Universidad Autónoma Nacional de México

Posgrado en Matemáticas

Instituto de Matemáticas

Marcos en espacios de Tychonoff

Titulación por Tesis

Que para optar por el grado de

Doctor en Ciencias Matemáticas

Presenta

Manuel Antonio López Ramírez

Bajo la dirección de Adalberto García Máynez y Cervantes (IMate)

Comité Tutoral

Alejandro Illanes Mejia (IMate)

Ángel Tamariz Mascarúa (Fac. Cien.)

Javier Paez (Fac. Cien.)

Salvador Hernández (Univ. Valencia)

Richard G. Wilson R. (UAM)

Ciudad Universitaria, Cd. Mx. Octubre de 2018

Índice General

Capítulo 1

Introducción

A continuación hablaremos de los problemas que se atacan dentro de este trabajo de tesis, sus antecedentes y las razones por las que los consideramos de importancia. En 1970, A. V. Arhangel'skii introdujo una clase muy importante de espacios a los cuales se les llamó *p-espacios* los cuales también son conocidos como *espacios emplumados* [Arh70a]. Dichos conceptos y los teoremas que derivan de ese trabajo abrieron una línea de investigación muy prolífica de la cual se han obtenido muchos avances, y muchos conceptos y han aparecido clases nuevas desde entonces.

Entre los p-espacios se encuentran algunos espacios no paracompactos. Por ejemplo, todos los espacios completos en el sentido de Čech son p-espacios. Los p-espacios paracompactos son caracterizados como preimágenes perfectas de espacios métricos [Arh70a]. El producto de una familia numerable de p-espacios paracompactos es un p-espacio paracompacto. V. V. Filippov fue el primero en probar que la imagen de un p-espacio paracompacto bajo una función perfecta es de nuevo un p-espacio paracompacto [Fil67]. Un poco después y de manera independiente, este resultado fue obtenido por K. Morita [Mor55] y T. Ishii [Ish67a]. Posteriormente, H. H. Wicke demostró que la imagen bajo una función perfecta de un p-espacio es a su vez un p-espacio. Es muy importante hacer notar que una función cerrada de un espacio métrico preserva la metrizabilidad si y sólo si preserva la propiedad de ser un p-espacio [Arh65].

Una función continua de un espacio topológico arbitrario sobre un p-espacio no incrementa el *peso* [Fil67], pues de hecho, es fácil ver que el peso de un p-espacio es igual al peso de red del mismo. Si un p-espacio paracompacto es preimagen de un espacio métrico bajo una función continua uno-a-uno, entonces es metrizable [Fil67]. Cada p-espacio paracompacto con una base punto-numerable es metrizable [Z67]. Los p-espacios paracompactos son metrizables si y sólo si son simetrizables [Arh70a].

En la definición original de los p-espacios se había supuesto que dichos espacios fueran completamente regulares y T_1. De hecho, la definición de los mismos depende de la existencia de la compactación de Stone-Čech del espacio en cuestión. Sin embargo, D. Burke [Bur70] dio una caracterización de los p-espacios la cual generaliza este concepto a los espacios T_3. Bajo esta nueva definición los espacios de Moore son p-espacios [Bur70]. R. Hodel introdujo el concepto de *grado de plumaje* $pl(X)$, de un espacio X que es T_3 [Hod74]. De acuerdo a su definición, un espacio T_3 es un p-espacio si y sólo si $pl(X) \leq \aleph_0$.

Es posible dar una caracterización extrínseca de los p-espacios usando la compactación de Wallman en lugar de la compactación de Stone-Čech [GM85]. De manera natural se puede dar una formulación de la desigualdad $pl(X) \leq \lambda$, donde λ es cualquier número cardinal infinito. Una propiedad notable de los p-espacios es que son de tipo numerable [Arh70a], es decir, que todo subconjunto compacto de un p-espacio está contenido en un subconjunto compacto el cual tiene una base local numerable para su sistema de vecindades. J. Chaber, M. M. Coban y K. Nagami introdujeron la clase de los *p-espacios monotónicos* (monotonic p-spaces), los cuales caen entre la clase de los p-espacios y la clase de los espacios T_3 de tipo numerable [CCN74].

Como ya se ve, el concepto de premetrizabilidad es de importancia. En el Capítulo 5 damos tres caracterizaciones de premetrizabilidad que consideramos novedosas y las relacionamos con otras dos caracterizaciones que son bien conocidas. Para resaltar la importancia de estos resultados, en el Capítulo 2 hablamos un poco sobre las condiciones de metrizabilidad de un espacio topológico.

Por otro lado, V. I. Ponomarev y V.V. Tkachuk introdujeron el concepto de *espacios fuertemente completos* como aquellos espacios que tienen caracter numerable en βX [PT87]. Después Buhagiar y Yoshioka dieron una caracterización interna de esta propiedad y la llamaron *ultracompletez* [BY01]. Posteriormente, V.V. Tkachuk y D. Jardón demostraron que un espacio paracompacto X es ultracompleto si y sólo si el conjunto de puntos en los cuales X no es localmente compacto está contenido en un compacto de caracter exterior numerable [TJ04]. Un espacio de Tychonoff X es *casi localmente compacto* si el conjunto X_0 de puntos de X donde falla la compacidad local está contenido en un compacto de tipo numerable. V. I. Ponomarev y V. V. Tkachuk probaron que X_0 no es necesariamente localmente compacto pero sí es un conjunto acotado en X [PT87]. Un espacio X es llamado *cofinalmente Čech completo* si existe una familia numerable $\{\mathfrak{G}_n : n \in \mathbb{N}\}$ de cubiertas abiertas de X que satisfacen la propiedad de que siempre que η es un filtro sobre

X tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe algún $G_n \in \mathfrak{G}_n$ el cual intersecta a todos los miembros de $\mathcal{F}$, entonces $\mathcal{F}$ tiene un punto de acumulación. En ese caso decimos que $\{\mathfrak{G}_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una familia *cofinalmente Čech completa*.

En el Capítulo 5 mostraremos que ser cofinalmente Čech-completo es equivalente a ser ultracompleto. S. Romaguera introdujó la noción de *espacio cofinalmente Čech-completo* para caracterizar los espacios metrizables los cuales admiten una métrica cofinalmente completa [Rom98]. A. García-Maynez y S. Romaguera probaron en que los espacios cofinalmente Čech-completos son invariantes bajo funciones perfectas y también bajo sus imágenes inversas [GMR99], y derivaron una condición necesaria y suficiente para la completez en el sentido de Čech de los espacios paracompactos, la cual generaliza en este contexto la caracterización topológica de los espacios metrizables que admiten una métrica cofinalmente completa [Rom98]. En el mismo trabajo ellos también hacen notar que, contrario al caso de los espacios completos en el sentido de Čech, la completez cofinal en el sentido de Čech es preservada bajo funciones continuas abiertas. Finalmente los autores de dicho artículo estudian el producto de espacios paracompactos cofinalmente Čech-completos.

En los esfuerzos por resolver el problema de metrización de espacios topológicos surgieron los conceptos de cubierta normal y familia localmente finita. Así, A. H. Stone probó que toda cubierta abierta de un espacio metrizable es normal, y Dieudonné demostró que toda cubierta abierta de un espacio metrizable tiene un refinamiento abierto y localmente finito. La normalidad de una cubierta abierta y la existencia de un refinamiento abierto y localmente finito están estrechamente relacionados. Un *marco* de un espacio X es simplemente una familia no vacía de cubiertas abiertas de X. Si todo elemento de un marco satisface una misma propiedad p, entonces decimos que el marco es de *tipo* p o que es un p-*marco*.

En el capítulo 5 usamos los marcos sobre un espacio topológico para dar una de las caracterizaciones de premetrizabilidad que consideramos novedosa, y además definimos en el mismo capítulo una clase de cubiertas que contiene a la clase de cubiertas normales. Esta clase de cubiertas reciben el nombre de *cubiertas semi-normales*. El uso de marcos diversos para caracterizar distintos tipos de espacios de Tychonoff (espacios completos en el sentido de Čech, p-espacios, espacios ultracompletos, etc), ha proporcionado caracterizaciones de dichos espacios usando filtros Cauchy o cofinalmente Cauchy respecto a los marcos. Por esta razón sentimos que el manejo de marcos sobre espacios topológicos es un método útil para encontrar nuevas caracterizaciones, aunque por supuesto, no pensamos que sea el único.

Como se puede ver, las clases de p-espacios, espacios paracompactos, espacios completos en el sentido de Čech y la clase de espacios ultracompletos, constituyen clases bastante ricas. Dada la importancia de las mismas y sus aplicaciones, cualquier información nueva sobre ellas es relevante. En esta tesis demostramos que un espacio topológico es premetrizable si y sólo si X es un p-espacio pseudoparacompacto y toda cubierta abierta de X es semi-normal, si y sólo si existe un conjunto cero K en $X \times \beta X$ tal que $\Delta(X) \subseteq K \subseteq X \times X$, si y sólo si X tiene un p-marco numerable consistente de cubiertas normales.

La clase de espacios paracompactos es cerrada bajo imágenes inversas de funciones perfectas. En la clase de espacios completamente regulares, las funciones perfectas son caracterizadas por el hecho que sus extensiones continuas a la compactación de Stone-Čech mandan residuos sobre residuos. Las funciones perfectas preservan metrizabilidad, paracompacidad, peso y completez en el sentido de Čech. La clase de las funciones perfectas es cerrada bajo composiciones. Una restricción de una función perfecta a un subespacio cerrado es perfecta. Esto es falso para funciones cocientes. Otra importante propiedad de estas funciones es que pueden restringirse a ciertos subespacios cerrados sin reducir la imagen, de manera que la función resultante es irreducible, es decir, no se puede restringir más sin reducir la imagen (compárese con el concepto de *función irreducible*).

En el Capítulo 6, dedicado a los problemas que consideramos abiertos, nos preguntamos si la imagen perfecta de un espacio pseudoparacompacto es pseudoparacompacta. Por otro lado, tampoco sabemos si el producto de espacios pseudoparacompactos es un espacio pseudoparacompacto.

La famosa conjetura *normal-Moore* pregunta si todo espacio normal de Moore es metrizable. Actualmente se sabe que dicha conjetura no se puede probar ni refutar dentro de ZFC. En cambio, si se sustituye la hipótesis de ser normal por la de ser colectivamente normal, entonces se sabe que el resultado es cierto. También, si se supone el Axioma de Martin y se niega la Hipótesis del Continuo, entonces puede demostrarse que existe un espacio de Moore normal no metrizable. En los espacios normales los conceptos de conjunto nulo y conjunto cerrado y G_δ coinciden.

Un espacio X es paracompacto si y sólo si $X \times \beta X$ es un espacio normal [Tam67], por lo que los espacios donde tiene sentido preguntarse si ser nulo es equivalente a ser G_δ y cerrado es precisamente en los espacios que no son normales. Por ese motivo en el Capítulo 2 damos un breve bosquejo de los conjuntos nulos y los conjuntos coceros además de que éstos son de importancia para uno de nuestros resultados principales. En el Capítulo 2 introducimos el concepto de *escalas*. Dicho concepto da lugar al concepto de conjunto nulo, el cual, como ya hemos mencionado, es interesante cuando no coincide con el de ser G_δ y cerrado.

Un espacio de Tychonoff X es metrizable si y sólo si la diagonal $\Delta(X)$ es un conjunto nulo en $X \times \beta X$ [GM89]. En el mismo artículo se muestra que si un espacio Tychonoff X es de Moore, entonces $\Delta(X)$ es un cerrado G_δ en $X \times \beta X$. Por tanto, la conjetura normal-Moore equivale a encontrar condiciones bajo las cuales el cerrado G_δ $\Delta(X)$ es nulo. Por lo anterior consideramos que nuestros resultados podrían ser de ayuda para obtener nuevos avances en la mencionada conjetura. En ese mismo Capítulo damos un breve bosquejo de los conceptos de bases de filtro y filtros. También hablamos de las compactaciones de un espacio de Tychonoff, las propiedades de cubiertas de espacios topológicos, así como algunos resultados conocidos de las funciones perfectas y sus caracterizaciones.

La clase de los conjuntos pseudoparacompactos, definida en el Capítulo 5, ha sido poco estudiada y pensamos que contiene propiamente a la unión de las clases de los espacios pseudocompactos y la clase de los espacios paracompactos, es decir, que existen espacios pseudoparacompactos que no son paracompactos ni pseudocompactos. En el Capítulo 6 esta conjetura es precisamente uno de los problemas abiertos que planteamos.

En el Capítulo 5 definimos el concepto de ser un espacio *definitivamente* p si existe una sucesión $W_1, W_2, \ldots$ de conjuntos coceros en $X \times \beta X$ tal que $\Delta(X) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} W_n \subseteq X \times X$. En dicha clase tampoco encontramos un espacio perteneciente a la misma que no fuera paracompacto. Sin embargo, sí sabemos que un espacio definitivamente p y pseudoparacompacto es premetrizable. Como se puede apreciar, hay futuro en el estudio de estos tipos de espacios topológicos.

El Capítulo 4 está dedicado a los espacios p-paracompactos. Para esta parte nos apoyamos fuertemente en los resultados citados en [And67], y también hablamos de los espacios p-paracompactos y algunos hechos conocidos de los k-espacios y de los espacios Čech-completos y cofinalmente Čech-completos.

Los resultados del Capítulo 5 fueron expuestos en el 47^{th} *Spring Conference and Dynamics Conference* y posteriormente aceptados para su publicación [GMLR18].

Agradecimientos

Esta tesis está dedicada a la memoria del Dr. Adalberto García Maynez y Cervantes (1945-2016), maestro y ejemplo de muchos pero sobre todo, amigo en los tiempos difíciles, cuando pocos lo son. Gracias por todo, maestro.

Quiero agradecer a la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) por darme la oportunidad de participar en el Programa de Posgrado en Ciencias Matemáticas. No me queda duda de que esta es una de las mejores universidades del mundo.

También agradezco a mi comité tutoral por todo el apoyo y los valiosos comentarios que hicieron de este trabajo. Dicho equipo estuvo conformado por los Doctores Alejandro Illanes (IMate), Ángel Tamariz (Fac. Cien.), Javier Paez (Fac. Cien), Richard Wilson (UAM-I) y Salvador Romaguera (Universidad de Valencia).

Mi agradecimiento es total también para el Posgrado en Matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de México, así como todos los que me apoyaron durante toda esta aventura. Por todo lo anterior y mucho más, les doy las gracias.

Invictus

Más allá de la noche que me cubre,
Negra como el abismo insondable,
Doy gracias al dios que fuere
Por mi alma inconquistable

En las garras de las circunstancias
No he gemido ni llorado
Sometido a los golpes del destino
Mi cabeza sangra, pero está erguida

Más allá de este lugar de ira y llantos
Donde yace el horror de la sombra,
La amenaza de los años
Me halla, y me hallará sin temor

No importa cuán estrecho sea el camino,
Ni cuán cargada de castigos la sentencia,
Soy el amo de mi destino,
Soy el capitán de mi alma

William Ernest Henley (1849–1903)

Bendiciones Irlandesas

Que el camino salga a tu encuentro
Que el viento siempre esté detrás de ti
Y la lluvia caiga suave sobre tus campos
Y hasta que nos volvamos a encontrar,

Que Dios te sostenga con el puño de su mano
Que vivas por el tiempo que tú quieras,
Y que nunca quieras vivir tanto como vives
Recuerda siempre olvidar

Las cosas que te entristecieron
Pero nunca te olvides de recordar
Las cosas que te alegraron
Recuerda siempre olvidar

A los amigos que resultaron falsos
Pero nunca olvides recordar
A aquellos que permanecieron contigo
Recuerda siempre olvidar

Los problemas que ya pasaron
Pero nunca olvides recordar
Las bendiciones de cada día
Que el día más triste de tu futuro

No sea peor que el día más feliz de tu pasado
Que nunca se te venga el techo encima
Y que los amigos reunidos debajo de él, nunca se vayan
Que siempre tengas palabras cálidas en un frío anochecer
Una luna llena en una noche oscura,
Y que el camino siempre se abra a tu puerta
Que haya una generación de hijos
En los hijos de tus hijos

Que vivas cien años,
Con un año extra para arrepentirte!
Que el Señor te guarde en su mano
Y nunca apriete mucho su puño

Que tus vecinos te respeten
Los problemas te abandonen
Los ángeles te protejan
Y que el cielo te acoja

Que la fortuna de las colinas
Irlandesas te abracen
Que las Bendiciones de San Patricio
te contemplen
Que tus bolsillos estén pesados

Y tu corazón ligero,
Que la buena suerte te persiga,
Y cada día y cada noche
Muros contra el viento,

Y un techo para la lluvia,
Y bebidas junto a la fogata
Risas para consolarte
Y aquellos a quienes amas cerca de ti,

Y todo lo que tu corazón desee!

Que Dios esté contigo y te bendiga,
Que veas a los hijos de tus hijos,
Que el infortunio sea pobre, rico en bendiciones

Que no conozcas nada más que la felicidad
Desde este día en adelante
Que Dios te conceda muchos años de vida,
De seguro Él sabe que la tierra

No tiene suficientes ángeles

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Axiomas de Separación

Las demostraciones de los resultados presentados en esta sección pueden ser consultados en [GMT88].

En el presente trabajo (X, τ) denotará un espacio topológico. Si no hay posibilidad de confusión escribiremos simplemente X. Si A y B son subconjuntos ajenos de un espacio topológico X, pueden presentarse diversas situaciones:

Definición 1.

1. Un espacio X es T_0 si dados $p, q \in X$, $p \neq q$, existe un abierto que contiene a unos de ellos pero no al otro.

