



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

SUPERFICIES DE NEUWIRTH Y NUDOS (1, 1)

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA
M. EN C. JOSÉ ÁNGEL FRÍAS GARCÍA

TUTOR PRINCIPAL
DR. MARIO EUDAVE MUÑOZ, IM, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR
DR. MAX NEUMANN COTO, IM, UNAM
DR. ENRIQUE RAMÍREZ LOSADA, CIMAT

Ciudad de México, Septiembre de 2018



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A la memoria de Luis.

Agradecimientos

Agradezco a mi familia por todo su apoyo y enseñanza, a mis padres Luis y Trini, y a mis hermanos Luis, Hugo, Chuy y Misael. A mis abuelos Bertha, José, Cirila y Fidel. A Ana por enseñarme cosas nuevas.

También le doy las gracias a mi tutor Dr. Mario Eudave Muñoz por su tiempo, apoyo y útiles consejos. A los demás miembros de mi comité tutor y revisores de tesis, los doctores Max Neumann Coto, Francisco González Acuña, Fabiola Manjarrez Gutiérrez, Jesús Rodríguez Viorato y Enrique Ramírez Losada.

A todos los amigos que tuve el gusto de conocer y me han compartido mucho a lo largo de estos años. A Eladio, un hermano.

Extiendo mi gratitud a la Universidad Nacional Autónoma de México por todas las facilidades para mi desarrollo como profesionista y como persona. También doy las gracias a todos los profesores que tanto me enseñaron en esta etapa de mi vida, así como al personal de la universidad que facilitaron mi estancia aquí, en particular a Ma. Inés, Lucy, Tere y José Luis.

El presente trabajo fue realizado con el apoyo de una beca de CONACYT para estudios de doctorado, así como de una beca para la obtención del grado de doctorado otorgada por el proyecto PAPIIT IN102814 de la UNAM.

Índice general

Agradecimientos	II
Notación	1
Introducción	2
1. Preliminares	3
1.1. Superficies	4
1.2. Nudos $(1,1)$ y nudos satélite	6
1.3. Enlaces de dos puentes	9
1.4. La conjetura de Neuwirth	11
2. Superficies de Neuwirth y nudos $(1,1)$	13
2.1. Descripción de las superficies de Neuwirth para los nudos $(1,1)$	14
2.2. Gráficas descendentes	31
3. Nudos satélite con patrón de enlace racional	37
3.1. Resultados previos	38
3.2. La Conjetura de Neuwirth y nudos satélite con patrón de enlace racional	43
3.3. Superficies de Neuwirth no isotópicas	54
Bibliografía	55

Notación

\mathbb{N}	El conjunto de los números naturales $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$
\mathbb{Q}	El conjunto de los números racionales.
\mathbb{S}^n	La esfera de dimensión n .
\mathbb{D}^n	El disco o la bola de dimensión n .
I	El intervalo $[0, 1]$.
$A - B, A \setminus B$	Diferencia de conjuntos, el conjunto A menos el conjunto B .
$a \equiv b \pmod{n}$	a congruente con b módulo n .
$\text{int}(X), \overset{\circ}{X}$	El interior de la variedad X .
∂X	La frontera de la variedad X .
$\text{con}(X)$	El conjunto de componentes conexas del espacio topológico X .
$\pi_1(X, *)$	El grupo fundamental del espacio X basado en $*$.
$N(M)$	Vecindad regular de la variedad M en la variedad ambiente.
$\chi(X)$	La característica de Euler del complejo simplicial X .
$M N$	La variedad M cortada por la subvariedad N .
$E(K)$	El exterior del nudo o enlace K en la variedad ambiente (típicamente \mathbb{S}^3).
$T_{p,q}$	El nudo toroidal de pendiente p/q .

Introducción

Uno de los invariantes clásicos más importantes en la Teoría de Nudos es el llamado grupo del nudo. Dado un nudo $K \subset \mathbb{S}^3$, el grupo del nudo K se define como el grupo fundamental del complemento del nudo, $\pi_1(\mathbb{S}^3 - K)$. Existe un algoritmo para obtener una presentación del grupo de un nudo a partir de un diagrama regular de dicho nudo, conocido como el algoritmo de Wirtinger. Uno de los problemas con este invariante es que, en general, resulta difícil decidir si dos grupos finitamente presentados son isomorfos. Se han propuesto varias ideas para intentar resolver este problema, por ejemplo, considerar representaciones del grupo del nudo en grupos bien conocidos o descomponer, de alguna manera, dicho grupo en grupos más sencillos. Es en esta última dirección que apareció, en 1964, una conjetura de L. Neuwirth en la que se sugería que el grupo de un nudo no trivial se descompone como un producto no trivial con amalgama y el subgrupo de amalgama es libre. Esta conjetura fue resuelta al encontrar una superficie con ciertas propiedades que descomponía el exterior del nudo en dos componentes; dicha descomposición realiza la factorización algebraica del grupo del nudo. La existencia de tales superficies motivo la búsqueda de otras superficies con características similares. Es así como surge la que actualmente se conoce como la Conjetura de Neuwirth, que sugiere que para cualquier nudo no trivial en la 3-esfera existe una superficie cerrada que contiene al nudo como una curva no separante, de tal manera que cualquier disco de compresión para la superficie intersecta al nudo en al menos dos puntos.

La conjetura de Neuwirth ha sido resuelta para varias familias de nudos, pero en el caso general aún no se tiene una respuesta. El presente trabajo es un acercamiento a la conjetura de Neuwirth para los nudos $(1, 1)$, esto es, los nudos que admiten una posición de un puente con respecto a un toro estándar. En el Capítulo 1 se da una breve presentación de las definiciones y resultados necesarios para abordar el problema. En la primera sección del Capítulo 2 se hace uso de la posición de puentes de los nudos $(1, 1)$, así como de la teoría de Morse para dar una descripción de todas las posibles superficies de Neuwirth para los nudos $(1, 1)$. Dicha descripción es sintetizada en una familia de gráficas planas con ciertos parámetros que llamaremos gráficas descendentes.

En el Capítulo 3 se presentan construcciones explícitas de superficies de Neuwirth para una familia de nudos satélite con un patrón de enlace racional. Por ejemplo, se sabe por un resultado de M. Ozawa y H. Rubinstein [10] que si un nudo satisface la conjetura de Neuwirth, entonces lo mismo es cierto para cualquier nudo satélite de éste. Los nudos satélite y $(1, 1)$ tienen por compañeros a nudos toroidales, para los que se verifica la conjetura, luego, también es cierta para los primeros. Sin embargo, no es claro como encontrar superficies de Neuwirth para esta familia de nudos. En este Capítulo construiremos superficies de Neuwirth para varios de dichos nudos satélite y $(1, 1)$. Para tal fin, haremos uso de la caracterización de los enlaces de dos puentes de H. Schubert [11]. Como consecuencia (Corolario 3.3.1), tendremos que existen nudos con dos superficies de Neuwirth cuyos géneros se encuentran arbitrariamente distantes.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se dará una breve presentación de algunos conceptos y resultados importantes que serán necesarios en los capítulos siguientes.

Para fines del presente escrito, supondremos que todas las variedades consideradas se encuentran en la categoría PL (lineal por pedazos), la cual, en dimensión 3, coincide con la categoría de variedades suaves, así que se supondrá una u otra según convenga. Siempre que exista alguna intersección entre dos variedades, asumiremos que se da de forma transversal.

Sea M una n -variedad conexa y $F \subset M$ una subvariedad de dimensión $m < n$, diremos que F se encuentra *propriadamente encajada* en M si $\partial F \subset \partial M$ y $\text{int}(F) \subset \text{int}(M)$. Si $m = n - 1$ es posible obtener una nueva variedad $\tilde{M} = M \setminus \text{int}(N(F))$ y diremos que \tilde{M} se obtiene de M al *cortar por* F . Usualmente se denota a \tilde{M} por $M|F$. Si, por ejemplo, F tiene dos lados en M , entonces $\partial\tilde{M}$ contendrá dos copias de F . En caso de que $M|F$ sea disconexa, decimos que F *separa a* M .

Supongamos que $F \subset M$ es una subvariedad de dimensión m propriadamente encajada en la n -variedad M , $m < n$. Decimos que F es *paralela o isotópica* a una subvariedad de ∂M si existe una isotopía en M que deja invariante ∂F y lleva a F en una subvariedad en ∂M . Por ejemplo, si M es una 3-variedad y F es un arco propriadamente encajado en M , entonces la condición de ser paralelo a un arco en ∂M es equivalente a la existencia de un disco no singular $D \subset M$ con $\text{int}(D) \subset \text{int}(M)$ y $\partial D = F \cup \alpha$, donde $\alpha \subset \partial M$ es el arco paralelo a F .

1.1. Superficies

Entenderemos por *superficie* a una variedad topológica de dimensión 2. La existencia o ausencia de superficies con ciertas propiedades contenidas en una 3-variedad M , dotan a la 3-variedad de ciertas propiedades topológicas y geométricas. Así mismo, es posible considerar ciertas superficies en una 3-variedad para descomponer a la variedad original en pedazos más sencillos. Un ejemplo claro de esto, es la famosa Conjetura de Geometrización propuesta por W. Thurston y resuelta por G. Perelman. El primer paso en la prueba de la conjetura es la descomposición en variedades primas (cortando a lo largo de esferas esenciales), y después una descomposición obtenida al cortar a lo largo de ciertos toros esenciales. Si, por ejemplo, alguna de las componentes obtenidas contiene toros o anillos esenciales, entonces dicha componente no admite ninguna estructura hiperbólica.

Como se verá más adelante en el texto, también es posible utilizar ciertas superficies contenidas en una 3-variedad para descomponerlas en subvariedades en las que sea más sencillo el cálculo de algunos invariantes (por ejemplo, el grupo fundamental, algunos grupos de homología, etc.).

Definición 1.1.1. Sea M una 3-variedad y $S \subset M$ una superficie propiamente encajada con dos lados distinta de la esfera \mathbb{S}^2 y el disco \mathbb{D}^2 . Diremos que S es **incompresible** en M si para cada disco $D \subset M$ tal que $D \cap S = \partial D$, existe un disco $D' \subset S$ con $\partial D' = \partial D$. Si no existe tal disco D' para algún disco D , diremos que S es **compresible** en M y que D es un **disco de compresión** para S .

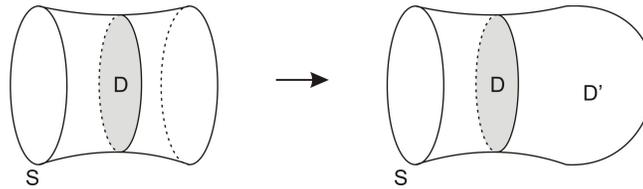
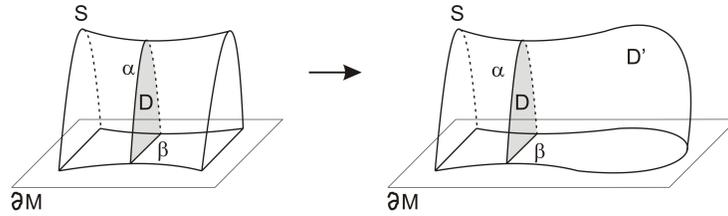


Figura 1.1: Superficie incompresible

Definición 1.1.2. Una superficie S propiamente encajada en la 3-variedad M se dice **∂ -incompresible** en M si para cada disco $D \subset M$ cuya frontera se descompone como la unión de dos arcos α y β que se intersecan únicamente en sus extremos y satisfacen $D \cap S = \alpha$ y $D \cap \partial M = \beta$, existe un disco $D' \subset S$ con $\alpha \subset \partial D'$ y $\partial D' - \alpha \subset \partial S$. Si para algún disco $D \subset M$ con las propiedades mencionadas no existe uno de tales discos D' , diremos que S es **∂ -compresible** en M y D se llama **disco de ∂ -compresión** para S .

Existe cierta relación entre una superficie incompresible contenidas en una 3-variedad y los grupos fundamentales de dicha superficie y la variedad que la contiene. Si $S \subset M$ es una superficie con dos lados y conexa distinta de una esfera o un disco, entonces S es incompresible en M si y solo si el homomorfismo inducido por la inclusión $i_* : \pi_1(S) \rightarrow \pi_1(M)$ es inyectivo. En caso de que la superficie S no tenga dos lados en M (por ejemplo, si no es orientable y M

Figura 1.2: Superficie ∂ -incompresible

sí lo es), diremos que S es *algebraicamente incompresible* si $i_* : \pi_1(S) \rightarrow \pi_1(M)$ es inyectivo. De manera similar, S es ∂ -incompresible en M si el homomorfismo inducido por la inclusión en los grupos fundamentales relativos a la frontera $i_* : \pi_1(S, \partial S) \rightarrow \pi_1(M, \partial M)$ es inyectivo para cualquier elección de punto base en ∂S (para mayores detalles sobre esta relación entre incompresibilidad y grupos fundamentales se puede revisar [6]).

Definición 1.1.3. Una superficie S con 2-lados, distinta de \mathbb{S}^2 y \mathbb{D}^2 , contenida en la 3-variedad M (propiamente encajada si $\partial S \neq \emptyset$), se dice **esencial** en M si S es incompresible y ∂ -incompresible en M siempre que $\partial S \neq \emptyset$, o bien, en caso contrario, si S es incompresible y no es isotópica en M a alguna componente de ∂M .

1.2. Nudos $(1, 1)$ y nudos satélite

En el presente texto, un *nudo* contenido en una 3-variedad M será un encaje PL, $f : S^1 \rightarrow M$. Abusando un poco de la terminología, llamaremos también nudo a la imagen del encaje $f(S^1)$. Para $n \in \mathbb{N}$, llamaremos un *enlace* de n componentes a una unión de n nudos disjuntos $f_1(S^1) \cup f_2(S^1) \cup \dots \cup f_n(S^1) \subset M$. A lo largo del texto se utilizará el término enlace para referir también a los nudos, a menos que sea necesario hacer explícito que se trata de un enlace con una sola componente se utilizará el término nudo. Si $L = f_1(S^1) \cup f_2(S^1) \cup \dots \cup f_n(S^1) \subset M$ y $L' = g_1(S^1) \cup g_2(S^1) \cup \dots \cup g_m(S^1) \subset M$ son dos enlaces, diremos que los enlaces son *equivalentes* en M si $n = m$ y existe una isotopía en M que lleva el conjunto L en el conjunto L' . En adelante, cuando hablemos de un enlace, nos referiremos a su clase de equivalencia en la variedad ambiente.

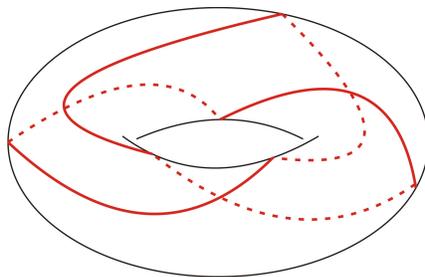
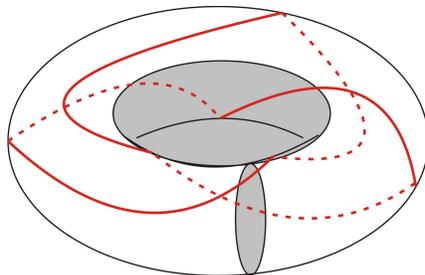
Definición 1.2.1. Sean L y S un enlace y una superficie cerrada, respectivamente, en \mathbb{S}^3 . Supóngase que L y S se intersectan de manera transversal. Decimos que L se encuentra en **posición de n puentes** con respecto a S , si S divide a L en $2n$ arcos paralelos a arcos sobre S , donde, si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ son los arcos de L que se encuentran en una de las dos componentes en que S divide a \mathbb{S}^3 , entonces existen arcos ajenos β_1, \dots, β_n , contenidos en S con $\alpha_i \cap \beta_i = \partial\alpha_i = \partial\beta_i$, $i = 1, \dots, n$ tales que $\alpha_i \cup \beta_i$ es frontera de un disco $D_i \subset \mathbb{S}^3$, $D_i \cap S = \beta_i$ y $D_i \cap D_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

Definición 1.2.2. Decimos que un enlace L en \mathbb{S}^3 es un **enlace** (g, n) con $g \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, si existe una superficie de Heegaard de género g (una superficie cerrada que divide la 3-esfera en dos cubos con g asas), $S \subset \mathbb{S}^3$, tal que L se encuentra en posición de n puentes con respecto a S .

No es difícil ver que un enlace (g, n) también es un enlace $(g + 1, n)$ y $(g, n + 1)$, aunque el converso no siempre es cierto. Un hecho menos obvio es que si un enlace es $(g, n + 1)$, entonces también es $(g + 1, n)$. Cuando $g = 0$, decimos simplemente que L admite una *posición de n puentes*; si además L no admite una posición de $n - 1$ puentes, diremos que L tiene *número de puentes n* . Por como está definido, el número de puentes es un invariante de nudos y enlaces.

En el presente texto, estamos interesados en los nudos $(1, 1)$, es decir, aquellos nudos para los que existe un toro estándar en \mathbb{S}^3 con respecto al cual se pueden colocar en posición de 1 puente. En particular, los nudos $(1, 1)$ contienen a los nudos de dos puentes. Los nudos $(1, 1)$ también contienen a los nudos *toroidales*, que son aquellos nudos que se pueden encajar en un toro estándar (un toro de Heegaard), $T \subset \mathbb{S}^3$. Los nudos toroidales se pueden parametrizar mediante el conjunto $\mathbb{Q} \cup \{1/0\}$, donde un número racional p/q en forma reducida (es decir, $(p, q) = 1$), representa a la clase de isotopía de una curva cerrada y simple contenida en T que completa p vueltas en la dirección meridional de T y q vueltas completas en la dirección longitudinal, una vez que se haya fijado una orientación para las curvas meridional y longitudinal. En este caso, diremos que se trata de un *nudo toroidal* (p, q) , y lo denotaremos por $T_{p,q}$. En la Figura 1.3 se muestra el nudo toroidal $3/2$, denotado por $T_{3,2}$.

Otra familia importante de nudos en la 3-esfera es aquella formada por los nudos satélite que se caracterizan por lo siguiente:

Figura 1.3: Nudo toroidal $T_{3,2}$ Figura 1.4: Superficie meridionalmente incompresible para el nudo toroidal $T_{3,2}$

Definición 1.2.3. Se dice que un nudo $K \subset \mathbb{S}^3$ es un **nudo satélite** si existe un toro incompresible $T \subset E(K) = \mathbb{S}^3 - \overset{\circ}{N}(K)$ no isotópico a $\partial N(K)$. Si K' es la curva central del toro sólido que tiene por frontera a T , decimos que K es un **nudo satélite de K'** , o bien, que K' es un **nudo compañero de K** .

Se sigue de la definición previa que si K es un nudo satélite con un nudo compañero K' , entonces K' es un nudo no trivial. Ciertas propiedades de un nudo no trivial se heredan a los nudos satélite de éste, como se mencionará más adelante.

Una propiedad importante de los nudos satélite es que, junto con los nudos toroidales, son los únicos nudos en la 3-esfera que no son hiperbólicos (su exterior no admite una estructura hiperbólica). Una familia importante de los nudos satélite son los llamados nudos cable. Diremos que un nudo $K \subset \mathbb{S}^3$ es un nudo *cable* si existe un nudo K' , compañero de K , tal que K sea isotópico en $E(K')$ a una curva cerrada simple contenida en $\partial N(K')$.

A continuación se presenta la definición de superficie meridionalmente incompresible. Dicha propiedad es relativa, no solo a la 3-variedad que contiene a la superficie, sino también con respecto a un nudo. Este tipo de superficies servirán para definir las superficies de Neuwirth que serán las superficies buscadas en la conjetura del mismo nombre.

Definición 1.2.4. Sea K un nudo contenido en una 3-variedad M y $S \subset M$ una superficie que es ajena a K o que contiene a K . Decimos que S es **meridionalmente incompresible con respecto a K** si todo disco de compresión para S intersecta a K en al menos dos puntos.

Es un hecho conocido que en un toro sólido M existe, salvo isotopía, un único disco de

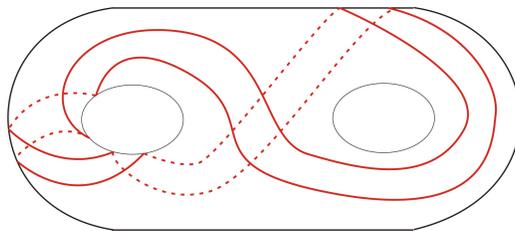


Figura 1.5: Superficie meridionalmente compresible

compresión para ∂M en M . En la Figura 1.3 se muestra al nudo toroidal $T_{3,2}$ contenido en un toro estándar T , que divide a \mathbb{S}^3 en dos toros sólidos, luego existen esencialmente dos discos de compresión para T en \mathbb{S}^3 (los cuales se ilustran sombreados en la Figura 1.4). Como uno de estos discos intersecta a $T_{3,2}$ en tres puntos, mientras que el otro lo hace en dos, tenemos que T es meridionalmente incompresible con respecto a K en \mathbb{S}^3 .

Ahora consideremos una superficie de Heegaard de género 2, $S \subset \mathbb{S}^3$. En este caso, no es tan fácil describir los nudos que se pueden encajar en S como lo fue en el caso de una superficie de género 1. Si K es un nudo encajado en S , no es obvio decidir si S es meridionalmente incompresible con respecto a K . En la Figura 1.5 se muestra nuevamente el nudo toroidal $T_{3,2}$ encajado en una superficie estándar de género 2, solo que en esta presentación existe un disco de compresión para la superficie que es ajeno al nudo, así que la superficie no puede ser meridionalmente incompresible con respecto a $T_{3,2}$. En general, para superficies y nudos cualesquiera en la 3-esfera resulta difícil decidir si la superficie es meridionalmente incompresible con respecto al nudo. Si $H \subset \mathbb{S}^3$ es una subvariedad propia y $S \subset H$ es una superficie cerrada que contiene al nudo K y tal que todo disco de compresión para S en H intersecta al nudo en al menos dos puntos, diremos que S es *meridionalmente incompresible con respecto a* (H, K) .

En el Capítulo 3 se darán algunos criterios para verificar dicha propiedad para cierta familia de nudos y superficies.

