



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CUANTIZACIÓN CANÓNICA DEL CAMPO
ESCALAR EN UN FONDO CURVO Y LA
RADIACIÓN DE HAWKING

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
FÍSICO

P R E S E N T A:
MARTÍN EDWIN REYES SÁNCHEZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. MARIANO CHERNICOFF MINSBERG



CIUDAD UNIVERSITARIA, Cd. Mx., 2018



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de datos del jurado.

1. Datos del alumno

Reyes
Sánchez
Martín Edwin
55 66 73 70 47
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
310308041

2. Datos del tutor

Dr.
Mariano
Chernicoff
Minsberg

3. Datos del sinodal 1

Dr.
Hernando
Quevedo
Cubillos

4. Datos del sinodal 2

Dr.
Jerónimo Alonso
Cortez
Quezada

5. Datos del sinodal 3

Dr.
Yuri
Bonder
Grimberg

6. Datos del sinodal 4

Dr.
Saúl Noé
Ramos
Sánchez

7. Datos del trabajo escrito

Cuantización canónica del campo escalar en un fondo curvo y la radiación de Hawking
81 p
2018

*mamá,
papá,
por y para ustedes.*

Agradecimientos

En primer lugar me gustaría agradecerle a mi asesor, el Dr. Mariano Chernicoff Minsberg, por hacer de todo este recorrido algo posible. Gracias por el tiempo invertido, por su infinita paciencia, por cada reunión en la fungió como profesor y colega, gracias por cada corrección hecha y lección impartida. Por ser arquetipo del buen docente e investigador, y claro, gracias por permitirme realizar el servicio social y esta tesis bajo su tutela. Espero no haberle hecho exasperar en demasía.

Le doy las gracias igualmente a cada profesor parte del sínodo por leer este trabajo, realizar las correcciones al mismo y permitirme compartir lo aprendido. Sin dejar de lado a cada profesor parte de mi trayectoria escolar en la facultad; adicionar el agradecimiento por su labor docente en la que son guías de un grupo de jóvenes con sueños de viable realización gracias a sus clases y enseñanzas.

Gracias a la familia que no es de sangre, a mis amigos, acompañantes de este viaje al que llamamos vida. Gracias por cada una de sus pláticas, por la confianza que hemos entablado, por escuchar y contar maravillosas anécdotas. Por compartir películas, series, lecturas y esas canciones que interpretamos con tanta emoción; gracias por permitirme ser parte su vida y quedarse en la mía. Gracias por cada reta de fútbol, cada partida de billar, por cada salida al cine y cada cerveza; gracias por acompañarme a todo concierto y festival, llevarme a estadios, palacios, museos, teatros, restaurantes y parques. Gracias por cada chat y llamada, por matarme de risa y hacerme enojar; gracias por ser copilotos, unos mejores que otros, de viaje pero sobretodo copilotos en los mejores momentos de mi vida. Gracias por ser luz, por conocer mis demonios y no marcharse, gracias por salvarme.

Y por último, y sin duda el agradecimiento más importante; gracias a mis padres. Gracias por el apoyo incondicional, por levantarme de cada tropiezo, por aplaudirme cada logro, por resarcir cada lágrima, por ser parte de cada sonrisa, gracias por ser la motivación de cada día. Gracias por ser mis profesores, mis amigos, mis consejeros y mentores, el porqué de la persona que soy ahora; gracias por enseñarme que lo que vale la pena cuesta y se trabaja y que rendirse no existe en nuestro vocabulario; que cada día está diseñado para convertirte en una mejor versión de la que fuiste ayer. Gracias por ser mi ejemplo a seguir, por demostrarme que nuestra *familia chiquita y rota* es chiquita, sí, pero rota nunca más... gracias simplemente por ser mi mayor tesoro. Gracias por todo. Los amo.

Resumen

La relatividad general con sus más de cien años de vigencia ha establecido una visión que revolucionó desde el primer instante el modo en que observamos nuestro cosmos. De forma fina y enigmática nos ha enseñado que la estructura del espacio-tiempo es la responsable de los efectos gravitatorios que se detectan y como se ve modificada en presencia de materia. A su vez, la teoría cuántica de campos constituye un conglomerado de recursos e información que ha permitido alcanzar en un corto lapso de tiempo una mayor comprensión del comportamiento del universo. Estos pilares del conocimiento forman una sólida base de gran parte de investigaciones llevadas a cabo alrededor del mundo. En esta tesis pretendemos formar un entendimiento de ambos recursos intelectuales con base en una recopilación de resultados bien estudiados por la comunidad científica para que constituyan el punto de partida del tratado a realizar.

Se presentará la cuantización canónica del campo escalar sobre un fondo curvo, donde asumiremos que el campo es incapaz de deformar el entorno. Analizando en el trayecto la carencia de unicidad en cuanto a conjuntos solución que se pueden hallar para las ecuaciones, observando su relación mediante las transformaciones de Bogolubov. Consecuencia inmediata será una conexión no trivial entre los vacíos de los espacios de Fock definidos, misma situación que permitirá dar una razón, desde el punto de vista del proceso de cuantización, de la radiación de Hawking. Dicha radiación fue propuesta en 1974 y desde su formulación no ha dejado de maravillar al colectivo intelectual pues erige un estudio de los efectos cuánticos sobre el terreno de dominio de la relatividad general; los agujeros negros parecen emitir una tenue radiación en forma de baño térmico cuya temperatura depende de la masa del agujero, el objeto no es tan negro como la relatividad dicta.

Por último dedicaremos breves renglones a aplicar la maquinaria construida para revisar un elemento de fascinación en la realidad científica: la paradoja de la información. Una vez divisado que en las cercanías de los agujeros negros se lleva a cabo una emisión de partículas, sucederá que la producción se encuentra entrelazada formando un sistema para el que la mitad del mismo está condenado a llegar a la singularidad del agujero negro, y eventualmente desaparecer cuando el proceso de evaporación devenga. El problema aún busca una solución y su entendimiento constituye un paso importante en una visión global de la física actual.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Relatividad especial y general	3
1.2. Teoría cuántica de campos en un fondo plano	16
1.2.1. Cuantización del campo escalar libre en un fondo plano	19
2. Un campo escalar en un fondo curvo	27
2.1. Cuantización canónica	27
2.1.1. Transformaciones de Bogolubov	32
2.1.2. Unicidad en un espacio-tiempo estático	33
2.2. El efecto Unruh	35
3. Cuantización de un campo escalar cerca de un agujero negro y la radiación de Hawking	42
3.1. Solución de Schwarzschild a las ecuaciones de campo	43
3.1.1. Agujero negro de Schwarzschild	45
3.2. Radiación de Hawking	47
3.2.1. Termodinámica de un agujero negro	55
4. Paradoja de la información	59
4.1. Foliación del espacio-tiempo	60
4.2. Creación de pares: estados entrelazados	62
4.2.1. Pérdida de información	66
5. Conclusiones	69

Capítulo 1

Introducción

Es importante tener presente el ritmo con que la ciencia, particularmente la física, ha venido evolucionando por los últimos ciento veinte años. La hipótesis cuántica que surge como un acto de desesperación para dar sustento teórico a una fórmula que reproduce a precisión un fenómeno natural sin explicación aparente, dados los recursos intelectuales de la época, constituye, de forma personal, la inflexión más fascinante en la historia de la disciplina. Deviniendo a este suceso encontramos una reformulación incluso filosófica de entender a la naturaleza en los regímenes energéticos que se alejan de la observación común, construyendo de a poco una edificación intelectual que hoy día se enseña en las aulas bajo el nombre de mecánica cuántica. En la actualidad entendemos a la teoría cuántica como aquella encargada de descifrar los misterios que esconde el universo cuando las distancias de estudio se vuelven muy pequeñas, aquellas donde la teoría clásica carece de respuestas para los comportamientos de las partículas que inundan nuestro microscópico cosmos con su probabilístico comportamiento.

Con la misma cota superior en relevancia se imparten temas que pretenden desentrañar la naturaleza del espacio y del tiempo, pero más importante, la explicación que obliga a situar a estos dos términos como inseparables y tratar, más temprano que tarde, el régimen causal en que los eventos de nuestro universo se suceden como nos enseñan los principios de la relatividad. La relatividad especial toma en su seno la postulación de una constante universal, un absoluto; la velocidad de la luz en el vacío es la misma para todo observador independientemente de su movimiento relativo. Esta sentencia constituye un postulado de uno de los tratados más reconocidos en la historia, presentándose a su lado un segundo en igual sintonía: las leyes de la física son independientes del sistema inercial en que sean observadas. Un paso más radical en el pensamiento de la humanidad se exhibe si se habla de la teoría de la relatividad general donde la fuerza de gravedad se entiende como consecuencia de la deformación del espacio-tiempo, medio que a su vez se ve afectado por la presencia de materia. En las ecuaciones de la relatividad general es de gusto generalizado presentar los componentes geométricos que asimilan la configuración del espacio-tiempo a la izquierda de la igualdad, ubicando en la derecha los aspectos referentes a la energía del medio circundante.

La teoría cuántica de campos representa, por su lado, uno de los designios más ambiciosos en la descripción de la realidad que aporta la física moderna. Tomando prestado el concepto de campo aplicado con éxito en la teoría cuántica y reuniéndolos con los principios de la relatividad especial; dichos elementos trascienden en el nombre de la teoría y dejan ver la idea que ronda en la misma, la *cuantización de un campo*. Al igual que la teoría cuántica estándar donde se busca promover los grados de libertad a operadores actuando sobre un espacio de Hilbert, el proceso de cuantización para los campos no será diferente, con la salvedad de trabajar en este caso con un número infinito de grados de libertad. La teoría nace como un obligado trayecto de encontrar la naturaleza cuántica del campo electromagnético, con trazos llenos de avances prodigiosos y retrocesos desesperanzadores, la conclusión aparente de tantos estudios relacionados a conllevado a la descripción de un universo donde sus pequeños bloques interactúan mediante lo dictado por el modelo estándar.

El modelo estándar de partículas entiende a la naturaleza como construida por dos tipos de pequeños ladrillos, los fermiones y los bosones; en el primer costal ubicamos al electrón, muón y tauón con sus respectivos neutrinos acompañantes, y también a seis quarks de nombres particulares, especialmente si convenimos en traducirlos: arriba, abajo, cima, fondo, encanto y extrañeza. Y como resultado parcialmente concebido dentro de la teoría, estas partículas se comunican, interactúan, mediante cuatro fuerzas fundamentales: gravedad, electromagnética, nuclear fuerte y nuclear débil; de las tres últimas se tiene noticia en el modelo estándar y de su correspondiente tratamiento cuántico. Siendo la gravedad la de inmediata interacción a la existencia, es también aquella esquiva fuerza donde las técnicas de cuantización carecen de influencia. Y he aquí que la última cuestión ha invitado a más de una mente brillante a encontrar una formulación cuántica de la gravedad, que aunque no es el único problema a resolver dentro del modelo estándar ni de la teoría cuántica de campos es tal vez el más excitante.

En el trabajo presente buscaremos distender nuestras ambiciones; no pretenderemos buscar una cuantización de la gravedad sino analizar los estudios hechos sobre la cuantización del campo escalar en una geometría arbitraria, que no se verá afectada por la presencia del campo, y estudiar las consecuencias de dicha acción. El interés radica en que esta constituye una aproximación a lo que debe esperarse de la actividad del universo en condiciones particulares y de la teoría unificada que se ha venido buscando.

Tomaremos el resto del capítulo para presentar en detalle lo que se ha venido esbozando en las líneas precedentes y que constituirán las herramientas que se creen necesarias para la total comprensión de este trabajo. Se hablará de los principios de relatividad y de las transformaciones de Lorentz que servirán como puente para establecer algunos conceptos de geometría diferencial que permitan asimilar de forma general un espacio métrico, de tal suerte que podamos abordar las ecuaciones de la relatividad general de forma un tanto adusta, puesto que una correcta deducción de las mismas no constituye un objetivo presente, aunque para el lector curioso no le será difícil encontrar un recurso donde se trabaje en una deducción con el debido detalle, por ejemplo, el capítulo siete del libro [1].

En el mismo tenor presentaremos algunos antecedentes de la teoría cuántica de campos en donde trataremos la cuantización del campo escalar en un espacio de Minkowski y la forma en que entendemos el concepto de partícula en estas situaciones al describir la construcción del espacio de Fock.

Durante el segundo capítulo prestaremos atención a la cuantización canónica del campo escalar sobre un fondo de curvatura arbitraria dando un seguimiento equivalente al visto en el apartado anterior, observando las diferencias que se obtienen de realizar el trabajo en este nuevo escenario y conduciendo a un análisis de las transformaciones de Bogolubov que aquí se hacen perceptibles. Se finaliza el capítulo estudiando de forma somera una aplicación de las transformaciones de Bogolubov al considerar el efecto Unruh.

Para el tercer capítulo haremos una revisión de la conocida solución propuesta por Schwarzschild a las ecuaciones de campo con la finalidad de contemplar el origen matemático de una singularidad del espacio-tiempo y de un horizonte de eventos como la correspondiente consecuencia de una desconexión causal entre regiones del espacio, convergiendo en una examinación de la naturaleza de un agujero negro. Con las herramientas desarrolladas hasta el momento seremos capaces de estudiar la radiación de Hawking como consecuencia de una transición desde un universo tipo Minkowski a uno tipo Schwarzschild a partir de la creación del horizonte de eventos. La cuantización del campo escalar en este entorno otorgará unas transformaciones de Bogolubov no triviales confluyendo finalmente en la observación de un baño térmico procedente del agujero negro.

Se finaliza el tratado presentando una aplicación más del dominio visto, pero a un tema que sigue teniendo un brillo propio en la investigación actual debido a su trascendencia; hablamos de la paradoja de la información. Una vez vista la producción de radiación por parte del agujero negro queda tener presente el mecanismo del evento suscitado; mediante una creación de pares entrelazados donde algún constituyente alcanza a escapar del objeto masivo y su acompañante arriba a la singularidad del sistema. El problema no es lo mencionado, la situación de alerta se presenta al percatarse que la radiación roba energía al agujero negro que terminará por desvanecerse llevando información del estado entrelazado consigo. Por lo dicho se decidió dar una breve revisión al problema utilizando el conocimiento recabado y concluir de esta forma el andamiaje estudiado.

1.1. Relatividad especial y general

Aunque el bagaje intelectual que rodea a la teoría de la relatividad especial fue fabricándose de a poco, representó una irrupción abrupta en la escena científica el artículo publicado en 1905 por Albert Einstein para marcar el ritmo y difusión de las ideas involucradas [2]. Los elementos de la teoría parten de dos postulados. El *principio de relatividad* nos dice que los resultados de cualquier experimento realizado por un observador no depende de su velocidad relativa respecto a cualquier otro observador que no participa en el experimento; mientras que la *universalidad de*

la velocidad de la luz postula, como su nombre indica, que la velocidad de un fotón¹ es la misma para dos observadores desplazándose sin aceleración que pretendan medirla, siendo $c \approx 3 \times 10^8$ m/s esta velocidad. Convencionalmente osaremos asignar el valor $c = 1$ de ahora en adelante tal como lo propuesto por el sistema de unidades naturales.

Las consecuencias físicas de estos dos postulados no pueden ser más que fascinantes como la contracción del espacio o la dilación del tiempo. Pero tal vez la más relevante para nuestros propósitos sea la invariancia del *intervalo de línea*. Dado un evento en $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z)$ el intervalo de espacio-tiempo entre dos eventos se define como

$$\Delta s^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \equiv \Delta t^2 - \Delta \vec{x}^2, \quad (1.1)$$

haciendo uso de la convención $(+, -, -, -)$ para el resto del tratado. Dentro de la relatividad especial, dada la universalidad de la velocidad de la luz, este intervalo de línea debe permanecer constante para dos sistemas inerciales con un origen coincidente ($\vec{x} = \vec{x}'$ cuanto $t = t' = 0$):

$$\Delta s^2 = \Delta t^2 - \Delta \vec{x}^2 = \Delta t'^2 - \Delta \vec{x}'^2 = \Delta s'^2. \quad (1.2)$$

Al introducir una matriz de entradas constantes,

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (1.3)$$

conocida como la métrica de Minkowski² podremos ser capaces de representar al intervalo de línea de una forma simple

$$\Delta s^2 = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu \equiv \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu, \quad (1.4)$$

que en notación matricial adoptaría la forma $\Delta s^2 = \Delta x^\top \eta \Delta x$.

El cometido subsecuente será determinar bajo qué transformaciones de coordenadas esta afirmación continua siendo cierta, es decir, qué podemos modificar de x y seguir obteniendo que $\Delta s^2 = \Delta s'^2$. Supongamos que x se ve afectado por una transformación lineal, $x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$, que en notación matricial se vería como $x' = \Lambda x$; pedimos así que

$$x^\top \eta x = x'^\top \eta x' = (\Lambda x)^\top \eta \Lambda x = x^\top \Lambda^\top \eta \Lambda x$$

¹Fue en otro de sus artículos donde se trata por primera vez de los cuantos de luz hoy día llamados fotones, Einstein, A. (1905). Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt. Annalen der Physik, 322(6), 132-148.

²Veremos en breve la definición formal de un tensor, y por tanto de métrica, donde haremos una breve observación sobre la relación isomorfa con el espacio de matrices, dejemos pasar por ahora este abuso de notación.

$$\Rightarrow \eta = \Lambda^\top \eta \Lambda, \quad (1.5)$$

o bien en notación indicial,

$$\eta_{\mu\nu} = \Lambda_\mu^\rho \Lambda_\nu^\sigma \eta_{\rho\sigma}. \quad (1.6)$$

Esto somete a las matrices a una condición especial para poder satisfacer nuestro requerimiento, a las matrices que así lo cumplan se les conoce como *transformaciones de Lorentz*. Y aún más, el conjunto de transformaciones que cumplan tal requisito forma un *grupo*³ bajo el producto de matrices, conocido como el *grupo de Lorentz*, puesto que si $x' = \Lambda x$ y $x'' = \Lambda' x'$ con Λ y Λ' transformaciones de Lorentz entonces $\Lambda'' = \Lambda' \Lambda$ es una transformación de Lorentz:

$$(\Lambda'')^\top \eta \Lambda'' = (\Lambda' \Lambda)^\top \eta (\Lambda' \Lambda) = \Lambda^\top [(\Lambda')^\top \eta \Lambda'] \Lambda = \Lambda^\top \eta \Lambda = \eta \quad (1.7)$$

además si Λ es una transformación de Lorentz entonces Λ^{-1} también va a serlo:

$$(\Lambda^{-1})^\top \eta (\Lambda^{-1}) = (\Lambda^{-1})^\top [\Lambda^\top \eta \Lambda] (\Lambda^{-1}) = (\Lambda \Lambda^{-1})^\top \eta (\Lambda^{-1} \Lambda) = \mathbb{1}^{-1} \eta \mathbb{1} = \eta. \quad (1.8)$$

Dado que la multiplicación matricial es asociativa solo resta comentar que trivialmente la matriz identidad también es una transformación de Lorentz. Dada la similitud con el grupo de rotaciones $\mathcal{O}(4)$ al grupo de Lorentz se le denota por $\mathcal{O}(3, 1)$. Dentro de este conjunto de elementos existe un subconjunto definido por el signo del determinante asociado, observar que $\det \eta = \det (\Lambda^\top \eta \Lambda) = \det \Lambda^\top \cdot \det \eta \cdot \det \Lambda = \det \eta \cdot (\det \Lambda)^2 \Rightarrow \det \Lambda = \pm 1$. El subconjunto de transformaciones de Lorentz cuyo determinante es $+1$ forma un subgrupo denotado por $\mathcal{SO}(3, 1)$.

A su vez, podemos tomar una segunda clasificación de las transformaciones de Lorentz al considerar de la Ec.(1.6) que para $\mu = \nu = 0$ se tiene que $(\Lambda_0^0)^2 - (\Lambda_0^1)^2 - (\Lambda_0^2)^2 - (\Lambda_0^3)^2 = 1$, es decir, $\Lambda_0^0 \leq -1$ ó $\Lambda_0^0 \geq +1$. Al conjunto de transformaciones de Lorentz que satisfagan la segunda condición formarán igualmente un subgrupo denotado por $\mathcal{O}^+(3, 1)$. En última instancia, podemos intersecar ambos subgrupos, $\mathcal{SO}(3, 1)$ y $\mathcal{O}^+(3, 1)$, y obtener el subgrupo más reconocido de transformaciones de Lorentz, *el grupo de Lorentz restringido* $\mathcal{SO}^+(3, 1)$.

Dentro de este subgrupo de transformaciones tenemos a las rotaciones usuales del plano euclídeo, por ejemplo:

$$\Lambda(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.9)$$

que es una rotación con ángulo θ en plano xy , existiendo dos transformaciones más de este estilo que consideran las rotaciones sobre los planos xz y yz . Y por otro lado encontramos a las transformaciones que involucran a la variable temporal, a estas

³Se dice que $(G, *)$ es un grupo si G es un conjunto no vacío y $* : G \times G \rightarrow G$ una operación asociativa tales que $\exists! e \in G : e * g = g * e = g \forall g \in G$ y $\exists h \in G : g * h = h * g = e \forall g \in G$

transformaciones de Lorentz se les conoce como *boosts* y son de la forma:

$$\Lambda(\theta) = \begin{bmatrix} \cosh(\theta) & -\sinh(\theta) & 0 & 0 \\ -\sinh(\theta) & \cosh(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.10)$$

teniendo igualmente dos tipos más de estas transformaciones. Todas las transformaciones de Lorentz en el subgrupo $\mathcal{SO}^+(3,1)$ van a poder ser expresadas como producto de estos seis tipos de transformaciones.

Habiendo estudiado las transformaciones lineales que dejan invariante el intervalo de línea cabría preguntarse que otro tipo de transformaciones cumplen el mismo requisito fuera de la linealidad. La respuesta es fácilmente hallada al observar que podemos sumar cualquier constante a x y que al registrar la diferencia Δx para dos eventos esta se ve inalterada. Con lo cual, trasladarnos en el espacio-tiempo, $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + a^\mu$, constituye de igual forma una transformación que preserva el intervalo de línea.

Dicho esto, tanto trasladarnos como *rotar* en el espacio-tiempo conforman una colección de transformaciones que preservan el intervalo de línea y de las que tendremos un gran interés de estudio pues constituyen una determinación del cumplimiento causal de los eventos. Como cabría imaginar, al conjunto de transformaciones restringidas de Lorentz, $\Lambda_\mu^\nu(\theta)$, junto con las traslaciones espacio-temporales, a^ν , se les puede otorgar una estructura de grupo con el producto $(\Lambda, a) \cdot (\Lambda', a') = (\Lambda\Lambda', a + \Lambda a')$, tal que, $(\Lambda, a)x^\nu = \Lambda_\mu^\nu x^\mu + a^\nu$. A este grupo se le conoce como *grupo de Poincarè*.

Hasta lo aquí expuesto constituye parte importante de los resultados necesarios a considerar dentro de la relatividad especial. Relevante resaltar que todo lo que se ha tratado forma parte del estudio de un espacio plano, avanzaremos en breve con una serie de definiciones que permitan introducir nociones de la física en espacios curvos y que desemboquen en la presentación de las ecuaciones de campo de la relatividad general como último referente de esta sección.

Iniciaremos nuestro trayecto ya anunciado manifestando que lo que se expondrá a continuación puede revisarse con grato detalle en [3]. Diremos que una *variedad* M es aquel conjunto donde para cada punto contenido en la estructura existe una región abierta y un mapeo continuo biyectivo con dominio en éste abierto e imagen en un conjunto abierto de \mathbb{R}^n , es decir, una variedad es una estructura matemática tal que localmente se parece a \mathbb{R}^n . Con esta definición podemos tomar un conjunto envolvente de abiertos en la variedad M de forma que para cada punto de la variedad se le asocie un punto de \mathbb{R}^n ; dado un punto $P \in M$ por definición existe un punto imagen tal que $y(P) = (y^1(P), \dots, y^n(P)) \in \mathbb{R}^n$, a estos puntos se les llama *coordenadas de P* , y constituyen un mapeo en sí.

Ahora observemos que a partir de la biyectividad de los mapeos podemos construir funciones donde tanto dominio como codominio sea \mathbb{R}^n , pero que contengan una transición sobre la variedad. Dadas dos funciones $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $g : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ podemos definir $g \circ f^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Si el codominio de f^{-1} y el dominio de g se intersecan

entonces la imagen de la composición es no vacía. El propósito de realizar estas construcciones es poder rescatar las nociones de distancia que conocemos con suficiencia de \mathbb{R}^n y aún más, podemos hablar de derivada al tratar con estas funciones. Diremos que dos mapeos son *compatibles* si las parciales de $(g \circ f^{-1})^i$ existen con respecto a cada x^j , y son continuas. De esta forma podemos localizar aquellas variedades que conjuguen bien con esta idea; donde para cada punto P de la variedad, contenido en al menos un abierto, se tiene que los mapeos que consideren a P en su dominio sean compatibles, si tal ocurre llamaremos a esta variedad, *variedad diferenciable*.

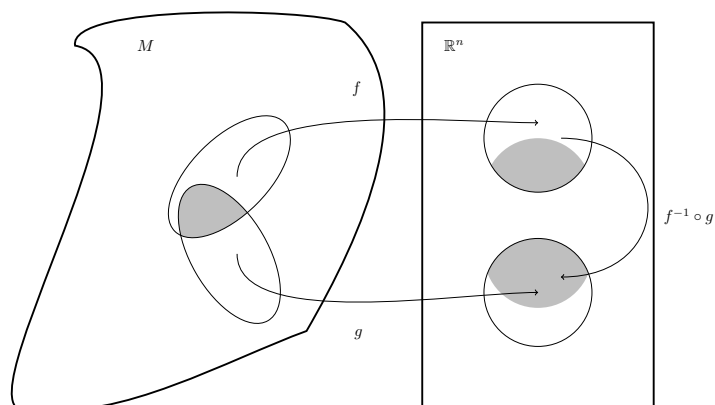


Figura 1.1: Se muestran dos funciones de coordenadas con dominio coincidente, si la variedad M es diferenciable entonces la composición $f^{-1} \circ g$ es diferenciable en \mathbb{R}^n .

Ahora pasemos a una observación importante, en el caso de \mathbb{R}^n cada elemento que consideremos en este espacio es llamado *vector* y esto es debido a que es un elemento de un espacio vectorial⁴, lastimosamente no ocurre lo mismo con los elementos de M pues la estructura no posee una forma natural de operar con ellos.

Teniendo en mente que nuestra variedad diferenciables es localmente \mathbb{R}^n , tomemos un punto P en ella y hagamos pasar una curva parametrizada, $x = (x^1(\lambda), \dots, x^n(\lambda))$, por él. Como esta función parte de un espacio vectorial, \mathbb{R} , con una noción de distancia bien determinada somos capaces de obtener un haz tangente sobre P a la curva. Ahora bien, esta curva construida no es única, dado el mismo parámetro λ podemos construir una infinidad de curvas que transiten por P y tomar en cada caso el haz tangente correspondiente. La colección de haces así construidos forma un espacio vectorial tangente a la variedad M sobre P que se denota por $T_P M$. Observar dos cuestiones; primero, este espacio tangente esta anclado a P , los elementos de este espacio son efectivamente vectores y podemos operar con ellos pero no es posible, por ahora, operar con elementos de otro espacio tangente anclado sobre algún otro

⁴Se dice que V es un espacio vectorial sobre K si hay dos operaciones, $+$: $V \times V \rightarrow V$ y \cdot : $K \times V \rightarrow V$, tal que la primera es conmutativa, asociativa, con elemento neutro e inverso, mientras que la segunda es asociativa y con elemento neutro. Además con ambas funciones se cumple la distribución sobre V y sobre K .

punto $P' \in M$. Lo segundo a tener en cuenta es la caracterización que se puede hacer de los elementos de $T_p M$, $v = (v^1, \dots, v^n)$, al considerar un cambio de coordenadas, $x^\mu(\lambda) \rightarrow x'^\mu(x^\nu(\lambda))$, tendremos por regla de la cadena que

$$v^\mu(\lambda) = \frac{dx^\mu(\lambda)}{d\lambda} \rightarrow v'^\mu(\lambda) = \frac{dx'^\mu(x^\nu[\lambda])}{d\lambda} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu(\lambda)}{d\lambda} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} v^\nu(\lambda), \quad (1.11)$$

y como esto debe ocurrir para toda parametrización utilizada, dado un cambio de coordenadas arbitrario, $x^\mu \rightarrow x'^\mu(x^\nu)$, un vector en el espacio tangente debe transformarse como

$$v^\mu \rightarrow v'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} v^\nu. \quad (1.12)$$

Hecho lo hasta ahora visto en nuestra construcción de un espacio vectorial sobre cada punto de la variedad somos no solo capaces de operar con los vectores, elementos del espacio tangente, sino de tomarlos y transformarlos. Vamos a definir a un *vector covariante* como una función lineal con dominio en $T_p M$ e imagen en \mathbb{R} . De nuevo podemos encontrar una caracterización tal como lo hecho con los vectores, partiendo de esta simple definición, observar que hablar de covectores sobre una variedad también obliga a anclar el espacio vectorial sobre un punto definido P y partir de ahí a un espacio *escalar* (invariante ante cambios de coordenadas). Sea w un covector entonces:

$$w : T_p M \rightarrow \mathbb{R}, \quad w(v) = w_\mu v^\mu. \quad (1.13)$$

Y dado que un elemento de \mathbb{R} debe ser invariante ante cambios de coordenadas, se tiene que

$$w_\mu v^\mu = w'_\mu v'^\mu = w'_\mu \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} v^\nu \Rightarrow w'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} w_\nu. \quad (1.14)$$

Es fácil observar que dada la característica de función que se le solicita a cada covector sobre $T_p M$, el conjunto de todos ellos con las operaciones usuales define un espacio vectorial dual denotado por $T_p^* M$, pues no solo cumple con las referentes condiciones para formar un espacio vectorial, sino que dado el presente producto interior, $w(v) = w_\mu v^\mu$, se puede pensar al covector w operado por v . Por tal se dice que tanto vectores como covectores son elementos duales.

