UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

MUESTREO E INTERPOLACIÓN EN ESPACIOS DE DE BRANGES POR MEDIO DE OPERADORES ENTEROS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:
JOSÉ ALFREDO URIBE ALCÁNTARA

TUTORES PRINCIPALES:
DR. LUIS OCTAVIO SILVA PEREYRA
IIMAS, UNAM
DR. JULIO HUGO TOLOZA
DPTO. DE MATEMÁTICA, UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR, ARGENTINA

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:
DR. NILS ACKERMANN, IMATE, UNAM
DR. MIGUEL ARTURO BALLESTEROS MONTERO, IIMAS, UNAM

CIUDAD UNIVERSITARIA, CIUDAD DE MÉXICO, JULIO DE 2018

Contenido

Introducción

Este trabajo aborda problemas relacionados con la reconstrucción de funciones enteras que pertenecen a determinados espacios de de Branges (Definición 1.3.3), a partir de los valores que dichas funciones toman en cierto conjunto discreto de puntos dado (Teorema 2.1.1). Esto se lleva a cabo mediante una interacción entre Teoría de Operadores, Teoría de Funciones y Teoría de Muestreo. Con el objetivo de familiarizar al lector con el tipo de cuestionamientos que abordaremos, a continuación se enuncian dos problemas clásicos de Teoría de Muestreo.

1. El problema de Nevanlinna-Pick fue estudiado de forma independiente por Nevanlinna y Pick alrededor del año 1920 [34, Cap. 1]. Dados $z_1,\ z_2,\dots,z_n$ y $a_1,\ a_2,\dots,a_n$ en el disco unitario $\mathbb{D}$, se buscan condiciones bajo las cuales el problema de interpolación $f(z_j)=a_j$, $j=1,\ 2,\dots,n$, tiene una solución f analítica en $\mathbb{D}$ y tal que $|f(z)|\leq 1$, $z\in\mathbb{D}$. El Teorema de Pick [16, Sec. I.2] establece que este problema tiene una solución, si y sólo si, la matríz

$$M:=\left(\frac{1-\overline{a_j}a_k}{1-\overline{z_j}z_k}\right)_{j,k=1,\dots,n}$$

es semidefinida positiva, es decir, $x^*Mx\geq 0$ para todo $x\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}$, donde x^* es la transpuesta conjugada de x. Cuando M es semidefinida positiva, existe un producto de Blaschke de grado a lo más n que soluciona el problema de Nevanlinna-Pick.

2. Los espacios Paley-Wiener se pueden definir mediante la transformada de Fourier de funciones con soporte contenido en un intervalo finito centrado en cero [8, Sec. 16]. Dado un número real positivo a, sea

$$\mathcal{PW}_a:=\left\{f(z)=\int_{-a}^{a}e^{-ixz}\varphi(x)dx:\varphi\in L_2(-a,a)\right\}. \tag{1}$$

El Teorema de Muestreo de Whittaker-Shannon-Kotel'nikov (Teorema WSK) establece que, cualquier $f \in \mathcal{PW}_a$ admite la siguiente representación,

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f\left(\tfrac{n\pi}{a}\right) \mathcal{G}_a\left(z, \tfrac{n\pi}{a}\right), \qquad \mathcal{G}_a\left(z,t\right) := \frac{\sin\left[a(z-t)\right]}{a(z-t)}, \tag{2}$$

donde la serie converge uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$ [28, Tma. 7.2.2].

La serie en (2) recibe el nombre de *serie cardinal* [20]. En la literatura de ingeniería de las comunicaciones y análisis de señales, las funciones que pertenecen a $\mathcal{PW}_a$ son llamadas *señales de banda limitada* y el número a es llamado *amplitud de banda de la señal*. La razón a/π es la frecuencia mínima a la que la señal necesita ser muestreada para ser reconstruida completamente y recibe el nombre de *tasa de muestreo de Nyquist* [49, Sec. 1.2], [13]. Nos referiremos a la función $\mathcal{G}_a\left(z,t\right)$ como *núcleo de muestreo*. El Teorema WSK establece que toda la información de una señal de banda limitada, está contenida en los valores que asume en puntos que están espaciados de forma equidistante. Existen otras formas de reconstruir una señal de banda limitada, por ejemplo, la serie de interpolación de Gauss-Newton [20, pag. 47], sin embargo, en aplicaciones de procesamiento de señales ha predominado el uso de la serie cardinal debido a la forma natural en que se ajusta al análisis de Fourier.

Ahora considere un espacio de Hilbert $\mathcal{B}$ cuyos elementos son funciones enteras. Suponga que, para cada $w \in \mathbb{C}$, la evaluación puntual $f \in \mathcal{B} \mapsto f(w) \in \mathbb{C}$ es un funcional lineal continuo. Por el teorema de representación de Riesz, esta hipótesis es equivalente a la existencia de una función $k : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que,

(i) para todo $w \in \mathbb{C}$, la función $k(\cdot, w)$ pertenece a $\mathcal{B}$,

(ii) para cualesquiera $f \in \mathcal{B}$ y $w \in \mathbb{C}$, $f(w) = \langle k(\cdot, w), f(\cdot)\rangle_{\mathcal{B}}$, donde $\langle \cdot, \cdot\rangle_{\mathcal{B}}$ denota el producto interior en $\mathcal{B}$ (Sección 1.1).

La función $k(z, w)$ es llamada *núcleo reproductor* de $\mathcal{B}$. En el Teorema WSK subyace una estructura matemática que ha permitido establecer generalizaciones de este resultado a la clase de espacios de Hilbert con núcleo reproductor [11,12,14,15]. En este trabajo estudiamos fórmulas de muestreo tipo Kramer en un tipo particular de espacios con núcleo reproductor, llamados *espacios de de Branges* (Definición 1.3.3). Los espacios de de Branges que consideramos se originan a partir de la modelación de un operador lineal de una cierta clase (Definición 1.2.13), como el operador de multiplicación por la variable independiente en determinado espacio funcional (Teoremas 1.4.2, 1.4.3). A continuación se describe esta situación de forma más precisa. Dado un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, denotaremos mediante $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ a la clase de operadores lineales en $\mathcal{H}$ que son cerrados, simétricos, regulares y tienen índices de deficiencia $(1, 1)$ (Sección 1.1, Def. 1.2.12).

Para cada $A \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$, existe un espacio de de Branges $\widehat{\mathcal{H}}$ y un isomorfismo isométrico $\Phi : \mathcal{H} \to \widehat{\mathcal{H}}$ tal que $\Phi \operatorname{dom}(A) = \operatorname{dom}(S)$ y $S\Phi\varphi = \Phi A\varphi$ para todo $\varphi \in \operatorname{dom}(A)$, donde S es el operador de multiplicación por la variable independiente en $\widehat{\mathcal{H}}$,

$$\operatorname{dom}(S) = \{f(z) \in \widehat{\mathcal{H}} \,:\, zf(z) \in \widehat{\mathcal{H}}\}, \qquad (Sf)(z) := zf(z), \qquad f(z) \in \operatorname{dom}(S).$$

De esta forma, $A = \Phi^{-1}S\Phi$ y $S = \Phi A\Phi^{-1}$. Cuando esto sucede, decimos que Φ *transforma al operador A en el operador S* (*los operadores A y S son unitariamente equivalentes*).

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H} \supset \operatorname{dom}(A) \arrow[r, "A"'] \arrow[d, "\Phi"'] & \operatorname{ran}(A) \subset \mathcal{H} \\
\widehat{\mathcal{H}} \supset \operatorname{dom}(S) \arrow[r, "S"] & \operatorname{ran}(S) \subset \widehat{\mathcal{H}} \arrow[u, "\Phi^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

Mediante este modelo funcional, las propiedades espectrales de las extensiones autoadjuntas canónicas de $A \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ permiten establecer fórmulas analíticas de muestreo en el espacio $\widehat{\mathcal{H}}$. Una extensión autoadjunta canónica de A es un operador $A(\gamma)$ que satisface $A \subset A(\gamma) = A(\gamma)^* \subset A^*$ (Sección 1.1). De acuerdo con el Teorema 1.2.14,

(E1) el espectro de cualquier extensión autoadjunta canónica de A consta únicamente de valores propios aislados de multiplicidad 1,

(E2) todo número real pertenece al espectro de una, y sólo una, extensión autoadjunta canónica de A,

(E3) los elementos de los espectros de cada una de las extensiones autoadjuntas canónicas de A están entrelazados por pares.

De esta forma, si $A(\gamma)$ es cualquier extensión autoadjunta canónica de A entonces,

$$f(z) = \sum_{t \in \operatorname{spec}(A(\gamma))} f(t)\frac{k(z,t)}{k(t,t)}, \qquad f \in \widehat{\mathcal{H}}, \qquad z \in \mathbb{C}, \tag{3}$$

donde $k(z,w)$ es el núcleo reproductor de $\widehat{\mathcal{H}}$ y la serie converge uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$ (Teorema 2.1.1). De acuerdo con el Teorema 1.4.3(iii), si $S(\gamma)$ es una extensión autoadjunta canónica de S, entonces $\Phi^{-1}S(\gamma)\Phi$ es una extensión autoadjunta canónica de A.

Debido a que dos operadores unitariamente equivalentes tienen el mismo espectro, usamos intercambiablemente $\operatorname{spec}(A(\gamma))$ o $\operatorname{spec}(S(\gamma))$ a lo largo de este texto. Este modelo funcional se desarrolla de forma detallada en [36–38], [40] y se originó a partir de la teoría de representación de Krein para operadores simétricos [18, Sec. 1.2]. Existen otros modelos funcionales para otras clases de operadores, siendo el más conocido la forma canónica de un operador autoadjunto simple [2, Sec. 69].

El Teorema WSK se puede deducir a partir de una realización particular del modelo funcional antes descrito [40, Sec. 5.2]. En efecto, considere la expresión diferencial

$$\widetilde{\tau} = \mathrm{i}\frac{d}{dx}. \tag{4}$$

Sea $\mathcal{H} = L_2(-a, a)$, donde $0 < a < +\infty$. Considere el operador A definido mediante,

$$\operatorname{dom}(A) := \{\varphi \in \mathrm{AC}(-a, a) \,:\, \varphi(a) = \varphi(-a) = 0\}, \qquad A := \widetilde{\tau}, \tag{5}$$

donde $\mathrm{AC}(-a, a)$ denota el conjunto de todas las funciones absolutamente continuas en $(-a, a)$ (ver (2.2)). De esta forma, A es cerrado y simétrico [2, Sec. 49]. Además,

$$\operatorname{dom}(A^*) := \mathrm{AC}(-a, a), \qquad A^* := \widetilde{\tau},$$

lo que implica, en vista de (1.10), que los índices de deficiencia de A son $(1, 1)$ [5, Sec. 4.8]. Las extensiones autoadjuntas canónicas de A pueden ser parametrizadas de la siguiente forma,

$$\operatorname{dom}(A(\gamma)) := \left\{\varphi \in \mathrm{AC}(-a, a) \,:\, \varphi(a) = \varphi(-a)e^{-\mathrm{i}2\gamma}\right\}, \qquad A(\gamma) := \widetilde{\tau}, \qquad \gamma \in [0, \pi).$$

Además,

$$\operatorname{spec}\big(A(\gamma)\big) = \left\{\frac{\gamma + n\pi}{a} \,:\, n \in \mathbb{Z}\right\}, \qquad \gamma \in [0, \pi), \tag{6}$$

donde $\operatorname{spec}\big(A(\gamma)\big)$ denota al espectro de $A(\gamma)$ [40, Sec. 5.2]. Los elementos de los espectros de cada una de las extensiones autoadjuntas canónicas de A están entrelazados por pares y su unión coincide con $\mathbb{R}$, por lo que A es un operador regular (Definición 1.2.12). Aplicando el modelo funcional al operador A obtenemos un espacio de de Branges $\widehat{\mathcal{H}}$, así como un isomorfismo isométrico $\Phi : \mathcal{H} \to \widehat{\mathcal{H}}$ que transforma al operador A en el operador de multiplicación por la variable independiente en $\widehat{\mathcal{H}}$. El espacio $\widehat{\mathcal{H}}$ es, de hecho, el espacio $\mathcal{PW}_a$ introducido en (1) y la fórmula (2) es una instancia particular de la fórmula analítica de muestreo (3) (Sección 2). En vista de (6), la sucesión de puntos de muestreo $\{n\pi/a \,:\, n \in \mathbb{Z}\}$ es el espectro de una extensión autoadjunta fija de A. Cuando $0 < a < b < \infty$, el espacio $\mathcal{PW}_a$ está isométricamente contenido en $\mathcal{PW}_b$, es decir, $\mathcal{PW}_a \subset \mathcal{PW}_b$ y $\|f\|_{\mathcal{PW}_a} = \|f\|_{\mathcal{PW}_b}$ para todo $f \in \mathcal{PW}_a$. Además, los puntos de muestreo $\{n\pi/a : n \in \mathbb{Z}\}$ están más espaciados entre sí que los puntos de muestreo $\{n\pi/b : n \in \mathbb{Z}\}$. Estos hechos permiten llevar a cabo los procedimientos de sobremuestreo y submuestreo [21], [28, Sec. 7.2].

En sobremuestreo, el punto de partida es una función $f(z) \in \mathcal{PW}_a \subset \mathcal{PW}_b$. Entonces, además de (2), sucede que

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f\left(\tfrac{n\pi}{b}\right) \mathcal{G}_b\left(z, \tfrac{n\pi}{b}\right), \qquad \mathcal{G}_b\left(z, t\right) := \frac{\sin\left[b(z-t)\right]}{b(z-t)}.$$

Sin embargo, $f(z)$ admite otra representación,

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f\left(\tfrac{n\pi}{b}\right) \widetilde{\mathcal{G}}_{ab}\left(z, \tfrac{n\pi}{b}\right), \tag{7}$$

con un núcleo de muestreo modificado $\widetilde{\mathcal{G}}_{ab}(z,t)$ que depende de a y b [28, Tma. 7.2.5]. Mientras que la convergencia de la fórmula de muestreo (2) no es afectada por perturbaciones ℓ_2 en las muestras $f\left(\frac{n\pi}{a}\right)$, la fórmula (7) es más robusta ya que es convergente aún bajo perturbaciones ℓ_∞ en las muestras $f\left(\frac{n\pi}{b}\right)$, es decir, si la sucesión $\{\epsilon_n : n \in \mathbb{Z}\}$ es acotada y definimos

$$\widetilde{f}(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left[f\left(\tfrac{n\pi}{b}\right) + \epsilon_n\right] \widetilde{\mathcal{G}}_{ab}\left(z, \tfrac{n\pi}{b}\right), \tag{8}$$

entonces la función $|f(z) - \widetilde{f}(z)|$ está acotada uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$ [28, Tma. 7.2.5].

Por otra parte, en submuestreo se busca aproximar una función que pertenece a $\mathcal{PW}_b \setminus \mathcal{PW}_a$ mediante otra función construida formalmente mediante la fórmula (2),

$$\widehat{f}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f\left(\tfrac{n\pi}{a}\right) \mathcal{G}_a\left(z, \tfrac{n\pi}{a}\right). \tag{9}$$

La serie en (9) es, en efecto, convergente y además la función $|f(z) - \widehat{f}(z)|$ está acotada uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$ [28, Tma. 7.2.9]. Existe abundante literatura sobre estimaciones para sobremuestreo y submuestreo en los espacios Paley-Wiener (ver, por ejemplo, [4], [6], [24], [27]). Sin embargo, no tenemos conocimiento de este tipo de estimaciones en clases de espacios de funciones enteras diferentes a la clase de espacios Paley-Wiener.

Para obtener estimaciones de sobremuestreo y submuestreo en analogía con el caso Paley-

Wiener, en contraste con (4), en este trabajo consideramos expresiones diferenciales de la forma

$$\tau = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x). \tag{10}$$

Asumiremos que V toma valores reales y pertenece a $L_1(0,s)$ para cualquier $s \in (0,+\infty)$. Fijemos $s \in (0,+\infty)$. La expresión (10) determina un operador A_s cerrado y simétrico

$$\operatorname{dom}(A_s) := \{\varphi \in L_2(0,s) \,:\, \tau\varphi \in L_2(0,s),\ \varphi'(0) = \varphi(s) = \varphi'(s) = 0\}, \qquad A_s := \tau. \tag{11}$$

A diferencia de (5), ahora vamos a hacer explícita la dependencia del operador con el valor del extremo derecho del intervalo $(0,s)$. El operador A_s tiene índices de deficiencia $(1,1)$ y es regular, es decir,

$$\{z \in \mathbb{C} : \text{existe } C_z > 0 \text{ tal que } \|(A_s - zI)\varphi\| \geq C_z \|\varphi\|\} = \mathbb{C}.$$

Por lo tanto $A \in \mathcal{S}\left(L_2(0,s)\right)$. El operador adjunto de A_s es

$$\operatorname{dom}(A_s^*) := \{\varphi \in L_2(0,s) \,:\, \tau\varphi \in L_2(0,s)\,,\, \varphi'(0) = 0\}\,, \qquad A_s^*\varphi := \tau\varphi.$$

De acuerdo con [48, Sec. 8.4], las extensiones autoadjuntas de A_s están dadas por

$$\begin{gathered}\operatorname{dom}\left(A_s(\gamma)\right) := \{\varphi \in L_2(0,s) \,:\, \tau\varphi \in L_2(0,s),\ \varphi'(0) = \varphi(s)\cos\gamma + \varphi'(s)\sin\gamma = 0\}\,,\\ A_s(\gamma)\,\varphi := \tau\varphi,\end{gathered} \tag{12}$$

con $\gamma \in [0,\pi)$. Mediante el modelo funcional explicado anteriormente, obtenemos un espacio dB

$$\mathcal{B}_s = \left\{ f(z) = \int_0^s \xi(x,z)\varphi(x)dx \,:\, \varphi \in L_2(0,s) \right\}, \tag{13}$$

donde $\xi : [0,\infty) \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es la solución del problema,

$$\tau\xi(x,z) = z\xi(x,z), \qquad \xi(0,z) = 1, \qquad \xi'(0,z) = 0, \tag{14}$$

(derivamos con respecto al primer argumento). De acuerdo con [25, Tma. 1.1.1], [43, Tma. 9.1], la función $\xi(x,\cdot)$ es entera para cualquier $x \in \mathbb{R}_+$. Además $\xi(\cdot,z) \in L_2(0,s)$ para cualquier $z \in \mathbb{C}$. Es importante señalar que $\xi(\cdot,z)$ es entera como una función que toma valores en $L_2(0,s)$ [40, Sec. 4]. Note que $\xi : [0,\infty) \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ depende del potencial V pero no depende del valor de s. Cuando $s < s'$, el espacio $\mathcal{B}_s$ está isométricamente contenido en el espacio $\mathcal{B}_{s'}$

(Teorema 2.2.1). Sea

$$\mathcal{K}_s(z,t) := \frac{k_s(z,t)}{k_s(t,t)}\,,$$

donde $k_s(z,w)$ es el núcleo reproductor del espacio $\mathcal{B}_s$. En vista de (3), si $S_s(\gamma)$ es una extensión autoadjunta del operador de multiplicación por la variable independiente en $\mathcal{B}_s$, entonces

$$f(z) = \sum_{t\in \operatorname{spec}(S_s(\gamma))} f(t)\mathcal{K}_s\,(z,t)\,, \qquad f\in\mathcal{B}_s, \qquad z\in\mathbb{C}, \tag{15}$$

donde la serie converge uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$. A continuación realizamos un breve análisis comparativo entre las fórmulas (2) y (15). Observe que, los puntos de muestreo $\{n\pi/a \,:\, n\in\mathbb{Z}\}$ de la fórmula (2) están distribuidos uniformemente sobre el eje real. Además, si $0<a<b<\infty$ entonces, la distancia entre los puntos de la sucesión $\{n\pi/b \,:\, n\in\mathbb{Z}\}$ es menor que la distancia entre los puntos de la sucesión $\{n\pi/a \,:\, n\in\mathbb{Z}\}$. En este trabajo consideramos operadores autoadjuntos originados por la expresión diferencial (10) con condiciones de frontera tipo Neumann, por ello asignaremos el valor $\gamma=\frac{\pi}{2}$ (ver (12)). Así, consideramos operadores autoadjuntos determinados de la siguiente forma,

$$\operatorname{dom}\left(A_s\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right) = \{\varphi\in L_2(0,s) : \tau\varphi\in L_2(0,s)\,, \varphi'(0)=\varphi'(s)=0\}\,, \qquad A_s\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\varphi := \tau\varphi.$$

(Denotaremos mediante $\mathring{A}_s$ al operador correspondiente a $V\equiv 0$.) En la Sección 3.1 se argumenta que, cuando $V\equiv 0$, la función $\xi(x,z)$ introducida en (14) es

$$\xi(x,z) = \cos\left(\sqrt{z}\,x\right)\,, \qquad x\in\mathbb{R}_+\,, \qquad z\in\mathbb{C}\,.$$

En la Sección 3.1 también se muestra que,

$$\operatorname{spec}\left(\mathring{A}_s\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right) = \left\{\left(\tfrac{n\pi}{s}\right)^2 \,:\, n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\right\}\,.$$

Note que la distancia entre dos valores propios consecutivos es $(2n-1)\left(\frac{\pi}{s}\right)^2$, $n\in\mathbb{N}$. Por lo tanto, si $0<a<b$ entonces, $\operatorname{spec}\left(\mathring{A}_b\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ es más denso que $\operatorname{spec}\left(\mathring{A}_a\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$. Podemos considerar esto como una analogía al comportamiento de los puntos de muestreo del Teorema WSK en relación con la amplitud de banda de las señales (ver fórmula (2)). Ahora analizamos el comportamiento del espectro del operador $A_s\left(\frac{\pi}{2}\right)$ en relación con el valor de s. De acuerdo con el Teorema 1.2.14, $\operatorname{spec}\left(A_s\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ está contenido en $\mathbb{R}$ y consta de valores propios aislados de multiplicidad uno. Sea

$$\operatorname{spec}\left(A_s\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right) = \{\lambda_s(n)\}_{n=0}^{\infty}\,, \qquad \lambda_s(n-1)\le\lambda_s(n), \qquad n\in\mathbb{N}\,.$$

El comportamiento asintótico de los puntos $\lambda_s(n)$ cuando n es suficientemente grande nos brinda información útil. De acuerdo con el Lema B.1.1(i), si $V \in \mathrm{AC}[0,s]$ entonces,

$$\sqrt{\lambda_s(n)} = \tfrac{n\pi}{s} + \mathcal{O}(n^{-1})\,, \quad n \to \infty.$$

La estimación anterior implica que $\operatorname{spec}\left(A_b\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ es más denso que $\operatorname{spec}\left(A_a\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ siempre que $V \in \mathrm{AC}[0,b]$.

Nuestros principales resultados son los Teoremas 3.3.4 y 4.3.4.

Teorema (sobremuestreo)**.** **[41, Tma. 3.6].** *Suponga que V toma valores reales y pertenece a* $\mathrm{AC}[0,b]$ *(el conjunto de funciones absolutamente continuas en* $[0,b]$*). Fije $a \in (0,b)$ y considere cualquier $f \in \mathcal{B}_a$. Dada una sucesión $\{\epsilon_t\} \in \ell_\infty$, defina*

$$\widetilde{f}(z) := \sum_{t \in \operatorname{spec}(S_b(\pi/2))} \widetilde{\mathcal{K}}_{ab}(z,t)\,(f(t) + \epsilon_t)\,,$$

donde $\widetilde{\mathcal{K}}_{ab}(z,t)$ está dado en (3.12)*. Entonces, para cualquier subconjunto compacto K de $\mathbb{C}$, existe una constante $C(K,a,V)$ tal que*

$$\left|f(z) - \widetilde{f}(z)\right| \le C(K,a,V)\ \|\epsilon\|_\infty\,, \qquad z \in K.$$

Señalamos el hecho de que la cota es uniforme para $f \in \mathcal{B}_a$. Note que $\widetilde{\mathcal{K}}_{ab}(z,t)$ es un núcleo de muestreo modificado análogo al de (8).

Teorema (submuestreo)**.** **[41, Tma. 4.7].** *Suponga que V toma valores reales y pertenece a* $\mathrm{AC}[0,c]$ *con $c > b$. Dada $g \in \mathcal{B}_c \setminus \mathcal{B}_b$, defina*

$$\widehat{g}(z) := \sum_{t \in \operatorname{spec}(S_b(\pi/2))} g(t)\mathcal{K}_b\,(z,t)\,.$$

Entonces, para cada subconjunto compacto $K \subset \mathbb{C}$, existe una constante $D(K,c,V) > 0$ tal que

$$|g(z) - \widehat{g}(z)| \le D(K,c,V)\left(\int_b^c |\psi(x)|\,dx\right)$$

uniformemente en K, donde $\psi \in L_2(0,c)$ satisface $g(z) = \langle \xi(\cdot,\overline{z}), \psi(\cdot)\rangle_{L_2(0,c)}$.

Cuando $V \equiv 0$, la función $\xi(x,z)$ determinada por (14) es $\cos(\sqrt{z}\,x)$. En este caso, de acuerdo con (13), el espacio dB originado mediante el modelo funcional es

$$\left\{ f(z) = \int_0^s \cos(\sqrt{z}\, x)\varphi(x)dx \,:\, \varphi \in L_2(0,s) \right\}. \tag{16}$$

Es importante mencionar que cualquier potencial V origina el mismo conjunto de funciones enteras [32, Tma. 4.1]. Dicho de otra forma, todos los espacios listados en (13) coinciden (como conjuntos) con el conjunto expresado en (16). Por esta razón, primero demostramos los teoremas de sobremuestreo y submuestreo para el caso $V \equiv 0$ y después empleamos métodos perturbativos para abordar el caso general. En esta segunda etapa, estudiamos el comportamiento asintótico de los valores propios de los operadores dados por (12) (Apéndice B). Estos resultados tienen algunas limitaciones: las fórmulas de muestreo usan el espectro de operadores autoadjuntos con condiciones de frontera tipo Neumann ya que esto simplifica las fórmulas asintóticas para los valores propios de los operadores de Schrödinger (Lema B.1.1). Además, la hipótesis **(v2)** sobre los potenciales es un poco restrictiva. En vista de [32], consideramos que nuestros resultados deben ser válidos para cualquier $V \in L_1(0,s)$, sin embargo, debilitar la hipótesis **(v2)** requeriría emplear una técnica diferente en nuestras demostraciones. Finalmente, cabe mencionar que el operador A_s definido en (11) es 1-entero, en el sentido que se indica en [39, Def. 2.1] (ver [39, Teo. 3.1]). De ahí el título de este trabajo. Ahora se listan algunos de los siguientes problemas a enfrentar.

- Establecer resultados de sobremuestreo y submuestreo para los espacios de funciones enteras originados por expresiones diferenciales de la forma,

$$-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{l(l+1)}{x^2} + V(x), \qquad x \in (0,s), \qquad l \geq -\frac{1}{2},$$

donde $s > 0$. En [39] se ha establecido que estas expresiones determinan operadores que pertenecen a la clase $\mathcal{S}\big(L_2(0,1)\big)$. Esto permite emplear el modelo funcional descrito en el Capítulo 1 para obtener fórmulas analíticas de muestreo en ciertos espacios de funciones, sin embargo, aún no se han establecido cotas de error para sobremuestreo y submuestreo en estos espacios.