1.3. Enlaces de dos puentes

Una de las familias más simples y más estudiadas de enlaces en \mathbb{S}^3 es aquella formada por los *enlaces de dos puentes*. Como se mencionó anteriormente, dado un enlace de dos puentes $L \subset \mathbb{S}^3$, existe una esfera $S \subset \mathbb{S}^3$, tal que L admite una posición de dos puentes con respecto a S . Más aún, existe una variedad producto $S \times [-1, 1] \subset \mathbb{S}^3$ con $S = S \times \{0\}$ tal que $L \subset S \times [-1, 1]$. Al considerar la función altura $h : S \times [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ definida por la proyección en el intervalo, es posible colocar a L en una posición con exactamente dos máximos y dos mínimos (un punto crítico en cada uno de los cuatro arcos en lo que S divide a L). Otra representación equivalente de un enlace de dos puentes es como la cerradura numerador o denominador de un ovrillo racional, razón por la cual también son conocidos como *enlaces racionales*. Un *ovrillo* está formado por una pareja (B, t) , donde B es una 3-bola y t son dos arcos ajenos propiamente encajados en B con sus extremos en cuatro puntos fijos (por convención, se suele pensar en estos puntos como en los puntos cardinales NE, NO, SE y SO de una proyección plana de B como en la Figura 1.6(a)). Al igual que en el caso de enlaces, en realidad estamos interesados en las clases de isotopía de ovrillos que dejan fijos los extremos de los arcos, así que cuando se menciona un ovrillo, en realidad se está pensando en su clase de isotopía. Se dice que un ovrillo (B, t) es *racional* si los dos arcos en t son paralelos a arcos en ∂B . El ovrillo de la Figura 1.6(a) es racional, aunque no resulta fácil ver los discos de paralelismo de los arcos del ovrillo con arcos en la frontera de la 3-bola. En las Figuras 1.6(b) y (c), se ilustran las operaciones de ovrillos conocidas como *cerradura numerador* y *denominador*, respectivamente. En dichas operaciones se completan los ovrillos a enlaces al cerrarlos con arcos en la 3-bola complementaria a B en \mathbb{S}^3 . Para una exposición más extensa sobre ovrillos racionales se puede revisar [1] y [7].

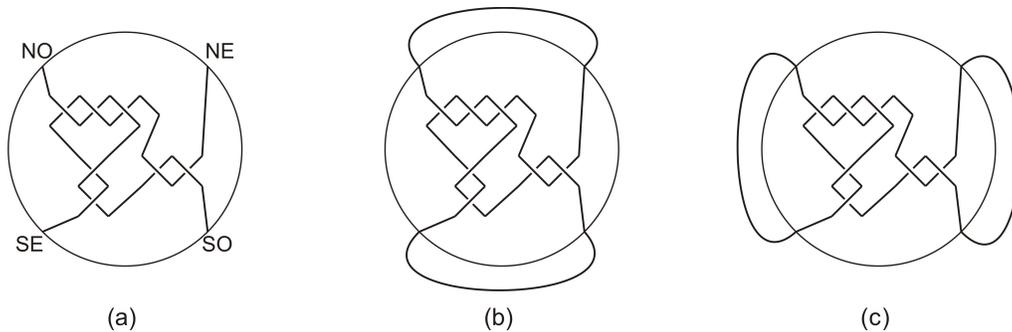


Figura 1.6: Ovrillo racional

Es claro que un enlace de dos puentes solo puede tener una o dos componentes. Si, por ejemplo, un enlace racional tiene dos componentes, entonces cada componente es un nudo trivial que se enlaza con la otra componente. Si L es un enlace de dos puentes en una presentación con dos máximos y dos mínimos con respecto a una función altura, se puede simplificar aún más hasta representarlo mediante un diagrama plano correspondiente a alguno de los dos esquemas de la Figura 1.7 (como el de la izquierda cuando n sea impar, o bien, como el de la derecha si n es par). En cada diagrama, las cajas con etiqueta $c_i \in \mathbb{Z}$, representan una

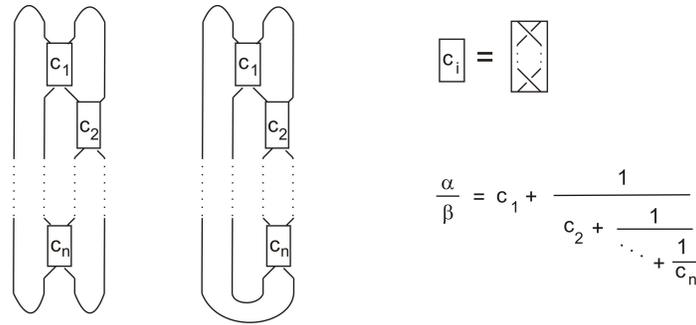


Figura 1.7: Enlace racional

secuencia vertical de $|c_i|$ cruces, que por convención, serán como en la figura siempre que i sea par y $c_i > 0$, o bien, cuando i sea impar y $c_i < 0$, mientras que corresponderá a una secuencia de cruces opuestos en cualquier otro caso. A esta presentación para el enlace L es posible asignarle el racional $\alpha/\beta = [c_1, c_2, \dots, c_n]$ obtenido como la fracción continua definida por los enteros c_1, c_2, \dots, c_n . La relación entre el número racional α/β y la clase de isotopía del enlace L es expresada por el siguiente resultado:

Teorema 1.3.1. (Schubert 1956) *Si K y K' son dos nudos o enlaces racionales con respectivas fracciones α/β y α'/β' , entonces K y K' son isotópicos si y solo si $\alpha = \alpha'$ y ya sea que $\beta \equiv \beta' \pmod{\alpha}$, o bien $\beta\beta' \equiv 1 \pmod{\alpha}$.*

Este resultado fue demostrado por primera vez por H. Schubert [11] mediante un análisis combinatorio de los enlaces en su presentación como enlaces de dos puentes. Una prueba simplificada se basa en el hecho de que la cubierta doble de \mathbb{S}^3 ramificada a lo largo de un enlace racional se corresponde con una clase, bajo difeomorfismos, de espacios lente; finalmente se hace uso de clasificación de las clases de espacios lente bajo difeomorfismo. Recientemente, L. Kauffman y S. Lambropoulou [7] dieron una demostración haciendo uso de la clasificación de ovillos racionales de J.H. Conway [1].

1.4. La conjetura de Neuwirth

Sean $K \subset \mathbb{S}^3$ un nudo y $S \subset \mathbb{S}^3$ una superficie cerrada que contiene a K de manera que K es una curva no separante en S . Supóngase también que cualquier disco de compresión para S intersecta a K en al menos dos puntos, es decir, S es meridionalmente incompresible con respecto a K . De existir una superficie S con tales propiedades, diremos que S es una *superficie de Neuwirth cerrada para K* . La superficie $\hat{S} = S \cap E(K)$ será pues una superficie compacta, conexa, orientable, separante y esencial, propiamente encajada en $E(K) = \mathbb{S}^3 - \overset{\circ}{N}(K)$ con dos componentes de frontera en $\partial N(K)$ de pendiente entera. A esta superficie le llamaremos simplemente una *superficie de Neuwirth para K* . Dada la equivalencia entre las superficies de Neuwirth cerradas y aquellas con frontera, en ocasiones se mencionarán simplemente como superficies de Neuwirth de manera indistinta. El ejemplo más sencillo de nudos que admiten este tipo de superficies son los nudos toroidales $T_{p,q}$, donde al menos uno de $|p|$ o $|q|$ es mayor o igual que 2; para estos nudos, la superficie de Neuwirth es el toro estándar que los contiene, pues ya se había visto que el toro era meridionalmente incompresible con respecto a $T_{p,q}$ y el nudo es una curva no separante en la superficie (ver Fig. 1.4).

La conjetura que actualmente se conoce como de Neuwirth y se enuncia en términos topológicos surge en realidad de otra conjetura de descomposición de los grupos fundamentales de complementos de nudos que fue enunciada por L. Neuwirth [9] en 1964:

Conjetura 1.4.1. *Si $K \subset \mathbb{S}^3$ es un nudo no trivial, entonces $\pi_1(\mathbb{S}^3 - K)$ se factoriza como un producto libre no trivial con amalgama y el subgrupo de amalgama es libre.*

Esta conjetura fue demostrada años después, en 1984, por M. Culler y P. B. Shalen [2], cuya prueba se basa en la existencia de superficies especiales en el exterior de cualquier nudo que realizan la descomposición algebraica:

Teorema 1.4.2. *(Conjetura débil de Neuwirth) Para cada nudo no trivial $K \subset \mathbb{S}^3$ existe una superficie propiamente encajada en $E(K)$ separante, orientable, esencial y con frontera no vacía y no meridional.*

Cabe hacer notar que las superficies descritas en la demostración del teorema anterior son necesariamente de Neuwirth, pues la pendiente de las componentes de frontera de una de tales superficies en la frontera del exterior del respectivo nudo no era necesariamente entera. Sin embargo, la existencia de dichas superficies motivó la búsqueda de otras superficies más particulares, es así como surge la siguiente conjetura que hasta la fecha no ha sido resuelta en su totalidad:

Conjetura 1.4.3. *(Conjetura de Neuwirth) Todo nudo no trivial $K \subset \mathbb{S}^3$ tiene una superficie de Neuwirth asociada.*

Esta conjetura ha sido demostrada únicamente para ciertas familias de nudos. Como se mencionó antes, hay ciertos nudos para los que se verifica de manera inmediata, como son los nudos toroidales y los nudos cables (en cada caso, la superficie de Neuwirth asociada corresponde al toro que los contiene, ya sea estándar o anudado). En [10], M. Ozawa y J. H.

Rubinstein hacen un listado de varias familias de nudos para los cuales se ha demostrado la conjetura de Neuwirth, entre los que se cuentan los nudos de dos puentes, nudos alternantes, nudos alternantes generalizados, nudos +-adecuados no positivos, etc.. Para la mayoría de las familias de nudos que se sabe que satisfacen la conjetura, la superficie de Neuwirth asociada se obtiene al considerar la frontera de una vecindad regular de una superficie no orientable que tiene por frontera al nudo y que es algebraicamente incompresible y ∂ -incompresible en el exterior del nudo. Por ejemplo, en algunos de estos casos, dichas superficies se obtienen de un diagrama plano al colorear las regiones complementarias como tablero de ajedrez y formar la superficie con uno de los colores. Esto dio pie a la siguiente conjetura que implica la de Neuwirth:

Conjetura 1.4.4. *(Conjetura fuerte de Neuwirth) Para cada nudo primo K que no es toroidal, existe una superficie no orientable S con $\partial S = K$ y tal que $S \cap E(K)$ es algebraicamente incompresible y ∂ -incompresible.*

Recientemente, N. Dunfield [3] encontró algunos nudos que no satisfacen la conjetura anterior. Por lo tanto, es necesario pensar en otra ruta para intentar demostrar la conjetura de Neuwirth en lugar de las superficies no orientables mencionadas. En el Capítulo 3 se propone una construcción de superficies de Neuwirth para los nudos $(1,1)$ y satélites de manera directa. No queda aún claro si estas superficies se pueden realizar a partir de una superficie no orientable con las propiedades mencionadas que tenga por frontera al nudo.

Capítulo 2

Superficies de Neuwirth y nudos (1,1)

En el presente capítulo se dará una descripción de todas las superficies en \mathbb{S}^3 que pueden ser superficies de Neuwirth para algún nudo $(1,1)$. Para esto, se hará uso de la Teoría de Morse; si $S \subset \mathbb{S}^3$ es una superficie de Neuwirth cerrada para un nudo $(1,1)$, K , es posible colocar a S en varias posiciones de Morse compatibles con la posición $(1,1)$ del nudo K . Se define una función de complejidad para comparar las diferentes posiciones de Morse para S . De entre todas las posiciones de Morse para S , se elegirá una que minimice la complejidad. Se demostrará que tal configuración para S con complejidad mínima puede ser descrita mediante una gráfica plana con ciertos parámetros.

2.1. Descripción de las superficies de Neuwirth para los nudos (1,1)

No es difícil ver que un nudo $K \subset \mathbb{S}^3$ es un nudo (1,1) si y solo si K se puede encajar en un producto $T \times I$, donde T es un toro estándar en \mathbb{S}^3 e $I = [0, 1]$, de tal forma que $K_0 := K \cap (T \times \{0\})$ y $K_1 := K \cap (T \times \{1\})$ son dos arcos simples y $K \cap T \times (0, 1)$ son dos arcos que intersectan de manera transversal a cualquier toro $T_t := T \times \{t\}$, y que conectan a K_0 con K_1 , es decir, que cuando restringimos la proyección del producto $T \times I$ en el factor I a cada uno de los dos arcos transversales, resulta ser inyectiva sobre I . Los toros de nivel $T_0 = T \times \{0\}$ y $T_1 = T \times \{1\}$ descomponen a la 3-esfera como $\mathbb{S}^3 = H_0 \cup (T \times [0, 1]) \cup H_1$, donde H_0 y H_1 son dos toros sólidos.

Pensemos en un nudo (1,1) y no trivial, $K \subset \mathbb{S}^3$, en una configuración como la que se mencionó en el párrafo anterior. Isotopamos K_0 y K_1 dentro de H_0 y H_1 , respectivamente, de tal manera que K_i sea paralelo a un arco simple en $T_i = \partial H_i$ para $i = 0, 1$. Sea $S \subset \mathbb{S}^3$ una superficie de Neuwirth cerrada para K . Podemos suponer que S intersecta a T_0 y T_1 de manera transversal, y denotaremos por S_0, S_1 y \tilde{S} a las superficies $S \cap H_0, S \cap H_1$ y $S \cap (T \times I)$, respectivamente. Sea $\pi : T \times I \rightarrow I$ la función altura dada por la proyección en el factor I . Al suponer que S es una superficie suave, es posible isotopar a S , manteniendo la posición de puentes de K , de tal forma que $\pi|_{\tilde{S}}$ sea una función de Morse con conjunto de puntos críticos no degenerados en diferentes alturas $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subset I$, donde supondremos que $x_i < x_j$ siempre que $i < j$. Así, un punto crítico en \tilde{S} asociado a un valor crítico en X puede corresponder a un mínimo local, un máximo local o un punto silla. Para cualquier otro punto $y \in I - X$ tenemos que $(\pi|_{\tilde{S}})^{-1}(y)$ será una colección de curvas cerradas y simples sobre \tilde{S} y también sobre el respectivo toro de nivel $T \times \{y\}$, comúnmente llamadas *curvas de nivel* para S en el nivel y . Más aún, si C_0 y C_1 son las curvas centrales de H_0 y H_1 , respectivamente, la función de Morse de la superficie \tilde{S} se puede extender casi completamente a las superficies S_0 y S_1 , simplemente al extender la función altura π a las variedades producto $H_0 - \overset{\circ}{N}(C_0)$ y $H_1 - \overset{\circ}{N}(C_1)$ con respectivos codominios $[-1, 0]$ y $[1, 2]$. Llamaremos $\tilde{\pi} : \mathbb{S}^3 - (\overset{\circ}{N}(C_0) \cup \overset{\circ}{N}(C_1)) \rightarrow [-1, 2]$ a tal extensión y supondremos siempre que K_0 y K_1 tienen un único mínimo y máximo, respectivamente, con respecto a la función altura dada por $\tilde{\pi}$.

Para cada valor $z \in [-1, 2]$, el respectivo toro de nivel $T_z := (\tilde{\pi})^{-1}(z)$ será un toro estándar que divide a \mathbb{S}^3 en dos toros sólidos V_0 y V_1 , tales que V_i contiene a C_i como curva central para $i = 0, 1$. Si D_i es un disco meridiano de V_i , $i = 0, 1$, y $\alpha = \partial D_0, \beta = \partial D_1 \subset T_z$, entonces podemos suponer que las curvas α y β se intersectan en un único punto x , y los elementos $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(T_z, x)$ generan a todo el grupo, es decir, para cualquier lazo $\gamma \subset T_z$ basado en x se tiene que $[\gamma] = p[\alpha] + q[\beta]$ para ciertos enteros p y q . Más aún, si la curva γ es simple, entonces p y q son primos relativos. De esta manera, cualquier curva de nivel de S en la altura z tendrá asociada una fracción en forma reducida p/q , a la que llamaremos la *pendiente* de la curva de nivel. Es fácil ver que si $\gamma \subset T_z$ es una curva cerrada, simple y esencial de pendiente p/q , entonces la proyección de γ en algún otro toro de nivel $T_{z'}$ tendrá la misma pendiente en el respectivo toro $T_{z'}$.

Pensemos en uno de los valores críticos $x_i \in X$, correspondiente a un punto silla para la

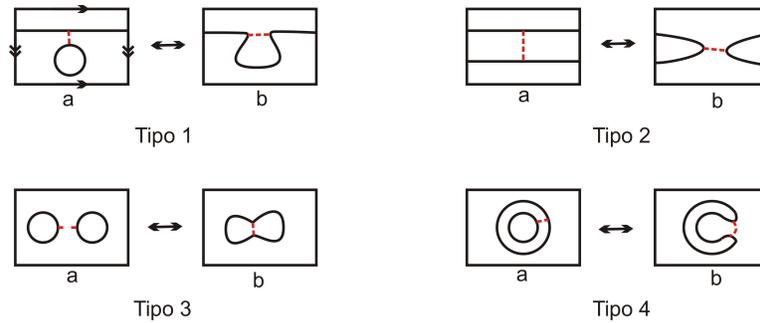


Figura 2.1: Tipos de puntos silla

función $\pi|_{\tilde{S}}$. Consideremos las curvas de nivel de la superficie \tilde{S} para los valores $x_i - \varepsilon$ y $x_i + \varepsilon$, donde $\varepsilon > 0$ es elegido de tal forma que sea menor a x_i , $1 - x_i$, $x_i - x_{i-1}$ y $x_{i+1} - x_i$ (siempre que x_{i-1} y x_{i+1} existan). Las curvas de nivel para \tilde{S} en los niveles $x_i - \varepsilon$ y $x_i + \varepsilon$ serán idénticas, salvo por aquellas curvas que toman parte en el punto silla en x_i , el cual puede ser de alguno de los siguientes tipos:

- Tipo 1:* Una curva de nivel trivial y una curva de nivel esencial en la altura $x_i + \varepsilon$ se fusionan en una curva de nivel esencial en el nivel $x_i - \varepsilon$ (diremos en este caso el punto crítico corresponde al *subtipo (a)*), o viceversa, es decir, una curva de nivel esencial en el nivel $x_i + \varepsilon$ se descompone en dos curvas, una trivial y la otra esencial, al pasar al nivel $x_i - \varepsilon$ (en este caso nos referiremos al *subtipo (b)*).
- Tipo 2:* Dos curvas de nivel esenciales y paralelas en el nivel $x_i + \varepsilon$ se fusionan en el valor crítico x_i , para dar lugar a una curva trivial en el nivel $x_i - \varepsilon$ (*subtipo (a)*), o viceversa (*subtipo (b)*).
- Tipo 3:* Dos curvas de nivel triviales y no concéntricas para \tilde{S} en la altura $x_i + \varepsilon$ se fusionan en una única curva trivial en la altura $x_i - \varepsilon$ (*subtipo (a)*), o viceversa (*subtipo (b)*).
- Tipo 4:* Dos curvas de nivel triviales y concéntricas para \tilde{S} en la altura $x_i + \varepsilon$ se fusionan en una única curva trivial en el nivel $x_i - \varepsilon$ (*subtipo (a)*), o viceversa (*subtipo (b)*).

En la Figura 2.1 se representan esquemáticamente los cuatro tipos de puntos silla mencionados. Cada rectángulo representa un toro de nivel. En cada punto silla del subtipo (a), el esquema de la izquierda representa la altura $x_i + \varepsilon$ y el de la derecha representa el nivel $x_i - \varepsilon$; mientras que en los subtipos (b), la altura $x_i + \varepsilon$ está representada en el diagrama de la derecha. En cada rectángulo se representan las curvas de nivel para S que toman parte en el respectivo punto silla, donde las curvas que aparecen como rectas horizontales representan curvas de nivel esenciales. Las líneas punteadas indican la trayectoria que siguen las curvas de nivel al acercarse al valor crítico.

Dada una superficie de Neuwirth cerrada S para un nudo $K \subset \mathbb{S}^3$, en una configuración como se mencionó anteriormente, definimos la complejidad para dicha configuración de la

superficie como

$$c(S) = \left(\sum_{A \in \text{con}(S_0)} |\chi(A)| + \sum_{B \in \text{con}(S_1)} |\chi(B)| + |\tilde{S}| \quad , \quad |X| \right)$$

donde $|X|$ denota la cardinalidad de X , $|\tilde{S}|$ denota el número de componentes conexas de \tilde{S} , $|\chi(A)|$ denota el valor absoluto de $\chi(A)$, la característica de Euler de la superficie A , y $\text{con}(S_i)$ denota el conjunto de componentes conexas de la superficie S_i , $i = 0, 1$. Tenemos pues, que la complejidad de una configuración para la superficie S está dada por una pareja de enteros; luego, al conjunto de complejidades correspondientes a todas las posibles configuraciones de S le daremos el orden lexicográfico. De ahora en adelante supondremos que S se encuentra en una configuración con complejidad mínima, esto es, que la superficie ha sido isotopada, respetando la posición $(1, 1)$ de K , hasta una configuración en la cual ya no es posible reducir su complejidad.

Supongamos que alguna componente conexa de $S|(T_0 \cup T_1)$ es un disco, digamos D . El disco D solo puede ser un disco meridiano de H_i , un disco en S_i paralelo a un disco en T_i , o un disco en \tilde{S} paralelo a un disco en T_i , $i \in \{0, 1\}$.

Afirmación 2.1.1. *Los discos componentes de $S|(T_0 \cup T_1)$ solo pueden ser discos meridianos de H_i o discos en S_i con fronteras triviales y concéntricas en T_i , $i \in \{0, 1\}$.*

Demostración. Supongamos que existen dos discos $D_1, D_2 \subset S_i$ tales que ∂D_1 y ∂D_2 son curvas triviales que acotan discos ajenos $D'_1, D'_2 \subset T_i$, respectivamente, $i \in \{0, 1\}$. Alguno de tales discos, digamos D'_1 , es ajeno a K , luego la 3-bola, $B \subset H_i$, que tiene por frontera a $D_1 \cup D'_1$ es ajena a K y sería posible realizar una isotopía en B para recorrer el disco D_1 desde H_1 hasta $T \times I$, con lo cual se reduciría la primera entrada de $c(S)$ en al menos uno, lo cual es una contradicción. Así que todas las componentes discos de S_i que son paralelas a discos en T_i , tienen fronteras concéntricas en T_i . Más aún, si $D \subset S_i$ es el disco cuya frontera es la curva de más adentro en T_i , entonces K_i debe estar contenido en la 3-bola acotada por D y el disco al que es paralelo sobre T_i .

