, $g'(a_1) \neq f'(a_1)$, f y g tienen los mismos puntos fijos, y son difeomorfismos C^k cercanos. Si $h : S^1 \longrightarrow S^1$ fuese un difeomorfismo que conjugase f y g . Tendríamos, necesariamente, que $h(a_1) = a_1$ y, por la regla de la cadena:

$$h'(a_1)f'(a_1) = h'(f(a_1))f'(a_1) = (h \circ f)'(a_1) = (g \circ h)'(a_1) = g'(h(a_1))h'(a_1) = g'(a_1)h'(a_1).$$

Luego, $f'(a_1) = g'(a_1)$. Por lo tanto, no existe un difeomorfismo que conjugue f y g . Notemos que este argumento lo podemos extender a cualquier $f \in \text{Dif}^k(S^1)$ con singularidades. Así, si f tiene singularidades, existe g tan cercano a f como queramos de manera que no existe un difeomorfismo que conjugue g y f . Es decir, si pidiéramos que h fuese un difeomorfismo, entonces f con singularidades sería siempre inestable.

Capítulo 2

Estabilidad Estructural local

Queremos estudiar el comportamiento topológico de las órbitas de campos vectoriales $\mathfrak{X}^k(M)$. En este capítulo en particular, estudiaremos el comportamiento local de estas. Particularmente el comportamiento de las órbitas alrededor de puntos fijos de difeomorfismos y singularidades de campos vectoriales. Buscaremos entender como el comportamiento topológico de las órbitas alrededor de singularidades o puntos fijos cambia al perturbar el campo.

Trataremos de extender la demostración dada para caracterizar los sistemas dinámicos que son estructuralmente estables en S^1 . En el caso de S^1 , la diferencial del campo en singularidades nos indica si este es o no estable. Esto nos lleva a estudiar primero los campos vectoriales lineales y explorar cuando estos son estructuralmente estables. Para luego aproximar los campos vectoriales en singularidades por su parte lineal.

Definición. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}^k(M)$ y $p, q \in M$. Decimos que X y Y son topológicamente equivalentes en p y q respectivamente si hay $V_p, W_q \subseteq M$ abiertos y $h : V_p \rightarrow W_q$ homeomorfismo tal que $h(p) = q$ y manda órbitas de X en órbitas de Y preservando la orientación. Es decir: $\forall x \in V_p \quad h[O_X(x)] = O_Y(h(x))$ y $h[O_X^+(x)] = O_Y^+(h(x))$.

Definición. Sean $X \in \mathfrak{X}^k(M)$ y $p \in M$. Decimos que X es localmente estable en p si hay $N_X \subseteq \mathfrak{X}^k(M)$ vecindad abierta de X tal que $\forall Y \in N_X$ X en p es topológicamente equivalente a Y en q , con $q \in U_p$ vecindad de p .

Estudiaremos brevemente el comportamiento local en puntos regulares.

Teorema 2.0.1 (Teorema del Flujo Tubular). *Sea $X \in \mathfrak{X}^k(M)$ y $p \in M$ punto regular de X . Definimos $C = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ y $X_C : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ el campo vectorial constante $X_C(x) = e_1$, donde $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$.*

Si la órbita de $p \in M$ es regular, entonces existe $V_p \subseteq M$ vecindad abierta de p y $h : V_p \rightarrow C$ difeomorfismo C^k que lleva órbitas de X en órbitas de X_C .

Demostración. Sean (U, φ) carta local centrada en p y $\varphi_*X \in \mathfrak{X}^k(U_0)$. Como $X(p) \neq 0$, entonces $\varphi_*X(0) \neq 0$. Sea $\psi : [-\epsilon, \epsilon] \times V_0 \rightarrow U_0$ flujo local de φ_*X . Denotemos por $H = \{w \in \mathbb{R}^n : \langle w, \varphi_*X \rangle = 0\}$, al conjunto de vectores ortogonales a $\varphi_*X(0)$. Notemos que $H \cong \mathbb{R}^{n-1}$. Sea $S = H \cap V_0$ y $F = \psi|_{[-\epsilon, \epsilon] \times S}$. Extendemos $e_1 \in \mathbb{R} \times H$ a $\{e_1, e_2, \dots, e_n\} \subseteq \mathbb{R} \times H \cong \mathbb{R}^n$ una base ortonormal. Es claro que $DF(0, 0)e_1 = \varphi_*X(0)$, ya que F es flujo de φ_*X . También tenemos $DF(0, 0)e_j = e_j$ para $j \geq 2$. Esto debido a que $F(0, y) = y$, y por lo tanto $DF_0(0) = \text{Id}$. Se sigue que $DF(0, 0)$ es un isomorfismo. Luego, por el Teorema de la función inversa, F es un difeomorfismo local en una vecindad de

$(0, 0)$. Es decir, hay $\delta > 0$ tal que, para $C_\delta = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times H : |t| < \delta, |x| < \delta\}$, tomando la restricción: $\tilde{F} = F|_{C_\delta} : C_\delta \rightarrow F[C_\delta]$ es un difeomorfismo que manda órbitas de X_{C_δ} en órbitas de φ_*X .

Tomando $f \in C^\infty(C, C_\delta)$ definida por $f(x) = \delta x$, f es una equivalencia topológica entre X_C y X_{C_δ} .

Por lo tanto $h^{-1} : \varphi^{-1}\tilde{F}f : C \rightarrow M$ es el difeomorfismo C^k buscado. \square

Observación. El difeomorfismo $C^k \tilde{h}^{-1} = \varphi^{-1}\tilde{F}$ lleva órbitas de X_{C_δ} en órbitas de X .

Corolario (1). Sean $X, Y \in \mathfrak{X}^k(M)$. Si $p, q \in M$ son puntos regulares de X y Y respectivamente, entonces X en p es topológicamente equivalente a Y en q .

Corolario (2). $X \in \mathfrak{X}^k(M)$. Si $p \in M$ es punto regular de X entonces X es localmente estable en p .

2.1. Campos lineales

En esta sección nos enfocaremos en entender la estabilidad estructural de los campos vectoriales lineales. Como ya vimos en el caso del círculo, la estabilidad de un campo en una singularidad estaba determinada por el comportamiento de la diferencial del campo en el punto. Es decir, la parte lineal del campo determinaba si la singularidad era o no estable localmente. Esto nos motiva a estudiar, de manera particular, el comportamiento de campos lineales sobre \mathbb{R}^n .

Sea $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) = \{L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : L \text{ es lineal}\} \subseteq \mathfrak{X}^\infty(\mathbb{R}^n)$ con la norma del supremo $\|L\| = \sup\{\|Lx\| : \|x\| = 1\}$.

Definimos recursivamente $L^0 = \text{Id}$, $L^{n+1} = L \circ L^n$. Nos fijamos ahora en la sucesión $E_m = \sum_{n=0}^m L^n/n!$. Para mostrar es una sucesión convergente, notemos que la sucesión de reales $S_m = \sum_{n=0}^m \frac{\|L\|^n}{n!}$ converge a $e^{\|L\|}$, por lo que S_m es una sucesión de Cauchy.

$$\|E_{m+m'} - E_m\| = \left\| \sum_{n=m+1}^{m+m'} \frac{L^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=m+1}^{m+m'} \frac{\|L^n\|}{n!} \leq \|S_{m+m'} - S_m\|.$$

Por lo tanto $\{E_m\}$ también es una sucesión de Cauchy uniforme y por lo tanto es convergente en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Definimos el mapeo exponencial para transformaciones lineales

$$\exp : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \quad L \mapsto e^L = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L^n}{n!}.$$

Lema 2.1.1. Sea $\beta : (a, b) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ definida por $\beta(t) = e^{tL}$. La curva β es suave y su derivada satisface la ecuación diferencial $\beta'(t) = L e^{tL} = L\beta(t)$.

Demostración. Nos fijamos en las sumas parciales y definimos para cada $m \in \mathbb{N}$

$$\beta_m : (a, b) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \quad \beta_m(t) = \sum_{k=0}^m \frac{(tL)^k}{k!}.$$

Entonces β_m es diferenciable pues cada $(tL)^k$ lo es, y

$$\beta'_m(t) = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{t^{k-1} L^{k-1}}{(k-1)!} = L\beta_{m-1}(t).$$

Sabemos por definición que $\lim_{m \rightarrow \infty} \beta_m(t) = e^{tL} = \beta$. Por otro lado, acabamos de calcular que $\lim_{m \rightarrow \infty} \beta'_m(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} L\beta_{m-1}(t) = Le^{tL}$. Como la convergencia es uniforme, concluimos que β es suave y $Le^{tL} = \lim_{m \rightarrow \infty} \beta'_m(t) = \beta'(t)$. \square

Proposición 2.1.2. *Sea $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Entonces L tiene como flujo global la aplicación:*

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x) &\longmapsto e^{tL}x. \end{aligned}$$

Demostración. La aplicación

$$f : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad f(L, x) = Lx$$

es bilineal y por lo tanto diferenciable. En el lema anterior, probamos que la aplicación $g(t) = e^{tL}$ es también diferenciable. De lo anterior y por la regla de la cadena se sigue que ϕ es también diferenciable. Por otro lado:

$$\phi(0, x) = e^{0L}x = \text{Id}x = x.$$

Por el Lema anterior $D\phi_t(x) = L(e^{tL}x) = L(\phi_t(x))$, por lo que ϕ es flujo global de L . \square

De la proposición anterior obtenemos que, en particular, e^L siempre es una aplicación lineal invertible $e^L \in GL(\mathbb{R}^n)$.

Nos fijamos ahora en el espacio vectorial $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n) = \{L : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n : L \text{ es } \mathbb{C}\text{-lineal}\}$ con la norma del supremo $\|L\| = \sup\{\|Lv\| : \|v\| = 1\}$. De manera análoga al Lema 2.1.1, podemos definir el mapeo exponencial

$$\exp : \mathcal{L}(\mathbb{C}^n) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^n) \quad L \longmapsto e^L = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^k}{k!}.$$

Dada $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ se define la extensión compleja de L . $L_{\mathbb{C}} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, por $L_{\mathbb{C}}(a + ib) = La + iLb$. Algunas propiedades de la extensión compleja son las siguientes:

- $(L + T)_{\mathbb{C}} = L_{\mathbb{C}} + T_{\mathbb{C}}$.
- $(LT)_{\mathbb{C}} = L_{\mathbb{C}}T_{\mathbb{C}}$.
- $(e^L)_{\mathbb{C}} = e^{L_{\mathbb{C}}}$.
- $\|L_{\mathbb{C}}\| = \|L\|$ ($\|L_{\mathbb{C}}\|$ con la norma en $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, $\|L\|$ con la norma en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$).

Proposición 2.1.3. *Sean $L, T \in \mathcal{L}(K^n)$ donde $K = \mathbb{C}$ o $K = \mathbb{R}$. Algunas propiedades del mapeo exponencial son las siguientes:*

- 1) $LT = TL \implies e^{L+T} = e^L e^T$.
- 2) Si λ es un autovalor de L entonces e^λ es un autovalor de e^L .

Demostración. Supongamos que $LT = TL$. Primero notemos que $\forall t \in \mathbb{R}$ y $\forall m \in \mathbb{N}$:

$$L \sum_{k=0}^m \frac{(tT)^k}{k!} = \sum_{k=0}^m \frac{L(tT)^k}{k!} = \sum_{k=0}^m \frac{(tT)^k L}{k!} = \left(\sum_{k=0}^m \frac{(tT)^k}{k!} \right) L.$$

Donde

$$\begin{aligned}
 A_i &= \begin{pmatrix} \lambda_i & & & & \\ 1 & \lambda_i & & & \\ & 1 & \lambda_i & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix} && \text{con } \lambda_i < 0. \\
 B_j &= \begin{pmatrix} M_j & & & & \\ Id & M_j & & & \\ & Id & M_j & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & Id & M_j \end{pmatrix} && \text{con } M_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & -\beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}, \quad \alpha_j < 0. \\
 C_i &= \begin{pmatrix} \lambda_i & & & & \\ 1 & \lambda_i & & & \\ & 1 & \lambda_i & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix} && \text{con } \lambda_i > 0. \\
 D_j &= \begin{pmatrix} N_j & & & & \\ Id & N_j & & & \\ & Id & N_j & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & Id & N_j \end{pmatrix} && \text{con } N_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & -\beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}, \quad \alpha_j > 0.
 \end{aligned}$$

Sean $\beta_1 = \{e_1, \dots, e_{s_2}\}$, $\beta_2 = \{e_{s_2+1}, \dots, e_n\}$. Denotamos por E^s al subespacio generado por β_1 y por E^u al subespacio generado por β_2 . Por definición $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$. L^s , L^u tienen matrices

$$L^s = \begin{pmatrix} A_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & A_{s_1} & & \\ & & & B_1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & B_{s_2} \end{pmatrix} \quad L^u = \begin{pmatrix} C_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & C_{s_3} & & \\ & & & D_1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & D_{s_4} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto los autovalores de L^s tienen parte real negativa y los de L^u parte real positiva. \square

Notemos que si L es un campo hiperbólico entonces el espectro de e^L es ajeno al círculo unitario. Es decir $\text{Esp}(e^L) \cap S^1 = \emptyset$. Lo que motiva la siguiente definición.

Definición. Decimos que un isomorfismo lineal $A \in \text{GL}(\mathbb{R}^n)$ es un isomorfismo hiperbólico si $\text{Esp}(A) \cap S^1 = \emptyset$.

Proposición 2.1.5. $A \in \text{GL}(\mathbb{R}^n)$ isomorfismo hiperbólico. Hay E^s, E^u subespacios vectoriales de \mathbb{R}^n tales que $E^s \oplus E^u = \mathbb{R}^n$. $A^s = A|_{E^s}$ tiene autovalores con módulo menor a 1 y $A^u = A|_{E^u}$ tiene autovalores con módulo mayor a 1.

Demostración. La prueba es análoga a la que se dio para campos lineales hiperbólicos. \square

con $\lambda_i < 0$ y $\alpha_i < 0$. Así, $A(1)$ es la matriz asociada a L . Tomamos $\{\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n\}$ base ortonormal y \tilde{L} la transformación asociada a $A(0)$ en esta base. Sea $\|-\|_1$ la norma generada por esta base (Tomamos el producto interior definido por $\langle \hat{e}_i, \hat{e}_j \rangle_1 = \delta_{ij}$). Afirmamos que si $v \in S^{n-1}$ entonces $\tilde{L}v$ es transversal a S^{n-1} . Esto es cierto si y solamente si $\langle \tilde{L}v, v \rangle_1 \neq 0$. Escribimos v y $\tilde{L}v$ en la base $\{\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n\}$

$$v = \sum_{i=1}^n v_i \hat{e}_i \quad \tilde{L}v = \tilde{L} \sum_{i=1}^n v_i \hat{e}_i = \sum_{i=1}^n v_i \tilde{L}\hat{e}_i.$$

Evaluando en \hat{e}_i , tenemos tres casos:

$$\tilde{L}\hat{e}_i = \begin{cases} \lambda_i \hat{e}_i & i \leq s_1 \\ \alpha_i \hat{e}_i + \beta_i \hat{e}_{i+1} & i > s_1 \text{ y } (i-s) \text{ es impar.} \\ -\beta_i \hat{e}_i + \alpha_i \hat{e}_{i+1} & i > s_1 \text{ y } (i-s) \text{ es par.} \end{cases}$$

Separamos la suma en los tres casos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n v_i \tilde{L}\hat{e}_i &= \sum_{i=1}^{s_1} v_i \lambda_i \hat{e}_i \\ &\quad + \sum_{i=s_1+1}^{s_2/2+s_1+1} v_{2i-1} (\alpha_i \hat{e}_{2i-1} + \beta_i \hat{e}_{2i}) \\ &\quad + \sum_{i=s_1+1}^{s_2/2+s_1+1} v_{2i} (\beta_i \hat{e}_{2i-1} + \alpha_i \hat{e}_{2i}). \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \langle \tilde{L}v, v \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{s_1} v_i \lambda_i \hat{e}_i + \sum_{i=s_1+1}^{s_2/2+s_1+1} v_{2i-1} (\alpha_i \hat{e}_{2i-1} + \beta_i \hat{e}_{2i}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=s_1+1}^{s_2/2+s_1+1} v_{2i} (\beta_i \hat{e}_{2i-1} + \alpha_i \hat{e}_{2i}), \sum_{i=1}^n v_i \hat{e}_i \right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{s_1} \lambda_i v_i v_j \langle \hat{e}_i, \hat{e}_j \rangle + \sum_{i,j=s_1+1}^{s_2/2+s_1+1} v_{2i-1} \alpha_i v_{2j-1} \langle \hat{e}_{2i-1}, \hat{e}_{2j-1} \rangle \\ &\quad + \sum_{i,j=s_1+1}^{s_2/2+s_1+1} v_{2i-1} \beta_i v_{2j} \langle \hat{e}_{2i}, \hat{e}_{2j} \rangle + \sum_{i,j=s_1+1}^{s_2/2+s_1+1} v_{2i} (-\beta_i) v_{2j-1} \langle \hat{e}_{2i-1}, \hat{e}_{2j-1} \rangle \\ &\quad + \sum_{i,j=s_1+1}^{s_2/2+s_1+1} v_{2i} \alpha_i v_{2j} \langle \hat{e}_{2i}, \hat{e}_{2j} \rangle \\ &= \sum_{i=1}^s v_i^2 \lambda_i + \sum_{i=s_1+1}^{s_2/2+s_1+1} v_{2i-1}^2 \alpha_i + \sum_{i=s_1+1}^{s_2/2+s_1+1} v_{2i-1} v_{2i} \beta_i \\ &\quad + \sum_{i=s_1+1}^{s_2/2+s_1+1} v_{2i} v_{2i-1} (-\beta_i) + \sum_{i=s_1+1}^{s_2/2+s_1+1} v_{2i}^2 \alpha_i \\ &= \sum_{i=1}^{s_1} v_i^2 \lambda_i + \sum_{i=s_1+1}^{s_2/2+s_1+1} v_{2i-1}^2 \alpha_i + \sum_{i=s_1+1}^{s_2/2+s_1+1} v_{2i}^2 \alpha_i. \end{aligned}$$

con $v_i^2 \lambda_i \leq 0$ y $v_i^2 \alpha_i \leq 0$. Como $\|v\| = 1$ hay por lo menos una j , con $1 \leq j \leq s_2$, tal que $v_j \neq 0$. Por lo que $v_j^2 \alpha_j < 0$ o $v_j^2 \lambda_j < 0$, dependiendo de si $j > s_1$ o $j < s_1$. En cualquier caso $\langle \tilde{L}v, v \rangle \neq 0$.

Por lo tanto $\tilde{L}v$ es transversal a S^{n-1} .

Al ser S^{n-1} compacto y $\langle -, - \rangle_1$ continua hay $\epsilon > 0$ tal que $A(\epsilon)$ es transversal a S^{n-1} . Por el Teorema de la forma canónica de Jordan, hay $\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$ base de \mathbb{R}^n de manera que L tiene matriz asociada $A(\epsilon)$ con esta base. Entonces, si $\|-\|$ es la norma generada por esta base, $L \bar{\cap} S^{n-1}$. \square

Proposición 2.1.10. Sean $L, T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Si L, T tienen índice n , entonces L y T son topológicamente equivalentes.

Demostración. Sean $\|-\|_L$ y $\|-\|_T$ las normas dadas por el Lema anterior. Sean $S_L^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_L = 1\}$ y $S_T^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_T = 1\}$. Fijamos $\tilde{h} : S_L^{n-1} \rightarrow S_T^{n-1}$ un homeomorfismo cualquiera.

Al tener L y T índice $n = \dim(\mathbb{R}^n)$, $L = L^s$ y $T = T^s$. Luego, para $y \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, por el corolario a la proposición 2.1.6, sabemos que $\lim_{t \rightarrow \infty} L_t y = 0 = \lim_{t \rightarrow \infty} T_t t$. Por lo mismo $\lim_{t \rightarrow -\infty} L_t y$ y $\lim_{t \rightarrow -\infty} T_t y$ divergen. Por lo tanto $O_L(y) \cap S_L^{n-1} \neq \emptyset \neq O_T(y) \cap S_T^{n-1}$. Como $S_L^{n-1} \bar{\cap} L$ y $\dim O_L(y) + \dim(S_L^{n-1}) = 1 + (n-1) = n$. Por lo tanto, $O_L(y) \cap S_L^{n-1}$ consta de un único elemento $\{y_L\} = O_L(y) \cap S_L^{n-1}$. Análogamente $\{y_T\} = O_T(y) \cap S_T^{n-1}$.

Sea $t_y \in \mathbb{R}$ el único real tal que $L_{t_y}(y) = y_L$. Extendemos \tilde{h} a todo \mathbb{R}^n de la siguiente manera

$$h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$y \longmapsto \begin{cases} T_{t_y} \tilde{h} L_{t_y}(y) & y \neq 0. \\ 0 & y = 0. \end{cases}$$

h es un homeomorfismo ya que T_t, \tilde{h}, L_t lo son. Verifiquemos que h es el homeomorfismo buscado. Sea $y \in \mathbb{R}^n$. Si $y = 0$ entonces $h L_t(y) = 0 = T_t h(y)$. Si $y \neq 0$ tomando $t \in \mathbb{R}$,

$$h L_t(y) = T_{-(t_y-t)} \tilde{h} L_{t_y-t} L_t(y) = T_{-t_y} \tilde{h} L_{t_y-t+t}(y) = T_t(T_{t_y} \tilde{h} L_{t_y}(y)) = T_t h(y).$$

Por lo tanto $h L_t = T_t h$ es decir, L y T son topológicamente equivalentes. \square

Proposición 2.1.11. Sean L y $T \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$. L es topológicamente equivalente a T si y solamente si L y T tienen el mismo índice.

Demostración. \Rightarrow) Supongamos L topológicamente equivalente a T . Sean E_L^s, E_T^s los subespacios estables de L y T respectivamente y E_L^u, E_T^u los subespacios inestables de L y T respectivamente. Hay $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ homeomorfismo tal que $\forall t \in \mathbb{R}$ $h L_t = T_t h$. Tomando $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ tenemos que:

$$x \in E_L^s \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} L_t(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} h L_t(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} T_t h(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) \in E_T^s.$$

Se sigue que $h[E_L^s] = E_T^s$ y, de manera análoga, $h[E_L^u] = E_T^u$. Al ser h homeomorfismo $h|_{E_L^s}$ también lo es. Por el Teorema de las dimensiones, concluimos que $\dim(E_L^s) = \dim(E_T^s)$. Como el índice de L es igual a la dimensión de E_L^s . Se sigue que T y L tienen el mismo índice.

\Leftrightarrow) Supongamos que L y T tienen el mismo índice. Sean $L^s = L|_{E_L^s}$ y $T^s = T|_{E_T^s}$. Por el lema anterior, L^s y T^s son topológicamente equivalentes. Sea $h_s : E_L^s \rightarrow E_T^s$ homeomorfismo tal que $h_s L_t^s = T_t^s h_s$. Análogamente $(L^u)^{-1}$ y $(T^u)^{-1}$ son topológicamente equivalentes. Sea $h_u : E_L^u \rightarrow E_T^u$ homeomorfismo tal que $(L^u)_t^{-1} h_u^{-1} = h_u^{-1} (T^u)_t^{-1}$. Se sigue que $h_u L_t^u = T_t^u h_u$. Por lo que también L^u y T^u son topológicamente equivalentes. Como $\mathbb{R}^n = E_L^s \oplus E_L^u = E_T^s \oplus E_T^u$, podemos definir

$$h : E_L^s \oplus E_L^u \longrightarrow E_T^s \oplus E_T^u \quad x + y \longmapsto h_s(x) + h_u(y).$$

Sea $x_0 + y_0 \in E_L^s \oplus E_L^u$, entonces

$$\begin{aligned} hL_t(x_0 + y_0) &= h(L_t^s(x_0) + L_t^u(y_0)) \\ &= h_s L_t^s(x_0) + h_u L_t^u(y_0) \\ &= T_t^s h_s(x_0) + T_t^u h_u(y_0) \\ &= T_t(h_s(x_0) + h_u(y_0)) = T_t(h(x_0 + y_0)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, para cada $t \in \mathbb{R}$ $hL_t = T_t h$ y entonces L y T son topológicamente equivalentes. \square

Lema 2.1.12. *Sea $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Para cada $\epsilon > 0$ hay $\delta > 0$ tal que, si $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ satisface que $\|L - T\| < \delta$ entonces $\forall \mu \in \text{Esp}(T)$ hay un $\lambda \in \text{Esp}(L)$ con $|\lambda - \mu| < \epsilon$.*

Demostración. Sean $\epsilon > 0$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \text{Esp}(L)$. $|\lambda_i| \leq \|L_{\mathbb{C}}\| = \|L\|$. Si $\|L - T\| < 1$ entonces $\|T\| < 1 + \|L\|$ y por lo tanto cada $\mu \in \text{Esp}(T)$ tiene norma $|\mu| < 1 + \|L\|$. Se sigue que $\text{Esp}(T) \subseteq D_{1+\|L\|}$. Sea $V_\epsilon = \bigcup_{i=1}^n B_\epsilon^{\mathbb{C}^n}(\lambda_i)$. Tomando $w \in D_{1+\|L\|} - V_\epsilon$, tenemos que $\det(L_{\mathbb{C}} - wId) \neq 0$. Por continuidad del determinante, para cada w existe un $\delta_w > 0$ tal que, si $\|T - L\| < \delta_w$, entonces $\det(T_{\mathbb{C}} - wId) \neq 0$. Al ser $D_{1+\|L\|} - V_\epsilon$ compacto, hay un $\delta_0 > 0$ que cumple:

$$\|T - L\| < \delta_0 \implies \forall w \in (D_{1+\|L\|} - V_\epsilon) \quad \det(T_{\mathbb{C}} - wId) \neq 0.$$

pero $\text{Esp}(T) \subseteq D_{1+\|L\|}$, por lo tanto $\text{Esp}(T) \subseteq V_\epsilon$.

Tomamos $\delta = \min\{1, \delta_0\}$, si $\|T - L\| < \delta$ entonces para cada $\mu \in \text{Esp}(T)$ hay $\lambda \in \text{Esp}(L)$ tal que $|\lambda - \mu| < \epsilon$. \square

Lema 2.1.13. *Sean $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ y $\lambda \in \text{Esp}(L)$ de multiplicidad m . Existen $\epsilon, \delta > 0$ que satisfacen: $\|T - L\| < \delta \implies \{\mu_1, \dots, \mu_k\} = \text{Esp}(T) \cap B_\epsilon(\lambda)$ y la suma de las multiplicidades de los μ_i es menor o igual a m .*

Demostración. Lo demostraremos por contradicción. Supongamos que $\forall \epsilon > 0 \forall \delta > 0$ hay $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ $\|T - L\| < \delta$ y la suma de las multiplicidades de los μ_i es mayor a m , con $|\mu_i - \lambda| < \epsilon$.

Luego, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe un campo lineal $L_k \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ el cual satisface $\|L_k - L\| < 1/k$ y $\{\mu_1^k, \dots, \mu_{r_k}^k\} = \text{Esp}(L_k) \cap B_{1/k}(\lambda)$. Nos fijamos en la sucesión $\{L_k\}$, por definición $\lim_{k \rightarrow \infty} L_k = L$ y también los autovalores $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_i^k = \lambda$. Sea m_k la suma de las multiplicidades de los autovalores $\mu_1^k, \dots, \mu_{r_k}^k$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ $m_k > m$, por lo tanto $m' = \lim_{k \rightarrow \infty} m_k > m$.

Sea $E_k = \text{Ker}((L_k)_{\mathbb{C}} - \mu_1^k Id) \dots ((L_k)_{\mathbb{C}} - \mu_{r_k}^k Id)$, $\dim(E_k) = m_k$. Tomamos $e_1^k, \dots, e_{m_k}^k$ base ortonormal de E_k . Como $\{e_1^k, \dots, e_{m_k}^k\} \subseteq S^{2n-1} \subseteq \mathbb{C}^n$ y S^{2n-1} es compacto, pasando a una subsucesión de ser necesario, podemos suponer que e_j^k converge a un e_j . Con $e_j \neq e_i$

si $i \neq j$ por ortogonalidad. Sea $\tilde{E} = \langle \{e_1, \dots, e_{m'}\} \rangle$. Es claro que $\dim(\tilde{E}) = m'$, pero el operador lineal $((L_k)_\mathbb{C} - \mu_1^k \text{Id})((L_k)_\mathbb{C} - \mu_2^k \text{Id}) \dots ((L_k)_\mathbb{C} - \mu_{r_k}^k \text{Id}) \rightarrow (L_\mathbb{C} - \lambda \text{Id})$ cuando $k \rightarrow \infty$. Se sigue que $\text{Ker}(L_\mathbb{C} - \lambda \text{Id})^m \supseteq \tilde{E}$ lo cual es una contradicción, ya que $\dim(\text{Ker}(L_\mathbb{C} - \lambda \text{Id})) = m < m' = \dim \tilde{E}$. \square

Teorema 2.1.14. *Los valores propios de $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ dependen continuamente de L .*

Demostración. Sean $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\} = \text{Esp}(L)$ con multiplicidades n_1, \dots, n_r respectivamente y $\epsilon > 0$ de manera que las bolas $B_\epsilon(\lambda_i)$ sean ajenas. Por el Lema 2.1.14, si $V_\epsilon = \cup_{i=1}^r B_\epsilon(\lambda_i)$ hay $\delta_0 > 0$ tal que, si $\|T - L\| < \delta_0$, entonces $\text{Esp}(T) \subseteq V_\epsilon$. Por otro lado, para cada $\lambda_i \in \text{Esp}(L)$, por el lema 2.1.15, existe una $\delta_i > 0$ tal que, si $\|T - L\| < \delta_i$, entonces la suma de las multiplicidades de los autovalores $\text{Esp}(T) \cap B_\epsilon(\lambda_i)$ es menor o igual a n_i .

Tomamos $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_r\}$. Si $\|T - L\| < \delta$, la suma de las multiplicidades de $\text{Esp}(T) \cap B_\epsilon(\lambda_i)$ es menor o igual a n_i . Si para algún j la suma total de las multiplicidades de $\text{Esp}(T) \cap B_\epsilon(\lambda_j)$ fuese menor a n_j , la suma de las multiplicidades de $\text{Esp}(T)$ sería menor a $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$ lo que es una contradicción. Por lo tanto se da la igualdad. \square

Corolario. (1) *Para $L \in \mathbb{H}(\mathbb{R}^n)$, hay $V \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ vecindad abierta de L tal que, si $T \in V$, entonces $\text{Ind}(T) = \text{Ind}(L)$. Donde $\text{Ind}(L)$ es el índice de L .*

Demostración. Sea $\epsilon = \min\{|\text{Re}(\lambda_i)| : \lambda_i \in \text{Esp}(L)\}$. Hay $\delta > 0$ tal que, para $\|T - L\| < \delta$, $\text{Esp}(T) \subseteq \cup_{i=1}^r B_\epsilon(\lambda_i)$. Por la elección de ϵ , $\cup_{i=1}^r B_\epsilon(\lambda_i)$ es ajeno al eje imaginario, por lo tanto también lo es $\text{Esp}(T)$, si nos fijamos en los autovalores de L que tienen parte real negativa $\lambda_1, \dots, \lambda_l$, con multiplicidades n_1, \dots, n_l . La suma de la multiplicidad de los autovalores de T en $\text{Esp}(T) \cap B_\epsilon(\lambda_i)$ es n_i . Por lo tanto, la suma de la multiplicidad de los valores propios de T con parte real negativa ($\text{Ind}(T)$) es igual a $n_1 + \dots + n_l = \text{Ind}(L)$. \square

Corolario. (2) *$L \in \mathbb{H}(\mathbb{R}^n) \iff L$ es estructuralmente estable. Es decir, los campos lineales que son estructuralmente estables son los campos lineales hiperbólicos.*

Demostración. \Rightarrow) Por la proposición 2.1.11, dos campos hiperbólicos son topológicamente equivalentes si y sólo si tienen el mismo índice. Por el Teorema anterior, hay $V \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ vecindad de L tal que, si $T \in V$, entonces $\text{Ind}(L) = \text{Ind}(T)$. Como $\mathbb{H}(\mathbb{R}^n)$ es abierto, podemos tomar $V \subseteq \mathbb{H}(\mathbb{R}^n)$. Por lo anterior, V satisface la definición de estabilidad estructural para L .

\Leftarrow) Por contra positiva: Supongamos que el campo lineal L no es hiperbólico. Sean $\epsilon > 0$ y $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\} = \text{Esp}(L)$. Ordenados de manera que $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ son los autovalores con parte real no cero. Sea $t = (1/2) \min\{|\text{Re}(\lambda_1)|, |\text{Re}(\lambda_2)|, \dots, |\text{Re}(\lambda_l)|, \epsilon\}$ y $T = L + t\text{Id}$, entonces $\|T - L\| = t < \epsilon$ y $\text{Esp}(T) = \{\lambda_1 + t, \dots, \lambda_r + t\}$, por la elección de t para cada $i \in \{1, \dots, r\}$ $\lambda_i + t \neq 0$. Es decir, $T \in \mathbb{H}(\mathbb{R}^n)$.

Por lo tanto L no es estable. \square

2.2. Singularidades y puntos fijos hiperbólicos

En esta sección buscaremos extender lo aprendido acerca de campos vectoriales lineales a campos vectoriales sobre variedades diferenciales. Buscamos, por ahora, clasificar el comportamiento de la dinámica local. Es decir, dado $p \in M$, saber cuando el sistema

dinámico es estable en una vecindad de p . Por el Teorema del flujo tubular, o de rectificación, sabemos que los campos vectoriales son siempre estables en puntos regulares. Falta entonces estudiar el comportamiento local en singularidades. Teniendo en mente que la diferencial de una función es una aproximación lineal a ella. Lo primero que podríamos pedirle a una singularidad es que su aproximación lineal sea adecuada. Según lo que vimos en la sección pasada, esto motiva la siguiente definición:

Definición. Sean $X \in \mathfrak{X}^k(M)$ y $p \in M$ singularidad. Decimos que p es una singularidad simple de X si $DX(p) : T_pM \rightarrow T_pM$ es invertible. Es decir, $DX(p)$ no tiene al 0 como autovalor.

Proposición 2.2.1. Sean $X \in \mathfrak{X}^k(M)$ y $p \in M$, con p singularidad simple de X . Existen $N(X) \subseteq \mathfrak{X}^k(M)$, $U_p \subseteq M$ vecindades de X y p respectivamente, y $\rho : N(X) \rightarrow U_p$ aplicación continua tales que $\rho(Y)$ es una única singularidad simple de Y en U_p .

Demostración. La idea de la demostración es utilizar el Teorema de la función implícita para espacios de Banach. Al ser un resultado local, pasando a cartas locales, podemos suponer $M = \mathbb{R}^n$, $p = 0$ y $X \in \mathfrak{X}^k(D^n)$, donde $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$.

Sabemos que $\mathfrak{X}^k = \mathfrak{X}^k(D^n)$ es un espacio de Banach, pues D^n es compacto. Sea

$$\varphi : D^n \times \mathfrak{X}^k \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \varphi(x, Y) = Y(x)$$

φ es de clase C^k . $D_1\varphi(0, X) = DX(0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es isomorfismo, ya que 0 es singularidad simple. Como $\varphi(0, X) = 0$, por el Teorema de la función implícita hay $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $N_0 \subseteq \mathfrak{X}^k$ vecindades abiertas de 0 y X respectivamente, y $\tilde{\rho} : N_0 \rightarrow U$ aplicación C^k tal que $\varphi(\tilde{\rho}(Y), Y) = 0 \quad \forall Y \in N_0$, y $\tilde{\rho}$ es única con esta propiedad.

Luego: $x \in U, Y \in N_0 \implies (Y(x) = 0 \iff \tilde{\rho}(Y) = x)$. Es decir, $\tilde{\rho}(Y)$ es la única singularidad de Y en U .

Existe $N_1 \subseteq \mathfrak{X}^k(M)$ vecindad abierta de X tal que $\forall Y \in N_1$ $DY(\rho(Y))$ es isomorfismo. Equivalentemente, $\tilde{\rho}(Y)$ es una singularidad simple de Y . Tomando $N(X) = N_1 \cap N_0$ y $\rho = \tilde{\rho}|_{N(X)}$. Tenemos que $\rho : N(X) \rightarrow \rho[N(X)]$ satisface la proposición. \square

Sea $M_0 \subseteq TM$ la sección 0: $M_0 = \{(p, v) \in TM : v = 0\}$, es claro que M_0 es difeomorfo a M . Si $X \in \mathfrak{X}^k(M)$ entonces $p \in M$ es singularidad de X si y sólo si $X(p) \in M_0$.

Proposición 2.2.2. Sean $X \in \mathfrak{X}^k(M)$ y $p \in M$ singularidad de X . Entonces p es singularidad simple si y sólo si $X \bar{\cap}_p M_0$.

Demostración. Sea $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ carta local centrada en p . Entonces la diferencial $D\varphi : TU \rightarrow T\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo. Sea $\pi_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ la proyección en la segunda coordenada. Definimos $h = \pi_2 \circ D\varphi \circ X$. Luego:

$$X \bar{\cap}_p M_0 \iff p \text{ es punto regular de } h \iff Dh(p) : T_pM \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ es isomorfismo.}$$

Pero $Dh(p) = D\pi_2(0, 0) \circ D^2\varphi(0, p) \circ DX(p)$. Al ser $D\pi_2(0, 0)$ y $D^2\varphi(0, p)$ epimorfismos, $Dh(p)$ es isomorfismo si y solamente si $DX(p)$ lo es.

Por lo tanto $X \bar{\cap}_p M_0 \iff DX(p)$ es isomorfismo. \square

Denotaremos por $\mathfrak{g}_0(M) = \{X \in \mathfrak{X}^k(M) : X \text{ sólo tiene singularidades simples}\}$. De la proposición anterior se sigue que $\mathfrak{g}_0 = \{X \in \mathfrak{X}^k(M) : X \bar{\cap} M_0\}$.

Proposición 2.2.3. $\mathfrak{g}_0(M)$ es abierto y denso en $\mathfrak{X}^k(M)$.

Demostración. Mostraremos primero que \mathfrak{g} es abierto. Al ser M compacto y M_0 cerrado en T_M , por el Teorema de transversalidad de Thom, tenemos que $A = \{f \in C^k(M, TM) : f \bar{\cap} M_0\}$ es abierto en $C^k(M, TM)$. En particular $\mathfrak{g}_0 = A \cap \mathfrak{X}^k(M)$ es abierto en $\mathfrak{X}^k(M)$.

Porbaremos ahora la densidad. Sea $X \in \mathfrak{X}^k(M)$. Sea $\epsilon > 0$. Por el Teorema de transversalidad de Thom, hay $Y \in C^k(M, TM)$ con $\|Y - X\| < \epsilon$ y $Y \bar{\cap} M_0$. Tomando $\pi : TM \rightarrow M$ $\pi(p, v) = p$ la proyección a M , puede ocurrir que $\pi(Y(p)) \neq p$. Es decir que $Y \notin \mathfrak{X}^k(M)$. Al ser π continua, existe una $\delta > 0$ tal que

$$\|X - Y\|_k < \delta \implies \|\pi X - \pi Y\| < \epsilon \implies \|\text{Id}_M - \pi Y\| < \epsilon.$$

Luego, $\pi Y : M \rightarrow M$. Como $\text{Id}_M \in \text{Dif}^k(M) \subseteq C^k(M, M)$ es abierto, tomando ϵ suficientemente pequeño, $\pi Y \in \text{Dif}^k(M)$. Sea $Z = Y(\pi Y)^{-1}$. Así, $\pi Z = \pi Y(\pi Y)^{-1} = \text{Id}_M$. Por lo tanto $Z \in \mathfrak{X}^k(M)$. Tomando Z cercano a Y , tenemos $Z \bar{\cap} M_0$. Por lo tanto $Z \in \mathfrak{g}_0(M)$ y Z es cercano a X (Y es tan cercano como queramos a X y Z es tan cercano como queramos a Y). \square

Definición. Sea $X \in \mathfrak{X}^k(M)$ con $p \in M$ singularidad de X . Decimos que p es una singularidad hiperbólica de X si $DX(p) : T_p M \rightarrow T_p M$ es un campo lineal hiperbólico.

Denotaremos por $\mathfrak{g}_1(M)$ al conjunto de campos vectoriales sobre M que son hiperbólicos.

Proposición 2.2.4. Si M es compacta, entonces $\mathfrak{g}_1(M)$ es abierto y denso en $\mathfrak{X}^k(M)$.

Demostración. Es claro que $\mathfrak{g}_1(M) \subseteq \mathfrak{g}_0(M)$. Como $\mathfrak{g}_0(M)$ es abierto y denso en $\mathfrak{X}^k(M)$, basta probar que $\mathfrak{g}_1(M)$ es abierto y denso en $\mathfrak{g}_0(M)$.

Sea $X \in \mathfrak{g}_0(M)$ y $p_1, \dots, p_r \in M$ sus singularidades, que son finitas por ser aisladas. De la Proposición 2.2.1, para cada $j \in \{1, \dots, r\}$ hay $N_j \subseteq \mathfrak{X}^k(M)$ vecindad abierta de X y $U_j \subseteq M$ vecindad abierta de p_j . De manera que $i \neq j$ implica $U_i \cap U_j = \emptyset$, y una aplicación continua $\varphi_j : N_j \rightarrow U_j$ tal que:

$$\forall q \in U_j \forall Y \in N_j \quad Y(q) = 0 \iff \varphi_j(Y) = p_j.$$

Sea $U = \cup_{j=1}^r U_j$ y $N = \cap_{j=1}^r N_j$. U es abierto y por lo tanto $M - U$ es compacto. Como para cada $p \in M - U$ $X(p) \neq 0$, existe una $\delta > 0$ tal que $\forall p \in M - U \quad \|X(p)\| > \delta$. Por lo tanto, si $\|Y - X\| < \delta/2$, las únicas singularidades de Y son $\varphi_1(Y), \dots, \varphi_r(Y)$.

Abierto:

Si $X \in \mathfrak{g}_1$ entonces DX_{p_i} es hiperbólico. Sabemos que el conjunto de los campos lineales hiperbólicos es abierto. Luego, hay $\delta_i > 0$ tal que, si $\|DY(\varphi_i(Y)) - DX(p_i)\| < \delta_i$, entonces $DY(\varphi_i(Y))$ es hiperbólico. Tomamos $\epsilon = \min\{\delta_1, \dots, \delta_r\}$. Nos fijamos en la bola $B_\epsilon^{\mathfrak{g}_0(M)}(X) = \{Y \in \mathfrak{g}_0(M) : \|Y - X\|_k < \epsilon\}$. Entonces

$$Y \in N \cap B_\epsilon^{\mathfrak{g}_0(M)}(X) \implies Y \text{ hiperbólico.}$$

Densidad:

Sea $X \in \mathfrak{g}_0(M)$. Sea $\mu_i = (1/2) \min\{|Re(\lambda)| : \lambda \in \text{Esp}(DX(p_i)) \text{ y } Re(\lambda) \neq 0\}$, con $i \in \{1, \dots, r\}$. Es claro que $\mu_i > 0$. Así, $DX(p_i) + \mu_i \text{Id}$ es hiperbólico. Sea $\mu = \min\{\mu_i\}$. Para cada $j = 1, \dots, r$ tomamos cartas locales $\varphi^j : V_j \rightarrow B_3(0)$ centradas en p_j , con $V_j \subseteq U_j$.

Tomemos ahora una función $\rho : \mathbb{R}^m \rightarrow [0, 1]$ C^∞ que satisfaga lo siguiente:

- ρ tiene soporte contenido en $B_2(0)$.
- $\rho(x) = 1 \quad \forall x \in B_1(0)$.

Nos fijamos en $\varphi_*^j X$, la expresión de X en la carta φ^j . Es decir, tomando $q = (\varphi^j)^{-1}(x)$, tenemos que $\varphi_*^j X(x) = D\varphi^j((\varphi^j)^{-1}x)(X((\varphi^j)^{-1}(x))) = D\varphi^j(q)(X(q))$. Definimos

$$Y : M \longrightarrow TM$$

$$p \longmapsto \begin{cases} X(p) & p \in M - \bigcup_{j=1}^r V_j \\ (D\varphi^j)^{-1}(\varphi^j(p)) \left(\varphi_*^j X(\varphi^j(p)) + \mu\rho(\varphi^j(p))Id \right) & p \in V_j \end{cases}$$

En cartas locales $\varphi_*^j Y = \varphi_*^j X + \mu\rho(\varphi^j(p))Id$. Por lo tanto $DY(p_j) = DX(p_j) + \mu Id$ y $\|Y - X\| < \mu$. Por lo tanto $Y \in \mathfrak{g}_1(M)$ está arbitrariamente cerca de X . \square

Estudiaremos a continuación los casos paralelos para difeomorfismos.

Definición. $f \in \text{Dif}^k(M)$, $p \in M$ punto fijo de f . Decimos que p es un punto fijo elemental de f si 1 no es autovalor de $df_p : T_p M \rightarrow T_p M$.

Proposición 2.2.5. *Sea M variedad diferenciable (no necesariamente compacta). Sean $f \in \text{Dif}^k(M)$ y $p \in M$ punto fijo elemental de f . Hay $N \subseteq \text{Dif}^k(M)$ y $U \subseteq M$ vecindades abiertas de f y p respectivamente, y $\rho : N \rightarrow U$ continua tal que, si $g \in N$, entonces $\rho(g)$ es el único punto fijo de g en U , el cual es elemental.*

Demostración. Al ser un problema local, pasando a cartas locales podemos suponer que $M = \mathbb{R}^n$, $p = 0$ y $f \in \text{Dif}^k(D^n)$. Sabemos que $\text{Dif}^k(D^n)$ es un espacio de Banach. Nos fijamos ahora en la aplicación C^k

$$\varphi : D^n \times \text{Dif}^k(D^n) \longrightarrow D^n \quad \varphi(x, g) = g(x) - x.$$

Notemos que $\varphi(0, f) = f(0) - 0 = 0$ y $D_1\varphi(0, f) = Df(0) - Id$ es isomorfismo, ya que 1 no es valor propio de $Df(0)$. Por el Teorema de la función implícita, hay $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $N \subseteq \text{Dif}^k(D^n)$ vecindades abiertas de 0 y f respectivamente, y $\rho : N \rightarrow U$ única, tal que $\varphi(\rho(g), g) = 0$. Es decir: $\forall x \in U \left(\varphi(x, g) = 0 \Leftrightarrow x = \rho(g) \right)$. Por otro lado, los valores propios dependen continuamente de la función. Se sigue que existe un $\delta > 0$ tal que, si $\|f - g\|_k < \delta$, entonces $\|df_0 - dg_{\rho(g)}\| < \delta$ y por lo tanto $dg_{\rho(g)}$ no tiene 1 como autovalor.

Así, restringiendo N a una vecindad más pequeña de ser necesario, $\rho(g) \in U$ es el único punto fijo de g en U , el cual es elemental. \square

Consideremos la diagonal $\Delta = \{(p, p) \in M \times M : p \in M\}$. El conjunto $\Delta \subseteq M \times M$ es una subvariedad de dimensión $n = \dim(M)$ difeomorfa a M . Dada $f \in \text{Dif}^k(M)$, esta induce una aplicación $\tilde{f} : M \rightarrow M \times M$ definida por $\tilde{f}(p) = (p, f(p))$. La imagen de \tilde{f} es la gráfica de f .

Proposición 2.2.6. *Sean $f \in \text{Dif}^k(M)$ y $p \in M$ punto fijo de f . Entonces p es un punto fijo elemental de f si y solamente si $\tilde{f} \overline{\cap}_p \Delta$.*

Demostración. Al ser f un difeomorfismo, df_p es un isomorfismo, y por lo tanto $\dim(T_p \Delta) + \dim(d\tilde{f}_p[T_p M]) = n + n = \dim(T_p(M \times M))$. Luego:

$$\dim(T_p \Delta \cap d\tilde{f}_p[T_p M]) = 0 \iff \tilde{f} \overline{\cap}_p \Delta$$

equivalentemente

$$T_p\Delta \cap d\tilde{f}_p[T_pM] = \{0\} \iff \tilde{f} \bar{\cap}_p \Delta.$$

De la definición de \tilde{f} , es directo que $d\tilde{f}_p[T_pM] = T_pM \times df_p[T_pM]$. Por otro lado, el plano tangente a Δ en p está dado por $T_p\Delta = \{(v, v) \in T_pM \times T_pM : v \in T_pM\}$. Luego, si $w \in T_pM \cap d\tilde{f}_p[T_pM]$ entonces $(v, v) = w = (v, df_p(v))$ y por lo tanto $df_p(v) = v$.

Por lo tanto $\tilde{f} \bar{\cap}_p \Delta \iff T_p\Delta \cap d\tilde{f}_p[T_pM] = \{0\} \iff 1$ no es autovalor de f . \square

Denotamos por $G_0(M) \subseteq \text{Dif}^k(M)$ al conjunto de difeomorfismos cuyos puntos fijos son todos elementales. De la proposición anterior se sigue que $f \in G_0(M)$ si y sólo si $\tilde{f} \bar{\cap} \Delta$. Así, por el Teorema de transversalidad de Thom, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.2.7. M compacta $\Rightarrow G_0(M)$ abierto y denso en $\text{Dif}^k(M)$.

Definición. Sea $p \in M$ punto fijo de $f \in \text{Dif}^k(M)$. Decimos que p es un punto fijo hiperbólico de f si $df_p : T_pM \rightarrow T_pM$ es un isomorfismo hiperbólico. Es decir, df_p no tiene valores propios con norma 1.

Denotaremos por $G_1(M) \subseteq \text{Dif}^k(M)$ al conjunto de los difeomorfismos cuyos puntos fijos son todos hiperbólicos.

Teorema 2.2.8. M compacta $\Rightarrow G_1(M)$ es abierto y denso en $\text{Dif}^k(M)$.

Demostración. Como $G_1(M) \subseteq G_0(M)$, al ser $G_0(M)$ abierto y denso en $\text{Dif}^k(M)$, basta probar que $G_1(M)$ es abierto y denso en $G_0(M)$.

Sean $f \in G_0$ y $p_1, \dots, p_r \in M$ sus puntos fijos (finitos debido a que M es compacto y los puntos fijos elementales son aislados). Por la Proposición 2.2.5 hay $U_1, \dots, U_r \subseteq M$ abiertos, con $p_i \in U_i$, $N_1, \dots, N_r \subseteq \text{Dif}^k(M)$ vecindades abiertas de f , y $\rho_i : N_i \rightarrow U_i$ aplicación continua tales que $\forall g \in N_i$ $\rho_i(g) \in U_i$ es el único punto de g en U_i , el cual es elemental. Tomamos $N = \cup_{i \leq r} N_i$ y $U = \cup_{i \leq r} U_i$. Al ser $M - U$ compacto, hay $\delta > 0$ tal que si $\|f - g\|_k < \delta$ entonces g no tiene puntos fijos en $M - U$. Por lo tanto, tomando N suficientemente pequeño, $g \in N$ implica que g tiene como únicos puntos fijos $\rho_1(g), \dots, \rho_r(g)$.

Abierto:

Supongamos $f \in G_1(M)$. Como los autovalores dependen continuamente de la función, hay $\delta_i > 0$ tal que, si $\|f - g\|_k < \delta_i$, en particular $\|df_p - dg_{\rho_i(g)}\| < \delta_i$ entonces $dg_{\rho_i(g)}$ no tiene valores propios de norma 1. Tomamos $\delta = \min\{\delta_i : 1 \leq i \leq r\}$. Si nos fijamos en la bola $B_\delta = \{g \in G_0(M) : \|f - g\| < \delta\}$. Entonces $\tilde{N} = B_\delta \cap N$ es una vecindad abierta de f y $\tilde{N} \subseteq G_1(M)$.