- Demostrar que los espacios dB originados por expresiones diferenciales de la forma,

$$\mathrm{i}\frac{d}{dx} + V(x), \qquad x \in (-s,s), \tag{17}$$

donde $s > 0$, poseen la propiedad de *regularidad*, es decir, buscamos determinar condiciones para la perturbación $V(x)$ nos garantizen obtener el *mismo* conjunto de funciones mediante el modelo funcional (ver Teorema 2.2.2).

- Establecer cotas de sobremuestreo y submuestreo para los espacios de funciones enteras originados por la expresión diferencial (17).

Capítulo 1

Modelo funcional

1.1 Nociones básicas de teoría de operadores

En esta sección se mencionan nociones de teoría de operadores que son requeridas a lo largo del texto. Un espacio lineal $\mathcal{H}$ es un espacio *pre-Hilbert* (*espacio con producto interior*) si para cada par de elementos $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$ existe un número complejo que satisface las condiciones

(IP1) $\langle \varphi, \varphi \rangle \geq 0$, con igualdad sólo para $\varphi = 0$.

(IP2) $\langle \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2, \psi \rangle = \overline{\alpha_1} \langle \varphi_1, \psi \rangle + \overline{\alpha_2} \langle \varphi_2, \psi \rangle$ donde $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$,

(IP3) $\langle \psi, \varphi \rangle = \overline{\langle \varphi, \psi \rangle}$.

El número $\langle \varphi, \psi \rangle$ es el *producto interior* de φ y ψ. La raíz cuadrada positiva $\sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle}$ es la *norma* de φ y se denota mediante $\|\varphi\|$. El espacio $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio métrico cuando la distancia entre dos puntos se define mediante $D[\varphi, \psi] := \|\varphi - \psi\|$. Un subconjunto $A \subset \mathcal{H}$ es *abierto* si para cada $\varphi \in A$ existe $\epsilon > 0$ tal que la *bola* $B(\varphi, \epsilon) := \{\psi \in \mathcal{H} : \|\psi - \varphi\| < \epsilon\}$ está contenida en A. Un subconjunto $A \subset \mathcal{H}$ es *cerrado* si $\mathcal{H} \setminus A$, el complemento de A, es abierto. Un elemento $\varphi \in \mathcal{H}$ es un *punto de contacto* de $A \subset \mathcal{H}$ si para cada $\epsilon > 0$ existe $\psi \in A$ tal que $\|\psi - \varphi\| < \epsilon$. El conjunto de todos los puntos de contacto de A es la *cerradura* de A y se denota mediante $\overline{A}$. Note que $A \subset \overline{A}$. Además, A es cerrado, si y sólo si, $A = \overline{A}$. Una sucesión $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ *converge* a $\varphi \in \mathcal{H}$ cuando $\lim_{n \to \infty} \|\varphi_n - \varphi\| = 0$. Esto se denota $\lim_{n \to \infty} \varphi_n = \varphi$, o bien, $\varphi_n \to \varphi$. Si $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge entonces,

$$\lim_{m,n \to \infty} \|\varphi_m - \varphi_n\| = 0, \tag{1.1}$$

donde m y n tienden a infinito independientemente. Sin embargo, si $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ satisface (1.1), puede no existir un elemento $\varphi \in \mathcal{H}$ al que la sucesión converge. Cuando (1.1) se verifica, $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión *fundamental*. Un espacio métrico es *completo* si toda sucesión fundamental converge a algún elemento del espacio. Cuando un espacio normado no es completo, es posible completarlo introduciendo nuevos elementos [43, Tma. 0.23]. Un *espacio de Hilbert* es un espacio pre-Hilbert, completo con respecto a la métrica generada por el producto interior. Un subconjunto $\mathcal{L}$ de un espacio de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un *conjunto lineal* si $\varphi, \psi \in \mathcal{L}$ implica $\alpha\varphi + \beta\psi \in \mathcal{L}$ para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dado $A \subset \mathcal{H}$, el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas $\{\alpha_1\varphi_1 + \ldots + \alpha_n\varphi_n \,:\, n \in \mathbb{N},\ \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in A,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}\}$, es el conjunto lineal más pequeño que contiene a A. Este conjunto es la *envolvente lineal* de A o el *conjunto lineal generado* por A y se denota mediante $\operatorname{span}(A)$. Note que un conjunto lineal cerrado G es un espacio de Hilbert (con respecto al producto interior en $\mathcal{H}$). En efecto, toda sucesión fundamental de elementos de G tiene un límite en $\mathcal{H}$. Además, este límite pertenece a G debido a que G es un conjunto cerrado. Por lo tanto, G es llamado un *subespacio* de $\mathcal{H}$.

Sean $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$, $A, B \subset \mathcal{H}$. Decimos que φ y ψ son *ortogonales* ($\varphi \perp \psi$) si $\langle\varphi, \psi\rangle = 0$. El elemento φ es ortogonal al conjunto A ($\varphi \perp A$) si $\langle\varphi, \psi\rangle = 0$ para todo $\psi \in A$. Los conjuntos A y B son ortogonales ($A \perp B$) si $\langle\varphi, \psi\rangle = 0$ para cualesquiera $\varphi \in A$, $\psi \in B$. El conjunto lineal $\mathcal{H} \ominus A := \{\varphi \in \mathcal{H} \,:\, \varphi \perp A\}$ es el *complemento ortogonal* de A. De acuerdo con [47, Sec. 3.1],

$$\mathcal{H} \ominus A = \mathcal{H} \ominus \operatorname{span}(A) = \mathcal{H} \ominus \overline{\operatorname{span}(A)}.$$

Si $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son conjuntos lineales ortogonales de $\mathcal{H}$ entonces, $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \{0\}$. El conjunto lineal $\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 := \{\varphi + \psi : \varphi \in \mathcal{L}_1,\ \psi \in \mathcal{L}_2\}$ es una *suma ortogonal*. Cada elemento de $\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$ tiene exactamente una representación de la forma $\varphi + \psi$ con $\varphi \in \mathcal{L}_1$ y $\psi \in \mathcal{L}_2$. Sean $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ espacios de Hilbert. El conjunto $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ es un espacio de Hilbert con el producto interior

$$\big\langle(\varphi_1, \varphi_2), (\psi_1, \psi_2)\big\rangle := \langle\varphi_1, \psi_1\rangle_{\mathcal{H}_1} + \langle\varphi_2, \psi_2\rangle_{\mathcal{H}_2}. \tag{1.2}$$

El espacio $(\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ se denota mediante $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$. En este espacio, $\mathcal{H}_1 \times \{0\}$ y $\{0\} \times \mathcal{H}_2$ son complementos ortogonales uno de otro. A cualquier operador lineal T definido en $\mathcal{H}_1$ le corresponde un subconjunto lineal

$$\operatorname{graf}(T) := \{(\varphi, \psi) \in \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \,:\, \varphi \in \operatorname{dom}(T),\ \ \psi = T\varphi\}$$

llamado *gráfica* de T. Identificando un operador con su gráfica, un operador es un caso particular de un conjunto lineal de $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$. Todos los operadores y relaciones considerados en este trabajo son lineales. Sean

$$\begin{aligned} \operatorname{dom}(T) &:= \{\varphi \in \mathcal{H}_1 \,:\, (\varphi,\psi) \in T\}\,, & \operatorname{ran}(T) &:= \{\psi \in \mathcal{H}_2 \,:\, (\varphi,\psi) \in T\}\,, \\ \ker(T) &:= \{\varphi \in \mathcal{H}_1 \,:\, (\varphi,0) \in T\}\,, & \operatorname{mul}(T) &:= \{\psi \in \mathcal{H}_2 \,:\, (0,\psi) \in T\}\,. \end{aligned}$$

La relación T es un operador, si y sólo si, $\operatorname{mul}(T) = \{0\}$. El operador T es una *extensión* del operador S (S es una *restricción* de T) si $\operatorname{dom}(S) \subset \operatorname{dom}(T)$ y $S\varphi = T\varphi$ para $\varphi \in \operatorname{dom}(S)$. Esto se denota mediante $S \subset T$ o $T \supset S$. El operador T es *cerrado* si $\operatorname{graf}(T)$ es cerrado en $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$. El operador T es *cerrable* si $\overline{\operatorname{graf}(T)}$ es una gráfica. En este caso, existe un único operador cerrado $\overline{T}$ tal que $\operatorname{graf}(\overline{T}) = \overline{\operatorname{graf}(T)}$. El operador $\overline{T}$ es llamado *cerradura* de T. Note que T es cerrado, si y sólo si, $T = \overline{T}$. La relación *adjunta* de T se define mediante

$$T^* := \{(\eta,\omega) \in \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \,:\, \langle \eta, T\varphi\rangle = \langle \omega, \varphi\rangle \;\text{ para todo } \varphi \in \operatorname{dom}(T)\}\,, \tag{1.3}$$

donde T^* es un operador siempre que (1.3) es la gráfica de un operador y es una relación multivaluada en otro caso. De acuerdo con [5, Lema 3.1.3], T^* es un operador, si y sólo si, $\operatorname{dom}(T)$ es denso en $\mathcal{H}$. Todos los operadores considerados en este trabajo están densamente definidos. El operador T es *simétrico* si $T \subset T^*$. Una *extensión autoadjunta canónica* de T es un operador S que satisface $T \subset S = S^* \subset T^*$. Cuando $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$ decimos que T es un *operador en* $\mathcal{H}$. Un operador de $\mathcal{H}$ en $\mathbb{C}$ es un *funcional lineal*. El operador T de $\mathcal{H}_1$ en $\mathcal{H}_2$ es *continuo en el punto* $\varphi \in \operatorname{dom}(T)$ si para toda sucesión $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \operatorname{dom}(T)$ tal que $\varphi_n \to \varphi$ se satisface $T\varphi_n \to T\varphi$. El operador T es *continuo* si es continuo en cada punto de $\operatorname{dom}(T)$. El operador T es *acotado* si existe $C \geq 0$ tal que $\left\|T\varphi\right\|_{\mathcal{H}_2} \leq C\left\|\varphi\right\|_{\mathcal{H}_1}$ para todo $\varphi \in \operatorname{dom}(T)$. Cualquier C con esta propiedad es una *cota* de T. De acuerdo con [47, Tma. 4.2] son equivalentes,

(i) T es continuo en 0, $\qquad$ (ii) T es continuo, $\qquad$ (iii) T es acotado.

Para un operador acotado T de $\mathcal{H}_1$ en $\mathcal{H}_2$, la *norma de* T es

$$\|T\| := \inf\{C \geq 0 \,:\, \left\|T\varphi\right\|_{\mathcal{H}_2} \leq C\left\|\varphi\right\|_{\mathcal{H}_1},\ \varphi \in \operatorname{dom}(T)\}. \tag{1.4}$$

Así, $\left\|T\varphi\right\|_{\mathcal{H}_2} \leq \|T\| \cdot \left\|\varphi\right\|_{\mathcal{H}_1}$ para todo $\varphi \in \operatorname{dom}(T)$. El conjunto de operadores acotados de $\mathcal{H}_1$ en $\mathcal{H}_2$ cuyo dominio es $\mathcal{H}_1$ se denota mediante $B(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$. Si $\|\cdot\|$ está dada por (1.4) entonces $\big(B(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2), \|\cdot\|\big)$ es un espacio completo. El espacio $B(\mathcal{H},\mathcal{H})$ se denota mediante $B(\mathcal{H})$.

Sea T un operador en $\mathcal{H}$. El número $z \in \mathbb{C}$ es un *valor propio* de T si $\ker(T - zI) \neq \{0\}$, *i. e.*, el operador $T - zI$ no es inyectivo. El conjunto lineal $\ker(T - zI)$ es el *espacio propio* de

z. La dimensión de $\ker(T-zI)$, $\dim(\ker(T-zI))$, es la *multiplicidad* del valor propio z. Un elemento $\varphi \in \ker(T-zI)\setminus\{0\}$ es un *vector propio de T perteneciente al valor propio z*. Cuando z no es un valor propio, el operador $R(z,T) := (T-zI)^{-1}$ está bien definido. El conjunto

$$\rho(T) := \{z \in \mathbb{C} \,:\, T - zI \text{ es inyectiva, } R(z,T) \in B(\mathcal{H})\} \tag{1.5}$$

es el *conjunto resolvente* de T. La función $R(\cdot,T) : \rho(T) \to B(\mathcal{H})$, $z \mapsto R(z,T)$ es la *resolvente* de T. Para cualquier $z \in \rho(T)$, el operador $R(z,T)$ es llamado la *resolvente de T en el punto z*. El conjunto $\sigma(T) := \mathbb{C}\setminus\rho(T)$ es el *espectro* de T. El conjunto $\sigma_p(T)$ de todos los valores propios de T es el *espectro puntual de T*. Note que $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$. Cuando T es un operador cerrado, $\rho(T)$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ (consecuentemente, $\sigma(T)$ es un subconjunto cerrado) [47, Tma. 5.14]. De acuerdo con [5, Tma. 3.7.7], [47, Tma. 5.16], si T es un operador cerrado y φ, $\psi \in \mathcal{H}$ entonces las siguientes funciones son holomorfas,

$$R(\cdot,T) : \rho(T) \to B(\mathcal{H}), \qquad z \mapsto R(z,T), \tag{1.6}$$

$$R(\cdot,T)\varphi : \rho(T) \to \mathcal{H}, \qquad z \mapsto R(z,T)\varphi, \tag{1.7}$$

$$\langle \psi, R(\cdot,T)\varphi \rangle : \rho(T) \to \mathbb{C}, \qquad z \mapsto \langle \psi, R(z,T)\varphi \rangle\,. \tag{1.8}$$

(Si Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y X es un espacio de Banach, decimos que una función $F : \Omega \to X$ es *holomorfa* si para todo $z_0 \in \Omega$ existe $r > 0$ y una sucesión $\{\varphi_n\} \subset X$ tal que

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \varphi_n, \qquad |z - z_0| < r,$$

donde la serie converge en la norma de X [26, Subsec. 3.11.3].) En [5, Tma. 3.3.5] se establece la descomposición,

$$\mathcal{H} = \overline{\operatorname{ran}(T - zI)} \oplus \ker(T^* - \overline{z}I), \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{1.9}$$

Si T es un operador cerrado y simétrico entonces, el operador $T - zI$ tiene inversa continua para todo $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ [5, Tma. 4.1.1]. Sin embargo, $\operatorname{dom}\big((T-zI)^{-1}\big) = \operatorname{ran}(T-zI)$ puede no coincidir con $\mathcal{H}$. En este caso, $\dim\left(\mathcal{H} \ominus \operatorname{ran}(T-zI)\right) = \dim\left(\ker(T^* - \overline{z}I)\right)$ toma valores constantes en cada uno de los semiplanos superior e inferior [5, Cor. 4.1.2]. Esto permite definir los *índices de deficiencia*,

$$\dim\left(\ker(T^* - zI)\right) = \begin{cases} n_+(T) & \text{si } \operatorname{Im}(z) < 0, \\ n_-(T) & \text{si } \operatorname{Im}(z) > 0. \end{cases} \tag{1.10}$$

1.2 Una clase de operadores simétricos

En este trabajo se establecen fórmulas de muestreo tipo Kramer en espacios de Hilbert de funciones enteras originados a partir de operadores regulares de Schrödinger. Además se establecen cotas para el error en la reconstrucción de estas funciones cuando se llevan a cabo los procedimientos de sobremuestreo y submuestreo (ver Introducción). Estos objetivos se alcanzan mediante la aplicación de un modelo funcional para determinada clase de operadores lineales. En esta sección se introduce dicha clase de operadores (Definición 1.2.13). Mediante este modelo funcional se pueden abordar problemas de muestreo, sobremuestreo y submuestreo en espacios de funciones originados a partir de otros operadores diferenciales, por ejemplo, el operador de Bessel y el operador diferencial de primer orden con una perturbación (17).

Sea A un operador cerrado, simétrico y tal que $n_+(A) = n_-(A) = 1$. Asumiremos que A es densamente definido, *i. e.*, $\overline{\operatorname{dom}(A)} = \mathcal{H}$. En vista de (1.10),

$$\dim\left(\ker(A^* - zI)\right) = 1, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \tag{1.11}$$

De acuerdo con la teoría de extensión de Von Neumann, el operador A tiene extensiones autoadjuntas canónicas [2, Cap. 7], [47, Cap. 8]. Sea A_γ una extensión autoadjunta canónica fija de A. De esta forma, $A \subset A_\gamma = A_\gamma^* \subset A^*$. Es importante mencionar que $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \subset \rho(A_\gamma)$ [5, Tma. 4.1.1], [5, Tma. 4.1.6]. El operador

$$V_\gamma(w, z) := (A_\gamma - wI)(A_\gamma - zI)^{-1}, \qquad w \in \mathbb{C}, \qquad z \in \rho(A_\gamma), \tag{1.12}$$

es llamado *transformada generalizada de Cayley de* A_γ [17, Sec. 1.2], [38], [40] y desempeña un papel fundamental en el modelo funcional desarrollado en la Sección 1.4. Note que

$$I = \Big[(A_\gamma - wI) + (w - z)I\Big](A_\gamma - zI)^{-1} = (A_\gamma - wI)(A_\gamma - zI)^{-1} + (w - z)(A_\gamma - zI)^{-1}.$$

En vista de (1.12) y de la ecuación anterior,

$$V_\gamma(w, z) = I + (z - w)(A_\gamma - zI)^{-1}, \qquad w \in \mathbb{C}, \qquad z \in \rho(A_\gamma). \tag{1.13}$$

Proposición 1.2.1. [17, Sec. 1.2]. [38, Prop. 2.2]. *Sea A un operador cerrado, simétrico y tal que $n_+(A) = n_-(A) = 1$ y sea A_γ una extensión autoadjunta canónica fija de A.*

(i) Si $w, z \in \rho(A_\gamma)$ entonces, $V_\gamma(w, z) = V_\gamma(z, w)^{-1}$,

(ii) si $w \in \mathbb{C}$, v, $z \in \rho(A_\gamma)$ entonces, $V_\gamma(w, z)V_\gamma(z, v) = V_\gamma(w, v)$,

(iii) si $w \in \mathbb{C}$, $z \in \rho(A_\gamma)$ *entonces,* $V_\gamma(w,z)^* = V_\gamma(\overline{w},\overline{z})$,

(iv) si $w \in \mathbb{C}$, $z \in \rho(A_\gamma)$ *entonces,* $V_\gamma(w,z)$ *es una biyección entre* $\ker(A^* - wI)$ *y* $\ker(A^* - zI)$.

Demostración. Los incisos (i)-(iii) se verifican mediante un cálculo directo, así que sólo escribiremos la prueba de (iv). Sea $\varphi \in \ker(A^* - wI)$. Debido a que $A_\gamma \subset A^*$, usando (1.9), obtenemos que $\varphi \in \mathcal{H} \ominus \operatorname{ran}(A_\gamma - \overline{w}I)$. De esta forma, dada $f \in \operatorname{dom}(A)$,

$$\begin{aligned}\big\langle (A^* - zI)V_\gamma(w,z)\varphi, f\big\rangle &= \big\langle V_\gamma(w,z)\varphi, (A - \overline{z}I)f\big\rangle = \big\langle \varphi, V_\gamma(w,z)^*(A - \overline{z}I)f\big\rangle \\ &= \big\langle \varphi, V_\gamma(\overline{w},\overline{z})(A - \overline{z}I)f\big\rangle = \big\langle \varphi, (A_\gamma - \overline{w}I)f\big\rangle = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto $(A^* - zI)V_\gamma(w,z)\varphi \in \mathcal{H} \ominus \operatorname{dom}(A) = \{0\}$ (recuerde que $\operatorname{dom}(A)$ es denso en $\mathcal{H}$). Esto significa que $V_\gamma(w,z)\ker(A^* - wI) \subset \ker(A^* - zI)$. Intercambiando los papeles de z y w y empleando el inciso (i) concluimos que $V_\gamma(w,z)^{-1}\ker(A^* - zI) \subset \ker(A^* - wI)$. □

Sea w_0 un elemento arbitrario de $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. En vista de (1.11), $\dim(\ker(A^* - w_0I)) = 1$. Fijemos cualquier $\psi_{w_0} \in \ker(A^* - w_0I) \setminus \{0\}$. Considere

$$\psi : \rho(A_\gamma) \to \mathcal{H}, \qquad \psi(z) := V_\gamma(w_0,z)\psi_{w_0}. \tag{1.14}$$

Esta función nos permitirá establecer propiedades importantes de la clase de operadores abordados en este trabajo (vea Proposición 1.2.10, Teorema 1.2.11 y Definición 1.2.13). Dichas propiedades serán utilizadas en el desarrollo del modelo funcional para esta clase de operadores (Sección 1.4). De acuerdo con (1.12) y (1.13),

$$\psi(z) = (A_\gamma - w_0I)(A_\gamma - zI)^{-1}\psi_{w_0} = \Big[I + (z - w_0)(A_\gamma - zI)^{-1}\Big]\psi_{w_0}, \tag{1.15}$$

para todo $z \in \rho(A_\gamma)$. En vista de la Proposición 1.2.1(ii), $\psi(z) \in \ker(A^* - zI)$ para cada $z \in \rho(A_\gamma)$. Ahora bien, en vista de (1.7), $R(\cdot, A_\gamma)\psi_{w_0} = (A_\gamma - \cdot I)^{-1}\psi_{w_0}$ es analítica en $\rho(A_\gamma)$. Por ello, la función ψ también es analítica en $\rho(A_\gamma)$. Finalmente, de acuerdo con (1.15), $\psi(w_0) = \psi_{w_0}$.

Lema 1.2.2. **[38, Subsec. 2.1], [40, Subsec. 2.2].** *Sea* A *un operador cerrado, simétrico y tal que* $n_+(A) = n_-(A) = 1$. *Sea* A_γ *una extensión autoadjunta canónica fija de* A. *Para cualesquiera* z, $w \in \rho(A_\gamma)$,

(i) $V_\gamma(w,z)\psi(w) = \psi(z)$,

(ii) $\big\langle \psi(\overline{z}), \psi(\overline{w})\big\rangle = \langle \psi(w), \psi(z)\rangle$,

(iii) $\psi(z) - \psi(w) = (z - w)(A_\gamma - wI)^{-1}\psi(z)$.

Demostración. (i) Por (1.13) y (1.15),

$$V_\gamma(w,z)\psi(w) = \Big[I + (z-w)(A_\gamma - zI)^{-1}\Big]\Big[I + (w-w_0)(A_\gamma - wI)^{-1}\Big]\psi_{w_0}. \tag{1.16}$$

Además, de acuerdo con la Identidad de la Resolvente [5, Sec. 3.7], [47, Sec. 44, Teo. 1],

$$(z-w)(A_\gamma - zI)^{-1}(A_\gamma - wI)^{-1} = (A_\gamma - zI)^{-1} - (A_\gamma - wI)^{-1}. \tag{1.17}$$

Debido a (1.17),

$$\begin{aligned}
&\Big[I + (z-w)(A_\gamma - zI)^{-1}\Big]\Big[I + (w-w_0)(A_\gamma - wI)^{-1}\Big]\\
&= I + (w-w_0)(A_\gamma - wI)^{-1} + (z-w)(A_\gamma - zI)^{-1} + (w-w_0)\Big[(A_\gamma - zI)^{-1} - (A_\gamma - wI)^{-1}\Big]\\
&= I + (z-w_0)(A_\gamma - zI)^{-1}.
\end{aligned}$$

Inserte el lado derecho de la última igualdad en el lado derecho de (1.16) para obtener, en vista de (1.15),

$$V_\gamma(w,z)\psi(w) = \Big[I + (z-w_0)(A_\gamma - zI)^{-1}\Big]\psi_{w_0} = \psi(z).$$

(ii) A causa de la Proposición 1.2.1(i) y del inciso (i) del presente lema,

$$\begin{aligned}
\big\langle \psi(\overline{z}), \psi(\overline{w})\big\rangle &= \big\langle V_\gamma(w,\overline{z})\psi(w), \psi(\overline{w})\big\rangle = \big\langle \psi(w), V_\gamma(w,\overline{z})^*\psi(\overline{w})\big\rangle\\
&= \big\langle \psi(w), V_\gamma(\overline{w},z)\psi(\overline{w})\big\rangle = \langle \psi(w), \psi(z)\rangle .
\end{aligned}$$

(iii) Usando (1.12), (1.13) y el inciso (i) del presente lema,

$$\begin{aligned}
\psi(z) - \psi(w) &= V_\gamma(w,z)\psi(w) - \psi(w) = \Big[V_\gamma(w,z) - I\Big]\psi(w) = (z-w)(A_\gamma - zI)^{-1}\psi(w)\\
&= (z-w)(A_\gamma - zI)^{-1}V_\gamma(z,w)\psi(z) = (z-w)(A_\gamma - wI)^{-1}\psi(z).
\end{aligned}$$ ☐

Ahora introducimos una clase de operadores que desempeña un papel importante en este trabajo (ver Definición 1.2.13 y Observación 1). Las nociones de subespacio invariante, reductor y suma ortogonal de operadores serán requeridas. Sea T un operador en $\mathcal{H}$. Dado un subespacio $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}$, sean $D_1 := \mathcal{H}_1 \cap \operatorname{dom}(T)$ y $D_2 := (\mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_1) \cap \operatorname{dom}(T)$. El subespacio $\mathcal{H}_1$ es T-*invariante* si $\operatorname{dom}(T) = D_1 \oplus D_2$ y $T(D_1) \subset \mathcal{H}_1$. Tal subespacio $\mathcal{H}_1$ *reduce* a T si adicionalmente se satisface $T(D_2) \subset \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_1$. Denote mediante P_1 y P_2 a las proyecciones en los subespacios $\mathcal{H}_1$

y $\mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_1$, respectivamente. Sean $T_1 := P_1 \circ T \restriction_{D_1}$ y $T_2 := P_2 \circ T \restriction_{D_2}$. De esta forma, si $\mathcal{H}_1$ reduce a T entonces $\operatorname{dom}(T) = \operatorname{dom}(T_1) \oplus \operatorname{dom}(T_2)$. Además $Tx = (T_1P_1 + T_2P_2)x$ para todo $x \in \operatorname{dom}(T)$ [5, Sec. 3.6]. Por lo tanto $\operatorname{ran}(T) = \operatorname{ran}(T_1) \oplus \operatorname{ran}(T_2)$. En este caso T es llamado *suma ortogonal de* T_1, T_2 (con respecto al par de subespacios $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_1$).

Definición 1.2.3. Un operador cerrado, simétrico y no autoadjunto es *completamente no autoadjunto* si no es posible expresarlo como una suma ortogonal no trivial de un operador simétrico y un operador autoadjunto.

El siguiente resultado generaliza a [17, Tma. 1.2.1] y en su demostración se emplean las características de la transformada generalizada de Cayley listadas en la Proposición 1.2.1.

Lema 1.2.4. [17, Tma. 1.2.1], [38, Subsec. 2.1]. *Sea A un operador en $\mathcal{H}$. Suponga que A es cerrado, simétrico y no autoadjunto. Si $\mathcal{H}_0 := \cap\{\operatorname{ran}(A - zI) : z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\}$ entonces,*

(i) $\mathcal{H}_0$ es un subespacio A-invariante y el operador $A \restriction_{\mathcal{H}_0}$ es autoadjunto,

(ii) $\mathcal{H}_0$ contiene a cualquier subespacio de $\mathcal{H}$ que satisface las propiedades listadas en (i).