Con las herramientas hasta ahora construidas hemos sido capaces de posicionar a una variedad diferenciable, una estructura de aparente difícil estudio, en términos de elementos reconocidos y altamente estudiados como lo son los espacios vectoriales. Pero aún no es suficiente para establecer los antecedentes necesarios. Dado que, tanto $T_p M$ como $T_p^* M$ son espacios vectoriales, podemos tomarlos y a sus productos vectoriales como dominio de una función lineal como hemos acostumbrado. Es decir, dado un punto P en M se construye una función lineal con argumentos m covectores y n vectores, a cuyo nombre asignaremos el de un *tensor de rango* $\binom{m}{n}$. Por linealidad aquí debe entenderse una operación multilineal tal que al seleccionar un argumento variable y dejar fijos los demás argumentos la función resultante debe ser lineal. De lo visto se sigue que los covectores son tensores de rango $\binom{1}{0}$, mientras que los vectores lo son de rango $\binom{0}{1}$. Mientras que, se asume por convención, que un escalar es un tensor de rango $\binom{0}{0}$.

Como puede observarse, los tensores constituyen una generalización de las operaciones que veníamos efectuando sobre la variedad y dada su construcción, la caracterización dada bajo cambios de coordenadas parecerá natural bajo lo ya revisado. Sea el tensor T y el cambio de coordenadas usual, se advierte que

$$T^{\mu_1 \dots \mu_m}_{\nu_1 \dots \nu_n} \rightarrow T'^{\mu_1 \dots \mu_m}_{\nu_1 \dots \nu_n} = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\lambda_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_m}}{\partial x^{\lambda_m}} \cdot \frac{\partial x^{\rho_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\rho_n}}{\partial x'^{\nu_n}} T^{\lambda_1 \dots \lambda_m}_{\rho_1 \dots \rho_n}. \quad (1.15)$$

Conviene realizar un breve paréntesis para comentar una cuestión que había quedado pendiente y que hemos venido usando de forma reiterada. Ocurre que tanto vectores como covectores forman parte de un espacio vectorial, es resultado conocido que debe existir una serie de elementos representativos del espacio tal que formen una *base*⁵. Mediante dicha base se establece un isomorfismo de las funciones actuando sobre el espacio, operadores, y el espacio matricial correspondiente, de aquí que dado un vector o un covector actuando como elementos duales baste especificar sus componentes para conocer su comportamiento como un operador. Lo mismo debe ocurrir con los tensores al ser una generalización de estas dos funciones, debe construirse entonces un espacio vectorial de tensores tal que permita conocer una base y por tal el isomorfismo con un espacio matricial. Para realizar lo cual se hace necesario definir una operación sobre estos; si T es un tensor de rango $\binom{m}{n}$ y S lo es de rango $\binom{k}{l}$ entonces el *producto tensorial* $T \otimes S$ se define como

$$T \otimes S(w_1, \dots, w_m, w_{m+1}, \dots, w_{m+k}; v^1, \dots, v^n, v^{n+1}, \dots, v^{n+l}) = T(w_1, \dots, w_m; v^1, \dots, v^n) S(w_{m+1}, \dots, w_{m+k}; v^{n+1}, \dots, v^{n+l}). \quad (1.16)$$

De forma que si e_1, \dots, e_m es base de un espacio de vectores y $\theta^1, \dots, \theta^n$ lo es de un espacio de covectores se tendrá entonces que

$$e_{a_1} \otimes \dots \otimes e_{a_m} \otimes \theta^{b_1} \otimes \dots \otimes \theta^{b_n}, \quad (1.17)$$

son elementos que forman una base del espacio vectorial de tensores de rango $\binom{n}{m}$ con las operaciones usuales bajo \mathbb{R} .

Llegados a este punto podemos dar el ejemplo de tensor de rango $\binom{0}{2}$ del que se hará más uso. Para un espacio vectorial $T_p M$, se le llama *métrica o tensor métrico* al operador $g : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ que cumpla con ser simétrico (así como su representación matricial $g_{\mu\nu}$), exista una función inversa, $g' : T_p^* M \times T_p^* M \rightarrow \mathbb{R}$, un tensor de rango $\binom{2}{0}$ tal que

$$g_{\mu\nu} g'^{\nu\lambda} = \delta_\mu^\lambda \quad (1.18)$$

y por último se debe satisfacer la no degeneración, es decir, si $g(v, u) = 0 \forall u \in T_p M \Rightarrow v = 0$.

Razón por la cuál, al llamar a $\eta_{\mu\nu}$ “métrica de Minkowski” la acuñación no fue desacertada una vez entendida la relación establecida con sus componentes.

⁵Dado un espacio vectorial V sobre el campo K de dimensión n ; una base de V está formada por los elementos v^1, \dots, v^n si estos son, linealmente independientes, $0 = \alpha_i v^i \Rightarrow \alpha_i = 0 \in K$, y generan al espacio, $\exists \beta^i \in K : \forall v \in V, v = \beta_i v^i$.

Ha llegado la hora de emprender nuestra escalinata descendente para cumplir con lo previsto y ver el porqué la métrica se convierte en elemento esencial en la descripción del espacio-tiempo, asumiendo la discusión de resultados centrales. Una explicación de índole más basta podrá verse en [4] tomando en contemplación una visión física, por otro lado, [5] es un tratado riguroso que puede tenerse en cuenta.

Según lo visto, sobre una variedad somos capaces de realizar gran serie de acciones pero aún no podemos comparar dos elementos de espacios vectoriales anclados a puntos distintos de la variedad, grave agonía, pues sin lo cual no tenemos en mente como generalizar a este espacio la noción de derivación. No hay que volver atrás tantas páginas para recordar que ya hemos hecho pasar una curva sobre la variedad tal que tome a un punto específico de la misma en su trazo, bien podemos hacer lo mismo con dos puntos de la variedad. De esta forma, si $P, P' \in M$ dos puntos con sus respectivos $T_P M$ y $T_{P'} M$ espacios tangentes, se hace pasar una curva sobre la variedad tal que contemple a ambos puntos, hecho esto, podemos *transportar* cualquier vector anclado en P sobre la curva de forma perpendicular a la normal hasta llegar a P' y obtener un vector anclado en este último punto de forma que es realizable comparar vectores de $T_P M$ con aquellos de $T_{P'} M$, pues el vector transportado viene a resultar un elemento más de $T_{P'} M$. Con este método ya es posible comparar vectores tangentes de la variedad que se encuentren lo suficientemente cerca en una curva que los conecte, es decir, estamos en posibilidad de establecer un análogo a la derivación que conocemos.

Pero como lo fácil carece de cierta diversión, habremos de notar que transportar vectores acarrea sus propios problemas. Observemos la Fig.(1.2), en ella hemos colocado dos variedades, un plano y una esfera, y a su vez, un vector tangente, v , sobre ellas. Si el trazo punteado representa una curva cerrada sobre la variedad tal que transportamos (en sentido de las manecillas del reloj) a v sobre la misma, nos daremos cuenta que sobre el plano el vector no cambia su orientación y al volver al punto inicial se superpone a v . Situación que no ocurre en la esfera, pues al transportar a v sobre la curva cerrada y volver al punto de partida obtenemos un vector distinto v' .

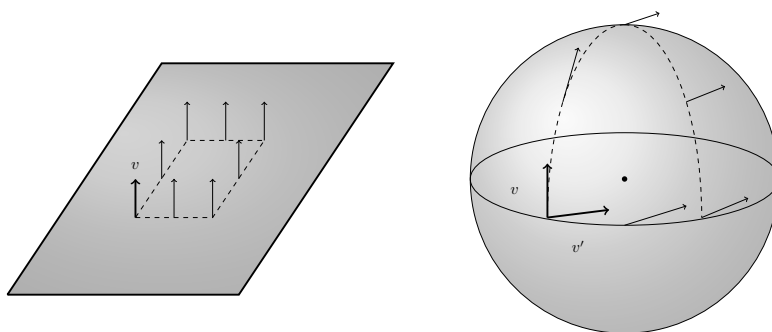


Figura 1.2: Se muestran dos variedades y el transporte del vector v sobre una curva en las mismas.

Con este sencillo ejemplo notamos que el transporte que pretendamos hacer depende de la curva y sobre todo de la variedad con la que se este trabajando, gesta que deberá ser considerada al definir nuestra función derivación. Como la derivada debe reducirse a la usual cuando la variedad sea plana y cuando no, dado que los elementos a comparar son infinitesimalmente cercanos, la corrección a efectuar debe ser lineal; podemos escribir

$$\nabla_{\mu}v^{\nu} = \partial_{\mu}v^{\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}v^{\lambda} \quad (1.19)$$

como postulación de la *derivada covariante* de un vector. Donde $\Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}$ es la corrección de la que se habla, una matriz para cada μ , conocidas como *coeficientes de conexión*. Las propiedades de dichos coeficientes son determinadas a partir de lo que se busca satisfaga la derivada covariante, tales como la linealidad y la regla de Leibniz con el producto tensorial, esto pues también se quiere que $\nabla_{\mu}v^{\nu}$ forme un tensor de rango $\binom{1}{1}$. En el mismo tenor puede mostrarse que la derivada covariante de un covector es, [6]

$$\nabla_{\mu}w_{\nu} = \partial_{\mu}w_{\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}w_{\lambda}, \quad (1.20)$$

tras suponer una situación análoga. Paso subsiguiente es ver que la derivada covariante de un tensor arbitrario viene dada por

$$\begin{aligned} \nabla_{\lambda}T^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m} &= \partial_{\lambda}T^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m} \\ &+ \Gamma_{\lambda\sigma}^{\mu_1}T^{\sigma \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m} + \dots + \Gamma_{\lambda\sigma}^{\mu_n}T^{\mu_1 \dots \sigma}_{\nu_1 \dots \nu_m} \\ &- \Gamma_{\lambda\nu_1}^{\sigma}T^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\sigma \dots \nu_m} - \dots - \Gamma_{\lambda\nu_m}^{\sigma}T^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \sigma}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Observar que los coeficientes de conexión no son tensores por no obedecer la regla de transformación (1.15), pero sí pueden obtenerse tensores a partir de ellos, por ejemplo $\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} - \tilde{\Gamma}_{\nu\lambda}^{\mu}$ ó como el *tensor de torsión*:

$$\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} - \Gamma_{\lambda\nu}^{\mu} \equiv 2\Gamma_{[\nu\lambda]}^{\mu} \quad (1.22)$$

Para nuestros fines podemos centrar nuestra atención en variedades con una métrica acoplada, lo que hace referencia a los coeficiente de conexión en dos sentidos. El primero, la superficie carece de torsión, y el segundo, la métrica es compatible, es decir

$$\nabla_{\lambda}g_{\mu\nu} = 0, \quad (1.23)$$

de esta última propiedad se deduce que

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma} (\partial_{\mu}g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}). \quad (1.24)$$

Cuando ambos requisitos se cumplen es común denominar entonces a los coeficientes de conexión como *símbolos de Christoffel*.

La posibilidad de transportar vectores en una variedad nos proporciona la noción de comparar y derivar, como estas operaciones dependen de la variedad sobre la que estén montados proveen la posibilidad de estudiar la variedad a partir de ellos. Retomando nuestras curvas cerradas sobre una variedad, y tomando un paralelogramo lo suficientemente pequeño (infinitesimal) somos capaces de transportar un vector

hasta volver al punto de inicio. La transformación lineal que sufre el vector por esta acción debe poder ser representada por un tensor antisimétrico (pues recorrer el sentido inverso de lo que se acaba se hace devolviendo al vector original) con acción de los dos vectores generadores del paralelogramo. Dadas las debidas consideraciones y cálculos (capítulo 6 de [7]) el tensor que da cuenta de esto es

$$R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}. \quad (1.25)$$

Conocido como *tensor de curvatura o tensor de Riemann*. A partir del cual se obtienen dos nuevos tensores, el primero de ellos, el *tensor de Ricci*

$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu} \quad (1.26)$$

del que se sigue, mediante el uso de la métrica, el *escalar de Ricci*

$$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (1.27)$$

con una propiedad interesante:

$$\nabla^{\nu} R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \nabla_{\mu} R. \quad (1.28)$$

Como su nombre indica, el tensor de curvatura otorga la generalización en variedades del concepto de curvatura definido por Gauss para las superficies geométricas. Fue una introducción precaria, pero baste decir que este tensor representa una caracterización de la variedad con la que se está trabajando. Y he ahí su relevancia al estudiar el universo como lo hace la relatividad general, suponiendo al espacio-tiempo como una variedad matemática.

Aceptada esta condición se procede a discutir la física que se sucede en este universo curvo, y establecer las ecuaciones que describan la relación que tiene la materia y la gravedad con el medio. Se deducirán las ecuaciones de campo a partir del enfoque con el que se trata todo este trabajo, partiendo de un principio de acción, permitiendo proceder de forma natural en próximas secciones. El seguimiento puede consultarse en el capítulo 4 de [4].

Dadas las repercusiones de la relatividad especial a la física, muchos conceptos de los que se partía para elaborar el grueso del conocimiento tuvieron que ser reformulados, uno de ellos fue el *principio de equivalencia de Galileo*, en el cual los efectos de encontrarse inmerso en un campo gravitatorio homogéneo son indistinguibles de aquellos que se suceden en un medio que se desplace con aceleración uniforme. El elemento destacado en este principio es la masa de la partícula ubicada en ambos escenarios, sin embargo, para la relatividad especial el concepto carece de universalidad al tratarse de una manifestación más de la energía, de aquí que se busque entonces replantear la indistinguibilidad de los fenómenos físicos en un campo gravitatorio y el movimiento acelerado prescindiendo del concepto clásico. Nace entonces el *principio de equivalencia de Einstein*, para el cual, al considerar regiones lo suficientemente pequeñas en el espacio-tiempo, las leyes físicas se reducen a aquellas descritas por la relatividad especial donde se carece de gravedad. Planteado de dicha

manera se establece una conexión intuitiva con lo que se ha venido hablando, donde para una variedad matemática en todo punto existe una región lo suficientemente pequeña alrededor que puede considerarse plana, geometría en la que se describe la relatividad especial. Incorporar los efectos gravitacionales que observamos corre a cargo, entonces, de la geometría no local del espacio-tiempo.

Enfocándonos en una descripción Lagrangiana de la teoría, la cantidad fundamental que hace presencia es la *acción*

$$S = \int d^4x \mathcal{L} \quad (1.29)$$

una intergral sobre todo el espacio-tiempo de la *densidad Lagrangiana* \mathcal{L} . Esta densidad Lagrangiana se pide sea una densidad tensorial de rango $\binom{0}{0}$, escalar, de peso $\frac{1}{2}$ y dependiente de componentes tensoriales junto con sus derivadas covariantes. El peso del que se habla otorga una descripción de la densidad tal que

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\mathcal{L}' \quad (1.30)$$

siendo $g = \det(g_{\mu\nu})$.

Haremos aquí una breve distinción que nos permite la teoría pues dividiremos nuestra acción en dos términos independientes

$$S = \frac{1}{8\pi G}S_V + S_M \quad (1.31)$$

tal que S_V sea construida a partir de un desarrollo del vacío, permitiendo tomar una descripción únicamente geométrica dependiente de la métrica y sus derivadas. Observar que la introducción de la constante $(8\pi G)^{-1}$ se coloca conociendo de antemano la convergencia al límite Newtoniano en el régimen independiente del tiempo y de baja velocidad. Mientras que S_M estará relacionada con los efectos resultantes de incorporar materia a la acción.

Dado el requisito de construir una cantidad escalar proveniente de derivadas de la métrica tal que, al trabajar con una métrica compatible, la dependencia de primeras derivadas queda descartada, el paso en complejidad a considerar es una dependencia de segundas derivadas de la métrica. El escalar de Ricci se alza como buen prospecto respaldado por el hecho de ser el único escalar independiente que se puede formar a partir del tensor de curvatura⁶. De esta manera se postula como escalar acompañante en S_M al escalar de Ricci de forma que

$$S_V = \int d^4x \sqrt{-g}R. \quad (1.32)$$

Como el escalar de Ricci es formado a partir de la contracción del tensor de Ricci con la métrica, $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, la variación sobre S_V es

$$\delta S_V = \int d^4x [\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} + \sqrt{-g}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + R\delta\sqrt{-g}]. \quad (1.33)$$

⁶De hecho se puede elaborar aún más al respecto, pues en general, cualquier tensor no trivial que se forme a partir de primeras y segundas derivadas de la métrica puede ser escrito a partir de la métrica y el tensor de Riemann.

Procedamos a estudiar estos tres sumandos. Para el primer sumando requerimos encontrar la variación del tensor de Ricci que como recordamos depende de los símbolos de Christoffel, para los cuales una variación arbitraria es

$$\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} \rightarrow \tilde{\Gamma}_{\nu\mu}^{\lambda} = \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} + \delta\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} \Rightarrow \delta\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} = \tilde{\Gamma}_{\nu\mu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}, \quad (1.34)$$

un tensor de rango $\binom{2}{1}$ para el que una derivada covariante está dada por

$$\nabla_{\rho} (\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}) = \partial_{\rho}\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} + \Gamma_{\rho\alpha}^{\lambda}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} - \Gamma_{\rho\nu}^{\alpha}\delta\Gamma_{\alpha\mu}^{\lambda} - \Gamma_{\rho\mu}^{\alpha}\delta\Gamma_{\nu\alpha}^{\lambda}, \quad (1.35)$$

expresión de la cual podemos extraer la variación del tensor de Ricci pues

$$\begin{aligned} \delta R_{\mu\nu} &= \delta R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu} = \delta (\partial_{\lambda}\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} + \Gamma_{\lambda\alpha}^{\lambda}\Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} - \partial_{\nu}\Gamma_{\lambda\mu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\alpha}^{\lambda}\Gamma_{\lambda\mu}^{\alpha}) \\ &= \partial_{\lambda}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} + \Gamma_{\lambda\alpha}^{\lambda}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} + \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha}\delta\Gamma_{\lambda\alpha}^{\lambda} - \partial_{\nu}\delta\Gamma_{\lambda\mu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\alpha}^{\lambda}\delta\Gamma_{\lambda\mu}^{\alpha} - \Gamma_{\lambda\mu}^{\alpha}\delta\Gamma_{\nu\alpha}^{\lambda} \\ &= (\partial_{\lambda}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} + \Gamma_{\lambda\alpha}^{\lambda}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} - \Gamma_{\lambda\mu}^{\alpha}\delta\Gamma_{\nu\alpha}^{\lambda} - \Gamma_{\lambda\nu}^{\alpha}\delta\Gamma_{\alpha\mu}^{\lambda}) \\ &\quad - (\partial_{\nu}\delta\Gamma_{\lambda\mu}^{\lambda} + \Gamma_{\nu\alpha}^{\lambda}\delta\Gamma_{\lambda\mu}^{\alpha} - \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha}\delta\Gamma_{\lambda\alpha}^{\lambda} - \Gamma_{\lambda\nu}^{\alpha}\delta\Gamma_{\alpha\mu}^{\lambda}) \\ &= \nabla_{\lambda}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} - \nabla_{\nu}\delta\Gamma_{\lambda\mu}^{\lambda}. \end{aligned} \quad (1.36)$$

De modo que el aporte a la integral de la variación de la acción por parte del primer sumando es

$$\int d^4x \sqrt{-g}g^{\mu\nu} (\nabla_{\lambda}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} - \nabla_{\nu}\delta\Gamma_{\lambda\mu}^{\lambda}) = \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_{\alpha} (g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - g^{\mu\alpha}\delta\Gamma_{\lambda\mu}^{\lambda}). \quad (1.37)$$

Haciendo uso de tener una métrica compatible es lo que nos permite establecer esta última igualdad. Buscar la cancelación de este término viene de la mano con solicitar que tanto la variación $\delta g_{\mu\nu}$ como $\delta(\partial_{\alpha}g_{\mu\nu})$ se desvanezcan en la frontera de la variedad, restricción que si bien puede hacerse, condiciona en demasía la variedad en la que se está trabajando. Por esta razón es que se construye una modificación a la acción como lo propuesto por Gibbons-Hawking-York [8, 9], tal que cancele las contribuciones ligadas a $\delta(\partial_{\alpha}g_{\mu\nu})$ y pueda solo solicitarse que $\delta g_{\mu\nu} = 0$ en la frontera de la variedad. La acción sería entonces

$$S'_V = \int d^4x \sqrt{-g}R + 2 \oint d^3\vec{x} \sqrt{|h|}h^{\alpha\beta} (\partial_{\alpha}n_{\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}n_{\mu}) \quad (1.38)$$

donde $h_{\mu\nu}$ es la métrica inducida por $g_{\mu\nu}$ sobre la frontera, y n^{μ} el vector ortogonal a la misma. Un análisis propio de esta modificación puede revisarse en [10], baste ver aquí brevemente el proceso de cancelación:

$$\begin{aligned} &\int d^4x \sqrt{-g}\nabla_{\alpha} (g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - g^{\mu\alpha}\delta\Gamma_{\lambda\mu}^{\lambda}) + 2 \oint d^3\vec{x} \sqrt{|h|}\delta (h^{\alpha\beta}(\partial_{\alpha}n_{\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}n_{\mu})) \\ &= \oint d^3\vec{x} \sqrt{|h|} (h^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - h^{\mu\alpha}\delta\Gamma_{\lambda\mu}^{\lambda}) n_{\alpha} + 2 \oint d^3\vec{x} \sqrt{|h|} (-h^{\alpha\beta}n_{\mu}\delta\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}) \\ &= - \oint d^3\vec{x} \sqrt{|h|}\frac{1}{2} (h^{\alpha\gamma}h^{\mu\nu}\partial_{\sigma}\delta g_{\mu\nu} + h^{\mu\alpha}h^{\lambda\sigma}\partial_{\mu}\delta g_{\sigma\lambda}) n_{\alpha} \\ &\quad + \oint d^3\vec{x} \sqrt{|h|}h^{\alpha\beta}h^{\mu\sigma}\partial_{\sigma}\delta g_{\alpha\beta}n_{\mu} \end{aligned}$$

$$= - \oint d^3\vec{x} \sqrt{|h|} h^{\lambda\sigma} n^\mu \partial_\mu \delta g_{\lambda\sigma} + \oint d^3\vec{x} \sqrt{|h|} h^{\lambda\sigma} n^\mu \partial_\mu \delta g_{\lambda\sigma} = 0. \quad (1.39)$$

Cálculos ligados a que tanto la variación de la derivada tangencial, $h^{\alpha\beta} \partial_\alpha \delta g_{\mu\beta}$, como la del vector tangente se desvanecen en la frontera al pedir que $\delta g_{\mu\nu}$ así lo haga.

Dado lo cual pasamos a preocuparnos por los dos sumandos restantes de la Ec.(1.33). Para el tercer término de la integral, por la comodidad del desarrollo vamos a ponerlo en función de $g^{-1} = \det(g^{\mu\nu}) = 1/g$, recordando que $g^{\mu\nu}$ constituye la matriz inversa de la métrica:

$$\delta\sqrt{-g} = \delta\sqrt{-\det(g_{\mu\nu})} = \delta\sqrt{-(g^{-1})^{-1}} = -\frac{1}{2} \frac{\delta(-g^{-1})}{(-g^{-1})^{3/2}}. \quad (1.40)$$

Por medio de un resultado conocido en el álgebra de matrices que reza que para cualquier matriz A se sigue, $\text{Tr}(\ln A) = \ln(\det A)$, cuya variación permite obtener que $\text{Tr}(A^{-1}\delta A) = \delta(\det A)/\det A$; la expresión anterior pasa a ser

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2(-g^{-1})^{3/2}} [g^{-1} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}] = -\frac{1}{2} (-g^{-1})^{-1/2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (1.41)$$

Sustituyendo los resultados registrados arriba en la variación por parte de S'_V en la acción de la Ec.(1.38) es

$$\delta S'_V = \int d^4x \sqrt{-g} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu}. \quad (1.42)$$

Uno de los últimos pasos para dar la estocada final es hacer la identificación de un tensor de energía-momento simétrico con la variación de S_M respecto a la métrica de forma que:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = -T_{\mu\nu}. \quad (1.43)$$

Esta identificación no es única dado que existen formas independientes de definir un tensor conservativo, sin embargo la definición tomada aquí posee ciertas virtudes que hacen considerarlo en primera instancia, como su simetría manifiesta y su invariancia de norma.

Tomando la variación respecto a la métrica de la Ec.(1.31) igualada a cero, por principio de mínima acción, y auxiliándose de los análisis ya expuestos se obtiene

$$0 = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{8\pi G} \left[\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_V}{\delta g^{\mu\nu}} \right] + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{8\pi G} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right] - T_{\mu\nu}, \quad (1.44)$$

reescribiendo,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (1.45)$$

Ecuaciones que llevan el nombre de *ecuaciones de campo de la relatividad general* o *ecuaciones de campo de Einstein*, que conforman un abanico de dieciséis ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden para la métrica, donde por la simetría involucrada son diez las ecuaciones independientes.

La modificación que pueden sufrir estas ecuaciones bajo la introducción de términos adicionales en la acción está en constante estudio, caso de la famosa constante cosmológica.

1.2. Teoría cuántica de campos en un fondo plano

Es conveniente empezar nuestro estudio de una teoría cuántica de campos mediante la introducción de una visión clásica. Llamamos *campo* a una función que puede ser evaluada en cada punto del espacio-tiempo, $\varphi(t, \vec{x})$. Es fácil observar que dicho campo posee un número infinito y no numerable de grados de libertad, pues a cada punto del espacio-tiempo se le asocia al menos uno. Ejemplos de dichos campos son las funciones que describen la temperatura o la presión del aire.

La relevancia en escoger el método ya expuesto en la deducción de las ecuaciones de campo de la relatividad general quedará un tanto más clara al decir que un enfoque de estudio en esta teoría es una descripción Lagrangiana de la dinámica donde la acción vuelve a hacer acto de presencia. La acción pone su dependencia en el campo φ a partir de la densidad Lagrangiana

$$S[\varphi] \equiv \int d^4x \mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x), \dots, \partial_{\mu_1} \cdots \partial_{\mu_D} \varphi(x)). \quad (1.46)$$

Dicha relación con las derivadas de φ está vinculada con el interés que se tiene por estudios locales, donde la evolución del campo en un punto dependa solo de la interacción con los puntos cercanos al mismo, requisito que imposibilita una acción a distancia.

Si el número de derivaciones es nulo la evolución del campo sería independiente para cada punto, encontrándose una teoría en extremo local. El siguiente paso en complejidad es considerar una derivación del campo, el caso más común, pues conduce a ecuaciones de movimiento con segundas derivadas. Con lo que la acción queda dada por

$$S[\varphi] = \int d^4x \mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x)). \quad (1.47)$$

En idéntica forma a como se deducen las ecuaciones de movimiento para un sistema mecánico, las ecuaciones de movimiento para el campo se obtienen a partir del principio de mínima acción. Es decir, al pedir que $\delta S = 0$ y un seguimiento sencillo se registra

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right], \quad (1.48)$$

conocidas bajo el nombre de *ecuaciones de Euler-Lagrange*.