2. Un espacio X es R_0 si cada abierto en X es unión de conjuntos cerrados.

3. Un espacio X es T_1 si dados $p, q \in X$, $p \neq q$, existe un abierto que contiene a p y no a q, y un abierto que contiene a p pero no a q.

Proposición 2.

1. Un espacio X es T_0 si y sólo si dados $p, q \in X$, $p \in \{q\}^-$ y $q \in \{q\}^-$ implican $p = q$.

2. Un espacio X es R_0 si y sólo si dados $p, q \in X$, $\{p\}^- \cap \{q\}^- \neq \emptyset$ implica $\{p\}^- = \{q\}^-$.

3. Un espacio X es T_1 si y sólo si para cada $p \in X$, $\{p\}$ es cerrado, o, equivalentemente, si y sólo si cada subconjunto finito de X es cerrado.

Definición 3.

1. Un espacio X es T_2 o de *Hausdorff* si cada par de puntos distintos de X tiene vecindades ajenas.

2. Un espacio X es *regular* o R_2 si para cada cerrado H en X y cada punto $p \in X \backslash H$, H y p tienen vecindades ajenas.

3. Un espacio X es de *Urysohn* o $T_{2\frac{1}{2}}$ si cada par de puntos distintos tiene vecindades cerradas ajenas.

4. Un espacio X es T_3 si es regular y T_0.

Proposición 4. Se cumplen las siguientes implicaciones

1. $R_2 \Rightarrow R_1 \Rightarrow R_0$.

2. $T_3 \Rightarrow T_{2\frac{1}{2}} \Rightarrow T_2 \Rightarrow R_1$ y T_0.

Definimos los axiomas de separación que usaremos a lo largo del presente trabajo. Dichos axiomas no son necesariamente hereditarios.

Definición 5.

1. Un espacio X es *normal* si cada par de cerrados ajenos en X tienen vecindades ajenas.

2. Decimos que X es R_3 si es normal y R_0.

3. X es T_4 si es normal y T_1.

4. Un espacio X es *completamente normal* si cada par de subconjuntos separados de X tienen vecindades ajenas.

5. X es un espacio T_5 si es completamente normal y T_1.

6. Un subconjunto A de un espacio X es G_δ si existen abiertos $G_1, G_2, \ldots$ en X tales que $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Un conjunto A es F_σ si existen cerrados $F_1, F_2, \ldots$ en X tales que $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.

7. Un espacio X es *perfectamente normal* si X es normal y cada cerrado en X es G_δ.

8. X es T_6 si es perfectamente normal y T_1.

Proposición 6.

1. Todo espacio R_3 es R_2. Por tanto, todo espacio T_4 es T_3.

2. Si X es completamente normal, entonces todo subespacio de X es normal.

3. Si cada abierto denso en X es normal, entonces X es completamente normal.

4. Un espacio X es completamente normal si y sólo si cada subespacio de X es normal.

5. Todo espacio regular y de Lindelöf es normal.

6. Todo subespacio F_σ de un espacio normal es normal.

7. Todo espacio perfectamente normal es completamente normal.

8. $T_6 \Rightarrow T_5 \Rightarrow T_4 \Rightarrow T_3$.

2.2. Conjuntos Nulos y Coceros

A lo largo de esta sección X denotará un espacio topológico. Las demostraciones de los resultados enunciados pueden consultarse en [GMT88]

Definición 7. Un subconjunto A de un espacio X es *nulo* en X (o *conjunto cero*) si existe una función continua $g : X \to [0, 1]$ tal que $A = g^{-1}(0)$.

Definición 8. Un subconjunto U de un espacio X es *cocero* en X si $X \backslash U$ es nulo en X.

Usando las llamadas *escalas* se podrán construir funciones continuas de X al intervalo $[0, 1]$. Si A es un conjunto, denotaremos su *conjunto potencia* por 2^A.

Definición 9. Sea D un subconjunto denso de $(0, 1)$. Una *escala* en un espacio X es una función $\varphi : D \to 2^X$ tal que $\varphi(d_1)^- \subseteq int\, \varphi(d_2)$ siempre que $d_1, d_2 \in D$ y $d_1 < d_2$.

Definición 10. Si φ es una escala en X definimos el *núcleo de* φ, $Z(\varphi)$, como:

$$Z(\varphi) = \bigcap \{\varphi(d) : d \in D\}.$$

Definición 11. Dada una escala en X definimos la *escala complementaria* φ^c mediante la fórmula:

$$\varphi^c(d) := X \backslash \varphi(1 - d).$$

Proposición 12. Sea φ una escala en X. Entonces existe una función continua $g : X \to [0,1]$ tal que $g^{-1}(0) = Z(\varphi)$ y $g^{-1}(1) = Z(\varphi^c)$. Recíprocamente, si $g : X \to [0,1]$ es una función continua y para cada $d \in D$, $\varphi_g(d) = g^{-1}([0,d])$, entonces φ_g es una escala en X.

Proposición 13. Sea H un cerrado G_δ en un espacio normal X. Entonces existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f^{-1}(0) = H$. Por tanto, existe una escala en X tal que $H = Z(\varphi)$.

Proposición 14. Todo conjunto nulo en X es cerrado y G_δ en X. Si X es normal, el recíproco también es cierto.

Proposición 15. Todo conjunto cocero en X es abierto y F_σ en X. Si X es normal, el recíproco también se cumple.

Proposición 16. Un subconjunto A de un espacio X es nulo en X si y sólo si existe una escala φ en X tal que $A = Z(\varphi)$.

Proposición 17. Si $g : X \to Y$ es continua y K es un nulo en Y, entonces $g^{-1}(K)$ es nulo en X.

Proposición 18. Si A y B son nulos (respectivamente, coceros) en X, entonces $A \cup B$ y $A \cap B$ son también nulos (respectivamente, coceros) en X.

Proposición 19. Toda intersección numerable de conjuntos nulos en X es nula en X. Por tanto, toda unión numerable de conjuntos coceros en X es un conjunto cocero en X.

Proposición 20. Si A y B son nulos ajenos en X, existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $A = f^{-1}(0)$ y $B = f^{-1}(1)$.

Proposición 21. Si A y B son nulos ajenos en X, existen coceros ajenos U_A, U_B en X tales que $A \subseteq U_A$ y $B \subseteq U_B$.

Proposición 22. Un espacio X es completamente regular si y sólo si la familia $\mathfrak{B}_0(X)$ de conjuntos coceros en X es una base de la topología de X.

2.3. Filtros Base y Filtros

Sea X un conjunto. Denotamos su conjunto potencia como 2^X.

Definición 23. Un *filtro base* η es una familia no vacía de conjuntos no vacíos tal que si $N, N' \in \eta$, existe $N'' \in \eta$ contenido en $N \cap N'$.

Definición 24. Dados dos filtros base η, η', diremos que η' es *más fino* que η si para cada $N \in \eta$ existe $N' \in \eta$ tal que $N' \subseteq N$.

Definición 25. Si $\mathfrak{G}$ es un conjunto y η es un filtro base, diremos que η es un $\mathfrak{G}$ *-filtro base* si $\eta \subseteq \mathfrak{G}$. Si X es un conjunto y η es un 2^X-filtro base, diremos simplemente que η es un filtro base en X.

Definición 26. Un $\mathfrak{G}$-filtro base es un $\mathfrak{G}$ *-filtro* si siempre que $N \in \eta$, $G \in \mathfrak{G}$ y $N \subseteq G$, se tiene $G \in \eta$.

Definición 27. Un $\mathfrak{G}$-filtro η es un $\mathfrak{G}$ *-ultrafiltro* si η no está contenido propiamente en ningún otro $\mathfrak{G}$-filtro.

Definición 28. Dos filtros base η y η' son *equivalentes* si η es más fino que η' y η' es más fino que η.

Definición 29. Dados un espacio topológico X y $p \in X$, la familia de vecindades de p es un 2^X-filtro, el cual se denota por η_p.

Definición 30. Todo $\mathfrak{G}$-filtro base η es equivalente a un único $\mathfrak{G}$-filtro, a saber

$$\eta^+ := \{G \in \mathfrak{G} : N \subseteq G \text{ para alguna } N \in \eta\}.$$

Se dice entonces que η es una *base* del filtro η^+.

Definición 31. Si η y η' son $\mathfrak{G}$-filtros base, entonces η' es un *filtro base más fino* que η si y sólo si $\eta^+ \subseteq \eta'^+$.

Definición 32. Dos filtros base η y η' son equivalentes si y sólo si $\eta^+ = \eta'^+$

Teorema 33. Sea η un $\mathfrak{G}$-filtro base. Entonces existe un $\mathfrak{G}$-ultrafiltro η_0 tal que $\eta \subseteq \eta_0$.

Teorema 34. Un filtro η en X es un ultrafiltro en X si y sólo si para cada $A \in 2^X$, se tiene $A \in \eta$ o $X \backslash A \in \eta$.

Definición 35. Sean X un espacio topológico, η y η' filtros base en X y p un punto de X.

1. Decimos que η y η' se *mezclan* si cada elemento de η intersecta a cada elemento de η'.

2. p es *punto de acumulación de* η si η y η_p se mezclan, es decir, si toda vecindad de p intersecta a cada elemento de η o, equivalentemente, si $p \in N^-$ para cada $N \in \eta$.

3. El *núcleo* A_η de η es el conjunto de puntos de acumulación de η, es decir, $A_\eta = \bigcap_{N\in\eta} N^-$.

4. p es un *punto límite* de η o η *converge a* p si $\eta_p \subseteq \eta^+$, es decir, si toda vecindad de p contiene a un elemento de η. El conjunto de puntos de convergencia de η se representa como C_η. Es muy factible que $C_\eta = \emptyset$.

Teorema 36. Sea X un espacio topológico y sean η, η' filtros base en X.

1. η y η' se mezclan si y sólo si η y η' tienen un sub filtro base común.

2. Si p es un punto límite de η ($p \in X$) y η y η' se mezclan, entonces p es punto de acumulación de η. En particular $C_\eta \subseteq A_\eta$.

3. Si η' es un sub filtro base de η, entonces $A_{\eta'} \subseteq A_\eta$ y $C_\eta \subseteq C_{\eta'}$.

4. Si η y η' son equivalentes, entonces $C_\eta = C_{\eta'}$ y $A_\eta = A_{\eta'}$. En particular, $C_\eta = C_{\eta^+}$ y $A_\eta = A_{\eta^+}$.

5. Si $p \in A_\eta$, existe un sub filtro base η_0 de η tal que η_0 converge a p.

6. Si η es un ultrafiltro en X, entonces $A_\eta = C_\eta$.

2.4. Compactaciones de un Espacio de Tychonoff

Definición 37. Una *extensión* de un espacio arbitrario X es una pareja (h, Y), en donde h es un homeomorfismo de X sobre un subespacio denso de Y.

Definición 38. Una extensión (h, Y) de X es una *compactación* de X si Y es compacto.

Definición 39. Dadas dos extensiones (h_1, Y_1) y (h_2, Y_2) de un espacio X, decimos que (h_1, Y_1) *domina* a (h_2, Y_2) si existe una función continua $\varphi : Y_1 \to Y_2$ tal que $\varphi \circ h_1 = h_2$. Si (h_1, Y_1) domina a (h_2, Y_2), este hecho lo denotamos como $(h_1, Y_1) \geq (h_2, Y_2)$.

Definición 40. Dos compactaciones (h_1, Y_1), (h_2, Y_2) de un espacio X se dicen *equivalentes* si existe un homeomorfismo $\varphi : Y_1 \to Y_2$ tal que $\varphi \circ h_1 = h_2$.

Definición 41. Sea $\mathfrak{F} = \{f_\alpha : \alpha \in M; f_\alpha : X \to X_\alpha\}$ una familia de funciones con dominio común X.

1. $\mathfrak{F}$ *distingue puntos* si dados $a, b \in X$, $a \neq b$, existe $\alpha \in M$ tal que $f_\alpha(a) \neq f_\alpha(b)$.

2. $\mathfrak{F}$ *distingue puntos de cerrados* si para cada cerrado A en X y cada punto $p \in X \backslash A$, existe $\alpha \in M$ tal que $f_\alpha(p) \notin f_\alpha(A)^-$.

3. La *función evaluatoria* de $\mathfrak{F}$ es la función $f : X \to \Pi_{\alpha \in M} X_\alpha$ definida como $(f(x))(\alpha) = f_\alpha(x)$, $x \in X$, $\alpha \in M$.

Lema 42. Sea $\{X_\alpha : \alpha \in M\}$ una familia no vacía de espacios topológicos y sea $g : Z \to X$ una función de un espacio Z en el producto topológico $X = \Pi_{\alpha \in M} X_\alpha$. Entonces g es continua si y sólo si $p_\alpha \circ g : Z \to X_\alpha$ es continua para cada cada $\alpha \in M$, en donde $p_\alpha : X \to X_\alpha$ es la α-proyección.

Teorema 43. Sea $\mathfrak{F} = \{f_\alpha : \alpha \in M; f_\alpha : X \to X_\alpha\}$ una familia de funciones y sea f la función evaluatoria de $\mathfrak{F}$. Entonces:

1. f es continua si y sólo si cada f_α es continua.

2. f es inyectiva si y sólo si $\mathfrak{F}$ distingue puntos.

3. Si $\mathfrak{F}$ distingue puntos de cerrados, $f : X \to f(X)$ es abierta.

4. Si cada f_α es continua, $\mathfrak{F}$ distingue puntos de cerrados y X es T_1, entonces $f : X \to f(X)$ es un homeomorfismo.

El siguiente teorema caracteriza a los espacios de Tychonoff:

Teorema 44. Sea X un espacio topológico, $\mathfrak{F} = \{f_\alpha : \alpha \in M\}$ la familia de funciones continuas de X en el intervalo cerrado $[0, 1]$ y sea $h : X \to I^M$ la función evaluatoria de $\mathfrak{F}$.

1. X es completamente regular si y sólo si $\mathfrak{F}$ distingue puntos de cerrados.

2. Si X es de Tychonoff, $h : X \to h(X)$ es un homeomorfismo.

3. X es de Tychonoff si y sólo si X es homeomorfo a un subespacio de un espacio compacto y T_2.

Definición 45. Si X es un espacio de Tychonoff arbitrario y $h : X \to I^M$ es como en el Teorema 44.2, entonces $(h, \beta X)$, en donde βX es la cerradura de $h(X)$ en I^M, es una compactación T_2 de X. Ésta es la llamada *compactación de Stone-Čech* de X.

A continuación, enunciamos la *propiedad universal* de la compactación de Stone-Čech.

Lema 46. Sea $\varphi : X \to Y$ una función continua de un espacio de Tychonoff X en un espacio compacto y T_2 Y. Entonces existe una única función continua $\psi : \beta X \to Y$ tal que $\psi \circ h = \varphi$, en donde $(h, \beta X)$ es la compactación de Stone-Čech de X.

Definición 47. Sea X un espacio topológico. La *densidad* $d(X)$ de X es el menor número cardinal infinito α tal que X tiene un subespacio denso de cardinalidad menor o igual que α. El *peso* $w(X)$ de X es el menor número cardinal infinito α tal que X tiene una base de cardinalidad menor o igual que α.

Teorema 48. Sea $\{X_i : i \in J\}$ una familia de espacios T_2, $|X_i| \geq 2$, con densidad $\alpha \geq \aleph_0$. Entonces $X = \Pi_{i \in J} X_j$ tiene densidad menor o igual a α si y sólo si $|J| \leq 2^\alpha$.

Definición 49. Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $\mathfrak{B}$ una base de τ. Definamos $\mathcal{C}(\mathfrak{B}) = \{H : X \backslash H \in \mathfrak{B}\}$. Diremos que $\mathfrak{B}$ es una *base de Wallman* de X si satisface las siguientes dos condiciones:

1. Si $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$, también $B_1 \cup B_2 \in \mathfrak{B}$ y $B_1 \cap B_2 \in \mathfrak{B}$.

2. Si $x \in B \in \mathfrak{B}$, existe $H \in \mathcal{C}(\mathfrak{B})$ tal que $x \in H \subseteq B$.

   Si además se cumple:

3. Dados $H_1, H_2 \in \mathcal{C}(\mathfrak{B})$, ajenos, existen $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$, ajenos, tales que $H_1 \subseteq B_1$ y $H_2 \subseteq B_2$,

diremos que $\mathfrak{B}$ es *normal*.

Las bases de Wallman proporcionan un método útil para compactar un espacio.

Definición 50. Sea $\mathfrak{B}$ una base de Wallman de un espacio X y sea $\gamma = \mathcal{C}(\mathfrak{B}) = \{A : X \backslash A \in \mathfrak{B}\}$. Entonces:

1. $\xi \subseteq \gamma$ es un ultrafiltro si ξ es un γ-filtro y ξ no está propiamente contenido en ningún otro γ-filtro.

2. $X(\gamma) = \{\xi : \xi \text{ es un } \gamma\text{-ultrafiltro}\}$.

