
Universidad Nacional Autónoma de México

Centro de Física Aplicada y Tecnología Avanzada

Modelo práctico de un oscilador electrónico autosostenido, para el
análisis de fenómenos de sincronización

Por

LUIS ENRIQUE BELTRAN GONZÁLEZ



Tesis para obtener el título de:
Licenciado en Tecnología

Director de tesis:
Dr. Rafael Quintero Torres

JURIQUILLA QUERÉTARO, OCTUBRE 2018



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

RESUMEN

En este trabajo se presenta el análisis del fenómeno de sincronía entre osciladores auto-sostenidos, materializados en osciladores de Wien no lineales. También se introduce la teoría sobre el acoplamiento de osciladores utilizando modelos lineales de segundo orden y se incluye un modelo de oscilador de tercer orden para evidenciar los efectos parásitos que pueden existir al momento de la implementación de estos sistemas. De manera complementaria, se agregan no linealidades al oscilador, lo que produce un nuevo sistema representado por la ecuación de Van der Pol. Todas estas ideas se implementaron en circuitos electrónicos que fueron caracterizados en el dominio del tiempo y de la frecuencia, lo que permitió el análisis del efecto de la diferencia en amplitud, fase y frecuencia entre sistemas que se acoplan. Se trata de seguir la secuencia mostrada en la Figura 1, aunque varias veces se regresa a los modelos lineales para explicar teoría que sustente matemáticamente el acoplamiento de dos osciladores.

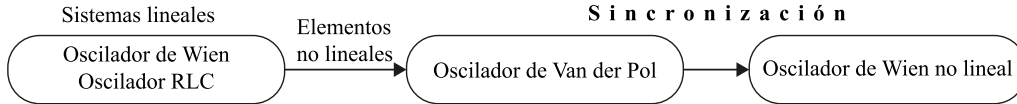


Figura 1: Diagrama simplificado del contenido de este trabajo.

El oscilador de Wien no lineal presentado es un modelo práctico de un oscilador autosostenido, debido a que tiene no linealidades que le permiten tener una señal con amplitud constante; la frecuencia de oscilación es definida por parámetros del sistema, en este caso por el valor de resistencia y capacitancia en el circuito, el oscilador tiene un arreglo de elementos con nodos que permiten acoplar dos o más osciladores entre sí para que exista un intercambio de energía, lo que modifica el estado de los osciladores que se encuentren conectados.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco ampliamente a mi familia que siempre me apoyó durante la carrera. A los profesores que imparten clases en el campus Juriquilla y diario contribuyen a la formación intelectual de los estudiantes. A la Universidad Nacional Autónoma de México que otorga la gran oportunidad de educación superior a gran parte de la población mexicana. A Jorge Luis Domínguez Juárez, José Luis Aragón Vera, Mario Enrique Rodríguez García y a Domingo Rangel Miranda, revisores de esta tesis.

Un especial agradecimiento a Rafael Quintero Torres que durante la carrera siempre me motivó a seguir adelante, adquirir conocimiento, desarrollar la conciencia del estudio y formación del pensamiento crítico.

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IN112017

ÍNDICE

	Página
Lista de Figuras	vii
1 Introducción	1
1.1 Planteamiento del problema	3
1.2 Justificación	3
1.3 Hipótesis	4
1.4 Objetivos	4
1.4.1 Objetivo principal	4
1.4.2 Objetivos secundarios	4
2 Antecedentes	5
2.1 Principios de funcionamiento de osciladores electrónicos	6
2.2 Método de variables de estado en el oscilador de Wien	8
2.3 Transistores de tipo JFET	11
2.4 Mejora del modelo matemático	11
2.4.1 OPAMP con retroalimentación negativa	12
2.4.2 Ruido en elementos electrónicos	13
2.5 Función de transferencia	16
2.6 Injection locking	17
2.7 Características de los osciladores autosostenidos	22
3 Diseño experimental	25
3.1 Descripción del arreglo electrónico	25
3.2 Acoplamiento forzado	26

ÍNDICE

3.3	Acoplamiento entre dos sistemas no lineales	27
3.3.1	Efecto de fase	29
3.3.2	Efecto de amplitud	29
3.3.3	Efecto de frecuencia	29
4	Resultados	31
4.1	Acoplamiento forzado	31
4.2	Acoplamiento entre osciladores de Wien	31
5	Conclusiones	35
5.1	Trabajo a futuro	36
A	Transformada de Fourier	37
B	Programas de Matlab	41
	Referências Bibliográficas	47

LISTA DE FIGURAS

1	Diagrama simplificado del contenido de este trabajo.	i
	FIGURA	Página
1.1	Descripción simplificada del experimento de Huygens: dos relojes de péndulo acoplados por un soporte común no rígido, por lo que permite la interacción entre ambos péndulos.	2
2.1	Circuito lineal RLC en paralelo.	6
2.2	Respuesta en frecuencia de dos osciladores RLC con diferente ancho de banda. Para $L = C = 1e - 3$, con $BW = 1$ y $BW = 1000$. Se muestra ángulo y amplitud.	7
2.3	Oscilador de Wien clásico con OPAMP.	7
2.4	Árbol del circuito de la Figura 2.3	8
2.5	Identificación de corrientes de co-árbol y voltajes de árbol del grafo de la Figura 2.4	9
2.6	Estabilidad e inestabilidad del oscilador de Wien, en el primer caso $\xi > 0$, por lo que el voltaje de salida del circuito tiende a cero, en el segundo caso $\xi < 0$, con esto el voltaje de salida alterna entre el voltaje de alimentación del OPAMP, en este caso se utilizó +12V -12V.	10
2.7	Curva característica del transistor BF245A, se midió con un amplificador lockin, en esta figura se muestra la región lineal y la región de saturación, y su cambio al variar el voltaje en la compuerta V_{GS}	12
2.8	Representación del mismo circuito, primero utilizando el modelo básico del OPAMP y después usando el modelo de orden 1, en un OPAMP de uso general: $R \approx 1k\Omega$, $C \approx 10\mu$ y $A \approx 10^5$	13
2.9	Oscilador de Wien con modelo del OPAMP orden 1.	14
2.10	Representación del circuito de la Figura 11 en forma de grafo para aplicar el método de variables de estado.	14

2.11	Efecto del parámetro α introducido por el OPAMP. En la señal de salida, este parámetro afecta tanto a la frecuencia de oscilación como al decaimiento de la señal, es decir que el ruido generado perturbaciones externas podría alterar la amplitud, y frecuencia del oscilador de Wien, a su vez este tipo de fluctuaciones permiten al oscilador mantenerse siempre activo, es decir, no requiere de condiciones iniciales específicas para comenzar a oscilar, en su lugar, el amplificador toma cualquier fluctuación de voltaje y la amplifica, para que el oscilador comience a funcionar, esto ocurre inmediatamente cuando se alimenta al OPAMP con su voltaje de polarización.	16
2.12	Comparación de la respuesta en el dominio de la frecuencia entre el oscilador de Wien, Van der Pol y un oscilador RLC todos definidos con una frecuencia central de 1785 Hz.	17
2.13	Oscilador RLC con una fuente de corriente externa (línea discontinua) para explicar el empate de frecuencias.	18
2.14	Dos osciladores RLC acoplados por un resistor R_x , este resistor permite el intercambio de corriente entre ambos osciladores.	20
2.15	Oscilador autosostenido RLC, en donde el elemento resistivo es no lineal.	23
2.16	Conductancia de elemento resistivo no lineal, resultado de la ecuación 2.49, para $u = 10$, $C=1 \times 10^{-3}$, $g = 2$. Esta curva de conductancia debería seguir el oscilador para lograr ser autosostenido.	23
3.1	Oscilador de Wien no lineal. Se utiliza un transistor como un resistor dependiente del voltaje de salida V_{out}	26
3.2	Se muestra en línea discontinua el voltaje de salida y en línea continua el voltaje a la entrada (gate) del transistor, quien define la manera en que se controla la resistencia equivalente entre drain y source en el transistor.	26
3.3	Curvas de resistencia equivalente entre drain y source del transistor BF245A, para distintos voltajes de entrada en gate.	27
3.4	Arreglo experimental. FG representa un generador de funciones; tanto el osciloscopio como el generador de funciones se comunican con Matlab.	27
3.5	Transformadas de Fourier de los datos obtenidos en el experimento. Se grafican las amplitudes tanto del oscilador de Wien como del generador de funciones. f_1 representa la frecuencia externa de perturbación.	28

3.6 Dos osciladores de Wien acoplador por un resistor R_x , entre sus nodos de entrada V_{ina} y V_{inb} 28

3.7 Envoltente de la corriente en el resistor de acoplamiento R_x . a) Efecto de fase; $R_x=100$ $k\Omega$, el intercambio de energía en un inicio es evidente, conforme la fase se aproxima a cero se ve un decaimiento en la energía intercambiada entre ambos osciladores. b) Efecto de amplitud; $R_x=100$ $k\Omega$, de nuevo el intercambio de energía en el inicio es evidente, sin embargo, para tiempos largos, la corriente en el resistor de acoplamiento ya no se vuelve cero, sino que sólo tiene un decaimiento para después permanecer en un valor constante de corriente para tiempos largos. c) Efecto de frecuencia; $R_x = 10$ $k\Omega$, el intercambio de energía es evidente incluso para tiempos largos. 30

4.1 Diagrama de beat note y de zona muerta, producido por la interacción entre un oscilador autosostenido y una señal externa débil. El oscilador tiene una frecuencia central de 1800 Hz. El ancho espectral de la zona muerta es aproximadamente el 10% de la frecuencia natural definida por la función de transferencia del oscilador de Wien. 32

4.2 Acoplamiento de dos osciladores autosostenidos de Wien no lineales con frecuencias centrales de 1020 rad/s (línea azul) y 1130 rad/s (línea roja). Sí R_x es muy grande, $\sim 10e6$, no existe un acoplamiento y se obtienen dos osciladores independientes, conforme R_x baja de valor comienzan a aparecer frecuencias diferentes a las centrales, hasta que termina en una frecuencia de 1075 rad/s. 33

4.3 Resultados experimentales del acoplamiento de dos osciladores de Wien, a) Voltaje de salida de ambos osciladores, antes de acoplar $\omega_a = 1008.3 \frac{rad}{s}$, $A_a = 5.77$ V, $\omega_b = 1134.9 \frac{rad}{s}$, $A_b = 4.49$ V y después de acoplar $\omega_a = \omega_b = 1045.2 \frac{rad}{s}$, $A_a = 2.44$ V, $A_b = 1.27$ V. b) Voltaje medido en el resistor R_x , en donde se incluyen dos señales: $\frac{\omega_a + \omega_b}{2} = 1071.6$ rad/s y $|\frac{\omega_a - \omega_b}{2}| = 63.3 \frac{rad}{s}$, después de acoplar: $\omega = 1045.2 \frac{rad}{s}$ y $A = 0.5$ V. 33

4.4 Transformada de Fourier de la señal del voltaje en el resistor de acoplamiento R_x . Se puede observar la presencia de las frecuencias de cada oscilador antes de acoplar ambos osciladores y después de acoplar sólo queda la frecuencia lograda por ambos osciladores. 34

A.1	Transformada de Fourier de una señal senoidal con una frecuencia de 10 Hz. A la izquierda se muestra en el dominio del tiempo y a la derecha en el dominio de la frecuencia.	38
A.2	Transformada de Fourier obtenida de la suma de dos señales senoidales, con frecuencia de 70 Hz y 100 Hz cada una.	39
A.3	Transformada de Fourier de la multiplicación de dos señales senoidales con frecuencia de 70 Hz y 100 Hz. Es importante notar que la frecuencia las frecuencias resultantes fueron de 30 Hz y 170 Hz.	39
B.1	Ejemplo de figura obtenida con la rutina anterior, en el eje x se tiene la frecuencia externa del generador de funciones, en el eje y se tiene la amplitud del voltaje medido y en el eje z se tiene el espectro de frecuencias obtenidas por la transformada de Fourier.	44
B.2	Resultado de correr la siguiente rutina para identificar picos, esta gráfica evidencia la zona muerta del oscilador, se tienen 1000 puntos de resolución en cada gráfica.	44

INTRODUCCIÓN

La sincronización entre sistemas dinámicos es el ajuste de ritmos oscilantes, debido a una interacción, que permite el intercambio de energía y, como consecuencia, el estado de estos sistemas se ve modificado. Christiaan Huygens se encargó de estudiar este fenómeno en su trabajo llamado “sympaty of two clocks”, en donde detalla de manera intuitiva la dinámica en que dos relojes de péndulo, colgados en una misma pared, podían sincronizarse de manera perfecta:

Los dos relojes, mientras colgaban uno al lado del otro con una distancia de uno o dos pies entre ellos, se mantenían sincronizados entre sí con una precisión tan alta que los dos péndulos siempre se balanceaban entre sí y nunca variaban. Mientras admiraba esto por un tiempo, finalmente descubrí que sucedió debido a una especie de simpatía: cuando hice que los péndulos oscilaran a diferentes ritmos, descubrí que media hora más tarde, siempre volvían al sincronismo y lo mantenían constantemente después, mientras los deje existir [9].

La observación de Huygens describe un par de relojes de péndulo acoplados por un soporte que permite el intercambio de energía. Si el soporte que los acopla fuera completamente rígido, por ejemplo, una barra de acero inmóvil, sería equivalente a aislar cada reloj, y en este caso cada uno se encuentra en un estado en donde el péndulo 1 tendrá una amplitud (A_1) una frecuencia

(f_1) y una fase (ϕ_1), y el péndulo 2 tendrá definidas A_2 , f_2 y ϕ_2 . Conforme el soporte es menos rígido, por ejemplo, una barra de madera, habrá una interacción entre ambos sistemas. Esta interacción permite que haya un ajuste de ritmos y, como consecuencia, f_1 y f_2 convergen a una nueva frecuencia común f_3 , al igual que la amplitud A_1 y A_2 alcanza una nueva amplitud A_3 , la fase $\phi_{(1-2)}$ puede tener dos opciones: $\phi_{(1-2)} \approx 0$ cuando existe una sincronización en fase o $\phi_{(1-2)} \approx \pi$ cuando se encuentran en antifase. En la Figura 1.1 se bosqueja un diagrama de este experimento.