Supongamos que alguna de las componentes conexas de \tilde{S} es un disco, digamos D . Luego, D es paralelo en $T \times I$ a un disco $D' \subset T_i$, $i \in \{0, 1\}$. Observemos que D' es ajeno a K . Supongamos que $\text{int}(D') \cap S = \emptyset$ y sea A la componente de S_i que comparte frontera con D . Existe una isotopía, como en el párrafo anterior, que lleva a D desde $T \times I$ hasta H_i . Si $\chi(A) < 0$, al realizar dicha isotopía, se reducirían $|\chi(A)|$ y $|\tilde{S}|$ en uno, por lo tanto, también la complejidad de S , lo cual no es posible. En caso de que $\chi(A) = 0$, es decir, si A es un anillo, luego de llevar a cabo la isotopía, A se convierte en un disco, con lo que se incrementa $|\chi(A)|$ en uno, sin embargo, se reducen $|\tilde{S}|$ en uno y también $|X|$ en al menos uno, así que la primera entrada de $c(S)$ se mantiene constante pero se reduce la segunda entrada, nuevamente se llega a una contradicción. Por último, supongamos que $\text{int}(D') \cap S \neq \emptyset$ y elegimos una curva $\alpha \subset D' \cap S$ de más adentro en D' . Una vez más se tiene que α es frontera de un disco $D'' \subset S$. Es posible realizar una isotopía para recorrer a D'' hasta que se encuentre completamente contenido en H_i o en $T \times I$, sin incrementar $c(S)$. Como en el análisis de los casos anteriores, existe una isotopía que elimina el arco α de $D' \cap S$ y reduce $c(S)$, lo cual es una contradicción y, por lo tanto, no existen discos como componentes de \tilde{S} .

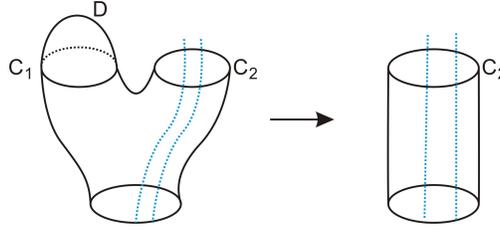


Figura 2.2: Isotopía

□

Afirmación 2.1.2. *Si existe un disco en S_i con frontera trivial sobre T_i , $i \in \{0, 1\}$, entonces las componentes conexas de S_i son discos meridianos de H_i , o discos con frontera trivial sobre T_i , o anillos con frontera esencial y no meridional sobre T_i .*

Demostración. Supongamos que existe al menos un disco, $D \subset S_i$, con frontera trivial sobre T_i . De la afirmación anterior se tiene que si $\tilde{D} \subset T_i$ es el disco que comparte frontera con D , entonces la 3-bola, $B \subset H_i$, que tiene por frontera a $D \cup \tilde{D}$, contiene a K_i . Sea A una componente de S_i ajena a B y distinta de un disco. Supongamos que existe un disco de compresión, $D' \subset H_i$, para A . Podemos suponer que $\text{int}(D') \cap S = \emptyset$, pues en caso contrario podemos elegir una curva $\alpha \subset \text{int}(D') \cap S$, que sea de más adentro en D' y separa un disco $D'' \subset D'$. Si A' es la componente conexa de S_i que contiene a la curva α y D'' es un disco de compresión para A' , entonces consideramos a A' en lugar de A . La otra posibilidad es que α sea frontera de un disco en A' , luego, por argumentos estándares es posible eliminar el arco α de la intersección $D' \cap S$.

Al ser D' ajeno a K , $\partial D'$ es frontera de un disco $D'' \subset S$. Notemos que $D'' \cap (T_0 \cup T_1) \neq \emptyset$, ya que D' es un disco de compresión para A . Podemos elegir una circunferencia, $\alpha \subset D'' \cap (T_0 \cup T_1)$, que sea de más adentro y separa un disco $D''' \subset D''$. Por otro lado, en la 3-bola, B' , que tiene por frontera a $D' \cup D''$ y es ajena a K , es posible realizar una isotopía para recorrer el disco D'' hasta estar contenido en H_i . Si $\chi(A) < 0$, dicha isotopía basta para garantizar una reducción en $c(S)$. Si $\chi(A) = 0$, después de dicha isotopía, se incrementa $|\chi(A)|$ en uno, pero se elimina el arco de intersección α , con lo que se reduce la primera entrada de $c(S)$ en al menos uno, mientras que se reduce la segunda entrada de $c(S)$ en al menos uno. En cualesquiera de los casos, se llega a una contradicción. Se concluye que A es incompresible y, por lo tanto, solo puede ser un anillo con frontera esencial y no meridional sobre T_i .

Las componentes de S_i que se encuentran contenidas en B también deben ser incompresibles por los mismos argumentos, así que no pueden ser anillos, luego, cada una de estas componentes es un disco con frontera trivial sobre T_i .

□

Afirmación 2.1.3. $\pi|_{\tilde{S}}$ no tiene puntos críticos del tipo 3.

Demostración. Supongamos que $x_j \in X$ corresponde a un punto crítico del tipo 3a, en el cual, dos curvas de nivel para S triviales y no concéntricas en $T_{x_j+\varepsilon}$, digamos C_1 y C_2 , se fusionan en

la altura x_j para dar lugar a una curva trivial C_3 en el nivel $x_j - \varepsilon$, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño. Sean $D_1, D_2 \subset T_{x_j+\varepsilon}$ los discos de nivel acotados por C_1 y C_2 , respectivamente. Es posible que D_1 y D_2 contengan otras curvas de nivel para S , así que elegimos dos de tales curvas que sean de más adentro en $T_{x_j+\varepsilon}$, digamos $C'_1 \subset D_1$ y $C'_2 \subset D_2$. alguna de las curvas, C'_1 o C'_2 , es frontera de un disco $D' \subset S$ ajeno a K , pues si C'_1 y C'_2 intersectan a K en un punto, se seguiría de la meridiano-incompresibilidad de S que C'_1 y C'_2 separan discos de S , lo cual no es posible. Mediante una isotopía que involucra a D' es posible deshacer la curva de intersección $\partial D' \subset D_1 \cup D_2$, sin aumentar la complejidad de S . Si repetimos el argumento previo cuantas veces sea necesario, llegaremos a una situación en la cual C_1 o C_2 es frontera de un disco $D \subset S$. Finalmente, si $D \cap (C_1 \cup C_2) = \partial D$, mediante una isotopía que involucra al disco D , es posible eliminar el punto crítico x_j (ver Fig. 2.2). Mientras que si $C_1 \cup C_2 \subset D$, entonces también existen isotopías que reducen la cardinalidad de X o el número de componentes de \tilde{S} . En cualesquiera de los casos se contradice la minimalidad de $c(S)$.

Tampoco existen puntos críticos del tipo $3b$, por los mismos argumentos. \square

Con argumentos similares, se puede ver que la afirmación anterior sigue siendo cierta si en lugar de considerar la función $\pi|_{\tilde{S}}$ tomamos la función $\tilde{\pi}|_S$. En ocasiones se abusará un poco de la notación al referirse a una curva de nivel y a cualquier otra curva de nivel trasladada de ésta con la misma etiqueta, a fin de simplificar las descripciones y no usar excesivas etiquetas.

En este punto es conveniente hacer notar una sutil dicotomía entre la sucesión de puntos críticos del tipo 2. Supongamos que en un punto crítico del tipo $2b$ en el nivel $z \in [-1, 2]$, una curva de nivel trivial C_0 en la altura $z + \varepsilon$ (con $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeño), da lugar a dos curvas de nivel esenciales, C_1 y C_2 , en el nivel $z - \varepsilon$ de pendiente p/q . Supongamos que el siguiente valor crítico, $w < z$, en orden descendente, es del tipo $2a$, en el cual se fusionan las curvas C_1 y C_2 para dar lugar a una curva de nivel trivial C_4 en la altura $w - \varepsilon$. Existen, esencialmente, dos maneras de conectar las curvas C_1 y C_2 en el punto crítico en w , una por cada región en la que las curvas C_1 y C_2 dividen al toro de nivel $T_{z-\varepsilon}$ (ver Fig. 2.3). Nótese, por ejemplo, que para que se realice el punto crítico en w correspondiente a la ilustración inferior de la Figura 2.3, es necesario que no existan otras curvas de nivel esenciales en la altura $z - \varepsilon$ además de C_1 y C_2 . Sea F la subsuperficie de S formada por los trasladados de C_0 entre las alturas $z + \varepsilon$ y z , los trasladados de $C_1 \cup C_2$ entre los niveles z y w , así como los trasladados de C_4 entre las alturas w y $w - \varepsilon$. F será una superficie de género 1 con dos componentes de frontera, C_0 y C_4 . Si $D_1 \subset T_{z+\varepsilon}$ y $D_2 \subset T_{w-\varepsilon}$ son los discos de nivel que tienen por frontera a C_0 y C_4 , respectivamente; entonces la superficie cerrada $F \cup D_1 \cup D_2$ será un toro isotópico a un toro de nivel, digamos T_z (en el caso inferior de la Figura 2.3), o bien, un toro que corresponde a la frontera de una vecindad regular de un nudo toroidal de pendiente p/q (en el caso de un punto crítico en w correspondiente a la ilustración superior de la Figura 2.3).

En la siguiente afirmación se describirá una isotopía que será útil más adelante. Para describir dicha isotopía nos olvidaremos por un momento del nudo y solo consideraremos la superficie. Así mismo, no tomaremos en cuenta la complejidad de la superficie (en realidad, en las situaciones en que se recurra a la isotopía en cuestión en afirmaciones posteriores, nunca

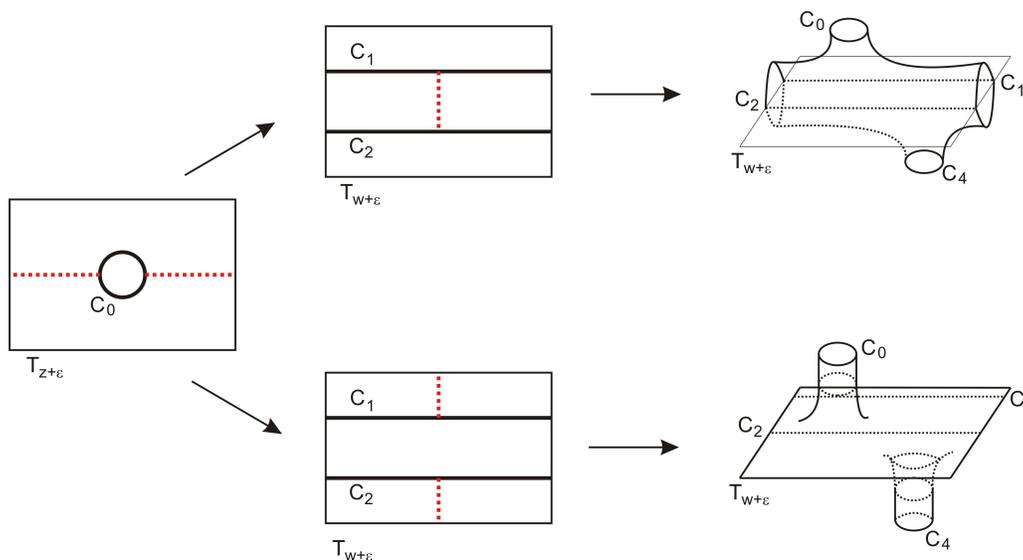


Figura 2.3: Puntos críticos de tipo 2a

se incrementará la complejidad, ni se afectará la posición $(1, 1)$ de K).

Afirmación 2.1.4. *Sea $z \in (-1, 2)$ un valor crítico en cuyo punto crítico toman parte las curvas de nivel C_1 y C_2 , donde C_2 puede ser trivial o esencial en el respectivo toro de nivel, pero en caso de ser trivial, entonces también C_1 es trivial. Supóngase que C_0 es otra curva de nivel en T_z paralela a C_1 y que ambas curvas son frontera de un anillo A en la superficie S por encima de la altura z . Entonces existe una isotopía de la superficie S que modifica el anillo A y cambia el punto crítico en z de uno del tipo 1a, 4a o 2a por uno del tipo 1b, 4b o 1b, respectivamente.*

Demostración. Puesto que en este caso no estamos interesados en la posición del nudo K ni en la complejidad de la superficie S , resulta sencillo imaginar una isotopía como se menciona. Por ejemplo, si el valor crítico en z corresponde a uno del tipo 2a, en el cual se fusionan las curvas de nivel C_1 y C_2 para producir una curva de nivel trivial C_3 , basta con recorrer el anillo A ligeramente por debajo de la altura z y reacomodar la superficie para cambiar el punto crítico en z por uno del tipo 1b. Ligeramente por debajo de la altura z se tendrán dos curvas de nivel, una trivial, C_j , que será paralela en S a C_3 , y una curva de nivel esencial, C_i , paralela en S a C_0 . En la parte superior de la Figura 2.4 se muestra esquemáticamente dicha isotopía. Nótese que en dicha isotopía también se modifica la parte de la superficie S que se pudiera encontrar *por debajo* del anillo A , pero por el momento no estamos restringiendo tal posibilidad. En la parte inferior de la Figura 2.4 se representa la isotopía necesaria en caso de tener un punto crítico en z del tipo 1a en el cual la curva de nivel trivial C_1 y la curva de nivel esencial C_2 se fusionan en una curva de nivel esencial C_3 . Después de dicha isotopía se tiene un punto crítico del tipo 1b, a partir del cual aparecen una curva trivial, C_j , paralela en S a C_0 , y una curva de nivel esencial, C_i , isotópica en S a C_3 . El caso en el que en z se tenga un punto crítico del tipo 4a es análogo. \square

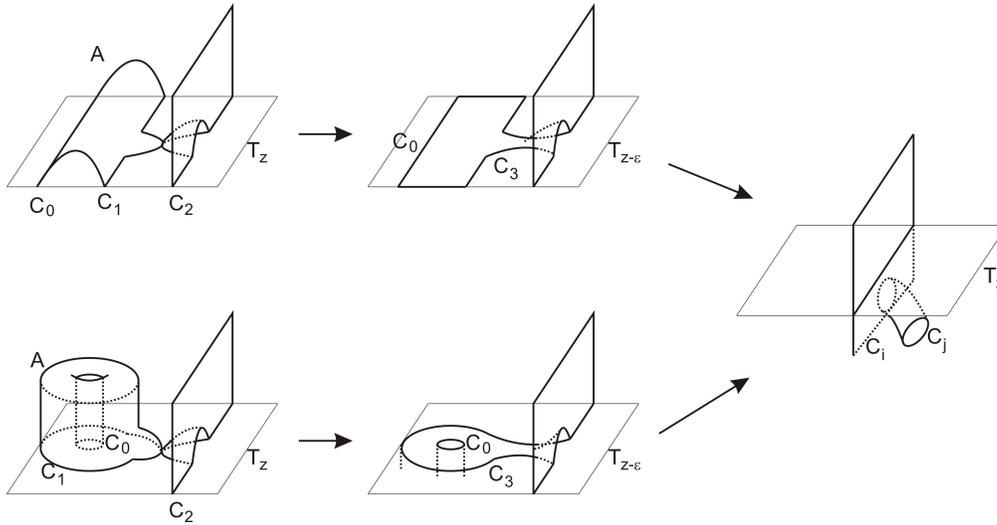


Figura 2.4: Isotopías

Afirmación 2.1.5. \tilde{S} no tiene máximos ni mínimos locales.

Demostración. Supongamos por ejemplo que $x_j \in X$ corresponde a un máximo y es el que se encuentra a menor altura entre todos los máximos locales de \tilde{S} . Sea $\epsilon > 0$ menor que x_j y $x_j - x_{j-1}$ (si x_{j-1} existe). La curva de nivel asociada al máximo en la altura $x_j - \epsilon$ será una curva de nivel trivial C_1 . Sea $z \in (-1, x_j)$ el valor crítico asociado al punto crítico en el que toma parte la curva de nivel paralela a C_1 en dicho nivel (puede ocurrir que $z \in X$ o que $z < 0$). Nótese que la 3-bola, B , acotada por el disco D , formado por los trasladados de C_1 entre las alturas z y x_j , y por el disco de nivel $D' \subset T \times \{z\}$ acotado por C_1 , es ajena a K . Si $z < 0$, tendríamos un disco en \tilde{S} paralelo a un disco en T_0 , pero esto contradice la Afirmación 2.1.1, luego, se tiene que $z \in X$. Sabemos de la Afirmación 2.1.3 que el punto crítico en z no puede ser del tipo 3. Si el punto crítico en z es del tipo $4a$ o $1a$, es posible realizar isotopías dentro de la bola B (como aquella de la Figura 2.2), para reducir la complejidad de S sin alterar la posición $(1, 1)$ de K .

Veamos que el punto crítico en z tampoco puede ser del tipo $4b$. Supongamos que tal caso ocurre y que en la altura $z - \epsilon$ se generan, a partir de C_1 , dos curvas de nivel triviales C_2 y C_3 , donde C_2 es la curva de más adentro en el toro de nivel $T_{z-\epsilon}$. Notemos que el disco de nivel en la altura $z - \epsilon$ acotado por C_2 debe contener los dos puntos de nivel de K , pues en caso contrario, C_2 acotaría un disco en S y sería posible realizar una isotopía que reduzca $c(S)$. Sea $w < z$ el valor crítico de $\tilde{\pi}|_S$ a mayor altura en el cual toma parte alguna de las curvas C_2 o C_3 . En caso de que $w < 0$ es posible isotopar el anillo A formado por C_1 y sus trasladados entre x_j y z , así como por los trasladados de $C_2 \cup C_3$ entre z y w , desde $T \times I$ hasta H_0 . Con la isotopía anterior se reduce en uno $|\tilde{S}|$, así que también la primera entrada de $c(S)$, con lo que se llega a una contradicción. Luego, solo puede ocurrir que $w \in X$. El punto crítico en w no puede ser de los tipos $1a$ o $4a$, ya que sería posible realizar una isotopía como una de las descritas en la Afirmación 2.1.4 y reducir la complejidad $c(S)$. Tampoco es

posible que el punto crítico en w corresponda al tipo $4b$, pues en tal caso aparecería una curva de nivel trivial que acota un disco de nivel ajeno a K , una vez más, sería posible reducir la complejidad de S , lo cual no es posible. De esta manera, se tiene que el punto crítico en w solo puede ser del tipo $2b$. En este caso es posible isotopar la superficie S , para tener en la altura z un punto crítico del tipo $2b$ y en la altura w uno del tipo $1b$ (como en la Figura 2.10), luego, se prosigue como en el siguiente párrafo.

De lo anterior, es posible suponer que el punto crítico en z es del tipo $2b$, después del cual se originan dos curvas esenciales y paralelas, C_2 y C_3 . Sea $w < z$ el valor crítico a mayor altura en cuyo punto crítico toma parte algún trasladado de C_2 o C_3 . Una vez más es posible suponer que $w \in I$, pues si fuera $w < 0$, como en el párrafo anterior podríamos reducir la complejidad de S . Si el punto crítico en w es del tipo $2a$, tenemos dos posibilidades. La primera de éstas es que alguna de las curvas C_2 o C_3 se fusiona con otra curva de nivel esencial C_4 , pero al realizar una isotopía como una de las de la Afirmación 2.1.4, necesariamente se reduce la complejidad de S sin alterar al nudo K . En la segunda posibilidad para un punto crítico en w del tipo $2a$, tendríamos que en la altura w las curvas de nivel C_2 y C_3 se fusionan. No se pueden fusionar C_2 y C_3 como en la ilustración superior de la Figura 2.3, pues habría un disco de compresión para S ajeno a K , así que el punto crítico corresponde a la imagen inferior de Figura 2.3, después del cual se produce una curva de nivel trivial C_4 . Otra vez se tiene que el disco de nivel acotado por C_4 debe contener a los dos puntos de K en dicho nivel. Si $y < w$ es la altura del punto crítico en el que toma parte la curva C_4 , dicho punto crítico no puede ser del tipo $1a$ pues no hay curvas de nivel esenciales en dicha altura, ni tampoco del tipo $2b$, pues en tal caso habría un disco de compresión para S y ajeno a K ; tampoco puede ser del tipo $4b$, pues en tal caso aparecería otra curva de nivel trivial que acota un disco de nivel ajeno a K y se podría reducir la complejidad. Luego, el punto crítico en y solo puede ser del tipo $4a$ en el cual la curva de nivel C_4 se fusiona con una curva de nivel trivial C_5 contenida en el disco de nivel acotado por C_4 , más aún, el disco de nivel acotado por C_5 en la altura $y + \epsilon$ debe contener a los puntos de nivel de K . En este caso, es posible llevar a cabo una isotopía que recorra el punto crítico en y hasta la altura z y así eliminar el punto máximo en dicha altura (ver Figura 2.5). Si $y \in X$, la isotopía descrita, reduce $c(S)$, lo cual no es posible; lo mismo es cierto si $y < 0$ y $\chi(A) < 0$, donde A es la componente de S_0 que tiene como una de sus fronteras a una curva paralela a C_4 antes de la isotopía. Luego, A debe ser un anillo y después de la isotopía descrita se convierte en un disco, con lo cual incrementa en uno la primera entrada de $c(S)$. Por otro lado, con la isotopía se redujo $|\tilde{S}|$ en uno, pero también $|X|$ decreció, luego se obtiene una complejidad menor, lo cual no es posible.

De lo anterior se sigue que el punto crítico en w debe ser del tipo 1. En caso de que el punto crítico en w sea del tipo $1a$, es posible isotopar el anillo A formado por C_1 y sus trasladados entre x_j y z , así como todos los trasladados de C_2 y C_3 entre z y w , hasta un nivel ligeramente por debajo de w , para eliminar el máximo y el punto crítico en z , así como cambiar el punto crítico en w por uno del tipo $2b$ y, de esta manera, reducir la complejidad de S (ver Fig. 2.6).