Denso:

Supongamos $f \in G_0(M)$. Si $u \in \mathbb{R}$ es suficientemente pequeño y $p_i \in M$ es punto fijo elemental de f entonces $(1-u)df_p$ no tiene autovalores de norma 1. Así, para cada $p_i \in M$ punto fijo de f , sea (φ_i, V_i) carta local centrada en p_i con $\varphi_i[V_i] = B_3(0)$ y $V_i \subseteq U_i$. Sea $\psi : B_3(0) \rightarrow \mathbb{R}$ función C^∞ con soporte contenido en $B_2(0)$ y $\psi|_{B_1(0)} = 1$. Definimos

$$g : M \longrightarrow M$$

$$p \longmapsto \begin{cases} f(p) & p \in M - \bigcup_{i=1}^r V_i \\ \varphi_i^{-1} \left([1 - u\psi(\varphi_i(p))] \varphi_i(f(p)) \right) & p \in V_i \end{cases}$$

g tiene como puntos fijos los mismos que f , pero $dg_{p_i} = (1-u)df_{p_i}$, y $\|f - g\| \leq u$. Por lo tanto g es un difeomorfismo hiperbólico y está arbitrariamente cerca de f . \square

2.3. Estabilidad local

El teorema principal de esta sección, el Teorema de Grobman-Hartman, nos dice que en la vecindad de puntos fijos hiperbólicos el comportamiento del sistema dinámico es indistinguible de la aproximación lineal dada por la diferencial en ese punto. En el sentido de que, por lo menos localmente, son topológicamente equivalentes. Dado que ya conocemos el comportamiento de los campos e isomorfismos lineales hiperbólicos, esto nos ayuda a clasificar los sistemas dinámicos hiperbólicos localmente de acuerdo a su parte lineal.

Para demostrar el Teorema de Grobman-Hartman necesitaremos de los siguientes Lemas:

Lema 2.3.1. Sean E espacio de Banach y $L, G \in \mathcal{L}(E, E)$. Si hay $a \in \mathbb{R}$ tal que $\|L\| \leq a < 1$ y G es un isomorfismo con norma $\|G^{-1}\| \leq a < 1$ entonces se satisface lo siguiente:

$$1) \text{ Id}_E + L \text{ es isomorfismo y } \|(\text{Id}_E + L)^{-1}\| \leq 1/(1 - a).$$

$$2) \text{ Id}_E + G \text{ es isomorfismo y } \|(\text{Id}_E + G)^{-1}\| \leq a/(1 - a).$$

Demostración. 1) Sea $y \in E$ y $\mu : E \rightarrow E$ dada por $\mu(x) = y - Lx$. Entonces $\mu(x_1) - \mu(x_2) = Lx_2 - Lx_1 = L(x_2 - x_1)$. Por lo tanto

$$\|\mu(x_1) - \mu(x_2)\| = \|L(x_2 - x_1)\| \leq \|L\|\|x_2 - x_1\| \leq a\|x_2 - x_1\| < \|x_2 - x_1\|.$$

Se sigue que μ es una contracción, por lo que μ tiene un único punto fijo $x_y \in E$ el cual satisface $x_y = \mu(x_y) = y - Lx_y$. Despejando obtenemos $x_y + Lx_y = y$. Esto para cada $y \in E$, lo que prueba la biyectividad de $\text{Id}_E + L$. Luego, $\text{Id}_E + L$ es un isomorfismo. Ahora, tomando $y \in E$ de norma 1 y $x \in E$ tal que $(\text{Id}_E + L)^{-1}y = x$, entonces $x = y - Lx$ satisface

$$\|x\| = \|y - Lx\| \leq \|y\| + \|Lx\| \leq 1 + \|L\|\|x\| \leq 1 + a\|x\|$$

despejando, obtenemos que $\|x\| - a\|x\| \leq 1$ por lo que $\|x\| \leq 1/(1 - a)$. Por lo tanto $\|(\text{Id}_E + L)^{-1}\| \leq 1/(1 - a)$.

2) $\text{Id}_E + G = G(\text{Id}_E + G^{-1})$. Dado que $\|G^{-1}\| \leq a < 1$, por la parte 1), $\text{Id}_E + G^{-1}$ es isomorfismo con $\|(\text{Id}_E + G^{-1})^{-1}\| \leq 1/(1 - a)$. Luego:

$$\begin{aligned} \|(\text{Id}_E + G^{-1})\| &= \|(G(\text{Id}_E + G^{-1})^{-1})^{-1}\| \\ &= \|(\text{Id}_E + G^{-1})^{-1}G^{-1}\| \\ &\leq \|(\text{Id}_E + G^{-1})^{-1}\| \|G^{-1}\| \leq \frac{a}{1 - a} \end{aligned}$$

□

Sea $C_b^0(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : \|f\|_{\text{sup}} < m\}$ para alguna $m \in \mathbb{R}$.

Lema 2.3.2. Existe una $\epsilon > 0$ tal que, si $\phi_1, \phi_2 \in C_b^0(\mathbb{R}^n)$ tienen constante de Lipschitz menor o igual a ϵ , entonces hay $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ homeomorfismo que satisface la igualdad $h(A + \phi_1) = (A + \phi_2)h$, donde A es un isomorfismo hiperbólico.

Demostración. Notemos primero que, si $h = \text{Id} + u$, entonces:

$$\begin{aligned} (\text{Id} + u)(A + \phi_1) &= (A + \phi_2)(\text{Id} + u) && \iff \\ \text{Id}A + \text{Id}\phi_1 + u(A + \phi_1) &= A\text{Id} + Au + \phi_2(\text{Id} + u) && \iff \\ A + \phi_1 + u(A + \phi_1) &= A + Au + \phi_2(\text{Id} + u) && \iff \\ Au - u(A + \phi_1) &= \phi_1 - \phi_2(\text{Id} + u) \end{aligned}$$

Sea $L : C_b^0(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_b^0(\mathbb{R}^n)$ $Lu = Au - u(A + \phi_1)$. Veamos que L es invertible. Al ser A homeomorfismo, podemos escribir $Lu = A(u - A^{-1}u(A + \phi_1))$. Basta mostrar que $L^*u = u - A^{-1}u(A + \phi_1)$ es invertible.

Al ser A isomorfismo hiperbólico, podemos separar \mathbb{R}^n en E^s , E^u , la parte estable e inestable de A . Entonces $C_0^b(\mathbb{R}^n, E^s)$, $C_0^b(\mathbb{R}^n, E^u)$ son invariantes bajo L^* , por lo que podemos escribir $L^* = (L^*)^s \oplus (L^*)^u$, donde $(L^*)^s = L^*|_{E^s}$ y $(L^*)^u = L^*|_{E^u}$. Si tomamos ϵ suficientemente pequeño $A + \phi_1$ es invertible, ya que

$$\|\phi_1\| = \sup\{\|\phi_1 v\| : \|v\| = 1\} \leq \sup\{\epsilon\|v\| : \|v\| = 1\} = \epsilon$$

Por lo tanto $H : C_0^b(\mathbb{R}^n, E^s) \rightarrow C_0^b(\mathbb{R}^n, E^s)$, dada por $H(u^s) = (A^s)^{-1}u^s(A + \phi_1)$, es invertible con inversa $H^{-1}(u^s) = (A + \phi_1)^{-1}u^s A^s$. Si $\|u^s\| = 1$. Como $\|A\| \leq a < 1$, también se da que $\|H^{-1}\| \leq a$. Es decir, H^{-1} es una contracción. Por la parte 2) de Lema anterior $(L^*)^s = \text{Id} + H$ es invertible y $\|(L^*)^s\| \leq a/(1-a)$. Por la parte 1), $(L^*)^u$ también es invertible y $\|(L^*)^{u^{-1}}\| \leq 1/(1-a)$. Luego L^* es invertible y por lo tanto también lo es L . Tenemos la siguiente desigualdad:

$$\|L^{-1}\| = \|(L^*)^{-1}A^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1-a}$$

Definimos ahora $\mu : C_b^0(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_b^0(\mathbb{R}^n)$ por $\mu(u) = L(\phi_1 - \phi_2(\text{Id} + u))$.

$$\|\mu(u_1) - \mu(u_2)\| = \|L(\phi_1 - \phi_2(\text{Id} - u_1)) - L(\phi_1 - \phi_2(\text{Id} - u_2))\| \leq \frac{\|A\|^{-1}}{1-a} \epsilon \|u_2 - u_1\|$$

Si tomamos $\epsilon < (1-a)/\|A^{-1}\|$, μ es una contracción, por lo que tiene un único punto fijo $u \in C_b^0(\mathbb{R}^n)$ que satisface la ecuación

$$Au - u(A + \phi_1) = \phi_1 - \phi_2(\text{Id} + u)$$

Por lo que ya vimos, esto implica que u también satisface la ecuación

$$(\text{Id} + u)(A + \phi_1) = (A + \phi_2)(\text{Id} + u)$$

Sólo falta ver que $\text{Id} + u$ es un homeomorfismo.

Aplicando el mismo procedimiento que utilizamos para encontrar u , podemos encontrar $v \in C_n^0(\mathbb{R}^n)$ única que satisface:

$$(A + \phi_1)(\text{Id} + v) = (\text{Id} + v)(A + \phi_2)$$

Veamos que $(\text{Id} + v)(\text{Id} + u) = (\text{Id} + u)(\text{Id} + v) = \text{Id}$, para esto notemos que $(\text{Id} + u)(\text{Id} + v)$ satisface:

$$(\text{Id} + u)(\text{Id} + v)(A + \phi_2) = (\text{Id} + u)(A + \phi_1)(\text{Id} + v) = (A + \phi_2)(\text{Id} + u)(\text{Id} + v)$$

Por otro lado

$$(\text{Id} + u)(\text{Id} + v) = \text{Id} + v + u(\text{Id} + v)$$

y como $v + u(\text{Id} + v) \in C_b^0(\mathbb{R}^n)$, por la unicidad de la solución a la ecuación

$$(\text{Id} + w)(A + \phi_2) = (A + \phi_2)(\text{Id} + w)$$

cuya única solución es $w = 0$, obtenemos que $v + u(\text{Id} + v) = 0$, y por lo tanto

$$(\text{Id} + u)(\text{Id} + v) = \text{Id} \quad \text{y} \quad (\text{Id} + v)(\text{Id} + u) = \text{Id}$$

Por lo tanto $\text{Id} + u$ es un homeomorfismo que conjuga $A + \phi_1$ y $A + \phi_2$. \square

Por lo visto en la primer sección de este capítulo, si A es un isomorfismo hiperbólico hay una descomposición de $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$ y $\|\cdot\|$ norma de \mathbb{R}^n tales que $A^s = A|_{E^s}$, $A^u = A|_{E^u}$ satisfacen que $\|A^s\| \leq a < 1$ y $\|(A^u)^{-1}\| \leq a < 1$. Así podemos descomponer $C_b^0(\mathbb{R}^n) = C_b^0(\mathbb{R}^n, E^s) \oplus C_b^0(\mathbb{R}^n, E^u)$. Si $f \in C_b^0(\mathbb{R}^n)$ y π_s, π_u son las proyecciones a E^s y E^u respectivamente entonces, $f = \pi_s \circ f + \pi_u \circ f = f_s + f_u$ con $f_s \in C_b^0(\mathbb{R}^n, E^s)$ y $f_u \in C_b^0(\mathbb{R}^n, E^u)$.

Lema 2.3.3. Sean $A = df_p$ con p punto fijo hiperbólico de $f \in \text{Dif}^k(\mathbb{R}^n)$.

Para cada $\epsilon > 0$ hay $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\phi \in C_b^0(\mathbb{R}^n)$ tal que ϕ es Lipschitz con constante ϵ y $(A + \phi_1)|_U = f|_U$.

Demostración. Sea $\varphi = f - A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $\varphi(0) = 0$ y $d\varphi_0 = 0$. Tomamos $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ C^∞ que cumpla:

- $\alpha(t) = 1 \quad \forall t \in \overline{B_{1/2}(0)}$
- α tiene soporte contenido en $B_1(0)$.
- $\forall t \in \mathbb{R} \quad \alpha(t) \geq 0$
- $\forall t \in \mathbb{R} \quad \|\alpha'(t)\| \leq k \quad \text{con } k > 2$

Dado $\epsilon > 0$ hay $\delta > 0$ tal que $\forall x \in \overline{B_\delta(0)} \quad \|d\varphi_x\| < \epsilon/2k$.

Definimos $\phi(x) = \alpha(\|x\|/\delta)\varphi(x)$. ϕ satisface:

- 1) $\forall x \notin B_\delta(0) \quad \phi(x) = 0$. Es decir, ϕ tiene soporte contenido en $B_\delta(0)$.
- 2) $\forall x \in B_{\delta/2}(0) \quad \phi(x) = \varphi(x)$. Es decir f y $A + \phi$ coinciden en $B_{\delta/2}(0)$.
- 3) ϕ tiene constante de Lipschitz menor a ϵ .

1) y 2) se dan debido a que: $x \notin B_\delta(0) \Rightarrow \alpha(\|x\|/\delta) = 0$ y $x \in B_{\delta/2}(0) \Rightarrow \alpha(\|x\|/\delta) = 1$.

Para probar 3), lo dividimos en tres casos. Si tomamos $x_1, x_2 \in B_\delta(0)$, entonces

$$\begin{aligned}
\|\phi(x_1) - \phi(x_2)\| &= \left\| \alpha\left(\frac{\|x_1\|}{\delta}\right)\varphi(x_1) - \alpha\left(\frac{\|x_2\|}{\delta}\right)\varphi(x_2) \right\| \\
&\leq \left\| \alpha\left(\frac{\|x_1\|}{\delta}\right)\varphi(x_1) - \alpha\left(\frac{\|x_2\|}{\delta}\right)\varphi(x_1) \right\| \\
&\quad + \left\| \alpha\left(\frac{\|x_2\|}{\delta}\right)\varphi(x_1) - \alpha\left(\frac{\|x_2\|}{\delta}\right)\varphi(x_2) \right\| \\
&= \left\| \alpha\left(\frac{\|x_1\|}{\delta}\right) - \alpha\left(\frac{\|x_2\|}{\delta}\right) \right\| \|\varphi(x_1)\| + \|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\| \alpha\left(\frac{\|x_2\|}{\delta}\right) \\
&\leq \|\alpha'(c_1)\| \frac{\|x_1 - x_2\|}{\delta} \|x_1\| \|D\varphi\| + \|x_1 - x_2\| \|D\varphi\| \frac{\|x_2\|}{\delta} \|\alpha'(c_2)\| \\
&\leq k \frac{\|x_1 - x_2\|}{\delta} \delta \left(\frac{\epsilon}{2k}\right) + \|x_1 - x_2\| \left(\frac{\epsilon}{2k}\right) k \\
&= \epsilon \|x_1 - x_2\|
\end{aligned}$$

Si $x_1 \in B_\delta(0)$ pero $x_2 \notin B_\delta(0)$, de manera similar calculamos:

$$\begin{aligned}
\|\phi(x_1) - \phi(x_2)\| &\leq \left\| \alpha\left(\frac{\|x_1\|}{\delta}\right) - \alpha\left(\frac{\|x_2\|}{\delta}\right) \right\| \|\varphi(x_1)\| + \|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\| \alpha\left(\frac{\|x_2\|}{\delta}\right) \\
&= \left\| \alpha\left(\frac{\|x_1\|}{\delta}\right) - \alpha\left(\frac{\|x_2\|}{\delta}\right) \right\| \|\varphi(x_1)\| + 0 \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} \|x_1 - x_2\| = \epsilon \|x_1 - x_2\|
\end{aligned}$$

Si $x_1, x_2 \notin B_\delta(0)$ entonces

$$\|\phi(x_1) - \phi(x_2)\| = 0 < \epsilon \|x_1 - x_2\|$$

Con lo que terminamos la prueba. \square

Teorema 2.3.4 (Teorema de Grobman-Hartman). Sean $p \in M$ punto fijo hiperbólico de $f \in \text{Diff}^k(M)$ y $A = Df(p) : T_pM \rightarrow T_pM$.

Hay $V_p \subseteq M$ y $U_0 \subseteq T_pM$ vecindades abiertas de p y 0 respectivamente, y $h : U_0 \rightarrow V_p$ homeomorfismo tal que $hA = fh$. Es decir, A en 0 es localmente conjugado a f en p .

Demostración. Pasando a cartas locales podemos suponer ; $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $0 \in \mathbb{R}^n$ punto fijo hiperbólico de f . Entonces $df_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo hiperbólico.

Sean ϕ y $U \subseteq \mathbb{R}^n$ tales que $A + \phi|_U = f|_U$ y ϕ tiene constante de Lipschitz menor a ϵ . Por el Lema 2.3.2, A y $A + \phi$ son conjugados. Es decir hay $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ homeomorfismo tal que $hA = (A + \phi)h$

Por lo tanto $\forall x \in U \quad hA(x) = fh(x)$. \square

Observación. En el Lema 2.3.2, la conjugación entre $A + \phi_1$ y $A + \phi_2$ es única a una distancia finita de la identidad. Ignorando esta condición, dada $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contracción, con $\phi(0) = 0$, $\phi(1) = a > 0$ y $\phi(-1) = b < 0$. Si $\tilde{h} : [-1, b] \cup [a, 1] \rightarrow [-1, b] \cup [a, 1]$ con $\tilde{h}(-1) = -1$, $h(b) = b$, $h(a) = a$ y $h(1) = 1$, extendemos \tilde{h} a $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $h(x) = \varphi^{-n} \tilde{h} \varphi^n(x)$ con $n \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi^n(x) \in [-1, b] \cup [a, 1]$. Entonces $h\varphi = \varphi h$ para cada homeomorfismo \tilde{h} .

Por lo mismo, la extensión $A + \phi$ de f no es única.

Proposición 2.3.5. Sea $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ isomorfismo hiperbólico.

$\exists \delta > 0 \forall B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \|A - B\| < \delta \implies B$ en 0 es localmente conjugado a A en 0.

Demostración. Sean $\varphi = B - A \in C_b^0(\mathbb{R}^n)$ y $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ función auxiliar con soporte contenido en $B_2(0)$, constante 1 en $\overline{B_1(0)}$ y derivada acotada por $k > 1$.

Dada $\epsilon > 0$ hay $\delta > 0$ tal que, si $x \in B_\delta(0)$, entonces $\|d\varphi_x\| \leq \epsilon/2k$.

Definimos $\phi(x) = \alpha(\|x\|/\delta)\varphi(x)$. El mapeo ϕ satisface lo siguiente:

- 1) $\forall x \in B_\delta(0) \quad Bx = (A + \phi)x$
- 2) $\forall x \notin B_{2\delta}(0) \quad \phi(x) = 0$
- 3) ϕ tiene constante de Lipschitz menor a ϵ

La prueba de lo anterior es análoga a la del Lema 2.3.3.

Por lo tanto Por el Lema 2.3.2 B y $A + \phi$ son localmente conjugados en 0. \square

Teorema 2.3.6. Si $p \in M$ es punto fijo hiperbólico de f , entonces f es localmente estable en p .

Demostración. Por la Proposición 2.2.5. hay $N \subseteq \text{Dif}^k(M)$ y $U \subseteq M$ abiertos, con $f \in N$ y $p \in U$, y $\rho : N \rightarrow U$ continua tal que $\forall g \in N \quad \rho(g) \in U$ es el único punto fijo de g en U , el cual es hiperbólico.

Por la proposición anterior, tomando $\tilde{N} = N \cap \{g \in \text{Dif}^k(M) : \|f - g\|_1 < \delta\}$, donde $\delta > 0$ satisface que:

$$\|Dg(\rho(g)) - Df(p)\| < \delta \implies Dg(\rho(g)) \text{ en } 0 \text{ es localmente conjugado a } Df(p) \text{ en } 0$$

Por el teorema de Grobman-Hartman, f en p es localmente conjugado a $Df(p)$ en 0 y g en $\rho(g)$ lo es a $Dg(\rho(g))$.

Por lo tanto $\forall g \in \tilde{N} \quad g$ es localmente conjugado a f . \square

Lema 2.3.7 (Desigualdad de Gronwall). Sean $u, v : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas no negativas. Si existe una $\alpha \geq 0$ tal que $u(t) \leq \alpha + \int_a^t u(s)v(s)ds \quad \forall t \in [a, b]$ entonces $u(t) \leq \alpha e^{\int_a^t v(s)ds}$.

Demostración. Sea $\omega : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\omega(t) = \alpha + \int_a^t u(s)v(s)ds$. Supongamos primero que $\alpha > 0$. Como u, v son no negativas, se sigue que $\forall t \in [a, b] \quad \omega(t) > 0$. Por otro lado:

$$\omega'(t) = u(t)v(t) \leq \omega(t)v(t) \implies \frac{\omega'(t)}{\omega(t)} \leq v(t) \implies \int_a^t \frac{\omega'(s)}{\omega(s)} ds \leq \int_a^t v(s) ds$$

Pero $\int_a^t \omega'(s)/\omega(s) ds = \ln(\omega(t)) - \ln(\omega(0)) = \ln(\omega(t)/\omega(0)) = \ln(\omega(t)/\alpha)$. Así,

$$\ln\left(\frac{\omega(t)}{\alpha}\right) \leq \int_a^t v(s) ds \iff \frac{\omega(t)}{\alpha} \leq e^{\int_a^t v(s) ds} \iff \omega(t) \leq \alpha e^{\int_a^t v(s) ds}$$

Dado que $u(t) \leq \omega(t)$ entonces $u(t) \leq \alpha e^{\int_a^t v(s) ds}$.

Si $\alpha = 0$, por el caso anterior, para cada $\tilde{\alpha} > 0 \quad u(t) \leq \int_a^t u(s)v(s)ds < \tilde{\alpha} + \int_a^t u(s)v(s)ds$. Por lo tanto $u(t) \leq \tilde{\alpha} e^{\int_a^t v(s) ds}$. Tomando $\tilde{\alpha} = \epsilon/e^{\int_a^t v(s) ds}$, tenemos que $\forall \epsilon > 0 \quad u(t) < \epsilon$, se sigue que $u(t) = 0$. \square

Lema 2.3.8. Sea $Y \in \mathfrak{X}^k(\mathbb{R}^n)$ con $Y(0) = 0$.

Si Y satisface una condición de Lipschitz menor a K , entonces el flujo de Y está definido en todo $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y $\|Y_t(x) - Y_t(y)\| \leq e^{K|t|}\|x - y\|$.

Demostración. Lo demostraremos por contradicción. Sea $x \in \mathbb{R}^n$, supongamos que el flujo en x está definido en (a, b) con $b < \infty$. Sea $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ curva integral por x ,

$$\varphi(t) = x + \int_0^t Y(\varphi(s))ds$$

Para $t > 0$

$$\|\varphi(t)\| \leq \|x\| + \int_0^t \|Y(\varphi(s))\|ds \leq \|x\| + \int_0^t K\|\varphi(s)\|ds$$

Por la desigualdad de Gronwall, tomando $u(t) = \|\varphi(t)\|$, $v(t) = K$ y $\alpha = \|x\|$, se sigue que $\|\varphi(t)\| \leq \|x\|e^{\int_0^t Kds} = \|x\|e^{Kt} \leq \|x\|e^{Kb}$. Por lo tanto $\forall t \geq 0$ $\|\varphi(t)\| \leq \|x\|e^{Kb}$.

Sea $\{t_n\} \rightarrow b$ sucesión, entonces $\{\varphi(t_n)\}$ es una sucesión contenida en la bola de radio $\|x\|e^{Kb}$, que es compacta. Por lo tanto podemos suponer, pasando a una subsucesión de ser necesario, que $\{\varphi(t_m)\}$ es convergente. Sea $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n)$, para mostrar que y no depende de la sucesión escogida, tomemos $\{s_n\} \subseteq (a, b)$ sucesión que converge a b , entonces

$$\|\varphi(t_n) - \varphi(s_n)\| \leq \|\varphi'\| |t_n - s_n|$$

pero

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = b \implies \lim_{n \rightarrow \infty} |t_n - s_n| = 0$$

Luego, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi(t_n) - \varphi(s_n)\| = 0$ y por lo tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(s_n)$. Así, podemos extender φ al intervalo $(a, b]$ tomando $\varphi(b) = y$, lo que nos lleva a una contradicción el hecho de que φ era curva integral maximal. Luego $b = \infty$ y de manera análoga $a = -\infty$. Es decir, el flujo está definido en todo $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Usando la desigualdad de Gronwall:

$$\|Y_t(x) - Y_t(y)\| \leq \|x - y\| + \int_0^t \|Y(Y_s(x)) - Y(Y_s(y))\|ds = \|x - y\| + \int_0^t K\|Y_s(x) - Y_s(y)\|ds$$

tomando $u(t) = \|Y_t(x) - Y_t(y)\|$, $v(t) = K$ y $\alpha = \|x - y\|$. Como $\int_0^t Kds \leq K|t|$, concluimos que:

$$\|Y_t(x) - Y_t(y)\| \leq \|x - y\|e^{K|t|}$$

□

Lema 2.3.9. Sea $X : V \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ campo C^k con $X(0) = 0$ y $L = DX(0)$.

Para cada $\epsilon > 0$ hay $Y \in \mathfrak{X}^k(\mathbb{R}^n)$ que cumple:

- 1) Y tiene constante de Lipschitz acotada por $K < \infty$, por lo que el flujo de Y está definido en todo $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.
- 2) $Y = L$ fuera de $B_l(0)$, donde $l \in \mathbb{R}$ es positivo.
- 3) Hay $U \subseteq V$ tal que $0 \in U$ y $Y|_U = X|_U$.
- 4) Si $Y_t = L_t + \phi_t$ entonces $\exists M > 0$ tal que $\|\phi_t\| < M \quad \forall t \in [-2, 2]$ y ϕ tiene constante de Lipschitz menor a ϵ

Demostración. Sea $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ función C^k tal que $\psi(0) = D\psi(0) = 0$ y $X = L + \psi$. Tomamos $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ función auxiliar con soporte contenido en $B_l(0)$ y de manera que $\forall t \in B_{l/2}(0)$ $\alpha(t) = 1$.

Para cada $\delta > 0$ hay un $l > 0$ tal que $\psi|_{B_l(0)}$ tiene constante de Lipschitz menor a δ .

Sea $\phi(x) = \alpha(\|x\|)\psi(x)$, ϕ satisface:

- ϕ coincide con ψ en $B_{l/2}(0)$.
- $\psi = 0$ fuera de $B_l(0)$.

Definamos $Y = L + \phi$. Como L y ϕ tienen constante de Lipschitz, también la tiene Y , por lo que Y cumple la primer condición. ϕ se anula fuera de $B_l(0)$, por lo tanto $Y = L$ fuera de $B_l(0)$, es decir, satisface 2). Tomando $U = B_{l/2}(0)$, Y satisface 3). Por lo que sólo falta verificar que se satisface la cuarta condición.

Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$. Sabemos que $\forall t \in [-2, 2]$ $\|Y_t(x) - Y_t(y)\| \leq \|x - y\|e^{2K}$. Si $Y_t = L_t + \phi_t$ entonces

$$L_t(x) - x = \int_0^t L(L_s(x))ds = \int_0^t L(Y_s(x) - \phi_s(x))ds = \int_0^t L(Y_s(x))ds - \int_0^t L(\phi_s(x))ds$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \phi_t(x) &= Y_t(x) - L_t(x) \\ &= \int_0^t (Y(Y_s(x)))ds - \int_0^t L(Y_s(x))ds + \int_0^t L(\phi_s(x))ds \\ &= \int_0^t (Y - L)(Y_s(x))ds + \int_0^t L(\phi_s(x))ds \\ &= \int_0^t \phi(Y_s(x))ds + \int_0^t L(\phi_s(x))ds \end{aligned}$$

Se sigue que:

$$\begin{aligned} \|\phi_t(x) - \phi_t(y)\| &\leq \left\| \int_0^t (\phi(Y_s(x)) - \phi(Y_s(y)))ds \right\| + \left\| \int_0^t L(\phi_s(x) - \phi_s(y))ds \right\| \\ &\leq \int_0^t \delta \|Y_s(x) - Y_s(y)\|ds + \int_0^t \|L\| \|\phi_s(x) - \phi_s(y)\|ds \\ &\leq 2\delta \|x - y\|e^{2K} + \int_0^t \|L\| \|\phi_s(x) - \phi_s(y)\|ds \end{aligned}$$

Utilizamos ahora la desigualdad de Gronwall para obtener la siguiente desigualdad:

$$\|\phi_t(y) - \phi_t(y)\| \leq 2\delta \|x - y\|e^{2K} e^{2\|L\|}$$

con $t \in [-2, 2]$. Si tomamos $\delta < \epsilon / (4e^{2K} e^{2\|L\|})$, llegamos a que

$$\|\phi_t(x) - \phi_t(y)\| \leq 2\delta e^{2K} \|x - y\| + 2\delta e^{2K} e^{2\|L\|} \|x - y\| < \frac{\epsilon}{2e^{2\|L\|}} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

Es decir, ϕ tiene constante de Lipschitz menor a ϵ , con lo que terminamos la prueba. \square

Teorema 2.3.10 (Teorema de Grobman-Hartman para campos vectoriales). *Sea $0 \in \mathbb{R}^n$ singularidad hiperbólica de $X : V \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, denotamos $L = DX(0)$.*

X es topológicamente equivalente a L en 0 .

Demostración. Sea $Y \in \mathfrak{X}^k(\mathbb{R}^n)$ campo dado por el Lema 2.3.9. Sea $U \subseteq V$ vecindad abierta del 0 con $Y|_U = X|_U$. Entonces $DY(0) = DX(0) = L$ y $DY_1(0) = L_1 = e^L$, por lo que el difeomorfismo $Y_1 = L_1 + \phi_1$ tiene a 0 como punto fijo hiperbólico. Como ϕ_1 tiene constante de Lipschitz menor a ϵ , por el Lema 2.3.2. hay $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ homeomorfismo tal que $hY_1 = L_1h$.

Definimos

$$H : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x \longmapsto \int_0^1 L_{-t}hY_t dt$$

H es continua. Veamos que $\forall s \in \mathbb{R} \quad HY_s = L_sH$, equivalentemente $\forall s \in \mathbb{R} \quad L_{-s}HY_s = H$.

Supongamos primero que $s \in [0, 1]$, entonces:

$$L_{-s} \left(\int_0^1 L_{-t}hY_t dt \right) Y_s = \int_0^1 L_{-(t+s)}hY_{t+s} dt$$

Bajo el cambio de variable $u = t + s - 1$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_0^1 L_{-(t+s)}hY_{t+s} dt &= \int_{s-1}^s L_{-(u+1)}hY_{u+1} du \\ &= \int_{s-1}^0 L_{-(u+1)}hY_{u+1} du + \int_0^s L_{-u}(L_{-1}hY_1)Y_u du \\ &= \int_s^1 L_{-v}hY_v dv + \int_0^s L_{-v}hY_v dv \\ &= \int_0^1 L_{-v}hY_v dv = H \end{aligned}$$

Sabemos que $L_{-1}hY_1 = h$. Supongamos $L_{-n}hY_n = h$, entonces

$$L_{-(n+1)}hY_{n+1} = L_{-1}L_{-n}hY_nY_1 = L_{-1}hY_1 = h$$

Por inducción llegamos a que $\forall n \in \mathbb{N} \quad L_{-n}hY_n = h$.

Supongamos ahora que $\tilde{s} \in \mathbb{R}$, entonces hay $n \in \mathbb{Z}$ y $s \in [0, 1]$ tales que $\tilde{s} = n + s$.

$$\begin{aligned} L_{-(n+s)}HY_{n+s} &= L_{-s} \left(\int_0^1 L_{-n}L_{-t}hY_tY_n dt \right) Y_s \\ &= L_{-s} \left(\int_0^1 L_{-t}L_{-n}hY_nY_t dt \right) Y_s \\ &= L_{-s} \left(\int_0^1 L_{-t}hY_t dt \right) Y_s \\ &= L_{-s}HY_s = H \end{aligned}$$

Por lo tanto $\forall s \in \mathbb{R} \quad HY_s = L_sH$, en particular $HY_1 = L_1H$. Por otro lado, notemos que $\|Id - H\| = \left\| \int_0^1 L_{-t}hY_t dt \right\| < \infty$. Luego, $h = H$. Luego, H es homeomorfismo que conjuga X con Y en U . Por lo anterior, Y es topológicamente equivalente a L en 0 . Concluimos que X en 0 es topológicamente equivalente a L en 0 . \square

2.4. Clasificación local

Hemos probado ya que el conjunto de campos hiperbólicos $\mathfrak{g}_1(M) \subseteq \mathfrak{X}^k(M)$ es abierto, denso y que $\{\text{campos localmente estable}\} \subseteq \mathfrak{g}_1(M)$. Por la sección anterior, sabemos que si $p \in M$ es una singularidad hiperbólica de X , entonces X es topológicamente equivalente a $DX(p)$ en p . Luego, para entender el comportamiento topológico de las órbitas de X en una vecindad de una singularidad hiperbólica, basta describir el comportamiento de la diferencial $DX(p)$. Consideremos entonces los campos lineales hiperbólicos: $L_0, L_1, \dots, L_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tales que L_i tiene índice i y matriz asociada:

$$L_i = \begin{pmatrix} -\text{Id}_i & 0 \\ 0 & \text{Id}_{n-i} \end{pmatrix}$$

donde $\text{Id}_r \in GL(\mathbb{R}^r)$ es la matriz identidad de $r \times r$. Si $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tiene índice i , L es conjugado de L_i . Tenemos así clasificados los campos lineales hiperbólicos, representados por los campos L_i .

Sea $X_C : B_1(0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ $X_C(x) = (1, 0, 0, \dots, 0) = e_1$ campo constante.

Teorema 2.4.1. *Sea $X \in \mathfrak{g}_1(M)$ y $p \in M$ entonces:*

- 1) *Si p es punto regular de X , entonces X en p es topológicamente equivalente a X_C en 0 .*
- 2) *Si p es singularidad de X con índice i , entonces X en p es topológicamente equivalente al campo L_i en 0 .*

Demostración.

1) Es el teorema del Flujo Tubular.

2) Por el Teorema de Grobman - Hartman X en p es topológicamente equivalente a $DX(p)$ en 0 , pero $DX(p)$ en 0 es topológicamente equivalente a L_i en 0 .

Por lo tanto X en p es topológicamente equivalente a L_i en 0 . □

Así, hemos terminado de clasificar el comportamiento local de los campos hiperbólicos.

Ahora consideremos $\text{Dif}^k(M)$. Sabemos que el conjunto de difeomorfismos hiperbólicos $G_1(M) \subseteq \text{Dif}^k(M)$ es abierto y denso.

Por el Teorema de Groman - Hartman, para clasificar $G_1(M)$ basta clasificar los isomorfismos lineales hiperbólicos.

Proposición 2.4.2. *Sea $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ un isomorfismo hiperbólico. Existe un $\epsilon > 0$ tal que $\forall B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, si $\|A - B\| < \epsilon$, entonces B es conjugado de A .*

Demostración. Por la Proposición 2.3.5. Existe un $\epsilon > 0$ tal que, si $\|A - B\| < \epsilon$, entonces A y B son localmente conjugados. Es decir, hay $h : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ homeomorfismo tal que $Ah = hB$ en U .

Sean E_A^s, E_A^u los espacios estable e inestable de A respectivamente, y E_B^s, E_B^u los espacios estable e inestable de B respectivamente.

Sean $V^s = E_A^s \cap V, V^u = E_A^u \cap V, U^s = E_B^s \cap U$ y $U^u = E_B^u \cap U$. Por continuidad $h^s : U^s \rightarrow V^s, h^u : U^u \rightarrow V^u$ y $h = h^s \oplus h^u$. Ahora, como A^s y $(A^u)^{-1}$ son contracciones, dado $x^s \in E_B^s$ existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $(B^s)^n(x^s) \in U^s$, y para $x^u \in E_B^u$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $(B^u)^{-m}(x^u) \in U^u$.

Extendemos h a todo $\mathbb{R} = E_A^s \oplus E_A^u$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\tilde{h}^s : E_B^s &\longrightarrow E_A^s \\ x^s &\longmapsto (A^s)^{-n} h(B^s)^n x^s\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{h}^u : E_B^u &\longrightarrow E_A^u \\ x^u &\longmapsto (A^u)^m h(B^u)^{-m} x^u\end{aligned}$$

Estas definiciones no dependen de la elección de m y n . Ya que $Ah = hB$ en U . Es claro que \tilde{h}^s extiende a h^s y \tilde{h}^u extiende a h^u . Definimos $\tilde{h} = \tilde{h}^s \oplus \tilde{h}^u$. Entonces \tilde{h} extiende a h . Como $Ah = A^s h^s \oplus A^u h^u$

$$A^s \tilde{h}^s x^s = A^s \left((A^s)^{-n} h(B^s)^n \right) x^s = \left((A^s)^{-(n-1)} h(B^s)^{n-1} \right) B^s x^s = \tilde{h}^s B^s x^s$$

Análogamente

$$A^u \tilde{h}^u x^u = A^u \left((A^u)^m h(B^u)^{-m} \right) x^u = \left((A^u)^{m+1} h(B^u)^{-(m+1)} \right) B^u x^u = \tilde{h}^u B^u x^u$$

Luego

$$A\tilde{h} = A^s \tilde{h}^s \oplus A^u \tilde{h}^u = \tilde{h}^s B^s \oplus \tilde{h}^u B^u = \tilde{h} B$$

Por lo tanto A y B son conjugados. \square

Proposición 2.4.3. Sean $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ isomorfismos hiperbólicos.

A es conjugado de B si y sólo si A^s es conjugado de B^s y A^u es conjugado de B^u .

Demostración. \Rightarrow) Sea $h : E_B^s \oplus E_B^u \rightarrow E_A^s \oplus E_A^u$ homeomorfismo tal que $Ah = hB$, equivalentemente $h^{-1}Ah = B$. Entonces, dados $x^s \in E_B^s$ y $x^u \in E_B^u$, por continuidad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (h^{-1} A^n h)(x^s) = \lim_{n \rightarrow \infty} (h^{-1} Ah)^n x^s = \lim_{n \rightarrow \infty} B^n x^s = 0$$

y

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} h^{-1} A^n h(x^u) = \lim_{n \rightarrow -\infty} (h^{-1} Ah)^n x^u = \lim_{n \rightarrow -\infty} B^n x^u = 0$$

por lo que $h|_{E_B^s} : E_B^s \rightarrow E_A^s$ y $h|_{E_B^u} : E_B^u \rightarrow E_A^u$.

Sean $h^s = h|_{E_B^s}$ y $h^u = h|_{E_B^u}$. Se sigue que $h^s B^s x^s = h B x^s = A h x^s = A^s h^s x^s$ y $h^u B^u x^u = h B x^u = A h x^u = A^u h^u x^u$. Por lo tanto A^s y B^s son conjugados, al igual que A^u y B^u .

\Leftarrow) Sean $h^s : E_B^s \rightarrow E_A^s$ y $h^u : E_B^u \rightarrow E_A^u$ homeomorfismos tales que $A^s h^s = h^s B^s$ y $A^u h^u = h^u B^u$. Definimos $h = h^s \oplus h^u$. Si $x \in \mathbb{R}$ con $x = x^s + x^u$ entonces

$$h B x = h^s B^s x^s + h^u B^u x^u = A^s h^s x^s + A^u h^u x^u = A h x$$

Por lo tanto A y B son conjugados. \square

Lema 2.4.4. Si hay $\alpha : [0, 1] \rightarrow \{A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) : A \text{ es isomorfismo hiperbólico}\}$ trayectoria continua que une A_1 con A_2 , entonces A_1 es conjugado de A_2 y por lo tanto tienen el mismo índice.

Demostración. Por la Proposición 2.4.2, para cada $C \in \alpha[0, 1]$, existe $\epsilon_C > 0$ tal que, para cada $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, si $\|B - C\| < \epsilon_C$, entonces B es conjugado de C . Al ser $\alpha[0, 1]$ compacto hay $\epsilon_1, \dots, \epsilon_r$ tales que, ordenados adecuadamente, satisfacen:

a A_2 . Donde es conjugado a A_1 si $\det(A) > 0$ o a A_2 si $\det(A) < 0$ donde

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & \dots & \\ & & & 2 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -2 & & & \\ & 2 & & \\ & & \dots & \\ & & & 2 \end{pmatrix}$$

Demostración. Como A es de índice 0, A^{-1} es de índice n . Notando que

$$(A_i)^{-1} = \begin{pmatrix} (-1)^{i+1} \frac{1}{2} & & & \\ & \frac{1}{2} & & \\ & & \dots & \\ & & & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Y dado que $\det(A)$ tiene el mismo signo que $\det(A^{-1})$. Por la proposición, tenemos que, si $\det(A) > 0$, entonces A^{-1} es conjugado a A_1^{-1} . Se sigue que A es conjugado a A_1 . El caso para $\det(A) < 0$ es análogo. \square

Sabemos que los difeomorfismos estructuralmente estables son, necesariamente, difeomorfismos cuyas singularidades son todas hiperbólicas. Por el Teorema de Grobman-Hartman, un difeomorfismo hiperbólico es localmente conjugado a su parte lineal, la cual es un isomorfismo hiperbólico. Así, basta describir el comportamiento de los isomorfismos hiperbólicos en una vecindad del origen.

Terminamos esta sección clasificando el comportamiento de los difeomorfismos en la vecindad de una singularidad hiperbólica.

Teorema 2.4.6. *Sea $f \in \text{Dif}^k(M)$ con $p \in M$ punto fijo hiperbólico de f .*

f en p es localmente conjugado en 0 a uno de los isomorfismos lineales $A_i^j \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Donde $n = \dim(M)$, $0 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq 4$

$$\begin{aligned} A_0^1 = A_0^2 &= \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & \dots & \\ & & & 2 \end{pmatrix} & A_0^3 = A_0^4 &= \begin{pmatrix} -2 & & & \\ & 2 & & \\ & & \dots & \\ & & & 2 \end{pmatrix} \\ A_i^1 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}Id_i & 0 & & \\ 0 & 2Id_{n-i} & & \end{pmatrix} & A_i^2 &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \\ 0 & \frac{1}{2}Id_{i-1} & & \\ 0 & 0 & 2Id_{n-i} & \end{pmatrix} \\ A_i^3 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}Id_i & 0 & 0 & \\ 0 & -2 & 0 & \\ 0 & 0 & 2Id_{n-i-1} & \end{pmatrix} & A_i^4 &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}Id_{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2Id_{n-i-1} \end{pmatrix} \\ A_n^1 = A_n^2 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & & \\ & \frac{1}{2} & & \\ & & \dots & \\ & & & \frac{1}{2} \end{pmatrix} & A_n^3 = A_n^4 &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & & & \\ & \frac{1}{2} & & \\ & & \dots & \\ & & & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Demostración. Por el Teorema de Grobman-Hartman, f en p es localmente conjugado a $A = df_p$ en 0. Si A tiene índice i , descomponiendo $A = A^s \oplus A^u$, por la proposición 2.4.5

$$A^s \text{ es conjugado a } \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & & \\ & \frac{1}{2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{2} \end{pmatrix} & \det(A^s) > 0 \\ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & & & \\ & \frac{1}{2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{2} \end{pmatrix} & \det(A^s) < 0 \end{cases}$$

$$A^u \text{ es conjugado a } \begin{cases} \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 2 \end{pmatrix} & \det(A^u) > 0 \\ \begin{pmatrix} -2 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 2 \end{pmatrix} & \det(A^u) < 0 \end{cases}$$

Luego, por la Proposición 2.4.3, concluimos que

$$A \text{ es conjugado a } \begin{cases} A_i^1 & \det(A^s) > 0, \det(A^u) > 0 \\ A_i^2 & \det(A^s) < 0, \det(A^u) > 0 \\ A_i^3 & \det(A^s) > 0, \det(A^u) < 0 \\ A_i^4 & \det(A^s) < 0, \det(A^u) < 0 \end{cases}$$

□

2.5. Variedad estable e inestable

Un isomorfismo hiperbólico A separa \mathbb{R}^n en dos subespacios vectoriales, $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$. De manera que $A^s = A|_{E^s}$ es una contracción y $A^u = A|_{E^u}$ es una expansión. Así, podemos caracterizar estos subespacios como $E^s = \{x \in \mathbb{R}^n : \lim_{n \rightarrow \infty} A^n(x) = 0\}$, análogamente $E^u = \{x \in \mathbb{R}^n : \lim_{n \rightarrow -\infty} A^n(x) = 0\}$. Por otro lado, sabemos que si p es una singularidad hiperbólica de $f \in \text{Dif}^k(M)$, entonces f es localmente conjugado a su parte lineal df_p . Por lo que es de esperar que las órbitas cercanas a p tengan un comportamiento similar. Es decir, buscamos extender los subespacios E^s y E^u a subvariedades $W^s, W^u \subseteq M$. De manera que, si h conjuga df_p y f , entonces h conjuga E^s con W^s y E^u con W^s .

Definición. Sea $f \in \text{Dif}^k(M)$ con $p \in M$ punto fijo hiperbólico de f . La variedad estable de f en p se define como el conjunto $W_f^s(p) = \{q \in M : p \in \omega(q)\}$. Análogamente definimos la variedad inestable de f en p como el conjunto $W_f^u(p) = \{q \in M : p \in \alpha(q)\}$.

A lo largo de esta sección justificaremos el nombre de variedad estable e inestable de estos conjuntos. Mostraremos primero, utilizando el Teorema de Grobman-Hartman, que son variedades topológicas. Por desgracia Grobman-Hartman no nos basta para mostrar que son subvariedades diferenciales de clase C^k . Analizaremos la estructura de $W_f^s(p)$ y $W_f^u(p)$ en una vecindad de p , y como son afectados bajo perturbaciones del difeomorfismo f .

Definición. Sean M variedad diferencial, $p \in M$ un punto fijo hiperbólico de $f \in \text{Dif}^k(M)$, y $r > 0$. Definimos la variedad estable local de f en p como el conjunto $W_{f,r}^s = \{q \in B_r^M(p) : \forall n \geq 0 \ f^n(q) \in B_r^M(p)\}$. Análogamente, definimos la variedad inestable local de f en p como $W_{f,r}^u = \{q \in B_r^M(p) : \forall n \geq 0 \ f^{-n}(q) \in B_r^M(p)\}$.

Decimos que $F : N \rightarrow M$ es una inmersión topológica si F es continua y $\forall x \in N$ hay $V \subseteq N$ vecindad abierta de x tal que $F|_V$ es un homeomorfismo a su imagen (donde $F[V] \subseteq M$ tiene la topología relativa). En este caso $F[N] \subseteq M$ es una subvariedad topológica inmersa. Decimos que $F : N \rightarrow M$ es un encaje topológico si F es una inmersión topológica y F es un homeomorfismo a su imagen (con $F[M] \subseteq M$ dotado con la topología relativa).

De aquí en adelante omitiremos el subíndice f de las variedades estable e inestable a menos que pueda haber confusión.

Mostraremos a continuación que las variedades estable e inestable son, en efecto, variedades topológicas. La demostración fue tomada del libro de J. Palis y W. De Melo [5].

Proposición 2.5.1. *Hay $r > 0$ tal que*

- 1) $W_r^s(p) \subseteq W^s(p)$, $W_r^u(p) \subseteq W^u(p)$.
- 2) $W_r^s(p)$ (respectivamente $W_r^u(p)$) es un disco topológico encajado en M con dimensión igual al subespacio estable (respectivamente inestable) de $A = df_p$. Es decir, hay

$$F_s : D \subseteq E^s \rightarrow M \text{ encaje topológico tal que } F_s[D] = W_r^s(p)$$

$$F_u : D \subseteq E^u \rightarrow M \text{ encaje topológico tal que } F_u[D] = W_r^u(p)$$

- 3) $W^s(p) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}[W_r^s(p)]$, y $W^u(p) = \bigcup_{n \geq 0} f^n[W_r^u(p)]$. Y por lo tanto hay $\varphi : E^s \rightarrow M$ y $\varphi : E^u \rightarrow M$ inmersiones topológicas tales que $\varphi_s[E^s] = W^s(p)$ y $\varphi_u[E^u] = W^u(p)$.

Donde E^u , E^s son los espacios estable e inestable de $A = df_p$.

Demostración. 1) y 2): Por el Teorema de Grobman - Hartman, hay $U \subseteq T_p M$ vecindad abierta del origen, $r > 0$ y $h : B_r^M(p) \rightarrow U$ homeomorfismo tal que $hf = Ah$. Luego, si $x \in U$ satisface que $\forall n \geq 0 \ A^n(x) \in U$, entonces $x \in E^s$ y por lo tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n(x) = 0$. Sea $q \in W_r^s(p)$. Para cada $n \geq 0 \ f^n(q) \in B_r^M(p)$. Luego, $\forall n \geq 0 \ hf^n(q) = A^n h(q) \in U$. Por lo tanto $h(q) \in E^s \cap U$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n h(q) = 0$. Como $f = h^{-1}Ah$, por continuidad tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(q) = p$. Esto es, $W_r^s(p) \subseteq (p)$. Lo que prueba 2).

3): La variedad estable $W^s(p)$ es invariante bajo f , en el sentido de $f[W^s(p)] = W^s(p)$. Como $W_r^s(p) \subseteq W^s(p)$, entonces $\forall n \geq 0 \ f^{-n}[W_r^s(p)] \subseteq W^s(p)$. Así, tenemos la siguiente contención: $\bigcup_{n \geq 0} f^{-n}[W_r^s(p)] \subseteq W^s(p)$.

Ahora, si $q \in W^s(p)$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(q) = p$, por lo que hay un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_0}(q) \in W_r^s(p)$. Por lo tanto $q \in f^{-n_0}[W_r^s(p)] \subseteq \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}[W_r^s(p)]$. Con lo que tenemos la otra contención y podemos concluir que $\bigcup_{n \geq 0} f^{-n}[W_r^s(p)] = W^s(p)$.

4): Definamos ahora $\varphi_s : E^s \rightarrow M$ como sigue: Dado $x \in E^s$ existe un $n_x \in \mathbb{N}$ tal que $A^{n_x}(x) \in U$, donde U es la vecindad dada en 1). Tomamos $h : B_r^M(p) \rightarrow U$ el homeomorfismo que conjugue f con A en U , $hf = Ah$. Definimos $\varphi_s = f^{-n_x} h^{-1} A^{n_x}(x)$. La aplicación φ_s no depende de la elección de n_x , ya que $hf = Ah$. Es un homeomorfismo pues f^m, h^{-1} y A^m lo son $\forall m \in \mathbb{N}$. Por 2) $\varphi_s[E^s] = W^s(p)$, ya que $\varphi_s[E^s \cap U] = W_r^s(p)$.

Notando que $W_f^u(p) = W_{f^{-1}}^s(p)$ y $W_{f,r}^u(p) = W_{f^{-1},r}^s(p)$. Se dan las demostraciones respectivas para $W_f^u(p)$ y $W_{f,r}^u(p)$. \square

Observación. Para $f \in \text{Dif}^k(M)$ con $p \in M$ punto fijo hiperbólico.

- Como $W_f^u(p) = W_{f^{-1}}^s(p)$ basta demostrar las afirmaciones para $W_f^s(p)$ para tener una afirmación análoga para $W_f^u(p)$.
- Aunque $W_r^s(p)$ sea un disco encajado topológicamente, $W^s(p)$ no necesariamente es una subvariedad encajada en M .
- Es importante recalcar que el Teorema de Grobman-Hartman sólo nos da una estructura de variedad topológica para $W^s(p)$. A continuación daremos un teorema, cuya demostración es independiente al Teorema de Grobman-Hartman, donde $W_f^s(p)$ tiene estructura de variedad diferenciable C^k inmersa en M , con $f \in \text{Dif}^k(M)$.

Definición. Dadas $S', S \subseteq M$ subvariedades C^k . Para $\epsilon > 0$, se dice que S y S' están $C^k - \epsilon$ próximas si hay $h : S \rightarrow S'$ difeomorfismo C^k tal que $\|i'h - i\|_k < \epsilon$. Es decir i' e i están $C^k - \epsilon$ próximas en la topología C^k . Donde $i : S \rightarrow M, i' : S' \rightarrow M$ son las inclusiones.

