UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE FISICA

FRACTURA POR CRECIMIENTO DIFUSIVO DE CAVIDADES EN LAS FRONTERAS DE GRANO

TESIS DOCTORAL

que para optar por el grado

de

DOCTOR EN CIENCIAS

presenta el estudiante

LORENZO MARTINEZ GOMEZ

México, D.F. Junio de 1980

(1-66)

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE FISICA

FRACTURA POR CRECIMIENTO DIFUSIVO DE CAVIDADES EN LAS FRONTERAS DE GRANO

TESIS DOCTORAL

que para optar por el grado

de

DOCTOR EN CIENCIAS

presenta el estudiante

LORENZO MARTINEZ GOMEZ

México, D.F. Junio de 1980

CON CARIÑO A LAS DOS AMAYAS

A MIS PADRES Y HERMANOS.

Reconocimientos

La realización de este trabajo no es producto solamente del esfuerzo individual del autor. Aquí convergen acciones de un grupo de personas a las que estoy profundamente agradecido.

Al Dr. William D. Nix, profesor y jefe asociado del Departamento de Ciencias e Ingeniería de Materiales de la Universidad de Stanford, debo reconocer la claridad en el planteamiento del problema y la acertada y estimulante labor de dirección en las diferentes fases de su solución.

Al Dr. Pablo Barrera, profesor de la Facultad de Ciencias (UNAM), debo la formación básica en análisis numérico y matemáticas aplicadas, ambos herramientas fundamentales para este trabajo.

Al Dr. Jorge Flores, director del Instituto de Física (UNAM), debo la formación, a lo largo de muchas horas en seminarios, en la física de los reactores nucleares y de la difusión, las cuales me dieron una base conceptual sólida para este trabajo.

Al Dr. Ricardo Gómez Ramírez, investigador del IFUNAM, y a los profesores del Departamento de Ciencias e Ingeniería de Materiales de la Universidad de Stanford debo los conocimientos en metalurgia necesarios.

A los Doctores Rubén Barrera, Jacques Soullard, Gabriel Torres y Luis Rendón, miembros del jurado examinador, agradezco las críticas y sugerencias al borrador de esta tesis.

A Diana Frayde y Concepción Sánchez se debe esta excelente labor mecanográfica y a José Manuel Zertuche su ayuda en la reproducción de la misma.

Esta tesis pudo realizarse gracias al apoyo, con una beca, del Programa de Superación del Personal Académico de la UNAM.

I n d i c e

Capítulo I

Introducción

Esta investigación se propone contribuir al conocimiento del crecimiento - de cavidades en las fronteras de grano de materiales sujetos a termofluencia a altas temperaturas. La presencia de cavidades en fronteras de grano produce un serio deterioro de las propiedades mecánicas de los materiales. La formación de burbujas de helio en las fronteras de grano, producto del sometimiento de los materiales a elevadas dosis de radiación, es una de las principales causas de la fragilización de algunos componentes de - plantas nucleares de potencia [1 - 6]. Este fenómeno tiene importancia para el diseño y la construcción de reactores nucleares por el peligro potencial que una falla de algún componente puede representar para el resto de la planta y sus alrededores.

a. Antecedentes Experimentales

La evaluación del comportamiento de materiales sujetos a altas dosis de radiación es óptima cuando se prueban adentro de los nucleos de los reactores nucleares. Sin embargo los experimentos de termofluencia en estas condiciones son difíciles y costosos. Además la irradiación produce la concurrencia simultánea de varios fenómenos que al superponerse se oscurecen entre sí. Para el estudio de materiales que se han vuelto frágiles por la - presencia de burbujas de gas en sus fronteras de grano se ha encontrado más conveniente y productiva la realización de experimentos en laboratorios afuera de las plantas nucleareas.

Varios métodos se han desarrollado para simular los efectos esenciales de la fragilización causada por las burbujas de helio. Existen experiencias de pruebas postirradiatorias de materiales que han sido tratados previamente en reactores nucleares o en otras fuentes de neutrones [7] hasta volverse frágiles. Sin embargo el manejo de las muestras, invariablemente radiativas, antes y después de las pruebas de termofluencia es muy complicado. Además el tiempo de irradiación necesario para producir el número y tamaño de burbujas de helio deseadas puede ser de meses o años.

Otro método consiste en bombardear la muestra con partículas alfa de una fuente ciclotrónica [8 - 10] . Con este método se reducen los problemas de tiempo y de manejo porque la concentración requerida de helio puede lograrse en unas cuantas horas y porque siendo mínima la activación radiactiva bastan unos cuantos días de "enfriamiento" para que la muestra pueda manipularse sin peligro. La desventaja de esta técnica es que las partículas alfa disipan mucha energía durante el bomardeo produciendo altas temperaturas y, consecuentemente, tratamientos térmicos indefinidos. Además la poca penetración de las partículas alfa obliga a trabajar con muestras muy delgadas donde los efectos superficiales pueden alterar seriamente los resultados [11]. Existe además el "truco del tritio". Esta técnica consiste en introducir tritio en metales y dejar que la reacción nuclear

$${}^{3}_{1}H \rightarrow {}^{3}_{2}He + \beta^{-}$$

transforme el tritio en helio [12,13] . Con este método es posible cargar muestras gruesas con tritio, que se difunde en los metales como el hidrógeno, y producir la concentración deseada de helio una vez que el tritio ha ya decaido. Sin embargo esta técnica está limitada para aplicarse solamente en algunos materiales donde la solubilidad del tritio es suficientemente alta. Para cargar materiales con baja solubilidad, es necesario someterlos a atmósferas de tritio de alta presión y/o esperar mucho tiempo para su decaimiento.

Goods y Nix [14 - 16] , en un esfuerzo por superar las limitaciones de los métodos anteriormente citados, desarrollaron una técnica para introducir burbujas e vapor de agua en las fronteras de grano de plata pura. Ellos supusieron, basados en que el helio es inerte, que la causa de la fragilización es la presencia de las cavidades y no la especie gaseosa que se encuentra en su interior. Su método consiste en colocar la plata en un horno a altas temperaturas (800°C) en una atmósfera de oxígeno y luego, previa purga con nitrógeno, en una atmósfera de hidrógeno. Las burbujas de vapor de agua se forman cuando el hidrógeno se difunde en la plata y reacciona con el oxígeno disuelto en ella. En un trabajo posterior, Nieh y Nix [17 - 18] extendieron la técnica para introducir burbujas de agua en cobre. Las microestructuras de burbujas de agua en plata y en cobre simulan a las burbujas de helio en sus efectos fragilizantes como se muestra en las figuras 1, 2 y 3.