Estas son las herramientas del formalismo Lagrangiano a estudiarse aquí, puesto que la conexión explícita entre el formalismo Lagrangiano y la teoría cuántica de campos corre a cargo de la integral de trayectoria; en nuestro caso nos centraremos en estudiar el proceso de cuantización canónica en donde el uso del formalismo Hamiltoniano toma peso. Este y otros enfoques se encuentran en la literatura, ejemplo de ellos son los recursos [11, 12].

Recordemos que, dado un sistema discreto con variables canónicas q_i, p_i y un Hamiltoniano $H(q_i, p_i)$ se tienen las ecuaciones de movimiento:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (1.49)$$

Podemos calcular la derivada total de cualquier función en el espacio fase, $f(t, q_i(t), p_i(t))$, en términos del Hamiltoniano, donde

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right). \quad (1.50)$$

Definimos la acción de los paréntesis de Poisson sobre dos funciones del espacio fase como

$$\{f, g\} \equiv \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right), \quad (1.51)$$

es entonces que nuestra expresión (1.50) se reduce a

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}. \quad (1.52)$$

Observar que mediante nuestra definición de los paréntesis de Poisson encontramos que $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$ y que las ecuaciones de Hamilton son $\dot{q}_i = \{q_i, H\}$ y $\dot{p}_i = \{p_i, H\}$.

Los paréntesis de Poisson resultan ser antisimétricos y satisfacen la identidad de Jacobi:

$$\{f\{g, h\}\} + \{h\{f, g\}\} + \{g\{h, f\}\} = 0. \quad (1.53)$$

Y la principal importancia de su introducción radica en el hecho de que el procedimiento seguido por la cuantización canónica de un sistema es el reemplazar los paréntesis de Poisson entre variables clásicas por el conmutador de operadores cuánticos correspondientes

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar\{A, B\}. \quad (1.54)$$

Donde se postula la relación básica $[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$ y los demás conmutadores se deducen a partir de este hecho.

Definimos el momento conjugado del campo $\varphi(x)$ como

$$\pi(x) = \frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}(x)}, \quad (1.55)$$

y la densidad Hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \pi(x)\dot{\varphi}(x) - \mathcal{L}(x), \quad (1.56)$$

tal que el Hamiltoniano es simplemente

$$H(t) = \int d^3\vec{x} \mathcal{H}(\varphi(x), \vec{\nabla}\varphi(x), \pi(x)). \quad (1.57)$$

Procedamos a calcular la variación del Lagrangiano, $\int d^3\vec{x} \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi)$, esto con la finalidad de establecer el recurso análogo a las ecuaciones de Euler-Lagrange desde un enfoque variacional, resultado necesario en algunos cálculos. Por un lado

$$\delta L = \int d^3\vec{x} \left[\frac{\delta L}{\delta\varphi} \delta\varphi + \frac{\delta L}{\delta\dot{\varphi}} \delta\dot{\varphi} \right]. \quad (1.58)$$

Mientras que, considerando los argumentos dependientes de la densidad Lagrangiana se sigue

$$\delta L = \int d^3\vec{x} \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} \delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}\varphi)} \delta\vec{\nabla}\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} \delta\dot{\varphi} \right], \quad (1.59)$$

tal que para una frontera adecuada se cumple que

$$0 = \int d^3\vec{x} \vec{\nabla} \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}\varphi)} \delta\varphi \right] = \int d^3\vec{x} \vec{\nabla} \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}\varphi)} \right] \delta\varphi + \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}\varphi)} \vec{\nabla} \delta\varphi \right]. \quad (1.60)$$

Con lo cual (y utilizando que $\vec{\nabla}\delta = \delta\vec{\nabla}$) la Ec.(1.59) se reduce a

$$\delta L = \int d^3\vec{x} \left[\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \vec{\nabla} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}\varphi)} \right) \delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} \delta\dot{\varphi} \right]. \quad (1.61)$$

Comparando la Ec.(1.58) y la Ec.(1.61) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta\varphi} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \vec{\nabla} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}\varphi)} \\ \frac{\delta L}{\delta\dot{\varphi}} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}. \end{aligned} \quad (1.62)$$

Así el momento conjugado canónico se reescribe como

$$\pi(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}(x)}. \quad (1.63)$$

Y, mediante el uso de las ecuaciones de Euler-Lagrange en su forma variacional, su derivada temporal es

$$\dot{\pi}(x) = \partial_t \left[\frac{\delta L}{\delta\dot{\varphi}(x)} \right] = \frac{\delta L}{\delta\varphi(x)}. \quad (1.64)$$

En el mismo tenor calculamos la variación del Hamiltoniano

$$\begin{aligned} \delta H &= \left[\int d^3\vec{x} (\pi\delta\dot{\varphi} + \dot{\varphi}\delta\pi) \right] - \delta L \\ &= \int d^3\vec{x} (\pi\delta\dot{\varphi} + \dot{\varphi}\delta\pi) - \int d^3\vec{x} \left[\frac{\delta L}{\delta\varphi} \delta\varphi + \frac{\delta L}{\delta\dot{\varphi}} \delta\dot{\varphi} \right] \\ &= \int d^3\vec{x} (\pi\delta\dot{\varphi} + \dot{\varphi}\delta\pi) - \int d^3\vec{x} (\dot{\pi}\delta\varphi + \pi\delta\dot{\varphi}) \\ &= \int d^3\vec{x} (\dot{\varphi}\delta\pi - \dot{\pi}\delta\varphi). \end{aligned} \quad (1.65)$$

Por definición

$$\delta H = \int d^3\vec{x} \left(\frac{\delta H}{\delta\varphi} \delta\varphi + \frac{\delta H}{\delta\pi} \delta\pi \right). \quad (1.66)$$

Al comparar ambas expresiones y auxiliándonos de un proceso similar al elaborado en la variación del Lagrangiano encontramos que las ecuaciones de Hamilton (equivalentes a Euler-Lagrange) son ahora:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(x) &= \frac{\delta H}{\delta\pi(x)} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi(x)} \\ \dot{\pi}(x) &= -\frac{\delta H}{\delta\varphi(x)} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\varphi(x)} + \vec{\nabla} \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\vec{\nabla}\varphi)}. \end{aligned} \quad (1.67)$$

1.2.1. Cuantización del campo escalar libre en un fondo plano

Como se había mencionado, en mecánica cuántica, el proceso de cuantización canónica toma como punto de partida el formalismo Hamiltoniano de la dinámica clásica y lo adapta a los requisitos de una teoría cuántica. En la teoría de campos la idea se adecua para el campo $\varphi(x)$ y su momento conjugado $\pi(x)$, al promoverlos a operadores mediante relaciones de conmutación. Se postulan entonces las siguientes reglas de conmutación:

$$\begin{aligned} [\hat{\varphi}(t, \vec{x}), \hat{\varphi}(t, \vec{x}')] &= 0 = [\hat{\pi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{x}')] \\ [\hat{\varphi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{x}')] &= i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'). \end{aligned} \quad (1.68)$$

Observar que se ha perdido la información referente a la invarianza de Lorentz dada la distinción que se hace entre el espacio y el tiempo. Es decir, se está trabajando en el cuadro de Schrödinger donde los operadores $\hat{\varphi}(\vec{x})$ y $\hat{\pi}(\vec{x})$ no dependen del tiempo, solo del espacio.

En la mecánica cuántica la información usualmente requerida en la descripción de un sistema es el espectro del Hamiltoniano H . Lastimosamente en la teoría de campos esta empresa se presenta sumamente difícil, una de las razones para que esto sea así es la infinidad de grados de libertad. Sin embargo para teorías que describen la física de campos libres se puede describir la dinámica del sistema tal que cada grado de libertad evoluciona independientemente.

Empezaremos realizando nuestro estudio relativo a la cuantización canónica del sistema de campos mediante la exposición del campo más sencillo; un campo escalar, real y libre $\varphi(x)$.

El proceso de cuantización inicia su trayecto con la construcción del Lagrangiano con los requisitos ya estipulados en la sección anterior. Observar que para un fondo plano donde la métrica que describe la variedad de estudio es la métrica de Minkowski, $\eta_{\mu\nu}$, la Ec.(1.30) deja de lado el factor $\sqrt{-g}$ pues $\sqrt{-\eta} = 1$. Permitiendo partir de la construcción escalar en función del campo y sus primeras derivadas, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi)$, la construcción más general que se puede hacer con estos requisitos es

$$\mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu\varphi(x)) = \frac{1}{2} \partial_\mu\varphi(x) \partial^\mu\varphi(x) - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2(x), \quad (1.69)$$

conocido como *Lagrangiano de Klein-Gordon*.

Mediante el uso de la Ec.(1.48), deducimos que

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \partial_\mu \left[\partial_t \varphi - \vec{\nabla} \varphi \right] + m^2 \varphi \\ &\Rightarrow \partial_\mu \partial^\mu \varphi + m^2 \varphi = 0, \end{aligned} \quad (1.70)$$

relación que toma por nombre *ecuación de Klein-Gordon*.

Para $m = 0$, esta ecuación se reduce a una ecuación de onda con velocidad de propagación igual a 1. Sin embargo cuando $m \neq 0$ también describe la propagación de ondas en el campo y para visualizar este hecho es conveniente trabajar en el espacio de momentos. Mediante una transformada de Fourier obtendremos lo siguiente.

$$\varphi(t, \vec{p}) = \int d^3 \vec{x} e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \varphi(t, \vec{x}) \iff \varphi(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \varphi(t, \vec{p}). \quad (1.71)$$

Por ser $\varphi(t, x)$ real, se cumple que $\varphi^*(t, \vec{p}) = \varphi(t, -\vec{p})$. Mediante esta transformación la ecuación de Klein-Gordon toma la forma

$$\begin{aligned} 0 &= (\partial_t^2 - \vec{\nabla}^2 + m^2) \varphi(t, \vec{x}) = (\partial_t^2 - \vec{\nabla}^2 + m^2) \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \varphi(t, \vec{p}) \\ &= \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} (\partial_t^2 + \vec{p}^2 + m^2) \varphi(t, \vec{p}) \Rightarrow (\partial_t^2 + \vec{p}^2 + m^2) \varphi(t, \vec{p}) = 0. \end{aligned} \quad (1.72)$$

La ecuación de movimiento en el espacio de momentos es ahora (al recurrir a la expresión $m^2 = P^\mu \eta_{\mu\nu} P^\nu$, con $P^\mu = (E_{\vec{p}}, \vec{p})$):

$$\partial_t^2 \varphi(t, \vec{p}) = -E_{\vec{p}}^2 \varphi(t, \vec{p}). \quad (1.73)$$

Que es la ecuación para un oscilador armónico de frecuencia $\omega = E_{\vec{p}}$.

Se tiene entonces que los modos de Fourier $\varphi(t, \vec{p})$ son los modos normales del campo en el espacio de posiciones $\varphi(t, \vec{x})$, es decir, se poseen patrones colectivos de movimiento sin conexión entre sí, pues cada uno tiene solamente una dependencia temporal del oscilador, y donde el campo puede ser expresado como una superposición de modos normales. Un campo libre se compone de una infinidad de osciladores armónicos independientes.

El momento conjugado canónico en este caso es

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \varphi)} = \frac{\partial}{\partial (\partial_t \varphi)} \left[\frac{1}{2} (\partial_t^2 \varphi - \vec{\nabla}^2 \varphi) - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \right] = \partial_t \varphi(x) \equiv \dot{\varphi}(x). \quad (1.74)$$

Y mediante la Ec. (1.56), encontramos que

$$\begin{aligned} H(\varphi(t), \pi(t)) &= \int d^3 \vec{x} [\pi(x) \dot{\varphi}(x) - \mathcal{L}(x)] \\ &= \int d^3 \vec{x} \frac{1}{2} [\pi^2 + \vec{\nabla}^2 \varphi + m^2 \varphi^2]. \end{aligned} \quad (1.75)$$

Para realizar el proceso de cuantización, la postulación esencial son las relaciones de conmutación (1.68) para un campo:

$$\begin{aligned} [\hat{\varphi}(t, \vec{x}), \hat{\varphi}(t, \vec{x}')] &= 0 = [\hat{\pi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{x}')] \\ [\hat{\varphi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{x}')] &= i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'). \end{aligned} \quad (1.76)$$

Dada esta promoción a operadores, se debe tener en cuenta la ecuación de Heisenberg para el caso continuo

$$i[\hat{H}, \hat{O}] = \partial_t \hat{O}(t). \quad (1.77)$$

Implica en particular, después de una serie de cálculos

$$\partial_t \hat{\varphi}(t, \vec{x}) = \hat{\pi}(t, \vec{x}). \quad (1.78)$$

Igualmente

$$\partial_t \hat{\pi}(t, \vec{x}) = \vec{\nabla}^2 \hat{\varphi}(t, \vec{x}) - m^2 \hat{\varphi}(t, \vec{x}). \quad (1.79)$$

Que son las ecuaciones de Hamilton, y aún más, la Ec. (1.79) se reduce a

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_t \hat{\pi} - \vec{\nabla}^2 \hat{\varphi} + m^2 \hat{\varphi} = \partial_t^2 \hat{\varphi} - \vec{\nabla}^2 \hat{\varphi} + m^2 \hat{\varphi} \\ &\Rightarrow (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \hat{\varphi}(t, \vec{x}) = 0. \end{aligned} \quad (1.80)$$

Es decir, el operador de campo $\hat{\varphi}$ obedece a su vez la ecuación de Klein-Gordon, y ya sabemos que

$$\hat{\varphi}(t, \vec{p}) = \int d^3 \vec{x} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \hat{\varphi}(t, \vec{x}), \quad (1.81)$$

describe a un oscilador armónico.

Al igual a como sucede con el oscilador armónico en la teoría cuántica usual, es conveniente poner al operador de campo, junto con su variable conjugada, $\hat{\pi}(t, \vec{p}) = \int d^3 \vec{x} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \hat{\pi}(t, \vec{x})$, en función de operadores de creación y aniquilación.

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(0, \vec{x}) &= \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} [\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{-\vec{p}}^\dagger] \\ \hat{\pi}(0, \vec{x}) &= \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} (-i) \sqrt{\frac{E_{\vec{p}}}{2}} [\hat{a}_{\vec{p}} - \hat{a}_{-\vec{p}}^\dagger]. \end{aligned} \quad (1.82)$$

Y dado que se tiene que cumplir la Ec.(1.78), podemos generalizar para un tiempo t y cambiando $-\vec{p} \rightarrow \vec{p}$ en los segundos términos, obtenemos que

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(t, \vec{x}) &= \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} [\hat{a}_{\vec{p}} e^{-ip\cdot x} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{ip\cdot x}] \\ \hat{\pi}(t, \vec{x}) &= \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{E_{\vec{p}}}{2}} [\hat{a}_{\vec{p}} e^{-ip\cdot x} - \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{ip\cdot x}]. \end{aligned} \quad (1.83)$$

Trabajando en forma similar, mediante el uso de la conmutación básica (1.76)

$$\begin{aligned}
i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') &= [\hat{\varphi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{x}')] \\
&= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{d^3\vec{p}'}{(2\pi)^3} \frac{i}{2} \sqrt{\frac{E_{\vec{p}'}}{E_{\vec{p}}}} \left[-[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}] e^{-i(E_{\vec{p}}+E_{\vec{p}'})t+i\vec{p}\cdot\vec{x}+i\vec{p}'\cdot\vec{x}} \right. \\
&\quad + [\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger] e^{-i(E_{\vec{p}}-E_{\vec{p}'})t+i\vec{p}\cdot\vec{x}-i\vec{p}'\cdot\vec{x}} \\
&\quad - [\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger, \hat{a}_{\vec{p}'}] e^{i(E_{\vec{p}}-E_{\vec{p}'})t-i\vec{p}\cdot\vec{x}+i\vec{p}'\cdot\vec{x}} \\
&\quad \left. + [\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger, \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger] e^{i(E_{\vec{p}}+E_{\vec{p}'})t-i\vec{p}\cdot\vec{x}-i\vec{p}'\cdot\vec{x}} \right], \quad (1.84)
\end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}'), \quad [\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}] = 0 = [\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger, \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger]. \quad (1.85)$$

Una implicación interesante de este hecho no se hace esperar demasiado mediante el estudio del Hamiltoniano del sistema. El cálculo se centra en $\hat{H}(0)$ y la utilización de cada término en función de los operadores de creación y aniquilación. Hecho lo cual aparecerán múltiples deltas de Dirac que permiten simplificar la expresión hasta obtener:

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \left[\hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} \right] \\
&= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \left[\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} + \frac{1}{2} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) \right]. \quad (1.86)
\end{aligned}$$

Comparte cierta similitud con su homólogo en la teoría cuántica del oscilador armónico pero a diferencia de este observamos una función delta asociada a una divergencia al integrar sobre \vec{p} . El manejo de este aparente problema se liga a la interpretación que pretendamos hacer de la cantidad. Definimos al vacío $|0\rangle$ como aquel estado donde para cualquier $\hat{a}_{\vec{p}}$ se cumple

$$\hat{a}_{\vec{p}} |0\rangle = 0 \quad \forall \vec{p}. \quad (1.87)$$

Con esta definición es posible realizar un cálculo para obtener la energía del estado base E_0

$$\begin{aligned}
\hat{H} |0\rangle \equiv E_0 |0\rangle &= \left[\int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \left(\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} + \frac{1}{2} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) \right) \right] |0\rangle \\
&= \left[\frac{1}{2} \int d^3\vec{p} E_{\vec{p}} \delta^{(3)}(0) \right] |0\rangle = \infty |0\rangle. \quad (1.88)
\end{aligned}$$

Se trabaja entorno a esta divergencia dado el interés que se tiene por las diferencias de energía entre estados. Conforme a esta idea es posible redefinir el Hamiltoniano como $\hat{H} \rightarrow \hat{H} - E_{\text{vacío}}$, es decir, medir energías con respecto a la energía del vacío. Así nuestro Hamiltoniano es simplemente

$$\hat{H} = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}}. \quad (1.89)$$

Con lo cual $\hat{H}|0\rangle = 0$.

Otra manera de tratar con este hecho es definir una nueva acción sobre los operadores, que será de utilidad en un futuro. Definimos como *orden normal* de un operador \mathcal{O} : a la representación de dicho operador al colocar todos sus operadores de aniquilación a la derecha de cada factor. El orden normal del Hamiltoniano encontrado en la Ec.(1.86) es

$$:\hat{H} := \frac{1}{2} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} (\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}}) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}}. \quad (1.90)$$

Una vez establecido el caso de mínima energía podemos estudiar los estados excitados del campo. En similar proceso al caso del oscilador cuántico, encontramos que las relaciones de conmutación entre el Hamiltoniano y los operadores de creación y aniquilación son

$$\begin{aligned} [\hat{H}, \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger] &= \int \frac{d^3\vec{p}'}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}'} [\hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger, \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger] = E_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \\ [\hat{H}, \hat{a}_{\vec{p}}] &= \int \frac{d^3\vec{p}'}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}'} [\hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger, \hat{a}_{\vec{p}}] = -E_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}. \end{aligned} \quad (1.91)$$

Entonces podemos hacer actuar a los operadores de creación sobre el estado base, $|0\rangle$, y obtener los eigenestados de energía tal que

$$|\vec{p}\rangle = \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle. \quad (1.92)$$

Y efectivamente es eigenestado de energía, pues

$$\hat{H} |\vec{p}\rangle = \hat{H} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle = (E_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger - \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{H}) |0\rangle = E_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle = E_{\vec{p}} |\vec{p}\rangle. \quad (1.93)$$

Interpretamos a este estado, $|\vec{p}\rangle$, como el eigenestado de momento \vec{p} para una partícula de masa m . Esta aseveración encuentra su verificación mediante la promoción a operador del momento lineal

$$:\hat{P} := \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \vec{p} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}}. \quad (1.94)$$

El hacer actuar este operador en nuestro estado, con auxilio de las relaciones de conmutación ya halladas, comprobamos el estatus de eigenvalor de \vec{p} ⁷

$$\hat{P} |\vec{p}\rangle = \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \vec{p}' \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}'} (\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle) = \vec{p} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle = \vec{p} |\vec{p}\rangle. \quad (1.95)$$

Nuestros desarrollos al momento nos permiten avanzar hasta la generación de estados multipartículas, pues al hacer actuar los operadores de creación sobre el estado base de forma reiterada y para distintos momentos estaremos creando

$$|\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n\rangle = \hat{a}_{\vec{p}_1}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}_2}^\dagger \dots \hat{a}_{\vec{p}_n}^\dagger |0\rangle. \quad (1.96)$$

⁷Posterior a la búsqueda de que el estado $\langle \vec{p}_i | \vec{p}_j \rangle$ sea invariante de Lorentz se presenta la normalización relativista con la cantidad invariante $\int d^3\vec{p}/2E_{\vec{p}}$ y los eigenestados $|p\rangle = \sqrt{2E_{\vec{p}}} |\vec{p}\rangle = \sqrt{2E_{\vec{p}}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle$.

Observemos que los operadores de creación, \hat{a}^\dagger , conmutan entre sí, es decir, el estado es simétrico bajo el intercambio de dos partículas

$$|\vec{p}_1, \vec{p}_2\rangle = |\vec{p}_2, \vec{p}_1\rangle. \quad (1.97)$$

Este comportamiento es conocido y constituye una estadística para el grupo conformado por *bosones*. El espacio de interés está compuesto por una superposición de espacios de Hilbert⁸ generados por cada estado multipartícula. En otras palabras, el espacio a estudiar es la suma directa de todas las superposiciones posibles

$$\mathcal{H} \equiv \{|0\rangle\} \oplus \{|\vec{p}\rangle\} \oplus \{|\vec{p}_1, \vec{p}_2\rangle\} \oplus \dots \quad (1.98)$$

Este espacio es conocido como *espacio de Fock*⁹ (y para nuestro caso particular, espacio de Fock bosónico).

Una definición útil es un operador capaz de contar el número de partículas para un determinado estado en el espacio de Fock, a dicho operador se le conoce como operador de número y está dado por

$$: \hat{N} := \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \hat{a}_\vec{p}^\dagger \hat{a}_\vec{p}, \quad (1.99)$$

que cumple con $\hat{N} |\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle = n |\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle$. Cuestión de importancia es la relación de conmutación entre este operador y el Hamiltoniano, $[\hat{N}, \hat{H}] = 0$. Asegurando con ello que el número de partículas, para nuestra configuración sin interacciones, se conserva en el tiempo.

Dedicaremos los siguientes párrafos a abordar el tema de la *causalidad* en esta teoría. Para que nuestra teoría sea causal se requiere que para todo intervalo tipo espacio los operadores que representan las observables del sistema conmuten,

$$[\mathcal{O}_1(x), \mathcal{O}_2(x')] = 0 \quad \forall (x - x')^2 < 0, \quad (1.100)$$

de esta forma se asegura que las mediciones hechas en x no puedan afectar a las mediciones en x' cuando x y x' no están causalmente conectados. Ahora bien, centraremos nuestro interés en otra perspectiva del estudio de la estructura causal de la teoría. Dada una base $\{|\varphi_n\rangle\}$ para el espacio de Hilbert \mathcal{H} , la evolución de cualquier estado $|\varphi\rangle$ se puede determinar a partir del *propagador*

$$D(x - x') \equiv \langle 0 | \varphi(\vec{x}, t) \varphi(\vec{x}', t') | 0 \rangle = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_\vec{p}} e^{-ip \cdot (x - x')}. \quad (1.101)$$

Dicho propagador representa la amplitud de que si, el sistema se encuentra en \vec{x}' al tiempo t' , se encuentre en \vec{x} al tiempo t . La importancia de estudiar dicho objeto

⁸Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial completo dotado de un producto interior cuya relevancia en la teoría cuántica recae en que los posibles estados puros del sistema son representados por elementos del espacio.

⁹Un espacio de Fock es una construcción algebraica que otorga un espacio de estados cuánticos generado a partir de un espacio de Hilbert que contempla solo una partícula. Formalmente $F = \bigoplus_n \mathcal{H}^{\otimes n}$

radica en el hecho de que tal incluye la información completa de las soluciones codificada de forma útil.

Lastimosamente ocurre que al tomar una partícula propagándose en un intervalo tipo espacio, tal que $t - t' = 0$, y $\vec{x} - \vec{x}' = \vec{r}$, cálculo que puede revisarse en [11]:

$$D(-\vec{r}) = \frac{m}{(2\pi)^2} \frac{K_1(mr)}{r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{m}{r(2\pi)^2} \sqrt{\frac{\pi}{2mr}} e^{-mr}. \quad (1.102)$$

Se encuentra que fuera del cono de luz, la amplitud de propagación decrece de forma exponencial pero nunca es cero. El campo parece escabullirse fuera del cono de luz. Una forma de dar solución a esta aparente contradicción es considerar la construcción de una de las cantidades más importantes en la teoría cuántica de campos, el *propagador de Feynman*:

$$G_F(x - x') = \langle 0 | T \{ \hat{\varphi}(x) \hat{\varphi}(x') \} | 0 \rangle = \begin{cases} D(x - x') & \text{si } x^0 > x'^0 \\ D(x' - x) & \text{si } x'^0 > x^0 \end{cases} \quad (1.103)$$

donde T ordena la aparición de los campos respecto al tiempo de evaluación, es decir

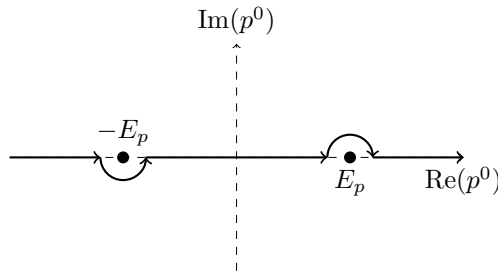
$$T \{ \hat{\varphi}(x) \hat{\varphi}(x') \} = \begin{cases} \hat{\varphi}(x) \hat{\varphi}(x') & \text{si } x^0 > x'^0 \\ \hat{\varphi}(x') \hat{\varphi}(x) & \text{si } x'^0 > x^0 \end{cases}. \quad (1.104)$$

Veamos que es posible reescribir este propagador de una forma conveniente en términos de una integral sobre d^4p . Es decir, el propagador de Feynman, G_F , es

$$G_F(x - x') = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip \cdot (x - x')} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i e^{-ip \cdot (x - x')}}{(p^0 - E_{\vec{p}})(p^0 + E_{\vec{p}})}. \quad (1.105)$$

Notar que al realizar esta acción la condición con la que se venía trabajando, $p^0 = E_{\vec{p}}$, no se tiene más, sino que se extiende a todo el intervalo sobre p^0 . Sin embargo hay que observar que dicha integral no se encuentra bien definida en todo el espacio, pues para cada valor de \vec{p} , el denominador $p^2 - m^2 = (p^0)^2 - \vec{p}^2 - m^2$ produce un polo cuando $p^0 = \pm E_{\vec{p}} = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$.

Para sortear dicha dificultad es necesario considerar el siguiente contorno de integración



y estudiar los casos cuando $x^0 > x'^0$ y $x^0 < x'^0$, tal que podemos cerrar el contorno de integración por debajo y por arriba, respectivamente. Con esta acción podrá

verse que la expresión propuesta es adecuada y el propagador de Feynman puede reescribirse en términos de una integral sobre d^4p . De hecho es conveniente el no especificar el contorno de integración y en vez, escribir el propagador como

$$G_F(x - x') = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ip \cdot (x-x')}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (1.106)$$

donde $\epsilon > 0$ es infinitesimal.