Demostración. (i) Fije cualquier $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Primero demostraremos que $(A^* - zI)^{-1}\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_0$. Sea $f \in \mathcal{H}_0$ y $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Note que $(A^* - zI)^{-1}f \in \mathcal{H} \ominus \ker(A^* - \overline{w}I) = \operatorname{ran}(A - wI)$. En efecto, considere $\varphi \in \ker(A^* - \overline{w}I)$. De acuerdo con (1.13) y con la Proposición 1.2.1(ii),

$$V_\gamma(\overline{w}, \overline{z})\varphi = \varphi + (\overline{z} - \overline{w})(A_\gamma - \overline{z}I)^{-1}\varphi \in \ker(A^* - \overline{z}I).$$

Además,

$$f \in \operatorname{ran}(A - zI) \cap \operatorname{ran}(A - wI) = \big(\mathcal{H} \ominus \ker(A^* - \overline{z}I)\big) \cap \big(\mathcal{H} \ominus \ker(A^* - \overline{w}I)\big).$$

Por lo tanto $f \perp V_\gamma(\overline{w}, \overline{z})\varphi$ y $f \perp \varphi$. En consecuencia $f \perp (A_\gamma - \overline{z}I)^{-1}\varphi$. Así,

$$\big\langle f, (A_\gamma - \overline{z}I)^{-1}\varphi \big\rangle = \big\langle (A^* - zI)^{-1}f, \varphi \big\rangle = 0, \quad i.e., \quad (A^* - zI)^{-1}f \in \mathcal{H} \ominus \ker(A^* - \overline{w}I).$$

Como $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ es arbitrario, $(A^* - zI)^{-1}f \in \cap\{\operatorname{ran}(A - wI) : w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\} = \mathcal{H}_0$.

Ahora veamos que $(A^* - zI)^{-1}\mathcal{H}_0 \subset \operatorname{dom}(A)$. Sea $f \in \mathcal{H}_0$. Particularmente $f \in \operatorname{ran}(A - zI)$. De esta forma, existe $g \in \operatorname{dom}(A)$ tal que $f = (A - zI)g = (A^* - zI)g$. Así $(A^* - zI)^{-1}f = g \in \operatorname{dom}(A)$. Entonces $(A^* - zI)^{-1}\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_0 \cap \operatorname{dom}(A)$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Ahora considere $g \in \mathcal{H}_0 \cap \operatorname{dom}(A)$ y $f := (A - zI)g$. De esta forma,

$$(A^* - wI)^{-1}f = g + (w - z)(A^* - wI)^{-1}g \in \mathcal{H}_0 \cap \operatorname{dom}(A).$$

Por lo tanto $f = (A - wI)(A^* - wI)^{-1} f \in \operatorname{ran}(A - wI)$. Debido a que w es arbitrario obtenemos que $f \in \mathcal{H}_0$. Esto muestra que $Ag \in \mathcal{H}_0$ y en consecuencia $\mathcal{H}_0$ es un subespacio A-invariante. Además $(A - zI)\big(\mathcal{H}_0 \cap \operatorname{dom}(A)\big) = \mathcal{H}_0$, *i. e.*, $A \restriction_{\mathcal{H}_0}$ es un operador autoadjunto.
(ii) Sea $\mathcal{H}'$ un subespacio A-invariante tal que el operador $A \restriction_{\mathcal{H}'}$ es autoadjunto. Entonces $A\big(\mathcal{H}' \cap \operatorname{dom}(A)\big) \subset \mathcal{H}'$. Adicionalmente, $\mathcal{H}' = (A - zI)\big(\mathcal{H}' \cap \operatorname{dom}(A)\big) \subset \operatorname{ran}(A - zI)$ para cualquier $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Por lo tanto $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}_0$. □

A continuación se establece una caracterización de los operadores completamente no autoadjuntos. Este resultado será útil para demostrar que, si un espacio de Hilbert admite un operador completamente no autoadjunto entonces, el espacio es *separable*, *i. e.*, contiene un subconjunto denso y numerable (Proposición 1.2.6).

Proposición 1.2.5. **[17, Sec. 1.2], [36, Sec. 2].** *Bajo las hipótesis del Lema 1.2.4, las siguientes afirmaciones son equivalentes,*

(i) *A es completamente no autoadjunto,*

(ii) $\mathcal{H}_0 = \{0\}$,

(iii) $\overline{\operatorname{span}\{\ker(A^* - zI) : z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\}} = \mathcal{H}$.

Demostración. (i) ⇔ (ii) En [5, Tma. 4.6.1] se establece que todo subespacio invariante de un operador cerrado y simétrico es un subespacio que reduce a dicho operador. Por lo tanto, de acuerdo con el Lema 1.2.4, $\mathcal{H}_0$ reduce al operador A y $A \restriction_{\mathcal{H}_0}$ es un operador autoadjunto. Aún más, cualquier subespacio de $\mathcal{H}$ que satisface ambas propiedades está contenido en $\mathcal{H}_0$.
(ii) ⇔ (iii) En vista de (1.9), $\mathcal{H} \ominus \operatorname{ran}(A - zI) = \ker(A^* - \overline{z}I)$ para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Además, de acuerdo con [5, Lema 2.3.2],

$$\mathcal{H} \ominus \cap\{\operatorname{ran}(A - zI) : z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\} = \overline{\operatorname{span}\{\mathcal{H} \ominus \operatorname{ran}(A - zI) : z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\}}.$$ □

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Un subconjunto $B \subset \mathcal{H}$ es *total* si $\operatorname{span}(B)$ es denso en $\mathcal{H}$, *i. e.*, $\overline{\operatorname{span}(B)} = \mathcal{H}$. De acuerdo con [47, Tma. 2.5], $\mathcal{H}$ es separable, si y sólo si, $\mathcal{H}$ contiene un subconjunto a lo más numerable y total. Ahora utilizaremos la función $\psi(z)$ definida en (1.14) y la Proposición 1.2.5 para demostrar que si $\mathcal{H}$ admite un operador A completamente no autoadjunto y tal que $n_+(A) = n_-(A) = 1$ entonces, $\mathcal{H}$ es separable.

Proposición 1.2.6. **[40, Subsec. 2.3].** *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Si $\mathcal{H}$ admite un operador A completamente no autoadjunto y tal que $n_+(A) = n_-(A) = 1$ entonces, $\mathcal{H}$ es separable.*

Demostración. Note que existe una sucesión $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ que satisface,

$$\forall \quad z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R} \quad \exists \quad \{z_{k_l}\}_{l\in\mathbb{N}} \subset \{z_k\}_{k\in\mathbb{N}} \setminus \{z\} \ : \quad z = \lim_{l\to\infty} z_{k_l}, \tag{1.18}$$

i. e., los puntos en los semiplanos superior e inferior son puntos de acumulación de $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. En efecto, $\mathbb{Q}\times(\mathbb{Q}\setminus\{0\})$ es un subconjunto numerable de $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ que cumple (1.18). Ahora considere la función ψ definida en (1.14). Verifiquemos que la sucesión $\{\psi(z_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ es total en $\mathcal{H}$. Sea $\theta \in \mathcal{H} \ominus \{\psi(z_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$. Esto significa que $\langle\theta, \psi(z_k)\rangle = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. En vista de (1.18) y de la continuidad de ψ en $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R} \subset \rho(A_\gamma)$ obtenemos que $\langle\theta, \psi(z)\rangle = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Así,

$$\theta \in \mathcal{H} \ominus \operatorname{span}\{\ker(A^* - zI) : z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}\} = \mathcal{H} \ominus \overline{\operatorname{span}\{\ker(A^* - zI) : z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}\}} = \{0\}$$

(en la última cadena de ecuaciones hemos usado (1.11) y la Proposición 1.2.5). □

A continuación se introduce el concepto de *involución*.

Definición 1.2.7. Una *involución* es una función $J : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tal que, para cualesquiera φ, $\theta \in \mathcal{H}$ y a, $b \in \mathbb{C}$ se satisfacen $J(a\varphi + b\theta) = \overline{a}J\varphi + \overline{b}J\theta, \quad J^2 = I, \quad \langle J\theta, J\varphi\rangle = \langle\varphi, \theta\rangle$.

Note que cualquier involución J es continua. En efecto, para cualesquiera φ, $\theta \in \mathcal{H}$,

$$\|J\theta - J\varphi\|^2 = \|J(\theta-\varphi)\|^2 = \langle J(\theta-\varphi), J(\theta-\varphi)\rangle = \langle\theta-\varphi, \theta-\varphi\rangle = \|\theta-\varphi\|^2 .$$

Ejemplo 1.2.8. $J_1 : L_2(0,a) \to L_2(0,a), \ \varphi \mapsto \overline{\varphi}$ y $J_2 : L_2(-a,a) \to L_2(-a,a), \ \varphi \mapsto \overline{\varphi(-x)}$ son involuciones.

Definición 1.2.9. Sea T un operador autoadjunto en $\mathcal{H}$. Una involución J *conmuta* con T si $J\operatorname{dom}(T) \subset \operatorname{dom}(T)$ y $JT\varphi = TJ\varphi$ para cualquier $\varphi \in \operatorname{dom}(T)$.

En la demostración de la Proposición 1.2.6 establecimos que, si un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ admite un operador A cerrado, simétrico, completamente no autoadjunto y con índices de deficiencia $n_+(A) = n_-(A) = 1$ entonces, existe una sucesión $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ tal que $\operatorname{span}\{\psi(z_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ es denso en $\mathcal{H}$. A continuación utilizaremos este hecho para construir una involución que conmuta con todas las extensiones autoadjuntas canónicas de A.

Proposición 1.2.10. **[38, Prop. 2.3], [40, Tma. 2.6].** *Sea A un operador cerrado, simétrico, completamente no autoadjunto y con índices de deficiencia $n_+(A) = n_-(A) = 1$. Entonces, existe una involución J que conmuta con todas las extensiones autoadjuntas canónicas de A.*

Demostración. Definimos la regla de correspondencia de J en los elementos de $\operatorname{span}\{\psi(z_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$,

$$J\big(c_1\psi(z_1)+\ldots+c_k\psi(z_k)\big) := \overline{c_1}\psi(\overline{z_1})+\ldots+\overline{c_k}\psi(\overline{z_k}), \quad k\in\mathbb{N}, \quad c_1,\ldots,c_n\in\mathbb{C}. \tag{1.19}$$

También definimos $J\psi(\overline{z_k}) := \psi(z_k)$ para cada $k\in\mathbb{N}$. Las propiedades listadas en la Definición 1.2.7 son válidas en $\operatorname{span}\{\psi(z_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$. Por ejemplo, usando el Lema 1.2.2(ii) y (1.19),

$$\begin{aligned}\left\langle J\sum_{m=1} c_m\psi(z_m)\,,\, J\sum_{n=1} d_n\psi(z_n)\right\rangle &= \left\langle \sum_{m=1}\overline{c_m}\psi(\overline{z_m})\,,\, \sum_{n=1}\overline{d_n}\psi(\overline{z_n})\right\rangle \\ = \sum_{m=1}\sum_{n=1} c_m\overline{d_n}\left\langle \psi(\overline{z_m})\,,\,\psi(\overline{z_n})\right\rangle &= \left\langle \sum_{n=1} d_n\psi(z_n)\,,\,\sum_{m=1} c_m\psi(z_m)\right\rangle.\end{aligned}$$

Ahora extendemos la definición de J a todos los elementos de $\mathcal{H}=\overline{\operatorname{span}\{\psi(z_k)\}_{k\in\mathbb{N}}}$,

$$J\sum_{k=1}^{\infty} c_k\psi(z_k) := \sum_{k=1}^{\infty}\overline{c_k}\psi(\overline{z_k}). \tag{1.20}$$

La serie en (1.20) converge. En efecto, por la convergencia de la serie en el lado izquierdo,

$$\left\|\sum_{k=m}^{n}\overline{c_k}\psi(\overline{z_k})\right\| \le \sum_{k=m}^{n}|c_k|\cdot\|J\psi(z_k)\| = \sum_{k=m}^{n}|c_k|\cdot\|\psi(z_k)\|\to 0, \qquad m,\, n\to\infty.$$

De esta forma, J es una involución en $\mathcal{H}$. Sean $w,\, z\in\rho(A_\gamma)$. Por el Lema 1.2.2(iii),

$$J(A_\gamma - wI)^{-1}\psi(z) = \frac{\psi(\overline{z})-\psi(\overline{w})}{\overline{z}-\overline{w}} = (A_\gamma-\overline{w}I)^{-1}\psi(\overline{z}) = (A_\gamma-\overline{w}I)^{-1}J\psi(z).$$

Hemos demostrado que J conmuta con A_γ. Empleando la fórmula generalizada de la resolvente de Krein obtenemos que J conmuta con todas las extensiones autoadjuntas canónicas de A. □

El siguiente resultado será utilizado en el desarrollo del modelo funcional (Proposición 1.4.1).

Teorema 1.2.11. [38, Prop. 2.6], [40, Tma. 2.7]. *Sea A un operador cerrado, simétrico, completamente no autoadjunto y tal que $n_+(A)=n_-(A)=1$. Sea J una involución que conmuta con todas las extensiones autoadjuntas canónicas de A. Entonces, para cada $t\in\operatorname{spec}(A_\gamma)$, existe $\psi_t\in\ker(A^*-tI)$ tal que $J\psi_t=\psi_t$.*

Demostración. Sea $\phi_t\in\ker(A_\gamma-tI)\setminus\{0\}$. Note que $J\phi_t\in\ker(A_\gamma-tI)$. En efecto, de acuerdo con [5, Tma. 4.1.6], $\operatorname{spec}(A_\gamma)\subset\mathbb{R}$. Así, en vista de las Definiciones 1.2.7 y 1.2.9, $(A_\gamma-tI)J\phi_t = J(A_\gamma-tI)\phi_t = 0$. Ahora, debido a que $\dim(\ker(A^*-\cdot I))$ es constante en cada componente conexa de $\rho(A_\gamma)$ [5, Tma. 3.7.4], la hipótesis $n_+(A) = n_-(A) = 1$ implica que $\dim(\ker(A^* - tI)) = 1$. Por lo tanto, J restringido a $\ker(A^* - tI)$ es un operador de multiplicación por un escalar α. Entonces, por la Definición 1.2.7, $\|\varphi\|^2 = \|J\varphi\|^2 = |\alpha|^2 \|\varphi\|^2$ para cualquier $\varphi \in \ker(A^* - tI)$. Por lo tanto $|\alpha| = 1$. Así, $J(1+\alpha)\phi_t = \alpha(1+\overline{\alpha})\phi_t = (\alpha+1)\phi_t$. De esta forma, $(1+\alpha)\phi_t \in \ker(A^* - tI)$ cumple lo requerido. □

Definición 1.2.12. Un operador cerrado T es *regular* si, para cada $z \in \mathbb{C}$ existe $c_z > 0$ tal que $\|(T - zI)\varphi\| \geq c_z \|\varphi\|$ para todo $\varphi \in \operatorname{dom}(T)$.

Note que T es regular cuando, para cada $z \in \mathbb{C}$, el operador $T - zI$ es invertible y además $(T - zI)^{-1}$ es acotado, sin embargo, esto no implica que $\operatorname{dom}\left((T - zI)^{-1}\right) = \operatorname{ran}(T - zI) = \mathcal{H}$. Por ello, el hecho de que T sea regular no significa que $\rho(T) = \mathbb{C}$ (ver (1.5)).

Observación 1. Un operador cerrado, simétrico y regular es completamente no autoadjunto. En efecto, la propiedad de regularidad implica que el núcleo espectral es vacío y, en consecuencia, el operador no se puede expresar como una suma ortogonal no trivial de un operador simétrico y un operador autoadjunto.

Ahora introducimos la principal clase de operadores que estudiaremos en este trabajo.

Definición 1.2.13. La clase $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ consta de todos los operadores en $\mathcal{H}$ cerrados, simétricos, regulares y con índices de deficiencia $n_+(A) = n_-(A) = 1$.

Ahora enunciamos propiedades de los espectros de las extensiones autoadjuntas canónicas de los operadores en la clase $\mathcal{S}(\mathcal{H})$. Estas propiedades son de vital importancia para las fórmulas de muestreo establecidas en la Sección 2.1.

Teorema 1.2.14. [17, Prop. 3.2], [38, Prop. 2.4]. *Si $A \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ entonces,*

(E1) el espectro de cualquier extensión autoadjunta canónica de A consta únicamente de valores propios aislados de multiplicidad 1,

(E2) todo número real pertenece al espectro de una, y sólo una, extensión autoadjunta canónica de A,

(E3) los elementos de los espectros de cada una de las extensiones autoadjuntas canónicas de A están entrelazados por pares.

Por la Observación 1, los operadores en $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ son completamente no autoadjuntos. Por ello, cualquier elemento de $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ satisface las hipótesis del Teorema 1.2.11.

1.3 Espacios de de Branges

En esta sección se introduce la noción de espacio de de Branges (espacios dB). Este tipo de espacios generaliza a los espacios Paley-Wiener (espacios PW), por ello comenzamos mencionando propiedades fundamentales de los espacios PW. Dada $a > 0$, sea

$$\mathcal{PW}_a := \left\{ f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} e^{-ixz} \varphi(x) dx : \varphi \in L_2(-a, a) \right\}.$$

Note que $\mathcal{PW}_a$ es la imagen bajo la transformada de Fourier del espacio $L_2(-a, a)$. En efecto, la transformada de Fourier de $\varphi \in L_2(-a, a)$ se define como un elemento de $L_2(\mathbb{R})$,

$$f(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} e^{-ixt} \varphi(x) dx, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.21}$$

sin embargo, el lado derecho de (1.21) define una única extensión de f a una función entera [8, Sec. 16], [28, Prop. 7.1.2]. Por el Teorema de Paley-Wiener [8, Tma. 17], [28, Tma. 7.1.3],

$$\mathcal{PW}_a = \left\{ f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : f \text{ es entera}, \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx < \infty, \ |f(z)| \leq C_f \cdot e^{a|\mathrm{Im}(z)|}, \ z \in \mathbb{C} \right\}. \tag{1.22}$$

La ecuación (1.22) es una instancia particular de la definición de espacio dB presentada en [8, Sec. 19]. Antes de mencionar dicha definición, recordemos las nociones de función Hermite-Biehler y función de Nevanlinna. Una función entera $e(z)$ es una *función Hermite-Biehler* (*función HB*) si $|e(z)| > |e(\overline{z})|$ para todo $z \in \mathbb{C}^+$. Por otra parte, una función f holomorfa en $\mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ es una *función de Nevanlinna* si $f = P/Q$, donde P y Q son holomorfas y acotadas en $\mathbb{C}^+$ y Q no es idénticamente cero [33, Sec. 5.5]. Tal función f pertenece a la clase $\mathcal{N}_0$ si, en la representación anterior, Q puede ser elegida de forma que

$$\lim_{y \to \infty} \frac{1}{y} \log |Q(iy)| = 0.$$

Sea $e(z)$ una función HB. Considere

$$\mathcal{B}(e) := \left\{ f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : f \text{ es entera}, \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{f(x)}{e(x)} \right|^2 dx < \infty, \ f/e\,, \ f^{\#}/e \in \mathcal{N}_0 \right\}, \tag{1.23}$$

donde $f^{\#}(z) := \overline{f(\overline{z})}$. A continuación se establece una caracterización de los elementos de $\mathcal{B}(e)$. Este resultado será usado para definir un producto interior en $\mathcal{B}(e)$ y para estudiar las propiedades del espacio así obtenido (Teorema 1.3.2).

Proposición 1.3.1. **[32, Prop. 2.1].** *Suponga que f es entera y satisface*

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{f(x)}{e(x)} \right|^2 dx < \infty. \tag{1.24}$$

Las siguientes afirmaciones son equivalentes,

(i) $\left| \frac{f(z)}{e(z)} \right| \leq \frac{C_f}{\sqrt{\operatorname{Im} z}}, \quad \left| \frac{f^{\#}(z)}{e(z)} \right| \leq \frac{C_f}{\sqrt{\operatorname{Im} z}}, \quad$ *para todo* $z \in \mathbb{C}^+$*,*

(ii) $f/e,\ f^{\#}/e \in \mathcal{N}_0$*,*

(iii) $f/e,\ f^{\#}/e \in \mathcal{H}_2(\mathbb{C}^+)$*,*

donde $\mathcal{H}_2(\mathbb{C}^+) := \left\{ f \text{ holomorfa en } \mathbb{C}^+ : \sup_{y>0} \int_{\mathbb{R}} |f(x+iy)|^2 dx < \infty \right\}$ *es el espacio de Hardy.*

Demostración. (iii) implica (ii) porque $\mathcal{H}_2(\mathbb{C}^+) \subset \mathcal{N}_0$ [16, Sec. 2.5]. (iii) implica (i) porque las funciones que pertenecen a $\mathcal{H}_2(\mathbb{C}^+)$ admiten una representación tipo Cauchy [33, Tma. 5.19],

$$\frac{f(z)}{e(z)} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\lambda)}{e(\lambda)} \frac{d\lambda}{\lambda - z}, \qquad z \in \mathbb{C}^+,$$

y análogamente para $f^{\#}/e$. Así, (i) es verdadera debido a (1.24) y a la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Veamos que (i) implica (iii). Por el Teorema de Cauchy [33, Tma. 5.19],

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\lambda)}{e(\lambda)} \frac{d\lambda}{\lambda - z} = \begin{cases} f(z)/e(z) & \text{si } z \in \mathbb{C}^+, \\ 0 & \text{si } z \in \mathbb{C}^-. \end{cases} \tag{1.25}$$

En vista de (1.24) y (1.25) obtenemos que $f/e \in \mathcal{H}_2(\mathbb{C}^+)$ [16, Ejerc. 2.2.a]. Mediante un argumento análogo concluimos que $f^{\#}/e \in \mathcal{H}_2(\mathbb{C}^+)$. Sólo falta demostrar que (ii) implica (iii). La factorización canónica de $f/e \in \mathcal{N}_0$ es

$$f(z)/e(z) = e^{\mathrm{i}\alpha} e^{\mathrm{i}hz} B(z) g(z) S_1(z)/S_2(z), \tag{1.26}$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$, $h \geq 0$, B es un producto de Blaschke, g es una función externa y S_1, S_2 son los factores singulares [16, Sec. 2.5]. Además f/e es meromorfa y, por (1.24), f/e no tiene polos en $\mathbb{R}$. Así, f/e es holomorfa en una vecindad de la cerradura de $\mathbb{C}^+$ y $S_1 = S_2 \equiv 1$. Entonces, (1.24) y (1.26) implican que $f/e \in \mathcal{H}_2(\mathbb{C}^+)$. Por el mismo argumento $f^{\#}/e \in \mathcal{H}_2(\mathbb{C}^+)$. □

En vista de (1.23) y de la Proposición 1.3.1,

$$\mathcal{B}(e) = \left\{ f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : f \text{ es entera, } f/e\,,\ f^{\#}/e \in \mathcal{H}_2(\mathbb{C}^+) \right\}. \tag{1.27}$$

Ahora definimos un producto interior en el conjunto lineal $\mathcal{B}(e)$ y demostramos que, equipado con dicho producto interior, $\mathcal{B}(e)$ es un espacio de Hilbert (Definición 1.3.3).

Teorema 1.3.2. **[8, Tma. 19], [32, Tma. 2.2].** *El conjunto lineal $\mathcal{B}(e)$ equipado con el producto interior*

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{B}(e)} := \int_{\mathbb{R}} \frac{\overline{f(x)}g(x)}{|e(x)|^2}dx \tag{1.28}$$

es un espacio de Hilbert. Para cada $w \in \mathbb{C}$, la evaluación puntual es un funcional lineal acotado. Dado cualquier $w \in \mathbb{C}$, la función entera

$$k(z, w) = \frac{e(z)\overline{e(w)} - \overline{e(\overline{z})}e(\overline{w})}{2i\pi(\overline{z} - w)}, \qquad z \in \mathbb{C}, \tag{1.29}$$

pertenece a $\mathcal{B}(e)$. Además,

$$\langle k(\cdot, w), f\rangle_{\mathcal{B}(e)} = f(w), \qquad w \in \mathbb{C}, \qquad f \in \mathcal{B}(e). \tag{1.30}$$

Demostración. Un cálculo directo muestra que $\mathcal{B}(e)$ es un conjunto lineal y que $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{B}(e)}$ es un producto interior en $\mathcal{B}(e)$. Además, por la Proposición 1.3.1(i), $k(\cdot, w) \in \mathcal{B}(e)$ para todo $w \in \mathbb{C}$. Ahora considere $f \in \mathcal{B}(e)$. De acuerdo con (1.25),

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{e(x)}\frac{dx}{x - w} = \begin{cases} f(w)/e(w) & \text{si } \ w \in \mathbb{C}^+, \\ 0 & \text{si } \ w \in \mathbb{C}^-. \end{cases}$$

Mediante un cálculo similar se obtiene,

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{e^{\#}(x)}\frac{dx}{x - w} = \begin{cases} 0 & \text{si } \ w \in \mathbb{C}^+, \\ -f(w)/e^{\#}(w) & \text{si } \ w \in \mathbb{C}^-. \end{cases}$$

Estas expresiones implican que

$$f(w) = \int_{\mathbb{R}} \overline{k(x, w)}f(x)\frac{dx}{|e(x)|^2}, \qquad w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \tag{1.31}$$

Debido a que el lado derecho de (1.31) determina una función entera de w, dicha ecuación es válida para todo $w \in \mathbb{C}$. Ahora demostraremos que $\mathcal{B}(e)$ es completo. A causa de que las funciones enteras están determinadas por sus restricciones a $\mathbb{R}$, el espacio $\mathcal{B}(e)$ puede ser considerado como un subespacio de $L_2(\mathbb{R}, |e(x)|^{-2}\, dx)$. Note que $\mathcal{B}(e)$ es cerrado en el espacio más grande. En efecto,

$$\|k(\cdot,w)\|^2 = k(w,w) = \frac{1}{4\operatorname{Im}(w)}\Big(|e(w)|^2 - |e(\overline{w})|^2 \Big)$$

permanece acotada cuando w varía en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$. De esta forma, si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge en norma a $f \in L_2(\mathbb{R}, |e(x)|^{-2}\,dx)$ entonces, $f_n(w) = \langle k(\cdot,w), f_n\rangle_{L_2}$ converge uniformemente en subconjuntos compactos a $\langle k(\cdot,w), f\rangle_{L_2}$ y entonces $f(w) := \langle k(\cdot,w), f\rangle_{L_2}$ define una extensión entera de $f \in L_2(\mathbb{R}, |e(x)|^{-2}\,dx)$. Debido a (1.27) y al hecho de que $\mathcal{H}_2(\mathbb{C}^+)$ es completo, se obtiene que $f \in \mathcal{B}(e)$. $\square$

Definición 1.3.3. Sea $e(z)$ una función HB. El *espacio de de Branges (espacio dB) generado por* $e(z)$ es el conjunto lineal $\mathcal{B}(e)$ definido en (1.23), equipado con el producto interior (1.28). Una función $k : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que, para todo $w \in \mathbb{C}$, la función $k(\cdot,w)$ pertenece a $\mathcal{B}(e)$ y que satisface (1.30) es un *núcleo reproductor* para $\mathcal{B}(e)$.

De acuerdo con [8, Sec. 19], [32, Sec. 2], en el caso del espacio Paley-Wiener de tipo a, $\mathcal{PW}_a$, la función HB es $e(z) = e^{-\mathrm{i}az}$ y el núcleo reproductor es

$$\frac{\sin\big(a(z-\overline{w})\big)}{\pi(z-\overline{w})}.$$

En vista del Teorema 1.3.2 y de [8, Prob. 50], el espacio $\mathcal{B}(e)$ tiene las siguientes propiedades,

(H1) para todo $w \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, el funcional lineal definido en el espacio mediante $f \mapsto f(w)$ es acotado,

(H2) si f pertenece al espacio y $w \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ es un cero de f, entonces la función $f(z)(z-\overline{w})(z-w)^{-1}$ pertenece al espacio y tiene la misma norma que f,

(H3) la función $f^{\#}(z) := \overline{f(\overline{z})}$ pertenece al espacio siempre que f pertenece al espacio y tiene la misma norma que f.