En la literatura se han propuesto mecanismos para explicar el crecimiento de cavidades basados en proceso controlados por difusión [19 - 22] o por deformación plástica [25] . Nieh y Nix [26] diseñaron un experimento para probar que el crecimiento de cavidades no se rige por deformación plás

CURVAS DE TERMOFLUENCIA DE Ni-6%W CON Y SIN IRRADIACION

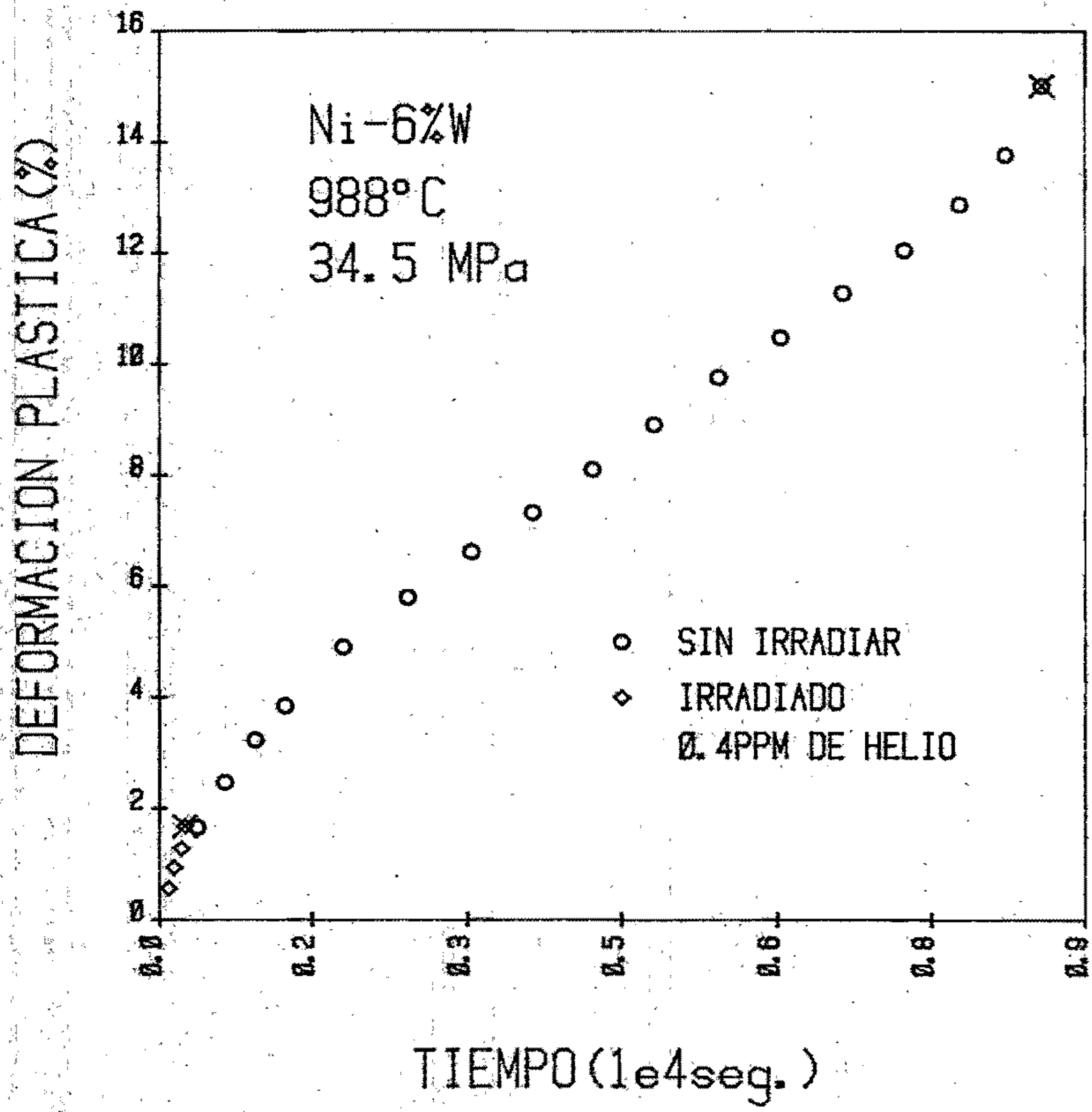


FIGURA 1

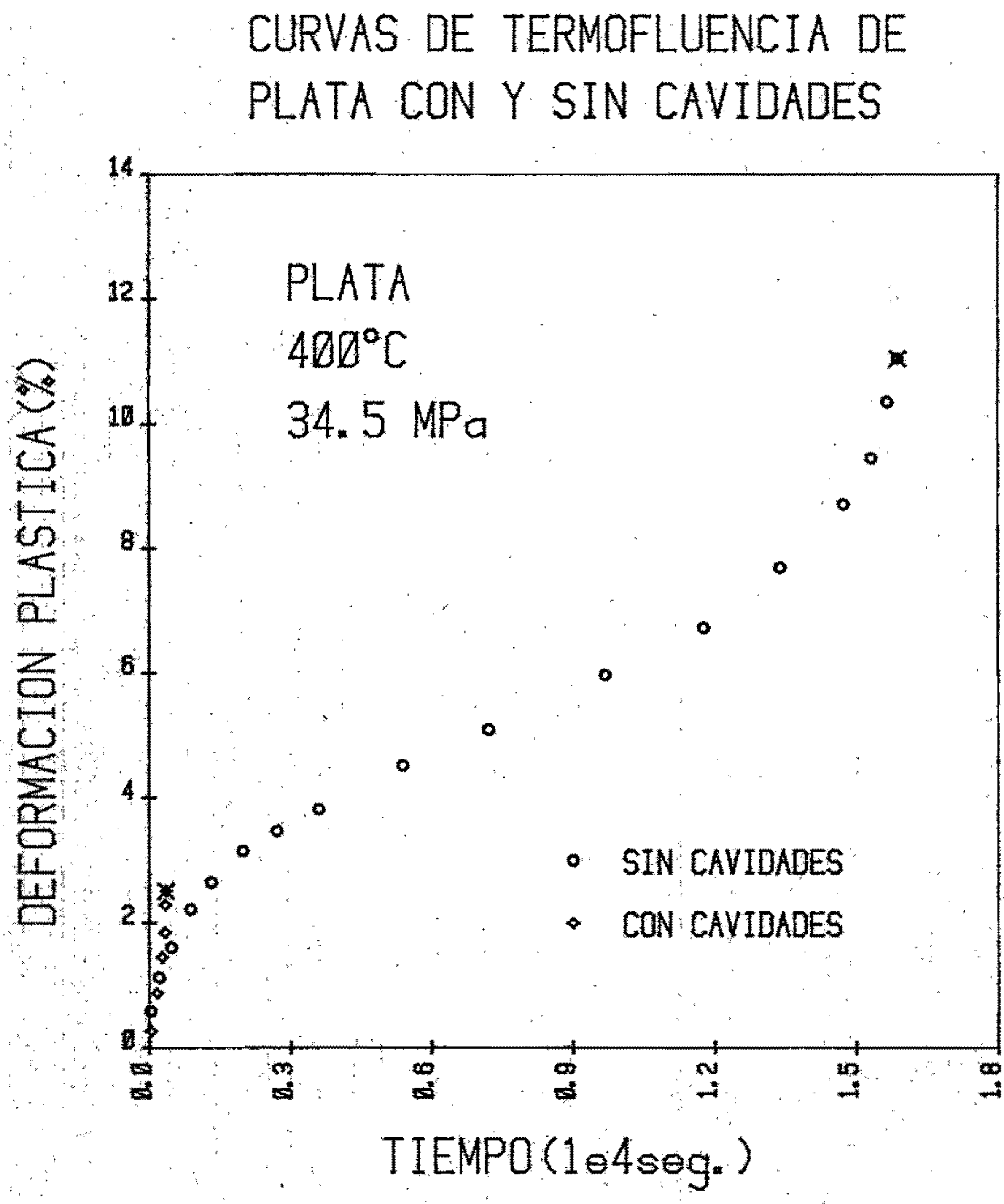