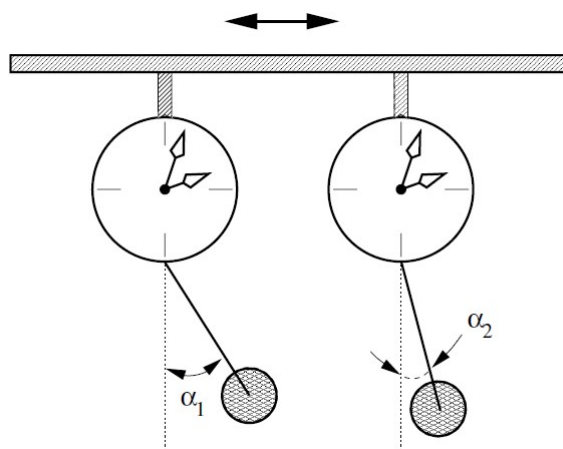


Figura 1.1: Descripción simplificada del experimento de Huygens: dos relojes de péndulo acoplados por un soporte común no rígido, por lo que permite la interacción entre ambos péndulos.

Los relojes de péndulo son osciladores autosostenidos, debido a que reúnen las siguientes características:

- Es un sistema activo, es decir que tiene una fuente de energía interna que es transformada en movimiento oscilatorio, matemáticamente se describe por un sistema dinámico autónomo.
- La forma de oscilación es determinada por los parámetros del sistema y no depende de las condiciones iniciales.
- La oscilación tiene amplitud constante a pesar de tener perturbaciones externas.

Nuevas investigaciones sobre sincronización surgieron eventualmente en el campo de la electrónica por ejemplo, como consecuencia de la invención de la radio, Baltazar Van der Pol, demostró que la frecuencia de un sistema dinámico puede ser guiada o sincronizada por una señal externa

[9]. En biología se habla de ciclo circadianos, que estudian los cambios biológicos de seres vivos y su relación con el tiempo, como ejemplo podemos mencionar el comportamiento colectivo de las luciérnagas o la migración de mariposas monarca, ambos fenómenos están relacionados con el comportamiento colectivo y con los receptores que utilizan para recibir señales externas. Actualmente el concepto de sincronía se encuentra cada vez más en áreas como neurología, sociofísica, genética y dinámica. Este fenómeno se vuelve parte importante para el funcionamiento de procesos de regulación, como lo atestiguan los ganadores del premio nobel de medicina en el 2017 Jeffrey C. Hall, Michael Rosbash y Michael W. Young por el descubrimiento del mecanismo molecular que controla el ritmo circadiano [4].

1.1 Planteamiento del problema

Para analizar fenómenos de sincronización, se requiere tener un sistema no lineal con un amplio intervalo de estabilidad, lo que suele ser la mayor problemática al intentar reproducir dichos fenómenos de manera controlada. Este tipo de sistemas son comunes en la naturaleza, por lo que muchas veces el análisis necesario para entender procesos de sincronización es muy elaborado. Los sistemas electrónicos permiten tener un ambiente controlado de perturbaciones, además de practicidad en la implementación de circuitos. El problema a resolver es la implementación de un oscilador electrónico no lineal diseñado de tal manera que permita reproducir oscilaciones autosostenidas y tratar de realizar experimentos que evidencien su comportamiento al momento de tratar de sincronizarse con otros sistemas.

1.2 Justificación

Para analizar fenómenos de sincronización, se requiere tener un sistema no lineal con un amplio intervalo de estabilidad, lo que suele ser la mayor problemática al intentar reproducir dichos fenómenos de manera controlada. Este tipo de sistemas son comunes en la naturaleza, por lo que muchas veces el análisis necesario para entender procesos de sincronización es muy elaborado. Los sistemas electrónicos permiten tener un ambiente controlado de perturbaciones, además de practicidad en la implementación de circuitos. El problema a resolver es la implementación de un oscilador electrónico no lineal diseñado de tal manera que permita reproducir oscilaciones

autosostenidas y tratar de realizar experimentos que evidencien su comportamiento al momento de tratar de sincronizarse con otros sistemas.

1.3 Hipótesis

Un oscilador autosostenido puede materializarse utilizando componentes electrónicos, que permitan tener amplitud y frecuencia definida, además si tomamos dos de estos osciladores, éstos son capaces de modificar su amplitud y frecuencia, si son acoplados entre sí, por medio de un elemento que permita a los dos transferir energía entre estos, de manera que si la interacción es débil, ambos sistemas mantendrán su amplitud y frecuencia propia a cada sistema.

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo principal

- Realizar un arreglo de componentes electrónicos que permitan tener un oscilador electrónico autosostenido, en donde se pueda controlar la amplitud y la frecuencia de manera práctica, además de que nos permita analizar el fenómeno de sincronía entre dos sistemas autosostenidos, para posteriormente variar parámetros de estos sistemas (amplitud, frecuencia, fuerza de acoplamiento, ruido) y analizar las diferentes respuestas.

1.4.2 Objetivos secundarios

- Simular las condiciones necesarias para obtener un oscilador autosostenido electrónico usando Cadence SPICE (Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis).
- Realizar el arreglo electrónico propuesto, que permita tener un oscilador electrónico autosostenido.
- Caracterizar la respuesta en frecuencia del oscilador electrónico y su capacidad de acoplarse a otro oscilador idéntico o similar, variando amplitudes, frecuencias y fuerza de acoplamiento.

ANTECEDENTES

Un sistema, en electrónica, es una parte del universo a estudiar, y se conforma sólo de los elementos y las variables que relacionan los conceptos físicos, todo lo demás es considerado como el ambiente [3]. La corriente en un elemento y el voltaje en las terminales de un elemento deben de ser únicos y los cambios en el tiempo de estas variables deben de ser suficientemente lentos para evitar cualquier retraso de estas variables en el sistema [2]. En electrónica un sistema aislado es algo sencillo debido a que no existen fuentes externas que afecten el estado del circuito; un sistema que conserva la energía sigue siendo de poco interés debido a que no existen elementos que sean capaces de disipar energía. Algo más interesante es la capacidad de poder analizar sistemas que contengan elementos disipativos que intercambien energía con el ambiente y contengan elementos no lineales.

Siguiendo esta idea, la conservación de energía es una condición que se logra en cualquier momento, se encuentra fundamentada en las leyes de Kirchhoff e implica la posibilidad de intercambiar energía con el ambiente. En dicha condición la energía del sistema puede decaer con el tiempo, incrementar o ser autosostenido, es decir, intercambia energía con el ambiente en una forma bidireccional [10].

No linealidad es el concepto más importante en un sistema físico, puede ser generado cambiando el valor de una propiedad como la resistencia, la capacitancia o la inductancia con la corriente de un elemento, también puede ser logrado con un cambio físico como la temperatura o debido

a variables eléctricas no lineales definidas por los dispositivos. Usualmente la presencia de un diodo, un transistor o un circuito integrado producen estas no linealidades.

2.1 Principios de funcionamiento de osciladores electrónicos

La forma más sencilla de pensar en un oscilador electrónico es utilizar un capacitor (C) en paralelo con un inductor (L) y un resistor (R) como se muestra en la Figura 2.1. Al realizar el análisis del circuito, con ayuda de las leyes de corriente y voltaje para el inductor¹ y el capacitor², además de las leyes de Kirchhoff³, se llega a un sistema de segundo orden, Ecuación 2.1, siempre existe atenuación por la resistencia en serie o en paralelo para el capacitor e inductor, esto provoca que la salida esté destinada a atenuarse con el tiempo. Lo que se busca generalmente es tener una amplitud constante, por lo que la mayoría de diseños de osciladores electrónicos intentarán controlar el término de atenuación ($\alpha = \frac{1}{2RC}$), que es proporcional al ancho de banda ($BW = \frac{1}{RC}$) en la Ecuación 2.2.

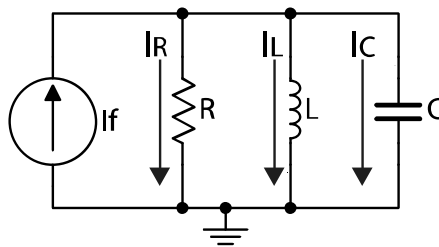


Figura 2.1: Circuito lineal RLC en paralelo.

$$(2.1) \quad \ddot{V} + \frac{\dot{V}}{RC} + \frac{V}{LC} = 0$$

$$(2.2) \quad \ddot{V} + VBW + V\omega_0 = 0$$

Este oscilador RLC puede ser perturbado por una fuente de corriente $i_f = I_f \cos(\omega t)$, lo que en estado estacionario produce una respuesta en el resistor de la forma $i_R = I_R \cos(\omega t + \phi)$, con lo

¹El voltaje del inductor es: $V_L = L \frac{di_L}{dt}$

²La corriente del capacitor es: $i_c = C \frac{dV_c}{dt}$

³La suma algebraica de voltajes en una malla es igual a cero.

que se define la función de transferencia, como se muestra en la ecuación 2.3 [5], en donde la frecuencia natural es $\omega_0 = \frac{1}{LC}$ y el ancho de banda es $BW = \frac{1}{RC}$ el cual tiende a cero conforme la resistencia incrementa ($R \rightarrow \infty$).

$$(2.3) \quad \frac{i_R}{i_f} = \frac{1}{1 + j\omega CR - \frac{jR}{\omega L}}$$

El oscilador de Wien, es un arreglo de componentes electrónicos (Figura 2.3) que permite

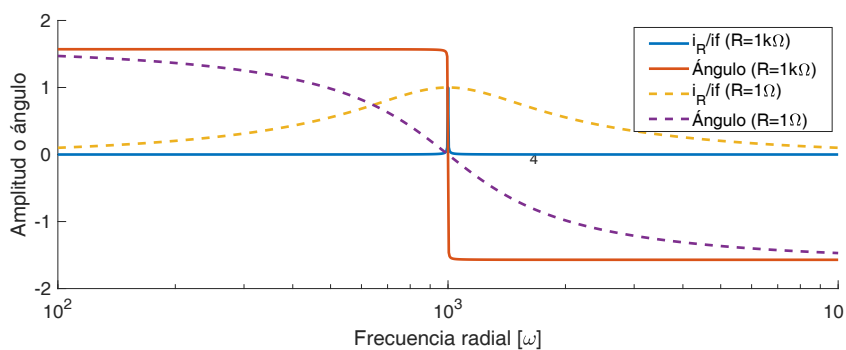


Figura 2.2: Respuesta en frecuencia de dos osciladores RLC con diferente ancho de banda. Para $L = C = 1e - 3$, con $BW = 1$ y $BW = 1000$. Se muestra ángulo y amplitud.

tener oscilaciones con amplitud constante a la salida V_o , además la frecuencia está definida por R_1, R_2, C_1, C_2 , esto es conveniente porque permite cambiar la frecuencia de oscilación sin intervenir de manera significativa en la amplitud de la señal de salida.

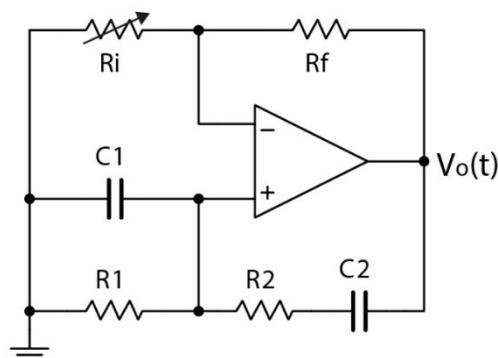


Figura 2.3: Oscilador de Wien clásico con OPAMP.

2.2 Método de variables de estado en el oscilador de Wien

Una generalización al método de nodos y de mallas, que se emplea cuando se tienen inductores capacitores y elementos no lineales, se empleará para analizar el circuito del oscilador de Wien. La primera condición es construir el árbol topológico a analizar, que se construye con las fuentes de voltaje y los capacitores y el co-árbol que se construye con las fuentes de corriente y los inductores. Los resistores pueden estar en el árbol o el co-árbol, manteniendo la condición de que el árbol no contiene trayectorias cerradas y nodo del circuito está incluido en el árbol. Se

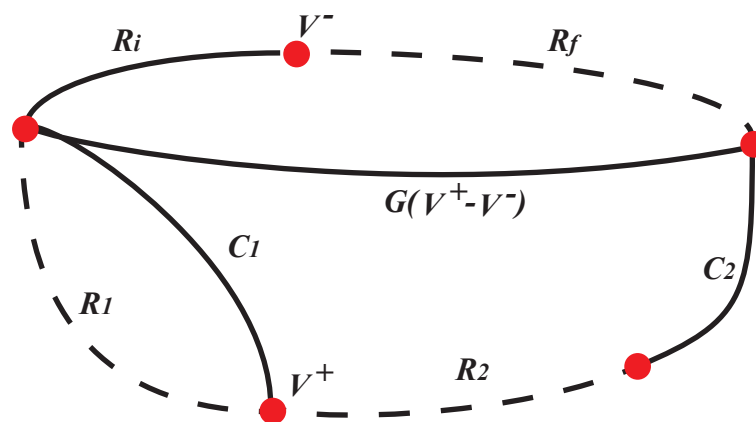


Figura 2.4: Árbol del circuito de la Figura 2.3

definen todos los voltajes de las ramas del árbol y todas las corrientes en las ramas del co-árbol, se plantean las leyes de Kirchhoff para las variables de estado del circuito. En este caso los dos capacitores son variables de estado, por lo que se deben encontrar expresiones que permitan determinar su estado en función de parámetros del circuito.