3. Para cada $x \in X$, se define $\nu(x) = \{F \in \gamma : x \in F\}$.

4. Para cada $A \subseteq X$, se define $A^* = \{\xi \in X(\gamma) : L \subseteq A \text{ para alguna } L \in \xi\}$

Lema 51. Con la notación anterior, se tiene que:

1. Para cada $x \in X$, se cumple que $\nu(x) \in X(\gamma)$.

2. Para cada $A, B \subseteq X$, $(A \cap B)^* = A^* \cap B^*$. Además, $\emptyset^* = \emptyset$ y $X^* = X(\gamma)$.

3. Si A y B pertenecen a $\mathfrak{B} \cup \gamma$, entonces $(A \cup B)^* = A^* \cup B^*$.

4. Si $A \in \gamma$, entonces $A^* = \{\xi \in X(\gamma) : A \in \xi\}$.

Demostración. (Se demostrará sólo 3). Como $C \subseteq D$, entonces $C^* \subseteq D^*$, por lo que $A^* \cup B^* \subseteq (A \cup B)^*$. Sea $\xi \notin A^* \cup B^*$. Luego $L \cap (X \backslash A) \neq \emptyset \neq L \cap (X \backslash B)$ para cada $L \in \xi$. Si $A, B \in \mathfrak{B}$, se tiene que, por ser ξ un γ-ultrafiltro, $X \backslash A \in \xi$ y $X \backslash \in \xi$. En consecuencia, $X \backslash (A \cup B) = (X \backslash A) \cap (X \backslash B) \in \xi$ y $\xi \notin (A \cup B)^*$. Si $A, B \in \gamma$, entonces $A \notin \xi$ y $B \notin \xi$, de donde $A \cap L_1 = \emptyset = B \cap L_2$ para ciertos $L_1, L_2 \in \xi$. Como también $L_1 \cap L_2 \in \xi$ y $(A \cup B) \cap L_1 \cap L_2 = \emptyset$, tenemos que $A \cup B \notin \xi$. Por tanto, $\xi \notin (A \cup B)^*$. Si $A \in \mathfrak{B}$ y $B \in \gamma$, entonces $X \backslash \in \xi$ y existe $L \in \xi$ tal que $B \cap L = \emptyset$. Por consiguiente, $L_1 = L \cap (X \backslash A)$ es un elemento de ξ ajeno a $A \cup B$ y $\xi \notin (A \cup B)^*$. El caso $A \in \gamma$ y $B \in \mathfrak{B}$ es análogo. □

Teorema 52. Sean $\mathfrak{B}, X, \gamma, X(\gamma)$ y ν como en el Lema 50. Sea γ^* la topología de $X(\gamma)$ que tiene como base a la familia $\{B^* : B \in \mathfrak{B}\}$. Entonces:

1. $(X(\gamma), \gamma^*)$ es un espacio compacto y T_1.

2. Para cada $A \subseteq X$, $A^* \subseteq C_{X(\gamma)}\nu(A)$ es la $X(\gamma)$-cerradura de $\nu(A)$. Si $A \in \mathfrak{B} \cup \gamma$, $\nu(A) = A^* \cap \nu(X)$. Si $A \in \gamma$, $A^* = C_{X(\gamma)}\nu(A)$.

3. Para cada $x \in X$ y cada $A \in \mathfrak{B} \cup \gamma$, se tiene $\nu^{-1}\nu(x) = \{x\}^-$ y $\nu^{-1}(A^*) = A$.

4. La correspondencia $x \mapsto \nu(x)$ define una función abierta y continua de X sobre un subespacio denso de $X(\gamma)$. Si X es T_1, $(\nu, X(\gamma))$ es una compactación T_1 de X.

5. $X(\gamma)$ es T_2 si y sólo si $\mathfrak{B}$ es normal.

Demostración.

1. Sea $\{B_\alpha : \alpha \in J\} \subseteq \mathfrak{B}$ tal que $X(\gamma) = \bigcup_{\alpha \in J} B^*_\alpha$. Queremos probar que existe $J_0 \subseteq J$ finito tal que $X(\gamma) = \bigcup_{\alpha \in J_0} B^*_\alpha$. Suponiendo lo contrario, entonces

$$\mathfrak{G} = \{X \backslash \bigcup_{\alpha \in J_0} B_{\alpha \in J_0} : J_0 \subseteq J, J_0 \text{ finito}\}$$

es un γ-filtro. Por 51.3, $\emptyset \notin \mathfrak{G}$. Por consiguiente, utilizando el Lema de Zorn se puede probar que existe un γ-filtro ξ tal que $\mathfrak{G} \subseteq \xi$. Entonces $\xi \in B^*_{\alpha_0}$ para alguna $\alpha_0 \in J$ y también $\xi \in (X \backslash B_{\alpha_0})^*$, pues $X \backslash B_{\alpha_0} \in \mathfrak{G} \subseteq \xi$, lo que contradice a 51.2. Para probar que $X(\gamma)$ es T_1, tomemos $\xi_1, \xi_2 \in X(\gamma)$, con $\xi_1 \neq \xi_2$. Entonces existen elementos ajenos $F_1 \in \xi_1 \backslash \xi_2$ y $F_2 \in \xi_2 \backslash \xi_1$. En consecuencia, $\xi_1 \in (X \backslash F_2)^* \subseteq X(\gamma) \backslash \{\xi_2\}$ y $\xi_2 \in (X \backslash F_1)^* \subseteq X(\gamma) \backslash \{\xi_1\}$

2. Claramente $A^* \cap \nu(X) \subseteq \nu(A)$ para cada $A \subseteq X$. Probaremos que $\nu(A) \subseteq A \cap \nu(X)$ para cada $A \in \mathfrak{B} \cup \gamma$. Sea $x \in A$. Si $A \in \mathfrak{B}$, existe $F \in \gamma$ tal que $x \in F \subseteq A$. Si $A \in F \subseteq \gamma$, supongamos $F = A$. En cualquier caso, existe $F \in \gamma$ tal que $x \in F \subseteq A$. Por tanto, $F \in \nu(x)$ y $\nu(x) \in F^* \subseteq A^*$. Demostraremos ahora que $A^* \subseteq C_{X(\gamma)}\nu(A)$ para cada $A \subseteq X$. Si $\xi \in X(\gamma) \backslash C_{X(\gamma)}\nu(A)$, existe $B \in \mathfrak{B}$ tal que $\xi \in B^*$ y $B^* \cap \nu(A) = \emptyset$. Sea $F \in \xi$ tal que $F \subseteq B$. En consecuencia, $F^* \cap \nu(A) = \nu(F) \cap \nu(A) = \emptyset$ y $F \cap A = \emptyset$, de donde $\xi \in (X \backslash A)^*$ y $\xi \notin A^*$. Finalmente, si $A \in \gamma$, entonces A^* es un cerrado en $X(\gamma)$ pues $X(\gamma) \backslash A^* = (X \backslash A)^*$ es abierto, y $\nu(A) \subseteq A^* \subseteq C_{X(\gamma)}\nu(A)$. Por tanto $A^* = C_{X(\gamma)}\nu(A)$.

3. Se omite la demostración.

4. Se omite la demostración.

5. Supongamos primero que $\mathfrak{B}$ es normal. Sean ξ_1, $\xi_2 \in X(\gamma)$, $\xi_1 \neq \xi_2$. Por tanto, existen $F_1 \in \xi_1$ y $F_2 \in \xi_2$ ajenos. Como $\mathfrak{B}$ es normal, existen $D_1, D_2 \in \mathfrak{B}$, ajenos, tales que $F_1 \subseteq D_1$ y $F_2 \subseteq D_2$. Por tanto, D_1^* y D_2^* son abiertos ajenos en $X(\gamma)$ y $\xi_1 \in D_1^*$, $\xi_2 \in D_2^*$ Recíprocamente, supongamos que $X(\gamma)$ es T_2. Sean $F_1, F_2 \in \gamma$, ajenos. Entonces F_1^* y F_2^* son cerrados ajenos en $X(\gamma)$. Como $X(\gamma)$ es normal (por ser compacto y T_2), existen abiertos ajenos W_1, W_2 en $X(\gamma)$ tales que $F_i^* \subseteq W_i$, $i = 1, 2$. Usando 51.3, podemos suponer que $W_i = B_i^*$ para cada $i = 1, 2$, en donde $B_i \in \mathfrak{B}$. Por tanto, $F_i = \nu^{-1}(F_i^*) \subseteq \nu^{-1}(B_i^*) = B_i$, y $\mathfrak{B}$ es normal.

$\square$

Definición 53. Si X es un conjunto y $\mathfrak{G} \subseteq 2^X$, definimos $C(\mathfrak{G}) = \{A : X \backslash A \in \mathfrak{G}\}$. Si $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2 \subseteq 2^X$, ponemos $\mathfrak{G}_1 \ll \mathfrak{G}_2$ si cada pareja de elementos ajenos de $\mathfrak{G}_1$ está contenida en una pareja de elementos ajenos de $\mathfrak{G}_2$. Dos bases de Wallman $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ en un espacio X son *equivalentes* si $C(\mathfrak{B}_1) \ll C(\mathfrak{B}_2)$ y $C(\mathfrak{B}_2) \ll C(\mathfrak{B}_1)$

La demostración del siguiente teorema puede encontrarse en [GMT88].

Teorema 54. Sea $f : X \to Y$ una función del espacio X en el espacio Y. Sean $\mathfrak{B}_X, \mathfrak{B}_Y$ bases de Wallman de X, Y, respectivamente. Supongamos que:

1. $\mathfrak{B}_Y$ es normal; y

2. $f^{-1}(C(\mathfrak{B}_Y)) \ll C(\mathfrak{B}_X)$.

Entonces f es continua y existe una única función continua $f^* : X(C(\mathfrak{B}_X)) \to Y(C(\mathfrak{B}_Y))$ tal que $f^* \circ v_X = v_Y \circ f$, en donde $v_X : X \to X(C(\mathfrak{B}_X))$ y $v_Y : Y \to Y(C(\mathfrak{B}_Y))$ son los encajes canónicos definidos en 52.4.

Demostración. Para probar que f es continua, tomemos $x \in X$ y $G \in \mathfrak{B}_Y$ tales que $f(x) \in G$. Por la suposición 2 de la hipótesis, existen $H_1, H_2 \in C(\mathfrak{B}_X)$, ajenos, tales que $f^{-1}(M) \subseteq H_1$ y $f^{-1}(Y \backslash B) \subseteq H_2$. Por tanto, $x \in X \backslash H_2 \in \mathfrak{B}_X$ y $f(X \backslash H_2) \subseteq G$, es decir, f es continua.

Para probar el resto del teorema, supongamos primero que Y es compacto y T_2. Sea $\xi \in X(C(\mathfrak{B}_X))$. Consideremos la colección $\sigma = \{f(N)^- : N \in \xi\}$. Entonces σ es una base de filtro en Y. Como Y es compacto, σ tiene al menos un punto de acumulación en Y, y afirmamos que no puede tener más de uno. Supongamos, por el contrario, que existen dos tales puntos y_1, y_2. Como Y es T_2, existen $G_1, G_2 \in \mathfrak{B}_Y$ ajenos tales que $y_1 \in \mathfrak{G}_1$ y $y_2 \in \mathfrak{G}_2$. Sea $V \in \mathfrak{B}_Y$ tal que $L = Y \backslash G_2 \subseteq V \subseteq V^- \subseteq Y \backslash \{y_2\}$. Los conjuntos L y $Y \backslash V$ son vecindades de y_1 y y_2, respectivamente. Por tanto, $L \cap f(N) \neq \emptyset \neq (Y \backslash V) \cap f(N)$ para cada $N \in \xi$. Por otro lado, por la condición 2, existen $H_1, H_2 \in C(\mathfrak{B}_X)$ ajenos y tales que $f^{-1}(L) \subseteq H_1$ y $f^{-1}(Y \backslash V) \subseteq H_2$. Por tanto, $H_1 \cap N \neq \emptyset \neq H_2 \cap N$ para toda $N \in \xi$. Como ξ es un $C(\mathfrak{B}_X)$-ultrafiltro, necesariamente H_1 y H_2 pertenecen a ξ, lo que contradice la propiedad de intersección finita de ξ. Por tanto, σ tiene exactamente un punto de acumulación y. La compacidad de Y implica que σ converge por ende a y. Definimos entonces $\bar{f}(\xi) = y$. Es claro que $\bar{f} \circ \nu_X = f$. Para probar la continuidad de $\bar{f}$, tomemos $\xi \in X(C(\xi))$ y $V \in \mathfrak{B}_Y$ tales que $\bar{f}(\xi) \in V$. Podemos hallar fácilmente elementos $L \in C(\mathfrak{B}_Y)$ y $W \in \mathfrak{B}_Y$ tales que $\bar{f}(\xi) \in int\, L \subseteq L \subseteq W \subseteq W^- \subseteq V$. Como $\sigma \to \bar{f}(\xi)$, existe

$N \in \xi$ tal que $f(N) \subseteq L$. Por la condición 2, existe $B \in \mathfrak{B}_X$ tal que $f^{-1}(L) \subseteq B \subseteq f^{-1}(W)$. Por tanto, $\xi \in B^*$. Elijamos ahora cualquier $\eta \in B^*$. Sea $G \in \eta$ tal que $G \subseteq B$. Por consiguiente, $f(G) \subseteq W$. Esto implica que $\bar{f}(\eta) \in f(G)^- \subseteq W^- \subseteq V$ y luego $\bar{f}$ es continua.

Volviendo al caso general, consideremos el espacio compacto y T_2 $Y(C(\mathfrak{B}_Y))$ y la función continua $\nu_Y \circ f : X \to Y(C(\mathfrak{B}_Y))$ tal que $f^* \circ \nu_X = f \circ \nu_Y$. Se omite la demostración de la unicidad de f^*. $\square$

Corolario 55. Sean $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ dos bases de Wallman normales en un espacio X. Si $C(\mathfrak{B}_1) \ll C(\mathfrak{B}_2)$, entonces existe una única función continua $j^* : X(C(\mathfrak{B}_2)) \to X(C(\mathfrak{B}_1))$ tal que $j^* \circ \nu_2 = \nu_1$. Por tanto, $(\nu_2, X(C(\mathfrak{B}_2))) \geq (\nu_2, X(C(\mathfrak{B}_1)))$

Corolario 56. Sea $\mathfrak{B}$ una base de Wallman normal en un espacio T_2 X tal que $\mathfrak{B}$ contiene todos los conjuntos coceros de X. Entonces $X(C(\mathfrak{B}))$ es equivalente a la compactación de Stone-Čech de X. En particular, si (X, τ) es un espacio T_4, entonces $X(C(\tau))$ es equivalente a βX.

Capítulo 3

Cubiertas, Espacios Paracompactos y Funciones Perfectas

3.1. Metrización de Espacios Topológicos

Es común definir una topología τ_d en un conjunto X a partir de una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ que satisface las siguientes propiedades:

1. $d(x, x) = 0$ para cada $x \in X$.

2. $d(x, y) \geq 0$ para cada $(x, y) \in X \times X$.

3. $d(x, y) = d(y, x)$ para cada $(x, y) \in X \times X$.

4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para cada $x, y, z \in X$.

Declaramos $A \subseteq X$ abierto ($A \in \tau_d$) si y sólo si para cada $p \in A$ existe un número $\varepsilon_p > 0$ tal que $\{x : d(p, x) < \varepsilon_p\} \subseteq A$. Las propiedades $(1) - (4)$ nos sirven para probar que τ_d es efectivamente una topología de X.

Cabe preguntarse bajo qué condiciones una topología τ en un conjunto X cumple $\tau = \tau_d$, en donde d es una función con las propiedades $(1) - (4)$.

Definición 57. Una *pseudométrica* en un conjunto X es una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ con las propiedades:

1. $d(x, x) = 0$ para todo $x \in X$.

2. $d(y,x) + d(y,z) \geq d(x,z)$ para todos $x, y, z \in X$.

Estas dos condiciones implican que $d(x,y) \geq 0$ para cualesquiera $x, y \in X$.

Definición 58. Sea X un conjunto. Una pseudométrica d en X es una *métrica* si para $x, y \in X$, $x \neq y$, entonces $d(x,y) = 0$.

Definición 59. Un espacio topológico (X, τ) es *pseudometrizable* (resp., *metrizable*) si existe una pseudométrica (resp., una métrica) d en X tal que $\tau = \tau_d$.

Definición 60. Sean (X, d) un espacio pseudométrico, $p \in X$ y $A \subseteq X$. Para cada $\varepsilon > 0$ definimos $V_\varepsilon^d(p) = \{x : d(p,x) < \varepsilon\}$ y $V_\varepsilon^d(A) = \bigcup\{V_\varepsilon^d : a \in A\}$. Si no hay posibilidad de confusión, escribiremos $V_\varepsilon(p)$ y $V_\varepsilon(A)$ en lugar de $V_\varepsilon^d(p)$ y $V_\varepsilon^d(A)$, respectivamente.

Lema 61. Un espacio topológico T_0 X es metrizable si y sólo si existe una sucesión $d_1, d_2, \ldots$ de pseudométricas en X tal que $\{V_{1/m}^{d_n} : x \in X, m, n = 1, 2, \ldots\}$ es base de X.

Definición 62. Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces:

1. (X, τ) es *segundo numerable* si τ tiene una base numerable.

2. (X, τ) es separable si existe $A \subseteq X$ numerable y denso en X.

3. (X, τ) es de *Lindelöf* si toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta numerable.

El siguiente teorema clásico resuelve el problema de metrización para espacios completamente separables:

Teorema 63. En un espacio topológico X, las siguientes propiedades son equivalentes:

1. X es metrizable y separable.

2. X es T_3 y segundo numerable.

3. X es homeomorfo a un subespacio del cubo de Hilbert I^ω.

3.2. Propiedades de Cubiertas

En este apartado mostramos las condiciones necesarias y suficientes clásicas para que un espacio topológico X sea metrizable. En general las condiciones serán principalmente las siguientes: la existencia de bases de la topología con ciertas características, propiedades de cubiertas y axiomas de separación. Los resultados aquí citados pueden consultarse en [GMT88].