Teorema 2.5.2 (Teorema de la Variedad Estable). Sea $p \in M$ punto fijo hiperbólico de $f \in \text{Dif}^k(M)$.

- 1) $W^s(p)$ es una variedad diferencial C^k inmersa en M y $T_p W^s(p) = E^s$, donde E^s es el espacio estable de df_p .
- 2) Para $D_f \subseteq W_f^s(p)$ disco encajado, con $\dim D_f = \dim W_f^s(p)$ y $p \in D_f$. Sean $N \subseteq \text{Dif}^k(M)$ y $U \subseteq M$ vecindades abiertas de f y p respectivamente tales que $\forall g \in N$ g tiene un único punto fijo $p_g \in U$, el cual es hiperbólico. Para cada $\epsilon > 0$ existe $\tilde{N} \subseteq N$ tal que $\forall g \in \tilde{N}$ hay $D_g \subseteq W_g^s(p_g)$ disco encajado $C^k - \epsilon$ próximo de D_f .
- 3) Existen $B_\beta^s(0) \subseteq E^s$ bola abierta y $\varphi_s : B_\beta^s \rightarrow E^u$ aplicación C^k . De manera que, para algún $r > 0$, $W_\beta^s(p) = \text{graf}(\varphi_s)$. Donde $E^s, E^u \subseteq T_p M$ son los espacios estable e inestable de df_p .

La prueba es debida a Irwin, la cual fue publicada en [2]. Nos basaremos en la presentación hecha por J. Palis y W. De Melo en [5].

Demostraremos que la variedad estable $W_{f,r}^s(p)$ es la gráfica de una función C^k y por lo tanto $W_f^s(p) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}[W_{f,r}^s(p)]$ es una variedad C^k . Por lo que podemos restringirnos al caso $f : V \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ con $0 \in V$ única singularidad de f , la cual es hiperbólica. Sea

$A = df_0$ con $\mathbb{R}^m = E^s \oplus E^u \cong E^s \times E^u$, y $\|\cdot\|_s, \|\cdot\|_u$ normas de E^s y E^u respectivamente tales que $\|A^s\|_s < a < 1$ y $\|(A^u)^{-1}\|_u < a < 1$. Tomamos $\|\cdot\| = \max\{\|\cdot\|_s, \|\cdot\|_u\}$ norma en \mathbb{R}^m . Hay $\beta > 0$ tal que, para $0 < \epsilon < 1/(2(1-a))$, en $\overline{B_{\beta}(0)}$ tenemos que $f = A + \phi$ con $\phi(0) = 0$ y $\|\phi\| < \epsilon$.

Para demostrar el Teorema de la Variedad Estable, haremos uso del siguiente Lema

Lema 2.5.3. Sean $z = (x_s, x_u) \in E^s \times E^u$, $z' = (x'_s, x'_u) \in E^s \times E^u$. Si z y z' satisfacen $\forall n \geq 0$ $f^n(z), f^n(z') \in B_{\beta}(p)$, entonces $z = z'$.

Demostración. Consideremos, en $\overline{B_{\beta}(0)}$, los puntos $y = (y_s, y_u)$ y $y' = (y'_s, y'_u)$ tales que $\|y_s - y'_s\| \leq \|y_u - y'_u\|$. Afirmamos lo siguiente:

1. $\|f^u(y) - f^u(y')\| \geq \frac{1}{a-\epsilon}\|y_u - y'_u\|$
2. $\|f^s(y) - f^s(y')\| \leq \|f^u(y) - f^u(y')\|$

Dado que $f = A + \phi$, tenemos la igualdad: $f^u(y) - f^u(y') = A^u(y) - A^u(y') + \phi^u(y) - \phi^u(y')$, con $\|A^u\| \geq 1/a$ y $\|\phi^u\| < \epsilon$. Entonces

$$\begin{aligned} \|f^u(y) - f^u(y')\| &\geq \|A^u(y) - A^u(y')\| - \|\phi^u(y) - \phi^u(y')\| \\ &\geq \|A^u\|\|y_u - y'_u\| - \|\phi^u\|\|y_u - y'_u\| \\ &\geq \frac{1}{a}\|y_u - y'_u\| - \epsilon\|y_u - y'_u\| \\ &= \left(\frac{1}{a} - \epsilon\right)\|y_u - y'_u\| \\ &\geq \|y_u - y'_u\| \end{aligned}$$

La última desigualdad la obtenemos escogiendo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, pues $a < 1$. Con esto probamos 1). De manera similar:

$$\begin{aligned} \|f^s(y) - f^s(y')\| &\leq \|A^s(y) - A^s(y')\| + \|\phi^s(y) - \phi^s(y')\| \\ &\leq a\|y_u - y'_u\| + \epsilon\|y_u - y'_u\| \\ &= (a + \epsilon)\|y_u - y'_u\| \\ &\leq \|y_u - y'_u\| \leq \|f^u(y) - f^u(y')\| \end{aligned}$$

Lo que prueba 2). De estas desigualdades se sigue que:

$$\|f(y) - f(y')\| \geq \|f^u(y) - f^u(y')\| \geq \left(\frac{1}{a} - \epsilon\right)\|y_u - y'_u\| = \left(\frac{1}{a} - \epsilon\right)\|y - y'\|$$

Sustituyendo y por $f^n(z)$, y' por $f^n(z')$, llegamos a que, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\|f^n(z) - f^n(z')\| \geq \left(\frac{1}{a} - \epsilon\right)^n \|z - z'\|$$

pero $1/a - \epsilon > 1$ y $f^n(z), f^n(z') \in \overline{B_{\beta}(0)}$. Tenemos entonces que $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/a - \epsilon)^n \rightarrow \infty$. Luego $\|z - z'\| = 0$, y por lo tanto $z = z'$ \square

Ahora probaremos el Teorema 2.5.2 (De La Variedad Estable):

Demostración. Sea $K = \{ \gamma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^m : \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(n) = 0 \}$ el conjunto de sucesiones en \mathbb{R}^m convergentes a 0 dotado de la norma $\|\gamma\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\gamma(n)\|$. Tomamos $G \subseteq K$ definido por $\{ \gamma \in K : \forall n \geq 0, \gamma(n) \in B_{\tilde{\beta}}(0) \}$. Es decir: $\gamma \in G \iff \|\gamma\| < \tilde{\beta}$.

Afirmamos que G es abierto en K :

Sea $\gamma \in G$. Como $\|\gamma\| < \tilde{\beta}$, tomando $\delta = \tilde{\beta} - \|\gamma\| > 0$, entonces $B_{\delta}^K(\gamma) \subseteq G$.

Para motivar la siguiente definición, supongamos que para algún $z \in \overline{B_{\tilde{\beta}}(0)}$ hay $\gamma \in G$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\gamma(n) = f^n(z)$, entonces

$$\gamma(n) = A^n(z) + \sum_{i=0}^{n-1} A^{n-1-i} \phi(\gamma(i))$$

Para probar la fórmula anterior, mostraremos por inducción que para cada $x \in \mathbb{R}^m$ $f^n(x) = A^n(x) + \sum_{i=0}^{n-1} A^{n-1-i} \phi(f^i(x))$.

Para $n = 1$, por definición sabemos que $f(x) = A(x) + \phi(x)$.

Supongamos ahora que, dada cualquier $x \in \mathbb{R}^m$ $f^k(x) = A^k(x) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} \phi(f^i(x))$. Entonces, para $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} f^{k+1}(x) &= f^k(f(x)) = A^k(f(x)) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} \phi(f^i(f(x))) \\ &= A^k(A(x) + \phi(x)) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} \phi(f^{i+1}(x)) \\ &= A^{k+1}(x) + A^k \phi(x) + \sum_{j=1}^k A^{k-j} \phi(f^j(x)) \quad (j = i + 1) \\ &= A^{k+1}(x) + \sum_{j=0}^k A^{k-j} \phi(f^j(x)) \end{aligned}$$

Tomando $x = z$ y sustituyendo $f^n(z)$ por $\gamma(n)$ llegamos a la fórmula que queríamos: $\gamma(n) = A^n(z) + \sum_{i=0}^{n-1} A^{n-1-i} \phi(\gamma(i))$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Así, la componente inestable de $\gamma(n)$ es de la forma

$$\gamma(n)_u = (A^u)^n(z_u) + \sum_{i=0}^{n-1} (A^u)^{n-1-i} \phi(\gamma(i)) = (A^u)^n \left(z_u + \sum_{i=0}^{n-1} (A^u)^{-1-i} \phi^u(\gamma(i)) \right)$$

Como A^u es una expansión y $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(n) = 0$ entonces $z_u + \sum_{i=0}^{n-1} (A^u)^{-1-i} \phi^u(\gamma(i)) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Equivalentemente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} (A^u)^{-1-i} \phi^u(\gamma(i)) \right) = -z_u$$

Sean $B_{\tilde{\beta}}^s = B_{\tilde{\beta}} \cap E^s$ y $\Omega = \{ \psi \in C^k(B_{\tilde{\beta}}, \mathbb{R}^m) : \psi(0) = 0 \text{ y } \|D\psi\| < \epsilon \}$. Definimos $F : B_{\tilde{\beta}}^s \times G \times \Omega \rightarrow K$ por

$$F(x, \gamma, \psi)(n) = \gamma(n) - \left((A^s)^n x + \sum_{i=0}^{n-1} (A^s)^{n-1-i} \psi^s(\gamma(i)), - \sum_{i=n}^{\infty} (A^u)^{n-1-i} \psi^u(\gamma(i)) \right)$$

Buscamos, usando el Teorema de la función implícita, una aplicación de clase C^k $\varphi : B_\beta^s \times \Omega \rightarrow G$ tal que $F(x, \varphi(x, \psi), \psi) = 0 \quad \forall x \in B_\beta^s \quad \forall \psi \in \Omega$, para algún $\beta > 0$. Tal φ satisfará que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(x, \psi)(n) = (A + \psi)^n(x, h(x))$, con $h \in C^k$. En particular, si $\psi = \phi$, entonces $\varphi(x, \phi)(n) = f^n(x, h(x))$. Por lo tanto: $z \in \text{graf}(h) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z) = 0$. Es decir: $\text{graf}(h) = W_{f, \tilde{\beta}}^s(0)$.

Primero mostraremos que las siguientes afirmaciones son verdaderas:

- 1) $F(x, \gamma, \psi) \in K$ (F está bien definida).
- 2) $D_1 F(x, \gamma, \psi)$ existe y es continua.
- 3) $D_2 F(x, \gamma, \psi)u(n) = u(n) + \left(\sum_{i=0}^{n-1} (A^s)^{n-1-i} D\psi^s(\gamma(y))u(i), - \sum_{i=n}^{\infty} D\psi^u(\gamma(i))u(i) \right)$.
- 4) $D_2 F(0, 0, \psi) = \text{Id}$.
- 5) $D_3 F(x, \gamma, \psi)$ es de clase C^∞ , en particular continua.

1: Como $0 < a < 1$ y $\sum_{j=0}^{\infty} a^j = (1-a)^{-1}$. Recordando que $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(n) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (A^u)^{-n}x = 0$ y $\|(A^u)^{-1}\| < a$, tenemos la siguiente desigualdad:

$$\left\| \sum_{i=n}^{\infty} (A^u)^{n-1-i} \psi^u(\gamma(i)) \right\| \leq (1-a)^{-1} \sup_{i \geq n} \|\psi^u(\gamma(i))\|$$

Al ser ψ^u continua, para cada $\epsilon > 0$ hay $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sup_{i \geq n_0} \|\psi^u(\gamma(i))\| < \epsilon$. Luego:

$$\left\| \sum_{i=n}^{\infty} (A^u)^{n-1-i} \psi^u(\gamma(i)) \right\| < \frac{\epsilon}{1-a}$$

Por otro lado, como $\|A^s\| < a$, entonces para $0 \leq m \leq n$ tenemos

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=0}^{n-1} (A^s)^{n-1-i} \psi^s(\gamma(i)) \right\| &\leq \sum_{i=0}^{m-1} \|(A^s)^{n-1-i} \psi^s(\gamma(i))\| + \sum_{i=m}^{n-1} \|(A^s)^{n-1-i} \psi^s(\gamma(i))\| \\ &\leq \frac{a^{n-m} \|\psi\|}{1-a} + \frac{\sup_{i \geq m} \|\psi^s(\gamma(i))\|}{1-a} \end{aligned}$$

Para cada $\epsilon > 0$ hay $m_0, n_1 \in \mathbb{N}$ tales que

$$\sup_{i \geq m_0} \|\psi^s(\gamma(i))\| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{y} \quad \frac{a^{n_1-m_0} \|\psi\|}{(1-a)} < \frac{\epsilon}{2}$$

y por lo tanto:

$$\left\| \sum_{i=0}^{n_1-1} (A^s)^{n_1-1-i} \psi^s(\gamma(i)) \right\| < \epsilon$$

Se sigue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} (A^s)^{n-1-i} \psi^s(\gamma(i)), - \sum_{i=n}^{\infty} (A^u)^{n-1-i} \psi^u(\gamma(i)) \right) = 0$$

Por lo tanto $F(x, \gamma, \psi)(n) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Es decir, $F(x, \gamma, \psi) \in K$.

2) Buscamos una función $L(x, \gamma, \psi)$ lineal sobre x tal que, si $|h| < \delta$ entonces:

$$\|F(x+h, \gamma, \psi) - F(x, \gamma, \psi) - L(x, \gamma, \psi)(h)\| < \epsilon|h|$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, al ser $(A^s)^n$ lineal,

$$F(x+h, \gamma, \psi)(n) = F(x, \gamma, \psi) + ((A^s)^n h, 0)$$

Por lo tanto $D_1 F(x, \gamma, \psi)(u)(n) = ((A^s), 0)$, la cual es continua.

3) Sean $\epsilon > 0$ y $u \in K$ con $\|u\| < \delta$. Restando $F(x, \gamma, \psi)(n)$ de $F(x, \gamma + u, \psi)(n)$ obtenemos por la linealidad de $(A^s)^n$ y $(A^u)^n$ que

$$\begin{aligned} u(n) + \left(\sum_{i=0}^{n-1} (A^s)^{n-1-i} (\psi^s(\gamma+u)(i) - \psi^s(\gamma(i))), \right. \\ \left. - \sum_{i=n}^{\infty} (A^u)^{n-1-i} (\psi^u(\gamma(i)+u(i)) - \psi^u(\gamma(i))) \right) \end{aligned}$$

Restando ahora $T(u)(n) = u(n) + \left(\sum_{i=0}^{n-1} (A^s)^{n-1-i} D\psi^s(\gamma(y))u(i), - \sum_{i=n}^{\infty} D\psi^u(\gamma(i))u(i) \right)$.

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=0}^{n-1} (A^s)^{n-1-i} (\psi^s(\gamma+u)(i) - \psi^s(\gamma(i)) - D\psi(\gamma(i))u(i)), \right. \\ \left. - \sum_{i=n}^{\infty} (A^u)^{n-1-i} (\psi^u(\gamma+u)(i) - \psi^u(\gamma(i)) - D\psi(\gamma(i))u(i)) \right) \end{aligned}$$

Sea $b = \sum_{i=0}^{n-1} \|(A^s)^{n-1-i}\|$. Tenemos entonces que $\|(A^u)^{-1}\| \leq a < 1$, por lo que la serie converge y $\sum_{i=n}^{\infty} \|(A^u)^{n-1-i}\| \leq (1-a)^{-1}$. Sea $c = \max\{b, (1-a)^{-1}\}$. Por definición de diferencial, hay $\delta > 0$ tal que $\|\psi^j((\gamma+u)(i)) - \psi^j(\gamma(i)) - D\psi^j(\gamma(i))u(i)\| < \epsilon\|u\|/(2c)$, donde $j \in \{s, u\}$. Se sigue que

$$\|F(x, \gamma+u, \psi)(n) - F(x, \gamma, \psi)(n) - T(u)(n)\| < \frac{b}{2c}\epsilon\|u\| + \frac{(1-a)^{-1}}{2c}\epsilon\|u\| \leq \epsilon\|u\|$$

Por lo tanto $D_2 F(x, \gamma, \psi)(u)(n) = T(u)(n)$ que es continua.

4) Recordando que $D\psi(0) = 0$, al ser A^s, A^u lineales:

$$\begin{aligned} D_2 F(0, 0, \psi)(u)(n) &= u(n) + \left(\sum_{i=0}^{n-1} (A^s)^{n-1-i} D\psi^s(0)(u(i)), - \sum_{i=n}^{\infty} (A^u)^{n-1-i} D\psi^u(0)(u(i)) \right) \\ &= u(n) + (0, 0) = u(n) \end{aligned}$$

Se sigue que $D_2 F(0, 0, \psi) = Id_K$.

5) Notemos primero que si $\psi, \varphi \in \Omega$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces, al ser $(A^s)^{n-1-i}$ lineal, tenemos:

$$(A^s)^{n-1-i}(\psi + c\varphi)(\gamma(i)) = (A^s)^{n-1-i}\psi(\gamma(i)) + c(A^s)^{n-1-i}\varphi(\gamma(i))$$

De la linealidad de $(A^u)^{n-1-i}$ y la convergencia uniforme de $\sum_{i=n}^{\infty} (A^u)^{n-1-i}(\psi + c\varphi)(\gamma(i))$ se sigue que

$$\sum_{i=n}^{\infty} (A^u)^{n-1-i}(\psi + c\varphi)(\gamma(i)) = \sum_{i=n}^{\infty} (A^u)^{n-1-i}\psi(\gamma(i)) + c \sum_{i=n}^{\infty} (A^u)^{n-1-i}\varphi(\gamma(i))$$

Concluimos que $F(x, \gamma, \psi)$ es afín respecto a ψ y por lo tanto $D_3F(x, \gamma, \psi)$ existe y es continua. De hecho

$$D_3F(x, \gamma, \psi)\varphi = \left(\sum_{i=0}^{n-1} (A^s)^{n-1-i} \psi(\gamma(i)), - \sum_{i=n}^{\infty} (A^u)^{n-1-i} \varphi^u(\gamma(i)) \right)$$

Por lo tanto F es de clase C^1 .

F de clase C^1 y $D_2F(0, 0, \psi) = \text{Id}_K$ implica que, por el Teorema de la función implícita, para cada $\psi \in \Omega$ hay $\beta > 0$, $B_\beta^s \subseteq E^s$ bola abierta y $h_\psi : B_\beta^s \rightarrow G$ tal que $h_\psi(0) = 0$ y $\forall x \in B_\beta^s$ $F(x, (h_\psi(x), \psi)) = 0$. Es decir, si $x \in B_\beta^s$

$$\begin{aligned} 0 = F(x, h_\psi(x), \psi)(0) &= h_\psi(x)(0) - \left((A^s)^0 x + \sum_{i=0}^{n-1} (A^s)^{0-1-i} \psi^s(h_\psi(x)(0)), \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=0}^{\infty} (A^u)^{0-1-i} \psi^u(h_\psi(x)(0)) \right) \end{aligned}$$

Por lo tanto $h_\psi(x)(0) = \left(x, \sum_{i=0}^{\infty} (A^u)^{-1-i} \psi^u(h_\psi(x)(0)) \right)$

Sean $\theta : G \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida por $\theta(\gamma) = \gamma(0)$ y $\pi_2 : \mathbb{R}^m \rightarrow E^u$ la proyección canónica. Definimos $g_\psi = \pi_2 \circ \theta \circ h_\psi : B_\beta^s \rightarrow E^s$, es decir, $g_\psi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (A^u)^{-1-i} \psi^u(h_\psi(x)(0))$. g_ψ es de clase C^k pues π_2 , θ y h_ψ lo son. Por otro lado

$$\begin{aligned} 0 = F(x, h_\psi(x), \psi)(n) &= h_\psi(x)(n) - \left((A^s)^n x + \sum_{i=0}^{n-1} (A^s)^{n-1-i} \psi^s(h_\psi(x)(i)), \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=n}^{\infty} (A^u)^{n-1-i} \psi^u(h_\psi(x)(i)) \right) \end{aligned}$$

entonces

$$h_\psi(x)(n) = \left((A^s)^n x + \sum_{i=0}^{\infty} (A^s)^{n-1-i} \psi^s(h_\psi(x)(i)), - \sum_{i=n}^{\infty} (A^u)^{n-1-i} \psi^u(h_\psi(x)(n)) \right)$$

Si $f_\psi \in C^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ es de la forma $f_\psi = A + \psi$

$$\begin{aligned} f_\psi(h_\psi(x)(n)) &= (A + \psi)(h_\psi(x)(n)) \\ &= \left((A^s)^{n+1} x + \sum_{i=0}^{\infty} (A^s)^{n-i} \psi^s(h_\psi(x)(i)), - \sum_{i=n}^{\infty} (A^u)^{n-i} \psi^u(h_\psi(x)(n)) \right) \\ &\quad + \left(\psi^s(h_\psi(x)(n)), \psi^u(h_\psi(x)(n)) \right) \\ &= \left((A^s)^{n+1} x + \sum_{i=0}^n (A^s)^{n-i} \psi^s(h_\psi(x)(i)), - \sum_{i=n+1}^{\infty} (A^u)^{n-i} \psi^u(h_\psi(x)(n)) \right) \\ &= h_\psi(x)(n+1) \end{aligned}$$

Como $f_\psi^0(x, g_\psi(x)) = h_\psi(x)(0)$ concluimos por inducción que, para cada $n \in \mathbb{N}$, se da la igualdad $h_\psi(x)(n) = f_\psi^n(x, g_\psi(x))$. Luego, $z \in \text{graf}(g_\psi)$ implica $\lim_{n \rightarrow \infty} f_\psi^n(z) = 0$. Por el Lema 2.5.3, si $O_{g_\psi}^+(z) \subseteq B_\beta(0)$, entonces $z \in \text{graf}(g_\psi)$. Por lo tanto tenemos la contención

$f_\psi[\text{graf}(g_\psi)] \subseteq \text{graf}(g_\psi)$ y $W_{f_\psi, r}^s(0) = \text{graf}(g_\psi)$, lo que muestra el tercer inciso. Con esto concluimos que $W_{f_\psi, r}^s(0)$ es variedad C^k y por lo tanto también lo es $W_{f_\psi}^s(0)$. Como $f = A + \phi$, con $\phi \in \Omega$, si g está $C^k - \epsilon$ próximo a f , entonces g es de la forma $g = A + \psi$ con $\psi \in \Omega$. Por la continuidad de F esto implica que h_ϕ está $C^k - \epsilon$ próxima a h_ψ . Por lo que $\text{graf}(g_\phi) = W_{f_\phi, r}^s(0)$ está $C^k - \epsilon$ próxima a $\text{graf}(g_\psi) = W_{g_\psi, r}^s(0)$, lo que demuestra el inciso 2) del Teorema.

Sólo falta verificar que $T_0W_f^s(0) = E^s$, para esto basta mostrar que $Dg_\psi(0) = 0$. Como $F(x, h_\psi(x), \psi) = 0$, aplicando la regla de la cadena llegamos a la igualdad:

$$0 = D_1F(x, h_\psi(x), \psi) + D_2F(x, h_\psi(x), \psi)Dh_\psi(x)$$

pero $D_2F(0, h_\psi(x), \psi) = \text{Id}_K$ y $Dh_\psi(0) = -D_1F(0, 0, \psi)$. Tomando $v \in E^s$

$$Dh_\psi(0)v = -D_1F(0, 0, \psi)v = u$$

donde $u(n) = ((A^s)^n, 0)$ y como $g_\psi = \pi_2 \circ \theta \circ h_\psi$ entonces $Dg_\psi(0)v = \pi_2 \circ \theta \circ Dh_\psi(0)v = 0$, con lo que concluimos la demostración. \square

Mostraremos ahora los resultados respectivos para campos vectoriales. De manera análoga se definen las variedades estables e inestables de campos vectoriales. Utilizando el Teorema de la Variedad Estable para difeomorfismos, es fácil mostrar que en efecto son variedades diferenciales C^k .

Definición. Sea $X \in \mathfrak{X}^k(M)$ con $p \in M$ singularidad hiperbólica. Se define la variedad estable de X en p como $W_X^s(p) = \{q \in M : p \in \omega(q)\}$. La variedad inestable de X en p como $W_X^u(p) = \{q \in M : p \in \omega(q)\}$.

Recordando que $f = X_1$ es un difeomorfismo con $p \in M$ punto fijo hiperbólico, es fácil ver que $W_f^s(p) = W_X^s(p)$. Para cada $q \in M$ $\lim_{t \rightarrow \infty} X_t(q) = p$ implica $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(q) = p$. Por lo tanto $W_X^s(p) \subseteq W_f^s(p)$. Ahora, tomando $U \subseteq M$ vecindad abierta de p , como $X(p) = 0$ hay $V \subseteq M$ vecindad de p tal que $X_t[V] \subseteq U$ con $t \in [0, 1]$. Sea $q \in W_f^s(p)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ $f^n(q) \in V$. Por lo que $X_t(f^n(q)) \in U$. Tomando ahora $s \geq n_0$, se sigue que $X_s(q) \in U$ y por lo tanto $\lim_{t \rightarrow \infty} X_t(q) = p$. Es decir, $q \in W_X^s(p)$, con lo que tenemos la otra contención.

Podemos entonces extender los resultados de variedades estables e inestables de difeomorfismos hiperbólicos C^k a variedades estables e inestables de campos hiperbólicos C^k . En particular, tenemos el siguiente Teorema

Teorema 2.5.4 (Teorema de la variedad estable para campos vectoriales). *Sea $p \in M$ singularidad hiperbólica de $X \in \mathfrak{X}^k(M)$.*

- 1) $W^s(p)$ es una variedad diferencial C^k inmersa en M , y $T_pW^s(p) = E^s$, donde E^s es el espacio estable de $DX(p)$.
- 2) Para $D_X \subseteq W_X^s(p)$ disco encajado, con $\dim D_X = \dim W_X^s(p)$ y $p \in D_X$. Sean $N \subseteq \mathfrak{X}^k(M)$ y $U \subseteq M$ vecindades abiertas de X y p respectivamente, tales que $\forall Y \in N$ Y tiene una única singularidad $p_Y \in U$, la cual es hiperbólica. Para cada $\epsilon > 0$ existe $\tilde{N} \subseteq N$ tal que $\forall Y \in \tilde{N}$ hay $D_Y \subseteq W_Y^s(p_Y)$ disco encajado $C^k - \epsilon$ próximo a D_X .

2.6. λ -Lema

Sea $f \in C^k(V)$ con $V \subseteq \mathbb{R}^n$ vecindad abierta del origen. Sea 0 punto fijo hiperbólico de f . Consideremos $A = df_0$ y $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$. Por el Teorema de la Variedad Estable, dada $\beta > 0$, existen $B_\beta^s \subseteq E^s$, $B_\beta^u \subseteq E^u$ vecindades abiertas del origen, y funciones C^k $\varphi_s : B_\beta^s \rightarrow E^s$ y $\varphi_u : B_\beta^u \rightarrow E^u$ tales que $W_{f,\beta}^s(0) = \text{graf}(\varphi_s)$ y $W_{f,\beta}^u(0) = \text{graf}(\varphi_u)$, con $\varphi_s(0) = 0 = \varphi_u(0)$ y $D\varphi_s(0) = 0 = D\varphi_u(0)$. Definimos

$$\varphi : B_\beta^s \oplus B_\beta^u \rightarrow E^s \oplus E^u \quad \varphi(x_s, x_u) \mapsto (x_s - \varphi_u(x_u), x_u - \varphi_s(x_s))$$

Entonces φ es una función C^k y $D\varphi(0) = \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$. Por lo tanto φ es un difeomorfismo C^k en una vecindad del origen.

Fijemonos ahora en $\tilde{f} = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$. \tilde{f} es un difeomorfismo en una vecindad del origen y cumple que $\tilde{f}(0) = 0$, $D\tilde{f}(0) = Df(0) = A$. Luego, hay $\epsilon > 0$ tal que $W_{\tilde{f},\epsilon}^s(0) = B_\epsilon^s \subseteq E^s$. Esto se sigue de que, para $x \in B_\epsilon^s$ $x = (x_s, 0)$:

$$\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}(x_s, 0) = \varphi \circ f(x_s + \varphi_u(0), 0 + \varphi_s(x_s)) = \varphi \circ f(x_s, \varphi_s(x_s))$$

pero $\text{graf}(\varphi_s) = W_{f,\beta}^s(0)$, es decir $\varphi_s^{-1}(x_s, 0) \in W_{f,\beta}^s(0)$. Se sigue que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}^n(x_s, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi \circ f^n \circ \varphi^{-1}(x_s, 0) = 0$$

Por lo tanto $B_\epsilon^s(0) \subseteq W_{\tilde{f}}^s(0)$. Al ser B_ϵ^s abierto de E^s con $\dim(E^s) = \dim(W_{\tilde{f}}^s(0))$ entonces B_ϵ^s es abierto de $W_{\tilde{f}}^s(0)$. Luego $W_{\tilde{f},\epsilon}^s(0) = B_\epsilon^s \subseteq E^s$. Análogamente $W_{\tilde{f},\epsilon}^u(0) = B_\epsilon^u \subseteq E^u$. Por lo que siempre podemos suponer que $W_{f,\epsilon}^s(0) \subseteq E^s$ y $W_{f,\epsilon}^u \subseteq E^u$.

Definiremos ahora algunas nociones que nos serán de utilidad.

Sea $f \in \text{Dir}^k(\mathbb{R}^n)$ con 0 $\in \mathbb{R}^n$ punto fijo hiperbólico de f y $A = df_0$ con $\|\cdot\|$ norma de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ y $a \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|A^s\| \leq a < 1$ y $\|(A^u)^{-1}\| \leq a < 1$. Sean

$$\begin{aligned} f^s : B_r^s &\rightarrow E^s & f^s &= f|_{W_\beta^s(0)} \\ f^u : B_r^u &\rightarrow E^u & f^u &= f|_{W_\beta^u(0)} \end{aligned}$$

Tomando r suficientemente pequeño, al ser A^s contracción y A^u expansión, f^s es también una contracción y f^u una expansión.

Definición. Sea $B^s \subseteq B_r^s$ bola abierta centrada en el origen, entonces $f[\partial B^s] \subseteq B^s$, el conjunto $G_f^s = B^s - f[B^s]$ es un dominio fundamental de $W_f^s(0)$.

Análogamente, tomando $B^u \subseteq B_r^u$, $f^{-1}[\partial B^u] \subseteq B^u$. Decimos que $G_f^u(0) = \overline{B^u - f^{-1}[B^u]}$ es un dominio fundamental de $W_f^u(0)$.

Definición. Sea $G_f^s(0)$ un dominio fundamental de $W_f^s(0)$. Decimos que $N_f^s(0)$ es una vecindad fundamental para $W_f^s(0)$ si $G_f^s(0) \subseteq N_f^s(0) \subseteq \mathbb{R}^n$ es un abierto de \mathbb{R}^n y $N_f^s(0) \cap W_f^u(0) = \emptyset$.

Análogamente $N_f^u(0)$ es una vecindad fundamental para $W_f^u(0)$ si $G_f^u(0) \subseteq N_f^u(0) \subseteq \mathbb{R}^n$, es abierto en \mathbb{R}^n y $N_f^u(0) \cap W_f^s(0) = \emptyset$.

Recordemos que $O(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$. La importancia de los dominios fundamentales y vecindades fundamentales reside en las siguientes observaciones:

$$x \in W^s(0) - \{0\} \implies 1 \leq |O(x) \cap G^s(0)| \leq 2 \implies \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n[G^s(0)] = W_f^s(0)$$

y

$$x \in \text{int}(G^s(0)) \implies \forall n \in \mathbb{Z} - \{0\} \quad f^n(x) \notin G^s(0)$$

En otras palabras, dado un dominio fundamental $G^s(0)$ de $W^s(0)$, si $x \in W^s(0)$ entonces x tiene un representante $f^n(x) \in G^s(0)$. El cual es único si y sólo si $f^n(x) \in \text{int}(G^s(0))$ y tiene exactamente dos si $f^n(x) \in \partial G^s(0)$ para alguna $n \in \mathbb{Z}$. Estas son las propiedades de que usaremos de los dominios fundamentales de $W^s(0)$ y $W^u(0)$, por lo que el radio de $B^s \subseteq B_r^s$ que se usa en la definición no altera los resultados que obtendremos.

A continuación mostraremos un Lema debido a J. Palis, quien lo probó a finales de los sesentas.

Lema 2.6.1 (λ -Lema (o Lema de inclinación)). Sean $f \in \text{Dif}^k(M)$ y $p \in M$ punto fijo hiperbólico de f . Sea $u = \dim W^u(p)$. Dada $q \in W^s(p) - \{p\}$, supongamos que hay $B \subseteq W^u(p)$ y D discos de dimensión u encajados en M . Con $q \in D$ y $D \bar{\cap}_q W^s(p)$. Donde por disco entendemos un conjunto homeomorfo a $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$, en particular B y D son compactos.

Entonces, para cada $\epsilon > 0$, existe una $n_0 \geq 0$ tal que $\forall n \geq n_0$, $f^n[D]$ contiene un disco, el cual es $C^1 - \epsilon$ cercano a B .

Tres cosas interesantes que resaltar del λ -Lema son: El disco D puede ser muy pequeño, B puede ser muy grande, y el ángulo entre D y $W^s(p)$ muy pequeño. La parte interesante (y la más difícil de probar) es la proximidad C^1 .

Para probar el λ -Lema, daremos primero una demostración local utilizando lo observado al inicio de la sección. Es decir, consideraremos $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $p = 0$, y bolas abiertas $B^s \subseteq W_r^s(0)$ y $B^u \subseteq W_r^u(0)$. Mostraremos que en $V = B^s \times B^u$ es válido el λ -Lema.

La prueba dada a continuación esta basada en el libro de J. Palis y W. De Melo [5].

Lema 2.6.2. Sean $0 \in \mathbb{R}^n$ punto fijo hiperbólico de $f \in \text{Dif}^k(\mathbb{R}^n)$ y $q \in W^s(p)$ Sean $B^s \subseteq E^s$ bola abierta contenida en $W_r^s(0)$, $B^u \subseteq E^u$ bola abierta contenida en $W_r^u(0)$, y $V = B^s \times B^u$. Consideremos $q \in W^s(0) - \{0\}$ y D^u disco de la misma dimensión que E^u transversal a $W_r^s(0)$ en q . Sea D_n^u la componente conexa de $f^n[D^u] \cap V$ que contiene a q .

Para cada $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ D_n^u está ϵ -próximo de B^u .

Demostración. f en V es de la forma $f(x_s, x_u) = (A^s x_s + \phi_s(x_s, x_u), A^u x_u + \phi_u(x_s, x_u))$ con

$$\|A^s\| \leq a < 1 \quad \|(A^u)^{-1}\| \leq a < 1$$

$$\left. \frac{\partial \phi_s}{\partial x_u} \right|_{B^u} = \left. \frac{\partial \phi_u}{\partial x_s} \right|_{B^s} = 0 \quad \frac{\partial \phi_s}{\partial x_u}(0, 0) = \frac{\partial \phi_u}{\partial x_s}(0, 0) = 0$$

Por continuidad de $\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}$ hay $0 < k < 1$ y $V' \subseteq V$ tal que $a_1 = a + k < 1$, $b = (\frac{1}{a} - k) > 1$, $k < (b-1)^2/4$ y $k \geq \max_{V'} \|\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}\|$. Podemos suponer $q \in V'$ y $B^u \subseteq V'$ (eventualmente $f^k(q) \in V'$). Sea $v_0 \in T_q D^u$ vector unitario $v_0 = (v_0^s, v_0^u)$. $\lambda_0 = \|v_0^s\|/\|v_0^u\|$ la inclinación de v_0 ($v_0^u \neq 0$ ya que $D^u \bar{\cap}_q W^s(0)$). Consideremos las sucesiones definidas de manera

recursiva $q_i = f^i(q)$, $v_i = Df_{q_i}(v_{i-1})$ y

$$\begin{aligned} Df_q(v_0) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f^s}{\partial x_s} \Big|_q & \frac{\partial f^s}{\partial x_u} \Big|_q \\ \frac{\partial f^u}{\partial x_s} \Big|_q & \frac{\partial f^u}{\partial x_u} \Big|_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0^s \\ v_0^u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^s + \frac{\partial \phi_s}{\partial x_s} \Big|_q & \frac{\partial \phi_s}{\partial x_u} \Big|_q \\ 0 & A^u + \frac{\partial \phi_u}{\partial x_u} \Big|_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0^s \\ v_0^u \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A^s v_0^s + \frac{\partial \phi_s}{\partial x_s} \Big|_q v_0^s + \frac{\partial \phi_s}{\partial x_u} \Big|_q v_0^u \\ A^u v_0^u + \frac{\partial \phi_u}{\partial x_u} \Big|_q v_0^u \end{pmatrix} \\ &= v_1 = \begin{pmatrix} v_1^s \\ v_1^u \end{pmatrix} \end{aligned}$$

definimos

$$\lambda_1 = \frac{\|v_1^s\|}{\|v_1^u\|} = \frac{\|A^s v_0^s + \frac{\partial \phi_s}{\partial x_s} \Big|_q v_0^s + \frac{\partial \phi_s}{\partial x_u} \Big|_q v_0^u\|}{\|A^u v_0^u + \frac{\partial \phi_u}{\partial x_u} \Big|_q v_0^u\|}$$

Notemos que:

$$\begin{aligned} \|v_1^s\| &\leq \|A^s v_0^s\| + \left\| \frac{\partial \phi_s}{\partial x_s} \Big|_q v_0^s \right\| + \left\| \frac{\partial \phi_s}{\partial x_u} \Big|_q v_0^u \right\| \leq a \|v_0^s\| + k \|v_0^s\| + k \|v_0^u\| = (a+k) \|v_0^s\| + k \|v_0^u\| \\ \|v_1^u\| &\geq \|A^u v_0^u\| + \left\| \frac{\partial \phi_u}{\partial x_u} \Big|_q v_0^u \right\| \geq \frac{1}{a} \|v_0^u\| - k \|v_0^u\| = \|v_0^u\| \left(\frac{1}{a} - k \right) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\lambda_1 \leq \frac{(a+k) \|v_0^s\| + k \|v_0^u\|}{\|v_0^u\| \left(\frac{1}{a} - k \right)} = \frac{(a+k) \frac{\|v_0^s\|}{\|v_0^u\|} + k}{b} = \frac{(a+k)\lambda_0 + k}{b} \leq \frac{\lambda_0 + k}{b}$$

Análogamente

$$\lambda_2 \leq \frac{\lambda_1 + k}{b} \leq \frac{\lambda_0}{b^2} + \frac{k}{b^2} + \frac{k}{b} = \frac{\lambda_0}{b^2} + k \sum_{i=0}^2 \frac{1}{b^i}$$

Repetiendo el mismo argumento:

$$\lambda_n = \frac{\|v_n^s\|}{\|v_n^u\|} \leq \frac{\lambda_0}{b^n} + k \sum_{i=1}^n \frac{1}{b^i}$$

pero $b > 1$, por lo tanto $\sum_{i=1}^n (b^{-i}) \leq (b-1)^{-1}$. Concluimos que

$$\lambda_n \leq \frac{\lambda_0}{b^n} + \frac{k}{(b-1)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_0/b^n = 0$, y $k/(b-1) < (b-1)/4$ hay $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ $\lambda_n \leq (b-1)/4$. Sea entonces $0 < k_1 < \min\{\epsilon, k\}$. Al ser B^u compacto y $\frac{\partial \phi_s}{\partial x_u} \Big|_{B^u} = 0$ hay $0 < \delta < \epsilon$ tal que $V_1 = B_\delta^s \times B_\delta^u \subseteq V$ y $k_1 \geq \max_{V_1} \left\| \frac{\partial \phi_s}{\partial x_u} \right\|$.

Como v_0 fue arbitrario, tenemos que $\forall v \in T_q D^u$ $v \neq 0$ entonces $\lambda_n(v) \leq (b-1)/4$ donde $\lambda_n(v)$ es la inclinación de v . Luego, si $n \geq n_0$ entonces $\forall w \in T_{q_n} D_n^u$ $\|w_s\|/\|w_u\| \leq (b-1)/4$ para cada $q_n \in V_1$, pero $T_{q_n} D_n^u \cong D_n^u$ localmente, entonces hay $\tilde{D} \subseteq D_{n_0}^u$ disco encajado tal que $\forall p \in \tilde{D}^u$ $\forall v \in T_p \tilde{D}^u$ v tiene inclinación $\lambda \leq (b-1)/2$.

Sea $w_{n_0} \in T_p \tilde{D}^u$ con $w_{n_0} = (w_{n_0}^s, w_{n_0}^u)$ e inclinación $\lambda_{n_0} = \|w_{n_0}^s\|/\|w_{n_0}^u\| \leq (b-1)/2$. Calculando nuevamente la inclinación de las iteraciones de w_{n_0} llegamos a que

$$\begin{aligned} Df_p(w_{n_0}) &= \begin{pmatrix} A^s + \frac{\partial \phi_s}{\partial x_s} \Big|_p & \frac{\partial \phi_u}{\partial x_s} \Big|_p \\ \frac{\partial \phi_u}{\partial x_s} \Big|_p & A^u + \frac{\partial \phi_u}{\partial x_u} \Big|_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{n_0}^s \\ w_{n_0}^u \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A^s w_{n_0}^s + \frac{\partial \phi_s}{\partial x_s} \Big|_p w_{n_0}^u + \frac{\partial \phi_u}{\partial x_s} \Big|_p w_{n_0}^u \\ \frac{\partial \phi_u}{\partial x_s} \Big|_p w_{n_0}^s + A^u w_{n_0}^u + \frac{\partial \phi_u}{\partial x_u} \Big|_p w_{n_0}^u \end{pmatrix} \\ &= w_{n_0+1} = \begin{pmatrix} w_{n_0+1}^s \\ w_{n_0+1}^u \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y

$$\lambda_{n_0+1} = \frac{\|A^s w_{n_0}^s + \frac{\partial \phi_s}{\partial x_s} \Big|_p w_{n_0}^u + \frac{\partial \phi_u}{\partial x_s} \Big|_p w_{n_0}^u\|}{\|\frac{\partial \phi_u}{\partial x_s} \Big|_p w_{n_0}^s + A^u w_{n_0}^u + \frac{\partial \phi_u}{\partial x_u} \Big|_p w_{n_0}^u\|} \leq \frac{(a+k)\lambda_{n_0} + k_1}{-k\lambda_{n_0} + \frac{1}{a} - k}$$

Tomando $B_1 = (b-1)/2 > 1$, de manera análoga a cuando se calculó λ_n , $\lambda_{n+n_0} \leq \lambda_{n_0}/b_1^n + k_1/(b_1-1)$ y, como $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{n_0}/b_1^n = 0$ y $k_1/(b_1-1) < \epsilon/(b_1-1)$, hay $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_1$ $\lambda_{n+n_0} \leq \epsilon(1+1/(b_1-1))$. Al ser w arbitrario, tenemos que $\forall n \geq n_1 \forall w \in T f^n[\tilde{D}^u]$ w tiene inclinación menor que $\epsilon(1+1/(b_1-1))$. Se sigue que hay $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq \tilde{n} \forall w \in T_p(f^n[\tilde{D}^n] \cap V_1)$ w tiene inclinación menor que ϵ . Dado $v \in T_p(f^n[\tilde{D}^u] \cap V_1)$ con $v = (v_n^s, v_n^u)$. Sean $(v_{n+1}^s, v_{n+1}^u) = Df(v_n^s, v_n^u)$ y $\lambda_n = \|v_n^s\|/\|v_n^u\|$ (la pendiente de v_n). Entonces

$$\frac{\|(v_{n+1}^s, v_{n+1}^u)\|}{\|(v_n^s, v_n^u)\|} = \frac{\sqrt{(v_{n+1}^s)^2 + (v_{n+1}^u)^2}}{\sqrt{(v_n^s)^2 + (v_n^u)^2}} = \frac{\|v_{n+1}^u\|}{\|v_n^u\|} \left(\frac{1 + \lambda_{n+1}^2}{1 + \lambda_n^2} \right)^{1/2}$$

recordando que $\|v_{n+1}^u\| \geq (\frac{1}{a} - k)\|v_n^u\| - k\|v_n^s\|$

$$\frac{\|v_{n+1}^u\|}{\|v_n^u\|} \geq \left(\frac{1}{a} - k\right) - k\lambda_n$$

Como λ_{n+1} , λ_n son arbitrariamente pequeñas, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|v_{n+1}^u\|}{\|v_n^u\|} = \frac{1}{a} - k > 1$$

Luego, el diámetro de $f^n[\tilde{D}^n] \cap V_1$ aumenta. Por lo tanto, si tomamos n suficientemente grande y $\pi_u : f^n[\tilde{D}^u] \cap V_1 \rightarrow B^u$ la proyección canónica ($V_1 = B_\delta^s \times B_\delta^u$) tenemos que $f^n[\tilde{D}^u] \cap V_1$ está $C^0 - \epsilon$ próximo a $\pi_u[f^n[\tilde{D}^u] \cap V_1] = \tilde{D} \subseteq E^u$.

Por otro lado los vectores tangentes a \tilde{D} en p con $p \in \tilde{D}$ tienen inclinación 0, se sigue que $f^n[\tilde{D}^u] \cap V_1$ está $C^1 - \epsilon$ próximo de \tilde{D} , ya que los vectores tangentes a $f^n[\tilde{D}^u] \cap V_1$ tienen, para n suficientemente grande, inclinación menor a ϵ . \square

Así, para probar el λ -Lema, tomamos $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de manera que $\tilde{q} = f_0^{n_0}(q) \in W_r^s(p)$. Luego, tomando $\tilde{D}^u = f^{n_0}[D^u] \cap V$ y $\tilde{B} = B \cap V$. Dada $\epsilon > 0$, podemos aplicar la versión local del λ -Lema para encontrar $N_0 > 0$ tal que, para $n \geq 0$ $f^n[\tilde{D}^u]$ contiene un disco que está $C^1 - \epsilon$ próximo de \tilde{B} . Pero $B \subseteq f^l[\tilde{B}]$ para alguna $l \in \mathbb{N}$. Luego, al ser f un difeomorfismo C^k con $k \geq 1$, para $n \geq \max\{N_0, n_0, l\}$, $f^n[D^u]$ contiene un disco $C^1 - \epsilon$ próximo a B .

Corolario (1). Sean $p_1, p_2, p_3 \in M$ puntos fijos hiperbólicos de $f \in \text{Dif}^k(M)$. Si hay $q_1 \in W^u(p_1) \cap W^s(p_2)$ y $q_2 \in W^u(p_2) \cap W^s(p_3)$ que satisfagan $W^u(p_1) \bar{\cap}_{q_1} W^s(p_2)$ y $W^u(p_2) \bar{\cap}_{q_2} W^s(p_3)$, entonces hay $q_3 \in W^u(p_1) \cap W^s(p_3)$ tal que $W^u(p_1) \bar{\cap}_{q_3} W^s(p_3)$.

Demostración. Sea $D_2 \subseteq W^u(p_2)$ disco abierto con $p_2, q_2 \in D_2$. $D_2 \bar{\cap}_{q_2} W^s(p_3)$ implica que hay $\epsilon > 0$ tal que, si \tilde{D} está $C^1 - \epsilon$ próximo a D_2 , al ser la transversalidad una propiedad abierta, hay $q \in \tilde{D} \cap W^s(p_3)$ tal que $\tilde{D} \bar{\cap}_q W^s(p_3)$. Sea $D_1^u \subseteq W^u(p_1)$ disco abierto tal que $q_1 \in D_1^u$. Por el λ -Lema hay $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_0}[D_1^u]$ contiene un disco $\tilde{D}_1 \subseteq f^{n_0}[D_1^u]$ con \tilde{D}_1 $C^1 - \epsilon$ próximo a D_2 . Luego, hay $q_3 \in \tilde{D}_1 \cap W^s(p_3)$ tal que $\tilde{D}_1 \bar{\cap}_{q_3} W^s(p_3)$, pero $D_1^u \subseteq W^u(p_1)$ implica que $\tilde{D}_1 = f^{n_0}[D_1^u] \subseteq W^u(p_1)$. Por lo tanto $W^u(p_1) \bar{\cap}_{q_3} W^s(p_3)$. \square

Corolario (2). Sea $p \in M$ punto fijo hiperbólico de $f \in \text{Dif}^k(M)$, $N^s(p)$ vecindad fundamental de $W^s(p)$. $\cup_{n \geq 0} f^n[N^s(p)] \supseteq U - W_r^u(p)$ donde $U \subseteq M$ es una vecindad abierta de p .

Demostración. Notemos primero que si $G^s(p) \subseteq N^s(p)$ es un dominio fundamental entonces $\cup_{n \in \mathbb{Z}} f^n[G^s(p)] = W^s(p) = \{p\}$. Por otro lado, para $q \in N^s(p) - G^s(p)$ hay $D_q \subseteq M$ con $q \in D_q$ y $D_q \bar{\cap}_{q_0} G^s(p)$ con $q_0 \in D_1 \cap G^s(p)$. Por el λ -Lema $f^n[D_q]$ está arbitrariamente cercano a $W^u(p)$ por lo que hay $U \subseteq M$ tal que, si $\tilde{q} \in U - W^u(p)$ entonces existe $q \in N^s(p)$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ que satisfacen: $\tilde{q} \in f^{n_0}(q)[D_q]$. Concluimos que $\tilde{q} \in \cup_{n \geq 0} f^n[N^s(p)]$. \square

Como corolario tenemos también el λ -Lema para campos vectoriales:

Corolario (3). (λ - Lema para campos vectoriales)

Sean $p \in M$ singularidad hiperbólica de $X \in \mathfrak{X}^k(M)$, $q \in W^s(p)$, D^u disco encajado con $D^u \bar{\cap}_q W^s(p)$ y $\dim(D^u) = \dim(W^u(p))$, $V = B^s \times B^u \subseteq W^s(p) \times W^u(p)$. Definimos $D_t^u = X_t[D^u]$. Hay $t_0 \in \mathbb{R}^+$ tal que $\forall t \geq t_0$ la componente conexa de $D_t^u \cap V$ que tiene a $X_t(q) \in W^s(p)$, contiene un disco \tilde{D} $C^1 - \epsilon$ próximo a B^u .

Demostración. Sea $f = X_1$, por el λ -Lema para difeomorfismos, hay $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ $D_n^u \cap V_1$ contiene un disco \tilde{D} $C^1 - \epsilon$ próximo a B^u . Por continuidad de X_t entonces, para cada $t \geq t_0 = n_0$, $D_t^u \cap V_1$ contiene un disco \tilde{D} con $q \in \tilde{D}$ $C^1 - \epsilon$ próximo a B^u . \square

Sea $p \in M$ singularidad hiperbólica de $X \in X^k(M)$.

Definición. Sea $B^s \subseteq W^s(p)$ disco encajado de manera que $\partial B^s \bar{\cap} X$. Decimos que $g^s(p) = \partial B^s$ es un dominio fundamental para X en $W^s(p)$. Análogamente, para $B^u \subseteq W^u(p)$ disco encajado, con $\partial B^u \bar{\cap} X$. $g^u(p) = \partial B^u$ es un dominio fundamental para X en $W^u(p)$.

Notemos que:

- $q \in W^s(p) - \{p\} \Rightarrow |O(q) \cap g^s(p)| = 1$
- $q \in W^u(p) - \{p\} \Rightarrow |O(q) \cap g^u(p)| = 1$

Es decir, $q \in W^i(p) - \{p\}$ implica que existe un único $t \in \mathbb{R}$ tal que $X_t(q) \in g^i(p)$, con $i \in \{u, s\}$.

Lema 2.6.3. *Sea $p \in M$ singularidad hiperbólica de $X \in \mathfrak{X}^k(M)$. Hay $U \subseteq M$ vecindad abierta de p y $\pi_s : U \rightarrow B^s$ continua, donde $B^s = U \cap W^s(p)$. que cumple lo siguiente:*

- 1) $\pi_s^{-1}(p) = B^u = U \cap W^u(p)$.
- 2) $\forall q \in B^s$ $\pi_s^{-1}(q)$ es subvariedad C^k de M con $\pi_s^{-1}(q) \bar{\cap} W^s(p)$
- 3) π_s es C^k excepto, posiblemente, en B^u .
- 4) $\pi_s : U \rightarrow B^s$ es una fibración invariante bajo el flujo de X , es decir $\forall t \geq 0$
 $X_t[\pi_s^{-1}(q)] \subseteq \pi_s^{-1}[X_t(q)]$.