Finalmente, supongamos que el punto crítico en w es del tipo $1b$, y sea C_4 la curva de nivel trivial que se genera en dicho punto crítico. Observemos que el disco de nivel acotado por C_4 debe contener a los dos puntos de nivel de K . Sea $y < w$ la altura en la que se encuentra el punto crítico en el que toma parte la curva paralela a C_4 . Si tal punto crítico es de alguno de

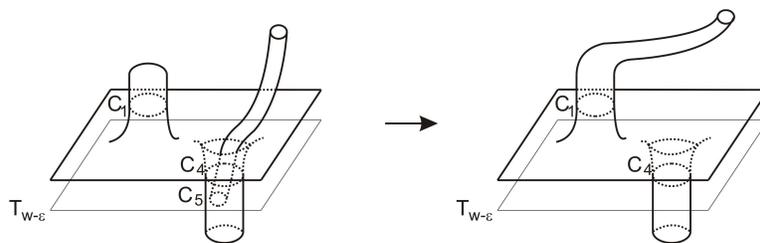


Figura 2.5: Isotopía

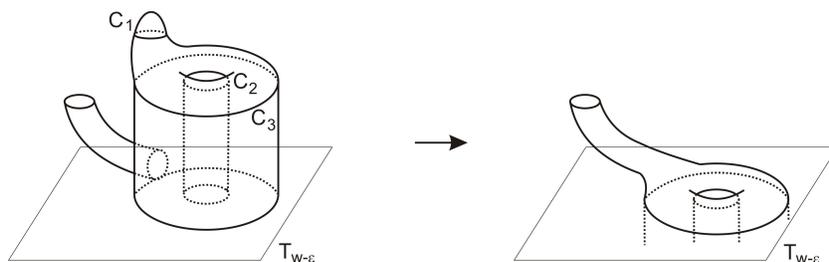


Figura 2.6: Isotopía

los tipos $1a$ o $2b$, tendríamos discos de compresión para S ajenos a K , lo cual no es posible. De igual manera, si el punto crítico fuese del tipo $4b$, aparecería un disco de nivel con frontera sobre S y ajeno a K , que llevaría a reducciones de $c(S)$. Así que solo puede ocurrir que el punto crítico en la altura y sea del tipo $4a$. Es posible suponer que los puntos críticos w , z y x_j son consecutivos en X , y después realizar una isotopía (análoga a las de los casos anteriores), para cambiar el máximo en x_j por un punto crítico del tipo $2b$ en la misma altura (ver Figura 2.7), sin alterar la posición $(1, 1)$ de K . Repetimos el análisis para esta nueva posición de la superficie S para llegar, igual que antes, a una contradicción. Concluimos que no existen máximos locales para π en \tilde{S} . Por simetría, es claro que tampoco pueden existir mínimos locales. \square

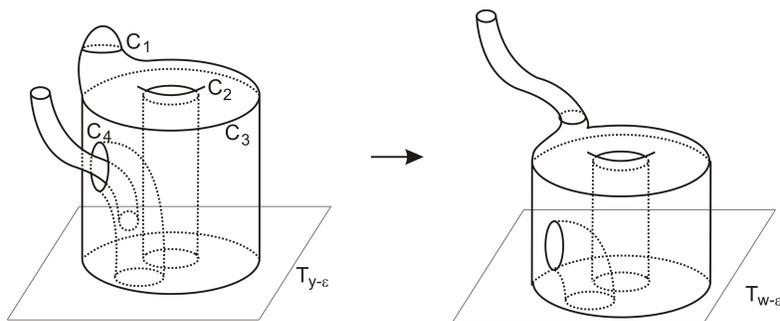


Figura 2.7: Isotopía

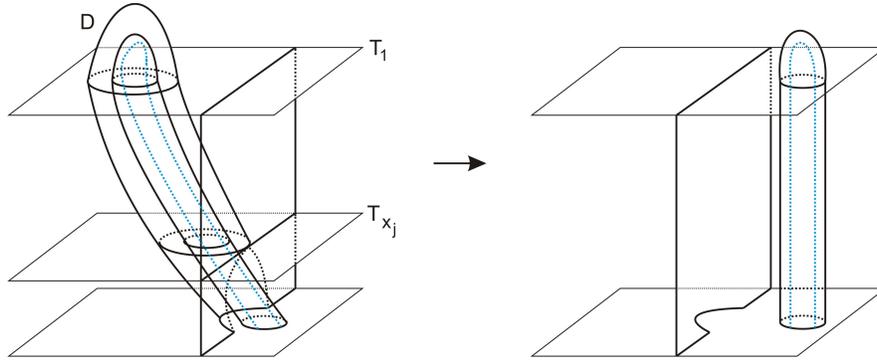


Figura 2.8: Isotopía

Afirmación 2.1.6. *Para $i = 1, 2$, no existen discos en S_i con fronteras triviales sobre T_i . Si existe un anillo en S_i con fronteras triviales sobre T_i , siempre es posible isotopar S para eliminar dichos anillos sin incrementar la complejidad de S , y a la vez, conservar la posición $(1, 1)$ de K .*

Demostración. Supongamos que existe un disco $D \subset S_1$ con frontera trivial sobre T_1 . Como se vio en la Afirmación 2.1.1, la 3-bola, $B \subset H_1$, acotada por D y el disco en T_1 que comparte frontera con D debe contener a K_1 . Podemos suponer que D es el disco componente de S_1 tal que ∂D es la curva de más afuera entre todas las fronteras de discos en S_1 paralelos a discos en T_1 . De la Afirmación 2.1.2 sabemos que cada componente de S_1 que es ajena a B , es un disco meridiano de H_1 o, en caso de no existir discos meridianos en S_1 , un anillo con fronteras esenciales sobre T_1 .

Veremos que existe un valor crítico $x_j \in X$, correspondiente a un punto crítico en el que toma parte la curva paralela a ∂D en el nivel x_j . Supondremos por el contrario que tal punto crítico no existe. Luego, existe un anillo $A \subset \tilde{S}$, transversal a los toros de nivel de $T \times I$, que tiene por fronteras a ∂D y a una curva trivial en T_0 . Sea $z < 0$ el valor crítico correspondiente al punto crítico en H_0 en el cual toma parte la curva paralela a $\partial A - \partial D$. Una vez más, es posible isotopar a S para recorrer dicho punto crítico dentro de $T \times I$ sin modificar la posición $(1, 1)$ de K y reduciendo la complejidad $c(S)$. Nuevamente se llega a una contradicción y por lo tanto el punto crítico x_j existe.

Sabemos por la Afirmación 2.1.3 que el punto crítico x_j no puede ser del tipo 3. Si el punto crítico en x_j es del tipo $1a$, entonces mediante una isotopía del disco D , el anillo A formado por los trasladados de ∂D entre las alturas 1 y x_j , así como la parte de S contenida en la 3-bola acotada por $D \cup A$ y el disco acotado por ∂A en T_{x_j} , es posible eliminar el punto crítico en x_j (ver Fig. 2.8). Por último, reacomodamos la superficie S para poner de nuevo a K en posición $(1, 1)$, lo cual siempre es posible ya que \tilde{S} no tiene máximos ni mínimos locales (Afirmación 2.1.5). Esta nueva configuración para S tiene una complejidad menor, esto es una contradicción. Si el punto crítico asociado x_j es del tipo $2b$, entonces es posible hacer una isotopía para trasladar el punto crítico desde $T \times I$ hasta H_1 y así tener un anillo en H_1 en lugar del disco D (como en la Fig. 2.9), con lo que se reduciría $c(S)$.

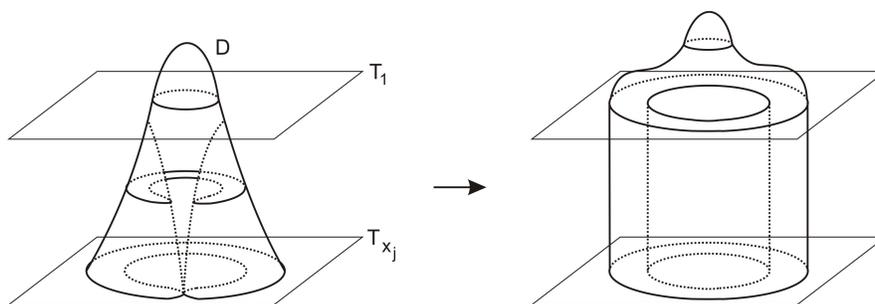


Figura 2.9: Isotopía

El punto crítico en la altura x_j no puede ser del tipo $4b$, pues en tal caso se tendrían dos curvas de nivel triviales y no concéntricas para S . Por último, si el punto crítico correspondiente a x_j es del tipo $4a$ en el cual toman parte una curva correspondiente a ∂D y otra curva de nivel trivial C , existen dos posibilidades, que el disco acotado por C en T_1 contenga a ∂D , o viceversa. En el primero de los casos es posible proseguir como se hizo con el tipo $1a$ para reducir la complejidad de S . En el segundo de los casos, la componente de S que se encuentra por encima de la altura x_j y que tiene a C como una componente de frontera, debe ser un anillo con frontera trivial sobre T_{x_j} ; luego, con una isotopía como la de la Afirmación 2.1.4, sería posible reducir la complejidad de S .

Ahora veamos que sucede en el caso de anillos en S_1 con fronteras triviales en T_1 . Supongamos que existe un anillo $A \subset S_1$ con fronteras triviales sobre T_1 . Existe un disco de compresión $D' \subset T_1$ para A . Si es posible garantizar que tal disco intersecta a S solo en $\partial D'$, de la meridiano-incompresibilidad de S se tendría que existe un disco $D \subset S$ con $\partial D = \partial D'$. Mediante una isotopía se podría transformar a A en un disco con frontera trivial sobre T_1 . Por lo argumentado en el caso de discos con frontera trivial, es posible isotopar a S de tal forma que se reduzca su complejidad con respecto a la configuración inicial. Desafortunadamente no se puede garantizar siempre que $D' \cap S = \partial D'$, aunque si eso no sucede, se puede asegurar que D' contiene en su interior a los dos puntos de intersección de K con el toro T_1 . También supondremos de ahora en adelante que A es un anillo de más adentro, es decir, que el toro sólido en H_1 que tiene por frontera a A y al anillo en T_1 que es paralelo a A , no contiene otra componente de S_1 . Veremos que se puede argumentar en los diferentes casos.

Sea $x_j \in X$ el valor crítico a mayor altura en cuyo punto crítico toma parte alguna de las curvas paralelas a alguna de las fronteras de A (al igual que en el caso de discos, tal x_j existe). Nuevamente se tiene que el punto crítico en x_j no puede ser del tipo $4b$, pues se tendrían dos curvas de nivel triviales y no concéntricas para S , lo cual no es posible. Si el punto crítico en x_j es del tipo $1a$, o del tipo $4a$, es posible, mediante alguna de las isotopías descritas en la Afirmación 2.1.4, eliminar el anillo A de S_1 sin incrementar la complejidad $c(S)$ ni modificar la posición $(1, 1)$ de K , así como cambiar el punto crítico en x_j por uno del tipo $1b$ o uno del tipo $4b$, respectivamente. Si el punto crítico en x_j es del tipo $2b$, en el cual la curva correspondiente a la frontera externa de A pasa a ser una curva esencial, entonces, mediante una isotopía es posible llevar el punto crítico en x_j hasta H_1 , a la vez que se recorre el anillo formado por los

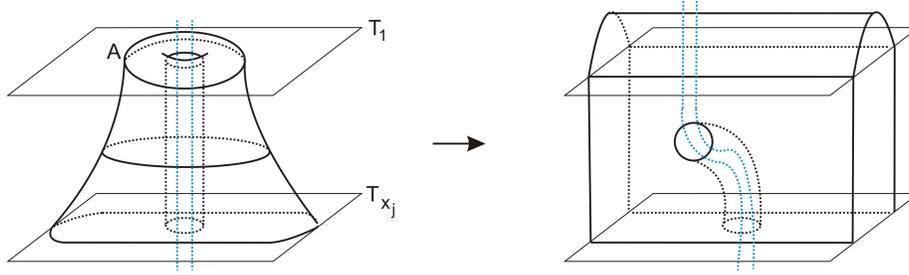


Figura 2.10: Isotopía

trasladados de la frontera interna de A para formar un nuevo punto crítico del tipo $1b$ en \tilde{S} (ver Fig. 2.10). Se llega de nuevo a una configuración con a lo más la misma complejidad que la original.

□

Afirmación 2.1.7. *No existen componentes de S_i con alguna de sus componentes de frontera que sea una curva meridional de T_i , para $i = 1, 2$.*

Demostración. Supongamos que existen componentes de S_1 con frontera meridional sobre T_1 . Sea $z > 1$ el valor crítico de la función $\tilde{\pi}|_S$ a menor altura dentro de H_1 . De acuerdo a la Afirmación 2.1.6, el punto crítico de $\tilde{\pi}|_S$ en z no puede ser un máximo, pues se tendría un disco en S_1 con frontera trivial sobre T_1 . La Afirmación 2.1.3 también es válida para $\tilde{\pi}|_S$ en H_1 , así que z no puede corresponder a un punto crítico del tipo 3.

Si el punto crítico en z es del tipo $2a$, es posible mediante una isotopía recorrer dicho punto crítico de H_1 hasta $T \times I$, y así reducir la complejidad $c(S)$. Si tal punto crítico corresponde al tipo $2b$, distinguimos dos casos: que la curva trivial que toma parte en el punto crítico sea frontera de un disco en S_1 , o que sea esencial en S_1 . Si tal curva es esencial en S_1 , mediante una isotopía, es posible llevar el punto crítico en z desde H_1 hasta $T \times I$ y así reducir la complejidad de la superficie S . En caso que dicha curva sea frontera de un disco en S_1 , tendríamos un anillo A con frontera meridional en H_1 . En caso de que el anillo A no contenga a K_1 , nos fijamos en el punto crítico a mayor altura en $T \times I$ en que toma parte alguna curva paralela a una de las fronteras de A y seguimos el análisis como en la Afirmación 2.1.5 (Figuras 2.6 y 2.7), para llevar a S a una configuración con una complejidad no mayor a la original. Si A contiene a K_1 , sea $D \subset H_1$ un disco de compresión para A . Usando argumentos estándar y la meridiano-incompresibilidad de S , es posible suponer que $D \cap S_1 = \partial D$. Como A es un anillo, es posible colocar a D de tal forma que intersecte a K_1 en a lo más un punto, luego, una vez más de la meridiano-incompresibilidad de S es posible isotopar a A para transformarlo en un disco meridiano D' de H_1 que contiene a K_1 . El resto de las componentes de S_1 solo pueden ser anillos con fronteras meridionales o discos meridianos de H_1 . En caso de que exista algún anillo meridiano, recurrimos nuevamente a la meridiano-incompresibilidad de S para reducirlo a un disco meridiano (posiblemente incrementando la complejidad de S). Repetimos el argumento previo hasta llegar a una configuración de S_1 formada únicamente por discos meridianos de H_1 . Enseguida consideramos el punto crítico en $T \times I$ a mayor altura, el cual solo puede ser del

tipo $2a$, en el que toman parte dos curvas correspondientes a fronteras de dos discos meridianos en S_1 . Mediante una isotopía que involucre a dichos discos, es posible transformarlos en un disco en H_1 con frontera trivial en T_1 . Repetimos los argumentos de la Afirmación 2.1.6 para eliminar dicho disco con frontera trivial. Consideramos nuevamente el primer punto crítico de $T \times I$ y repetimos el proceso. Eventualmente llegaremos a una configuración para S_1 con un único disco meridiano o un único disco con frontera trivial. Supongamos que S_1 consta de un disco meridiano de H_1 . Puesto que no existe máximos en $T \times I$ (Afirmación 2.1.5), el punto crítico para \tilde{S} a mayor altura en esta configuración debe ser del tipo $1b$. Sea C_1 la curva de nivel trivial que se genera en dicho punto crítico y D el respectivo disco de nivel que tiene por frontera a C_1 . Si $D \cap K = \emptyset$, entonces $C_1 = \partial D$ debe ser frontera de un disco en S y sería posible reducir $c(S)$. En caso de que D contenga a los dos puntos de nivel de K , es posible isotopar a D para hacerlo ajeno a K , y de la meridiano-incompresibilidad de S tendríamos que ∂D es frontera de un disco en S y así podríamos cambiar el disco meridiano de S_1 por uno con frontera trivial en T_1 . Finalmente, si $D = S_1$ es un disco con frontera trivial en T_1 , tenemos que el primer punto crítico en $T \times I$, en el cual toma parte una curva paralela a ∂D , no puede ser del tipo $4b$, pues otra vez se podría reducir $c(S)$, así que tal punto crítico debe ser del tipo $2b$, y mediante una isotopía sería posible trasladar dicho punto crítico a H_1 , y así cambiar D por un anillo. Al comparar la complejidad de esta última configuración con la complejidad de la configuración inicial, necesariamente habrá disminuido, lo cual es una contradicción y se tiene la afirmación. \square

Afirmación 2.1.8. *Para $i = 1, 2$, la superficie S_i consta de anillos incompresibles en H_i con pendiente no meridional sobre T_i . Además es posible isotopar S sin incrementar su complejidad, para llevarla a una configuración en la que todos los anillos de S_i están anidados, siendo el que contiene a K_i el anillo de más adentro, para $i = 1, 2$.*

Demostración. Consideremos H_1 y $S_1 \subset H_1$, pues el caso de H_0 y S_0 es completamente análogo. Las curvas de nivel de S en T_1 , es decir, las componentes de frontera de S_1 en T_1 solo pueden ser curvas esenciales en T_1 con la misma pendiente o curvas triviales anidadas (ver Afirmación 2.1.1). Si existen curvas triviales anidadas en $S \cap T_1$, entonces los dos puntos de intersección de $K \cap T_1$ deben estar en la curva trivial de más adentro de $S \cap T_1$ en T_1 pues como se vio en la Afirmación 2.1.6, no existen anillos ni discos en S_1 con fronteras triviales sobre T_1 .

Veremos que todas las componentes de S_1 son anillos como indica la afirmación. Primero, supongamos que existen curvas de nivel para S que son triviales sobre T_1 . Sea $z > 1$ el valor crítico a menor altura para la función $\tilde{\pi}|_S$ en H_1 . El punto crítico en z no puede ser del tipo 3 (Afirmación 2.1.3). Si el punto crítico en z es del tipo $1a$ y C_1 es la curva de nivel trivial en la altura $z + \varepsilon$ (con $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño), que toma parte en dicho punto crítico, sería posible recorrer dicho punto crítico desde H_1 hasta $T \times I$ y reducir la complejidad de S , a menos que C_1 sea frontera de un disco en S_1 en cuyo caso es posible realizar una isotopía como la de la Figura 2.8 para eliminar el punto crítico en z ; luego nos preguntamos por el siguiente punto crítico. Si el punto crítico en z fuese del tipo $1b$ o $2a$, sería posible, mediante una isotopía, trasladar dicho punto crítico desde H_1 hasta $T \times I$, y así reducir la complejidad

$c(S)$, lo cual no es posible. Como no existen anillos en S_1 con fronteras triviales sobre T_1 (Afirmación 2.1.6), entonces el punto crítico en z no puede ser del tipo 4, pues en caso de serlo, podríamos repetir el argumento de llevarlo hasta $T \times I$ y así reducir la complejidad de S , o sería posible eliminar el punto crítico en z . Cabe mencionar que en las isotopías descritas nunca se modifica la posición $(1, 1)$ del nudo K . Se concluye que el punto crítico en z solo puede ser del tipo $2b$. Nuevamente, si C_1 es la curva de nivel trivial en la altura $z + \varepsilon$ que toma parte en el punto crítico en z , dicha curva debe ser frontera de un disco en S , y, por lo tanto, la componente de S_1 que contiene a C_1 debe ser un anillo. Ahora nos fijamos en el siguiente valor crítico y repetimos los argumentos. Eventualmente se llegará a una configuración para S_1 formada por anillos con fronteras esenciales, pero no es posible que existan curvas de nivel para S con fronteras triviales sobre T_1 .

Finalmente, si solo existen curvas esenciales en T_1 como fronteras de S_1 y $z > 1$ es el valor crítico a menor altura para la función $\tilde{\pi}|_S$ en H_1 , se tiene que el punto crítico en z solo puede ser del tipo $1a$ o $2b$, los cuales ya fueron analizados en el párrafo previo.

De esta manera se tiene que todas las componentes de S_1 son anillos. Sea A el anillo de S_1 que contiene a K_1 y sea $B \subset S_1$ un anillo distinto de A que sea de más adentro (puede ser concéntrico con A o no). Sea $x_i \in X$ el primer valor crítico en el que toma parte alguna de las fronteras de B . Repetimos parte del análisis para z como en la Afirmación 2.1.5 (Figuras 2.6 y 2.7), para llevar a B dentro de H , sin incrementar la complejidad inicial de S , ni modificar la posición $(1, 1)$ de K . Después de repetir el argumento cuantas veces sea necesario, terminamos con una configuración como se describe en la afirmación. □

Afirmación 2.1.9. *La superficie S puede ser isotopada para eliminar los puntos críticos del tipo 4 en \tilde{S} .*

Demostración. Supongamos que $x_j \in X$ es el mayor valor crítico asociado a un punto crítico del tipo 4. Si el punto crítico en x_j es del tipo $4a$, en el cual, dos curvas de nivel triviales C_1 y C_2 en la altura $x_j + \varepsilon$ se fusionan en el punto crítico, digamos que C_1 es la curva de más adentro entre las dos en el respectivo toro de nivel. Sea $x_i > x_j$ el valor crítico en el que se originó la curva C_2 (puede corresponder a un punto crítico del tipo $1b$ o $2a$). Mediante una isotopía es posible llevar el punto crítico en x_j a un nivel ligeramente por encima de x_i , es decir, entre x_i y x_{i+1} ; de esta manera cambia el punto crítico en x_j por uno del tipo $1a$.