Definición 64. Si X es un conjunto, $\mathcal{G} \subseteq 2^X$, $A \subseteq X$ y $p \in X$, definimos:

1. $St(p, \mathcal{G}) := \bigcup\{G \in \mathcal{G} : p \in G\}$,

2. $St(A, \mathcal{G}) := \bigcup\{G \in \mathcal{G} : A \cap G \neq \emptyset\}$,

3. $\mathcal{G}^{\Delta} := \{St(x, \mathcal{G}) : x \in X\}$,

4. $\mathcal{G}^{*} := \{St(G, \mathcal{G}) : G \in \mathcal{G}\}$,

5. $o(p, \mathcal{G}) := card\{G \in \mathcal{G} : p \in G\}$,

6. $o(A, \mathcal{G}) := card\{G \in \mathcal{G} : A \cap G \neq \emptyset\}$.

Definición 65. Sea (X, τ) un espacio topológico y sean $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \subseteq 2^X$ cubiertas de X.

1. Decimos que $\mathcal{G}_1$ es un *refinamiento* de $\mathcal{G}_2$ si algún elemento de $\mathcal{G}_1$ está contenido en un elemento de $\mathcal{G}_2$, es decir, si existe una función $\phi : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ tal que $G \subseteq \phi(G)$ para cada $G \in \mathcal{G}$. Simbólicamente expresamos esto como $\mathcal{G}_1 \leq \mathcal{G}_2$.

2. $\mathcal{G}_1$ *refina débilmente* a $\mathcal{G}_2$, en símbolos $\mathcal{G}_1 \leq_w \mathcal{G}_2$, si para cada $x \in X$ se tiene $St(x, \mathcal{G}_1) \subseteq St(x, \mathcal{G}_2)$.

3. $\mathcal{G}_1$ *refina regularmente* a $\mathcal{G}_2$, en símbolos $\mathcal{G}_1 \leq_R \mathcal{G}_2$, si cada par de puntos en la unión de dos miembros intersectantes de $\mathcal{G}_1$ pertenecen a un mismo miembro de $\mathcal{G}_2$.

4. $\mathcal{G}_1$ *refina baricéntricamente* a $\mathcal{G}_2$ o $\mathcal{G}_1$ es un Δ-*refinamiento* de $\mathcal{G}_2$, si $\{St(x, \mathcal{G}_1) : x \in X\}$ es un refinamiento de $\mathcal{G}_2$. En símbolos denotamos esto como $\mathcal{G}_1^{\Delta} \leq \mathcal{G}_2$.

Ahora damos algunas relaciones entre los distintos tipos de refinamientos enunciados anteriormente.

Lema 66. Si α, β, γ son cubiertas del conjunto X, $x \in X$ y $A, B \subseteq X$, se tiene:

1. si $A \subseteq B$ y $\alpha \leq_w \beta$ entonces $St(A, \alpha) \subseteq St(B, \beta)$.

2. $St(A \cap B, \alpha) \subseteq St(A, \alpha) \cap St(B, \alpha)$.

3. $St(A \cup B, \alpha) = St(A, \alpha) \cup St(B, \alpha)$.

4. Si $\alpha \leq \beta$ entonces $\alpha \leq_w \beta$, $\alpha^\Delta \leq \beta^\Delta$ y $\alpha^* \leq \beta^*$.

5. Se cumplen las siguientes implicaciones:

$$\alpha^\Delta \leq \beta \Rightarrow \alpha \leq_R \beta \Rightarrow \alpha^\Delta \leq_w \beta \Rightarrow \alpha^\Delta \leq \beta^\Delta$$

6. $\gamma \leq_R \beta \leq_R \alpha \Rightarrow \gamma^\Delta \leq_R \alpha$.

7. $\gamma \leq_w \beta \leq_R \alpha$ o $\gamma \leq_R \beta \leq_w \alpha \Rightarrow \gamma \leq_R \alpha$.

8. $\alpha \leq \alpha^\Delta \leq \alpha^* \leq \alpha^{\Delta\Delta}$.

Omitimos la demostración del siguiente Lema ([GMT88]4.34):

Lema 67. Sea $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ una sucesión de cubiertas abiertas de un espacio topológico (X, τ) tal que $\alpha_{n+1} \leq_R \alpha_n$ para cada $n = 1, 2, \ldots$. Entonces existe una pseudométrica ϱ en X tal que :

1. la identidad $i : (X, \tau) \to (X, \tau_\varrho)$ es continua, es decir, $\tau_\varrho \subseteq \tau$.

2. Para cada $p \in X$ y cada $n = 1, 2, \ldots$, se tiene $St(p, \alpha_{n+1})^- \subseteq St(p, \alpha_n)$.

3. Para cada $p \in X$ y cada $n = 1, 2, \ldots$, se cumple $V^\varrho_{2^{-n-1}}(p) \subseteq St(p, \alpha_n) \subseteq V^\varrho_{2^{-n+1}}(p)$. Por tanto, si definimos $\beta_n := \{V^\varrho_{2^{-n}}(x) : x \in X\}$, se tiene $\beta_{n+1} \leq \alpha_n^\Delta \leq \beta_{n-1}$.

4. Para cada $x \in X$, $\bigcap_{n=1}^\infty St(x, \alpha_n) = \{y \in X : \varrho(x, y) = 0\}$.

Corolario 68. Conservando la notación del Lema 67, se tiene que $\beta_{n+3} \underset{R}{\leq} \alpha_n \underset{R}{\leq} \beta_{n-1}$ para cada $n = 1, 2, \ldots$.

Corolario 69. Si para cada $n = 1, 2, \ldots$, se tiene $\alpha_{n+1}^\Delta \leq \alpha_n$, entonces $\beta_{n+2} \leq \alpha_n \leq \beta_{n-1}$ para cada $n = 1, 2, \ldots$.

A continuación introduciremos el concepto de cubierta normal de un espacio, el cual será fundamental en el presente trabajo.

Definición 70. Sea X un espacio topológico. Una cubierta α de X se dice *normal* si existe una sucesión $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ de cubiertas abiertas de X tal que $\alpha_{n+1}^{\Delta} \leq \alpha_n$ para $n = 1, 2, \ldots$. En este caso se dice también que la sucesión de cubiertas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, es normal.

Las cubiertas normales forman una subclase de la clase de las cubiertas abiertas y son frecuentemente usadas en problemas de metrización y topología. En algunos aspectos, mientras más cubiertas normales tenga un espacio, más se comporta como un espacio paracompacto, pues en los espacios paracompactos toda cubierta abierta es normal. Este tipo de cubiertas pueden ser caracterizadas entre las cubiertas abiertas de muchas maneras (véase, por ejemplo, [GMT88], 4.47). Las principales caracterizaciones las veremos más adelante.

Teorema 71. ([GMT88], 4.36) Si α es una cubierta normal de un espacio (X, τ), existe un espacio métrico Y y una función continua y suprayectiva $\varphi : X \to Y$ tal que:

$$\{Y \backslash (\varphi(X \backslash A))^- : A \in \alpha\}$$

es una cubierta de Y.

Corolario 72. Sean α, X, Y y φ como en el Teorema 71. Entonces $\{int\varphi(A) : A \in \alpha\}$ es una cubierta abierta de Y.

Definición 73. Una sucesión $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ de cubiertas de un espacio X es $\omega\Delta$ si cada sucesión $x_1, x_2, \ldots \in X$ tal que $x_n \in St(x, \alpha_n)$ para alguna $x \in X$ y cada $n = 1, 2, \ldots$, tiene al menos un punto de acumulación en X. Decimos que X es $\omega\Delta$ si admite una sucesión $\omega\Delta$ de cubiertas.

Teorema 74. Sea $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ una sucesión normal y $\omega\Delta$ de cubiertas de un espacio X. Defínase una pseudométrica ϱ en X como en el Lema 67. Entonces, para cada cerrado $K \subseteq X$, la τ_ϱ-cerradura de K coincide con $\{y \in X : \varrho(x, y) = 0 \text{ para alguna } x \in K\}$. Además, la τ_ϱ-cerradura de cada punto de X es numerablemente compacta.

Corolario 75. Sea α una cubierta abierta de un espacio X. Si α pertenece a una sucesión normal y $\omega\Delta$, entonces existe una función φ, continua, cerrada y con fibras numerablemente compactas, de X sobre un espacio métrico Y, tal que $\{Y \backslash (\varphi(X \backslash A))^- : A \in \alpha\}$ es una cubierta de Y.

Definición 76. Sea $\mathfrak{G}$ una familia de subconjuntos de un espacio topológico X. Decimos que $\mathfrak{G}$ es *localmente finita* si cada punto de X tiene una vecindad que intersecta, a lo más, a un número finito de elementos de $\mathfrak{G}$.

Definición 77. Una familia $\mathfrak{G}$ de subconjuntos de un espacio topológico X se dice *discreta* si cada punto de X tiene una vecindad que intersecta, a lo más, a un elemento de $\mathfrak{G}$.

Definición 78. Una familia $\mathfrak{G}$ de subconjuntos de un espacio X es una familia σ-localmente finita (respectivamente, σ-discreta) si existen familias localmente finitas (respectivamente, discretas) $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots$ tales que $\mathfrak{G} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{G}_n$.

Definición 79. Sea X un espacio topológico y sea $\mathfrak{G}$ una familia de subconjuntos de X. Entonces $\mathfrak{G}$ es *punto finita* (respectivamente, *estrella finita*) si para cada $p \in X$ (respectivamente para cada $G \in \mathfrak{G}$), se tiene $o(p, \mathfrak{G}) < \aleph_0$ (respectivamente, $o(G, \mathfrak{G}) < \aleph_0$).

Definición 80. Una familia $\mathfrak{G}$ de subconjuntos de un espacio topológico X se llama *punto numerable* (respectivamente, *estrella numerable*) si para cada $x \in X$ (respectivamente para cada $G \in \mathfrak{G}$), se tiene $o(p, \mathfrak{G}) \leq \aleph_0$ (respectivamente, $o(G, \mathfrak{G}) \leq \aleph_0$.

Definición 81. Una familia $\mathfrak{G}$ de subconjuntos de un espacio X es una *familia cocero* (respectivamente, *fuertemente cocero*) si cada $G \in \mathfrak{G}$ (respectivamente, cada unión de miembros de $\mathfrak{G}$) es un conjunto cocero.

Las demostraciones de los siguientes resultados se omiten.

Lema 82. Cada familia discreta es localmente finita. También, cada familia σ-discreta es σ-localmente finita ([GMT88], 4.40.1).

Lema 83. Cada cubierta abierta y estrella numerable es σ-discreta ([GMT88], 4.40.7).

Lema 84. Cada familia de conjuntos abiertos en un espacio perfectamente normal (en particular, en un espacio metrizable), es fuertemente cocero ([GMT88], 4.40.9).

Proposición 85. Cada familia σ-localmente finita formada por conjuntos coceros es fuertemente cocero.

Los espacios pseudométricos tienen una importante propiedad.

Proposición 86. Toda cubierta abierta de un espacio pseudométrico (X, d) tiene un refinamiento abierto y σ-discreto.

Corolario 87. Toda cubierta normal de un espacio topológico X tiene un refinamiento cocero y σ-discreto.

Demostración. Sea α una cubierta normal de X. Según el teorema 71, existe un espacio métrico Y y una función continua y sobre $\varphi : X \to Y$ tal que $\mathfrak{G} = Y \backslash (\varphi(X \backslash A))^- : A \in \alpha\}$ es una cubierta abierta de Y. De la proposición 86 se deduce que $\mathfrak{G}$ tiene un refinamiento abierto y σ-discreto $\mathfrak{V}$. Es fácil probar que $\beta = \{\varphi^{-1}(v) : v \in \mathfrak{V}\}$ es el refinamiento buscado. □

Lema 88. Sea $\mathfrak{G} = \{G_\alpha : \alpha \in J\}$ una familia localmente finita de conjuntos coceros en un espacio X. Para cada $\alpha \in J$, sea H_α un conjunto nulo contenido en G_α. Entonces $\mathfrak{G} = \bigcup_{\alpha \in J} G_\alpha$ es cocero y $\mathfrak{H} = \bigcup_{\alpha \in J} H_\alpha$ es nulo.

Teorema 89. Sea $\mathfrak{U}$ una cubierta cocero y σ-localmente finita de un espacio X. Entonces $\mathfrak{U}$ tiene un refinamiento cocero y localmente finito.

Lema 90. Sea $\mathfrak{B}$ una base de Wallman normal de un espacio X y sea $\mathfrak{U} = \{U_j : j \in J\}$ una cubierta punto finita de X por elementos de $\mathfrak{B}$ y con la propiedad:

(*) Si $\{B_j : j \in J\} \subseteq \mathfrak{B}$ y, para cada $j \in J$ se tiene $B_j \subseteq U_j$, entonces $\bigcup\{B_j : j \in J\} \in \mathfrak{B}$.

Existen entonces elementos $H_j \in \mathfrak{C}(\mathfrak{B})$ $(j \in J)$ tales que $H_j \subseteq U_j$ para cada $j \in J$ y tales que $X = \bigcup\{H_j : j \in J\}$.

Definición 91. Sea X un espacio topológico. Decimos que X es R_0 si y sólo si dados $p, q \in X$, $\{p\}^- \cap \{q\}^- \neq \emptyset$ implica $\{p\}^- = \{q\}^-$

Corolario 92. Sea $\mathfrak{U}$ una cubierta abierta punto finita de un espacio normal y R_0 (X, τ). Entonces existe una función $F : \mathfrak{U} \to \tau$ tal que

1. $F(U)^- \subseteq U$ para cada $U \in \mathfrak{U}$

2. $X = \bigcup\{F(U) : U \in \mathfrak{U}\}$.

Corolario 93. Toda cubierta abierta localmente finita de un espacio normal y R_0 tiene un refinamiento cocero y localmente finito.

Corolario 94. Sea $\mathfrak{U} = \{U_j : j \in J\}$ una cubierta cocero y localmente finita de un espacio completamente regular X. Entonces existen conjuntos nulos $\{H_j : j \in J\}$ tales que

1. $H_j \subseteq U_j$ para cada $j \in J$

2. $X = \bigcup\{H_j : j \in J\}$.

Teorema 95. Sea $\mathfrak{U} = \{U_j : j \in J\}$ una cubierta cocero y localmente finita de un espacio completamente regular X. Entonces $\mathfrak{U}$ tiene un Δ-refinamiento cocero y localmente finito $\mathfrak{C}$. Por tanto, $\mathfrak{U}$ es normal. Además, si $\mathfrak{U}$ es infinita, podemos escoger $\mathfrak{C}$ de manera que $|\mathfrak{C}| \leq |\mathfrak{U}|$.

Teorema 96. Sea $\mathfrak{B}$ una base de Wallman normal de un espacio X. Si $\mathfrak{U}$ es una cubierta finita de X con elementos de $\mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{U}$ tiene un Δ-refinamiento finito con elementos de $\mathfrak{B}$.

Tenemos ahora los elementos suficientes para probar:

Teorema 97. Sea $\mathfrak{U}$ una cubierta abierta de un espacio topológico X. Consideremos las siguientes afirmaciones:

1. $\mathfrak{U}$ es normal.

2. Existen un espacio pseudométrico Y y una función continua $f : X \to Y$ tales que:

$$\{Y \backslash (f(X \backslash U))^- : U \in \mathfrak{U}\}$$

   es una cubierta de Y.

3. $\mathfrak{U}$ tiene un refinamiento fuertemente cocero y σ-discreto.

4. $\mathfrak{U}$ tiene un refinamiento cocero y σ-localmente finito.

Entonces se cumplen las implicaciones (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4), y si X es completamente regular (4) implica (1), es decir, las condiciones anteriores son equivalentes.

En el caso de cubiertas estrella numerables, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 98. Toda cubierta cocero y estrella numerable $\mathfrak{U}$ de un espacio completamente regular X tiene un Δ-refinamiento cocero y estrella finito $\mathfrak{M}$ tal que $|\mathfrak{M}| \leq |\mathfrak{U}| \cdot \aleph_0$.

El siguiente resultado es de mucha utilidad.

Teorema 99. Si X es un espacio regular, las siguientes propiedades son equivalentes.

1. Toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento abierto y localmente finito.

2. Toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento abierto y σ-discreto.

3. Toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento abierto y σ-localmente finito.

4. Toda cubierta de X tiene un refinamiento cerrado y localmente finito.

Además, si X satisface cualquiera de estas propiedades, entonces X es normal.

Definición 100. Una sucesión $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots$ de cubiertas abiertas de un espacio X es un *desarrollo* de X si para cada $x \in X$, la familia $\{St(x, \mathcal{U}_n) : n = 1, 2, \ldots\}$ es una base local de x. Se dice que X es desarrollable si admite un desarrollo.

Corolario 101. Sea X un espacio desarrollable con base punto numerable (respectivamente σ-discreta, σ-localmente finita). Entonces X tiene un desarrollo $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots$ en donde cada $\mathcal{U}_n$ es punto numerable (respectivamente σ-discreta, σ-localmente finita).

Definición 102. Un espacio topológico X es de Lindelöf si toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta numerable.

El siguiente teorema de metrización se encuentra en [Ale60]:

Teorema 103. Un espacio topológico T_0 (X, τ) es metrizable si y sólo si existe un desarrollo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ de X tal que $\alpha_{n+1} <_R \alpha_n$ para cada $n = 1, 2, \ldots$.

Definición 104. Sea X un conjunto. Definimos la *diagonal* de X como:

$$\Delta(X) := \{(x, x) : x \in X\}.$$

3.3. Funciones Perfectas y sus Caracterizaciones

En esta sección hablaremos de las propiedades básicas de las funciones perfectas, las cuales nos serán de utilidad más adelante para probar algunos resultados acerca de las mismas.

Definición 105. Sean X, Y espacios topológicos. Una función suprayectiva $f : X \to Y$ es *perfecta* si f es continua, cerrada y para cada $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ es un conjunto compacto.