Las relaciones que primero se obtienen al analizar la corriente de cada capacitor son 2.4 y 2.5. El resto del análisis se realizará con el objetivo de expresar i_{R1} y i_{R2} en función de los parámetros del circuito $R_1, R_2, R_f, R_i, C_1, C_2$.

$$(2.4) \quad C_1 \dot{V}_1 + i_{R1} = i_{R2}$$

$$(2.5) \quad C_2 \dot{V}_2 = i_{R2}$$

Por ley de Kirchhoff de voltaje (LKV) se obtiene la relación de i_{R1} , al estar en paralelo sólo con el capacitor C_1 , por lo tanto $V_{R1} = V_1$. Usando ley de Ohm se despeja el resistor R_1 y se obtiene la

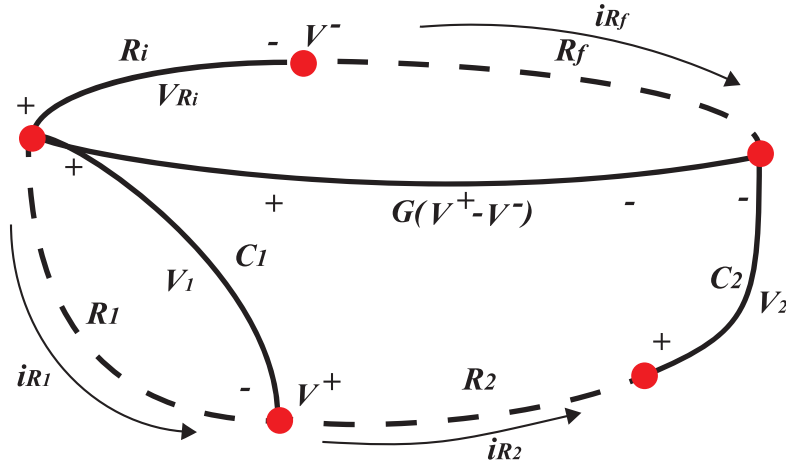


Figura 2.5: Identificación de corrientes de co-árbol y voltajes de árbol del grafo de la Figura 2.4

relación 2.6:

$$(2.6) \quad i_{R1} = \frac{V_1}{R_1}$$

Al plantear la LKV a través de R_f, R_i y $G(V^+ - V^-)$ y expresando el voltaje en función de la corriente, se obtiene la relación 2.7. Por ley de Kirchoff de corriente se tiene: $i_{Rf} = i_{Ri}$, esto al expresarlo en función de voltaje se convierte en: $i_{Ri} = \frac{V_{Ri}}{R_i}$ al sustituirlo y agrupar los términos comunes en 2.7 se obtiene la relación 2.8. Adicionalmente por inspección al diagrama de la Figura 2.5 se plantea la relación 2.9.

$$(2.7) \quad i_{Rf} = \frac{-V_{Ri} + G(V^+ - V^-)}{R_f}$$

$$(2.8) \quad V_{Ri} \left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_f} \right) = \frac{G(V^+ - V^-)}{R_f}$$

$$(2.9) \quad V_{Ri} = V^+ - V^- + V_1$$

Al sustituir 2.8 en 2.9, realizando el producto de cada término y considerando a la ganancia en lazo abierto del OPAMP (G) con un valor ideal de ∞ , todos los términos que tienen a G en el denominador, son muy cercanos a cero, por lo que se desprecian. Después de esta simplificación se obtiene la relación 2.10.

$$(2.10) \quad i_{R2} = \frac{V_1}{R_2} \left(\frac{R_f}{R_i} + 1 \right) - \frac{V_1}{R_2} - \frac{V_2}{R_2}$$

Finalmente al sustituir 2.6 y 2.10 en 2.4 y 2.5 se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(2.11) \quad R_2 C_1 \dot{V}_1 = -\frac{R_2}{R_1} V_1 - V_2 + \frac{R_f}{R_i} V_1$$

$$(2.12) \quad R_2 C_2 \dot{V}_2 = -V_2 + \frac{R_f}{R_i} V_1$$

Combinando las ecuaciones anteriores en una sola se obtiene:

$$(2.13) \quad \dot{V}_1 + \frac{1}{R_2 C_1} \left(\frac{R_2}{R_1} + \frac{C_1}{C_2} - \frac{R_f}{R_i} \right) V_1 + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} V_1 = 0$$

$$(2.14) \quad \ddot{V}_1 + \frac{1}{RC} \left(2 - \frac{R_f}{R_i} \right) \dot{V}_1 + \frac{1}{R^2 C^2} V_1 = 0$$

La ecuación 2.13 se puede simplificar si hacemos $R_1 = R_2 = R$ y $C_1 = C_2 = C$, con lo que se obtiene la ecuación 2.14, en donde la frecuencia de oscilación es $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ y la ganancia $\xi = 2 - \frac{R_f}{R_i}$, de manera que si escogemos a $R_i = \frac{1}{2} R_f$, tenemos un oscilador electrónico sin amortiguamiento, con amplitud constante. Sin embargo, debido a las limitaciones para lograr este valor exacto para R_i o R_f , en la implementación, el voltaje de salida de este circuito tenderá a cero o al voltaje de alimentación del OPAMP como se puede ver en la Figura 2.6.

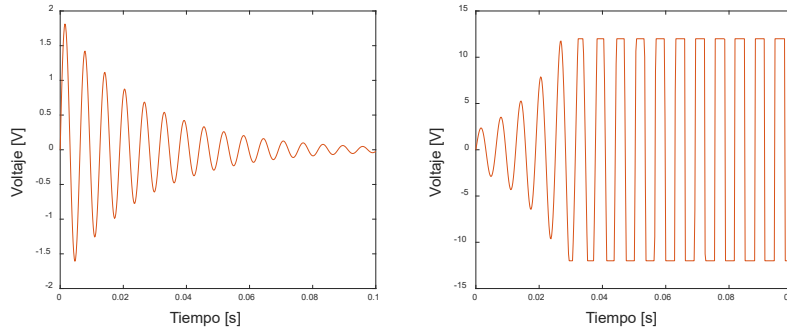


Figura 2.6: Estabilidad e inestabilidad del oscilador de Wien, en el primer caso $\xi > 0$, por lo que el voltaje de salida del circuito tiende a cero, en el segundo caso $\xi < 0$, con esto el voltaje de salida alterna entre el voltaje de alimentación del OPAMP, en este caso se utilizó +12V -12V.

Desafortunadamente, las pequeñas variaciones de resistencia que pueden existir debido a cambios de temperatura, o la forma de fabricación de resistores, impiden lograr que ξ sea estrictamente igual a cero, y se puede encontrar buena cantidad de bibliografía dedicada a resolver este problema, es decir ¿cómo se puede controlar el valor de ξ de tal manera que siempre se tenga

una amplitud constante?. L. Lerner [6] resalta algunas de las formas más prácticas de resolver este problema. El uso de una lámpara o termistor, permite que la temperatura defina un valor de resistencia variable y con ello tratar de aproximarse a $\xi = 0$, sin embargo un cambio rápido en la temperatura afectará de manera significativa al oscilador. Otros métodos para evitar la inestabilidad del oscilador es utilizar un limitador de voltaje, compuesto por dos diodos conectados en la entrada negativa del OPAMP, lo que evita que el voltaje de salida se sature. El arreglo implementado en este trabajo utiliza un transistor de efecto de campo (JFET), como un resistor variable, que depende del voltaje de salida del OPAMP; la característica común de estas estrategias es el uso de elementos no lineales.

2.3 Transistores de tipo JFET

Los transistores de efecto de campo, en específico los de unión de compuerta (JFET) son dispositivos con tres terminales: drain, gate y source, (D , G y S) este tipo de transistores se caracterizan por controlarse con voltaje, están compuesto por el conjunto de semiconductores tipo P y N, en la región lineal la corriente que pasa de S a D se presenta en la ecuación 2.15 y la denotamos I_D , I_{DSS} es la corriente de saturación, V_P es el voltaje de corte, V_{GS} es el voltaje aplicado a la compuerta del transistor y V_{DS} es el voltaje entre D y S , la curva característica de este dispositivo, en específico para el transistor BF245A se presenta en la Figura 2.7.

$$(2.15) \quad I_D = \frac{2I_{DSS}}{V_P^2} \left(V_{GS} - V_P - \frac{V_{DS}}{2} \right) V_{DS}$$

En la Figura 2.7, podemos observar el cambio de resistencia entre los canales D y S , usando el inverso de la derivada de la curva, a simple vista se puede observar que la resistencia en la región lineal es menor comparado con la región de saturación, este cambio en su resistencia entre los canales D y S es una característica favorable para lograr estabilizar el oscilador de Wien, debido a que es necesario tener un valor de resistencia que dependa de la amplitud del circuito.

2.4 Mejora del modelo matemático

El oscilador de Wien (Figura 2.3) representado por la ecuación 2.13, es el modelo más sencillo de este circuito. En este trabajo buscamos profundizar más para obtener un modelo matemático que

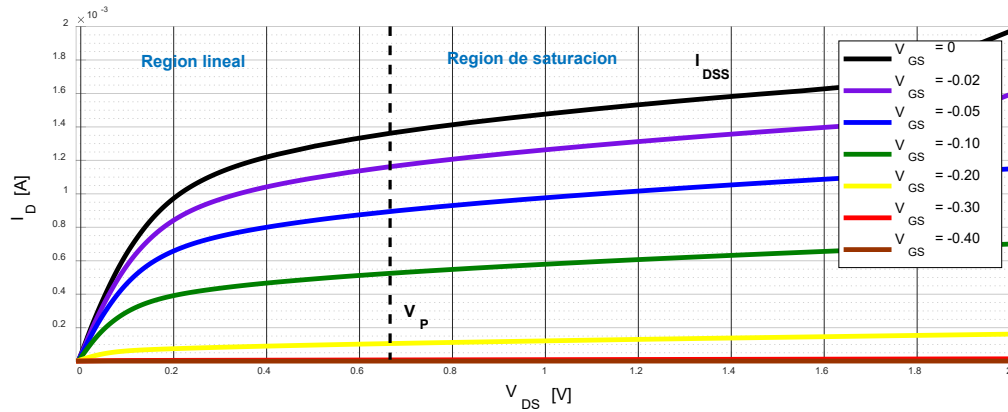


Figura 2.7: Curva característica del transistor BF245A, se midió con un amplificador lockin, en esta figura se muestra la región lineal y la región de saturación, y su cambio al variar el voltaje en la compuerta V_{GS} .

incluya elementos como la influencia del OPAMP en el voltaje de salida o la manera en que el ruido puede modificar la estabilidad del circuito.

2.4.1 OPAMP con retroalimentación negativa

Cuando se realiza el análisis de circuitos, como es el caso de la Figura 2.3 y la ecuación 2.13, generalmente el OPAMP se sustituye por una fuente de voltaje dependiente de la diferencia de voltaje entre las entradas positiva y negativa. A partir de esta sustitución se obtienen las propiedades del OPAMP ideal, sin embargo este modelo de primer orden para el OPAMP [11] no es válido en los casos en los que se tiene retroalimentación positiva o la diferencia de potencial de las referencias es cero (circuito comparador), por lo que es necesario el modelo del OPAMP de orden 1 [8].

El modelo del OPAMP de orden 1, como se muestra en la Figura 2.8, consiste en sustituir el OPAMP por dos fuentes de voltaje dependientes, una de ellas por la diferencia de voltajes de entrada ($V^+ - V^-$), y la segunda por el voltaje del capacitor (V^*). En este modelo se toma en cuenta la ganancia a lazo abierto del OPAMP (A).

$$(2.16) \quad \frac{dV_O}{dt} + \frac{A}{RC} (\gamma^- - \gamma^+) V_o = 0$$

$$(2.17) \quad \gamma^- = \frac{R_3}{R_3 + R_4}$$

$$(2.18) \quad \gamma^+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

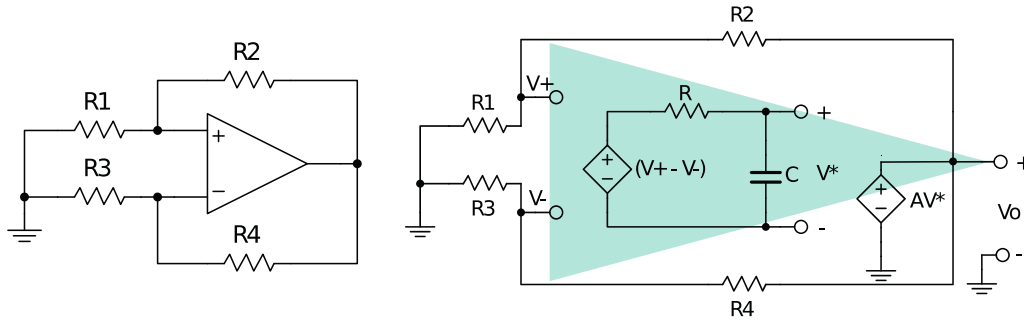


Figura 2.8: Representación del mismo circuito, primero utilizando el modelo básico del OPAMP y después usando el modelo de orden 1, en un OPAMP de uso general: $R \approx 1k\Omega$, $C \approx 10\mu$ y $A \approx 10^5$.

La ecuación 2.16 describe el voltaje de salida del circuito en la Figura 2.8, la solución para V_o es $ke^{-\frac{A}{RC}(\gamma^- - \gamma^+)t}$, y dependiendo de la combinación de valores de resistencia para R_1 , R_2 , R_3 y R_4 tendremos un voltaje, creciente, decreciente o constante. Esta solución corresponde a los resultados que uno puede obtener implementando el circuito físicamente, por lo que es indispensable incluirlo en el análisis del oscilador de Wien.

2.4.2 Ruido en elementos electrónicos

Debido a la forma en que fueron fabricados los componentes electrónicos de manera inherente generan señales aleatorias, que son consecuencia del efecto de la temperatura, cambios de corriente, frecuencia de operación o cambios de voltaje. Específicamente, en el oscilador de Wien el ruido es importante debido a que el voltaje de salida es activado por una pequeña señal de ruido.

El modelo de un resistor con ruido térmico se puede representar utilizando una fuente de corriente aleatoria, en paralelo con el resistor cuyo valor de corriente depende de la temperatura y de su valor de resistencia:

$$(2.19) \quad V_{RMS\ Th} = \sqrt{4k_B T R B}$$

En donde k_B es la constante de Boltzmann, T es la temperatura kelvin, R representa el valor de resistencia y B especifica el ancho de banda utilizado. Este voltaje de ruido es de color blanco y posee una distribución gaussiana [14].

Tomando en cuenta el modelo del OPAMP de orden 1 y el ruido en los componentes resistivos, se

este análisis se tiene el siguiente sistema de ecuaciones 2.20:

$$(2.20) \quad R_1 C_1 \dot{V}_{C1} = \frac{R_1}{R_2} V_{out} + R_1 I_{noise} - \left(1 + \frac{R_1}{R_2} V_{C1}\right) - \frac{R_1}{R_2} V_{C2}$$

$$(2.21) \quad R_2 C_2 \dot{V}_{C2} = V_{out} - V_{C1} - V_{C2}$$

$$(2.22) \quad \alpha V_{out} = -\frac{R_i}{R_i + R_f} V_{out} + V_{C1}$$

En donde $\alpha = \frac{RC}{A}$ y A es la ganancia a lazo abierto del OPAMP. El ruido generado por los elementos resistivos y el OPAMP del circuito en la Figura 2.9, considerando la superposición y la regla de suma de ruido, se puede definir una fuente de ruido equivalente al ruido generado por todos los resistores capacitores y OPAMP [12]. Para simplificar las ecuaciones, se considera una sola fuente de corriente aleatoria I_{noise} . El sistema de ecuaciones 2.20 se puede escribir como una sola ecuación que describe el voltaje de salida V_{out} .

$$(2.23) \quad \alpha \frac{R_i + R_f}{R_i} \ddot{V}_{out} + \left(1 + \alpha \frac{(R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2)(R_i + R_f)}{R_1 C_1 R_i R_2 C_2}\right) \dot{V}_{out} + \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} - \frac{R_f}{R_i R_2 C_1} + \alpha \frac{R_i + R_f}{R_1 C_1 R_i R_2 C_2}\right) V_{out} = 0$$

Si $\alpha = 0$, $R_1 = R_2$ y $C_1 = C_2$, se obtiene el mismo oscilador sin amortiguamiento que en la ecuación 2.14. Para analizar el comportamiento de la ecuación 2.23, simplificamos haciendo $R_1 = R_2$, $C_1 = C_2$ y $\tau = R_1 C_1$:

$$(2.24) \quad \alpha \frac{R_i + R_f}{R_i} \ddot{V}_{out} + \left(1 + \alpha \frac{3(R_i + R_f)}{R_i \tau}\right) \dot{V}_{out} + \left(\frac{2}{\tau} - \frac{R_f}{R_i \tau} + \alpha \frac{R_i + R_f}{R_i \tau^2}\right) V_{out} + \frac{1}{\tau^2} V_{out} = 0$$

Al ser una ecuación de tercer orden se analiza la estabilidad del sistema igualando la ecuación 2.24 a: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, la condición de estabilidad sólo se logra si dos de las raíces de la ecuación característica del sistema son complejas conjugadas con parte real igual a cero y una real, para determinar esta condición es necesario encontrar las constantes a , b y c y plantear la relación que cumple con dicha condición de estabilidad. Con esto podemos determinar la razón entre la frecuencia de oscilación (τ) y la relación entre resistores que controlan la ganancia del circuito $\left(\frac{R_f}{R_i}\right)$. En la ecuación 2.25 se plantea la relación que deben de tener $D = \frac{R_f}{R_i}$ y τ .

$$(2.25) \quad \left(-3\alpha + \frac{3\alpha^2}{\tau}\right)D^2 + \left(-\tau + 3\alpha + \frac{6\alpha^2}{\tau}\right)D + \left(2\tau + 6\alpha + \frac{3\alpha^2}{\tau}\right) = 0$$

En la Figura 2.11 se muestra la influencia del OPAMP, manifestado por el parámetro α de la ecuación 2.25, en la frecuencia de oscilación y en el decaimiento de la señal de salida.