Si el punto crítico en x_j es del tipo $4b$ en el que se originan dos curvas triviales y concéntricas C_1 y C_2 en el nivel $x_j - \varepsilon$, supongamos que C_1 es la curva de más adentro en el respectivo toro de nivel. Una vez más, sea $x_i < x_j$ el valor crítico a mayor altura que involucra a la curva C_2 . Lo primero que notamos es que dicho punto crítico no puede ser del tipo $4a$ en el cual se fusionen las curvas C_1 y C_2 , pues habría discos de compresión para S que serían ajenos a K . Luego, es posible isotopar a S para llevar el punto crítico en x_j hasta una posición ligeramente por debajo de x_i . Pudiera ocurrir que el nuevo punto crítico que se obtiene sea nuevamente del tipo $4b$, en cuyo caso, repetimos el argumento hasta obtener un punto crítico de otro tipo. Es importante notar que en las isotopías descritas se pueden llevar a cabo sin alterar la posición $(1, 1)$ de K . □

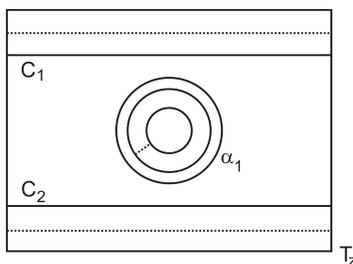


Figura 2.11: Curvas de nivel

De las afirmaciones previas tenemos que es posible poner a S en una posición con complejidad mínima en la que los puntos críticos de \tilde{S} con respecto a π solo son de los tipos 1 y 2. Esto nos dice que la superficie S está formada por una familia de toros, donde es posible que algunos de tales toros sean isotópicos a algún toro de nivel T_z , $z \in [-1, 2]$, mientras que otros toros serán isotópicos a la frontera de una vecindad regular de un nudo toroidal $T_{p,q}$ (la pendiente p/q definida por la pendiente de las curvas de nivel esenciales que constituyen a dicho toro). Luego, todos estos toros están conectados por tubos (anillos) descendentes (formados por curvas de nivel triviales), en donde puede ocurrir que alguno de tales anillos atraviese por el interior de otro, es decir, las respectivas curvas de nivel están anidadas.

Supongamos que en un nivel $z \in (0, 1) \setminus X$ existe una familia de curvas de nivel triviales y anidadas $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, con $m \geq 2$, donde α_1 la curva de más afuera. Diremos que el conjunto de curvas $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ es *maximal* si todos los trasladados de α_1 son siempre curvas de más afuera en su respectivo toro de nivel. En otras palabras, el tubo definido por α_1 no atraviesa el interior de otro tubo definido por alguna otra curva de nivel trivial.

Afirmación 2.1.10. *Si en una altura $z \in (0, 1) \setminus X$ existe una familia de curvas de nivel triviales maximal para S , $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, con $m \geq 2$, entonces no existen curvas de nivel esenciales para S en dicha altura. Cada curva α_i toma parte solo en dos puntos críticos, uno del tipo 2a y uno del tipo 2b.*

Demostración. Supongáse que el nivel z se encuentra entre dos valores críticos consecutivos x_{i+1} y x_i . Las curvas de nivel triviales para S en la altura z son $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, con $m \geq 2$, siendo α_1 y α_m las curvas de más afuera y más adentro, respectivamente, en el toro de nivel T_z ; en particular, los dos puntos de nivel de K deben estar contenidos en α_m . Digamos que existen curvas de nivel esenciales para S en el toro de nivel T_z , de las cuales, C_1 y C_2 son las curvas más próximas a α_1 (la configuración de las curvas de nivel para S en la altura z serían como en la Figura 2.11). El punto crítico en x_{i+1} no puede ser de los tipos 1a ni 2b, pues ligeramente por encima de la altura x_{i+1} se tendría una curva de nivel trivial para S más afuera que α_1 , lo cual contradice a la familia de curvas sea maximal; por la misma razón el punto crítico en x_i no puede ser de los tipos 1b o 2a. No es difícil ver que en las cuatro combinaciones posibles para los puntos críticos en los niveles x_i y x_{i+1} , e independientemente de las curvas esenciales que tomen parte en los puntos críticos del tipo 1, siempre existen discos de compresión para S (ya que todas las curvas esenciales involucradas tienen la misma pendiente y los arcos de K

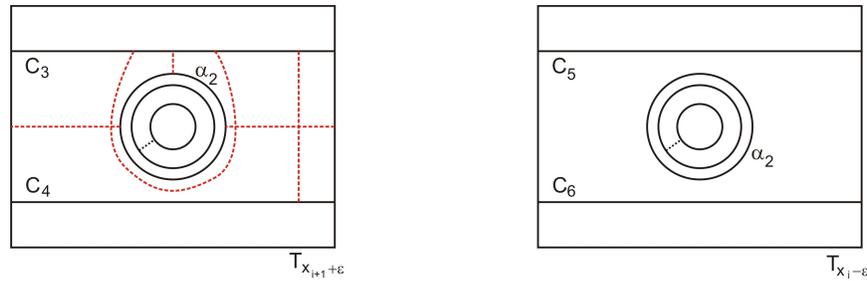


Figura 2.12: Curvas de nivel

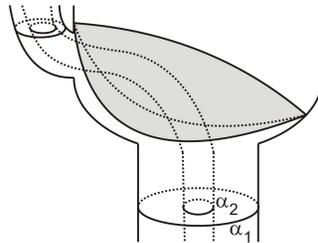


Figura 2.13: Disco de compresión para S

se encuentran en el tubo de más adentro). Esto último es una contradicción y por lo tanto, no existen curvas de nivel esenciales para S en T_z . En particular, el punto crítico en x_{i+1} debe ser del tipo $2a$ y el de la altura x_i , del tipo $2b$.

Sean C_3 y C_4 las curvas de nivel esenciales que se fusionan en el punto crítico en x_{i+1} , y sean C_5 y C_6 las curvas de nivel esenciales para S en la altura $x_i - \epsilon$ que se generan en el punto crítico en x_i . En la Figura 2.12 se ilustran las configuraciones de las curvas de nivel de S en las alturas $x_{i+1} + \epsilon$ y $x_i - \epsilon$, y nos preguntamos nuevamente por la naturaleza de los puntos críticos en x_{i+2} y x_{i-1} . El punto crítico en x_{i+2} no puede ser del tipo $2b$, pues en tal caso, las curvas C_3 y C_4 se fusionan en una curva trivial al pasar el punto crítico en x_{i+2} ; en este caso, un disco meridiano para el toro que contiene a dichas curvas sería ajeno

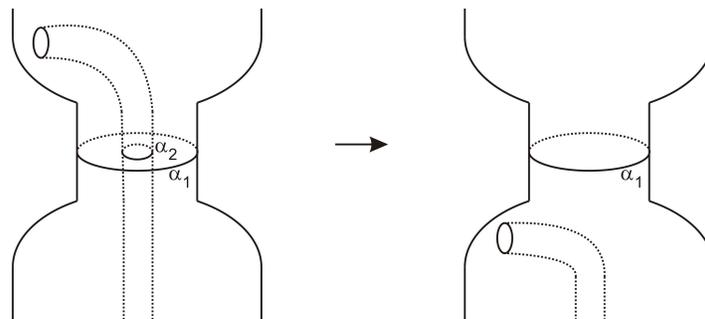


Figura 2.14: Isotopía

a K , lo cual es una contradicción. Por la misma razón, el punto crítico en x_{i-1} no puede ser del tipo $2a$. El punto crítico en x_{i+2} no puede ser del tipo $1a$ y el punto crítico en x_{i-1} no puede ser del tipo $1b$, pues habría un disco de compresión para S que es ajeno a K (ver Fig. 2.13). Si el punto crítico en x_{i+2} es del tipo $1b$ en el que toma parte la curva α_2 y alguna de las curvas C_3 o C_4 , entonces sería posible isotopar la superficie S para llevar dicho punto crítico a una altura ligeramente por debajo de x_i , como en la Figura 2.14 (una observación en este caso es que m tendría que ser 2, pues en otro caso el disco de nivel acotado por α_1 sería un disco de compresión para S que es ajeno a K). Nótese que en dicha isotopía no se modifica la posición $(1,1)$ de K . Análogamente, si el punto crítico en x_{i-1} es del tipo $1a$, puede ser cambiado por un punto crítico del mismo tipo en una altura apenas por encima de x_{i+1} . Una observación es que los puntos críticos en x_{i+2} y x_{i-1} no pueden ser de los tipos $1b$ y $1a$, respectivamente, al mismo tiempo, pues habría discos de compresión para S y ajenos a K . En conclusión, los puntos críticos en x_{i+2} y x_{i-1} son de los tipos $2a$ y $2b$, respectivamente, e involucran a la curva α_2 . Repitiendo los argumentos se obtiene que los puntos críticos en los niveles x_{i+1}, \dots, x_{i+m} son del tipo $2a$, mientras que los puntos x_i, \dots, x_{i-n+1} son del tipo $2b$. Asumimos que todos los trasladados de α_1 eran curvas de más afuera en sus respectivos toros de nivel, si tal suposición no se cumple, lo que sí se puede asegurar es que existe un trasladado de α_1 que estará contenido en el disco de nivel acotado por alguna curva de nivel α' para S que sí cumple con esta propiedad, y el resultado se sigue. \square

Las afirmaciones anteriores nos dan una buena idea de como son todas las posibles superficies de Neuwirth para los nudos $(1,1)$, como ya se ha mencionado. A continuación daremos una descripción sintetizada de dichas superficies mediante el uso de las llamadas gráficas descendentes, en las cuales se representan varias de las propiedades ya descritas para tales superficies.

2.2. Gráficas descendentes

Consideremos en \mathbb{R}^2 el anillo $A = \{(x, y) | 1 \leq \|(x, y)\| \leq 2\}$. Sea ρ la función norma en \mathbb{R}^2 , es decir, $\rho(x, y) = \|(x, y)\|$ para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. La función ρ define una función altura en el plano, es decir, una función de \mathbb{R}^2 en un conjunto totalmente ordenado. En particular, ρ define una función altura en el anillo A . En la presente sección consideraremos curvas suaves, cerradas y simples en el plano, es decir, circunferencias topológicas, y las llamaremos simplemente *curvas cerradas*. Una de tales curvas cerradas tendrá un número finito de puntos críticos con respecto a la función ρ .

Definición 2.2.1. Una familia finita, Γ , de curvas cerradas y ajenas en el anillo A se dice en **buena posición** si ninguna de las curvas corresponde a una curva de la forma $\rho^{-1}(s)$ para $1 \leq s \leq 2$ y todos los máximos y mínimos locales con respecto a ρ de curvas en Γ se encuentran a diferentes alturas. Diremos que Γ es **separable** si existe una circunferencia $l_r = \rho^{-1}(r)$ con $1 < r < 2$, que es ajena a Γ y tal que cada uno de los anillos en que l_r divide a A contiene alguna de las curvas de Γ . En este caso, l_r es una **circunferencia de separación** para Γ .

Si Γ es una familia de curvas cerradas en buena posición, entonces cualquier curva en Γ tiene al menos un mínimo y un máximo con respecto a ρ . Distinguiamos dos clases de curvas en Γ , aquellas que acotan un disco en A , diremos que pertenecen a la subfamilia Γ_1 , y aquellas que son isotópicas en A a alguna circunferencia de nivel $\rho^{-1}(s)$, $1 < s < 2$, diremos que pertenecen a Γ_2 . Cada curva en la familia Γ_2 divide a A en dos anillos, los cuales llamaremos *anillo interno* y *anillo externo*, donde el anillo interno es el de más adentro de entre los dos anillos.

Para simplificar las ilustraciones, pensaremos en el anillo A como en un rectángulo con lados paralelos a los ejes coordenados, con los lados verticales identificados y que corresponden al arco $\alpha = \{(x, 0) | 1 \leq x \leq 2\}$ (Figura 2.15). En esta representación del anillo A , la función altura ρ se corresponde con la altura dada en el rectángulo por la coordenada y . Una circunferencia de nivel para la función ρ , $\rho^{-1}(s)$, $1 < s < 2$, corresponde a un segmento horizontal en el rectángulo con un par de lados identificados. Un ejemplo de una familia de curvas cerradas en buena posición está representada en la Figura 2.16(a). En el ejemplo ilustrado, la familia Γ_1 consta de seis curvas, mientras que la familia Γ_2 está formada por dos curvas. También hay una circunferencia de separación l_r .

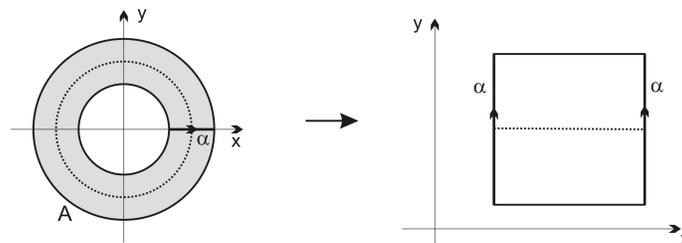


Figura 2.15: Anillo

Definición 2.2.2. Sea $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ una familia de curvas cerradas en A en buena posición. Un camino $\gamma \subset A$ con sucesión de aristas ordenadas $\{e_1, \dots, e_m\}$, con vértices en curvas de Γ , se dice **camino descendente** con respecto a Γ si satisface lo siguiente:

- i) γ es estrictamente descendente, es decir, $\rho|_\gamma$ es inyectivo sobre su imagen.
- ii) γ conecta todas las curvas de Γ .
- iii) La primera arista e_1 comienza en el máximo global de una curva $C_1 \in \Gamma$ y está enteramente contenida en C_1 . La arista e_2 será un arco cuyo interior se encuentre en $A \setminus \Gamma$; luego, el resto de las aristas de γ alternarán entre arcos descendentes contenidos en alguna curva de Γ y arcos descendentes cuyo interior se encuentre en $A \setminus \Gamma$, hasta llegar a e_m que será un arco contenido en alguna curva $C_0 \subset \Gamma$ y cuyo vértice extremo será el mínimo global de C_0 .
- iv) Consideramos las cuatro subfamilias de Γ : Γ'_1 , formada por las curvas $C \in \Gamma_1$, tales que el disco abierto en A acotado por C contiene a C_1 ; Γ''_1 , formada por las curvas $C \in \Gamma_1$, tales que el disco abierto en A acotado por C contiene a C_0 ; Γ'_2 , cuyos elementos son las curvas $C \in \Gamma_2$, tales que el anillo interno en A separado por C contiene a C_1 , y Γ''_2 , formada por las curvas $C \in \Gamma_2$, tales que el anillo externo en A separado por C contiene a C_0 . Pedimos que todos los máximos y mínimos de curvas en Γ sean vértices de γ , con excepción de los máximos globales de curvas en Γ'_1 o Γ'_2 , y los mínimos globales de curvas en Γ''_1 o Γ''_2 .

En el inciso (b) de la Figura 2.16 se ilustra con color un camino descendente para la familia de curvas en buena posición de la Figura 2.16(a). En este ejemplo, todos los máximos y mínimos de curvas en Γ son vértices de γ .

Definición 2.2.3. Sea γ un camino descendente con respecto a la familia de curvas Γ . Supongamos que l es una circunferencia de separación para Γ . Existe una arista e_j de γ que es transversal a l , y conecta el mínimo global de una curva C_k por encima de l con el máximo global de una curva C_s por debajo de l . Supongamos que las aristas $e_{j-2}, e_{j-4}, \dots, e_{j-2r}$, $r \in \mathbb{N}$, conectan curvas (no necesariamente distintas) $C_k, C_{k+1}, \dots, C_{k+r}$, donde el extremo superior de e_{j-2i} es un mínimo de C_{k+i} ; mientras que las aristas $e_{j+2}, e_{j+4}, \dots, e_{j+2r}$ conectan a las curvas C_s, \dots, C_{s+r} , donde el extremo inferior de e_{j+2i} es un máximo de C_{s+i} , para $i = 1, \dots, r$. Obtenemos un nuevo camino a partir de γ al eliminar las aristas $e_{j-2r+1}, e_{j-2r+3}, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_{j+2r-1}$, es decir, encogemos cada una de tales aristas al recorrer uno de sus extremos hasta hacerlo coincidir con el otro, este último pediremos que sea el máximo o el mínimo, según corresponda, de la componente de Γ que contiene a la arista (como en la Figura 2.17). En la nueva gráfica, llamaremos a e_j una **arista especial** de orden r . Si γ' es una gráfica obtenida de γ al realizar la operación descrita en una o más rectas de separación para Γ , diremos que γ' es un **camino descendente especial** para Γ .

Definición 2.2.4. A una pareja (Γ, γ) , donde Γ es un conjunto de curvas cerradas en el anillo A en buena posición y γ es un camino descendente o un camino descendente especial para Γ ,

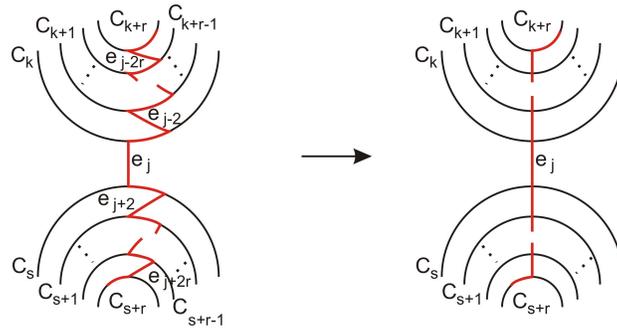


Figura 2.17: Camino descendente especial

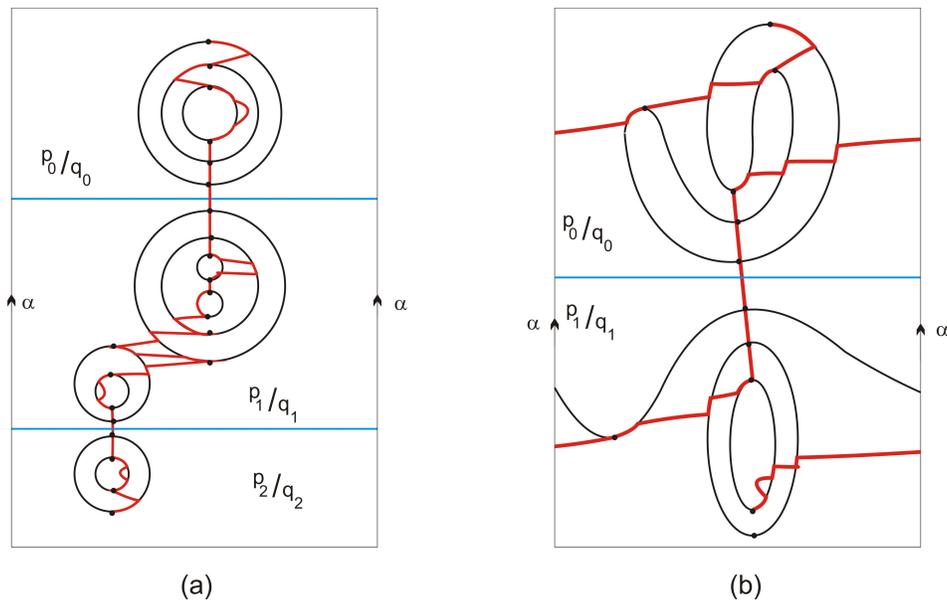


Figura 2.18: Gráficas descendentes con pendientes

la llamamos una **gráfica descendente**. Sean l_1, \dots, l_k las circunferencias de separación, en orden descendente, para Γ (en caso de existir alguna), y sean R_0 el anillo externo que separa l_1 de A , R_k el anillo interno que separa l_k de A , y $R_j \subset A$ el anillo entre las circunferencias l_j y l_{j+1} para $j = 1, \dots, k-1$. A cada región R_j le asignamos una fracción reducida p_j/q_j , con $|p_j|, |q_j| \geq 1$, para $j = 0, 1, \dots, k$. A la gráfica descendente junto con los racionales descritos, denotado por $(\Gamma, \gamma; p_0/q_0, \dots, p_k/q_k)$, le llamaremos una **gráfica descendente con pendientes**.

En la Figura 2.18 se ejemplifican dos gráficas descendentes, una con tres pendientes (dos circunferencias de separación) y la otra con dos pendientes. En la Figura 2.18(a) se representa una gráfica descendente con dos aristas especiales, una de orden 2 y otra de orden 1, mientras que la gráfica de la Figura 2.18(b) contiene una arista especial de orden 2. Es importante notar en estos ejemplos las características de los caminos descendentes descritas en las definiciones 2.2.2 y 2.2.3. Los segmentos de recta horizontales representan las circunferencias de separación para Γ y definen las regiones del plano con sus respectivas pendientes $p_0/q_0, p_1/q_1$ o p_2/q_2 . En las ilustraciones también se remarcaron con puntos negros los máximos y mínimos de curvas en Γ , de los cuales no necesariamente todos son vértices de γ , como ocurre en la Figura 2.18(b) (conforme al inciso (iv) de la Definición 2.2.2). Una diferencia importante entre los caminos descendentes especiales y los que no lo son, es que en estos últimos siempre se tiene alternancia de aristas entre aristas que son arcos de curvas en Γ y arcos con interior contenido en $A \setminus \Gamma$, mientras que en los primeros se pierde esta propiedad. La relación entre las gráficas descendentes y las superficies de Neuwirth para los nudos (1,1) queda establecido en el siguiente resultado.

Teorema 2.2.5. *Si S es una superficie de Neuwirth cerrada para un nudo (1,1) en \mathbb{S}^3 , entonces S puede ser representada por una gráfica descendente con ciertas pendientes $(\Gamma, \gamma; p_0/q_0, \dots, p_k/q_k)$.*

En realidad, la demostración de este resultado se sigue directo de la descripción dada en las afirmaciones de la sección previa. Ahí se vio que si S es una superficie de Neuwirth para cierto nudo (1,1), K , entonces S podía ser llevada a una configuración con complejidad mínima formada por toros, cada uno de los cuales estará representado por una curva de una familia de curvas cerradas en buena posición, Γ ; luego, se tiene un conjunto de tubos, algunos de los cuales conectan dos toros diferentes, mientras que otros pueden ir de un toro en sí mismo, estos tubos estarán representados por las aristas de un camino descendente γ cuyo interior se encuentra en $A \setminus \Gamma$. También se corresponden la función altura definida por $\tilde{\pi}$ en S con la función altura dada por ρ en (Γ, γ) . La propiedad (i) de la Definición 2.2.2 representa el hecho de que los tubos en S son transversales a los toros de nivel, es decir, están formados por curvas de nivel triviales. La propiedad de \tilde{S} de no tener máximos ni mínimos locales (Afirmación 2.1.5) se corresponde con la propiedad (iv) de la Definición 2.2.2.

En la Afirmación 2.1.10 se describió el caso en el que se tienen curvas de nivel triviales y anidadas para S (tubos anidados), esto se representa por medio de una gráfica con un camino descendente especial, en la cual una arista especial de orden r corresponde a un tubo de más afuera en la superficie S con otros r tubos concéntricos, cada uno de los cuales está representado por dos aristas contiguas a la arista especial.