CURVAS DE TERMOFLUENCIA DE
PLATA CON Y SIN CAVIDADES
PLATA
400°C
34.5 MPa
SIN CAVIDADES
CON CAVIDADES
DEFORMACION PLASTICA (%)
TIEMPO (1e4seg.)
0
2
4
6
8
10
12
14
0.0
0.3
0.6
0.9
1.2
1.5
1.8

FIGURA 2

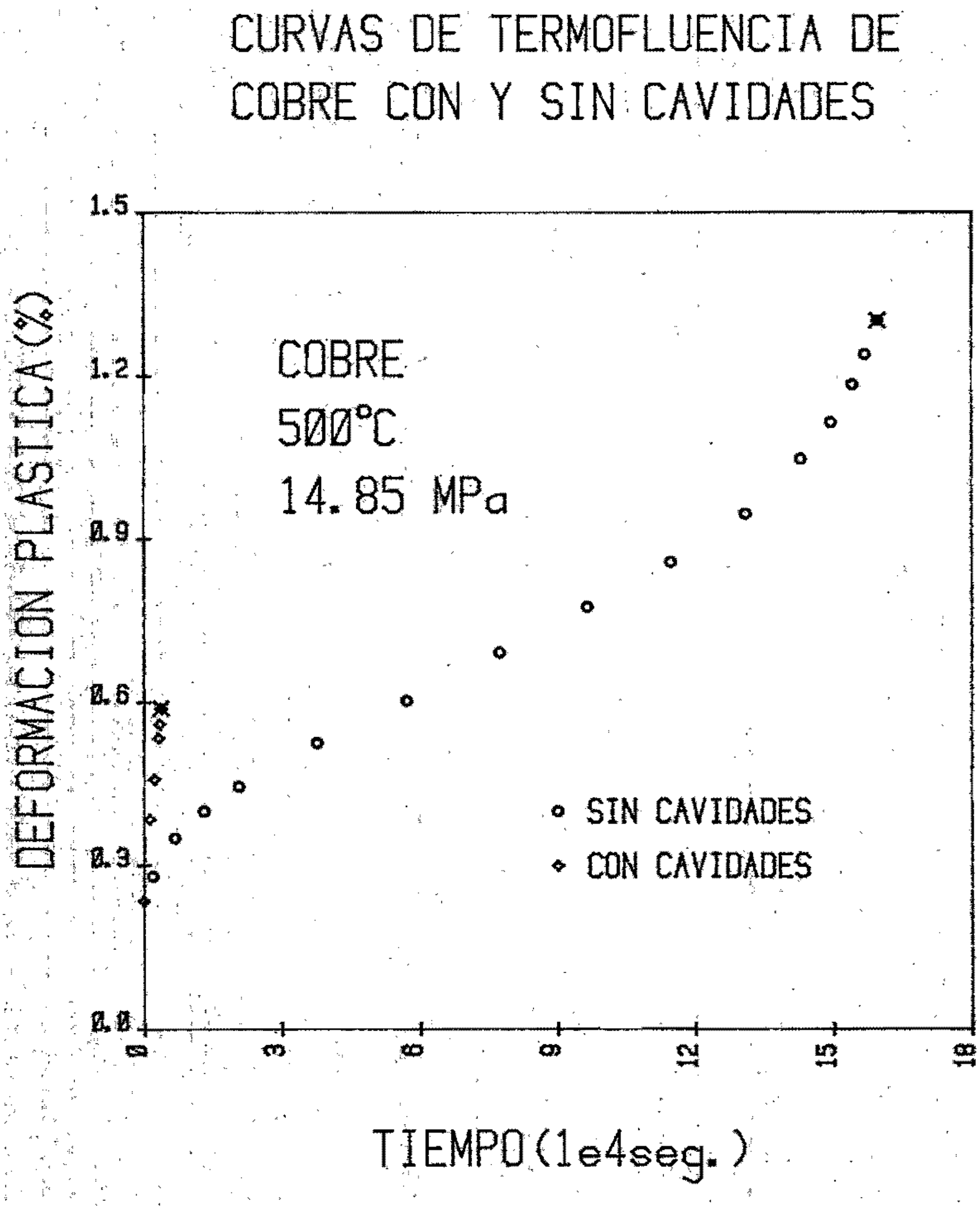

CURVAS DE TERMOFLUENCIA DE
COBRE CON Y SIN CAVIDADES
COBRE
500°C
14.85 MPa
o SIN CAVIDADES
◇ CON CAVIDADES
DEFORMACION PLASTICA (%)
TIEMPO (1e4seg.)
1.5
1.2
0.9
0.6
0.3
0.0
0
3
6
9
12
15
18

