UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CADENAS MAXIMALES DE SUBESTRUCTURAS ISOMORFAS DE LA GRÁFICA RANDOM

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

RICARDO MUÑOZ SÁNCHEZ

DIRECTOR DE TESIS: DR. DAVID MEZA ALCÁNTARA

CIUDAD DE MÉXICO, 2018

Datos del Jurado

1	**Datos del alumno**
Apellido Paterno	Muñoz
Apellido Materno	Sánchez
Nombre	Ricardo
Teléfono	55 2222 3028
Universidad	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad	Facultad de Ciencias
Carrera	Matemáticas
No. de Cuenta	308741324

2	**Datos del tutor**
Grado	Dr.
Nombre	David
Apellido Paterno	Meza
Apellido Materno	Alcántara

3	**Datos del sinodal 1**
Grado	Dra.
Nombre	Gabriela

Apellido Paterno	Campero
Apellido Materno	Arena
4	**Datos del sinodal 2**
Grado	M. en C.
Nombre	Rafael
Apellido Paterno	Rojas
Apellido Materno	Barbachano
5	**Datos del sinodal 3**
Grado	Dr.
Nombre	Osvaldo Alfonso
Apellido Paterno	Téllez
Apellido Materno	Nieto
6	**Datos del sinodal 4**
Grado	Dr.
Nombre	Ricardo Isaac
Apellido Paterno	Bello
Apellido Materno	Aguirre
7	**Datos del trabajo escrito**
Título	Cadenas maximales de Subestructuras Isomorfas de la Gráfica Random
Páginas	105 p
Anño	2018

Resumen

En el presente trabajo se estudia un aspecto interesante de la retícula de subgráficas de la gráfica random que son isomorfas a ésta. En específico, se estudia el tipo de orden de las cadenas maximales de esta retícula. Al respecto, el resultado principal es que cada una de estas cadenas es isomorfa a un conjunto compacto $K \subseteq [0,1]_{\mathbb{R}}$ tal que $1 \in K$ y 0 es punto de acumulación.

Para lograr esto, se expone el material básico sobre límites de Fraïssé y varias construcciones de la gráfica random, entre ellas la que se obtiene modificando la estructura $\langle V_\omega, \in \rangle$. También se abordan las familias positivas de ω, que son cercanas en espíritu a los conceptos de filtro y de coideal.

Este trabajo está basado en los artículos [KK13], [Kur13], [Kur12] y [KM15] de Miloš Kurilić, donde estudia los tipos de orden de cadenas y anticadenas maximales de las retículas de subestructuras isomorfas de varias estructuras ultrahomogéneas.

Abstract

In this thesis we study an aspect of the lattice of subgraphs of the random graph that are isomorphic to it. Specifically, we study the order type of the maximal chains in this lattice, them being isomorphic to a compact set $K \subseteq [0,1]_{\mathbb{R}}$ such that $1 \in K$ and 0 is a limit point of K.

In order to achieve this, we present the basic results about Fraïssé limits and a few ways to construct the random graph, among them the one obtained by modifying the structure $\langle V_\omega, \in \rangle$. We also study positive families in ω, which are close in spirit to the concepts of filters and coideals.

This thesis is based on the papers [KK13], [Kur13], [Kur12] and [KM15] by Miloš Kurilić, in which he studies the order types of both chains and antichains of the lattices of isomorphic substructures of several ultrahomogeneous structures.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

A lo largo de este capítulo veremos varias definiciones concernientes a órdenes parciales y totales que nos serán útiles en capítulos subsecuentes. La notación usada es por lo general la misma que en [Jec07], con la siguiente excepción notable: se usará $\subseteq$ para la contención y $\subset$ para la contención propia con el fin de hacer un paralelismo con los símbolos $\leq$ y $<$ usados en órdenes parciales.

Asimismo, debido a que varias de las cosas definidas a lo largo de este trabajo se representan por medio de la letra "P", es importante notar que usaremos $\mathscr{P}(x)$ para representar la potencia de un conjunto x, $\mathbb{P}(S)$ para la retícula de subestructuras isomorfas de una estructura S, $\mathcal{P}$ para representar a una familia positiva y P para representar un orden parcial cualquiera. La mayoría de estas nociones se definirán en su debido momento.

Los resultados básicos de teoría de conjuntos usados a lo largo de este trabajo se pueden encontrar en [Jec07], mientras que los resultados básicos de topología se pueden encontrar en [Eng89].

Unas últimas notas respecto a la notación y a la terminología: a la familia de todos los subconjuntos cofinitos de ω, también conocida como *filtro de Fréchet*, la denotaremos por $\mathscr{F}_{\text{Fréchet}}$, mientras que por *sucesor* nos referiremos a un sucesor inmediato y por *conjunto numerable* nos referiremos a un conjunto equipotente a ω, el conjunto de los naturales.

1.1. Órdenes Parciales

A lo largo de esta sección, consideraremos que $P = \langle X, < \rangle$ es un orden parcial.

El máximo y el mínimo de P, en caso de existir, los representaremos como 0_P y 1_P, respectivamente. También definiremos a los intervalos en P de la manera usual, esto es, $(p, q)_P$ es el conjunto de todos los elementos de P mayores a p pero menores a q. En este contexto, los símbolos $-\infty_P$ e ∞_P se usarán para representar al ínfimo y al supremo de P, aunque no necesariamente se cumplirá que $-\infty_P, \infty_P \in X$. Recordemos que se usan corchetes en los intervalos para indicar que el extremo correspondiente está incluído.

Otra noción importante para los órdenes es la de conjunto denso, así como varias otras similares o derivadas de ésta. Es por eso que decimos que un subconjunto $D \subseteq X$ es:

- *denso* si y sólo si para toda $p \in X$ existe $q \in D$ tal que $q < p$,

- *denso en* P si y sólo si para cualesquiera $x, y \in X$ tales que $x < y$, existe $z \in D$ tal que $x < z < y$, y
- *denso en orden* en P si y sólo si para cualesquiera $x, y \in X$ tales que $x < y$, existe $z \in D$ tal que $x \leq z \leq y$.

Por otro lado, recordemos que un conjunto $F \subseteq X$ no vacío es un *filtro* si y sólo si cumple las siguientes condiciones:

a) para cualesquiera $p, q \in F$ existe $r \in F$ tal que $r \leq p$ y $r \leq q$, y

b) para todas $p \in F$ y $q \in X$ si $p \leq q$, entonces $q \in F$.

Un resultado importante que involucra tanto a filtros como conjuntos densos es el lema de Rasiowa-Sikorski, presentado a continuación.

Teorema 1.1. Sean P un orden parcial y $\mathcal{D}$ una familia numerable de subconjuntos densos de P. Entonces existe un filtro F tal que para toda $D \in \mathcal{D}$ se cumple que $D \cap F \neq \varnothing$. $\square$

Asimismo, definimos el orden $\triangleleft$ sobre $\mathscr{P}(X)$ de la siguiente manera:

$$A \triangleleft B \text{ si y sólo si } a < b \text{ para cualesquiera } a \in A \text{ y } b \in B$$

1.2. Órdenes Lineales

A lo largo de esta sección, consideraremos que $L = \langle X, < \rangle$ es un orden lineal.

Un par $\langle\mathfrak{A},\mathfrak{B}\rangle$ es una *cortadura* en L si y sólo si $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son subconjuntos no vacíos y ajenos de X tales que $X=\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{A}\lhd\mathfrak{B}$. Asimismo, una cortadura $\langle\mathfrak{A},\mathfrak{B}\rangle$ es un *hueco* en L si y sólo si $\mathfrak{A}$ no tiene máximo y $\mathfrak{B}$ no tiene mínimo.

Decimos que L tiene *saltos densos* si y sólo si para cualesquiera $x,y\in X$ tales que $x<y$ existen $a,b\in[x,y]_L$ tales que $a<b$ y $(a,b)_L=\varnothing$.

También decimos que L es:

- *completo* si y sólo si todo subconjunto no vacío de X tiene supremo e ínfimo,
- $\mathbb{R}$-*encajable* si y sólo si L es isomorfo a un subconjunto de los números reales,
- *booleano* si y sólo si es completo y tiene saltos densos.

También es importante recordar que tanto $\mathbb{Q}$ como $\mathbb{R}$ se pueden caracterizar por su tipo de orden. Esto es, un orden lineal $L=\langle X,<\rangle$ es isomorfo a:

- $\mathbb{Q}$ si y sólo si es un orden denso, numerable y sin extremos.
- $\mathbb{R}$ si y sólo si es un orden sin extremos que tenga un subconjunto denso numerable y tal que todo subconjunto acotado de X tiene supremo e ínfimo.

Usando lo definido en esta sección, podemos ver lo siguiente:

Proposición 1.2. Sea L un orden lineal a lo más numerable. Si L es completo, entonces tiene saltos densos.

Demostración. Claramente, si $L = \langle X, <_L \rangle$ es un orden lineal finito, entonces tiene saltos densos, por lo que podemos suponer que X es numerable.

Demostremos la contrapuesta. Supongamos que L no tiene saltos densos. Entonces existe un intervalo $(x, y)_L$ tal que para cualesquiera $a, b \in X$ tales que $x < a < b < y$ se cumple que $(a, b)_L \neq \varnothing$. Esto es, $(x, y)_L$ es un orden parcial denso, numerable y sin extremos, por lo que es isomorfo a $\mathbb{Q}$. Por lo tanto $(x, y)_L$ no es completo y tampoco lo es L. $\square$

También nos será de bastante utilidad recordar la definición de la suma lexicográfica de órdenes lineales, por lo que será dada a continuación:

Definición. Sean $\langle I, <_I \rangle$ y $L_i = \langle X_i, <_i \rangle$ para cada $i \in I$ órdenes lineales tales que $X_i \cap X_j = \varnothing$ si $i \neq j$. La *suma lexicográfica* $\sum_{i \in I} L_i$ es el conjunto $\langle \bigcup_{i \in Y} X_i, < \rangle$, donde

$$\begin{aligned} x < y \iff & (\exists i \in Y)(x, y \in X_i \wedge x <_i y) \vee \\ & (\exists i, j \in Y)(i <_I j \wedge x \in X_i \wedge y \in X_j). \end{aligned}$$

En particular, la suma de dos órdenes se obtiene concatenándolos, de tal manera que todos los elementos del primer orden son menores a los del segundo.

Finalmente, la topología de orden $\mathcal{O}_L$ es aquella generada por la familia de todos los intervalos abiertos de L.

1.3. Subconjuntos de $\mathbb{R}$

A lo largo de esta sección veremos los tipos de orden de varios subconjuntos de los números reales. Más adelante usaremos los resultados de esta sección cuando veamos cadenas maximales en distintas familias de $\mathscr{P}(\omega)$.

Antes de comenzar, recordemos que, como $\mathbb{R}$ cumple la condición de cadenas contables, todo subconjunto suyo puede tener a lo más una cantidad numerable de saltos.

Proposición 1.3. Sea $L = \langle X, < \rangle$ un orden lineal. Entonces los siguientes son equivalentes:

a) L contiene un subconjunto denso en orden numerable.

b) $\mathcal{O}_L$ tiene base numerable.

c) L es $\mathbb{R}$-encajable.

Demostración.
a$\to$b)

Sean $L = \langle X, < \rangle$ un orden lineal y $D \subseteq X$ un subconjunto numerable denso en orden en L. El conjunto

$$E = \{x \in X : \big(\exists y \in D\big)(y \text{ es sucesor} \\ \text{o predecesor inmediato de } x)\}$$

cumple que $|E| \leq 2|D|$, por lo que $D^* = D \cup E$ es numerable.

Sea $B = \big\{(c,d)_L : (c \in D^* \cup \{-\infty_L\}) \wedge (d \in D^* \cup \{\infty_L\}) \wedge c < d\big\}$. Como D^* es numerable, B también es numerable. Queremos probar que B es base de $\mathcal{O}_L$.

Sean $(a,b)_L$ no vacío para $a, b \in X \cup \{-\infty_L, \infty_L\}$ y $x \in (a,b)_L$. Queremos ver que existe $I \in B$ tal que $x \in I \subseteq (a,b)_L$. Analizemos el caso en que $a = -\infty$ y $b \in X$, los demás casos se demuestran de manera análoga. Entonces vemos que hay dos subcasos:

- Si $(x,b)_L$ es no vacío, sea $c \in (x,b)_L$. Como D es denso en orden, existe $d \in D$ tal que $c \leq d \leq b$, por lo que $x \in (-\infty, d)_L \in B$ y $(-\infty, d)_L \subseteq (-\infty, b)_L$.

- Si $(x,b)_L = \varnothing$, entonces $x \in D$ o $b \in D$. Entonces vemos que $b \in D^*$ y, por lo tanto, $x \in (-\infty, b)_L \in B$.

Como $\big\{(a,b)_L : a, b \in X \cup \{-\infty_L, \infty_L\}\big\}$ es la base a partir de la cual $\mathcal{O}_L$ fue generada, podemos concluir que B es una base numerable de $\mathcal{O}_L$.

a→c)

Sean $L = \langle X, < \rangle$ un orden lineal y $D \subseteq X$ un subconjunto numberable denso en orden en L y sean E y D^* como en el inciso anterior. Sea entonces $f : D^* \to \omega$ una biyección.

Sea $\chi_A : \omega \to 2$ para $A \subseteq \omega$, la función característica de A como subconjunto de ω. Definamos para $x \in X$ la función

$$g(x) = \sum_{n \in \omega} \Big(2^{-(n+1)} \chi_{f[(-\infty,x]_L \cap D^*]}(n)\Big).$$

Esta función suma un número pequeño por cada elemento de D^* que sea menor o igual a una $x \in X$ dada.

Recordemos que $\sum_{n\in\omega} 2^{-(n+1)} = 1$, por lo que $g\big[L\big] \subseteq [0,1]_{\mathbb{R}}$. Sean $x, y \in L$ tales que $x < y$ y $A = (-\infty, x]_L$, $B = (-\infty, y]_L$. Entonces tenemos que $A \cap D^* \subseteq B \cap D^*$. Nosotros queremos ver que son distintos.

Si $(x, y)_L = \varnothing$, vemos que $x \in D$ o $y \in D$ ya que D es denso en orden. Por lo tanto, $y \in D^*$ y $y \in (B \cap D^*) \setminus (A \cap D^*)$. Por otro lado, si existe $z \in (x, y)_L$, entonces hay algún $z' \in D \subseteq D^*$ tal que $z \leq z' \leq y$, por lo que $z' \in (B \cap D^*) \setminus (A \cap D^*)$. Esto es, $A \cap D^* \subset B \cap D^*$ y, como f es una biyección, entonces $f[A \cap D^*] \subset f[B \cap D^*]$.

Para facilitarnos las cuentas que siguen, definiremos $A' = f[A \cap D^*]$ y $B' = f[B \cap D^*]$. Como $A' \neq B'$, podemos ver que

$$\begin{aligned} g(y) &= \sum_{n\in\omega} \left(2^{-(n+1)} \chi_{B'}(n)\right) \\ &= \sum_{n\in A'} \left(2^{-(n+1)} \chi_{B'}(n)\right) + \sum_{n\in B'\setminus A'} \left(2^{-(n+1)} \chi_{B'}(n)\right). \end{aligned}$$

Como $A' \subset B'$, vemos que

$$g(x) = \sum_{n\in\omega} \left(2^{-(n+1)} \chi_{A'}(n)\right) = \sum_{n\in A'} \left(2^{-(n+1)} \chi_{B'}(n)\right)$$

y que

$$N = \sum_{n\in B'\setminus A'} \left(2^{-(n+1)} \chi_{B'}(n)\right) > 0,$$

por lo que $g(y) = g(x) + N$ y $g(y) > g(x)$. Por lo tanto, g es estrictamente creciente y, por lo tanto, un encaje.

Esto es, L es un orden lineal $\mathbb{R}$-encajable.

b$\to$a)

Sabemos que la base canónica de $\mathcal{O}_L$ es el conjunto B de todos los intervalos abiertos de L. Sea A una base de $\mathcal{O}_L$ de cardinalidad mínima, por lo que A es a lo más numerable. Ahora bien, nosotros sabemos por el teorema 1.1.5 de [Eng89] que como A es una base de $\mathcal{O}_L$ tal que $|A| \leq |B|$, existe $B' \subseteq B$ tal que B' es una base de $\mathcal{O}_L$ y $|A| = |B'|$. Sea X' el conjunto de todos los extremos de los intervalos de B'. Como B' es a lo más numerable, tenemos que X' es a lo más numerable.

Ahora queremos ver que X' es un denso en orden. Sean $x, y \in X$. Entonces existen $x', y' \in X'$ tales que y $(x', y')_L \subseteq (x, y)_L$ ya que B' es base de $\mathcal{O}_L$. Como $x \leq x' < y' \leq y$, vemos que X' es un conjunto denso en orden y numerable.

c$\to$a)

Sean $L = \langle X, < \rangle$ un orden lineal $\mathbb{R}$-encajable y $f : X \to \mathbb{R}$ ese encaje. Sean $K = f[X]$ y $K^* = \{x \in K : \big(\exists y \in K\big)\big((x, y)_{f[L]} = \varnothing\big)\}$. Como $K \subseteq \mathbb{R}$, vemos que K^* es a lo más numerable. Sea $F = \{\langle p, q \rangle \in \mathbb{Q}^2 : (p, q)_{\mathbb{R}} \cap K \neq \varnothing\}$ y para $\langle p, q \rangle \in F$, sea $a_{p,q} \in (p, q)_{\mathbb{R}} \cap K$. Finalmente, definimos $D = K^* \cup \{a_{p,q} : \langle p, q \rangle \in F\}$.

Como $F \subseteq \mathbb{Q}^2$, vemos que $|\{a_{p,q} : \langle p, q \rangle \in F\}| \leq |F| \leq |\mathbb{Q}^2|$. Esto es, D es numerable.

Sean $a, b \in K$ tales que $a < b$. Si $(a,b)_K = \varnothing$, entonces $a \in K^* \subseteq D$. Si $(a,b)_K \neq \varnothing$, existe $c \in (a,b)_K$ y, como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, existen $p, q \in \mathbb{Q}$ tales que $a < p < c < q < b$. Entonces vemos que $a < a_{p,q} < b$ y $a_{p,q} \in D$. Por lo tanto, D es denso en orden en K.

Como f mantiene el orden y es inyectiva, tenemos que $f^{-1}[D]$ es denso en orden en L. $\square$

Ahora presentaremos un lema que nos será de utilidad cuando estemos viendo cadenas maximales de ciertas familias de subconjuntos de $\mathbb{R}$:

Lema 1.4. Sea $L = \langle X, < \rangle$ un orden lineal completo $\mathbb{R}$-encajable tal que $|X| > 1$. Entonces L es isomorfo a un subconjunto compacto de $[0,1]_{\mathbb{R}}$ que contiene a 0 y a 1.

Demostración. Sea $L = \langle X, < \rangle$ un orden lineal completo $\mathbb{R}$-encajable tal que $|X| > 1$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $X \subseteq [0,1]_{\mathbb{R}}$ y $0, 1 \in X$. Sean $l_x = \sup_L \big([0,x)_{\mathbb{R}} \cap X\big)$ y $r_x = \text{ínf}_{\mathbb{R}} \big((x,1]_{\mathbb{R}} \cap X\big)$. Entonces los siguientes conjuntos nos indican cuando $x \neq l_x$ y $x \neq r_x$, respectivamente:

$$A = \{a \in (0,1)_L : a < r_a\}$$
$$B = \{b \in (0,1)_L : l_b < b\}$$

Podemos ver que $[a, r_a)_{\mathbb{R}} \cap X = \varnothing$ para toda $a \in A$ y que

$(l_b, b]_{\mathbb{R}} \cap X = \varnothing$ para toda $b \in B$. Sea

$$X' = \mathbb{R} \setminus \big(\bigcup_{a \in A} [a, r_a)_{\mathbb{R}} \cup \bigcap_{b \in B} (l_b, b]_{\mathbb{R}} \big).$$

Entonces tenemos que

- $X \subseteq X'$.
- Para $a_1, a_2 \in A$ tales que $a_1 < a_2$ se tiene que $r_{a_1} < a_2$, por lo que $[a_1, r_{a_1}]_{\mathbb{R}} \cap [a_2, r_{a_2}]_{\mathbb{R}} = \varnothing$.
- Para $b_1, b_2 \in B$ tales que $b_1 < b_2$ se tiene que $b_1 < l_{b_2}$, por lo que $[l_{b_1}, b_1]_{\mathbb{R}} \cap [l_{b_2}, b_2]_{\mathbb{R}} = \varnothing$.
- Para $a \in A$ y $b \in B$ tenemos que $b < a$ o que $a < b$ y $r_a < l_b$, por lo que $[a, r_a)_{\mathbb{R}} \cap (l_b, b]_{\mathbb{R}} = \varnothing$.

Sea $C \subseteq X'$ no vacío y acotado en $\mathbb{R}$. Queremos ver que $\sup_{X'} C$ existe. Es claro que si $\sup_{\mathbb{R}} C \in X'$, entonces $\sup_{\mathbb{R}} C = \sup_{X'} C$. De lo contrario, vemos dos casos:

- Existe $a \in A$ tal que $\sup_{\mathbb{R}} C \in [a, r_a)_{\mathbb{R}}$. Entonces vemos que $C \subseteq (-\infty, a)_{\mathbb{R}}$ y $\sup_{\mathbb{R}} C \in [a, r_a)_{\mathbb{R}}$, por lo que $\sup_{\mathbb{R}} C = a$. Como $a \notin X'$ pero $r_a = \text{mín}_{\mathbb{R}}\{x \in X' : a < x\}$, podemos tomar $\sup_{\mathbb{R}} C = r_a$.
- Existe $b \in B$ tal que $\sup_{\mathbb{R}} C \in (l_b, b]_{\mathbb{R}}$. Sin embargo, vemos que $C \subseteq (-\infty, l_b]_{\mathbb{R}}$ pero $l_b < \sup_{\mathbb{R}} C$, lo que es imposible.

Por lo tanto, $\sup_{X'} C$ existe. De manera análoga se prueba que $\text{ínf}_{X'} C$ existe. Por lo tanto, X' es completo para conjuntos acotados. Además, como $[1,\infty)_{\mathbb{R}} = [1,\infty)_{X'}$ y $(-\infty,0]_{\mathbb{R}} = (-\infty,0]_{X'}$, tenemos que X' no tiene extremos.

Sean $x, y \in X'$ tales que $x < y$. Queremos ver que existe $z \in (x,y)_{X'}$. Vemos tres casos:

- Cuando $(x,y)_{X'} = (x,y)_{\mathbb{R}} \neq \varnothing$.
- Existe $a \in A$ tal que $[a, r_a)_{\mathbb{R}} \subset (x,y)_{\mathbb{R}}$, por lo que $r_a \in (x,y)_{X'}$.
- Existe $b \in B$ tal que $(l_b, b]_{\mathbb{R}} \subset (x,y)_{\mathbb{R}}$, por lo que $l_b \in (x,y)_{X'}$.