Demostración. Tomando una carta local centrada en p , podemos suponer que $X \in \mathfrak{X}^k(V)$ donde $0 \in V \subseteq \mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$ con 0 singularidad hiperbólica de X y $W_r^s(0) \subseteq E^s$, $W_r^u(0) \subseteq E^u$.

Sea $g^s(0)$ dominio fundamental de X . Tomamos $B^u \subseteq W_r^s(0)$ disco tal que $0 \in B^u$ y $(g^s(0) \times B^u) \bar{\cap} X$. Sea $\tilde{\pi}_s : g^s(0) \times B^u \rightarrow W_r^s(0)$ la proyección en $g^s(0)$. Sabemos que hay $U \subseteq \mathbb{R}^n$ vecindad del origen tal que $\cup_{t \geq 0} [g^s(0) \times B^u] = U - W_r^u(0)$, por lo tanto, si $x \in U - W_r^u(0)$ hay un único $t_x \geq 0$ tal que $X_{t_x}(x) \in g^s(0) \times B^u$. Extenderemos $\tilde{\pi}_s$ a U de la siguiente manera: Sea $B^s \subseteq W_r^s(0)$ con $\partial B^s = g^s(0)$, definimos

$$\begin{aligned} \pi_s : U &\longrightarrow B^s \\ x &\longmapsto \begin{cases} 0 & x \in W_r^u(0) \\ X_{t_x} \circ \tilde{\pi}_s \circ X_{-t_x}(x) & x \in U - W_r^u(0) \end{cases} \end{aligned}$$

Directo de la definición, es claro que π_s satisface las condiciones 1) y 4). Si $q \in g^s(0)$ entonces $\pi_s^{-1}(q) = \{q\} \times B^u$ que es difeomorfo a B^u . Por otro lado, para $x \in B^s$, $\pi_s^{-1}(q) = X_{t_x} \tilde{\pi}_s^{-1}(X_{-t_x}(x)) = X_{t_x}[\{q_x\} \times B^u]$ donde $q_x = X_{-t_x}(x)$, Al ser X_{t_x} difeomorfismo, $\pi_s^{-1}(x)$ es difeomorfo a B^u , por lo que π_s satisface 2). La continuidad de π_s en $W_r^s(0)$ se sigue del λ -Lema. \square

Corolario. $p \in M$ singularidad hiperbólica de $X \in \mathfrak{X}^k(M)$ y $N \subseteq \mathfrak{X}^k(M)$ $U \subseteq M$ vecindades abiertas de X y p respectivamente tales que $\forall Y \in N$ existe una única $p_Y \in U$ singularidad de Y en U , la cual es hiperbólica. Hay $h^s : W_{X,r}^s(p) \rightarrow W_{Y,r'}^s(p_Y)$ y $h^u : W_{X,r}^u(p) \rightarrow W_{Y,r'}^u(p_Y)$ homeomorfismos tales que, si $h = h^s \oplus h^u$, entonces $hX = Yh$. Es decir, X es estable en p .

Demostración. Por la Proposición 2.2.13 existen

$$h^s : W_{X,r}^s(p) \rightarrow W_{Y,r'}^s(p_Y) \quad h^u : W_{X,r}^u(p) \rightarrow W_{Y,r'}^u(p_Y)$$

tales que $h^s X^s = Y^s h^s$ y $h^u X^u = Y^u h^u$.

Tomemos las fibraciones dadas por el Lema anterior

$$\begin{aligned} \pi_s^X : U_p &\longrightarrow W_{X,r}^s(p) & \pi_u^X : U_p &\longrightarrow W_{X,r}^u(p) \\ \pi_s^Y : V_{p_Y} &\longrightarrow W_{Y,r'}^s(p_Y) & \pi_u^Y : V_{p_Y} &\longrightarrow W_{Y,r'}^u(p_Y) \end{aligned}$$

Para $q \in U_p$ definimos $h(q) = \tilde{q}$ donde $\pi_s^Y(\tilde{q}) = h^s(\pi_s^X q)$, $\pi_u^Y(\tilde{q}) = h^u(\pi_u^X q)$. Pensando a $q \in U_p$ como $q = (\pi_s^X q, \pi_u^X q)$, $h(q) = (h^s \pi_s^X q, h^u \pi_u^X q)$. Al ser h^s y h^u homeomorfismos, también lo es h y $hX = Yh$. \square

Capítulo 3

Teorema de Kupka - Smale

A través de la transformación de Poincaré, podemos reducir el estudio órbitas cerradas al estudio de puntos fijos de difeomorfismos. Así, de una manera similar a lo trabajado en el capítulo anterior, veremos condiciones necesarias para que un campo sea estructuralmente estable en la vecindad de una órbita cerrada. En la primer sección definiremos la transformación de Poincaré. Mostraremos algunas de sus propiedades y definiremos las variedades estable e inestable de una órbita cerrada.

Las órbitas cerradas estables, que denominaremos órbitas cerradas hiperbólicas, no son necesariamente aisladas. Por lo que, a diferencia de las singularidades hiperbólicas, puede llegar a haber una infinidad de ellas. Esto nos lleva a demostrar el resultado, más débil, de que la clase de campos cuyas órbitas cerradas y singularidades son todas hiperbólicas es la intersección numerable de abiertos densos. Es decir, un conjunto residual.

Finalizamos el capítulo definiendo los sistemas dinámicos de Kupka-Smale. Demostremos que el Teorema de Kupka-Smale, que nos dice que la clase de los sistemas de Kupka-Smale es residual. Así, los sistemas de Kupka-Smale nos dan una cota superior para la clase de los sistemas dinámicos estructuralmente estables. En el sentido de que todo sistema estructuralmente estable es de Kupka-Smale. En el siguiente capítulo mostraremos que, para algunas variedades compactas, todo sistema dinámico de Kupka-Smale es estructuralmente estable.

3.1. Transformación de Poincaré

Para el estudio de órbitas cerradas, Poincaré tiene la brillante idea de utilizar un mapeo de recurrencia. Dada $\gamma \subseteq M$ órbita cerrada de $X \in \mathfrak{X}^k(M)$. Poincaré se fija en una sección $\Sigma \subseteq M$ transversal a γ en un punto x_0 . La transformación de Poincaré lleva cada punto $q \in \Sigma$ en el primer punto en el que $O^+(q)$ interseca Σ . Si $\tau \in \mathbb{R}$ es el periodo de γ , deben existir $\epsilon > 0$ y $V \subseteq \Sigma$ tales que, para $q \in V$ existe un único $t_q \in (\tau - \epsilon, \tau + \epsilon)$ tal que $X_{t_q}(q) \in V$.

Definición. Definimos la transformación de Poincaré asociada a γ y Σ como la aplicación: $P_\Sigma : V \longrightarrow \Sigma \quad P_\Sigma(x) = X_{t_x}(x)$

Por la continuidad del flujo, P_Σ es continua con inversa P_Σ^{-1} , la transformación de Poincaré del campo $-X$ asociada a γ y Σ . Por lo tanto, P_Σ es un homeomorfismo.

Algunas observaciones para $x \in V$:

- Si q es un punto fijo de P_Σ entonces $O_X(q)$ es órbita cerrada de X .
- Si q es un punto periódico de P_Σ entonces $O_X(q)$ es una órbita cerrada.
- $\omega_{P_\Sigma}(x) = x_0$ implica que $\omega_X(x) = \gamma$

A continuación, veremos que P_Σ es un difeomorfismo local, de la misma clase que el campo X , y que no depende de la sección transversal. Para esto, necesitaremos un concepto similar al de cartas locales para singularidades, de manera que podamos estudiar sólo el comportamiento local de órbitas cerradas.

Definición. Un flujo tubular para $X \in \mathfrak{X}^k(M)$ es un par (F, f) donde $F \subseteq M$ es un abierto y $f \in \text{Dif}^k(F, I \times I^{n-1})$, con $I \times I^{n-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} : |x| < 1 \text{ y } |y_i| < 1 \text{ } i \in \{1, \dots, n-1\}\}$. De manera que f lleva trayectorias de X en F en las rectas $I \times \{y\} \subseteq I \times I^{n-1}$. Es decir, si $f_*X(x, y) = df_{f^{-1}(x, y)}(X(f^{-1}(x, y)))$, entonces $f_*X(x, y) = (1, 0, 0, \dots, 0)$ es un campo vectorial constante.

Al par (F, f) se le llama una *Caja de flujo* para X .

Si $p \in M$ es un punto regular de $X \in \mathfrak{X}^k(M)$, entonces existe $F \subseteq M$ caja de flujo para X tal que $p \in F$. Extenderemos este resultado.

Proposición 3.1.1 (Flujo tubular largo). *Sea $\gamma \subseteq M$ un arco de trayectoria de X compacto con frontera. Existe una caja de flujo (F, f) para X tal que $\gamma \subseteq F$.*

Demostración. Sean $\epsilon > 0$ y $\alpha : [-\epsilon, a + \epsilon] \rightarrow M$ curva integral inyectiva de X tal que $\alpha[0, a] = \gamma$. Consideremos $\tilde{\gamma} = \alpha[-\epsilon, a + \epsilon]$, el cual es compacto. Como $\tilde{\gamma}$ sólo tiene puntos regulares, cada $p \in \tilde{\gamma}$ tiene asociada una caja de flujo F_p . Al ser $\tilde{\gamma}$ compacto hay F_1, \dots, F_r cajas de flujo tales que $\bigcup_{i \leq r} F_i \supseteq \tilde{\gamma}$. Ordenadas adecuadamente cada F_i sólo tiene intersección no vacía con F_{i+1} y F_{i-1} .

Tomemos una partición de $[-\epsilon, a + \epsilon] : -\epsilon = t_1 < t_2 < \dots < t_r = a + \epsilon$ tal que $\alpha(t_i) = p_i \in F_i \cap \tilde{\gamma}$.

Sea $I_d^{n-1} = \{(0, \bar{y}) \in I \times I^{n-1} : |y_i| < d \text{ } i \in \{1, \dots, n-1\}\}$. Sean (F_i, f_i) los flujos tubulares. Tomando d suficientemente pequeño, si $\Sigma_1 = f_1^{-1}[I_d^{n-1}]$ entonces $\Sigma_1 \bar{\cap} X$ con $p_1 \in \Sigma_1 \subseteq F_1$. Definimos $\Sigma_i = X_{t_i - t_1}[\Sigma_1]$. Para cada $i \in \{1, \dots, r\}$, $\Sigma_i \bar{\cap} X$, $p_i \in \Sigma_i \subseteq F_i$. Para cada $p \in \tilde{\gamma}$ hay un único $t_p \in [0, a + 2\epsilon]$ tal que $X_{t_p}(p_1) = p$. Sea $\Sigma_p = X_{t_p}[\Sigma_1]$. Si $p \in \tilde{\gamma}$, entonces $\Sigma_p \bar{\cap} X$, y $p \neq q$ implica que $\Sigma_p \cap \Sigma_q = \emptyset$. Así construimos una fibración $\pi_1 : \bigcup_{p \in \tilde{\gamma}} \Sigma_p \rightarrow \tilde{\gamma}$. Sea $F = \bigcup_{p \in \tilde{\gamma}} \Sigma_p$. Al ser el flujo un difeomorfismo, se sigue que F es abierto y $\tilde{\gamma} \subseteq F$. También tenemos la proyección $\pi_q : F \rightarrow \Sigma_1$ definida por $\pi_1(z) = X_{-t_p}(z) \in \Sigma_1$, donde $z \in \Sigma_p$.

Sean $g_1 : \tilde{\gamma} \rightarrow [-1, 1]$ y $g_2 : \Sigma_1 \rightarrow I^{n-1}$ difeomorfismos cualesquiera. Definimos

$$f : F \rightarrow I \times I^{n-1}$$

$$z \mapsto (g_1\pi_1(z), g_2\pi_2(z))$$

(F, f) satisface que $\gamma \subseteq F$, f es difeomorfismo y, si $\tilde{\alpha}$ es una curva integral de X que pasa por $z_1 \in \Sigma_1$, entonces $f(\tilde{\alpha}) = \{(t, g_2(z_1)) : t \in [-\delta, \delta]\}$.

Por lo tanto (F, f) es un flujo tubular par X con $\gamma \subseteq F$. □

Proposición 3.1.2. *Sean $\gamma \subseteq M$ órbita cerrada de $X \in \mathfrak{X}^k(M)$, $\Sigma \subseteq M$ sección transversal a γ en p , y $P_\Sigma : U \subseteq \Sigma \rightarrow \Sigma$ la transformación de Poincaré. Existe una vecindad $V \subseteq U$ de p de manera que P_Σ restringida a V es un difeomorfismo C^k . Es decir: $P_\Sigma \in \text{Dif}^k(V)$.*

Demostración. Sean $(F_1, f_1), (F_2, f_2)$ flujos tubulares de X con $\gamma \subseteq F_1 \cup F_2$ y $p \in F_1 - F_2$. Sean Σ_1, Σ_2 los extremos de F_2 transversales a γ . Es decir: $\Sigma_1 = f_*^{-1}[\{-1\} \times I^{n-1}]$, $\Sigma_2 = f_*^{-1}[\{1\} \times I^{n-1}]$. Sean $\pi_1 : V \subseteq \Sigma \rightarrow \Sigma_1$, $\pi_2 : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ y $\pi_3 : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma$ las proyecciones de las trayectorias de X . Para $z \in V$ hay un único $t_z \geq 0$ tal que $X_{t_z}(z) \in \Sigma_1$, $\pi_1(z) = X_{t_z}(z)$. Análogamente para π_2 y π_3 .

$P_\Sigma = \pi_3 \circ \pi_2 \circ \pi_1$. Por el teorema del flujo tubular π_1, π_2 y π_3 son difeomorfismos, esto se sigue de que existe un único $t_0 > 0$ tal que $f_1[\Sigma_1] = f_{1*}X_{t_0}[f_1[\Sigma]]$. Donde $f_{1*}X$ es el campo constante $(1, 0, 0, \dots, 0)$. Luego, $\pi_1 = f_1^{-1} \circ f_{1*}X \circ f_1$ es un difeomorfismo. De manera análoga se muestra que π_2 y π_3 son difeomorfismos para vecindades $\tilde{V} \subseteq \Sigma$, $V_1 \subseteq \Sigma_1$ y $V_2 \subseteq \Sigma_2$.

Por lo tanto, si tomamos $V \subseteq \Sigma$ con $V = \tilde{V} \cap \pi_1^{-1}[V_1] \cap \pi_2^{-1}[V_2]$, entonces $P_\Sigma : V \rightarrow V$ es un difeomorfismo C^k . \square

Sean $\Sigma_1, \Sigma_2 \subseteq M$ transversales a X en $p_1, p_2 \in \gamma$ órbita cerrada. Definimos $h : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ $h(q)$ es el primer punto tal que $h(q) \in O^+(q) \cap \Sigma_2$. Es decir, $h(q)$ es la primer intersección de la órbita positiva de q con Σ_2 . Notemos que $h(p_1) = p_2$.

Sean ahora $P_{\Sigma_1}, P_{\Sigma_2}$ las transformaciones de Poincaré. De la definición de h tenemos que $P_{\Sigma_1} = h^{-1} \circ P_{\Sigma_2} \circ h$. Por lo tanto $DP_{\Sigma_1}(p_1) = Dh^{-1}(p_2) \circ DP_{\Sigma_2}(p_2) \circ Dh(p_1)$, pero $Dh(p_1)$ y $Dh^{-1}(p_2)$ son isomorfismos, por lo que $DP_{\Sigma_1}(p_1)$ y $DP_{\Sigma_2}(p_2)$ tienen los mismos valores propios. En particular, esto muestra que:

$DP_{\Sigma_1}(p_1)$ es un isomorfismo hiperbólico $\iff DP_{\Sigma_2}(p_2)$ es un isomorfismo hiperbólico

Definición. Sean $\gamma \subseteq M$ órbita cerrada de $X \in \mathfrak{X}^k(M)$. Decimos que γ es una órbita cerrada hiperbólica si para algún $p \in \gamma$ existe Σ sección transversal a X por p tal que p es punto fijo hiperbólico de P_Σ , la transformación de Poincaré.

Como el flujo de un campo vectorial X varía continuamente respecto a X , y la transformación de Poincaré asociada a X depende continuamente del flujo de X , la transformación de Poincaré varía continuamente respecto de X . Es decir, para $P_X : V \subseteq \Sigma \rightarrow \Sigma$ transformación de Poincaré de X , hay $U_X \subseteq \mathfrak{X}^k(M)$ vecindad abierta de X tal que, para cada $Y \in U_X$, $\Sigma \bar{\cap} Y$ y $\forall p \in V$ $O_Y(p) \cap \Sigma \neq \emptyset$. Luego, existe una aplicación continua $F : U_X \rightarrow C^k(V, \Sigma)$ tal que $F(Y) = P_Y$ es la transformación de Poincaré para Y . Por lo tanto, si $\gamma \subseteq M$ es una órbita cerrada hiperbólica de X , entonces, para cada $Y \in U_X$, hay $\gamma_Y \subseteq M$ órbita cerrada hiperbólica de Y próxima a γ en la topología C^k .

Definición. Sea Σ sección transversal a $X \in \mathfrak{X}^k(M)$ en $p \in \gamma$. Decimos que Σ es una sección invariante si existe $U \subseteq \Sigma$ abierto en Σ , con $p \in U$, tal que $X_\tau[U] \subseteq \Sigma$, donde τ es el periodo de γ .

Lema 3.1.3. Sea $X \in \mathfrak{X}^k(M)$ con $\gamma \subseteq M$ órbita cerrada hiperbólica de periodo τ y $\Sigma \bar{\cap}_p X$ con $p \in \gamma$. Existe una aplicación $\mu : U_X \rightarrow \mathfrak{X}^k(M)$ continua que satisface:

- 1) $\mu(Y) = \rho_Y Y$, donde $\rho_Y : M \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable, positiva, y constante 1 fuera de una vecindad de $q \in \gamma_Y$.
- 2) Existe $U \subseteq \Sigma$ abierto, con $p \in U$ tal que $Y_\tau^*[U] \subseteq \Sigma$, donde $Y^* = \mu(Y)$.

Así, si γ es hiperbólica, podemos reparametrizar X de manera que Σ sea una sección transversal invariante.

Demostración. Sean $t_0 \in (0, \tau)$, $\Sigma' = X_{-(\tau-t_0)}[\Sigma]$. Definimos la aplicación $\alpha : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ por $\alpha(y) = \min\{t \in \mathbb{R} : X_t(y) \in \Sigma'\}$. Notemos que, si existiera $U \subseteq \Sigma$ vecindad de p tal que $\forall y \in U \quad \alpha(y) = t_0$, entonces Σ sería invariante.

Sean $U \subseteq \tilde{U} \subseteq \Sigma$ abiertos de Σ tales que $p \in U$ y $\bar{U} \subseteq \tilde{U}$. Tomamos $\varphi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ función auxiliar con soporte contenido en \tilde{U} y $\varphi|_{\bar{U}} = 1$. Definimos $\beta : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ por $\beta = \varphi\alpha + (1 - \varphi)t_0$. β satisface que $\beta|_{\bar{U}} = \alpha|_{\bar{U}}$ y $\beta|_{\Sigma - \tilde{U}} = t_0$.

Ahora, para cada $Y \in U_X$, sea $\Sigma'_Y = Y_{-(\tau-t_0)}[\Sigma]$. Definimos la aplicación $\alpha_Y : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ por $\alpha_Y(y) = \min\{t \in \mathbb{R} : Y_t(y) \in \Sigma'_Y\}$, y $\beta_Y = \varphi\alpha + (1 - \varphi)t_0$.

Definiremos $G : U_X \times \Sigma \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^k , polinomio en t de grado $2r + 3$, que satisface:

- $G_{Y,y}(0) = G(Y, y, 0) = 0$ y $G_{Y,y}(t_0) = \beta_Y(y)$.
- $\frac{dG_{Y,y}}{dt}(0) = 1 = \frac{dG_{Y,y}}{dt}(t_0)$
- $\frac{d^r G_{Y,y}}{dt^r}(0) = 0 = \frac{d^r G_{Y,y}}{dt^r}(t_0)$ para $r = 2, \dots, k + 1$.

Para esto, nos fijamos en la matriz

$$A = \begin{pmatrix} t_0^{k+2} & t_0^{k+3} & \cdots & t_0^{2k+3} \\ (k+2)t_0^{k+1} & (k+3)t_0^{k+2} & \cdots & (2k+3)t_0^{2k+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (k+2)!t_0 & \frac{(k+3)!}{2!}t_0^2 & \cdots & \frac{(2k+3)!}{(k+2)!}t_0^{k+2} \end{pmatrix}$$

Sea A_{1j} cofactor de $a_{1j} = t_0^{k+1+j}$ de A . Podemos definir G por:

$$G(Y, y, t) = t + c_1 t^{k+2} + \cdots + c_{k+2} t^{2k+3} \quad \text{donde } c_i = \frac{\beta_Y(y)A_{ij} - t_0 A_{ij}}{\det A}$$

Definimos

$$H : U_X \times \Sigma \times [0, t_0] \rightarrow [0, 1] \quad H_Y(y, t) = \frac{dG_{Y,y}}{dt}(t)$$

H satisface:

- $H_Y(y, 0) = 1 = H_Y(y, t_0)$
- $y \notin \tilde{U} \Rightarrow H_Y(y, t) = 1$.
- $D^r H_Y(y, 0) = 0 = D^r H_Y(y, t_0)$ para $r = 1, \dots, k$

La tercera propiedad se cumple debido a que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_y}{dy}(y, t_0) &= \frac{\partial \beta_Y}{\partial y}(y) \left((k+2)t_0^{k+1} A_{11} + \cdots + (2k+3)t_0^{2k+2} A_{1(k+2)} \right) \\ &= \frac{\partial \beta_Y}{\partial y}(y) \left(\sum_{j=1}^{k+2} a_{2j} A_{1j} \right) = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto $\frac{\partial^r H_Y}{\partial y^r}(y, t_0) = 0$. H también satisface la siguiente igualdad:

$$\frac{\partial^{1+r} H_Y}{\partial y \partial t^r}(y, t_0) = \frac{\partial \beta_Y}{\partial dy}(y) \left(\sum_{j=1}^{k+2} a_{rj} A_{1j} \right) = 0$$

para $r = 1, \dots, k$.

Extendemos ahora el dominio de H a $U_X \times \Sigma \times \mathbb{R}$. De manera que $\forall t \notin [0, t_0]$ $H_Y(y, t) = 1$. Si tomamos U_X y \tilde{U} suficientemente pequeños, entonces $G_{Y,y} : [0, t_0] \rightarrow [0, \beta_Y(y)]$ es un difeomorfismo tal que, para $y \notin \tilde{U}$, $G_{Y,y}(t) = t$. Esto ya que $y \notin \tilde{U}$ implica $c_i = 0 \forall i$. Luego, $G_{Y,y}$ es la identidad fuera de \tilde{U} . Sea $\varphi_Y : \Sigma \times [0, t_0] \rightarrow M$ tal que, si $t^* = G_{Y,y}(t)$, entonces $\varphi_Y(y, t) = Y_{t^*}(y)$. Al ser $G_{Y,y}$ un difeomorfismo, también lo es φ_Y . Sea $W = \varphi_Y[\Sigma \times [0, t_0]] \subseteq M$. Definimos

$$\rho_Y : M \longrightarrow \mathbb{R} \quad \rho_Y|_{M-W} = 1 \quad \rho_Y|_W = \frac{dG_{Y,y}}{dt} \circ \varphi_Y^{-1}$$

De la definición es claro que:

$$(y, t) \in W \implies \rho_Y(y, t) = H_Y(\varphi_Y^{-1}(y, t))$$

Y por lo tanto ρ_Y es de clase C^k . Sea $Y^* = \rho_Y Y$, verifiquemos que $Y_{t_0}^*(y) \in \Sigma'_Y$ para $y \in \Sigma$.

Sean $y \in U$ y $\psi_y : [0, \beta_Y(y)] \rightarrow M$ curva integral de Y por y . Entonces $\psi_y(t) = Y_t(y)$ y $\psi_y(\beta_Y(y)) \in \Sigma'$. Definimos $\psi_y^* = \psi_y \circ G_{Y,y}$.

Notemos que si $\varphi_Y(y, t) = \psi_y^*(t)$, entonces $\rho_Y(\psi_y^*(t)) = \frac{dG_{Y,y}}{dt}(t)$. Por otro lado

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_y^*}{dt}(t) &= \frac{d(\psi_y \circ G_{Y,y})}{dt}(t) \\ &= \frac{d\psi_y}{dt}(G_{Y,y}(t)) \frac{dG_{Y,y}}{dt}(t) \\ &= Y(\psi_y(G_{Y,y}(t))) \frac{dG_{Y,y}}{dt}(t) \\ &= Y(\psi_y^*(t)) \rho_Y(\psi_y^*(t)) = Y^*(\psi_y^*(t)) \end{aligned}$$

Luego, ψ_y^* es curva integral de Y^* y por lo tanto $Y_{t_0}^*(y) = \psi_y^*(t_0) = \psi(\beta_Y(y)) \in \Sigma'$.

Por lo tanto $\mu(Y) = Y^*$ satisface a) y b) □

Proposición 3.1.4. *Sea $\gamma \subseteq M$ órbita cerrada de $X \in \mathfrak{X}^k(M)$. Si γ es hiperbólica, entonces X es localmente estable en γ .*

Demostración. Sean τ el periodo de γ , $\Sigma \subseteq M$ sección transversal a X en $p \in \gamma$. p es punto fijo hiperbólico de P_X , la transformación de Poincaré. Por el Teorema de Grobman-Hartman, hay $V_X \subseteq \mathfrak{X}^k(M)$ y $U_p \subseteq \Sigma$ vecindades abiertas de X y p respectivamente tales que $\forall Y \in V_X$ existe $\bar{h}_Y : U_p \subseteq \Sigma \rightarrow \Sigma$ que conjuga P_X y P_Y , $h_Y P_X = P_Y h_Y$. Extenderemos h_Y a una vecindad de γ .

Sean $\mu : V_X \rightarrow \mathfrak{X}^k(M)$ mapeo continuo dado por el Lema 3.1.3 y $V \subseteq M$ vecindad de γ la cual satisface que $\forall y \in V \exists t_y \in [0, \tau]$ de manera que $\mu(X)_{t_y}(y) = X_{t_y}^*(y) \in U_p$. Definimos $h_y = Y_{t_y}^* \circ \bar{h}_Y \circ X_{t_y}^*(y)$. h_Y está bien definida ya que $\Sigma \bar{\cap}_{P_Y} Y^*$ y $\Sigma \bar{\cap}_p X^*$. Es claro que h_Y es un homeomorfismo y conjuga los flujos de X^* y Y^* , pero X tiene el mismo flujo que X^* y Y el mismo que Y^* . Por lo tanto h_Y lleva órbitas de X en órbitas de Y preservando la orientación. Es decir, X en γ es topológicamente equivalente a Y en γ_Y . □

A continuación definiremos la variedad estable e inestable de una órbita cerrada hiperbólica. Utilizando el Teorema de la Variedad Estable para difeomorfismos y la transformación de Poincaré, mostraremos que son variedades C^k inmersas.

Definición. Sea $\gamma \subseteq M$ órbita cerrada hiperbólica de $X \in \mathfrak{X}^k(M)$.

- La variedad estable de X es el conjunto: $W_X^s(\gamma) = \{y \in M : \omega(y) = \gamma\}$
- La variedad inestable de X es el conjunto: $W_X^u(\gamma) = \{y \in M : \alpha(y) = \gamma\}$

Sea $U \subseteq M$ vecindad abierta de γ

- La variedad estable local de X es el conjunto: $W_{X,U}^s = \{y \in U : \omega(y) = \gamma\}$
- La variedad inestable local de X es el conjunto: $W_{X,U}^u = \{y \in U : \alpha(y) = \gamma\}$

Proposición 3.1.5. Sea $\gamma \subseteq M$ órbita cerrada hiperbólica de $X \in \mathfrak{X}^k(M)$ de periodo τ . Para $V \subseteq M$ vecindad abierta de γ tenemos que:

- 1) $W_V^s(\gamma)$ y $W_V^u(\gamma)$ son subvariedades C^k de M .
- 2) $W_V^s(\gamma) \bar{\cap} W_V^u(\gamma)$.
- 3) $W_V^s(\gamma) \cap W_V^u(\gamma) = \gamma$.

Demostración. Sean $\Sigma \subseteq M$ sección transversal de X en $p \in \gamma$, $U = V \cap \Sigma$, y $W_U^s(p)$, $W_U^u(p)$ las variedades estable e inestable locales de la transformación de Poincaré por p .

$W_U^s(p)$, $W_U^u(p)$ son subvariedades C^k de Σ y $W_U^s(p) \bar{\cap} W_U^u(p)$ con $W_U^s(p) \cap W_U^u(p) = \{p\}$. Mostremos que $W_V^s(\gamma) = V \cap \{X_{-t}(q) : q \in W_U^s(p) t \in [0, 2\tau]\}$.

Primero probaremos la contención: $W_V^s(\gamma) \subseteq V \cap \{X_{-t}(q) : q \in W_U^s(p) t \in [0, 2\tau]\}$.

Es claro que $\gamma \subseteq V \cap \{X_{-t}(q) : q \in W_U^s(p), t \in [0, 2\tau]\}$. Sea $q \in W_V^s(\gamma) - \gamma$. Tomamos Σ_q una sección transversal a X que pasa por p y q , esto es posible ya que $p \in \gamma$ y $q \notin \gamma$. Luego p y q tienen órbitas ajenas. Existe $t_1 \in [0, 2\tau]$ tal que $X_{t_1}(q) \in \Sigma$. Como $q \in W_V^s(\gamma)$ entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} X_t(q) = \gamma$. Por lo tanto $\lim_{t \rightarrow \infty} X_t(X_{t_1}(q)) = \gamma$. Se sigue que $\lim_{n \rightarrow \infty} P_X^n(X_{t_1}(q)) = \{p\}$ y $X_{t_1}(q) \in W_U^s(p)$. Luego, $q = X_{-t_1}(q')$ con $q' \in W_U^s(p)$.

Ahora probaremos la otra contención: $V \cap \{X_{-t}(q) : q \in W_U^s(p) t \in [0, \tau]\} \subseteq W_V^s(\gamma)$.

Sea $q \in V \cap \{X_{-t}(q) : q \in W_U^s(p) t \in [0, \tau]\}$. Hay $t_1 \in [0, 2\tau]$ tal que $X_{t_1}(q) \in W_U^s(p)$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} P_X^n(X_{t_1}(q)) = \{p\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un $s_n > 0$ de manera que $n < m$ implica $s_n < s_m$ y la sucesión $X_{s_n}(X_{t_1}(q)) \rightarrow \tilde{p}$ cuando $p \rightarrow \infty$. Es decir $\tilde{p} \in \omega(X_{t_1}(q))$. Por la invarianza del ω -límite bajo el flujo, tenemos que $\tilde{p} \in \omega(q)$. Esto para cada $\tilde{p} \in \gamma$. Se sigue que $\gamma \subseteq \omega(q)$. Por ser $\omega(q)$ conexo y cerrado, necesariamente se da la igualdad $\gamma = \omega(q)$. Luego, $q \in W_V^s(\gamma)$.

De manera análoga $W_V^u(\gamma) = V \cap \{X_t(q) : q \in W_U^u(p) t \in [0, 2\tau]\}$. Por lo tanto:

$$W_V^s(\gamma) \cap W_V^u(\gamma) = \bigcup_{p \in \gamma} (W_{U_p}^s(p) \cap W_{U_p}^u(p)) = \bigcup_{p \in \gamma} \{p\} = \gamma$$

Como $W_V^s(\gamma) \bar{\cap}_p W_V^u(\gamma)$ para cada $p \in \gamma$. También se da $W_V^s(\gamma) \bar{\cap} W_V^u(\gamma)$. Por el Teorema del flujo tubular largo, $W_V^s(\gamma)$ es localmente C^k -difeomorfo a $I \times I^{n_s-1}$ y por lo tanto es una subvariedad C^k de M , donde $n_s = \dim(W_U^s(p))$. Por lo mismo $W_V^u(\gamma)$ es localmente C^k -difeomorfo a $I \times I^{n_u-1}$ y por lo tanto es una C^k subvariedad de M , donde $n_u = \dim(W_U^u(p))$. \square

Corolario. $W^s(\gamma)$ y $W^u(\gamma)$ son subvariedades inmersas C^k de M .

Demostración.

$$W^s(\gamma) = \bigcup_{t \geq 0} X_{-t}[W_V^s(\gamma)] \quad W^u(\gamma) = \bigcup_{t \geq 0} X_t[W_V^u(\gamma)]$$

\square

3.2. Órbitas cerradas hiperbólicas

En el capítulo anterior demostramos que el conjunto $\mathfrak{g}_1 = \{X \in \mathfrak{X}^k(M) : \text{las singularidades de } X \text{ son todas hiperbólicas}\}$ es abierto y denso en $\mathfrak{X}^k(M)$. En esta sección mostraremos $\mathfrak{g}_{12}(M) = \{X \in \mathfrak{g}_1(M) : \text{las órbitas cerradas de } X \text{ son todas hiperbólicas}\}$ es un conjunto residual en $\mathfrak{X}^k(M)$. La idea es mostrar, para cada $N \in \mathbb{N}$, que la clase de campos vectoriales con órbitas cerradas de periodo menor a N , $\mathfrak{X}^k(N)$, es un conjunto abierto y denso. Así, $\mathfrak{g}_{12} = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \mathfrak{X}^k(N)$ es residual en $\mathfrak{X}^k(M)$.

Lema 3.2.1. *Sea $p \in M$ singularidad hiperbólica de $X \in \mathfrak{X}^k(M)$. Para cada $T > 0$ existen $U \subseteq M$ y $U_X \subseteq \mathfrak{X}^k(M)$ vecindades de p y X respectivamente, y $\rho : U_X \rightarrow U$ aplicación continua tal que:*

- 1) *Si $Y \in U_x$ entonces $\rho(Y)$ es la única singularidad de Y en U , la cual es hiperbólica.*
- 2) *Toda órbita cerrada de un campo $Y \in U_X$ que pase por U tiene periodo mayor a T .*

Demostración. Sabemos que existen $\tilde{U}_X \subseteq \mathfrak{X}^k(M)$, $\tilde{U} \subseteq M$ y $\tilde{\rho} : \tilde{U}_X \rightarrow \tilde{U}$ que satisfacen la primer condición. Por el Teorema de Grobman-Hartman existe $V \subseteq M$ vecindad de p la cual no tiene órbitas cerradas de $Y \in \tilde{U}_X$. Como $X(p) = 0$ entonces, por la continuidad del flujo, existe $U \subseteq M$ vecindad de p con $U \subseteq V \subseteq \tilde{U}$ tal que $\forall q \in U \forall t \in [0, 2T] X_t(q) \in U$. Como el flujo varía continuamente respecto al campo, hay $U_X \subseteq \tilde{U}_X \cap \tilde{\rho}^{-1}[V]$ tal que $\forall Y \in U_X \forall q \in U \forall t \in [0, T] Y_t(q) \in U$. Pero $U \subseteq V$ implica que U no contiene órbitas cerradas de Y , para cada $Y \in U_X$. Por lo tanto, si una órbita cerrada de Y pasa por U , esta tiene que salir de U , como tarda un tiempo mayor a T en salir de U , debe tener un periodo mayor a T . Tomando $\rho = \tilde{\rho}|_{U_X} : U_X \rightarrow U$, ρ satisface las condiciones 1) y 2). \square

Lema 3.2.2. *Sean $T > 0$ y $\gamma \subseteq M$ órbita cerrada hiperbólica de $X \in \mathfrak{X}^k(M)$. Hay $U_X \subseteq \mathfrak{X}^k(M)$ y $U \subseteq M$ vecindades de X y γ respectivamente tales que:*

- 1) *$Y \in U_X$ tiene una órbita cerrada $\gamma_Y \subseteq U$ la cual es hiperbólica y toda órbita cerrada de Y que pase por U distinta de γ_Y tiene periodo mayor a T .*
- 2) *γ_Y varía continuamente respecto a Y .*

Demostración. Sean $\Sigma \subseteq M$ sección transversal a X en $p \in \gamma$ y $P_X : \tilde{V} \subseteq \Sigma \rightarrow \Sigma$ la transformación de Poincaré. Sea τ el periodo de γ , Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\tau n_0 > 2T$. Reducimos \tilde{V} de manera que $P_X^{n_0}$ esté bien definida. Existe $\tilde{U}_X \subseteq \mathfrak{X}^k(M)$ vecindad de X tal que, si $Y \in \tilde{U}_X$, entonces $P_Y^{n_0}$ está bien definida.

Como $p \in \tilde{V}$ es una singularidad hiperbólica de P_X hay $\hat{V} \subseteq \tilde{V}$ y $\hat{U}_X \subseteq \mathfrak{X}^k(M)$ vecindades de p y X respectivamente, y $\rho : \hat{U}_X \rightarrow \hat{V}$ que satisface:

- $\rho(Y)$ es la única singularidad de P_Y en \hat{V} .
- $\rho(Y) = p_Y$ es singularidad hiperbólica.

Luego, $\gamma_Y = O(\rho(Y))$ es una órbita cerrada hiperbólica de Y , la cual varia continuamente respecto a Y , ya que ρ lo hace. Por la continuidad de la transformación de Poincaré P_Y respecto del campo Y , hay $V \subseteq \tilde{U} \cap \hat{V}$ y $U_X \subseteq \hat{U}_X \cap \tilde{U}_X$ tales que, si $Y \in U_X$ y $q \in V$ entonces $P_Y^i(q) \in \hat{V}$ para $i = 1, \dots, n_0$. Por lo tanto, si alguna órbita de Y pasa por V , esta tiene periodo mayor a T (pues $\tau n_0 > 2T$). Sea $U = \bigcup_{t \in [0, \tau + \epsilon]} X_t[V]$ con $\epsilon > 0$, entonces $U_X \subseteq \mathfrak{X}^k(M)$ y $U \subseteq M$ satisfacen el Lema. \square

Corolario. Sean $X \in \mathfrak{g}_{12}(M)$ y $T > 0$, con M compacto. Hay un número finito de órbitas cerradas de X con periodo menor o igual a T y por lo tanto X tiene a lo más una cantidad numerable de órbitas cerradas.

Demostración. Haremos la demostración por contradicción. Supongamos que existe un $T_0 > 0$ y una cantidad numerable de órbitas cerradas $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con periodo menor o igual a T_0 . Al ser M compacto hay $\{p_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ sucesión convergente con $p_m \in \gamma_m$. Sea $p = \lim_{m \rightarrow \infty} p_m$. Por el Lema 3.2.1, p no puede ser singularidad y por el Lema 3.2.2, la órbita de p no es cerrada o tiene periodo mayor a T_0 . En cualquier caso, la curva dada por $\gamma = \{X_t(p) : t \in [-T_0/2, T_0/2]\}$ no se autointersecta.

Sea $F \subseteq M$ caja de flujo tubular con $\gamma \subseteq F$. Existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall m \geq m_0$ $\{X_t(p_m) : t \in [-T_0/2, T_0/2]\} \subseteq F$, pero $f[F]$ no tiene órbitas cerradas, se sigue que la órbita de p_m tiene periodo mayor a T_0 , lo cual es una contradicción. Por lo tanto no puede haber una cantidad numerable de órbitas cerradas de X con periodo menor o igual a T_0 . \square

Lema 3.2.3. Sean $X \in \mathfrak{X}^k(M)$, $K \subseteq M$ compacto y $T > 0$ tales que X no tiene singularidades en K y las órbitas cerradas de X que pasen por K tienen periodo mayor a T . Hay $U_X \subseteq \mathfrak{X}^k(M)$ vecindad de X tal que cada $Y \in U_X$ satisface:

- 1) Y no tiene singularidades en K .
- 2) Las órbitas cerradas de Y que pasen por K tienen periodo mayor a T .

Demostración. Para cada $q \in K$, $X(q) \neq 0$, por lo tanto $\forall q \in K$ $\|X(q)\| > 0$. Al ser K compacto hay $N \subseteq \mathfrak{X}^k(M)$ vecindad de X tal que $Y \in N$ implica que $\forall q \in K$ $\|Y(q)\| > 0$. Equivalentemente $\forall q \in K$ $Y(q) \neq 0$.

Sea $p \in K$. Como la órbita de p no es cerrada o tiene periodo mayor a T , por la continuidad del flujo existen $\epsilon > 0$ y $U_p \subseteq M$ vecindad de p tal que $\forall q \in U_p$ $\forall t \in [0, T + \epsilon]$ $X_t(q) \notin U_p$. Por otro lado, como el flujo varía continuamente respecto al campo, existe $V_p \subseteq \mathfrak{X}^k(M)$ vecindad abierta de X tal que $\forall Y \in V_p$ $\forall q \in U_p$ $\forall t \in [0, T + \epsilon]$ $Y_t(q) \notin U_p$. Luego, $\{U_p : p \in K\}$ es una cubierta abierta de K . Sea U_{p_1}, \dots, U_{p_r} subcubierta finita. Sea $U_X = (\bigcap_{i \leq r} V_{p_i}) \cap N$, U_X es abierto. Por construcción $Y \in U_X$ satisface 1) y 2). \square

Lema 3.2.4. Sean $X \in \mathfrak{X}^\infty(M)$, $\gamma \subseteq M$ órbita cerrada de X y Σ sección transversal a X por $p \in \gamma$. Sean $U_X \subseteq \mathfrak{X}^k(M)$ vecindad de X y $V \subseteq \Sigma$ vecindad de p tales que, para cada $Y \in U_X$, P_Y está definida en V .

Dado $\epsilon > 0$, existen $U \subseteq M$ vecindad de γ y $Y \in \mathfrak{X}^\infty(M) \cap U_X$ con $\|Y - X\|_k < \epsilon$ y P_Y tiene un número finito de puntos fijos en $\Sigma \cap U$, todos ellos elementales.

Demostración. Sea (F, f) caja de flujo centrada en $p \in \gamma$ con $f_*X = C$ campo vectorial constante unitario. $f[F] = [-b, b] \times I^{n-1}$, donde cerrado $[-1, 1] = I$.

Sea $\tilde{C} \in \mathfrak{X}^\infty([-b, b] \times I^{n-1})$ que satisface: $\tilde{C} \bar{\cap} (\{-b\} \times I^{n-1})$, $\tilde{C} \bar{\cap} (\{b\} \times I^{n-1})$ y toda órbita de \tilde{C} que empiece en $\{-b\} \times I^{n-1}$ llegue a $\{b\} \times I^{n-1}$.

Definimos una aplicación diferencial $L_{\tilde{C}} : \{-b\} \times I^{n-1} \rightarrow \{b\} \times I^{n-1}$ de manera que $\{L_{\tilde{C}}(-b, y_0)\} = O(-b, y_0) \cap (\{b\} \times I^{n-1})$. Es decir, $L_{\tilde{C}}(-b, y_0)$ es el único punto donde la órbita de $(-b, y_0)$ intersecta a $\{b\} \times I^{n-1}$. Dividimos el cubo I^{n-1} de la siguiente manera. Sean $I_{3/4}^{n-1} = \{y \in I^{n-1} : \|y\| \leq 3/4\}$, $I_{1/4}^{n-1} = \{y \in I^{n-1} : \|y\| \leq 1/4\}$ y $A = [-b, -b/2] \times I^{n-1} \cup [-b/2, b/2] \times I_{1/4}^{n-1} \cup [b/2, b] \times I^{n-1}$.

Sea $\epsilon > 0$. Queremos un campo $C' \in \mathfrak{X}^\infty([-b, b] \times I^{n-1})$ que cumpla:

- 1) $\|C' - C\|_k < \epsilon$.
- 2) $C'|_A = C|_A$.
- 3) $L_{C'}(-b, y) = (b, y + v)$ si $y \in I_{1/4}^{n-1}$, con $v \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Sea $\psi : [-b, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ con soporte contenido en $(-b/2, b/2)$. Sea $\varphi : I^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^+$ con soporte contenido en $I_{3/4}^{n-1}$ y $\varphi|_{I_{1/2}^{n-1}} = 1$.

Definimos $C' = (1, \rho\varphi(y)\psi(x)v)$, donde $\rho \in \mathbb{R}$. Determinaremos ρ de manera que se satisfagan las tres condiciones. El campo vectorial, junto con las tres condiciones, determinan el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 1 & x(0) &= -b \\ \frac{dy}{dt} &= \rho\varphi(y)\psi(x)v & y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

Que tiene soluciones de la forma

$$x(t) = t - b \quad y(t) = y_0 + \int_0^t \rho\varphi(y(s))\psi(s - b)v ds$$

Como

$$\left\| \int_0^t \rho\varphi(y(s))\psi(s - b)v ds \right\| \leq 2b\rho\|\varphi\| \|\psi\| \|v\| \leq 2b\rho\|v\|$$

Tomando $\|v\| \leq (4b\rho)^{-1}$, si $\|y_0\| \leq 1/4$ entonces $\|y(t)\| \leq 1/2$. Por lo tanto $\varphi(y(s)) = 1$ y $y(t) = y_0 + \int_0^t \rho\psi(s - b)v ds$. Si tomamos ρ de manera que $1/\rho = \int_0^{2b} \psi(s - b) ds$, tenemos que

$$y(2b) = y_0 + \left(\int_0^{2b} \psi(s - b) v ds \right) \left(\frac{1}{\int_0^{2b} \psi(s - b) ds} \right) = y_0 + v$$

Por lo tanto C' satisface 3). Dado que $\varphi(y)\psi(x) = 0$ en A , C' satisface 2). Así, si tomamos $\|v\|$ suficientemente pequeño, $\|C' - C\|_k < \epsilon$ por lo que C' cumple 1)

Sea $Y \in \mathfrak{X}^\infty(M)$ tal que $Y = X$ en $M - F$ y $f_*Y = C'$. Como $f_* : \mathfrak{X}^\infty(F) \rightarrow \mathfrak{X}^\infty(f[F])$ es homeomorfismo, tomando C' suficientemente cercano a C , entonces $\|Y - X\|_k < \epsilon$. Así, $\Sigma_1 = f^{-1}[\{b\} \times I^{n-1}]$ es sección transversal. Sea $V \subseteq \Sigma_1$ abierto de forma que P_X y P_Y estén bien definidas en V . La expresión de P_Y en la carta $f|_{\Sigma_1}$ es $P_Y(y) = P_X(y) + v$. Escogemos v de manera que $\{(y, P_Y(y)) : y \in I_{1/4}^{n-1}\} \cap \Delta$, donde $\Delta \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1}$ es la diagonal. Por lo tanto, $P_Y(y)$ sólo tiene puntos fijos elementales. \square

Lema 3.2.5. Sean $\gamma \subseteq M$ órbita cerrada de $X \in \mathfrak{X}^\infty(M)$ y $\epsilon > 0$. Hay $Y \in \mathfrak{X}^\infty(M)$ con $\|Y - X\|_k < \epsilon$ y γ órbita cerrada hiperbólica de Y .

Demostración. Sea (F, f) cada de flujo centrada en $p \in \gamma$ con f_*X campo constante unitario C en $[-b, b] \times I^{n-1}$, donde $I = [-1, 1]$. Queremos un campo $\tilde{C} \in \mathfrak{X}^\infty(M)$ que satisfaga:

- 1) $\|\tilde{C} - C\|_k < \epsilon$
- 2) $\tilde{C}|_A = C|_A$ (donde A es el conjunto definido en el Lema anterior)
- 3) $L_{\tilde{C}}(-b, y) = (b, (1 + \delta)y)$ si $y \in I_{1/4}^{n-1}$.

De manera análoga al Lema 3.2.4 definimos $\psi : [b, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ con soporte contenido en $(b/2, b/2)$ y $\varphi : I^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^+$ con soporte contenido en $I_{3/4}$ tal que $\forall y \in I_{1/4}^{n-1}$ $\varphi(y) = 1$.

Sea $\tilde{C} = (1, \rho, \varphi(y)\psi(x)y)$ con $\rho \in \mathbb{R}$. Determinaremos ρ de manera que se satisfagan las tres condiciones para \tilde{C} . Del campo \tilde{C} tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 1 & x(0) &= b \\ \frac{dy}{dt} &= \rho\varphi(y)\psi(x)y & y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

Con soluciones de la forma

$$x(t) = t - b \quad y(t) = y_0 + \int_0^t \rho\varphi(y(s))\psi(s-b)y(s)ds$$

Si $\|y_0\| \leq 1/4$ hay $l > 0$ tal que $\forall s \in [0, b/2+l]$ $\|y(s)\| \leq 1/2$, pero en $[0, b/2+l]$ tenemos que $\varphi(y(s)) = 1$, entonces

$$y(t) = y_0 e^{\rho \int_0^t \psi(s-b)ds}$$

Sea $\mu(t) = e^{\rho \int_0^t \psi(s-b)ds}$. Tomando $\rho < \ln(2)/(\int_0^{2b} \psi(s-b)ds)$ entonces $\mu(2b) \leq 2$, y $\|y(s)\| \leq \|y_0\|\mu(s) \leq \|y_0\|2 \leq 1/2$ para $s \in [0, 2b]$. Esto se debe a que μ es creciente para $\rho > 0$. Luego, $\forall s \in [0, 2b]$ $\varphi(y(s)) = 1$ y por lo tanto $y(t) = y_0\mu(t) \quad \forall t \in [0, 2b]$.

$L_{\tilde{C}}(-b, y) = (b, \mu(2b)y)$. Si δ es suficientemente pequeño, entonces hay $\rho > 0$ que satisface lo anterior y $(1 + \delta)y = \mu(2b)y$, por lo que $L_{\tilde{C}}(-b, y) = (b, (1 + \delta)y)$ si $\|y\| \leq 1/4$. Así, \tilde{C} satisface las condiciones anteriores.

Sea $Y \in \mathfrak{X}^\infty(M)$ tal que $Y = X$ en $M - F$ y $Y = f_*^{-1}\tilde{C}$ en F . $\|Y - X\|_k < \epsilon$. Sea $\Sigma_1 = f^{-1}[\{b\} \times I^{n-1}]$. La expresión de P_Y en la carta $f|_{\Sigma_1}$ es $P_Y(y) = (1 + \delta)P_X(y)$ si $\|y\| \leq 1/4$. Por lo tanto $DP_Y(0) = (1 + \delta)DP_X(0)$. Existe un $\delta > 0$ tal que $DP_Y(0)$ no tiene autovalores en S^1 , es decir $P_Y(0)$ es hiperbólico y 0 es punto fijo. Luego, la órbita de $f^{-1}(b, 0)$ es órbita cerrada hiperbólica de Y . \square

Teorema 3.2.6. $\mathfrak{g}_{12}(M) = \{ X \in \mathfrak{g}_1(M) : \text{las singularidades y órbitas cerradas de } X \text{ son todas hiperbólicas} \}$ es residual en $\mathfrak{X}^k(M)$. (M compacta)

Demostración. Para $T > 0$ definimos $\mathfrak{X}^k(T) = \{ X \in \mathfrak{g}_1(M) : \text{las órbitas cerradas de } X \text{ con periodo menor o igual a } T \text{ son hiperbólicas} \}$.

Notemos que $\mathfrak{g}_{12}(M) = \bigcap_{T \in \mathbb{N}} \mathfrak{X}^k(T)$. Así, si mostramos que $\mathfrak{X}^k(T)$ es abierto y denso entonces, al ser $\mathfrak{g}_1(M)$ residual (ya que M es compacto) podremos concluir que $\mathfrak{g}_{12}(M)$ es residual.