FIGURA 3

tica. Demostraron primero que la introducción de algunas partículas de M_gO en la matriz de la plata le produce un gran endurecimiento. La rapidez de termofluencia en estado estacionario de A_g + 0.1% M_gO se reduce cuando menos en dos órdenes de magnitud con respecto a la de la plata pura. Sin embargo, después de que se han producido burbujas de vapor de agua en las fronteras de grano de ambos materiales sus propiedades de termofluencia resultaron esencialmente iguales. La independencia del tiempo de fractura con respecto a la dureza de los granos los condujo a concluir que la deformación plástica no rige el crecimiento de las cavidades. En otros trabajos se ha señalado también que el crecimento de cavidades es un fenómeno difusivo y no plástico [27] .

b. Los Modelos Teóricos

En la literatura se han propuesto mecanismos difusivos en los cuales el crecimiento de la cavidad ocurre por el transporte de materia de la superficie de ésta hacia la frontera de grano [19 - 32] . Una característica común a todos estos modelos es la dependencia relativamente baja del tiempo de ruptura con respecto al esfuerzo aplicado. Los tiempos de ruptura predichos por estos modelos son inversamente proporcionales al esfuerzo aplicado elevado a un exponente pequeño.

$$t_r \propto 1/\sigma^n$$

donde n, en adelante definido como sensibilidad, varía de 1 a 3. La primera teoría de crecimiento de cavidades basada en la difusión fue propuesta por Hull y Rimmer [20] .

Ellos estudiaron el crecimiento de un arreglo regular de cavidades localizadas en una frontera de grano de un material sujeto a un esfuerzo uniaxial. Su modelo supone que las cavidades crecen mediante un proceso controlado por autodifusión en la frontera de grano y que las diferencias de potencial químico en la frontera de grano son proporcionales al esfuerzo normal T_n, en cada punto, según lo estableció Herring [29],

$$\Delta\mu = -\Omega T_n$$

La fórmula para el tiempo de fractura que obtuvieron es

$$t_r = 2 \kappa T b^3 / (D_b \delta_b \Omega) (\sigma - P)$$

donde

donde	t_r	=	tiempo de fractura
	k	=	constante de Boltzmann
	b	=	mitad de la distancia entre cavidades
	T	=	temperatura absoluta
	D_b	=	autodifusión en la frontera de grano
	δ_b	=	grosor de la frontera de grano
	σ	=	esfuerzo tensil aplicado
	P	=	presión hidrostática
	Ω	=	volumen atómico

La fórmula de Hull y Rimmer ha sido mejorada por otros autores que ha supuesto también que el proceso difusivo lo controla la frontera de grano. Todos estos modelos tienen en común la predicción de una sensibilidad n=1 [19, 21].

Chuang y Rice [22] desarrollaron un modelo de una superficie en forma -- de punta de grieta que avanza de manera tal que cumple con la ecuación de difusión superficial (ver figura 4). Ellos usaron este modelo para el crecimiento de la superficie de una cavidad acoplando el proceso difusivo en

SUPERFICIE DE PUNTA DE GRIETA DEL MODELO DE CHUANG Y RICE

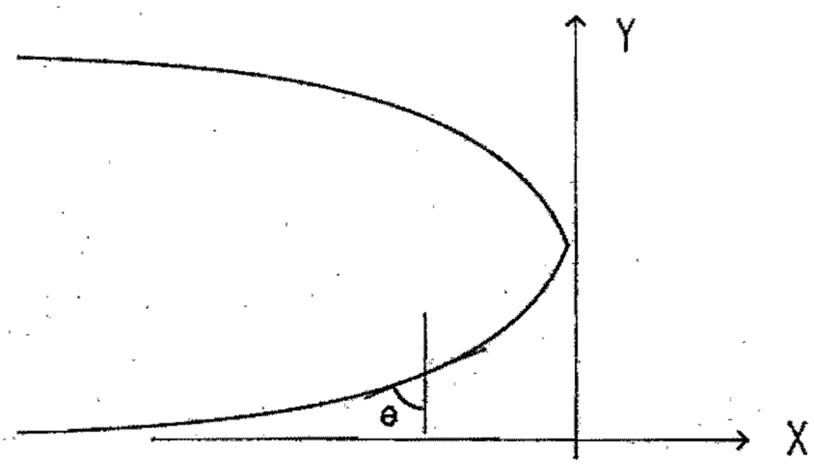


FIGURA 4

la superficie con el de la frontera de grano [28]. La fórmula de tiempo de fractura que obtuvieron es

$$t_r = \frac{\beta}{4}(1-1/\beta)^4 \left[\frac{\alpha}{c \quad p(\alpha f/2\beta c)^{1/2}}\right]^3 \qquad (5)$$

donde t_r = tiempo de fractura en unidades de

a_o = distancia inicial entre el centro de la cavidad y su punta

D_s = coeficiente de difusión en la superficie de la cavidad

δ_s = grosor de la capa donde ocurre la difusión superficial

γ_s = energía libre de superficie de la cavidad

c = esfuerzo aplicado en unidades de

β = b/a

f = $D_b \delta_b / D_s \delta_s$

p = función que se describe por $p(x) = 3x + \frac{9x^2}{2}\left(1 + \sqrt{1 + 4/3x}\right)$

En el límite cuando el proceso se controla totalmente por la difusión en la superficie, ésto es cuando f >> 1, la función $p(\alpha f/2\beta c)$ = 1 y la sensibilidad alcanza su máximo en n=3. Este caso es interesante porque entre todos los modelos teóricos existentes es el que se acerca más a los resultados experimentales de Goods y Nix [14] de Nieh y Nix [18] .

En rigor la superficie de Chuan y Rice (figura 4) puede observarse en el crecimiento de cavidades solamente cuando se analiza el crecimiento de una cavidad aislada en un material donde la difusión en la superficie controla el proceso. En cualquier otro caso el ancho de la punta de la cavidad se va reduciendo conforme esta avanza de acuerdo con

$$w = \frac{\alpha^2}{c \; p(\alpha f/2\beta c)^{1/2}}\left[1 - r/\beta\right] \qquad (6)$$

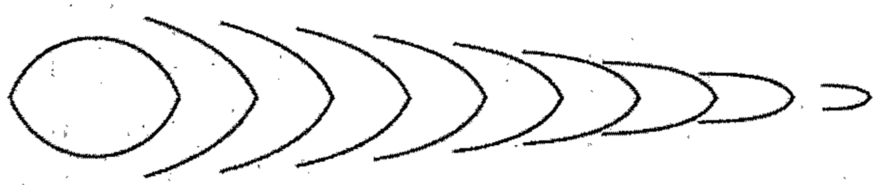
donde r es la distancia del centro a la punta de la cavidad y w se mide en unidades de a_o. La suposición implícita del modelo para tratar estos casos consiste en suponer que la cavidad crece pasando por una sucesión de superficies como se muestra en las figuras 5 y 6. En las figuras puede observarse también que el ancho de la cavidad no necesariamente se ajusta al de la cavidad inicial, de donde se deduce que este modelo desprecia el tiempo que la cavidad requiere para crecer y producir una punta del ancho apropiado.