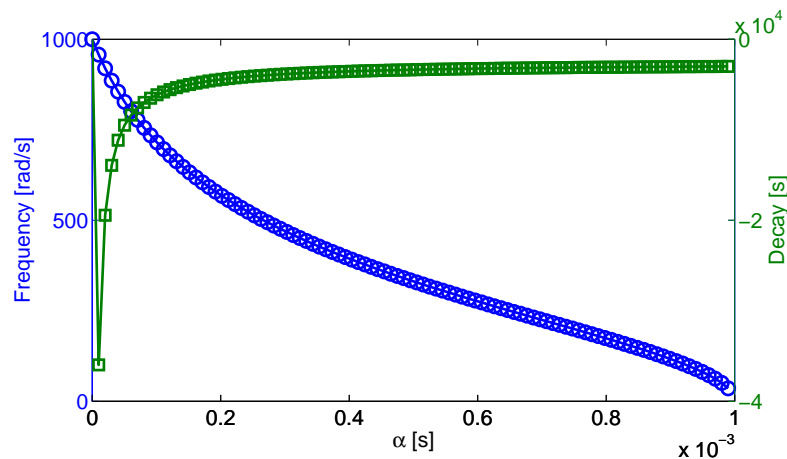


Figura 2.11: Efecto del parámetro α introducido por el OPAMP. En la señal de salida, este parámetro afecta tanto a la frecuencia de oscilación como al decaimiento de la señal, es decir que el ruido generado perturbaciones externas podría alterar la amplitud, y frecuencia del oscilador de Wien, a su vez este tipo de fluctuaciones permiten al oscilador mantenerse siempre activo, es decir, no requiere de condiciones iniciales específicas para comenzar a oscilar, en su lugar, el amplificador toma cualquier fluctuación de voltaje y la amplifica, para que el oscilador comience a funcionar, esto ocurre inmediatamente cuando se alimenta al OPAMP con su voltaje de polarización.

2.5 Función de transferencia

A simple vista podría ser muy fácil confundir a un oscilador autosostenido con un oscilador armónico, sin embargo, en el dominio de la frecuencia podemos hacer una distinción inmediata observando su función de transferencia. Por ejemplo, un oscilador armónico no amortiguado tiene un ancho de banda igual a cero, pero cuando éste se vuelve críticamente amortiguado o sobre amortiguado tienen ancho de banda diferente de cero. Un oscilador autosostenido tiene un ancho de banda diferente de cero y, como consecuencia de esto, es capaz de interactuar con otros osciladores.

El oscilador de Wien lineal es matemáticamente idéntico a un oscilador RLC; un oscilador RLC no lineal descrito por la ecuación 2.48 que se desarrolla en las secciones siguientes, es matemáticamente idéntico a un oscilador de Van der Pol y puede ser materializado como un oscilador de Wien no lineal tal y como se muestra en la Figura 3.1. En la Figura 2.12 se muestra las distintas respuestas en frecuencia que tienen estos osciladores: dos osciladores RLC amortiguados comparados con el modelo de un oscilador de Van der Pol y un oscilador de Wien no lineal realizado experimentalmente, la presencia de asimetría en las pendientes son consecuencia de la retroalimentación en el sistema, tal es el caso del oscilador de Van der Pol y el oscilador de Wien no lineal. Es importante notar en la Figura 2.12 que la pendiente del oscilador RLC antes de su frecuencia central es mayor que cero, para el oscilador de Van der Pol y el oscilador de Wien, la pendiente es cercana a cero, esto es lo que los distingue y lo que permite que sean susceptibles a modificar su estado en presencia de una señal externa con una frecuencia específica.

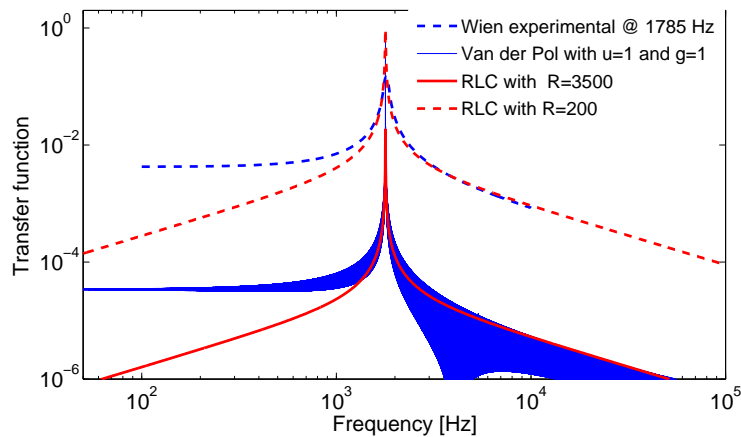


Figura 2.12: Comparación de la respuesta en el dominio de la frecuencia entre el oscilador de Wien, Van der Pol y un oscilador RLC todos definidos con una frecuencia central de 1785 Hz.

2.6 Injection locking

En general cuando un oscilador autosostenido interactúa con una señal externa, pueden ocurrir dos situaciones: hay presencia de dos frecuencias de oscilación al mismo tiempo o la frecuencia del oscilador autosostenido se iguala a la frecuencia de la señal externa [7]. Tratar de igualar

las frecuencias de oscilación de dos osciladores armónicos es complicado debido a que el ancho espectral de éstos es demasiado angosto. Un oscilador autosostenido puede incluir elementos capaces de disipar energía, esto provoca que tenga un ancho espectral significativo y, como consecuencia sea capaz de empatar su frecuencia de oscilación con otros sistemas. Si a un oscilador autosostenido se le perturba con una señal externa, cuya frecuencia de oscilación se encuentra lejos de la frecuencia definida por el oscilador autosostenido, ambas frecuencias estarán presentes, sin embargo, cuando la diferencia entre frecuencias es menor, el oscilador autosostenido acoplará su frecuencia y fase a la señal externa. A esta última condición se le conoce como la zona muerta del oscilador. Como ejemplo para analizar este fenómeno tomamos un oscilador RLC definido por la ecuación 2.26 como se muestra en la Figura 2.13 [1][13].

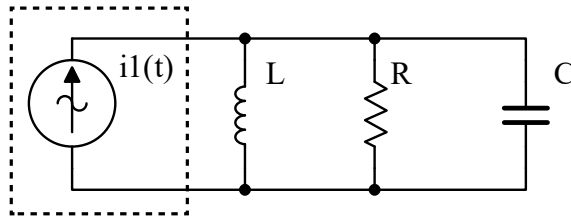


Figura 2.13: Oscilador RLC con una fuente de corriente externa (línea discontinua) para explicar el empate de frecuencias.

$$(2.26) \quad i_1 = C \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R} + \frac{1}{L} \int v(t) dt$$

Sí proponemos que la fuerza externa sea de la forma: $i_1 = I_1 e^{i\omega_1 t} e^{i\phi_1(t)}$, la forma de la respuesta del sistema debe de ser: $v(t) = V(t) e^{i\omega_1 t} e^{i\phi(t)}$, en donde sólo ocurrió un cambio de fase. Es posible reescribir la ecuación 2.26 planteando la derivada de $v(t)$:

$$(2.27) \quad \dot{v}(t) = \dot{V}(t) e^{i\phi(t)} e^{i\omega_1(t)t} + i\dot{\phi}V(t) e^{i\phi(t)} e^{i\omega_1(t)t} + i\omega_1 V(t) e^{i\phi(t)} e^{i\omega_1(t)t}$$

Y la integral de $v(t)$, el tercer término del lado derecho de la ecuación 2.26:

$$(2.28) \quad \int \left(V(t) e^{i\phi(t)} \right) \left(e^{i\omega_1(t)t} \right) dt$$

Para resolver esta integral es necesario integrar por partes⁴ dos veces y se desprecian los términos resultantes de volver a integrar por partes, estos términos denotados por términos superiores

⁴ $\int u dv = uv - \int v du$

(TS), en el desarrollo 2.29, al estar divididos entre ω_1^n con $n > 2$, en donde n es el número de veces que se integró por partes, se reducen a tal punto que no son significantes y se aproxima la integral.

$$\begin{aligned}
 \int V(t)e^{i\phi(t)}e^{i\omega_1(t)t}dt &= -\frac{i}{\omega_1}v(t) - \int \frac{d(V(t)e^{i\phi(t)})}{dt} \left(-\frac{i}{\omega_1}e^{i\omega_1(t)t}\right)dt \\
 &= -\frac{i}{\omega_1}v(t) + \frac{i}{\omega_1} \int \left(\frac{d(V(t)e^{i\phi(t)})}{dt}\right) \left(e^{i\omega_1(t)t}\right)dt \\
 (2.29) \quad &= -\frac{i}{\omega_1}v(t) + \frac{i}{\omega_1} \left\{ \left(\frac{d(V(t)e^{i\phi(t)})}{dt}\right) \left(-\frac{i}{\omega_1}e^{i\omega_1(t)t}\right) + TS \right\} \\
 &\approx -\frac{i}{\omega_1}v(t) + \frac{1}{\omega_1^2} \left\{ (\dot{V}e^{i\phi(t)} + i\dot{\phi}V(t)e^{i\phi(t)}) \left(e^{i\omega_1(t)t}\right) \right\} \\
 &\approx -\frac{i}{\omega_1}v(t) + \frac{1}{\omega_1^2} \frac{v(t)\dot{V}}{V} + \frac{i\dot{\phi}v(t)}{\omega_1^2}
 \end{aligned}$$

Al sustituir 2.27 y 2.29 en la ecuación 2.26, agrupando términos comunes, se obtiene:

$$(2.30) \quad I_1(t)e^{i(\phi_1(t)-\phi(t))} = C(\dot{V}(t) + i\dot{\phi}V(t) + i\omega_1V(t)) + \left(\frac{1}{R}\right)V(t) + \frac{1}{L} \left(-\frac{i}{\omega_1}V(t) + \frac{1}{\omega_1^2}\dot{V} + \frac{i\dot{\phi}V(t)}{\omega_1^2}\right)$$

Al separar la parte real e imaginaria de la ecuación 2.30:

$$(2.31) \quad I_1(t)\cos(\phi_1(t) - \phi(t)) = C\dot{V}(t) + \left(\frac{1}{R}\right)V(t) + \frac{1}{L} \frac{1}{\omega_1^2}\dot{V}$$

$$(2.32) \quad I_1(t)\sin(\phi_1(t) - \phi(t)) = C(\dot{\phi}V(t) + \omega_1V(t)) + \frac{1}{L} \left(-\frac{V(t)}{\omega_1} + \frac{\dot{\phi}V(t)}{\omega_1^2}\right)$$

Tomando la definición habitual de frecuencia natural $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ y agrupando términos en las ecuaciones 2.31 y 2.32 se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$(2.33) \quad \left(1 + \frac{\omega_0^2}{\omega_1^2}\right) \frac{dV(t)}{dt} + \frac{V(t)}{RC} = \frac{I_1(t)}{C} \cos(\phi_1(t) - \phi(t))$$

$$(2.34) \quad \left(1 + \frac{\omega_0^2}{\omega_1^2}\right) \frac{d\phi(t)}{dt} + \left(\omega_1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_1}\right) = \frac{I_1(t)}{CV(t)} \sin(\phi_1(t) - \phi(t))$$

La señal de respuesta del circuito, por lo tanto, es definida por la amplitud $V(t)$ y por la fase $\phi(t)$.