Abierto:

Sea $X \in \mathfrak{X}^k(T)$. Las órbitas cerradas con periodo menor o igual a T son finitas (Corolario del Lema 3.2.2). Sea $p \in M$, hay tres casos:

- 1) p es singularidad hiperbólica de X .
- 2) $O(p)$ es regular o es órbita cerrada con periodo mayor a T .
- 3) $O(p)$ es cerrada con periodo menor o igual a T y por lo tanto hiperbólica.

En el primero caso, por el Lema 3.2.1. hay $U_p \subseteq M$ y $N_p \subseteq \mathfrak{X}^k(M)$ vecindades abiertas de p y X respectivamente tales que, si $Y \in N_p$ entonces existe una única singularidad $p_Y \in U_p$ de Y la cual es hiperbólica.

En el segundo caso, por el teorema del flujo tubular, hay $U_p \subseteq M$ vecindad abierta de p tal que, si alguna órbita pasa por U_p , entonces esta tiene periodo mayor a T o es regular. Por el Lema 3.2.3, hay $N_p \subseteq \mathfrak{X}^k(M)$ vecindad abierta de X de manera que, para $Y \in N_p$ cada órbita de Y que pase por U_p tiene periodo mayor a T o es regular.

En el tercer y último caso, por el Lema 3.2.2, hay $U_p \subseteq M$ y $N_p \subseteq M$ vecindades abiertas de $O(p)$ y X respectivamente tales que, si $Y \in N_p$ entonces Y tiene una única órbita cerrada en U_p con periodo menor o igual a T , la cual es hiperbólica.

Así, tomamos la familia $\{U_p\}$ de los abiertos U_p definidos en cada caso. Al ser M compacto, podemos tomar una subcobertura finita $U_1, \dots, U_r \subseteq M$ y $N_1, \dots, N_r \subseteq \mathfrak{X}^k(M)$ sus abiertos asociados. Sea $U_X = \bigcap_{u \leq r} N_u$, U_X es una vecindad abierta de X y $U_X \subseteq \mathfrak{X}^k(T)$.

Densidad:

Como $\mathfrak{g}_1(M)$ es denso en $\mathfrak{X}^k(M)$, basta mostrar que $\mathfrak{g}_{12}(M)$ es denso en $\mathfrak{g}_1(M)$.

Afirmación 1: Existe un $\tau > 0$ tal que toda órbita cerrada de X tiene periodo mayor o igual a τ .

Supongamos falsa la afirmación. Hay $\{\gamma_n\}$ sucesión de órbitas cerradas con periodos $\{\tau_n\}$ y de manera que $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = 0$. Al ser M compacto, existe $\{p_m\}$ sucesión convergente con $p_m \in \gamma_m$. Sea $\lim_{m \rightarrow \infty} p_m = p$. p es una singularidad, de lo contrario habría $F \subseteq M$ caja tubular con $p \in F$ tal que toda órbita que pase por F tiene periodo mayor a a , para alguna $a > 0$. Como $X \in \mathfrak{g}_1(M)$, p es una singularidad hiperbólica. Por el Lema 3.2.1. hay $U_p \subseteq M$ vecindad abierta de p de manera que toda órbita que pase por U_p tiene periodo mayor o igual a 1. Una contradicción ya que, para m suficientemente grande, $p_m \in U_p$ tiene periodo $\tau_m < 1$.

Sea $\Gamma = \Gamma(\tau, 3\tau/2) = \{p \in M : O(p) \text{ es cerrada con periodo } t \in [\tau, 3\tau/2]\}$.

Afirmación 2: Γ es compacto.

Basta ver que $\Gamma \subseteq M$ es cerrado. Sea $\{p_n\} \subseteq \Gamma$ sucesión convergente $p_n \rightarrow p$. Por la primer afirmación, p no es singularidad. Si $O(p)$ tuviese periodo mayor a $3\tau/2$ o fuese regular, por el Teorema del flujo tubular hay $F \subseteq M$ vecindad de p de manera que toda órbita cerrada de X que pase por F tiene periodo mayor a $3\tau/2$. Lo que contradice el hecho de que $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$. Luego, $O(p)$ tiene periodo menor a $3\tau/2$ y $p \in \Gamma$. Por lo tanto, Γ es cerrado.

Sea $\epsilon > 0$. Queremos un campo $Y \in \mathfrak{X}^k(T)$ tal que $\|X - Y\|_k < \epsilon$. Sean $n_0 \in \mathbb{N}$ y $q_0 \in [0, \tau/2]$ con $T = \frac{1}{2}n_0\tau + q_0$.

La idea es la siguiente: Aproximamos X por $\tilde{X} \in \mathfrak{X}^\infty(M)$ con $\|X - \tilde{X}\|_k < \epsilon/(2n_0)$, para luego aproximar \tilde{X} por $Y_1 \in \mathfrak{X}^\infty(M)$ con $Y_1 \in \mathfrak{X}^k(\frac{3\tau}{2})$ y $\|\tilde{X} - Y_1\|_k < \epsilon/(2n_0)$. Aproximamos Y_1 por $Y_2 \in \mathfrak{X}^k(\tau/2 + 2\tau)$ con $\|Y_1 - Y_2\|_k < \epsilon/n_0$. Repetimos esta última aproximación $n_0 - 1$ veces para obtener $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_0} \in \mathfrak{X}^\infty(M)$ tales que $\|Y_i - Y_{i+1}\|_k < \epsilon/n_0$ y $Y_i \in \mathfrak{X}^k(\tau/2 + i\tau)$ para cada $i = 1, \dots, n_0$. Por la desigualdad del triangulo tendríamos

que

$$\begin{aligned} \|X - Y_{n_0}\|_k &= \|X - \tilde{X}\|_k + \|\tilde{X} - Y_1\|_k + \cdots + \|Y_{n_0-1} - Y_{n_0}\|_k \\ &< \frac{\epsilon}{2n_0} + \frac{\epsilon}{2n_0} + \sum_{i=0}^{n_0-1} \frac{\epsilon}{n_0} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto $Y_{n_0} \in \mathfrak{X}^k(\tau/2 + n_0\tau) \subseteq \mathfrak{X}^k(n_0\tau + q_0) = \mathfrak{X}^k(T)$.

Como $\mathfrak{X}^\infty(M) \subseteq \mathfrak{X}^k(M)$ es denso, hay $\tilde{X} \in \mathfrak{X}^\infty(M) \cap \mathfrak{g}_1(M)$ con $\|X - \tilde{X}\|_k < \frac{\epsilon}{2n_0}$.

Sean p_1, \dots, p_s las singularidades de \tilde{X} . Por el Lema 3.2.1. hay $U_1, \dots, U_s \subseteq M$ y $N_1 \subseteq \mathfrak{X}^k(M)$ vecindades de p_1, \dots, p_s y \tilde{X} respectivamente tales que, si $Y \in N_1$, entonces Y tiene una única singularidad $p_{i_Y} \in U_i$, para cada $i \leq s$, la cual es hiperbólica, y las órbitas cerradas de Y que intersectan $\cup_{i \leq s} U_i$ tienen periodo mayor a T . En particular Y no tiene singularidades en $M - U$, donde $U = \bigcup_{u \leq s} U_i$.

Sean $\gamma \subseteq \Gamma$ y Σ_γ sección transversal a \tilde{X} por $p \in \gamma$. Sea $V_\gamma \subseteq \Sigma_\gamma$ vecindad de p y $N_\gamma \subseteq \mathfrak{X}^k(M)$ vecindad de \tilde{X} de forma que $\forall Y \in N_\gamma$ P_Y está bien definida en V_γ . Por continuidad del flujo, toda órbita de Y que parte de V_γ intersecta a Σ_γ en un tiempo $t > \frac{3\tau}{4}$. Sea $W_\gamma \subseteq V_\gamma$ vecindad de γ de manera que toda órbita de Y que parte de W_γ intersecta a Σ_γ por lo menos dos veces. Entonces $\{W_\gamma : \gamma \subseteq \Gamma\}$ es una cubierta abierta de Γ . Al ser Γ compacto podemos tomar una subcubierta finita W_1, \dots, W_r con $\tilde{N}_1, \dots, \tilde{N}_r$ los respectivos abiertos, tales que $Y \in \tilde{N}_i$ implica que toda órbita de Y que pase por W_i intersecta Σ_i por lo menos dos veces. Definimos $N_2 = (\bigcap_{i \leq r} \tilde{N}_i) \cap N_1$ y $W = \bigcup_{i \leq r} W_i$. El conjunto $K = M - (U \cup W)$ es compacto, \tilde{X} no tiene singularidades en K y las órbitas de \tilde{X} por K tienen periodo mayor a $\frac{3\tau}{2}$ o son regulares. Por el Lema 3.2.3. hay $N_3 \subseteq N_2$ vecindad de \tilde{X} tal que, si $Y \in N_3$ entonces Y no tiene singularidades en K y las órbitas de Y que pasen por K tienen periodo mayor a $\frac{3\tau}{2}$.

Regresando a las $\gamma_i \subseteq W_i$, para $i = 1, \dots, r$, $Y \in N_3$, $P_{i_Y} : V_i \rightarrow \Sigma_i$ la transformación de Poincaré de Y . Por el Lema 3.2.4 hay $\tilde{Y}_1 \in N_3$ que satisface $\|\tilde{X} - \tilde{Y}_1\|_k < \frac{\epsilon}{4n_0}$ y $P_{i_{\tilde{Y}_1}}$ sólo tiene puntos fijos elementales en $V_i \cap \Sigma_i$, esto lo logramos aplicando el Lema 3.2.4. r veces y ya que el conjunto de las funciones cuyos puntos fijos son elementales es abierto en $\text{Dif}^k(\Sigma_i)$.

Sean μ_1, \dots, μ_l las órbitas cerradas de \tilde{Y}_1 correspondientes a los puntos fijos de $P_{i_{\tilde{Y}_1}}$. Las demás órbitas de \tilde{Y}_1 tienen periodo mayor a $\frac{3\tau}{2}$. Así, aplicando el Lema 3.2.5. l veces, hay $Y_1 \in \mathfrak{X}^\infty(M)$ tal que $\|Y_1 - \tilde{Y}_1\|_k < \frac{\epsilon}{4n_0}$ y μ_1, \dots, μ_l son órbitas cerradas hiperbólicas de Y_1 , las demás órbitas de Y_1 tienen periodo mayor a $\frac{3\tau}{2}$. Por lo tanto $Y_1 \in \mathfrak{X}^k(3\tau/2)$ y $\|Y_1 - \tilde{X}\|_k < \frac{\epsilon}{2n_0}$, que es lo que buscábamos.

Sea $N_4 \subseteq \mathfrak{X}^k(\frac{3\tau}{2})$ vecindad abierta de Y_1 . Sean $V_1, \dots, V_l \subseteq M$ vecindades de μ_1, \dots, μ_l . Tomamos $V = \bigcup_{i \leq l} V_i$. Por el Lema 3.2.2 existe $N_5 \subseteq N_4$ abierto, con $Y_1 \in N_5$, de manera que las órbitas de $Y \in N_5$ que pasan por V tienen periodo mayor o igual a T . Sea $\tilde{\Gamma} = \Gamma[\frac{3\tau}{2}, 2\tau + \tau/2]$. De manera análoga a cuando mostramos que Γ es compacto, se prueba que $\tilde{\Gamma}$ es compacto.

Así, siguiendo la construcción de \tilde{Y}_1 podemos encontrar $\tilde{Y}_2 \in \mathfrak{X}^\infty(M)$, $\tilde{\Gamma} \subseteq \tilde{W} \subseteq M$, $\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_{s'} \subseteq \tilde{\Gamma}$ y $\tilde{V}_1 \subseteq \tilde{\Sigma}_{\tilde{\gamma}_i}$ de manera que $P_{i_{\tilde{Y}_2}}$ sólo tiene puntos fijos elementales en \tilde{V}_i y $\|Y_1 - \tilde{Y}_2\|_k < \frac{\epsilon}{2n_0}$. Luego, usando el Lema 3.2.5. hay $Y_2 \in N_5$ de manera que, si

$\tilde{\mu}_1, \dots, \tilde{\mu}_{l'}$ son las órbitas cerradas de \tilde{Y}_2 correspondientes a los puntos fijos elementales de $P_{i_{\tilde{Y}_2}}$, entonces $\tilde{\mu}_1, \dots, \tilde{\mu}_{l'}$ son órbitas hiperbólicas de Y_2 . Entonces $\mu_1, \dots, \mu_l, \tilde{\mu}_1, \dots, \tilde{\mu}_{l'}$ son las únicas órbitas cerradas de Y_2 con periodo menor a $2\tau + \tau/2$, las cuales son todas hiperbólicas y $\|Y_2 - \tilde{Y}_2\|_k < \frac{\epsilon}{2n_0}$. Se sigue que $Y_2 \in \mathfrak{X}^k(2\tau + \tau/2)$ y $\|Y_2 - Y_1\| < \epsilon/n_0$.

De manera inductiva, obtenemos los restantes Y_3, \dots, Y_{n_0} . \square

3.3. Campos de Kupka - Smale

Al ser $\mathfrak{g}_{12}(M)$ residual, es claro que si X es estructuralmente estable entonces $X \in \mathfrak{g}_{12}$. En esta sección damos una última condición necesaria que debe satisfacer un campo para ser estructuralmente estable.

Decimos que σ es un elemento crítico de X si σ es una singularidad o una órbita cerrada de X . Consideramos que una singularidad es un elemento crítico de periodo 0. Por lo tanto, si $T > 0$ y $X \in \mathfrak{g}_{12}(M)$, entonces X tiene un número finito de elementos críticos con periodo menor o igual a T . De manera análoga para difeomorfismos, consideraremos a los puntos fijos como puntos periódicos de periodo 0.

Consideremos σ_1, σ_2 elementos críticos hiperbólicos de un sistema dinámico. Si $p \in W^s(\sigma_1) \cap W^u(\sigma_2)$, entonces $\omega(p) = \sigma_1$ y $\alpha(p) = \sigma_2$. Es decir, existe una órbita que une σ_1 con σ_2 . Intuitivamente, estas órbitas deberían ser preservadas bajo equivalencias topológicas. Por el Teorema de transversalidad de Thom, podemos perturbar ligeramente el sistema de manera que $W^s(\sigma_1) \bar{\cap} W^u(\sigma_2)$. Luego, una condición para la estabilidad estructural de sistemas dinámicos es la *condición de transversalidad*: $W^s(\sigma_1) \bar{\cap} W^u(\sigma_2)$.

Definición. Decimos que X es de Kupka-Smale, denotado $X \in K - S$, si los elementos críticos de X son todos hiperbólicos y, para σ_1, σ_2 elementos críticos cualesquiera de X , estos satisfacen la condición de transversalidad $W^s(\sigma_1) \bar{\cap} W^u(\sigma_2)$

Teorema 3.3.1 (Teorema de Kupka-Smale). $K - S$ es residual en $\mathfrak{X}^k(M)$.

Sabemos que $\mathfrak{g}_{12}(M) \subseteq \mathfrak{X}^k(M)$ es residual, por lo tanto basta mostrar que $K - S$ es residual en $\mathfrak{g}_{12}(M)$.

Dividiremos la demostración en varios Lemas. Sea $\tilde{\mathfrak{X}}^k(T) = \{X \in \mathfrak{X}^k(T) : \text{si } \sigma_1, \sigma_2 \text{ son elementos críticos de } X \text{ de periodo menor o igual a } T \text{ entonces } W^s(\sigma_1) \bar{\cap} W^u(\sigma_2)\}$.

Lema 3.3.2. Si $\forall T > 0$ $\tilde{\mathfrak{X}}^k(T)$ es residual en $\mathfrak{X}^k(M)$ entonces $K - S$ es residual en $\mathfrak{X}^k(M)$.

Demostración. Es claro que $K - S = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \tilde{\mathfrak{X}}^k(N)$ Así, si cada $\tilde{\mathfrak{X}}^k(N)$ es residual entonces, al ser $K - S$ intersección numerable de conjuntos residuales y $\mathfrak{X}^k(M)$ de Baire (pues M es compacto) $K - S$ es residual en $\mathfrak{X}^k(M)$. \square

Lema 3.3.3. Sea E espacio de Baire separable y $F \subseteq E$ denso.

$U \subseteq E$ es residual si y sólo si $\forall x \in F \exists V_x \subseteq E$ vecindad abierta de x tal que $U \cap V_x$ es residual en V_x

Demostración.

\Leftarrow : Sea $\{V_{x_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ subcobertura numerable de F (existe pues E es separable) tal que $U \cap V_{x_i}$ es residual en V_{x_i} entonces hay $U_{i_1}, \dots, U_{i_j}, \dots \subseteq V_{x_i}$ abiertos densos de V_{x_i} tales

que $U \cap V_{x_i} \supseteq \bigcap_{j \in \mathbb{N}} U_{ij}$. Sea $U_j = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_{ij}$. Entonces U_j es la unión de abiertos, por lo tanto es abierto. Sea $V \subseteq E$ abierto no vacío, existe $x_i \in F$ tal que $x_i \in V$ y por lo tanto $V \cap V_{x_i} \neq \emptyset$. Como U_{ij} es denso en V_{x_i} entonces $U_{ij} \cap (V \cap V_{x_i}) \neq \emptyset$, se sigue que $U_j \cap V \neq \emptyset$. Es decir, U_j es denso en E . Así:

$$U = U \cap E = U \cap \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} V_{x_i} \right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (U \cap V_{x_i}) \supseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{\infty} U_{ij} \supseteq \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} U_{ij} = \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j$$

donde U_j es abierto y denso en E . Por lo tanto U es residual en E .

\Rightarrow : Supongamos U residual en E . Sean $x \in F$ y $V_x \subseteq E$ vecindad abierta de x . Hay $U_1, U_2, \dots, U_i, \dots \subseteq E$ densos abiertos tales que $U \supseteq \bigcap_{i \in \mathbb{N}} U_i$. V_x abierto implica que $U_i \cap V_x$ es abierto y denso en V_x . Luego, $U \cap V_x \supseteq V_x \cap \left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} U_i \right) = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} (U_i \cap V_x)$. Por lo tanto $U \cap V_x$ es residual en V_x . \square

Corolario. Si $\forall T \geq 0 \forall X \in \tilde{\mathfrak{X}}^k(T) \exists N \subseteq \mathfrak{X}^k(M)$ tales que $X \in N$, N es abierto y $\tilde{\mathfrak{X}}^k(T)$ es residual en N , entonces $K - S$ es residual en $\mathfrak{X}^k(M)$.

Demostración. Por el Lema 3.3.3 si $\tilde{X}(T)$ es residual en N , como $\mathfrak{X}^k(T)$ es denso en $\mathfrak{X}^k(M)$ y $\mathfrak{X}^k(M)$ es de Baire y separable, entonces $\tilde{\mathfrak{X}}^k(T)$ es residual en $\mathfrak{X}^k(M)$. Del Lema 3.3.2 se sigue que $K - S$ es residual en $\mathfrak{X}^k(M)$. \square

Sea $X \in \mathfrak{X}^k(T)$ con $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ los elementos críticos de X de periodo menor o igual a T .

Tomemos $W_0^s(\sigma_i) \subseteq W^s(\sigma_i)$ y $W_0^u(\sigma_i) \subseteq W^u(\sigma_i)$ vecindades compactas de σ_i tales que $\partial W_0^s(\sigma_i)$ y $\partial W_0^u(\sigma_i)$ son dominios fundamentales (Definición 2.6.1). Sea $\Sigma_i^s \subseteq M$ subvariedad de codimensión 1 tal que $\Sigma_i^s \bar{\cap} X$, $\Sigma_i^s \bar{\cap} W^s(\sigma_i)$ y $\Sigma_i^s \cap W^s(\sigma_i) = \partial W_0^s(\sigma_i)$. Se dice que Σ_i^s es una cerca asociada a $\partial W_0^s(\sigma_i)$.

Por el Teorema de transversalidad de Thom y el Teorema de la variedad estable, existe $N \subseteq \mathfrak{X}^k(M)$ con $X \in N \subseteq \mathfrak{X}^k(T)$ tal que, si $Y \in N$ entonces $Y \bar{\cap} \Sigma_i^s$. Tomando N suficientemente pequeño, como los elementos críticos hiperbólicos son estables, todo campo en N tendrá el mismo número de elementos críticos de periodo menor o igual a T . Así, sean $\sigma(Y), \dots, \sigma_s(Y)$ los elementos críticos de Y con periodo menor o igual a T . Hay $W_0^s(\sigma_i(Y), Y) \subseteq W_Y^s(\sigma_i(Y))$ y $W_0^u(\sigma_i(Y), Y) \subseteq W_Y^u(\sigma_i(Y))$ vecindades compactas de $\sigma_i(Y)$ de manera que $\partial W_0^s(\sigma_i(Y), Y) = W_Y^s(\sigma_i(Y)) \cap \Sigma_i^s$.

Por el Teorema de la variedad estable, las aplicaciones

$$Y \longmapsto W_0^s(\sigma_i(Y), Y) \quad Y \longmapsto W_0^u(\sigma_i(Y), Y)$$

son continuas. Es decir, si $Y_0 \in N$, dada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|Y_0 - Y\|_k < \delta$ implica $W_0^x(\sigma_i(Y), Y) C^k - \epsilon$ próximo a $W_0^x(\sigma_i(Y_0), Y_0)$, donde $x \in \{u, s\}$. Así, para $n \in \mathbb{N}$ definimos $W_n^s(\sigma_i(Y), Y) = Y_{-n}[W_0^s(\sigma_i(Y), Y)]$ y $W_n^u(\sigma_i(Y), Y) = Y_n[W_0^s(\sigma_i(Y), Y)]$. Al ser Y_1 y Y_{-1} difeomorfismos, las aplicaciones

$$Y \longmapsto W_n^s(\sigma_i(Y), Y) \quad Y \longmapsto W_n^u(\sigma_i(Y), Y)$$

son continuas.

Por otro lado $W_Y^s(\sigma_i(Y)) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n^s(\sigma_i(Y), Y)$ y $W_Y^u(\sigma_i(Y)) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n^u(\sigma_i(Y), Y)$.

Sea $\tilde{\mathfrak{X}}_n^k(T) = \{Y \in N : \text{si } \sigma_1(Y) \text{ y } \sigma_2(Y) \text{ son elementos críticos distintos de } Y \text{ con periodo menor o igual a } T \text{ entonces } W_n^s(\sigma_1(Y), Y) \bar{\cap} W_n^u(\sigma_2(Y), Y)\}$.

Lema 3.3.4. Si $\forall n \in \mathbb{N}$ $\tilde{\mathfrak{X}}_n^k(T)$ es abierto y denso en $N \subseteq \mathfrak{X}^k(M)$, entonces $\tilde{\mathfrak{X}}^k(T)$ es residual en N .

Demostración. Mostraremos que $\tilde{\mathfrak{X}}^k(T) \cap N = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \tilde{\mathfrak{X}}_n^k(T)$.

\subseteq : Sean $Y \in \tilde{\mathfrak{X}}^k(T) \cap N$, $n \in \mathbb{N}$ y σ_1, σ_2 elementos críticos de Y con periodo menor o igual a T . Entonces $W_n^s(\sigma_1, Y) \subseteq W_Y^s(\sigma_1)$ y $W_n^u(\sigma_2, Y) \subseteq W_Y^u(\sigma_2)$ son subvariedades de codimensión 0. Por lo tanto: $W_Y^s(\sigma_1) \bar{\cap} W_Y^u(\sigma_2) \implies W_n^s(\sigma_1, Y) \bar{\cap} W_n^u(\sigma_2, Y)$.

\supseteq : Sea $Y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \tilde{\mathfrak{X}}_n^k(T)$. Cada $\tilde{\mathfrak{X}}_n^k(T) \subseteq N$, por lo tanto $Y \in N$.

Sea $p \in W_Y^s(\sigma_1) \cap W_Y^u(\sigma_2)$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $p \in W_{n_0}^s(\sigma_1, Y) \cap W_{n_0}^u(\sigma_2, Y)$. Como $W_{n_0}^s(\sigma_1, Y) \bar{\cap}_p W_{n_0}^u(\sigma_2, Y)$ entonces $W_Y^s(\sigma_1) \bar{\cap}_p W_Y^u(\sigma_2)$. Por lo tanto $W_Y^s(\sigma_1) \bar{\cap} W_Y^u(\sigma_2)$ y $Y \in \tilde{\mathfrak{X}}^k(T) \cap N$. \square

Lema 3.3.5. Para cada $n \in \mathbb{N}$ $\tilde{\mathfrak{X}}_n^k(T)$ es abierto y denso en N .

Demostración. Sea $\tilde{\mathfrak{X}}_{n,i,j}^k = \{Y \in N : W_n^s(\sigma_i(Y), Y) \bar{\cap} W_n^u(\sigma_j(Y), Y)\}$. Es decir, fijamos dos elementos críticos $\sigma_i(Y)$ y $\sigma_j(Y)$ para $Y \in N$ y nos concentramos en los campos para las cuales se satisface la condición de transversalidad $W_n^s(\sigma_i(Y), Y) \bar{\cap} W_n^u(\sigma_j(Y), Y)$. Haciendo variar i, j , es claro que $\tilde{\mathfrak{X}}_n^k(T) = \bigcap_{i,j \leq s} \tilde{\mathfrak{X}}_{n,i,j}^k(T)$. Por lo tanto, al ser una intersección finita, basta mostrar que para cada $i, j \in \{1, \dots, s\}$ $\tilde{\mathfrak{X}}_{n,i,j}^k(T)$ es abierto y denso en N .

Para facilitar la notación omitiremos el super índice k en \mathfrak{X}^k y supondremos $i = 1$ y $j = 2$

Abierto:

Sea $X \in \tilde{\mathfrak{X}}_{n,1,2}(T)$. Como las aplicaciones $Y \mapsto W_n^s(\sigma_1)(Y), Y$ y $Y \mapsto W_n^u(\sigma_2)(Y), Y$ son continuas, $W_n^s(\sigma_1, Y)$ y $W_n^u(\sigma_2, Y)$ son compactos, en particular cerrados. Por el Teorema de transversalidad de Thom, existe una $V \subseteq N$ vecindad abierta de X tal que $\forall Y \in V$ $W_n^s(\sigma_1, Y) \bar{\cap} W_n^u(\sigma_2, Y)$. Es decir, $V \subseteq \tilde{\mathfrak{X}}_{n,1,2}(T)$.

Densidad:

Sean $X \in \mathfrak{X}(T) \cap N$ y $K = W_n^s(\sigma_1, X) \cap W_n^u(\sigma_2, X)$. K es compacto y está compuesto por puntos regulares. Por lo tanto, para $x \in K$ hay $(F_x, f_{X,x})$ flujo tubular centrado en x tal que $f_{X,x}[F_x] = [-b_x, b_x] \times I^{n-1}$ donde $I = [-1, 1]$ y $(f_{X,x})_* X$ es el campo vectorial unitario. Sea $x \in A_x \subseteq F_x$ abierto tal que $\overline{f_{X,x}[A_x]} \subseteq \text{int}([-b_x, b_x] \times I_{1/4}^{n-1})$. Tomando F_x suficientemente pequeño, $F_x \cap W_{2n}^s(\sigma_1, X)$ y $F_x \cap W_{2n}^u(\sigma_2, X)$ son conexos. Por otro lado $\{A_x\}$ es una cubierta abierta de K , tomamos entonces una subcubierta finita A_1, \dots, A_l con $(F_1, f_{X,1}), \dots, (F_l, f_{X,l})$ las cajas de flujo correspondientes. Al ser $Y \mapsto W_n^s(\sigma_1, Y)$, $Y \mapsto W_n^u(\sigma_2, Y)$ aplicaciones continuas, hay $N_0 \subseteq N$ abierto con $X \in N_0$ tal que $\forall Y \in N_0$ $W_n^s(\sigma_1(Y), Y) \cap W_n^u(\sigma_2(Y), Y) \subseteq \bigcup_{i \leq l} A_i$ y, para cada $r = 1, \dots, l$, una caja de flujo $(F_r^Y, f_{Y,r})$ con $A_r \subseteq F_r^Y$, $[-b_r, b_r] \times I^{n-1} \subseteq f_{Y,r}[F_r^Y]$, y $\overline{f_{Y,r}[A_r]} \subseteq \text{int}([-b_r, b_r] \times I_{1/4}^{n-1})$. Esto es posible pues el flujo depende continuamente del campo.

Sea $\tilde{\mathfrak{X}}_r = \{Y \in N_0 : \forall x \in A_r$ $W_n^s(\sigma_1(Y), Y) \bar{\cap}_x W_n^u(\sigma_2(Y), Y)\}$. Por el Teorema de transversalidad de Thom $\tilde{\mathfrak{X}}_r$ es abierto en N_0 . Como $\tilde{\mathfrak{X}}_{n,1,2} \cap N_0 = \bigcap_{i \leq l} \tilde{\mathfrak{X}}_r$, si mostramos que $\tilde{\mathfrak{X}}_r$ es denso en N , entonces $\tilde{\mathfrak{X}}_{n,1,2}(T)$ es denso en N_0 y terminamos. Así, sea $Y \in N_0$

de clase C^∞ . Definimos los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned} S_+(Y) &= f_{Y,r}[W_n^s(\sigma_1(Y), Y) \cap F_r^Y] \cap (\{b_r\} \times I^{n-1}) \\ U_+(Y) &= f_{Y,r}[W_n^u(\sigma_2(Y), Y) \cap F_r^Y] \cap (\{b_r\} \times I^{n-1}) \\ U_-(Y) &= f_{Y,r}[W_n^u(\sigma_2(Y), Y) \cap F_r^Y] \cap (\{-b_r\} \times I^{n-1}) \end{aligned}$$

Al ser $f_{Y,r}$ difeomorfismo, si para cada $y \in \{b_r\} \times I_{1/4}^{n-1}$ $S_+(Y) \bar{\cap}_y U_+(Y)$, entonces para cada $x \in \bar{A}_r$ $W_n^s(\sigma_1(Y), Y) \bar{\cap}_x W_n^u(\sigma_2(Y), Y)$.

Mostraremos que, dado $\epsilon > 0$, existe un campo $\tilde{Y} \in \mathfrak{X}^\infty(M)$ tal que $\|\tilde{Y} - Y\| < \epsilon$ y cumple:

- 1) $\tilde{Y} = Y$ fuera de $f_{Y,r}^{-1}[-b_r, b_r] \times I^{n-1}$
- 2) $L_{\tilde{Y}}(-b, y) = (b, y + v)$ para cada $y \in I_{1/4}^{n-1}$ donde $L_{\tilde{Y}} : \{-b_r\} \times I^{n-1} \rightarrow \{b_r\} \times I^{n-1}$ y $L_{\tilde{Y}}(-b_r, y)$ es la intersección de $\{b_r\} \times I^{n-1}$ con la órbita de $(f_{Y,r})_* \tilde{Y}$ por el punto $(-b_r, y)$. Donde $v \in \mathbb{R}^{n-1}$ es arbitrariamente pequeño.

Sean $\psi : [-b_r, b_r] \rightarrow \mathbb{R}^+$ suave con soporte contenido en $(-b_r/2, b_r/2)$, y $\varphi : I^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^+$ con soporte contenido en $I_{3/4}^{n-1}$ tal que $\varphi(y) = 1 \ \forall y \in I^{n-1}$ con $\|y\| < 1/2$.

Definimos $\tilde{Y}(t, y) = (1, \rho\varphi(y)\psi(t)v)$ con $\rho \in \mathbb{R}$, el cual determinaremos para que \tilde{Y} satisfaga las condiciones deseadas. De la definición de \tilde{Y} tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 1 & x(0) &= -b \\ \frac{dy}{dt} &= \rho\varphi(y)\psi(x)v & y(0) &= y_0 \in I_{1/4}^{n-1} \end{aligned}$$

El cual tiene como soluciones

$$x(t) = t - b_r \quad y(t) = y_0 + \int_0^t \rho\varphi(y(s))\psi(s - b_r)v ds$$

Si elegimos $\rho = 1 / \left(\int_0^{2b_r} \psi(s - b) ds \right)$, tomando $\|v\| < 1 / (8\|\varphi\|b_r)$, tenemos que:

$$\|y(t)\| \leq \|y_0\| + \|v\| \int_0^{2b_r} \|\rho\varphi(y(s))\psi(s - b_r)\| ds \leq \|y_0\| + \|v\| \int_0^{2b_r} \|\varphi\| ds < \|y_0\| + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto $\varphi(y(s)) = 1$ y

$$y(t) = y_0 + \int_0^t \rho\psi(s - b_r)v ds$$

con

$$y(2b_r) = y_0 + \left(\int_0^{2b_r} \rho\psi(s - b) ds \right) v = y_0 + v$$

Luego, \tilde{Y} satisface las condiciones 1) y 2). Podemos escoger $v \in \mathbb{R}^{n-1}$ de norma pequeña tal que $S_+(\tilde{Y}) \bar{\cap} U_+(\tilde{Y})$. Se sigue que $W_n^s(\sigma_1(\tilde{Y}), \tilde{Y}) \bar{\cap}_x W_n^u(\sigma_2(\tilde{Y}), \tilde{Y})$ para cada $x \in A_r$. Es decir $\tilde{Y} \in \tilde{\mathfrak{X}}_r$ y está arbitrariamente cerca de Y . Por lo tanto, todo campo C^∞ en N_0 puede ser aproximado por un campo de $\tilde{\mathfrak{X}}_r$. Como todo campo en N_0 es aproximado por un campo C^∞ , concluimos que $\tilde{\mathfrak{X}}_r$ es denso en N_0 . \square

A continuación damos una demostración del Teorema de Kupka - Smale (3.1): Para M compacta, la clase de los campos de Kupka - Smale es residual en $\mathfrak{X}^k(M)$

Demostración. Sea $N \subseteq \mathfrak{X}^k(T)$ abierto. Por el Lema 3.3.5, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\tilde{\mathfrak{X}}_n^k(T)$ es abierto y denso en N . Luego, por el Lema 3.3.4, $\mathfrak{X}^k(T)$ es residual en N . Como esto se cumple para cada $N \subseteq \mathfrak{X}^k(M)$, por el Lema 3.3.3, $\mathfrak{X}^k(T)$ es residual en $\mathfrak{X}^k(M)$. Esto para cada $T > 0$. Así, por el Lema 3.3.2, concluimos que $K - S$ es residual en $\mathfrak{X}^k(M)$. \square

Nos fijamos ahora en los difeomorfismos.

Definición. Sea $f \in \text{Dif}^k(M)$. Decimos que f es un difeomorfismo de Kupka - Smale, denotado $f \in K - S$, si los puntos periódicos de f son todos hiperbólicos y, para $p, q \in M$ puntos periódicos de f cualesquiera, se satisface la condición de transversalidad $W^s(p) \bar{\cap} W^u(q)$.

Se puede dar una demostración análoga a la que se dio en el caso de campos vectoriales para demostrar que el conjunto de difeomorfismos de Kupka-Smale es residual en $\text{Dif}^k(M)$. Nosotros mostraremos sólo la densidad. Para esto utilizaremos una herramienta que nos permite pasar de difeomorfismos a campos vectoriales, que preserva hiperbolicidad y transversalidad.

Definición. Sean $X \in \mathfrak{X}^k(\tilde{M})$ y $\tilde{\Sigma} \subseteq \tilde{M}$ subvariedad compacta de codimensión 1.

Decimos que $\tilde{\Sigma}$ es una sección transversal global de X si

- $X \bar{\cap} \tilde{\Sigma}$
- $\forall p \in \tilde{\Sigma} \quad O^+(p) \cap \tilde{\Sigma} \neq \emptyset$.

Si $\tilde{\Sigma}$ es una sección transversal global de X , entonces el flujo X_t induce un difeomorfismo $\tilde{f} : \tilde{\Sigma} \rightarrow \tilde{\Sigma}$ dado por $\tilde{f}(p) = X_{t_p}(p)$, donde $t_p = \min\{t > 0 : X_{t_p}(p) \in \tilde{\Sigma}\}$.

Observación. Si $X \in \mathfrak{X}^k(\tilde{M})$ admite una sección transversal global, entonces el saturado de $\tilde{\Sigma}$ por el flujo de X es \tilde{M} . Es decir $\tilde{M} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} X_t(\tilde{\Sigma})$, en particular X no puede tener singularidades. Por lo que no cualquier campo vectorial admite una sección global.

Otra observación importante es que, si $X \in \mathfrak{X}^k(\tilde{M})$ tiene transformación de Poincaré \tilde{f} , entonces:

- $\tilde{p} \in \tilde{\Sigma}$ es periódico de \tilde{f} si y sólo si $O_X(\tilde{p})$ es elemento crítico de X .
- $\tilde{p} \in \tilde{\Sigma}$ es periódico hiperbólico si y sólo si $O_X(\tilde{p})$ es elemento crítico hiperbólico de X .
- Sean $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2 \in \tilde{\Sigma}$ periódicos hiperbólicos de \tilde{f} , entonces: $W_{\tilde{f}}^s(\tilde{p}_1) \bar{\cap} W_{\tilde{f}}^s(\tilde{p}_2)$ si y sólo si $W_X^s(O_X(\tilde{p}_1)) \bar{\cap} W_X^u(O_X(\tilde{p}_2))$.
- $\tilde{q} \in \omega_{\tilde{f}}(\tilde{p})$ si y sólo si $O_X(\tilde{q}) \subseteq \omega_X(O_X(\tilde{p}))$.

Por lo tanto $X \in K - S$ si y sólo si $\tilde{f} \in K - S$.

Proposición 3.3.6. *Sea $f \in \text{Dif}^k(M)$ con M compacta. Hay \tilde{M} variedad diferenciable compacta y $X \in \mathfrak{X}^{k-1}(\tilde{M})$ que admite una sección transversal $\tilde{\Sigma}$ y un difeomorfismo $h : M \rightarrow \tilde{\Sigma}$ que conjuga f y la transformación de Poincaré en $\tilde{\Sigma}$ asociada a X , \tilde{f} . En particular: $f \in K - S \iff \tilde{f} \in K - S$.*

Demostración. En $M \times \mathbb{R}$ consideremos la siguiente relación de equivalencia:

$$(p, s) \sim (q, t) \iff \exists n \in \mathbb{Z} \quad s - t = n \quad \text{y} \quad f^n(p) = q$$

Sea $\widetilde{M} = M \times \mathbb{R} / \sim$ el espacio cociente. Veamos que \widetilde{M} tiene estructura de variedad diferenciable con $\pi : M \times \mathbb{R} \rightarrow \widetilde{M}$ la proyección canónica de clase C^k . Para $t_0 \in \mathbb{R}$ $\pi|_{M \times (t_0, t_0+1)}$ es homeomorfismo y $\pi(p, 1) = \pi(f(p), 0)$, ya que $(p, 1) \sim (f(p), 0)$.

Sean $\varphi : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ carta local de M , $\widetilde{U}_1 = \pi[U \times (-1/2, 1/2)]$ y $\widetilde{U}_2 = \pi[U \times (1/4, 5/4)]$ Definimos

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}_1 : \widetilde{U}_1 &\longrightarrow V \times (-1/2, 1/2) & \widetilde{\varphi}_1 &= \varphi \times \text{Id}_{\mathbb{R}} \circ \pi_{\widetilde{U}_1}^{-1} \\ \widetilde{\varphi}_2 : \widetilde{U}_2 &\longrightarrow V \times (1/4, 5/4) & \widetilde{\varphi}_2 &= \varphi \times \text{Id}_{\mathbb{R}} \circ \pi_{\widetilde{U}_2}^{-1} \end{aligned}$$

$\widetilde{\varphi}_1$ y $\widetilde{\varphi}_2$ son homeomorfismos. Afirmamos que $\widetilde{\varphi}_1 \circ \widetilde{\varphi}_2^{-1} : V \times (1/4, 5/4) \rightarrow V \times (-1/2, 1/2)$ es difeomorfismo C^k . De hecho

$$\widetilde{\varphi}_1 \circ \widetilde{\varphi}_2^{-1}(u, t) = \begin{cases} (u, t) & t \in (-1/2, 1/2) \cap (1/4, 5/4) = [1/4, 1/2] \\ (\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}, t - 1) & t \notin [1/4, 1/2] \end{cases}$$

Como φ y f son difeomorfismos C^k también lo son $\widetilde{\varphi}_1$ y $\widetilde{\varphi}_2$.

Así, si tomamos $\{(\varphi_i, U_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ atlas C^k de M , tenemos asociada una familia $\{\widetilde{\varphi}_{ij}, \widetilde{U}_{ij}\}_{i \in \mathbb{N}, j \in \{1,2\}}$. De la definición de $\widetilde{\varphi}_{ij}$ tenemos que $\widetilde{\varphi}_{ij} \circ \pi \circ (\varphi_i^{-1} \times \text{Id}_{\mathbb{R}}) = \text{Id}_{\mathbb{R}^{n+1}}$ y por lo tanto π es un difeomorfismo local C^k .

Sean $\widetilde{\Sigma} = \pi[M \times \{0\}]$ y $h = \pi \circ i : M \rightarrow \widetilde{\Sigma}$, donde $i : M \rightarrow M \times \mathbb{R}$ es la inclusión $i[M] = M \times \{0\}$. h es un difeomorfismo C^k pues π e i lo son.

Sea $\frac{\partial}{\partial t}$ campo unitario de $M \times \mathbb{R}$ cuyas órbitas son $\{p\} \times \mathbb{R}$. Sea $X \in \mathfrak{X}^{k-1}(\widetilde{M})$ dado por $X(\pi(p, t)) = D\pi(p, t) \frac{\partial}{\partial t}(p, t)$. De la transversalidad $\frac{\partial}{\partial t} \overline{\cap} (M \times \{0\})$ se sigue que $X \overline{\cap} \widetilde{\Sigma}$. Ahora, si $\tilde{p} \in \widetilde{\Sigma}$, hay $p \in M$ tal que $\tilde{p} = \pi(p, 0)$ y por lo tanto $(p, 1) \in O_{\frac{\partial}{\partial t}}(p, 0)$. Luego, $\tilde{q} = \pi(p, 1) \in O_X^+(\tilde{p})$, pero $\pi(p, 1) = \pi(f(p), 0)$. Se sigue que $\tilde{q} \in O_X^+(\tilde{p}) \cap \widetilde{\Sigma}$. Por lo tanto, $\widetilde{\Sigma}$ es sección transversal global de X . Si \tilde{f} es la transformación de Poincaré asociada, tenemos que $\tilde{f}(\pi(p, 0)) = \pi(f(p), 0)$. Equivalentemente: $\tilde{f} \circ h = h \circ f$. \square

Corolario. $K - S \subseteq \text{Dif}^k(M)$ es denso.

Demostración. Sea $f_0 \in \text{Dif}^k(M)$. Sean $f \in \text{Dif}^\infty(M)$ próximo a f_0 , $X_f \in \mathfrak{X}^\infty(\widetilde{M})$ una suspensión de f y $h : M \rightarrow \widetilde{\Sigma}$ tal que $\tilde{f} \circ h = h \circ f$ (\tilde{f} la construida en la proposición anterior). Existe $Y \in \mathfrak{X}^k(\widetilde{M})$ campo de Kupka-Smale próximo a X tal que $\widetilde{\Sigma}$ es también sección transversal global de Y . Sea $\tilde{g} \in \text{Dif}^k(\widetilde{\Sigma})$ la transformación de Poincaré asociada a Y , entonces \tilde{g} es un difeomorfismo de Kupka-Smale. Definimos $g = h^{-1} \circ \tilde{g} \circ h \in \text{Dif}^k(M)$. Al ser h difeomorfismo, g es también un campo de Kupka-Smale. Entonces:

$$Y \text{ cercano a } X \iff \tilde{g} \text{ cercano a } \tilde{f} \iff g \text{ cercano a } f$$

\square

La clase de los sistemas dinámicos de Kupka-Smale acota nuestra búsqueda por caracterizar los sistemas dinámicos estables. Sin embargo, no todo sistema dinámico de Kupka-Smale es estable, como veremos a continuación.

Proposición 3.3.7. *Sea $X \in \mathfrak{X}^k(M)$ con alguna órbita cerrada. Sea $f = X_1$ el difeomorfismo generado por el flujo al tiempo $t = 1$. Si $\dim(M) \geq 1$ entonces f no es estructuralmente estable.*

Demostración. Sean γ la órbita cerrada de X y τ su periodo. Si γ no es hiperbólica, es inestable y por lo tanto también lo es f . Supongamos γ hiperbólica, en particular γ es un elemento crítico aislado. Sea $p \in \gamma$. Afirmamos que p es punto periódico de f si y sólo si $\tau \in \mathbb{Q}$. Esto se debe a que:

$$X_{n/m}(p) = p \iff X_n(p) = X_m(p) \iff f^n(p) = f^m(p) \iff O(p) \text{ es finita}$$

Supongamos $\tau \in \mathbb{Q}$, podemos tomar $\kappa \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ tan cercano a 1 como queramos. Sea $\tilde{f} = X_\kappa$. Así, κ cercano a 1 implica f cercano a \tilde{f} . Al ser κ irracional, p no es punto periódico de \tilde{f} , de hecho $O_{\tilde{f}}(p)$ es densa en γ , mientras que $O_f(p) \subseteq \gamma$ es finito, esto para cada $p \in \gamma$. Como γ es un elemento crítico aislado, todo punto cercano a γ tiene órbita regular, en particular no tiene órbita periódica ni densa. Por lo que f no puede ser conjugado de \tilde{f} . Análogamente si $\tau \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, tomando $\kappa = \frac{n}{m}\tau$ de manera que κ sea cercano a 1. p será periódico para \tilde{f} pero tendrá órbita densa en γ para f . \square

Corolario. *M compacta implica que $K - S$ no es abierto en $Di^k(M)$.*

Demostración. Basta encontrar un campo vectorial $X \in K - S$ con una órbita cerrada. Supongamos primero $\dim(M) = 1$. Entonces $M = S^1$ y el campo unitario dado por $X(\cos \theta, \sin \theta) = (-\sin \theta, \cos \theta)$. X tiene una única órbita cerrada $\gamma = S^1$, la cual es trivialmente hiperbólica. Como γ es el único elemento crítico, la condición de transversalidad se cumple trivialmente. Por lo tanto $X \in K - S$ y tiene una órbita cerrada.

Supongamos ahora que $\dim(M) > 1$. Dado que las órbitas cerradas hiperbólicas son estables y los campos de Kupka-Smale son densos, si encontramos un campo $Y \in \mathfrak{X}^k(M)$ con una órbita cerrada hiperbólica γ_Y , podemos aproximar Y por un campo $X \in K - S$. Por la estabilidad de la órbita cerrada γ_Y , X tendrá también una órbita cerrada hiperbólica γ_X cercana a γ_Y con lo que habríamos terminado. De esta manera, tomando una carta local $\varphi : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}^n$, si encontramos un campo $\tilde{Y} \in \mathfrak{X}^k(\mathbb{R}^n)$ con una órbita cerrada hiperbólica, entonces al campo $\varphi_*^{-1}\tilde{Y} \in \mathfrak{X}^k(U)$ podemos extenderlo a un campo $Y \in \mathfrak{X}^k(M)$ de manera que Y tenga una órbita cerrada hiperbólica en U . Así, basta encontrar un campo $\tilde{Y} \in \mathfrak{X}^k(\mathbb{R}^n)$ con una órbita cerrada hiperbólica. Consideremos $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n-2}$. Definimos $\tilde{Y} \in \mathfrak{X}^\infty(\mathbb{R}^n)$ por

$$\tilde{Y}(x, y, \bar{z}) = (x^2 + y^2)(-y, x, \bar{z}) + (1 - x^2 - y^2)(x, y, \bar{z})$$

donde $x, y \in \mathbb{R}$ y $\bar{z} \in \mathbb{R}^{n-2}$. De manera análoga al ejemplo 1.2 del primer capítulo, se puede verificar que los únicos elementos críticos en el plano xy son: el origen y $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, \bar{0})$. Así, $\gamma = \gamma[\mathbb{R}]$ es una órbita cerrada de \tilde{Y} con $\gamma \subseteq B_2(0)$ ($\|\gamma(t)\| = 1 \forall t \in \mathbb{R}$). Si $\bar{z} \neq 0$ entonces $\tilde{Y}(x, y, \bar{z}) \pitchfork S_r^{n-1}$ la esfera de radio r . Por lo tanto los únicos elementos críticos de \tilde{Y} son el origen y γ . \square

Así, si $f \in K - S$ es inestable, la suspensión de f , $X_f \in K - S$, es también inestable. Luego, hay casos donde los sistemas dinámicos estructuralmente estables son un subconjunto propio de los sistemas $K - S$. Es interesante que esto depende de la topología de M . En el siguiente capítulo mostraremos algunos casos donde se da la igualdad para campos vectoriales. Es decir, donde todo campo de Kupka-Smale es estable y por lo tanto el conjunto de campos vectoriales estructuralmente estables será un conjunto denso abierto.

Capítulo 4

El Teorema de Peixoto y generalizaciones

En este capítulo, buscamos condiciones suficientes para que un sistema dinámico sea estructuralmente estable. Para esto, damos condiciones extra a los sistemas de Kupka-Smale. Esto nos lleva, primero, a definir los sistemas de Morse-Smale. En la primera sección mostramos que todo campo vectorial de Morse-Smale es estructuralmente estable. Un resultado interesante es que, para superficies orientables, el conjunto de campos que son de Morse-Smale es denso en $\mathfrak{X}^K(M)$. Este resultado, debido a Peixoto, lo demostraremos en la segunda sección. En la segunda mitad del capítulo damos algunos ejemplos de difeomorfismos en superficies que son estructuralmente estables, pero no son de Morse-Smale. Un ejemplo, debido a Thom, motiva la definición de una clase de sistemas dinámicos estructuralmente estables, conocida como sistemas de Anosov. Finalmente, damos la definición, debida a Smale, de una clase de sistemas estructuralmente estables, la cual engloba los sistemas de Morse-Smale y de Anosov, y desarrollamos el ejemplo de la herradura de Smale, la cual pertenece a esta clase de difeomorfismos.

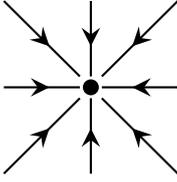
4.1. Campos de Morse-Smale

Definiremos una clase de campos vectoriales, conocida como campos de Morse-Smale. La cual es estable y por lo tanto un subconjunto abierto de $\mathfrak{X}^k(M)$. Mostraremos que, cuando $\dim M = 2$ y M es orientable, esta clase se también densa.

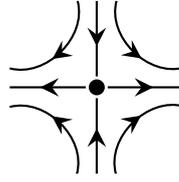
Al buscar los campos de Morse-Smale sea estructuralmente estable, debe ser una subclase de los campos de Kupka - Smale.

En el caso de $\dim(M) = 2$, podemos clasificar las singularidades hiperbólicas en 3 tipos: Sean $p \in M$ es singularidad hiperbólica de $X \in \mathfrak{X}^k(M)$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ las partes reales de los valores propios de $DX(p)$. $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ por ser p singularidad hiperbólica.

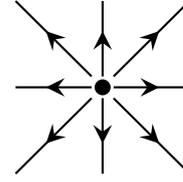
- a) Decimos que p es una singularidad atractora si λ_1, λ_2 son positivos.
- b) p es singularidad silla si $\lambda_1 \lambda_2 < 0$.
- c) p es singularidad repulsora si λ_1, λ_2 son negativos.



(a) atractor



(b) silla



(c) repulsor

Sean $p, q \in M$ singularidades silla de $X \in \mathfrak{X}^k(M)$. Si $\dim(M) = 2$, entonces $W^s(p) \bar{\cap} W^u(q)$ si y sólo si $W^s(p) \cap W^u(q) = \emptyset$. Esto ya que, para $x \in W^s(p) \cap W^u(q)$, tenemos que $O(x) \subseteq W^s(p)$ es una subvariedad de codimensión 0 y por lo tanto es un abierto de $W^s(p)$, pero $O(x)$ es también cerrado. Luego, la componente conexa de $W^s(p)$ que tiene a x es $O(x)$. Análogamente, la componente conexa de $W^u(q)$ que tiene a x es $O(x)$. Así, $W^s(p) \cap W^u(q) \supseteq O(x)$. Como $O(x)$ es una subvariedad de dimensión 1 de M , no puede ser que $W^s(p) \bar{\cap}_{O(x)} W^u(q)$. Si se diera la transversalidad, la intersección sería una subvariedad de codimensión 2.