Pharr y Nix [30] iniciaron la búsqueda de una solución numérica dependiente del tiempo para la evolución de la superficie de la cavidad. Ellos diseñaron un método para describir el crecimiento de cavidades en el límite cuando la difusión en la superficie domina. La solución que obtuvieron para el crecimiento de una cavidad aislada reproduce en la punta a la superficie de Chuang y Rice. Además, al calcular tiempos de ruptura por el crecimiento de arreglos de cavidades, observaron la sensitividad n=3.

El presente trabajo es una extensión de lo hecho por Pharr y Nix en dos direcciones:

1) Existe en la frontera de grano un proceso difusivo dependiente del tiempo cuyo transitorio no se incluyó en el trabajo de Chuang y Rice ni en el de Pharr y Nix. De acuerdo con Raj [31], el transitorio se inicia con la aplicación del esfuerzo al material con la cavidad; el cual reacciona como un sólido elástico, y termina con el establecimiento de una distribución estacionaria de esfuerzos en la frontera de grano. El Capítulo II de este trabajo se ocupa de estudiar este transitorio elástico y de sus consecuencias en términos del crecimiento de las cavidades.

SUCESION DE SUPERFICIES DE PUNTA DE GRIETA
QUE MODELAN EL CRECIMIENTO DE CAVIDADES



Datos

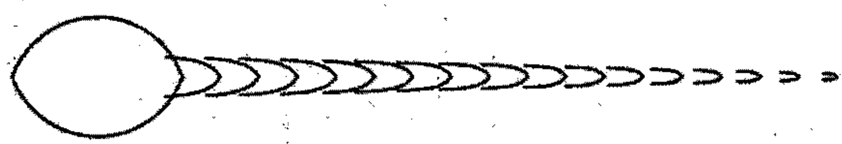
α = 4.5

f = 1

β = 10

FIGURA 5

SUCESION DE SUPERFICIES DE PUNTA DE GRIETA
QUE MODELAN EL CRECIMIENTO DE CAVIDADES



Datos

$c = 4.5$

$f = 10000$

$\beta = 10$

FIGURA 6

2) Aparte de los resultados experimentales de Goods y Nix [14] en plata, y de Nieh y Nix [18] , en cobre, no hay motivos para esperar que el crecimiento de cavidades tenga que ser controlado por la difusión en la superficie de la cavidad. Los datos experimentales acerca de difusividades en las fronteras de grano están extraordinariamente dispersos [32] . Para conocer cual es la importancia de esta condición, el Capítulo III se ocupa de la elaboración de un método numérico para describir el crecimiento de cavidades dependiente del tiempo en materiales con diferentes valores del factor f.

Fuentes - Samaniego y Nix [33] establecieron, basados en consideraciones energéticas, una ecuación que gobierna el crecimiento de cavidades. El movimiento de una superficie de Chuang y Rice obedeciendo esta ecuación se analiza en el Capítulo IV.

Capítulo II. Análisis del transitorio elástico en el crecimiento de cavidades controlado por difusión en la frontera de grano.

1. Introducción

En este Capítulo se hace un análisis del transitorio elástico que ocurre durante el crecimiento de cavidades controlado por la autodifusión en las fronteras de grano utilizando una técnica desarrollada por Raj[31] . Según esta técnica el material reacciona inicialmente al esfuerzo aplicado como un sólido elástico homogéneo. El proceso difusional produce una acumulación de materia en la frontera de grano que se absorbe en los cristales vecinos. Una parte se acomoda mediante el crecimiento global de los cristales y la otra mediante deformación elástica. Este mecanismo produce el cambio de una distribución inicial de esfuerzos elásticos a una de estado estacionario. Cuando se llega al estado estacionario toda la materia que sale de la cavidad se acomoda produciendo un crecimiento global de los cristales vecinos.

Aunque Raj concluyó que el transitorio podría ser importante porque bajo ciertas condiciones duraría horas, no estimó su importancia relativa en términos de los tiempos característicos para el crecimiento de cavidades.

En este Capítulo se deriva una expresión para el crecimiento unitario de cavidades donde se distingue la materia que, saliendo de la cavidad, se --

acomoda en el crecimiento global de los cristales vecinos y en la deformación plástica. Hay dos tiempos característicos en este proceso, uno para el transitorio elástico y otro para el crecimiento de cavidades en el estado estacionario. La razón entre ambos, proporcional al esfuerzo aplicado dividido por el módulo elástico, permite determinar la importancia del transitorio elástico.

El análisis bidimensional de Raj se extiende para analizar el crecimiento de una cavidad tridimensional axisimétrica. Además se calculan los tiempos de ruptura en cada caso.

2. Análisis Bidimensional

Consideremos el arreglo de cavidades uniformemente espaciadas de la figura 7.

a. Las Ecuaciones

Suponiendo que los esfuerzos de corte en fornteras de grano se relajan por el deslizamiento de las fronteras podemos concluir que solamente existen esfuerzos normales, T_n , en dichas fronteras. El exceso de potencial químico de los átomos en la frontera de grano en relación al estado libre de esfuerzos es [29]