Como último comentario del tema se hace mención del caso complejo que puede analizarse de forma completamente análoga. La cuantización iniciará su trayecto al introducir un Lagrangiano que contemple el campo conjugado φ^* ,

$$\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi, \varphi^*, \partial_\mu \varphi^*) = \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi. \quad (1.107)$$

La promoción a operadores y su consecuente proceso para verificar que tanto $\hat{\varphi}$ como $\hat{\varphi}^*$ cumplen con la ecuación de Klein-Gordon, permiten obtener

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(x) &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left[\hat{b}_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} + \hat{c}_{\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right], \\ \hat{\varphi}^\dagger(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left[\hat{b}_{\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} + \hat{c}_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} \right]. \end{aligned} \quad (1.108)$$

Incluyendo estas expresiones en las relaciones de conmutación se encuentran la co-relación a satisfacer por \hat{b} y \hat{c}

$$\begin{aligned} [\hat{b}_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{p}'}^\dagger] &= (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') = [\hat{c}_{\vec{p}}, \hat{c}_{\vec{p}'}^\dagger] \\ [\hat{b}_{\vec{p}}, \hat{c}_{\vec{p}'}^\dagger] &= [\hat{b}_{\vec{p}}, \hat{c}_{\vec{p}}^\dagger] = 0 = [\hat{b}_{\vec{p}}^\dagger, \hat{c}_{\vec{p}'}^\dagger] = [\hat{b}_{\vec{p}}^\dagger, \hat{c}_{\vec{p}}]. \end{aligned} \quad (1.109)$$

Se observa que estos operadores cumplen, a pares, las reglas de conmutación seguidas por los operadores \hat{a} y \hat{a}^\dagger , es decir, se obtienen dos operadores de creación y aniquilación respectivamente.

Con base en este hecho tenemos que un campo escalar complejo describe de forma simultánea a dos tipos de partículas con la misma masa, situación adicional de gran interés se presenta al promover a un operador la carga de Noether; apoyados de esta herramienta y a su consecutiva aplicación sobre los estados generados a partir de \hat{b}^\dagger y \hat{c}^\dagger , dichos elementos del espacio de Fock resultan en posición de una carga conservada y opuesta. Los estados respectivos se corresponden a partículas de igual masa pero con carga contraria.

Con esto concluimos el estudio del campo escalar libre previsto. Se ha visto que al cuantizarlo se obtiene una relación con partículas (antipartículas) relativistas y no interactuantes entre sí. Para realizar tal estudio se inició tomando un campo clásico cuyo significado estaba claro antes de realizar un proceso de cuantización, hecho lo cual se logró comprender que las partículas son los modos del campo, que se corresponden con pequeñas fluctuaciones por encima del valor de energía mínimo, es decir, las partículas se obtienen a partir de pequeñas excitaciones del estado base.

Capítulo 2

Un campo escalar en un fondo curvo

A lo largo del presente capítulo buscaremos entrar en el terreno propio del tema central del trabajo y lidiar con la cuantización de un campo escalar en un fondo curvo realizando un proceso análogo al visto en la introducción. Como se comentó en un principio, una teoría cuántica de la gravedad es una empresa en vías de construcción en la actualidad, dejando como buen bloque de entendimiento el estudio de los fenómenos cuánticos bajo la influencia gravitatoria como lo hecho con el campo electromagnético, en donde se considera al campo de forma clásica en interacción con la materia. Este proceso debería representar una aproximación a los resultados de una teoría completa de gravedad cuántica, he aquí un poco de su relevancia.

De este modo tomaremos un variedad diferenciable descrita por una métrica $g_{\mu\nu}$ que, según lo visto, basta para describir los efectos gravitatorios ligados a la geometría del espacio-tiempo mediante las ecuaciones de campo. Sobre este fondo buscaremos seguir la cuantización de nuestro campo escalar para registrar una generalización a los resultados obtenidos con la métrica de Minkowski y presentar un análisis de las consecuencias propias de ejecutar este procedimiento.

2.1. Cuantización canónica

Comenzaremos describiendo nuestro espacio de trabajo; buscando una restricción que permita obtener soluciones bien caracterizadas de nuestras ecuaciones de movimiento. Decimos que un subconjunto cerrado $\Sigma \subset M$ es una *superficie de Cauchy* si para toda curva tipo tiempo en la variedad esta interseca a Σ solo una vez, y si además, para cada punto $P \in M$ toda curva causal inextensible pasa por Σ . De existir una de estas hipersuperficies en M entonces diremos que $(M, g_{\mu\nu})$ es una variedad *globalmente hiperbólica*.

Teniendo una variedad globalmente hiperbólica $(M, g_{\mu\nu})$ con una superficie de Cauchy Σ es posible asignar a la variedad una topología de la forma $\Sigma \times \mathbb{R}$, mediante la cual poder foliar a todo M con superficies de Cauchy dependientes de un parámetro t . El análisis que seguiremos a continuación y que toma por base estas superficies de

Cauchy puede encontrarse en [13].

Para cada una de las superficies de Cauchy Σ_t asociadas al parámetro t que ocupan nuestra variedad podemos asociar un vector normal unitario n^μ , con ayuda del cual poder inducir una métrica $h_{\mu\nu}$ a través de $g_{\mu\nu}$ dada por

$$h_{\mu\nu} = n_\mu n_\nu - g_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

ahora, se construye un vector de evolución sobre el parámetro t , t^μ , tal que cumpla con que $t^\mu \nabla_\mu t = 1$ y que pueda descomponerse en partes normal y tangencial a Σ_t como

$$t^\mu = N n^\mu + M^\mu. \quad (2.2)$$

Dado lo cual podemos tomar unas coordenadas $x^\mu = (t, x^i)$ escogidas de forma que el vector tangente M^μ quede determinado por la base x^i de forma que $M^\mu \nabla_\mu = M^i \partial_i$, aunado a $t^\mu \nabla_\mu t = 1$, se sigue entonces $t^\mu \nabla_\mu = \partial_t$ y $t^\mu \nabla_\mu x^i = M^i$. En este sistema de coordenadas tendremos que la representación de nuestra métrica tiene por componentes $g_{00} = (N^2 - M_i M^i)$ y $g_{0i} = -M_i$, es decir

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} (N^2 - M_k M^k) & -M_1 & -M_2 & -M_3 \\ -M_1 & & & \\ -M_2 & & -h_{ij} & \\ -M_3 & & & \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

y recordando que $g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta^\mu_\lambda$ podemos encontrar

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{N^2} \begin{bmatrix} 1 & -M^1 & -M^2 & -M^3 \\ -M^1 & & & \\ -M^2 & & (M_i M^i - N^2) h^{ij} & \\ -M^3 & & & \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Donde por último se tiene que el intervalo de línea es

$$ds^2 = N^2 dt^2 - h_{ij} (M^i dt + dx^i) (M^j dt + dx^j). \quad (2.5)$$

Este es nuestro campo de juego y sobre él colocaremos el campo escalar; al igual que en el caso de Minkowski comenzaremos con la descripción de una acción. Como por ahora no centraremos nuestra atención en la interacción del campo con el fondo, la generalización que permite el Lagrangiano de Klein-Gordon (1.69) viene dada por

$$S = \int dx^4 \sqrt{-g} \frac{1}{2} (g^{\mu\nu} \nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi - m^2 \varphi^2), \quad (2.6)$$

que por tratarse de un campo escalar, la derivada covariante $\nabla_\mu \varphi$ pasa a ser $\partial_\mu \varphi$.

Las ecuaciones de movimiento las encontraremos al variar esta acción y pedir nulidad:

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \partial_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\lambda \varphi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \partial_\lambda (\sqrt{-g} g^{\mu\lambda} \partial_\mu \varphi) + \sqrt{-g} m^2 \varphi \\ &\Rightarrow \square \varphi + m^2 \varphi = 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

tal que el D'Alambertiano para el caso escalar es

$$\square\varphi = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\varphi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\lambda(\sqrt{-g}g^{\mu\lambda}\partial_\mu\varphi). \quad (2.8)$$

La Ec.(2.7) es consecuentemente una generalización de la ecuación de Klein-Gordon para una métrica $g_{\mu\nu}$ arbitraria.

La siguiente transición es hallar el momento canónico conjugado a nuestro campo sobre la superficie de Cauchy Σ_t como lo ya expuesto con anterioridad, con la salvedad de reconocer que el determinante de la métrica $g_{\mu\nu}$ se relaciona con el de $h_{\mu\nu}$ mediante $g = -N^2h$

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\varphi)} = \frac{\partial}{\partial(\partial_t\varphi)} \left[\frac{\sqrt{h}}{2N} \{(\partial_t\varphi)^2 - 2M^i\partial_t\varphi\partial_i\varphi + (M^iM_i - N^2)h^{ij}\partial_i\varphi\partial_j\varphi\} \right] \\ &= \frac{\sqrt{h}}{N} (\partial_t\varphi - M^i\partial_i\varphi) = \sqrt{h} (n^\mu\partial_\mu\varphi). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Con el conocimiento de estos dos elementos podemos situarnos en el espacio fase (φ, π) y preguntarnos por las soluciones de la Ec.(2.7), bien determinadas por las condiciones iniciales y por la hiperbolicidad del espacio. Las propiedades que buscamos satisfagan quedan delimitadas por la definición de un producto escalar:

$$(\varphi_1, \varphi_2)_\Sigma = i \int_\Sigma d^3\vec{x}\sqrt{h} n^\mu (\varphi_1^*\nabla_\mu\varphi_2 - (\nabla_\mu\varphi_1^*)\varphi_2) = i \int_\Sigma d^3\vec{x} (\varphi_1^*\pi_2 - \pi_1^*\varphi_2) \quad (2.10)$$

independiente de la superficie de Cauchy sobre la que se labore, pues según lo hecho en [14], para dos soluciones de la Ec.(2.7) tales que son cero sobre la frontera del volumen V acotado por las superficies de Cauchy Σ_1 y Σ_2 , se sigue que

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{\Sigma_1} - (\varphi_1, \varphi_2)_{\Sigma_2} = i \int_{\partial V} d^3\vec{x}\sqrt{h} n^\mu (\varphi_1^*\nabla_\mu\varphi_2 - (\nabla_\mu\varphi_1^*)\varphi_2) \quad (2.11)$$

y mediante el uso del teorema de Gauss, esta última expresión pasa a ser

$$\begin{aligned} i \int_V d^4x\sqrt{-g} g^{\mu\nu}\nabla_\nu (\varphi_1^*\nabla_\mu\varphi_2 - (\nabla_\mu\varphi_1^*)\varphi_2) &= i \int_V d^4x\sqrt{-g} (\varphi_1^*\square\varphi_2 - (\square\varphi_1^*)\varphi_2) \\ &= i \int_V d^4x\sqrt{-g} (-\varphi_1^*m^2\varphi_2 + m^2\varphi_1^*\varphi_2) = 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

lo que muestra la independencia en la elección de Σ .

Retomando nuestro espacio de soluciones a la ecuación de Klein-Gordon podemos hallar un conjunto completo $(u_{\vec{p}}, u_{\vec{p}}^*)$ que satisfagan las condiciones de ortonormalidad

$$(u_{\vec{p}}, u_{\vec{p}'}^*) = \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}'), \quad (u_{\vec{p}}^*, u_{\vec{p}'}^*) = -\delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}'), \quad (u_{\vec{p}}, u_{\vec{p}'}^*) = 0. \quad (2.13)$$

Dada la linealidad de la ecuación en consideración podemos expandir el campo φ en función de estos modos

$$\varphi(\vec{x}) = \int d\mu(\vec{p}) (a_{\vec{p}}u_{\vec{p}} + a_{\vec{p}}^*u_{\vec{p}}^*) \quad (2.14)$$

donde $d\mu(\vec{p}) \propto d^3\vec{p}$. Que para el momento conjugado otorga la expresión

$$\pi(x) = \sqrt{\hbar} (n^\mu \partial_\mu \varphi(x)) \equiv \int d\mu(\vec{p}) (a_{\vec{p}} \pi_{\vec{p}} + a_{\vec{p}}^* \pi_{\vec{p}}^*). \quad (2.15)$$

De las condiciones de ortonormalidad antes requeridas tenemos que

$$\begin{aligned} (u_{\vec{p}}, \varphi) &= \int d\mu(\vec{p}') \left[a_{\vec{p}'} (u_{\vec{p}}, u_{\vec{p}'}) + a_{\vec{p}'}^* (u_{\vec{p}}, u_{\vec{p}'}^*) \right] = \int d\mu(\vec{p}') a_{\vec{p}'} \delta^{(3)}(\vec{p}, \vec{p}') = a_{\vec{p}} \\ (u_{\vec{p}}^*, \varphi) &= \int d\mu(\vec{p}') \left[a_{\vec{p}'} (u_{\vec{p}}^*, u_{\vec{p}'}) + a_{\vec{p}'}^* (u_{\vec{p}}^*, u_{\vec{p}'}^*) \right] = - \int d\mu(\vec{p}') a_{\vec{p}'}^* \delta^{(3)}(\vec{p}, \vec{p}') = -a_{\vec{p}}^* \end{aligned} \quad (2.16)$$

elementos importantes una vez que realicemos la promoción a operadores.

Hecha la expansión en modos, en completa analogía al caso de Minkowski, podemos ahora considerar nuestro proceso de cuantización y postular las relaciones de conmutación siguientes escogiendo una superficie de Cauchy determinada por un t constante:

$$\begin{aligned} [\hat{\varphi}(t, \vec{x}), \hat{\varphi}(t, \vec{x}')] &= 0 = [\hat{\pi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{x}')] \\ [\hat{\varphi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{x}')] &= i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Esta promoción a operadores permite recuperar la relación existente para el momento canónico conjugado tal que

$$\hat{\pi} = \sqrt{-g} g^{\mu 0} \partial_\mu \hat{\varphi} = \sqrt{\hbar} (n^\mu \partial_\mu \hat{\varphi}). \quad (2.18)$$

Mediante la cual podemos construir el Hamiltoniano en función de estos operadores

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \int d^3\vec{x} \{ \hat{\pi} \partial_t \hat{\varphi} - \mathcal{L} \} = \int d^3\vec{x} \frac{1}{2} \{ \hat{\pi} \partial_t \hat{\varphi} - \sqrt{-g} g^{\mu i} \partial_\mu \hat{\varphi} \partial_i \hat{\varphi} + \sqrt{-g} m^2 \hat{\varphi}^2 \} \\ &= \int d^3\vec{x} \frac{1}{2} \left\{ \hat{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{-g}} g_{00} \hat{\pi} - g_{00} g^{i0} \partial_i \hat{\varphi} \right) - \sqrt{-g} g^{\mu i} \partial_\mu \hat{\varphi} \partial_i \hat{\varphi} + \sqrt{-g} m^2 \hat{\varphi}^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.19)$$

y más aún, mediante el uso de la ecuación de Heisenberg permiten obtener nuestra ecuación de movimiento a nivel cuántico,

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{\pi}(t, \vec{x}) &= i[\hat{H}, \hat{\pi}] = i \int d^3\vec{x}' \frac{1}{2} \left(-[g_{00} g^{i0} \hat{\pi}(t, \vec{x}') \partial_i \hat{\varphi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{x})] \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{-g} [g^{\mu i} \partial_\mu \hat{\varphi}(t, \vec{x}') \partial_i \hat{\varphi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{x}')] + m^2 \sqrt{-g} [\hat{\varphi}^2(t, \vec{x}'), \hat{\pi}(t, \vec{x})] \right) \\ &= i \int d^3\vec{x}' \frac{1}{2} \left(-g_{00} g^{i0} \hat{\pi}(t, \vec{x}') [\partial_i \hat{\varphi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{x}')] \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{-g} g^{\mu i} \partial_\mu \hat{\varphi}(t, \vec{x}') [\partial_i \hat{\varphi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{x}')] + 2m^2 \sqrt{-g} \hat{\varphi}(t, \vec{x}') [\hat{\varphi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{x}')] \right) \\ &= \int d^3\vec{x}' \frac{1}{2} \left(g_{00} g^{i0} \hat{\pi}(t, \vec{x}') \partial_i \cdot \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{-g} g^{\mu i} \partial_\mu \hat{\varphi}(t, \vec{x}') \partial_i \cdot \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') - 2m^2 \sqrt{-g} \hat{\varphi}(t, \vec{x}') \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int d^3\vec{x} \frac{1}{2} \left(-\partial_i \left(g_{00} g^{i0} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \hat{\pi}(t, \vec{x}) \right) \right. \\
 &\quad \left. -\partial_i \left(\sqrt{-g} g^{\mu i} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \partial_\mu \hat{\varphi}(t, \vec{x}) \right) - 2m^2 \sqrt{-g} \hat{\varphi}(t, \vec{x}) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \right) \\
 &= -\partial_i \left(\sqrt{-g} g^{\mu i} \partial_\mu \hat{\varphi}(t, \vec{x}') \right) - m^2 \sqrt{-g} \hat{\varphi}(t, \vec{x}') \quad (2.20)
 \end{aligned}$$

que implica justamente la ecuación de Klein-Gordon para el operador de campo

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\mu \hat{\varphi}(t, \vec{x})) + m^2 \hat{\varphi}(t, \vec{x}) = 0. \quad (2.21)$$

A partir de estos resultados, la expansión en modos hallada con anterioridad pasa a ser

$$\hat{\varphi}(x) = \int d\mu(\vec{p}) \left(\hat{a}_{\vec{p}} u_{\vec{p}} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger u_{\vec{p}}^* \right). \quad (2.22)$$

Ahora, veamos que para dos soluciones arbitrarias $u_{\vec{p}}$ y $u_{\vec{p}'}$ se satisface, a partir de las relaciones de conmutación (2.17), la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned}
 &\left[\left(u_{\vec{p}}(t, \vec{x}), \hat{\varphi}(t, \vec{x}) \right)_\Sigma, \left(u_{\vec{p}'}^*(t, \vec{x}'), \hat{\varphi}(t, \vec{x}') \right)_\Sigma \right] = \\
 &\quad i \int d^3\vec{x} d^3\vec{x}' \left[u_{\vec{p}}^*(t, \vec{x}) \hat{\pi}(t, \vec{x}) - \sqrt{\hbar} n^\mu \hat{\varphi}(t, \vec{x}) \partial_\mu u_{\vec{p}}^*(t, \vec{x}), \right. \\
 &\quad \quad \left. u_{\vec{p}'}(t, \vec{x}') \hat{\pi}(t, \vec{x}') - \sqrt{\hbar} n^\mu \hat{\varphi}(t, \vec{x}') \partial_\mu u_{\vec{p}'}(t, \vec{x}') \right] \\
 &= \int d^3\vec{x} \sqrt{\hbar} n^\mu \left((\partial_\mu u_{\vec{p}}^*) u_{\vec{p}'} - u_{\vec{p}}^* (\partial_\mu u_{\vec{p}'}) \right) = - \left(u_{\vec{p}}, u_{\vec{p}'} \right)_\Sigma \quad (2.23)
 \end{aligned}$$

la cual concede, con ayuda de las expresiones (2.13) y (2.16) reflejar nuestras relaciones de conmutación sobre el campo y el momento canónico conjugado en términos de los operadores de creación y aniquilación que otorga la expansión en modos

$$\begin{aligned}
 [\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}] &= - \left(u_{\vec{p}}, u_{\vec{p}'}^* \right)_\Sigma = 0 = - \left(u_{\vec{p}}^*, u_{\vec{p}'} \right)_\Sigma = [\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger, \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger] \\
 [\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger] &= \left(u_{\vec{p}}, u_{\vec{p}'} \right)_\Sigma = \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}'). \quad (2.24)
 \end{aligned}$$

Estos son los ingredientes necesarios para la construcción de un vacío $|0\rangle_u$ tal que

$$a_{\vec{p}} |0\rangle_u = 0 \quad \forall \vec{p} \quad \text{y} \quad \langle 0|0\rangle_u = 1, \quad (2.25)$$

y de estados excitados resultado de hacer actuar operadores de creación tal como lo hecho en espacio plano,

$$|\vec{p}\rangle_u = \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle_u, \quad |\vec{p}_1, \vec{p}_2\rangle_u = \hat{a}_{\vec{p}_1}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}_2}^\dagger |0\rangle_u, \dots \quad (2.26)$$

que al final generan un espacio de Fock asociado al conjunto completo de soluciones $u_{\vec{p}}$ de la ecuación de Klein-Gordon. Y esta última frase es importante, el poner en relevancia la dependencia que se tiene en el conjunto completo de soluciones hallado y el sistema coordinado construido, pues en el espacio de Minkowski se encontraba

un conjunto de soluciones a partir del sistema coordenado cartesiano que generaban un espacio de Fock sin ambigüedad. Dedicaremos una subsección a discutir este tema de un *sistema coordenado privilegiado*, por ahora tengamos en mente que en el estudio de una métrica arbitraria se puede encontrar más de un conjunto completo de soluciones a la ecuación de Klein-Gordon que invita a encontrar las relaciones que puedan existir entre ellos.

2.1.1. Transformaciones de Bogolubov

Si $u_{\vec{p}}$ y $v_{\vec{p}}$ son dos conjuntos completos de soluciones a la Ec.(2.7) tal que

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}(t, \vec{x}) &= \int d\mu(\vec{p}) \left(\hat{a}_{\vec{p}} u_{\vec{p}} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger u_{\vec{p}}^* \right) \\ \hat{\varphi}(t, \vec{x}) &= \int d\mu(\vec{p}) \left(\hat{b}_{\vec{p}} v_{\vec{p}} + \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger v_{\vec{p}}^* \right),\end{aligned}\quad (2.27)$$

en el que para $v_{\vec{p}}$ se define el vacío asociado $|0\rangle_v$ como

$$\hat{b}_{\vec{p}} |0\rangle_v = 0 \quad \forall \vec{p} \quad \text{y} \quad \langle 0|0\rangle_v = 1. \quad (2.28)$$

Por la completéz de ambos conjuntos de soluciones podemos poner a uno en dependencia del otro, es decir

$$u_{\vec{p}} = \int d\mu(\vec{p}') \left(\alpha(\vec{p}, \vec{p}') v_{\vec{p}'} + \beta(\vec{p}, \vec{p}') v_{\vec{p}'}^* \right), \quad u_{\vec{p}}^* = \int d\mu(\vec{p}') \left(\alpha^*(\vec{p}, \vec{p}') v_{\vec{p}'}^* + \beta^*(\vec{p}, \vec{p}') v_{\vec{p}'} \right). \quad (2.29)$$

A esta representación de un conjunto de soluciones por medio de otro se le conoce como *transformación de Bogolubov* [15], mientras que a las funciones $\alpha(\vec{p}, \vec{p}')$ y $\beta(\vec{p}, \vec{p}')$ se les llama *coeficientes de Bogolubov*.

Dichos coeficientes encuentran su caracterización con base en $u_{\vec{p}}$ y $v_{\vec{p}}$ al realizar los siguientes cálculos

$$\begin{aligned}(v_{\vec{p}'}, u_{\vec{p}})_\Sigma &= \int d\mu(\vec{p}') \left[\alpha(\vec{p}, \vec{p}') (v_{\vec{p}'}, v_{\vec{p}'})_\Sigma + \beta(\vec{p}, \vec{p}') (v_{\vec{p}'}, v_{\vec{p}'}^*)_\Sigma \right] \\ &= \int d\mu(\vec{p}') \left[\alpha(\vec{p}, \vec{p}') \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p}) + 0 \right] = \alpha(\vec{p}, \vec{p}') \\ (v_{\vec{p}'}^*, u_{\vec{p}})_\Sigma &= \int d\mu(\vec{p}') \left[\alpha(\vec{p}, \vec{p}') (v_{\vec{p}'}^*, v_{\vec{p}'})_\Sigma + \beta(\vec{p}, \vec{p}') (v_{\vec{p}'}^*, v_{\vec{p}'}^*)_\Sigma \right] \\ &= \int d\mu(\vec{p}') \left[0 - \beta(\vec{p}, \vec{p}') \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p}) \right] = -\beta(\vec{p}, \vec{p}').\end{aligned}\quad (2.30)$$

Resumiendo

$$\alpha(\vec{p}, \vec{p}') = (v_{\vec{p}'}, u_{\vec{p}})_\Sigma, \quad \beta(\vec{p}, \vec{p}') = - (v_{\vec{p}'}^*, u_{\vec{p}})_\Sigma. \quad (2.31)$$

Lo que permite obtener la relación inversa $v_{\vec{p}} = \int d\mu(\vec{p}') (A(\vec{p}, \vec{p}') u_{\vec{p}'} + B(\vec{p}, \vec{p}') u_{\vec{p}'}^*)$ al observar

$$A(\vec{p}, \vec{p}') = (u_{\vec{p}'}, v_{\vec{p}})_\Sigma = (v_{\vec{p}}, u_{\vec{p}'}^*)_\Sigma^* = \alpha^*(\vec{p}', \vec{p})$$

$$B(\vec{p}, \vec{p}') = - \left(u_{\vec{p}'}^*, v_{\vec{p}} \right)_\Sigma = \left(v_{\vec{p}}^*, u_{\vec{p}'} \right)_\Sigma = -\beta(\vec{p}', \vec{p}). \quad (2.32)$$

En consecuencia

$$v_{\vec{p}} = \int d\mu(\vec{p}') \left(\alpha^*(\vec{p}', \vec{p}) u_{\vec{p}'} - \beta(\vec{p}', \vec{p}) u_{\vec{p}'}^* \right), \quad v_{\vec{p}}^* = \int d\mu(\vec{p}') \left(\alpha(\vec{p}', \vec{p}) u_{\vec{p}'}^* - \beta^*(\vec{p}', \vec{p}) u_{\vec{p}'} \right). \quad (2.33)$$

Hasta ahora solo hemos realizado una serie de pasos algebraicos que permiten conectar dichos conjuntos de soluciones, sin embargo, la implicación física en el sistema consecuencia de este proceso se hace ostensible al registrar que los operadores de aniquilación y creación obedecen

$$\begin{aligned} \hat{b}_{\vec{p}} &= (v_{\vec{p}}, \hat{\varphi})_\Sigma = \int d\mu(\vec{p}') \left[\hat{a}_{\vec{p}'} \left(v_{\vec{p}}, u_{\vec{p}'} \right)_\Sigma + \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger \left(v_{\vec{p}}, u_{\vec{p}'}^* \right)_\Sigma \right] \\ &= \int d\mu(\vec{p}') \left[\alpha(\vec{p}', \vec{p}) \hat{a}_{\vec{p}'} + \beta^*(\vec{p}', \vec{p}) \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger \right] \\ \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger &= - (v_{\vec{p}}^*, \hat{\varphi})_\Sigma = - \int d\mu(\vec{p}') \left[\hat{a}_{\vec{p}'} \left(v_{\vec{p}}^*, u_{\vec{p}'} \right)_\Sigma + \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger \left(v_{\vec{p}}^*, u_{\vec{p}'}^* \right)_\Sigma \right] \\ &= \int d\mu(\vec{p}') \left[\beta(\vec{p}', \vec{p}) \hat{a}_{\vec{p}'} + \alpha^*(\vec{p}', \vec{p}) \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger \right]. \end{aligned} \quad (2.34)$$

¿Qué pasa si hacemos actuar el operador de aniquilación $\hat{b}_{\vec{p}}$ sobre el vacío asociado al conjunto de soluciones $u_{\vec{p}}$? Por la expresión anterior encontramos que

$$\hat{b}_{\vec{p}} |0\rangle_u = \int d\mu(\vec{p}') \left[\beta^*(\vec{p}', \vec{p}) \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger |0\rangle_u \right], \quad (2.35)$$

estado que en general es distinto de cero; el vacío $|0\rangle_u$ no se corresponde con $|0\rangle_v$ mientras $\beta^*(\vec{p}', \vec{p}) \neq 0$.

Elaborando un poco más sobre este aspecto podemos evaluar el valor de expectación del operador de número $N_{\vec{p}} = \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger \hat{b}_{\vec{p}}$ respecto al estado de vacío asociado a las soluciones $u_{\vec{p}}$

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger \hat{b}_{\vec{p}} | 0 \rangle_u &= \int d\mu(\vec{p}') \left[\beta(\vec{p}', \vec{p}) \langle 0 | \hat{a}_{\vec{p}'} \right] \cdot \int d\mu(\vec{p}'') \left[\beta^*(\vec{p}'', \vec{p}) \hat{a}_{\vec{p}''}^\dagger | 0 \rangle_u \right] \\ &= \int d\mu(\vec{p}') d\mu(\vec{p}'') \beta(\vec{p}', \vec{p}) \beta^*(\vec{p}'', \vec{p}) \delta^{(3)}(\vec{p}' - \vec{p}'') \langle 0 | 0 \rangle_u \\ &= \int d\mu(\vec{p}) \left| \beta(\vec{p}', \vec{p}) \right|^2 \end{aligned} \quad (2.36)$$

El vacío $|0\rangle_u$ contiene $\int d\mu(\vec{p}) \left| \beta(\vec{p}', \vec{p}) \right|^2$ partículas en el espacio de Fock construido a partir del conjunto de soluciones $v_{\vec{p}}$.