Con las ecuaciones 2.33 y 2.34 se puede analizar el caso en que $\phi_1 = 0$ (ecuación 2.35) y en estado estacionario (ecuación 2.36):

$$(2.35) \quad \left(1 + \frac{\omega_0^2}{\omega_1^2}\right) \dot{\phi} = - \left(\omega_1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_1}\right) - \left(\left(1 + \frac{\omega_0^2}{\omega_1^2}\right) \frac{\dot{V}(t)}{V(t)} + \frac{1}{CR} \right) \frac{\sin(\phi(t))}{\cos(\phi(t))}$$

$$(2.36) \quad \left| RC \cos(\phi(t)) \left(\omega_1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_1}\right) \right| \leq 1$$

Por lo que la ecuación 2.36 es la condición que debe de cumplir el oscilador de la Figura 2.13 para que el voltaje del circuito se acople a la misma frecuencia que la fuente de excitación i_1 , es decir sólo exista una frecuencia en el voltaje del circuito o, en otros términos, que se encuentre en la zona muerta del oscilador, que describe el ancho de banda del oscilador autosostenido, $BW = \frac{1}{RC}$. Este desarrollo matemático empleado para encontrar una expresión de la zona muerta en la interacción de un oscilador con una fuerza externa, se puede realizar para analizar la interacción entre dos osciladores RLC acoplados por un resistor, como se muestra en la Figura 2.14. n

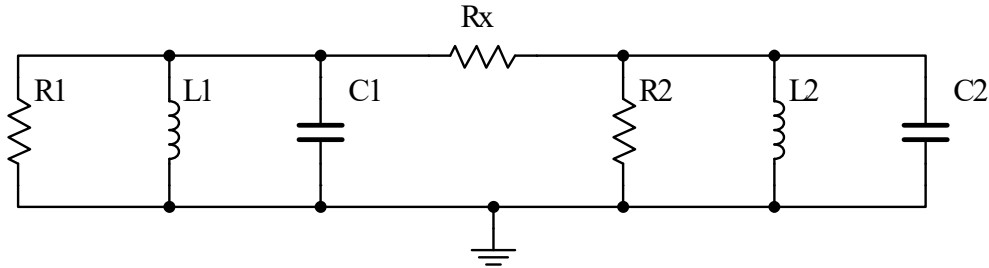


Figura 2.14: Dos osciladores RLC acoplados por un resistor R_x , este resistor permite el intercambio de corriente entre ambos osciladores.

el circuito de la Figura 2.14 sólo se tienen dos voltajes desconocidos: $v_1(t) = V_1(t)e^{i\omega_1 t}e^{i\phi_1(t)}$ y $v_2(t) = V_2(t)e^{i\omega_1 t}e^{i\phi_2(t)}$ en éstos sólo hay presencia de una frecuencia ω_1 y fase distinta de cero, usando las leyes de Kirchoff se plantean las ecuaciones del circuito:

$$(2.37) \quad C_1 \frac{dv_1(t)}{dt} = -\frac{v_1(t)}{R_1} - \frac{1}{L_1} \int v_1(t) dt - \frac{v_1(t) - v_2(t)}{R_x}$$

$$(2.38) \quad C_2 \frac{dv_2(t)}{dt} = -\frac{v_2(t)}{R_2} - \frac{1}{L_2} \int v_2(t) dt + \frac{v_1(t) - v_2(t)}{R_x}$$

De nuevo es necesario sustituir las expresiones para $v_1(t)$ y $v_2(t)$ y sus respectivas derivadas e integrales aproximadas en las ecuaciones 2.37 y 2.38:

$$(2.39) \quad C_1 \frac{dv_1(t)}{dt} = -\frac{v_1(t)}{R_1} - \frac{1}{L_1} \left(-\frac{i}{\omega_1} v_1(t) + \frac{1}{\omega_1^2} \frac{v_1(t) \dot{V}_1}{V_1} + \frac{i \dot{\phi}_1 v_1(t)}{\omega_1^2} \right) - \frac{v_1(t) - v_2(t)}{R_x}$$

$$(2.40) \quad C_1 \frac{dv_1(t)}{dt} = -\frac{v_1(t)}{R_1} - \frac{1}{L_1} \left(-\frac{i}{\omega_1} v_1(t) + \frac{1}{\omega_1^2} \frac{v_1(t) \dot{V}_1}{V_1} + \frac{i \dot{\phi}_1 v_1(t)}{\omega_1^2} \right) - \frac{v_1(t) - v_2(t)}{R_x}$$

Al separar la parte real e imaginaria de 2.39 y 2.40, y usando la definición habitual de frecuencia radial de un oscilador RLC $\omega_{01}^2 = \frac{1}{L_1 C_1}$, $\omega_{02}^2 = \frac{1}{L_2 C_2}$, se deduce el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(2.41) \quad \left(1 + \frac{\omega_{01}^2}{\omega_1^2} \right) \frac{dV_1(t)}{dt} + \frac{V_1(t)}{C_1 R_1} + \frac{V_1(t)}{C_1 R_x} = \frac{V_2(t)}{C_1 R_x} \cos(\phi_2(t) - \phi_1(t))$$

$$(2.42) \quad \left(1 + \frac{\omega_{01}^2}{\omega_1^2} \right) \frac{d\phi_1(t)}{dt} + \left(\omega_1 - \frac{\omega_{01}^2}{\omega_1} \right) = \frac{V_2(t)}{R_x C_1 V_1(t)} \sin(\phi_2(t) - \phi_1(t))$$

$$(2.43) \quad \left(1 + \frac{\omega_{02}^2}{\omega_1^2} \right) \frac{dV_2(t)}{dt} + \frac{V_2(t)}{C_2 R_2} + \frac{V_2(t)}{C_2 R_x} = \frac{V_1(t)}{C_2 R_x} \cos(\phi_1(t) - \phi_2(t))$$

$$(2.44) \quad \left(1 + \frac{\omega_{02}^2}{\omega_1^2} \right) \frac{d\phi_2(t)}{dt} + \left(\omega_1 - \frac{\omega_{02}^2}{\omega_1} \right) = \frac{V_1(t)}{R_x C_2 V_2(t)} \sin(\phi_2(t) - \phi_1(t))$$

Utilizando las ecuaciones 2.43 y 2.44 se puede analizar el caso cuando $R_x \rightarrow \infty$, esto es equivalente a quitar la conexión entre ambos osciladores, por lo que no intercambian energía entre sí. Bajo estas condiciones se tiene: $\phi_1 = 0$, $\omega_1 = \omega_{01}$ y $\frac{d\phi_2}{dt} = \omega_{02} - \omega_{01}$.

El caso contrario es poner en corto ambos osciladores con $R_x \rightarrow 0$. Bajo estas condiciones se tiene un nuevo arreglo del circuito de la Figura 2.14 y, ahora se tiene la misma fase $\phi_1 = \phi_2$ y una nueva frecuencia de oscilación $\omega_1^2 = \frac{\omega_{01}^2 C_2 + \omega_{02}^2 C_1}{C_1 + C_2}$.

Para cualquier valor de R_x , bajo la condición de que el oscilador se encuentre en la zona muerta, y por lo tanto sólo hay presencia de una frecuencia, se tiene la siguiente expresión para esa única frecuencia:

$$(2.45) \quad \omega_f = \frac{\omega_{01}^2 + a \omega_{02}^2}{1 + a}$$

$$(2.46) \quad a = \frac{BW_2(R_x + R_2)}{BW_1(R_x + R_1)}$$

En la ecuación, 2.45 BW representa el ancho de banda del oscilador $BW_1 = \frac{1}{R_1 C_1}$ y $BW_2 = \frac{1}{R_2 C_2}$. Esta frecuencia de oscilación final representa la frecuencia a la cual se encuentran oscilando ambos osciladores. Nótese que tiene alta dependencia del ancho de banda, un ejemplo de ello se realiza experimentalmente en la Figura 4.2, en donde se utilizaron dos osciladores de Wien no lineales.

2.7 Características de los osciladores autosostenidos

Un reloj de péndulo, una luciérnaga emitiendo luz, la contracción del corazón, la longitud de onda emitida por un láser, son ejemplos de osciladores autosostenidos. Las principales características de estos sistemas es que cada uno tiene una frecuencia definida por el mismo sistema, también tienen una fuente de energía que permiten compensar la disipación, lo que permite tener amplitudes constantes. La única manera de describir matemáticamente estos sistemas es haciendo uso de sistemas de ecuaciones no lineales. La manera de insertar una no linealidad que pueda mantener amplitud constante a la salida del OPAMP, en el circuito de la Figura 2.3, es utilizar un elemento electrónico cuya relación voltaje, corriente o resistencia, sea altamente no lineal, tal es el caso de los termistores, cuya resistencia varía de manera no lineal con el cambio de temperatura y, es el mismo caso para transistores, lámparas, diodos entre otros. El comportamiento del oscilador de Wien no lineal puede ser descrito retomando la ecuación 2.14, proponiendo que R_f dependa del valor de voltaje de salida, de forma que $\frac{R_f}{R_i} = a - bV_1^2$, para $a > 2$ y $b > 0$, se obtiene un sistema no lineal autosostenido:

$$(2.47) \quad \ddot{V}_1 + \frac{1}{RC} (2 - a + bV_1^2) \dot{V}_1 + \frac{1}{R^2 C^2} V_1 = 0$$

La ecuación 2.47 es de la forma:

$$(2.48) \quad \ddot{V}_1 - u (1 - gV_1^2) \dot{V}_1 + \omega_0^2 V_1 = 0$$

En donde g define la amplitud de oscilación A ($A = \sqrt{\frac{4}{g}}$), con una forma de onda cuasi-senoidal para valores pequeños de u ($u < 100$), con un tiempo de recuperación después de una perturbación ($\tau = \frac{1}{u}$) definido por el parámetro u .

Sí se quisiera realizar un oscilador RLC en paralelo, como se muestra en la Figura 2.15, tal que

obedezca la ecuación de Van der Pol 2.48, sería necesario agregar un elemento resistivo no lineal, cuya conductancia necesariamente tendría la forma de la ecuación 2.49.

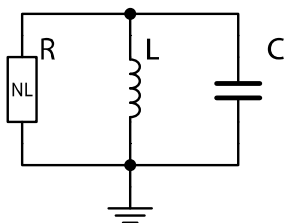


Figura 2.15: Oscilador autosostenido RLC, en donde el elemento resistivo es no lineal.

$$(2.49) \quad \frac{1}{R} = -uC + \frac{1}{3}uCgV^2$$

Con un voltaje senoidal de amplitud $\sqrt{\frac{4}{g}}$, en un periodo se produce una variación de la conductancia $\frac{1}{R} = \left[-uC, \pm \frac{uC}{3}\right]$, como el que se muestra en la Figura 2.16.

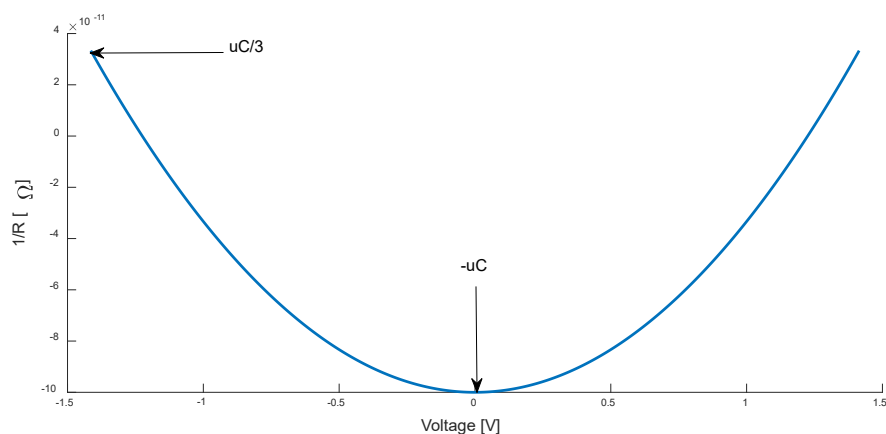


Figura 2.16: Conductancia de elemento resistivo no lineal, resultado de la ecuación 2.49, para $u = 10$, $C=1 \times 10^{-3}$, $g = 2$. Esta curva de conductancia debería seguir el oscilador para lograr ser autosostenido.

La curva de conductancia mostrado en la Figura 2.16 es el adecuado, en un caso hipotético, para que un oscilador RLC sea autosostenido. El cambio de signo en la conductancia, a su vez, modifica el signo del término de ganancia del sistema, por lo que le permite al oscilador recuperar y disipar energía.

Otra manera de obtener un oscilador de Van der Pol, utilizando el oscilador de Wien, es implementando un termistor, de tal manera que la relación entre R_f y R_i sea de la forma: $\frac{R_f}{R_i} = a - bT$, en donde T representa la temperatura, que sigue las leyes de Joule (aumento de temperatura) y Fourier (disminución de temperatura).

DISEÑO EXPERIMENTAL

3.1 Descripción del arreglo electrónico

El circuito implementado se presenta en la Figura 3.1. Los elementos R_1 , R_2 , C_1 y C_2 definen la frecuencia de oscilación $\omega = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}$, R_4 y R_5 forman un divisor de voltaje, que es rectificado por un diodo, el capacitor C_3 regula la velocidad de cambio en la resistencia del transistor (R_j), que está en serie con R_k y mantienen una relación cercana a $\frac{R_f}{R_k + R_j} \approx 2$, de tal manera que el voltaje a la salida tenga una forma senoidal.

El control de la amplitud en V_{out} se logra al modificar la ganancia del sistema para evitar la inestabilidad o la estabilidad en cero, para ello es necesario tener un voltaje a la entrada del transistor como se muestra en la Figura 3.2. Cuando V_{out} se encuentra en un valor máximo (2.5 V) R_j es menor, cuando V_{out} tiene un valor mínimo (-2.5 V), en este caso se requiere que R_j sea mayor para regresar a un valor máximo de V_{out} .

Comúnmente se utilizan los transistores 2N3819 o BF245A para controlar la ganancia del oscilador de Wien, sin embargo, cualquier transistor de tipo JFET o MOSFET, que tengan un cambio de resistencia significativo funcionan para estabilizar el oscilador, sólo es necesario cambiar la amplitud de la señal a la entrada de éstos. Por ejemplo, para el transistor BF245A en la Figura 3.3 se muestra cómo la resistencia equivalente al variar el voltaje de entrada (V_{GS}) tiene un rango aproximado entre 200 Ω y 5000 Ω .

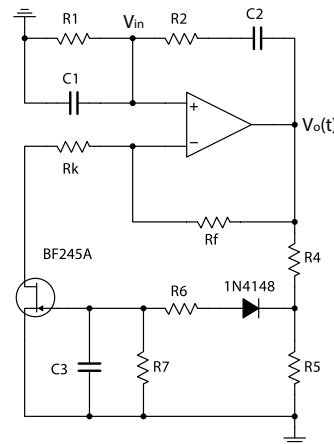


Figura 3.1: Oscilador de Wien no lineal. Se utiliza un transistor como un resistor dependiente del voltaje de salida V_{out} .

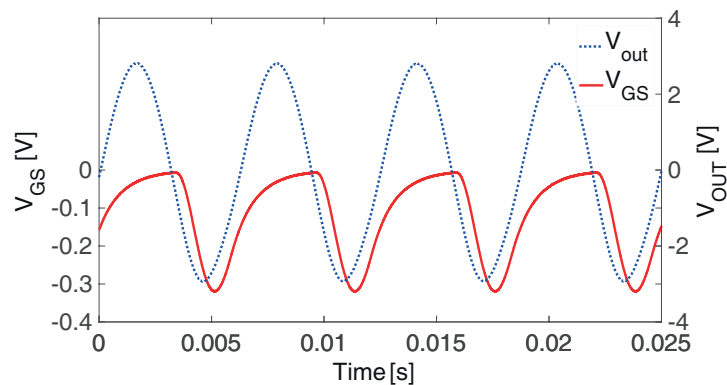


Figura 3.2: Se muestra en línea discontinua el voltaje de salida y en línea continua el voltaje a la entrada (gate) del transistor, quien define la manera en que se controla la resistencia equivalente entre drain y source en el transistor.

3.2 Acoplamiento forzado

Tratar de acoplar un sistema autosostenido a una señal externa, permite conocer la zona muerta característica de dicho oscilador, esto se presenta en la Figura 4.1, donde se muestra la condición de locking, con datos experimentales de un oscilador autosostenido de Wien con una frecuencia natural centrada en 1800 Hz, una señal externa acoplada con un resistor de 100 k Ω en V_{in} , f_1 representa la frecuencia de oscilación de la señal externa, la zona en donde la amplitud de la frecuencia f_0 es muy cercana a cero, se le llama zona muerta.