$$\Delta\mu = -\Omega T_n \tag{1}$$

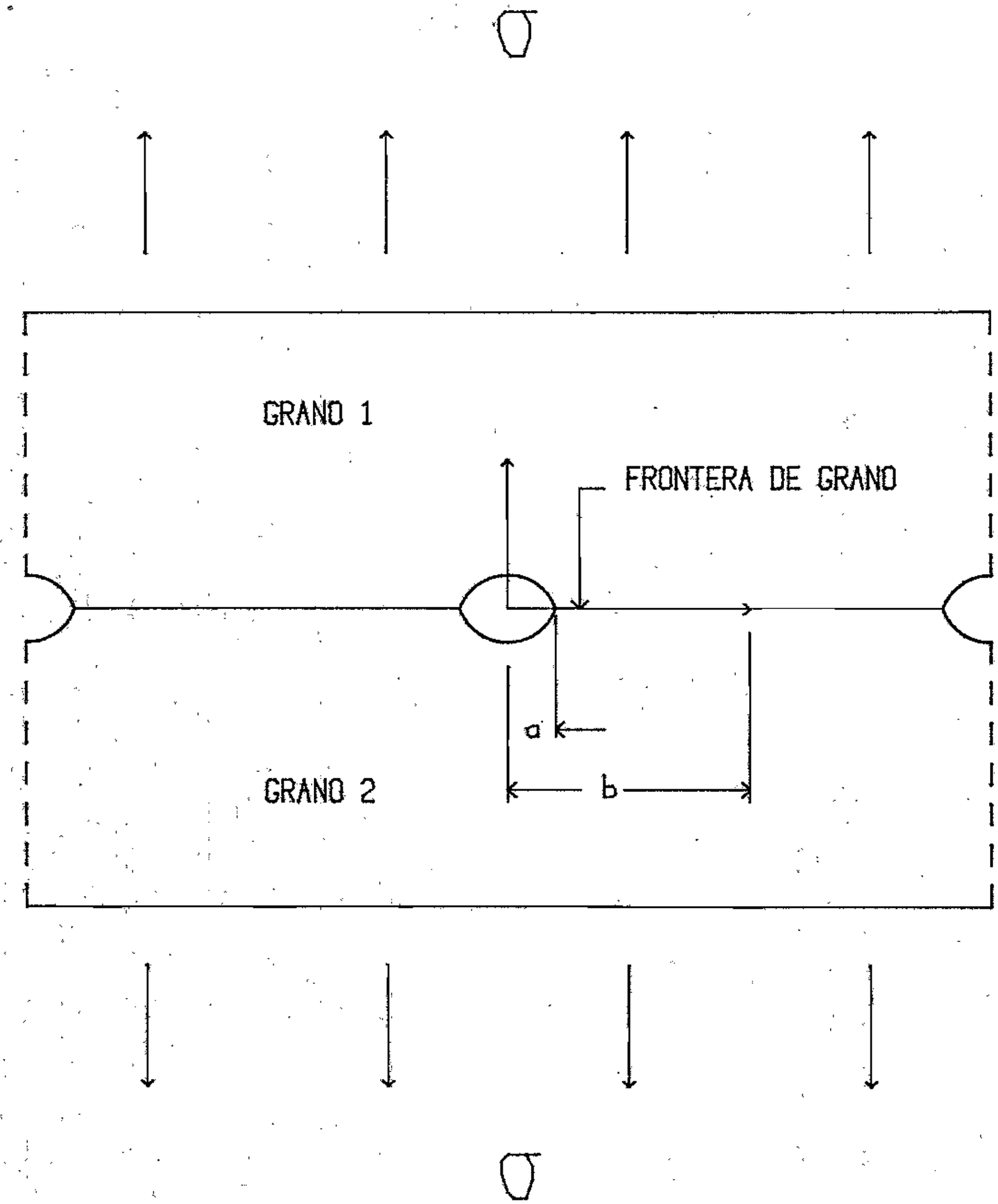


FIGURA 7

donde Ω es el volumen atómico y T_n es la componente principal del esfuerzo (positiva cuando se trata de un esfuerzo a tensión). El flujo atómico en la frontera de grano es

$$J_b = \frac{D_b}{\kappa T} \frac{\partial T_n}{\partial x} \tag{2}$$

donde D_b es el coeficiente de autodifusión en la frontera de grano, κ la constante de Boltzmann y T la temperatura. La ecuación de conservación de masa

$$\frac{\Omega \delta_b D_b}{2 \kappa T} \frac{\partial^2 T_n}{\partial x^2} + \frac{\partial \mu_n}{\partial t} = 0 \tag{3}$$

donde $\dot{u}_n$ es la acumulación de materia por unidad de superficie de frontera de grano y por unidad de tiempo. Esta materia es absorbida por los cristales vecinos acomodándose en forma de crecimiento global del grano $\dot{\bar{u}}$ y de deformación elástica $\dot{u}_{EL}$. El término global puede obtenerse considerando la conservación global de la materia

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{\Omega \delta_b D_b}{2 \kappa T (b-a)} \left(\frac{\partial T_n}{\partial x}\right)_{x=a} \tag{4}$$

donde δ_b es el ancho de la frontera de grano. Raj relacionó a u_{EL} y T_n mediante un análisis de la expansión de Fourier de T_n

$$T_n(x,t) = \frac{\sigma b}{b-a} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) \operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2} \pi \frac{x-a}{b-a}\right) \tag{5}$$

que, como se muestra en el Apéndice 1, en buena aproximación genera el siguiente resultado:

$$\frac{\partial u_{El}}{\partial t} = - \frac{4(1-\nu^2)\sigma b}{E\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \frac{d\alpha_n}{dt} \operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2}\pi \frac{x-a}{b-a}\right) \qquad (6)$$

b. El Transitorio

La sustitución de las ecuaciones (4) y (6) en (3) y el uso de la ortogonalidad de las funciones $\operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2}\pi \frac{x-a}{b-a}\right)$ en el intervalo (a,b) sirve para generar un sistema de ecuaciones diferenciales para los coeficientes de Fourier α_m

$$t_{E2} \frac{d\alpha_m}{dt} + (2m-1)^3 \alpha_m - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)\alpha_n = 0 \qquad m = 1, 2, \ldots \qquad (7)$$

donde

$$t_{E2} = 32(1-\nu^2)\,k\,T\,(b-a)^3 / \Omega\,\delta_b\,D_b\,E\,\pi^3 \qquad (8)$$

es la unidad de tiempo que caracteriza al transitorio elástico. El sistema de ecuaciones diferenciales (7) debe obedecer la constricción de equilibrio mecánico

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n(t)}{2n-1} = 1 \qquad (9)$$