Definición 106. Sea X un espacio topológico.

1. X es *totalmente normal* si toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento baricéntrico abierto o, equivalentemente, si toda cubierta abierta de X es normal.

2. X es *metacompacto* si toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento abierto y punto finito.

Teorema 107.

1. [AD50] Toda cubierta punto finita $\mathfrak{U}$ de un conjunto X tiene una subcubierta *irreducible*, es decir, una cubierta que deja de serlo con la omisión de cualquiera de sus miembros.

2. El espacio de ordinales $[0, \omega_1)$ no es metacompacto.

3. Sea α una cubierta abierta de un espacio X. Entonces α pertenece a una sucesión normal y $\omega\Delta$ si y sólo si existe Y metrizable y $\phi : X \to Y$ continua, cerrada, sobre y con fibras numerablemente compactas, tal que $(Y \backslash (\phi(X \backslash A))^- : A \in \alpha\}$ cubre a Y.

Las funciones perfectas se pueden caracterizar mediante el uso de bases de filtro.

Teorema 108. Sea $f : X \to Y$ continua y sobre. Entonces son equivalentes:

1. f es perfecta.

2. Si η es una base de filtro en X, $y \in Y$ y $f(\eta)$ tiene por punto de acumulación a y, existe $x \in f^{-1}(y)$ tal que x es un punto de acumulación de η.

3. Si η es un ultrafiltro en X, $y \in Y$ y y es un punto límite de $f(\eta)$, existe $x \in f^{-1}(y)$ tal que x es punto límite de η.

4. Si η es una base de filtro en X, $y \in Y$ y y es punto límite de $f(\eta)$, existe $x \in f^{-1}(y)$ tal que x es punto de acumulación de η.

Corolario 109. Sea $\{f_i : f_i : X_i \to Y_i, i \in I\}$ una familia de funciones perfectas. Sean $X = \prod_{i \in I} X_i$ y $Y = \prod_{i \in I} Y_i$. Entonces la función producto $f : X \to Y$, definida mediante la fórmula $(f(x))(i) = f_i(x(i))$, también es perfecta.

Corolario 110. Sea $f : X \to Y$ una función perfecta del espacio X sobre el espacio Y. Si Y es compacto (respectivamente, localmente compacto, Lindelöf o numerablemente compacto), entonces X tiene la propiedad respectiva.

Definición 111. Un espacio de Tychonoff es Čech-*completo* si X es G_δ en βX.

Corolario 112. Un espacio T_2 X es paracompacto y Čech-completo (respectivamente paracompacto, y localmente compacto) si y sólo si existen un espacio Y completamente metrizable (respectivamente, metrizable y localmente compacto) y una función perfecta de X sobre Y.

Corolario 113. Sea X un espacio compacto. Si Y es Lindelöf, localmente compacto o numerablemente compacto, o si X es T_2 y Y es paracompacto, entonces $X \times Y$ tiene la propiedad respectiva de Y.

Corolario 114. Sea $\varphi : X \to Y$ una función perfecta del espacio de Tychonoff X sobre el espacio de Tychonoff Y. Entonces $x \to (x, \varphi(x))$ es un homeomorfismo de X sobre un subespacio cerrado de $\beta X \times Y$.

3.4. Espacios Paracompactos

En cuanto a los subespacios y productos se refiere, los espacios paracompactos se comportan en forma similar a los espacios normales. En esta sección X es un espacio T_2.

Definición 115. Un espacio X es *paracompacto* si es regular y toda cubierta abierta tiene un refinamiento abierto y localmente finito. Por tanto, un espacio regular es paracompacto si y sólo si satisface cualquiera de las propiedades (y por tanto todas) del Teorema 99.

Teorema 116.

1. Un subespacio de un espacio paracompacto no es necesariamente paracompacto. Sin embargo, todo subconjunto F_σ (en particular, todo cerrado) en un espacio paracompacto es también paracompacto.

2. Si todo abierto en un espacio paracompacto es F_σ entonces todo subespacio es paracompacto.

3. Todo subespacio de un espacio paracompacto y perfectamente normal es paracompacto.

4. El producto de dos espacios paracompactos no es necesariamente paracompacto (de hecho, no es necesariamente normal). Sin embargo, todo producto numerable de espacios paracompactos y $\omega\Delta$ es un espacio de la misma índole.

Teorema 117.

1. Todo espacio paracompacto es normal y metacompacto.

2. Todo espacio metrizable es paracompacto.

Claramente cualquier espacio numerablemente compacto y cualquier espacio de Moore es un espacio $\omega\Delta$.

Corolario 118. Sea $f : X \to Y$ una función perfecta del espacio X sobre el espacio paracompacto Y. Entonces X es paracompacto.

Corolario 119. Un espacio regular X es paracompacto y $\omega\Delta$ si y sólo si existe un espacio metrizable Y y una función perfecta de X sobre Y.

Definición 120. Un espacio topológico (X, τ) es *completamente metrizable* si existe una métrica completa d en X tal que $\tau = \tau_d$.

El siguiente teorema proporciona una caracterización de los espacios paracompactos [Tam67]:

Teorema 121. En un espacio de Tychonoff (X, τ), las siguientes propiedades son equivalentes.

1. $X \times \beta X$ es normal.

2. Para cada compacto $K \subseteq \beta X \setminus X$, existe una cubierta abierta y localmente finita $\{U_j : j \in J\}$ de X tal que $K \bigcap Cl_{\beta X} U_j = \emptyset$ para cada $j \in J$.

3. X es paracompacto.

Ahora englobaremos en uno sólo, varios teoremas de metrización:

Teorema 122. En un espacio topológico T_0 (X, τ), las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. X es metrizable.

2. X es paracompacto, $\omega\Delta$ y $\Delta(X)$ es un conjunto G_δ en $X \times X$.

3. X es paracompacto y desarrollable.

4. X es regular y tiene una base σ-discreta [Bin51].

5. X es regular y tiene una base σ-localmente finita [Nag50], [Smi51].

3.5. Espacios Uniformes

Los espacios uniformes proporcionan una útil generalización de los espacios métricos. Los procesos de completación de métricas y de compactación de espacios de Tychonoff no son sino casos especiales del proceso de completación de uniformidades.

La idea de cercanía en espacios métricos puede expresarse, en forma indirecta, mediante el uso de cubiertas. Concretamente, si (X, d) es un espacio métrico, $A \subseteq X$ y para cada $\varepsilon > 0$ definimos $\alpha_\varepsilon := \{V_\varepsilon(p) : p \in X\}$, entonces $p_0 \in A^-$ si y sólo si $A \cap St(p_0, \alpha_\varepsilon) \neq \emptyset$ para toda $\varepsilon > 0$. Esta idea dio lugar al concepto de uniformidad:

Definición 123. Sea $\mathcal{U}$ una colección no vacía de cubiertas de un conjunto X. Decimos que $\mathcal{U}$ es una uniformidad en X si cumple la siguiente condición: dadas $\alpha, \beta \in \mathcal{U}$, existe $\gamma \in \mathcal{U}$ tal que $\gamma^* < \alpha \wedge \beta$, en donde $\alpha \wedge \beta := \{A \cap B : A \in \alpha, b \in \beta\}$.

Usando el Lema 66.8 se puede demostrar que la Definición (123) es equivalente a:

Definición 124. Dadas $\alpha, \beta \in \mathcal{U}$, existe $\delta \in \mathcal{U}$ tal que $\delta^\Delta < \alpha \wedge \beta$.

Definición 125. Un *espacio uniforme* es una pareja $(X,\mathcal{U})$ la cual consiste de un conjunto X y de una uniformidad $\mathcal{U}$ en X.

Capítulo 4

Espacios p-Paracompactos

Los p-espacios fueron introducidos por Arhangel'skii en [Arh70a]. La clase de los p-espacios contiene a la clase de los espacios métricos y también a la clase de los espacios Hausdorff localmente compactos, y más generalmente a los espacios que son completos en el sentido de Čech (Teorema 7 y 8 [Arh70a]). Entre los p-espacios los espacios paracompactos tienen propiedades notables, como por ejemplo, el producto numerable de p-espacios paracompactos es un p-espacio paracompacto. Más aún, X es un p-espacio paracompacto si y sólo es preimagen perfecta de un espacio métrico Y (Teorema 16 [Arh70a] y Teorema 4.53.3 [GMT88]). Algunas generalizaciones de estos espacios también fueron estudiadas por Morita en [Mor64] bajo el nombre de M-espacios.

En esta sección damos algunas caracterizaciones de los p-espacios paracompactos y de los espacios metrizables en términos de refinamientos baricéntricos de cubiertas abiertas arbitrarias que se pueden encontrar en la literatura. Para la notación no explicada aquí el lector puede remitirse a [Dug66]. A menos que se indique lo contrario en toda la sección consideraremos que X es un espacio T_1.

Los resultados de esta sección pueden consultarse en [And67].

Definición 126. Un espacio X completamente regular y T_1 se llama un p-espacio o un espacio emplumado si en su compactación de Stone-Čech βX de X, existe una sucesión $\{\mathfrak{A}_n : n \in \mathbb{N}\}$ de cubiertas de X con abiertos de βX tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} St(x, \mathfrak{A}_n) \subseteq X$ para toda $x \in X$.

Definición 127. Sean X un espacio topológico y K un subconjunto compacto no vacío de X. Una cubierta abierta $\mathfrak{V}$ de X se dice regular sobre K si se cumplen las siguientes condiciones para cada subconjunto abierto U de X que contenga K.

1. Para cada $x \in K$ existe $V \in \mathfrak{V}$ tal que $x \in V \subseteq U$, y

2. sólo una cantidad finita de elementos de $\mathfrak{V}$ intersecta tanto a K como a $X \backslash U$.

Definición 128. Si $\mathfrak{K}$ es una cubierta compacta de X, es decir, cada $K \in \mathfrak{K}$ es compacto, diremos que una cubierta abierta es *regular sobre* $\mathfrak{K}$ si es regular sobre cada $K \in \mathfrak{K}$.

El siguiente concepto se halla en [Ale60].

Definición 129. Una cubierta abierta $\mathfrak{V}$ de X la cual es regular sobre $\mathfrak{K}_o = \{\{x\} : x \in X\}$ es llamada una *base uniforme para* X.

Teorema 130. Un espacio X es un p-espacio si y sólo si existe una cubierta compacta $\mathfrak{K}$ de X y una cubierta abierta $\mathfrak{V}$ de X la cual es regular sobre $\mathfrak{K}$ (Teorema 2, [Arh70a]).

El teorema de metrización de Alexandroff ([Ale60], Teorema IV) puede enunciarse como sigue:

Teorema 131. Un espacio topológico es metrizable si y sólo si es paracompacto y tiene una base uniforme para su topología.

La prueba de la suficiencia del resultado anterior puede consultarse en [Ale60] y es más bien larga pues involucra una caracterización de espacios que tienen una base uniforme ([Ale60], Teorema III). Sin embargo en [And67] se puede encontrar una prueba más corta.

El siguiente lema es muy útil cuando se quieren probar algunos resultados relacionados con los p-espacios.

Lema 132. Sea $\mathfrak{K}$ una cubierta compacta de un espacio topológico X y sea $\mathfrak{V}$ una cubierta abierta la cual es regular sobre $\mathfrak{K}$. Entonces $\mathfrak{V} \wedge \mathfrak{W}$ es regular sobre $\mathfrak{K}$ para toda cubierta abierta localmente finita $\mathfrak{W}$ de X.

Teorema 133. Un espacio topológico X es un p-espacio paracompacto si y sólo si cada cubierta abierta $\mathfrak{U}$ de X tiene un refinamiento baricéntrico abierto el cual es regular sobre alguna cubierta compacta fija $\mathfrak{K}$ de X (independiente de $\mathfrak{U}$).

La demostración del siguiente resultado se puede hallar en [And67].

Teorema 134. Un espacio X es un p-espacio paracompacto (resp., metrizable) si y sólo si cada cubierta abierta tiene un refinamiento baricéntrico abierto el cual es regular sobre alguna cubierta compacta fija $\mathfrak{K}$ de X (resp., sobre toda cubierta compacta $\mathfrak{K}$ de X).

Teorema 135. Un espacio topológico es metrizable si y sólo si cada cubierta abierta tiene un refinamiento baricéntrico el cual es regular sobre toda cubierta compacta $\mathfrak{K}$ de X.

4.1. Espacios de Tipo Numerable y Espacios de Tipo Punto Numerable

Definición 136. Un espacio X tiene tipo-λ numerable si todo subconjunto compacto del mismo está contenido en un conjunto compacto el cual tiene una base local para su sistema de vecindades consistente de a lo más λ elementos.

Proposición 137. Sea X un espacio T_1. Denotamos por $\mathfrak{J}_X$ a la familia de todos los subconjuntos cerrados de X. La colección $\omega(X)$ de todos los ultrafiltros en $\mathfrak{J}_X$ puede ser topologizada como sigue: para cada $A \subseteq X$, A^* denota a $\{\xi \in \omega(X) : F \subseteq A \text{ para algún } F \in \xi\}$. La colección $\beta^* = \{U^* : U \subseteq X \text{ es abierto}\}$ es cerrado bajo uniones finitas y bajo intersecciones finitas y es obvio que $\emptyset^* = \emptyset$ y que $X^* = \omega(X)$.

Si reemplazamos el *tipo numerable* por el *tipo*-λ, es natural preguntarse si $pl(X) \leq \lambda$ implica que el espacio X tiene λ-tipo. Esto parece ser un problema difícil y una posible solución puede depender de la caracterización de los espacios T_3 de tipo-λ usando su compactación de Wallman:

Proposición 138. Sea X un espacio T_1 y sea β^* como en la Proposición 137. Entonces existe una topología τ de $\omega(X)$ que tiene a β^* como una base del espacio $(\omega(X), \tau)$ y que hace del mismo un espacio compacto y T_1.

Definición 139. Si identificamos cada $x \in X$ con su *ultrafiltro fijo* $\xi_x = \{F \in \mathfrak{J}_X : x \in F\}$, obtenemos un encaje de X en $\omega(X)$ y entonces $\omega(X)$ es una compactación T_1 de X llamada la *compactación de Wallman* de X.

Definición 140. Sea X un espacio. Decimos que Y es una *extensión cercanamente* T_2 de X si dados $a, b \in Y$ tal que al menos uno de ellos pertenece a X, entonces a y b tienen vecindades disjuntas en Y.

Lema 141. Si X es un espacio T_3 entonces $\omega(X)$ es una *extensión cercanamente* T_2 de X [GM85].

Proposición 142. Sean $F_1, \ldots, F_n \in \mathfrak{J}_X$, donde X es un espacio T_1. Entonces $Cl_{\omega(X)}(F_1 \cap \cdots \cap F_n) = \cap_{i=1}^n Cl_{\omega(X)} F_i$ [GM85].

Definición 143. Sea A un subconjunto de un espacio X. Una familia $\mathfrak{G}$ de subconjuntos de X que contienen a A es una *red local de A en X* si para cada abierto $U \supseteq A$, existe un elemento

$G \in \mathfrak{G}$ contenido en U. Una red local de A en X consistente de conjuntos abiertos es una *base local* de A en X [GM85].

Definición 144. Un espacio X es de *tipo punto numerable* si cada punto de X pertenece a un conjunto compacto que tiene una base local numerable en X. [GM85].

Definición 145. Sea X un espacio topológico. Una familia de subconjuntos η de X es una *red* para X si para cada $x \in X$ y cualquier vecindad U de x existe $N \in \eta$ tal que $x \in N \in \eta$. [GM85].

La siguiente es una definición intrínseca del concepto de plumaje para un espacio X.

Definición 146. Una familia $\{\mathfrak{G}_\alpha : \alpha \in J\}$ de cubiertas abiertas de un espacio X es un *plumaje* de X si se cumplen las siguientes condiciones:

1. Si $G_\alpha \in \mathfrak{G}_\alpha$, $\alpha \in J$ y $\bigcap_{\alpha \in J} G_\alpha \neq \emptyset$, entonces $\cap_{\alpha \in J} G_\alpha^-$ es un conjunto compacto.

2. Si $G_\alpha \in \mathfrak{G}_\alpha$, $\alpha \in J$ y $\bigcap_{\alpha \in J} G_\alpha \neq \emptyset$, entonces la familia de intersecciones finitas $\bigcap_{i=1}^n G_{\alpha_i}^-$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in J$, es una red local de $\bigcap_{\alpha \in J} G_\alpha^-$ en X.

Hodel probó que todo espacio T_3 tiene un plumaje [Hod74]. El menor número cardinal infinito λ tal que un espacio X tiene un plumaje $\{\mathfrak{G}_\alpha : \alpha \in J\}$ con $|J| \leq \lambda$ es llamado el *grado de plumaje de* X, lo que se denota como $pl(X) = \lambda$. Un espacio X T_3 es un p-espacio si $pl(X) = \aleph_0$.

Definición 147. Un espacio X es *ultracompleto* si X tiene una base local numerable como subespacio de βX [BY02].

El siguiente resultado puede consultarse en [GM85]:

Teorema 148. Sea X un espacio T_3 y sea λ un número cardinal infinito. Entonces $pl(X) \leq \lambda$ si y sólo si existe un conjunto $A \subseteq X \times \omega(X)$ tal que $\Delta(X) \subseteq A \subseteq X \times X$ y tal que A es la intersección de a lo más λ subconjuntos abiertos de $X \times \omega X$.

4.2. k-Espacios

En esta sección damos algunas definiciones que nos serán de utilidad en el Capítulo 5. La fuente de donde hemos tomado los siguientes resultados y definiciones es [GMT88].