Por lo tanto, como X' es un orden $\mathbb{R}$-encajable, denso en sí mismo, sin extremos y tal que todo subconjunto acotado tiene supremo e ínfimo, por lo tanto $X' \cong \mathbb{R}$.

Sea $f : X' \to \mathbb{R}$ un isomorfismo de orden. Entonces tenemos que:

- $L \cong f[X]$,
- $f[X]$ es un conjunto acotado de $\mathbb{R}$ ya que $\text{máx}_{\mathbb{R}} f[X] = f[\text{máx}_L X]$ y $\text{mín}_{\mathbb{R}} f[X] = f[\text{mín}_L X]$, y
- $f[X]$ tiene todos sus puntos de acumulación ya que L es completo.

Por lo tanto, $f[X]$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ y

$$\big[\min_{\mathbb{R}} f[X], \max_{\mathbb{R}} f[X]\big]_{\mathbb{R}} \cong [0,1]_{\mathbb{R}},$$

por lo que existe $K \subseteq [0,1]_{\mathbb{R}}$ tal que $K \cong f[X] \cong L$ y $0, 1 \in K$. $\square$

Usando el lema anterior, veremos la siguente caracterización de los órdenes completos $\mathbb{R}$-encajables no triviales:

Proposición 1.5. Sea $L = \langle X, < \rangle$ un orden lineal. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

a) L es un orden lineal completo $\mathbb{R}$-encajable tal que $|L| > 1$ y 0_L no tiene sucesor.

b) L es isomorfo a un conjunto compacto $K \subseteq [0,1]_{\mathbb{R}}$ tal que 0 es punto de acumulación de K y $1 \in K$.

Demostración.
a→b)

Sea $L = \langle X, < \rangle$ un orden lineal completo $\mathbb{R}$-encajable tal que $|X| > 1$ y 0_L no tiene sucesor. Sabemos por el lema 1.4 que como L es un orden lineal $\mathbb{R}$-encajable tal que $|X| > 1$, entonces es isomorfo a un conjunto compacto $K \subseteq [0,1]_{\mathbb{R}}$ tal que $0, 1 \in K$. Sea entonces f un isomorfismo entre L y K.

Supongamos que 0 no es un punto de acumulación de K. Entonces vemos que $x = \operatorname{ínf}_{\mathbb{R}} \langle K \cap (0,1)_{\mathbb{R}} \rangle > 0$. Como $K \subset \mathbb{R}$ es compacto, es cerrado y por lo tanto $x \in K$. Pero sabemos que

$\big(0_L, f^{-1}(x)\big)_L = \varnothing$, por lo que $f^{-1}(x)$ es el sucesor de 0_L, lo que es imposible ya que 0_L no tiene sucesores. Por lo tanto, 0 es punto de acumulación de K.

b$\to$a)

Sea $K \subseteq [0,1]_{\mathbb{R}}$ un conjunto compacto tal que 0 es punto de acumulación de K y $1 \in K$. Como $K \subset \mathbb{R}$, es un orden lineal $\mathbb{R}$-encajable. Asimismo, como K es compacto, es cerrado y acotado, por lo que todo subconjunto de K tiene supremo e ínfimo en K. Esto es, K es completo. Finalmente, como 0 es punto de acumulación de K, no tiene sucesor en K. Por lo tanto, K es un orden lineal completo $\mathbb{R}$-encajable tal que 0 no tiene sucesor. $\square$

Una caracterización similar a la anterior se puede obtener cuando se tienen saltos densos. Sin embargo, únicamente veremos una de las implicaciones, la otra se abordará hasta el teorema 2.3.

Proposición 1.6. Sea $L = \langle X, < \rangle$ un orden lineal completo $\mathbb{R}$-encajable con saltos densos tal que 0_L no tiene sucesor. Entonces L es isomorfo a un conjunto $K \subset [0,1]_{\mathbb{R}}$ compacto y nunca denso tal que 0 es punto de acumulación de K y $1 \in K$.

Demostración. Sea $L = \langle X, <_L \rangle$ un orden lineal completo $\mathbb{R}$-encajable con saltos densos tal que 0_L no tiene sucesor. Como L es un orden lineal completo $\mathbb{R}$-encajable, la proposición 1.5 nos dice que L es isomorfo a un conjunto compacto $K \subseteq [0,1]_{\mathbb{R}}$ tal que 0 es punto de acumulación de K y $1 \in K$. Sea entonces f un isomorfismo entre L y K.

Queremos ver que K es nunca denso. Supongamos que $\mathrm{Int}\overline{K} = \mathrm{Int}K \neq \varnothing$. Entonces existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y $[a,b]_{\mathbb{R}} \subseteq K$. Asimismo, como L tiene saltos densos, existen $y_1, y_2 \in X$ tales que $f^{-1}(a) \leq y_1 < y_2 \leq f^{-1}(b)$ y $(y_1, y_2)_L = \varnothing$. Por lo tanto, $a \leq f(y_1) < f(y_2) \leq b$ y, como hay un salto entre y_1 y y_2, $(f(y_1), f(y_2))_{\mathbb{R}} \cap K = \varnothing$. Sin embargo, sabemos que $(f(y_1), f(y_2))_{\mathbb{R}} \subset [a,b]_{\mathbb{R}} \subset K$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $\mathrm{Int}\overline{K} = \varnothing$, esto es, K es nunca denso. □

1.4. Cadenas en $\mathscr{P}(\omega)$

Nos convendrá tener el siguiente lema disponible para cuando lidiemos con cadenas en subconjuntos de $\mathscr{P}(\omega)$ en los capítulos 2 y 4.

Lema 1.7. Toda cadena en $\mathscr{P}(\omega)$ es $\mathbb{R}$-encajable.

Demostración. Sea $\mathscr{L}$ una cadena en $\mathscr{P}(\omega)$. Sea $\chi_A : \omega \to 2$ para $A \subseteq \omega$, la función característica de A como subconjunto de ω. Definamos para $A \subseteq \omega$ la función

$$g(A) = \sum_{n \in \omega} \Big(2^{-(n+1)} \chi_A(n) \Big).$$

Recordemos que $\sum_{n\in\omega} 2^{-(n+1)} = 1$, por lo que $g\big[\mathscr{P}(\omega)\big] \subseteq [0,1]_{\mathbb{R}}$. Sean $A, B \in \mathscr{L}$ tales que $A \subset B$. Como $\mathscr{L}$ es cadena, vemos que $g(A) \leq g(B)$, ya que no existe $n \in A$ tal que $n \notin B$.

Asimismo, como $A \neq B$, tenemos que

$$\begin{aligned} g(B) &= \sum_{n\in\omega} \left(2^{-(n+1)}\chi_B(n)\right) \\ &= \sum_{n\in A} \left(2^{-(n+1)}\chi_B(n)\right) + \sum_{n\in B\setminus A} \left(2^{-(n+1)}\chi_B(n)\right). \end{aligned}$$

Como $A \subset B$, vemos que

$$g(A) = \sum_{n\in\omega} \left(2^{-(n+1)}\chi_A(n)\right) = \sum_{n\in A} \left(2^{-(n+1)}\chi_B(n)\right),$$

y que

$$N = \sum_{n\in B\setminus A} \left(2^{-(n+1)}\chi_B(n)\right) > 0.$$

Por lo que $g(B) = g(A) + N$ y $g(B) > g(A)$. Entonces vemos que $g|_{\mathscr{L}}$ es estrictamente creciente y, por lo tanto, un encaje. □

Con lo visto hasta ahora, tenemos las herramientas necesarias para poder dar una caracterización de las cadenas maximales de $\mathscr{P}(\omega)$:

Proposición 1.8. Un orden lineal infinito L es isomorfo a una cadena maximal en $\mathscr{P}(\omega)$ si y sólo si L es $\mathbb{R}$-encajable y booleano.

Demostración.

$\rightarrow$)

Sea $\mathscr{L}$ una cadena maximal en $\mathscr{P}(\omega)$. Sabemos que $\mathscr{L}$ es $\mathbb{R}$-encajable por el lema 1.7. Nos hace falta ver que tiene saltos densos y que todo subconjunto acotado tiene máximo y mínimo.

Sea $X \subset \mathscr{L}$ no vacío. Evidentemente, si $\bigcup X$ es ω o $\varnothing$, entonces $\bigcup X \in \mathscr{L}$ por la maximalidad de $\mathscr{L}$. Sea $Y \in \mathscr{L}$. Si $Y \subseteq Z$ para alguna $Z \in X$, entonces $Y \subseteq \bigcup X$. Por el contrario, si $Z \subseteq Y$ para toda $Z \in X$, entonces tenemos que $\bigcup X \subseteq Y$. Por lo tanto, $\sup_{\mathscr{L}} X = \bigcup X \in \mathscr{L}$ ya que $\bigcup X$ es comparable con todos los elementos de $\mathscr{L}$ y $\mathscr{L}$ es maximal. De manera análoga se puede probar que $\operatorname{ínf}_{\mathscr{L}} X = \bigcap X \in \mathscr{L}$, por lo que $\mathscr{L}$ es completo.

Sean $X, Y \in \mathscr{L}$ tales que $X \subset Y$. Sean $z \in Y \setminus X$ y $Z = \bigcup\{A \in [X,Y]_{\mathscr{L}} : z \notin A\}$. Evidentemente, $Z \cup \{z\} \subseteq B$ para toda $B \in (Z,Y]_{\mathscr{L}}$ y, como $\mathscr{L}$ es cadena maximal y completa, $Z \in [X,Y)_{\mathscr{L}}$ y $Z \cup \{z\} \in \mathscr{L}$. Entonces tenemos que $Z, Z \cup \{z\} \in \mathscr{L}$ y $(Z, Z \cup \{z\})_{\mathscr{L}} \neq \varnothing$, por lo que, $\mathscr{L}$ tiene saltos densos.

$\leftarrow$)

Sea $L = \langle X, < \rangle$ un orden lineal $\mathbb{R}$-encajable y booleano. Como L es $\mathbb{R}$-encajable y completo, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $X \subseteq [0,1]_{\mathbb{R}}$, $0, 1 \in X$ y que $\sup_L A = \sup_{\mathbb{R}} A$ e $\operatorname{ínf}_L A = \operatorname{ínf}_{\mathbb{R}} A$ para toda $A \subseteq X$.

Sean S^- el conjunto de todos los extremos izquierdos de los saltos de L y S^+ el de los extremos derechos. Como $X \subseteq \mathbb{R}$, X tiene a lo más una cantidad numerable de saltos, por lo que $S = S^- \cup S^+$ es a lo más numerable. Entonces podemos suponer sin pérdida de generalidad que $S \subseteq [0,1]_{\mathbb{Q}}$. Tomemos $\mathbb{Q}^* = \big\{x \in [0,1]_{\mathbb{Q}} : \forall a, b \in X \big((a,b)_L = \varnothing \Rightarrow x \notin (a,b)_{\mathbb{R}}\big)\big\}$.

Para cada $x \in X$ sea $C_x = \{y \in \mathbb{Q}^* : y < x\}$. Entonces podemos tomar $C = \{C_x : x \in X\} \cup \{\mathbb{Q}^*\}$. Nosotros queremos ver que C es una cadena maximal en $\mathscr{P}(\omega)$. Sea $B \subseteq \mathbb{Q}^*$ tal que $B \notin C$. Supongamos que $C' = C \cup \{B\}$ es una cadena en $\mathbb{Q}^*$.

Podemos ver que $C_0 = \varnothing$, por lo que $C_0 \subset B$. Sea $p = \sup\{x \in X : C_x \subset B\}$. Como L es completo, $p \in X$ y para toda $x \in C_p$ existe $y < p$ tal que $x \in C_y \subset B$, por lo que $C_p \subset B$. Sea $q = \text{ínf}\{x \in X : C_x \not\subset B\}$. Como L es completo, entonces $q \in X$ y , como C' es cadena, vemos que $q = \text{ínf}\{x \in X : B \subset C_x\}$. Por lo tanto, pueden suceder dos cosas: $C_q \subset B$ o $B \subset C_q$.

Si $C_q \subset B$, entonces $q \leq p$, por lo que $p = \sup\{x \in X : C_x \subset B\} = \text{ínf}\{x \in X : B \subset C_x\} = q$. Como $C_q \subset B$, entonces existen $a \in B$ y $b \geq q$ tales que $a \notin C_q$ y $a \notin C_b$, por lo que $B \not\subset C_b$, lo que es imposible. Por el contrario, si $B \subset C_q$, como $C_p \subset B \subset C_q$, entonces $p \neq q$ y $(p, q)_L = \varnothing$. Por la misma razón, existe $y \in B$ tal que $y \in (p, q)_{\mathbb{Q}^*}$, lo que es imposible.

Por lo tanto, $C \cup \{B\}$ no puede ser cadena. Esto es, $C \cong L$ es una cadena maximal en $\mathscr{P}(\omega)$. $\square$

1.5. Estructuras

A lo largo de este capítulo veremos lo que son las estructuras de primer orden o elementales, varias de sus propiedades y cómo obtener límites en ciertas familias de éstas. Como la teoría de modelos va más allá del enfoque de este trabajo, solamente presentaremos las proposiciones y los teoremas pertinentes. Todas las demostraciones se pueden encontrar en [Hod97].

Definición. Un *lenguaje* o *signatura* L es el conjunto

$$L = \langle S_{\text{func}}, S_{\text{rel}}, \text{ar}\rangle,$$

donde S_{func} y S_{rel} son conjuntos ajenos de símbolos llamados *símbolos funcionales* y *símbolos relacionales*, respectivamente y $\text{ar} : S_{\text{func}} \cup S_{\text{rel}} \to \omega$ le asigna una aridad a cada símbolo de función o de relación. Diremos que L es numerable si $S_{\text{func}} \cup S_{\text{rel}}$ es a lo más numerable.

Una *estructura* es un conjunto $S = \langle X, L, I\rangle$, donde X es un conjunto al que llamaremos el dominio de S y denotaremos por $\text{dom}(S)$, L un lenguaje e I una función de interpretación que a cada símbolo de L le asigna una función o relación sobre X de la aridad correspondiente. A la estructura S la llamamos una *L-estructura* y, si se es claro a partir del contexto, únicamente escribiremos $\langle X, L\rangle$.

Otras nociones útiles concerinentes a estructuras que usaremos son las siguientes:

Definición. Sea S una L-estructura.

- S es una *estructura relacional* si y sólo si L no contiene símbolos funcionales de aridad mayor o igual a 1.

- S es una *estructura algebraica* si y sólo si L no contiene símbolos relacionales.

- Una L-estructura E es *subestructura* de S si y sólo si

$$\mathrm{dom}(E) \subseteq \mathrm{dom}(S)$$

  y todas las relaciones y funciones de E son las relaciones y funciones de S restringidas a $\mathrm{dom}(E)$.

- Una subestructura E de S es *finitamente generada* si y sólo si existe un subconjunto finito $x \subseteq \mathrm{dom}(S)$ tal que E es la menor subestructura de S tal que $x \subseteq \mathrm{dom}(E)$. Evidentemente, una subestructura relacional es finitamente generada si y sólo si su dominio es finito.

El concepto de isomorfismo se puede extender a las estructuras de la siguiente manera:

Definición. Sean S y T L-estructuras.

- Sea $f : \mathrm{dom}(S) \to \mathrm{dom}(T)$. Decimos que f es un *encaje* si es inyectiva y mantiene todas las funciones y relaciones de L. Un ejemplo sería la función identidad en $\mathbb{R}$ restringida a $\mathbb{Q}$.

- Un *isomorfismo* es un encaje biyectivo tal que su función inversa también sea encaje. Si S y T son isomorfas, lo denotamos por $S \cong T$.

- Un *automorfismo* de S es un isomorfismo de S sobre sí misma.

- $\mathbb{P}(S)$ es el conjunto de todas las subestructuras E de S tales que $E \cong S$.

Veremos más adelante que se pueden definir límites para ciertas familias de estructuras. Uno de los requerimientos para que exista el límite de una familia de estructuras es que tenga las siguientes propiedades:

Definición. Sea K una familia de L-estructuras. Decimos que K tiene la propiedad

- *hereditaria* si para $A \in K$ y B subestructura de A se cumple que $B \in K$,

- de *encaje conjunto* si para $A, B \in K$ existe $C \in K$ tal que A y B son encajables en C, o

- de *amalgamación* si para $A, B, C \in K$, $e : A \to B$ y $f : A \to C$ tales que e y f son encajes, existen $D \in K$ y encajes $g : B \to D$ y $h : C \to D$ tales que $ge = hf$.

Para poder hablar de límites de estructuras nos será de utilidad ver lo que es la edad de una estructura dada.

Definición. Sean D una L-estructura y K el conjunto de las subestructuras finitamente generadas por D. Una familia de L-estructuras Γ es una *edad* de D si y sólo si para toda $a \in \Gamma$ existe $b \in K$ tales que $a \cong b$ y, para toda $b \in \Gamma$, existe $a \in K$ tal que $a \cong b$.

Podemos ver que ya de entrada las edades tienen dos de las propiedades necesarias para que exista su límite:

Proposición 1.9. Si una familia Γ es la edad de una L-estructura, entonces tiene las propiedades hereditaria y de encaje conjunto. $\square$

Otra característica notable que pueden tener las estructuras es la siguiente:

Definición. Una estructura D es *ultrahomogénea* si y sólo si todo isomorfismo entre subestructuras finitamente generadas de D se puede extender a un automorfismo de D.

Teniendo todas estas definiciones previas, podemos ver que los límites de ciertas familias de estructuras existen, así como ciertas características del límite.

Teorema 1.10. Sean L un lenguaje a lo más numerable y K una familia a lo más numerable de L-estructuras. Si K tiene las propiedades hereditaria, de encaje conjunto y de amalgamación, entonces existe una L-estructura única salvo por isomorfismos tal que:

- D es a lo más numerable,
- K es una edad de D, y
- D es ultrahomogénea.

A la estructura D la llamamos el *límite de Fraïssé* de K.

Como fue mencionado previamente, no se dará la demostración de este teorema, sin embargo, más adelante se verán un par de ejemplos de este tipo de estructuras.

1.6. $\mathbb{Q}$ como límite de Fraïssé

En esta sección veremos que $\mathbb{Q}$ es un límite de Fraïssé, mientras que en el capítulo 3 veremos que la gráfica random también lo es.

Antes que nada, recordaremos unas cuantas propiedades importantes de $\mathbb{Q}$, comenzando con cómo extender subórdenes de éste.

Lema 1.11. Sean $L = \langle X, < \rangle$ un orden lineal a lo más numerable, $Y \subset X$ finito y $f : Y \to \mathbb{Q}$ un encaje. Entonces para cada $z \in X \setminus Y$ existe una función parcial inyectiva que extiende a f tal que $\mathrm{dom}(f') = \mathrm{dom}(f) \cup \{z\}$.

Demostración. Sean $L = \langle X, < \rangle$ un orden lineal a lo más numerable, $Y \subset X$ finito y $f : Y \to \mathbb{Q}$ un encaje. Sean $z \in X \setminus Y$, $Y' = Y \cup \{z\}$, $\mathfrak{A} = \{a \in Y : a < z\}$ y $\mathfrak{B} = \{b \in Y : z < b\}$. Vemos tres casos:

- Si $\mathfrak{A} = \varnothing$, entonces $z = \text{ínf}_{Y'} Y'$, por lo que podemos tomar $y = \text{ínf}_{\mathbb{Q}} f[Y] - 1$.

- Si $\mathfrak{B} = \varnothing$, entonces $z = \sup_{Y'} Y'$, por lo que podemos tomar $y = \sup_{\mathbb{Q}} f[Y] + 1$.

- Si $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \neq \varnothing$, entonces $\sup_{Y'} \mathfrak{A}$ e $\text{ínf}_{Y'} \mathfrak{B}$ existen y $\sup_{Y'} \mathfrak{A} \neq \text{ínf}_{Y'} \mathfrak{B}$, por lo que existe $y \in (\sup_{\mathbb{Q}} f[\mathfrak{A}], \text{ínf}_{\mathbb{Q}} f[\mathfrak{B}])_{\mathbb{Q}}$.

Entonces vemos que $f' = f \cup \{\langle z, y\rangle\}$ es una función inyectiva que mantiene el orden. Esto es, f' es un encaje de $Y' = Y \cup \{z\}$ en $\mathbb{Q}$. □

Ahora vemos una de las propiedades más conocidas de $\mathbb{Q}$:

Proposición 1.12. Todo orden lineal a lo más numerable se puede encajar en $\mathbb{Q}$.

Demostración. Sea $L = \langle X, <\rangle$ un orden lineal a lo más numerable. Veamos dos casos:

Caso 1: Cuando X es finito.

Si $|X| = 1$, entonces L se puede encajar de manera trivial en $\mathbb{Q}$. Supongamos que L se puede encajar en $\mathbb{Q}$ para $|X| = n$. Queremos ver qué sucede cuando $|X| = n + 1$. Sean $X' \subset X$ tal que $|X'| = n$ y $x \in X \setminus X'$. Como $|X'| = n$, existe un encaje $f : X' \to \mathbb{Q}$. El lema 1.11 nos dice que existe un encaje $f' : X' \cup \{x\} \to \mathbb{Q}$ tal que f' extiende a f. Evidentemente, f' es un encaje de L en $\mathbb{Q}$. Por lo tanto, todo orden lineal finito se puede encajar en $\mathbb{Q}$.

Caso 2: Cuando X es numerable.

Como X es numerable, se puede indexar como $\{x_0, ..., x_n, ...\}$. Sean $X_n = \{x_m : m < n\}$ para toda $n \in \omega$. Por el caso anterior vemos que para toda $n \in \omega$ existe un encaje $f_n : X_n \to \mathbb{Q}$ tal que f_{n+1} extiende a f_n. Por lo tanto, $f = \bigcup_{n\in\omega} f_n$ es la unión de funciones parciales compatibles, por lo que f es función y, como las f_n son encajes, entonces f también es un encaje. Ahora bien, para toda $n \in \omega$ tenemos que $\mathrm{dom}(f_n) \subset X$ y $y_n \in \mathrm{dom}(f_n)$, por lo que $\mathrm{dom}(f) = X$. Esto es, f es el encaje que buscábamos. Por lo tanto, todo orden lineal numerable se puede encajar en $\mathbb{Q}$. $\square$

Otra característica importante de $\mathbb{Q}$ es que es ultrahomogénea. Este hecho lo probaremos en la siguente proposición.

Proposición 1.13. $\mathbb{Q}$ es ultrahomogénea.