El crecimiento volumétrico de la cavidad por unidad de tiempo, $2\Omega\delta_b J_b(a)$, puede expresarse como

$$\frac{dV}{dt} = \frac{6\Omega\delta_b D_b \sigma b}{\kappa T(b-a)^2} f_2(t) \qquad (10)$$

donde $f_2(t) = \frac{\pi}{6}\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)\,a_n(t)$. El volumen de la cavidad es $V = \varphi_0\, a^2$ donde $\varphi_0 = 2(\alpha_0/\mathrm{sen}^2\alpha_0 - \cot\alpha_0)$

y α_0 es el ángulo que forman la superficie de la cavidad y la frontera de grano en el punto donde se tocan. La razón unitaria de crecimiento de volumen, $v = \frac{1}{V}\frac{dV}{dt}$, puede integrarse y resulta

$$v = 1 + \frac{t}{t_D}\int_0^t f_2(t')\,dt'$$

donde $t_{D2} = \kappa T\varphi_0\, a^2(b-a)^2/6\Omega\delta_b D_b\sigma b$ es la unidad de tiempo característica del crecimiento de la cavidad. Si se divide (7) por $(2m-1)^4$, se suma sobre m, se utiliza (9) y se integra en el tiempo, se obtiene

$$\int_0^t f_2(t')\,dt' = t + t_{E2}\, g_2(t) \qquad (11)$$

donde $g_2(t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n(t) - \alpha_n(0))/(2n-1)^4$. Consecuentemente

$$v = 1 + \frac{t}{t_{D2}} + \frac{t_{E2}}{t_{D2}}\, g_2(t) \qquad (12)$$

El primer término a la derecha de (12) es obviamente el volumen unitario inicial. El segundo representa al crecimiento producido por la materia que sale de ella y va a acomodarse provocando un crecimiento global de los granos vecinos. Conviene señalar que este término solamente involucra términos difusionales y es independiente de cualquier propiedad elástica del material. El tercer término es la contribución del transitorio elástico al crecimiento de la cavidad. El factor

$$\frac{t_{E2}}{t_{D2}} = \frac{192}{\varphi_0 \pi^3} \left(\frac{b}{a}\right)^2 \left(1 - \frac{a}{b}\right) \frac{(1-\nu^2)\sigma}{E}$$

involucra solamente términos elásticos y geométricos y $g_2(t)$ es una función que empezando en cero con pendiente infinita alcanza un valor de estado estacionario en un tiempo relativamente corto.

c. Condiciones Iniciales

Raj estableció la distribución inicial de esfuerzos considerando a las puntas de la cavidad infinitamente agudas. Aquí se usa la misma técnica pero se incluyen términos adicionales para asegurar equilibrio mecánico. La distribución inicial de esfuerzos que se tomó fue

$$T_n(x,o) = \frac{\sigma b}{b-a} \frac{1}{\sqrt{b/a+1}} \frac{\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\left(\frac{b}{a}-1\right)+1}{\sqrt{\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\left[\left(\frac{b}{a}-1\right)\left(\frac{x-a}{b-a}\right)+2\right]}}$$

y los coeficientes de Fourier quedan dados por

$$\alpha_n(o) = \frac{2}{\sqrt{b/a + 1}} \int_0^1 \frac{(b/a - 1)\chi + 1}{\sqrt{\chi\left[\left(\frac{b}{a} - 1\right)\chi + 2\right]}} \operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2}\pi\chi\right) d\chi$$

Otra posibilidad que se puede considerar para la distribución inicial de esfuerzos es aquella producida por un hoyo circular en una placa suficientemente larga donde se aplica un esfuerzo uniaxial. Se hizo una prueba con esta distribución y no se observaron cambios significativos en el cálculo de la función g_2.

d. Cálculos Numéricos

La función g_2 y la distribución de esfuerzos normales se calcularon con los resultados de la solución numérica del sistema de ecuaciones diferenciales (7) - (9) y sus gráficas aparecen en las figuras 8 y 9. Se encontró que el valor de estado estacionario y a la vez máximo, de la función g_2 es 0.23. Además se encontro que a este máximo se llega en un tiempo de aproximadamente 0.23 t_{E2}.

La contribución total del transitorio elástico, calculada con valores típicos de la carga aplicada y la geometría ($\frac{(1-\nu^2)\sigma}{E} = 10^{-4}$, $b/a = 10$, $\alpha_o = 70°$), es 6×10^{-3} . El crecimiento total de la cavidad, que incluye el término que produce el crecimiento global de los granos vecinos, es 1.2×10^{-2}. En este modelo el crecimiento unitario de la cavidad en el momento de la fractura es $(b/a)^2 = 100$. De aquí se desprende que la contribución al crecimiento de la cavidad por el transitorio elástico es cuatro órdenes de magnitud menor que el crecimiento total en el momento de fractura. En -