2.1.2. Unicidad en un espacio-tiempo estático

Dedicaremos este breve espacio para estudiar el porqué se tiene una representación “privilegiada” del espacio de soluciones cuando se trabaja con la métrica de Minkowski, tal que en nuestra cuantización del campo escalar en espacio-tiempo plano

se obtuvo una construcción de un vacío, y consecuentemente un espacio de Fock, sin ambigüedad.

En general, decimos que un espacio-tiempo es *estacionario* si se puede encontrar un sistema de coordenadas tal que la métrica sea independiente del tiempo t , es decir, si dado un sistema de coordenadas se puede encontrar, bajo una transformación, una curva $\gamma(t)$ globalmente tipo tiempo tal que $\partial_t g_{\mu\nu} = 0$. Esta es una condición equivalente a solicitar la existencia de un vector de Killing¹ tipo tiempo, $X = X^\mu \partial_\mu$.

Cuando dicha condición se cumpla, el vector de Killing además va a satisfacer la ortogonalidad a una familia de hipersuperficies del estilo $X_\mu dx^\mu$, con estas condiciones podemos generar un sistema coordenado que haga a la métrica independiente del tiempo y donde el vector de corrección M^i de la Ec.(2.2) sea cero.

Para el nuevo sistema coordenado, el vector de Killing puede adoptar la forma $X = \partial_t$ salvo reescalamientos. Esto último permite encontrar una base $u_{\bar{p}}$ y $u_{\bar{p}}^*$ al sistema de soluciones que cumplan con ser eigenfunciones de la derivada de Lie asociada a ∂_t con distinción de eigenvalores $\omega_{\bar{p}}$ y $-\omega_{\bar{p}}$ respectivamente, constantes y de paridad definida. Dado que $\omega_{\bar{p}}$ son frecuencias respecto a la variable t , a las soluciones $u_{\bar{p}}$ y $u_{\bar{p}}^*$ se les conoce como de *frecuencia positiva y negativa*, respectivamente.

Más aún, si el espacio-tiempo es *estático*, esto es, de geometría invariante en la variable temporal encontrada; además de encontrar un vector de Killing de la forma ∂_t podemos seleccionar las variables espaciales x^i de forma que la métrica pueda escribirse como

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} N^2 & 0 \\ 0 & -h_{ij} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Naturalmente es independiente del tiempo, lo que permite encontrar soluciones de frecuencia positiva del estilo

$$u_{\bar{p}} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\bar{p}}}} e^{-i\omega_{\bar{p}}t} U_{\bar{p}}(\vec{x}). \quad (2.38)$$

Con eigenvalor asociado a ∂_t , $-i\omega_{\bar{p}}$. Como $g^{\mu\nu}$ es

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{N^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -N^2 h^{ij} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

podemos simplificar la ecuación de Klein-Gordon para $u_{\bar{p}}$ mediante el siguiente desarrollo

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu) u_{\bar{p}} + m^2 u_{\bar{p}} = \frac{1}{N^2} \partial_t^2 u_{\bar{p}} + \frac{1}{N\sqrt{h}} \partial_i \left(-N\sqrt{h} h^{ij} \partial_j \right) u_{\bar{p}} + m^2 u_{\bar{p}} \\ &= -\frac{\omega_{\bar{p}}^2}{N^2} U_{\bar{p}}(\vec{x}) - \frac{1}{N\sqrt{h}} \partial_i \left(N\sqrt{h} h^{ij} \partial_j \right) U_{\bar{p}}(\vec{x}) + m^2 U_{\bar{p}}(\vec{x}) \end{aligned} \quad (2.40)$$

¹La deducción y correspondiente estudio de un vector de Killing parte de la construcción de la derivada de Lie en una variedad diferenciable. Una vez establecidas las propiedades correspondientes, la condición de ser un vector de Killing, $\mathcal{L}_X g_{\mu\nu} = 0$, pasa a ser, $\nabla_\mu X_\nu + \nabla_\nu X_\mu = 0$.

En particular, si la métrica en cuestión es la de Minkowski, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ y $N = 1$, donde el sistema coordenado usual (t, x^i) la hace independiente del tiempo y ∂_t es un vector de Killing, la Ec.(2.40) permite reconocer que

$$(-\nabla^2 + m^2) U_{\vec{p}}(\vec{x}) = \omega_{\vec{p}}^2 U_{\vec{p}}(\vec{x}) \Rightarrow U_{\vec{p}}(\vec{x}) = e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \text{ y } \omega_{\vec{p}}^2 = m^2 + \vec{p}^2 = E_{\vec{p}}^2 \quad (2.41)$$

De lo cual, el conjunto de soluciones $u_{\vec{p}}$ y $u_{\vec{p}}^*$ se reduce al descrito en el capítulo anterior:

$$u_{\vec{p}} = \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} e^{-ip\cdot x} \quad \text{y} \quad u_{\vec{p}}^* = \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} e^{ip\cdot x}. \quad (2.42)$$

Tal como se comenta en [16], para un espacio-tiempo arbitrario el grupo de Poincaré compuesto por transformaciones de Lorentz y traslaciones pierde la capacidad de representar un grupo de simetría para el sistema, capacidad ligada a encontrar vectores de Killing. En general, puede ocurrir que para el espacio-tiempo en cuestión no exista un vector de Killing que permita asociar soluciones de frecuencia positiva y negativa como lo realizado en un espacio estático. Este hecho limita la posibilidad de encontrar un sistema de coordenadas ‘privilegiado’ en el cual encontrar una descomposición de nuestro campo en modos de forma única y construir un espacio de Fock sin ambigüedad.

2.2. El efecto Unruh

Dado que las transformaciones de Bogolubov son un elemento nuevo en nuestro estudio y un concepto de difícil aprehensión intelectualmente hablando, parece entonces conveniente realizar un pequeño análisis sobre un ejemplo que permita la utilización del mismo.

Situándonos en un espacio plano, con la descripción de la variedad dada por la métrica de Minkowski, hemos visto que en las coordenadas (t, x^i) se obtiene que ∂_t constituye un vector de Killing para la variedad, cabría preguntarse si existen otros vectores de Killing que, al menos de forma local, asocien una curva tipo tiempo. Esto con la finalidad de poder encontrar un forma *distinta* de asociar una evolución temporal que a la postre permita comparar este nuevo sistema con el otorgado por la métrica de Minkowski mediante los coeficientes de Bogolubov que los relacionan. En las siguientes líneas veremos que dicho vector de Killing puede ser encontrado y, realizando un cambio de variables, obtendremos que la descripción del sistema es justamente aquella de un observador acelerado; este fenómeno fue primeramente descrito por W.G. Unruh en 1976 [17], y por tal, hoy día se conoce como *efecto Unruh*.

Por simplicidad seguiremos el cálculo para el caso dos dimensional, (t, z) , no masivo, $m = 0$, de forma análoga a lo que puede consultarse en [18], que como bien se comenta en la referencia, presenta ciertos problemas asociados a divergencias pero constituye un modelo para explicar el fenómeno y prestar atención a las transformaciones de Bogolubov.

Partimos de la métrica de Minkowski dos dimensional,

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (2.43)$$

La condición de ser un vector de Killing para el vector X^μ , $\nabla_\nu X_\mu + \nabla_\mu X_\nu = 0$, en el caso plano donde los coeficientes de Christoffel son cero se reduce a

$$\partial_\nu X_\mu + \partial_\mu X_\nu = 0, \quad (2.44)$$

que al derivar una vez más, $\partial_\lambda \partial_\nu X_\mu + \partial_\lambda \partial_\mu X_\nu = 0$, y permutar de forma cíclica los índices permite obtener las siguientes expresiones:

$$\partial_\lambda \partial_\nu X_\mu + \partial_\lambda \partial_\mu X_\nu = 0, \quad \partial_\mu \partial_\lambda X_\nu + \partial_\mu \partial_\nu X_\lambda = 0, \quad \partial_\nu \partial_\mu X_\lambda + \partial_\nu \partial_\lambda X_\mu = 0. \quad (2.45)$$

Al sumar las dos primeras igualdades y restar la tercera se sigue:

$$0 = \partial_\lambda \partial_\nu X_\mu + \partial_\lambda \partial_\mu X_\nu + \partial_\mu \partial_\lambda X_\nu + \partial_\mu \partial_\nu X_\lambda - \partial_\nu \partial_\mu X_\lambda - \partial_\nu \partial_\lambda X_\mu = 2\partial_\mu \partial_\lambda X_\nu. \quad (2.46)$$

Como se obtiene la nulidad bajo la acción de una segunda derivada, el vector debe ser de la forma

$$X_\nu = A_\nu + B_{\nu\mu} x^\mu, \quad (2.47)$$

al sustituir en la Ec.(2.44) se sigue que la matriz $B_{\nu\mu}$ es antisimétrica pues

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\nu (A_\mu + B_{\mu\lambda} x^\lambda) + \partial_\mu (A_\nu + B_{\nu\lambda} x^\lambda) = B_{\mu\lambda} \delta_\nu^\lambda + B_{\nu\lambda} \delta_\mu^\lambda \\ &\Rightarrow B_{\mu\nu} = -B_{\nu\mu} \end{aligned} \quad (2.48)$$

por lo que hay múltiples formas independientes de generar vectores de Killing al fijar los valores de A_ν y $B_{\mu\nu}$. Una de ellas es tomar $A = (1, 0)$ y $B_{\mu\nu} = 0$, tal que el vector de Killing obtenido es $X = X^\nu \partial_\nu = A^\nu \partial_\nu = \partial_t$ como estaba presupuestado.

Ahora, si consideramos el caso en que $A = 0$ y $B_{10} = -B_{01} = 1$ y $B_{00} = 0 = B_{11}$ en la matriz $B_{\mu\nu}$, veremos que el vector de Killing asociado es

$$X = X^\nu \partial_\nu = \eta^{\nu\mu} X_\mu \partial_\nu = \eta^{\nu\mu} B_{\mu\lambda} x^\lambda \partial_\nu = z \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.49)$$

un generador de boosts que mezcla la coordenada espacial con la temporal.

Buscamos que este vector pueda jugar un papel análogo al que tiene el tiempo en espacio plano, para lo cual es necesario encontrar una región del espacio-tiempo en el que dicho vector sea tipo tiempo y en el que la métrica sea independiente del mismo, de forma que tengamos una región estática. Para hacer patente este objetivo realizaremos el siguiente cambio de coordenadas

$$t = \rho \sinh \eta \quad z = \rho \cosh \eta, \quad \rho, \eta \in \mathbb{R} \quad (2.50)$$

Cómo $z^2 - t^2 = \rho^2$, y ρ toma cualquier valor real, el sistema coordenado (η, ρ) cubre la región $z^2 > t^2$, a dicha zona la denominaremos *cuña de Rindler izquierda* y *cuña de Rindler derecha* según corresponda a la demarcación dictada por el eje t .

Observemos que el vector $z\partial_t + t\partial_z$ bajo este sistema coordenado adopta la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 z\frac{\partial}{\partial t} + t\frac{\partial}{\partial z} &= (\rho \cosh \eta) \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + (\rho \sinh \eta) \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \\
 &= (\rho \cosh \eta) \left(\frac{1 + 2 \sinh \eta (\sinh \eta + \cosh \eta)}{\rho (\sinh \eta + \cosh \eta)} \frac{\partial}{\partial \eta} - 2 \sinh \eta \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \\
 &\quad + (\rho \sinh \eta) \left(\frac{1 - 2 \cosh \eta (\sinh \eta + \cosh \eta)}{\rho (\sinh \eta + \cosh \eta)} \frac{\partial}{\partial \eta} + 2 \cosh \eta \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial \eta}.
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

Y en igual sintonía obtenemos que el elemento de línea pasa a ser

$$\begin{aligned}
 ds^2 = dt^2 - dz^2 &= \rho^2 \cosh^2 \eta d\eta^2 + \sinh^2 \eta d\rho^2 - \rho^2 \sinh^2 \eta d\eta^2 - \cosh^2 \eta d\rho^2 \\
 &= \rho^2 d\eta^2 - d\rho^2,
 \end{aligned} \tag{2.52}$$

que es independiente de η . Estos dos resultados permiten concluir que en la región que hemos denominado como cuñas de Rindler, η es una coordenada que toma el rol temporal, otorgando un vector de Killing tipo tiempo, y para la cual el espacio-tiempo en este sistema coordenado es estático. Estos hechos van a permitirnos definir un vacío sin ambigüedad y por el cual cabría preguntarse la relación que tiene con el vacío definido en el sistema coordenado (t, z) .

Notemos que si hubiéramos buscado la descripción de la región restantes, $z^2 < t^2$, nos veríamos en la necesidad de realizar el mismo cambio de coordenadas intercambiando el papel de η y ρ , en dicha situación la métrica tendría una dependencia de la variable a la que se reduce el vector de Killing; para estas regiones el vector de Killing que hallamos arriba es tipo espacio y no permite obtener una región estática, de hecho es dinámica y de paridad definida por lo que a estas regiones se les da el nombre de *Universo de Kasner en expansión o contracción* según el caso.

Para resumir todas estas observaciones hemos presentado la imagen (2.1) donde delimitamos las regiones de estudio, así como las curvas integrales del vector de Killing hallado y las direcciones $t - z$ y $t + z$, que representan las curvas nulas en espacio-tiempo de Minkowski, denotadas por U y V respectivamente.

Conviene realizar un último cambio de coordenadas con la misma estructura

$$\begin{aligned}
 t &= a^{-1} e^{a\xi} \sinh(a\tau), & z &= a^{-1} e^{a\xi} \cosh(a\tau), \\
 t &= a^{-1} e^{a\xi'} \sinh(a\tau'), & z &= -a^{-1} e^{a\xi'} \cosh(a\tau'), \quad \text{p.a. } a \in \mathbb{R}^+.
 \end{aligned} \tag{2.53}$$

El primer renglón describe la región asociada a la cuña derecha, mientras el segundo a la cuña izquierda. Hemos realizado este proceso pues la línea de mundo con $\xi = 0$ tiene aceleración constante a .

Recordar que nos situamos en una variedad descrita por la métrica de Minkowski y la ecuación de movimiento correspondiente al caso no masivo es $\partial_t^2 \varphi - \partial_z^2 \varphi = 0$, dado

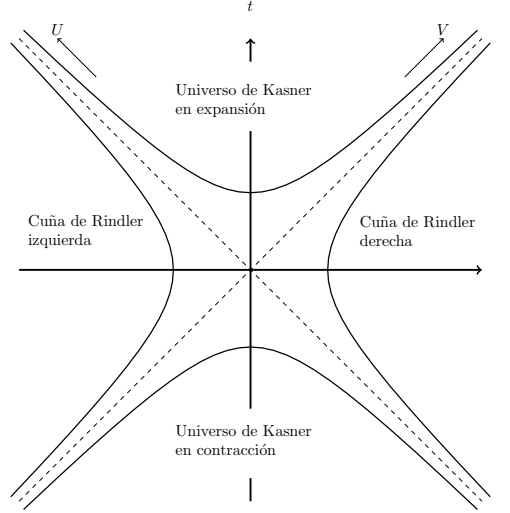


Figura 2.1: Se muestran las regiones $|t| < z$, $|t| < -z$, $t > |z|$ y $t < -|z|$ denominadas como cuña derecha de Rindler, cuña izquierda de Rindler, universo de Kasner en expansión y universo de Kasner en contracción respectivamente.

lo cual encontramos que el campo puede expandirse, una vez realizado el proceso de cuantización, como sigue

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}(t, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (\hat{a}_p e^{-i(E_p t - pz)} + \hat{a}_p^\dagger e^{i(E_p t - pz)}) \\ &= \int_0^{\infty} \frac{dp}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (\hat{a}_p e^{-i(E_p t - pz)} + \hat{a}_p^\dagger e^{i(E_p t - pz)} \\ &\quad + \hat{a}_{-p} e^{-i(E_p t + pz)} + \hat{a}_{-p}^\dagger e^{i(E_p t + pz)})\end{aligned}\quad (2.54)$$

donde $E_p = |p|$ pues $m = 0$. Recordando la definición dada a nuestras coordenadas, $U = t - z$ y $V = t + z$, encontramos que el campo adopta la forma

$$\hat{\varphi}(t, z) = \int_0^{\infty} \frac{dp}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2p}} (\hat{a}_p e^{-ipU} + \hat{a}_p^\dagger e^{ipU} + \hat{a}_{-p} e^{-ipV} + \hat{a}_{-p}^\dagger e^{ipV}). \quad (2.55)$$

Esto lo hemos hecho con la finalidad de dividir la expansión del campo en parte derecha e izquierda, $\hat{\varphi}(t, z) = \hat{\varphi}_+(U) + \hat{\varphi}_-(V)$. Y como ambas componentes del campo no interactúan entre sí podemos prestar solo atención a $\hat{\varphi}_+$.

El vacío de Minkowski está dado por

$$\hat{a}_p |0\rangle_M = 0, \quad \forall p \in \mathbb{R}^+. \quad (2.56)$$

Para el caso de la cuña derecha, con las coordenadas (τ, ξ) , el intervalo de línea toma la forma $ds^2 = e^{2a\varepsilon}(d\tau^2 - d\xi^2)$. Y consecuentemente la métrica es

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} e^{2a\varepsilon} & 0 \\ 0 & -e^{2a\varepsilon} \end{bmatrix}. \quad (2.57)$$

La ecuación de movimiento que encontramos para la cuña derecha pasa a ser

$$\square\varphi = \partial_\tau (\sqrt{-g}e^{-2a\xi}\partial_\tau\varphi) - \partial_\xi (\sqrt{-g}e^{-2a\xi}\partial_\xi\varphi) = 0 \Rightarrow \partial_\tau^2\varphi - \partial_\xi^2\varphi = 0. \quad (2.58)$$

Recordando que en esta región el espacio es estático, la Ec.(2.58) más allá de permitir realizar una expansión en modos, admite encontrar soluciones de frecuencia positiva y negativa expresadas como exponenciales de forma análoga a la Ec.(2.55). Cuando hacemos uso de la identificación $u = \tau - \xi$ y $v = \tau + \xi$ reconocemos que

$$\hat{\varphi}_+^R(u) = \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2k}} \left(\hat{b}_k^R e^{-iku} + \hat{b}_k^{R\dagger} e^{iku} \right). \quad (2.59)$$

Con un desarrollo similar, para el caso de la cuña izquierda de Rindler la expansión que se encuentra es

$$\hat{\varphi}_+^L(u') = \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2k}} \left(\hat{b}_k^L e^{-iku'} + \hat{b}_k^{L\dagger} e^{iku'} \right). \quad (2.60)$$

al hacer corresponder de forma subsecuente a u' con $\tau' + \xi'$.

Observamos que ambas cuñas son ajenas de modo que somos capaces de definir el vacío para la región del espacio-tiempo consistente en ambas cuñas como

$$\hat{b}_p^R |0\rangle_R = \hat{b}_p^L |0\rangle_R = 0, \quad \forall p \in \mathbb{R}^+. \quad (2.61)$$

Mediante el uso de las expresiones presentadas en la Ec.(2.53) es posible poner a la variable U en términos tanto de las coordenadas (τ, ξ) como de (τ', ξ') tal que

$$\begin{aligned} U = t - z &= -a^{-1} e^{a(\xi-\tau)} = -a^{-1} e^{-au} \\ U = t - z &= a^{-1} e^{a(\xi'+\tau')} = a^{-1} e^{au'}, \end{aligned} \quad (2.62)$$

de modo que al restringir la expresión que tenemos para la métrica de Minkowski, $\hat{\varphi}_+(U)$, a regiones que contengan a aquellas delimitadas en las cuñas ($V > 0 > U$ y $V < 0 < U$, para la cuña derecha e izquierda respectivamente) tendremos posesión de dos expansiones del campo en modos normales. Esta es la situación con la que nos encontramos con anterioridad al trabajar con la cuantización en un fondo curvo; poder expandir nuestro campo en dos bases de soluciones independientes.

Al definir a $\theta(x)$ como la función Heaviside tal que $\theta(x) = 1$ cuando $x \geq 0$ y cero en otro caso, encontramos que los comentarios anteriores se ven reflejados de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \theta(-U)\hat{\varphi}_+^R(u) &= \hat{\varphi}_+(U) \\ &\Rightarrow \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2k}} \left(\hat{b}_k^R \theta(-U) e^{-iku} + \hat{b}_k^{R\dagger} \theta(-U) e^{iku} \right) = \int_0^\infty \frac{dp}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2p}} \left(\hat{a}_p e^{-ipU} + \hat{a}_p^\dagger e^{ipU} \right) \\ \theta(U)\hat{\varphi}_+^L(u') &= \hat{\varphi}_+(U) \\ &\Rightarrow \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2k}} \left(\hat{b}_k^L \theta(U) e^{-iku'} + \hat{b}_k^{L\dagger} \theta(U) e^{iku'} \right) = \int_0^\infty \frac{dp}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2p}} \left(\hat{a}_p e^{-ipU} + \hat{a}_p^\dagger e^{ipU} \right). \end{aligned} \quad (2.63)$$

Para la cuña derecha, teniendo en mente la completez de los conjuntos solución somos capaces de representar los modos e^{-ipU} en función de aquellos relacionados con la variable u con ayuda de los coeficientes de Bogolubov de la siguiente forma

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{2p}}e^{-ipU} = \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\theta(-U)}{\sqrt{2k}} (\alpha^R(p, k)e^{-iku} + \beta^R(p, k)e^{iku}). \quad (2.64)$$

Por la Ec.(2.31) sabemos que estos coeficientes pueden obtenerse mediante el cálculo de los productos interiores

$$\alpha^R(p, k) = \left(\frac{\theta(-U)}{2\pi\sqrt{2k}}e^{-iku}, \frac{1}{2\pi\sqrt{2p}}e^{-ipU} \right)_{\Sigma}, \quad \beta^R(p, k) = - \left(\frac{\theta(-U)}{2\pi\sqrt{2k}}e^{iku}, \frac{1}{2\pi\sqrt{2p}}e^{-ipU} \right)_{\Sigma} \quad (2.65)$$

específicamente:

$$\begin{aligned} \alpha^R(p, k) &= i \int_{-\infty}^{\infty} dU \left[\frac{\theta(-U)}{2\pi\sqrt{2k}}e^{iku} \partial_U \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{2p}}e^{-ipU} \right) - \frac{1}{2\pi\sqrt{2p}}e^{-ipU} \partial_U \left(\frac{\theta(-U)}{2\pi\sqrt{2k}}e^{iku} \right) \right] \\ &= i \int_{-\infty}^0 dU \frac{1}{4\pi^2\sqrt{4kp}} \left[-(-aU)^{-\frac{ik}{a}}(ip)e^{-ipU} - e^{-ipU}(ik)(-aU)^{-\frac{ik}{a}-1} \right] \\ &= i \int_{-\infty}^0 dU \frac{1}{4\pi^2\sqrt{4kp}} \left[\frac{\partial}{\partial U} \left((-aU)^{-\frac{ik}{a}}e^{-ipU} \right) - 2e^{-ipU}(ik)(-aU)^{-\frac{ik}{a}-1} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \sqrt{\frac{k}{p}} \int_{-\infty}^0 dU (-aU)^{-\frac{ik}{a}-1} e^{-ipU} = \frac{1}{4\pi^2 a} \sqrt{\frac{k}{p}} \Gamma\left(\frac{-ik}{a}\right) \left(\frac{a}{p}\right)^{-\frac{ik}{a}} e^{\pi k/2a}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

El seguimiento de un proceso similar otorga la relación para el coeficiente de Bogolubov restante

$$\beta^R(p, k) = \frac{1}{4\pi^2 a} \sqrt{\frac{k}{p}} \Gamma\left(\frac{ik}{a}\right) \left(\frac{a}{p}\right)^{\frac{ik}{a}} e^{-\pi k/2a}. \quad (2.67)$$

Para el caso de la cuña izquierda la obtención de los coeficientes de Bogolubov se realiza en consideración de la variable u' que al ponerla en función de la variable U la integral resultante es la misma que en el caso de la cuña derecha salvo por el intercambio $U \rightarrow -U$ cuya consecuencia es justamente conjugar la expresión, con lo cual

$$\alpha^L(p, k) = (\alpha^R(p, k))^*, \quad \beta^L(p, k) = (\beta^R(p, k))^*. \quad (2.68)$$

Hemos sido capaces de obtener los coeficientes de Bogolubov que relacionan las cuñas de Rindler cuya evolución temporal viene dada por la variable τ y el espacio-tiempo descrito bajo la métrica de Minkowski, objetivo principal de la subsección. Y como en el caso de un espacio-tiempo curvo, el siguiente paso es calcular el valor esperado del operador de número \hat{N}_k en el vacío de Minkowski. Con dicha empresa en mente y con el auxilio de la Ec.(2.36) un valor de expectación relacionado toma la siguiente forma:

$$\langle 0 | b_k^{\dagger R} b_{k'}^R | 0 \rangle_M = \langle 0 | (\beta^R(p, k))^* \beta^R(p, k') | 0 \rangle_M$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{16\pi^4 a^2} \sqrt{kk'} \Gamma\left(\frac{ik}{a}\right) \Gamma^*\left(\frac{ik'}{a}\right) e^{-\frac{\pi(k+k')}{2a}} \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{1}{p} \left(\frac{a}{p}\right)^{\frac{i}{a}(k-k')} \\
&= \frac{1}{16\pi^4 a^2} \sqrt{kk'} \Gamma\left(\frac{ik}{a}\right) \Gamma^*\left(\frac{ik'}{a}\right) e^{-\frac{\pi(k+k')}{2a}} [2\pi a \delta(k-k')], \quad (2.69)
\end{aligned}$$

que para el caso particular $k = k'$ obtenemos el valor esperado del operador de número, $\hat{N}_k = b_k^{\dagger R} b_k^R$, al usar, a su vez, que $|\Gamma(ix)|^2 = \pi/(x \sinh(\pi x))$,

$$\langle 0 | \hat{N}_k | 0 \rangle_M = \langle 0 | b_k^{\dagger R} b_k^R | 0 \rangle_M = \langle 0 | b_k^{\dagger L} b_k^L | 0 \rangle_M = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\delta(0)}{(e^{2\pi k/a} - 1)}. \quad (2.70)$$

La divergencia se atribuye al proceso de integración sobre toda la región que ocupan las cuñas de Rindler, siendo el factor acompañante el que despierta interés al tratarse del valor de expectación de un baño térmico de partículas de Bose-Einstein con temperatura $T_U = \frac{a}{2\pi}$. Se entiende entonces que un observador acelerado, con aceleración propia a , observa un baño térmico de partículas con *temperatura de Unruh* $\frac{a}{2\pi}$ donde un observador inercial no observa ninguna.

Capítulo 3

Cuantización de un campo escalar cerca de un agujero negro y la radiación de Hawking

Durante el capítulo pasado realizamos un breve estudio sobre la cuantización del campo escalar sobre una variedad identificada mediante una métrica arbitraria y dispusimos de especial atención al hecho de que, en general, se puede encontrar más de una base de soluciones para la ecuación de Klein-Gordon. La relación a pares de las bases mencionadas está dada por las transformaciones de Bogolubov correspondientes. En dichas transformaciones los modos no siempre conservan la paridad de la frecuencia asociada al representarse en otra base, ocasionando que los vacíos generados por ambas soluciones no coincidan.

Con la finalidad de observar lo dicho en un cálculo concreto, se vio conveniente revisar un ejemplo que hiciese uso de los coeficientes de Bogolubov. El citado ejemplo fue el efecto Unruh, que si bien constituye una descripción en el espacio-tiempo de Minkowski, las transformaciones resultan ser no triviales al considerar una referencia de evolución temporal distinta a la otorgada por el vector de Killing ∂_t . Los cambios de coordenadas permitieron reconocer que el sistema otorgado por el vector de Killing $z\partial_t + t\partial_z$ equivale a un observador acelerado respecto al observador inercial de espacio-tiempo plano, el cual distingue un baño térmico en un estado de vacío de la métrica de Minkowski.

En el capítulo presente se llevará a cabo el estudio de la solución presentada por Schwarzschild en 1915 a las ecuaciones de campo de la relatividad general, esto con la finalidad de adaptar las herramientas revisadas en el capítulo precedente a un espacio-tiempo de Schwarzschild. Desembocando en la presentación de un agujero negro de simetría esférica, estático y sin carga cerca del cual buscaremos dar seguimiento al proceso de colapso en transición de un espacio-tiempo de Minkowski a uno globalmente tipo Schwarzschild; calculando en última instancia los coeficientes de Bogolubov entre tiempos muy tempranos y muy tardíos, encontrando que el camino a recorrer es en extremo similar al seguido con anterioridad referente al efecto

Unruh.