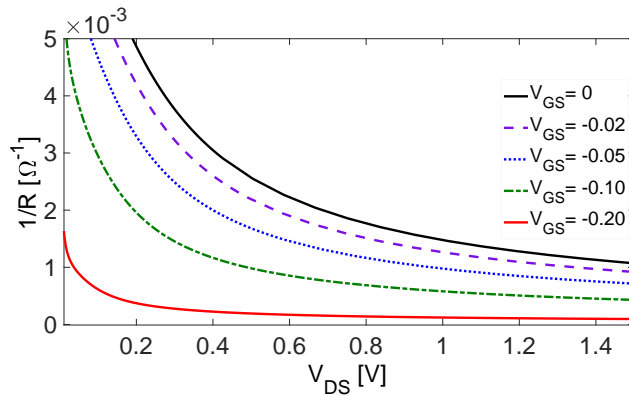


Figura 3.3: Curvas de resistencia equivalente entre drain y source del transistor BF245A, para distintos voltajes de entrada en gate.

En este experimento se utilizó un generador de funciones y un osciloscopio, ambos comunicados

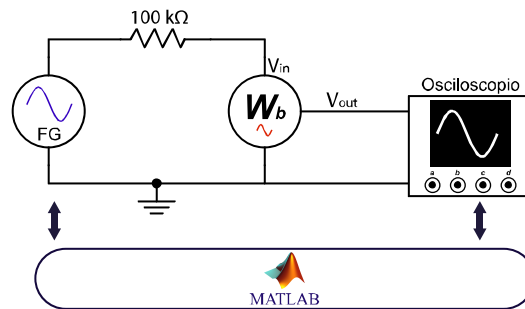


Figura 3.4: Arreglo experimental. FG representa un generador de funciones; tanto el osciloscopio como el generador de funciones se comunican con Matlab.

con Matlab en donde se implementó una rutina para la adquisición automática de datos y el cambio de frecuencia en el generador de funciones. Se implementó en Matlab la transformada de Fourier con alta resolución de los datos adquiridos como se muestra en la Figura 3.5. Recuperando el valor máximo de cada pico en la Figura 3.5, se obtiene la Figura 4.1. Esta última figura representa la zona muerta del oscilador de Wien, alrededor de su frecuencia central.

3.3 Acoplamiento entre dos sistemas no lineales

El uso de un oscilador de Wien no lineal, como se muestra en la Figura 3.1, para analizar el acoplamiento con otros sistemas es conveniente debido a que tiene un nodo de entrada. En la

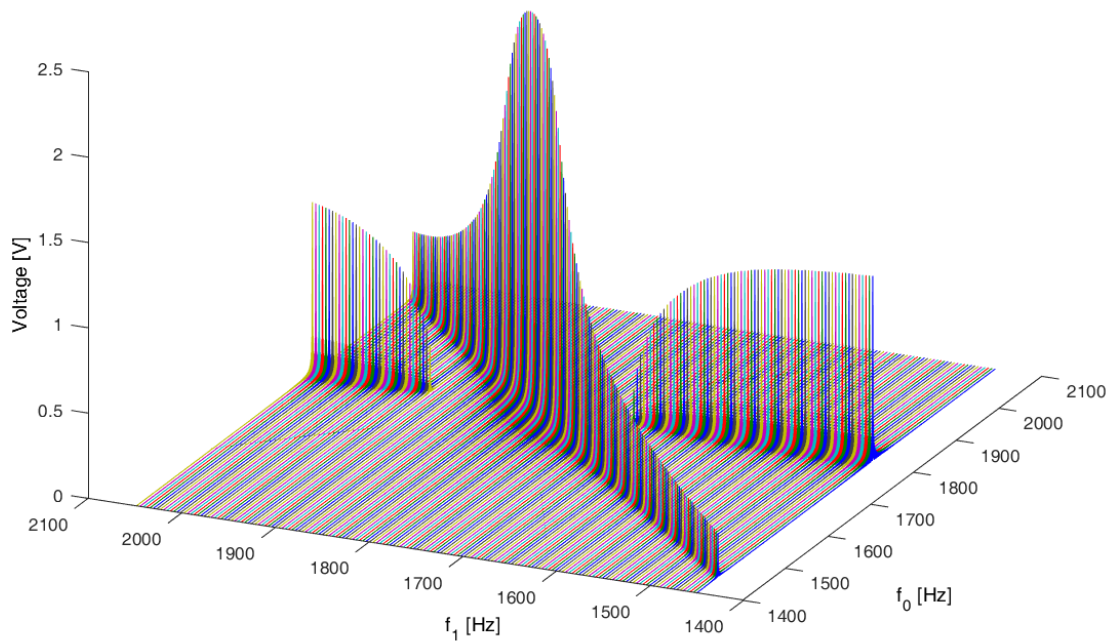


Figura 3.5: Transformadas de Fourier de los datos obtenidos en el experimento. Se grafican las amplitudes tanto del oscilador de Wien como del generador de funciones. f_1 representa la frecuencia externa de perturbación.

Figura 3.6 se muestra un diagrama simplificado del acoplamiento de dos osciladores de Wien.

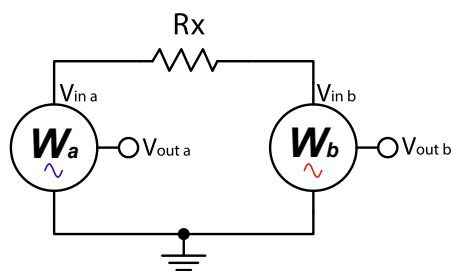


Figura 3.6: Dos osciladores de Wien acoplador por un resistor R_x , entre sus nodos de entrada $V_{in a}$ y $V_{in b}$.

Las variables importantes por observar en la interacción entre estos osciladores autosostenidos son la amplitud, frecuencia y fase de la señal de salida de cada oscilador V_{out} y la energía disipada por el resistor R_x . Para analizar la interacción entre osciladores podemos centrarnos en tres casos

básicos: a) dos osciladores con misma frecuencia y amplitud pero diferente fase, b) dos osciladores con misma amplitud pero diferente frecuencia y fase, c) dos osciladores con diferente frecuencia con misma amplitud y fase.

3.3.1 Efecto de fase

Se utilizaron dos osciladores de Wien no lineales (a y b) con la misma frecuencia, misma amplitud y diferente fase, que fueron acoplados por un resistor entre $R_x = 10 \text{ k}\Omega$ y $R_x = 1 \text{ M}\Omega$, con frecuencias radiales definidas como $\omega_a = \omega_b = 1000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, amplitudes $V_{o,a} = V_{o,b} = 9 \text{ V}$ y condiciones iniciales $V_{C1,a}(0) = -1 \text{ V}$, $V_{C1,b}(0) = 1 \text{ V}$. Las condiciones iniciales impuestas provocan un desfase de 180 grados entre el voltaje de salida de ambos osciladores. En la Figura 3.7 se muestra una reducción de la corriente que pasa a través del resistor de acoplamiento, esto indica que se logró un estado de sincronía en donde la fase se aproximó muy cerca de cero. Cuando se acoplan ambos osciladores con un resistor mayor a $1 \text{ M}\Omega$ no se logra un estado de sincronía.

3.3.2 Efecto de amplitud

Se utilizaron dos osciladores de Wien no lineales (a y b) con la misma frecuencia, diferente amplitud y fase, acoplados por un resistor entre $R_x = 10 \text{ k}\Omega$ y $R_x = 1 \text{ M}\Omega$, con frecuencias radiales definidas por $\omega_a = \omega_b = 1000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, amplitudes $V_{o,a} = 7 \text{ V}$, $V_{o,b} = 9 \text{ V}$ y condiciones iniciales $V_{C1,a}(0) = -1 \text{ V}$, $V_{C1,b}(0) = 1 \text{ V}$. A consecuencia de estas condiciones se tiene un desfase de 180 grados entre las señales de salida de ambos osciladores y un voltaje más bajo que el inicial en estado estacionario. La corriente para un resistor $R_x = 100 \text{ k}\Omega$ se muestra en la Figura 3.7, en este caso el voltaje alcanzado en estado estacionario es diferente de cero, lo que indica un empate de frecuencias, pero no de amplitudes, bajo esta condición el resistor se encuentra disipando energía. Cuando se acoplan ambos osciladores con un resistor mayor a $1 \text{ M}\Omega$ no se logra un estado de sincronía.

3.3.3 Efecto de frecuencia

Se utilizaron dos osciladores de Wien no lineales (a y b) con diferente frecuencia, misma amplitud y fase, acoplados por un resistor entre $R_x = 10 \text{ k}\Omega$ y $R_x = 1 \text{ M}\Omega$, con frecuencias radiales definidas por $\omega_a = 1000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, $\omega_b = 910 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, amplitudes $V_{o,a} = 9 \text{ V}$, $V_{o,b} = 9 \text{ V}$ y condiciones iniciales $V_{C1,a}(0) = -1 \text{ V}$, $V_{C1,b}(0) = -1 \text{ V}$. Bajo estas condiciones se ilustra la corriente del

resistor en la Figura 3.7 c), para $R_x = 10 \text{ k}\Omega$ en estado estacionario R_x sigue disipando energía de manera continua, esto debido a la diferencia de amplitud entre ambos osciladores y un valor constante de fase entre ambos. Este sistema no logra un estado de sincronía para valores mayores a $1 \text{ M}\Omega$ en R_x . La frecuencia de oscilación final es definida por la diferencia de amplitud, el oscilador con mayor frecuencia de oscilación termina con mayor amplitud, el estado de sincronía sólo se logra con R_x menores a $10 \text{ k}\Omega$.

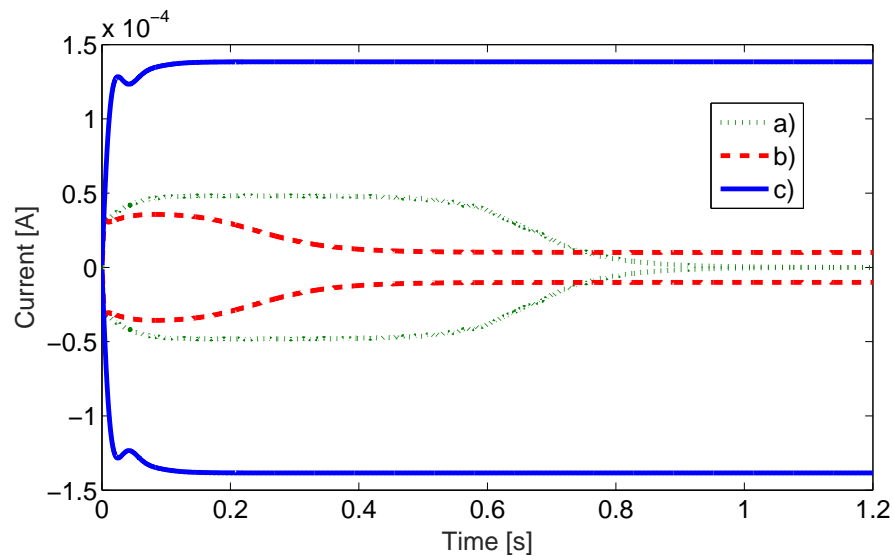


Figura 3.7: Envolvente de la corriente en el resistor de acoplamiento R_x . a) Efecto de fase; $R_x=100 \text{ k}\Omega$, el intercambio de energía en un inicio es evidente, conforme la fase se aproxima a cero se ve un decaimiento en la energía intercambiada entre ambos osciladores. b) Efecto de amplitud; $R_x=100 \text{ k}\Omega$, de nuevo el intercambio de energía en el inicio es evidente, sin embargo, para tiempos largos, la corriente en el resistor de acoplamiento ya no se vuelve cero, sino que sólo tiene un decaimiento para después permanecer en un valor constante de corriente para tiempos largos. c) Efecto de frecuencia; $R_x = 10 \text{ k}\Omega$, el intercambio de energía es evidente incluso para tiempos largos.

RESULTADOS

4.1 Acoplamiento forzado

Al forzar el oscilador de Wien a una señal externa y analizar la respuesta del oscilador de Wien se obtiene el diagrama de beat note y zona muerta del oscilador, se utilizó un osciloscopio RTM-2054 de la marca Rohde & Schwarz y un amplificador lockin SR860 de Stanford Research Systems. Este diagrama indica la amplitud y la frecuencia de salida que tiene el oscilador al perturbado, como se puede observar en la Figura 4.1 la amplitud del oscilador de Wien (línea color naranja y discontinua) en la frecuencia central del oscilador ω_0 decae conforme la frecuencia de la señal externa se acerca a ω_0 , el intervalo de frecuencia en donde la amplitud de $F_0 = 0$, se le llama zona muerta, es una manera de medir que tan susceptible es el oscilador de Wien a amarrarse a otras frecuencias y es consecuencia del ancho de banda del oscilador de Wien. Para este experimento se obtuvo que este oscilador es capaz de acoplarse a señales externas que van desde 1710 Hz hasta 1925 Hz, con una amplitud de $\frac{1}{4}$ de la amplitud del oscilador de Wien.

4.2 Acoplamiento entre osciladores de Wien

En la Figura 4.2 se muestran resultados experimentales del acoplamiento de dos osciladores de Wien en el dominio de la frecuencia, en donde se puede ver cómo el intercambio de componentes

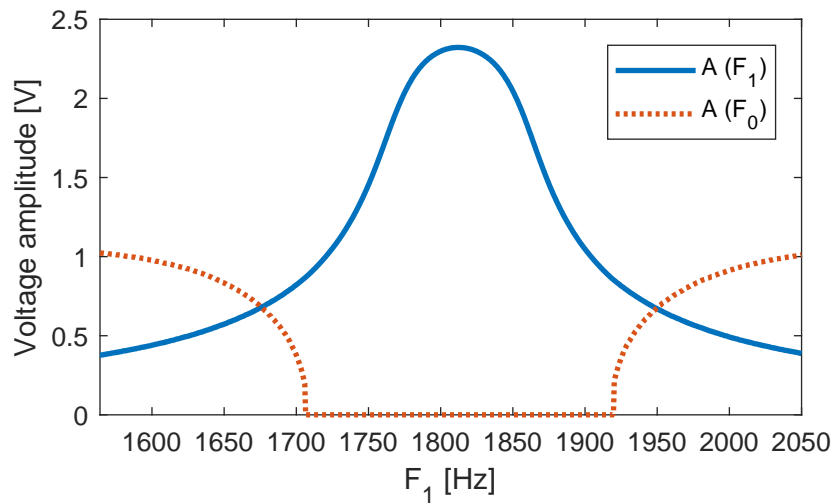


Figura 4.1: Diagrama de beat note y de zona muerta, producido por la interacción entre un oscilador autosostenido y una señal externa débil. El oscilador tiene una frecuencia central de 1800 Hz. El ancho espectral de la zona muerta es aproximadamente el 10% de la frecuencia natural definida por la función de transferencia del oscilador de Wien.

de frecuencia se da entre osciladores, y es proporcional por la fuerza de acoplamiento, en este caso regulado por el valor de R_x . Cuando R_x es mayor a $1 \text{ M}\Omega$ equivale a tener circuito abierto entre ambos osciladores, por lo que ambos osciladores oscilan a la frecuencia definida por sus componentes ω_{01} y ω_{02} , en el intervalo $10^4 \geq R_x > 10^6$, ocurre un intercambio de componentes en frecuencia, hasta que ambos osciladores convergen a una frecuencia única ω_1 , finalmente en el intervalo $10^0 > R_x > 10^4$ primero ocurre un ajuste de fase hasta que $\phi_{01} - \phi_{02} = 0$ y entonces las amplitudes de ambos osciladores se igualan en valores de R_x menores a 100Ω .