Demostración. Sean $X, Y \subset \mathbb{Q}$ finitos tales que existe un isomorfismo $f : X \to Y$. Sean $A = \{a_0, ..., a_n, ...\} = \mathbb{Q} \setminus X$ y $B = \{b_0, ..., b_n, ...\} = \mathbb{Q} \setminus Y$. Tomemos $f_0 = f$. Si ya está definida f_n para $n \in \omega$, definimos f_{n+1} de la siguiente manera:

Sean x_n el elemento con el menor índice de $A \setminus \mathrm{dom}(f_n)$ y $X_{n+1} = \mathrm{dom}(f_n) \cup \{x_n\}$. Entonces el lema 1.11 nos dice que existe un encaje g_n de X_{n+1} en $\mathbb{Q}$ que extiende a f_n. Sean y_n el elemento con el menor índice de $B \setminus \mathrm{im}(g_n)$ y $Y_{n+1} = \mathrm{im}(g_n) \cup \{y_n\}$. Nuevamente, el lema 1.11 nos dice que existe un encaje h_n de X_{n+1} en $\mathbb{Q}$ que extiende g_n^{-1}. Entonces definimos $f_{n+1} = h_n^{-1}$.

Sea $f' = \bigcup_{n\in\omega} f_n$. Como f' es la unión de encajes compatibles, $X = \mathrm{dom}(f_0)$ y para toda $n \in \omega$ se cumple que $a_n \in \mathrm{dom}(f_{n+1})$, vemos que f' es un encaje cuyo dominio es $\mathbb{Q}$. Asimismo, como $Y = \mathrm{im}(f_0)$ y para toda $n \in \omega$ se cumple que $b_n \in \mathrm{im}(f_{n+1})$, entonces f' es biyectiva sobre $\mathbb{Q}$.

Por lo tanto, f' es el automorfismo que buscábamos. $\square$

Finalmente, veremos que $\mathbb{Q}$ es un límite de Fraïssé.

Teorema 1.14. $\mathbb{Q}$ es el límite de Fraïssé de los órdenes lineales finitos.

Demostración. En la proposición 1.12 vimos que todo orden lineal finito se puede encajar en $\mathbb{Q}$, por lo que se puede generar a cualquier orden lineal finito a partir de $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$. Esto es, $\Gamma = \{\langle X, < \rangle : X \in [\mathbb{Q}]^{<\omega}\}$ es una edad de $\mathbb{Q}$. Ahora bien, como Γ es una edad, tiene las propiedades hereditaria y de encaje conjunto. Nosotros queremos ver que también tiene la propiedad de amalgamación.

Sean $A, B, C \in [\mathbb{Q}]^{<\omega}$, $e : A \to B$ y $f : A \to C$ tales que e y f son encajes. Evidentemente, $\langle A, < \rangle, \langle B, < \rangle, \langle C, < \rangle \in \Gamma$. Sea $Y = C \setminus f[A]$. Haremos inducción sobre $|Y|$.

Si $Y = \varnothing$, vemos que si $g : B \to B$ es la identidad y $h = ef^{-1}$, entonces para toda $a \in A$ se cumple que $ge(a) = e(a)$ y $hf(a) = ef^{-1}f(a) = e(a)$. Por lo tanto, $ge = hf$.

Supongamos que para $|Y| = n$ se cumple que existen encajes g, h tales que $ge = hf$. Veamos el caso en que $|Y| = n + 1$. Sean $x \in Y$ y $Y' = Y \setminus \{x\}$. Entonces existen $D \in [\mathbb{Q}]^{<\omega}$, $g : B \to D$ y $h : C \setminus \{x\} \to D$ encajes tales que $ge = hf$. Sean $\mathfrak{A} = \{a \in C : a < x\}$ y $\mathfrak{B} = \{b \in C : x < b\}$. Vemos entonces los siguientes casos:

- Si $\mathfrak{A} = \varnothing$, entonces $x = \inf_{\mathbb{Q}} C < \min_{\mathbb{Q}}(C \setminus \{x\})$, por lo que existe $y \in \big(-\infty, \min_{\mathbb{Q}}(C \setminus \{x\})\big)_{\mathbb{Q}} \setminus g[B]$. Sabemos que y

existe debido a que $\mathbb{Q}$ es numerable y sin extremos y B es finito.

- Si $\mathfrak{B} = \varnothing$, entonces $x = \sup_{\mathbb{Q}} C > \text{máx}_{\mathbb{Q}}(C \setminus \{x\})$, por lo que existe $y \in \big(\text{máx}_{\mathbb{Q}}(C \setminus \{x\}), \infty\big)_{\mathbb{Q}} \setminus g[B]$. Sabemos que y existe debido a que $\mathbb{Q}$ es numerable y sin extremos y B es finito.

- Si $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \neq \varnothing$, vemos que $\text{máx}_{\mathbb{Q}} \mathfrak{A}$ y $\text{mín}_{\mathbb{Q}} \mathfrak{B}$ existen y que $\text{máx}_{\mathbb{Q}} \mathfrak{A} < \text{mín}_{\mathbb{Q}} \mathfrak{B}$. Como $\mathbb{Q}$ es denso y B es finito, existe $y \in \big(\text{máx}_{\mathbb{Q}} h[\mathfrak{A}], \text{mín}_{\mathbb{Q}} h[\mathfrak{B}]\big)_{\mathbb{Q}} \setminus g[B]$.

Sean $D' = D \cup \{y\}$ y $h' = h \cup \{\langle x, y\rangle\}$. Entonces g y h' son encajes en D' tales que $ge = h'f$. Por lo tanto, Γ tiene la propiedad de amalgamación.

Entonces vemos que:

- el lenguaje de los órdenes lineales es numerable,

- Γ es un conjunto numerable de órdenes lineales finitamente generados con las propiedades hereditaria, de encaje conjunto y de amalgamación,

- $\mathbb{Q}$ es numerable,

- Γ es la edad de $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$, y

- $\mathbb{Q}$ es ultrahomogénea.

Por lo tanto, $\mathbb{Q}$ es el límite de Fraïssé de los órdenes lineales finitos. $\square$

Capítulo 2

Familias Positivas

Comencemos definiendo lo que es una familia positiva, para después ver cómo se comportan los supremos y los ínfimos al considerarlas como orden parcial.

Definición. Sea X un conjunto numerable. Una familia $\mathcal{P} \subseteq \mathscr{P}(X)$ es una *familia positiva* en X si y sólo si

1. $\varnothing \notin \mathcal{P}$,
2. si $A \in \mathcal{P}$ y $A \subseteq B \subseteq X$, entonces $B \in \mathcal{P}$,
3. si $A \in \mathcal{P}$ y $F \in [X]^{<\omega}$, entonces $A \setminus F \in \mathcal{P}$, y
4. existe $A \in \mathcal{P}$ tal que $|X \setminus A| = \aleph_0$.

Evidentemente, toda familia positiva $\mathcal{P}$ es no vacía y como todo elemento de $\mathcal{P}$ es subconjunto de X, entonces $X \in \mathcal{P}$. Más aún, la siguiente proposición nos indica que todos los elementos de

$\mathcal{P}$ son infinitos y que todo subconjunto cofinito de X es elemento de $\mathcal{P}$.

Proposición 2.1. Sean X un conjunto numerable y $\mathcal{P} \subseteq \mathscr{P}(X)$ una familia positiva. Entonces,

$$\mathscr{F}_{\text{Fréchet}} \subset \mathcal{P} \subseteq [X]^{\omega}$$

Demostración. Primero, supongamos que existe $x \in \mathcal{P}$ finito. Entonces tenemos que $x \setminus x = \varnothing \in \mathcal{P}$, lo que contradice la propiedad 1 de las familias positivas. Por lo tanto, $\mathcal{P} \subseteq [X]^{<\omega}$. Esto es, $\mathcal{P} \subseteq [X]^{\omega}$.

Por otro lado, sabemos que como $\mathcal{P}$ es una familia positiva, entonces $X \in \mathcal{P}$ y para todo $F \subset X$ finito se cumple que $X \setminus F \in \mathcal{P}$, por la definición de familias positivas. Asimismo, sabemos que todo elemento de $\mathscr{F}_{\text{Fréchet}}$ es de la forma $X \setminus F$ para algún $F \subset X$ finito, por lo que $\mathscr{F}_{\text{Fréchet}} \subseteq \mathcal{P}$. Ahora bien, sabemos que existe $A \in \mathcal{P}$ tal que $X \setminus A \in \mathcal{P}$. A no es cofinito y, por ende, $\mathcal{P} \neq \mathscr{F}_{\text{Fréchet}}$. □

Toda familia positiva $\mathcal{P}$ es subconjunto de $\mathscr{P}(X)$, por lo que podemos verla como orden parcial bajo la contención. Sin embargo, hay subconjuntos no vacíos de $\mathcal{P}$ que no tienen ínfimo en $\mathcal{P}$. Como ejemplo, tenemos a $\mathscr{F}_{\text{Fréchet}}$, cuya intersección es vacía.

Ahora bien, si consideramos a $\langle \mathcal{P} \cup \{\varnothing\}, \subset \rangle$, podemos definir al supremo y al ínfimo de la siguiente manera:

- $\sup S = \bigcup S$,

- Si $\bigcap S \in \mathcal{P} \cup \{\varnothing\}$, entonces $\inf S = \bigcap S$, y
- Si $\bigcap S \notin \mathcal{P} \cup \{\varnothing\}$, entonces $\inf S = \varnothing$.

Entonces podemos ver que siempre hay supremos e ínfimos de subconjuntos no vacíos:

Proposición 2.2. Sean X un conjunto numerable y $\mathcal{P} \subseteq \mathscr{P}(X)$ una familia positiva. Entonces $\langle \mathcal{P} \cup \{\varnothing\}, \subset \rangle$ es una retícula completa.

Demostración. Debido a como fueron definidos los ínfimos en $\mathcal{P} \cup \{\varnothing\}$, vemos que todo subconjunto no vacío tiene ínfimo.

Por otro lado, sabemos que un orden parcial es completo si y sólo si todo subconjunto no vacío tiene supremo. Sea $S \subseteq \mathcal{P} \cup \{\varnothing\}$ no vacío. Vemos que $s \subseteq \sup S$, por lo que $\sup S \in \mathcal{P}$.

Si $\bigcap S \in \mathcal{P}$, entonces lo que definimos como ínfimo es, en efecto, la máxima cota inferior. Por otro lado, si $\bigcap S \notin \mathcal{P}$ vemos que, en caso de existir una cota inferior $Z \in \mathcal{P}$, entonces $Z \subseteq Y$ para toda $Y \in S$, por lo que $Z \subseteq \bigcap S$. Entonces, por la propiedad 3 de las familias positivas tendríamos que $\bigcap S \in \mathcal{P}$, lo que es imposible. Por lo tanto, el ínfimo que definimos es, en efecto, la máxima cota inferior y $\varnothing \cup \mathcal{P}$ es una retícula completa. $\square$

2.1. Cadenas Maximales en Familias Positivas de ω

Ahora presentaremos el teorema principal de este capítulo, el cual caracteriza las cadenas maximales de familias positivas en ω:

Teorema 2.3. Sean $\mathcal{P} \subset \mathscr{P}(\omega)$ una familia positiva y $L = \langle X, < \rangle$ un orden lineal. Entonces los siguientes son equivalentes:

a) L es isomorfo a una cadena maximal en $\langle \mathcal{P} \cup \{\varnothing\}, \subset \rangle$,

b) L es un orden lineal booleano $\mathbb{R}$-encajable tal que 0_L no tiene sucesor, y

c) L es isomorfo a un conjunto $K \subset [0,1]_{\mathbb{R}}$ compacto nunca denso tal que 0 es punto de acumulación de K y $1 \in K$.

Con el fin de poder probar con mayor facilidad este teorema, vamos a separarlo en varios lemas auxiliares que demostraremos más adelante. Mientras, podemos ver fácilmente que si $\mathcal{P}$ es una familia positiva, entonces:

- Una cadena $\mathcal{L}$ de $\mathcal{P} \cup \{\varnothing\}$ es maximal si y sólo si $\mathcal{L} \setminus \{\varnothing\}$ es cadena maximal de $\mathcal{P}$.

- Una cadena $\mathcal{L}$ de $\mathcal{P}$ es maximal si y sólo si $\mathcal{L} \cup \{\varnothing\}$ es cadena maximal de $\mathcal{P} \cup \{\varnothing\}$.

Debido a esto, el tipo de orden de las cadenas maximales de familias positivas de ω es $K \setminus \{0\}$, donde $K \subset [0,1]_{\mathbb{R}}$ es compacto y nunca denso tal que 0 es punto de acumulación de K y $1 \in K$.

La implicación b)$\rightarrow$c) fue demostrada en la proposición 1.6, ya que no involucra a las familias positivas de manera explícita.

El siguiente lema que veremos prueba la implicación a)$\rightarrow$b) y nos indica de qué forma son las cadenas maximales en las familias positivas. Nótese que éste aún no es una caracterización, ya que la implicación va en un sólo sentido.

Lema 2.4. Sean $\mathcal{P} \subset \mathscr{P}(\omega)$ una familia positiva y $\mathscr{L}$ una cadena maximal en $\langle \mathcal{P} \cup \{\varnothing\}, \subset \rangle$. Entonces $\mathscr{L}$ es un orden lineal booleano $\mathbb{R}$-encajable tal que $\varnothing$ no tiene sucesor.

Demostración. Sean $\mathcal{P}$ una familia positiva en ω y $\mathscr{L}$ una cadena maximal en $\langle \mathcal{P} \cup \{\varnothing\}, \subset \rangle$. Como $\varnothing$ y ω son el mínimo y el máximo de $\mathcal{P} \cup \{\varnothing\}$, respectivamente, sabemos que $\varnothing, \omega \in \mathscr{L}$ ya que es cadena maximal. Asimismo, como $\mathscr{L}$ es cadena en $\mathcal{P} \cup \{\varnothing\} \subset \mathscr{P}(\omega)$, sabemos que $\mathscr{L}$ es $\mathbb{R}$-encajable.

Primero veamos que $\varnothing$ no tiene sucesor.
Supongamos que $\varnothing$ tiene un sucesor S en $\mathscr{L}$. Como $S \neq \varnothing$, tenemos que $S \in \mathcal{P}$, por lo que la porposición 2.1 nos dice que S es infinito. Por lo tanto, para todo $s \subset S$ finito se cumple que $S \setminus s \neq \varnothing$ y que $S \setminus s \in \mathcal{P}$ ya que $\mathcal{P}$ es familia positiva. Pero entonces $\mathscr{L} \cup (S \setminus s)$ es una cadena en $\mathcal{P} \cup \{\varnothing\}$ que contiene propiamente a $\mathscr{L}$, lo que es imposible ya que $\mathscr{L}$ es cadena maximal. Por lo tanto, $\varnothing$ no tiene sucesor en $\mathscr{L}$.

Ahora veamos que $\mathscr{L}$ es completo.
Sea $S \subseteq \mathscr{L}$. Queremos ver que $\sup_{\mathscr{L}} S$ existe. Sabemos por la proposición 2.2 que $\mathcal{P} \cup \{\varnothing\}$ es una retícula completa, por lo que $\sup_{\mathcal{P}\cup\{\varnothing\}} S = \bigcup S$ está en $\mathcal{P} \cup \{\varnothing\}$. Entonces para toda $A \in \mathscr{L}$ se cumple que:

- Si $A \subseteq B$ para alguna $B \in S$, entonces $A \subseteq \bigcup S$.
- Si $B \subseteq A$ para toda $B \in S$, entonces $\bigcup S \subseteq A$.
- Los dos casos anteriores son los únicos debido a que A y B siempre con comparables ya que $S \subseteq \mathscr{L}$ y $\mathscr{L}$ es cadena.

Esto es, $\bigcup S$ es comparable con todos los elementos de $\mathscr{L}$, por lo que $\mathscr{L} \cup \{\bigcup S\}$ es una cadena en $\mathcal{P} \cup \{\varnothing\}$ que contiene a $\mathscr{L}$. Como $\mathscr{L}$ es cadena maximal, $\sup_{\mathscr{L}} S = \bigcup S \in \mathscr{L}$. De manera análoga se ve que $\inf_{\mathcal{P}\cup\{\varnothing\}} S = \inf_{\mathscr{L}} S = \bigcap S \in \mathscr{L}$ cuando $\inf_{\mathcal{P}\cup\{\varnothing\}} S \in \mathcal{P}$. Cuando $\inf_{\mathcal{P}\cup\{\varnothing\}} S = \varnothing$, sólo basta con recordar que S no puede tener cotas inferiores en $\mathcal{P}$, por lo que tampoco puede tenerlas en $\mathscr{L}$.

Finalmente, veamos que $\mathscr{L}$ tiene saltos densos.
Sean $A, B \in \mathscr{L}$ tales que $A \subset B$. Como $\varnothing$ es no aislado en $\mathscr{L}$, existe $A' \in \mathscr{L} \setminus \{\varnothing\}$ tal que $A \subseteq A' \subset B$ Sean $x \in B \setminus A'$, $\mathfrak{A} = \{C \in \mathscr{L} : x \notin C\}$ y $\mathfrak{B} = \{C \in \mathscr{L} : x \in C\}$. Como $x \in B$ y $x \notin A$, vemos que $A' \in \mathfrak{A}$ y $B \in \mathfrak{B}$. Asimismo, como todos los elementos de $\mathscr{L}$ son comparables entre sí, entonces $\mathfrak{A} \triangleleft B \in \mathfrak{B}$, por lo que $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$ es una cortadura de $\mathscr{L}$. Como $\mathscr{L}$ es un orden lineal completo, sabemos que $\sup \mathfrak{A} = \bigcup \mathfrak{A} \in \mathscr{L}$ y que

$A' \subseteq \bigcap \mathfrak{A} \cup \{x\} \subseteq \bigcap \mathfrak{B}$. Ahora bien, como $\mathcal{P}$ es familia positiva, $\mathscr{L}$ es cadena maximal y $\bigcap \mathfrak{A} \cup \{x\}$ es comparable con todos los elementos de $\mathfrak{A}$ y de $\mathfrak{B}$, tenemos que $\bigcap \mathfrak{A} \cup \{x\} \in \mathscr{L}$. Por lo tanto vemos que $\varnothing = (\bigcap \mathfrak{A}, \bigcap \mathfrak{A} \cup \{x\})_{\mathscr{L}} \subseteq [A', B]_{\mathscr{L}} \subseteq [A, B]_{\mathscr{L}}$, por lo que $\mathscr{L}$ tiene saltos densos.

Esto es, $\mathscr{L}$ es un orden lineal booleano $\mathbb{R}$-encajable tal que $\varnothing$ no tiene sucesor. $\square$

Finalmente, este lema nos dará la implicación que nos hacía falta para completar el teorema 2.3:

Lema 2.5. Sean $\mathcal{P} \subset \mathscr{P}(\omega)$ una familia positiva y $K \subset [0,1]_{\mathbb{R}}$ un conjunto compacto nunca denso tal que 0 es punto de acumulación de K y $1 \in K$. Entonces K es isomorfo a una cadena maximal en $\langle \mathcal{P} \cup \{\varnothing\}, \subset \rangle$.

Demostración. Sea $K \subseteq [0,1]_{\mathbb{R}}$ compacto nunca denso tal que $1 \in K$ y 0 es punto de acumulación de K. Como K es cerrado y $0, 1 \in K$, entonces $[0,1]_{\mathbb{R}} \setminus K = (0,1)_{\mathbb{R}} \setminus K$ es abierto, por lo que existe una representación única de $[0,1]_{\mathbb{R}} \setminus K$ como unión de intervalos abiertos ajenos. Esto es, $[0,1]_{\mathbb{R}} \setminus K = \bigcup_{i \in I} (a_i, b_i)_{\mathbb{R}}$ tal que I es un conjunto de índices y para $i, j \in I$ distintos se cumple que $(a_i, b_i)_{\mathbb{R}} \cap (a_j, b_j)_{\mathbb{R}} = \varnothing$. Sabemos que I es a lo más numerable debido a que K es un subconjunto de $\mathbb{R}$. Como K tiene un punto de acumulación, entonces es infinito y, como K es nunca denso, entonces I también es infinito. Por lo tanto, I es numerable.

Queremos ver que $a_i \in K$ para toda $i \in I$. Supongamos lo contrario: que existe $i \in I$ tal que $a_i \notin K$. Entonces existe $j \in$

I tal que $a_i \in (a_j, b_j)_{\mathbb{R}}$, lo que es imposible ya que $(a_i, b_i)_{\mathbb{R}} \cap (a_j, b_j)_{\mathbb{R}} = \varnothing$. Por lo tanto, $a_i \in K$ para toda $i \in I$. De manera análoga se puede probar que $b_i \in K$ para toda $i \in I$.

Para demostrar este lema, haremos uso de una sucesión $N = \langle i_n : n \in \omega \rangle$ en I y una biyección $k : I \to \omega$ tales que la sucesión a_{i_n} sea estrictamente decreciente y $k[N] \in \mathcal{P}$, para construir una función $D : K \to \mathscr{P}(\omega)$ tal que:

- $D(x) \in \mathcal{P} \cup \{\varnothing\}$ para toda $x \in K$,
- Para cualesquiera $x, y \in K$, si $x < y$, entonces $D(x) \subset D(y)$, y
- $D[K]$ es una cadena maximal en $\mathcal{P} \cup \{\varnothing\}$.

Construiremos la sucesión N en I por recursión.
Sea i_0 un elemento cualquiera de I. Supongamos que i_n está definido para alguna $n \in \omega$. Como 0 es punto de acumulación de K y K es compacto, tenemos que $0 \in K$ y $0 < \min\{a_{i_n}, (n+1)^{-1}\}$. Sea $x_n \in (0, \min\{a_{i_n}, (n+1)^{-1}\})_{\mathbb{R}} \setminus K$. Como $x_n \notin K$, existe $i_{n+1} \in I$ tal que $x_n \in (a_{i_{n+1}}, b_{i_{n+1}})_{\mathbb{R}}$, por lo que $a_{i_{n+1}} < \min\{a_{i_n}, (n+1)^{-1}\}$. Entonces vemos que $N = \langle i_n : n \in \omega \rangle$ es una sucesión en I tal que a_{i_n} es estrictamente decreciente.

Ahora construiremos la biyección k.
Nosotros sabemos que $I \setminus N$ es a lo más numerable debido a que tanto I como N son numerables. Si $I \setminus N$ es finito, sean $G \subset \omega$ tal que $|I \setminus N| = |G|$ y $F = \omega \setminus G$. Como sabemos que

$\mathscr{F}_{\text{Fréchet}} \subset \mathcal{P}$ por la proposición 2.1, vemos que $F \in \mathcal{P}$. Por otro lado, si $I \setminus N$ es numerable, entonces sabemos que existe $F \in \mathcal{P}$ tal que $\omega \setminus F$ es numerable ya que $\mathcal{P}$ es una familia positiva. Sea entonces $G = \omega \setminus F$, por lo que $|I \setminus N| = |G|$.