Una situación que parece no estar representada en la gráfica descendente es aquella en la que un tubo se enreda alrededor del producto $T \times I$, pero en este caso es posible realizar una isotopía para desenredar dicho tubo (recorriendo uno de sus extremos sobre el toro que lo contiene), el efecto que tiene dicha isotopía sobre el nudo K puede ser complicarlo un poco sobre la superficie, pero preservando siempre su posición $(1,1)$.

Por último, la pendiente asociada a una región R_j contenida entre dos rectas de separación para Γ representa la pendiente que tendrán las curvas de nivel para S que pertenecen a toros que se encuentran representados por curvas cerradas en R_j , esta pendiente podría cambiar al pasar a una de las regiones contiguas a R_j . En particular, se puede ver que en la región R_0 (ver Definición 2.2.4), la pendiente no puede ser $0/1$, mientras que en la región R_k no puede ser $1/0$ (Afirmación 2.1.8).

Un hecho que no es cierto es que toda gráfica descendente realice una superficie de Neuwirth para algún nudo $(1,1)$. Existen criterios obvios para descartar una gráfica descendente con pendientes $(\Gamma, \gamma; p_0/q_0, \dots, p_k/q_k)$, de representar superficies de Neuwirth para algún nudo $(1,1)$, por ejemplo, si existe una arista especial para el camino descendente γ , habría que preguntarse si la superficie que representa la gráfica descendente es conexa. También, en caso de tener una arista especial e_j en γ , entonces la distancia entre las pendientes de las regiones contiguas a e_j debe ser al menos 2, pues en caso contrario, habría discos de compresión para la superficie asociada a la gráfica descendente que son ajenos a cualquier nudo que se pueda encajar sobre la superficie. En general, no es obvio cuales de las gráficas descendentes realizan superficies de Neuwirth para algún nudo $(1,1)$.

El Teorema 2.2.5 no demuestra la conjetura de Neuwirth para los nudos $(1,1)$, sin embargo, proporciona una buena idea de como deben ser las superficies de Neuwirth para tales nudos. Dado un nudo $(1,1)$, $K \subset \mathbb{S}^3$, la idea es buscar alguna gráfica descendente con pendientes tal que el nudo pueda ser encajado en la superficie asociada a tal gráfica y cumpla con las condiciones para ser una superficie sea de Neuwirth para K . En el siguiente capítulo se lleva a cabo este proceso para encontrar superficies de Neuwirth para la subfamilia de los nudos $(1,1)$ y satélites.

Capítulo 3

Nudos satélite con patrón de enlace racional

M. Ozawa y J. H. Rubinstein [10] demostraron que si un nudo K satisface la conjetura de Neuwirth entonces también la satisface cualquier nudo satélite de K , y cualquier nudo que tenga a K como un sumando. La demostración de este resultado es indirecta y en general no es posible obtener mediante un algoritmo una superficie de Neuwirth para un nudo satélite de K a partir de una de tales superficies para K .

En la presente capítulo se construirán superficies de Neuwirth para una familia de nudos satélite con patrón de enlace racional y compañero arbitrario, es decir, las superficies de Neuwirth dependerán únicamente del patrón. Para tal fin, se hará uso de la caracterización de los enlaces de dos puentes de Schubert [11]. Ejemplos de nudos satélite con patrón de enlace racional son los nudos $(1, 1)$ y satélite, los cuales tienen por compañeros a nudos toroidales (ver [8]).

3.1. Resultados previos

Sea $K_1 \cup K_2$ un enlace racional con fracción asociada α/β , $\alpha \geq 4$, y sea $K' \subset \mathbb{S}^3$ un nudo no trivial. Sea $\varphi : E(K_1) \rightarrow N(K')$ un homeomorfismo del exterior del nudo K_1 en una vecindad regular cerrada de K' en la 3-esfera, tal que la imagen de un meridiano $\mu \subset \partial N(K_1)$ bajo φ tenga pendiente entera $p/1$ sobre $\partial N(K')$. El nudo $K := \varphi(K_2)$ será pues un nudo satélite con compañero K' ; diremos que es un *nudo satélite con patrón de enlace racional* y lo denotaremos por $K'(\alpha, \beta; p)$.

Recordemos la presentación de los enlaces de dos puentes introducida en la capítulo de preliminares (ver Fig. 1.7). Dado un enlace de dos puentes en tal presentación con respectivas secuencias de cruces c_1, \dots, c_n , es posible isotopar dicho enlace hasta llevarlo a una posición en la que tenga secuencias de cruces en el que cada número entero c_j sea par.

Lema 3.1.1. *Todo enlace de dos puentes admite una presentación con secuencias de cruces (c_1, c_2, \dots, c_n) donde $c_i > 0$ es un número par para $i = 1, \dots, n$.*

Demostración. Sea L un enlace de dos puentes cuyo número racional obtenido de la correspondiente fracción continua es α/β con $(\alpha, \beta) = 1$ y $\alpha > 0$. Sea β' el residuo de β módulo α . De la clasificación de Schubert para los enlaces de dos puentes no orientados (Teo. 1.3.1), sabemos que cualesquiera dos enlaces racionales con respectivas fracciones α/β y α/β' son isotópicos siempre que $\beta \equiv \beta' \pmod{\alpha}$, o que $\beta\beta' \equiv 1 \pmod{\alpha}$.

Construiremos una sucesión de enteros (c_1, c_2, \dots, c_n) de la siguiente manera. Como $|\alpha/\beta'| > 1$, existe un número par $c_1 \neq 0$ tal que $c_1 < \alpha/\beta' < c_1 + 1$, o bien $c_1 - 1 < \alpha/\beta' < c_1$. El número racional $r_1 = \alpha/\beta' - c_1$ satisface $0 < |r_1| < 1$, luego, existe un número par $c_2 \neq 0$ tal que $c_2 < 1/r_1 < c_2 + 1$, o bien $c_2 - 1 < 1/r_1 < c_2$. Análogamente se toma $r_2 = 1/r_1 - c_2$ y se repite el argumento para encontrar el siguiente número par c_3 . Nótese que al expresar a cada r_i como una fracción reducida, los respectivos numeradores van disminuyendo, así que eventualmente se tendrá como numerador a 1 y la sucesión termina. Además el último entero c_n también es par.

Por construcción, la sucesión de números pares (c_1, c_2, \dots, c_n) produce como fracción continua al racional p/q' , y por lo tanto define una presentación para el enlace L . \square

Consideremos un enlace racional $L \subset \mathbb{S}^3$ con dos componentes y con secuencias de cruces pares (c_1, c_2, \dots, c_n) . Agrupamos dichas secuencias de cruces en dos familias de manera alternada al ir recorriendo el diagrama de arriba hacia abajo. Es decir, reetiquetamos las secuencias de cruces como $a_i = c_{(i+1)/2}$, para i impar, y $b_i = c_{i/2}$, para i par. Las secuencias de cruces correspondientes a la primera familia serán aquellas que tienen etiqueta a_i , y corresponden a cruces entre las dos componentes de L , mientras que las de la segunda familia serán aquellas con etiqueta b_j , y representan cruces de una de las componentes de L consigo misma (ver Fig. 3.1 (a)). Como L tiene dos componentes, se puede ver que n debe ser impar y por lo tanto existe una secuencia de cruces con etiqueta a_i más que aquellas con etiqueta b_j . En la Figura 3.1 (b) se muestra un ejemplo de un enlace de dos puentes con secuencias de cruces $(2, 4, 2)$ (recordar que por convención así son los cruces positivos tanto en a_i como en b_j , en caso de tener alguna etiqueta negativa se consideran los cruces opuestos).

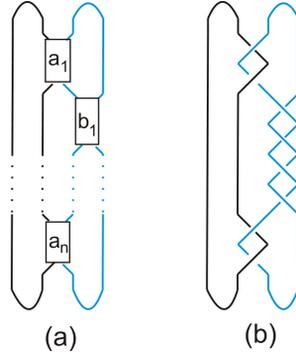


Figura 3.1: Enlace racional con secuencias de cruces pares

Enseguida presentamos un par de lemas técnicos que serán necesarios para la construcción de superficies de Neuwirth para una subfamilia de nudos satélite con patrón de enlace racional.

Lema 3.1.2. *Las secuencias de enteros $(2, 2n, -2)$ y $(4, -1, 4, \dots, 4, -1, 4)$, donde $n > 0$ y el número 4 aparece $2n$ veces en la segunda secuencia, producen el mismo número racional como fracción continua.*

Demostración. El número racional obtenido de $(2, 2n, -2)$ como fracción continua es $8n/(4n-1)$. Es fácil verificar por inducción que coincide con la fracción obtenida de la secuencia $(4, -1, 4, -1, \dots, -1, 4)$. □

Lema 3.1.3. *Las secuencias de cruces $(a_1, b_1, a_2, \dots, b_{n-1}, a_n)$ y $(-a_1, b_1, -a_2, \dots, b_{n-1}, -a_n)$, donde $n \geq 2$ y $a_i = 2(-1)^i$, $i = 1, \dots, n$, definen el mismo enlace racional.*

Demostración. Se probará por inducción sobre n . Para $n = 2$, tenemos que la secuencia de enteros $(2, b_1, -2)$ define como fracción continua al racional $4b_1/(2b_1 - 1)$, mientras que $(-2, b_1, 2)$ determina al racional $4b_1/(-2b_1 - 1)$. En ambas fracciones el numerador es $4b_1$, mientras que la diferencia de los denominadores es $(2b_1 - 1) - (-2b_1 - 1) = 4b_1$, luego, por el Teorema 1.3.1 se tiene que las dos secuencias de números determinan el mismo enlace racional.

Supongamos ahora que el resultado es cierto para $n - 1$. De esta manera, podemos suponer que las secuencias de números (a_2, b_2, \dots, a_n) y $(-a_2, b_2, \dots, -a_n)$ determinan como fracción continua los racionales p/q y p/q' , respectivamente, donde $p = q - q' > 0$. La fracción continua asociada a $(a_1, b_1, a_2, \dots, b_{n-1}, a_n)$ será

$$-2 + \frac{1}{b_1 + q/p} = \frac{-2(b_1p + q) + p}{b_1p + q} = \frac{2(b_1p + q) - p}{-b_1p - q}$$

Mientras que la fracción continua determinada por $(-a_1, b_1, -a_2, \dots, b_{n-1}, -a_n)$ será

$$2 + \frac{1}{b_1 + q'/p} = \frac{2(b_1p + q') + p}{b_1p + q'} = \frac{2(b_1p + q) - p}{b_1p + (q - p)}$$

Nuevamente se tiene que los dos racionales tienen el mismo numerador $2(b_1p + q) - p$, y es igual a la diferencia de los denominadores. Del Teorema 1.3.1 se sigue que las dos secuencias de cruces definen el mismo enlace racional. \square

Sea H un cubo con asas de género m o un cuerpo de compresión con frontera externa de género $m + 1$ y una única componente de frontera interna de género 1. Sean $D_1, \dots, D_m \subset M$ discos de compresión no separantes y no isotópicos para ∂H , tales que al cortar a H a lo largo de los discos D_1, \dots, D_m , obtenemos una 3-variedad \tilde{H} , que será una 3-bola en caso de que H sea un cubo con asas, o un producto $T \times I$, donde T es un toro, si H es un cuerpo de compresión. En una de las componentes de $\partial\tilde{H}$ (una esfera o un toro), habrá $2m$ discos ajenos, dos por cada disco D_i , digamos D_i^+ y D_i^- , $i = 1, \dots, m$. Sea $K \subset \partial H$ una curva cerrada y simple que interseca de manera mínima a $\bigcup D_i$. Sobre $\partial\tilde{H}$, K se descompone en arcos (una curva cerrada si K es ajena a $\bigcup D_i$), cada arco conecta dos de los discos marcados sobre $\partial\tilde{H}$, o bien, puede tener ambos extremos en un mismo disco. Si α es un arco de K con sus dos extremos en un mismo disco, digamos D_j^+ , entonces los dos discos de paralelismo en $\partial\tilde{H} \setminus \text{int}(D_j^+)$ entre α y los dos arcos en ∂D_j^+ que comparten sus extremos con α , deben contener al menos uno de los discos D_i^\pm , $i \in \{1, \dots, m\}$, pues en caso contrario, sería posible reducir las intersecciones entre K y $\bigcup D_i$. Obtenemos una gráfica $\Gamma \subset \partial\tilde{H}$ formada por *vértices gordos*, los discos D_i^\pm , $i = 1, \dots, m$ y aristas entre ellos, los arcos de K . Diremos que la gráfica Γ es *reducida* si el nudo K interseca mínimamente a $\bigcup D_i$. Un conjunto de aristas distintas y orientadas $e_1, \dots, e_l \subset \Gamma$ se dice un *ciclo* si el vértice en el extremo posterior de e_i coincide con el vértice en el extremo anterior de e_{i+1} , $i = 1, \dots, l$, donde $e_{l+1} = e_1$ y cada vértice en el ciclo puede aparecer más de una vez en el trayecto circular.

Sean H , \tilde{H} , K y Γ como antes, donde Γ es una gráfica reducida. A continuación proponemos algunos criterios elementales sobre Γ , para verificar cuando la superficie ∂H es meridionalmente incompresible con respecto a (H, K) , es decir, que cada disco de compresión para ∂H en H interseca a K en al menos dos puntos.

Lema 3.1.4. *Si H es un cubo con asas, entonces ∂H es meridionalmente incompresible con respecto a (H, K) si Γ es conexa y no contiene aristas ni vértices de corte.*

Demostración. Supongamos que Γ es conexa y no contiene aristas ni vértices de corte. Sea $D \subset H$ un disco de compresión para ∂H que interseca en un número mínimo de componentes a $\bigcup D_i$. Si $D \cap (\bigcup D_i) = \emptyset$, entonces ∂D separa los vértices de Γ en dos subconjuntos no vacíos, pues en caso contrario, D no sería un disco de compresión para ∂H . Como Γ es conexa y no contiene aristas de corte, ∂D interseca al menos dos aristas de Γ . Si $D \cap (\bigcup D_i) \neq \emptyset$, sea $D' \subset D$ un disco separado por un arco de intersección de más afuera en D , y supóngase que parte de $\partial D'$ está contenida en D_j^+ , $j \in \{1, \dots, m\}$. La curva $\partial D'$ separa los vértices de Γ distintos de D_j^+ en dos subconjuntos no vacíos, en caso contrario sería posible eliminar intersecciones entre D y $\bigcup D_i$. Como Γ es conexa y D_j^+ no es un vértice de corte, tenemos que D' interseca alguna arista de Γ . Como existen al menos dos de tales discos de más afuera, concluimos que D interseca a K en al menos dos puntos. \square

Lema 3.1.5. *Supóngase que H es un cuerpo de compresión y sea T el toro componente de $\partial\tilde{H}$ que contiene a Γ . Entonces ∂H es meridionalmente incompresible con respecto a (H, K) si ninguna componente conexas de Γ está contenida en un disco de T , y:*

- 1) *Si e es una arista de corte para la componente Γ_1 de Γ , entonces ninguna de las dos subráficas de $\Gamma_1 - \{e\}$ está contenida en un disco en T , o bien,*
- 2) *Si v es un vértice de corte de la componente Γ_1 de Γ y Γ'_1 es alguna de las componentes de $\Gamma_1 - \{v\}$, entonces $\Gamma'_1 \cup \{v\}$ no está contenida en un disco en T .*

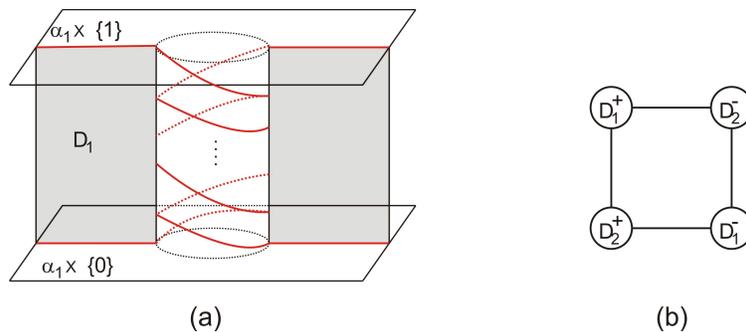
Demostración. Sea $D \subset H$ un disco de compresión para ∂H y supongamos que la intersección entre D y $\bigcup D_i$ tienen un número mínimo de componentes. Si $D \cap (\bigcup D_i) = \emptyset$, entonces D es paralelo a un disco $\tilde{D} \subset T$, el cual contiene al menos un vértice v de Γ . Sea Γ_1 la componente de Γ que contiene a v . Como Γ_1 no está contenida en \tilde{D} , entonces ∂D interseca al menos una arista e de Γ_1 . Si e fuera una arista de corte para Γ_1 , entonces alguna de las componentes de $\Gamma_1 - \{e\}$ estaría contenida en \tilde{D} , lo cual sería una contradicción. Así que e no es una arista de corte para Γ_1 y ∂D interseca otra arista de Γ_1 .

Supongamos que $D \cap (\bigcup D_i) \neq \emptyset$ y sea $D' \subset D$ un disco separado por un arco β en dicha intersección, el cual es de más afuera en D' ; supongamos que β está contenido en el vértice gordo v de Γ_2 y sea Γ_1 la componente de Γ que contiene a v . El disco D' es paralelo a un disco $\tilde{D} \subset \partial\tilde{H}$ que contiene al menos un vértice v' de Γ distinto de v , en caso contrario, sería posible eliminar el arco β de la intersección entre D y $\bigcup D_i$, lo cual no es posible. Si $\partial D'$ no interseca ninguna arista de Γ , entonces v sería un vértice de corte para Γ_1 y si Γ'_1 es la componente de $\Gamma_1 - \{v\}$ que contiene a v' , entonces $\Gamma'_1 \cup \{v\}$ estaría contenido en un disco en T , lo cual es una contradicción a (2). Así que $\partial D'$ interseca una arista de Γ y, al igual que antes, ∂D interseca a K en a menos dos puntos. □

Supongamos que un conjunto de aristas distintas $\gamma_1, \dots, \gamma_l \subset \Gamma$ producen un ciclo C , en el cual cada vértice de Γ aparece solo una vez, en particular no hay aristas de corte ni vértices de corte. Entonces se sigue de los lemas anteriores que ∂H es meridionalmente incompresible con respecto a (H, K) si H es un cubo con asas, o en caso de que H sea un cuerpo de compresión, requerimos que C no esté contenido en un disco en T .

Sea S una superficie de género 1 con una única componente de frontera, y sean $\alpha_1, \alpha_2 \subset S$ dos arcos propiamente encajados y ajenos, los cuales no son isoópicos entre sí ni tampoco a algún arco en ∂S , de tal manera que α_1 y α_2 descomponen a S en un disco. Consideremos el producto $H = S \times [0, 1]$, el cual es un cubo con dos asas y los discos propiamente encajados $D_i = \alpha_i \times [0, 1]$, $i = 1, 2$, descomponen a H en una 3-bola, \tilde{H} . Para $n \in \mathbb{Z}$, sea $K_n \subset \partial H$ el nudo formado por los arcos $\alpha_1 \times \{0\}$ y $\alpha_1 \times \{1\}$ conectados por dos arcos simples que completan n medios giros alrededor de $\partial S \times [0, 1]$, después de fijar una dirección positiva para los giros (ver Fig. 3.2(a)).

Lema 3.1.6. *Para cada $n \in \mathbb{Z}$, la superficie ∂H es meridionalmente incompresible con respecto a (H, K_n) .*


 Figura 3.2: El nudo K_n y su gráfica asociada

Demostración. Fijamos un lado positivo para los discos D_1 y D_2 . Empujamos el nudo K_n un poco fuera de $\alpha_1 \times \{0, 1\}$, digamos hacia el lado positivo de D_1 , y después de eliminar las intersecciones inesenciales entre K_n y $D_1 \cup D_2$, obtenemos una posición en la cual K_n intersecta de manera mínima a ∂D_i en $|2n|$ puntos, $i = 1, 2$. K_n queda descompuesto en $|4n|$ arcos y la gráfica Γ sobre $\partial \tilde{H}$ asociada a esta configuración es como se muestra en la Figura 3.2(b). Cada una de las aristas en la figura representa un conjunto de $|n|$ aristas paralelas. Se sigue del Lema 3.1.4 que cada disco de compresión para ∂H en H intersecta al nudo K_n en al menos dos puntos. \square

3.2. La Conjetura de Neuwirth y nudos satélite con patrón de enlace racional

En la presente sección se describirán superficies de Neuwirth específicas para una familia de nudos con ciertos patrones de enlaces racionales.

Sea K un nudo satélite con un patrón de enlace racional. Luego, existen un enlace racional $K_1 \cup K_2$ con fracción asociada α/β , $\alpha > 4$, un nudo no trivial $K' \subset \mathbb{S}^3$, y un homeomorfismo $\varphi : E(K_1) \rightarrow N(K')$, tal que $K = \varphi(K_2)$. Denotaremos en este caso a K por $K'(\alpha, \beta; p)$. Más aún, de acuerdo al Lema 3.1.1, podemos suponer que $K_1 \cup K_2$ tiene secuencias de cruces descendientes $(a_1, b_1, \dots, b_{n-1}, a_n)$, donde a_i y b_j son números pares para cada i y j .

Sea $F' \subset N(K')$ una superficie cerrada que no está contenida en una 3-bola en $N(K')$. Si D es un disco de compresión para F' , entonces $D \cap \partial N(K')$ es un conjunto de circunferencias y, por medio de argumentos estándar, es posible eliminar tales intersecciones comenzando por una circunferencia de más adentro, ya que K' es un nudo no trivial. Luego, es posible asumir que cada disco de compresión para F' está enteramente contenido en $N(K')$. Ya que las variedades $E(K_1)$ y $N(K')$ son homeomorfas bajo φ , si podemos encontrar una superficie $F \subset E(K_1)$ que contenga a K_2 como una curva no separante, tal que cada disco de compresión para F en $E(K_1)$ interseca a K_2 en al menos dos puntos, entonces la superficie $F' = \varphi(F) \subset N(K')$ será una superficie de Neuwirth para K . Dado un nudo satélite K con cierto patrón de enlace racional $K_1 \cup K_2$, encontraremos una superficie $F \subset E(K_1)$ que contenga K_2 y cumpla con las propiedades mencionadas. Para tal fin, empezaremos por describir superficies de Neuwirth para nudos con patrones sencillos que serán los bloques que usaremos para la construcción de las superficies en el caso general.