En la Figura 4.3 se muestra la transición generada por el acoplamiento de dos osciladores de Wien no lineales con frecuencia y amplitud distintas, también se muestra el voltaje del resistor de acoplamiento, en donde se puede observar la presencia de dos frecuencias antes de acoplar; después de una transición sólo se tiene una frecuencia. En la Figura 4.4 se muestra la transformada de Fourier de la señal de voltaje en el resistor de acoplamiento.

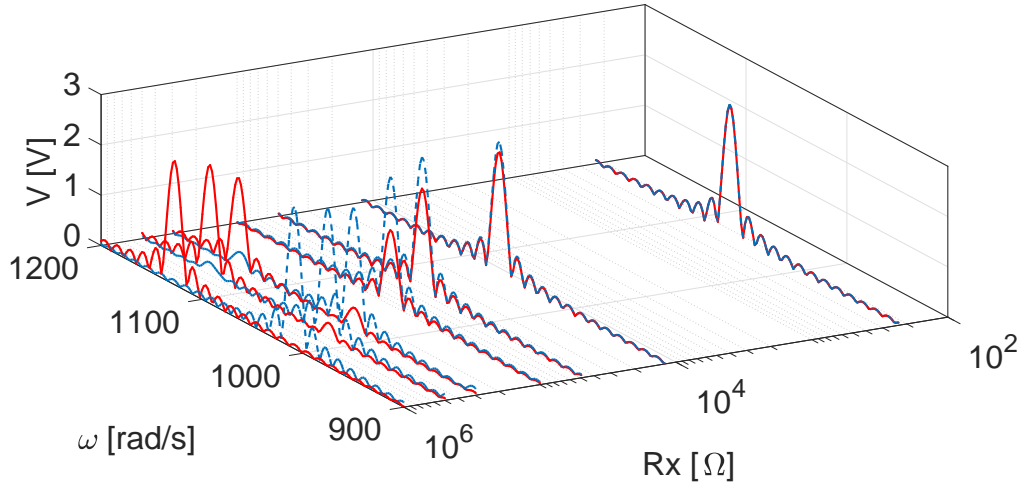


Figura 4.2: Acoplamiento de dos osciladores autosostenidos de Wien no lineales con frecuencias centrales de 1020 rad/s (línea azul) y 1130 rad/s (línea roja). Si R_x es muy grande, $\sim 10^6$, no existe un acoplamiento y se obtienen dos osciladores independientes, conforme R_x baja de valor comienzan a aparecer frecuencias diferentes a las centrales, hasta que termina en una frecuencia de 1075 rad/s.

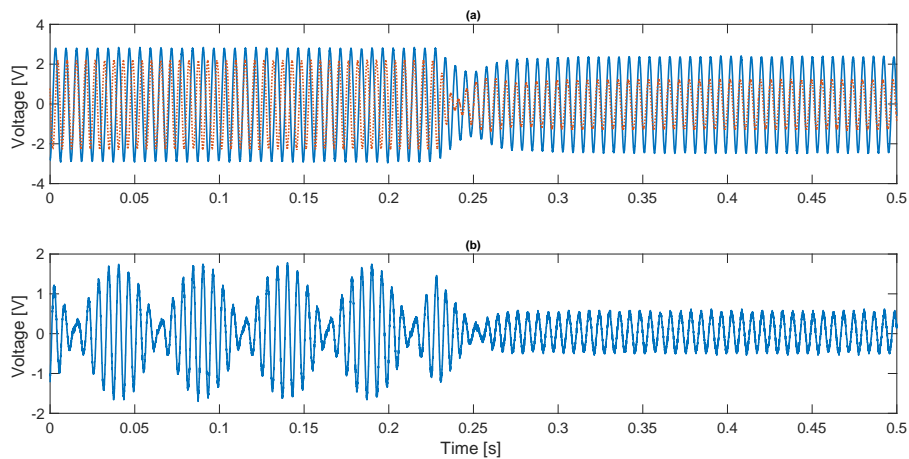


Figura 4.3: Resultados experimentales del acoplamiento de dos osciladores de Wien, a) Voltaje de salida de ambos osciladores, antes de acoplar $\omega_a = 1008.3 \frac{rad}{s}$, $A_a = 5.77 V$, $\omega_b = 1134.9 \frac{rad}{s}$, $A_b = 4.49 V$ y después de acoplar $\omega_a = \omega_b = 1045.2 \frac{rad}{s}$, $A_a = 2.44 V$, $A_b = 1.27 V$. b) Voltaje medido en el resistor R_x , en donde se incluyen dos señales: $\frac{\omega_a + \omega_b}{2} = 1071.6 rad/s$ y $|\frac{\omega_a - \omega_b}{2}| = 63.3 \frac{rad}{s}$, después de acoplar: $\omega = 1045.2 \frac{rad}{s}$ y $A = 0.5 V$.

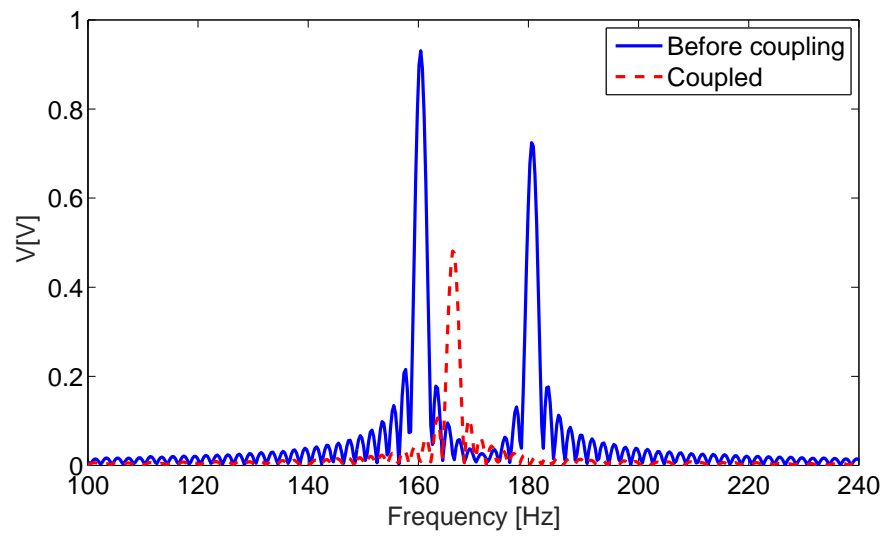


Figura 4.4: Transformada de Fourier de la señal del voltaje en el resistor de acoplamiento Rx. Se puede observar la presencia de las frecuencias de cada oscilador antes de acoplar ambos osciladores y después de acoplar sólo queda la frecuencia lograda por ambos osciladores.

CONCLUSIONES

El oscilador de Wien no lineal, presenta características en su comportamiento revelado por los experimentos presentados en la Figura 4.1 y Figura 4.2, que lo hacen buen candidato como un circuito práctico ya que puede amarrarse a frecuencias distintas a su frecuencia natural, esto implica que con este modelo es posible reproducir resultados de fenómenos de sincronización encontrados en la literatura.

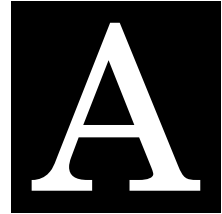
1. El alto nivel de complejidad requerido para producir un oscilador armónico no amortiguado no es válido para realizar experimentos de sincronización, ya que éste proporciona un ancho de banda cero, esto explica su comportamiento antagónico comparado con otros osciladores lineales con efecto de decaimiento.
2. Un oscilador no lineal autosostenido como el oscilador de Wien, con un ancho de banda ajustable, con encendido automático en su construcción electrónica, depende de los componentes electrónicos utilizados, ya que éstos pueden influir, añadiendo efectos parásitos como cambios en amplitud y frecuencia. Este modelo de oscilador autosostenido permite conocer cómo se modifica la frecuencia al momento de acoplarlo a otro oscilador autosostenido o a una fuerza externa. En base a los experimentos realizados en este trabajo se considera un buen arreglo electrónico para trabajos experimentales en donde se requiera analizar la

interacción de los fenómenos oscilatorios con otros sistemas.

3. A simple vista un oscilador RLC sin amortiguamiento y un oscilador de Wien semiestable, producen una señal senoidal, sin embargo, la diferencia entre ambos es el ancho de banda (BW), como consecuencia de este BW mostrado en la Figura 2.12, el oscilador de Wien se pueda acoplar a otros osciladores, cambiando su frecuencia y amplitud.

5.1 Trabajo a futuro

Después de que este trabajo permitió explicar las complicaciones inherentes al emplear los osciladores RLC como prototipos en trabajo con interacción de osciladores y en experimentos aún más complejos de interacciones de múltiples osciladores, donde es esencial la presencia de anchos de banda (BW) y de que perduren en el tiempo, y de que los osciladores lineales cuentan con solo uno de estos requisitos, explicando lo limitado de su uso. Además de que se demostró la manera de obtener osciladores autosostenidos, que perduran en el tiempo y con ancho de banda arbitraria, lo que se evidencia con la zona muerta y la simpatía de osciladores. Se presentan nuevas preguntas a las que se requiere dar respuesta. El ruido electrónico se presentó como explicación para el inicio de las oscilaciones, pero falta puntualizar la participación que tiene en las interacciones entre sistemas. Determinar el efecto del ruido electrónico en la definición de un ancho de banda efectivo y en las interacciones entre sistemas, para lo cual es necesario producir señales de ruido con respuesta espectral arbitraria, incluso evaluar el marco de estudio más adecuado para responder estas preguntas. El teorema de Nyquist delata la relación entre la autocorrelación (espacio del tiempo) y la amplitud espectral (espacio de la frecuencia), algo similar al principio de incertidumbre donde esta relacionados los pulsos eléctricos y su composición espectral. Así que la interacción de osciladores en presencias de ruido electrónico con propiedades particulares puede delatar más información del proceso de interacción entre osciladores y eventualmente obtener provecho de esta información.



TRANSFORMADA DE FOURIER

En análisis de señales la transformada de Fourier es una herramienta de gran utilidad que permite descomponer cualquier señal en sus componentes de frecuencia, ya que toda señal periódica puede ser representada como la suma de una cantidad infinita de señales senoidales. La transformada de Fourier de una señal dependiente del tiempo $x(t)$ se denota $\mathcal{F}\{x(t)\}$ y se define en su forma integral como la ecuación A.1. Debido a que todos los datos obtenidos por un osciloscopio u algún otro equipo de medición son discretos, es necesario introducir la transformada de Fourier discreta, ecuación A.2:

$$(A.1) \quad \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt$$

$$(A.2) \quad \mathcal{F}\{x(t)\} = \sum_{j=0}^{N-1} x(t_j)e^{-i\omega t_j}$$

Sí aplicamos la ecuación A.1 a una señal cosenoidal con una frecuencia lineal f_0 , será necesario expresar la función coseno como la suma de dos funciones exponenciales para realizar la integración, como resultado se obtiene una función dependiente únicamente de la frecuencia f . Como se puede observar en la ecuación A.3, en el caso de frecuencias positivas sólo es de interés el primer

término.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F} \{ \cos(2\pi f_0 t) \} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{i2\pi f_0 t} + e^{-i2\pi f_0 t}}{2} \right) e^{-i2\pi f t} dt \\
 \text{(A.3)} \qquad \qquad \qquad &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i(f-f_0)t} + e^{-2\pi i(f+f_0)t} dt \\
 &= \frac{1}{2} (\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0))
 \end{aligned}$$

En señales discretas se utiliza el algoritmo Fast Fourier Transform (FFT), que utiliza la ecuación A.2 y redimensiona la escala vertical para obtener la amplitud de la señal. Es más interesante

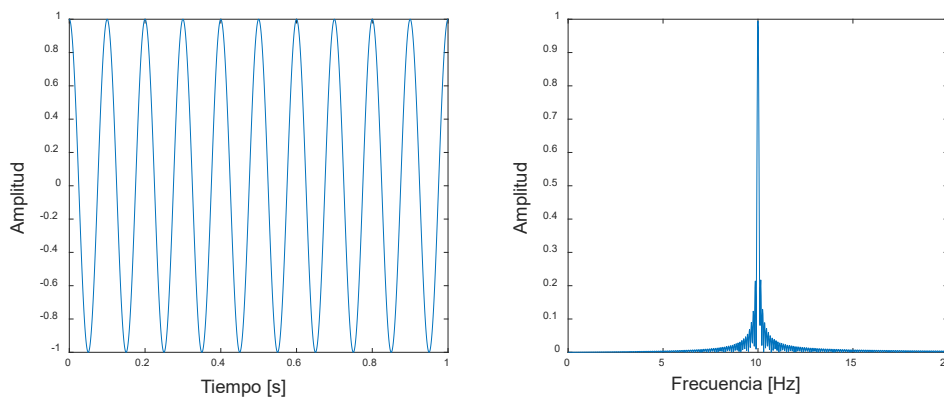


Figura A.1: Transformada de Fourier de una señal senoidal con una frecuencia de 10 Hz. A la izquierda se muestra en el dominio del tiempo y a la derecha en el dominio de la frecuencia.

obtener la transformada de Fourier de la suma o multiplicación para obtener señales como: $A_1 \cos(2\pi f_1 t) + A_2 \cos(2\pi f_2 t)$ Figura A.2 o $A_1 \cos(2\pi f_1 t) * A_2 \cos(2\pi f_2 t)$ Figura A.3, en este último caso es necesario recordar el resultado de la multiplicación de dos funciones cosenoidales¹.