En el siguiente ejemplo ilustraremos el hecho de que los campos de Kupka-Smale no son necesariamente estructuralmente estables.

Ejemplo. Sea $X \in \mathfrak{X}^k(T^2)$ un campo que induce un flujo irracional en el toro T^2 . El ω y α -límite de toda órbita es T^2 . En particular, X carece de singularidades y órbitas cerradas. Luego, X es trivialmente un campo de Kupka-Smale, pero X no es estructuralmente estable pues X puede ser aproximado por un campo $Y \in \mathfrak{X}^k(T^2)$ que induce un flujo racional. Todas las órbitas de Y son cerradas, por lo que X y Y no pueden ser topológicamente equivalentes

Definición. Sea $X \in \mathfrak{X}^k(M)$

- 1) $L_\alpha(X) = \{p \in M : \exists q \in M \ p \in \alpha(q)\}$.
- 2) $L_\omega(X) = \{p \in M : \exists q \in M \ p \in \omega(q)\}$.
- 3) Decimos que $p \in M$ es un punto errante de X si hay $V \subseteq M$ vecindad abierta de p y $t_0 > 0$ tal que $\forall t \in \mathbb{R}$ con $|t| > t_0$ $X_t[V] \cap V = \emptyset$.

Denotaremos por $\Omega(X) = \{p \in M : p \text{ es un punto no errante de } X\}$. Algunas propiedades básicas de los conjuntos L_ω , L_α y $\Omega(X)$:

- los conjuntos $L_\alpha(X)$ y $L_\omega(X)$ son invariantes bajo el flujo de X . Es decir, para cada $t \in \mathbb{R}$, $X_t[L_\alpha(X)] = L_\alpha(X)$ y $X_t[L_\omega(X)] = L_\omega(X)$.
- El conjunto de los puntos errantes $M - \Omega(X)$ es abierto, por lo que $\Omega(X)$ es cerrado y por lo tanto compacto (M es compacto).
- $\Omega(X)$ es invariante bajo el flujo de X : $\forall t \in \mathbb{R}$ $X_t[\Omega(X)] = \Omega(X)$.

- $L_\alpha(X) \cup L_\omega(X) \subseteq \Omega(X)$.
- Sean $X, Y \in \mathfrak{X}^k(M)$. Si $h : M \rightarrow M$ es equivalencia topológica entre X y Y , entonces $h[\Omega(X)] = \Omega(Y)$.

En el flujo irracional (ejemplo 4.1), todo punto del toro es un punto no errante. De hecho, en este caso tenemos que $L_\omega(X) = L_\mathbb{N}(X) = \Omega(X)$. En el siguiente ejemplo construimos un campo Y en la esfera. Este campo tendrá una órbita regular γ , la cual estará compuesta por puntos no errantes. Sin embargo $\gamma \subseteq \Omega(Y) - (L_\alpha(Y) \cup L_\omega(Y))$. Y puede ser aproximado por un campo X sin órbitas regulares. Luego, Y no es estructuralmente estable.

Ejemplo. Sea $X \in \mathfrak{X}^\infty(S^2)$ con $p_1, p_2 \in S^2$ únicas singularidades y todas las demás órbitas son cerradas. Un campo que cumple estas características es:

$$X : S^2 \rightarrow TS^2 \quad X(x, y, z) = (-y, x, 0)$$

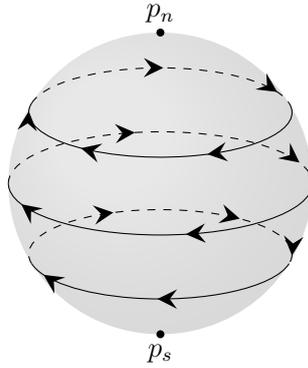


Figura 4.2: Flujo de X

Tomando carta local $\varphi^+ : S^2_+ \rightarrow B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^2$ definida por $\varphi^+(x, y, z) = (x, y)$ donde $S^2_+ = \{(x, y, z) \in S^2 : z > 0\}$. con inversa $\varphi^{+^{-1}}(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$ y con diferencial

$$D\varphi^+(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces, la expresión de X en cartas locales es $\varphi^+_* X \in \mathfrak{X}^\infty(B_1(0))$ definida por

$$\varphi^+_* X(x, y) = D\varphi^+(x, y)X(\varphi^{+^{-1}}(x, y)) = D\varphi^+(x, y)(-y, x, 0) = (-y, x, 0)$$

El campo $\varphi^+_* X$ es lineal, con matriz asociada

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que su flujo es de la forma

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos t & -\text{sen } t \\ \text{sen } t & \cos t \end{pmatrix}$$

y sus curvas integrales son $\alpha(x, y) = (r \cos t, r \sen t)$ donde $r = \|(x, y)\|$ son órbitas cerradas centradas en el origen, con 0 el único punto fijo, al ser X un campo simétrico respecto al plano xy , el hemisferio sur $S_-^2 = \{(x, y, z) \in S^2 : z < 0\}$ se ve igual. Por lo tanto X sí cumple las condiciones deseadas.

Sea $\rho : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^+ C^\infty$ tal que $\rho(p) = 0$ si y sólo si $p = p_3$ con $p_3 \in S^2$ distinto de p_1 y p_2 . Sea $Y = \rho X \in \mathfrak{X}^\infty(S^2)$. Y tiene como singularidades a p_1, p_2 y p_3 , tiene una única órbita regular $\gamma \subseteq S^2$ la cual satisface: $\omega(\gamma) = \alpha(\gamma) = p_3$, y $\gamma \subseteq \Omega(Y) - (L_\alpha(Y) \cup L_\omega(Y))$. Ya que, si $x \in \gamma$, entonces cualquier $V \subseteq S^2$ abierto con $x \in V$ tiene un $y \in V$ cuya órbita es cerrada, si τ es el periodo de $O(y)$ entonces $\tau > 0$ y para cada $n \in \mathbb{Z}$ $Y_{n\tau}(y) = y$. Se sigue que, para cada $n \in \mathbb{Z}$ $Y_{n\tau}[V] \cap V \neq \emptyset$ y por lo tanto x es no errante. Es decir $x \in \Omega(Y) - (L_\alpha(Y) \cup L_\omega(Y))$.

El conjunto de los puntos no errantes debe ser un invariante respecto a la equivalencia topológica. Esto nos motiva a restringir el comportamiento de $\Omega(X)$. El ejemplo anterior ilustra que la diferencia $\Omega(X) - (L_\alpha(X) - L_\omega(X))$ puede provocar inestabilidad.

Definición. Sea M variedad compacta de dimensión n . Decimos que $X \in \mathfrak{X}^k(M)$ es un campo de Morse-Smale, $X \in M - S$, si satisface las siguientes condiciones:

- 1) X tiene una cantidad finita de elementos críticos (singularidades y órbitas cerradas), los cuales son todos hiperbólicos.
- 2) Si σ_1 y σ_2 son elementos críticos de X entonces $W^s(\sigma_1) \bar{\cap} W^u(\sigma_2)$.
- 3) $\Omega(X)$ coincide con el conjunto de elementos críticos de X . Es decir, $p \in M$ es no errante si y sólo si p es elemento crítico de X .

Algunos ejemplos de campos de Morse-Smale son los siguientes:

Ejemplo. Un campo en S^2 con las siguientes características:

- p_N, p_S son singularidades hiperbólicas, con p_N atractor y p_S repulsor.
- $x \in S^2 - \{p_N, p_S\} \implies \omega(x) = p_N$ y $\alpha(x) = p_S$.

El campo $X : S^2 \rightarrow TS^2$ $X(x, y, z) = (-xz, -yz, x^2 + y^2)$ del primer ejemplo del capítulo uno cumple lo anterior.

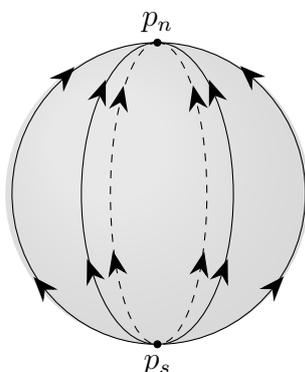


Figura 4.3: flujo polo norte - polo sur

Ejemplo. Campos en S^2 con las siguientes características:

- p_N, p_S son singularidades hiperbólicas repulsoras.
- γ órbita cerrada atractora.
- $x \in S^2 - (\gamma \cup \{p_N, p_S\}) \implies \omega(x) = \gamma$ y $(\alpha(x) = p_N \text{ o } \alpha(x) = p_S)$.

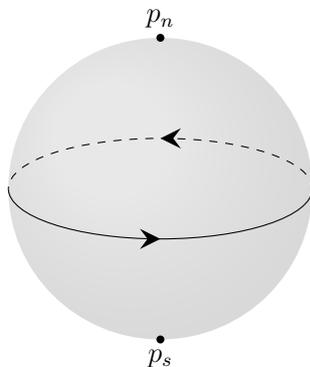


Figura 4.4: Ejemplo de flujo polo norte - ecuador - polo sur.

Un campo que cumple lo anterior es $X \in \mathfrak{X}^\infty(S^2)$ dado por $X(x, y, z) = (xz^2, yz^2, 0) + (x^2 + y^2)(-y, x, -z)$. El ejemplo 2 del capítulo 1.

Ejemplo. En S^2 el campo con

- p_1, p_2 atractores.
- s_1, s_2 sillas.
- r_1, r_2 repulsos.

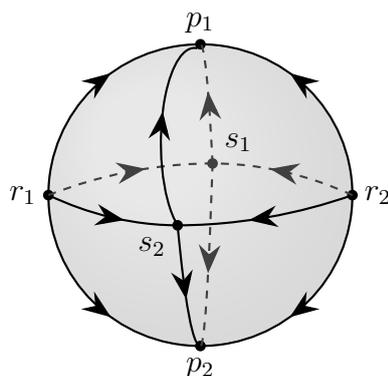


Figura 4.5: Ejemplo de flujo 4.6

Daremos una caracterización de los campos $M - S$ en variedades compactas de dimensión dos, que nos permitirá demostrar la estabilidad de estos campos.

Una ligación de silla es una órbita regular γ tal que $\omega(\gamma)$ y $\alpha(\gamma)$ son singularidades silla. Ya vimos que si hay ligaciones de silla no se da la condición de transversalidad: $W^s(\omega(\gamma)) \bar{\cap} W^u(\alpha(\gamma))$. Esto es consecuencia de $\dim(M) = 2$.

Proposición 4.1.1. *Sea M variedad compacta de dimensión 2.*

$X \in M - S$ si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones:

- a) X tiene una cantidad finita de elementos críticos, los cuales son hiperbólicos.
- b) No hay ligación de sillas.
- c) Toda órbita γ tiene como ω -límite un único elemento crítico y como α -límite un único elemento crítico.

Demostración.

\Rightarrow : Sea $X \in M - S$, de la definición se cumple a).

Sean σ_1, σ_2 sillas de X , como $W^s(\sigma_1) \bar{\cap} W^u(\sigma_2)$ entonces $W^s(\sigma_1) \cap W^u(\sigma_2) = \emptyset$, por lo que se satisface b).

Como $\Omega(X) = \{ \text{elementos críticos de } X \}$ entonces, para toda órbita γ , $\omega(\gamma)$, $\alpha(\gamma)$ son elementos críticos. Por conexidad $\omega(\gamma)$ y $\alpha(\gamma)$ son únicos.

Por lo tanto X satisface a, b y c.

\Leftarrow : Supongamos que $X \in \mathfrak{X}^k(M)$ satisface a, b y c. Para mostrar que $X \in M - S$ sólo falta demostrar que, si σ_1 y σ_2 son elementos críticos de X entonces $W^s(\sigma_1) \bar{\cap} W^u(\sigma_2)$ y que $\Omega(X) = \{ \text{elementos críticos de } X \}$.

Sean σ_1, σ_2 elementos críticos de X . Si alguno de estos es un atractor o un repulsor. Es decir, si $\dim(W^s(\sigma_i)) = 2$ o $\dim(W^u(\sigma_i)) = 2$ para alguna $i \in \{1, 2\}$, entonces la condición de transversalidad se cumple trivialmente. Si ambos son sillas, al no haber ligación de sillas tenemos que $W^s(\sigma_1) \cap W^u(\sigma_2) = \emptyset$ y por lo tanto $W^s(\sigma_1) \bar{\cap} W^u(\sigma_2)$.

Siempre se cumple la contención $\Omega(X) \supseteq \{ \text{elementos críticos de } X \}$. Veamos entonces que, si σ es un elemento crítico atractor de X entonces $W^s(\sigma) - \{ \sigma \}$ sólo tiene puntos errantes.

Caso 1: σ es una singularidad.

Sea $D \subseteq W^s(\sigma)$ un disco con $\partial D \bar{\cap} X$. Como $W^s(\sigma) - \{ \sigma \} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} X_t[\partial D]$ y $\Omega(X)$ es invariante bajo el flujo, basta ver que $\partial D \cap \Omega(X) = \emptyset$. Sean $x \in \partial D$, $D_1 = X_1[D] \subsetneq D$ y $D_{-1} = X_{-1}[D] \supsetneq D$.

Sea $V \subseteq D_{-1} - D$ abierto con $x \in V$. Tomamos $y \in V$. Si $t > 2$ entonces, como $y \in D_{-1}$, $X_t(y) \in D_1$. Luego $X_t[V] \subseteq D_1$ y por lo tanto $X_t[V] \cap V = \emptyset$.

Si $t < -2$ entonces $X_t(y) \notin D_{-1}$ y por lo tanto $X_t[V] \subseteq M - D_1$. Luego $X_t[V] \cap V = \emptyset$. Luego, $x \notin \Omega(X)$.

Caso 2: σ es una órbita cerrada.

Tomamos $D \subseteq W^s(\sigma)$ vecindad abierta de σ con $\partial D \bar{\cap} X$. Si $W^s(\sigma)$ es orientable D es homeomorfo a un anillo y ∂D son dos círculos ajenos. Si $W^s(\sigma)$ es no orientable D es homeomorfo a una banda de Möebius y ∂D es un círculo. En cualquier caso se da que $W^s(\sigma) - \sigma = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} X_t[\partial D]$. Sean $x \in \partial D$, $D_1 = X_1[D]$, $D_{-1} = X_{-1}[D]$ y $V \subseteq D_{-1} - D_1$ abierto con $x \in V$. De manera análoga al caso 1. Si $|t| > 2$ entonces $X_t[V] \cap V = \emptyset$ y por lo tanto $x \notin \Omega(X)$. Se sigue que $(W^s(\sigma) - \sigma) \cap \Omega(X) = \emptyset$.

Análogamente, si σ es un elemento crítico repulsor,

$$\begin{cases} (W^u(\sigma) - \{ \sigma \}) \cap \Omega(X) = \emptyset & \sigma \text{ singularidad} \\ (W^u(\sigma) - \sigma) \cap \Omega(X) = \emptyset & \sigma \text{ órbita cerrada} \end{cases}$$

Finalmente, si $x \in M$ no es una singularidad ni pertenece a una órbita cerrada, al no haber ligación de sillas, $\alpha(x)$ es un repulsor o $\omega(x)$ un atractor. En cualquier caso $x \notin \Omega(X)$.

Por lo tanto $\Omega(X) = \{ \text{elementos críticos de } X \}$. □

Ejemplo. Campos polares en el dos-Toro (superficie compacta orientable de genero 2).

Un campo de Morse-Smale polar es un campo sin órbitas cerradas, con un único atractor y un único repulsor. Representaremos al dos-Toro por un octágono con borde orientado, identificando sus lados de la siguiente manera:

- Dos lados identificados no comparten un vértice.
- El difeomorfismo que identifica los lados invierta la orientación.
- Los vértices se identifican en un mismo punto.

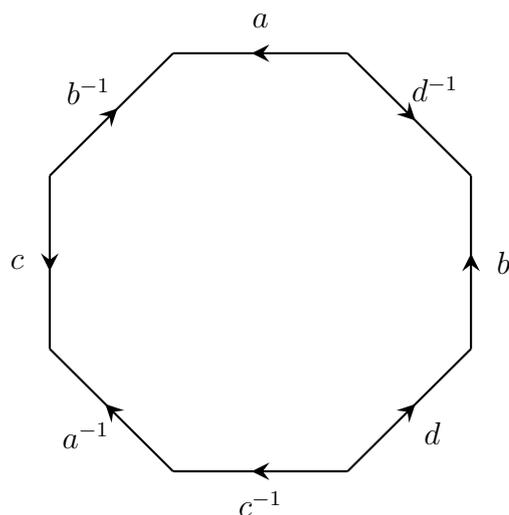


Figura 4.6: Una posible representación

Dada una representación por octágono del dos-Toro, construimos el campo de Morse-Smale colocando una singularidad repulsora en el centro del octágono, puntos silla en el centro de cada lado y una singularidad atractora en los vértices.

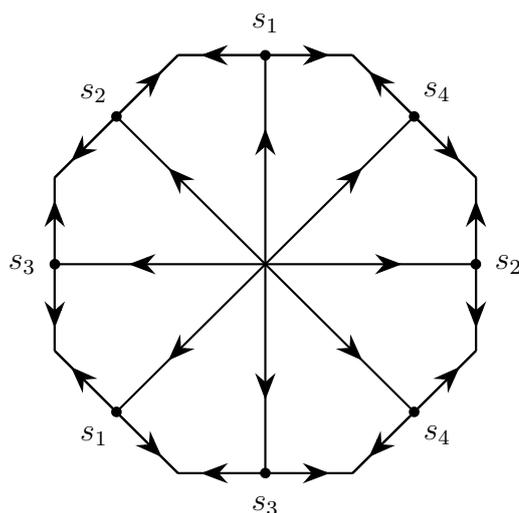


Figura 4.7: El flujo de la representación

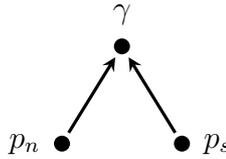
Recíprocamente, si tenemos un campo polar en el dos-Toro, haciendo cortes a través de las variedades inestables de las sillas, obtenemos un octágono, el cual es un campo como el descrito anteriormente.

En lo que resta de la sección, nos dedicaremos a demostrar la estabilidad de estructural de los campos de Morse-Smale en variedades compactas de dimensión 2. Para esto, definiremos primero dos conceptos que nos serán de utilidad.

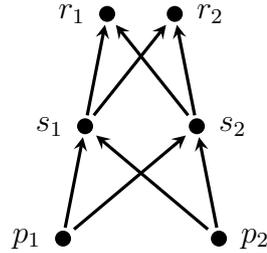
Definición. Sea $X \in M - S$. El diagrama de fase de X , Γ , es el conjunto de elementos críticos con el orden parcial dado por $\sigma_1 \leq \sigma_2$ si y sólo si $W^u(\sigma_1) \cap W^s(\sigma_2) \neq \emptyset$. Equivalentemente, $\sigma_1 \leq \sigma_2$ si existe una órbita que empieza en σ_1 y termina en σ_2 .

Por el primer corolario del λ -Lema y al no haber ligación de sillas esta relación es, en efecto, un orden parcial.

Ejemplos: Los diagramas de fase de los ejemplos 4.4 y 4.6 son:



(a) Diagrama de Ejemplo 4.5



(b) Diagrama de Ejemplo 4.6

Definición. Sean $X, \tilde{X} \in M - S$ y $\Gamma, \tilde{\Gamma}$ sus respectivos diagramas de fase.

Decimos que Γ es isomorfo a $\tilde{\Gamma}$ si y sólo si hay $h : \Gamma \rightarrow \tilde{\Gamma}$ biyectiva tal que

- $p \in \Gamma$ singularidad si y solamente si $h(x) \in \tilde{\Gamma}$ singularidad.
- Para cualesquiera $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma$ se cumple que: $\sigma_1 \leq \sigma_2 \iff h(\sigma_1) \leq h(\sigma_2)$.

Definición. Sea $X \in M - S$. Una filtración para X es una sucesión

$$\emptyset = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \dots \subsetneq M_{r-1} \subsetneq M_r = M$$

donde cada M_i es una subvariedad de M compacta con frontera tal que, para $0 < i < r$:

- 1) $X \bar{\cap} \partial M_i$ y $\forall t > 0 \quad X_t[M_i] \subseteq \text{int}(M_i)$.
- 2) En $M_{i+1} - M_i$ el conjunto maximal invariante bajo el flujo de X es un único elemento crítico σ_{i+1} . Es decir: $\bigcap_{t \in \mathbb{R}} X_t[M_{i+1} - M_i] = \sigma_{i+1}$.

Lema 4.1.2. Sea $X \in \mathfrak{X}^k(M)$ con $X \in M - S$. Existe una filtración para X .

Demostración. Sean $\sigma_1, \dots, \sigma_j$ las singularidades atractoras de X . Existen abiertos $V_1, \dots, V_j \subseteq M$ con $\sigma_i \in V_i$ y $\partial V_i \bar{\cap} X$. Sean $M_1 = \bar{V}_1, \dots, M_j = M_{j-1} \cup \bar{V}_j$.

Ahora, sean $\sigma_{j+1}, \dots, \sigma_s$ las sillas de X . Las componentes de $W^u(\sigma_{j+1}) - \{\sigma_{j+1}\}$ intersectan transversalmente a ∂M_j . Supongamos sin perdida de generalidad que las componentes conexas de $W^u(\sigma_{j+1})$ terminan en σ_1 y σ_2 . Por la continuidad del flujo, podemos tomar S_1, S_2 secciones transversales a $W^s(\sigma_{j+1}) - \sigma_{j+1}$. Tomando luego un flujo tubular de X que empiece en S_1 y termine ∂V_1 , tomamos C_1 curva que una a ∂V_1 con S_1 que sea estrictamente creciente y tangente a S_1 y a ∂V_1 . Al ser estrictamente creciente (En el flujo tubular), $C_1 \bar{\cap} X$. De manera análoga, tomamos C_2, C_3, C_4 con $C_i \bar{\cap} X$ que ligen los extremos

de S_1, S_2 y ∂M_j . Sea \bar{V}_{j+1} la región acotada limitada por $S_1, S_2, C_1, C_2, C_3, C_4$ y ∂M_j que contiene a σ_{j+1} . Entonces $\forall t \in \mathbb{R} X_t[V_{j+1}] = \sigma_{j+1}$ y por lo tanto $M_{j+1} = M_j \cup \bar{V}_{j+1}$ satisface las condiciones deseadas. Construyendo V_{j+2}, \dots, V_s de la misma forma para $\sigma_{j+2}, \dots, \sigma_s$, definimos $M_{j+2} = M_{j+1} \cup \bar{V}_{j+2}, \dots, M_s = M_{s-1} \cup \bar{V}_s$.

Finalmente, nos fijamos en $\sigma_{s+1}, \dots, \sigma_r$ los repulsores de X . Existen V_{s+1}, \dots, V_r abiertos de M con $\sigma_i \in V_i$ y $\partial V_i \bar{\cap} X$. Sean $M_{s+1} = M - (V_{s+2} \cup V_{s+3} \cup \dots \cup V_r)$, $M_{s+2} = M - (V_{s+3} \cup V_{s+4} \cup \dots \cup V_r)$, $\dots, M_{r-1} = M - V_r, M_r = M$.

Cada M_i es unión finita de cerrados. Al ser M compacto, M_1 es unión finita de compactos y por lo tanto compacto. σ_{i+1} es el único elemento crítico de $M_{i+1} - M_i$.

Por lo tanto, la sucesión $\emptyset \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \dots \subsetneq M_r$ es una filtración para M . \square

Teorema 4.1.3. *Para $X \in M - S$ hay $U \subseteq \mathfrak{X}^k(M)$ vecindad abierta de X tal que, si $Y \in U$, entonces $Y \in M - S$ y Y tiene diagrama de fase isomorfo a X .*

Demostración. Sean $\sigma_1(X), \dots, \sigma_n(X)$ los elementos críticos de X . Al ser estos hiperbólicos, existen abiertos $U_1, \dots, U_n \subseteq \mathfrak{X}^k(M)$ y $V_1, \dots, V_n \subseteq M$ abiertos tales que $X \in U_i, \sigma_i \in V_i$, de manera que $i \neq j$ implica $V_i \cap V_j = \emptyset$. Si $Y \in U_i$, entonces Y tiene un único elemento crítico $\sigma_i(Y) \in V_i$ el cual es hiperbólico.

Por otro lado, al ser $K = M - \bigcup_{i \leq n} V_i$ compacto y al no tener X elementos críticos en K , hay $U_0 \subseteq \mathfrak{X}^k(M)$ abierto con $X \in U_0$ tal que, si $Y \in U_0$, entonces Y no tiene elementos críticos en K .

Sea $U = \bigcup_{0 \leq i \leq n} U_i$. Por todo lo anterior, $Y \in U$ implica que los elementos críticos de Y son $\sigma_1(Y), \dots, \sigma_n(Y)$, los cuales son hiperbólicos y $\sigma_j(Y)$ es cercano a $\sigma_j(X)$.

Fijemos $\emptyset \subsetneq M_1 \subsetneq \dots \subsetneq M_r$ una filtración para X . Como $\partial M_i \bar{\cap} X$ y ∂M_i es compacto, reduciendo U de ser necesario, se cumple:

$$Y \in U \implies \partial M_i \bar{\cap} Y$$

Sea $W_i \subseteq M_i - M_{i-1}$ con $\sigma_i(X) \in W_i$. Como $\bigcap_{t \in \mathbb{R}} X_t[M_i - M_{i-1}] = \sigma_i(X)$ hay $T > 0$ tal que $\bigcap_{t \in [-T, T]} X_t[M_i - M_{i-1}] \subseteq W_i$. Al variar el flujo continuamente respecto al campo, tenemos que $Y \in U$ implica $\bigcap_{t \in [-T, T]} Y_t[M_i - M_{i-1}] \subseteq W_i$. Tomando W_i suficientemente pequeño, X es conjugado de Y en W_i . Por lo tanto $\sigma_i(Y)$ es el conjunto maximal invariante bajo el flujo de Y . De todo lo anterior se sigue que $\bigcap_{t \in \mathbb{R}} Y_t[M_i - M_{i-1}] = \sigma_i$. Concluimos que $\emptyset \subsetneq M_1 \subsetneq \dots \subsetneq M_r$ es también una filtración para $Y \in U$.

Si γ es una órbita distinta de $\sigma_i(Y)$ tal que $\gamma \cap [M_i - \text{int}(M_{i-1})] \neq \emptyset$ entonces $\gamma \cap \partial M_i \neq \emptyset$ o $\gamma \cap \partial M_{i-1} \neq \emptyset$. Esto ya que la única órbita contenida en $M_i - M_{i-1}$ es $\sigma_i(Y)$. Luego, si $x \in \gamma \cap [M_i - M_{i-1}]$, entonces existe un $t > 0$ tal que $Y_t(x) \in M_{i-1}$ o $Y_t(x) \in M - M_i$. En cualquier caso, como $Y_t[M_{i-1}] \subseteq M_{i-1}$ y $Y_t[M - M_i] \subseteq M - M_i$ para $t > 0$, llegamos a que x es un punto errante. Por lo tanto $\Omega(Y) \cap (M_i - M_{i-1}) = \sigma_i(Y)$, se sigue que $\Omega(Y) = \{\sigma_i(Y) : 1 \leq i \leq n\}$.

Sólo falta mostrar que Y no tiene ligación de sillars. Sean $\sigma_i(X)$ silla y γ una de las componentes conexas de $W_X^u(\sigma_i(X)) - \sigma_i(X)$. Sea $\sigma = \omega(\gamma)$, σ es un atractor pues X no tiene ligación de sillars. Tomamos $V \subseteq M$ abierto con $\sigma \in V, \partial V \bar{\cap} X$ y $\gamma \bar{\cap} \partial V$. Como $W_Y^u(\sigma_i(Y))$ es C^k -próxima a $W_X^u(\sigma_i(X))$ en vecindades compactas, entonces una de las componentes conexas de $W_Y^u(\sigma_i(Y)) - \sigma_i(Y)$, llamémosla $\tilde{\gamma}$, tiene que satisfacer: $\tilde{\gamma} \bar{\cap} \partial V, \tilde{\gamma} \cap \partial V \neq \emptyset$. Por lo tanto $\omega(\tilde{\gamma}) = \sigma(Y) \in V$, donde $\sigma(Y)$ es el atractor correspondiente a σ . Así, concluimos que:

- $Y \in U$ no tiene ligación de sillars.

- $\sigma_i(X) \leq \sigma_j(X) \iff \sigma_i(Y) \leq \sigma_j(Y)$.

Por lo tanto $Y \in M - S$. Definimos $h : \Gamma(X) \rightarrow \Gamma(Y)$ por $h(\sigma_i(X)) = \sigma_i(Y)$, donde $\Gamma(X)$, $\Gamma(Y)$ son los diagramas de fase respectivos de X y Y , y $\sigma_i(X)$, $\sigma_i(Y) \in M_i$. Así, h es un isomorfismo de diagramas entre $\Gamma(X)$ y $\Gamma(Y)$. \square

Teorema 4.1.4. $X \in M - S$ es estructuralmente estable.

Demostración. Sea $U \subseteq \mathfrak{X}^k(M^2)$ vecindad abierta de X tal que, si $Y \in U$ entonces $Y \in M - S$ y $g : \{\sigma_i(X)\} \rightarrow \{\sigma_i(Y)\}$ isomorfismo de diagramas de fase.

Caso 1: X no tiene órbitas cerradas.

Sean σ atractor de X y $\sigma(Y) = g(\sigma)$ para $Y \in U$. Fijamos $V \subseteq W_X^s(\sigma)$ abierto con $\sigma \in V$ tal que $\partial V \bar{\cap} X$, $\partial V \bar{\cap} Y$ y $\sigma(Y) \in V \subseteq W_Y^s(\sigma(Y))$.

Sean $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ las sillas de X tales que $\sigma_i \leq \sigma$. Sean $p_1, \dots, p_n \in M$ los puntos tales que $\{p_i\} = (W_X^u(\sigma_i) - \sigma_i) \cap \partial V$. Análogamente para Y , sean $p_1(Y), \dots, p_n(Y) \in M$ con $\{p_i(Y)\} = (W_Y^u(\sigma_i(Y)) - \sigma_i(Y)) \cap \partial V$. Para cada σ_i tomamos $S_i, \tilde{S}_i \subseteq M$ secciones transversales a las separatrices (las componentes conexas de $W_X^s(\sigma_i) - \sigma_i$) de σ_i por los puntos $q_i \in S_i, \tilde{q}_i \in \tilde{S}_i$. Saturando S_i , y \tilde{S}_i por el flujo X_t junto con $W_X^u(\sigma_i)$ por el Lema 2.6.2 hay una fibración:

$$F_i = \{X_t[S_i] : t \leq 0\} \cup \{X_t[\tilde{S}_i] : t \leq 0\} \cup W_X^u(\sigma_i)$$

$$\pi_i : F_i \longrightarrow W_X^s(\sigma_i) \quad x \longmapsto \begin{cases} X_{t_x}(q_i) & x \in X_{t_x}[S_i] \\ X_{t_x}(\tilde{q}_i) & x \in X_{t_x}[\tilde{S}_i] \\ \sigma_i & x \in W_X^u(\sigma_i) \end{cases}$$

Sabemos que π_i es continua y, para cada i , existe $I_i \subseteq \partial V$ intervalo abierto de p_i con $I_i \subseteq F$. Por lo tanto $\pi_1|_{I_i} : I_i \subseteq \partial V \rightarrow \pi_i[I_i] \subseteq W_X^s(\sigma)$ es homeomorfismo. Como $Y \in U$ y $Y \bar{\cap} \partial V$ podemos hacer una construcción análoga para Y .

Construiremos ahora la equivalencia topológica entre X y Y .

Sea $h(\sigma) = \sigma(Y)$, $h(\sigma_i) = \sigma_i(Y)$, $h(p_i) = p_i(Y)$, $h(q_i) = q_i(Y)$ y $h(\tilde{q}_i) = \tilde{q}_i(Y)$. Para $x \in W_X^s(\sigma_i)$ existe un único $t_x \in \mathbb{R}$ tal que $X_{t_x}(q_i) = x$ o $X_{t_x}(\tilde{q}_i) = x$, definimos

$$h(x) = h(X_{t_x}(q_i)) = Y_{t_x}h(q_i) = Y_{t_x}(q_i(Y))$$

$$h(x) = h(X_{t_x}(\tilde{q}_i)) = Y_{t_x}h(\tilde{q}_i) = Y_{t_x}(\tilde{q}_i)$$

según sea el caso. Para $x \in F_i$, definimos $h(x) = \pi_i(Y)^{-1}h\pi_i(x)$, donde $\pi_i(Y)$ es la proyección de la fibración asociada a Y .

Tenemos h definida en una unión ajena de intervalos $I_i \subseteq \partial V$. Como la fibración depende continuamente del campo, Y cercano a X implica $\pi_i(Y)$ cercana a π_i . Por lo tanto $h|_{I_i}$ es próxima a la identidad y podemos extender h al círculo ∂V de manera continua.

Repitiendo esta construcción para cada atractor σ de X . Si $z \in M$, entonces $\omega(z)$ es un atractor o una silla.

- Si $\omega(z)$ es un atractor y $V \subseteq M$ es abierto como en la construcción anterior, entonces $\omega(z) \in V$ y hay únicos $t_z \in \mathbb{R}$ y $x \in \partial V$ tales que $X_{t_z}(x) = z$. Definimos entonces $h(z) = h(X_{t_z}(x)) = Y_{t_z}(h(x))$ (h ya está definida en ∂V).

- Si $\omega(z)$ no es un atractor o $z \in V$, entonces $z \in F_i$ para alguna i . Por lo que $h(z)$ ya está definido.

Tenemos ya definida h en todo M . Intercambiando los papeles de X y Y , obtenemos la inversa de h . Falta mostrar que h y h^{-1} son continuas.

Por la continuidad de los flujos de X y Y , y por la continuidad de cada π_i , al ser $W^s(\sigma)$ abierto de M para σ atractor, h es continua en $\bigcup_{\sigma \in A} W_X^s(\sigma)$. Donde $A = \{\sigma : \sigma \text{ es elemento crítico atractor de } X\}$. Para mostrar la continuidad de h en $W_X^s(\sigma_i)$, donde σ_i es una silla, fijamos $x \in W_X^s(\sigma_i)$. Sea $\{x_n\} \subseteq M$ sucesión convergente a x . Si F_i es la vecindad tubular alrededor de σ_i entonces $x \in F_i$ y podemos suponer $\{x_n\} \subseteq F_i$. Por la definición de h , esta lleva fibras en fibras, es decir $h\pi_i(X) = \pi_i(Y)h$.

Sean $x_n^s = \pi_i(X)(x_n)$, entonces $\pi_i(Y)h(x_n) = h(x_n^s) = bY_{t_{x_n^s}}(q_i(Y))$. Como $x_n \rightarrow x$ cuando $n \rightarrow \infty$ y $\pi_i(X)$ es continua, la sucesión $x_n^s = \pi_i(X)(x_n)$ converge a $\pi_i(x) = x$. Por otro lado $t_{x_n^s} \rightarrow t_x$ cuando $n \rightarrow \infty$ lo que implica:

$$\pi_i(Y)h(x_n) = Y_{t_{x_n^s}}(q_i(Y)) \rightarrow Y_{t_x}(q_i(Y)) = h(x)$$

Por lo tanto $h(\pi_i(X)x_n) = \pi_i(Y)h(x_n) \rightarrow h(x) = \pi_i(Y)h(x)$. Con esto mostramos que la parte estable de la sucesión $\{x_n\}$ converge a x .

Probaremos que la parte inestable también converge a x . Sean $I_i \subseteq \partial V$, $I_i(Y) = h(I_i)$ segmentos transversales a X y Y respectivamente. Sean $\tilde{F}_i = (\bigcup_{t \geq 0} X_t[I_i]) \cup W_X^s(\sigma_i)$ y $\tilde{F}_i(Y) = (\bigcup_{t \geq 0} Y_t[I_i(Y)]) \cup W_Y^s(\sigma_i(Y))$ vecindades tubulares para $W_X^s(\sigma)$ y $W_Y^s(\sigma(Y))$ respectivamente, y $\tilde{\pi}_i(X) : \tilde{F}_i \rightarrow W_X^u(\sigma_i)$, $\tilde{\pi}_i(Y) : \tilde{F}_i(Y) \rightarrow W_Y^u(\sigma_i(Y))$ las proyecciones correspondientes. Como la sucesión x_n converge a x y $x \in W_X^s(\sigma_i)$, al ser $\tilde{\pi}_i(X)$ continua, la sucesión $\{\tilde{\pi}_i(X)x_n\}$ converge a $\tilde{\pi}_i(X)x = \sigma_i$. Pero $\tilde{\pi}_i(X)x_n \in W_X^u(\sigma_i)$ y h es continua en $W_X^u(\sigma_i)$. Se sigue que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h(\tilde{\pi}_i(X)x_n) = h(\sigma_i) = \sigma_i(Y) = \tilde{\pi}_i(Y)h(x)$$

Por lo tanto $h(x_n)$ converge a x respecto a su parte estable e inestable. Concluimos que $\lim_{n \rightarrow \infty} h(x_n) = h(x)$, es decir, h es continua.

Caso 2: Supongamos que X tiene órbitas cerradas, al ser estas hiperbólicas, deben ser atractoras o repulsoras. Sabemos que hay campos arbitrariamente cercanos a X que no son conjugados. Para mostrar esto basta alterar el periodo de alguna órbita cerrada de X . Evitaremos esta dificultad reparametrizando el campo X y Y de manera que se preserven las órbitas de los elementos críticos, pero haciendo que las órbitas cerradas tengan el mismo periodo τ . Esto es posible gracias al Lema 3.1.3.

Sean X y Y campos cuyas órbitas cerradas tienen periodo τ y con $X \in M - S$. Para simplificar, dividiremos la demostración en 2 casos.

Caso 2a: Todas las órbitas cerradas de X son atractoras. Trataremos de imitar la demostración del caso 1.

Sea σ elemento crítico atractor de X . Si σ es una singularidad, realizamos la misma construcción que en el primero caso. Si σ es una órbita cerrada, tomamos una sección transversal invariante Σ . Sean $I, I(Y)$ dominios fundamentales para las transformaciones de Poincaré asociadas a X y Y respectivamente. $I, I(Y)$ son dos círculos ajenos. Sean $\sigma_i \leq \sigma$ una silla y S_i, \tilde{S}_i secciones transversales a $W_X^s(\sigma_i)$ que intersectan diferentes

componentes conexas. S_i, \tilde{S}_i son también transversales a $W_Y^s(\sigma_i(Y))$. Sean

$$F_i = \bigcup_{t \geq 0} X_t[S_i] \cup W_X^u(\sigma_i) \cup \bigcup_{t \geq 0} X_t[\tilde{S}_i]$$

$$F_i(Y) = \bigcup_{t \geq 0} Y_t[S_i] \cup W_Y^U(\sigma_i(Y)) \cup \bigcup_{t \geq 0} Y_t[\tilde{S}_i]$$

vecindades tubulares para X y Y respectivamente. Sean $\pi_i(X) : F_i \rightarrow W_X^s(\sigma_i)$, $\pi_i(Y) : F_i(Y) \rightarrow W_Y^s(\sigma_i(Y))$ las proyecciones respectivas. Restringimos los dominios de las proyecciones a $C_i = I \cap F_i$ y $C_i(Y) = I(Y) \cap F_i(Y)$. Así, $\pi_i|_{C_i} : C_i \rightarrow \pi_i[C_i] \subseteq W_X^s(\sigma_i)$ y $\pi_i(Y)|_{C_i(Y)} : C_i(Y) \rightarrow \pi_i(Y)[C_i(Y)] \subseteq W_Y^s(\sigma_i(Y))$ son homeomorfismos. Fijamos

$$\begin{aligned} q_i &= S_i \cap W_X^s(\sigma_i) & q_i(Y) &= S_i \cap W_Y^s(\sigma_i(Y)) \\ \tilde{q}_i &= \tilde{S}_i \cap W_X^s(\sigma_i) & \tilde{q}_i(Y) &= \tilde{S}_i \cap W_X^s(\sigma_i(Y)) \\ p_i &= I \cap W_X^u(\sigma_i) & p_i(Y) &= I(Y) \cap W_Y^u(\sigma_i(Y)) \end{aligned}$$

Definimos $h(q_i) = q_i(Y)$, $h(\tilde{q}_i) = \tilde{q}_i(Y)$, $h(p_i) = p_i(Y)$ y $h(\sigma_i) = \sigma_i(Y)$. Si $x \in W_X^s(\sigma_i)$, hay un único $t_x \in \mathbb{R}$ tal que $X_{t_x}(q_i) = x$ o $X_{t_x}(\tilde{q}_i) = x$. Extendemos h a $W_X^s(\sigma_i)$ por:

$$h(x) = \begin{cases} h(X_{t_x}(q_i)) = Y_{t_x}(h(q_i)) = Y_{t_x}(q_i(Y)) \\ h(X_{t_x}(\tilde{q}_i)) = Y_{t_x}h(\tilde{q}_i) = Y_{t_x}(\tilde{q}_i(Y)) \end{cases}$$

según sea el caso. Extendemos h a C_i , para $z \in C_i$: $h(z) = \pi_i^{-1}(Y)h(\pi_i(z))$. Como las proyecciones son homeomorfismos en C_i y $C_i(Y)$, h está bien definida en C_i . Tenemos entonces h definida en una unión disjunta $C_i \subseteq I$, como X es próxima a Y , π_i es próxima a $\pi_i(Y)$ y por lo tanto h es próxima a la identidad. Luego, podemos extender h continuamente a I (pues I es unión disjunta de círculos). Si $x \in W_X^s(\sigma)$, existen únicos $t_x \in \mathbb{R}$ y $p \in I$ tales que $X_{t_x}(p) = x$. Extendemos h a $W_X^s(\sigma)$ por:

$$h(x) = h(X_{t_x}(p)) = Y_{t_x}h(p)$$

Tenemos ya h definida en todo M . Intercambiando los papeles de X y Y en la construcción anterior, encontramos la inversa de h . La demostración de la continuidad de h es análoga a la del caso 1.

Caso 2b: X tiene órbitas cerradas atractoras y repulsoras.

Extenderemos la construcción hecha en el caso 2a.

Sean σ órbita cerrada repulsora, Σ sección transversal invariante de σ , e I dominio fundamental de la transformación de Poincaré asociada. Sean σ_i sillars con $\sigma \leq \sigma_i$ y $p_i \in W_X^u(\sigma_i) \cap I$. I queda descompuesto en una unión de subintervalos cerrados que, ordenándolos correctamente:

$$I = [p_1, p_2] \cup [p_2, p_3] \cup \cdots \cup [p_{n-1}, p_n] \cup [p_n, p_1]$$

de manera que, si $x, y \in (p_i, p_{i+1})$ entonces $\omega(x) = \omega(y)$.

Sean $a \in (p_{i-1}, p_i)$, $b \in (p_i, p_{i+1})$ tales que, si $x \in [a, b]$ entonces, $O_X(x) \cap S_i \neq \emptyset$. Utilizando el Lema 3.1.3. reparametrizando a X de ser necesario, podemos suponer que $\forall x \in [a, b]$ $X_1(x) \in S_i$. Sean $[a', b'] \subset (a, b)$ con $p_i \in (a', b')$. Utilizando nuevamente el Lema 3.1.3. podemos suponer que:

$$\begin{aligned} \forall y \in [X_1(a), X_1(a')] &\subseteq S_i & X_1(y) &\in \Sigma_i \text{ (o } C_j) \\ \forall z \in [X_1(b'), X_1(b)] &\subseteq S_i & X_1(z) &\in C_k \text{ (o } \Sigma_k) \end{aligned}$$

donde Σ_j, Σ_k son secciones transversales invariantes de atractores y $C_j, C_k \subseteq \partial V$, con V vecindad abierta de un elemento crítico atractor. Es decir:

$$X_2[a, a'] \subseteq \Sigma_j \text{ (o } C_j) \quad X_2[b', b] \subseteq C_k \text{ (o } \Sigma_k)$$

Repetimos estas reparametrizaciones para cada $p_i \in I$. Extendiendo la reparametrización a todo I de manera que:

$$\forall x \in I \quad X_2(x) \in C_i \text{ o } X_2(x) \in \Sigma_j$$

según el caso. Realizamos la misma reparametrización para las órbitas cerradas repulsoras de Y . Definimos h de manera análoga al caso 2a, añadiendo el caso $h(\Sigma \cap \sigma) = \Sigma \cap \sigma(Y)$, donde σ es una órbita cerrada repulsora y Σ es la sección transversal invariante. Como σ y $\sigma(Y)$ tienen el mismo periodo, $h(\sigma) = \sigma(Y)$. \square

4.2. Densidad de los campos de Morse-Smale

En esta sección mostraremos que la clase de los campos de Morse-Smale es densa en $\mathfrak{X}^k(M^2)$ para M orientable. Esta demostración es debida a Jacob Palis y Wellington de Melo, la cual es una simplificación de la prueba dada originalmente por Peixoto.

Iniciamos demostrando el teorema de densidad para la esfera S^2 . Debido al Teorema de Poincaré-Bendixson, es un caso simple que ilustra el caso general.

Definición. Sea $X \in \mathfrak{X}^k(M)$ con $\gamma \subseteq M$ órbita de X . Decimos que γ es recurrente si y sólo si $\omega(\gamma) \subseteq \gamma$ o $\alpha(\gamma) \subseteq \gamma$.

En particular, si $\gamma \subseteq \omega(\gamma)$, diremos que γ es ω -recurrente. Si $\gamma \subseteq \alpha(\gamma)$, diremos que γ es α -recurrente.

Teorema 4.2.1. Sea $X \in \mathfrak{X}^k(S^2)$. $X \in K - S \implies X \in M - S$.

Demostración. Sea $X \in \mathfrak{X}^k(S^2)$ un campo de Kupka-Smale. Como X tiene un número finito de singularidades, por el Teorema de Poincaré-Bendixson para $p \in S^2$, $\omega(p)$ tiene tres posibilidades:

- $\omega(p)$ es una singularidad.
- $\omega(p)$ es una órbita cerrada.
- $\omega(p)$ son sillars unidas por órbitas regulares.

pero $X \in K - S$ implica que X no tiene ligación de sillars. Luego, $\omega(p)$ es una singularidad o una órbita cerrada. Es decir, $\omega(p)$ es un único elemento crítico, al igual que $\alpha(p)$. Mostraremos que hay un número finito de órbitas cerradas, con lo cual sólo habría una cantidad finita de elementos críticos, al ser estos hiperbólicos, tendríamos que $X \in M - S$.

Demostraremos esto por contradicción. Supongamos que X tiene una cantidad infinita de elementos críticos. Por la compacidad de S^2 , existe $\{x_n\} \subseteq M$ sucesión convergente, digamos a x , donde $x_i \in \gamma_i$ y γ_i es una órbita cerrada (Hay una cantidad finita de singularidades) tales que $i \neq j$ implica $\gamma_i \neq \gamma_j$. Si $\omega(x)$ es un atractor, entonces $W^s(\omega(x)) \subseteq S^2$ es abierto y por lo tanto hay $U \subseteq S^2$ vecindad abierta de x con $U \subseteq W^s(\omega(x))$. Luego, existe

un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ $x_n \in U$, pero $x_n \in \gamma_n$ órbita cerrada implica que $\gamma_n = \omega(x_n)$. Como $x_n \in W^s(\omega(x))$ entonces $\omega(x_n) = \omega(x)$. Se sigue que $\forall n \geq n_0$ $\gamma_n = \omega(x)$ una contradicción. Ya que, para n suficientemente grande, $\gamma_n \neq \gamma_{n+1}$. Por lo mismo, $\omega(x)$ no puede ser un repulsor. Así, $\omega(x)$ y $\alpha(x)$ son sillas. Al no haber ligación de sillas es necesario que $\alpha(x) = x = \omega(x)$, es decir que x es una singularidad silla. Como el ω -límite de las componentes conexas de $W^u(x) - \{x\}$ son dos atractores distintos, digamos σ_1 y σ_2 . Dada $V \subseteq S^2$ vecindad abierta de x , si $y \in V - W^s(x)$ entonces $\omega(y) = \sigma_i$ para alguna $i \in \{1, 2\}$. Por otro lado, V abierto implica que existe un natural $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_1$ $x_n \in V$ y por lo tanto $\gamma_n = \omega(x_n) = W^s(\sigma_i)$, una contradicción.

Así, existe sólo una cantidad de órbitas cerradas y por lo tanto una cantidad finita de elementos críticos. \square

Corolario. *El conjunto de los campos de Morse-Smale es residual, y por lo tanto denso, en $\mathfrak{X}^k(S^2)$.*

Demostración. $K - S$ es residual en $\mathfrak{X}^k(S^2)$. \square

Seguiremos la misma idea para demostrar que los campos de Morse-Smale son densos en M^2 . La demostración se vuelve más delicada pues, en $M^2 \neq S^2$, puede haber órbitas recurrentes no triviales. Es decir, que no sean elementos críticos. El flujo irracional del toro ofrece el ejemplo más simple de recurrencia no trivial.

Describiremos algunos ejemplos de campos que exhiben órbitas recurrentes no triviales.

Ejemplo. Sea $\lambda : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $h(x, y, z) = (x, y, -z)$, la reflexión sobre el plano xy . Tomamos el toro $T^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ de modo que $\lambda(T^2) = T^2$, entonces $T^2 \cap \{z = 0\}$ es la unión ajena de dos círculos. Sea $X = \text{grad}(h)$, donde $h : T^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es la función altura. X es simétrico respecto al plano xy , $\lambda_*X = -X$, X tiene 4 singularidades: un atractor p , un repulsor r y dos sillas s_1, s_2 . Sea $C_1 \subseteq T^2$ un círculo transversal a X que delimita a un disco $D_1 \subseteq T^2$ con $p \in D_1$. Sean $C_2 = \lambda[C_1]$ y $D_2 = \lambda[D_1]$ con $r \in D_2$. Por la simetría del campo X , si $p \in C_1$ no está en la separatriz de una silla, entonces $O(p) \cap C_2 = \lambda(p) = q$. Identificando C_1 y C_2 con S^1 sea $g : C_1 \rightarrow C_2$ difeomorfismo dado por $h = R_\alpha \circ \lambda$, donde R_α es la rotación de ángulo α . Fijamos $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Ahora, identificamos C_1 con C_2 en $T^2 - (D_1 \cup D_2)$ bajo la relación de equivalencia generada por g . Sean M la variedad resultante, $P : T - (D_1 \cup D_2) \rightarrow M$ la proyección canónica y $Y = P_*X$. M es difeomorfo al dos-Toro y toda órbita de Y , a excepción de las dos sillas s_1, s_2 y sus separatrices inestables, intersectan a $P[C_2]$ por lo menos una vez. Ya que, al ser $r \in D_2$ repulsor, si $x \in P[C_2]$ existe un $y \in C_1$ con $P(y) = x$ y por lo tanto $O_X^+(y) \cap C_1 = \lambda^{-1}(y)$, pero $\lambda^{-1}(y) \sim h\lambda^{-1}(y) = R_\alpha\lambda\lambda^{-1}(y) = R_\alpha(y)$. Luego, $O_Y^+(y)$ intersecta $P[C_2]$ por primera vez en el punto $P(R_\alpha(y))$. Repitiendo este argumento, podemos concluir que $O_Y^+(y) \cap P[C_2] = \{P(R_\alpha^n(y)) : n \in \mathbb{N}\}$. Como R_α es una rotación irracional, entonces $O_Y^+(y) \cap P[C_2]$ es denso en $P[C_2]$. Esto pues R_α^n es denso en C_2 y $P|_{C_2}$ es un difeomorfismo.

Así, toda órbita de Y a excepción de las sillas y sus separatrices estables es densa en $P[C_2]$ y por lo tanto densa en el dos-Toro.