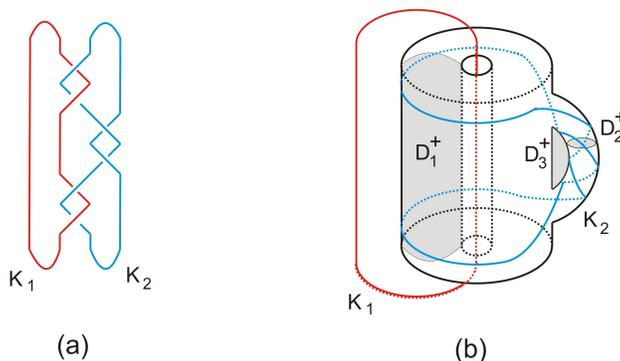


Figura 3.3: Superficie de Neuwirth para el caso $(a_1, b_1, a_2) = (2, 2, 2)$

Lema 3.2.1. *Cada nudo satélite con un patrón de enlace racional con secuencias de cruces (a_1, b_1, a_2) , donde $a_1, b_1, a_2 \in \{2, -2\}$, satisface la conjetura de Neuwirth.*

Demostración. Basta con considerar los casos cuando (a_1, b_1, a_2) es $(2, 2, 2)$, $(2, 2, -2)$ o $(2, -2, 2)$, el resto de las posibles combinaciones se deducen de éstas. Sea $K \subset \mathbb{S}^3$ un nudo $(1, 1)$ y satélite con secuencia de cruces $(2, 2, 2)$, y sea $F \subset E(K_1)$ la superficie de género dos de la Figura

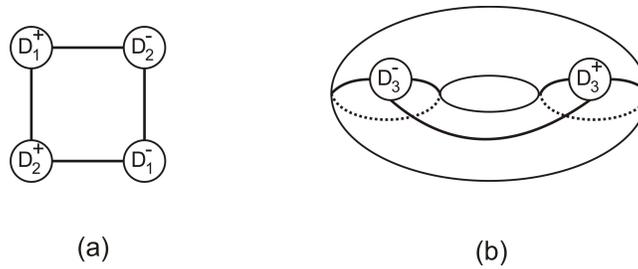


Figura 3.4: Gráficas para el caso $(a_1, b_1, a_2) = (2, 2, 2)$

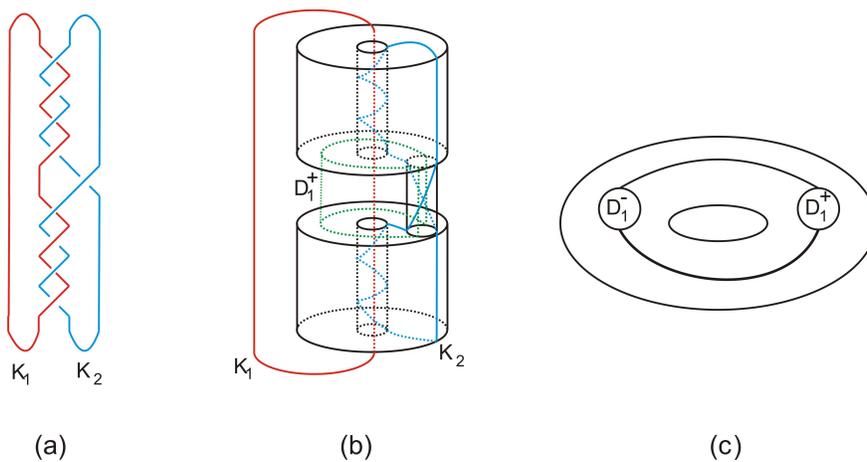


Figura 3.5: Superficie de Neuwirth para el caso $(a_1, b_1, a_2) = (2, 2, -2)$

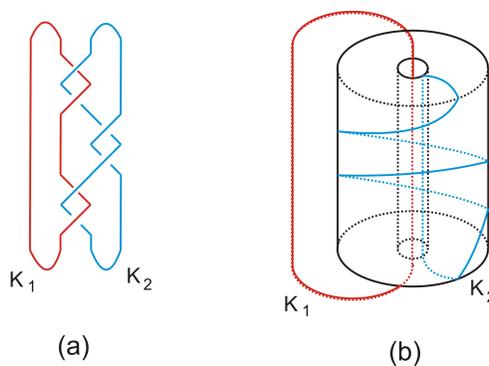


Figura 3.6: Superficie de Neuwirth para el caso $(a_1, b_1, a_2) = (2, -2, 2)$

3.3(b), la cual contiene a K_2 como una curva no separante. Supongamos que $E(K_1) = H_1 \cup_F H_2$ es la descomposición del exterior de K_1 dada por F , donde H_1 es la componente que no comparte frontera con $E(K_1)$, es decir, un cubo con dos asas, mientras que H_2 es un cuerpo de compresión de género dos. Sean D_1 y D_2 los dos discos de compresión no isotópicos para F en H_1 de la Figura 3.3(b) con el lado positivo indicado. Al cortar a H_1 a lo largo de los discos D_1 y D_2 obtenemos una 3-bola B con una gráfica $\Gamma \subset \partial B$ formada por los cuatro discos D_i^\pm , $i = 1, 2$, y aristas entre ellos que serán los arcos de K_2 (ver la Figura 3.4(a)). Como Γ es una gráfica reducida, se sigue del Lema 3.1.4 que cada disco de compresión para F en H_1 intersecta a K_2 en al menos dos puntos. Para H_2 , consideremos el disco D_3 que aparece en la Figura 3.3(b). Al cortar a H_2 a lo largo de D_3 , obtenemos la gráfica en la correspondiente componente de frontera de $H_2|D_3$ que se muestra en la Figura 3.4(b). Se sigue del Lema 3.1.5 que cada disco de compresión para F en H_2 intersecta a K_2 en al menos dos puntos. En este caso, la superficie F corresponde a la frontera de una vecindad regular de una superficie no orientable en $E(K_1)$ que tiene por frontera a K_2 , pero ésto no es necesariamente cierto en un caso más general.

Ahora consideremos el caso $(a_1, b_1, a_2) = (2, 2, -2)$. Podemos tratar de encajar el nudo K_2 en una superficie de género dos, $F \subset E(K_1)$, como en el caso previo. Como entonces, cada disco de compresión para F en $E(K_1)$ intersecta a K_2 en al menos dos puntos, sin embargo, dicha superficie no puede producir una superficie de Neuwirth para K ya que contiene a K_2 como una curva separante. Del Lema 3.1.2 se sigue que las secuencias de enteros $(2, 2, -2)$ y $(4, -1, 4)$ producen el mismo racional como fracción continua, así que el enlace racional de la Figura 3.5(a) es otra presentación para el enlace $K_1 \cup K_2$. Luego, consideremos la superficie $F \subset E(K_1)$ de la Figura 3.5(b), que contiene a K_2 como una curva no separante. Igual que antes, sea $H_1 \subset E(K_1)$ el cubo con asas de género dos con frontera F , y sea H_2 la otra componente de $E(K_1)|F$, un cuerpo de compresión de género dos. Se sigue del Lema 2.1 en [4] que cada disco de compresión para F en H_1 intersecta K_2 al menos en dos puntos. Sea D_1 el disco de compresión para F en H_2 como se muestra en la Figura 3.5(b), con el lado positivo indicado. El disco D_1 intersecta de manera mínima a K_2 en dos puntos y después de cortar a H_2 a lo largo de D_1 , obtenemos una gráfica asociada Γ como aquella de la Figura 3.5(c) (notar que la ilustración no es precisa con respecto a la pendiente del ciclo Γ , pero lo importante es que dicho ciclo es esencial en el correspondiente toro en la frontera de $H_2|D_1$). Del Lema 3.1.5, se tiene que cada disco de compresión para F en H_2 intersecta a K_2 en al menos dos puntos.

Por último, si el enlace $K_1 \cup K_2$ tiene secuencias de cruces $(2, -2, 2)$, se tiene una configuración como en la Figura 3.6(a), y es fácil ver que podemos encajar a K_2 en un toro como se muestra en la Figura 3.6(b). Concluimos que $K = \varphi(K_2)$ es un nudo cable de K' . \square

Lema 3.2.2. *Si K es un nudo satélite con un patrón de enlace racional con secuencias de cruces pares $(a_1, b_1, \dots, b_{n-1}, a_n)$, donde $|a_i| > 2$ para $i = 1, \dots, n$, entonces existe una superficie de Neuwirth para K .*

Demostración. Cada una de las superficies de Neuwirth que se presentarán en este caso corresponden a la frontera de una vecindad regular de una gráfica contenida en $N(K')$, la cual es similar a una gráfica toroidal introducida por Eudave-Muñoz en [4] (Secciones 4 y 5).

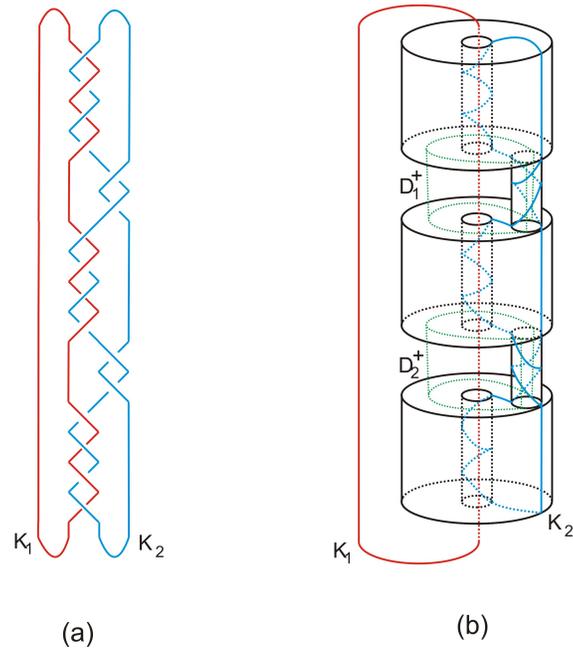


Figura 3.7: Superficie de Neuwirth para $(a_1, b_1, a_2, b_2, a_3) = (4, -2, 4, 2, -4)$

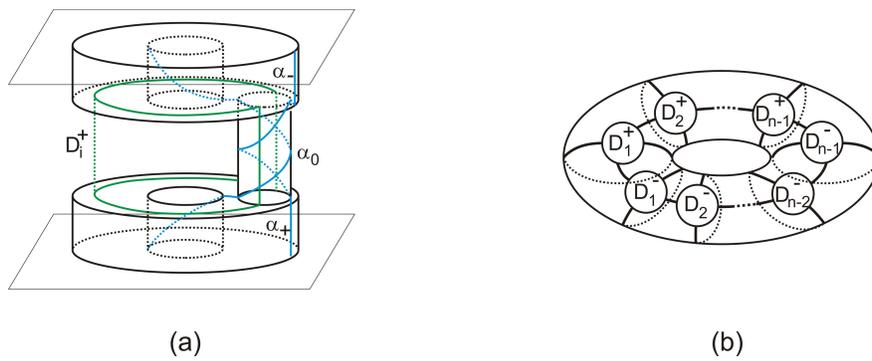


Figura 3.8: Arcos de K_2 conectando discos de compresión y gráfica asociada

Como en el lema anterior, construiremos una superficie cerrada $F \subset E(K_1)$, la cual contendrá a K_2 como una curva no separante. Para tal fin, consideremos una función altura h en \mathbb{R}^3 compatible con la posición de puentes de $K_1 \cup K_2$; en un sistema de coordenadas apropiado es posible suponer que h es la proyección en el eje z . Con respecto a h , K_2 tiene un único valor máximo y un único mínimo en z_1 y z_0 , respectivamente. Para $i = 2, \dots, 2n - 1$, sea w_i una altura entre las secuencias de cruces con etiquetas $a_{i/2}$ y $b_{i/2}$ si i es un número par, y una altura entre las secuencias de cruces $b_{(i-1)/2}$ y $a_{(i+1)/2}$ si i es impar. Sean w_1 y w_{2n} niveles entre z_1 y la primera secuencia de cruces a_1 , y entre z_0 y la última secuencia de cruces a_n , respectivamente. Construimos la superficie F como sigue:

- 1) Para $i = 1, \dots, n$, sea $T_i \subset E(K_1)$ un toro estándar entre los planos definidos por $z = w_{2i-1}$ y $z = w_{2i}$, el cual es isotópico en $E(K_1)$ a $\partial N(K_1)$. Encajamos los dos arcos de K_2 entre los niveles $z = w_{2i-1}$ y $z = w_{2i}$ en el toro T_i . Dicho de manera informal, uno de tales arcos se enreda $a_i/2$ veces alrededor de T_i , mientras que el otro arco es *vertical* (no se enreda).
- 2) Conectamos toros consecutivos T_i y T_{i+1} , $i = 1, \dots, n - 1$ con un tubo vertical (un anillo transversal a los planos de nivel tal que cada una de sus componentes de frontera contiene los extremos de los arcos correspondientes a K), de tal manera que dicho tubo contenga los dos arcos de K_2 correspondientes a la secuencia de cruces con etiqueta b_i , para obtener una superficie cerrada de género n , F , que contiene dos arcos que corresponden a K_2 . Cerramos dichos arcos con dos arcos en los toros de los extremos T_1 y T_n para obtener un nudo isotópico a K_2 contenido en F . En la Figura 3.7 se muestra esta construcción para $(a_1, b_1, a_2, b_2, a_3) = (4, -2, 4, 2, -4)$.

Consideremos la descomposición de $E(K_1)$ en dos componentes H_1 y H_2 dada por F , donde H_2 es la componente que comparte una de sus fronteras con $N(K_1)$. La componente H_1 es un cubo con asas de género n y después de empujar a K_2 un poco dentro de H_1 , tenemos que K_2 se enreda bien en el cubo con asas, de acuerdo a la terminología de [4], y por el Lema 2.1 de dicho artículo se sigue que F es meridionalmente incompresible con respecto a (H_1, K_2) .

En la variedad H_2 , consideremos un disco de compresión D_i para F entre dos toros consecutivos T_i y T_{i+1} , $i = 1, 2, \dots, n - 1$, como se muestra en la Figura 3.7(b). Fijamos un lado positivo para cada uno de tales discos, digamos el lado visible de la figura. Colocamos a K_2 en una posición de intersección mínima con $\bigcup D_i$, como ocurre en el ejemplo de la Figura 3.7(b). Notamos que en dicha configuración, K_2 interseca cada uno de los discos de compresión en al menos cuatro puntos (es exactamente en cuatro puntos cuando el correspondiente entero $|b_i| = 2$). Para $i = 1, \dots, n - 1$, existe un arco α_0 de K_2 que va del lado positivo de D_i en sí mismo y lo mismo es cierto para los lados negativos. También hay dos arcos de K_2 , α_- y α_+ con uno de sus extremos en D_i^+ y el otro en D_{i-1}^+ y D_{i+1}^+ , respectivamente, para $i \in \{2, 3, \dots, n - 2\}$ (en la Figura 3.8(a) se muestra como se ven dichos arcos). Para los discos en los extremos D_1 y D_{n-1} , existen dos arcos de K_2 conectando D_1^+ y D_1^- , así como D_{n-1}^+ y D_{n-1}^- . Después de comprimir F a lo largo de los discos D_1, \dots, D_{n-1} , obtenemos una gráfica Γ sobre un toro, como se muestra en la Figura 3.8(b), con $2(n - 1)$ vértices, los cuales

está contenidos en un ciclo esencial de la gráfica. En cada vértice de la gráfica Γ , existe al menos una arista con sus dos extremos en este vértice. De esta manera, la gráfica Γ tiene como subgráfica la que se muestra en la Figura 3.8(b). Concluimos que cada disco de compresión para F en H_2 intersecta a K_2 en al menos dos puntos (Lema 3.1.5). \square

Observación 3.2.3. *El Lema 3.2.1 es cierto si $|b_1| > 2$.*

Demostración. Si K es un nudo satélite con patrón de enlace racional y secuencias de cruces $(2, b_1, 2)$ o $(-2, b_1, -2)$ donde $|b_1| > 2$ es un número par, entonces es posible encajar K_2 en una superficie de género dos como se hizo en el caso $(a_1, b_1, a_2) = (2, 2, 2)$ (Fig. 3.3); por los mismos argumentos presentados en el Lema 3.2.1, esta superficie produce una superficie de Neuwirth para K . Ahora supongamos que K tiene asociado las secuencias de cruces $(2, b_1, -2)$, $|b_1| > 2$. Es posible encajar a K_2 en una superficie cerrada de género dos como en los casos previos, pero K_2 resulta ser una curva separante en dicha superficie, por lo cual no puede corresponder a una superficie de Neuwirth para el nudo K . Primero, supongamos que $b_1 > 2$, luego por el Lema 3.1.2, la secuencia de enteros $(4, -1, 4, \dots, -1, 4)$, donde el número 4 aparece b_1 veces, define otra configuración para el enlace $K_1 \cup K_2$. En esta nueva presentación, es posible encajar a K_2 en una superficie cerrada de género b_1 , $F \subset E(K_1)$, similar a como se hizo en el Lema 3.2.2. Los mismos argumentos presentados en la demostración del Lema 3.2.2 se siguen directamente para demostrar que cada disco de compresión para F en $E(K_1)$ intersecta a K_2 en al menos dos puntos (en este caso, cada uno de los correspondientes discos de compresión para F en H_2 , como los mostrados en la Fig. 3.7(b), intersecta a K_2 en solo dos puntos, sin embargo, la gráfica asociada constará de un ciclo esencial en el correspondiente toro, el cual contendrá a todos los vértices y el resultado se sigue).

Finalmente, supongamos que ocurre que $b_1 < -2$. Se sigue del Lema 3.1.3 que $(2, b_1, -2)$ y $(-2, b_1, 2)$ son dos secuencias de números asociadas a $K_1 \cup K_2$. La secuencia $(-2, b_1, 2)$ es el negativo de $(2, -b_1, -2)$, y los enlaces asociados son el reflejado el uno del otro. Como se probó en el párrafo anterior, la secuencia $(2, -b_1, -2)$ representa el mismo enlace racional que $(4, -1, 4, \dots, -1, 4)$, luego la secuencia $(2, b_1, -2)$ representa el mismo enlace que $(-4, 1, -4, \dots, 1, -4)$, donde el número -4 aparece $-b_1$ veces en la secuencia. Así que consideramos una superficie similar a la del caso del párrafo anterior. \square

Lema 3.2.4. *Si K es un nudo satélite con patrón de enlace racional con secuencias de cruces pares $(a_1, b_1, \dots, b_{n-1}, a_n)$, donde $|a_i| > 2$ para $i = 1, 2, \dots, n-1$, y $|a_n| = 2$, entonces existe una superficie de Neuwirth para K .*

Demostración. Consideremos la subsecuencia $(a_1, b_1, a_2, \dots, b_{n-2}, a_{n-1})$, la cual corresponde al caso tratado en el Lema 3.2.2. Encajamos el arco \hat{K} de K_2 correspondiente a esta subsecuencia de cruces en una superficie de género $n-1$, F' , como en el lema mencionado. Sea $F'' \subset E(K_1)$ un toro isotópico a $\partial N(K_1)$, ajeno a F' y tal que el toro sólido acotado por F'' en $E(K_1)$ contiene a F' . Conectamos F' y F'' por medio de un tubo (anillo) vertical A tal que los extremos de \hat{K} estén contenidos en la correspondiente frontera de A . Encajamos los dos arcos de K_2 que corresponden a la secuencia de cruces con etiqueta b_{n-1} en A y el arco de

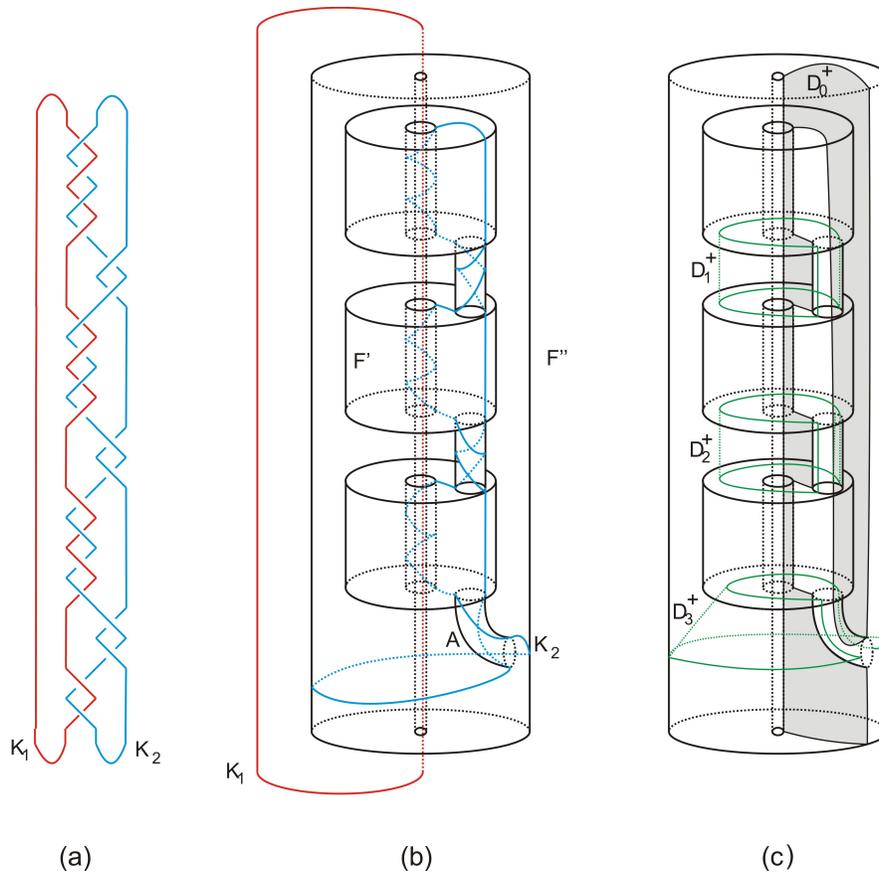


Figura 3.9: Superficie de Neuwirth y discos de descomposición

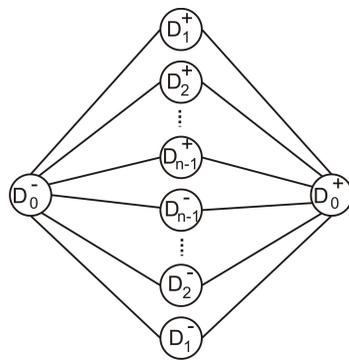


Figura 3.10: Subgráfica de Γ

K_2 correspondiente a la última secuencia de cruces a_n en F'' . Obtenemos un nudo isotópico a K_2 en una superficie de género n , F (ver la construcción para el ejemplo de la Figura 3.9(b)). La superficie F descompone $E(K_1)$ en dos componentes: sea H_1 la componente que comparte frontera con $E(K_1)$, un cuerpo de compresión, y sea H_2 la componente complementaria, la cual es un cubo con asas. Sea $D \subset H_1$ el disco de compresión separante para F cuya frontera es isotópica a ∂A e intersecta a K_2 en dos puntos. Este disco descompone a H_1 en dos subvariedades H_{11} y H_{12} , donde H_{11} es un cubo con asas de género $n - 1$ y H_{12} es un producto $T \times I$, donde T es un toro. Sea $D' \subset H_1$ un disco de compresión para F que intersecta de manera mínima a D . Si $D \cap D' = \emptyset$, entonces D' es isotópico a D si D' está contenido en H_{12} , mientras que será un disco de compresión para ∂H_{11} si D' está contenido en H_{11} ; en cualquier caso, D' intersecta a K_2 en al menos dos puntos (ver demostración del Lema 3.2.2). Si $D \cap D' \neq \emptyset$, sea $D'' \subset D'$ un disco separado por un arco de intersección de más afuera en D' . El disco D'' no puede estar contenido en H_{12} , pues en tal caso sería posible reducir $D \cap D'$, así que D'' está contenido en H_{11} y debe intersectar a K_2 en al menos un punto. Se sigue que D' intersecta a K_2 en al menos dos puntos.