¹ $\cos(x) * \cos(y) = \frac{1}{2} (\cos(x-y) + \cos(x+y))$

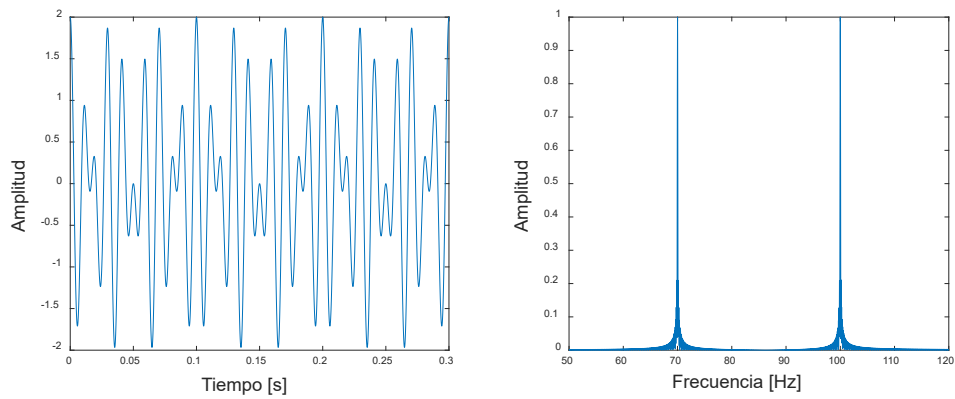


Figura A.2: Transformada de Fourier obtenida de la suma de dos señales senoidales, con frecuencia de 70 Hz y 100 Hz cada una.

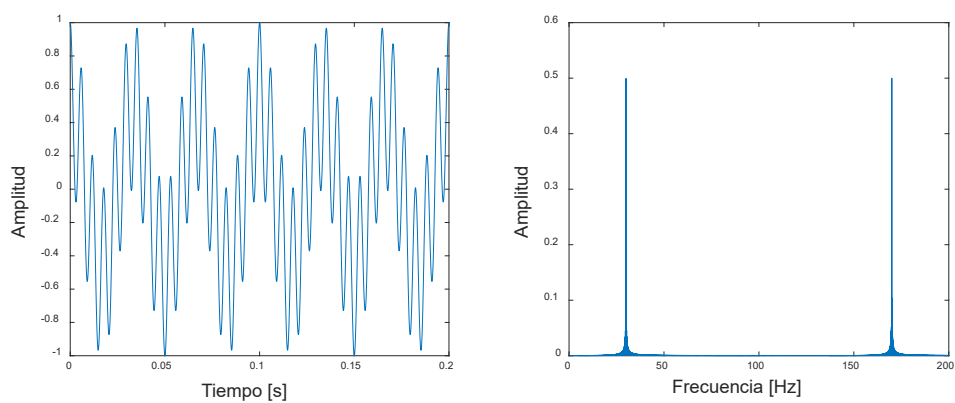


Figura A.3: Transformada de Fourier de la multiplicación de dos señales senoidales con frecuencia de 70 Hz y 100 Hz. Es importante notar que la frecuencia las frecuencias resultantes fueron de 30 Hz y 170 Hz.

PROGRAMAS DE MATLAB

En esta sección se detallan algunos de los experimentos mencionados anteriormente, a su vez se acompañan de algunos programas que se hicieron en Matlab, para controlar de forma remota algunos dispositivos como osciloscopio, amplificador lockin, fuentes de voltaje entre otros.

Retomando el experimento del oscilador de Wien forzado, en este se utilizó el oscilador interno del amplificador lockin SR-865A comunicado a través del protocolo GPIB, y un osciloscopio Rohde & Schwarz RTM2025 comunicado a través de puerto USB serial, la Figura 3.4 detalla más este arreglo, en Matlab se utilizó a continuación se muestra la función fourier utilizada para hacer transformada de Fourier a el set de datos obtenido.

Transformada de Fourier:

```

1 function [amp,the , freq]=fourier(f,Delta_T)
2 N = length(f);           %Obtiene el tamaño de los datos de entrada
3 M = 2^nextpow2(5*N);     %Define la ventana de muestreo
4 Ff = fft(f,M)/N;        %Aplica de fft al set de datos y se reescala por N
5 amp = 2*abs(Ff(1:M/2+1)); %Obtiene la amplitud
6 the = angle(Ff(1:M/2+1)); %Obtiene el ángulo
7 freq = N/Delta_T/2*linspace(0,1,M/2+1); %Genera el vector de frecuencia
8 end

```

La siguiente rutina se utiliza para realizar la adquisición de datos desde el osciloscopio, controlar la frecuencia de salida del generador de funciones y realizar la transformada de Fourier de cada conjunto de datos obtenido:

Adquisición de datos:

```
1 % Nota: el osciloscopio debe de estar conectado por usb y el lockin con
   la tarjeta de ni
2 inicio; %Inicializa conexion con osciloscopio
3 set(obj1, 'InputBufferSize', 10000000); % Define buffer de entrada
4 set(obj1, 'OutputBufferSize', 4096); % Define buffer de salida
5 fopen(obj1); % Crea objeto obj1
6
7 linew = visa('ni', 'GPIB0::4::0::INSTR'); % Inicializa conexion
8 fopen(linew); % Crea objeto linew
9
10 fprintf(linew, 'OFLT 10'); % Configura la constante de tiempo
11 fprintf(linew, 'SCAL 3'); % Configura sensibilidad
12 fprintf(linew, 'PHAS 0'); % Configura la fase de senal de salida
13 fprintf(linew, 'SLVL 0.200'); % Configura la amplitud de salida
14 fprintf(linew, 'SOFF 0'); % Configura la componente en DC
15 fprintf(obj1, 'FORMAT ASC'); % Configura a ascii
16 frc = 1750; % Define frecuencia central del oscilador Wien [Hz]
17 % Crea el vector de frecuencias +-300 Hz
18 num=1000; f=linspace(frc-300,frc+300,num);
19
20 fch=strcat(['FREQ ', num2str(fri(1))]); % Mueve la frecuencia del lockin a
21 fprintf(linew, fch); % la primer frecuencia
22 pause(1);
23 % Configura la adquisicion de datos de alta resolucio
24 fprintf(obj1, 'CHAN:DATA:POIN DEF');
25 for n=1:num
```

```

26     fch=strcat(['FREQ ',num2str(f(n))]);
27     fprintf(linew,fch);           % Cambia a la enesima frecuencia
28     pause(0.1);
29     % Manda comando para que el osciloscopio capture los datos
30     fprintf(obj1,'SING;*OPC?');
31     pause(1);
32     d1=query(obj1,'CHAN1:DATA?'); % Solicita datos al osciloscopio
33     osc_out(:,n)=str2num(d1);     % Guarda datos en osc_out
34     % Calcula transformada de Fourier de los datos recién capturados
35     [amp_out(:,n),f_out(:,n)] = fourier(osc_out(:,n),100e-3*10);
36
37     % OJO! hay que cambiar el delta de tiempo en la función fourier
38     % para que de las funciones correctas. para este caso tome la escala
39     % temporal que tiene el osciloscopio (100e-3) y lo multiplique por 10
40     % (el número de divisiones en la pantalla del osciloscopio)
41 end
42
43 %Cierra Amplificador lockin
44 fclose(linew)
45 delete(linew)
46 clear linew
47
48 % Hace grafica 3D (bastante lento para cantidades grandes de datos)
49 % Crea matriz de frecuencias para diagrama 3D
50 Mf = ones(length(f_out),num).*f(:)';
51 figure(1)                          %Crea figura en 3D
52 plot3(f_out, Mf, amp_out);
53 %Guarda los datos en formato .mat
54 fecha = datestr(datetime); fecha([12,15,18]) = '_'; save(fecha);

```

El uso de estos scripts permitió obtener la respuesta en el dominio de la frecuencia del oscilador, en la Figura 33 se muestra un ejemplo de baja resolución de este experimento, el resto del

trabajo para obtener la curva característica del oscilador es obtener los picos de la Figura B.1 y visualizarlos sólo en dos dimensiones. Con la información obtenida hasta este punto ya es

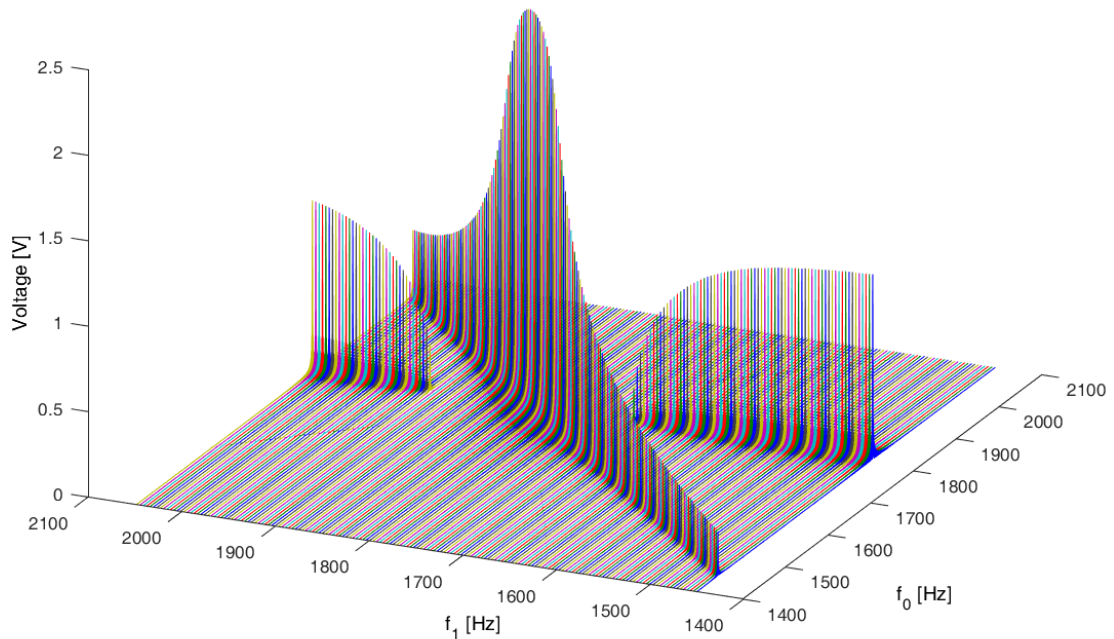


Figura B.1: Ejemplo de figura obtenida con la rutina anterior, en el eje x se tiene la frecuencia externa del generador de funciones, en el eje y se tiene la amplitud del voltaje medido y en el eje z se tiene el espectro de frecuencias obtenidas por la transformada de Fourier.

posible obtener la curva característica del oscilador como se muestra en la Figura B.2, para ello es necesario obtener el valor de frecuencia y amplitud en cada pico de la Figura B.1.

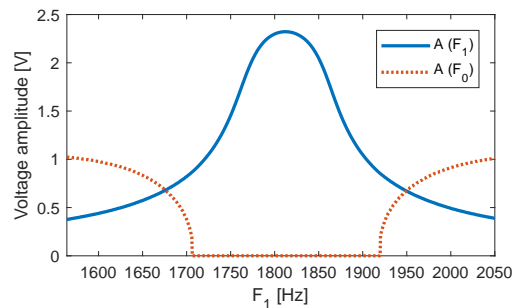


Figura B.2: Resultado de correr la siguiente rutina para identificar picos, esta gráfica evidencia la zona muerta del oscilador, se tienen 1000 puntos de resolución en cada gráfica.

Identificación de picos:

```
1 %Precolocaciin de variables
2 pic = zeros(2,1000); loc = pic;
3 for i = 1:1000
4     %Encuentra el valor del pico y su localizacion
5     [pic(:,i), loc(:,i)]=findpeaks(amp_out(:,i), 'NPeaks',2, 'MinPeakHeight',
        '0.15', 'MinPeakWidth',20);
6 end
7
8 for i=1:1000
9     %Para indices mayores a 600 aproximadamente, se encuentra primero el
10    %pico del generador de funciones y despues el pico del oscilador de
11    %wien.
12    if i > 600
13        f_lockin(i) = f_out(loc(2,i),i); f_wien(i) = f_out(loc(1,i),i);
14        amp_lockin(i) = amp_out(loc(2,i),i); amp_wien(i) = amp_out(loc(1,
15        i),i);
16    else
17        f_lockin(i) = f_out(loc(1,i),i); f_wien(i) = f_out(loc(2,i),i);
18        amp_lockin(i) = amp_out(loc(1,i),i); amp_wien(i) = amp_out(loc(2,
19        i),i);
20    end
21    % Entre amp_wien(428:783) el valor de amplitud es muy cercano a cero , por
22    % lo tanto:
23    amp_wien(428:783) = 0;
24 %Crea figura
```

```
25 figure(2)
26 plot(f_lockin , amp_lockin , f_lockin , amp_wien)
27 xlabel('Frequency_{ext} [HZ]')
28 ylabel('Amplitude [V]')
```

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] R. ADLER, *Proceedings of the i. r. e.*, 34 (1946), p. 351.
- [2] A. AGARWAL AND J. LANG, *Foundations of analog and digital electronic circuits*, Elsevier, 2005.
- [3] R. P. FEYNMAN, R. B. LEIGHTON, AND M. SANDS, *The Feynman lectures on physics, Vol. I: The new millennium edition: mainly mechanics, radiation, and heat*, vol. 1, Basic books, 2011.
- [4] J. C. HALL, *The nobel prize in physiology or medicine 2017*, Oct 2017.
- [5] W. H. HAYT, J. E. KEMMERLY, AND S. M. DURBIN, *Engineering circuit analysis*, McGraw-Hill New York, 1986.
- [6] L. LERNER, *The dynamics of a stabilised wien bridge oscillator*, *European Journal of Physics*, 37 (2016), p. 065807.
- [7] B. M. Y. J. L. A. R. Q.-T. M.A. OCAMPO, *Oscilaciones, armonía y simpatía*, *Revista Mexicana de Física*, (2007), p. 67.
- [8] M. OPENCOURSEWARE, *Lec 21 | MIT 6.002 Circuits and Electronics, Spring 2007*, 2018.
- [9] A. PIKOVSKY, M. ROSENBLUM, J. KURTHS, AND J. KURTHS, *Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences*, vol. 12, Cambridge university press, 2003.
- [10] M. QUIROZ-JUAREZ, J. ARAGON, R. D. J. LEON-MONTIEL, R. VAZQUEZ-MEDINA, J. DOMINGUEZ-JUAREZ, AND R. QUINTERO-TORRES, *Emergence of a negative resistance in noisy coupled linear oscillators*, *EPL (Europhysics Letters)*, 116 (2017), p. 50004.
- [11] G. ROBERTS AND A. SEDRA, *SPICE (The Oxford Series in Electrical and Computer Engineering)*, Oxford University Press, 1996.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [12] K. SH., *Electronic noise and fluctuations in solids*, Cambridg University Press, 1996.
- [13] E. SIEGMAN A., *Lasers*, University Science Book, Sausalito, 1986.
- [14] B. TRUMP, *Edn network*, Dec. 2012.