Ejemplo. Describiremos un campo de Kupka-Smale $X \in \mathfrak{X}^\infty(\text{dos-Toro})$ con las siguientes propiedades:

- X tiene sólo dos singularidades s_1, s_2 las cuales son sillas.

- Toda órbita regular es densa en T^2 .

Probaremos después que un campo X con estas propiedades puede ser aproximado por un campo que tenga ligadura de sillars. Por lo tanto $K - S$ no es abierto en \mathcal{X}^k (dos toro).

Consideremos $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Sea $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$ proyección canónica. Construiremos primero un campo $\tilde{Y} \in X^\infty(\mathbb{R}^2)$ de manera que se proyecte a T^2 bajo π . Para eso necesitamos que, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^2$, si $x - y \in \mathbb{Z}$ entonces $\tilde{Y}(x) = \tilde{Y}(y)$. Por lo que sólo es necesario describir \tilde{Y} en el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$.

\tilde{Y} tiene un repulsor en $(1/2, 1/2)$, un atractor en el origen y dos puntos silla con coordenadas $(0, 1/2)$, $(1/2, 0)$. Tomamos $C_1, C_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ dos círculos de radio $\delta < 1/4$ con centro en el repulsor y el atractor respectivamente.

Sea $\alpha \in (0, \pi/2) \subseteq C_1$. Entonces $O_{\tilde{Y}}^+(\alpha)$ interseca a C_2 en un único $\varphi_1(\alpha) \in (-\pi, -\pi/2)$. Bajo esta regla de correspondencia definimos $\varphi_1 : (0, \pi/2) \rightarrow (-\pi, -\pi/2) \subseteq C_2$, el cual es un difeomorfismo. Análogamente:

$$\begin{aligned}\varphi_2 &: \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \\ \varphi_3 &: \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \longrightarrow \left(-2\pi, -\frac{3\pi}{2}\right) \\ \varphi_4 &: \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \longrightarrow \left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

Si \tilde{Y} es simétrico, entonces:

$$\varphi_i(\alpha) = \begin{cases} -\alpha - \frac{\pi}{2} & i = 1, 3 \\ -\alpha + \frac{\pi}{2} & i = 2, 4 \end{cases}$$

Sea $\varphi : C_2 \rightarrow C_1$ dado por $\varphi(\alpha) = -\alpha + \epsilon$ difeomorfismo dado por reflejar y rotar por ϵ . Escogemos un ϵ tal que $\epsilon/\pi \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Sean $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ discos cuyos bordes sean C_1 y C_2 respectivamente, y $\tilde{D}_1 = \pi[D_1] \subseteq T$, $\tilde{D}_2 = \pi[D_2] \subseteq T$, $M = T - (\tilde{D}_1 \cup \tilde{D}_2)$. Bajo la relación de equivalencia generada por el difeomorfismo φ , M/\sim_φ es difeomorfo al dos-Toro. Sean $P : M \rightarrow T^2$ la proyección canónica, $Y = \pi_*\tilde{Y}$ y $X = P_*Y$.

Notemos que $Y \in M - S$ ya que, a diferencia del ejemplo anterior:

- Y tiene un número finito de elementos críticos, todos hiperbólicos.
- Y no tiene ligación de sillars.
- El ω y α -límite de toda órbita es un único elemento crítico (ya que esto es cierto para \tilde{Y}).

Ahora verificaremos que toda órbita de X es densa en T^2 . Notemos primero que la órbita de cualquier $\theta \in T^2 - \{\bar{s}_1, \bar{s}_2\}$ interseca a $P[\tilde{C}_1]$, donde $\bar{s}_i = P\pi(s_i)$. Basta mostrar que, si $\theta \in C_1$ con $\theta \neq n\pi/2$, es decir con $\theta \notin W_X^u(\bar{s}_i)$, entonces $O_Y^+(p)$ interseca a C_2 en $\varphi_i(\theta) = -\theta \pm \pi/2$, pero $\varphi_i(\theta) \sim_\varphi \varphi\varphi_i(\theta)$ y $\varphi\varphi_i(\theta) = -(-\theta \pm \pi/2) + \epsilon = \theta \mp \pi/2 + \epsilon$. Por lo que $O_X^+(\theta)$ interseca a $P[C_1]$ por primera vez en $\theta \mp \pi/2 + \epsilon$. Supongamos que se da el caso $\theta + \pi/2 + \epsilon$. Si $\forall k \in \mathbb{Z}$ sucediera que $\theta + \epsilon \neq k\pi/2$, entonces $O_X^+(\theta + \pi/2 + \epsilon)$ interseca a $P[C_1]$ por primera vez en $\theta + 2\epsilon$ o en $\theta + \pi + 2\epsilon$. Repitiendo este argumento,

si $\theta j\epsilon \neq k\pi/2 \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$, entonces $O_X^+(\alpha)$ intersecciona a $P[C_1]$ por n -ésima vez en el punto $\theta + n\epsilon + M_n\pi/2$ donde $M_n \in \mathbb{Z}$ es tal que $-n \leq M_n \leq n$, pero $\epsilon/\pi \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ implica que $\{\theta + n\epsilon + M_n\pi/2 : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $P[C_1]$. Esto puesto que $\epsilon/\pi \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ y $\theta + n\epsilon \neq k\pi/2 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto $n\epsilon + M_n\pi/2 \neq 2k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$. Luego $O_X^+(\theta)$ es densa en $P[C_1]$ y por lo tanto $O_X^+(\theta)$ es densa en T_2 .

Existen $j \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$ con $\theta + j\epsilon = k\pi/2$ si y sólo si $\omega(\theta) = \bar{s}_i$ para alguna $i \in \{1, 2\}$. Como no hay ligación de sillars, $\alpha(\theta) \neq \bar{s}_i$ para $i \in \{1, 2\}$, por lo que repitiendo el mismo argumento para $O_X^-(p)$ podemos hacer notar que $O_X^-(p)$ es densa en $P[C_2]$ cambiando φ por φ^{-1} y φ_i por φ_i^{-1} . Por lo tanto toda órbita regular es densa en T^2 .

Ejemplo. Describiremos brevemente un ejemplo debido a Cherry de un campo analítico en el toro T^2 que tiene recurrencia no trivial. La construcción es algo complicada y no la haremos aquí. Una construcción viene en el libro de J. Palis y W. De Melo “Geometric Theory of Dynamical Systems: An Introduction”

Representamos a T^2 por un cuadrado con lados opuestos identificados. El campo de Cherry X tiene un repulsor r y una silla s . Las separatrices inestables de s , γ_1 y γ_2 , son ω -recurrentes. De hecho $\omega(\gamma_2) \supseteq \gamma_1 \cup \gamma_2$. X no tiene órbitas cerradas, por lo que es trivialmente un campo de Kupka-Smale, pero puede ser aproximado por un campo con autoligación de silla.

Ahora, consideremos $r \in D \subseteq T^2$ un disco con borde C , de manera que $C \bar{\cap} X$ y $s \notin D$.

Sean M variedad de dimensión 2 y $Y \in \mathfrak{X}^k(M)$ que tenga un atractor hiperbólico p . Tomamos $\tilde{D} \subseteq M$ con borde \tilde{C} de manera que $\tilde{C} \bar{\cap} Y$ y $p \in \tilde{D}$ es el único elemento crítico de Y en \tilde{D} . Fijamos $h : C \rightarrow \tilde{C}$ difeomorfismo, identificando $C \sim_h \tilde{C}$ obtenemos una variedad diferenciable $N = (T - D) \cup (M - \tilde{D}) / \sim_h$. El campo $\tilde{X} \in \mathfrak{X}^k(N)$ inducido por X y Y tiene una órbita recurrente no trivial. Así podemos construir campos con recurrencia no trivial en toda superficie distinta de S^2 y $P\mathbb{R}^2$.

Definición. Sea $X \in \mathfrak{X}^k(M)$. Decimos que $K \subseteq M$ es un conjunto minimal para X si K es cerrado, no vacío, invariante bajo el flujo de X y K no tiene un subconjunto propio con esas características. Es decir $S \subseteq K$ cerrado, no vacío, invariante bajo el flujo de X implica que $S = K$.

Observación. K minimal para X y $\gamma \subseteq M$ órbita de X con $\gamma \subseteq K$ implica γ recurrente, ya que $\omega(\gamma) \subseteq K$ y $\omega(\gamma)$ es un conjunto cerrado, no vacío e invariante bajo el flujo de X , por lo tanto $\omega(\gamma) = K \supseteq \gamma$. Análogamente $\alpha(\gamma) = K \supseteq \gamma$.

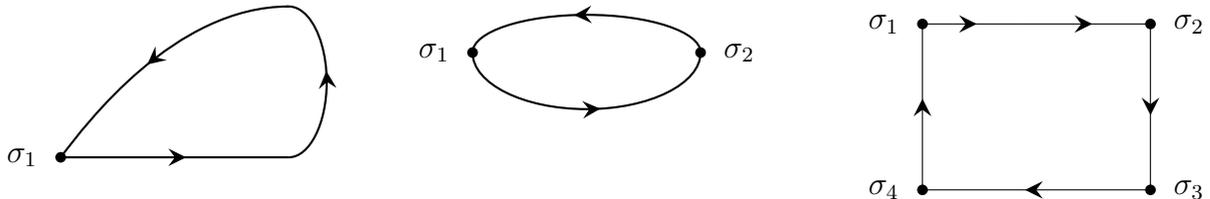
Lema 4.2.2. Para $F \subseteq M$ cerrado no vacío e invariante bajo el flujo de $X \in \mathfrak{X}^k(M)$ existe $K \subseteq F$ conjunto minimal para X .

Demostración. Sea $\mathfrak{F} = \{A \subseteq F : A \text{ es cerrado, no vacío e invariante bajo el flujo } X_t\}$. Definimos un orden parcial sobre \mathfrak{F} : $A \leq B \Leftrightarrow A \supseteq B$. Sea $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathfrak{F}$ una cadena y $A = \bigcap_{i \in I} A_i$. Al ser M compacto, cada A_i es compacto. Luego, $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia anidada de compactos y por lo tanto $A \neq \emptyset$. Sea $t \in \mathbb{R}$. Como X_t es difeomorfismo tenemos que $X_t[\bigcap_{i \in I} A_i] = \bigcap_{i \in I} X_t[A_i] = \bigcap_{i \in I} A_i$. Luego, A es cerrado, no vacío e invariante bajo el flujo de X . Se sigue que $A \in \mathfrak{F}$ es una cota para la familia $\{A_i\}_{i \in I}$. Por el Lema de Zorn \mathfrak{F} tiene un elemento maximal $K \subseteq F$, el cual es un conjunto minimal para X . \square

Definición. Sea $X \in \mathfrak{X}^k(M^2)$. Un gráfico para X es un conjunto cerrado y conexo de M constituido de sillars y separatrices tales que:

- El ω -límite y α -límite de cada separatriz del gráfico son sillas.
- Cada silla del gráfico tiene, por lo menos, una separatriz estable y una inestable pertenecientes al gráfico.

Ejemplo. Algunos gráficos son los siguientes:



Proposición 4.2.3. *Sea $X \in \mathfrak{X}^k(M^2)$ cuyas singularidades son todas hiperbólicas. Si X sólo tiene órbitas recurrentes triviales, entonces el ω -límite de cualquier órbita es un elemento crítico o un gráfico. Análogamente para el α -límite.*

Demostración. Sea γ trayectoria de X . Supongamos que $\omega(\gamma)$ no es un elemento crítico. $\omega(\gamma)$ no puede contener un elemento crítico atractor ni repulsor. Como $\omega(\gamma) \neq \emptyset$, $\omega(\gamma)$ tiene más de una singularidad silla. Luego, contiene separatrices de sillas, las cuales deben ser un número finito, ya que sólo hay un número finito de sillas.

Supongamos primero que cada separatriz tiene una única silla como ω -límite. Veamos que $\omega(\gamma)$ es un gráfico. Sean $\sigma_1 \in \omega(\gamma)$ una silla y $\gamma_1 \subseteq \omega(\gamma)$ separatriz inestable de σ_1 . Sea $\sigma_2 = \omega(\gamma_1) \in \omega(\gamma)$ y $\gamma_2 \subseteq \omega(\gamma)$ separatriz inestable de σ_2 . $\sigma_3 = \omega(\gamma_2) \in \omega(\gamma)$ y $\gamma_3 \subseteq \omega(\gamma)$ separatriz inestable de $\sigma_3 \dots$ Repitiendo este proceso suficientes veces, llegamos a una sucesión $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_l = \gamma_1$ con $\omega(\gamma_i) = \alpha(\gamma_{i+1})$, la cual define un gráfico. Sea $G \subseteq \omega(\gamma)$ gráfico maximal. Mostraremos que $G = \omega(\gamma)$.

Si $\omega(\gamma) \not\subseteq G$, entonces existe $\tilde{\sigma} \in \omega(\gamma) - G$ silla. Repitiendo el proceso anterior obtenemos un gráfico $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \dots, \tilde{\gamma}_r$. Luego, $\tilde{G} = G \cup \tilde{\gamma}_1 \cup \dots \cup \tilde{\gamma}_r$ es un gráfico y $G \subsetneq \tilde{G}$ contradiciendo el hecho de que G fuese maximal. Por lo tanto $\omega(\gamma) = G$.

Supongamos ahora que hay una separatriz $\gamma_1 \subseteq \omega(\gamma)$ tal que $\omega(\gamma_1)$ no es una única silla. $\omega(\gamma_1) \subseteq \omega(\gamma)$ y $\gamma_1 \not\subseteq \omega(\gamma_1)$ ya que toda recurrencia es trivial.

Si $\omega(\gamma_1)$ sólo contiene separatrices que tangen una única silla como ω -límite, por el argumento anterior, $\omega(\gamma_1)$ es un gráfico maximal. Por lo que $\omega(\gamma) = \omega(\gamma_1)$, se sigue que $\gamma_1 \subseteq \omega(\gamma) = \omega(\gamma_1)$, una contradicción.

Por lo tanto, hay $\gamma_2 \subseteq \omega(\gamma_1)$ separatriz tal que $\omega(\gamma_2)$ no es una única singularidad, con $\omega(\gamma_2) \subsetneq \omega(\gamma_1) \subsetneq \omega(\gamma)$. Continuando el argumento, tenemos una sucesión decreciente de conjuntos no vacíos $\omega(\gamma) \supsetneq \omega(\gamma_1) \supsetneq \dots \supsetneq \omega(\gamma_r) \supsetneq \omega(\gamma_{r+1}) \supsetneq \dots$ pero sólo hay un número finito de separatrices. Luego, debe existir un $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\omega(\gamma_i) = \omega(\gamma_{i+1})$, esto implica que $\gamma_{i+1} \subseteq \omega(\gamma_i) = \omega(\gamma_{i+1})$, una contradicción. Por lo tanto, no puede existir $\gamma_1 \subseteq \omega(\gamma)$ que satisfaga: $\omega(\gamma_1)$ no es una única singularidad silla. \square

Corolario. *Sea $X \in \mathfrak{X}^k(M)$ campo cuyas órbitas recurrentes son todas triviales.*

$$X \in K - S \implies X \in M - S$$

Demostración. Como $X \in K - S$, X no tiene ligación de sillas, por lo tanto no hay gráficos. Por la proposición anterior, el ω y α -límite de cualquier órbita es un único elemento crítico. Usando el mismo argumento que en el Teorema 4.2.1, vemos que X tiene un número finito de órbitas cerradas y por lo tanto tiene un número finito de elementos críticos, los cuales son todos hiperbólicos. Luego, X cumple la caracterización de campos de Morse-Smale para variedades de dimensión 2:

- X tiene una cantidad finita de elementos críticos, los cuales son todos hiperbólicos.
- No hay ligación de sillas.
- Toda órbita γ de X tiene como ω límite un único elemento crítico y como α límite un único elemento crítico.

□

Demostremos ahora que $X \in \mathfrak{X}^k(M^2)$, con M^2 variedad orientable de dimensión 2, puede ser aproximado por un campo Y . El cual tiene una vecindad $U(Y) \subseteq \mathfrak{X}^k(M)$ tal que $\forall Z \in U(Y)$ Z sólo posee órbitas recurrentes triviales. Aproximamos Y por un campo $Z_0 \in K - S$, por el corolario anterior, $Z_0 \in M - S$.

Primero algunas consideraciones sobre órbitas recurrentes no triviales.

Sea $X \in \mathfrak{X}^k(M^2)$ con $\gamma \subseteq M$ órbita ω -recurrente, es decir, $\gamma \subseteq \omega(\gamma)$. Afirmamos que $\forall p \in \gamma$ existe un círculo C transversal a X que p . Consideremos F_1 caja de flujo centrada en p . Sean ab, cd los lados de F_1 transversales a X . Como $p \in \omega(\gamma)$, γ intersecciona ab infinitas veces. Sean p_0 la primer intersección de $O^-(p)$ con ab , y p_1 la primer intersección de $O^+(p)$ con ab . Supongamos que p_1 está por debajo de p_0 , en caso contrario la construcción es análoga.

Sea F_2 caja de flujo que contenga el arco de trayectoria q_0p_1 , donde q_0 es la primer intersección de $O^+(p)$ con cd . Si M es orientable existe un $q_1 \in cd$ por arriba de q_0 de manera que $O^+(q_1)$ intersecciona a ab en p_2 con p_2 por arriba de p_1 y por debajo de p_0 . En F_2 tomamos un arco de trayectoria q_1p_3 con p_3 por arriba de p_2 , transversal a X , con inclinación positiva en q_1 y p_3 . Completamos el círculo tomando en F_1 un arco transversal a X , p_3q_1 que pase por p . Si M es no-orientable, se puede dar el caso que p_2 esté por debajo de p_1 , pero al ser γ ω -recurrente, las intersecciones de γ con cd y ab son densas. Luego, debe haber un $q_n \in cd$ por encima de q_0 de manera que $p_{n+1} \in ab$ este por encima de p_1 y por debajo de p_0 . Sustituyendo q_1 por q_n y p_2 por p_{n+1} en la construcción anterior, obtenemos el círculo C .

Sean $C \subseteq M$ círculo transversal a X por $p \in \gamma$ y $D \subseteq C$ el conjunto de puntos cuyas órbitas positivas vuelven a interseccionar a C . Sea $P : D \rightarrow C$ la transformación de Poincaré que a cada $x \in D$ le asocia el primer punto donde $O^+(x)$ vuelve a interseccionar a C . Por el teorema del flujo tubular, D es abierto. Luego, $D = C$ o D es unión disjunta de intervalos abiertos.

Supongamos $D \neq C$. Sea $(a_1, a_2) \subseteq D$ intervalo maximal. Afirmamos que $\omega(a_1)$ es una silla, al igual que $\omega(a_2)$. Si $\omega(a_1)$ fuese un atractor σ , entonces $W^s(\sigma)$ es abierto. Se sigue que hay un intervalo $(c, d) \subseteq C$ con $a_1 \in (c, d)$ tal que $\forall x \in (c, d)$ $\omega(x) = \sigma$. Por la continuidad del flujo, hay un intervalo $(c', d') \subseteq (c, d)$ con $a \in (c', d') \subseteq D$ una contradicción ya que a era un extremo de un intervalo maximal de D .

Supongamos que $\omega(a_1)$ tiene un punto regular x . Sea S sección transversal a X por x . Como $x \in \omega(a_1)$, $\omega(a_1)$ intersecciona un número infinito de veces a S . Si $q \in (a_1, a_2)$

entonces el número de veces que el arco de trayectoria $qP(q)$ intersecta a S es finito, ya que $qP(q) = [q, P(q)]$ es compacto. Por el teorema del flujo tubular, en una vecindad de q este número es finito, digamos N . Por continuidad y al ser (a_1, a_2) conexo, este número es constante en todo el intervalo (a_1, a_2) . Nuevamente utilizando el Teorema del flujo tubular, dado $n > N$ hay una vecindad de a_1 , digamos $U \subseteq D$ tal que todo punto de U intersecta a S por lo menos n veces antes de volver a C , una contradicción. Por lo tanto no puede haber $x \in \omega(a_1)$ punto regular. Luego, $\omega(a_1)$ es una silla.

Así, D es una unión finita de intervalos disjuntos cuyos extremos pertenecen a separatrices estables de sillas. Por la dualidad del ω y α límite la inversa de P , P^{-1} , tendrá las mismas propiedades. Notemos también que si $C = D$ entonces $M = T^2$ o $M = K^2$, donde T^2 es el toro y K^2 la botella de Klein. Esto ya que:

$$U_n = \bigcup_{t \in (-n, n)} X_t[C] \text{ abierto} \implies \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} X_t[C] \text{ abierto}$$

$C = D$ y C compacto implica que hay $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\bigcup_{t \in [-m, m]} X_t[C] = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} X_t[C]$$

Por lo tanto $\bigcup_{t \in \mathbb{R}} X_t[C]$ es cerrado y abierto.

M conexo implica $M = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} X_t[C]$, por lo que X no tiene singularidades.

Una proposición que nos ayudará con el caso no orientable es la siguiente:

Proposición 4.2.4. *Si $h : S^1 \rightarrow S^1$ es un homeomorfismo que invierte la orientación entonces h tiene un punto fijo.*

Demostración. Si $h : S^1 \rightarrow S^1$ es una función continua, entonces hay $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $h \circ \pi = \pi \circ f$, donde $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ es la proyección $\pi(t) = e^{2\pi it}$. Como h es homeomorfismo, f tiene inversa continua. Por lo tanto f es una función continua monótona creciente si h preserva orientación y monótona decreciente si h invierte la orientación.

Como h invierte la orientación, f es monótona decreciente y tiene intersección no vacía con cualquier función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua monótona creciente. En particular hay $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = Id(x) = x$. Luego $\pi(x) = \pi(f(x)) = h(\pi(x))$. Por lo tanto $\pi(x) \in S^1$ es un punto fijo para h . \square

Si $P : C \rightarrow C$ invierte la orientación, entonces $M = K^2$ y P tiene un punto fijo. El cual corresponde a una órbita cerrada γ , la cual no puede delimitar un círculo. De lo contrario, el disco delimitado tendría una singularidad. Por lo tanto $K^2 - \gamma$ es homeomorfo a un cilindro, por lo que X sólo tiene órbitas recurrentes triviales.

Lema 4.2.5. *Sea $X \in \mathfrak{X}^k(M)$ campo sin singularidades. X puede ser aproximado por un campo con una órbita cerrada.*

Demostración. Si X tiene una órbita cerrada, no hay nada que hacer. Supongamos X sin órbitas cerradas. Como X no tiene singularidades, necesariamente se da el caso $C = D$, al no tener órbitas cerradas X posee una órbita recurrente γ y $M^2 = T^2$. Sea $p \in \gamma$ y C un círculo transversal a X con $p \in C$.

Sean $C_1 = X_{-\delta}[C]$, $C_2 = X_{\delta}[C]$ para un $\delta > 0$ de manera que $C_1 \bar{\cap} X$ y $C_2 \bar{\cap} X$. Tomamos F flujo tubular centrado en p , cuyos lados transversales son C_1 y C_2 . Sea

$P : C_1 \rightarrow C_1$ la aplicación que asocia a cada $x \in C_2$ la primer intersección de $O^+(x)$ con C_1 . P preserva la orientación. Es decir, dada una orientación de C_2 , $X_{-2\delta} : C_2 \rightarrow C_1$ y P inducen la misma orientación en C_1 .

Sea $p_i = P(q_i) = P^i(q_0)$, donde $q_0 = X_\delta(p)$. Como γ es ω -recurrente, hay una sucesión creciente $\{p_{n_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ convergente p_0 , donde $p_0 = X_{-\delta}(p)$. Podemos suponer que cada p_{n_i} está por debajo de p_0 en $ab \subseteq C_1$. Dado $\epsilon > 0$, consideramos la familia de campos $Z(u) = X + \epsilon u Y$, donde $u \in (0, 1]$, y Y es transversal a X en F y se anula fuera de F . Es decir $Z(u)$ coincide con X fuera de F y $\|Z(u) - X\|_k < \epsilon$.

Tomemos $I \subseteq ab \subseteq C_1$ un intervalo cerrado con $p_0 \in \text{int}(I)$. Para cada $x \in I$ consideremos la distancia vertical entre x y el punto donde $O_{Z(u)}^+(x)$ interseca a C_2 . Al ser I compacto, esta distancia tiene un mínimo $r > 0$ ($r = 0 \Leftrightarrow u = 0$). Como $Z(u) = X$ fuera de F , podemos definir $p_k(u) = P(q_{k-1}(u))$ para $k \geq 1$ y $q_0(u) = q_0$. Tenemos que $q_{k-1}(u)$ es el punto donde $O_{Z(u)}^+(p_{k-1})$ interseca a C_2 por primera vez. Fijemos un índice i tal que $p_i = P^i(q_0)$ esté por debajo de p_0 y $d(p_i, p_0) < r$. Tomando u suficientemente pequeño, $p_i(u)$ y $q_i(u)$ son continuas respecto a u , esto implica que $p_i(u) \in I$ está por debajo de p_0 y $p_i(u)$ es creciente respecto a u . Así, o hay un $u_0 \in (0, 1]$ tal que $p_i(u_0) = p_0$ o, para cada $u \in (0, 1]$, $p_i(u)$ está por debajo de p_0 . En el primer caso, por continuidad hay un $u_1 \leq u_0$ tal que $q_i(u_1) = q_0$ y por lo tanto $O_{Z(u_1)}^+$ es cerrada. En el segundo caso, $p_i(u) \in I$ creciente implica que $d(p_i(u), p_0) < r$. Se sigue, por la definición de r , que $q_i(1)$ está por arriba de q_0 . Por lo tanto hay un $u_1 \in (0, 1)$ tal que $q_i(u_1) = q_0$. En ambos casos obtenemos un campo $Z(u_1)$ que tiene una órbita cerrada que pasa por q_0 . \square

Lema 4.2.6. *Sea M^2 orientable y $X \in \mathfrak{X}^k(M^2)$ con singularidades, todas hiperbólicas. Si existe una órbita recurrente no trivial, entonces X puede ser aproximado por un campo Y que tiene una ligación de sillas más que X .*

Demostración. Inicialmente mostraremos que, si γ es una órbita ω recurrente no trivial, entonces existe una separatriz estable γ_2 que se acumula en γ . Es decir $\gamma \subseteq \alpha(\gamma_2)$.

Sean $p \in \gamma$ y $C \subseteq M$ círculo con $p \in C$ y $C \bar{\cap} X$. $P : D \rightarrow C$ la transformación de Poincaré definida en D . Como X tiene singularidades $D \neq C$. Supongamos que γ no es acumulada por separatrices estables. Existe $I \subseteq C$ intervalo maximal con $p \in I$ ajeno a separatrices estables. Al ser γ ω -recurrente y al estar $p \in \gamma$, hay $r \in \mathbb{N}$ tal que $P^r(p) \in I$. Sea $J = P^r[I] \subseteq I$, la contención se da ya que $P^k(p) \in I$ implica $I \cap J \neq \emptyset$. Si $J \not\subseteq I$ entonces J tendría uno de los extremos de I . Al ser J abierto, J tendría puntos pertenecientes a separatrices estables, pues I era maximal. Pero estas separatrices estables son invariantes bajo el flujo y por lo tanto también lo son bajo P^k . De ahí que I también tiene puntos de separatrices estables, lo que es una contradicción.

Por lo tanto, haciendo variar el flujo sobre I , hay un $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $A = \cup_{t \in [0, t_0]} X_t[I]$ es homeomorfo a un anillo, es invariante bajo el flujo X_t para $t > 0$ y $p \in A$. Lo que impide que $\gamma \subseteq A$ sea ω recurrente no trivial. Luego, γ es acumulada por alguna separatriz estable γ_2 .

Afirmamos también que γ es acumulada por una separatriz inestable o es ella misma una separatriz inestable. Supongamos falsa esta afirmación. Como en el caso anterior, sean $p \in \gamma$ e $I \subseteq C$ intervalo maximal con $p \in I$ y ajeno a las separatrices inestables. Como γ es ω -recurrente, entonces existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $P^l[I] \cap I \neq \emptyset$.

Caso 1: P^{-l} no está bien definida en todo I . Existe una $z \in I$ tal que $P^{-l}(z) \notin I$ con $P^{-l}(z)$ en la separatriz inestable de alguna silla. Por lo tanto también lo está $z \in I$, una contradicción.

Caso 2: P^{-l} está definida en todo I . Sea $J = P^{-l}[I]$, podemos construir nuevamente una región homeomorfa a un anillo $\tilde{A} = \cup_{t \in [t_1, 0]} X_t[I]$ con $t_1 < 0$ y $p \in \tilde{A}$. \tilde{A} es cerrado, no vacío e invariante bajo el flujo X_t para $t < 0$. Como X no tiene singularidades en \tilde{A} y $\alpha(\gamma) \subseteq \tilde{A}$, por el Teorema de Poincaré-Bendixson, $\alpha(\gamma)$ debe ser una órbita cerrada repulsora. Lo que es una contradicción ya que si $P^l(p)$ es cercano a p , entonces $P^l(p) \in W_X^u(\alpha(\gamma))$ y por lo tanto γ no es ω -recurrente. Luego, γ es aproximada o es ella misma una separatriz inestable.

Observación. Hasta ahora no hemos utilizado la hipótesis de que M sea orientable, por lo que las afirmaciones anteriores son válidas también para M no orientable. La única diferencia sería que A puede ser homeomorfo a una banda de Möebius, donde tampoco puede haber recurrencia no trivial.

Sea γ_1 separatriz inestable tal que $\gamma = \gamma_1$ o γ_1 se acumula en γ . Sean $C_1 = X_{-\delta}[C]$ y $C_2 = X_\delta[C]$, $C_1 \bar{\cap} X$ y $C_2 \bar{\cap} X$, $P : D \subseteq C \rightarrow C$ la transformación de Poincaré asociada y F caja de flujo centrada en $p \in \gamma$. Como el número de sillas es finito, podemos escoger F ajeno a las posibles ligaciones de sillas de X .

Sean σ_1, σ_2 las sillas asociadas a γ_1, γ_2 respectivamente. Para cada $u \in [0, 1]$, consideramos los campos $Z(u) = X + \epsilon u Y$ con $\epsilon > 0$, y $Y \bar{\cap}_F X$, donde Y apunta hacia arriba en F y se anula fuera de F . Es decir, $Z(u)$ coincide con X fuera de F . Mostraremos que, si ϵ es suficientemente pequeño, entonces existe una $u \in [0, 1]$ de manera que $Z(u)$ exhibe una ligación de sillas más que X .

Sean ab, cd los lados de F transversales a X e $I \subseteq ab$ intervalo cerrado con $p_0 \in I$, donde $p_0 = X_{-\delta}(p)$. Sea $r > 0$ el mínimo de las distancias verticales entre $x \in I$ y el punto donde $O_{Z(1)}^+(x)$ intersecta C_2 por primera vez. Sean x_0, z_0 los puntos respectivos donde γ_1 intersecta $[a, b]$ y γ_2 intersecta $[c, d]$ por primera vez. Notemos que los arcos de separatrices $\sigma_1 x_0$ y $z_0 \sigma_2$ no serán afectados por las perturbaciones $\epsilon u Y$ hechas a X . Sean $x \in \gamma_1 \cap I$ próximo a p_0 y $z \in \gamma_2 \cap C_2$ de manera que la distancia vertical entre x y z sea menor a r . x corresponda a la i -ésima intersección de γ_1 con I . z corresponde a la j -ésima intersección de γ_2 con C_2 . Supongamos x puede debajo de z en F . En caso que esto no sea posible, tomamos Y apuntando hacia abajo en F .

Consideremos las aplicaciones $x(u), z(u)$, donde $x(u)$ es la i -ésima intersección de la separatriz $\gamma_1(u)$ del campo $Z(u)$ con I , y $z(u)$ es la j -ésima intersección de la separatriz $\gamma_2(u)$ del campo $Z(u)$ con C_2 . $x(0) = x$ y $z(0) = z$. Para u suficientemente pequeño estas funciones están bien definidas. Al ser M^2 orientable, $x(u)$ es monótona creciente en I y $z(u)$ es monótona decreciente en $[c, d]$.

Hay dos posibilidades: Si $x(u)$ y $z(u)$ están bien definidas en todo $[0, 1]$, entonces hay $u_0 \in (0, 1)$ tal que la distancia vertical entre $x(u_0)$ y $z(u_0)$ es cero. Esto debido a la continuidad de las funciones $x(u), z(u)$ y a que la distancia vertical entre $x(0) = x$ y $z(0) = z$ es menor a r . Así, las órbitas de $\gamma_1(u_0)$ y $\gamma_2(u_0)$ se intersectan en F . Es decir, hay una nueva ligación de sillas entre $\sigma_1(u_0)$ y $\sigma_2(u_0)$.

La otra posibilidad es que alguna de las aplicaciones, supongamos $x(u)$, no esté bien definida en todo el intervalo $[0, 1]$. Esto significa que, para algún $u_0 \in (0, 1)$, $x(u_0)$ alcanza uno de los bordes del dominio de definición D de la transformación de Poincaré P . Recordando que el ω límite de estos bordes son sillas, tenemos que $\alpha(\gamma_1(u_0)) = \sigma_1(u_0)$ o $\omega(\gamma_1(u_0)) = \sigma_3(u_0)$ son sillas, por lo que tenemos una nueva ligación de sillas. El caso cuando $z(u)$ no está definida en todo el intervalo $[0, 1]$ es análogo ya que P y P^{-1} satisfacen las mismas propiedades. \square

Teorema 4.2.7. *Si M^2 es orientable entonces los campos de Morse - Smale son densos en $\mathfrak{X}^k(M^2)$.*

Demostración. Sea $X \in \mathfrak{X}^k(M)$. Como los campos con singularidades hiperbólicas son densos. Podemos suponer X con todas sus singularidades hiperbólicas.

Caso 1: X no tiene singularidades. Al ser M orientable, $M = T^2$. Por el Lema 4.2.4. X puede ser aproximado por $X_1 \in \mathfrak{X}^k(T)$ con una órbita cerrada $\gamma \subseteq T$. Aproximamos entonces X_1 por $Y \in \mathfrak{X}^k(T)$ de manera que γ sea hiperbólica. γ no delimita un disco, de lo contrario Y (y por lo tanto también X) tendría una singularidad. Así, $T - \gamma$ es un cilindro. Luego, todas las recurrencias de Y son triviales. Aproximamos Y por $Z \in K - S$. Al ser γ hiperbólica, Z posee una órbita cerrada hiperbólica $\tilde{\gamma}$ cercana a γ , por lo que Z sólo tiene recurrencias triviales. Por la proposición 4.2.3. $Z \in M - S$.

Caso 2: X posee singularidades. Sea $\gamma \subseteq M$ separatriz inestable de silla. Decimos que γ está estabilizada si $\omega(\gamma)$ es un atractor hiperbólico.

Análogamente, para $\tilde{\gamma}$ separatriz estable, decimos que $\tilde{\gamma}$ está estabilizada si $\alpha(\gamma)$ es un repulsor hiperbólico.

Caso 2a: Todas las separatrices de X están estabilizadas. Por la hiperbolicidad de los atractores y repulsores, hay $U(X) \subseteq \mathfrak{X}^k(M)$ vecindad abierta de X tal que $\forall Y \in U(X)$ todas las separatrices de Y están estabilizadas. Es decir, los campos de $U(X)$ no pueden ser aproximados por campos con ligación de sillas. Por el Lema 4.2.5, los campos de $U(X)$ tienen sólo recurrencias triviales. Aproximamos entonces X por $Y \in K - S$, por la proposición 4.2.3 $Y \in M - S$.

Caso 2b: X tiene alguna separatriz no estabilizada. Afirmamos que X puede ser aproximado por Y que tiene una separatriz estabilizada más que X . Como X sólo tiene un número finito de sillas, si probamos esta afirmación regresamos al caso 2a. con lo que concluiríamos la demostración del teorema.

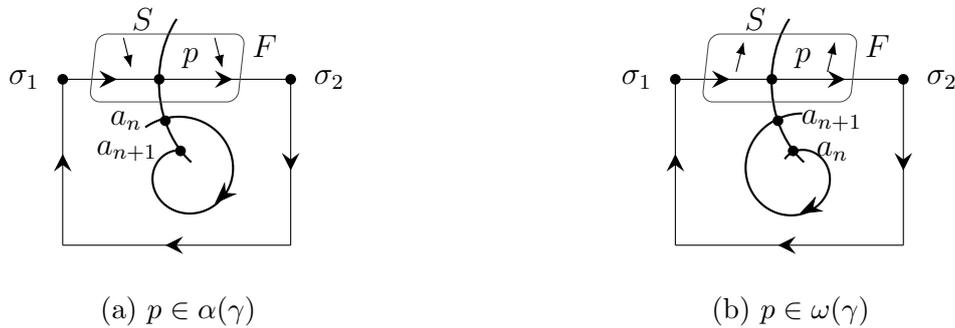
Sea $U(X) \subseteq \mathfrak{X}^k(M)$ vecindad abierta de X tal que $\forall Y \in U(X)$ Y tiene, por lo menos, tantas separatrices estabilizadas como X . Por el Lema 4.2.6 podemos aproximar X por $Y \in U(X)$ de manera que las recurrencias de Y sean todas triviales. Tenemos 4 casos a considerar.

1) Y no posee ligación de sillas. Sea γ separatriz de silla no estabilizada de Y (de no existir regresamos al caso 2a), entonces $\omega(\gamma)$ (o $\alpha(\gamma)$) es una órbita cerrada no hiperbólica. Aproximamos Y por $Z \in U(X)$ de manera que esta órbita sea hiperbólica, con lo cual estabilizamos a γ .

2) Y tiene un gráfico que es ω -límite (o α -límite) de una órbita. Sea S sección transversal a Y en un punto regular p , con p en el gráfico. Al haber γ trayectoria tal que $p \in \omega(\gamma)$ (o $p \in \alpha(\gamma)$), hay una sucesión $\{a_n\}$ convergente a p con $a_n \in \gamma \cap S$. Tomando n suficientemente grande, el arco de trayectoria de γ que una a_n y a_{n+1} junto con el segmento $(a_n, a_{n+1}) \subseteq S$ y el gráfico delimitan una región abierta $A \subseteq M$ homeomorfa a un anillo (pues M es orientable).

Sea F caja de flujo con $p \in F$ y ΔY campo en F C^k -pequeño, transversal a Y en F y que se anule fuera de F . Definimos

$$Z = Y + \Delta Y \implies \begin{cases} \forall t \geq 0 & Z_t[A] \subseteq A & p \in \omega(\gamma) \\ \forall t \leq 0 & Z_t[A] \subseteq A & p \in \alpha(\gamma) \end{cases}$$



La separatriz $\sigma_1\sigma_2$, que pertenece inicialmente al gráfico (para el campo Y), después de la perturbación es parte del anillo A . Así, el ω o α límite, según sea el caso, de la separatriz $\sigma_1\sigma_2$ pasa a ser una órbita cerrada del campo Z que se forma en el anillo A . Esto se sigue del teorema de Poincaré- Bendixson, ya que Z no tiene singularidades en A y $\omega(\sigma_1\sigma_2)$ (o $\alpha(\sigma_1\sigma_2)$) está contenido en A . De ser necesario, perturbamos esta órbita cerrada para que sea hiperbólica. De esta manera estabilizamos una separatriz de σ_1 y σ_2 .

3) Y tiene un gráfico que es aproximado por órbitas cerradas. Considerando el anillo A formado por el gráfico y una órbita cercana al gráfico, hacemos una construcción análoga al caso 2)

4) Hay γ ligación de sillas y S sección transversal a Y en $p \in \gamma$. Sea $a \in S$ de manera que todos los puntos en $(a, p) \subseteq S$ tengan el mismo ω -límite, el cual es un atractor.

Si esto no ocurriese para (a, p) suficientemente pequeño, por la proposición 4.2.3 regresaríamos al caso 2) o 3). Ya que, si Y no entra en el caso 2) entonces todo punto de (a, p) tiene una órbita cerrada o una singularidad como ω -límite. Si Y no pertenece al caso 3), p no es aproximado por órbitas cerradas y por lo tanto ningún punto de (a, p) pertenece a una órbita cerrada. Luego sus ω -límites son atractores, como la variedad estable de atractores es abierta, los puntos de (a, p) tienen el mismo ω límite: σ .

Tomamos ahora una caja de flujo F con $p \in F$ y ΔY campo transversal a Y en F que se anule fuera de F y apunte en la dirección de $a \in S$. Definimos $Z = Y + \Delta Y$. La separatriz inestable γ tendrá $\omega_Z(\gamma) = \sigma$. Si σ es una órbita cerrada podemos perturbar ligeramente a Z para volverla hiperbólica y de esta manera estabilizamos γ . \square

Para finalizar, como consecuencia del Teorema 4.1.4 y el Teorema 4.2.7 podemos concluir con el Teorema de Peixoto:

Teorema 4.2.8 (Teorema de Peixoto). *Para $X \in \mathfrak{X}^k(M^2)$ con M^2 superficie orientable, X es estructuralmente estable si y solamente si X es un campo de Morse-Smale.*

Así, tenemos ya caracterizados los campos vectoriales sobre superficies orientadas.

4.3. Generalizaciones

En esta sección haremos algunos comentarios sobre la densidad de los campos de Morse-Smale en superficies orientables y su extensión parcial para superficies no orienta-

bles. Enunciaremos los teoremas relativos de abertura y estabilidad para los campos de Morse-Smale de dimensiones arbitrarias. En particular sabemos que hay campos estructuralmente estables en cualquier variedad.

Los campos de Morse-Smale no son densos en $\mathfrak{X}^k(M)$ con $\dim(M) \geq 3$, lo que mostraremos en la siguiente sección.

Cabe resaltar que los campos de Morse-Smale sí son densos en $\text{Grad}^k(M) = \{X \in \mathfrak{X}^k(M) : X = \text{grad}(f) \text{ para alguna } f \in C^{k+1}(M, \mathbb{R})\}$ para $\dim(M)$ arbitraria.

La dificultad en demostrar la densidad de los campos de Morse-Smale en $\mathfrak{X}^k(M^2)$, con M^2 no orientable, radica en la demostración del Lema 4.2.5. Todos los demás resultados son válidos tanto para superficies orientables como para las no orientables. La respuesta al caso general no orientable sigue siendo un problema abierto. Tenemos los siguientes resultados parciales:

- $M - S$ es denso en $\mathfrak{X}^1(M^2)$ para M^2 orientable o no. Pugh obtiene este resultado utilizando el “closing Lemma”. La restricción a la topología C^1 se sigue del hecho que el “closing Lemma” sólo se ha probado para este caso.
- La densidad de $M - S$ se puede probar para $\mathfrak{X}^k(\mathbb{R}P^2)$ con $k \geq 1$. Esto debido a que el Teorema de Poincaré-Bendixson es también válido en $\mathbb{R}P^2$. Por lo que la demostración que se dio para S^2 también es válida para $\mathbb{R}P^2$. Lo mismo ocurre para la botella de Klein.
- Markley y Guitierrez simplificaron la demostración para la botella de Klein K^2 demostrando que, para la variedad L^2 no orientable de género uno mayor que K^2 . Es decir, la suma conexa de un toro con K^2 . Las recurrencias no triviales son “orientables”, en el sentido de que están contenidas en subconjuntos de L^2 homeomorfos al toro. Por lo que nuestra demostración para variedades orientables también es válida en este caso.

En conclusión, sabemos que $M - S$ es denso, por lo menos, en $\mathfrak{X}^k(M)$ para $k = 1$ o para $k \geq 1$ y $M = \mathbb{R}P^2, K^2, L^2$, o M orientable. Daremos la demostración para el caso $\mathfrak{X}^1(M^2)$, utilizando el “closing Lemma”, el cual no demostraremos.

Lema 4.3.1 (“Closing Lemma”). M^n variedad de dimensión n , compacta y sin borde. Sea $X \in \mathfrak{X}^1(M^n)$ con $\gamma \subseteq M$ trayectoria recurrente no trivial de X . Dados $p \in \gamma$ y $\epsilon > 0$ hay $Y \in \mathfrak{X}^k(M^n)$ tal que $\|X - Y\|_1 < \epsilon$ y $O_Y(p)$ es una órbita cerrada.

Teorema 4.3.2. $M - S$ es denso en $\mathfrak{X}^1(M)$, M superficie orientable o no.

Demostración. Sea $X \in \mathfrak{X}^1(M)$. Mostraremos que X puede ser aproximado por un campo de Kupka-Smale que sólo tenga órbitas recurrentes triviales. Por el corolario de la proposición 4.2.3 habríamos terminado. Sea $X^* \in K - S$ próximo a X . Si X^* sólo tiene recurrencias triviales no hay nada que hacer. Supongamos que X^* tiene una recurrencia no trivial $\gamma_1 \subseteq M$. Sea $p \in \gamma_1$, por el “closing Lemma” hay X_1 próximo a X^* tal que $\sigma_1 = O_{X_1}(p)$ es una órbita cerrada. Aproximamos entonces X_1 por $X_1^* \in K - S$ que tenga a σ_1^* como órbita cerrada hiperbólica cercana a σ_1 .

Si X_1^* sólo tiene recurrencias triviales, entonces $X_1^* \in M - S$ y hemos terminado. En caso contrario repetimos el procedimiento anterior y aproximamos X_1^* por $X_2^* \in K - S$ cambiando una recurrencia no trivial de X_1^* , $\gamma_2 \subseteq M$ por una órbita cerrada hiperbólica

σ_2^* . Afirmamos que repitiendo este proceso un número finito de veces llegamos a un campo $X_n^* \in K - S$ próximo a X que sólo tenga recurrencias triviales, por lo que $X_n^* \in M - S$.

Cada vez que realizamos este procedimiento podemos restringir el campo X_i^* a un campo de Kupka-Smale sobre una superficie N^2 de genero estrictamente menor al de M^2 . Equivalentemente de característica de Euler $K(N^2)$ mayor. Ya que $K(N) = 2 - 2g_N$ o $K(N) = 2 - g_N$ según si N es orientable o no. Como $K(N) \leq 2$ cualquiera que sea N , podemos llegar a un campo de Kupka-Smale con sólo recurrencias triviales en un número finito de pasos.

Para comprobar esto efectuamos un corte en M a lo largo de la órbita cerrada σ_1^* . Se desprenden dos casos: Obtenemos una variedad M_{10} con frontera constituida de una o dos copias de σ_1^* o dos variedades M_{11} , M_{12} , cada una con una frontera difeomorfa a σ_1^* . Sean D_1 , D_2 discos. Según sea el caso de la frontera de M_{10} , $M_{10} \cup D_1$ o $M_{10} \cup D_1 \cup D_2$ es, identificando las fronteras de M_{10} , D_1 y D_2 , una variedad sin frontera. Luego, $K(M_{10} \cup D_1) = K(M) + K(D_1)$ o $K(M_{10} \cup D_1 \cup D_2) = K(M) + K(D_1) + K(D_2)$. Como $K(D_i) = 1$ para $i \in \{1, 2\}$ y $N = M_{10} \cup D_1$ o $N = M_{10} \cup D_1 \cup D_2$, es claro que $K(N) > K(M)$. Para el otro caso, tenemos que $K(M) = K(M_{11}) + K(M_{12})$ y $K(M_{11}) < 1$, $K(M_{12}) < 1$. De lo contrario σ_1^* delimitaría un disco, que es el caso anterior. Luego, $K(M_{11} \cup D_1) = K(M_{11}) + 1 > K(M)$, $K(M_{12} \cup D_2) = K(M_{12}) + K(D_2) > K(M)$. Podemos completar la restricción de X_1^* a M_{1i} colocando en D_j un atractor o repulsor según lo que sea σ_1^* . Como la característica de Euler crece con cada iteración y está acotada por 2, se sigue que terminamos en un número finito de pasos. \square

Respecto a los campos de Morse-Smale, sus clases de equivalencia fueron descritas por Peixoto y Fleitas. Las componentes conexas fueron clasificadas por C. Gutierrez y W. De Melo en "On connected components of Morse-Smale vector fields on two Manifolds", Lecture Notes in Math, 597, Springer-Verlag, 1977.

Consideremos ahora una variedad M de dimensión arbitraria n dotada con una métrica Riemanniana. Una pregunta básica es si existe algún campo estructuralmente estable en M . La respuesta afirmativa la dan los siguientes resultados

- $M - S$ es abierto, no vacío en $\mathfrak{X}^k(M)$ para $k \geq 1$.
- $X \in \mathfrak{X}^k(M)$ con $k \geq 1$: $X \in M - S \implies X$ estructuralmente estable.
- El conjunto de campos gradientes de Morse-Smale es abierto y denso en $Grad^k(M)$.

Veremos en la próxima sección que los campos de Morse-Smale no son densos en $\mathfrak{X}^k(M)$ para $k \geq 3$ dando ejemplos de campos estructuralmente estables que no son de Morse-Smale.

4.4. Clases estables de campos y difeomorfismos

En esta sección describiremos brevemente los difeomorfismos de Morse-Smale, los difeomorfismos de Anosov, los cuales son una clase de difeomorfismos estables que no coincide con los difeomorfismos de Morse-Smale. Y los difeomorfismos que satisfacen el axioma A y la condición de transversalidad. Estos últimos engloban las dos clases anteriores y es la clase más general de difeomorfismos estables conocida.

Daremos a detalle dos famosos ejemplos que ilustran estas clases de difeomorfismos: un difeomorfismo de Anosov en el dos-Toro debido a Thom y un difeomorfismo que satisface

el axioma A y la condición de transversalidad en la esfera, conocido como la herradura de Smale.

A parte de su importancia intrínseca, el estudio de los difeomorfismos es importante para la comprensión de los espacios de fase de los campos vectoriales. Lo cual ya ha sido resaltado en los trabajos pioneros de Poincaré y Birkhoff sobre la teoría cualitativa de los sistemas dinámicos. Un ejemplo es la descripción de campos vectoriales en la vecindad de una órbita cerrada a través de la transformación (un difeomorfismo) de Poincaré asociada a una sección transversal. Al final del tercer capítulo generalizamos esta idea construyendo la suspensión de un difeomorfismo f . Así, cualquier difeomorfismo f en una variedad compacta de dimensión n representa la transformación de Poincaré de un campo X_f de una variedad de dimensión $n + 1$. El campo X_f es denominado suspensión de f y sus órbitas están en correspondencia natural con las órbitas de f . En particular:

- $f \in K - S \iff X_f \in K - S$
- f estructuralmente estable $\iff X$ estructuralmente estable

Definición. Sea $f \in \text{Dif}^k(M)$. Decimos que $p \in M$ es un punto no errante para f si para cada vecindad abierta $U \subseteq M$ de p y para cada $n_0 > 0$ hay un $m \in \mathbb{Z}$ con $|m| > n_0$ tal que $f^m[U] \cap U \neq \emptyset$.

Denotaremos por $\Omega(f) = \{p \in M : p \text{ es no errante para } f\}$.

De manera análoga a el conjunto de los puntos no errantes de un campo vectorial:

- $\Omega(f)$ es cerrado e invariante bajo f .
- $\forall q \in M \ \omega(q) \cup \alpha(q) \subseteq \Omega(f)$.

Definición. Decimos que $f \in \text{Dif}^k(M)$ es de Morse-Smale, denotado por $f \in M - S$, si satisface:

- $\Omega(f)$ consiste sólo de puntos fijos y periódicos, los cuales son todos hiperbólicos.
- $\Omega(f)$ es finito.
- $\forall p, q \in \Omega(f) \ W^s(p) \bar{\cap} W^u(q)$.

Daremos a continuación hechos relevantes de los difeomorfismos de Morse-Smale.

El conjunto de los difeomorfismos de Morse-Smale es abierto no vacío en $\text{Dif}^k(M)$, para cualquier variedad M con $k \geq 1$.

Los difeomorfismos de Morse-Smale son estructuralmente estables.