En H_2 , sean D_1, D_2, \dots, D_{n-2} los $n-2$ discos de compresión para F que corresponden a F' (ver Fig. 3.7(b)); hemos visto que cada uno de estos discos intersecta a K_2 en al menos cuatro puntos. Consideremos los dos discos de compresión adicionales y ajenos $D_0, D_{n-1} \subset H_2$ para F , como se muestran en la Figura 3.9(c) para el caso $n = 4$, los cuales son disjuntos a los discos $D_i, i = 1, \dots, n-2$. Los discos de compresión para F , $D_0, D_1, \dots, D_{n-2}, D_{n-1}$ descomponen a H_2 en una 3-bola B . Supongamos que K_2 y $\bigcup D_i$ se intersectan en un número mínimo de puntos y construimos la gráfica Γ como en los lemas previos. Recordemos, del Lema 3.2.2, que existe un arco de K_2 que tiene sus extremos en el mismo disco $D_i^\pm, i = 1, \dots, n-2$ (el arco α_0 de la Figura 3.8(a)). El disco D_{n-1} intersecta a K_2 en al menos tres puntos (es tres cuando $|b_{n-1}| = 2$ y b_{n-1} y a_n tienen signos opuestos). Para D_{n-1}^\pm existe también un arco α_0 de K_2 con sus extremos en D_{n-1}^\pm . Cuando consideramos el disco D_0 , tenemos que ∂D_0 intersecta al arco α_0 asociado a cada disco $D_i^\pm, i = 1, \dots, n-1$, en un punto. Luego, el arco α_0 se descompone en dos subarcos α_0^+ y α_0'' que conectan a D_i^\pm con D_0^+ y D_0^- . De esto se sigue que la gráfica Γ tiene como subgráfica a la gráfica de la Figura 3.10. En particular, Γ es conexa y no tiene vértices ni aristas de corte, luego, se sigue del Lema 3.1.4 que cada disco de compresión para F en H_2 intersecta a K_2 en al menos dos puntos. \square

Nótese que el lema anterior sigue siendo cierto si la secuencia de enteros asociada al enlace racional es $(a_1, b_1, \dots, b_{n-1}, a_n)$, donde $|a_1| = 2$ y $|a_i| > 2$ para $i = 2, \dots, n$, solo basta con comenzar la construcción de la superficie de Neuwirth de abajo hacia arriba en lugar de arriba hacia abajo.

Ahora enunciaremos el teorema que generaliza los casos considerados en los lemas anteriores.

Teorema 3.2.5. *Sea K un nudo satélite con un patrón de enlace racional definido por una secuencia de enteros pares $(a_1, b_1, \dots, b_{n-1}, a_n)$, entonces K tiene una superficie de Neuwirth si: (i) n es a lo más dos, o (ii) al menos uno de $|a_1|$ o $|a_n|$ es mayor que dos.*

Demostración. Supongamos que $K = K'(\alpha, \beta; p)$ es un nudo satélite con patrón de enlace racional definido por las secuencias de cruces $(a_1, b_1, \dots, b_{n-1}, a_n)$ donde a_i y b_j son números

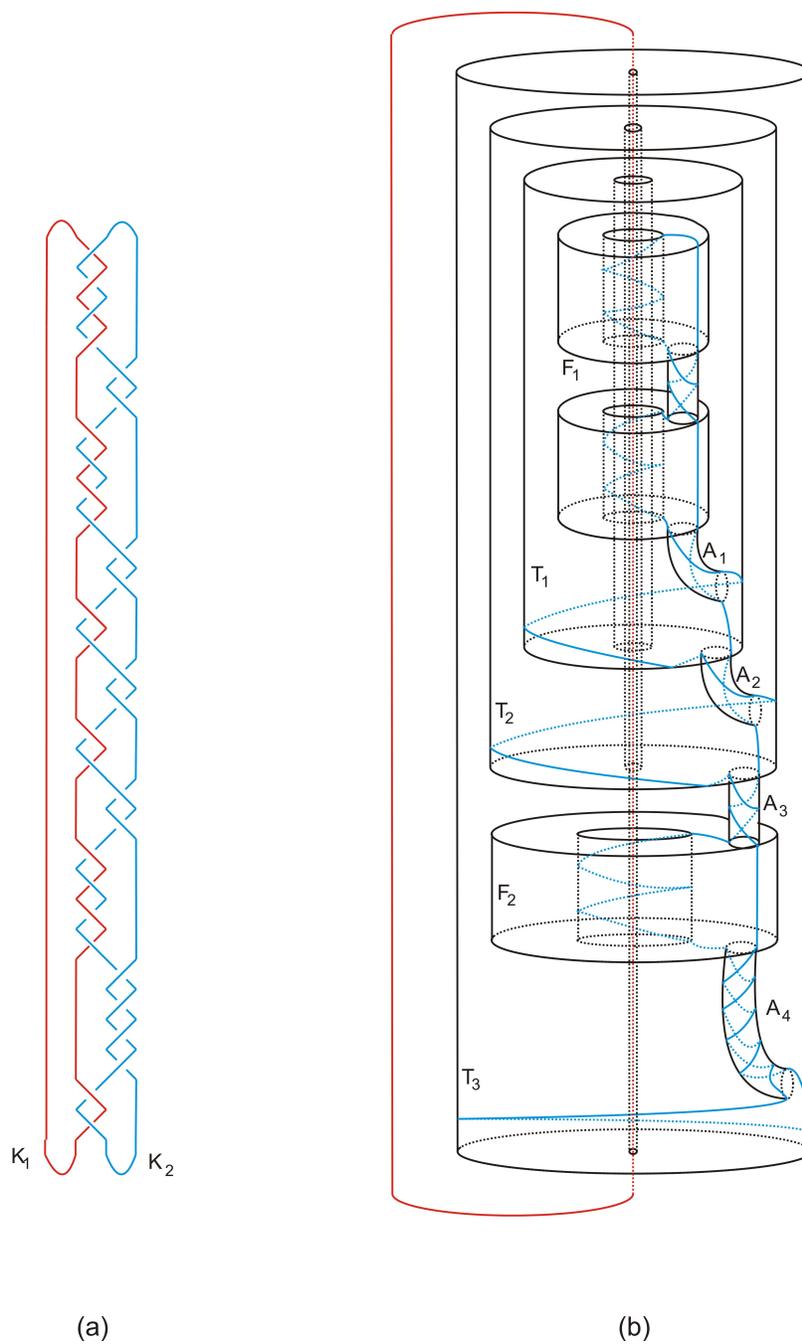


Figura 3.11: Superficie de Neuwirth para el caso general

pares para cada i y j . Comenzaremos por la parte (i) del Teorema. Si $n = 1$, entonces K es un nudo cable de K' y la conjetura se sigue. Si $n = 2$ y $|a_1| = 2 = |a_2|$, ya hemos construido superficies de Neuwirth para K (Lema 3.2.1 y Observación 3.2.3). Finalmente, si al menos uno de $|a_1|$ o $|a_2|$ es mayor que dos, la existencia de la superficie de Neuwirth se sigue de los Lemas 3.2.2 y 3.2.4.

Para probar la parte (ii) del Teorema, supongamos primero que $|a_1| > 2$. Recordemos la función altura h , compatible con la posición de puentes de $K_1 \cup K_2$ del Lema 3.2.2. Para seguir la descripción de las superficies en este caso, ayudará tener en mente el ejemplo ilustrado en la Figura 3.11. Consideremos la subsecuencia ordenada $i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, n\}$ formada por los índices j tales que $|a_j| = 2$. Si este subconjunto de índices es vacío, entonces estamos en el caso del Lema 3.2.2. De ahora en adelante asumiremos que tal subconjunto de índices no es vacío. Para $j = 1, \dots, k$, sea T_j un toro isotópico a $\partial E(K_1)$ en $E(K_1)$, tal que el toro sólido acotado por T_j en $E(K_1)$ contenga en su interior al toro T_{j-1} . Encajamos los dos arcos de K_2 correspondientes a la secuencia de cruces a_{i_j} en el toro T_j , $j = 1, \dots, k$, en la correspondiente altura con respecto a h . Para $j = 1, \dots, i_1 - 1$, el entero $|a_j|$ es mayor que dos. Como se hizo en el Lema 3.2.2, encajamos el arco de K_2 correspondiente a la subsecuencia $(a_1, b_1, a_2, \dots, a_{i_1-1})$ en una superficie cerrada F_1 de género $i_1 - 1$, contenida en el toro sólido acotado por T_1 en $E(K_1)$, de manera coherente con respecto a h . Sea r el primer índice tal que $i_{r+1} > i_r + 1$, y encajamos los dos arcos de K_2 correspondientes a la subsecuencia $(a_{i_r+1}, b_{i_r+1}, \dots, a_{i_{r+1}-1})$ en una superficie de género $i_{r+1} - i_r - 1$, F_2 , contenida en la región producto entre T_r y T_{r+1} . Continuamos en orden de esta manera encontrando superficies F_3, F_4, \dots , que contengan subsecuencias correspondientes a etiquetas consecutivas a_j con $|a_j| > 2$, hasta que las agotemos todas. Conectamos F_1 y T_1 con un tubo vertical A_1 que contenga los dos arcos de K_2 correspondientes a la secuencia de cruces b_{i_1-1} (es necesario asumir que cada componente de A_1 contiene los correspondientes puntos extremos de los arcos de K_2 contenidos en F_1 y T_1). De manera análoga, conectamos T_1 con la siguiente superficie, que puede ser T_2 o F_2 , por medio de un tubo vertical A_2 . Obtenemos una sucesión de tubos A_1, A_2, \dots, A_s que conectan todas las superficies T_i y F_j , y contienen todos los arcos de K_2 que corresponden a las secuencias de cruces b_l que aún no han sido encajadas en alguna superficie F_j . Al final, obtenemos al nudo K_2 contenido en una superficie de género n , F , como se ilustra en el ejemplo de la Figura 3.11.

Probaremos que la superficie F produce una superficie de Neuwirth para el nudo K . Para $i = 1, 2, \dots, s$, sea D_i el disco de compresión para F a lo largo de A_i , es decir, el disco de compresión con frontera paralela a ∂A_i sobre F , cada uno de los cuales intersecta de manera mínima a K_2 en dos puntos. Sean H_1 y H_2 las dos componentes de $E(K_1)|F$, donde H_1 es la componente que contiene a D_1 . Los discos D_i , $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ que están contenidos en H_1 descomponen a H_1 en subvariedades $H_{11}, H_{12}, \dots, H_{1r}$. Sobre ∂H_{1j} habrán uno o dos discos marcados D_{j1} y D_{j2} , $j = 1, \dots, r$, correspondientes a los discos de compresión D_i , $i = 1, \dots, s$. Sobre ∂D_{j1} , habrá dos puntos de K_2 , los cuales conectaremos con un arco simple contenido en D_{j1} y hacemos lo mismo con D_{j2} (si este segundo disco existe), para obtener un nudo $\hat{K}_j \subset \partial H_{1j}$, para $j \in \{1, \dots, r\}$. Notemos que cada uno de los pares (H_{1j}, \hat{K}_j) corresponde a una de las siguientes cinco configuraciones: la región H_1 o la región H_2 y el nudo K_2 del Lema 3.2.2, la región H_1 o la región H_2 y el nudo K_2 del Lema 3.2.4, o el cubo con asas de

género dos H y el nudo K_n , para cierto $n \in \mathbb{Z}$, del Lema 3.1.6. En cada caso, tenemos que cada disco de compresión para ∂H_{1j} en H_{1j} intersecta a \hat{K}_j en al menos dos puntos. Notar que (H_{1j}, \hat{K}_j) puede corresponder a la configuración de K_2 en H_2 de los Lemas 3.2.2 o 3.2.4, pero comenzando con una secuencia de cruces para K_2 donde $|a_1| = 2$, sin embargo, sigue siendo válido que cada disco de compresión para ∂H_{1j} en H_{1j} intersecta a \hat{K}_j en al menos dos puntos. Si D es un disco de compresión para F en H_1 el cual es disjunto de $\bigcup D_i$, entonces debe estar contenido en alguna región H_{1j} y ser disjunto de $D_{j1} \cup D_{j2}$; esto implica que D debe intersectar a \hat{K}_j (y por lo tanto a K_2) en al menos dos puntos. Supongamos que D intersecta a $\bigcup D_i$ en un número mínimo de componentes y sea $D' \subset D$ un disco separado por un arco de intersección de más afuera en D . El disco D' esta contenido en alguna región H_{1j} e intersecta a \hat{K}_j en al menos dos puntos y al menos uno de tales puntos está fuera de $D_{j1} \cup D_{j2}$, así que D intersecta a K_2 en al menos dos puntos.

Para la región H_2 se tiene una situación completamente análoga, pero en este caso descomponemos H_2 con el conjunto de discos D_i , $i \in \{1, \dots, s\}$, que están contenidos en H_2 . Finalmente, si $|a_n| > 2$ en lugar de $|a_1|$, entonces comenzamos la construcción de la superficie de Neuwirth de abajo hacia arriba en lugar de la dirección contraria. \square

Para demostrar que cualquier nudo satélite con un patrón de enlace racional arbitrario satisface la conjetura de Neuwirth, es necesario demostrar los casos no considerados en el Teorema 3.2.5, es decir, aquellos nudos satélite con patrón de enlace racional dados por secuencias $(a_1, b_1, \dots, b_{n-1}, a_n)$, donde cada entero es par, $n > 2$ y $|a_1| = 2 = |a_n|$. Es claro de la demostración del Teorema 3.2.5 porque requerimos al menos uno de $|a_1|$ o $|a_n|$ ser mayor que dos; si esto no ocurre, entonces no es posible obtener superficies de Neuwirth con los argumentos presentados en dicho teorema. Una observación importante es que todas las superficies de Neuwirth del Teorema 3.2.5 están contenidas en una vecindad regular del nudo compañero de K y son independientes de dicho compañero. Es posible que las superficies de Neuwirth para los casos restantes (en caso de existir), no puedan estar contenidas en tal vecindad y, quizá, dependan del nudo compañero de K .

3.3. Superficies de Neuwirth no isotópicas

Hasta el momento hemos construido superficies de Neuwirth para una familia de nudos satélite con patrón de enlace racional, pero no existe razón para creer que dichas superficies son únicas. Si $K = K'(\alpha, \beta; p)$ es un nudo satélite con patrón de enlace racional definido por la secuencia de enteros pares $(a_1, b_1, a_2, \dots, b_{n-1}, a_n)$, con $n > 2$ y al menos uno de $|a_1|$ o $|a_n|$ es mayor que dos, entonces la superficie de Neuwirth construida para K en el Teorema 3.2.5 tiene género n . Una pregunta natural es que tan alejado se encuentra dicho género del género mínimo entre todas las posibles superficies de Neuwirth para K .

Una familia bien conocida de nudos satélite con patrones de enlace racional son los nudos $(1, 1)$ y satélites. Sea K' un nudo toroidal no trivial de tipo (p, q) (en particular, $|p|, |q| > 1$) y sea $K_1 \cup K_2$ un enlace racional del tipo (α, β) , con $\alpha > 4$. Sea $\varphi : E(K_1) \rightarrow N(K')$ un homeomorfismo que preserva orientación y manda un meridiano de K_1 sobre $\partial N(K_1)$ en una fibra de la fibración de Seifert $D(-r/p, s/q)$ de $E(K')$ sobre $\partial E(K')$. El nudo $K = \varphi(K_2)$ es un nudo satélite y $(1, 1)$, denotado por $K(\alpha, \beta; p, q)$, y K. Morimoto y M. Sakuma [8] probaron que cada nudo satélite y $(1, 1)$ corresponde a un nudo $K(\alpha, \beta; p, q)$ para ciertos parámetros.

Utilizaremos esta descripción de los nudos $(1, 1)$ y satélite para demostrar el siguiente resultado:

Corolario 3.3.1. *Para cada $n \geq 2$ existe un nudo con dos superficies de Neuwirth, una de género 2 y la otra de género $2n$.*

Demostración. Sean n un número entero mayor que 1 y K' un nudo toroidal no trivial de tipo (p, q) (esto es, $|p|, |q| \geq 2$). Consideremos el enlace racional $K_1 \cup K_2$ definido por la secuencia $(2, 2n, -2)$. Sea K el nudo $(1, 1)$ y satélite con compañero K' y patrón $K_1 \cup K_2$. Se sigue de la Observación 3.2.3 que la secuencia $(4, -1, 4, \dots, -1, 4)$ también representa al enlace $K_1 \cup K_2$ y existe una superficie de Neuwirth de género $2n$, F_1 , para K .

Ahora presentamos otra descripción para el nudo K . Encajamos el nudo toroidal K' en un toro estándar T en la 3-esfera, y sea $\tilde{D} \subset T$ un disco que intersecta a K' en un arco simple. Consideremos el producto $H = (T \setminus \text{int}(\tilde{D})) \times [0, 1] \subset \mathbb{S}^3$. Sobre ∂H tenemos dos arcos $\alpha_i = (K' \setminus \text{int}(\tilde{D})) \times \{i\}$, $i = 0, 1$. Conectamos los arcos α_0 y α_1 con dos arcos simples que completan $2n$ medios giros (n giros) alrededor de $\partial \tilde{D} \times [0, 1]$ (como en la Figura 3.2(a)), para obtener un nudo sobre $F_2 = \partial H$. No es difícil notar que dicho nudo es equivalente al nudo K del párrafo anterior. Cada disco de compresión para F_2 en H intersecta a K en al menos dos puntos (Lema 3.1.6). En $\tilde{H} = \mathbb{S}^3 \setminus \text{int}(H)$ tenemos el disco de compresión \tilde{D} . Si $D \subset \tilde{H}$ es un disco de compresión para F_2 , el cual es disjunto de \tilde{D} , entonces es isotópico a \tilde{D} o a un meridiano de alguno de los dos toros sólidos en $\tilde{H}|\tilde{D}$. En cualquier caso, D debe intersectar a K en al menos dos puntos (si es un meridiano de alguno de los toros sólidos, el número mínimo de puntos de intersección con K es $|p|$ o $|q|$). Supongamos que $D \cap \tilde{D}$ posee un número mínimo de componentes, y consideramos un disco $D' \subset D$ separado por arco de dicha intersección de más afuera en D . Luego, D' está contenido en una de las componentes de $\tilde{H}|\tilde{D}$ y debe intersectar a K en al menos un punto. Concluimos que cada disco de compresión para F_2 en \tilde{H} intersecta a K en al menos dos puntos. \square

Este corolario muestra que la diferencia entre los géneros mínimo y máximo de superficies de Neuwirth para ciertos nudos no está acotada. Otra observación es que la superficie F_1 del corolario se encuentra contenida en una vecindad regular del nudo compañero, mientras que la superficie F_2 no lo está.

Bibliografía

- [1] J.H. Conway, *An Enumeration of Knots and Links, and Some of Their Algebraic Properties*. Computational Problems in Abstract Algebra. Oxford, England. Pergamon Press (1970), 329-358.
- [2] M. Culler, P. B. Shalen, *Bounded separating, incompressible surfaces in knot manifolds*, Invent. Math. 75 (1984), 537-545.
- [3] N. Dunfield, *A knot without a nonorientable essential spanning surface*. Preprint 2015, 6 pages. arXiv:1509.06653v1.
- [4] M. Eudave-Muñoz, *Incompressible surfaces in tunnel number one knot complements*. Topology and its Applications 98 (1999), 167-189.
- [5] M. Eudave-Muñoz, *Incompressible Surfaces and $(1,1)$ -Knots*. Journal of Knot Theory and its Ramifications Vol. 15, No. 7 (2006), 935-948.
- [6] A. Hatcher, *Basic Topology of Three Manifolds*. Online notes, available at <http://www.math.cornell.edu/hatcher/>.
- [7] L.H. Kauffman, S. Lambropoulou, *On the Classification of Rational Knots*. L'Enseign. Math. 49 (2003), 357-410.
- [8] K. Morimoto, M. Sakuma, *On unknotting tunnels for knots*. Math. Ann. 289 (1991), 143-167.
- [9] L. Neuwirth, *Knot Groups*, Ann. Math. Studies 56 Princeton Univ. Press, 1965.
- [10] M. Ozawa, J. H. Rubinstein, *On the Neuwirth conjecture for knots*. Comm. Anal. Geom. 20 (2012), 1019-1060.
- [11] H. Schubert, *Knoten mit zwei Brücken*, Math. Zeitschrift, 65 (1956), 133- 170.