Como $F \in \mathcal{P}$, entonces sabemos que F es numerable por la proposición 2.1, por lo que existe $k_0 : N \to F$ biyectiva. De igual manera, existe $k_1 : I \setminus N \to G$ biyectiva. Como $\langle F, G \rangle$ es partición de ω, tenemos que $k = k_0 \cup k_1$ es una función biyectiva de I en ω tal que $k[N] \in \mathcal{P}$.

Ahora definimos la función $D : K \to \mathscr{P}(\omega)$ como

$$D(x) = \{k(i) : i \in I \wedge b_i \leq x\}$$

Veamos que $D(x) \in \mathcal{P} \cup \{\varnothing\}$ para toda $x \in K$. Como $0 < b_i$ para toda $i \in I$, tenemos que $D(0) = \varnothing$. Tomando $x \in K \setminus \{0\}$, sea $n_x \in \omega$ tal que $(n_x + 1)^{-1} < x$. Sabemos, por la definición de N, que para toda $n > n_x$ se cumple que $a_{i_n} < x$. Como $x \in K$, entonces $b_{i_n} \leq x$ y, por ende, $k(i_n) \in D(x)$. Sea $F_x = \{k(i_n) : n_x \leq n\} \subseteq D(x)$. No es difícil ver que $F_x = F \setminus \{k(i_n) : n < n_x\}$. Esto es, F_x es cofinito con respecto a F, por lo que $F_x \in \mathcal{P}$ y, como $F_x \subseteq D(x)$, entonces $D(x) \in \mathcal{P}$.

Sean $x, y \in K$ tales que $x < y$. Sabemos para toda $i \in I$ que si $b_i \leq x$, entonces $b_i \leq y$, por lo que $D(x) \subseteq D(y)$ por la definición de D. Solo nos resta ver que $D(x) \neq D(y)$. Como K es denso en ningún lugar, existen $z \in \mathbb{R} \setminus K$ e $i \in I$ tales que $z \in (a_i, b_i)_{\mathbb{R}}$ y $x < z < y$. Por lo tanto, como $x, y \in K$, entonces $x \leq a_i < b_i \leq y$, por lo que $k(i) \in D(y)$ pero $k(i) \notin D(x)$. Esto es, $D(x) \neq D(y)$.

Finalmente, veremos que $D[K]$ es una cadena maximal en $\mathcal{P} \cup \{\varnothing\}$. Como $D[K] \subseteq \mathcal{P} \cup \{\varnothing\}$ y D es una función estrictamente creciente, entonces $D[K]$ es una cadena en $\mathcal{P} \cup \{\varnothing\}$. Sabemos que $\varnothing, \omega \in D[K]$, ya que $D(0) = \varnothing$ y $D(1) = \omega$.

Supongamos que $D[K]$ no es maximal. Sea $A \in \mathcal{P} \setminus D[K]$ tal que $D[K] \cup \{A\}$ es una cadena en $\mathcal{P} \cup \{\varnothing\}$. Sean $\mathfrak{A} = \{x \in K : D(x) \subset A\}$ y $\mathfrak{B} = \{x \in K : A \subset D(x)\}$. Como todos los elementos de $D[K] \cup \{A\}$ son comparables entre sí, $\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \rangle$ es una partición de K. Sean $a = \sup_{\mathbb{R}} \mathfrak{A}$ y $b = \inf_{\mathbb{R}} \mathfrak{B}$. Entonces $a \in \overline{\mathfrak{A}} \subseteq K$ y $b \in \overline{\mathfrak{B}} \subseteq K$, por lo que $a, b \in K$. Lo que queremos ver es que $a \in \mathfrak{A}$ y que $b \in \mathfrak{B}$.

Veamos que $D(a) \subset A$ y que $a \in \mathfrak{A}$. Como a es el supremo de $\mathfrak{A}$, tenemos que $D(x) \subset D(a)$ para toda $x \in \mathfrak{A}$, por lo que $\bigcup_{x \in \mathfrak{A}} D(x) \subseteq D(a)$. Sea $i \in I$ tal que $k(i) \in D(a)$, por lo que $b_i \leq a$. Si $b_i < a$, entonces $b_i \in \mathfrak{A}$ y $k(i) \in D(b_i)$. Por otra parte, si $b_i = a$, entonces $b_i \in \mathfrak{A}$ y $k(i) \in D(b_i)$, ya que de lo contrario tendríamos que $a_i \notin \mathfrak{A}$, lo que es imposible. Por lo tanto, $D(a) = \bigcup_{x \in \mathfrak{A}} D(x)$. Ahora bien, nosotros sabemos que $D(x) \subset A$ para toda $x \in \mathfrak{A}$ y $A \notin D[K]$, por lo que $\bigcup_{x \in \mathfrak{A}} D(x) = D(a) \subset A$ y, por ende, $a \in \mathfrak{A}$.

Veamos que $A \subset D(b)$ y que $b \in \mathfrak{B}$. Como b es el ínfimo de $\mathfrak{B}$, tenemos que $D(b) \subset D(x)$ para toda $x \in \mathfrak{B}$, por lo que $D(b) \subseteq \bigcap_{x \in \mathfrak{B}} D(x)$. Sea $i \in I$ tal que $k(i) \in D(x)$ para toda $x \in \mathfrak{B}$. Entonces $b_i \leq x$ para toda $x \in \mathfrak{B}$, por lo que $b_i \leq b$ y $k(i) \in D(b)$. Por lo tanto, $D(b) = \bigcap_{x \in \mathfrak{B}} D(x)$. Ahora bien, nosotros sabemos que $A \subset D(x)$ para toda $x \in \mathfrak{B}$ y $A \notin D[K]$, por lo que $A \subset D(b) = \bigcap_{x \in \mathfrak{B}} D(x)$ y, por ende, $b \in \mathfrak{B}$.

Como $\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \rangle$ es una partición de K y $\sup_K \mathfrak{A} = a < b = \operatorname{ínf}_K \mathfrak{B}$, entonces $(a, b)_K = \varnothing$ y, como no hay un intervalo vacío mayor que los contenga, necesariamente existe $i \in I$ tal que $a = a_i$ y que $b = b_i$. Por lo tanto, $D(b) = D(a) \cup \{k(i)\}$. Esto es, $|D(b) \setminus D(a)| = 1$. Por otro lado, sabemos que $D(a) \subset A \subset D(b)$, por lo que necesariamente $|D(b) \setminus D(a)| \geq 2$, lo que es una contradicción.

Por lo tanto concluímos que D es una función biyectiva de K sobre una cadena maximal de $\mathcal{P} \cup \{\varnothing\}$. $\square$

Capítulo 3

La Gráfica Random

3.1. Introducción

Existen varias maneras de abordar a la gráfica random: por medio de las gráficas aleatorias, de los conjuntos hereditariamente finitos, etc. Sin embargo, la manera más eficiente de ver sus propiedades básicas es por medio de la propiedad de extensión. Entre otras cosas, esta propiedad nos permite ver que la gráfica random es única (salvo por isomorfismos) y que es ultrahomogénea.

Los primeros en tratar a la gráfica random fueron Erdös y Réyni en un artículo de 1963 mientras estudiaban gráficas aleatorias finitas. Al final de tal artículo abordan el caso numerable y prueban que existe una gráfica numerable $\mathcal{R}$ tal que las gráficas aleatorias son isomorfas a ésta casi seguramente. Sin embargo, no proveen de una construcción argumentando que si casi todas las gráficas son isomorfas a $\mathcal{R}$, entonces seguramente debe existir. Tampoco probaron su unicidad ni que tuviera la propiedad de extensión.

Por otro lado, Richard Rado mostró en 1964 que existe una gráfica numerable universal para las gráficas a lo más numerables. Aunque él sí dió una construcción y usó de manera implícta la propiedad de extensión, no la enunció de manera explícita ni probó que fuera única.

No fue hasta 1974 que Erdös y Spencer demuestran la unicidad de la gráfica random, tras lo cual afirman que este resultado "demuele la teorá de las gráficas aleatorias," aunque Peter J. Cameron afirma en [Cam15] que esto "crea la teoría de *la* gráfica aleatora numerable."

Antes de entrar de lleno al tema, recordemos que una gráfica se puede ver como un par ordenado $G = \langle X, \sigma \rangle$ donde X es un conjunto cualquiera y $\sigma \subseteq [X]^2$. Asimismo, si $\{x, y\} \in \sigma$, será denotado por $x \sim y$.

También es posible ver a las gráficas como estructuras relacionales tomando una relación simétrica y antirreflexiva. Ambas definiciones son equivalentes, tan sólo basta con ver que si $\{x, y\}$ está en la gráfica definida como en el párrafo anterior si y sólo si $\langle x, y \rangle$ y $\langle y, x \rangle$ están en la gráfica correspondiente definida como estrucutra.

3.2. La Propiedad de Extensión

Definición. Sean $G = \langle X, \sigma \rangle$ y $U, V \subseteq X$ finitos y ajenos. Diremos que $x \in X$ está *conectado correctamente* a $\langle U, V \rangle$ si y sólo si

$x \sim u$ para todo $u \in U$ y $x \nsim v$ para toda $v \in V$.

Al conjunto de los vértices de G conectados correctamente a $\langle U, V\rangle$ lo denotaremos por G_V^U.

Una manera simple de extender una gráfica finita es tomar dos subconjuntos de ésta y tomar un punto que se esté correctamente conectado a estos. Entonces podemos pedir que una gráfica tenga la propiedad de extensión si toda subgráfica finita de ésta se puede extender de todas las maneras correctas posibles. Tomando esto en cuenta, damos la siguiente definición:

Definición. Una gráfica $G = \langle X, \sigma\rangle$ tiene la *propiedad de extensión* si y sólo si para cualesquiera $U, V \subseteq X$ finitos y ajenos se cumple que $G_V^U \neq \varnothing$.

Es en este punto que podemos definir lo que es una gráfica random y la notación que usaremos para referirnos a ella.

Definición. Una *gráfica random* es una gráfica numerable con la propiedad de extensión. A este tipo de gráficas también se les suele llamar gráficas de Rado o gráficas de Erdös-Réyni y por lo general las denotaremos por $\mathcal{R}$.

A primera vista puede parecer arbitrario llamar a este tipo de gráficas "gráficas random", sin embargo, más adelante justificaremos el uso de ese nombre. Por el momento, veremos varios lemas que nos dan una idea de cómo funcionan los encajes con las gráficas con la propiedad de extensión.

Lema 3.1. Sean G_1 una gráfica a lo más numerable y G_2 una gráfica con la propiedad de extensión. Sea f un encaje de una subgráfica propia finita de G_1 en G_2. Entonces para cada $z \in G_1 \backslash \mathrm{dom}(f)$ existe un encaje f' que extiende a f tal que $dom(f') = dom(f) \cup \{z\}$.

Demostración. Sean $G_1 = \langle X, \sigma \rangle$ a lo más numerable y $G_2 = \langle Y, \rho \rangle$ una gráfica con la propiedad de extensión. Sean $X' \subset X$ finito tal que $X' = \{x_0, ..., x_n\}$ para algún $n \in \omega$, f un encaje de la subgráfica generada por X' en G_2 y $z \in X \setminus X'$ cualquiera.

Nosotros queremos ver que existe f' tal que extienda f a $X' \cup \{z\}$. Sean $U = \{x \in X' : x \sim z\}$ y $V = X' \setminus U$. Asimismo sean $U' = f[U]$, $V' = f[V]$ y $Y' = {G_2}_{V'}^{U'}$.

Sabemos que $Y' \neq \varnothing$ ya que G_2 tiene la propiedad de extensión, por lo que podemos tomar $y \in Y'$. Definimos entonces $f' = f \cup \langle z, y \rangle$. Como y no está en el rango de f, vemos que f' es un encaje que extiende f a $X' \cup \{z\}$, que es a lo que queríamos llegar.

Nótese que si Y es numerable, entonces Y' también lo es, por lo que se pueden indexar sus elementos y tomar el de menor índice. De esta manera, se evitaría usar el Axioma de Elección. $\square$

Podemos comenzar a ver los frutos del resultado anterior con esta proposición:

Proposición 3.2. Toda gráfica a lo más numerable se puede encajar en cualquier gráfica que tenga la propiedad de extensión.

Demostración. Sean $G_1 = \langle Y, \sigma \rangle$ una gráfica a lo más numerable y $G_2 = \langle X, \sigma \rangle$ una gráfica con la propiedad de extensión. Veremos dos casos:

Caso 1: Cuando G_1 es finita.
En este caso lo haremos por inducción sobre $m = |Y|$. Las gráficas que constan de un sólo vértice se pueden encajar de manera trivial en G_2. Supongamos entonces que $m \geq 2$ y que toda gráfica con n vértices se puede encajar en G_2 para $n < m$. Sea G' una subgráfica de G_1 con $m-1$ vértices. Entonces existe un encaje f de G' en G_2 el cual podemos extender a un encaje f' de G_1 en G_2 como lo hicimos en el lema 3.1. Por lo tanto, toda gráfica finita se puede encajar en G_2.

Caso 2: Cuando G_1 es numerable.
Como Y es numerable, se puede indexar como $Y = \{y_0, ..., y_n, ...\}$. Sean $x_0 \in X$ y $f_0 = \{\langle y_0, x_0 \rangle\}$. Evidentemente, f_0 es una función parcial de G_1 en G_2 y además, es un encaje. Para toda $n \in \omega$ podemos extender f_n a f_{n+1} como en el lema 3.1 para $z = y_{n+1}$. Entonces vemos que $f = \bigcup_{n\in\omega} f_n$ es la unión de funciones parciales compatibles, por lo que f es función y, como las f_n son encajes, entonces f también es un encaje. Ahora bien, tenemos que $\mathrm{dom}(f_n) \subset Y$ y que para toda $n \in \omega$ se cumple que $y_n \in \mathrm{dom}(f_n)$, por lo que $\mathrm{dom}(f) = Y$. Esto es, f es el encaje que buscábamos. Por lo tanto, toda gráfica numerable se puede encajar en G_2. $\square$

Otra consecuencia de la proposición 3.1 es la siguiente:

Teorema 3.3. Cualesquiera dos gráficas numerables con la propiedad de extensión son isomorfas.

Demostración. Sean $G_1 = \langle X, \rho \rangle$ y $G_2 = \langle Y, \sigma \rangle$ gráficas numerables con la propiedad de extensión y $\{x_0, ...\}$ y $\{y_0, ...\}$ enumeraciones de X y Y, respectivamente. Nosotros crearemos un isomorfismo f como el límite de funciones parciales por medio de back-and-forth.

Comenzamos definiendo $f_0 = \{\langle x_0, y_0 \rangle\}$. Supongamos ahora que f_n está definida para $n \in \omega$ y cumple que $\{x_0, ..., x_n\} \subseteq \mathrm{dom}(f_n)$, $\{y_0, ..., y_n\} \subseteq \mathrm{im}(f_n)$ y f_n es isomorfismo de $\mathrm{dom}(f_n)$ en $\mathrm{im}(f_n)$. Sean $X_n = dom(f_n)$ y a_n el elemento con el menor índice de $X \setminus X_n$. Entonces extendemos f_n a $X_n \cup \{a_n\}$ como en el lema 3.1. A esta nueva función la vamos a llamar g_n.

Tomamos entonces $Y_n = g_n[X_n \cup \{a_n\}]$ y sea b_n el elemento con el menor índice de $Y \setminus Y_n$. Como g_n es un isomorfismo entre subgráficas finitas de G_1 y G_2, entonces g_n^{-1} también lo es y podemos extenderla a $Y_n \cup \{b_n\}$ como en el lema 3.1. A esta nueva función la llamaremos h_n. Como h_n es isomorfismo entre subgráficas finitas de G_1 y G_2, entonces $f_{n+1} = h_n^{-1}$ contiene a f_n y es un encaje de una subgráfica finita de G_1 en G_2.

Finalmente, definimos $f = \bigcup_{n \in \omega} f_n$. Como f_n es un encaje y extiende a f_m para cualesquiera $m < n \in \omega$, entonces f es un encaje de una subgráfica de G_1 en G_2. De igual manera, vemos que $x_n \in \mathrm{dom}(f_n) \subseteq \mathrm{dom}(f)$ y $y_n \in f_n[G_1] \subseteq f[G_1]$ para toda $n \in \omega$ debido a la manera en que se fueron extendiendo las f_n. Esto es, f es una biyección de G_1 sobre G_2 y, como también es un encaje, entonces vemos que f es un isomorfismo.

Por lo tanto, G_1 y G_2 son isomorfas. □

3.3. Construcción de la Gráfica Random

En la sección anterior vimos que todas las gráficas random son isomorfas entre sí. Este resultado sería bastante útil para estudiarlas, sin embargo, aún no hemos visto que exista alguna. En esta sección construiremos tal gráfica haciendo uso de los conjuntos hereditariamente finitos.

Definición. Construímos el universo de los *conjuntos hereditariamente finitos* V_ω por recursión numerable de la siguiente manera:

$$V_0 = \varnothing,$$
$$V_{n+1} = \mathscr{P}(V_n) \text{ para } n \in \omega,$$
$$V_\omega = \bigcup_{n\in\omega} V_n.$$

Asimismo, definimos el *n-ésimo nivel de V_ω* para $n \in \omega$ como $\mathrm{Lev}_n = V_{n+1} \setminus V_n$ y el *rango* de $x \in V_\omega$ como $\mathrm{rank}(x) = \mathrm{mín}\{n \in \omega : x \in V_{n+1}\}$.

Una noción indispensable al hablar de los conjuntos hereditariamente finitos es la de la cerradura transitiva de un conjunto bajo la pertenencia, por lo que nos será de gran utilidad recordarla:

Definición. La *cerradura transitiva* de un conjunto x se denota por $\operatorname{trcl}(x)$ y está dada por

$$\begin{aligned}\cup_0(x) &= x,\\ \cup_{n+1}(x) &= \bigcup \cup_n(x),\\ \operatorname{trcl}(x) &= \bigcup_{n\in\omega} \cup_n(x).\end{aligned}$$

Ahora podemos ver varias propiedades y caracterizaciones importantes de V_ω.

Proposición 3.4.

a) V_α es transitivo para toda $\alpha \in \omega + 1$.

b) $V_m \subseteq V_n$ para $m < n \in \omega$.

c) $n \in \operatorname{Lev}_n$ y por ende $\operatorname{rank}(n) = n$ para toda $n \in \omega$.

d) Sea α un ordinal. Entonces $\alpha \in V_\omega$ si y sólo si $\alpha \in \omega$.

e) V_n es finito para toda $n \in \omega$.

f) V_ω es numerable.

g) $x \in V_\omega$ si y sólo si x es un subconjunto finito de V_ω.

h) $V_\omega = \{x : |\operatorname{trcl}(x)| < \omega\}$.

Demostración.
a)

Vemos que V_0 es transitivo por vacuidad. Supongamos que para $n \in \omega$ se cumple que V_n es transitivo. Queremos ver que V_{n+1} también lo es. Sea $x \in V_{n+1} = \mathscr{P}(V_n)$. Entonces $x \subseteq V_n$, por lo que para toda $y \in x$ se cumple que $y \in V_n$. Como V_n es transitivo, $y \subseteq V_n$. Esto es, $y \in V_{n+1}$, por lo que V_{n+1} es transitivo. Por lo tanto, V_n es transitivo para toda $n \in \omega$.

Sea $x \in V_\omega$. Entonces existe $n \in \omega$ tal que $x \in V_n$. Como V_n es transitivo, tenemos que $x \subseteq V_n \subseteq V_\omega$. Por lo tanto, V_ω es transitivo.

b) Sea $m \in \omega$. Evidentemente $V_m = V_{m+0}$. Supongamos que para $k \in \omega$ se cumple que $V_m \subseteq V_{m+k}$. Entonces vemos que $V_m \in \mathscr{P}(V_{m+k}) = V_{m+k+1}$ y, como V_{m+k+1} es transitivo debido al inciso anterior, entonces $V_m \subseteq V_{m+k+1}$. Como toda $n \in \omega$ tal que $m < n$ se puede expresar como $m + k$ para alguna $k \in \omega$, tenemos que $V_m \subseteq V_n$.

c)

Supongamos que para $n \in \omega$ se cumple que $m \in V_m$ para toda $m < n$. Entonces, como $n \subseteq V_n$ y $V_{n+1} = \mathscr{P}(V_n)$, tenemos que $n \in V_{n+1}$. Por lo tanto, concluímos que $n \in V_{n+1}$ para toda $n \in \omega$ por inducción fuerte.

Evidentemente, $0 \notin \varnothing = V_0$. Supongamos que $n \notin V_n$. Entonces $n + 1 = n \cup \{n\} \notin \mathscr{P}(V_n) = V_{n+1}$. Por lo tanto, $n \notin V_n$ para toda $n \in \omega$, por lo que $n \in V_{n+1} \setminus V_n = \mathrm{Lev}_n$ para toda $n \in \omega$.

d)

Sabemos por el inciso anterior que toda $n \in \omega$ cumple que $n \in \mathrm{Lev}_n \subseteq V_\omega$. Veamos que $\omega \notin V_\omega$. Supongamos lo contrario, que $\omega \in V_\omega$. Entonces existe $n \in \omega$ tal que $\mathrm{rank}(\omega) = n$, por lo que $\omega \in \mathrm{Lev}_n$ y para toda $x \in \mathscr{P}(\omega)$ se cumple que $n \notin x$ ya que $n \notin V_n$. Por lo tanto, tenemos que $n \notin \omega$, lo que no tiene sentido. Entonces, concluímos que $\omega \notin V_\omega$. Más aún, para todo ordinal α tal que $\omega \in \alpha$ tenemos que, como V_ω es transitivo, entonces $\alpha \notin V_\omega$.

e) Nosotros sabemos que $|V_{n+1}| = 2^{|V_n|}$ y, como $|V_0| = 0$, entonces V_n es finito para toda $n \in \omega$.

f) Como $V_\omega = \bigcup_{n\in\omega} V_n$ y V_n es finito para toda $n \in \omega$, vemos que V_ω es la unión numerable de cosas finitas. Por lo tanto, V_ω es numerable.

g) $\rightarrow$]

Sean $x \in V_\omega$ y $n = \mathrm{rank}(x)$. Como $x \subseteq V_n$ y V_n es finito, entonces $|x| \leq |V_n|$, por lo que x es finito.

g) $\leftarrow$]

Sea $x \subseteq V_\omega$ finito. Entonces $A = \{\mathrm{rank}(y) : y \in x\}$ es finito, por lo que existe $n = \max R$. Entonces vemos que $y \in V_n$ para toda $y \in x$, por lo que $x \in \mathscr{P}(V_n) = V_{n+1} \subseteq V_\omega$.

h)

Primero veremos un pequeño resultado que nos será de utilidad para ver ambas contenciones. Para todo conjunto x vemos que:

$$\begin{aligned}\cup_1(x) &= \bigcup \cup_0(x) = \bigcup x \\ &= \bigcup \{y \in x\} = \bigcup \{\cup_0(y) : y \in x\}.\end{aligned}$$

Supongamos que $\cup_{n+1}(x) = \bigcup\{\cup_n(y) : y \in x\}$ para alguna $n \in \omega$, entonces

$$\begin{aligned}\cup_{n+2}(x) &= \bigcup \cup_{n+1}(x) \\ &= \bigcup \bigcup \{\cup_n(y) : y \in x\} \\ &= \bigcup \{\cup_{n+1}(y) : y \in x\}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos ver que

$$\operatorname{trcl}(x) = x \cup \Big(\bigcup_{y \in x} \operatorname{trcl}(y)\Big).$$

$\subseteq$]

Evidentemente, todo elemento de V_0 tiene cerradura transitiva finita. Supongamos que para $n \in \omega$ se cumple que $\operatorname{trcl}(x)$ es finita para toda $x \in V_n$. Sea $y \in V_{n+1}$. Sabemos que y es finito ya que $y \in V_\omega$. Por lo visto previamente, sabemos que $|\operatorname{trcl}(y)| \leq |y| + \sum_{z \in y} |\operatorname{trcl}(z)|$, por lo que $\operatorname{trcl}(y)$ es finita. Por inducción concluímos que para todas $n \in \omega$ y $x \in V_n$ se cumple que $\operatorname{trcl}(x)$ es finita. Más aún, como $V_\omega = \bigcup_{n\in\omega} V_n$, entonces para toda $x \in V_\omega$ se cumple que $\operatorname{trcl}(x)$ es finita.