El conjunto de los difeomorfismos de Morse-Smale es denso en $\text{Dif}^k(S^1)$ para $k \geq 1$. Este hecho, debido a Peixoto, puede ser demostrado directamente a partir del Teorema de Kupka-Smale para difeomorfismos y un argumento similar a la prueba del Lema 4.2.4. Una demostración es la siguiente: Tomando un difeomorfismo $\tilde{f} \in \text{Dif}^\infty(S^1)$ próximo a $f \in \text{Dif}^k(S^1)$, consideramos la suspensión de \tilde{f} , $X_{\tilde{f}}$. Tenemos dos casos: $X \in \mathfrak{X}^\infty(T^2)$ o $X_{\tilde{f}} \in \mathfrak{X}^\infty(K^2)$, dependiendo si \tilde{f} preserva o no la orientación de S^1 . Así, $S^1 \subseteq T^2$ o $S^1 \subseteq K^2$ es una sección transversal global de $X_{\tilde{f}}$ con transformación de Poincaré \tilde{f} . Si $Y \in \mathfrak{X}^{k+1}(T^2)$ (o $Y \in \mathfrak{X}^{k+1}(K^2)$) es próximo a $X_{\tilde{f}}$, entonces también S^1 es una sección transversal global a Y . Por lo que $g \in \text{Dif}^k(S^1)$, su transformación de Poincaré asociada,

es próxima a \tilde{f} y por lo tanto también a f . Como los campos de Morse-Smale son densos en T^2 y K^2 , podemos escoger $Y \in M - S$. Luego, g será un difeomorfismo de Morse-Smale próximo a f .

Los difeomorfismos de Morse-Smale no son densos en $\text{Dif}^k(M)$ para $\dim M \geq 2$. A continuación exhibiremos un abierto no vacío $U \subseteq \text{Dif}^k(S^2)$ tal que $U \cap (M - S) = \emptyset$. Este ejemplo puede ser generalizado para cualquier variedad de dimensión mayor o igual a 2.

Ejemplo. Sea $X \in \mathfrak{X}^\infty(S^2)$ con 4 singularidades: σ_1, σ_2 repulsores, σ_4 atractor, y σ_3 silla, todos hiperbólicos. De manera que σ_3 tiene una autoligación de silla. Sea X_t el flujo de X , nos fijamos en $f = X_1$ el difeomorfismo inducido en el tiempo $t = 1$.

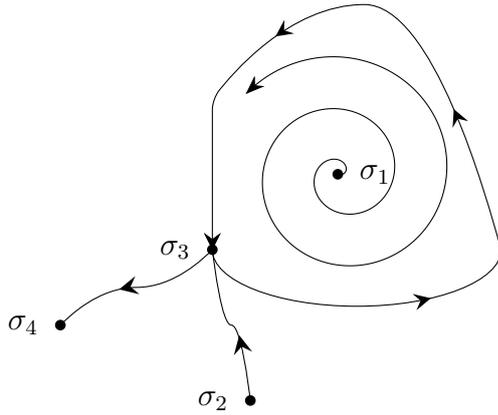


Figura 4.11: Esbozo del flujo de X

σ_3 es un punto fijo hiperbólico de f y una de las componentes conexas de $W_f^s(\sigma_3)$ coincide con una de las componentes de $W_f^u(\sigma_3)$. Perturbaremos f para obtener $\tilde{g} \in \text{Dif}^k(S^2)$ que tenga a σ_3 como punto fijo hiperbólico y $W_g^s(\sigma_3) \bar{\cap} W_g^u(\sigma_3)$ con $W_g^s(\sigma_3) \cap W_g^u(\sigma_3) \neq \{\sigma_3\}$. Para lograr esto, fijamos $p \in W_f^s(\sigma_3) \cap W_f^u(\sigma_3)$ con $p \neq \sigma_3$ y $U \subseteq S^2$ abierto tal que $p \in U$ y $U \cap f[U] = \emptyset$. Sea $i : S^2 \rightarrow S^2$ C^k que coincide con la identidad fuera de U tal que $i(p) = p$ y $i[W_f^u(\sigma_3)] = W$ de manera que $W \bar{\cap} W_f^s(\sigma_3)$. Definimos $\tilde{g} = i \circ f$. Afirmamos que $\tilde{g} \notin M - S$ ni cualquier difeomorfismo cercano a \tilde{g} .

Como $\tilde{g} = f$ fuera de U , σ_3 es un punto fijo hiperbólico de \tilde{g} . Sea $K = S^2 - U$, K es compacto.

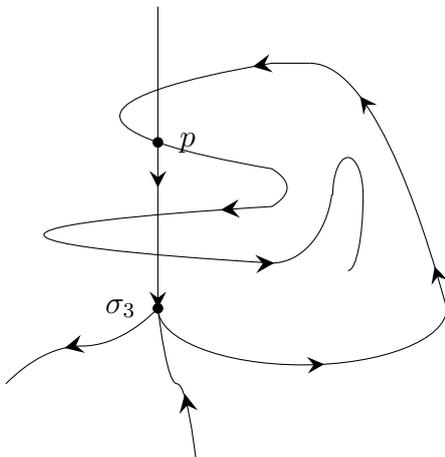
Veamos que $W \subseteq W_g^u(\sigma_3)$. Si $x \in W$, entonces $i^{-1}(x) \in W_f^u(\sigma_3)$, por lo tanto

$$\tilde{g}^{-1}(x) = (i \circ f)^{-1}(x) = f^{-1} \circ i^{-1}(x) \in W_f^u(\sigma_3) \cap K$$

ya que $f[U] \cap U = \emptyset$. Como $i|_K = Id_K$ entonces $\tilde{g}^{-2}(x) = f^{-1}i^{-1}f^{-1}i^{-1} = f^{-2}i^{-1}$, inductivamente tenemos que $\tilde{g}^{-n}(x) = f^{-n}i^{-1}(x)$. Dado que $i^{-1}(x) \in W_f^u(\sigma_3)$, se sigue que $\lim_{n \rightarrow -\infty} \tilde{g}^{-n}(x) = \lim_{n \rightarrow -\infty} f^{-n}i^{-1}(x) = \sigma_3$. Es decir, $x \in W_g^u(\sigma_3)$. Por otro lado, $W_f^s(\sigma_3) \cap U \subseteq W_g^s(\sigma_3)$. Ya que, si tomamos $y \in W_f^s(\sigma_3) \cap U$, entonces $\tilde{g}(y) = i \circ f(y) = f(y)$. Por lo tanto $\tilde{g}^n(y) = f^n(y)$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{g}^n(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(y) = \sigma_3$.

Por lo anterior y debido a que $W \bar{\cap} W_f^s(\sigma_3)$, llegamos a que $W_g^s(\sigma_3) \bar{\cap}_p W_g^u(\sigma_3)$. Así, podemos cubrir $W_f^s(\sigma_3) \cap W_f^u(\sigma_3)$ con una cantidad finita de abiertos U_i . Repitiendo este proceso para cada U_i obtenemos un difeomorfismo g . El cual satisface: σ_3 es punto fijo hiperbólico de g , g coincide con f fuera de $\cup_{j \leq l} U_j$, y $W_g^s(\sigma_3) \bar{\cap} W_g^u(\sigma_3)$. Por lo tanto $g \in K - S$.

Tomemos ahora $p \in W_g^s(\sigma_3) \cap W_g^u(\sigma_3)$ con $p \neq \sigma_3$. p es denominado *punto homoclínico transversal* de $W_g^s(\sigma_3)$ y $W_g^u(\sigma_3)$.



Birkhoff mostró que p es acumulado por órbitas periódicas hiperbólicas de g . Smale generalizó este resultado para dimensiones mayores. Aquí únicamente usaremos el hecho de que p es no errante. Para probar esto, sea $l \subseteq W_g^u(\sigma_3)$ el arco que va de σ_3 a p . Sean $V \subseteq S^2$ con $p \in V$ y $l_V = V \cap l$. Entonces $l_V \bar{\cap} W_g^s(\sigma_3)$. Por el λ -Lema, $g^n[l_V]$ contiene arcos arbitrariamente cercanos a $l \ \forall n \geq m$, para algún $m \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, hay $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq m_0 \ g^n[l_V] \cap V \neq \emptyset$. Luego, como $l_V \subseteq V$, entonces $g^n[V] \cap V \neq \emptyset \ \forall n \geq m_0$ y por lo tanto $p \in \Omega(g)$. Al ser p no periódico para g , $g \notin M - \bar{S}$. Como la propiedad de transversalidad es una propiedad abierta, todo difeomorfismo próximo a g va a tener puntos homoclínicos transversales, los cuales serán recurrentes no periódicos. Es decir, ningún difeomorfismo cercano a g es de Morse-Smale, con lo que concluimos que los difeomorfismos de Morse-Smale no son densos en $\text{Dif}^k(S^2)$.

A partir de la no densidad de los difeomorfismos de Morse-Smale en $\text{Dif}^k(M^n)$ para $n \geq 2$, vía suspensión, concluimos que los campos vectoriales de Morse-Smale tampoco son densos en $\mathfrak{X}^k(M^m)$ para $m \geq 3$.

Exhibiremos ahora un ejemplo debido a Thom de un difeomorfismo que tiene una infinidad de órbitas periódicas y es estructuralmente estable. Este fue uno de los ejemplos que motivaron la definición, dada por Anosov, de una clase de difeomorfismos estructuralmente estables que tienen una infinidad de órbitas cerradas. En particular, hay difeomorfismos estables que no son de Morse-Smale.

Ejemplo (Difeomorfismo de Thom). Sea $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ isomorfismo lineal hiperbólico con matriz en la base canónica de \mathbb{R}^2 :

$$L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ y $\det L = 1$. Si calculamos sus valores propios:

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = \lambda^2 - (a+d)\lambda + 1 = 0 \implies \lambda = \frac{a+d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2}$$

Para ningún $k \in \mathbb{N}$ se da que $(a + d)^2 - 4 = k^2$, por lo tanto $\sqrt{(a + d)^2 - 4} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ (o $\sqrt{(a + d)^2 - 4} \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})i$ si $a + d = 1$). Por otro lado $\det L = 1$ implica que los valores propios son $\lambda, 1/\lambda$. Al ser L hiperbólico, podemos suponer $|\lambda| < 1$ y $|1/\lambda| > 1$.

Los espacios propios E^s, E^u tienen inclinación irracional y $\det L = 1$ implica que L^{-1} tiene las mismas propiedades. Sean $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ el toro y $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$ la proyección canónica. Como $L \in M_{2 \times 2}(\mathbb{Z}), L[\mathbb{Z}^2] \subseteq \mathbb{Z}^2$, por lo que L pasa al cociente T^2 . Es decir, podemos definir $f : T^2 \rightarrow T^2$ por $f(\pi(u, v)) = \pi(L(u, v))$. Como $\pi L \in C^\infty$, entonces $f \in C^\infty$, y $f = \pi L \pi^{-1}$ implica $f^{-1} = \pi L^{-1} \pi^{-1}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{L} & \mathbb{R}^2 \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ T^2 & \xrightarrow{f} & T^2 \end{array}$$

Sean $p \in T^2$ y $x \in \mathbb{R}^2$ con $\pi(x) = p$. Tenemos que $W^s(p) = \pi[\{x\} + E^s]$ es, debido a la inclinación irracional de E^s , denso en T^2 . Así, tenemos definida una foliación $\{W^s(p) : p \in T^2\}$ de T^2 , denominada foliación estable, la cual es invariante bajo el difeomorfismo $f: f[W^s(p)] = W^s(f(p))$. Análogamente, tenemos la foliación inestable $\{W^u(p) : p \in T^2\}$ dada por $W^u(p) = \pi[\{x\} + E^u]$. Sean $E_p^s = T_p W^s(p)$ y $E_p^u = T_p W^u(p)$. Tales que $E_p^s = d\pi_x[E^s], E_p^u = d\pi_x[E^u], E_{f(p)}^s = df_p[E_p^s], E_{f(p)}^u = df_p[E_p^u]$.

Consideremos la métrica inducida por \mathbb{R}^2 en T^2 vía π :

$$\begin{aligned} w_1, w_2 \in TT^2 &\implies \langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle d\pi_x^{-1}w_1, d\pi_x^{-1}w_2 \rangle \\ v \in E_p^s &\implies \|df_p v\| = |\lambda| \|v\| \\ w \in E_p^u &\implies \|df_p w\| = |\lambda|^{-1} \|w\| \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} q \in W^s(p) &\implies \lim_{n \rightarrow \infty} (f^n(q), f^n(p)) = 0 \\ q \in W^u(p) &\implies \lim_{n \rightarrow \infty} (f^{-n}(q), f^{-n}(p)) = 0 \end{aligned}$$

Si p es periódico de f , entonces p es hiperbólico y $W^s(p), W^u(p)$ son, en efecto, las variedades estable e inestable de f en p .

Por otro lado, para cada $p, q \in T^2$, no necesariamente distintos, $W^s(p) \bar{\cap} W^u(q)$ y $W^s(p) \cap W^u(q)$ es denso en T^2 . Ya que, si $x, y \in \mathbb{R}^2$ con $\pi(x) = p$ y $\pi(y) = q$ entonces $(\{x\} + E^s) \bar{\cap} (\{y\} + E^u)$.

En particular $p_0 = \pi(0)$ es un punto fijo hiperbólico de f y sus puntos homoclínicos transversales son densos en T^2 . Esto implica que cualquier difeomorfismo cercano a f (incluyendo a f) no es un difeomorfismo de Morse-Smale. De la densidad de los puntos homoclínicos tenemos también, por el resultado de Birkhoff, que los puntos periódicos de f son densos en T^2 .

Daremos una demostración directa de este hecho.

Proposición 4.4.1. *Los puntos periódicos de $f : T^2 \rightarrow T^2$ son densos en T^2 .*

Demostración. Veamos que $\pi[\mathbb{Q}^2] = \text{per}(f)$, donde $\text{per}(f)$ es el conjunto de los puntos periódicos de f . Como $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$ es suprayectiva y continua entonces, al ser \mathbb{Q}^2 denso en \mathbb{R}^2 , tenemos $\text{per}(f)$ denso en T^2 .

Sea $\mathcal{L}_n = \{(m_1/n, m_2/n) : m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$. Es claro que $\mathbb{Q} = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{L}_n$. Por otro lado, $L \in M_{2 \times 2}(\mathbb{Z})$ implica que $L[\mathcal{L}_n] = \mathcal{L}_n$. Recordando que $\forall n \in \mathbb{Z} \ f^n = \pi L^n \pi^{-1}$, obtenemos

$$f[\pi[\mathcal{L}_n]] = \pi L \pi^{-1} \pi[\mathcal{L}_n] = \pi L[\mathcal{L}_n] = \pi[\mathcal{L}_n]$$

Por otro lado

$$\pi[\mathcal{L}_n] = [\{(m_1/n, m_2/n) : m_1, m_2 \in \mathbb{Z}, 0 \leq |m_1| \leq n, 0 \leq |m_2| \leq n\}]$$

Es decir, $\pi[\mathcal{L}_n]$ es finito y, al ser invariante bajo f , por el principio de casillas, necesariamente se da la contención $\pi[\mathcal{L}_n] \subseteq \text{per}(f)$. Se sigue que $\pi[\mathbb{Q}] \subseteq \text{pre}(f)$.

Sea ahora $x \in \mathbb{R}^2$ tal que $f^{n_x}(\pi x) = \pi x$, para algún $n_x \in \mathbb{N}$.

$$\pi L^{n_x} x = f^{n_x}(\pi x) = \pi x \implies L^{n_x} x - x \in \mathbb{Z}^2$$

Sea $y = L^{n_x} x - x$. Al ser $L \in GL_{2 \times 2}(\mathbb{Z})$ hiperbólico, se sigue que $L^n \in GL_{2 \times 2}(\mathbb{Z})$ también es hiperbólico y por lo tanto $L^n - Id \in GL_{2 \times 2}(\mathbb{Z})$. Se sigue que $(L^n - Id)^{-1} \in GL_{2 \times 2}(\mathbb{Q})$. Dado que $y = (L^{n_x} - Id)x$ con $y \in \mathbb{Z}^2$ entonces $x = (L^{n_x} - Id)^{-1} y \in \mathbb{Q}^2$. Concluimos:

$$\pi(x) \in \text{per}(f) \implies \pi(x) \in \pi[\mathbb{Q}]$$

con lo que tenemos la igualdad. □

A primera vista puede parecer difícil mostrar que f es estructuralmente estable, pero f posee una estructura hiperbólica global, f es inducido por un isomorfismo hiperbólico de \mathbb{R}^2 , y todas las órbitas periódicas de f son sillas con variedades estables e inestables de la misma dimensión. Al contrario que un difeomorfismo de Morse-Smale, donde necesariamente aparecen atractores y repulsores (algo que demostraremos al final de esta sección). Daremos a continuación una demostración sencilla y elegante, debida a Moser, de la estabilidad estructural de f .

Proposición 4.4.2. $f : T^2 \rightarrow T^2$ es estructuralmente estable.

Demostración. Sea $g \in \text{Dif}^k(M)$ próximo a f . Afirmamos que hay $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ próximo a L que induce en T^2 a g .

Sea $x \in \mathbb{R}^2$. Como $g\pi(x)$ es cercano a $f\pi(x)$, existe una única $y \in \mathbb{R}^2$ cercana a Lx tal que $\pi(y) = g\pi(x)$. Sea $G(x) = y$, de la definición tenemos que $\pi G(x) = g\pi(x)$. g próxima a f y π difeomorfismo local implica G próximo a L . Por lo que G es también difeomorfismo. Escribiremos $G = L + \phi$. Al ser L hiperbólico, L y $L + \phi$ son conjugados. Es decir, existe $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ homeomorfismo a distancia finita de la identidad, tal que $HL = GH$.

Basta probar que H induce un homeomorfismo $h : T^2 \rightarrow T^2$ tal que $\pi H = h\pi$. Pues, al ser π suprayectiva.

$$hf\pi = h\pi L = \pi HL = \pi GH = g\pi H = gh\pi \implies hf = gh$$

Escribamos $H = Id + u$.

$$\begin{aligned} HL = GH &\implies (Id + u)L = (L + \phi)(Id + u) \\ &\implies L + uL = L + Lu + \phi(Id + u) \\ &\implies uL = Lu + \phi(Id + u) \end{aligned}$$

Queremos una $u \in C_b^0(\mathbb{R}^2)$ con $(Id + u)[\mathbb{Z}^2] = \mathbb{Z}^2$. Es decir:

$$\forall x \in \mathbb{R}^2 \forall p \in \mathbb{Z}^2 \exists q \in \mathbb{Z}^2 \quad (Id + u)(x + p) = q + (Id + u)x$$

despejando: $u(x + p) = q - p + u(x)$. Como $\|u\|$ debe ser pequeña, es necesario que $q - p = 0$. Por lo tanto $u(x + p) = u(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \forall p \in \mathbb{Z}^2$.

Sea $\rho = \{u \in C_b^0(\mathbb{R}^2) : \forall x \in \mathbb{R}^2 \forall p \in \mathbb{Z}^2 \quad u(x + p) = u(x)\}$. Sea $\mathbb{L} : \rho \rightarrow \rho$ dada por $\mathbb{L}u = Lu - uL$. Como L manda \mathbb{Z}^2 en \mathbb{Z}^2 , para $x \in \mathbb{R}^2, p \in \mathbb{Z}^2$

$$\begin{aligned} (Lu - uL)(x + p) &= Lu(x + p) - uL(x + p) \\ &= Lu(x) - u(L(x) + L(p)) \\ &= Lu(x) - uL(x) \\ &= (Lu - uL)(x) \end{aligned}$$

Luego, $\mathbb{L}[\rho] \subseteq \rho$. L hiperbólico implica \mathbb{L} invertible, y como $G = L + \phi$ se proyecta en T^2 , llegamos a que $\phi \in \rho$. Por lo tanto, el mapeo $\mu : \rho \rightarrow \rho$ dado por $\mu(u) = \mathbb{L}^{-1}(\phi(Id + u))$ está bien definido. Si $\|\phi\|$ es pequeña, es decir, si g está suficientemente cerca de f , μ es una contracción. Por el Lema de contracción, μ tiene un único punto fijo u . El cual satisface $u = \mathbb{L}^{-1}(\phi(Id + u))$ y por lo tanto $uL - Lu = \mathbb{L}u = \phi(Id + u)$. Es decir, satisface la condición que buscábamos. De manera análoga a la demostración del Lema 2.3.2, se muestra que $H = Id + u$ es un homeomorfismo. $u \in \rho$ implica que $H = Id + u$ se proyecta a un homeomorfismo $h : T^2 \rightarrow T^2$ con $fh = gh$.

Por lo tanto f es estructuralmente estable. \square

El ejemplo anterior motiva la definición de una clase de difeomorfismos, conocidos como difeomorfismos de Anosov, que resultan ser estructuralmente estables.

Definición. Sea M variedad compacta. Decimos que $f \in \text{Dif}^k(M)$ es un difeomorfismo de Anosov si satisface las siguientes condiciones.

- Hay $E^s, E^u \subseteq TM$ fibraciones sobre M tales que $TM = E^s \oplus E^u$ es la suma de Whitney.
- E^s, E^u son invariantes bajo la diferencial Df en el siguiente sentido: Para cada $x \in M$

$$Df(x)[E_x^s] = E_{f(x)}^s \quad \text{y} \quad Df(x)[E_x^u] = E_{f(x)}^u$$

Se sigue que $Df[E^s] = E^s$ y $Df[E^u] = E^u$.

- Existe una métrica Riemanniana en M y $\lambda \in (0, 1)$ constante tales que:

$$v \in E_x^s \implies \|Df(x)v\| = \lambda \|v\| \quad w \in E_x^u \implies \|Df^{-1}(x)w\| = \lambda \|w\|$$

Anosov fue el primero en demostrar que estos difeomorfismos son estructuralmente estables en $\text{Dif}^k(M)$ para M de cualquier dimensión. Anosov también define una clase equivalente de campos vectoriales y demuestra la estabilidad estructural de estos en $\mathfrak{X}^k(M)$. La suspensión de un difeomorfismo de Anosov es un campo de Anosov.

Notemos que la definición impone fuertes condiciones sobre la variedad ambiente. Por ejemplo, dentro de las superficies compactas, sólo el Toro admite un difeomorfismo de Anosov. El ejemplo que dimos para T^2 se puede generalizar para $T^n = S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1$

(n -veces). Una clase ejemplos interesantes de campos de Anosov son los campos geodésicos en variedades con curvatura negativa.

Tenemos dos clases de difeomorfismos estructuralmente estables: Morse-Smale y Anosov. Cada una con características distintas, de hecho la clase de difeomorfismos de Morse-Smale es ajena a la clase de los difeomorfismos de Anosov. Mostraremos que la clase de los campos vectoriales que son de Morse-Smale es ajena a la clase de campos vectoriales Anosov. Debido a que la suspensión de un difeomorfismo de Morse-Smale es un campo de Morse-Smale y la suspensión de un difeomorfismo de Anosov es un campo de Anosov, tenemos automáticamente el resultado para difeomorfismos. Demostraremos primero una característica interesante de los campos vectoriales de Morse-Smale.

Lema 4.4.3. *$X \in \mathfrak{X}^k(M)$ con M compacta. Si $X \in M - S$ entonces X tiene un elemento crítico atractor y un elemento crítico repulsor.*

Demostración. Sea $p \in M$. Al ser X un campo de Morse-Smale, $\omega(p)$ es un único elemento crítico σ_1 . Si σ_1 es un atractor terminamos. Supongamos que no. Sean $s_1 = \dim(W^s(\sigma_1))$ y $u_1 = \dim(W^u(\sigma_1))$. Entonces, s_1, u_1 satisfacen que $s_1 + u_1 = n = \dim(M)$ y $u_1 > 0$. Sea $q \in W^u(\sigma_1) - \sigma_1$. Así, $O(q) = \gamma \subseteq W^u(\sigma_1) - \sigma_1$. $\omega(\gamma) = \sigma_2$ es un único elemento crítico. Como $\gamma \subseteq W^u(\sigma_1) \cap W^s(\sigma_2)$, la intersección es no vacía. Luego, por la transversalidad $W^u(\sigma_1) \bar{\cap} W^s(\sigma_2)$, necesariamente $s_2 + u_1 \geq n$, donde $s_2 = \dim(W^s(\sigma_2))$. Si $s_2 = s_1$ entonces $s_2 + u_1 = n$ y $\dim(W^s(\sigma_1) \cap W^u(\sigma_2)) = 0$. Pero $1 = \dim(\gamma) \leq \dim(W^s(\sigma_1) \cap W^u(\sigma_2)) = 0$, una contradicción. Por lo tanto $s_2 + u_1 > n$ y $s_2 > s_1$. Repitiendo este argumento obtenemos una sucesión creciente $s_1 < s_2 < \dots < s_k$, siempre y cuando $u_i > 0$. Como $s_i < n$, esta sucesión debe ser finita, por lo que debe haber un índice r tal que $u_r = 0$. Lo que significa que el correspondiente elemento crítico σ_r es un atractor.

De manera análoga, intercambiando los papeles de la variedad estable e inestable, encontramos el repulsor de X . □

Proposición 4.4.4. *La clase de los campos de Morse-Smale es ajena a la clase de los campos de Anosov. En otras palabras, si $X \in \mathfrak{X}^k(M)$ es un campo de Morse-Smale, entonces X no es Anosov:*

Demostración. Debido a que los campos de Morse-Smale un elemento crítico atractor y uno repulsor, basta ver que ningún campo de Anosov cumple este requisito. Para esto notemos que si σ es un elemento crítico de $X \in Anosov$, entonces $W^s(\sigma) = E_\sigma^s$ y $W^u(\sigma) = E_\sigma^u$, donde E^s, E^u son las fibraciones que descomponen $TM = E^s \oplus E^u$. Por lo tanto, toda variedad estable tiene la misma dimensión. Es decir, si σ_1 y σ_2 son dos elementos críticos distintos, entonces $\dim(W^s(\sigma_1)) = \dim(W^s(\sigma_2))$. Pero la variedad estable de un atractor tiene, por definición, dimensión igual a la de M , mientras que la variedad estable de un repulsor tiene dimensión cero. Por lo tanto, si $\dim(M) > 0$ entonces $X \in Anosov$ no puede tener simultáneamente un atractor y un repulsor. Concluimos que si X es de Morse-Smale, entonces X no puede ser de Anosov. □

Corolario. *La clase de los difeomorfismos estables es ajena a la clase de los difeomorfismos de Anosov.*

A partir de esta aparente disparidad, Smale introduce una nueva clase de difeomorfismos que engloba las dos anteriores. Éstos difeomorfismos son estructuralmente estables y se conjetura que todo difeomorfismo estructuralmente estable pertenece a esta clase. Para esto, extenderemos la noción de elemento crítico hiperbólico de la siguiente manera:

Definición. Sean M variedad compacta, $f \in \text{Dif}^k(M)$ y $\Lambda \subseteq M$ con Λ cerrado e invariante bajo f , es decir $f[\Lambda] = \Lambda$. Decimos que Λ es hiperbólico para f si:

- El fibrado tangente a M restringido a Λ se descompone en una suma directa continua (Suma de Whitney): $T_\Lambda M = E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^u$.
- Hay una métrica Riemanniana y $\lambda \in (0, 1)$ constante tal que $\forall x \in \Lambda$:

$$v \in E_x^s \implies \|Df(x)v\| = \lambda \|v\| \quad w \in E_x^u \implies \|Df^{-1}(x)w\| = \lambda \|w\|$$

Consideremos ahora el conjunto no errante de f , $\Omega(f)$, el cual es cerrado e invariante bajo f .

Definición. El difeomorfismo f satisface el axioma A si $\Omega(f)$ es hiperbólico para f y $\Omega(f) = \overline{\text{per}(f)}$. Es decir, los puntos periódicos de f son densos en los no errantes.

Si f satisface el axioma A , Smale mostró que $\Omega(f)$ se descompone en una unión finita disjunta de subconjuntos cerrados, invariantes y transitivos

$$\Omega(f) = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_r$$

Los subconjuntos Ω_i son denominados conjuntos básicos. La transitividad de Ω_i significa que hay órbitas densas en Ω_i .

En el caso de los difeomorfismos de Morse-Smale, los conjuntos básicos son órbitas periódicas, mientras que para el difeomorfismo de Anosov que vimos, T^2 es el conjunto básico.

En general los conjuntos básicos pueden tener una estructura complicada, como veremos en los siguientes ejemplos. Como en el caso de Morse-Smale, estos pueden ser del tipo atractor, repulsor o silla.

Generalizaremos los conceptos de variedades estable e inestable para órbitas no periódicas.

Definición. Sean $f \in \text{Dif}^k(M)$ y $x \in M$.

- La variedad estable de f en x es el conjunto

$$W_f^s(x) = \{y \in M : \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0\}$$

- La variedad inestable de f en x es el conjunto

$$W_f^u(x) = \{y \in M : \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) = 0\}$$

Si $\Omega(f)$ es hiperbólico y $x \in \Omega(f)$ entonces $W_f^s(x)$ y $W_f^u(x)$ son inmersiones de clase C^k de \mathbb{R}^s , \mathbb{R}^u de dimensiones complementarias.

Consideremos $f \in \text{Dif}^k(M)$ un difeomorfismo que satisface axioma A . Sea $\Omega(f) = \Omega_1, \dots, \Omega_r$, es la descomposición en conjuntos básicos. Por transversalidad: $\forall x, y \in \Omega_i$ ($x \neq y \implies \dim(W^s(x)) = \dim(W^u(y))$). En el caso del difeomorfismo de Anosov en T^2 del ejemplo anterior, las variedades estables son proyecciones en T^2 de rectas paralelas con pendiente irracional de \mathbb{R}^2 . Lo anterior también es cierto para las variedades inestables.

Una última observación respecto a la condición de transitividad de los conjuntos básicos. Al ser una condición difícil de probar directamente, el siguiente criterio es de utilidad:

Lema 4.4.5. Si Λ es un conjunto hiperbólico para f con órbitas periódicas densas tal que $\forall p, q \in \text{per}(f) \cap \Lambda \quad W^s(p) \cap W^u(q) \neq \emptyset$, entonces Λ es transitivo.

Demostración.

Sea $p \in \text{per}(f) \cap \Lambda$. Por el λ -Lema, dado que $\forall p, q \in \text{per}(f) \cap \Lambda \quad W^s(p) \cap W^u(q) \neq \emptyset$, tenemos que la variedad inestable $W^s(p)$ se acumula en $\text{per}(f) \cap \Lambda$. Por lo que $W^s(p)$ es denso en Λ . Escogemos una base de vecindades abiertas numerable $U_1^p, U_2^p, \dots, U_n^p, \dots$ de p en Λ . El conjunto $V_r^p = \cup_{n \in \mathbb{Z}} f^n[U_r^p]$ es abierto y denso en Λ . Λ cerrado implica que Λ satisface la propiedad de Baire. Como las órbitas periódicas de f en Λ son hiperbólicas, $\text{per}(f) \cap \Lambda$ es numerable y por lo tanto $D = \cap_{p \in \text{per}(f), r \in \mathbb{N}} V_r^p$ es denso en Λ . Así, si $x \in D$ y $A \subseteq \Lambda$ es abierto no vacío, existe un $U_r^p \subseteq A$, para algunos $p \in A$ y $r \in \mathbb{N}$. Como $x \in V_r^p = \cup_{n \in \mathbb{Z}} f^n[U_r^p]$, entonces $O(x) \cap A \neq \emptyset$. Por lo tanto $O(x)$ es densa en Λ . \square

Definición. Sea $f \in \text{Dif}^k(M)$ que satisfaga el axioma A . Decimos que f satisface la condición de transversalidad si $\forall x, y \in \Omega(f) \quad W^s(x) \bar{\cap} W^u(y)$.

Smale demuestra que los difeomorfismos que satisfacen el axioma A y la condición de transversalidad son estructuralmente estables.

Algunos ejemplos:

Ejemplo. Los difeomorfismos de Morse-Smale, donde $\Omega(f) = \text{per}(f)$. Los difeomorfismos de Anosov en T^2 inducidos por isomorfismos lineales de \mathbb{R}^2 . Se puede probar que todo difeomorfismo de Anosov satisface el axioma A y la condición de transversalidad.

Ejemplo. Sea $g : S^1 \rightarrow S^1$ difeomorfismo de Morse-Smale con dos puntos fijos: El polo norte n repulsor, y el polo sur s atractor.

Sea $f : T^2 \rightarrow T^2$ difeomorfismo de Anosov inducido por un isomorfismo lineal de \mathbb{R}^2 .

Consideremos el difeomorfismo $g \times f : S^1 \times T^2 \rightarrow S^1 \times T^2$. El conjunto no errante de $g \times f$ consiste de dos piezas $\Omega_1 = \{n\} \times T^2$ y $\Omega_2 = \{s\} \times T^2$. Ya que, si $x \in S^1 - \{n, s\}$, entonces $x \in W_g^s(s)$. Por lo tanto (x, y) es errante para cualquier $y \in T^2$ (debido a que la primer coordenada lo es). Ω_i es cerrado, hiperbólico y transitivo. Ω_1 es repulsor y Ω_2 atractor. Sean $x \in \Omega_1$, $y \in \Omega_2$ y $(z, w) \in W_{g \times f}^s(x) \cap W_{g \times f}^u(y)$. La variedad estable $W_{g \times f}^s(z, w)$ tiene dos componentes W_1^s a lo largo de $S^1 \times \{w\}$ y W_2^s a lo largo de $\{z\} \times T^2$. Análogamente sean W_1^u, W_2^u las dos componentes de $W_{g \times f}^u(y)$ a lo largo de $S^1 \times \{w\}$ y $\{z\} \times T^2$ respectivamente.

$$W_1^s = (S^1 - \{n\}) \times \{w\} \quad \text{y} \quad W_1^u = (S^1 - \{s\}) \times \{w\} \Rightarrow W_1^s \bar{\cap} W_1^u$$

análogamente $W_2^s \bar{\cap} W_2^u$. Por la definición del difeomorfismo $g \times f$ y dado que

$$W_{g \times f}^s(x) = W_1^s \times W_2^s \quad W_{g \times f}^u(y) = W_1^u \times W_2^u$$

concluimos que $W_{g \times f}^s(x) \bar{\cap} W_{g \times f}^u(y)$. Luego, el difeomorfismo $g \times f : T^3 \rightarrow T^3$ satisface el axioma A y la condición de transversalidad, mas no es de Morse-Smale ni Anosov.

Ejemplo (Herradura de Smale). La herradura de Smale es un difeomorfismo $f \in \text{Dif}^\infty(S^2)$ que satisface el axioma A y la condición de transversalidad. El conjunto no errante $\Omega(f)$ consiste de tres componentes: Ω_1 un punto fijo hiperbólico repulsor. Ω_2 es un conjunto homeomorfo al Cantor donde las sillas periódicas son densas. Ω_3 un punto fijo atractor.

En el polo norte de S^2 colocamos Ω_1 , punto fijo hiperbólico repulsor. De manera que el hemisferio norte, H_+ junto con el ecuador, quedan contenidos en $W^u(\Omega_1)$. Denotemos por H_- el hemisferio sur. Sabemos que $f[H_-] \subseteq H_-$. Dividimos H_- en tres regiones:

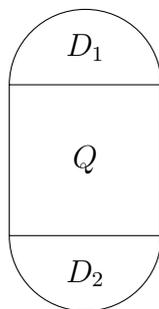


Figura 4.12: $H_- = D_1 \cup Q \cup D_2$

Procedemos a describir f en $H_- = D_1 \cup Q \cup D_2$. Sea l aplicación lineal que comprime horizontalmente por un factor $0 < \lambda < 1/4$ y expande verticalmente por $\mu > 4$.

Sea g la aplicación que tuerce el cuadro central de $l[Q]$ y lo traslada, formando una herradura F . Tomamos $f = g \circ l$ en H_- .

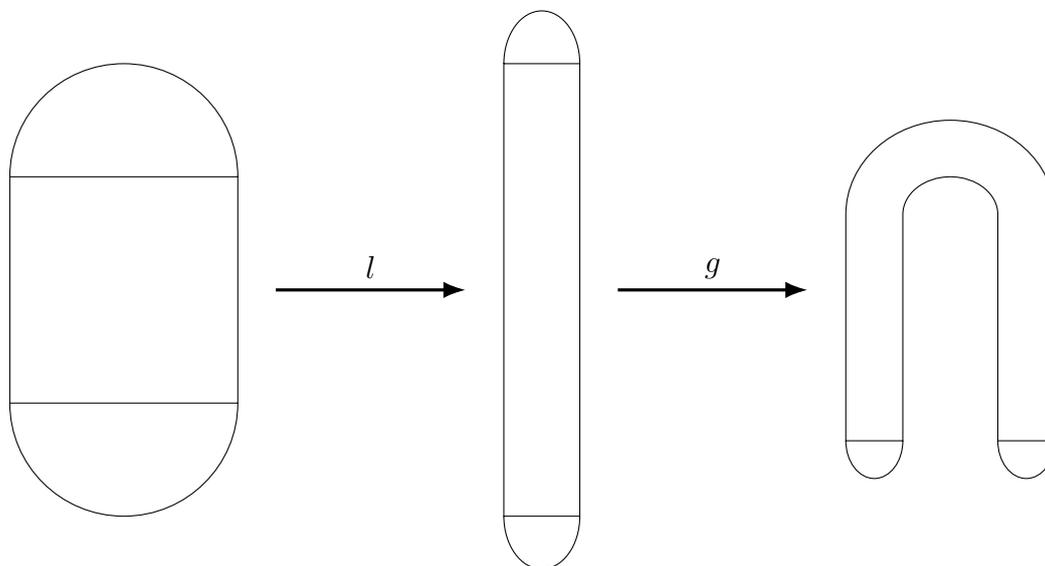
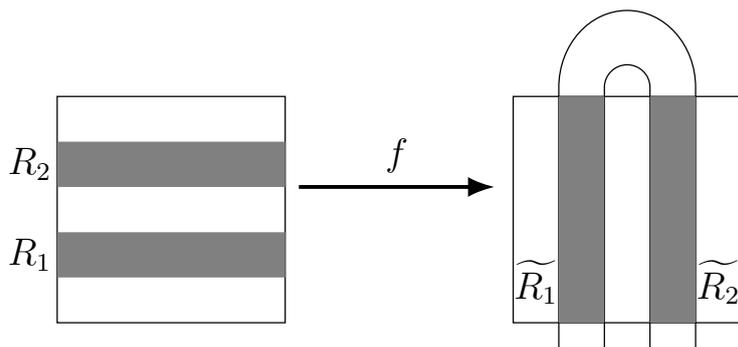


Figura 4.13: Herradura de Smale

$f[Q] \cap Q$ consiste de dos componentes conexas rectangulares \tilde{R}_1 y \tilde{R}_2 . Las cuales imágenes de rectángulos $R_1, R_2 \subseteq Q$. Notemos que en los rectángulos R_1 y R_2 , f es afín, pues $f|_{R_1}$ es l compuesta con una traslación, mientras que $f|_{R_2}$ es l compuesta con una traslación y una rotación.

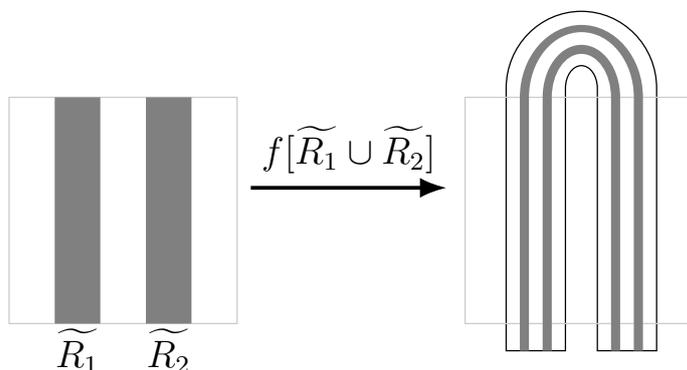


El mapeo f manda los segmentos horizontales R_1 y R_2 en los segmentos verticales \widetilde{R}_1 y \widetilde{R}_2 .

Finalmente, en el centro del disco $\widetilde{D}_1 = f[D_1]$ colocamos un punto fijo hiperbólico atractor Ω_3 con $\widetilde{D}_1 \subseteq W^s(\Omega_3)$.

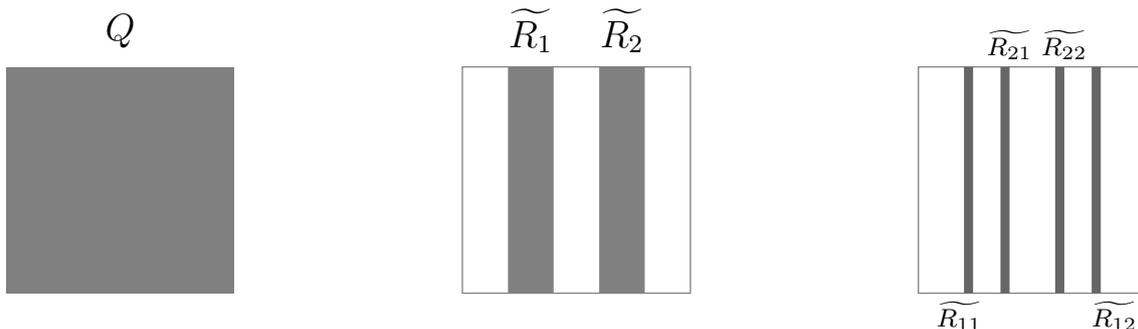
Analicemos $\Omega(f)$. Si $x \in H_+ - \{\Omega_1\}$ entonces $x \in W^u(\Omega_1)$ y por lo tanto x es errante. Si $x \in \widetilde{D}_1$ tal que $x \neq \Omega_3$, entonces $x \in W^s(\Omega_3)$ es errante. $x \in D_1$ implica que $f(x) \in \widetilde{D}_1$, por lo que $f(x) \in W^s(\Omega_3) - \{\Omega_3\}$ y por lo tanto x es errante. $x \in D_2$ implica $x \in D_1$ y x errante. En conclusión $x \in H_-$, con $x \neq \Omega_3$ sólo puede ser no errante si $O(x) \subseteq Q$. Por lo que, si $x \in \Omega$, con $x \neq \Omega_1, x \neq \Omega_3$ entonces $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n[Q] = \Lambda$.

A continuación describiremos el conjunto Λ . Así como $Q \cap f[Q]$ consiste de dos rectángulos, $Q \cap f[Q] \cap f^2[Q]$ consiste de cuatro componentes conexas rectangulares.



Esquemáticamente tenemos:

$$Q, Q \cap f[Q] = \widetilde{R}_1 \cup \widetilde{R}_2, Q \cap f[Q] \cap f^2[Q] = \widetilde{R}_{11} \cup \widetilde{R}_{12} \cup \widetilde{R}_{21} \cup \widetilde{R}_{22}, \text{ etc...}$$



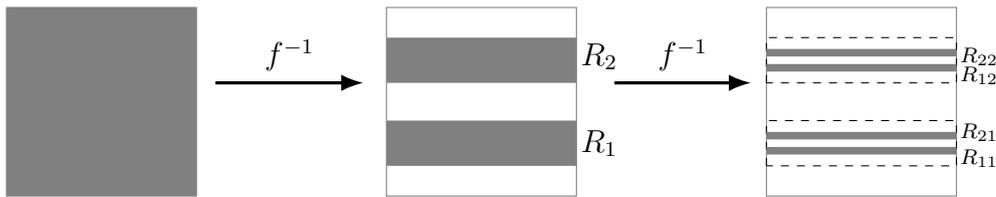
Colocamos los índices de los rectángulos de la siguiente manera: $f[\tilde{R}_1] = \tilde{R}_{11} \cup \tilde{R}_{12}$ con $\tilde{R}_{11} \subseteq \tilde{R}_1$, $\tilde{R}_1 \cap \tilde{R}_{12} = \emptyset$ $f[\tilde{R}_2] = \tilde{R}_{21} \cup \tilde{R}_{22}$ con $\tilde{R}_{21} \cap \tilde{R}_2 = \emptyset$, $\tilde{R}_{22} \subseteq \tilde{R}_2$.

En general $\tilde{R}_{\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_p\sigma_{p+1}} \subseteq \tilde{R}_{\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_p}$ si $\sigma_p = \sigma_{p+1}$ y $\tilde{R}_{\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_p\sigma_{p+1}} \cap \tilde{R}_{\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_p} = \emptyset$ si $\sigma_p \neq \sigma_{p+1}$, donde $\sigma_i \in \{1, 2\}$. Notemos que, para $k > 0$ $\tilde{R}_{1\dots 1(k \text{ veces})} \subseteq \tilde{R}_1$. Es decir $\tilde{R}_{1\dots 1(k \text{ veces})} \subseteq f^k[\tilde{R}_1] \cap Q$. Por lo tanto $f^k[\tilde{R}_1] \cap \tilde{R}_1 \neq \emptyset$. Lo mismo ocurre para cada rectángulo $\tilde{R}_{\sigma_1\dots\sigma_p}$.

Consideremos una recta horizontal α con $\alpha \cap Q \neq \emptyset$. Sea $[a, b] = \alpha \cap Q$. El conjunto $[a, b] \cap f[Q]$ consiste de dos segmentos ajenos, resultado de retirar tres segmentos disjuntos. De cada uno de estos segmentos, retiramos nuevamente tres segmentos disjuntos para formar $[a, b] \cap f[Q] \cap f^2[Q]$ y así sucesivamente. De aquí concluimos que $[a, b] \cap (\bigcap_{n \geq 0} f^n[Q])$ es un conjunto de Cantor C_1 .

Sea β una recta horizontal, con $\beta \cap Q \neq \emptyset$. Sea $[c, d] = \beta \cap Q$ entonces, para cada $n \geq 0$, $[c, d] \cap f^n[Q] = [c, d]$ o $[c, d] \cap f^n[Q] = \emptyset$. Por lo tanto $\bigcap_{n \geq 0} f^n[Q] = C_1 \times [c, d]$.

Ya notamos que $f^{-1}[Q] \cap Q = R_1 \cup R_2$ son dos rectángulos horizontales ajenos. Para $f^{-2}[Q] \cap f^{-1}[Q] \cap Q = R_{11} \cup R_{12} \cup R_{21} \cup R_{22}$ obtenemos cuatro rectángulos ajenos, con $R_{11} \subseteq R_1$, $R_{12} \cap R_1 = \emptyset$, $R_{21} \cap R_2 = \emptyset$, $R_{22} \subseteq R_2$.



Tenemos entonces una situación análoga a la anterior, pero ahora respecto al segmento vertical $[c, d]$. Es decir, $[c, d] \cap (\bigcap_{n \leq 0} f^n[Q]) = C_2$ es un conjunto de cantor y para el segmento horizontal sólo hay dos posibilidades, o $[a, b] \cap \text{big}(\bigcap_{n \leq 0} f^n[Q]) = [a, b]$ o $[a, b] \cap (\bigcap_{n \leq 0} f^n[Q]) = \emptyset$. Se sigue que $\bigcap_{n \leq 0} f^n[Q] = [a, b] \times C_2$. Por lo tanto

$$\Lambda \cap \left(\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n[Q] \right) = C_1 \times C_2$$

el producto de dos conjuntos homeomorfos al conjunto de Cantor.

Λ es hiperbólico ya que f manda segmentos verticales en segmentos verticales expandidos y segmentos horizontales en segmentos horizontales contraídos.

Sea $x \in \Lambda$ y $R \subseteq Q$ rectángulo centrado en x con lados verticales del mismo tamaño a los de Q . Como Λ está contenido en la intersección de la sucesión de rectángulos $\tilde{R}_{\sigma_1\dots\sigma_p}$ entonces R contiene uno de los rectángulos $\tilde{R}_{\sigma_1\dots\sigma_p}$.

Mostraremos que $x \in \Lambda$ implica que x es no errante. Sean $Q_x \subseteq Q$ cuadrado conteniendo a x y $N > 0$. Buscamos una $n > N$ tal que $f^n[Q_x] \cap Q_x \neq \emptyset$. Como f expande segmentos verticales hay un $m_0 \geq 0$ tal que $f^{m_0}[Q_x] \cap Q$ contiene un rectángulo R_0 con altura igual a la de Q . Al ser Λ invariante bajo f , $f^{m_0}(x) \in \Lambda$. Entonces existes $\tilde{R}_{\sigma_1\dots\sigma_p} \subseteq R_0$, tomemos $k > N + m_0$, entonces $f^k[\tilde{R}_{\sigma_1\dots\sigma_p}] \cap R_{\sigma_1\dots\sigma_p} \neq \emptyset$. Por lo tanto $f^k[R_0] \cap R_0 \neq \emptyset$ y x es no errante.

Comprobaremos que los puntos periódicos son densos en Λ . Ya mostramos que $x \in \Lambda$ y Q_x cuadrado con $x \in Q_x$ implica que $f^n[Q_x] \cap Q_x \neq \emptyset$ para n a suficientemente grande. Por otro lado, f comprime linealmente segmentos horizontales de Λ y expande segmentos verticales de Λ . De la expansión concluimos que hay un segmento vertical $l_V \subseteq Q_x$ tal que $l_V \subseteq f^n[l_V]$. De la contracción, hay $l_h \subseteq Q_x$ segmento horizontal tal que $f^n[l_h] \subseteq l_h$. Luego, $\{p\} = l_V \cap l_h$ implica que $\{f^n(p)\} = f^n[l_V \cap l_h] = f^n[l_V] \cap f^n[l_h] = l_V \cap l_h = \{p\}$. Por lo tanto $f^n(p) = p$ es un punto periódico para f . Se sigue que los puntos periódicos son densos en Λ .

Para comprobar que Λ es un conjunto básico sólo falta verificar que hay órbitas densas en Λ . Por el criterio del Lema 4.4.3, al ser Λ hiperbólico para f y los puntos periódicos de f ser densos en Λ , basta mostrar que $p, q \in \text{per}(f) \cap \Lambda$ implica que $W^s(p) \bar{\cap} W^u(q)$. Pero esto es inmediato ya que $W^s(p)$ contiene sólo segmentos horizontales y $W^u(q)$ contiene sólo segmentos verticales para cada $p, q \in \text{per}(f) \cap \Lambda$.

Concluimos que los conjuntos básicos del difeomorfismo C^∞ $f : S^2 \rightarrow S^2$ son Ω_1 , $\Omega_2 = \Lambda$ y Ω_3 . f satisface la condición de transversalidad debido a que Ω_1 es un repulsor, Ω_3 un atractor y ya verificamos que Ω_2 la satisface. Luego, f satisface el axioma A y la condición de transversalidad.

Sea $A^k(M) \subseteq \text{Dif}^k(M)$ la clase de los difeomorfismos que satisfacen el axioma A y la condición de transversalidad. Consideremos M compacta. Smale conjetura que $f \in \text{Dif}^k(M)$ es estructuralmente estable si y sólo si $f \in A^k(M)$. Dos resultados que se tienen sobre la estabilidad estructural de los difeomorfismos $f \in A^k(M)$ son los siguientes:

- Robin demuestra que: $f \in A^2(M) \implies f$ estructuralmente estable.
- De Melo demuestra que : $f \in A^1(M^2) \implies f$ estructuralmente estable.

Sigue siendo una pregunta importante si $f \in A^1(M)$ es estructuralmente estable para M de dimensión arbitraria. En el caso particular de que $\Omega(f)$ es finito, entonces $f \in \text{Dif}^k(M)$ es estructuralmente estable si y sólo si $f \in M - S$.

Bibliografía

- [1] V. GUILLEMIN, A. POLLACK: *Differential Topology*, Prentice Hall, New Jersey, 1974.
- [2] M. IRWIN: *On the Stable Manifold Theorem*, Bulletin London Mathematical Society, 2, 1970.
- [3] S. LANG: *Analysis*, Vol. I. Addison- Wesley, 1968.
- [4] J. ROBBIN: *Topological conjugacy and structural stability for discrete dynamical systems*, Bulletin of American Mathematical Society 78, 1972.
- [5] J. PALIS, W. DE MELLO: *Geometric Theory of Dynamical Systems: An Introduction*, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [6] S. SMALE: *Differentiable dynamical systems*, Bulletin of American Mathematical Society 73, 1967.