3.1. Solución de Schwarzschild a las ecuaciones de campo

La complejidad que involucran las ecuaciones de campo de la relatividad general llevaron a pensar en la ausencia de soluciones exactas más allá de la multitudada métrica de Minkowski de la que tanto se ha hecho uso. Mas la sentencia se vio pronto refutada a poco tiempo de hacerse pública la teoría de la relatividad general por el físico alemán Schwarzschild en una carta dirigida a Einstein en 1915. La solución propuesta corresponde a la descripción de un espacio-tiempo estático con simetría espacial esférica fuera de un cuerpo en el vacío, de esto último se rescata el que las ecuaciones de campo adopten la forma $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0$, mientras lo segundo mencionado implica que finalmente se obtenga $R_{\mu\nu} = 0$.

Por la compacidad del tratado presentaremos la métrica que cumple con los requisitos previos y es solución de las ecuaciones de campo con propósito fijo de solo verificar dichas afirmaciones, sin dejar, en cambio, de mencionar que en [4] podrá reconocerse una deducción apropiada de lo ya dicho.

El actor principal al que se ha aludido es la *métrica de Schwarzschild*:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (3.1)$$

haciéndose explícita la simetría esférica con el manejo de las coordenadas (t, r, θ, ϕ) y el aspecto estático en la ausencia de una dependencia temporal, mientras M representa la masa del objeto central. Por otro lado, el cumplimiento de las ecuaciones de campo se sigue del cálculo correspondiente de los símbolos de Christoffel,

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 = -\Gamma_{11}^1 &= \frac{M}{r(r-2M)}, & \Gamma_{00}^1 &= \frac{M}{r^3}(r-2M), & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{22}^1 &= -(r-2M), & \Gamma_{33}^1 &= -\sin^2 \theta (r-2M), & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta \\ & & \Gamma_{23}^3 &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, & & \end{aligned} \quad (3.2)$$

únicos elementos no nulos que permitirán concluir que $R_{\mu\nu}$ con $\mu \neq \nu$ son trivialmente cero por las simetrías que se ven involucradas y dichos elementos ausentes; donde para $\mu = \nu$ será justamente la representación explícita de los símbolos que lleven a los sumandos a contrapesarse.

La métrica Schwarzschild cobra especial relevancia por ser una solución que aproxima de buena manera los escenarios de interés científico, como el comportamiento alrededor de una estrella o, recientemente, la actividad cerca de un *agujero negro*, pues aunque no sea un escenario circundado por un vacío material, a las cercanías los resultados son verosímiles. Más aún, la solución propuesta es la única posible

para un sistema estático en cuatro dimensiones con simetría esférica entorno a un cuerpo ubicado en el vacío, este hecho fue mostrado por primera vez en 1923, [19], y toma el nombre de *teorema de Birkhoff*.

Esta métrica ha sido objeto de estudio durante un largo tiempo y las consecuencias, que de la mano se conducen con la teoría de la relatividad, han impulsado importantes avances en la física. Por ello haremos uso del universo descrito por estas condiciones cuya simplicidad permitirá exponer los resultados buscados respecto a la radiación de Hawking con mayor claridad. Sin embargo será importante tomar un breve espacio al análisis que de la métrica pueda hacerse y conducir el estudio al agujero negro del que se ha hablado.

Comencemos con visualizar las posibles particularidades que del sistema coordenado se deducen. Las coordenadas angulares son las de estudio común y de dominio usual, mientras que t , coordenada temporal de Schwarzschild, es similar de la coordenada temporal de Minkowski en la aproximación $r \rightarrow \infty$.

Por otro lado la coordenada radial de Schwarzschild, r , representa la longitud dividida por 2π de una circunferencia máxima en una hipersuperficie con r constante, que coincide con la distancia radial similarmente a como sucede en el caso temporal. Pero aquí encontramos demás elementos de interés, específicamente dos valores singulares para r como lo son 0 y $2M$. El primero de ellos representa una singularidad *auténtica*, es decir, que bajo cualquier cambio de coordenadas que se busque realizar va a encontrarse una divergencia en las componentes de la métrica; este hecho se conecta con la curvatura de la variedad y puede verificarse al encontrar un escalar generado a partir del tensor de Riemann en el que al evaluar en $r = 0$ se encuentra una divergencia, se postula entonces al valor como una singularidad de la geometría del sistema descrito. Por el contrario, $r = 2M$ es una singularidad propia del sistema coordenado elegido, y además ocurre una situación interesante en relación a lo que causalmente se presenta al interior de esta superficie. Para clarificar lo dicho deberemos describir la estructura de los conos de luz en este espacio-tiempo, limitados por *curvas nulas* de θ y ϕ constantes:

$$0 = ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2, \quad (3.3)$$

de donde se sigue que

$$\frac{dt}{dr} = \pm \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}, \quad (3.4)$$

justamente la pendiente de los conos de luz sobre el plano $t-r$. Como ya es de esperar, para grandes distancias la pendiente se reduce a ± 1 como ocurre en espacio-tiempo plano. En cambio, si $r \rightarrow 2M$ entonces $\frac{dt}{dr} \rightarrow \pm\infty$, el cono de luz tiende a degenerarse a una recta. Pareciese que un rayo de luz que parta de una superficie con $r > 2M$ es incapaz de llegar a aquella de $r = 2M$ en un tiempo propio finito. Esto es realmente una consecuencia del sistema coordenado con el que se está trabajando. La situación puede verse fácilmente suprimida al tomar las modificaciones conocidas a través de las coordenadas de Eddington-Finkelstein, $u = t - r^*$ y $v = t + r^*$, donde $r^* = r + 2M \ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right)$, es conocida como coordenada de *tortuga*, de modo que al poner

a t en términos de v se obtiene que

$$\begin{aligned} ds^2 &= - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \\ &= - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv^2 + (dvdr + drdv) + rd\Omega^2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$. Estas coordenadas son útiles pues definen direcciones radiales para las geodésicas nulas; entrantes son aquellas con $v = cte$ mientras que las salientes quedan descritas por $u = cte$. Notemos además que, aunque la componente g_{vv} es cero con $r = 2M$, el comportamiento es completamente regular, sin alguna divergencia involucrada.

Por otro lado, las curvas nulas satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \text{Salientes (u=cte):} \quad & \frac{dv}{dr} = \frac{du}{dr} + 2\frac{dr^*}{dr} = 2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}, \\ \text{Entrantes (v=cte):} \quad & \frac{dv}{dr} = 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Vemos aquí que toda curva entrante no tiene restricción en alcanzar o no la superficie $r = 2M$, pero las pendientes que limitan el cono de luz dentro de ésta son 0 y $2(1 - 2M/r) < 0$, orientando el futuro temporal de toda curva a $r = 0$; un observador ubicado al interior de este *horizonte* alcanza inexorablemente la auténtica singularidad geométrica del sistema, [6]. A partir de este momento, a la superficie trazada por $r = 2M$ le llamaremos *horizonte de eventos* de Schwarzschild, denominación usual, en un sistema general, a una zona donde los eventos en su interior son incapaces de evitar alguna singularidad del sistema, además recordar que los conos de luz fueron encontrados a partir de curvas nulas, de donde, aún cuando nuestro observador ubicado ‘dentro’ del horizonte tratase de comunicarse luminosamente con alguien en el ‘exterior’, el fotón utilizado deberá alcanzar a su vez la singularidad. Existe una desconexión causal entre ambas zonas halladas.

3.1.1. Agujero negro de Schwarzschild

Por lo último mencionado, la incapacidad de recibir un fotón fuera del horizonte de eventos cuando este fue enviado desde una superficie $r < 2M$, es una región del espacio-tiempo que pareciera invisible, completamente *negra*, a los observadores exteriores. Es por ello que actualmente se conoce como *agujero negro* a las regiones del espacio-tiempo separadas causalmente del sistema, regiones que una vez dentro se hace imposible salir o comunicarse con el exterior.

Un universo descrito por la métrica de Schwarzschild despliega abundantes consecuencias que comparten lugar con la ciencia-ficción y que sin duda han incitado multitud de literatura al respecto; pues aquí tienen existencia no solo los agujeros negros (cuya evidencia experimental permite asegurar su existencia en nuestro

universo) sino también agujeros blancos y agujeros de gusano como puente entre regiones desconexas causalmente. Lastimosamente, que tal como se comenta en [6], esta métrica no representa con exactitud lo que ocurre en nuestro universo, pues la presencia de materia, un tensor de energía-momento distinto de cero, cambia rotundamente la solución.

Una visión ligeramente más acertada es pensar que en un principio la estructura espacio-temporal de nuestro universo no es descrita por la métrica de Schwarzschild, sino globalmente parecida a Minkowski, sobre la que habita una estrella de radio mayor a $2M$. Con el pasar del tiempo la estrella va perdiendo la capacidad de generar combustible y de compensar la atracción gravitacional que ejerce su propia masa. Consecuentemente, el radio de la estrella tenderá a hacerse cada vez menor hasta cruzar el umbral de la superficie $r = 2M$, la estrella ha *colapsado* gravitacionalmente hasta convertirse en un agujero negro.¹ Una vez lo cual se tiene un universo tipo Schwarzschild, al menos localmente.

Este proceso de colapso puede verse representado gráficamente por el siguiente diagrama de Penrose, Fig.(3.1). La parte coloreada representa al objeto material (estrella) y es una zona no descrita por la métrica de Schwarzschild, pero sí tenemos una descripción dada por la misma una vez que se forma el horizonte de eventos en $r = 2M$. El espacio-tiempo es asintóticamente plano, es decir, al considerar $r \gg 0$ la métrica que describe el sistema degenera en la métrica de Minkowski.

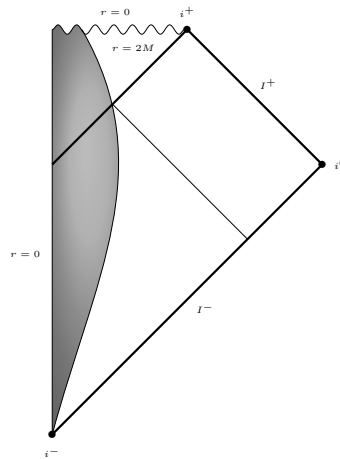


Figura 3.1: Se muestra el diagrama de Penrose del proceso de un colapso gravitacional. La zona coloreada representa el elemento material que colapsa, mientras que I^- e I^+ son el infinito pasado nulo y el infinito futuro nulo. $r = 2M$ describe la formación del horizonte de eventos con una singularidad en $r = 0$. Por último el infinito radial está representado por i^0 .

¹Cuando se agota el combustible (hidrógeno) del núcleo de una estrella, su evolución dependerá de la masa de la misma y puede convertirse en una enana blanca o liberar energía como supernova, no necesariamente se presenta la creación de agujero negro.

Este es el escenario que tomaremos para estudiar la radiación de Hawking, donde partiremos de un espacio-tiempo esencialmente tipo Minkowski, transitaremos por el proceso de colapso y volveremos a revisar el sistema mucho tiempo después, donde encontramos un universo globalmente de Schwarzschild. Compararemos los modos normales y calcularemos los coeficientes de Bogolubov con la finalidad de obtener el valor de expectación del operador de número respecto al vacío inicial.

3.2. Radiación de Hawking

Durante la sección presente buscaremos realizar la descripción de la cuantización del campo de Klein-Gordon real cerca de un agujero negro de Schwarzschild. Al igual que como sucedió al estudiar el efecto Unruh partiremos de la premisa de cuantizar un campo escalar no masivo con el propósito de facilitar los cálculos y presentar de forma un poco más clara el fenómeno en cuestión. A su vez, por la simetría esférica solicitada, consideraremos un campo independiente de las coordenadas angulares (θ, ϕ) .

Utilizando la expresión de la métrica (3.1) la ecuación de movimiento adopta la forma:

$$\begin{aligned} 0 &= \square\varphi(r, t) = \partial_\mu (\sqrt{-g}g^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi) \\ &= \sin(\theta) \left[-r^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \partial_t^2 \varphi + r^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \partial_r^2 \varphi + 2(r - M) \partial_r \varphi \right], \end{aligned} \quad (3.7)$$

que al poner el función de $r^* = r + 2M \ln \left(\frac{r}{2M} - 1\right)$ se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= -r^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \partial_t^2 \varphi + r^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \partial_{r^*}^2 \varphi \\ &\quad - 2M \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \partial_{r^*} \varphi + 2(r - M) \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \partial_{r^*} \varphi. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Finalmente debe recordarse que nos encontramos en las cercanías del agujero negro, en particular $r > 2M$, hecho que permite concluir que la ecuación de movimiento del campo es

$$-\partial_t^2 \varphi(t, r^*) + \partial_{r^*}^2 \varphi(t, r^*) + \frac{2}{r} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \partial_{r^*} \varphi(t, r^*) = 0, \quad (3.9)$$

teniendo a r como función implícita de r^* . Al aparecer una primera derivada del campo, la ecuación de movimiento no es *conforme* a la que presenta el espacio-tiempo de Minkowski por lo que los modos de oscilación deben diferir. Pero aún encontramos un rezago de similitud al hacer el cambio $\varphi \rightarrow \frac{\phi}{r}$ que conduce a la ecuación de movimiento:

$$-\partial_t^2 \phi + \partial_{r^*}^2 \phi + \frac{2M}{r^3} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \phi = 0. \quad (3.10)$$

Como se describe en [20], $V(r) = \frac{2M}{r^3} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$, constituye un potencial efectivo en la ecuación de movimiento, con un máximo positivo alcanzado en $r = \frac{8}{3}M$. Este potencial efectivo actúa como una barrera reflejante de modos de oscilación de baja energía, tornando el problema en una búsqueda de coeficientes de transmisión. Como veremos en breve, el interés de nuestro estudio se centrará en modos de alta frecuencia cerca del agujero negro haciendo despreciable la acción del potencial sobre los mismos, dado lo cual supondremos que la siguiente ecuación de movimiento describe la evolución del campo,

$$-\partial_t^2 \phi + \partial_{r^*}^2 \phi = 0. \quad (3.11)$$

Esta es una ecuación para el campo como aquella dada en un espacio-tiempo plano $1 + 1$ dimensional. Y al igual a como se dio el desarrollo en el ejemplo del efecto Unruh, aceptan una expansión en modos independientes, salientes y entrantes, dados por $u = t - r^*$ y $v = t + r^*$ respectivamente, de la forma

$$\phi_k^u = \frac{1}{2\pi\sqrt{2k}} e^{-iku}, \quad y \quad \phi_k^v = \frac{1}{2\pi\sqrt{2k}} e^{-ikv}. \quad (3.12)$$

A través de un proceso de cuantización canónica, que reconocemos ya con relativa solvencia, tenemos que el campo se escribe según estos modos como

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_u(u) &= \int_0^\infty dk \left(\hat{a}_k^u \phi_k^u + \hat{a}_k^{u\dagger} \phi_k^{u*} \right) \\ \hat{\phi}_v(v) &= \int_0^\infty dk \left(\hat{a}_k^v \phi_k^v + \hat{a}_k^{v\dagger} \phi_k^{v*} \right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Una vez ubicados en esta situación tenemos las herramientas necesarias para construir un espacio de Fock, y particularmente, un vacío generado a partir de los operadores de aniquilación \hat{a}_p^u y \hat{a}_p^v , que podemos escribir como $|0\rangle_u \otimes |0\rangle_v$. Es importante observar que en la aproximación asintótica de $r \rightarrow \infty$, el comportamiento de espacio-tiempo tipo Minkowski también se ve reflejado cuando se hace despreciable la acción del potencial efectivo, los modos escritos arriba, y por tanto el vacío hallado, son justamente aquellos que registran observadores inerciales lejos del agujero negro.

Estamos ya en posesión de un espacio de Fock que funciona como buena aproximación en las cercanías del agujero negro de Schwarzschild, ahora necesitamos realizar una comparación con el espacio de Fock que describe el sistema previo al proceso de colapso del agujero negro. Una vez visto el ejemplo del efecto Unruh se visualiza la necesidad de tener un proceso energético que otorgue una relación no trivial para los coeficientes de Bogolubov, en aquel caso se tenía un observador acelerado, aquí el causante de la radiación que se encontrará en breve es el proceso de generación del agujero negro, pues existe una transición temporal entre dos variedades estacionarias especificados por métricas distintas.

En [21] se ejemplifica lo dicho con un gráfico como el siguiente

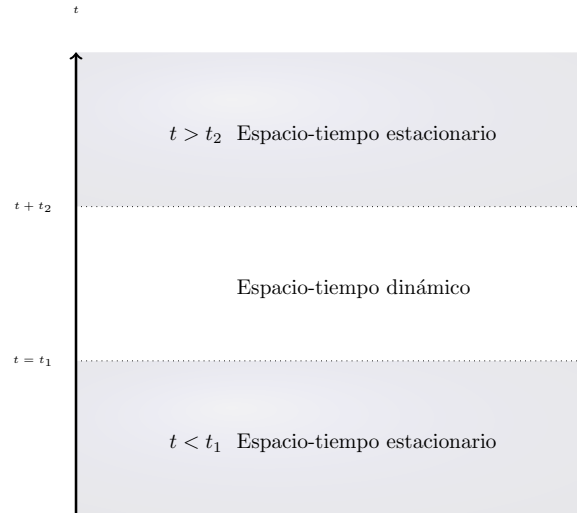


Figura 3.2: Se muestra la transición de un universo descrito por métricas estacionarias, no necesariamente iguales, en las regiones temporales $t < t_1$ y $t > t_2$. Mientras que la región central, $t_1 < t < t_2$, hay una dependencia temporal por parte de la métrica.

Este es un universo tipo “sandwich” que tomaremos como base al realizar nuestra comparación de estados y obtención de los coeficientes de Bogolubov, proceso que puede consultarse similarmente en [22]. Estudiaremos concretamente los estados muy posteriores al proceso de colapso, donde se supondrá un universo globalmente tipo Schwarzschild y haremos a estos propagarse atrás temporalmente, transitar por la formación del agujero, y arribar a una región del espacio-tiempo que consideraremos tipo Minkowski fuera del objeto masivo. Pareciese un conglomerado de suposiciones que alejan el estudio que se intenta de la realidad, sin embargo, es una buena aproximación a lo que ocurre cuando el agujero es la única fuente de radiación relevante (en los alrededores), además como ya se comentó, la propagación de los modos sobre la zona de colapso corresponde a aquellos de muy alta frecuencia, por lo que la barrera de potencial se considera despreciable.

Con la situación descrita en mente, para los estados tardíos, los modos de oscilación son los dictados por la Ec.(3.12), que otorgan el vacío ya mencionado pero que por comodidad denotaremos a partir de ahora como $|0\rangle_{futuro}$. Para las zonas que hemos supuesto tipo Minkowski bastara revisar el capítulo anterior para recordar que, una vez definidas las coordenadas nulas $U = t - r$ y $V = t + r$, los modos independientes son

$$\phi_p^U = \frac{1}{2\pi\sqrt{2p}}e^{-ipU}, \quad y \quad \phi_p^V = \frac{1}{2\pi\sqrt{2p}}e^{-ipV}. \quad (3.14)$$

Que, como corresponde, otorgan la definición de un vacío que llamaremos $|0\rangle_{pasado}$, esto con la finalidad de hacer reconocible los vacíos correspondientes al futuro y pasado asintóticos. Estos son los estados en los que estamos interesados realizar nuestra comparación, y para reconocer si difieren o no deberemos propagar los modos

del futuro asintótico, en espacial los modos salientes, al pasado, como ya se ha hecho mención y como resaltamos a continuación a partir de la Fig.(3.3).

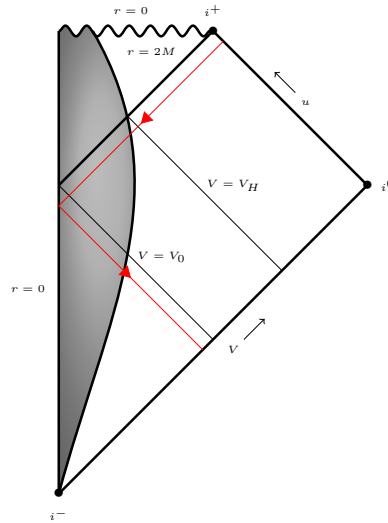


Figura 3.3: Se resalta con un segmento de línea color rojo el proceso de propagación desde el infinito futuro nulo hasta el infinito pasado nulo de un modo saliente.

Como primer trayecto a recorrer, será propagar un modo saliente en el futuro asintótico cerca del horizonte de eventos ($r \approx 2M$) hasta la zona de materia. Posicionarse cerca del horizonte de eventos es relevante debido a las aproximaciones siguientes: en primer lugar, partiendo de la definición de $r^* = r + 2M \ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right)$, cerca del horizonte de eventos el sumando que involucra al logaritmo es dominante, por lo que $r^* \approx 2M \ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right)$, que a su vez es arbitrariamente negativo mientras más cerca se esté del horizonte de eventos. Debido al signo que toma bajo el renombre de u , $u = t - r^*$, ésta se vuelve arbitrariamente grande. De esto último el que los modos salientes en los que se tiene interés son de alta frecuencia y se corresponden con los ϕ_p^u de la Ec.(3.12) obtenidos bajo la suposición de despreciar el efecto del potencial efectivo.

La propagación hasta llegar a la zona de materia es libre y los modos no se ven alterados, por lo que, en sintonía, supondremos que la interacción sobre el objeto que colapsa es nula debido a la alta frecuencia de los modos. De aquí que la propagación desde la zona de materia llegue al infinito pasado nulo conservando la *distancia afín* a la continuación de la geodésica del horizonte de eventos, acción conocida como *aproximación geométrica*.

Hemos propagado el modo deseado hasta la zona requerida; el problema se reduce en este momento a describir como el espacio-tiempo inicial ‘observa’ a este modo, es decir, como expresamos a la coordenada u en términos de U y V . Con este objetivo en mente realizaremos un breve repaso de la reparametrización afín que se puede hacer en las geodésicas para la métrica de Schwarzschild, siguiendo lo visto en [23].

Encontrar geodésicas para una métrica compatible puede ser visto como la extremización de una acción dada por el Lagrangiano, $\mathcal{L} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}$, de una partícula con coordenadas x^μ y velocidades $\frac{dx^\mu}{d\lambda}$. Las ecuaciones de Euler-Lagrange resultantes implican que si $g_{\mu\nu}$, y por tanto \mathcal{L} , son independientes de la coordenada x^μ entonces el momento conjugado $p_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu}$ es constante a lo largo de la geodésica pues

$$\frac{d}{d\lambda} p_\mu = \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dx^\mu}{d\lambda}\right)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0. \quad (3.15)$$

Situación que ocurre en la métrica de Schwarzschild con t y ϕ . Por lo que al considerar el plano que contiene a la geodésica sobre $\theta = \pi/2$ ² obtenemos las siguientes ecuaciones

$$p_t = g_{0\nu} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\lambda} = E \quad (3.16)$$

$$p_\phi = g_{3\nu} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = -r^2 \frac{d\phi}{d\lambda} = -L, \quad (3.17)$$

es decir,

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\lambda} = E, \quad r^2 \frac{d\phi}{d\lambda} = L. \quad (3.18)$$

con E y L constantes. Ahora bien para una geodésica nula $\mathcal{L} = 0$, de donde se deduce que

$$0 = \mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - r^2 \left(\frac{L}{r^2}\right)^2 \right]. \quad (3.19)$$

Que consecuentemente se liga a

$$\frac{dr}{d\lambda} = \pm E \Rightarrow r = \pm E\lambda + K_1 \quad (3.20)$$

cuando trabajamos con una geodésica radial nula tal que $L = 0$, relacionando el signo positivo con las curvas salientes y el negativo con las entrantes.

De las ecuaciones (3.18) y (3.20) se encuentra que

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\lambda} \mp \frac{dr}{d\lambda} = 0 \quad (3.21)$$

o bien, como $\frac{dr^*}{d\lambda} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \frac{dr}{d\lambda}$ se sigue

$$\frac{d}{d\lambda} (t \mp r^*) = 0. \quad (3.22)$$

recobrando la información que teníamos para curvas nulas entrantes y salientes (u y v constantes respectivamente).

²La conservación del momento angular para la métrica de Schwarzschild implica que la partícula se mueve en un plano, escogiendo el plano $\theta = \pi/2$, si la partícula no cae en dicho plano puede rotarse el sistema hasta que lo haga.

Para una geodésica C que parta del infinito pasado nulo en la Fig.(3.3) con V constante, por ejemplo V_H , teniendo a λ como el parámetro afín sobre esta geodésica, resultará que u a lo largo de C es una función $u(\lambda)$ que satisface

$$\frac{du(\lambda)}{d\lambda} = \frac{dt}{d\lambda} - \frac{dr^*}{d\lambda} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(-\frac{dr}{d\lambda} - \frac{dr}{d\lambda}\right) = 2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} E. \quad (3.23)$$

Si en la Ec.(3.20) pedimos que $\lambda = 0$ sobre el horizonte de eventos, $r = 2M$, se halla lo siguiente

$$r = -E\lambda + 2M \Rightarrow r - 2M = -E\lambda \Rightarrow 1 - \frac{2M}{r} = \frac{1}{1 - \frac{2M}{E\lambda}}. \quad (3.24)$$

Sustituyendo esto último en (3.23)

$$\frac{du}{d\lambda} = 2 \left(1 - \frac{2M}{E\lambda}\right) E \Rightarrow u = 2E\lambda - 4M \ln \left(\frac{\lambda}{K_2}\right), \quad (3.25)$$

con $K_2 < 0$. Cerca del horizonte de eventos ($\lambda \approx 0$) el sumando dominante es $2M \ln \left(\frac{\lambda}{K_2}\right)$ por lo que en la situación de interés encontraremos

$$u(\lambda) = -4M \ln \left(\frac{\lambda}{K_2}\right). \quad (3.26)$$

Tenemos entonces que nuestro rayo saliente, que quisimos partiese del infinito futuro nulo y entrase en la zona de materia, pasa a ser un rayo entrante después de alcanzar $r = 0$ que se origina en el infinito pasado nulo con V constante, es decir, $u = u(V)$. El rayo entrante con $V = V_0$ es el último que alcanza el centro del cuerpo material y llega a I^+ , toda curva con $V > V_0$ alcanza de forma inevitable el horizonte de eventos y consecuentemente la singularidad del sistema.

El parámetro afín λ que parametriza cualquier geodésica nula entrante como la mencionada C puede ajustarse para relacionarse con u como en (3.26) cerca del horizonte de eventos. Con lo cual, la distancia afín entre $u(V)$ y $u(V_0)$ se mantiene constante a lo largo de la propagación como una medida otorgada en función de λ y una geodésica entrante que pase por ambas geodésicas salientes. Ahora, dada la aproximación geométrica utilizada, al pasar por $r = 0$ las curvas se corresponden con aquellas entrantes de V y V_0 constantes, y conservan la distancia afín hasta arribar a I^- . Más aún, como el infinito pasado nulo se supone lo suficientemente lejos del cuerpo en colapso, V constituye ella misma una coordenada afín a lo largo de I^- . De modo que, $V - V_0$ debe relacionarse con la separación afín λ entre $u(V)$ y $u(V_0)$ en I^+ de forma proporcional

$$V_0 - V = K_3 \lambda, \quad (3.27)$$

con K_3 una constante negativa. Relación que permite concluir que u es vista en función de V de la siguiente forma

$$u(V) = -4M \ln \left(\frac{V_0 - V}{K}\right), \quad (3.28)$$

siendo $K = K_2 K_3$ el producto de constantes negativas.

Con lo visto hasta este momento hemos construido las herramientas necesarias para visualizar la propagación completa de nuestro modo saliente desde el infinito futuro nulo descrito por la métrica de Schwarzschild y asociado a las coordenadas nulas u y v , hasta el infinito pasado nulo donde se ha supuesto un espacio-tiempo de Minkowski con U y V como coordenadas nulas. La propagación es esencialmente libre dadas las aproximaciones realizadas y solo se exige la representación de un sistema coordinado en su homólogo para realizar el cálculo explícito de los coeficientes de Bogolubov, que por si fuera poco, dada la relación de u con V , el aparato matemático a seguir es exactamente el mismo que el ya utilizado en el efecto Unruh salvo la precaución que deba tenerse respecto a la constante K y la referencia de V_0 .