$\supseteq$]

Sea x tal que $\operatorname{trcl}(x)$ es finita. Haremos inducción sobre la cardinalidad de $\operatorname{trcl}(x)$.

Cuando $|\operatorname{trcl}(x)| = 0$, tenemos que $x = \varnothing \in V_\omega$. Sea $|\operatorname{trcl}(x)| = n$. Supongamos que para toda y tal que $|\operatorname{trcl}(y)| < n$ se cumple que $y \in V_\omega$. Recordemos que $\operatorname{trcl}(x) = x \cup \left(\bigcup_{y\in x} \operatorname{trcl}(y)\right)$, por lo que x es finito y para toda $y \in x$ que se cumple que $\operatorname{trcl}(y) \subset \operatorname{trcl}(x)$, por lo que $|\operatorname{trcl}(y)| < n$. Por lo tanto, $y \in V_\omega$ para toda $y \in x$ y, como x es finito, existe m tal que $y \in V_m$ para toda $y \in x$. Esto es, $x \in \mathscr{P}(V_m) = V_{m+1}$.

Por lo tanto, si $\operatorname{trcl}(x)$ es finita, entonces $x \in V_\omega$. $\square$

Otro resultado interesante del universo de los conjuntos hereditariamente finitos es que es un modelo de ZFC sin el Axioma de Infinito, lo que nos indica que podemos construir dentro de él todos los tipos de conjuntos que conocemos siempre y cuando sean finitos. Una demostración de este hecho se da en el anexo A. Sabiendo esto, podemos definir la siguiente relación sobre V_ω:

Definición. Definimos la relación ε en V_ω como $x \varepsilon y$ si y sólo si $x \in y$ o $y \in x$.

Ahora podemos ver que V_ω con la relación ε es, en efecto, una gráfica random:

Proposición 3.5. La estructura $\langle V_\omega, \varepsilon\rangle$ es una gráfica random.

Demostración. Sean $H, K \subseteq V_\omega$ finitos y disjuntos. Entonces $H, K \in V_\omega$. Sea $n = \mathrm{rank}(K)$. Como V_ω es modelo de ZFC-Inf y $n \in V_\omega$, tenemos que $v = H \cup \{n\} \in V_\omega$. Entonces vemos que para toda $h \in H$ se cumple que $h \in v$, por lo que $h \varepsilon v$.

Ahora bien, para toda $k \in K$ tenemos que $k \notin H$ y, como $\mathrm{rank}(k) < \mathrm{rank}(K) = n$ y $\mathrm{rank}(n) = n$, entonces $k \neq n$. Por lo tanto, $k \notin v$ para toda $k \in K$ y, como $n + 1 \leq \mathrm{rank}(v)$, entonces $v \notin k$. Esto es $k \not\varepsilon v$ para toda $k \in K$.

Por lo tanto, $\langle V_\omega, \varepsilon\rangle$ es una gráfica numerable con la propiedad de extensión, por lo que es una gráfica random. □

Por ende, sabemos que la gráfica random existe y, por lo visto en la sección anterior a esta, es única salvo por isomorfismos.

3.4. Gráficas Aleatorias

El nombre de la gráfica random tiene una explicación en términos probabilísticos. En esta sección veremos lo que es una gráfica aleatoria y como se relaciona este concepto con el de gráfica random.

Definición. Sean X un conjunto y $p \in (0,1)_{\mathbb{R}}$. Para cada $r \in [X]^2$ elegimos de manera independiente y con probabilidad p si $r \in \sigma$. A la gráfica $\langle X, \sigma\rangle$ la llamamos una *gráfica aleatoria* de probabilidad p.

Es importante notar que no estamos considerando $p = 0$ y $p = 1$ ya que éstas son las gráfcas vacía y completa, respectivamente, y tienen características particulares que el resto de las gráficas no tienen. Es debido a esto que las ignoraremos por el momento.

Debido a su naturaleza, no es posible tener una gráfica aleatoria de manera explícita. Aunque esto aparentemente complica su estudio, ahí es donde la magia del infinito entra en juego:

Lema 3.6. Toda gráfica aleatoria numberable tiene la propiedad de extensión casi seguramente.

Demostración. Sea $G = \langle X, \sigma \rangle$ una gráfica aleatoria numerable de probabilidad p para $p \in (0,1)_{\mathbb{R}}$. Sean $U, V \subset X$ finitos y ajenos. La probabilidad que $x \in X \setminus (U \cup V)$ esté conectado correctamente a $\langle U, V \rangle$ está dada por $p^{|U|} \cdot (1-p)^{|V|}$, por lo que la probabilidad que ningún elemento de $Y \subset X \setminus (U \cup V)$ finito esté conectado correctamente a $\langle U, V \rangle$ está dada por $(1 - p^{|U|} \cdot (1-p)^{|V|})^{|Y|}$.

Construiremos el conjunto X' por recursión:

$$X_n = \{x_m : m \in n\} \text{ para } n \in \omega$$
$$x_n \in X \setminus (U \cup V \cup X_n) \text{ para } n \in \omega$$
$$X' = \lim_{x \to \infty} X_n = \bigcup_{x \in \omega} X_n$$

Nótese que como X es numerable, se puede indexar y entonces podemos pedir que cada x_n sea el de menor índice de $X \setminus (U \cup V \cup X_n)$. De esta manera se evita usar el Axioma de Elección.

Entonces vemos que la probabilidad que ningún elemento de X' esté conectado correctamente a $\langle U, V\rangle$ es el límite de esta misma probabilidad para X_n cuando $n \to \infty$. Esto es, $\lim_{n\to\infty} \big(1 - p^{|U|} \cdot (1-p)^{|V|}\big)^n = 0$.

Por lo tanto, G tiene la propiedad de extensión casi seguramente. $\square$

Este resultado nos dice algo que resulta contraintuitivo, pero bastante interesante: que podemos construir una gráfica siguiendo un proceso aleatorio y obtener un resultado predeterminado.

3.5. Copias de la Gráfica Random

A partir de ahora comenzaremos a buscar copias de la gráfica random dentro de sí misma. Esto es, estudiaremos el conjunto $\mathbb{P}(\mathcal{R})$, tal como fue definido en el capítulo 1.5. Antes de meternos de lleno en ese tema, veamos una curiosa propiedad de la gráfica random:

Proposición 3.7. $\mathcal{R}$ es isomorfa a su complemento. Esto es, si $\langle \omega, \varrho\rangle$ es una gráfica random, entonces $\langle \omega, [\omega]^2 \setminus \varrho\rangle$ también lo es.

Demostración. Sean $\mathcal{S}$ el complemento de $\mathcal{R}$ y $U, V \subset \omega$ finitos. Entonces vemos que

$$\mathcal{S}_U^V = \mathcal{R}_V^U \neq \varnothing$$

Por lo tanto, $\mathcal{S}$ tiene la propiedad de extensión y es isomorfa a $\mathcal{R}$ por ser numerable. $\square$

A lo largo de todo este capítulo, hemos estado haciendo uso del hecho que los $\mathcal{R}_V^U$ son no vacíos. Sin embargo, ahora veremos algo bastante impresionante: no sólo son no vacíos, son infinitos y, más aún, son isomorfos a $\mathcal{R}$.

Proposición 3.8. Sean $U, V \subset \omega$ finitos y ajenos. Entonces $\mathcal{R}_V^U$ es infinito y $\mathcal{R}_V^U \in \mathbb{P}(\mathcal{R})$.

Demostración. Sean $U, V \subset \omega$ finitos y ajenos. Nosotros sabemos que $\mathcal{R}_V^U \neq \varnothing$, por lo que podemos tomar un $x \in \mathcal{R}_V^U$. Como $U \cup \{x\}$ sigue siendo finito, vemos que $\mathcal{R}_V^{U \cup \{x\}} \neq \varnothing$. Este procedimiento se puede seguir de manera indeterminada, por lo que se puede construir por recursión un subconjunto infinito de $\mathcal{R}_V^U$. Por lo tanto, $\mathcal{R}_V^U$ es numerable.

Sean $U', V' \subset \mathcal{R}_V^U$ finitos y ajenos. Vemos que $(\mathcal{R}_V^U)_{V'}^{U'} = \mathcal{R}_{V \cup V'}^{U \cup U'} \neq \varnothing$ por lo que $\mathcal{R}_V^U$ está en $\mathbb{P}(\mathcal{R})$. □

Ahora veremos que la gráfica random es indestructible, esto es, si se le quita una cantidad finita de elementos, sigue siendo ella misma:

Proposición 3.9. Sea $U \subset \omega$ finito. Entonces $\omega \setminus U \in \mathbb{P}(\mathcal{R})$.

Demostración. Sean $T \subset \omega$ finito y $U, V \subset \omega \setminus T$ finitos. Vemos que si G es la subgráfica de $\mathcal{R}$ generada por $\omega \setminus T$, entonces $G_V^U = \mathcal{R}_V^U \setminus T$. Como $\mathcal{R}_V^U$ es numerable por la proposición 3.7 y T es finito, entonces $\mathcal{R}_V^U \setminus T$ es numerable. Por lo tanto, G es una subgráfica numerable de $\mathcal{R}$ con la propiedad de extensión. Esto es, $G \cong \mathcal{R}$ y $\omega \setminus U \in \mathbb{P}(\mathcal{R})$. □

No es difícil observar que si tomamos un $X \subset \omega$ finito, entonces el conjunto $\{X\} \cup \{\mathcal{R}_V^U : \langle U, V\rangle$ es una partición de $X\}$ es una partición de ω en que las subgráficas inducidas son isomorfas a $\mathcal{R}$. Al considerar particiones finitas arbitrarias de ω vemos un resultado similar:

Proposición 3.10. Sea $\{X_0, ..., X_n\}$ una partición de ω para alguna $n \in \omega$. Entonces existe $m \leq n$ tal que $X_m \in \mathbb{P}(\mathcal{R})$.

Demostración. Sea $\{X_0, ..., X_n\}$ una partición de ω para $n \in \omega$ y $\overline{X}_0, ..., \overline{X}_n$ las respectivas subgráficas inducidas de $\mathcal{R}$.

Supongamos que para toda $i \in n+1$ se cumple que $\overline{X}_i \notin \mathbb{P}(\mathcal{R})$, por lo que para toda $i \in n+1$ existen $U_i, V_i \subset X_i$ finitos y ajenos tales que ${\overline{X}_i}_{V_i}^{U_i} = \varnothing$. Sean $U = \bigcup_{i \in n+1} U_i$ y $V = \bigcup_{i \in n+1} V_i$. Entonces vemos que para toda $i \in n+1$,

$$X_i \cap \mathcal{R}_V^U \subseteq {\overline{X}_i}_{V_i}^{U_i} = \varnothing$$

Lo que es imposible ya que $\mathcal{R}_V^U \neq \varnothing$ por la propiedad de extensión. Por lo tanto, existe $i \in n+1$ tal que $X_i \in \mathbb{P}(\mathcal{R})$. $\square$

Este resultado es bastante curioso y, aunque podríamos preguntarnos si ésta es una caracterización de $\mathcal{R}$, podemos ver que lamentablemente no es el caso ya que las gráficas completa y vacía también cumplen con esta propiedad. Aún así podemos ver que estas tres gráficas son las únicas con tal propiedad.

Proposición 3.11. Sean $G = \langle X, \sigma\rangle$ una gráfica numerable y $\langle X_0, X_1\rangle$ una partición de X tal que $X_0 \in \mathbb{P}(G)$ o $X_1 \in \mathbb{P}(G)$.

Entonces G es la gráfica completa, la gráfica vacía o la gráfica random.

Demostración. Sean $G = \langle X, \rho \rangle$ una gráfica numerable, $\langle X_0, X_1 \rangle$ una partición de X y $\overline{X}_0, \overline{X}_1$ las respectivas subgráficas inducidas. Supongamos que $G \cong \overline{X}_i$ para $i \in 2$ y que G no es ni la gráfica vacía ni la completa. Nosotros queremos ver que G es isomorfa a la gráfica random.

Supongamos que G tiene puntos aislados. Como G no es la gráfica vacía, vemos que los conjuntos $X_0 = \{x \in X : x \text{ es punto aislado de } G\}$ y $X_1 = X \setminus X_0$ forman una partición de X. Como G tiene al menos un punto no aislado, entonces $\overline{X}_0 \ncong G$. Asimismo, como $\overline{X}_1$ no tiene puntos aislados y G sí, tenemos que $\overline{X}_1 \ncong G$, lo que es imposible. Por lo tanto, G no puede tener puntos aislados.

De manera análoga se demuestra que G no puede contener vértices conectados con todos los demás.

Supongamos que $G \ncong \mathcal{R}$. Entonces existen $U, V \subset X$ finitos y ajenos tales que $G_V^U = \varnothing$. Sean $m = \text{mín}\{|U| + |V| : U, V \subset X \text{ finitos y ajenos tales que } G_V^U = \varnothing\}$ y $U', V' \subset X$ finitos y ajenos tales que $G_{V'}^{U'} = \varnothing$ y $|U'| + |V'| = m$. Como $m > 1$ (ya que $G_\varnothing^\varnothing = G$), podemos hacer una partición $\langle A, B \rangle$ de $U' \cup V'$. No es difícil ver que:

$$G_{A\cap V'}^{A\cap U'}, G_{B\cap V'}^{B\cap U'} \neq \varnothing$$
$$G_{A\cap V'}^{A\cap U'} \cap G_{B\cap V'}^{B\cap U'} = G_{(A\cap V')\cup(B\cap V')}^{(A\cap U')\cup(B\cap U')} = G_{V'}^{U'} = \varnothing$$

Sean $X_0 = X \setminus (B \cup G_{A\cap V'}^{A\cap U'})$ y $X_1 = X \setminus X_0 = B \cup G_{A\cap V'}^{A\cap U'}$.

Como A es ajeno a B y a $G^{A\cap U'}_{A\cap V'}$, vemos que $A \subseteq X_0$ y por ende que $\langle X_0, X_1\rangle$ es una partición de X.

Ahora vemos que para $x \in X_0$, como $\overline{X}_0{}^{A\cap U'}_{A\cap V'} \subseteq G^{A\cap U'}_{A\cap V'}$, entonces $x \notin \overline{X}_0{}^{A\cap U'}_{A\cap V'}$. Por lo tanto, $\overline{X}_0{}^{A\cap U'}_{A\cap V'} = \varnothing$ y, como $|A\cap V'|+|A\cap U'| < |U'|+|V'| = m$, entonces tenemos que $\overline{X}_0 \ncong G$. Entonces vemos que para $x \in X_1$,

- Si $x \in B$, entonces $x \in B\cap U'$ o $x \in B \cap V'$, por lo que $x \notin \overline{X}_1{}^{B\cap U'}_{B\cap V'}$.
- Si $x \in G^{A\cap U'}_{A\cap V'}$, como $G^{A\cap U'}_{A\cap V'}$ y$G^{B\cap U'}_{B\cap V'}$ son ajenos y $\overline{X}_1{}^{B\cap U'}_{B\cap V'} \subseteq G^{B\cap U'}_{B\cap V'}$, entonces $x \notin \overline{X}_1{}^{B\cap U'}_{B\cap V'}$.

Esto es, $\overline{X}_1{}^{B\cap U'}_{B\cap V'} = \varnothing$ y, como $|B\cap V'|+|B\cap U'| < |U'|+|V'| = m$, tenemos que $\overline{X}_1 \ncong G$. Entonces $G \ncong \overline{X}_i$ para $i \in 2$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $G \cong \mathcal{R}$. □

Retomando el tema de familias positivas del capítulo 2, la siguiente proposición nos indica que hay una conexión entre la retícula de copias de la gráfica random y las familias positivas:

Proposición 3.12. $\mathbb{P}(\mathcal{R})$ contiene una familia positiva en ω.

Demostración. Nosotros sabemos por el lema 3.1 que existe una gráfica completa numerable $K_\omega \subset \mathcal{R}$. Sea $K = \mathrm{dom}(K_\omega)$. Definimos $\mathcal{B} = \{\omega \setminus (K \cup F) : F \subset \omega \wedge F \in [\omega]^{<\omega}\}$ y $\mathcal{P} = \{A : (\exists B \in \mathcal{B})(B \subseteq A)\}$. Nosotros queremos ver que $\mathcal{P}$ es un subconjunto de $\mathbb{P}(\mathcal{R})$ y que además es una familia positiva.

Sean $A \in \mathcal{P}$ y G la subgráfica de $\mathcal{R}$ cuyo dominio es $\omega \setminus A$. Sabemos por la definición de $\mathcal{P}$ que existen $F \subset \omega$ finito y $B \in$

$\mathcal{B}$ tales que $B = \omega \setminus (K \cup F)$ y $B \subseteq A$. Entonces vemos que $\omega \setminus A \subseteq K \cup F$. Si $\omega \setminus A$ es vacío o finito, entonces G no es una gráfica random. De lo contrario, sean $x \in K \cap (\omega \setminus A)$ y $V = \{x\} \cup F$. Entonces tenemos que $G_V^{\varnothing} = \varnothing$ ya que no existe $y \in K$ tal que $y \not\sim x$. Por lo tanto, G no tiene la propiedad de extensión y $G \ncong \mathcal{R}$. Como $\{\omega \setminus A, A\}$ es una partición de ω y $\omega \setminus A \notin \mathbb{P}(\mathcal{R})$, sabemos por la proposición 3.10 que $A \in \mathbb{P}(\mathcal{R})$. Esto es, $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}(\mathcal{R})$.

Por otro lado, sabemos que K y $\omega \setminus K$ son numerables, por lo que $\omega \setminus K$ es coinfinito y $\varnothing \notin \mathcal{P}$. Asimismo, sean $A \in \mathcal{P}$ y $C \subseteq \omega$ tales que $A \subset C$. Entonces existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq A \subset C$, por lo que $C \in \mathcal{P}$. Finalmente, vemos que para $A \in \mathcal{P}$ y $F \subset \omega$ finito, existen $F' \subset \omega$ finito y $B \in \mathcal{B}$ tales que $B = \omega \setminus (K \cup F')$ y $B \subseteq A$. Por lo tanto, $\omega \setminus \big(K \cup (F \cup F')\big) = B \setminus F \subseteq A \setminus F$ y, como $F \cup F'$ es finito, entonces $B \setminus F \in \mathcal{B}$ y $A \setminus F \in \mathcal{P}$.

Por lo tanto, $\mathcal{P}$ es una familia positiva tal que $\mathcal{P} \subset \mathbb{P}(\mathcal{R})$. $\square$

3.6. La Gráfica Random como Límite de Fraïssé

En esta sección veremos que $\mathcal{R}$ es el límite de todas las gráficas finitas. Como vimos en el capítulo 1.5, esta noción se formaliza como los límites de Fraïssé. Sin embargo, antes de probar que $\mathcal{R}$ es un límite, debemos ver que es ultrahomogénea.

Proposición 3.13. $\mathcal{R}$ es ultrahomogénea.

Demostración. Sean $X_1, X_2 \subset \omega$ finitos tales que las subgráficas de $\mathcal{R}$ inducidas son isomorfas. Sea f_n ese isomorfismo, donde $n = |X_1|$. Entonces podemos proseguir a partir del paso n del teorema 3.3 para extender f_n a un automorfismo de $\mathcal{R}$. Por lo tanto, $\mathcal{R}$ es ultrahomogénea. $\square$

Habiendo visto esto, podemos abordar el siguiente teorema:

Teorema 3.14. $\mathcal{R}$ es el límite de Fraïssé de las gráficas finitas.

Demostración. En la proposición 3.2 vimos que toda gráfica finita se puede encajar en $\mathcal{R}$, por lo que se puede generar a cualquier gráfica finita a partir de $\mathcal{R}$. Esto es, $\Gamma = \{G : G$ es gráfica y $\mathrm{dom}(G) \in [\omega]^{<\omega}\}$ es una edad de $\mathcal{R}$. Ahora bien, como Γ es una edad, entonces cumple la propiedad hereditaria y la de encaje conjunto. Nosotros queremos ver que también cumple con la propiedad de amalgamación.

Sean $A = \langle X_A, \rho_A \rangle$, $B = \langle X_B, \rho_B \rangle$ y $C = \langle X_C, \rho_C \rangle$ gráficas y $e : A \to B$, $f : A \to C$ funciones tales que $A, B, C \in \Gamma$ y e, f son encajes. Sea $Y = X_C \setminus f[A]$. Haremos inducción sobre $|Y|$.

Si $Y = \varnothing$, vemos que si $g : B \to B$ es la identidad y $h = ef^{-1}$, entonces para toda $a \in X_A$ se cumple que $ge(a) = e(a)$ y $hf(a) = ef^{-1}f(a) = e(a)$. Por lo tanto, $ge = hf$.

Supongamos que para $|Y| = n$ se cumple que existen encajes g, h tales que $ge = hf$. Veamos el caso en que $|Y| = n + 1$. Sean $x \in Y$ y $Y' = Y \setminus \{x\}$. Entonces existen $D \in \Gamma$, $g : B \to D$ y $h : C \setminus \{x\} \to D$ encajes tales que $ge = hf$. Sean $U = \{z \in Y' :$

$z \sim x\}$ y $V = \{z \in Y' : z \not\sim x\}$. Como $g[X_B]$ es finito, existe $y \in \omega \setminus g[X_B]$ tal que $y \sim z$ para toda $z \in g[U]$ y $y \not\sim z$ para toda $z \in g[V]$. Asimismo, creamos la extensión $h' = h \cup \{\langle x, y\rangle\}$ como en el lema 3.1 Por lo tanto vemos que g y h' son encajes de B en D y de C en D, respectivamente. Finalmente, como $y \notin g[B] \cap h'[C]$, entonces $ge = h'f$. Por lo tanto, Γ cumple con la propiedad de amalgamación.