Adicionalmente, los axiomas (H1)-(H3) caracterizan a los espacios dB (Teorema 1.3.4). Sean $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ espacios de Hilbert. Un operador U tal que $U\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ es un *operador unitario* (*isomorfismo isométrico*) si $\|Ux\|_{\mathcal{H}_2} = \|x\|_{\mathcal{H}_1}$ para todo $x \in \mathcal{H}_1$. Cuando existe un operador unitario entre $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ decimos que $\mathcal{H}_1$ es *isométricamente isomorfo* a $\mathcal{H}_2$.

Teorema 1.3.4. **[8, Tma. 23].** *Si $\mathcal{B}$ es un espacio de Hilbert cuyos elementos son funciones enteras, que satisface (H1)-(H3) y que contiene un elemento no nulo entonces, existe una función HB $e(z)$ tal que $\mathcal{B}$ es isométricamente isomorfo a $\mathcal{B}(e)$.*

Dado un espacio dB $\mathcal{B}$, el operador de multiplicación por la variable independiente se define mediante

$$\operatorname{dom}(S) = \{f(z) \in \mathcal{B} : zf(z) \in \mathcal{B}\}, \qquad (Sf)(z) = zf(z), \qquad f(z) \in \operatorname{dom}(S). \tag{1.32}$$

Este operador es cerrado, simétrico, tiene índices de deficiencia (1,1) y su dominio no es necesariamente denso en $\mathcal{B}$ [22, Prop. 4.2]. Además, de acuerdo con [22, Cor. 4.7], S es regular. Por lo tanto $S \in \mathcal{S}(\mathcal{B})$.

1.4 Modelo funcional

En esta sección se construye un modelo funcional para los operadores que pertenecen a la clase $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ (Definición 1.2.13). A continuación se explica el significado preciso de esta afirmación. Sean $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ espacios de Hilbert. Dos operadores $T_1 : \operatorname{dom}(T_1) \subset \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ y $T_2 : \operatorname{dom}(T_2) \subset \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$ son *unitariamente equivalentes* si existe un isomorfismo isométrico U entre $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ tal que $U \operatorname{dom}(T_1) = \operatorname{dom}(T_2)$ y $UT_1x = T_2Ux$, $x \in \operatorname{dom}(T_1)$. De esta forma, $T_1 = U^{-1}T_2U$ y $T_2 = UT_1U^{-1}$. En este caso decimos que U *transforma* T_1 *en* T_2. Las características de un operador que se preservan bajo el paso a un operador unitariamente equivalente son llamadas *invariantes unitarios.*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}_1 \supset \operatorname{dom}(T_1) \arrow[r, "T_1"'] \arrow[d, "U"'] & \operatorname{ran}(T_1) \subset \mathcal{H}_1 \\
\mathcal{H}_2 \supset \operatorname{dom}(T_2) \arrow[r, "T_2"] & \operatorname{ran}(T_2) \subset \mathcal{H}_2 \arrow[u, "U^{-1}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{H}_2 \supset \operatorname{dom}(T_2) \arrow[r, "T_2"'] \arrow[d, "U^{-1}"'] & \operatorname{ran}(T_2) \subset \mathcal{H}_2 \\
\mathcal{H}_1 \supset \operatorname{dom}(T_1) \arrow[r, "T_1"] & \operatorname{ran}(T_1) \subset \mathcal{H}_1 \arrow[u, "U"']
\end{tikzcd}$$

En los Teoremas 1.4.2 y 1.4.3 se establece que, para cada $A \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$, existe un espacio dB $\widehat{\mathcal{H}}$ tal que el operador A es unitariamente equivalente al operador de multiplicación por la variable independiente en $\widehat{\mathcal{H}}$, *i. e.*, existe un espacio dB $\widehat{\mathcal{H}}$ y un operador unitario Φ entre $\mathcal{H}$ y $\widehat{\mathcal{H}}$ que transforma al operador A en el operador S de multiplicación por la variable independiente en $\widehat{\mathcal{H}}$ (ver (1.32)). Este modelo funcional se expone de forma detallada en [36–38], [40] y se originó a partir de la teoría de representación de Krein para operadores simétricos [18, Sec. 1.2].

Proposición 1.4.1. **[37, Lema 4.1].** *Sea $A \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ y sea J una involución que conmuta con todas las extensiones autoadjuntas canónicas de A (Teorema 1.2.10). Entonces, existe una función $\xi : \mathbb{C} \to \mathcal{H}$ que satisface lo siguiente,* *(P1) la función ξ es entera y libre de ceros,*

(P2) para todo $z \in \mathbb{C}$, $\xi(z) \in \ker(A^* - zI)$,

(P3) para todo $z \in \mathbb{C}$, $J\xi(z) = \xi(\overline{z})$.

Adicionalmente, si ξ_1 y ξ_2 satisfacen las propiedades (P1)-(P3) entonces, existe una función $g(z)$ entera y libre de ceros tal que $g^\#(z) = g(z)$ y $\xi_1(z) = g(z)\xi_2(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Demostración. Sea A_γ una extensión autoadjunta canónica fija de A. Recuerde que $\operatorname{spec}(A_\gamma)$ consta únicamente de valores propios aislados de multiplicidad uno (Teorema 1.2.14). Considere una función entera h_γ que se anula sólamente en los puntos de $\operatorname{spec}(A_\gamma)$ (siendo estos puntos ceros simples de h_γ) y satisface $h_\gamma^\#(z) = h_\gamma(z)$. Fije también $t \in \operatorname{spec}(A_\gamma)$, $\psi_t \in \ker(A^* - tI)$ tales que $J\psi_t = \psi_t$ (Teorema 1.2.11). Defina

$$\xi_{\gamma,t}(z) := h_\gamma(z)V_\gamma(t,z)\psi_t, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{1.33}$$

donde $V_\gamma(t,z)$ está dada por (1.12). De acuerdo con [36, Sec. 3], la función $V_\gamma(t,\cdot)\psi_t : \mathbb{C} \to \mathcal{H}$ es analítica en $\rho(A_\gamma)$ y tiene polos simples en los puntos de $\operatorname{spec}(A_\gamma)$. Por ello, si $x_n \in \operatorname{spec}(A_\gamma)$ entonces, la siguiente igualdad es válida en una vecindad de x_n,

$$V_\gamma(t,z)\psi_t = (z - x_n)^{-1}\kappa_n + (\text{una función analítica en } x_n), \tag{1.34}$$

donde el residuo κ_n pertenece a $\ker(A^* - x_nI)$ [37, Lema 4.1]. Por lo tanto, debido a que h_γ tiene ceros simples en $\operatorname{spec}(A_\gamma)$, la función $\xi_{\gamma,t}$ satisface (P1). Veamos que $\xi_{\gamma,t}$ satisface (P2) y (P3). Primero suponga que $z \in \rho(A_\gamma)$. Por la Proposición 1.2.1(iv), $\xi_{\gamma,t}(z) \in \ker(A^* - zI)$. Además,

$$\xi_{\gamma,t}(z) = h_\gamma(z)(A_\gamma - tI)(A_\gamma - zI)^{-1}\psi_t. \tag{1.35}$$

De esta forma, en vista de los Teoremas 1.2.10 y 1.2.11,

$$J\xi_{\gamma,t}(z) = \overline{h_\gamma(z)}(A_\gamma - tI)J(A_\gamma - zI)^{-1}\psi_t = h_\gamma(\overline{z})(A_\gamma - tI)(A_\gamma - \overline{z}I)^{-1}\psi_t = \xi_{\gamma,t}(\overline{z}).$$

Cuando $z = x_n \in \operatorname{spec}(A_\gamma)$, las propiedades (P2) y (P3) se verifican usando (1.34) y el hecho de que h_γ tiene ceros simples en $\operatorname{spec}(A_\gamma)$. Ahora considere funciones ξ_1 y ξ_2 que satisfacen (P1)-(P3). Debido a que $\dim\big(\ker(A^* - zI)\big) = 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$, las propiedades (P1) y (P2) implican la existencia de una función $g(z)$ entera y libre de ceros tal que $\xi_1(z) = g(z)\xi_2(z)$. Así,

$$g(\overline{z})\xi_2(\overline{z}) = \xi_1(\overline{z}) = J\xi_1(z) = \overline{g(z)}\xi_2(\overline{z}).$$

Por lo tanto $\overline{g(z)} = g(\overline{z})$, *i. e.*, $g(z) = \overline{g(\overline{z})}$. □

Observación 2. Aunque el conjunto de ceros de $h_\gamma(z)$ está determinado por la elección de la extensión autoadjunta A_γ del operador A, la Proposición 1.4.1 nos garantiza que tenemos la libertad de multiplicar $h_\gamma(z)$ por una función $g(z)$ entera, libre de ceros y tal que $g^\#(z) = g(z)$. En este sentido, la función $\xi_{\gamma,t}(z)$ definida en (1.33) no depende del parámetro γ. Debido a esto, de ahora en adelante la función $\xi_{\gamma,t}(z)$ será denotada mediante $\xi(z)$.

Empleando la Proposición 1.4.1, desarrollamos un modelo funcional para los operadores que pertenecen a la clase $\mathcal{S}(\mathcal{H})$. Sea $A \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ y sea J una involución que conmuta con todas las extensiones autoadjuntas canónicas de A (Teorema 1.2.10). Considere una función $\xi : \mathbb{C} \to \mathcal{H}$ que cumple las propiedades (P1)-(P3) (Proposición 1.4.1). Para cada $\varphi \in \mathcal{H}$, definimos una función $\Phi\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mediante la regla,

$$(\Phi\varphi)(z) := \langle \xi(\overline{z}), \varphi \rangle , \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{1.36}$$

De esta forma, $\widehat{\mathcal{H}} := \Phi\mathcal{H}$ es un conjunto lineal de funciones enteras. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$|\langle \xi(\overline{z}), \varphi \rangle| \leq \|\xi(\overline{z})\| \cdot \|\varphi\| , \qquad z \in \mathbb{C}, \qquad \varphi \in \mathcal{H}.$$

Además, $\langle \xi(\overline{z}), \varphi \rangle = 0$, si y sólo si, $\varphi \in \mathcal{H} \ominus \ker(A^* - \overline{z}I) = \operatorname{ran}(A - zI)$. Por lo tanto, si $z \in \mathbb{C}$ se mantiene fijo mientras φ varía sobre $\mathcal{H}$, el producto interno en (1.36) es un funcional lineal acotado cuyo núcleo es $\operatorname{ran}(A - zI)$. Debido a que A es completamente no autoadjunto (Observación 1), si $\Phi\varphi \equiv 0$ entonces, $\varphi \in \cap\{\operatorname{ran}(A - zI) : z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\} = \{0\}$ (en la última ecuación hemos usado la Proposición 1.2.5). Por lo tanto Φ es un operador inyectivo. La imagen bajo Φ de un elemento $\varphi \in \mathcal{H}$ será denotada mediante $\widehat{\varphi}(z)$. El conjunto lineal $\widehat{\mathcal{H}}$ se convierte en un espacio de Hilbert si definimos

$$\left\langle \widehat{\theta}(\cdot), \widehat{\varphi}(\cdot) \right\rangle_{\widehat{\mathcal{H}}} = \langle \theta, \varphi \rangle_{\mathcal{H}} . \tag{1.37}$$

A continuación veremos que el espacio de funciones enteras $\widehat{\mathcal{H}}$ es un espacio dB y que el isomorfismo isométrico Φ transforma al operador A en el operador de multiplicación por la variable independiente en $\widehat{\mathcal{H}}$ (Teoremas 1.4.2 y 1.4.3).

Teorema 1.4.2. **[37, Prop. 4.2], [38, Prop. 2.8].** *Sea $A \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$. Si Φ está dada por* (1.36) *entonces, el espacio de funciones $\widehat{\mathcal{H}} := \Phi\mathcal{H}$ es un espacio dB.*

Demostración. Debido al Teorema 1.3.4, basta verificar que $\widehat{\mathcal{H}}$ satisface los axiomas (H1)-(H3).

Note que

$$k(z,w) := \langle \xi(\overline{z}), \xi(\overline{w}) \rangle, \qquad w,\, z \in \mathbb{C}, \tag{1.38}$$

es un núcleo reproductor para $\widehat{\mathcal{H}}$. En efecto, (1.36) y (1.37) implican,

$$\left\langle k(\cdot,w), \widehat{\varphi}(\cdot)\right\rangle_{\widehat{\mathcal{H}}} = \left\langle \xi(\overline{w}), \varphi\right\rangle_{\mathcal{H}} = \widehat{\varphi}(w), \qquad \widehat{\varphi} \in \widehat{\mathcal{H}}.$$

Esto demuestra que $\widehat{\mathcal{H}}$ satisface (H1). Ahora suponga que $\widehat{\varphi} \in \widehat{\mathcal{H}}$ tiene una raíz $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, *i. e.*, $\left\langle \xi(\overline{w}), \varphi \right\rangle = 0$. Así, $\varphi \in \mathcal{H} \ominus \ker(A^* - \overline{w}I) = \operatorname{ran}(A - wI)$. Esto nos permite definir $\eta = (A - \overline{w}I)(A - wI)^{-1}\varphi$. Usando (1.35) y la Identidad de la Resolvente (1.17),

$$\widehat{\eta}(z) = \langle \xi(\overline{z}), \eta \rangle = \frac{z - \overline{w}}{z - w} \langle \xi(\overline{z}), \varphi \rangle = \frac{z - \overline{w}}{z - w}\widehat{\varphi}(z).$$

Debido a que φ y η están relacionadas mediante una transformada de Cayley, obtenemos que $\|\widehat{\varphi}\| = \|\widehat{\eta}\|$ [5, Sec. 4.3], [47, Tma. 8.2]. Por lo tanto $\widehat{\mathcal{H}}$ satisface (H2). Finalmente, dada $\widehat{\varphi} \in \widehat{\mathcal{H}}$, considere a la función entera $\widehat{\varphi}^{\#}(z) := \overline{\widehat{\varphi}(\overline{z})}$. El hecho de que ξ satisface (P3) implica,

$$\overline{\widehat{\varphi}(\overline{z})} = \overline{\left\langle \xi(z), \varphi \right\rangle_{\mathcal{H}}} = \left\langle \varphi, \xi(z) \right\rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle J\xi(z), J\varphi \right\rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle \xi(\overline{z}), J\varphi \right\rangle_{\mathcal{H}}. \tag{1.39}$$

Por lo tanto $\widehat{\varphi}^{\#}$ pertenece a $\widehat{\mathcal{H}}$ y tiene la misma norma que $\widehat{\varphi}$. □

En vista de (1.39), $\#\Phi = \Phi J$. Sea S el operador de multiplicación por la variable independiente en $\widehat{\mathcal{H}}$ (vea (1.32)). Note que $S\Phi = \Phi A$ y $\Phi(\operatorname{dom}(A)) = \operatorname{dom}(S)$. En efecto, si $\varphi \in \operatorname{dom}(A)$ entonces,

$$\widehat{(A\varphi)}(z) = \left\langle \xi(\overline{z}), A\varphi \right\rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle A^*\xi(\overline{z}), \varphi \right\rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle \overline{z}\xi(\overline{z}), \varphi \right\rangle_{\mathcal{H}} = z\widehat{\varphi}(z) = \big(S\widehat{\varphi}\big)(z), \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Por lo tanto, el operador unitario Φ transforma al operador A en el operador S de multiplicación por la variable independiente en $\widehat{\mathcal{H}}$. Además, las extensiones autoadjuntas de A corresponden a las extensiones autoadjuntas de S.

Teorema 1.4.3. [17, Tma. 1.2.2]. [37, Prop. 4.3]. *Fijemos $A \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$. Sea J una involución que conmuta con todas las extensiones autoadjuntas canónicas de A (Teorema 1.2.10) y sea S el operador de multiplicación por la variable independiente en $\widehat{\mathcal{H}}$ (vea (1.32)). Entonces,*

(i) $A = \Phi^{-1}S\Phi$ *y* $\operatorname{dom}(S) = \Phi(\operatorname{dom}(A))$,

(ii) $\# = \Phi J \Phi^{-1}$,

(iii) si $S(\gamma)$ es una extensión autoadjunta canónica de S, entonces $\Phi^{-1}S(\gamma)\Phi$ es una extensión autoadjunta canónica de A.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H} \supset \operatorname{dom}(A) \arrow[r, "A"'] \arrow[d, "\Phi"'] & \operatorname{ran}(A) \subset \mathcal{H} \\
\widehat{\mathcal{H}} \supset \operatorname{dom}(S) \arrow[r, "S"] & \operatorname{ran}(S) \subset \widehat{\mathcal{H}} \arrow[u, "\Phi^{-1}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{H} \arrow[r, "J"'] \arrow[d, "\Phi"'] & \mathcal{H} \\
\widehat{\mathcal{H}} \arrow[r, "\#"] & \widehat{\mathcal{H}} \arrow[u, "\Phi^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

Capítulo 2

Muestreo analítico en espacios dB

A continuación establecemos fórmulas de muestreo analíticas para los espacios dB originados a partir de operadores en la clase $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ (Definición 1.2.13). Esto se lleva a cabo mediante el modelo funcional desarrollado en el Capítulo 1. En la Sección 2.1 establecemos una generalización del Teorema de Muestreo de Whittaker-Shannon-Kotel'nikov [28, Tma. 7.2.2], mientras que en la Sección 2.2 abordamos los espacios dB generados a partir del operador regular de Schrödinger. En la Subsección 2.2.1 se estudian propiedades estructurales particulares de estos espacios.

2.1 Fórmulas ortogonales tipo Kramer

Teorema 2.1.1. **[36, Prop. 1].** *Sea $A \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$. Conserve la notación del Teorema 1.4.2. Fije cualquier extensión autoadjunta canónica A_γ de A. Entonces, para todo $f \in \widehat{\mathcal{H}}$,*

$$f(z) = \sum_{t\in\operatorname{spec}(A_\gamma)} f(t)\frac{\langle \xi(\overline{z}), \xi(t)\rangle}{\|\xi(t)\|^2} = \sum_{t\in\operatorname{spec}(A_\gamma)} f(t)\frac{k(z,t)}{k(t,t)}, \qquad z\in\mathbb{C},$$

donde la serie converge en la norma de $\widehat{\mathcal{H}}$. En consecuencia, la serie converge uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$.

Demostración. Sea $t \in \operatorname{spec}(A_\gamma)$ y $\psi \in \ker(A_\gamma - tI) \subset \ker(A^* - tI)$. Por la propiedad (P2), $\xi(t) \in \ker(A^* - tI)$. Además, debido a la Definición 1.2.13, $\dim\big(\ker(A^* - tI)\big) = 1$. Así, existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\psi = \alpha\xi(t)$. Esto implica que $\xi(t)$ es un vector propio de A_γ asociado a t. De esta forma, el Teorema Espectral [17, Tma. 1.1] nos garantiza que la sucesión $\{\xi(t)\}_{t\in\operatorname{spec}(A_\gamma)}$ es una base para $\mathcal{H}$. Entonces, para cada $\varphi \in \mathcal{H}$,

$$\varphi = \sum_{t\in\operatorname{spec}(A_\gamma)} \frac{\langle \xi(t), \varphi\rangle}{\|\xi(t)\|^2}\, \xi(t)\,, \tag{2.1}$$

donde la serie converge en la norma de $\mathcal{H}$. Ahora, en vista de (1.36), existe $\varphi \in \mathcal{H}$ tal que $f(z) = \langle \xi(\overline{z}), \varphi\rangle$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\left| \langle \xi(\overline{z}), \varphi\rangle - \sum_{t\in\operatorname{spec}(A_\gamma)} \frac{\langle \xi(\overline{z}), \xi(t)\rangle}{\|\xi(t)\|^2} \langle \xi(t), \varphi\rangle \right| \le \|\xi(\overline{z})\| \left\| \varphi - \sum_{t\in\operatorname{spec}(A_\gamma)} \frac{\langle \xi(t), \varphi\rangle}{\|\xi(t)\|^2} \xi(t) \right\|.$$

Note que, por la Proposición 1.4.1, $\xi : \mathbb{C} \to \mathcal{H}$ es acotada en compactos de $\mathbb{C}$. Además, en vista de (2.1), el último factor es igual a cero. □

A continuación veremos que el Teorema de Muestreo de Whittaker-Shannon-Kotel'nikov [28, Tma. 7.2.2] es una instancia particular del Teorema 2.1.1. Sean $0 < a < b < +\infty$. Denotamos mediante $C(a, b)$ al conjunto de todas las funciones continuas del intervalo (a, b) en $\mathbb{C}$. Decimos que $g \in L_1^{loc}(a, b)$ si $g \in L_1(K)$ para cualquier compacto $K \subset (a, b)$. El conjunto de todas las funciones absolutamente continuas en (a, b) es,

$$\operatorname{AC}(a, b) = \{f \in C(a, b) \,:\, f(x) = f(c) + \int_c^x g(t)dt, \quad c \in (a, b), \quad g \in L_1^{loc}(a, b)\}. \tag{2.2}$$

Considere la expresión diferencial

$$\widetilde{\tau} = \mathrm{i}\frac{d}{dx}.$$

Definimos un operador A en el espacio $L_2(-a, a)$ mediante,

$$\operatorname{dom}(A) = \{\varphi \in \operatorname{AC}(-a, a) \,:\, \varphi(a) = \varphi(-a) = 0\}, \qquad A := \widetilde{\tau}. \tag{2.3}$$

De esta forma, A es cerrado y simétrico [2, Sec. 49]. Además,

$$\operatorname{dom}(A^*) = \operatorname{AC}(-a, a), \qquad A^* := \widetilde{\tau}.$$

En vista de (1.10), los índices de deficiencia de A son $(1, 1)$ [5, Sec. 4.8]. De acuerdo con [40, Sec. 5.2], las extensiones autoadjuntas canónicas de A están parametrizadas de la siguiente forma,

$$\operatorname{dom}(A_\gamma) = \left\{\varphi \in \operatorname{AC}(-a, a) \,:\, \varphi(a) = \varphi(-a)e^{-\mathrm{i}2\gamma}\right\}, \qquad A_\gamma := \widetilde{\tau}, \qquad \gamma \in [0, \pi).$$

Además,

$$\operatorname{spec}\left(A_\gamma\right) = \left\{\frac{\gamma + n\pi}{a} \,:\, n \in \mathbb{Z}\right\}, \qquad \gamma \in [0, \pi). \tag{2.4}$$

Los elementos de los espectros de cada una de las extensiones autoadjuntas canónicas de A están entrelazados por pares y su unión coincide con $\mathbb{R}$, por lo que A es un operador regular (Definición 1.2.12). Por lo tanto $A \in \mathcal{S}\big(L_2(-a,a)\big)$. Considere la involución $J : L_2(-a,a) \to L_2(-a,a)$, $\varphi \mapsto \overline{\varphi(-x)}$. La función $\xi(x,z) := e^{-\mathrm{i}zx}$, $x \in (-a,a)$, $z \in \mathbb{C}$, satisface las propiedades (P1)-(P3) listadas en la Proposición 1.4.1. Así, por el Teorema 1.4.2, el espacio

$$\mathcal{PW}_a = \left\{ f(z) = \int_{-a}^{a} e^{-ixz}\varphi(x)dx : \varphi \in L_2(-a,a) \right\}$$

es isométricamente isomorfo a $L_2(-a,a)$. En vista de (2.4), $\left\{\lambda_n := \frac{n\pi}{a} \,:\, n \in \mathbb{Z}\right\}$ es el espectro de la extensión autoadjunta de A que corresponde a $\gamma = 0$. Mediante un cálculo directo,

$$\frac{k(z,\lambda_n)}{k(\lambda_n,\lambda_n)} = \frac{\sin(az - n\pi)}{az - n\pi}, \qquad z \notin \operatorname{spec}\left(A_0\right), \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Aplicando el Teorema 2.1.1 obtenemos que cualquier $f \in \mathcal{PW}_a$ admite la representación,

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f\left(\tfrac{n\pi}{a}\right) \frac{\sin(az - n\pi)}{az - n\pi},$$

donde la serie converge uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$. Por lo tanto, hemos demostrado el Teorema de Muestreo de Whittaker-Shannon-Kotel'nikov [28, Tma. 7.2.2] aplicando el modelo funcional desarrollado en el Capítulo 1 y el Teorema 2.1.1.

2.2 Operador regular de Schrödinger

Considere una expresión diferencial de la forma

$$\tau = \tau_V := -\frac{d^2}{dx^2} + V(x). \tag{2.5}$$

En lo que resta de este capítulo asumiremos que

(v1) V toma valores reales y pertenece a $V \in L_1(0,s)$ para cualquier $0 < s < +\infty$.

Para cada $s > 0$, la expresión τ determina un operador cerrado y simétrico A_s en $L_2(0,s)$,

$$\operatorname{dom}(A_s) := \{\varphi \in L_2(0,s) \,:\, \tau\varphi \in L_2(0,s),\ \varphi'(0) = \varphi(s) = \varphi'(s) = 0\}, \qquad A_s\varphi := \tau\varphi. \tag{2.6}$$

A diferencia de (2.3), ahora señalamos la dependencia de este operador con el valor de s. El operador A_s tiene índices de deficiencia $(1,1)$ y es regular, es decir,

$$\{z \in \mathbb{C} : \text{existe } C_z > 0 \text{ tal que } \|(A_s - zI)\varphi\| \geq C_z \|\varphi\|\} = \mathbb{C}.$$

De acuerdo con [48, Sec. 8.4], las extensiones autoadjuntas de A_s están dadas por

$$\begin{gathered} \operatorname{dom}(A_s(\gamma)) := \{\varphi \in L_2(0,s) \,:\, \tau\varphi \in L_2(0,s),\ \varphi'(0) = \varphi(s)\cos\gamma + \varphi'(s)\sin\gamma = 0\}, \\ A_s(\gamma)\,\varphi := \tau\varphi, \end{gathered} \tag{2.7}$$

con $\gamma \in [0,\pi)$. Además, el operador adjunto de A_s es

$$\operatorname{dom}(A_s^*) := \{\varphi \in L_2(0,s) \,:\, \tau\varphi \in L_2(0,s)\,,\ \varphi'(0) = 0\}, \qquad A_s^*\varphi := \tau\varphi.$$

Por lo tanto $A \in \mathcal{S}(L_2(0,s))$. Sea $\xi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la solución del problema

$$\tau\xi(x,z) = z\xi(x,z), \quad \xi(0,z) = 1, \quad \xi'(0,z) = 0, \tag{2.8}$$

(la derivada se toma con respecto al primer argumento). Note que $\xi(x,\overline{z}) = \overline{\xi(x,z)}$. La función $\xi(x,z)$ es entera para cualquier $x \in \mathbb{R}_+$ fijo [25, Tma. 1.1.1], [43, Tma. 9.1]. Además $\xi(x,z) \in L_2(0,s)$ para cualquier $z \in \mathbb{C}$ fijo. Usando [40, Sec. 4] se establece que $\xi(x,z)$ es entera como una función que toma valores en $L_2(0,s)$. Es importante señalar que $\xi(x,z)$ depende del potencial V pero no depende del valor de s. Considere la involución $J : L_2(0,s) \to L_2(0,s)$, $\varphi(x) \mapsto \overline{\varphi(x)}$. De esta forma, la función $\xi(x,z)$ satisface las propiedades (P1)-(P3) de la Proposición 1.4.1. Por el Teorema 1.4.2, la regla de correspondencia

$$(\Phi_s\varphi)(z) = \langle \xi(\cdot,\overline{z}), \varphi \rangle_{L_2(0,s)}, \qquad \varphi \in L_2(0,s), \qquad z \in \mathbb{C}, \tag{2.9}$$

determina una isometría entre $L_2(0,s)$ y un espacio dB

$$\mathcal{B}_s := \left\{ f(z) = \int_0^s \xi(x,z)\varphi(x)dx \,:\, \varphi \in L_2(0,s) \right\}. \tag{2.10}$$

La norma de este espacio está dada por

$$\|f\|_{\mathcal{B}_s} = \|\varphi\|_{L_2(0,s)} \,. \tag{2.11}$$

De acuerdo con (1.38), el núcleo reproductor de $\mathcal{B}_s$ es

$$k_s(z,w) = \langle \xi(\cdot,\overline{z}), \xi(\cdot,\overline{w})\rangle_{L_2(0,s)} \,, \qquad w,\, z \in \mathbb{C}. \tag{2.12}$$

En vista de (2.1), si $A_s(\gamma)$ una extensión autoadjunta canónica de A_s entonces,

$$\varphi(x) = \sum_{t\in\operatorname{spec}(A_s(\gamma))} \frac{1}{\|\xi(\cdot,t)\|^2_{L_2(0,s)}} \langle \xi(\cdot,t), \varphi\rangle_{L_2(0,s)} \xi(x,t), \qquad \varphi \in L_2(0,s), \tag{2.13}$$

donde la serie converge en la norma de $L_2(0,s)$. Además, en vista del Teorema 2.1.1,

$$f(z) = \sum_{t\in\operatorname{spec}(A_s(\gamma))} f(t)\frac{k_s(z,t)}{k_s(t,t)}, \qquad f \in \mathcal{B}_s, \qquad z \in \mathbb{C}, \tag{2.14}$$

donde la serie converge uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$.