Teorema 149. Sean $\{X_i : i \in I\}$ una familia de espacios topológicos, Y un conjunto, y supongamos que para cada $i \in I$ se tiene una función $g_i : X_i \to Y$. Entonces existe una única topología τ en Y que hace a cada g_i continua y que es máxima con esta propiedad. De hecho, $A \subseteq Y$ pertenece a τ si y sólo si $g^{-1}(A)$ es abierto en X_i para cada $i \in I$. Llamamos a τ *topología cociente* de la familia $\{g_i : X_i \to Y | i \in I\}$.

Este teorema tiene tres importantes corolarios:

Corolario 150. Sea $g : X \to Y$ una función de un espacio X en un conjunto Y. Entonces Y tiene una única topología τ la cual hace a g continua y que es máxima con esta propiedad, la topología cociente de $g : X \to Y$. De hecho, $V \in \tau$ si y sólo si $g^{-1}(V)$ es abierto en X.

Corolario 151. Sea $\{X_i : i \in I\}$ una familia de espacios topológicos. Entonces existe un espacio Y tal que:

1. Para cada $i \in I$, Y tiene un subespacio abierto Y_i homeomorfo a X_i.
2. $\{Y_i : i \in I\}$ es una partición de Y.

Además, excepto por homeomorfismos, Y es único con las propiedades (1) y (2). Llamamos a Y la *unión libre* de los espacios $\{Y_i : i \in I\}$ lo cual se denota como $Y = \Sigma_{i \in I} Y_i$.

Corolario 152. Sea $\mathfrak{G} = \{(X_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in I\}$ una familia de espacios topológicos tal que para cada $(\alpha, \beta) \in I \times I$, $\tau_\alpha | X_\alpha \cap X_\beta = \tau_\beta | X_\alpha \cap X_\beta$. Sean $X = \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha$ y

$$\tau(\mathfrak{G}) = \{U \in 2^X : U \cap X_\alpha \in \tau_\alpha \text{ para toda } \alpha \in I\}.$$

Entonces $\tau(\mathfrak{G})$ es una topología de X y es la máxima tal que cada inclusión $X_\alpha \to X$ es continua. Además, X_α es un subespacio abierto (resp., cerrado) de X si y sólo si para cada $\beta \in I$, $X_\alpha \cap X_\beta$ es abierto (resp., cerrado) en X_β. Llamamos a $\tau(\mathfrak{G})$ la *topología débil* de $\mathfrak{G}$ inducida en X.

Existe una estrecha relación entre las particiones de un espacio X y las topologías finales definidas en X. Antes de aclarar esta relación, introduciremos algunos conceptos:

Definición 153. Una familia $\mathfrak{D}$ de subconjuntos de un espacio X es una *descomposición* de X si los elementos de $\mathfrak{D}$ son no vacíos, mutuamente ajenos y su unión cubre a X.

Definición 154. Si $\mathfrak{D}$ es una descomposición de un espacio X, la *función canónica* $h : X \to \mathfrak{D}$ es la que asigna a cada punto de X el elemento de $\mathfrak{D}$ que lo contiene.

Es claro que toda función f definida en un espacio X determina, con los puntos inversos, una descomposición de X. Recíprocamente, si $\mathfrak{D}$ es una descomposición de X, existe una función definida en X cuyas fibras son precisamente los elementos de $\mathfrak{D}$, por ejemplo, la función canónica de $\mathfrak{D}$. Tiene sentido entonces definir un espacio topológico a partir de una descomposición de X o de una función definida en X:

Definición 155.

1. Sea $f : X \to Y$ una función del espacio (X, τ) sobre un espacio Y y sea $\tau_f = \{V \subseteq Y : f^{-1}(V) \in \tau\}$ la topología cociente de f. Decimos que f es una *función cociente* si la topología de Y coincide con τ_f.

2. Sea $\mathfrak{D}$ una descomposición de un espacio X y sea h la función canónica de X sobre $\mathfrak{D}$. El *espacio cociente* $X/\tau_{\mathfrak{D}}$ es la pareja $(\mathfrak{D}, \tau_h)$, en donde τ_h es la topología cociente de h.

3. Una función continua $r : X \to A$ es una *retracción* si $A \subseteq X$ y $r(a) = a$ para cada $a \in A$. En este caso decimos que A es un *retracto* de X.

Definición 156. Sea X un espacio y sea $A \subseteq X$. Decimos que A es *k-cerrado* si para cada compacto C en X, $A \cap C$ es cerrado en C.

Definición 157. Un espacio X es un *k-espacio* si cada k-cerrado en X es cerrado.

Proposición 158. Todo espacio localmente compacto es un k-espacio.

Teorema 159. Sea $\mathfrak{G} = \{A_\alpha : \alpha \in I\}$ una cubierta de un espacio X y supongamos que la topología de X coincide con la topología débil inducida por $\mathfrak{G}$. Sea $A = \Sigma_{\alpha \in I} A_\alpha$ la unión libre de los A_α y definamos $h : A \to X$ como $h(x) = x$. Entonces h es una inmersión de A en X.

Corolario 160. Si X es un k-espacio y $f : X \to Y$ es una función cociente, entonces Y es un k-espacio.

4.3. Espacios Čech-Completos y Espacios Cofinalmente Čech-Completos

Definición 161. Sea η un filtro en un espacio X. Un punto $z \in \beta X$ es un *punto de acumulación de η* si $z \in Cl_{\beta X} N$ para todo $N \in \eta$.

Definición 162. Un filtro η en un espacio X es *fijo* si existe $p \in X$ tal que $p \in N$ para todo $N \in \eta$.

Definición 163. Sea η un filtro sobre un espacio X de Tychonoff. Definimos:

$$A_\eta = \{z \in \beta X : z \text{ es un punto de acumulación de } \eta\}.$$

Definición 164. Un *marco* de un espacio X es una familia no vacía de cubiertas de X.

Definición 165. Para todo $A \subseteq X$, $A^* = \beta X \backslash Cl_{\beta X}(X \backslash A)$.

Claramente, A^* es abierto en βX y es el mayor abierto en βX cuya intersección con X es $int_X A$. Tenemos siempre que $A^* \subseteq Cl_{\beta X} A$.

Proposición 166. Para todo par de subconjuntos A, B de X tenemos $(A \cap B)^* = A^* \cap B^*$. Si A y B son conjuntos coceros, tenemos entonces que $(A \cup B)^* = A^* \cup B^*$ [Čech37].

Definición 167. Si α es una cubierta abierta de X, entonces definimos

$$L(\alpha) = \bigcup\{A^* : A \in \alpha\}$$

y

$$E(\alpha) = \bigcup\{A \times A^* : A \in \alpha\}.$$

Observación 168. Para todo espacio X y toda cubierta de X, $L(\alpha)$ es abierto en βX que contiene a X y $E(X)$ es abierto en $X \times \beta X$.

Definición 169. Sea η un filtro sobre un espacio X y $\mathfrak{A} = \{\alpha_i : i \in J\}$ un marco de X. Decimos que η es *Cauchy* respecto a $\mathfrak{A}$ si para cada $i \in J$, $\eta \cap \alpha_i \neq \emptyset$ y que η es *cofinalmente de Cauchy* respecto a $\mathfrak{A}$ si para cada $i \in J$ existe $A_i \in \alpha_i$ tal que tal que $A \cap N \neq \emptyset$ para todo $N \in \eta$.

Definición 170. Un espacio X se dice *cofinalmente* Čech-*completo* (o *cofinalmente completo en el sentido de* Čech) si existe una familia numerable de cubiertas abiertas tales que cualquier filtro cofinalmente Cauchy η satisface $X \cap A_\eta \neq \emptyset$.

Teorema 171. Sea $\{\alpha_i : i \in J\}$ un marco de X. Entonces:

1. Si todo filtro Cauchy η con respecto a $\{\alpha_i : i \in J\}$ satisface $A_\eta \subseteq X$, entonces $X = \bigcap_{i \in J} L(\alpha_i)$.

2. Si todo filtro cofinalmente Cauchy η con respecto a $\{\alpha_i : i \in J\}$ satisface $X \cap A_\eta \neq \emptyset$, entonces $\{L(\alpha_i) : i \in J\}$ es una base local de X en βX.

3. Si todo filtro fijo Cauchy η con respecto a $\{\alpha_i : i \in J\}$ satisface $A_\eta \subseteq X$, entonces $\cap\{E(\alpha_i) : i \in J\} \subseteq X \times X$.

Definición 172. Sea W es una vecindad abierta de X en βX. Una cubierta abierta $\alpha_W = \{V_x : x \in X\}$, donde $x \in V_x \subseteq Cl_{\beta X} V_x \subseteq W$, se llama cubierta abierta *compatible* con W.

Teorema 173. Sea $\{W_i : i \in J\}$ una familia de vecindades abiertas de X en βX.

1. Si $X = \bigcap\{W_i : i \in J\}$, entonces todo filtro Cauchy η con respecto a un marco $\{\alpha_{W_i} : i \in J\}$ satisface $A_\eta \subseteq X$.

2. Si $\{W_i : i \in J\}$ es una base local de X en βX, entonces todo filtro cofinalmente Cauchy η con respecto a un marco $\{\alpha_{W_i} : i \in J\}$ satisface $A_\eta \cap X \neq \emptyset$.

Definición 174. Un marco $\{\alpha_i : i \in J\}$ de un espacio X que satisface respectivamente las condiciones (1), (2), (3) del Teorema 171 es llamado *cofinal,* Čech*, p-marco*, respectivamente.

4.4. Generalizaciones de Compacidad

Presentamos algunos corolarios a los Teoremas 171 y 173.

Definición 175. Sea X un espacio T_1. El *pseudocarácter de un punto* x en X se define como el mínimo número cardinal de la forma $|\mathcal{U}|$, donde $\mathcal{U}$ es una familia de subconjuntos abiertos de X tal que $\bigcap \mathcal{U} = \{x\}$. Este número cardinal es denotado por $\psi(x, X)$. El *pseudocarácter* de $A \subseteq X$ es el mínimo número cardinal de la forma $|\mathcal{U}|$, donde $\mathcal{U}$ es una familia de subconjuntos abiertos de X tal que $\bigcap \mathcal{U} = A$. Este número cardinal es denotado por $\psi(A, X)$.

Corolario 176. Sea X un espacio topológico. Entonces $\psi(X, \beta X) = \gamma$ si y sólo si X tiene un Čech-marco de cardinalidad γ.

Corolario 177. Un espacio X es Čech-completo si y sólo si X tiene un Čech-marco numerable.

Corolario 178. Un espacio X es ultracompleto si y sólo si X tiene un marco cofinal numerable.

Definición 179. Sea A un subconjunto de un espacio de Tychonoff X. Una vecindad W de A se dice *fuerte* si existe un conjunto cero H en X y un conjunto cocero D en X tal que $A \subseteq H \subseteq D \subseteq W$.

Tenemos una caracterización de los p-espacios [GM85]:

Teorema 180. Un espacio de Tychonoff X es un *p-espacio* si existe una familia numerable $\{W_i : i \in \mathbb{N}\}$ de conjuntos abiertos en $X \times \beta X$ que satisface $\Delta(X) \subseteq \bigcap\{W_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq X \times X$.

Definición 181. Un subconjunto A de un espacio X está C_1-encajado en X si para todo conjunto cero K en X ajeno a A, existe un conjunto cero H en X tal que $A \subseteq H \subseteq X \backslash K$.

Observación 182. Notemos que todo subconjunto pseudocompacto A de un espacio de Tychonoff está C_1-encajado en X y que el producto de un espacio pseudocompacto X y un espacio compacto de Hausdorff Y es pseudocompacto.

Definición 183. Un espacio de Tychonoff X es *pseudoparacompacto* si $\Delta(X)$ está C_1-encajado en $X \times \beta X$.

Utilizando el Teorema de Tamano se puede probar que todo espacio paracompacto T_2 es pseudoparacompacto. Usando la Definición 183 también se puede deducir que todo espacio pseudocompacto es pseudoparacompacto.

Necesitamos algunas equivalencias de normalidad.

Teorema 184. Sea $\mathfrak{V}$ una cubierta abierta de un espacio de Tychonoff X. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $\mathfrak{V}$ es normal.

2. $E(\mathfrak{V})$ es una vecindad fuerte de la diagonal $\Delta(X)$ en $X \times \beta X$.

3. $X \times L(\mathfrak{V})$ es una vecindad fuerte de $\Delta(X)$ en $X \times \beta X$.

4. Existe un subespacio Y de βX paracompacto y G_δ tal que $X \subseteq Y \subseteq L(\mathfrak{V})$.

La demostración del siguiente lema puede ser hallada en [GM97].

Lema 185. Sea $V \subseteq X \times \beta X$. Entonces V es una vecindad fuerte de la diagonal $\Delta(X)$ en $X \times \beta X$ si y sólo si existe una cubierta normal α de X tal que $E(\alpha) \subseteq V$.

Definición 186. Sea A un subespacio cerrado de un espacio de Tychonoff. El *pseudocaracter fuerte*, $\psi_\varrho(A, X)$ es definido como el mínimo cardinal α tal que A es la intersección de α vecindades fuertes.

Tenemos dos teoremas finales para esta sección:

Definición 187. Sea X un espacio de Tychonoff. El *caracter fuerte* de un subespacio cerrado A de X, $\chi_\varrho(A, X)$ se define como el mínimo número cardinal α tal que A tiene una colección $\{W_i : i < \alpha\}$ de vecindades fuertes tales que toda vecindad fuerte W de A contiene algún W_i.

Definición 188. El *peso fuerte* $w_f(X)$ de un espacio X completamente regular se define como la mínima cardinalidad de una base de uniformidad compatible de X.

Teorema 189. Sea X un espacio de Tychonoff. Entonces $\omega' X = \chi_\varrho(\Delta(X), X \times \beta X)$.

Teorema 190. Sea X un espacio de Tychonoff. Entonces:

$$\chi_\varrho(\Delta(X), X \times \beta X) = \psi(Cl_{\beta(X \times \beta X)} \Delta(X), \beta(X \times \beta X)).$$

Un corolario del Teorema 189 es el siguiente:

Corolario 191. La diagonal $\Delta(X)$ es un conjunto cero en $X \times \beta X$ si y sólo si X es metrizable.

Capítulo 5

Resultados Principales

La clase de espacios premetrizables coincide con la clase de espacios p-paracompactos. En este capítulo damos tres caracterizaciones adicionales. Una de ellas dice que un espacio de Tychonoff X es premetrizable si y sólo si existe un conjunto cero H en $X \times \beta X$ tal que $\Delta(X) \subseteq H \subseteq X \times X$. Otra de las caracterizaciones depende de la existencia de una familia numerable de cubiertas normales de X que satisface cierta propiedad, la cual se define más adelante. La caracterización final requiere que X pertenezca a la clase de espacios pseudoparacompactos, la cual incluye tanto a la clase de espacios pseudocompactos como a la de los espacios paracompactos, junto con la propiedad adicional de que toda cubierta abierta de X sea semi normal.

Los espacios considerados en esta sección son completamente regulares y de Hausdorff.

Definición 192. Un espacio X se dice *premetrizable* si existen un espacio metrizable Y y una función perfecta $f : X \to Y$, es decir, X es premetrizable si es preimagen perfecta de un espacio metrizable.

El siguiente resultado puede ser consultado en [GM85]:

Teorema 193. Un espacio X es un p-espacio si y sólo si existe un conjunto $L \subseteq X \times X$ tal que L es G_δ en $X \times \beta X$ y $\Delta(X) \subseteq L$.

Se tiene la siguiente caracterización de esta clase de espacios [Arh70a]:

Teorema 194. Un espacio X es *premetrizable* si y sólo si X es un p-espacio paracompacto.

Teorema 195. ([Sto48]) Un espacio X es paracompacto si y sólo si toda cubierta abierta α de X tiene un refinamiento baricéntrico abierto β, i.e., $\beta^\Delta = \{St(x, \beta) : x \in X\}$ refina a α.

Corolario 196. Si α es una cubierta abierta de un espacio paracompacto X, existe una sucesión $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ de cubiertas abiertas de X tal que α_1^Δ refina a α y para todo número natural n, α_{n+1}^Δ refina a α_n.

Usando la Definición 70 el Teorema 195 puede ser re-escrito como sigue:

Teorema 197. [Sto48], [GMLR18] Un espacio X es paracompacto si y sólo si toda cubierta abierta de X es normal.

Si A es un subconjunto cerrado de un espacio X, consideramos dos tipos de encajes:

Definición 198. Un subconjunto A de un espacio X se dice que está C_2-encajado en X si para todo conjunto cerrado L ajeno a A, existen conjuntos cero H, K en X tales que $A \subseteq H \subseteq X \backslash K \subseteq X \backslash L$.

Claramente, todo conjunto A que está C_2-encajado en X está C_1-encajado en X. Por el Lema de Urysohn, un espacio X es normal si y sólo si todo subconjunto cerrado de X está C_2-encajado en X.

Citamos la siguientes caracterización de cubiertas normales [GM97]:

Teorema 199. Una cubierta abierta α de un espacio X es normal si y sólo si $E(\alpha)$ es una vecindad fuerte de $\Delta(X)$.

Por lo tanto, usando el Teorema 194, tenemos:

Teorema 200. Un espacio X es paracompacto si y sólo si $\Delta(X)$ está C_2-encajado en $X \times \beta X$.

Son conocidas las siguientes caracterizaciones de cubiertas normales de espacios topológicos. Por ejemplo, puede verse [AS74], página 122, [Hos89], Teoremas 1.2 y 1.4 y [Mor62], Teorema 1.2, entre otros.

Teorema 201. Una cubierta abierta α de un espacio X es normal si y sólo si α tiene un refinamiento cocero localmente finito.