Entonces vemos que:

- el lenguaje de las gráficas es numerable,
- Γ es un conjunto numerable de gráficas finitamente generadas con las propiedades hereditaria, de encaje conjunto y de amalgamación,
- $\mathrm{dom}(\mathcal{R}) = \omega$,
- Γ es la edad de $\mathcal{R}$, y
- $\mathcal{R}$ es ultrahomogénea.

Por lo tanto, $\mathcal{R}$ es el límite de Fraïssé de las gráficas finitas. $\square$

Gracias a este último teorema y al teorema 1.14 podemos ver que $\mathcal{R}$ es a las gráficas finitas lo que $\mathbb{Q}$ es a los órdenes lineales finitos. Los paralelismos no acaban ahí, por ejemplo, los tipos de orden de las cadenas maximales de ambos son el mismo como muestra Kurilić en [Kur13] y [KK13]. Más aún, los límites de Fraïssé y, de manera más general, las estructuras ultrahomogéneas son muy similares entre sí. La teoría de grupos topológicos estudia particularmente sus grupos de isomorfismos como se puede ver en [BK96].

Capítulo 4

Cadenas Maximales de $\mathbb{P}(\mathcal{R})$

En este capítulo daremos una caracterización de las cadenas maximales de la retícula de subestructuras isomorfas de $\mathcal{R}$ por medio del siguiente teorema:

Teorema 4.1. Las siguientes condiciones son equivalentes para todo orden lineal $L = \langle X, < \rangle$:

A) L es isomorfo a una cadena maximal en el orden parcial $\langle \mathbb{P}(\mathcal{R}) \cup \{\emptyset\}, \subset \rangle$,

B) L es un orden lineal completo $\mathbb{R}$-encajable tal que $|X| > 1$ y 0_L no tiene sucesor, y

C) L es isomorfo a un conjunto compacto $K \subseteq [0,1]_{\mathbb{R}}$ tal que 0 es punto de acumulación de K y $1 \in K$.

Para demostrar este teorema, haremos uso de varios lemas auxiliares, como fue el caso en el teorema 2.3. Mientras tanto, podemos ver fácilmente que:

- Una cadena $\mathcal{L}$ de $\mathbb{P}(\mathcal{R})\cup\{\varnothing\}$ es maximal si y sólo si $\mathcal{L}\setminus\{\varnothing\}$ es cadena maximal de $\mathbb{P}(\mathcal{R})$.

- Una cadena $\mathcal{L}$ de $\mathbb{P}(\mathcal{R})$ es maximal si y sólo si $\mathcal{L}\cup\{\varnothing\}$ es cadena maximal de $\mathbb{P}(\mathcal{R})\cup\{\varnothing\}$.

Debido a esto, el tipo de orden de las cadenas maximales de $\mathbb{P}(\mathcal{R})$ es $K\setminus\{0\}$, donde $K\subset[0,1]_{\mathbb{R}}$ es compacto tal que 0 es punto de acumulación de K y $1\in K$.

Ahora bien, la implicación B)$\leftrightarrow$C) fue demostrada en la proposición 1.5 ya que no involucra de manera explícita a la gráfica random. A las dos implicaciones restantes las veremos en sus respectivas secciones.

Implicación A)$\rightarrow$B)

Antes de abordar esta implicación, mostraremos el siguiente lema, el cual nos será de bastante utilidad:

Lema 4.2. Si $\mathscr{L}$ es una cadena en $\mathbb{P}(\mathcal{R})$, entonces $\bigcup\mathscr{L}\in\mathbb{P}(\mathcal{R})$.

Demostración. Sean $U,V\subset\bigcup\mathscr{L}$ finitos y ajenos. Entonces existe $L\in\mathscr{L}$ tal que $U,V\subset L$, por lo que $\varnothing\neq\mathcal{R}_V^U\cap L\subseteq\bigcup\mathscr{L}$. Por lo tanto, la subgráfica inducida por $\bigcup\mathscr{L}$ tiene la propiedad de extensión, por lo que es isomorfa a $\mathcal{R}$. $\square$

A partir de esto, podemos ver de qué forma son las cadenas maximales en $\mathbb{P}(\mathcal{R})$:

Lema 4.3. Sea $\mathscr{L}$ una cadena maximal en $\langle \mathbb{P}(\mathcal{R}) \cup \{\varnothing\}, \subset\rangle$. Entonces $\mathscr{L}$ es un orden lineal completo $\mathbb{R}$-encajable tal que $\varnothing$ no está aislado.

Demostración. Sea $\mathscr{L}$ una cadena maximal en $\langle \mathbb{P}(\mathcal{R}) \cup \{\varnothing\}, \subset\rangle$. Como $\varnothing$ y ω son el mínimo y el máximo de $\mathbb{P}(\mathcal{R}) \cup \{\varnothing\}$, respectivamente, tenemos que $\varnothing, \omega \in \mathscr{L}$. Asimismo, como $\mathscr{L}$ es cadena en $\mathbb{P}(\mathcal{R}) \cup \{\varnothing\} \subset \mathscr{P}(\omega)$, sabemos que $\mathscr{L}$ es $\mathbb{R}$-encajable debido al lema 1.7.

Primero veamos que $\varnothing$ no tiene sucesor.
Supongamos que $\varnothing$ tiene un sucesor S en $\mathscr{L}$. Como $S \neq \varnothing$, entonces $S \in \mathbb{P}(\mathcal{R})$, por lo que la proposición 3.9 nos dice que para todo $s \subset S$ finito se cumple que $S \setminus s \in \mathbb{P}(\mathcal{R})$. Pero entonces $\mathscr{L} \cup \{S \setminus s\}$ es una cadena en $\mathbb{P}(\mathcal{R}) \cup \{\varnothing\}$ que contiene propiamente a $\mathscr{L}$, lo que es imposible ya que $\mathscr{L}$ es cadena maximal. Por lo tanto, $\varnothing$ no tiene sucesor en $\mathscr{L}$.

Ahora veamos que $\mathscr{L}$ es completo.
Sea $S \subseteq \mathscr{L}$. Sabemos por el lema 4.2 que $\sup_{\mathbb{P}(\mathcal{R}) \cup \{\varnothing\}} S = \bigcup S$ está en $\mathbb{P}(\mathcal{R}) \cup \{\varnothing\}$. Supongamos que $\bigcup S \notin \mathscr{L}$. Entonces para toda $A \in \mathscr{L}$ se cumple que:

- Si $A \subseteq B$ para alguna $B \in S$, entonces $A \subseteq \bigcup S$.
- Si $B \subseteq A$ para toda $B \in S$, entonces $\bigcup S \subseteq A$.

- Los dos casos anteriores son los únicos debido a que A y B siempre son compatibles ya que $S \subseteq \mathscr{L}$ y $\mathscr{L}$ es cadena.

Esto es, $\bigcup S$ es comparable con todos los elementos de $\mathscr{L}$, por lo que $\mathscr{L} \cup \{\bigcup S\}$ es una cadena en $\mathbb{P}(\mathcal{R}) \cup \{\varnothing\}$ que contiene propiamente a $\mathscr{L}$, lo que es imposible ya que $\mathscr{L}$ es cadena maximal. Por lo tanto, $\sup_{\mathscr{L}} S = \bigcup S \in \mathscr{L}$. Podemos definir entonces a $\inf_{\mathscr{L}} S = \sup_{\mathscr{L}}\{x \in \mathscr{L} : (\forall s \in S)(x \leq s)\}$.

Por lo tanto, $\mathscr{L}$ es un orden lineal completo $\mathbb{R}$-encajable tal que $\varnothing$ no está aislado. $\square$

Implicación B)→A)

En esta sección probaremos el siguiente lema:

Lema 4.4. Sea L un orden lineal completo $\mathbb{R}$-encajable tal que $|X| > 1$ y 0_L no tiene sucesor. Entonces L es isomorfo a una cadena maximal en el orden parcial $\langle \mathbb{P}(\mathcal{R}) \cup \{\varnothing\}, \subset \rangle$.

Para simplificar la demostración, veremos dos casos: cuando L es numerable y cuando es no numerable.

El caso numerable

Lema 4.5. Sea $L = \langle X, < \rangle$ un orden lineal completo a lo más numerable tal que $|X| > 1$ y 0_L no está aislado. Entonces L es isomorfo a una cadena maximal en $\langle \mathbb{P}(\mathcal{R}) \cup \{\varnothing\}, \subset \rangle$.

Demostración. Sea $L = \langle X, < \rangle$ un orden lineal completo a lo más numerable tal que $|X| > 1$ y 0_L no está aislado. Sea $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}(\mathcal{R})$ una familia positiva, la cual sabemos que existe debido a la proposición 3.12. Por la proposición 1.2 sabemos que, como L es un orden lineal completo a lo más numerable, entonces tiene saltos densos. Como 0_L no está aislado y L es $\mathbb{R}$-encajable debido a que es a lo más numerable, entonces sabemos por el teorema 2.3 que existe una cadena $\mathscr{L}$ maximal en $\mathcal{P} \cup \{\varnothing\}$ tal que $\mathscr{L} \cong L$. Asimismo, como 0_L no tiene sucesor, tenemos que $\bigcap(\mathscr{L} \setminus \{\varnothing\}) = \varnothing$. Nosotros queremos ver que $\mathscr{L}$ también es maximal en $\mathbb{P}(\mathcal{R}) \cup \{\varnothing\}$.

Supongamos que existe $A \in \mathbb{P}(\mathcal{R})$ tal que $A \notin \mathscr{L}$ y $\mathscr{L} \cup \{A\}$ es una cadena. Entonces para toda $S \in \mathscr{L}$ se cumple que $S \subset A$ o $A \subset S$. Como $\bigcap(\mathscr{L} \setminus \{\varnothing\}) = \varnothing$, existe $S \in \mathscr{L}$ tal que $S \in \mathcal{P}$ y $S \subset A$. Ahora bien, sabemos que $\mathcal{P}$ es una familia positiva, por lo que $A \in \mathcal{P}$. Por lo tanto, $\mathscr{L} \cup \{A\}$ es una cadena en $\mathcal{P} \cup \{\varnothing\}$ que contiene propiamente a $\mathscr{L}$, lo que es imposible ya que $\mathscr{L}$ es maximal en $\mathcal{P} \cup \{\varnothing\}$.

Por lo tanto, $\mathscr{L}$ es una cadena maximal en $\mathbb{P}(\mathcal{R}) \cup \{\varnothing\}$. $\square$

El caso no numerable

A lo largo de esta sección usaremos el conjunto $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, donde $-\infty = \operatorname{ínf}_{\overline{\mathbb{R}}} \mathbb{R}$ y $\infty = \sup_{\overline{\mathbb{R}}} \mathbb{R}$. Evidentemente, $\overline{\mathbb{R}} \cong [0, 1]_{\mathbb{R}}$. Ahora veamos una caracterización útil de L como suma lexicográfica de órdenes numerables:

Lema 4.6. Sea $L = \langle X, < \rangle$ un orden lineal completo no numerable $\mathbb{R}$-encajable tal que 0_L no está aislado. Entonces existe $\{L_x : x \in \overline{\mathbb{R}}\}$ tal que:

a) L_x es un orden lineal a lo más numerable para toda $x \in \overline{\mathbb{R}}$,

b) $L \cong \sum_{x \in \overline{\mathbb{R}}} L_x$,

c) $M = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : |L_x| > 1\}$ es numerable, y

d) $|L_{-\infty}| = 1$ o $0_{L_{-\infty}}$ es no aislado.

Demostración. Sea $L = \langle X, < \rangle$ un orden lineal completo no numerable $\mathbb{R}$-encajable tal que 0_L es no aislado. Sea $\sim$ la *relación de condensación* en L dada por:

$$x \sim y \text{ si y sólo si } [\text{mín}\{x, y\}, \text{máx}\{x, y\}]_L \text{ es a lo más numerable.}$$

Sean A, B dos clases de $\sim$-equivalencia tales que $A \neq B$. Sea $a \in A$. Supongamos que existen $b_1, b_2 \in B$ tales que $b_1 < a < b_2$. Entonces vemos que $[b_1, a]_L \subset [b_1, b_2]_L$, por lo que $a \sim b_1$ y $a \in B$, lo que es imposible. Por lo tanto, se cumple que $A \lhd B$ o $B \lhd A$.

Sea I un orden lineal tal que $\{L_i : i \in I\}$ es el conjunto de clases de $\sim$-equivalencia tales que si $i_1, i_2 \in I$ e $i_1 <_I i_2$, entonces $x < y$ para cualesquiera $x \in L_{i_1}$ y $y \in L_{i_2}$. Cuando nos refiramos a los L_i como órdenes lineales, será con el orden heredado de L. Entonces vemos que $L = \sum_{i \in I} L_i$.

Como L es $\mathbb{R}$-encajable, sea $f : L \to \mathbb{R}$ un encaje. Sea $g(i) \in L_i$ para toda $i \in I$. Como los L_i son ajenos entre sí, entonces g

es inyectiva y $g(i) < g(j)$ siempre que $i <_I j$, por lo que $g \circ f$ es un encaje de I en $\mathbb{R}$. Ahora bien, como L es completo, definimos el ínfimo y el supremo en I para $A \subseteq I$ no vacío como

- $A^* = \sup_L\{\sup_L L_i : i \in A\}$ e i^* tal que $A^* \in L_{i^*}$, por lo que podemos tomar $\sup_I A = i^*$, y
- $A_* = \operatorname{ínf}_L\{\operatorname{ínf}_L L_i : i \in A\}$ e i_* tal que $A_* \in L_{i_*}$, por lo que podemos tomar $\operatorname{ínf}_I A = i_*$.

Por lo tanto, I es completo.

Para toda $i \in I$ tal que $|L_i| > 1$, sabemos que como L_i es $\mathbb{R}$-encajable, existen $(a_n, b_n)_L$ tales que $a_n, b_n \in L_i$ para toda $n \in \omega$ y $L_i = \bigcup_{n\in\omega}(a_n, b_n)_L$, tan sólo basta con tomar sucesiones $a_n \downarrow \operatorname{ínf}_L L_i$ y $b_n \uparrow \sup_L L_i$. Como $a_n, b_n \in L_i$ para toda $n \in \omega$, entonces $(a_n, b_n)_L$ es a lo más numerable, por lo que $L_i = \bigcup_{n\in\omega}(a_n, b_n)_L$ también es a lo más numerable.

Como L es completo, sabemos que $\sup_L L_i$ e $\operatorname{ínf}_L L_i$ existen para toda $i \in I$ y que $L_i \cup \{\sup_L L_i, \operatorname{ínf}_L L_i\}$ es numerable, por lo que $\sup_L L_i, \operatorname{ínf}_L L_i \in L_i$. Entonces vemos que para $A \subseteq L_i$ se cumple que $\operatorname{ínf}_L L_i \leq \operatorname{ínf}_L A \leq \sup_L A \leq \sup_L L_i$, por lo que $\sup_L A, \operatorname{ínf}_L A \in L_i$. Por lo tanto, L_i es completo para toda $i \in I$.

Ahora veremos que I es denso. Sean $i, j \in I$ tales que $i < j$ y $a = \sup_L L_i$, $b = \operatorname{ínf}_L L_j$. Como $a \in L_i$, $b \in L_j$ y $L_i \cap L_j = \varnothing$, entonces $a \not\sim b$, por lo que $(a, b)_L$ es no numerable. Como $\{L_i : i \in I\}$ es una partición de L, entonces existe $k \in I$ tal que $L_k \subseteq (a, b)_L$. Por lo tanto, I es un orden lineal $\mathbb{R}$-encajable, completo y denso en sí mismo, por lo que $I \cong \overline{\mathbb{R}}$.

Entonces vemos que $L = \sum_{x\in\overline{\mathbb{R}}} L_x$ y L_x es un orden lineal completo a lo más numerable para toda $x \in \overline{\mathbb{R}}$, con lo cual hemos probado los incisos a) y b).

Sea $M = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : |L_x| > 1\}$. Si $|L_x| > 1$, la proposición 1.2 nos dice que como L_x es a lo más numerable y completo, tiene saltos densos. Ahora bien, como L es $\mathbb{R}$-encajable, sabemos que tiene una cantidad a lo más numerable de saltos densos, por lo que M es a lo más numerable, lo que prueba el inciso c).

Finalmente, para el inciso d) vemos que como 0_L es no aislado, si $|L_{-\infty}| > 1$, entonces $0_L = 0_{-\infty}$ es no aislado. $\square$

Por otra parte, el siguiente lema nos proveerá justamente los elementos que necesitaremos para poder construir una cadena maximal en $\mathbb{P}(\mathcal{R})$ a partir de L:

Lema 4.7. Sean L un orden lineal completo a lo más numerable y $A, B \in \mathbb{P}(\mathcal{R})$ tales que $A \subseteq B$, $|B \setminus A| + 1 = |L|$ y $[A, B]_{\mathbb{P}(\mathcal{R})} = [A, B]_{\mathscr{P}(B)}$. Entonces existe una cadena $\mathscr{L}$ en $[A, B]_{\mathbb{P}(\mathcal{R})}$ tal que $A, B \in \mathscr{L}$ y $L \cong \mathscr{L}$. Más aún, para cada cortadura $\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \rangle$ de $\mathscr{L}$ se cumple que $\bigcup \mathfrak{A}, \bigcap \mathfrak{B} \in \mathscr{L}$ y $|\bigcap \mathfrak{B} \setminus \bigcup \mathfrak{A}| \leq 1$.

Demostración. Sean L un orden lineal completo y $A, B \in \mathbb{P}(\mathcal{R})$ tales que $A \subseteq B$, $|B \setminus A| + 1 = |L|$ y $[A, B]_{\mathbb{P}(\mathcal{R})} = [A, B]_{\mathscr{P}(B)}$. Veamos dos casos: cuando $B \setminus A$ es finito y cuando $B \setminus A$ es infinito.

Caso 1: $|B \setminus A| = n \in \omega$.
Como $B \setminus A$ es finito, entonces $|L| = n + 1$ y existen $a_m \in \omega$

para $m < n$ tales que $B = A \cup \{a_m : m \in n\}$. Sea $\mathscr{L} = \{A, A \cup \{a_0\}, A \cup \{a_0, a_1\}, ..., B\} = \{A \cup \{a_k : k < m\} : m < n+1\}$. Sabemos que B es isomorfo a $\mathcal{R}$, por lo que si a B le quitamos una cantidad finita de elementos, lo restante sigue siendo isomorfo a $\mathcal{R}$. Debido a esto, $\mathscr{L} \subseteq [A, B]_{\mathbb{P}(\mathcal{R})}$ y, como todos los elementos de $\mathscr{L}$ son comparables entre sí, vemos que $\mathscr{L}$ es una cadena. Más aún, como L y $\mathscr{L}$ son órdenes lineales finitos tales que $|L| = |\mathscr{L}|$, entonces existe un isomorfismo entre ellos.

Para toda cortadura $\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \rangle$ de $\mathscr{L}$ existe $m' \in n+1$ tal que $\mathfrak{A} = \{A \cup \{a_k : k \in m\} : m \in m'+1\}$ y $\mathfrak{B} = \{A \cup \{a_k : k \in m\} : m' \in m \in n+1\}$. Entonces podemos ver que $\bigcup \mathfrak{A} = A \cup \{a_k : k \in m'\}$ y $\bigcap \mathfrak{B} = A \cup \{a_k : k \in m'+1\}$, por lo que $\bigcup \mathfrak{A}, \bigcap \mathfrak{B} \in \mathscr{L} \subset \mathbb{P}(\mathcal{R})$ y $|\bigcap \mathfrak{B} \setminus \bigcup \mathfrak{A}| = 1$.

Por lo tanto, $\mathscr{L}$ es la cadena que buscamos.

Caso 2: $B \setminus A$ es numerable.
Como $|L| = |B \setminus A| + 1$, L es numerable. Asimismo, como L es completo, entonces es booleano debido a la proposición 1.2. También podemos ver que, como L es numerable, se puede encajar en $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, por lo que es $\mathbb{R}$-encajable. Entonces, como L es $\mathbb{R}$-encajable y booleano, la proposición 1.8 nos dice que existe una cadena maximal $\mathscr{L}'$ en $\mathscr{P}(\omega)$ isomorfa a L. Como $|B \setminus A| = \aleph_0$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\mathscr{L}'$ es una cadena maximal en $\mathscr{P}(B \setminus A)$.

Sean $\mathscr{L} = \{A \cup C : C \in \mathscr{L}'\}$ y $f : \mathscr{L}' \to \mathscr{L}$ dada por $f(C) = A \cup C$ para toda $C \in \mathscr{L}'$. Evidentemente, f es un isomorfismo entre $\mathscr{L}'$ y $\mathscr{L}$. Como $\mathscr{L}$ es maximal, tenemos que

$\varnothing, B \setminus A \in \mathscr{L}'$, por lo que $A, B \in \mathscr{L}'$. También sabemos que B es isomorfo a $\mathcal{R}$, por lo que si a B le quitamos una cantidad finita de elementos, lo restante sigue siendo isomorfo a $\mathcal{R}$. Debido a esto, $\mathscr{L} \subseteq [A, B]_{\mathbb{P}(\mathcal{R})}$.

Sea $\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \rangle$ una cortadura de $\mathscr{L}'$. Como $\mathscr{L}'$ es maximal, tenemos que $\bigcup \mathfrak{A}, \bigcap \mathfrak{B} \in \mathscr{L}'$ y $|\bigcap \mathfrak{B} \setminus \bigcup \mathfrak{A}| \leq 1$. Y, como f es un isomorfismo de orden, lo mismo es cierto para cualquier cortadura de $\mathscr{L}$.

Por lo tanto, $\mathscr{L}$ es la cadena que buscamos. $\square$

Ahora veremos una manera de partir $\mathbb{Q}$ en una cantidad a lo más numerable de conjuntos densos en $\mathbb{Q}$

Proposición 4.8. Para toda $\alpha \in \omega + 1$ existe una partición $\{I\} \cup \{J_y : y \in \alpha\}$ de $\mathbb{Q}$ tal que I y J_y son densos en $\mathbb{Q}$ para toda $y \in \alpha$.