A continuación determinamos una función Hermite-Biehler que genera al espacio $\mathcal{B}_s$ (Teorema 1.3.2). Sea

$$e(z) := \sqrt{\pi}\,(\xi(s,z) + \mathrm{i}\xi'(s,z))\,.$$

Para cualesquiera $z,\, w \in \mathbb{C}$,

$$2\mathrm{i}\pi\,(\xi'(s,z)\xi(s,\overline{w}) - \xi(s,z)\xi'(s,\overline{w})) = e(z)\overline{e(w)} - \overline{e(\overline{z})}e(\overline{w}). \tag{2.15}$$

Por la identidad de Green,

$$\int_0^s \left(\overline{(\tau\varphi)}\psi - \overline{\varphi}\tau\psi\right) = \left(\overline{\varphi(x)}\psi'(x) - \overline{\varphi'(x)}\psi(x)\right)\Big|_{x=0}^{x=s}.$$

De esta forma,

$$(\overline{w} - z)\int_0^s \overline{\xi(x,w)}\xi(x,z)dx = \left(\overline{\xi(x,w)}\xi'(x,z) - \overline{\xi'(x,w)}\xi(x,z)\right)\Big|_{x=0}^{x=s}. \tag{2.16}$$

En vista de (2.15) y (2.16),

$$2\mathrm{i}\pi(\overline{w} - z)\int_0^s \overline{\xi(x,w)}\xi(x,z)dx = e(z)\overline{e(w)} - \overline{e(\overline{z})}e(\overline{w}), \qquad z,\, w \in \mathbb{C}. \tag{2.17}$$

Ahora fije $z \in \mathbb{C}^+$. Sustituyendo $z = w$ en (2.17), $0 < 4\pi \operatorname{Im}(z) \int_0^s |\xi(x,z)|^2 \, dx = |e(z)|^2 - |e(\overline{z})|^2$. Por lo tanto $|e(\overline{z})| < |e(z)|$ para todo $z \in \mathbb{C}^+$. Esto muestra que $e(z)$ es una función HB. Debido a (2.17) y al Teorema 1.3.2, el núcleo reproductor del espacio dB generado por $e(z)$ es

$$k_{\mathcal{B}(e)}(z,w) = \langle \xi(\cdot,w), \xi(\cdot,z) \rangle_{L_2(0,s)} = \langle \xi(\cdot,\overline{z}), \xi(\cdot,\overline{w}) \rangle_{L_2(0,s)} \, .$$

En vista de (2.12) y de la ecuación anterior, los espacios $\mathcal{B}(e)$ y $\mathcal{B}_s$ coinciden.

Teorema 2.2.1. [32, Tma. 3.2]. *Si $0 < r \le s$, entonces $\mathcal{B}_r$ está isométricamente contenido en $\mathcal{B}_s$, es decir, $\mathcal{B}_r \subset \mathcal{B}_s$ y $\|f\|_{\mathcal{B}_r} = \|f\|_{\mathcal{B}_s}$ para todo $f \in \mathcal{B}_r$.*

Demostración. Sean $\Phi_r : L_2(0,r) \to \mathcal{B}_r$ y $\Phi_s : L_2(0,s) \to \mathcal{B}_s$ las isometrías dadas por (1.36). Cada $\varphi \in L_2(0,r)$ induce una única función $\widetilde{\varphi} \in L_2(0,s)$ definida mediante,

$$\widetilde{\varphi}(x) := \varphi(x)\chi_{[0,r]}(x) + 0\, \chi_{(r,s]}(x) \, , \qquad x \in [0,s] \, , \tag{2.18}$$

donde χ_E denota la función característica de un conjunto E. Además $\|\varphi\|_{L_2(0,r)} = \|\widetilde{\varphi}\|_{L_2(0,s)}$. En vista de (2.18) y (1.36),

$$(\Phi_r\varphi)(z) = \int_0^r \xi(x,z)\varphi(x)dx = \int_0^s \xi(x,z)\widetilde{\varphi}(x)dx = (\Phi_s\varphi)(z) \in \mathcal{B}_s. \qquad \square$$

2.2.1 Propiedades estructurales particulares

De acuerdo con (2.10) y (2.11), la expresión diferencial (2.5) determina un espacio de de Branges $(\mathcal{B}_s, \langle \cdot,\cdot \rangle_{\mathcal{B}_s})$ isométricamente isomorfo a $L_2(0,s)$, donde $0 < s < \infty$. El siguiente resultado establece que, como conjunto, $\mathcal{B}_s$ no depende del potencial V.

Teorema 2.2.2. [32, Tma. 4.1]. *Como conjunto, $\mathcal{B}_s$ está dado por*

$$\mathcal{B}_s = \left\{ f(z) = \int_0^s \varphi(x) \cos(\sqrt{z}\, x) dx \ : \ \varphi \in L_2(0,s) \right\}.$$

Debido a (2.8), cuando $V \equiv 0$ tenemos que $\xi(x,z) = \cos(\sqrt{z}\, x)$. Así, (2.10) y el Teorema 2.2.2 implican que, mediante el modelo funcional descrito en el Capítulo 1, los operadores regulares de Schrödinger originan el mismo conjunto de funciones enteras. En vista del Teorema 2.1.1, para cualquier $f \in \left\{ \int_0^s \varphi(x) \cos(\sqrt{z}\, x) dx \ : \ \varphi \in L_2(0,s) \right\}$,

$$f(z) = \sum_{t \in \operatorname{spec}(A_s(\gamma))} f(t) \frac{k_s(z,t)}{k_s(t,t)}, \qquad z \in \mathbb{C}, \tag{2.19}$$

donde k_s es el núcleo reproductor del espacio $\mathcal{B}_s$ y $A_s(\gamma)$ es cualquier extensión autoadjunta del operador A_s (ver (2.6), (2.7), (2.12)). De acuerdo con (2.11), el producto interno en cada uno de los espacios $\mathcal{B}_s$ depende del potencial V. Sin embargo, en [32, Tma. 4.2] se demuestra una fórmula que relaciona estos productos internos. Dada una función $\phi : [-2s, 2s] \to \mathbb{R}$ continua y par, defina un operador integral $\mathcal{J}_\phi$ on $L_2(0, s)$ mediante

$$(\mathcal{J}_\phi \psi)(x) = \frac{1}{2} \int_0^s \big(\phi(x-y) + \phi(x+y)\big)\psi(y)dy. \tag{2.20}$$

El operador $\mathcal{J}_\phi$ es autoadjunto y compacto [5, pag. 242].

Teorema 2.2.3. **[32, Tma. 4.2].** *Suponga que V satisface* **(v1)**. *Sea $\mathcal{B}_s$ el correspondiente espacio dB dado por* (2.10) *y* (2.11). *Entonces, existe una función $\phi : [-2s, 2s] \to \mathbb{R}$ que es absolutamente continua, par, y satisface $\phi(0) = 0$, tal que para cualesquiera f, $g \in \mathcal{B}_s$,*

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{B}_s} = \langle \varphi, (1 + \mathcal{J}_\phi)\psi\rangle_{L_2(0,s)},$$

donde $\mathcal{J}_\phi$ está dada por (2.20) *y φ, $\psi \in L_2(0, s)$ satisfacen $f(z) = \int_0^s \cos(\sqrt{z}x)\varphi(x)dx$, $g(z) = \int_0^s \cos(\sqrt{z}x)\psi(x)dx$.*

Note que $1 + \mathcal{J}_\phi$ es invertible. En efecto, si existe $0 \neq \varphi \in L_2(0, s)$ tal que $(1 + \mathcal{J}_\phi)\varphi = 0$, entonces, por el Teorema 2.2.3,

$$\|f\|^2_{\mathcal{B}_s} = \langle \varphi, (1 + \mathcal{J}_\phi)\varphi\rangle_{L_2(0,s)} = 0, \quad \text{donde} \quad f(z) = \int_0^s \cos(\sqrt{z}x)\varphi(x)dx.$$

Esto contradice la elección de φ.

Proposición 2.2.4. *Suponga que V satisface* **(v1)**. *Sea $\mathcal{B}_s$ el correspondiente espacio dB dado por* (2.10) *y* (2.11). *Entonces, para cualesquiera z, $w \in \mathbb{C}$,*

$$k_s(z, w) = \big\langle \cos(\sqrt{\overline{z}}\,\cdot), (1 + \mathcal{J}_\phi)^{-1} \cos(\sqrt{\overline{w}}\,\cdot)\big\rangle_{L_2(0,s)} = \int_0^s \cos(\sqrt{z}x)(1 + \mathcal{J}_\phi)^{-1} \cos(\sqrt{\overline{w}}x)dx,$$

donde $k_s(z, w)$ es el núcleo reproductor de $\mathcal{B}_s$ y $\mathcal{J}_\phi$ es el operador del Teorema 2.2.3.

Demostración. Sean $f \in \mathcal{B}_s$ y $w \in \mathbb{C}$. Entonces,

$$f(w) = \langle k_s(\cdot, w), f\rangle_{\mathcal{B}_s}. \tag{2.21}$$

Denote mediante $\mathring{\mathcal{B}}_s$ al espacio dB dado por (2.10) y (2.11) correspondiente al potencial $V \equiv 0$. Sea $\mathring{k}_s(z, w)$ el núcleo reproductor de $\mathring{\mathcal{B}}_s$. De acuerdo con el Teorema 2.2.2, $\mathcal{B}_s = \mathring{\mathcal{B}}_s$ como conjuntos. Por lo tanto,

$$f(w) = \left\langle \mathring{k}_s(\cdot, w), f \right\rangle_{\mathring{\mathcal{B}}_s}. \tag{2.22}$$

Debido a que $k_s(\cdot, w) \in \mathcal{B}_s = \mathring{\mathcal{B}}_s$, existe una única $\psi \in L_2(0, s)$ tal que

$$k_s(\cdot, w) = \mathring{\Phi}_s \psi, \tag{2.23}$$

donde $\mathring{\Phi}_s$ es la isometría dada por (2.9) correspondiente al potencial $V \equiv 0$. Sea $\varphi \in L_2(0, s)$ la única función que satisface $f = \mathring{\Phi}_s \varphi$. Por el Teorema 2.2.3,

$$\left\langle k_s(\cdot, w), f \right\rangle_{\mathcal{B}_s} = \left\langle \mathring{\Phi}_s \psi, \mathring{\Phi}_s \varphi \right\rangle_{\mathcal{B}_s} = \left\langle \psi, (1 + \mathcal{J}_\phi) \varphi \right\rangle_{L_2(0,s)}. \tag{2.24}$$

Debido a que el operador $1 + \mathcal{J}_\phi$ es autoadjunto,

$$\left\langle \psi, (1 + \mathcal{J}_\phi) \varphi \right\rangle_{L_2(0,s)} = \left\langle (1 + \mathcal{J}_\phi) \psi, \varphi \right\rangle_{L_2(0,s)}. \tag{2.25}$$

Por otra parte, (1.37) implica,

$$\left\langle (1 + \mathcal{J}_\phi) \psi, \varphi \right\rangle_{L_2(0,s)} = \left\langle \mathring{\Phi}_s (1 + \mathcal{J}_\phi) \psi, \mathring{\Phi}_s \varphi \right\rangle_{\mathring{\mathcal{B}}_s} = \left\langle \mathring{\Phi}_s (1 + \mathcal{J}_\phi) \psi, f \right\rangle_{\mathring{\mathcal{B}}_s}. \tag{2.26}$$

Use (2.24)-(2.26) para obtener,

$$\left\langle k_s(\cdot, w), f \right\rangle_{\mathcal{B}_s} = \left\langle \mathring{\Phi}_s (1 + \mathcal{J}_\phi) \psi, f \right\rangle_{\mathring{\mathcal{B}}_s}. \tag{2.27}$$

Así, en vista de (2.21), (2.22) y (2.27),

$$\left\langle \mathring{k}_s(\cdot, w), f \right\rangle_{\mathring{\mathcal{B}}_s} = \left\langle \mathring{\Phi}_s (1 + \mathcal{J}_\phi) \psi, f \right\rangle_{\mathring{\mathcal{B}}_s}, \qquad f \in \mathcal{B}_s = \mathring{\mathcal{B}}_s. \tag{2.28}$$

Entonces, por (2.23),

$$\mathring{k}_s(\cdot, w) = \mathring{\Phi}_s (1 + \mathcal{J}_\phi) \mathring{\Phi}_s^{-1} k_s(\cdot, w).$$

Aprovechando la invertibilidad de los operadores $\mathring{\Phi}_s$ y $1 + \mathcal{J}_\phi$,

$$k_s(\cdot, w) = \mathring{\Phi}_s (1 + \mathcal{J}_\phi)^{-1} \mathring{\Phi}_s^{-1} \mathring{k}_s(\cdot, w).$$

Por otra parte, (1.36) implica $\mathring{k}_s(\cdot, w) = \mathring{\Phi}_s \cos(\sqrt{w}\,\cdot)$. Así,

$$k_s(\cdot, w) = \mathring{\Phi}_s (1 + \mathcal{J}_\phi)^{-1} \cos(\sqrt{w}\,\cdot). \qquad \square$$

El siguiente resultado es una consecuencia directa de la fórmula de muestreo (2.19) y de la Proposición 2.2.4.

Teorema 2.2.5. *Suponga que V satisface* **(v1)**. *Entonces,*

$$f(z) = \sum_{t\in \operatorname{spec}(A_s(\gamma))} f(t) \frac{\left\langle \cos(\sqrt{\overline{z}}\,\cdot), (1+\mathcal{J}_\phi)^{-1}\cos(\sqrt{t}\,\cdot)\right\rangle}{\left\langle \cos(\sqrt{t}\,\cdot), (1+\mathcal{J}_\phi)^{-1}\cos(\sqrt{t}\,\cdot)\right\rangle}, \qquad z\in\mathbb{C},$$

para cualquier $f \in \left\{\int_0^s \varphi(x)\cos(\sqrt{z}\,x)dx \,:\, \varphi\in L_2(0,s)\right\}$, donde $A_s(\gamma)$ es uno de los operadores autoadjuntos dados por (2.7) y $\mathcal{J}_\phi$ es el operador en el Teorema 2.2.3. Esta serie converge uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$.

Capítulo 3

Sobremuestreo

3.1 Introducción

Fije cualquier real $s > 0$ y un potencial V que satisface **(v1)**. En la Sección 2.2 se definió un operador en $L_2(0,s)$ que denotamos mediante A_s. De acuerdo con (2.7), las extensiones autoadjuntas de A_s están parametrizada por $\gamma \in [0,\pi)$. En este trabajo consideramos condiciones de frontera tipo Neumann, por ello asignaremos el valor $\gamma = \frac{\pi}{2}$. Así,

$$\operatorname{dom}\left(A_s\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right) = \{\varphi \in L_2(0,s) : \tau\varphi \in L_2(0,s)\,, \varphi'(0) = \varphi'(s) = 0\}\ , \tag{3.1}$$

(denotaremos mediante $\mathring{A}_s$ al operador correspondiente a $V \equiv 0$). Cuando $V \equiv 0$, la función $\xi(x,z)$ introducida en (2.8) es

$$\xi(x,z) = \cos\left(\sqrt{z}\,x\right)\ , \qquad x \in \mathbb{R}_+\,, \qquad z \in \mathbb{C}\,. \tag{3.2}$$

Note que $\xi'(s,z) = -\sqrt{z}\sin(\sqrt{z}\,s) = 0$ precisamente cuando $\sqrt{z} = \frac{n\pi}{s}$ para algún $n \in \mathbb{Z}$. Así,

$$\operatorname{spec}\left(\mathring{A}_s\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right) = \left\{\left(\tfrac{n\pi}{s}\right)^2\ :\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}\,. \tag{3.3}$$

La distancia entre dos valores propios consecutivos es $(2n-1)\left(\frac{\pi}{s}\right)^2$, $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, si $0 < a < b$ entonces, $\operatorname{spec}\left(\mathring{A}_b\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ es más denso que $\operatorname{spec}\left(\mathring{A}_a\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$. Podemos considerar esto como una analogía al comportamiento de los puntos de muestreo del Teorema WSK en relación con la amplitud de banda de las señales (ver fórmula (2)).

Ahora analizamos el comportamiento del espectro del operador $A_s\left(\frac{\pi}{2}\right)$ en relación con el valor de s. Sabemos que $\operatorname{spec}\left(A_s\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ está contenido en $\mathbb{R}$ y consta de valores propios aislados de multiplicidad uno. Sea $\operatorname{spec}\left(A_s\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \{\lambda_s(n)\}_{n=0}^{\infty}$, donde $\lambda_s(n-1) \leq \lambda_s(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. El comportamiento asintótico de los puntos $\lambda_s(n)$ cuando n es suficientemente grande nos brinda información útil. De acuerdo con el Lema B.1.1(i), si $V \in \mathrm{AC}[0,s]$ entonces,

$$\sqrt{\lambda_s(n)} = \tfrac{n\pi}{s} + \mathcal{O}(n^{-1}), \quad n \to \infty . \tag{3.4}$$

Por (3.4), $\operatorname{spec}\left(A_b\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ es más denso que $\operatorname{spec}\left(A_a\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ siempre que $V \in \mathrm{AC}[0,b]$.

Ahora bien, en vista de (3.2) y (3.3), el conjunto de funciones propias

$$\left\{\cos\left(\tfrac{n\pi}{s}x\right) \,:\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}$$

constituye una base para $L_2(0,s)$. Si $n \neq 0$ entonces,

$$\int_0^s \cos^2\left(\tfrac{n\pi}{s}x\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^s \left(1 + \cos\left(\tfrac{2n\pi}{s}x\right)\right) dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{s}{2n\pi}\sin\left(\tfrac{2n\pi}{s}x\right)\right)\Big|_{x=0}^{x=s} .$$

Por lo tanto,

$$\left\|\cos\left(\tfrac{n\pi}{s}x\right)\right\|_{L_2(0,s)}^2 = \frac{s}{2}, \qquad n \in \mathbb{N} . \tag{3.5}$$

Cuando $0 < a < b < \infty$, el espacio $L_2(0,a)$ está isométricamente contenido en $L_2(0,b)$. En efecto, cada $\varphi \in L_2(0,a)$ induce una única función $\widetilde{\varphi} \in L_2(0,b)$ mediante la regla de correspondencia

$$\widetilde{\varphi}(x) := \varphi(x)\chi_{[0,a]}(x) + 0\,\chi_{(a,b]}(x), \qquad x \in [0,b], \tag{3.6}$$

donde χ_E denota la función característica de un conjunto E. A lo largo de este capítulo identificaremos φ con $\widetilde{\varphi}$. Empleando (2.13) con $s = b$ se obtiene,

$$\varphi(x) = \sum_{t \in \operatorname{spec}(A_b(\gamma))} \frac{1}{k_b(t,t)} \left\langle \xi(\cdot,t), \varphi(\cdot)\right\rangle_{L_2(0,b)} \xi(x,t), \tag{3.7}$$

donde la serie converge en la norma de $L_2(0,b)$. Considere

$$\mathcal{R}(x) = \mathcal{R}_{ab}(x) := \chi_{[0,a]}(x) + \frac{b-x}{b-a}\chi_{(a,b]}(x), \qquad x \in [0,b] . \tag{3.8}$$

Las ecuaciones (3.6) y (3.8) implican $\varphi(x) = \varphi(x)\mathcal{R}(x)$. Así, de acuerdo con (3.7),

$$\varphi(x) = (\varphi\mathcal{R})(x) = \sum_{t \in \operatorname{spec}(A_b(\gamma))} \frac{1}{k_b(t,t)} \left\langle \xi(\cdot,t), \varphi(\cdot)\right\rangle_{L_2(0,b)} \mathcal{R}(x)\,\xi(x,t) . \tag{3.9}$$

La serie anterior converge en la norma de $L_2(0,b)$. Denote mediante f a la imagen de φ bajo la isometría (2.9) con $s=b$. Entonces

$$f(z) = \langle \xi(\cdot,\overline{z}), \varphi(\cdot) \rangle_{L_2(0,b)}\,, \qquad z \in \mathbb{C}\,. \tag{3.10}$$

Haciendo uso de (3.10), la ecuación (3.9) se expresa de la siguiente forma,

$$\varphi(x) = \sum_{t \in \operatorname{spec}(A_b(\gamma))} \frac{f(t)}{k_b(t,t)} \mathcal{R}(x)\, \xi(x,t)\,, \tag{3.11}$$

la serie converge en la norma de $L_2(0,b)$. Insertando el lado derecho de (3.11) en (3.10),

$$f(z) = \sum_{t \in \operatorname{spec}(A_b(\gamma))} f(t) \widetilde{\mathcal{K}}_{ab}(z,t), \qquad \widetilde{\mathcal{K}}_{ab}(z,t) := \frac{1}{k_b(t,t)} \langle \xi(\cdot,\overline{z}), \mathcal{R}_{ab}(\cdot)\, \xi(\cdot,t) \rangle_{L_2(0,b)}\,. \tag{3.12}$$

La serie en (3.12) converge uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$.

(Q1) Sea $\epsilon = \{\epsilon_t \,:\, t \in \operatorname{spec}(A_b(\gamma))\} \subset \mathbb{R}$ una sucesión acotada.

¿Qué características de V permiten demostrar que la serie

$$\widetilde{f}(z) := \sum_{t \in \operatorname{spec}(A_b(\gamma))} \widetilde{\mathcal{K}}_{ab}(z,t) \big(f(t) + \epsilon_t\big), \tag{3.13}$$

converge uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$?

Damos respuesta a la pregunta en **(Q1)** determinando condiciones que garantizan la veracidad de la siguiente hipótesis.

Hipótesis 3.1.1. Dados $0 < a < b < \infty$, la serie

$$\sum_{t \in \operatorname{spec}(A_b(\gamma))} \frac{1}{k_b(t,t)} \left| \langle \xi(\cdot,\overline{z}), \mathcal{R}_{ab}(\cdot)\, \xi(\cdot,t) \rangle_{L_2(0,b)} \right|, \qquad z \in \mathbb{C}\,, \tag{3.14}$$

converge uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$.

En efecto, cuando la Hipótesis 3.1.1 es cierta, la función $\widetilde{f}(z)$ en **(Q1)** tiene las características deseadas (*cf.* (3.12)). Además, para todo $z \in \mathbb{C}$,

$$\left| \widetilde{f}(z) - f(z) \right| \le \|\epsilon\|_\infty \sum_{t \in \operatorname{spec}(A_b(\gamma))} \frac{1}{k_b(t,t)} \left| \langle \xi(\cdot,\overline{z}), \mathcal{R}(\cdot)\, \xi(\cdot,t) \rangle_{L_2(0,b)} \right| .$$

Por lo tanto, la diferencia $|\widetilde{f}(z) - f(z)|$ está acotada uniformemente en compactos de $\mathbb{C}$.

Observación 3. Empleando la fórmula (2.14) con $s = a$ podemos reconstruir completamente cualquier $f \in \mathcal{B}_a$ mediante los valores que toma en $\operatorname{spec}(A_a(\gamma))$, es decir,

$$f(z) = \sum_{t \in \operatorname{spec}(A_a(\gamma))} f(t) \frac{k_a(z,t)}{k_a(t,t)}\,, \qquad z \in \mathbb{C}\,,$$

donde la convergencia es uniforme en compactos de $\mathbb{C}$. Esta expresión sólo es estable bajo perturbaciones de tipo ℓ_2 en los datos $\{f(t) \,:\, t \in \operatorname{spec}(A_a(\gamma))\}$. Por otra parte, cuando la Hipótesis 3.1.1 es verdadera, la convergencia de la fórmula (3.12) no se altera bajo perturbaciones de tipo ℓ_∞ en los datos $\{f(t) \,:\, t \in \operatorname{spec}(A_b(\gamma))\}$. En este sentido, la fórmula (3.12) es más robusta. Note que, por lo expuesto en la introducción de este capítulo, la fórmula (3.12) reconstruye $f \in \mathcal{B}_a$ mediante sus valores en un conjunto más denso que $\operatorname{spec}(A_a(\gamma))$.

A continuación demostraremos que la Hipótesis 3.1.1 es verdadera cuando

(v2) $V \in \mathrm{AC}[0,b]$ (por lo tanto satisface **(v1)** para $s \le b$).