La completez de los conjuntos solución permite establecer la siguiente relación entre los modos salientes y entrantes mediante los coeficiente de Bogolubov

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{2p}}e^{-ipV} = \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\theta(V_0 - V)}{\sqrt{2k}} (\alpha(p, k)e^{-iku} + \beta(p, k)e^{iku}). \quad (3.29)$$

Reconociendo que el cálculo explícito de los coeficientes corre a cargo de los productos interiores

$$\alpha(p, k) = \left(\frac{\theta(V_0 - V)}{2\pi\sqrt{2k}} e^{-iku}, \frac{1}{2\pi\sqrt{2p}} e^{-ipV} \right)_{\Sigma},$$

$$\beta(p, k) = - \left(\frac{\theta(V_0 - V)}{2\pi\sqrt{2k}} e^{iku}, \frac{1}{2\pi\sqrt{2p}} e^{-ipV} \right)_{\Sigma}. \quad (3.30)$$

Que en total analogía a lo expuesto en la Ec.(2.66), permiten ver que para este caso ocurre

$$\begin{aligned} \alpha(p, k) &= i \int_{-\infty}^{\infty} dV \left[\frac{\theta(V_0 - V)}{2\pi\sqrt{2k}} e^{iku} \partial_V \left(\frac{e^{-ipV}}{2\pi\sqrt{2p}} \right) - \frac{e^{-ipV}}{2\pi\sqrt{2p}} \partial_V \left(\frac{\theta(V - V_0)}{2\pi\sqrt{2k}} e^{iku} \right) \right] \\ &= i \int_{-\infty}^{V_0} dV \frac{1}{4\pi^2\sqrt{4kp}} \left[- \left(\frac{V_0 - V}{K} \right)^{-4iMk} (ip) e^{-ipV} \right. \\ &\quad \left. - e^{-ipV} (ik) \left(\frac{V_0 - V}{K} \right)^{-4iMk-1} \right] \\ &= i \int_{-\infty}^{V_0} dV \frac{1}{4\pi^2\sqrt{4kp}} \left[\frac{\partial}{\partial V} \left(\left(\frac{V_0 - V}{K} \right)^{-4iMk} e^{-ipV} \right) \right. \\ &\quad \left. - 2e^{-ipV} (ik) \left(\frac{V_0 - V}{K} \right)^{-4iMk-1} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \sqrt{\frac{k}{p}} \int_{-\infty}^{V_0} dV \left(\frac{V_0 - V}{K} \right)^{-4iMk-1} e^{-ipV} \\ &= \frac{K}{4\pi^2} \sqrt{\frac{k}{p}} e^{-ipV_0} \Gamma(-4iMk) \left(\frac{1}{pK} \right)^{-4iMk} e^{2M\pi k}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Mediante un cálculo semejante somos capaces de obtener que

$$\beta(p, k) = \frac{K}{4\pi^2} \sqrt{\frac{k}{p}} e^{-ipV_0} \Gamma(4iMk) \left(\frac{1}{pK}\right)^{4iMk} e^{-2M\pi k}. \quad (3.32)$$

Estos son los coeficientes de Bogolubov buscados, y con su utilización es fácil obtener el operador de número respecto al vacío del infinito pasado nulo, $|0\rangle_{pasado}$

$$\begin{aligned} \langle 0| a_k^{u\dagger} a_k^u |0\rangle_{pasado} &= \int_{-\infty}^{\infty} dp |\beta(p, k)|^2 \\ &= \frac{K^2}{16\pi^4} k |\Gamma(4iMk)|^2 e^{-4\pi Mk} \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{1}{p} \left(\frac{1}{pK}\right)^{4M(k-k')} \Big|_{k'=k} \\ &= \frac{K}{16M\pi^2} \frac{\delta(0)}{e^{8Mk\pi} - 1}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Los observadores del futuro asintótico detectan una radiación, *radiación de Hawking*, proveniente de la zona de colapso que se corresponde con una distribución de Planck de temperatura

$$T_H = \frac{1}{8\pi M}, \quad (3.34)$$

que se conoce como *temperatura de Hawking*.

Como lo dicho en [6], el descubrimiento de una emisión térmica en un agujero negro es un fenómeno sorprendente desde la visión de la física clásica, donde la imposibilidad de registrar cualquier partícula emitida, particularmente un fotón, es el elemento que le otorga el nombre al objeto másico. El entendimiento que otorga la relatividad parte de una descripción semi-clásica de las ecuaciones de campo permitiendo una fluctuación del vacío como una generación y aniquilación continua de partículas virtuales al alrededor del agujero negro, desembocando en un grado probabilístico que una de estas partículas sea emitida mientras su antipartícula alcanza la singularidad del sistema.

Como último comentario a la sección se hace conveniente resaltar las suposiciones mencionadas y evaluar la fiabilidad del resultado. La relación que se dedujo para las coordenadas nulas que describen el espacio-tiempo antes y después del colapso gravitatorio es válida solo cuando se consideran tiempos muy tempranos y muy tardíos respectivamente, es decir, el observador habrá de posicionarse muy cerca del infinito futuro nulo y al registrar sus mediciones estas tenderán al espectro hallado mientras más tiempo se observe. Puede mostrarse, [22], que para tiempos finitos el resultado representa una aproximación más que aceptable y esto es debido a que la conexión entre las coordenadas nulas, futuras y pasadas, solo pueden relacionarse de forma logarítmica.

Otra consideración hecha fue el posicionamiento arbitrariamente cerca del horizonte de eventos cuya consecuencia directa para los modos salientes fue la obtención de estados de alta frecuencia que se propagaban intactamente hacia el pasado asintótico. Para modos salientes de frecuencia no tan elevada, la propagación deberá involucrar

un análisis sobre la mezcla que pueda haber entre estos y los modos entrantes que se ven reflejados por el potencial efectivo.

3.2.1. Termodinámica de un agujero negro

Utilizaremos un par de páginas para estudiar someramente la termodinámica de un agujero negro después de descubrir que este emite radiación y podemos asociar una temperatura al objeto masivo, el estudio puede consultarse en [24].

El entendimiento de una termodinámica de agujeros negros parte irremediamente de encontrar analogías con la termodinámica clásica. El hecho de relacionar el área del horizonte de eventos con la entropía hace la afinidad más que plausible, y desde que fue propuesta a inicios de los 1970's, [25], fue estudiada exhaustivamente. Dicho estudio de analogías parte de una serie de inconvenientes propios de la física clásica de un agujero negro; el primero de ellos es la necesidad de una temperatura cero para un agujero negro, el segundo es que la entropía es adimensional y el área del horizonte posee unidades de longitud al cuadrado. Por último se encuentra que el área del horizonte de eventos de cada agujero negro es, en cada caso, no decreciente mientras que es la entropía total la cumple con la misma condición.

La explicación a estas contrariedades viene de la mano de la teoría cuántica aplicada al fenómeno. Y según lo ya revisado, el primer y tercer problema es sustituido por una temperatura de Hawking propia del agujero negro y una disminución del horizonte de eventos vía radiación. Como veremos, la entropía, si bien relacionada con el área del horizonte de eventos, también tiene que involucrarse con el inverso de la longitud de Planck al cuadrado, $\hbar G/c^3$, ajustando el problema dimensional.

Una definición útil antes de proseguir es la de *gravedad superficial*, κ , para un agujero negro estacionario. Primero se asume que el horizonte de eventos es un *horizonte de Killing*, es decir, los generadores nulos del horizonte son órbitas del campo de Killing, entonces κ se define como el gradiente de la norma de los generadores del campo de Killing, X^a , evaluado en el horizonte:

$$\kappa^2 = -(\nabla^a |X|)(\nabla_a |X|), \quad (3.35)$$

para un agujero negro sin rotación y sin carga la gravedad superficial es $1/4M$.

Reconocer que la definición de κ está ligada a la localidad del horizonte de eventos, y resulta ser siempre constante a lo largo del horizonte para un agujero negro estacionario, de hecho para demostrar esta afirmación es necesario suponer un agujero negro estacionario y que $T_{\mu\nu}$ obedece la condición dominante para la energía³. Por otro lado tenemos la *ley cero* de la termodinámica, para la cual la cantidad constante en un sistema en equilibrio térmico viene dada por la temperatura, cuestión que hace pensar en que los elementos son homólogos en la analogía plantenada.

³Busca satisfacerse la condición débil para la energía: para cada vector tipo tiempo, X , la densidad de energía a registrar es no negativa, $T_{\mu\nu}X^\mu X^\nu$. Y además para campos causales, Y , se cumple que $-T^\mu{}_\nu Y^\nu$ es causal y futuro direccional

Es entonces cuando se enuncia la *ley cero de la mecánica de agujeros negros*: Si $T_{\mu\nu}$ obedece la condición dominante para la energía entonces la gravedad superficial κ es constante a lo largo del horizonte de eventos.

En consonancia se expone la *primera ley* para agujeros negros cargados y en rotación, donde se establece que

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi}dA + \Omega dJ + \Phi dQ \quad (3.36)$$

siendo Ω es la velocidad angular y Φ es el potencial el eléctrico del horizonte. Esta ecuación establece una relación entre la variación de la masa y el área del horizonte si κ se mantiene jugando el rol de la temperatura en las leyes de la termodinámica. Tal enlace se hace patente en la *segunda ley*, que lleva igualmente el nombre del *teorema de área de Hawking*, estableciéndose que el área del horizonte de eventos nunca puede disminuir si se asume la *hipótesis de censura cósmica*⁴ y la condición de energía positiva.

Bekenstein propuso, [25], que la expresión para la entropía del horizonte de eventos es proporcional a $A/\hbar G^5$, medida en unidades del cuadrado de la longitud de Planck, $L_p^2 = \hbar G/c^3$, y conjeturó lo que toma por nombre de la *segunda ley generalizada*, en la que la entropía total del sistema agujero negro-entorno es nunca decreciente:

$$\delta(S_{entorno} + S_{BH}) \geq 0, \quad S_{BH} \propto \frac{A}{\hbar G}. \quad (3.37)$$

Observemos que hemos hecho evidente la relación con \hbar pues juega un papel importante en la interpretación clásica de los tres inconvenientes presentados con anterioridad. El segundo de ellos, vinculado con la adimensionalidad de la entropía, es resuelto por el postulado de Bekenstein. El primer y tercer dilema parecen relacionarse con la observación clásica en la cual $\hbar \rightarrow 0$, de forma que la temperatura de Hawking, $T_H = \hbar\kappa/8\pi k$, tiende a cero y la modificación finita del área del horizonte de eventos otorgue una modificación infinita en la entropía del agujero negro.

La propuesta parece entonces corresponderse de buena forma con los inconvenientes planteados y enlaza la analogía en un nivel sólido aún con los efectos cuánticos involucrados. Más aún, la proporción entre la entropía y el área puede ser hallada de forma explícita, haciendo consistentes todos los resultados presentados hasta ahora

$$S_{BH} = \frac{A}{4\hbar G}. \quad (3.38)$$

Notemos que a partir de esta ecuación la entropía asociada al caso de un agujero negro de Schwarzschild es

$$S_{BH} = \frac{4\pi GM^2}{\hbar}, \quad (3.39)$$

debido a que en esta situación $A = 16\pi G^2 M^2$. Ahora bien, en este caso el sistema es estático y carece de carga de modo que el área del horizonte de eventos solo se ve

⁴La hipótesis de censura cósmica débil afirma que las singularidades desnudas, aquellas que no son circundadas por un horizonte de eventos, no existen en nuestro universo.

⁵Hacemos explícita la relación con \hbar y G para la discusión posterior de esta sección, en el resto del tratado se han tomado las unidades naturales $\hbar = G = c = 1$.

en dependencia de la masa, sin embargo, como bien lo hacen notorio los sumandos adicionales de la Ec.(3.36), puede ocurrir que la entropía también se vea en dependencia del momento angular o la carga asociada al agujero negro. Mencionemos como ejemplo lo que ocurre para la métrica de Kerr que describe a un agujero negro en rotación [26]

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{\alpha^2} \right) dt^2 - \frac{4Mra \sin^2 \theta}{\alpha^2} d\phi dt + \frac{\alpha^2}{\beta} dr^2 + \alpha^2 d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2 \sin^2 \theta}{\alpha^2} \right) \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (3.40)$$

donde $a = J/M$, $\alpha^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ y $\beta = r^2 - 2Mr + a^2$. Con su horizonte de eventos ubicado en

$$r_{\pm} = M \pm (M^2 - a^2). \quad (3.41)$$

Para este caso el área del horizonte de eventos adopta la forma

$$A_+ = 8\pi G^2 M \left(M + \sqrt{M^2 - a^2} \right), \quad (3.42)$$

de la cual

$$S_{BH} = \frac{2\pi G}{\hbar} M \left(M + \sqrt{M^2 - a^2} \right), \quad (3.43)$$

haciendo implícita la dependencia de la entropía tanto con la masa como con el momento angular asociado al agujero negro de Kerr mediante a .

Después de este breve paréntesis nos encontramos con que la tercera ley de la termodinámica también tiene su homólogo en la *tercera ley*, estableciendo que la gravedad superficial de un agujero negro no puede llegar a ser cero en un número finito de pasos.

El siguiente elemento a analizar es la relevancia del espectro de radiación que descubrimos es emitido por un agujero negro con una temperatura de Hawking, pues posee implicaciones que rompen el cerco de una simple analogía, tal como lo hemos planteado. La temperatura de Hawking está vinculada con la gravedad superficial,

$$T_H = \frac{\kappa}{2\pi} = \frac{1}{8\pi M} \quad (3.44)$$

que juega el papel de temperatura en la conexión con la leyes clásicas de la termodinámica. La radiación de Hawking aporta otro interesante elemento al estudio, pues la emisión material disminuye la masa del agujero negro y consiguientemente el área del horizonte de eventos. Decíamos antes que la emisión puede entenderse a partir de la creación de partículas virtuales donde una de las partes puede escapar del horizonte de eventos, la masa del agujero debe disminuir pues la partícula que alcanza la singularidad nunca dejó de ser virtual. De ahí que se tenga necesidad de generalizar la segunda ley en la que la entropía S_{BH} puede disminuir aunque no así la entropía total. De forma interesante la disminución del área del horizonte de eventos no viola la ley del área de Hawking pues el campo cuántico lleva energía

negativa al agujero negro, situación que compromete la hipótesis de la condición de energía positiva.

De esta forma parecen salvadas las complicaciones iniciales y el prospecto de analogía acaba derivando en una sólida estructura para estudiar la termodinámica de un agujero negro. Sin embargo existe un problema adicional referente a la información contenida en la vecindad del horizonte de eventos. El problema será presentado en el próximo capítulo como conclusión al tratado siendo una interesante consecuencia a la radiación de Hawking estudiada. Baste ahora introducir la cuestión como se hace en [27]; la segunda ley generalizada otorga un escenario consistente con la segunda ley de la termodinámica, sin embargo, a través de la física estadística encontramos que la entropía hallada se traduce en el número de estados del sistema mediante la ecuación $S = \ln N$, que aplicado a la entropía del agujero negro resulta en

$$N = e^{S_{BH}}. \quad (3.45)$$

Para asimilar el escenario pongamos en números los parámetros, tomando en cuenta el radio del horizonte de eventos del Sol $\sim 3km$, otorgando

$$N = \exp(S_{BH}) \sim \exp(2,7 \times 10^{76}) \quad (3.46)$$

estados. Cantidad tan abrumadora de estados debe poder observarse de cierta forma. La propuesta es que al estar conectada la entropía del agujero negro con el área de su horizonte de eventos entonces los estados se corresponden con pequeñas deformaciones del horizonte. Lastimosamente no se sabe que pueda causar dichas deformaciones, pues los procesos cerca del horizonte de eventos o bien producen elementos que alcanzan la singularidad, o bien alcanzan el infinito futuro nulo dejando invariante el horizonte de eventos. Ahora, si ningún proceso puede deformar el horizonte de eventos entonces el estado inicial es único e inmutable permitiendo un cálculo de la entropía en el que $S_{BH} = \ln 1 = 0$, en contradicción con lo ya visto.

Es cuando se plantea que la información de los estados posibles, y por tanto de la entropía, debe ubicarse en la singularidad del sistema, de forma que las diferencias entre estados no puedan ser observados en la geometría clásica del agujero negro y parezcan indistinguibles para un observador exterior. Es esta aseveración la que conduce a un serio problema, *la paradoja de la información*.

Capítulo 4

Paradoja de la información

Al comienzo de este tratado se tuvo la intención de motivar el estudio de la cuantización de un campo escalar en un fondo curvo como parte de un entendimiento aproximado a los resultados que una teoría de gravedad cuántica pudiese aportar. Por dicha razón se ha decidido finalizar el presente ensayo con una introducción a la paradoja de la información mencionada anteriormente, pues constituye un problema fundamental en el entendimiento del trabajo conjunto de la teoría cuántica y la gravedad. Considerándose, además, que los elementos revisados hasta aquí forman un conjunto de ideas que complementan bien la revisión del problema a partir de conocer la radiación emitida por un agujero negro y la termodinámica resultante del fenómeno.

Pretenderemos tal como se presenta en [27], dar una explicación del problema mediante el análisis de estados entrelazados en la creación de pares que da origen a la radiación de Hawking emitida por el agujero negro para entonces asimilar las consideraciones que otorgan la pérdida de información del sistema.

Y es que el problema radica justamente en la forma en que la radiación de Hawking emitida por el agujero negro es producida; las partículas que un observador detecta no se encuentran en un estado puro. La partícula emitida se encuentra entrelazada con el par condenado a alcanzar la singularidad del sistema y debido a que el agujero negro pierde masa (por la producción de radiación y conservación de la energía), y eventualmente desaparece, dicha partícula se hallará en un estado entrelazado sin existir en el universo partícula entrelazada con ella, el estado entrelazado se vuelve fundamental. Este es un fenómeno que no está presente en la teoría cuántica, pues un estado puro $|\psi\rangle$ evoluciona mediante el operador $e^{-i\hat{H}t}$ para obtener otro estado puro. Este fue el fenómeno examinado por Hawking cuya observación al respecto es el abandono de una teoría cuántica basada en el estudio de estados puros y operadores unitarios, situación de alerta que ha conducido a pensar en otras vías de solución tales como el confinamiento de los efectos de gravedad cuántica a una distancia dependiente de la escala de Planck y el número de estados posibles del agujero negro, propuesta aportada por la teoría de cuerdas. Modificando entonces el proceso en que la radiación es emitida. Soluciones planteadas como la anterior pueden consultarse en [28, 29].

Como se mencionaba, nos limitaremos a visualizar el problema a partir de los estados entrelazados y revisar las condiciones para tener pérdida de información.

4.1. Foliación del espacio-tiempo

Ya hemos estudiado el comportamiento de la métrica de Schwarzschild para la región exterior del objeto masivo con especial énfasis en analizar el comportamiento en el horizonte de eventos. Pero para el presente tema se hace conveniente realizar un estudio de la métrica al interior del horizonte y que proveerá una visualización gráfica que facilite la comprensión del subcapítulo. Para dicha finalidad haremos una foliación del espacio-tiempo mediante un conjunto de curvas tipo espacio cubriendo al interior y al exterior del horizonte.

Recordemos que de forma asintótica, lejos del objeto masivo, recuperamos el comportamiento de un espacio-tiempo plano por lo que nuestras curvas deberán ser t constantes fuera del horizonte, digamos para $r > 3M$. El trazo de la curva es tipo espacio debido a la métrica de Schwarzschild y coincide con una curva tipo espacio de Minkowski. Nombramos a este segmento como S_{fin} .

Por otro lado, al interior del horizonte de eventos, $r < 2M$, la métrica intercambia los papeles respecto a los signos entre las variables temporal y radial, de modo que una superficie con r constante es aquí tipo espacio. El segmento de curva al interior del horizonte de eventos se escoge con la variable radial constante, digamos $r = M$, distante tanto del horizonte como de la singularidad del sistema. Denotamos a esta parte del segmento como S_{in} .

Basta ahora conectar ambos trazos de la curva con un segmento continuo tipo espacio que atraviese el horizonte, situación posible gracias a la geometría descrita por la métrica, así se construye una curva tipo espacio que transita por el horizonte. Con este procedimiento base deberemos de foliar todo el espacio-tiempo, escogiendo en cada caso las regiones S_{fin} y S_{in} , y conectándolas de forma suave, tal que S_{in} no se ubique en la singularidad ni en el horizonte, y por supuesto evitando alguna intersección entre la curvas.

Un esquema de la foliación propuesta puede verse en la Fig.(4.1)

La foliación puede realizarse con el detalle suficiente para escoger a las regiones de r y t constantes mediante una regla de correspondencia, pero para nuestra finalidad es suficiente con visualizar las curvas tipo espacio que hemos construido para esta geometría.

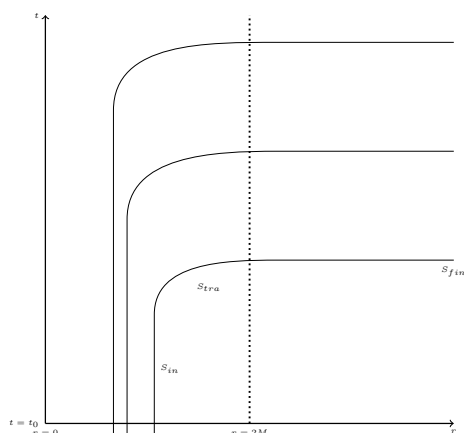


Figura 4.1: Se muestra la foliación del espacio-tiempo mediante curvas tipo espacio donde las regiones S_{fin} y S_{in} son segmentos con $t = cte$ y $r = cte$ respectivamente.

Por completez veamos como se representan estas curvas en el diagrama de Penrose que hemos utilizado para representar la evolución del colapso del agujero negro

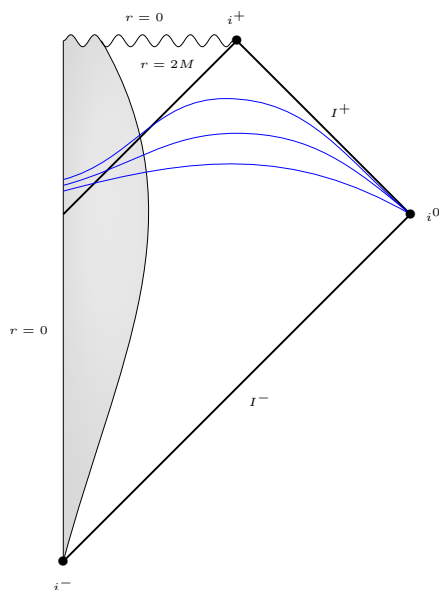


Figura 4.2: Diagrama de Penrose en donde se representan las curvas tipo espacio que hemos usado para foliar el espacio-tiempo. Las curvas *tardías* son las más cercanas al infinito futuro nulo.

Mientras más tarde se toma la curva (respecto a la coordenada temporal constante fuera del horizonte) más cerca alcanza a estar del infinito futuro nulo antes de arribar a la singularidad, de modo que la curva asintóticamente tardía es la curva que más

recolecta radiación proveniente del agujero negro.

Un hecho curioso es que la foliación es completamente regular en todo el espacio-tiempo, incluido el horizonte de eventos, aunque la métrica no lo sea. Esto no se contrapone a la producción de radiación por parte del agujero negro pues no existe un vector de Killing tipo tiempo asociado a toda la geometría del sistema a causa del intercambio de roles entre r y t , (un vector de Killing tipo tiempo al exterior del horizonte de eventos deja de serlo al interior), de esto que la foliación no es independiente del tiempo, y la producción de pares sigue estando presente.

4.2. Creación de pares: estados entrelazados

Una vez analizada la forma en que vamos a recopilar información gráfica del fenómeno necesitamos conectar los conocimientos recolectados hasta ahora con el problema en cuestión. La detección del baño térmico que hemos revisado basaba su viabilidad en el hecho de ubicar al observador cerca del infinito futuro nulo por lo que necesitaremos de una curva tardía, es decir, una curva para la cual S_{fin} sea un $t = cte \gg 0$, donde observaremos la evolución de los modos provenientes de la región de colapso, $t \sim t_0$, cerca del horizonte de eventos. Una representación pictórica se presenta a continuación

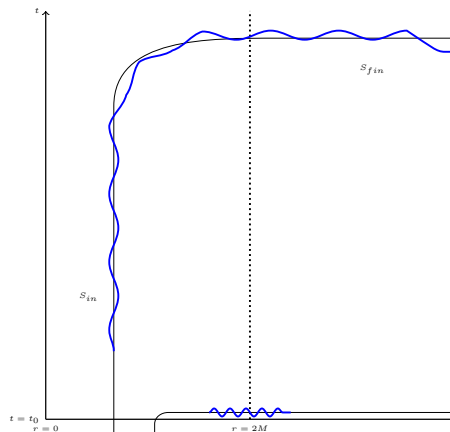


Figura 4.3: Evolución de un modo de Fourier desde la región de colapso hasta una curva espacial cerca del infinito futuro nulo.

Ahora, hagamos un breve paréntesis en esta discusión para volver a discutir brevemente la representación que podemos dar entre los vacíos asociados al par de conjuntos solución, recordando que definimos

$$\hat{a}_k |0\rangle_{pasado} = 0, \quad (4.1)$$

$$\hat{b}_p |0\rangle_{futuro} = 0. \quad (4.2)$$

Siendo $|0\rangle_{pasado}$ el vacío en la región tipo Minkowski en el infinito pasado nulo y

$|0\rangle_{futuro}$ el correspondiente vacío en la región descrita por la métrica de Schwarzschild en el infinito futuro nulo.

Hasta ahora hemos trabajado de forma continua con los modos normales, permitase ahora analizar el caso discreto que será ligeramente más asequible y permitirá presentar el problema prestando atención al entrelazamiento entre los estados. Si α_{ij} y β_{ij} son las transformaciones de Bogolubov entre los conjuntos solución entonces sabemos que

$$\hat{a}_i |0\rangle_{pasado} = \left[\sum_j \alpha_{ij} \hat{b}_j + \beta_{ij} \hat{b}_j^\dagger \right] |0\rangle_{pasado} = 0. \quad (4.3)$$

Para dar seguimiento a la solución supongamos que solo se tiene un modo que cumple con

$$\left[\hat{b} + \gamma \hat{b}^\dagger \right] |0\rangle_{pasado} = 0, \quad (4.4)$$

cuya solución es de la forma, [27],

$$|0\rangle_{pasado} = A e^{\mu \hat{b}^\dagger \hat{b}} |0\rangle_{futuro}. \quad (4.5)$$

Ahora, viendo que se satisface la siguiente relación

$$\hat{b} \left(\hat{b}^\dagger \hat{b}^\dagger \right)^n = \left(\hat{b}^\dagger \hat{b}^\dagger \right)^n \hat{b} + 2n \hat{b}^\dagger \left(\hat{b}^\dagger \hat{b}^\dagger \right)^{n-1}, \quad (4.6)$$

se deduce que

$$\begin{aligned} \hat{b} e^{\mu \hat{b}^\dagger \hat{b}} |0\rangle_{futuro} &= \hat{b} \left[\sum \frac{\mu^n}{n!} \left(\hat{b}^\dagger \hat{b}^\dagger \right)^n \right] |0\rangle_{futuro} \\ &= \sum \frac{\mu^n}{n!} \left[\left(\hat{b}^\dagger \hat{b}^\dagger \right)^n \hat{b} + 2n \hat{b}^\dagger \left(\hat{b}^\dagger \hat{b}^\dagger \right)^{n-1} \right] |0\rangle_{futuro} \\ &= 2\mu \hat{b}^\dagger \left[\sum \frac{\mu^{n-1}}{(n-1)!} \left(\hat{b}^\dagger \hat{b}^\dagger \right)^{n-1} \right] |0\rangle_{futuro} \\ &= 2\mu \hat{b}^\dagger e^{\mu \hat{b}^\dagger \hat{b}} |0\rangle_{futuro}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

A partir de las expresiones (4.4) y (4.5), finalmente se obtiene que $\mu = -\gamma/2$ y

$$|0\rangle_{pasado} = A e^{-\frac{\gamma}{2} \hat{b}^\dagger \hat{b}} |0\rangle_{futuro}. \quad (4.8)$$

Para el caso general se tiene la extrapolación

$$|0\rangle_{pasado} = A e^{-\frac{1}{2} \hat{b}_i^\dagger \gamma^{ij} \hat{b}_j} |0\rangle_{futuro}. \quad (4.9)$$

Esta deducción juega un papel fundamental en la discusión salvo por una modificación al seguimiento, pues estamos interesados en los operadores de aniquilación sobre las regiones S_{in} y S_{fin} de la curva tardía en la Fig.(4.1).