Ahora definimos una clase de espacios que contiene a todos los espacio paracompactos y a todos los espacios pseudocompactos, y una clase de cubiertas abiertas que contiene a todas las cubiertas normales.

Definición 202. Una cubierta α de un espacio X es *seminormal* si existe un conjunto cocero U en $X \times \beta X$ tal que $\Delta(X) \subseteq U \subseteq E(\alpha)$.

Lo siguiente extiende la Definición 172

Definición 203. Sea W una vecindad abierta de X en βX. Seleccionemos una cubierta abierta $\alpha_W = \{V_x : x \in X\}$ en X compatible con W. Si T es una vecindad abierta de $\Delta(X)$ en $X \times \beta X$, entonces α_W es *compatible* con T si $\Delta(X) \subseteq \bigcup\{V_x \times Cl_{\beta X} V_x : x \in X\} \subseteq T$.

Definición 204. Una familia de conjuntos $\{K_i : i \in J\}$ se dice que tiene la *Propiedad de la Intersección Finita (PIF)* si para todo $J_0 \subseteq J$, J_0 finito se cumple que $\bigcap_{i\in J_0} K_i \neq \emptyset$.

El siguiente resultado puede hallarse en [Eng89], 3.1.5:

Lema 205. Sean X un espacio topológico y $U \subseteq X$ abierto. Sea $\{K_i : i \in J\}$ una familia de conjuntos compactos en un espacio T_2 con la PIF. Si $\bigcap_{i\in J} K_i \subseteq U$, entonces existe $J_0 \subseteq J$, J_0 finito tal que $\bigcap_{i\in J_0} K_i \subseteq U$.

Se tienen las siguientes caracterizaciones:

Teorema 206. Sea $\{\alpha_i : i \in J\}$ un marco ultracompleto de un espacio X. Entonces $\{L(\alpha_i) : i \in J\}$ es una base local de X en βX. Recíprocamente, si $\{W_i : i \in J\}$ es una base local de X en βX y si α_{W_i} es una cubierta de X compatible con W_i ($i \in J$) y tal que $\Delta(X) \subseteq \bigcup\{V_x \times Cl_{\beta X} V_x : x \in X\} \subseteq T$, entonces $\{\alpha_{W_i} : i \in J\}$ es un marco ultracompleto de X.

Demostración. (Necesidad) Sea T un conjunto abierto en βX tal que $X \subseteq T \neq \beta X$. Definamos $K = \beta X \backslash T$ y sea η el filtro en X consistente de todas las posibles intersecciones $X \cap U$, donde U es vecindad de K en βX. Como $A_\eta = K \subseteq \beta X \backslash X$, η no puede ser cofinalmente Cauchy con respecto to $\{\alpha_i : i \in J\}$. Por tanto, para algún $i \in J$ y para todo $G \in \alpha_i$, existe una vecindad abierta L_G de K en βX such that $G \cap L_G = \emptyset$. Entonces, si $G \in \alpha_i$, tenemos $G \subseteq G^* \subseteq Cl_{\beta X} G \subseteq \beta X \backslash L_G$. Deducimos entonces que $L(\alpha_i) \cap K = \emptyset$, o $L(\alpha_i) \subseteq T$.

(Suficiencia) Sea $\{W_i : i \in J\}$ una base local de X en βX y para cada $i \in J$, sea α_{W_i} una cubierta de X inducida por W_i. Probaremos que $\{\alpha_{W_i} : i \in J\}$ es un marco ultracompleto de X. Sea η un filtro cofinalmente Cauchy con respecto a $\{\alpha_{W_i} : i \in J\}$. Para cada $i \in J$, seleccionamos un elemento $L_i \in \alpha_{W_i}$ tal que $L_i \cap N \neq \emptyset$ para cada $N \in \eta$. Debemos probar que $X \cap A_\eta \neq \emptyset$.

Supongamos, por el contrario, que $K = \bigcap\{Cl_{\beta X}N : N \in \eta\} \subseteq \beta X\backslash X$. Por hipótesis, existe un índice $i \in J$ tal que $W_i \subseteq \beta X\backslash K$. Por tanto, para cada $L \in \alpha_{W_i}$, tenemos:

$$L \subseteq L^* \subseteq Cl_{\beta X}L \subseteq W_i \subseteq \beta X\backslash K.$$

El conjunto $U = \beta X\backslash Cl_{\beta X}L_i$ es una vecindad de K. Por el Lema 205, deducimos la existencia de un $N \in \eta$ tal que $N \subseteq \beta X\backslash Cl_{\beta X}L_i$, en contradicción con que $L_i \cap N \neq \emptyset$. □

Corolario 207. [GMR99] El pseudocaracter fuerte $\chi(X, \beta X)$ coincide con el menor número cardinal infinito κ tal que X tiene un marco ultracompleto de cardinalidad menor o igual que κ. Por tanto, X es ultracompleto si y sólo si X tiene un marco ultracompleto numerable.

Teorema 208. Sea $\{\alpha_i : i \in J\}$ un marco de X tipo Čech. Entonces $X = \bigcap\{L(\alpha_i) : i \in J\}$. Recíprocamente, si $\{W_i : i \in J\}$ es una familia de vecindades abiertas de X en βX tal que $X = \bigcap\{W_i : i \in J\}$ y si α_{W_i} es una cubierta de X inducida por W_i $(i \in J)$, se tiene que $\{\alpha_{W_i} : i \in J\}$ es un marco de X de tipo Čech.

Demostración. (Necesidad) Debemos probar que $X = \bigcap\{L(\alpha_i) : i \in J\}$. Supongamos, por el contrario, que existe un punto $z \in \beta X\backslash X$ tal que $z \in L(\alpha_i)$ para todo $i \in J$. Seleccionemos $V_i \in \alpha_i$ tal que $z \in V_i^*$. Por tanto la familia:

$$\eta_0 = \{V_{i_i} \cap V_{i_2} \cap \cdots \cap V_{i_k} : k \in \mathbb{N}\}$$

esa una base de filtro en X, (cada elemento de η_o es no vacío, pues $V_{i_1} \cap V_{i_2} \cap \cdots \cap V_{i_k} = \emptyset$ implicaría que $\emptyset = (V_{i_1} \cap V_{i_2} \cap \cdots \cap V_{i_k})^* = V_{i_1}^* \cap V_{i_2}^* \cap \cdots \cap V_{i_k}^*$, contradiciendo el hecho de que $z \in V_{i_1}^* \cap V_{i_2}^* \cap \cdots \cap V_{i_k}^*$). El filtro η de X con base η_0 es entonces de Cauchy con respecto to $\{\alpha_i : i \in J\}$. Nuestra hipótesis implica que $A_\eta \subseteq X$. Pero también $z \in A_\eta$ pues $z \in (V_{i_1} \cap V_{i_2} \cap \cdots \cap V_{i_k})^* \subseteq Cl_{\beta X}(V_{i_1} \cap V_{i_2} \cap \cdots \cap V_{i_i})$ por cada elección $i_i, i_2, \ldots, i_k \in J$ y ésta es una contradicción.

(Suficiencia) Sea η un filtro de Cauchy con respecto a $\{\alpha_{W_i} : i \in J\}$. Procediendo por contradicción, supongamos que existe un punto $z \in A_\eta \cap (\beta X\backslash X)$. Escojamos $L_i \in \eta \cap \alpha_{W_i}$. Por construcción, $Cl_{\beta X}L_i \subseteq W_i$. Por tanto, $z \in \bigcap\{W_i : i \in J\} = X$, una contradicción. □

Corolario 209. El seudocaracter $\chi(X, \beta X)$ coincide con el menor número cardinal infinito κ tal que X tiene un marco de tipo Čech de cardinalidad menor o igual que κ. Por tanto, X es completo en el sentido de Čech si y sólo si X tiene un marco tipo Čech.

Teorema 210. Sea $\{\alpha_i : i \in J\}$ un marco de X de tipo p. Entonces $L = \bigcap\{E(\alpha_i) : i \in J\}$ es un conjunto G_δ en $X \times \beta X$ tal que $\Delta(X) \subseteq L \subseteq X \times X$. Recíprocamente, si $\{T_i : i \in J\}$ es una familia de conjuntos abiertos en $X \times \beta X$ tal que $\Delta(X) \subseteq \bigcap\{T_i : i \in J\} \subseteq X \times X$ y si $\{\alpha_{T_i} : i \in J\}$ es una cubierta de X inducida por T_i $(i \in J)$, entonces $\alpha_{T_i} : i \in J\}$ es un marco de X de tipo p.

Demostración. (Necesidad) Tomemos un par $(p, z) \in \bigcap\{E(\alpha_i) : i \in J\}$, $p \in X$, $z \in \beta X$. Escojamos un elemento $V_i \in \alpha_i$ tal que $(p, z) \in V_i \times V_i^*$. demostraremos como en el Teorema 208 que

$$\eta_0 = \{V_{i_i} \cap V_{i_2} \cap \cdots \cap V_{i_k} : k \in \mathbb{N}, i_1, i_2, \ldots i_k\}$$

es una base de filtro fija en X el cual es Cauchy con respecto a $\{\alpha_i : i \in J\}$. Sea η el filtro en X con base η_0. Por hipoótesis, $A_\eta \subseteq X$. Por tanto $z \in N^* \subseteq Cl_{\beta X} N$ para todo $N \in \eta$ y esto implica que $z \in A_\eta \subseteq X$, i.e., $\bigcap\{E(\alpha_i) : i \in J\} \subseteq X \times X$.

(Suficiencia) Sea η un filtro fijo en X el cual es Cauchy con respecto to $\alpha_{T_i} : i \in J\}$. Tomemos un punto $p \in X$ tal que $p \in N$ para todo $N \in \eta$ y sea $z \in \bigcap\{Cl_{\beta X} N : N \in \eta\}$. Para cada $i \in J$, seleccionamos $L_i \in \eta \cap \alpha_{T_i}$. Tenemos que $(p, z) \in L_i \times Cl_{\beta X} L_i \subseteq T_i$. Como $\bigcap\{T_i : i \in J\} \subseteq X \times X$, concluimos que $z \in X$. □

Corolario 211. Un espacio X es un p-espacio si y sólo si X tiene un marco numerable de tipo p.

Citamos el siguiente Teorema [Bur70]:

Teorema 212. Sea $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ una $\omega\Delta$-sucesión de un espacio X. Si cada cubierta α_i es normal, entonces existen un espacio metrizable Y y una función continua, cerrada y suprayectiva $\varphi : X \to Y$ tal que $\varphi^{-1}\varphi(x) = \bigcap\{St(x, \alpha_n) : n \in \mathbb{N}\}$ y $\varphi^{-1}\varphi(x)$ es numerablemente compacto para cada $x \in X$. Adicionalmente, si cada $\bigcap\{St(x, \alpha_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es compacto, entonces X es p-espacio paracompacto.

Definición 213. Un espacio X es *definitivamente* p si existe una sucesión $W_1, W_2, \ldots$ de conjuntos cozero en $X \times \beta X$ tal que $\Delta(X) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} W_i \subseteq X \times X$.

Probamos ahora nuestro resultado principal:

Teorema 214. Las siguientes condiciones sobre un espacio X completamente regular y de Hausdorff son equivalentes:

1. X es premetrizable.

2. X es un p-espacio paracompacto.

3. X es un p-espacio pseudoparacompacto y toda cubierta abierta de X es semi-normal.

4. X es un espacio definitivamente p y pseudoparacompacto.

5. Existen un conjunto cero K en $X \times \beta X$ tal que $\Delta(X) \subseteq K \subseteq X \times X$.

6. X tiene un p-marco numerable consistente de cubiertas normales.

Demostración. La equivalencia de (1) y (2) es bien conocida (véase [Arh70a]). (2)⇒(3) Esta implicación es clara pues todo espacio compacto es pseudoparacompacto y toda cubierta abierta de un espacio paracompacto es normal.

(3)⇒(4) Sea $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ un p-marco de X. Como toda cubierta α_i es seminormal, existe, para cada $i \in \mathbb{N}$, un conjunto cocero W_i en $X \times \beta X$ tal que $\Delta(X) \subseteq W_i \subseteq E(\alpha_i)$. Por el Teorema 210 tenemos que $\Delta(X) \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} W_i \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} E(\alpha_i) \subseteq X \times X$ y X es definitivamente p.

(4)⇒(5) Sean $W_1, W_2, \ldots$ conjuntos cocero en $X \times \beta X$ tales que $\Delta(X) \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} \subseteq X \times X$. Como $\Delta(X)$ está C_1-encajado en $X \times \beta X$, para cada $i \in \mathbb{N}$ podemos encontrar un conjunto cero H_i en $X \times \beta X$ tal que $\Delta(X) \subseteq H_i \subseteq W_i$. De aquí que $H = \bigcap_{i=i}^{\infty} H_i$ es un conjunto cero en $X \times \beta X$ tal que $\Delta(X) \subseteq H \subseteq X \times X$.

(5)⇒(6) Sea H un conjunto cero en $X \times \beta X$ tal que $\Delta(X) \subseteq H \subseteq X \times X$. Defínase una sucesión $U_1, U_2, \ldots$ de conjuntos cocero en $X \times \beta X$ tal que $H = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ y $Cl_{X \times \beta X} U_{n+1} \subseteq U_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como H y $X \times \beta X - U_n$ son conjuntos cero disjuntos en $X \times \beta X$, podemos encontrar una función continua $\varphi_n : X \times \beta X \to [0, 1 - 2^{-n}]$ tal que $\varphi_n^{-1}(0) = H$ y $\varphi_n^{-1}(1 - 2^{-n}) = X \times \beta X - U_n$. Definamos $g_n : X \times X \to [0, 1]$ por medio de la fórmula:

$$g_n(x, y) = \sup\{\{|\varphi_n(x, p) - \varphi_n(y, p)| : p \in \beta X\}\}x, y \in X\}.$$

Es fácil probar que g_n es una pseudométrica continua en X. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\alpha_n = \{V_{2^{-n-1}}^{g_n}(x) : x \in X\}$. Cada α_n es una cubierta normal de X. Además:

$$V_{2^{-n-1}}^{g_n}(x) \times V_{2^{-n-1}}^{g_n}(x) \subseteq U_n$$

para cada $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$. Para probar esta inclusión, tomemos dos puntos $x', x'' \in V_{2^{-n-1}}^{g_n}(x)$ y supongamos por el contrario, que $(x', x'') \notin U_n$. Entonces $\varphi(x', x'') = 1 - 2^{-n}$. Por otro lado, por definición de g_n, tenemos que

$$2^{-n} = 2^{-n-1} + 2^{-n-1} > g_n(x, x') + g_n(x, x'') \geq$$

$$g_n(x', x'') \geq \varphi(x', x'') - \varphi(x'', x'') = \varphi(x', x'') = 1 - 2^{-n}.$$

De aquí obtenemos que $1 - 2^{-n} < 2^{-n}$, una contradicción. Por tanto:

$$\bigcup \{V^{g_n}_{2^{-n-1}}(x) \times Cl_{\beta X} V^{g_n}_{2^{-n-1}}(x) : x \in X\} \subseteq Cl_{X \times \beta X} \subseteq U_{n-1}.$$

Deducimos entonces que las cubiertas normales $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ constituyen un p-marco numerable del espacio X.

(6) $\Rightarrow$ (1) Sea $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ un p-marco numerable de X consistente de cubiertas normales. Por el Teorema 201, α_1 tiene un refinamiento cocero localmente finito β_1. Podemos pedir además que para cada $x \in X$, exista un elemento $A_x \in \alpha_1$ tal que $St(x, \beta_1) \subseteq Cl_{\beta X} St(x, \beta_1) \subseteq A^*_x$, (véase Definición 165). Inductivamente, supongamos que se han definido las cubiertas $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$. Sea β_n una cubierta cocero y localmente finita de X tal que $St(x, \beta_n) \subseteq Cl_{\beta X} St(x, \beta_n) \subseteq A^*_x \cap B^*_x$ $(A_x \in \alpha_n, B_x \in \beta_{n-1})$. Una vez que todas las cubiertas β_n han sido construidas, definamos:

$$K_x = \bigcap_{n=1}^{\infty} St(x, \beta_n)^*, \quad x \in X.$$

Por tanto, el conjunto K_x es un compacto G_δ en βX y de aquí que $\{St(x, \beta_n)^* : n \in \mathbb{N}\}$ es una base local de K_x en βX. Sin embargo, $\eta_x = \{St(x, \beta_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es una base de filtro fija en X la cual es Cauchy respecto al marco $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$. Por lo tanto, la adherencia $K_x = \bigcap_{n=1}^{\infty} St(x, \beta_n)^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} Cl_{\beta X} St(x, \beta_n)$ de η_x está contenida en X. Así, $\{St(x, \beta_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es una base local de K_x en X y $\beta_1, \beta_2 \ldots$ es una sucesión normal $\omega\Delta$ en X. Por el Teorema 212, X es premetrizable. $\square$

Capítulo 6

Problemas Abiertos

En esta parte ponemos algunos de los problemas que hemos considerado problemas abiertos y que son de nuestro conocimiento.

Definición 215. Un espacio de Tychonoff X es *topológicamente completo* si la uniformidad fina de X es completa.

Problema 216. ¿Es todo espacio topológicamente completo y pseudoparacompacto un espacio paracompacto?

Problema 217. ¿Qué podemos decir de los productos (finitos o infinitos) de espacios pseudoparacompactos?

Problema 218. ¿Qué podemos decir de las imágenes perfectas de espacios pseudoparacompactos?

Los siguientes problemas abiertos fueron propuestos en [TJ04] y los hemos agregado pensando en que además de que son muy interesantes pueden tener mucha relación con algo de nuestro trabajo de investigación.