Primer abordamos el caso $V \equiv 0$, después empleamos métodos perturbativos para atacar el caso general. De acuerdo con (2.7), el operador $A_b(\gamma)$ mencionado en la Hipótesis 3.1.1 depende de b y γ. A lo largo de este capítulo asignamos $\gamma = \frac{\pi}{2}$. Denotaremos $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L_2(0,b)}$ mediante $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

3.2 Sobremuestreo: caso sin potencial

En (3.2) hemos establecido que si $V \equiv 0$ entonces $\xi(x,z) = \cos(\sqrt{z}\,x)$, $x \in \mathbb{R}_+$, $z \in \mathbb{C}$. Cada vez que hagamos referencia a la función ξ que corresponde a $V \equiv 0$, escribiremos el lado derecho de la ecuación anterior. La letra ξ será empleada en el caso $V \not\equiv 0$. De acuerdo con (3.3),

$$\operatorname{spec}\left(\mathring{A}_b\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right) = \left\{\left(\tfrac{n\pi}{b}\right)^2 \,:\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}. \tag{3.15}$$

Además, en vista de (3.5), el núcleo reproductor $\mathring{k}_b(z,w)$ correspondiente a $V \equiv 0$ satisface

$$\left\|\cos\left(\tfrac{n\pi}{b}x\right)\right\|^2_{L_2(0,s)} = \frac{b}{2}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3.16}$$

Proposición 3.2.1. *Cuando $V \equiv 0$ y $\gamma = \frac{\pi}{2}$, la Hipótesis 3.1.1 es verdadera.*

Demostración. Sea K un subconjunto compacto arbitrario de $\mathbb{C}$. Suponga que $\operatorname{spec}\left(\mathring{A}_b\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ intersecta a K sólamente en $\left(\frac{n_0\pi}{b}\right)^2$, donde $n_0 \in \mathbb{N}$. Al final de la demostración veremos que no hay pérdida de generalidad al suponer esto. Note que la función $\left|\left\langle\cos\left(\sqrt{\overline{z}}\,\cdot\right),\mathcal{R}(\cdot)\cos\left(\frac{n_0\pi}{b}\,\cdot\right)\right\rangle\right|$ está acotada uniformemente en K. Esto se sigue de la desigualdad de Cauchy-Schwarz (el factor que depende de z es continuo en K). Por otra parte, el Lema A.1.8 implica

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\neq n_0}\left|\left\langle\cos\left(\sqrt{\overline{z}}\,\cdot\right),\mathcal{R}(\cdot)\cos\left(\tfrac{n_0\pi}{b}\,\cdot\right)\right\rangle\right| \\
&=\frac{1}{2(b-a)}\sum_{n\neq n_0}\left|\frac{\cos\left(\left(\sqrt{z}+\frac{n\pi}{b}\right)a\right)-(-1)^n\cos(\sqrt{z}b)}{\left(\sqrt{z}+\frac{n\pi}{b}\right)^2}+\frac{\cos\left(\left(\sqrt{z}-\frac{n\pi}{b}\right)a\right)-(-1)^n\cos(\sqrt{z}b)}{\left(\sqrt{z}-\frac{n\pi}{b}\right)^2}\right| \\
&\leq\frac{e^{b\left|\operatorname{Im}\sqrt{z}\right|}}{(b-a)}\sum_{n\neq n_0}\left(\frac{1}{\left|\sqrt{z}+\frac{n\pi}{b}\right|^2}+\frac{1}{\left|\sqrt{z}-\frac{n\pi}{b}\right|^2}\right).
\end{aligned}$$

Entonces, considerando (3.16), la serie (3.14) converge uniformemente en K. □

3.3 Sobremuestreo: caso general

En esta sección demostraremos que la Hipótesis 3.1.1 es verdadera cuando el potencial V satisface **(v2)**. Como hicimos anteriormente, asignamos el valor $\gamma=\frac{\pi}{2}$. Además denotamos $\operatorname{spec}\left(A_b\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ donde $\lambda_{n-1}\leq\lambda_n$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

Definición 3.3.1. Para cada $x\in[0,b]$, $n\in\mathbb{N}$, $z\in\mathbb{C}$, considere

$$\begin{gathered}
\rho(x):=\frac{1}{2}\int_0^x V(y)dy-\frac{\pi}{2b^2}\left(\int_0^b V(y)dy\right)x\,, \\
T(x,n):=\xi(x,\lambda_n)-\cos\left(\tfrac{n\pi}{b}x\right)-\frac{b}{n\pi}\rho(x)\sin\left(\tfrac{n\pi}{b}x\right)\,, \\
F(x,z):=\xi(x,z)-\cos\left(\sqrt{z}\,x\right)\,.
\end{gathered}$$

Lema 3.3.2. *Suponga que V satisface* **(v2)**. *Entonces, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que si $n\geq N$, entonces*

$$\left|\langle\xi(\cdot,\overline{z}),\mathcal{R}(\cdot)\xi(\cdot,\lambda_n)\rangle-\left\langle\cos\left(\sqrt{\overline{z}}\,\cdot\right),\mathcal{R}(\cdot)\cos\left(\tfrac{n\pi}{b}\,\cdot\right)\right\rangle\right|\leq\widetilde{C}\frac{b}{\pi n^2}e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{z}\right|b}\left(D+\frac{1+|z|}{1+|z|^{1/2}b}\widetilde{D}\right),$$

para todo $z\in\mathbb{C}$. Las constantes $\widetilde{C}>0$, $D>0$, $\widetilde{D}>0$ dependen de V y b.

Demostración. En términos de las funciones introducidas en la Definición 3.3.1,

$$\begin{aligned}
&\langle \xi(\cdot,\overline{z}), \mathcal{R}(\cdot)\xi(\cdot,\lambda_n)\rangle \\
&= \int_0^b \left(\cos\left(\sqrt{z}\,x\right) + F(x,z)\right)\mathcal{R}(x)\left(\cos\left(\tfrac{n\pi}{b}x\right) + \frac{b}{n\pi}\rho(x)\sin\left(\tfrac{n\pi}{b}x\right) + T(x,n)\right)dx\,.
\end{aligned}$$

De esta forma,

$$\begin{aligned}
&\langle \xi(\cdot,\overline{z}), \mathcal{R}(\cdot)\xi(\cdot,\lambda_n)\rangle - \left\langle \cos\left(\sqrt{\overline{z}}\,\cdot\right), \mathcal{R}(\cdot)\cos\left(\tfrac{n\pi}{b}\,\cdot\right)\right\rangle \\
&= \int_0^b \Big[F(x,z)\mathcal{R}(x)\frac{b}{n\pi}\rho(x)\sin\left(\tfrac{n\pi}{b}x\right) + \cos\left(\sqrt{z}x\right)\mathcal{R}(x)\frac{b}{n\pi}\rho(x)\sin\left(\tfrac{n\pi}{b}x\right) \\
&+ F(x,z)\mathcal{R}(x)\cos\left(\tfrac{n\pi}{b}x\right) + \cos\left(\sqrt{z}x\right)\mathcal{R}(x)T(x,n) + F(x,z)\mathcal{R}(x)T(x,n)\Big]dx. \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

Demostraremos que cada uno de los términos en el lado derecho de (3.17) está acotado apropiadamente. Para el primer término usamos las desigualdades en Lema A.1.5(ii) y Lema A.1.6(i). La cota para el segundo término se obtiene mediante las desigualdades en Lema A.1.5(iii) y Lema A.1.6(ii). El tercer término en el lado derecho de (3.17) es estimado en el Lema A.1.7.

Ahora acotamos el cuarto y quinto términos del lado derecho de (3.17). Por el Lema B.1.1(iii),

$$|T(x,n)| \leq \frac{D}{n^2}, \qquad D > 0, \qquad x \in [0,b],$$

para n suficientemente grande. Además, $|\mathcal{R}(x)| \leq 1$ de acuerdo con (3.8). Por lo tanto,

$$\left|\int_0^b T(x,n)\mathcal{R}(x)\cos(\sqrt{z}x)dx\right| \leq \frac{C_1}{n^2}\, e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{z}\right|b}, \qquad (3.18)$$

debido a que $|\cos(\sqrt{z}\,x)| \leq \exp(|\operatorname{Im}\sqrt{z}|\,b)$ para todo $x \in [0,b]$. Considerando (A.7), la cota para el término restante sigue un razonamiento similar,

$$\left|\int_0^b T(x,n)\mathcal{R}(x)F(x,z)dx\right| \leq \frac{C_2}{n^2}\frac{b^2}{\left(1 + b\,|z|^{1/2}\right)^2}\, e^{b\left|\operatorname{Im}\sqrt{z}\right|}. \qquad (3.19)$$

La cota del lema se obtiene combinando la estimación de los primeros tres términos, junto con (3.18) y (3.19). □

Proposición 3.3.3. *Suponga que V satisface* **(v2)**. *Si $\gamma = \frac{\pi}{2}$ entonces la Hipótesis 3.1.1 es cierta.*

Demostración. En vista del Lema B.1.1(iv),

$$k_b(\lambda_n,\lambda_n) - \mathring{k}_b\left(\left(\tfrac{n\pi}{b}\right)^2, \left(\tfrac{n\pi}{b}\right)^2\right) = \mathcal{O}(n^{-2}), \qquad n\to\infty.$$

Esto implica que

$$k_b(\lambda_n,\lambda_n) \geq \frac{\mathring{k}_b\left(\left(\tfrac{n\pi}{b}\right)^2, \left(\tfrac{n\pi}{b}\right)^2\right)}{2} = \frac{\pi}{4}$$

para n suficientemente grande, donde hemos usado (3.16). Entonces,

$$\left|\frac{1}{k_b(\lambda_n,\lambda_n)} - \frac{1}{\mathring{k}_b\left(\left(\tfrac{n\pi}{b}\right)^2, \left(\tfrac{n\pi}{b}\right)^2\right)}\right| = \frac{\left|k_b(\lambda_n,\lambda_n) - \frac{\pi}{2}\right|}{\frac{\pi}{2}k_b(\lambda_n,\lambda_n)} \leq \frac{8}{\pi^2}\left|k_b(\lambda_n,\lambda_n) - \frac{\pi}{2}\right|$$

para n suficientemente grande. Nuevamente por el Lema B.1.1(iv),

$$\frac{1}{k_b(\lambda_n,\lambda_n)} - \frac{1}{\mathring{k}_b\left(\left(\tfrac{n\pi}{b}\right)^2, \left(\tfrac{n\pi}{b}\right)^2\right)} = \mathcal{O}(n^{-2}), \quad n\to\infty. \tag{3.20}$$

Ahora, debido al Lema 3.3.2 y (3.20) existe $N\in\mathbb{N}$ tal que si $n\geq N$, entonces

$$\left|\frac{\langle \xi(\cdot,\overline{z}), \mathcal{R}(\cdot)\xi(\cdot,\lambda_n)\rangle}{k_b(\lambda_n,\lambda_n)} - \frac{\left\langle \cos\left(\sqrt{\overline{z}}\,\cdot\right), \mathcal{R}(\cdot)\cos(\frac{n\pi}{b}\,\cdot)\right\rangle}{\mathring{k}_b\left(\left(\tfrac{n\pi}{b}\right)^2, \left(\tfrac{n\pi}{b}\right)^2\right)}\right| \leq \frac{c_1(z)}{n^2},$$

para todo $z\in\mathbb{C}$, donde $c_1:\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ es una función continua positiva. Como consecuencia de la desigualdad anterior, existe otra función continua positiva $c_2:\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{\langle \xi(\cdot,\overline{z}), \mathcal{R}(\cdot)\xi(\cdot,\lambda_n)\rangle}{k_b(\lambda_n,\lambda_n)} - \frac{\left\langle \cos\left(\sqrt{\overline{z}}\,\cdot\right), \mathcal{R}(\cdot)\cos(\frac{n\pi}{b}\,\cdot)\right\rangle}{\mathring{k}_b\left(\left(\tfrac{n\pi}{b}\right)^2, \left(\tfrac{n\pi}{b}\right)^2\right)}\right| \leq c_2(z), \qquad z\in\mathbb{C}.$$

Entonces, por la Prop. 3.2.1, la serie (3.14) converge uniformemente en compactos de $\mathbb{C}$. □

A continuación se establece el principal resultado de este capítulo.

Teorema 3.3.4. [**41**, **Tma. 3.6**]. *Suponga que V satisface* **(v2)**. *Considere $\mathcal{B}_a$ con $a\in(0,b)$. Entonces, para todo subconjunto compacto $K\subset\mathbb{C}$, existe una constante $C(K,a,V)>0$ tal que*

$$\left|f(z) - \widetilde{f}(z)\right| \leq C(K,a,V)\left\|\epsilon\right\|_\infty, \quad z\in K,$$

para toda $f \in \mathcal{B}_a$*, donde* $\epsilon = \{\epsilon_t\}$ *es cualquier sucesión real acotada y* $\widetilde{f}$ *está dada por* (3.13) *con* $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

Demostración. Basta argumentar como en el párrafo debajo de la Hipótesis 3.1.1. $\square$

Capítulo 4

Submuestreo

4.1 Introducción

En este capítulo abordamos submuestreo de funciones en $\mathcal{B}_c \setminus \mathcal{B}_b$ ($b < c$) con los puntos de muestreo dados por el espectro de $A_b(\gamma)$ como se explicó en la Introducción.

Lema 4.1.1. *Para cada $z \in \mathbb{C}$, $\xi(\cdot, z) = \displaystyle\sum_{t \in \operatorname{spec}(A_b(\gamma))} \frac{k_b(t, \overline{z})}{k_b(t,t)} \xi(\cdot, t)$, donde la serie converge en la norma de $L_2(0, b)$.*

Demostración. En la expresión (2.13) asigne los valores $\varphi(\cdot) = \xi(\cdot, z)$ y $s = b$ para obtener,

$$\xi(x, z) = \sum_{t \in \operatorname{spec}(A_b(\gamma))} \frac{1}{k_b(t,t)} \left\langle \xi(\cdot, t), \xi(\cdot, z) \right\rangle_{L_2(0,b)} \xi(x, t) \,. \tag{4.1}$$

La serie en (4.1) converge en la norma de $L_2(0, b)$. Por otra parte, empleando (2.12) con $s = b$ se obtiene, $k_b(t, \overline{z}) = \left\langle \xi(\cdot, t), \xi(\cdot, z) \right\rangle_{L_2(0,b)}$. Para concluir inserte la ecuación anterior en (4.1). $\square$

Hipótesis 4.1.2. Sean $0 < b < c < \infty$. Para cada $z \in \mathbb{C}$, la serie

$$\sum_{t \in \operatorname{spec}(A_b(\gamma))} \frac{k_b(t, \overline{z})}{k_b(t,t)} \xi(x, t)$$

converge absoluta y uniformemente con respecto a $x \in [0, c]$ (*cf.* Lema 4.1.1).

Observación 4. De acuerdo con (2.13), si $z = \lambda \in \operatorname{spec}(A_b(\gamma))$ entonces las series en el Lema 4.1.1 y en la Hipótesis 4.1.2 tienen sólamente un término, a saber $\xi(x, \lambda)$.

Lema 4.1.3. *Asuma que la Hipótesis 4.1.2 es verdadera. Sea*

$$\xi_b^{ext} : [0,c] \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, \qquad \xi_b^{ext}(x,z) := \sum_{t \in \operatorname{spec}(A_b(\gamma))} \frac{k_b(t,\overline{z})}{k_b(t,t)} \xi(x,t)\,.$$

Entonces, para cada $z \in \mathbb{C}$,

(i) $\xi_b^{ext}(\cdot, z)$ *es continua en el intervalo* $[0,c]$*,*

(ii) $\xi_b^{ext}(x,z) = \xi(x,z)$ *para casi todo* $x \in [0,b]$*.*

Además,

(iii) la función $h_b(z) := \sup_{x\in[b,c]} |\xi(x,z) - \xi_b^{ext}(x,z)|$ *es continua en* $\mathbb{C}$*,*

(iv) si $\psi \in L_2(0,c)$ *y* $g \in \mathcal{B}_c$ *están relacionadas mediante la isometría (1.36) con* $s = c$*, entonces*

$$\left\langle \xi_b^{ext}(\cdot, \overline{z}), \psi(\cdot) \right\rangle_{L_2(0,c)} = \sum_{t \in \operatorname{spec}(A_b(\gamma))} \frac{k_b(t,\overline{z})}{k_b(t,t)} g(t)\,, \qquad z \in \mathbb{C}\,. \tag{4.2}$$

Observación 5. El resultado establecido en el Lema 4.1.3(iv) es, en cierta forma, una generalización de la fórmula de muestreo (2.19). Efectivamente, cada $\psi \in L_2(0,b)$ puede ser considerado como elemento de $L_2(0,c)$ mediante la regla $\psi := \psi\chi_{[0,b]} + 0\,\chi_{(b,c]}$, donde χ_E es la función característica de un conjunto E. Así, debido al Lema 4.1.3(ii),

$$g(z) = \langle \xi(\cdot,\overline{z}), \psi(\cdot) \rangle_{L_2(0,b)} = \left\langle \xi_b^{ext}(\cdot,\overline{z}), \psi(\cdot) \right\rangle_{L_2(0,b)}\,, \qquad z \in \mathbb{C}\,. \tag{4.3}$$

Tomando en cuenta (4.3), la fórmula en el Lema 4.1.3(iv) se expresa de la siguiente forma,

$$g(z) = \sum_{t \in \operatorname{spec}(A_b(\gamma))} \frac{k_b(t,\overline{z})}{k_b(t,t)} g(t)\,, \qquad z \in \mathbb{C}\,.$$

La última ecuación coincide con la fórmula (2.19) con $s = b$.

Demostración. Enumeremos $\operatorname{spec}(A_b(\gamma))$ de la siguiente forma, $\operatorname{spec}(A_b(\gamma)) = \{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$, donde $\lambda_{n-1} \le \lambda_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto nos permite representar a la serie que define a la función $\xi_b^{ext}(x,z)$ de una manera útil para nuestros propósitos,

$$\xi_b^{ext}(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_b(\lambda_n,\overline{z})}{k_b(\lambda_n,\lambda_n)} \xi(x,\lambda_n) = \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{m} \frac{k_b(\lambda_n,\overline{z})}{k_b(\lambda_n,\lambda_n)} \xi(x,\lambda_n) \right)\,. \tag{4.4}$$

(i) Debido a la Hipótesis 4.1.2 y a (4.4), para cada $z \in \mathbb{C}$, la función $\xi_b^{ext}(\cdot, z)$ es el límite uniforme de una sucesión conformada por funciones continuas en el intervalo $[0, c]$.

(ii) De acuerdo con (i), para cada $z \in \mathbb{C}$, la función $\xi_b^{ext}(\cdot, z)$ es continua en el intervalo $[0, b]$. Así, $\xi_b^{ext}(\cdot, z) \restriction_{[0,b]} \in L_2(0, b)$. Observe que

$$\lim_{m\to\infty} \left\| \xi_b^{ext}(x, z) - \sum_{n=0}^{m} \frac{k_b(\lambda_n, \overline{z})}{k_b(\lambda_n, \lambda_n)} \xi(x, \lambda_n) \right\|_{L_2(0,b)} = 0 \,. \tag{4.5}$$

En efecto, de acuerdo con la Hipótesis 4.1.2, dada $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, si $m \geq N$ entonces,

$$\left| \xi_b^{ext}(x, z) - \sum_{n=0}^{m} \frac{k_b(\lambda_n, \overline{z})}{k_b(\lambda_n, \lambda_n)} \xi(x, \lambda_n) \right| < \sqrt{\frac{\epsilon}{2b}} \,, \qquad x \in [0, c] \,.$$

De esta forma, siempre que $m \geq N$ se obtiene,

$$\int_0^b \left| \xi_b^{ext}(x, z) - \sum_{n=0}^{m} \frac{k_b(\lambda_n, \overline{z})}{k_b(\lambda_n, \lambda_n)} \xi(x, \lambda_n) \right|^2 dx \leq \int_0^b \frac{\epsilon}{2b} dx < \epsilon \,.$$

Por lo tanto (4.5) es cierta. La conclusión se sigue del Lema 4.1.1.

(iii) Es una consecuencia directa del Lema A.1.1.

(iv) Utilize (4.4) para obtener,

$$\left\langle \xi_b^{ext}(\cdot, \overline{z}), \psi(\cdot) \right\rangle_{L_2(0,b)} = \int_0^b \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{m} \frac{k_b(\lambda_n, \overline{z})}{k_b(\lambda_n, \lambda_n)} \xi(x, \lambda_n) \psi(x) \right) dx \,. \tag{4.6}$$

Buscamos aplicar el teorema de convergencia dominada [29, Tma. 5.4.9] para calcular la última integral en (4.6). De acuerdo con la Hipótesis 4.1.2, para cualquier $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$\left| \psi(x) \sum_{n=0}^{m} \frac{k_b(\lambda_n, \overline{z})}{k_b(\lambda_n, \lambda_n)} \xi(x, \lambda_n) \right| \leq |\psi(x)| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|k_b(\lambda_n, \overline{z})|}{k_b(\lambda_n, \lambda_n)} |\xi(x, \lambda_n)| < \infty \,. \tag{4.7}$$

Además, debido a que $L_2(0, b) \subset L_1(0, b)$,

$$|\psi(x)| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|k_b(\lambda_n, \overline{z})|}{k_b(\lambda_n, \lambda_n)} |\xi(x, \lambda_n)| \in L_1(0, b) \,. \tag{4.8}$$

Las expresiones (4.7) y (4.8) nos permiten usar el teorema de convergencia dominada [29, Tma. 5.4.9]. De esta forma, (4.6) implica,

$$\left\langle \xi_b^{ext}(\cdot,\overline{z}),\psi(\cdot)\right\rangle_{L_2(0,b)} = \lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m}\frac{k_b(\lambda_n,\overline{z})}{k_b(\lambda_n,\lambda_n)}\int_0^b \xi(x,\lambda_n)\psi(x)dx\,. \tag{4.9}$$

Empleando (1.36) se infiere que

$$g(\lambda_n) = \langle \xi(\cdot,\lambda_n),\psi(\cdot)\rangle_{L_2(0,b)} = \int_0^b \xi(x,\lambda_n)\psi(x)dx\,. \tag{4.10}$$

para cualquier $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Finalmente, en vista de (4.9) y (4.10),

$$\left\langle \xi_b^{ext}(\cdot,\overline{z}),\psi(\cdot)\right\rangle_{L_2(0,b)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{k_b(\lambda_n,\overline{z})}{k_b(\lambda_n,\lambda_n)}g(\lambda_n)\,. \qquad \square$$

Asuma que la Hipótesis 4.1.2 es verdadera. Suponga que $\psi\in L_2(0,c)$ y $g\in\mathcal{B}_c$ están relacionados mediante la isometría (1.36) con $s=c$, *i. e.*,

$$g(z) = \langle \xi(\cdot,\overline{z}),\psi(\cdot)\rangle_{L_2(0,c)}\ , \qquad z\in\mathbb{C}\,. \tag{4.11}$$

De acuerdo con el Lema 4.1.3(i), para cada $z\in\mathbb{C}$, la función $\xi_b^{ext}(\cdot,z)$ pertenece a $L_2(0,c)$. Sea

$$\widehat{g}(z) := \left\langle \xi_b^{ext}(\cdot,\overline{z}),\psi(\cdot)\right\rangle_{L_2(0,c)}\ , \qquad z\in\mathbb{C}\,. \tag{4.12}$$

Por (4.11) y (4.12),

$$|g(z)-\widehat{g}(z)| = \left|\left\langle \xi(\cdot,\overline{z})-\xi_b^{ext}(\cdot,\overline{z}),\psi(\cdot)\right\rangle_{L_2(0,c)}\right| = \left|\int_0^c \left(\xi(x,z)-\xi_b^{ext}(x,z)\right)\psi(x)dx\right|\,.$$

Debido al Lemma 4.1.3(ii),

$$\begin{aligned}|g(z)-\widehat{g}(z)| &= \left|\int_b^c \left(\xi(x,z)-\xi_b^{ext}(x,z)\right)\psi(x)dx\right| \le \int_b^c \left|\xi(x,z)-\xi_b^{ext}(x,z)\right|\cdot|\psi(x)|\,dx\\ &\le \sup_{x\in[b,c]}\left|\xi(x,z)-\xi_b^{ext}(x,z)\right|\int_b^c|\psi(x)|\,dx\,.\end{aligned}$$

Finalmente, el Lema 4.1.3(iii) implica,

$$|g(z)-\widehat{g}(z)| \le h_b(z)\int_b^c|\psi(x)|\,dx\,. \tag{4.13}$$

Por lo tanto, para cada función $g(z) \in \mathcal{B}_c$, la diferencia $|g(z) - \widehat{g}(z)|$ está acotada uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$.

Observación 6. Toda $g \in \mathcal{B}_c$ puede ser reconstruida mediante sus valores en $\operatorname{spec}(A_c(\gamma))$. Efectivamente, usando (2.19) con $s = b$ se obtiene,

$$g(z) = \sum_{t \in \operatorname{spec}(A_c(\gamma))} g(t) \frac{k_c(t, \overline{z})}{k_c(t,t)}\,, \qquad z \in \mathbb{C}\,. \tag{4.14}$$

Adicionalmente, el Lema 4.1.3(iv) y (4.12) implican,

$$\widehat{g}(z) = \sum_{t \in \operatorname{spec}(A_b(\gamma))} g(t) \frac{k_b(t, \overline{z})}{k_b(t,t)}\,, \qquad z \in \mathbb{C}\,. \tag{4.15}$$

En la Sección 3.1 se expuso brevemente el hecho de que $\operatorname{spec}(A_b(\gamma))$ es menos denso que $\operatorname{spec}(A_c(\gamma))$. Mediante (4.14) y (4.15) se infiere que (4.13) nos brinda una estimación del error producido al intentar reconstruir $g \in \mathcal{B}_c$ utilizando sus valores en un conjunto más ralo que $\operatorname{spec}(A_c(\gamma))$.

A continuación demostraremos que la Hipótesis 4.1.2 es verdadera cuando V satisface **(v2)**. Como en el Capítulo 3, esto se lleva a cabo en dos etapas, la primera se ocupa del caso particular $V \equiv 0$ y la segunda del caso general. Además, asignamos el valor $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

4.2 Submuestreo: caso sin potencial

En esta sección demostramos que la Hipótesis 4.1.2 es verdadera cuando $V \equiv 0$ y $\gamma = \frac{\pi}{2}$. De acuerdo con (3.15),

$$\operatorname{spec}\left(\mathring{A}_b\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right) = \left\{\left(\tfrac{n\pi}{b}\right)^2 \,:\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}.$$

Recuerde que $\mathring{k}_b$ denota el núcleo reproductor del espacio $\mathring{\mathcal{B}}_b$ asociado con $V \equiv 0$. De acuerdo con (2.12), (3.2),

$$\begin{aligned} \mathring{k}_b\left(\left(\tfrac{n\pi}{b}\right)^2, \overline{z}\right) &= \int_0^b \cos\left(\tfrac{n\pi}{b} x\right) \cos\left(\sqrt{z} x\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^b \left(\cos\left(\left(\tfrac{n\pi}{b} + \sqrt{z}\right) x\right) + \cos\left(\left(\tfrac{n\pi}{b} - \sqrt{z}\right) x\right)\right) dx. \end{aligned}$$

Por la fórmula de adición de seno, $\sin\left(\left(\frac{n\pi}{b} \pm \sqrt{z}\right) b\right) = \pm(-1)^n \sin(\sqrt{z}\, b)$. Así,

$$\mathring{k}_b\left(\left(\tfrac{n\pi}{b}\right)^2, \overline{z}\right) = (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{z}}{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - z} \sin\left(\sqrt{z}\, b\right)\,, \tag{4.16}$$

para cualesquiera $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{n^2\}$.

Proposición 4.2.1. *Si $V \equiv 0$ y $\gamma = \frac{\pi}{2}$ entonces la Hipótesis 4.1.2 es verdadera.*

Demostración. Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$. Como en la prueba de la Proposición 3.2.1 asumiremos, sin pérdida de generalidad, que $\left(\frac{n_0\pi}{b}\right)^2$ es el único punto de spec $\left(\mathring{A}_b\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ que pertenece a K, donde $n_0 \in \mathbb{N}$. Debido a (3.2), (3.15), (3.16), basta demostrar que la serie

$$\sum_{n \neq n_0} \left|\mathring{k}_b\left(\left(\tfrac{n\pi}{b}\right)^2, \overline{z}\right)\right|$$

converge uniformemente en K. Por (4.16), se obtiene

$$\sum_{n \neq n_0} \left|\mathring{k}_b\left(\left(\tfrac{n\pi}{b}\right)^2, \overline{z}\right)\right| \leq \left|\sqrt{z} \sin(\sqrt{z}\, b)\right| \sum_{n \neq n_0} \frac{1}{\left|\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - z\right|}\,. \qquad \square$$

4.3 Submuestreo: caso general

Suponga que V satisface **(v2)** para $b > a$. Sea spec $\left(A_b\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\lambda_n \leq \lambda_{n+1}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Nuestro primer objetivo es estudiar la diferencia

$$\frac{k_b(\lambda_n, \overline{z})}{k_b(\lambda_n, \lambda_n)} \xi(x, \lambda_n) - \frac{\mathring{k}_b\left(\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \overline{z}\right)}{\mathring{k}_b\left(\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right)} \cos\left(\tfrac{n\pi}{b} x\right)\,, \qquad x \in [0, c]\,, \qquad z \in \mathbb{C}\,,$$

para cualquier $b > \pi$ y $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.