Demostración. Sean $\alpha \leq \omega$ y p una función biyectiva entre ω y el conjunto de los números primos. Para toda $y \in \alpha$ sea $J_y = \{a/p(y)^n : n \in \mathbb{Z}^+ \wedge a \in \mathbb{Z} \wedge p(y)$ no divide a $a\}$. Podemos ver que para $x, y \in \alpha$ se cumple que $J_x \cap J_y \neq \varnothing$ si y sólo si $x = y$. Asimismo, J_y es denso en $\mathbb{Q}$. De igual manera, si definimos $I = \mathbb{Q} \setminus \bigcup_{y \in \alpha} J_y$, tenemos que I es denso en $\mathbb{Q}$. Por lo tanto, $\{I\} \cup \{J_y : y \in \alpha\}$ es una partición de $\mathbb{Q}$ tal que todos sus elementos son densos en $\mathbb{Q}$. $\square$

En lo que resta de esta sección, supondremos que I es un conjunto denso en $\mathbb{Q}$ como lo fue en la proposición anterior.

Lo que haremos ahora es construir una gráfica random $\langle \mathbb{Q}, \varrho \rangle$ con varias propiedades que nos permitirán encontrar fácilmente la cadena que buscamos. Para esto, necesitamos considerar al siguiente conjunto de funciones parciales:

Definición. Sea P el conjunto de funciones parciales finitas de $[\mathbb{Q}]^2$ en 2 tales que para cualesquiera $a, b \in \mathbb{Q}$ y $p \in P$ se cumple que si $\langle \{a, b\}, 1\rangle, \langle \{a+1, b\}, 1\rangle \in p$, entonces $a + 1 < b$.

Más adelante tomaremos un filtro en P con el fin de obtener una función $f : [\mathbb{Q}]^2 \to 2$, la cual nos dirá los pares desordenados que formarán los vértices de nuestra gráfica. Mientras veamos varios conjuntos con las propiedades que necesitamos:

Definición. Dado I un subconjunto denso de $\mathbb{Q}$, definimos los siguientes conjuntos:

- para $\{q, r\} \in [\mathbb{Q}]^2$ sea $\mathcal{D}_{\{q,r\}} = \{p \in P : \{q, r\} \in \mathrm{dom}(p)\}$,
- $K = \{\langle U, V\rangle : U, V \in [\mathbb{Q}]^{<\omega} \wedge U \cap V = \varnothing\}$,
- $m_{\langle U,V\rangle} = \text{máx}(U \cup V)$, donde $\langle U, V\rangle \in K$, y
- para $\langle U, V\rangle \in K$ y $n \in \omega$ sea

$$\mathcal{D}_{U,V,n} = \Big\{ p \in P : \big[\exists q \in I \cap (m_{(U,V)}, m_{(U,V)} + 1/n)_{\mathbb{Q}}\big] \\ \big[\forall u \in U\big]\big[v \in V\big]\big[\big\{\langle \{q, u\}, 1\rangle, \langle \{q, v\}, 0\rangle\big\} \subseteq p\big] \Big\}$$

Lo que buscamos es que los $\mathcal{D}_{\{q,r\}}$ y $\mathcal{D}_{U,V,n}$ sean densos para poder pasar un filtro a través de ellos. Vemos que éste es el caso en el siguiente lema:

Lema 4.9.

a) $\mathcal{D}_{\{q,r\}}$ es denso en $\langle P, \supset\rangle$ para cualquier $\{q,r\} \in [\mathbb{Q}]^2$.

b) $\mathcal{D}_{U,V,n}$ es denso en $\langle P, \supset\rangle$ para cualesquiera $\langle U, V\rangle \in K$ y $n \in \omega$.

Demostración.
a)

Sean $\{q,r\} \in [\mathbb{Q}]^2$ y $p \in P \setminus \mathcal{D}_{\{q,r\}}$. Entonces $\{q,r\} \notin \mathrm{dom}(p)$, por lo que $p' = p \cup \{\langle\{q,r\},0\rangle\} \in \mathcal{D}_{\{q,r\}}$ y $p' \supset p$. Por lo tanto, $\mathcal{D}_{\{q,r\}}$ es denso en P.

b)

Sean $\langle U, V\rangle \in K$, $n \in \omega$ y $p = \{\langle\{p_i, q_i\}, k_i\rangle : i < m\} \in P$, donde $m = |\mathrm{dom}(p)|$. Como $U, V \in [\mathbb{Q}]^{<\omega}$, entonces $S = U \cup V \cup \bigcup_{i<m}\{p_i - 1, p_i, p_i + 1, q_i - 1, q_i, q_i + 1\}$ es finito. Como supusimos que I es un subconjunto denso de $\mathbb{Q}$, existe $q \in I \cap (m_{\langle U,V\rangle}, m_{\langle U,V\rangle} + 1/n)_{\mathbb{Q}} \setminus S$. Sea $p' = p \cup \{\langle\{q,u\},1\rangle : u \in U\} \cup \{\langle\{q,v\},0\rangle : v \in V\}$. Queremos ver que $p' \in P$.

Como $q \notin S \subseteq U \cup V \cup \mathrm{dom}(p)$ y $U \cap V = \varnothing$, entonces p' es una función parcial de $[\mathbb{Q}]^2$ a 2. Supongamos que $\langle\{a,b\},1\rangle, \langle\{a+1,b\},1\rangle \in p'$ y $b \leq a+1$ para algunos $a, b \in \mathbb{Q}$. Debido a como fue definido P y a que $p \in P$, vemos que $q \in \{a, a+1, b\}$. Entonces podemos ver los siguientes casos:

Si $q = a+1$, entonces $b \neq a+1 = q$ ya que $\{a+1, b\} \in [\mathbb{Q}]^2$ y $\langle\{q-1,b\},1\rangle \in p'$. Además, $\langle\{q-1,b\},1\rangle \in p$, por lo que $(q-1)+1 = q \in S$, lo que es imposible.

Si $q = a$, entonces $b \neq a = q$ ya que $\{a+1, b\} \in [\mathbb{Q}]^2$ y $\langle \{q+1, b\}, 1\rangle \in p'$. Además, $\langle \{q+1, b\}, 1\rangle \in p$, por lo que $(q+1) - 1 = q \in S$, lo que es imposible.

Si $q = b$, entonces $\langle \{q, a\}, 1\rangle, \langle \{q, a+1\}, 1\rangle \in p' \setminus p$ ya que $q \notin \bigcap \operatorname{dom}(p)$. Por como definimos p', tenemos que $a, a+1 \in U$. Como $m_{\langle U,V\rangle} < q$, entonces $a+1 < q = b$, lo que es imposible.

Como ninguno de lo tres casos es posible, hay una contradicción, por lo que si $\langle \{a, b\}, 1\rangle, \langle \{a+1, b\}, 1\rangle \in p'$ para algunos $a, b \in \mathbb{Q}$ entonces $b > a + 1$. Esto es, $p \in P$ y $p' \in \mathcal{D}_{U,V,n}$. Como $p' \supset p$, entonces concluímos que $\mathcal{D}_{U,V,n}$ es denso. $\square$

Habiendo visto esto, podemos construir finalmente la gráfica que necesitamos.

Lema 4.10.

a) Existe un filtro G en P tal que G intersecta a $\mathcal{D}_{\{q,r\}}$ para toda $\{q, r\} \in [\mathbb{Q}]^2$ y a $\mathcal{D}_{U,V,n}$ para cualesquiera $\langle U, V\rangle \in K$ y $n \in \omega$.

b) $f = \bigcup_{p \in G} p$ es una función de $[\mathbb{Q}]^2$ en 2.

c) Sea $\varrho = f^{-1}[\{1\}]$. Si $I \subseteq A \subseteq \mathbb{Q}$, entonces $\langle A, \varrho|_A\rangle$ es una gráfica random.

d) Sea $C \subseteq \mathbb{Q}$ tal que $a = \max C$ existe y $a - 1 \in C$. Entonces $C \notin \mathbb{P}(\langle \mathbb{Q}, \varrho\rangle)$.

Demostración.

a)

Sea $D = \{\mathcal{D}_{\{q,r\}} : \{q,r\} \in [\mathbb{Q}]^2\} \cup \{\mathcal{D}_{U,V,n} : \langle U,V\rangle \in K \wedge n \in \omega\}$. Por el lema 4.9 sabemos que D es una familia numerable de conjuntos densos en P y por el lema de Rasiowa-Sikorski sabemos que existe un filtro G en P tal que para toda $d \in D$ se cumple que $d \cap G \neq \varnothing$.

b)

Sean G un filtro como en el inciso previo y $f = \bigcup_{p\in G} p$. Queremos ver que f es una función de $[\mathbb{Q}]^2$ en 2. Como $G \subseteq P$, entonces $f \subseteq [\mathbb{Q}]^2 \times 2$ y, como G es un filtro, todos sus elementos son compatibles entre sí, por lo que f es una función.

Sean $\{q,r\} \in [\mathbb{Q}]^2$ y $p \in G \cap \mathcal{D}_{\{q,r\}}$. Entonces vemos que $\{q,r\} \in \mathrm{dom}(p) \subseteq \mathrm{dom}(f)$. Por lo tanto, $\mathrm{dom}(f) = [\mathbb{Q}]^2$.

c)

Sea $\varrho = f^{-1}[\{1\}]$. Sean A tal que $I \subseteq A \subseteq \mathbb{Q}$ y $U, V \subseteq A$ finitos y ajenos. Entonces $\langle U,V\rangle \in K$ y, por como se eligió G, sabemos que existen $p \in G \cap \mathcal{D}_{U,V,1}$ y $q \in I \cap (m_{\langle U,V\rangle}, m_{\langle U,V\rangle}+1)_{\mathbb{Q}} \subseteq A$ tales que $\langle \{q,u\}, 1\rangle \in p \subset f$ para toda $u \in U$ y $\langle \{q,v\}, 0\rangle \in p \subset f$ para toda $v \in V$.

Por lo tanto, existe $q \in A$ tal que $\{q,u\} \in \varrho$ para toda $u \in U$ y $\{q,v\} \notin \varrho$ para toda $v \in V$. Esto es, $\langle A, \varrho|_A\rangle$ tiene la propiedad de extensión. Como I es numerable por ser denso en $\mathbb{Q}$ e $I \subseteq A \subseteq \mathbb{Q}$, tenemos que A es numerable, por lo que $\langle A, \varrho|_A\rangle \cong \mathcal{R}$.

d)

Sea $C \subset \mathbb{Q}$ tal que $a = \text{máx}\, C$ existe y $a-1 \in C$. Como $\langle \mathbb{Q}, \varrho \rangle$ es una gráfica random, sabemos que existe $b \in C$ tal que $\{a-1, b\}, \{a, b\} \in \varrho$ por la propiedad de extensión. Entonces $\langle \{a-1, b\}, 1 \rangle, \langle \{a, b\}, 1 \rangle \in f$ y existen $p_1, p_2 \in G$ tales que $\langle \{a-1, b\}, 1 \rangle \in p_1$ y $\langle \{a, b\}, 1 \rangle \in p_2$ ya que $f = \bigcup_{p \in P} p$. Como G es un filtro, entonces existe $p \in G$ tal que $p_1, p_2 \subseteq p$ y como $p \in P$, tenemos que $a < b$, lo que es imposible ya que $a = \text{máx}\, C$ y $b \in C$. Por lo tanto, $\langle C, \varrho \cap [\mathbb{Q}]^2 \rangle$ no tiene la propiedad de extensión. $\square$

Ahora que tenemos nuestra gráfica random podemos demostrar la implicación A)$\rightarrow$B) del teorema 4.1 cuando L es no numerable:

Lema 4.11. Sea $L = \langle X, < \rangle$ un orden lineal completo no numerable $\mathbb{R}$-encajable tal que 0_L no está aislado. Entonces L es isomorfo a una cadena maximal en $\langle \mathbb{P}(\mathcal{R}) \cup \{\varnothing\}, \subset \rangle$.

Demostración. Sea $L = \langle X, < \rangle$ un orden lineal completo no numerable $\mathbb{R}$-encajable tal que 0_L no está aislado. Sean L_x para $x \in \overline{\mathbb{R}}$ como en el lema 4.6 y $M = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : |L_x| > 1\}$. Sabemos por 4.6.c que M es a lo más numerable y por 4.6.d que se cumple o que $|L_{-\infty}| = 1$ o que $0_{L_{-\infty}}$ es no aislado.

Caso I: cuando $|L_{-\infty}| = 1$ y $\infty \in M$.

Sea $\{I\} \cup \{J_y : y \in M\}$ una partición de $\mathbb{Q}$ tal que todos sus elementos sean densos en $\mathbb{Q}$. Sabemos que esto es posible debido a la proposición 4.8. Asimismo, sea $\langle \mathbb{Q}, \varrho \rangle$ la gráfica random obtenida en el lema 4.10. A lo largo de esta demostración también haremos uso de los conjuntos $\mathcal{D}_{\{q,r\}}$, $\mathcal{D}_{U,V,n}$ y $m_{\langle U,V\rangle}$ definidos previamente en esta sección.

Sea $I_y \in [J_y \cap (-\infty, y)_{\overline{\mathbb{R}}}]^{|L_y|-1}$ para $y \in M$. Entonces definimos:

$$A_{-\infty} = \varnothing$$

$$A_x = \Big(I \cap (-\infty, x)_{\overline{\mathbb{R}}}\Big) \cup \bigcup_{y \in M \cap (-\infty, x)_{\overline{\mathbb{R}}}} I_y \text{ para } x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \text{ y}$$

$$A_x^+ = A_x \cup I_x \text{ para } x \in M$$

Veamos varias propiedades importantes de estos conjuntos:

(a) Como $J_y \subseteq \mathbb{Q}$ para toda $y \in M$, tenemos que $I_y \subseteq \mathbb{Q}$ para toda $y \in M$. Por otro lado, como $I \subseteq \mathbb{Q}$, entonces $A_x \subseteq \mathbb{Q}$ para toda $x \in [-\infty, \infty]_{\overline{\mathbb{R}}}$ y $A_x^+ \subseteq \mathbb{Q}$ para toda $x \in M$.

(b) Podemos ver que $A_x \subseteq (-\infty, x)_{\overline{\mathbb{R}}}$ para toda $x \in \overline{\mathbb{R}}$. Más aún, si $x \in M$, entonces $A_x^+ \subseteq (-\infty, x)_{\overline{\mathbb{R}}}$.

(c) Para $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ tales que $x < y$ se cumple que $A_x \subset A_y$. Más aún, si $x \in M$, entonces $A_x^+ \subset A_y$, y si $y \in M$, entonces $A_x^+ \subset A_y^+$.

(d) Para toda $x \in M$ se cumple que $|A_x^+ \setminus A_x| = |I_x| = |L_x| - 1$.

Como $I \subseteq A_\infty^+ \subseteq \mathbb{Q}$ sabemos por el lema 4.10 que $\langle A_\infty^+, \varrho|_{A_\infty^+}\rangle$ es una gráfica random. Para facilitar la notación, nos referiremos a ella simplemente como A_∞^+ y a la relación correspondiente como

ϱ. Asimismo, por la propiedad (c) sabemos que para toda $x \in \overline{\mathbb{R}}$ se cumple que $A_x \subseteq A_\infty^+$ y si $x \in M$, entonces $A_x^+ \subseteq A_\infty^+$. Veamos algunos de los elementos de $\langle A_\infty^+, \varrho\rangle$:

(e) Sean $x \in (-\infty, \infty]_{\mathbb{R}}$ y A tales que $I \cap (-\infty, x)_{\mathbb{R}} \subseteq A \subseteq A_x$. Queremos ver que $A \in \mathbb{P}(A_\infty^+)$. Sean $U, V \subseteq A$ finitos y disjuntos. Por la propiedad (b) sabemos que $U, V \subseteq A \subseteq (-\infty, x)_{\mathbb{R}}$, por lo que $m_{\langle U,V\rangle} < x$. Entonces existe $n \in \omega \setminus \{0\}$ tal que $(m_{\langle U,V\rangle}, m_{\langle U,V\rangle} + 1/n)_{\mathbb{R}} \subset (-\infty, x)_{\mathbb{R}}$ e $I \cap (m_{\langle U,V\rangle}, m_{\langle U,V\rangle} + 1/n)_{\mathbb{R}} \subseteq I \cap (-\infty, x)_{\mathbb{R}} \subseteq A$. Sea $p \in \mathcal{D}_{U,V,n}$. Entonces existe $q \in I \cap (m_{\langle U,V\rangle}, m_{\langle U,V\rangle} + 1/n)_{\mathbb{R}} \subseteq A$ tal que para toda $u \in U$ se cumple que $\langle \{q, u\}, 1\rangle \in p \subseteq f$ y para toda $v \in V$ se cumple que $\langle \{q, v\}, 0\rangle \in p \subseteq f$, donde f es la función del lema 4.10 con la que se definió ϱ. Por lo tanto, existe $q \in A$ tal que $\{q, u\} \in \varrho$ para toda $u \in U$ y $\{q, v\} \notin \varrho$ para toda $v \in V$. Por lo tanto, $\langle A, \varrho|_A\rangle$ es una gráfica random y $A \in \mathbb{P}(A_\infty^+)$. En particular, $A_x \in \mathbb{P}(A_\infty^+)$.

(f) Sean $x \in M$ y A tales que $I \cap (-\infty, x)_{\mathbb{R}} \subseteq A \subseteq A_x^+$. Queremos ver que $A \in \mathbb{P}(A_\infty^+)$. Podemos ver que $A_x^+ \subseteq (-\infty, x)_{\overline{\mathbb{R}}}$, por lo que la prueba de esta propiedad es la misma que la de la propiedad (e).

(g) Debido a lo visto en las propiedades (e) y (f), tenemos que para toda $x \in M$ se cumple que

$$[A_x, A_x^+]_{\mathscr{P}(A_x^+)} = [A_x, A_x^+]_{\mathbb{P}(A_x^+)}.$$

Para $x \in \overline{\mathbb{R}}$ definiremos la cadena $\mathscr{L}_x$ en $\mathbb{P}(A_x^+)$ de la siguiente manera:

- Si $x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus M$, entonces $\mathscr{L}_x = \{A_x\}$. Evidentemente, $\mathscr{L}_{-\infty} = \{\varnothing\}$ ya que estamos viendo el caso en que $|L_{-\infty}| = 1$, por lo que $L_{-\infty} \notin M$.

- Si $x \in M$, sabemos que $A_x, A_x^+ \in \mathbb{P}(A_\infty^+)$ debido a las propiedades (e) y (f), que $|A_x^+ \setminus A_x| = |I_x| = |L_x| - 1$ por la propiedad (d) y que $[A_x, A_x^+]_{\mathscr{P}(A_x^+)} = [A_x, A_x^+]_{\mathbb{P}(A_x^+)}$ por la propiedad (g). Sabemos L_x es un orden lineal completo a lo más numerable debido al lema 4.6, por lo que el lema 4.7 nos dice que existe $\mathscr{L}_x \subset \mathbb{P}(A_x^+)$ tal que

  - $\langle \mathscr{L}_x, \subset \rangle \cong \langle L_x, < \rangle$,
  - $A_x, A_x^+ \in \mathscr{L} \subseteq [A_x, A_x^+]_{\mathbb{P}(A_x^+)}$, y
  - para cada cortadura $\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \rangle$ es cierto que $\bigcup \mathfrak{A}, \bigcap \mathfrak{B} \in \mathscr{L}_x$ y $\left| \bigcap \mathfrak{B} \setminus \bigcup \mathfrak{A} \right| \leq 1$.

Sean $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ tales que $x < y$. Queremos ver que $\mathscr{L}_x \lhd \mathscr{L}_y$. Sean $A \in \mathscr{L}_x$ y $B \in \mathscr{L}_y$. Vemos dos casos:

- Si $x \in (-\infty, \infty]_{\overline{\mathbb{R}}} \setminus M$, entonces $A = A_x$ debido a cómo fue definido $\mathscr{L}_x$ y como $\mathscr{L}_y$ es una cadena completa tenemos que $A_y = \text{ínf}\, \mathscr{L}_y$. Por la propiedad (c) vemos que $A_x \subset A_y$, por lo que $A = A_x \subset A_y \subseteq B$.

- Si $x \in M$, entonces $A \subseteq A_x^+ = \sup \mathscr{L}_x$ debido a la definición de $\mathscr{L}_x$ y a que es una cadena completa. Como $x < y$, la propiedad (c) nos dice que $A_x^+ \subseteq A_y$, por lo que $A \subseteq A_x^+ \subset A_y \subseteq B$.

Por lo tanto, $\mathscr{L}_x \lhd \mathscr{L}_y$. Como $A_y \in \mathscr{L}_y$ y $A_y = \inf \mathscr{L}_y$, tenemos que $\bigcup \mathscr{L}_x \subseteq A_y \subseteq \bigcup \mathscr{L}_y$ y $\langle \overline{\mathbb{R}}, < \rangle \cong \langle \{\mathscr{L}_x : x \in \overline{\mathbb{R}}\}, \lhd \rangle$.

Sea $\mathscr{L} = \bigcup_{x \in \overline{\mathbb{R}}} \mathscr{L}_x$. Queremos ver que $\mathscr{L}$ es una cadena maximal en $\langle \mathbb{P}(A_\infty^+) \cup \{\varnothing\}, \subset \rangle$ isomorfa a L. Como $\langle \overline{\mathbb{R}}, < \rangle \cong \langle \{\mathscr{L}_x : x \in \overline{\mathbb{R}}\}, \lhd \rangle$ y para toda $x \in \overline{\mathbb{R}}$ se cumple que $L_x \cong \mathscr{L}_x$, entonces $\langle \mathscr{L}, \subset \rangle \cong \sum_{x \in \overline{\mathbb{R}}} \langle \mathscr{L}_x, \subset \rangle \cong \sum_{x \in \overline{\mathbb{R}}} L_x \cong L$. Por lo tanto, $\mathscr{L} \subseteq \mathbb{P}(A_\infty^+) \cup \{\varnothing\}$ es una cadena, únicamente nos falta ver que es maximal.

Sea existe $C \in \mathbb{P}(A_\infty^+) \cup \{\varnothing\}$ tal que $\mathscr{L} \cup \{C\}$ es una cadena. Sabemos que $\varnothing \in \mathscr{L}_{-\infty} \subseteq \mathscr{L}$ y que $\infty \in M$ ya que este es el caso que estamos considerando. Por lo tanto, $A_\infty^+ \in \mathscr{L}_\infty \subseteq \mathscr{L}$. Sean $\mathfrak{A} = \{A \in \mathscr{L} : A \subset C\}$ y $\mathfrak{B} = \{B \in \mathscr{L} : C \subset B\}$. Entonces vemos que $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \neq \varnothing$ y, como $\mathscr{L} \cup \{C\}$ es cadena, todos sus elementos son comparables entre sí y $\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \rangle$ es una cortadura de $\mathscr{L}$.