Problema 219. Supongase que X es un Σ-espacio de Lindelöf y $Y \subseteq C_p(X)$. ¿Será cierto que Y es un espacio ultracompleto si y sólo si éste es casi localmente compacto?

Problema 220. Sea X un espacio homogéneo ultracompleto. ¿Debe de ser X localmente compacto?

Capítulo 7

Apéndice

Proporcionamos una breve reseña sobre uniformidades.

7.1. Uniformidades

Definición 221. Una *base de uniformidad* $\mathfrak{U}$ sobre un conjunto X es una familia no vacía de cubiertas de X que satisfacen la condición:

(U) Si $\alpha, \beta \in \mathfrak{U}$, existe una cubierta $\gamma \in \mathfrak{U}$ tal que γ^{Δ} refina a α y a β.

Dado un conjunto X y una base de uniformidad $\mathfrak{U}$ sobre el mismo, se puede definir una topología respecto a la base de uniformidad dada, en cuyo caso diremos que dicha topología está asociada a esa uniformidad. La topología $\tau_{\mathfrak{U}}$ asociada a una base de uniformidad $\mathfrak{U}$ sobre un espacio X se define como sigue:

Definición 222. Un conjunto $V \subseteq X$ pertenece a $\tau_{\mathfrak{U}}$ si y sólo si para todo $x \in V$, existe una cubierta $\alpha_x \in \mathfrak{U}$ tal que $St(x, \alpha_x) \subseteq V$.

Si $\mathfrak{U}$ es una base de uniformidad sobre un conjunto X, sabemos que $\tau_{\mathfrak{U}}$ es siempre completamente regular. Recíprocamente, si X es un espacio completamente regular, la familia de cubiertas cocero finitas de X es una base de uniformidad sobre X la cual induce su topología. Una condición necesaria y suficiente para que $(X, \tau_{\mathfrak{U}})$ sea de Tychonoff es la siguiente:

$$\{p\} = \bigcap \{St(p, \alpha) : \alpha \in \mathfrak{U}\} \text{ para todo } p \in X.$$

Definición 223. Una base de uniformidad $\mathfrak{U}$ sobre un conjunto X es llamada una *uniformidad sobre* X si siempre que $\alpha \in \mathfrak{U}$, toda cubierta de X refinada por α pertenece también a $\mathfrak{U}$.

Definición 224. Toda base de uniformidad $\mathfrak{U}$ sobre un conjunto X determina una uniformidad $\mathfrak{U}^+$ sobre X, donde

$$\mathfrak{U}^+ = \{\gamma : \gamma \text{ es refinada por alguna } \alpha \in \mathfrak{U}\}$$

Definición 225. Dos bases de uniformidad $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2$ sobre un conjunto X son equivalentes (en símbolos, $\mathfrak{U}_1 \sim \mathfrak{U}_2$) si determinan la misma uniformidad, o en otras palabras, si $\mathfrak{U}_1^+ = \mathfrak{U}_2^+$. En particular, para toda base de uniformidad $\mathfrak{U}$ sobre un conjunto X, $\mathfrak{U} \sim \mathfrak{U}^+$ y $\mathfrak{U}^+$ es la única uniformidad sobre X equivalente a $\mathfrak{U}$.

Definición 226. Una base de uniformidad sobre un conjunto X es *abierta* si $\alpha \subseteq \tau_{\mathfrak{U}}$ para todo $\alpha \in \mathfrak{U}$. Claramente $\mathfrak{U}_1 \sim \mathfrak{U}_2$ implica $\tau_{\mathfrak{U}_1} = \tau_{\mathfrak{U}_2}$ pero la implicación contraria no es cierta en general.

La colección $\mathfrak{U}_n$ de todas las cubiertas normales de un espacio de Tychonoff X es una base de uniformidad sobre X, y toda base de uniformidad $\mathfrak{U}$ sobre X que induce la topología de X está contenida en $\mathfrak{U}_n^+$. Llamamos a $\mathfrak{U}_n^+$ la *uniformidad fina* sobre X.

Definición 227. El *peso fuerte*, $\omega' X$ de un espacio de Tychonoff X está definido como

$$\omega' X = \text{mín}\{|\mathfrak{U}| : \mathfrak{U} \text{ es una base de uniformidad compatible sobre } X\}.$$

El *peso* $\omega(X, \mathfrak{U})$ de una base uniformidad $\mathfrak{U}$ sobre un cojunto X se define como

$$\omega(X, \mathfrak{U}) = \text{mín}\{|\mathfrak{U}'| : \mathfrak{U}' \text{ es una base de uniformidad sobre } X \text{ equivalente a } \mathfrak{U}\}.$$

Definición 228. Sean α, β y cubiertas de un conjunto X. Denotamos por $\alpha \wedge \beta$ a la familia $\{A \cap B : A \in \alpha, B \in \beta\}$.

Definición 229. Sea $\mathfrak{U}$ una colección no vacía de cubiertas de un conjunto X. Decimos que $\mathfrak{U}$ es una *uniformidad en* X si:

$$\text{Dadas } \alpha, \beta \in \mathfrak{U}, \text{ existe } \gamma \in \mathfrak{U} \text{ tal que } \gamma^* < \alpha \wedge \beta.$$

Entonces, el Lema 66.8 implica que la condición anterior es equivalente a

$$\text{Dadas } \alpha, \beta \in \mathfrak{U}, \text{ existe } \gamma \in \mathfrak{U} \text{ tal que } \gamma^\Delta < \alpha \wedge \beta.$$

Definición 230. Si X es un conjunto y $\mathfrak{U}$ una uniformidad en X llamamos a X un *espacio uniforme* y lo denotamos como $(X, \mathfrak{U})$.

Definición 231. Un filtro T en un espacio uniforme $(X, \mathfrak{U})$ es $\mathfrak{U}$-*Cauchy* (o es *de Cauchy* en $(X, \mathfrak{U})$) si para cada $\alpha \in \mathfrak{U}$ se tiene $T \cap \alpha \neq \emptyset$.

Definición 232. Para cada filtro T en un espacio uniforme $(X, \mathfrak{U})$, se define el *filtro asociado a* T, T', como

$$T' = \{St(F, \alpha) : F \in T, \alpha \in \mathfrak{U}\}^+$$

Definición 233. Un filtro de Cauchy T en un espacio uniforme $(X, \mathfrak{U})$ es *mínimo* si T no contiene propiamente a ningún $\mathfrak{U}$-filtro de Cauchy.

Definición 234. Un espacio uniforme $(X, \mathfrak{U})$ es *completo* si todo $\mathfrak{U}$-filtro de Cauchy converge en X.

Así como en los espacios topológicos existe el concepto de función continua, encaje topológico, isomorfismo, etc., en los espacios uniformes tienen lugar los conceptos análogos de función uniformemente continua, encaje unimórfico, unimorfismo, etc. Dichos conceptos tienen en los espacios uniformes propiedades equivalentes a sus correspondientes de los espacios topológicos.

Definición 235. Una función $f : (X, \mathfrak{U}) \to (Y, \mathfrak{V})$ entre dos espacios uniformes es *uniformemente continua* si para cada $\beta \in \mathfrak{V}$ existe $\alpha \in \mathfrak{U}$ tal que si $A \in \alpha$, existe $B \in \beta$ con la propiedad $f(A) \subseteq B$.

Definición 236. Una biyección $\varphi : (X, \mathfrak{U}) \to (Y, \mathfrak{V})$ entre espacios uniformes es un *uniformismo* si φ y φ^{-1} son ambas uniformemente continuas. En este caso se dice que los espacios $(X, \mathfrak{U})$ y $(Y, \mathfrak{V})$ son *unimórficos.*

Definición 237. Una función $g : (X, \mathfrak{U}) \to (Y, \mathfrak{V})$ entre espacios uniformes es un *encaje unimórfico* si g es un unformismo de $(X, \mathfrak{U})$ sobre un espacio denso de $(Y, \mathfrak{V})$.

Definición 238. Un espacio uniforme completo $(Y, \mathfrak{V})$ es una *compleción* de un espacio uniforme $(X, \mathfrak{U})$ si existe un encaje unimórfico $\varphi : (X, \mathfrak{U}) \to (Y, \mathfrak{V})$.

Definición 239. Para un espacio de Tychonoff X, definimos $\mathfrak{U}_0(X)$, $\mathfrak{U}_w(X)$, $\mathfrak{U}_{n\delta}(X)$, $\mathfrak{U}_{nc}(X)$ como las colecciones de cubiertas coceros finitas, coceros numerables, coceros estrella numerables y normales, respectivamente, de X. Si el espacio X está específicado entonces escribimos simplemente $\mathfrak{U}_0$, $\mathfrak{U}_w$, $\mathfrak{U}_{n\delta}$ y $\mathfrak{U}_{nc}$.

Teorema 240. Sea X un espacio de Tychonoff. Entonces las colecciones $\mathfrak{U}_0$, $\mathfrak{U}_w$, $\mathfrak{U}_{n\delta}$ y $\mathfrak{U}_{nc}$ son uniformidades compatibles y abiertas de X y $\mathfrak{U}_0 \subseteq \mathfrak{U}_w \subseteq \mathfrak{U}_{n\delta} \subseteq \mathfrak{U}_{nc}$.

Definición 241. Para cada espacio de Tychonoff X, sean νX, δX y μX las compleciones de $(X, \mathfrak{U}_w)$, $(X, \mathfrak{U}_{n\delta})$ y $(X, \mathfrak{U}_{nc})$, respectivamente. Decimos que X es *realcompacto* si $\mathfrak{U}_w$ es una uniformidad completa en X y que X es *δ-completo* si $\mathfrak{U}_{n\delta}$ es una uniformidad completa en X.

Bibliografía

[Čech37] E. Čech. On bicompact spaces. *Ann. of Math.*, 38:823–844, 1937.

[AD50] R. Arens and J. Dugundji. Remark on the concept of compactness. *Portugaliae Math.*, 9:141–143, 1950.

[Ale60] P. Alexandroff. On the metrization of topological spaces. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér Sci. Math. Astr. Phys.*, 8:135–140, 1960. (En Ruso).

[And67] R. Andenaes. Note on metrization and on the paracompact p-spaces of Arhangel'skii. *Math. Scand.*, 20:245–248, 1967.

[Arh65] A. V. Arhangelskii. On a class of spaces containing all metric and all locally bicompact spaces. *Matem.*, 67(109):55, 1965.

[Arh70a] A. V. Arhangelskii. On a class of spaces containing all metric and all locally bicompact spaces. *Amer. Math. Soc. Transl.*, 92:1–39, 1970.

[Arh70b] A. V. Arhangelskii. A survey of some recent advances in general topology, old and new problems. *Actes, Congrés int. Math.*, 2:16–26, 1970.

[AS74] R. A. Alo and H. L. Shapiro. *Normal topological spaces.* Cambridge University Press, London, 1974.

[AV84] A. V. Arkhangel'skii and V. I. Ponomarev. *Fundamentals of General Topology: Problems and Exercises.* Reidel, 1984.

[Bin51] R. H. Bing. Metrization of topological spaces. *Can. J. of Math.*, 3:175–186, 1951.

[Bou66] N. Bourbaki. *Elements of Mathematics. General Topology.* Addison-Wesley, 1966.

[BS69] D. K. Burke and R. A. Stoltenberg. A note on p-spaces and Moore spaces. *Pacific J. Math.*, 30:601–608, 1969. vol. 3.

[Bur70] D. K. Burke. On p-spaces and $\omega\Delta$-spaces. *Pacific J. Math.*, 35:285–296, 1970.

[Bur72] D. K. Burke. Spaces with a G_δ-diagonal. *TOPO-12, Proceedings of the Second Pittsburg International Conference on General Topology and its Applications*, 378:95–101, 1972.

[BY01] D. Buhagiar and I. Yoshioka. Ultracomplete topological spaces. *Acta Math. Hungar.*, 92:(1–2) 19–26, 2001.

[BY02] D. Buhagiar and I. Yoshiaka. Sums and products of ultracomplete topological spaces. *Topology Appl.*, 122:19–26, 2002.

[CCN74] J. Chaber, M. M. Coban, and K. Nagami. On monotonic generalizations of Moore spaces, Čech-complete spaces and p-spaces. *Fund. Math.*, 84:107–119, 1974.

[Dug66] J. Dugundji. *Topology.* Boston, 1966.

[Eng89] R. Engelking. *General Topology.* Heldermann, 1989.

[Fil67] V. V. Filippov. On perfect images of paracompact p-spaces. *Soviet Math. Dokl.*, 176:533–536, 1967.

[GM71] A. García-Máynez. *Introducción a la Topología de Conjuntos.* Trillas, 1971. México.

[GM84] A. García-Maynez. Generalization of the concepts of closed function and C-embedded set. *An. Inst. Mat. Nac. Autónoma México*, 24:13–35, 1984.

[GM85] A. García-Máynez. A Characterization of T_3 spaces of countable type. *Topology Proceedings*, 10:151–158, 1985.

[GM89] A. García-Máynez. Normal covers and separation. *An. Inst. Mat. Nac. Autónoma México*, 29:1–16, 1989.

[GM97] A. García-Máynez. Pseudocharacters and uniform weights. *Bol. Soc. Mat. Mexicana*, 3:165–173, 1997.

[GM07] A. García-Máynez. A survey on Wallman bases. *Appl. Gen. Top*, 8:223–227, 2007.

[GMLR18] A. García-Máynez and M. A. López-Ramírez. Some characterizations of pre-metrizability. *Topology Proceedings*, 51:77–85, 2018.

[GMR99] A. García-Maynez and S. Romaguera. Perfect pre-images of cofinally complete metric spaces. *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 40:335–342, 1999.

[GMT88] A. García-Máynez and A. Tamariz. *Topología General.* Porrúa, 1988.

[HJ58] M. Henriksen and J. R. Isbell. Some properties of compactifications. *Duke Math. J.*, 25:83–106, 1958.

[Hod74] R. E. Hodel. On the weight of a topological space. *Proc. Trans. Amer. Math. Soc*, 43:470–474, 1974.

[Hos89] T. Hoshina. *Extensions of mappings II in K. Morita and J. Nagata.* Topics in General Topology (North-Holland), 1989.

[HR79] E. Hewitt and K. Ross. *Abstract Harmonic Analysis 1.* Springer–Verlag, 1979.

[Ish67a] T. Ishii. On closed mappings and M-spaces I. *Proc. Japan Acad.*, 43:752–756, 1967.

[Ish67b] T. Ishii. On closed mappings and M-spaces II. *Proc. Japan Acad.*, 43:757–759, 1967.

[Iva58] L. N. Ivanovskij. On a hypothesis of P. S. Alexandroff. *Dokl. Akad. Nauk.*, 123:785–786, 1958.

[Kat64] M. Katetov. Extensions of locally finite coverings. *Israel J. Math*, 2:173–176, 1964.

[MH64] K. Morita and S. Hanai. Products of normal spaces with metric spaces II. *Proc. Japan Acad.*, 32:10–14, 1964.

[Mic72] E. Michael. A quintuple quotient quest. *General Topology Appl.*, 2:91–138, 1972.

[Mor55] K. Morita. A condition for metrizability of topological spaces and for n-dimensionality. *Sci. Rep Tokyo Kyoiku Daigaku, section A*, 5:33–36, 1955.

[Mor62] K. Morita. Paracompactness and product spaces. *Fund. Math.*, 50:223–236, 1962.

[Mor64] K. Morita. Products of normal spaces with metric spaces. *Math. Ann.*, 154:365–382, 1964.

[Nag50] J. Nagata. On a necessary an sufficient condition of metrizability. *J. Inst. Polytech, Osaka Univ.*, 1:93–100, 1950.

[Oku64] A. Okuyama. On metrization of M-spaces. *Proc. Japan Acad.*, 40:176–179, 1964.

[Oku68] A. Okuyama. Some generalizations of metric spaces, their metrization theorems and product spaces. *Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku Sect. A 9*, pages 236–254, 1968.

[PT87] V. I. Ponomarev and V. V. Tkachuk. The countable character of X in βX compared with the countable character of the diagonal in $X \times X$. *Vestnik Moskov Univ.*, 42:16–19, 1987. En Ruso.

[Rom98] S. Romaguera. On cofinally complete metric spaces. *Questions Answers Gen. Topology*, 16:165–170, 1998.

[RS81] W. Roelke and S. Dierolf. *Uniform Structures on Topological Groups and Their Quotients.* McGraw-Hill, New York, 1981.

[Smi51] J.M. Smirnov. A necessary and sufficient condition for metrizability of a topological space. *Doklary Akad. Nauk SSSR (N.S)*, 77:197–200, 1951.

[Sto48] A. H. Stone. Paracompactness and product spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 54:977–982, 1948.

[Tam60] H. Tamano. On paracompacteness. *Pacific J. Math. Kyoto Univ*, 10:162–193, 1960.

[Tam67] H. Tamano. Normality and product spaces, general topology and its relations to modern analysis and algebra II. *(Proc. Sympos. Praga) Academic Press, New York*, pages 349–342, 1967.

[TdL02] V. V. Tkachuk and M. López de Luna. Čech-completeness and ultracompletness in *nice* spaces. *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 15:515–524, 2002.

[TJ04] V.V. Tkachuk and D. Jardón. Ultracompleteness in Eberlein-Grothendieck spaces. *Bol. Soc. Mat. Mexicana*, 3:209–2018, 2004.

[Tuk40] J. H. Tukey. *Convergence and uniformity in topology.* Princeton, 1940.

[Z67] Frolik Z. Homogeneity problems for extremally disconnected spaces. *Comment. Math. Univ. Carolinae*, 8(4):757, 1967.

Índice Alfabético