Lema 4.3.1. *Suponga que V satisface* **(v2)**. *Entonces, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq N$ entonces,*

$$\left|k_b(\lambda_n, \overline{z}) - \mathring{k}_b\left(\left(\tfrac{n\pi}{b}\right)^2, \overline{z}\right)\right| \leq \widetilde{C} \frac{b}{\pi n^2} e^{|\operatorname{Im}\sqrt{z}|b} \left(D + \frac{1 + |z|}{1 + |z|^{1/2}\, b} \widetilde{D}\right)\,,$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Las constantes $\widetilde{C} > 0$, $D > 0$, $\widetilde{D} > 0$ dependen de V y b.

Demostración. Debido a (2.12), $k_b(\lambda_n, \overline{z}) = \int_0^b \xi(x, \lambda_n)\xi(x, z)dx$. Por la Definición 3.3.1,

$$k_b(\lambda_n, \overline{z}) = \int_0^b \left(\cos\left(\tfrac{n\pi}{b}x\right) + \frac{b}{n\pi}\rho(x)\sin\left(\tfrac{n\pi}{b}x\right) + T(x,n) \right) \left(\cos\left(\sqrt{z}\,x\right) + F(x,z)\right) dx\,.$$

De esta forma,

$$\begin{aligned} k_b(\lambda_n, \overline{z}) - \mathring{k}_b\left(\left(\tfrac{n\pi}{b}\right)^2, \overline{z}\right) = \int_0^b \Big[&\cos\left(\tfrac{n\pi}{b}x\right) F(x,z) + \frac{b}{n\pi}\rho(x)\sin\left(\tfrac{n\pi}{b}x\right)\cos\left(\sqrt{z}\,x\right) \\ &+ \frac{b}{n\pi}\rho(x)\sin\left(\tfrac{n\pi}{b}x\right) F(x,z) + T(x,n)\cos\left(\sqrt{z}\,x\right) + T(x,n)F(x,z)\Big] dx\,. \end{aligned}$$

Procedemos como en la demostración del Lema 3.3.2. Los primeros tres términos en el lado derecho de la última ecuación se acotan mediante el Lema A.1.5. Los términos restantes tienen cotas obtenidas en la misma forma que las estimaciones (3.18) y (3.19). □

Lema 4.3.2. *Suponga que V satisface* **(v2)** *y $c > b$. Entonces, la fórmula asintótica*

$$\xi(x, \lambda_n) - \cos\left(\tfrac{n\pi}{b}x\right) = \mathcal{O}(n^{-1}), \quad n \to \infty,$$

se cumple uniformemente con respecto a $x \in [0, c]$.

Demostración. Usando el Lema B.1.1(i) y repitiendo el razonamiento que nos condujo a (3.20), se obtiene

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} - \frac{b}{n\pi} = \mathcal{O}(n^{-1}), \quad n \to \infty.$$

Esta fórmula asintótica junto con (A.7) implica

$$\xi(x, \lambda_n) - \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right) = \mathcal{O}(n^{-1}), \quad n \to \infty\,,$$

uniformemente con respecto a $x \in [0, c]$. Finalmente, debido a que

$$\left|\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right) - \cos\left(\tfrac{n\pi}{b}x\right)\right| = \left|\sin\left(\alpha_n x\right)\right| \cdot \left|\left(\sqrt{\lambda_n} - \frac{n\pi}{b}\right)x\right| \leq \left|\sqrt{\lambda_n} - \frac{n\pi}{b}\right| b,$$

para algún α_n entre $\sqrt{\lambda_n}$ y $\frac{n\pi}{b}$, la conclusión se sigue del Lema B.1.1(i). □

Proposición 4.3.3. *Suponga que V satisface* **(v2)**. *Asigne el valor $\gamma = \frac{\pi}{2}$. Entonces, dado $c > b$, la Hipótesis 4.1.2 es verdadera.*

Demostración. Debido a los Lemas 4.3.1, 4.3.2 y a la ecuación (3.20), existe $N \in \mathbb{N}$ y una función continua y positiva $c_3 : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\left| \frac{k_b(\lambda_n, \overline{z})}{k_b(\lambda_n, \lambda_n)} \xi(x, \lambda_n) - \frac{\mathring{k}_b\left(\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \overline{z}\right)}{\mathring{k}_b\left(\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right)} \cos\left(\tfrac{n\pi}{b} x\right) \right| \leq \frac{c_3(z)}{n^2}, \qquad z \in \mathbb{C} \qquad x \in [0, c], \tag{4.17}$$

para cualesquiera $n \geq N$. Note que la función c_3 puede depender de b y V. La estimación (4.17) a su vez implica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{k_b(\lambda_n, \overline{z})}{k_b(\lambda_n, \lambda_n)} \xi(x, \lambda_n) - \frac{\mathring{k}_b\left(\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \overline{z}\right)}{\mathring{k}_b\left(\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right)} \cos\left(\tfrac{n\pi}{b} x\right) \right| \leq c_4(z)$$

uniformemente con respecto a $x \in [0, c]$, donde $c_4 : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ es otra función continua positiva que también puede depender de b y V. La afirmación se sigue de la Proposición 4.2.1. □

La argumentación que está después de la prueba del Lema 4.1.3 y la Proposición 4.3.3 nos permiten establecer el principal resultado de este capítulo.

Teorema 4.3.4. **[41, Tma. 4.7].** *Suponga que V satisface* **(v2)** *para $c > b$. Sean $\psi \in L_2(0, c)$ y $g(z) \in \mathcal{B}_c$ relacionadas mediante* (4.11). *Entonces, para cualquier conjunto compacto $K \subset \mathbb{C}$, existe una constante $D(K, c, V) > 0$ tal que*

$$|g(z) - \widehat{g}(z)| \leq D(K, c, V) \int_b^c |\psi(x)| \, dx, \quad z \in K,$$

donde $\widehat{g}(z)$ está dada por (4.12), i. e., *$\widehat{g}(z)$ está dada por la serie* (4.2) *con $\gamma = \frac{\pi}{2}$.*

Apéndice A

Resultados auxiliares

Lema A.1.1. *Sea Y un intervalo compacto de $\mathbb{R}$. Suponga que $\theta : \mathbb{C} \times Y \to [0, +\infty)$ es una función continua. Entonces, $\Theta : \mathbb{C} \to [0, +\infty)$ definida mediante $\Theta(z) := \sup\{\theta(z, y) \,:\, y \in Y\}$ es una función continua.*

Demostración. Para cada $z \in \mathbb{C}$, fije $\vartheta(z) \in Y$ tal que

$$\theta\left(z, \vartheta(z)\right) = \sup\{\theta(z, y) \,:\, y \in Y\} = \Theta(z)\,. \tag{A.1}$$

Tome cualquier $z_0 \in \mathbb{C}$. Fije $r_0 > 0$ y sea $K := \{w \in \mathbb{C} \,:\, |z_0 - w| \leq r_0\}$. Debido a la compacidad de $K \times Y$, el mapeo $\theta \restriction_{K \times Y}$ es uniformemente continuo. Así, dada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|z - w| < \delta \text{ y } |y - v| < \delta \text{ implica } |\theta(z, y) - \theta(w, v)| < \frac{\epsilon}{2}\,, \tag{A.2}$$

para cualesquiera $(z, y)\,, (w, v) \in K \times Y$. Tome $w \in K$ tal que $|z_0 - w| < \delta$. Si $v \in Y$ satisface $|\vartheta(z_0) - v| < \delta$ entonces, de acuerdo con (A.2),

$$|\theta\left(z_0, \vartheta(z_0)\right)| - |\theta(w, v)| \leq |\theta\left(z_0, \vartheta(z_0)\right) - \theta(w, v)| < \frac{\epsilon}{2}\,.$$

Debido a (A.1) y al hecho de que θ es no negativa, $\Theta(z_0) - \Theta(w) \leq \Theta(z_0) - \theta(w, v) < \epsilon$. Ahora, sea $v \in Y$ tal que $|\vartheta(w) - v| < \delta$. Con base en (A.2),

$$|\theta\left(w, \vartheta(w)\right)| - |\theta(z_0, v)| \leq |\theta\left(w, \vartheta(w)\right) - \theta(z_0, v)| < \frac{\epsilon}{2}\,.$$

Así, $\Theta(w) - \Theta(z_0) < \epsilon$. Por lo tanto, $-\epsilon < \Theta(z_0) - \Theta(w) < \epsilon$ siempre que $|z_0 - w| < \delta$. $\square$

Lema A.1.2. *Suponga que $h : [0, b] \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es absolutamente continua con respecto al primer* *argumento. Sean $0 \le x_0 < x_1 \le b$. Entonces, para cualesquiera $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$,*

$$\left|\int_{x_0}^{x_1} h(x,z)\sin\left(\tfrac{n\pi}{b}x\right)dx\right| \le \frac{b}{n\pi}\left(|h(x_1,z)| + |h(x_0,z)| + b\sup_{0\le x\le b}|h'(x,z)|\right) \tag{A.3}$$

$$\le \frac{b}{n\pi}\left(2\sup_{0\le x\le b}|h(x,z)| + b\sup_{0\le x\le b}|h'(x,z)|\right). \tag{A.4}$$

Demostración. Note que

$$\int_{x_0}^{x_1} h(x,z)\sin\left(\tfrac{n\pi}{b}x\right)dx = \frac{b}{n\pi}\left(-h(x,z)\cos\left(\tfrac{n\pi}{b}x\right)\Big|_{x=x_0}^{x=x_1} + \int_{x_0}^{x_1} h'(x,z)\cos\left(\tfrac{n\pi}{b}x\right)dx\right). \qquad \square$$

El siguiente resultado es el análogo de [23, Lema 2.2] para condiciones de frontera tipo Neumann. En su demostración se emplea una teécnica similar a la desarrollada en [7, Lema 3.2], [35, Lema 2.1]. Presentamos una demostración debido a que no encontramos alguna en la literatura.

Lema A.1.3. *Dada $b > 0$, suponga que $V \in L_1(0,b)$. Entonces, para cada $z \in \mathbb{C}$, la única solución del problema de valores iniciales*

$$-\xi''(x,z) + V(x)\xi(x,z) = z\xi(x,z)\,, \quad 0 \le x \le b\,, \quad \xi(0,z) = 1\,, \quad \xi'(0,z) = 0\,,$$

satisface la ecuación integral

$$\xi(x,z) = \cos\left(\sqrt{z}x\right) + \int_0^x G(z,x,y)V(y)\xi(y,z)dy\,, \tag{A.5}$$

donde

$$G(z,x,y) = \frac{1}{\sqrt{z}}\sin\left(\sqrt{z}\,(x-y)\right) \tag{A.6}$$

es la función de Green correspondiente. Esta solución satisface el estimado

$$\left|\xi(x,z) - \cos\left(\sqrt{z}x\right)\right| \le C\frac{x}{1+|z|^{1/2}x}e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{z}\right|x}\int_0^x \frac{y\,|V(y)|}{1+|z|^{1/2}y}dy \tag{A.7}$$

para alguna constante $C = C(b,V) > 0$. Además, la derivada satisface

$$\xi'(x,z) = -\sqrt{z}\sin\left(\sqrt{z}x\right) + \int_0^x \frac{\partial}{\partial x}G(z,x,y)V(y)\xi(y,z)dy\,, \tag{A.8}$$

$$\left|\xi'(x,z) + \sqrt{z}\sin\left(\sqrt{z}x\right)\right| \le Ce^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{z}\right|x}\int_0^x |V(y)|\,dy\,. \tag{A.9}$$

Demostración. Sean $\xi_0(x,z) := \cos(\sqrt{z}x)$,

$$\xi_{n+1}(x,z) := \int_0^x G(z,x,y)V(y)\xi_n(y,z)dy, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Debido a que $|\cos(\sqrt{z}x)| \leq \exp(|\mathrm{Im}\sqrt{z}|\, x)$ y

$$|G(z,x,y)| \leq C_0 \frac{x}{1+|z|^{1/2}x} e^{\left|\mathrm{Im}\sqrt{z}\right|(x-y)}, \quad 0 \leq y \leq x\,,$$

p. a. cte. $C_0 > 0$ (*cf.* [23, Lema A.1]), se obtiene que $|\xi_1(x,z)| \leq C_0 \|V\|_{L_1} \dfrac{x}{1+|z|^{1/2}x} e^{\left|\mathrm{Im}\sqrt{z}\right|x}$. Un argumento inductivo muestra que

$$|\xi_{n+1}(x,z)| \leq \frac{\|V\|_{L_1} C_0^{n+1}}{(n+1)!} \frac{x}{1+|z|^{1/2}x} e^{\left|\mathrm{Im}\sqrt{z}\right|x} \left(\int_0^x \frac{y\,|V(y)|}{1+|z|^{1/2}\,y} dy\right)^n \tag{A.10}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\xi(x,z) := \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n(x,z)$$

converge uniformemente con respecto a $x \in [0,b]$ para todo $z \in \mathbb{C}$ y satisface (A.5). Así, el estimado (A.7) se sigue de (A.10) observando que

$$\int_0^x \frac{y\,|V(y)|}{1+|z|^{1/2}\,y} dy \leq b\,\|V\|_{L_1}.$$

Las afirmaciones (A.8) y (A.9) son demostradas mediante argumentos similares. $\square$

Los siguientes resultados hacen referencia a las funciones ρ, T y F introducidas en la Definición 3.3.1.

Lema A.1.4.

(i) $\displaystyle\sup_{0\leq x\leq b} |F(x,z)| \leq C \frac{b^2}{\left(1+|z|^{1/2}\,b\right)^2} e^{b\left|\mathrm{Im}\sqrt{z}\right|} \|V\|_{L_1(0,b)}$,

(ii) $\displaystyle\sup_{0\leq x\leq b} |F'(x,z)| \leq C\,\|V\|_{L_1(0,b)}\, e^{b\left|\mathrm{Im}\sqrt{z}\right|}$,

(iii) $\displaystyle\sup_{0\leq x\leq b} |F''(x,z)| \leq \left(\frac{|z|}{1+|z|^{1/2}\,b} D_1 + \widetilde{D_1}\right) \|V\|_{L_1(0,b)}\, e^{b\left|\mathrm{Im}\sqrt{z}\right|}$,

(iv) $\sup_{0\leq x\leq b} |\rho(x)| \leq \frac{1}{2}\left(1+\frac{\pi}{b}\right) \|V\|_{L_1(0,b)}\,, \qquad \sup_{0\leq x\leq b} |\rho'(x)| \leq \frac{1}{2}\left(1+\frac{\pi}{b^2}\right) \|V\|_{L_1(0,b)}.$

Las constantes $C>0$, $D_1>0$, $\widetilde{D_1}>0$ dependen de V y b.

Demostración. (i) Observe que, para cada $z\in\mathbb{C}$, la función $x\mapsto x/(1+|z|^{1/2}x)$ es creciente en el intervalo $[0,b]$ (su derivada con respecto de x es positiva). Para finalizar use (A.7).
(ii) Es una consecuencia directa de (A.9).
(iii) En vista de 2.8,

$$-\xi''(x,z)+V(x)\xi(x,z)=z\xi(x,z) \quad \Rightarrow \quad F''(x,z)=V(x)\cos(\sqrt{z}\,x)+F(x,z)\,(V(x)-z)\,.$$

Para finalizar use (A.7).
(iv) Es una consecuencia directa de la Definición 3.3.1. □

Lema A.1.5. *Sea $V\in \mathrm{AC}[0,b]$ real valuado. Considere cualquier $a\in(0,b]$. Entonces, para cualesquiera $z\in\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}$, las siguientes desigualdades son verdaderas,*

(i) $$\left|\int_0^b F(x,z)\cos\left(\tfrac{n^2\pi}{b}x\right)dx\right| \leq \frac{b}{\pi n^2}e^{b\left|\operatorname{Im}\sqrt{z}\right|}C_1\left(\frac{|z|}{1+|z|^{1/2}b}D_1+\widetilde{D_1}\right).$$

(ii) $$\left|\int_0^a \rho(x)F(x,z)\sin\left(\tfrac{n\pi}{b}x\right)dx\right| \leq \frac{b}{n\pi}e^{b\left|\operatorname{Im}\sqrt{z}\right|}C_2\left(\frac{1}{\left(1+|z|^{1/2}b\right)^2}D_2+\widetilde{D_2}\right).$$

(iii) $$\left|\int_0^a \rho(x)\cos\left(\sqrt{z}\,x\right)\sin\left(\tfrac{n\pi}{b}x\right)dx\right| \leq \frac{b}{n\pi}e^{b\left|\operatorname{Im}\sqrt{z}\right|}C_3\left(\frac{|z|}{1+|z|^{1/2}b}D_3+\widetilde{D_3}\right).$$

Las constantes $C_j>0$, $D_j>0$, $\widetilde{D_j}>0$ dependen de V y b.

Demostración. (i) Integrando por partes se obtiene,

$$\int_0^b F(x,z)\cos\left(\tfrac{n\pi}{b}x\right)dx=-\frac{b}{n\pi}\int_0^b F'(x,z)\sin\left(\tfrac{n\pi}{b}x\right)dx=-\left(\frac{b}{n\pi}\right)^2\int_0^b F''(x,z)\cos\left(\tfrac{n\pi}{b}x\right)dx\,,$$

(note que $F'(0,z)=F'(b,z)=0$ debido a la Definición 2.8). Por lo tanto,

$$\left|\int_0^b F(x,z)\cos\left(\tfrac{n\pi}{b}x\right)dx\right| \leq \frac{b^3}{(n\pi)^2}\sup_{0\leq x\leq b}\left|F''(x,z)\right|\,.$$

Para finalizar use (iii) del Lema A.1.4.

(ii) Defina $h(x,z)=\rho(x)F(x,z)$. Debido a (A.3) del Lema A.1.2,

$$\left|\int_0^b \rho(x)F(x,z)\sin\left(\tfrac{n\pi}{b}x\right)dx\right| \le \frac{b}{n\pi}\left(\sup_{0\le x\le b}|h(x,z)| + b\sup_{0\le x\le b}|h'(x,z)|\right),$$

(note que, por la Definición 3.3.1, $\rho(0)=0$). Además, por el Lema A.1.4,

$$\begin{aligned}|h'(x,z)| &\le |\rho'(x)F(x,z)| + |\rho(x)F'(x,z)|\\ &\le C\,\|V\|^2_{L_1(0,b)}\,e^{b\left|\operatorname{Im}\sqrt{z}\right|}\left(\frac{b^2}{\left(1+|z|^{1/2}b\right)^2}\left(1+\frac{\pi}{b^2}\right)+1+\frac{\pi}{b}\right).\end{aligned}$$

(iii) Defina $h(x,z)=\rho(x)\cos\left(\sqrt{z}\,x\right)$. Usando (A.3) del Lema A.1.2,

$$\left|\int_0^b \rho(x)\cos\left(\sqrt{z}\,x\right)\sin\left(\tfrac{n\pi}{b}x\right)dx\right| \le \frac{b}{n\pi}\left(\sup_{0\le x\le b}|h(x,z)| + b\sup_{0\le x\le b}|h'(x,z)|\right),$$

(note que, por la Definición 3.3.1, $\rho(0)=0$). Además, por el Lema A.1.4,

$$\begin{aligned}|h'(x,z)| &\le \left|\rho'(x)\cos\left(\sqrt{z}\,x\right)\right| + \left|\sqrt{z}\rho(x)\sin\left(\sqrt{z}\,x\right)\right|\\ &\le \|V\|_{L_1(0,b)}\,e^{b\left|\operatorname{Im}\sqrt{z}\right|}\left(1+\frac{\pi}{b^2}+\left(1+\frac{\pi}{b}\right)\frac{C_0\,|z|\,b}{1+|z|^{1/2}b}\right).\end{aligned}$$

$\square$

Lema A.1.6. *Sea $V\in \mathrm{AC}[0,b]$ real valuado. Considere cualquier $a\in(0,b)$. Entonces, para cualesquiera $z\in\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}$, las siguientes desigualdades son verdaderas,*

(i) $$\left|\int_a^b F(x,z)\frac{b-x}{b-a}\rho(x)\sin\left(\tfrac{n\pi}{b}x\right)dx\right| \le \frac{b}{n\pi}e^{b\left|\operatorname{Im}\sqrt{z}\right|}C_4\left(\frac{1}{\left(1+|z|^{1/2}b\right)^2}D_4+\widetilde{D_4}\right),$$

(ii) $$\left|\int_a^b \cos\left(\sqrt{z}\,x\right)\frac{b-x}{b-a}\rho(x)\sin\left(\tfrac{n\pi}{b}x\right)dx\right| \le \frac{b}{n\pi}e^{b\left|\operatorname{Im}\sqrt{z}\right|}C_5\left(\frac{|z|}{1+|z|^{1/2}b}D_5+\widetilde{D_5}\right).$$

Las constantes $C_j>0$, $D_j>0$, $\widetilde{D_j}>0$ dependen de V y b.

Demostración. (i) Procedemos como en la prueba del Lema A.1.5. Sea $h(x,z)=F(x,z)\frac{b-x}{b-a}\rho(x)$. Debido a (A.3) del Lema A.1.2,

$$\left|\int_a^b h(x,z)\sin\left(\tfrac{n\pi}{b}x\right)dx\right| \le \frac{b}{n\pi}\left(\sup_{0\le x\le b}|h(x,z)| + b\sup_{0\le x\le b}|h'(x,z)|\right). \tag{A.11}$$

(Note que $h(b,z)=0$.) Calculemos $\sup_{0\le x\le b}|h'(x,z)|$. Por el Lema A.1.4,

$$\begin{aligned}|h'(x,z)| &\le |F'(x,z)\rho(x)| + \frac{1}{b-a}|F(x,z)\rho(x)| + |F(x,z)\rho'(x)| \\ &\le C\,\|V\|^2_{L_1(0,b)}\,e^{b\left|\operatorname{Im}\sqrt{z}\right|}\left(1+\frac{\pi}{b}+\left(\frac{1}{b-a}+1\right)\frac{b^2}{\left(1+|z|^{1/2}b\right)^2}\left(1+\frac{\pi}{b^2}\right)\right).\end{aligned}$$

(ii) Defina $h(x,z)=\cos\left(\sqrt{z}\,x\right)\frac{b-x}{b-a}\rho(x)$. Debido a (A.3) en Lema A.1.2,

$$\left|\int_a^b h(x,z)\sin\left(\tfrac{n\pi}{b}x\right)dx\right| \le \frac{b}{n\pi}\left(\sup_{0\le x\le b}|h(x,z)| + b\sup_{0\le x\le b}|h'(x,z)|\right). \tag{A.12}$$

(Note que $h(b,z)=0$.) Calculemos $\sup_{0\le x\le b}|h'(x,z)|$. Por el Lema A.1.4,

$$\begin{aligned}|h'(x,z)| &\le \left|\sqrt{z}\sin(\sqrt{z}x)\rho(x)\right| + \frac{1}{b-a}\left|\cos(\sqrt{z}x)\rho(x)\right| + \left|\cos(\sqrt{z}x)\rho'(x)\right| \\ &\le \|V\|_{L_1(0,b)}\,e^{b\left|\operatorname{Im}\sqrt{z}\right|}\left(1+\frac{\pi}{b^2}+\left(1+\frac{\pi}{b}\right)\left(\frac{C_0\,|z|\,b}{1+|z|^{1/2}b}+\frac{1}{b-a}\right)\right).\end{aligned}$$

□

Lema A.1.7. *Sean $a\in(0,b)$ y $\mathcal{R}_{ab}(x)$ dada por (3.8). Entonces, para todo $z\in\mathbb{C}$ y $n\in\mathbb{N}$,*

$$\left|\int_0^b F(x,z)\mathcal{R}_{ab}(x)\cos\left(\tfrac{n\pi}{b}x\right)dx\right| \le \frac{b}{\pi n^2}e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{z}\right|b}C_6\left(D_6+\frac{1+|z|}{1+|z|^{1/2}b}\widetilde{D_6}\right).$$

Las constantes $C_6>0$, $D_6>0$, $\widetilde{D_6}>0$ dependen de V y b.