Por otro lado, como $A_x \in \mathscr{L}$ para toda $x \in \overline{\mathbb{R}}$, tenemos que $\{A_x : x \in (-\infty, \infty]_{\overline{\mathbb{R}}}\} \subseteq \mathscr{L} \setminus \{\varnothing\}$. Asimismo, por la propiedad (b) sabemos que $A_x \subseteq (-\infty, x)_{\overline{\mathbb{R}}}$ para toda $x \in \overline{\mathbb{R}}$, por lo que $\bigcap (\mathscr{L} \setminus \{\varnothing\}) \subseteq \bigcap \{A_x : x \in (-\infty, \infty]_{\overline{\mathbb{R}}}\} \subseteq \bigcap \{(-\infty, x]_{\overline{\mathbb{R}}} : x \in \overline{\mathbb{R}}\} = \varnothing$. Por lo tanto, $\mathfrak{A} \neq \{\varnothing\}$ ya que $\bigcup \mathfrak{A} \subseteq C \subseteq \bigcap \mathfrak{B}$.

Entonces vemos los siguientes dos casos:

- Si existe $x' \in (-\infty, \infty]_{\overline{\mathbb{R}}}$ tal que $\mathfrak{A} \cap \mathscr{L}_{x'}, \mathfrak{B} \cap \mathscr{L}_{x'} \neq \varnothing$.

Entonces $|\mathscr{L}_{x'}| > 1$ y $\langle \mathfrak{A} \cap \mathscr{L}_{x'}, \mathfrak{B} \cap \mathscr{L}_{x'} \rangle$ es una cortadura de $\mathscr{L}_{x'}$. Como $|L_x| = 1$ para toda $x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus M$, entonces $x' \in M$. Por lo tanto, $\bigcup(\mathfrak{A} \cap \mathscr{L}_{x'}), \bigcap(\mathfrak{B} \cap \mathscr{L}_{x'}) \in \mathscr{L}_{x'}$ y $|\bigcap(\mathfrak{B} \cap \mathscr{L}_{x'}) \setminus \bigcup(\mathfrak{A} \cap \mathscr{L}_{x'})| \leq 1$ debido a la definición de $\mathscr{L}_{x'}$. Ahora bien, sabemos que para $x \in \overline{\mathbb{R}}$ tal que $x < x'$ se cumple que $\mathscr{L}_x \lhd \mathscr{L}_{x'}$ y $\bigcup \mathscr{L}_x \subseteq A_{x'} \subseteq \bigcup \mathscr{L}_{x'}$, por lo que $\mathfrak{A} = \bigcup_{x<x'} \mathscr{L}_x \cup (\mathfrak{A} \cap \mathscr{L}_{x'})$ y $\bigcup \mathfrak{A} = \bigcup(\mathfrak{A} \cap \mathscr{L}_{x'}) \in \mathscr{L}$. Se ve de manera análoga que $\bigcap \mathfrak{B} = \bigcap(\mathfrak{B} \cap \mathscr{L}_{x'}) \in \mathscr{L}$. Por lo tanto , como $|\bigcap \mathfrak{B} \setminus \bigcup \mathfrak{A}| \leq 1$, entonces $C \in \mathscr{L}$.

- Cuando para toda $x \in (-\infty, \infty]_{\overline{\mathbb{R}}}$ se cumple que $\mathfrak{A} \cap \mathscr{L}_x = \varnothing$ o $\mathfrak{B} \cap \mathscr{L}_x = \varnothing$. Vemos que, como $\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \rangle$ es una partición, para toda $x \in (-\infty, \infty]_{\overline{\mathbb{R}}}$ se cumple que $\mathscr{L}_x \subseteq \mathfrak{A}$ o $\mathscr{L}_x \subseteq \mathfrak{B}$. Asimismo, como $\mathfrak{A} \neq \{\varnothing\}$, entonces $\mathfrak{A}' = \{x \in (-\infty, \infty]_{\overline{\mathbb{R}}} : \mathscr{L}_x \subseteq \mathfrak{A}\}$ y $\mathfrak{B}' = \{x \in (-\infty, \infty]_{\overline{\mathbb{R}}} : \mathscr{L}_x \subseteq \mathfrak{B}\}$ son ajenos, no vacíos y $\mathfrak{A}' \cup \mathfrak{B}' = (-\infty, \infty]_{\overline{\mathbb{R}}}$. Como $\mathfrak{A} \lhd \mathfrak{B}$, entonces $\mathscr{L}_x \lhd \mathscr{L}_y$ y $x < y$ para cualesquiera $x \in \mathfrak{A}$ y $y \in \mathfrak{B}$. Por lo tanto, $\langle \mathfrak{A}', \mathfrak{B}' \rangle$ es una cortadura de $(-\infty, \infty]_{\overline{\mathbb{R}}}$, por lo que existe $\max \mathfrak{A}'$ o $\min \mathfrak{B}'$.

  - Si existe $x' = \max \mathfrak{A}'$, entonces $x' < \infty$ ya que $\mathfrak{B}$ es no vacío y $\mathfrak{A} = \bigcup_{x \in (-\infty, x']_{\overline{\mathbb{R}}}} \mathscr{L}_x$. Como para toda $x < x'$ se cumple que $\mathscr{L}_x \lhd \mathscr{L}_{x'}$, entonces $\bigcup \mathfrak{A} = \bigcup_{x \leq x'} \bigcup \mathscr{L}_x = \left(\bigcup_{x<x'} \bigcup \mathscr{L}_x\right) \cup \bigcup \mathscr{L}_{x'} = \bigcup \mathscr{L}_{x'}$. Por como fue definida

$\mathscr{L}_{x'}$ vemos que:

$$\bigcup \mathfrak{A} = \begin{cases} A_{x'} & \text{si } x' \notin M \\ A_{x'}^{+} & \text{si } x' \in M \end{cases}$$

Por otro lado, vemos que $\mathfrak{B} = \bigcap_{x \in (x', \infty]_{\overline{\mathbb{R}}}} \mathscr{L}_x$ y $\bigcap \mathscr{L}_x = A_x$ para toda $x \in \overline{\mathbb{R}}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \bigcap \mathfrak{B} &= \bigcap_{x \in (x', \infty]_{\overline{\mathbb{R}}}} \bigcap \mathscr{L}_x = \bigcap_{x \in (x', \infty]_{\overline{\mathbb{R}}}} A_x \\ &= \bigcap_{x \in (x', \infty]_{\overline{\mathbb{R}}}} \big(I \cap (-\infty, x)_{\overline{\mathbb{R}}}\big) \cup \\ &\qquad \bigcap_{x \in (x', \infty]_{\overline{\mathbb{R}}}} \bigcup_{y \in M \cap (-\infty, x)_{\overline{\mathbb{R}}}} I_y \\ &= A_{x'} \cup (I \cap \{x'\}) \cup \bigcup_{y \in M \cap \{x'\}} I_y \end{aligned}$$

Esto es,

$$\bigcap \mathfrak{B} = \begin{cases} A_{x'} & \text{si } x' \notin I \text{ y } x' \notin M \\ A_{x'} \cup \{x'\} & \text{si } x' \in I \text{ y } x' \notin M \\ A_{x'}^{+} & \text{si } x' \notin I \text{ y } x' \in M \\ A_{x'}^{+} \cup \{x'\} & \text{si } x' \in I \text{ y } x' \in M \end{cases}$$

Entonces vemos que:

- Si $x' \notin I$, entonces $\bigcup \mathfrak{A} = \bigcap \mathfrak{B} = C \in \mathscr{L}$.
- Si $x' \in I$ y $x \notin M$, entonces $\bigcup \mathfrak{A} = A_{x'}$ y $\bigcap \mathfrak{B} = A_{x'} \cup \{x'\}$. Como $\bigcup \mathfrak{A} \subseteq C \subseteq \bigcap \mathfrak{B}$ y $C \notin \mathscr{L}$,

entonces $C = \bigcap \mathfrak{B}$. Asimismo, sabemos que $x' = \max \bigcap \mathfrak{B}$, por lo que $C = \bigcap \mathfrak{B} \notin \mathbb{P}(A^+_\infty)$ debido al lema 4.10.d. Sin embargo, esto es imposible ya que supusimos que $C \in \mathbb{P}(A^+_\infty)$.

- Si $x' \in I$ y $x' \in M$, entonces $\bigcup \mathfrak{A} = A^+_{x'}$ y $\bigcap \mathfrak{B} = A^+_{x'} \cup \{x'\}$. Como $\bigcup \mathfrak{A} \subseteq C \subseteq \bigcap \mathfrak{B}$ y $C \notin \mathscr{L}$, entonces $C = \bigcap \mathfrak{B}$ debido al lema 4.10.d. Asimismo, sabemos que $x' = \max \bigcap \mathfrak{B}$, por lo que $C = \bigcap \mathfrak{B} \notin \mathbb{P}(A^+_\infty)$. Sin embargo, esto es imposible ya que supusimos que $C \in \mathbb{P}(A^+_\infty)$.

– Si existe $x' = \min \mathfrak{B}'$, entonces $A_{x'} \in \mathscr{L}_{x'} \subseteq \mathfrak{B} = \bigcap_{x \in (x', \infty]_{\overline{\mathbb{R}}}} \mathscr{L}_x$. Como para toda $x \in (x', \infty]_{\overline{\mathbb{R}}}$ se cumple que $\mathscr{L}_{x'} \lhd \mathscr{L}_x$ y $\mathscr{L}_x \subseteq \mathfrak{B}$, vemos que $A_{x'} = \bigcap \mathscr{L}_{x'}$. Ahora bien, sabemos que $A_x \in \mathscr{L}_x$ para toda $x \in (x', \infty]_{\overline{\mathbb{R}}}$ y que $\mathfrak{A} = \bigcup_{x \in (-\infty, x')_{\overline{\mathbb{R}}}} \mathscr{L}_x$. Por lo tanto, tenemos que

$$\bigcup_{x \in (-\infty, x')_{\overline{\mathbb{R}}}} A_x \subseteq \bigcup \mathfrak{A} = \bigcup_{x \in (-\infty, x')_{\overline{\mathbb{R}}}} \bigcup \mathscr{L}_x, \text{ y}$$

$$\begin{aligned}\bigcup_{x \in (-\infty, x')_{\overline{\mathbb{R}}}} A_x &= \bigcup_{x \in (-\infty, x)_{\overline{\mathbb{R}}}} \big(I \cap (-\infty, x')_{\overline{\mathbb{R}}}\big) \cup \\ &\qquad \bigcup_{x \in (-\infty, x')_{\overline{\mathbb{R}}}} \bigcup_{y \in M \cap (-\infty, x')_{\overline{\mathbb{R}}}} I_y \\ &= \big(I \cap (-\infty, x')_{\overline{\mathbb{R}}}\big) \cup \bigcup_{y \in M \cap (-\infty, x')_{\overline{\mathbb{R}}}} I_y \\ &= A_{x'}.\end{aligned}$$

Esto es, $A_{x'} \subseteq \bigcup \mathfrak{A} \subseteq C \subseteq \bigcap \mathfrak{B} = A_{x'}$, por lo que $C = A_{x'} \in \mathscr{L}$.

Caso II: cuando $|L_{-\infty}| = 1$ y $\infty \notin M$.

En este caso vemos que $L_\infty = \{\text{máx}\, L\}$. Sean x' tal que $x < x'$ para toda $x \in X$ y $L' = \langle X \cup \{x'\}, <\rangle$. Entonces L' satisface el caso I, por lo que existen una cadena maximal $\mathscr{L}$ en $\langle \mathbb{P}(\mathcal{R}), \subset\rangle$ y un isomorfismo $f : \langle L', <\rangle \to \langle \mathscr{L}, \subset\rangle$.

Sean $A = f(\text{máx}\, L)$ y $\mathscr{L}' = f[L]$. Entonces vemos que $A \in \mathbb{P}(\mathcal{R})$ y $\mathscr{L}' \cong L$. Por lo tanto, por la maximalidad de $\mathscr{L}$, tenemos que $\mathscr{L}'$ es una cadena maximal en $\langle \mathbb{P}(\mathcal{R}), \subset\rangle$.

Caso III: cuando $|L_{-\infty}| > 1$.

Sabemos por el lema 4.6.d que $L_{-\infty}$ es un orden lineal completo numerable tal que $0_{L_{-\infty}}$ es no aislado. Sea $L^+ = \sum_{x \in (-\infty,\infty]_{\overline{\mathbb{R}}}} L_x = \sum_{y \in (0,\infty]} L_{\ln(y)}$. Entonces, $L = L_{-\infty} + L^+$. Para $y \in \overline{\mathbb{R}}$ sean L'_y órdenes lineales disjuntos tales que:

- $L'_y \cong 1$ para $y \in [-\infty, 0]_{\overline{\mathbb{R}}}$, y
- $L'_y \cong L_{\ln(y)}$ para $y \in (0, \infty]_{\overline{\mathbb{R}}}$.

Entonces vemos que $L' = \sum_{y \in \overline{\mathbb{R}}} L'_y \cong [-\infty, 0]_{\overline{\mathbb{R}}} + L^+$, por lo que L' satisface el caso I o II. Esto es, existe una cadena maximal $\mathscr{L}$ en $\langle \mathbb{P}(\mathcal{R}), \subset\rangle$ y un isomorfismo $f : \langle L', <\rangle \to \langle \mathscr{L}, \subset\rangle$.

Sean $A = f(0)$ y $\mathscr{L}^+ = f[L^+]$. Entonces tenemos que $A \in \mathscr{L}$ y $\mathscr{L}^+ \cong L^+$. Como $L_{-\infty}$ es un orden lineal completo con $0_{L_{-\infty}}$ no aislado, sabemos por el lema 4.5 que existe una cadena maximal $\mathscr{L}_{-\infty}$ en $\langle \mathbb{P}(A), \subset \rangle$ tal que $\mathscr{L}_{-\infty} \cong L_{-\infty}$.

Como $A \notin f[L^+]$, entonces $A \in \mathscr{L}_{-\infty}$. Sea $\mathscr{L}' = \mathscr{L}_{-\infty} \cup \mathscr{L}^+ \cong L_{-\infty} + L^+ = L$. Supongamos que existe $B \in \mathbb{P}(\mathcal{R})$ tal que $\mathscr{L}' \cup \{B\}$ es cadena. Entonces vemos los siguientes dos casos:

- Si $A \subseteq B$, entonces $\mathscr{L}^+ \cup \{B\}$ es cadena en $\mathbb{P}(\mathcal{R}) \cup \{\varnothing\}$, por lo que $B \in \mathscr{L}^+$ debido a la maximalidad de $\mathscr{L}^+$.

- Si $B \subseteq A$, entonces $\mathscr{L}_{-\infty} \cup \{B\}$ es cadena en $\mathbb{P}(A) \cup \{\varnothing\}$, por lo que $B \in \mathscr{L}_{-\infty}$ debido a la maximalidad de $\mathscr{L}_{-\infty}$.

Por lo tanto, concluímos que $\mathscr{L}'$ es una cadena maximal en $\mathbb{P}(\mathcal{R})$. $\square$

Apéndice A

V_ω como modelo de ZFC-Inf

En este anexo de dará la demostración de que V_ω es un modelo de ZFC sin el axioma de infinito. Este hecho es mencionado en el capítulo 3.3, sin embargo, únicamente se usan unos cuantos de los axiomas. A pesar de eso, aquí se da la prueba en su totalidad.

Teorema A.1. La estructura $\langle V_\omega, \in \rangle$ es modelo de ZFC - Inf.

Demostración.
Axioma de Extensionalidad

Sean $x, y \in V_\omega$ tales que $x \neq y$. Por el axioma de extensionalidad en el universo existe z tal que se cumple que $z \in x$ y $z \notin y$ o que $z \notin x$ y $z \in y$. Como V_ω es transitivo, sabemos que $z \in V_\omega$. Por lo tanto, para toda $z \in V_\omega$ se cumple que $x = y$ si y sólo si $z \in x$ y $z \in y$.

Axioma del Par

Sean $x, y \in V_\omega$ y $n = \text{máx}\{\text{rank}(x), \text{rank}(y)\}$. Entonces sabemos que $x, y \in V_{n+1}$, por lo que $\{x, y\} \in \mathscr{P}(V_{n+1}) = V_{n+2} \subseteq V_\omega$.

Esquema de Separación

Sean φ una fórmula con dos variables libres, $x \in V_\omega$ y $n \in \omega$ tal que $n = \text{rank}(x)$. Sea $y = \{z \in x : \varphi(z, p)\}$ para alguna $p \in V_\omega$. Entonces tenemos que $y \subseteq x \subseteq V_n$, por lo que $y \in \mathscr{P}(V_n) = V_{n+1} \subset V_\omega$.

Axioma de la Unión

Sean $x \in V_\omega$ y $n = \text{rank}(x)$. Sabemos que para toda $y \in x$ se cumple que $y \in V_n$, por lo que $y \subset V_n$ ya que V_n es transitivo. Por lo tanto, para cualesquiera $y \in x$ y $z \in y$ se cumple que $y \in V_n$, por lo que $\bigcup X = \{z \in y : y \in x\} \in \mathscr{P}(V_n) = V_{n+1} \subseteq V_\omega$.

Axioma del Conjunto Potencia

Sean $x \in V_\omega$, $n = \text{rank}(x)$ y $z \subseteq x$. Como para toda $y \in x$ se cumple que $y \in V_n$, entonces $z \in \mathscr{P}(V_n) = V_{n+1} \subseteq V_\omega$. Por lo tanto, $\mathscr{P}(x) = \{z \in V_\omega : z \subset x\} \in \mathscr{P}(V_{n+1}) = V_{n+2} \subseteq V_\omega$.

Esquema de Reemplazo

Sea φ una fórmula con tres variables libres tal que para cualesquiera $x, y, z \in V_\omega$ se cumple que $\varphi(x, y, p)$ y $\varphi(x, z, p)$, entonces $y = z$. Sea $F = \{\langle x, y\rangle : \varphi(x, y, p)\}$. Sabemos que F es una función cuyo dominio es un subconjunto de V_ω. Sean $X \in V_\omega$ y $Y = F[X]$. Entonces vemos que, como X es finito, entonces Y es finita y, por la definición de F, vemos que $Y \subseteq V_\omega$. Por la proposición 3.4.h), vemos que $Y \in V_\omega$.

Axioma de Regularidad

Sean $x \in V_\omega$, $n = \text{mín}\{\text{rank}(y) : y \in x\}$ y $y \in x$ tal que $\text{rank}(y) = n$. Para toda $z \in y$ se cumple que $\text{rank}(z) < n$, por lo que $y \cap x = \varnothing$. Finalmente, como V_ω es transitivo, vemos que $y \in V_\omega$.

Negación del Axioma del Infinito

Como V_ω es modelo de los axiomas del Vacío, Unión y Separación, sabemos que V_ω es modelo del Axioma del Infinito si y sólo si el mínimo conjunto transitivo ω está en V_ω. Como $\omega \notin V_\omega$, concluímos que V_ω no es modelo del Axioma del Infinito.

Axioma de Elección

Sabemos por la proposición 3.4.f) que V_ω es numerable, por lo que es bienordenable y por ende modelo del teorema del buen orden. Entonces sabemos que para $X \in V_\omega$ no vacío se puede definir una función de elección f_X para toda $A \in X$ como $f_X(A) = \text{mín}_S A$. Quizá la duda que queda es si $S|_X$ y por ende f_X son, en efecto, un orden y una función dentro de V_ω. Sin embargo, ya vimos que V_ω es modelo de ZF-Inf y que X es finito, por lo que $S|_X$ y f_X son el orden y la función que buscamos. Por lo tanto, existe una función de elección para todo conjunto no vacío de V_ω. $\square$

Bibliografía

[ACM11] J.A. Amor Montaño, G. Campero Arena y F.E. Miranda Perea. *Teoría de conjuntos: Curso intermedio*. Temas de Matemáticas. las prensas de ciencias, 2011. ISBN: 9786070256264.

[BK96] H. Becker y A.S. Kechris. *The Descriptive Set Theory of Polish Group Actions*. Inglés. Cambridge Texts in the History of Philosophy. Cambridge University Press, 1996. ISBN: 9780521576055. URL: https://books.google.com.mx/books?id=L4Jf%5C_ZRxqt8C.

[Cam15] P.J. Cameron. *History of the Random Graph*. Inglés. 2015. URL: https://cameroncounts.wordpress.com/2015/08/04/history-of-the-random-graph/ (visitado 24-05-2018).

[Cam11] P.J. Cameron. «The Random Graph». Inglés. En: *The Mathematics of Paul Erdös II*. Ed. por R.L. Graham y J. Nesetril. Algorithms and Combinatorics. Springer Berlin Heidelberg, 2011. ISBN: 9783642643934. URL: https://books.google.com.mx/books?id=3GXjMAEACAAJ.

[Cam10] P.J. Cameron. *The Random Graph, 1*. Inglés. 2010. URL: https://cameroncounts.wordpress.com/2010/07/09/the-random-graph-1/ (visitado 24-05-2018).

[Eng89] R. Engelking. *General topology*. Inglés. Sigma series in pure mathematics. Heldermann Verlag, 1989. ISBN: 9783885380061. URL: https://books.google.com.mx/books?id=K3spAQAAMAAJ.

[Hod97] W. Hodges. *A Shorter Model Theory*. Inglés. Cambridge University Press, 1997. ISBN: 9780521587136. URL: https://books.google.com.mx/books?id=S6QYeuo4p1EC.

[Jec07] T. Jech. *Set Theory: The Third Millennium Edition, revised and expanded*. Inglés. Springer Monographs in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2007. ISBN: 9783540447610. URL: https://books.google.com.mx/books?id=CZb-CAAAQBAJ.

[Kur12] M.S. Kurilić. «Maximal Chains in Positive Subfamilies of P(ω)». Inglés. En: *Order* 29.1 (mar. de 2012), págs. 119-129. ISSN: 1572-9273. DOI: 10.1007/s11083-011-9201-9. URL: https://doi.org/10.1007/s11083-011-9201-9.

[Kur13] M.S. Kurilić. «Maximal Chains of Copies of the Rational Line». Inglés. En: *Order* 30.3 (nov. de 2013), págs. 737-748. ISSN: 1572-9273. DOI: 10.1007/s11083-

012-9273-1. URL: https://doi.org/10.1007/s11083-012-9273-1.

[KK13] M.S. Kurilić y B. Kuzeljević. «Maximal chains of isomorphic subgraphs of the Rado graph». Inglés. En: *Acta Mathematica Hungarica* 141.1 (oct. de 2013), págs. 1-10. ISSN: 1588-2632. DOI: 10.1007/s10474-013-0341-9. URL: https://doi.org/10.1007/s10474-013-0341-9.

[KM15] M.S. Kurilić y P. Marković. «Maximal antichains of isomorphic subgraphs of the Rado graph». Inglés. En: 29 (dic. de 2015), págs. 1919-1923.

[Sie58] W. Sierpiński. *Cardinal and ordinal numbers*. Inglés. Monografie matematyczne. Państwowe Wydawn. Naukowe, 1958. URL: https://books.google.com.mx/books?id=V4xsAAAAMAAJ.