Estos operadores que denotaremos como \hat{b}_i y \hat{c}_i estarán asociados a las partículas en el proceso de creación de la radiación que alcanzan el infinito futuro nulo y la

singularidad del sistema, respectivamente. Debido a que satisfacen las siguientes relaciones de conmutación:

$$\begin{aligned} [\hat{b}_i, \hat{b}_j] = [\hat{c}_i, \hat{c}_j] = 0, \quad [\hat{b}_i, \hat{c}_j] = [\hat{b}_i, \hat{c}_j^\dagger] = 0, \\ [\hat{b}_i, \hat{b}_j^\dagger] = [\hat{c}_i, \hat{c}_j^\dagger] = \delta_{ij}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

se presenta el rompimiento del par $\hat{b}^\dagger \hat{b}^\dagger$ del cálculo anterior en el set de operadores $\hat{b}^\dagger \hat{c}^\dagger$ que conduce a que la representación adopte la forma

$$|0\rangle_{pasado} = A e^{\sum_i \gamma \hat{b}_i^\dagger \hat{c}_i^\dagger} |0\rangle_{futuro}, \quad (4.11)$$

siendo $\gamma \propto e^{-8\pi M k}$. Un seguimiento de lo mencionado puede consultarse con detalle por ejemplo en [30, 31, 32].

Ahora, tomemos la evolución de modos de alta frecuencia cerca de la zona de colapso como hicimos con anterioridad, aquel con mayor longitud de onda alcanza primero la curva tipo espacio que hemos colocado cerca del infinito futuro nulo y crea el par de partículas mediante los operadores de creación \hat{b}_1^\dagger y \hat{c}_1^\dagger . El estado del sistema que ha alcanzado la curva tipo espacio es

$$|\psi\rangle_1 = A e^{\gamma \hat{b}_1^\dagger \hat{c}_1^\dagger} |0\rangle, \quad (4.12)$$

donde, como ya se ha hecho mención, relacionamos a los operadores etiquetados por \hat{b}^\dagger con las partículas resultantes de la radiación que alcanzan el infinito futuro nulo, y a \hat{c}^\dagger con aquellas que caen a la singularidad. Debido a esta distinción y a la independencia de los estados es posible definir un vacío local relacionado con cada operador de aniquilación, digamos, $|0\rangle_{\hat{b}_i}$ y $|0\rangle_{\hat{c}_i}$, para los cuales se debe cumplir que $\hat{b}_i |0\rangle_{\hat{b}_i} = \hat{c}_i |0\rangle_{\hat{c}_i} = 0$. Con esta definición podemos reescribir la Ec.(4.12) como

$$|\psi\rangle_1 = A e^{\gamma \hat{b}_1^\dagger \hat{c}_1^\dagger} |0\rangle_{\hat{b}_1} |0\rangle_{\hat{c}_1}. \quad (4.13)$$

Esto va a ocurrir con cada modo que tomemos en la zona de colapso y alcance la curva tardía tipo espacio, de tal suerte que para cada par creado se obtengan los estados

$$|\psi\rangle_i = A e^{\gamma \hat{b}_i^\dagger \hat{c}_i^\dagger} |0\rangle_{\hat{b}_i} |0\rangle_{\hat{c}_i}. \quad (4.14)$$

Los pares creados por diferentes i no se superponen debido a las distintas regiones a las que arriban, por lo que el estado que encontramos en la curva tardía es el producto directo de cada estado hallado, es decir,

$$|\psi\rangle = |\psi\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_2 \otimes |\psi\rangle_3 \otimes \dots \quad (4.15)$$

Una representación gráfica del fenómeno se muestra en seguida

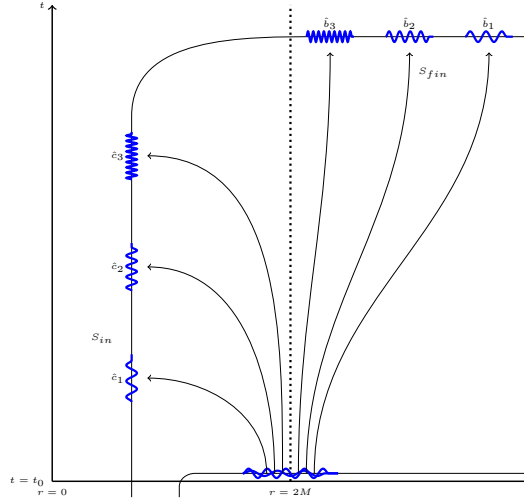


Figura 4.4: Los modos de mayor longitud de onda llegan primero a la curva tardía tipo espacio, al interior del agujero negro, creando el par entrelazado b_1 y c_1 .

La situación interesante es lo que ocurre en cada estado, por ejemplo para $|\psi\rangle_1$ tenemos que

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_1 &= A \left(|0\rangle_{\hat{b}_1} \otimes |0\rangle_{\hat{c}_1} + \gamma \hat{b}_1^\dagger |0\rangle_{\hat{b}_1} \otimes \hat{c}_1^\dagger |0\rangle_{\hat{c}_1} + \frac{\gamma^2}{2} \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1^\dagger |0\rangle_{\hat{b}_1} \otimes \hat{c}_1^\dagger \hat{c}_1^\dagger |0\rangle_{\hat{c}_1} \dots \right) \\ &\equiv A \left(|0\rangle_{\hat{b}_1} \otimes |0\rangle_{\hat{c}_1} + \gamma |1\rangle_{\hat{b}_1} \otimes |1\rangle_{\hat{c}_1} + \frac{\gamma^2}{2} |2\rangle_{\hat{b}_1} \otimes |2\rangle_{\hat{c}_1} \dots \right). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Donde cada estado multipartícula creado a partir de \hat{b}_1 se encuentra entrelazado con su homólogo creado a partir de \hat{c}_1 .

Como ocurre que $\gamma < 1$ los primeros términos de la serie son más relevantes, debido a esta situación y para observar la importancia de que estos estados se encuentren entrelazados continuemos la explicación con el estado más sencillo

$$|\psi\rangle_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_{\hat{b}_1} \otimes |0\rangle_{\hat{c}_1} + |1\rangle_{\hat{b}_1} \otimes |1\rangle_{\hat{c}_1}). \quad (4.17)$$

Debido al entrelazamiento, las partículas creadas a partir de \hat{b}_1 y que constituyen la radiación de Hawking a detectarse no pueden ser entendidas como un estado puro. Si se decidiera ignorar el cuanto \hat{c}_1 y realizar mediciones sobre \hat{b}_1 se hace necesario introducir una matriz de densidad ρ tal que

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{2} [|0\rangle_{\hat{b}_1} \otimes |0\rangle_{\hat{c}_1} \langle 0|_{\hat{b}_1} \otimes \langle 0|_{\hat{c}_1} + |0\rangle_{\hat{b}_1} \otimes |0\rangle_{\hat{c}_1} \langle 1|_{\hat{b}_1} \otimes \langle 1|_{\hat{c}_1} \\ &\quad + |0\rangle_{\hat{b}_1} \otimes |0\rangle_{\hat{c}_1} \langle 1|_{\hat{b}_1} \otimes \langle 1|_{\hat{c}_1} + |1\rangle_{\hat{b}_1} \otimes |1\rangle_{\hat{c}_1} \langle 1|_{\hat{b}_1} \otimes \langle 1|_{\hat{c}_1}], \end{aligned} \quad (4.18)$$

para la que puede encontrarse una matriz reducida que describa los cuantos de \hat{b}_1

$$\rho_{\hat{b}} = \frac{1}{2} [|0\rangle_{\hat{b}_1} \langle 0|_{\hat{b}_1} + |1\rangle_{\hat{b}_1} \langle 1|_{\hat{b}_1}]. \quad (4.19)$$

Y que además otorgue un cálculo de la entropía del sistema cuando se ignoran los estados generados a partir de \hat{c}_1 mediante la relación

$$S = -\text{tr} [\rho_{\hat{b}_i} \ln \rho_{\hat{b}_i}], \quad (4.20)$$

dado que se trata de una matriz diagonal resulta en

$$S = -\left[\frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} \right] = \ln 2. \quad (4.21)$$

Esta entropía es una medida del entrelazamiento entre los sistemas \hat{b}_1 y \hat{c}_1 .

La idea es aplicable a cada estado $|\psi\rangle_i$ en el que los sistemas entrelazados son generados por el par \hat{b}_i y \hat{c}_i . De nuevo, debido a la independencia de los modos, la entropía total del sistema es la suma de cada entropía particular calculada, se necesita solo conocer el número de estados. La temperatura de Hawking dada por $T_H = \frac{1}{8\pi GM}$ otorga una energía promedio emitida por los cuantos de $\sim (GM)^{-1}$. Por otro lado la masa del agujero negro es M de modo que el número de cuantos emitidos por el objeto masivo hasta evaporarse es

$$N \sim M(GM) = \frac{(GM)^2}{G}. \quad (4.22)$$

Y cada S de entrelazamiento es del orden de la unidad, de modo que la entropía de la radiación es

$$S_{rad} \sim \frac{(GM)^2}{G} \sim S_{BH}. \quad (4.23)$$

Así, la entropía de entrelazamiento de todos los cuantos emitidos es del orden de la entropía asociada al agujero negro.

Entramos entonces en el estudio del problema, debido a la radiación de Hawking, el agujero negro eventualmente se evapora por completo con los estados otorgados por \hat{c}_i arrastrados en el proceso, dejando atrás a los estados asociados a \hat{b}_i . Estos últimos no pueden ser descritos como un estado puro y, sin embargo, ya no hay estados con los que formar un sistema entrelazado, de modo que la única descripción posible sobre los estados de \hat{b}_i es mediante una matriz de densidad reducida $\rho_{\hat{b}_i}$. Esta especificación del sistema es intrínsecamente estadística, un hecho que llevo a Hawking a pensar que la teoría cuántica es inconsistente en presencia de gravedad.

4.2.1. Pérdida de información

Las partículas que alcanzan el horizonte llevan consigo información de un sistema conjunto con las partículas que se detectan como radiación de Hawking. Cuando el agujero negro se evapora esta información parece desaparecer, el problema fue presentado por Hawking en el artículo ya citado [30], en el año 1976, y desde entonces ha sido abordado por multitud de investigadores que buscan corregir el curso de la inconsistencia exhibida entre la visión de la teoría cuántica, en el que la evolución

de los estados puros no permiten que se presente la pérdida de información, y la relatividad general donde todo conduce a que el fenómeno ocurre.

Un camino a seguir es el reformulamiento de alguna forma de las teorías involucradas que vuelvan consistentes ambas vías de conocimiento. En este tenor es que se ha pensado que a escalas inferiores a las de Planck la cuantización de modos debe llevarse a cabo de forma distinta, y la afirmación toma fuerza en nuestro trabajo cuando se analiza la evolución de los modos como lo hemos hecho en la deducción de la radiación de Hawking, pues en ella fue necesario estudiar a un modo ubicado cerca del horizonte de eventos a través del tiempo en retrospectiva, y nos percatamos que su frecuencia iba creciendo mientras más atrás observábamos. Al seguir nuestro modo en la región previa a la zona de colapso éste alcanza longitudes de onda inferiores a la escala de Planck, tornándose en un modo llamado *transplanckiano*. He aquí que deba preguntarse si la teoría cuántica de campos que hemos utilizado sigue siendo válida, o tal vez debe modificarse la cuantización de los modos a estas escalas y en presencia de efectos gravitacionales, dejando al estudio semiclásico que hemos hecho solo como una visión incompleta de lo que ocurre en realidad.

Con lo mencionado en mente queda solo dedicar unas palabras en esta subsección para argumentar las cuestiones que conducen a la pérdida de información aún estando presente el desconocimiento de como trabajar con los modos transplanckianos.

Estas cuestiones a analizar son

1. Los efectos de gravedad cuántica quedan confinados a la escala de Planck.
2. El vacío es único.

El primer hecho a considerar es ubicarnos en escalas donde sabemos que el proceso de cuantización funciona bien por los resultados experimentales obtenidos en física nuclear y atómica, digamos alrededor de un Fermi que denotamos por $\hat{\lambda}$, lejos de la escala de Planck y el radio del horizonte. Requerir que el estudio se lleve a cabo en esta escala ubica a los modos salientes del agujero negro lejos de la singularidad pero en un estado vacío. De esto último aunado al requisito 1 el que los efectos de gravedad cuántica no intervengan y la descripción del estado es la revisada. Mientras que la condición 2, en donde se solicita la unicidad del vacío para esta región del espacio-tiempo, también es elemento reconocido de capítulos previos.

La física para esta región de la descripción alrededor de la escala de $\hat{\lambda}$ se conoce bien y el espacio de Fock queda bien descrito. Si consideramos que el estado asociado al modo es $|0\rangle$ entonces la evolución desembocará en la creación de pares entrelazados que conllevan a la pérdida de información. Es entonces cuando se podría pensar que el estado asociado al modo no es el vacío. Sin embargo el suponer que el estado asociado al modo es, por ejemplo, $|1\rangle$ en la región $\hat{\lambda}$ acarrea a una región energética ajena al agujero negro, en contraposición al requisito 1.

De modo que al asumir ambas cuestiones se dirige de forma inexorable a la creación de estados entrelazados donde las partículas que alcanzan el infinito futuro

nulo llevan consigo energía del agujero negro, lo que origina la desaparición eventual del mismo. Las partículas antes entrelazadas quedan sin acompañante tras la evaporación y no pueden ser descritas por ninguna función de onda.

Soluciones al problema continúan siendo consideradas y planteadas, una de ellas es la propuesta por Hawking en 2015 en donde se afirma que la información que parece perderse debe codificarse en el horizonte de alguna forma al transitar por él un partícula. La realidad es que el trecho que deba recorrerse para dar solución a la paradoja sigue en construcción y el conocimiento a recopilarse alimenta el hacer de más de una mente.

Capítulo 5

Conclusiones

Ha llegado el momento de dar un vistazo a lo hecho y permitir abordar los resultados que en el trabajo se han ofrecido. El estudio de la relatividad especial y su entorno matemático ha representado el punto de partida de nuestro ensayo, desde la introducción de la métrica de Minkowski hasta la presentación del grupo de Poincarè con sus respectivos tratamientos de deducción fueron los elementos a resaltar y que sirven como base para la lectura de capítulos posteriores. A partir de entonces se comenzó una interacción con las herramientas que nos permitieron trabajar sobre variedades diferenciables y encontrar una descripción de las mismas con base en una métrica asociada, un tensor de rango $\binom{0}{2}$, a partir del cual encontrar una noción de derivación y una especificación de la propia curvatura de la variedad codificada en el tensor de Riemann $R^{\mu}_{\nu\sigma\lambda}$. Escogiendo una deducción que parte de la construcción de la acción de Einstein-Hilbert y su correspondiente extremización, entre otros elementos a tener en cuenta, fuimos capaces de encontrar las ecuaciones de campo de la relatividad general, poniendo en relevancia la relación entre el tensor de energía-momento y la curvatura de la variedad diferenciable sobre la que se este trabajando.

La teoría cuántica de campos es el lenguaje que hace presencia en todo el tratado y funciona como red de conexión entre todos los temas abordados. Queda de más comentar las repercusiones de la teoría en la investigación actual y sus múltiples aplicaciones en terrenos tan diversos de la física y otras áreas del conocimiento, en particular los dominios de la física nuclear y de la cosmología aquí presentados. Comenzando con la construcción de un Lagrangiano para el campo escalar real libre y acudiendo a un formalismo Hamiltoniano para llevar a cabo el proceso de cuantización, en primera instancia sobre un espacio-tiempo plano, fue posible promover a operadores el campo escalar y el correspondiente momento conjugado, encontrando una descripción basada en operadores de creación y aniquilación como ocurre en la teoría usual. Las partículas que observamos en nuestro universo se ven reflejadas aquí como excitaciones del campo, y los estados multipartículas que se obtuvieron generan un espacio de Fock sin ambigüedad. Se trabajó a su vez, de forma breve, con la cuantización del campo escalar complejo desembocando en un par de conjuntos de operadores de creación y aniquilación correspondientes a partículas de igual masa

pero de carga contraria.

Sin embargo, como la relatividad nos ha mostrado, la estructura de nuestro espacio-tiempo se ve modificado por la presencia de materia, deformándolo y alejando la descripción que se ha dado sobre la métrica de Minkowski. Es entonces cuando debe nacer el advenimiento por generalizar lo hecho a una métrica arbitraria, verificar los pasos que se puedan homologar y estudiar aquellas situaciones que conduzcan a elementos de distinta derivación. Por tal fue necesario posicionarnos en una variedad diferenciable globalmente hiperbólica, tal que las soluciones queden determinadas por condiciones iniciales, y descrita por una métrica $g_{\mu\nu}$. Sobre dicho escenario colocamos nuestro campo escalar e introducimos la presencia de la métrica en el Lagrangiano que engloba a aquel de Klein-Gordon en espacio plano, las derivadas covariantes también hicieron su aparición pero se reducen a parciales al actuar sobre un escalar. La escalinata a seguir entonces fue aquella revisada en el capítulo previo: obtener el momento canónico conjugado, proponer las relaciones de conmutación básicas y promover a operadores, por último se verificó que la ecuación de Klein-Gordon para los operadores se mantiene tras obtener el Hamiltoniano del sistema y aplicar la ecuación de Heisenberg. Con lo mencionado, a partir de la linealidad de la ecuación para el campo, puede obtenerse una descomposición en modos normales que además satisfagan condiciones de ortonormalidad y reflejen las relaciones de conmutación en operadores de creación y aniquilación.

Con el conjunto de operadores de creación y aniquilación involucrado fue posible generar un vacío y subsiguientemente un espacio de Fock que describa los estados multipartículas para este escenario, sin embargo en un fondo curvo ocurre algo interesante pues el conjunto solución no es único y, consecuentemente, la forma de definir un vacío tampoco lo es. Cuando se trabajó sobre la métrica de Minkowski las coordenadas usuales (t, x, y, z) asocian de forma ‘natural’ un vector de Killing, ∂t , ortogonal a las hipersuperficies tipo espacio $t = cte$ y las soluciones halladas conforman un conjunto de eigenfunciones para este operador, desembocando en un vacío invariable ante la acción de cualquier elemento del grupo de Poincarè. A diferencia, cuando nos situamos sobre una métrica arbitraria el grupo de Poincarè deja de ser referente como grupo de simetría y, salvo que exista alguna restricción propia del sistema, no se tiene una forma única de descomponer el campo en sus modos de oscilación.

Dada la incapacidad de definir un espacio de Fock sin ambigüedad, en el trabajo se buscó obtener la forma de relacionar los conjuntos de modos haciendo uso de su completitud y ortonormalidad ante un producto interior definido. Expresar un modo en la representación que adquiere en otra base conlleva a la obtención de un par de funciones conocidas como transformaciones de Bogolubov, cuya generación algebraica se reduce al cálculo de los productos interiores entre los modos de distintas bases. De esta forma se conectaron ambos conjuntos, aunque la consecuencia interesante sobreviene al realizar lo propio con los operadores asociados a las distintas descomposiciones; estos se observan entre sí igualmente mediante las transformaciones de Bogolubov y el valor de expectación del operador de número que se construye respecto al vacío de una base ajena resultó ser generalmente distinto de cero. En

espacios curvos el número de partículas es relativo, depende del observador.

Se finalizó la sección con un tratamiento al efecto Unruh dos dimensional donde se visualizó con detalle la forma de obtener las transformaciones de Bogolubov. Aunque el efecto se presenta en un espacio-tiempo plano, la capacidad de obtener un vector de Killing distinto a la derivación temporal provee de un cambio coordinado en el que la métrica de Minkowski y la descomposición en modos puede traducirse llevando a cabo el proceso de cuantización. El vector de Killing encontrado fue $z\partial_t + t\partial_z$ que relacionamos al sistema coordinado (τ, ξ) propio de un observador acelerado. En dos zonas delimitadas del espacio reconocidas como cuñas de Rindler este sistema otorga un vector de Killing tipo tiempo distinto al aportado por el sistema usual y mediante el cual presentar la descomposición en modos del campo. Como antes, definimos un vacío para cada conjunto solución y buscamos el cálculo de los coeficientes de Bogolubov de forma explícita mediante el cómputo de los productos interiores adecuados, concluyendo en la obtención del valor esperado del operador de número de la nueva base respecto al vacío de Minkowski con las coordenadas usuales; el factor que se encontró se corresponde con aquel de un baño térmico de partículas de Bose-Einstein con temperatura $T_U = \frac{a}{2\pi}$, siendo a la aceleración propia del observador.

Una vez familiarizados con las herramientas desarrolladas hubo que ponerlas en práctica sobre un escenario de interés y el seleccionado fueron las cercanías de un agujero negro de Schwarzschild asintóticamente plano. Para consumir dicho objetivo se dedicaron un par de páginas a la descripción de la métrica de Schwarzschild y las consecuencias referentes a las singularidades de la misma, transitando por un estudio del horizonte de eventos y resultados causales, fue posible conducir el texto a la exposición de un agujero negro y su formación a través de un colapso estelar. Comenzando temporalmente con una zona material, una estrella, y un universo globalmente tipo Minkowski pasamos a registrar un proceso de colapso convergiendo a la formación de un horizonte de eventos en un universo tipo Schwarzschild; para ambos escenarios es fácil obtener una descomposición en modos del campo escalar no masivo después de analizar ciertas consideraciones, siendo la más importante el ubicarse cerca del horizonte de eventos tal que los modos registrados sean de alta frecuencia y no se vean afectados por el potencial efectivo remanente en la ecuación de movimiento para el campo. De esto último que la propagación de los modos desde el infinito futuro nulo hasta la zona de colapso y posterior regresión al infinito pasado nulo sea esencialmente libre, y la obtención de los coeficientes de Bogolubov se reduzca a obtener la conexión entre coordenadas nulas de los escenarios asintóticos descritos. La cuenta realizada fue análoga a aquella seguida para el efecto Unruh y de igual forma se condujo a hacer patente la detección de un baño térmico proveniente del horizonte de eventos registrada por un observador lejano cuya temperatura depende de la masa del agujero negro, fenómeno que toma por nombre *radiación de Hawking*.

La emisión de partículas por parte del agujero negro es el elemento sorprendente; desde el punto de vista de la relatividad general es un fenómeno imposible de suceder, sin embargo la introducción de los efectos cuánticos dan cuenta de fluctuaciones

del vacío en las cercanías del horizonte de eventos, llevándose a cabo una producción de partículas virtuales que darían cuenta de la radiación. Descubierta este fenómeno y la correspondiente asociación de una temperatura de Hawking fue paso irremediable revisar un poco de la termodinámica de un agujero negro, desarrollando una traducción entre las leyes de la termodinámica clásicas y los nuevos componentes de la teoría. La analogía partió de relacionar la gravedad superficial del agujero negro con la temperatura del sistema clásico, así como la entropía con el área del horizonte de eventos y enunciar las leyes de la termodinámica mediante la conexión elaborada. La analogía planteada es más que plausible y enlaza los eslabones que hemos construido salvo por un elemento a sobrellevar, y con el que decidimos cerrar esta tesis.

Asociada la radiación de Hawking a un agujero negro sobreviene una pérdida de masa que finaliza, en un tiempo más que considerable, en la evaporación del objeto. El problema reconocido como *paradoja de la información* radica en como se lleva a cabo dicho evento, las partículas emitidas se entienden como parte de un proceso de creación de pares desde un vacío cuántico. En el tratado hemos visto los requisitos para generar una producción de pares entrelazados: situarse en un espacio-tiempo con vacío único y en el que los efectos de gravedad cuántica queden confinados a la escala de Planck. En ese estado entrelazado una de las partes cae a la singularidad, las partículas sobrevivientes divagan sin acompañante y sin poder ser descritas por ninguna función de onda, limitando el estudio a uno íntimamente estadístico. Como comentamos antes, esta cuestión aún busca explicaciones que den cuenta de los elementos presentados y las investigaciones en este terreno parecen seguir un tiempo más.

Bibliografía

- [1] Steven Weinberg. *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. Vol. 1. Wiley New York, 1972.
- [2] Albert Einstein. “Zur elektrodynamik bewegter körper”. En: *Annalen der physik* 322.10 (1905), págs. 891-921.
- [3] Bernard F Schutz. *Geometrical methods of mathematical physics*. Cambridge university press, 1980.
- [4] Sean M Carroll. “Lecture notes on general relativity”. En: *arXiv preprint gr-qc/9712019* (1997).
- [5] Manfredo Perdigao Do Carmo y J Flaherty Francis. *Riemannian geometry*. Vol. 115. Birkhäuser Boston, 1992.
- [6] Sean Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Addison-Wesley, 2004.
- [7] Bernard Schutz. *A first course in general relativity*. Cambridge university press, 2009.
- [8] James W York Jr. “Role of conformal three-geometry in the dynamics of gravitation”. En: *Physical Review Letters* 28.16 (1972), pág. 1082.
- [9] Gary W Gibbons y Stephen W Hawking. “Action integrals and partition functions in quantum gravity”. En: *Physical Review D* 15.10 (1977), pág. 2752.
- [10] Ethan Dyer y Kurt Hinterbichler. “Boundary Terms, Variational Principles and Higher Derivative Modified Gravity”. En: *arXiv preprint arXiv:0809.4033* (2008).
- [11] Michael E Peskin y Daniel V Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Westview, 1995.
- [12] Mark Srednicki. *Quantum field theory*. Cambridge University Press, 2007.
- [13] Andreas Wipf. “Quantum Fields near Black Holes”. En: *arXiv preprint hep-th/9801025* (1998).
- [14] LH Ford. “Quantum Field Theory in Curved Spacetime”. En: *arXiv preprint gr-qc/9707062* (1997).
- [15] NN Bogolyubov y Dmitri Vasilévich Shirkov. “Introduction to the theory of quantized fields”. En: *Interscience* (1959).

- [16] Nicholas David Birrell y Paul Charles William Davies. *Quantum fields in curved space*. 7. Cambridge university press, 1984.
- [17] William G Unruh. “Notes on black-hole evaporation”. En: *Physical Review D* 14.4 (1976), pág. 870.
- [18] Luis CB Crispino, Atsushi Higuchi y George EA Matsas. “The Unruh effect and its applications”. En: *arXiv preprint arXiv:0710.5373* (2007).
- [19] George David Birkhoff y Rudolph Ernest Langer. *Relativity and modern physics*. Vol. 1. Harvard University Press Cambridge, 1923.
- [20] R Brout y col. “A Primer for Black Hole Quantum Physics”. En: *arXiv preprint arXiv:0710.4345* (2007).
- [21] Paul K Townsend. “Black holes”. En: *arXiv preprint gr-qc/9707012* (1997).
- [22] Luis Cortés Barbado. *Percepción de las radiaciones Hawking y Unruh por distintos observadores: aplicaciones de la función de temperatura efectiva*. Universidad de Granada, 2014.
- [23] Leonard Parker y David Toms. *Quantum field theory in curved spacetime: quantized fields and gravity*. Cambridge university press, 2009.
- [24] Ted Jacobson. “Introductory lectures on black hole thermodynamics”. En: (1996).
- [25] Jacob D Bekenstein. “Generalized second law of thermodynamics in black-hole physics”. En: *Physical Review D* 9.12 (1974), pág. 3292.
- [26] Paul CW Davies. “The thermodynamic theory of black holes”. En: *Proc. R. Soc. Lond. A* 353.1675 (1977), págs. 499-521.
- [27] Samir D Mathur. “What Exactly is the Information Paradox?” En: *arXiv preprint arXiv:0803.2030* (2008).
- [28] Samir D Mathur. “The fuzzball proposal for black holes: an elementary review”. En: *arXiv preprint hep-th/0502050* (2005).
- [29] Joseph Polchinski. “The Black Hole Information Problem”. En: *arXiv preprint arXiv:1609.04036* (2016).
- [30] Stephen W Hawking. “Breakdown of predictability in gravitational collapse”. En: *Physical Review D* 14.10 (1976), pág. 2460.
- [31] Leonard Parker. “Probability distribution of particles created by a black hole”. En: *Physical Review D* 12.6 (1975), pág. 1519.
- [32] Steven B Giddings y William M Nelson. “Quantum Emission from Two-Dimensional Black Holes”. En: *arXiv preprint hep-th/9204072* (2009).