Demostración. Integrando por partes se obtiene

$$\int_0^a F(x,z)\cos\left(\tfrac{n\pi}{b}x\right)dx = \frac{b}{n\pi}\left(F(a,z)\sin\left(\tfrac{n\pi}{b}a\right) - \int_0^a F'(x,z)\sin\left(\tfrac{n\pi}{b}x\right)dx\right), \tag{A.13}$$

$$\int_a^b F(x,z)\cos\left(\tfrac{n\pi}{b}x\right)dx = -\frac{b}{n\pi}\left(F(a,z)\sin\left(\tfrac{n\pi}{b}a\right) + \int_a^b F'(x,z)\sin\left(\tfrac{n\pi}{b}x\right)dx\right). \tag{A.14}$$

Adicionalmente,

$$\int_a^b xF(x,z)\cos\left(\tfrac{n\pi}{b}x\right)dx = -\frac{b}{n\pi}\left(aF(a,z)\sin\left(\tfrac{n\pi}{b}a\right) + \int_a^b \left(xF'(x,z)+F(x,z)\right)\sin\left(\tfrac{n\pi}{b}x\right)dx\right). \tag{A.15}$$

Utilizando (A.13)-(A.15),

$$\int_0^b F(x,z)\mathcal{R}(x)\cos\left(\tfrac{n\pi}{b}x\right)dx = -\frac{b}{n\pi}\int_0^a F'(x,z)\sin\left(\tfrac{n\pi}{b}x\right)dx$$
$$-\frac{b^2}{(b-a)n\pi}\int_a^b F'(x,z)\sin\left(\tfrac{n\pi}{b}x\right)dx + \frac{b}{(b-a)n\pi}\left(\int_a^b (xF'(x,z)+F(x,z))\sin\left(\tfrac{n\pi}{b}x\right)dx.\right)$$

Finalmente, la afirmación se demuestra mediante un argumento similar al empleado en la demostración de los Lemas A.1.5 y A.1.6. □

Lema A.1.8. *Fije $a \in (0,b)$ y considere $\mathcal{R}_{ab}$ dada por (3.8). Entonces,*

$$\left\langle \cos\left(\sqrt{z}\,\cdot\right), \mathcal{R}_{ab}(\cdot)\cos\left(\tfrac{n\pi}{b}\,\cdot\right)\right\rangle$$
$$= \frac{1}{2(b-a)}\left(\frac{\cos\left(\left(\sqrt{z}+\frac{n\pi}{b}\right)a\right)-(-1)^n\cos\left(\sqrt{z}\,b\right)}{\left(\sqrt{z}+\frac{n\pi}{b}\right)^2} + \frac{\cos\left(\left(\sqrt{z}-\frac{n\pi}{b}\right)a\right)-(-1)^n\cos\left(\sqrt{z}\,b\right)}{\left(\sqrt{z}-\frac{n\pi}{b}\right)^2}\right).$$

Demostración. Suponga que $b=\pi$. (Empleando la transformación $t \in [0,\pi] \mapsto \frac{b}{\pi}t \in [0,b]$ se regresa a las variables originales.) La identidad

$$\cos\left(\sqrt{z}x\right)\cos(nx) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\left(\sqrt{z}+n\right)x\right)+\cos\left(\left(\sqrt{z}-n\right)x\right)\right) \tag{A.16}$$

implica

$$\int_0^a \cos\left(\sqrt{z}x\right)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(\left(\sqrt{z}+n\right)a\right)}{\sqrt{z}+n}+\frac{\sin\left(\left(\sqrt{z}-n\right)a\right)}{\sqrt{z}-n}\right). \tag{A.17}$$

Recurriendo nuevamente a (A.16),

$$\int_a^\pi \cos\left(\sqrt{z}x\right)\cos(nx)\left(\frac{\pi-x}{\pi-a}\right)dx \tag{A.18}$$
$$= \frac{\pi}{2(\pi-a)}\left(\frac{\sin\left(\left(\sqrt{z}+n\right)x\right)}{\sqrt{z}+n}+\frac{\sin\left(\left(\sqrt{z}-n\right)x\right)}{\sqrt{z}-n}\right)\Big|_{x=a}^{x=\pi}$$
$$-\frac{1}{2(\pi-a)}\left(\int_a^\pi x\cos\left(\left(\sqrt{z}+n\right)x\right)dx+\int_a^\pi x\cos\left(\left(\sqrt{z}-n\right)x\right)dx\right).$$

Ahora calculamos las integrales que están en el lado derecho de (A.18). Integrando por partes,

$$\int_a^\pi x\cos\left(\left(\sqrt{z}\pm n\right)x\right)\,dx = x\frac{\sin\left(\left(\sqrt{z}\pm n\right)x\right)}{\sqrt{z}\pm n}\Big|_{x=a}^{x=\pi} - \int_{x=a}^{x=\pi}\frac{\sin\left(\left(\sqrt{z}\pm n\right)x\right)}{\sqrt{z}\pm n}dx\,.$$

Por lo tanto,

$$\int_a^\pi x\cos\left(\left(\sqrt{z}\pm n\right)x\right)dx = \frac{\pi(-1)^n\sin\left(\sqrt{z}\pi\right) - a\sin\left(\left(\sqrt{z}\pm n\right)a\right)}{\sqrt{z}\pm n} + \frac{(-1)^n\cos\left(\sqrt{z}\pi\right) - \cos\left(\left(\sqrt{z}\pm n\right)a\right)}{\left(\sqrt{z}\pm n\right)^2}. \tag{A.19}$$

Para terminar la demostración se utilizan (A.17)-(A.19). □

Apéndice B

Fórmulas asintóticas

Los siguientes resultados hacen referencia a las funciones ρ, T y F introducidas en la Definición 3.3.1, al núcleo reproductor $k_s(z,w)$ en (2.12) y el caso particular $\mathring{k}_s(z,w)$ cuando $V \equiv 0$. Las fórmulas asintóticas del Lema B.1.1 son demostradas en [25, Sec.1.2.2] suponiendo que V' es acotado en $[0,\pi]$. A continuación veremos que es suficiente requerir $V \in \mathrm{AC}[0,b]$, donde $b > 0$.

Lema B.1.1. *Sea $V \in \mathrm{AC}[0,b]$ tal que V toma valores reales. Denote* $\operatorname{spec}\left(A_b\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$, *donde $\lambda_{n-1} \leq \lambda_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (ver (3.1)). Entonces,*

(i) $\sqrt{\lambda_n} = \frac{n\pi}{b} + \mathcal{O}(n^{-1})$ *cuando* $n \to \infty$,

(ii) $\sqrt{\lambda_n} = \frac{n\pi}{b} + \frac{c}{n} + \mathcal{O}(n^{-2})$ *cuando* $n \to \infty$,

(iii) $T(x,n) = \mathcal{O}(n^{-2})$ *cuando* $n \to \infty$, *uniformemente con respecto a* $x \in [0,b]$,

(iv) $k_b(\lambda_n,\lambda_n) = \mathring{k}_b\left(\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right) + \mathcal{O}(n^{-2})$ *cuando* $n \to \infty$.

Demostración. (ii) Fije $\lambda > 0$. Considere la función $\xi(x,\lambda)$ dada en el Lema A.1.3. De acuerdo con A.5,

$$\xi'(x,\lambda) = -\sqrt{\lambda}\sin\left(\sqrt{\lambda}\,x\right) + \int_0^x \cos\left(\sqrt{\lambda}(x-y)\right)V(y)\xi(y,z)dy\,, \tag{B.1}$$

Si $\lambda \in \operatorname{spec}\left(A_b\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ entonces, en vista de (3.1), $\xi'(b,\lambda) = 0$. De esta forma, (B.1) implica,

$$(-\sqrt{\lambda} + B)\sin(\sqrt{\lambda}\,b) + A\cos(\sqrt{\lambda}\,b) = 0\,, \tag{B.2}$$

donde

$$A := \int_0^b \cos(\sqrt{\lambda}\,y)V(y)\xi(y,\lambda)dy, \qquad B := \int_0^b \sin(\sqrt{\lambda}\,y)V(y)\xi(y,\lambda)dy. \tag{B.3}$$

Debido a (A.7),

$$\xi(x,\lambda) = \cos(\sqrt{\lambda}\,x) + \mathcal{O}\left(\tfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\right). \tag{B.4}$$

Insertando (B.4) en (B.3) arribamos a,

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\left(\int_0^b V(y)dy + \int_0^b \cos(2\sqrt{\lambda}\,y)V(y)dy\right) + \mathcal{O}\left(\tfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\right),\\ B &= \frac{1}{2}\int_0^b \sin(2\sqrt{\lambda}\,y)V(y)dy + \mathcal{O}\left(\tfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\right). \end{aligned}$$

Tomando en cuenta que $V' \in L_1(0,b)$ obtenemos,

$$\int_0^b \cos(2\sqrt{\lambda}\,y)V(y)dy = \mathcal{O}\left(\tfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\right), \qquad \int_0^b \sin(2\sqrt{\lambda}\,y)V(y)dy = \mathcal{O}\left(\tfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

Por lo tanto

$$A = h_1 + \mathcal{O}\left(\tfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\right), \qquad h_1 := \frac{1}{2}\int_0^b V(y)dy, \qquad B = \mathcal{O}\left(\tfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

Así, (B.2) implica,

$$\tan(\sqrt{\lambda}\,b) = \frac{h_1 + \mathcal{O}\left(\tfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)}{\sqrt{\lambda} + \mathcal{O}\left(\tfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)}. \tag{B.5}$$

Sustituyendo $\sqrt{\lambda_n} = \frac{n\pi}{b} + \delta_n$ en (B.5) se obtiene,

$$\tan(b\delta_n) = \tan(\sqrt{\lambda_n}\,b) = \frac{h_1 + \mathcal{O}\left(\tfrac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right)}{\sqrt{\lambda_n} + \mathcal{O}\left(\tfrac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right)} = \frac{h_1}{n} + \mathcal{O}(n^{-2}).$$

Usando el desarrollo en serie de Taylor de la función tangente obtenemos $\delta_n = \frac{h_1}{bn} + \mathcal{O}(n^{-2})$. De esta forma,

$$\sqrt{\lambda_n} = \tfrac{n\pi}{b} + \tfrac{c}{n} + \mathcal{O}(n^{-2}), \qquad c := \frac{1}{2b}\int_0^b V(y)dy\,. \tag{B.6}$$

(iii) Utilizando (B.4) y (A.5),

$$\begin{aligned} \xi(x,\lambda) &= \cos\left(\sqrt{\lambda}\,x\right) + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^x \sin\left(\sqrt{\lambda}(x-y)\right)V(y)\xi(y,z)dy\\ &= \cos(\sqrt{\lambda}\,x) + \frac{\sin(\sqrt{\lambda}\,x)}{2\sqrt{\lambda}}\int_0^x V(y)dy + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right). \end{aligned} \tag{B.7}$$

Usando el desarrollo en serie de Taylor de las funciones seno y coseno y empleando (B.6) obtenemos,

$$\cos(\sqrt{\lambda_n}\,x) = \cos(\tfrac{n\pi}{b}x) - \frac{c}{n}x\sin(\tfrac{n\pi}{b}x) + \mathcal{O}(n^{-2}) \tag{B.8}$$

$$\sin(\sqrt{\lambda_n}\,x) = \sin(\tfrac{n\pi}{b}x) + \frac{c}{n}x\cos(\tfrac{n\pi}{b}x) + \mathcal{O}(n^{-2}) \tag{B.9}$$

$$\frac{\sin(\sqrt{\lambda_n}\,x)}{\sqrt{\lambda_n}} = \frac{b}{n\pi}\sin(\tfrac{n\pi}{b}x) + \mathcal{O}(n^{-2}). \tag{B.10}$$

En vista de (B.7)-(B.10),

$$\begin{aligned}\xi(x,\lambda_n) &= \cos(\tfrac{n\pi}{b}x) - \frac{c}{n}x\sin(\tfrac{n\pi}{b}x) + \frac{b}{2n\pi}\sin(\tfrac{n\pi}{b}x)\int_0^x V(y)dy + \mathcal{O}(n^{-2}) \\ &= \cos(\tfrac{n\pi}{b}x) + \frac{b}{n\pi}\rho(x)\sin(\tfrac{n\pi}{b}x) + \mathcal{O}(n^{-2})\,,\end{aligned} \tag{B.11}$$

donde, de acuerdo con (B.6),

$$\rho(x) = -cx + \frac{1}{2}\int_0^x V(y)dy = -\frac{\pi}{2b^2}\left(\int_0^b V(y)dy\right)x + \frac{1}{2}\int_0^x V(y)dy. \tag{B.12}$$

(iv) En vista de (B.11),

$$k_b(\lambda_n,\lambda_n) = \int_0^b \xi^2(x,\lambda_n)dx = \int_0^b \cos^2(\tfrac{n\pi}{b}x)dx + \frac{b}{n\pi}\int_0^b \rho(x)\sin(\tfrac{2n\pi}{b}x)dx + \mathcal{O}(n^{-2})\,.$$

Finalmente, en vista de (B.12), $\int_0^b \rho(x)\sin(\tfrac{2n\pi}{b}x)dx = \mathcal{O}(n^{-1})$. □

Apéndice C

Notas históricas

La teoría de extensiones autoadjuntas basada en la transformada de Cayley se debe principalmente a John von Neumann [44], [45], [46]. Esta teoría se aborda en obras clásicas, por ejemplo, [9], [10], [30], [31]. A lo largo de este trabajo hemos abordado la reconstrucción de funciones enteras que pertenecen a determinados espacios de de Branges. En la Sección 1.3 establecimos que los espacios de de Branges son espacios de Hilbert con núcleo reproductor (Teorema 1.3.2, Definición 1.3.3). El artículo [3] incluye un recuento histórico de la teoría de núcleos reproductores. Se pone de manifiesto el hecho de que los espacios con núcleos reproductor han estado presentes bajo diferentes maneras en diversas áreas de investigación en Matemáticas (cabe señalar que todas las funciones de Green correspondientes a ecuaciones difrerenciales ordinarias son ejemplos de núcleos reproductores). Sin embargo, la formulación moderna de las propiedades de los núcleos reproductores data de inicios del siglo XX. Un núcleo reproductor $K(x, y)$ puede ser caracterizado como una función de dos variables debido a una propiedad descubierta por J. Mercer en 1909. Años después (1939), E. H. Moore estableció que a cada núcleo $K(x, y)$ le corresponde cierta clase de funciones $\mathcal{B}$, con respecto a la cual $K(x, y)$ satisface la propiedad establecida en (1.30). Alrededor de 1944, Aronszjan abordó el problema recíproco: dada una clase de funciones $\mathcal{B}$ ¿bajo qué condiciones le corresponde a $\mathcal{B}$ un núcleo reproductor $K(x, y)$? A continuación exploramos la relación que existe entre el núcleo reproductor de un espacio de de Branges y el núcleo polinomial de grado n y la fórmula de Christoffel-Darboix que surgen en el problema de momentos. El siguiente material se presenta de forma detallada en [1]. Una función no decreciente $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una *distribución de masa* en $\mathbb{R}$ si satisface lo siguiente,

(i) las integrales $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^k d\sigma(\lambda)$, $k \in \mathbb{N}$, existen y son finitas,

(ii) σ tiene un número infinito de puntos de crecimiento (un *punto de crecimiento* de σ es un punto t tal que $\sigma(a) < \sigma(b)$ siempre que $a < t < b$),

(iii) $\lim_{u\to-\infty}\sigma(u)=0$.

Dos distribuciones de masa son *equivalentes* si difieren sólamente en los valores que toman en los puntos de discontinuidad. Sea σ una distribución de masa. La masa total de $\mathbb{R}$ es la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma(\lambda)=\lim_{\lambda\to+\infty}\sigma(\lambda)-\lim_{\lambda\to-\infty}\sigma(\lambda).$$

El *momento generalizado de orden* k está dado por

$$s_k:=\int_{-\infty}^{+\infty} u^k d\sigma(u), \qquad k\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

Cualquier distribución de masa genera una sucesión de momentos generalizados $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$. El problema de momentos plantea la siguiente pregunta: dada una sucesión $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ ¿existe una distribución de masa tal que, para todo $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, el momento generalizado de orden k de σ es s_k? Este problema se simplifica dividiendo cada término de la sucesión por un número $c>0$. La solución para el problema original se recobra multiplicando a la distribución correspondiente a la sucesión $\{cs_k\}_{k=0}^{\infty}$ por c^{-1}. Debido a esto, asumiremos que la sucesión $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ está *normalizada*, es decir, $s_0=1$. En los enunciados precedentes hemos asumido que la distribución de masa está dada en todo el eje real. Sin embargo, el problema de momentos puede ser planteado en otro subconjunto de $\mathbb{R}$ considerando existencia de masa sólamente en dicho subconjunto: en el semieje real $[0,+\infty)$, en un intervalo finito, en varios intervalos o en otro subconjunto arbitrario. Históricamente, el problema de momentos en el semieje real $[0,+\infty)$ es el más antiguo. Fue abordado por primera vez por Stieltjes en 1894 [42]. El problema de momentos en todo el eje real es llamado *el problema de momentos extendido* y se discutió por primera vez por H. Hamburger en 1920-1921 [19]. Sea $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ una sucesión normalizada. Denote mediante $\mathbb{R}[\lambda]$ al espacio lineal de polinomios con coeficientes reales. Considere el funcional lineal Γ en $\mathbb{R}[\lambda]$ definido mediante

$$\Gamma(x_0+x_1\lambda+x_2\lambda^2+\ldots+x_n\lambda^n)=x_0s_0+x_1s_1+x_2s_2+\ldots+x_ns_n.$$

Este funcional induce una forma bilineal simétrica en $\mathbb{R}[\lambda]$ mediante

$$\langle p(\lambda),q(\lambda)\rangle=\Gamma\left(p(\lambda)q(\lambda)\right). \tag{C.1}$$

Esta forma es definida positiva si, para cualquier $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y cualesquiera $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ al menos uno de los cuales es distinto de cero, sucede que

$$0 < \Gamma\left(\left(\sum_{k=0}^{n} x_k \lambda^k\right)^2\right) = \sum_{0 \leq i,k \leq n} x_i x_k s_{i+k}. \tag{C.2}$$

Esta condición es equivalente a,

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \ldots & s_n \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_{n+1} \\ s_2 & s_3 & s_4 & \ldots & s_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & s_{n+2} & \ldots & s_{2n} \end{vmatrix} > 0, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{C.3}$$

Se dice que una sucesión es *positiva* si satisface (C.3). De esta forma, dada una sucesión $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$, la expresión (C.1) define un producto interior en $\mathbb{R}[\lambda]$, si y sólo si, la sucesión $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ es positiva. Mediante el proceso de Gram-Schmidt es posible ortonormalizar la sucesión $\{\lambda^k\}_{k=0}^{\infty}$. Seleccionando los polinomios con coeficiente líder positivo, obtenemos una sucesión de polinomios $P_n(\lambda)$ caracterizada por las siguientes propiedades,

($\widetilde{P}_1$) $\deg\left(P_n(\lambda)\right) = n$,

($\widetilde{P}_2$) el coeficiente líder de $P_n(\lambda)$ es positivo,

($\widetilde{P}_3$) $\langle P_i(\lambda), P_j(\lambda)\rangle = \begin{cases} 0, & \text{if} \quad i \neq j \\ 1, & \text{if} \quad i = j \end{cases}$.

Considere el operador lineal $\mathcal{T}$ en $\mathbb{R}[\lambda]$ definido mediante

$$\mathcal{T}\left(p(\lambda)\right) = \lambda p(\lambda). \tag{C.4}$$

La matríz correspondiente a $\mathcal{T}$ en la base $\{\lambda^k\}_{k=0}^{\infty}$ es

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

De acuerdo con [1, Sec. 1.1], la matríz correspondiente a $\mathcal{T}$ en la base $\{P_k(\lambda)\}_{k=0}^{\infty}$ es

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ b_0 & a_1 & b_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & b_1 & a_2 & b_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & b_2 & a_3 & b_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \qquad a_k \in \mathbb{R}, \qquad b_k > 0. \tag{C.5}$$

Una matríz de la forma (C.5) es llamada *matríz de Jacobi*. De esta forma, cualquier sucesión positiva $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ determina un producto interior en $\mathbb{R}[\lambda]$ que satisface $\langle \lambda^i, \lambda^k \rangle = s_{i+k}$. Con respecto a este producto interior, obtenemos una base ortonormal $\{P_k(\lambda)\}_{k=0}^{\infty}$ que satisface las propiedades $(\widetilde{P}_1)$-$(\widetilde{P}_3)$ y una matríz de Jacobi en esta base para el operador $\mathcal{T}$ de multiplicación por λ. La base ortonormal $\{P_k(\lambda)\}_{k=0}^{\infty}$ satisface la relación

$$\lambda y_k = b_k y_{k+1} + a_k y_k + b_{k-1} y_{k-1}, \tag{C.6}$$

con condiciones iniciales

$$P_0(\lambda) = 1, \qquad P_1(\lambda) = \frac{\lambda - a_0}{b_0}.$$

Debido a que la relación de recurrencia (C.6) tiene grado 2 y a que el coeficiente b_{k+1} de y_{k+1} es distinto de cero para cualquier $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, cualquier solución de (C.6) está determinada por y_0 y y_1. Así, la relación (C.6) tiene dos soluciones linealmente independientes, una de las cuales es la sucesión $\{P_k(\lambda)\}_{k=0}^{\infty}$. La relación (C.6) puede expresarse de la siguiente forma,

$$b_k y_{k+1} = (\lambda - a_k) y_k - b_{k-1} y_{k-1}. \tag{C.7}$$

Una consecuencia importante de (C.7) es la *fórmula de Christoffel-Darboix*,

$$(\mu - \lambda) \sum_{k=0}^{n-1} P_k(\lambda) P_k(\mu) = b_{n-1} \left(P_{n-1}(\lambda) P_n(\mu) - P_n(\lambda) P_{n-1}(\mu) \right). \tag{C.8}$$

La suma

$$h_n(\lambda, \mu) = \sum_{k=0}^{n} P_k(\lambda) P_k(\mu) \tag{C.9}$$

es llamada *núcleo polinomial de grado* n, correspondiente a la base ortonormal $\{P_k(\lambda)\}_{k=0}^{\infty}$ (o al funcional $\mathcal{T}$). Note que

$$\mathcal{T}\left(h_n(\lambda,\mu)P_k(\lambda)\right) = P_k(\mu), \qquad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{C.10}$$

De esta forma, para cualquier polinomio $p(\lambda)$ de grado $\leq n$ tenemos que

$$\mathcal{T}\left(h_n(\lambda,\mu)p(\lambda)\right) = p(\mu). \tag{C.11}$$

Es importante para nosotros resaltar la semejanza entre la propiedad del núcleo reproductor del espacio de de Branges $\mathcal{B}(e)$ establecida en (1.30) y la propiedad establecida en (C.11).

Bibliografía

[1] N. I. Akhiezer. *The classical moment problem and some related questions in analysis.* Translated by N. Kemmer. Hafner Publishing Co., New York, 1965.

[2] N. I. Akhiezer and I. M. Glazman. *Theory of linear operators in Hilbert space.* Dover Publications Inc., New York, 1993. Translated from the Russian and with a preface by Merlynd Nestell, Reprint of the 1961 and 1963 translations, Two volumes bound as one.

[3] N. Aronszajn. Theory of reproducing kernels. *Transactions of the American Mathematical Society*, 68(3):337–404, 1950.

[4] B. A. Bailey and W. R. Madych. Cardinal sine series, oversampling, and periodic distributions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 143(10):4373–4382, 2015.

[5] M. S. Birman and M. Z. Solomjak. *Spectral theory of selfadjoint operators in Hilbert space.* Mathematics and its Applications (Soviet Series). D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987. Translated from the 1980 Russian original by S. Khrushchëv and V. Peller.

[6] B. G. Bodmann and C. Liner. Spikes, roots, and aliasing: recovering bandlimited signals from roots of the short-time fourier transform. *SIAM J. Appl. Math.*, 72(5):1449–1473, 2012.

[7] R. Carlson. A borg–levinson theorem for bessel operators. *Pacific Journal of Mathematics*, 177(1):1–26, 1997.

[8] L. de Branges. *Hilbert spaces of entire functions.* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1968.

[9] N. Dunford and J. Schwartz. *Linear operators. II. Spectral theory, selfadjoint operators in Hilbert space*, volume 7 of *Pure and Applied Mathematics.* Wiley-Interscience, New York, 1971.

[10] N. Dunford and J. Schwartz. *Linear operators. III. Spectral operators*, volume 7 of *Pure and Applied Mathematics*. Wiley-Interscience, New York, 1971.

[11] W. Everitt and A. Poulkou. Kramer analytic kernels and first-order boundary value problems. *Journal of computational and applied mathematics*, 148(1):29–47, 2002.

[12] W. Everitt and A. Poulkou. Interpolation theory and first-order boundary value problems. *Mathematische Nachrichten*, 269(1):116–128, 2004.

[13] J. Farah. Interpolación y el mundo digital. *Motivos Matemáticos*, 1, 2018.

[14] P. E. Fernández Moncada, A. García García, and M. A. Hernandez Medina. Sampling associated with resolvent-type kernels and Lagrange-type interpolation series. *Houston Journal of Mathematics*, 39(4):1333–1347, 2013.

[15] A. G. García, M. A. Hernández-Medina, and F. H. Szafraniec. Analytic Kramer kernels, Lagrange-type interpolation series and de Branges spaces. *Complex Var. Elliptic Equ.*, 58(1):79–97, 2013.

[16] J. Garnett. *Bounded analytic functions*, volume 236. Springer Science & Business Media, 2007.

[17] M. L. Gorbachuk and V. I. Gorbachuk. *M. G. Krein's lectures on entire operators*, volume 97 of *Operator Theory: Advances and Applications*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1997.

[18] M. L. Gorbachuk and V. I. Gorbachuk. M. G. Krein and extension theory of symmetric operators. Theory of entire operators. In *Differential operators and related topics, Vol. I (Odessa, 1997)*, volume 117 of *Oper. Theory Adv. Appl.*, pages 45–58. Birkhäuser, Basel, 2000.

[19] H. Hamburger. Über eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentenproblems. *Math. Ann.*, 82(3-4):168–187, 1921.

[20] J. R. Higgins. Five short stories about the cardinal series. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 12(1):45–89, 1985.

[21] J. R. Higgins. *Sampling theory in Fourier and signal analysis: foundations*. Oxford University Press on Demand, 1996.

[22] M. Kaltenbäck and H. Woracek. Pontryagin spaces of entire functions. V. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 77(1-2):223–336, 2011.

[23] A. Kostenko, A. Sakhnovich, and G. Teschl. Inverse eigenvalue problems for perturbed spherical Schrödinger operators. *Inverse Problems*, 26(10):105013, 14, 2010.

[24] Y. Kozachenko and A. Olenko. Aliasing-truncation errors in sampling approximations of sub-gaussian signals. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 62(10):5831–5838, 2016.

[25] B. M. Levitan and I. S. Sargsjan. *Sturm-Liouville and Dirac operators*, volume 59 of *Mathematics and its Applications (Soviet Series)*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1991. Translated from the Russian.

[26] N. K. Nikolski. *Operators, functions, and systems: an easy reading. Vol. 1*, volume 92 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002. Hardy, Hankel, and Toeplitz, Translated from the French by Andreas Hartmann.

[27] A. Papoulis. Error analysis in sampling theory. *Proc. IEEE*, 54(7):947–955, 1966.

[28] J. R. Partington. *Interpolation, identification, and sampling*, volume 17 of *London Mathematical Society Monographs. New Series*. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1997.

[29] I. K. Rana. *An introduction to measure and integration*, volume 45 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2002.

[30] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics. II. Fourier analysis, self-adjointness*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1975.

[31] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics. III. Scattering theory*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1979.

[32] C. Remling. Schrödinger operators and de Branges spaces. *J. Funct. Anal.*, 196(2):323–394, 2002.

[33] M. Rosenblum and J. Rovnyak. *Topics in Hardy classes and univalent functions*. Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts: Basel Textbooks]. Birkhäuser Verlag, Basel, 1994.

[34] K. Seip. *Interpolation and sampling in spaces of analytic functions*, volume 33 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[35] F. Serier. Inverse spectral problem for radial schrödinger operator on [0, 1]. *Journal of Differential Equations*, 235:101–126, 2007.

[36] L. O. Silva and J. H. Toloza. Applications of Krein's theory of regular symmetric operators to sampling theory. *J. Phys. A*, 40(31):9413–9426, 2007.

[37] L. O. Silva and J. H. Toloza. On the spectral characterization of entire operators with deficiency indices $(1,1)$. *J. Math. Anal. Appl.*, 367(2):360–373, 2010.

[38] L. O. Silva and J. H. Toloza. The class of n-entire operators. *J. Phys. A*, 46(2):025202, 23, 2013.

[39] L. O. Silva and J. H. Toloza. A class of n-entire Schrödinger operators. *Complex Anal. Oper. Theory*, 8(8):1581–1599, 2014.

[40] L. O. Silva and J. H. Toloza. De Branges spaces and Kreĭn's theory of entire operators. In *Operator theory. With 51 figures and 2 tables. In 2 volumes*, pages 549–580. Basel: Springer, 2015.

[41] L. O. Silva, J. H. Toloza, and A. Uribe. Oversampling and undersampling in de Branges spaces arising from regular Schrödinger operators. *Complex Analysis and Operator Theory*, 2018.

[42] T. Stieltjes. Recherches sur les fractions continues. *Anns. Fac. Sci. Univ. Toulouse*, 8:J1–J122, 1894.

[43] G. Teschl. *Mathematical methods in quantum mechanics*, volume 99 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009. With applications to Schrödinger operators.

[44] J. von Neumann. Allgemeine eigenwerttheorie hermitescher funktionaloperatoren. *Math. Ann.*, 102:49–131, 1929.

[45] J. von Neumann. *Collected works. II. Operators, ergodic theory and almost periodic functions in a group*. Pergamon Press, London, 1961.

[46] J. von Neumann. *Collected works. III. Rings of operators*. Pergamon Press, London, 1961.

[47] J. Weidmann. *Linear operators in Hilbert spaces*, volume 68 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1980. Translated from the German by Joseph Szücs.

[48] J. Weidmann. *Spectral theory of ordinary differential operators*, volume 1258 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[49] A. I. Zayed. *Advances in Shannon's sampling theory.* CRC Press, Boca Raton, FL, 1993.