CONTRIBUCION DEL TRANSITORIO ELASTICO
AL CRECIMIENTO DE CAVIDADES

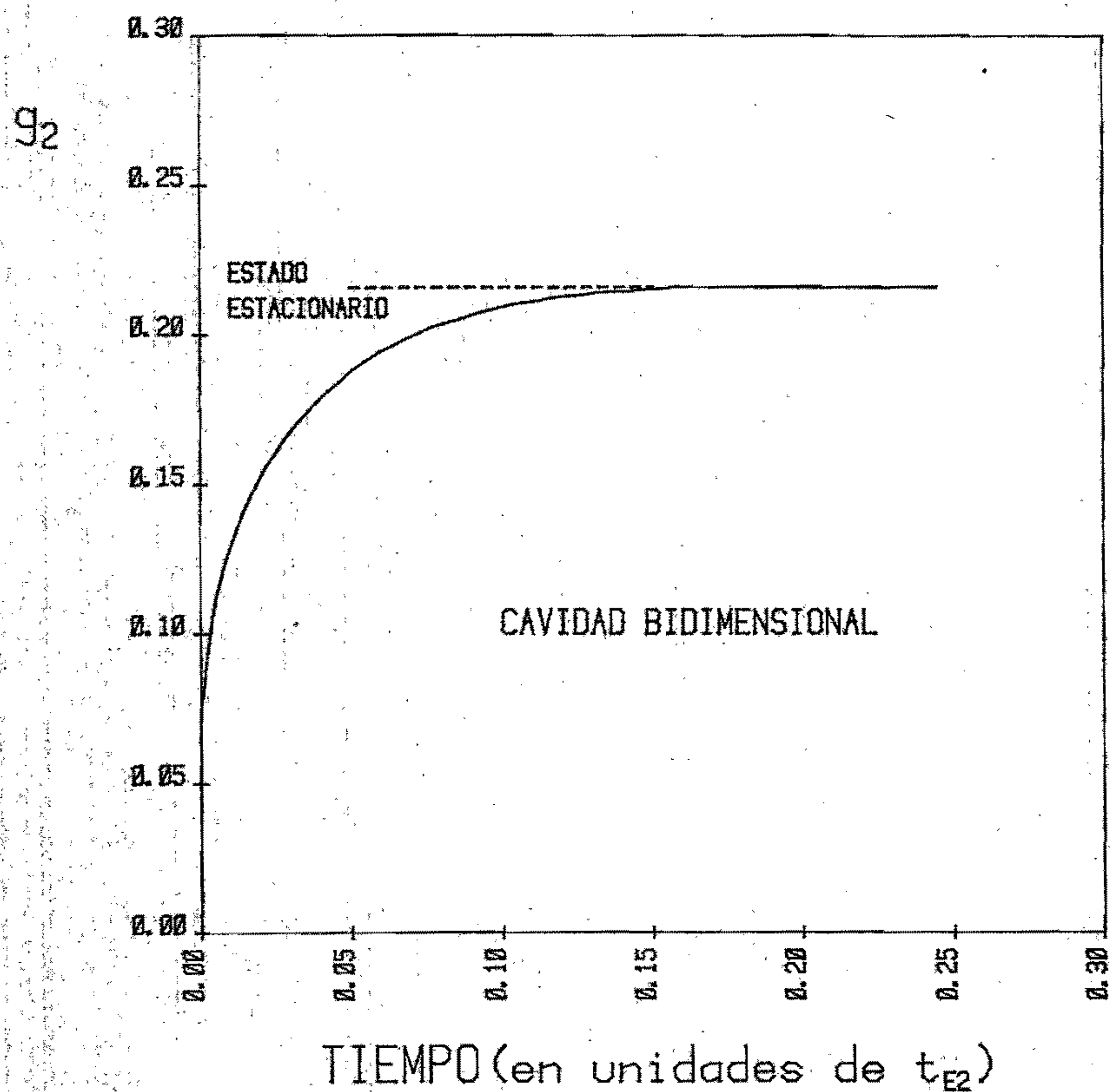


FIGURA 8

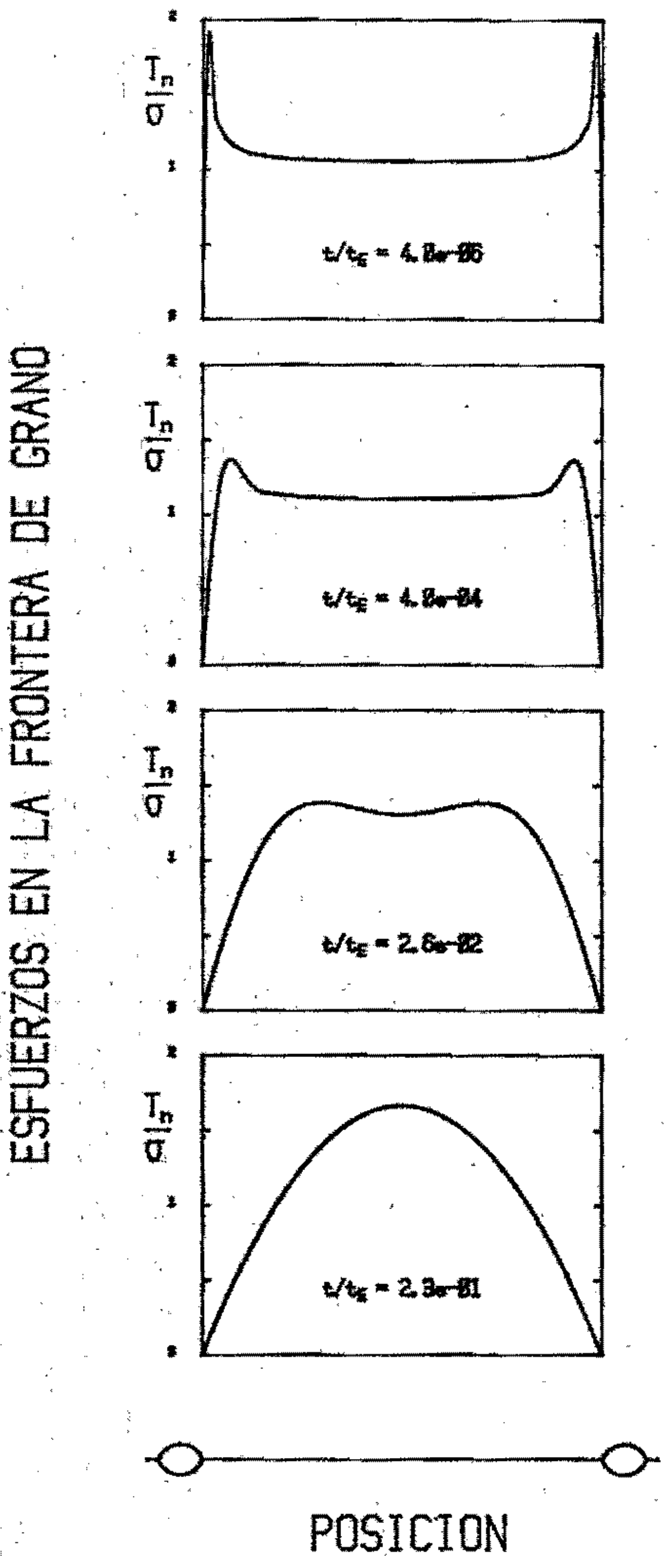

ESFUERZOS EN LA FRONTERA DE GRANO
t/tE = 4.0e-05
t/tE = 4.0e-04
t/tE = 2.6e-02
t/tE = 2.3e-01
POSICION

FIGURA 9

otras condiciones, cuando se aplican cargas cíclicas, por ejemplo, el transitorio puede jugar un papel importante.

3. Análisis Tridimensional

Consideremos una cavidad axisimétrica centrada en la frontera de grano de dos granos cilíndricos. Apliquemos un esfuerzo de tensión como se muestra en la figura 10.

a. Las ecuaciones de difusión

La relación de tracción normal - potencial químico (1) se reescribe en coordenadas cilíndricas,

$$\Delta\mu = -\Omega T_n\ (r,t) \tag{13}$$

La ecuación del flujo atómico es

$$J_b = \frac{D_b}{kT}\ \frac{\partial T_n}{\partial r} \tag{14}$$

y la conservación local de masa da

$$\frac{\Omega\,\delta_b D_b}{2\,kT}\ \frac{1}{r}\ \frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial T_n}{\partial r}\right) + \frac{\partial u_n}{\partial t} = 0 \tag{15}$$

El componente de crecimiento global calculado con una ecuación global de conservación de masa es

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \frac{\Omega\,\delta_b D_b}{kT}\ \frac{a}{b^2-a^2}\left(\frac{\partial T_n}{\partial r}\right)_{r=a} \tag{16}$$

MODELO DE CAVIDAD TRIDIMENSIONAL AXISIMETRICA

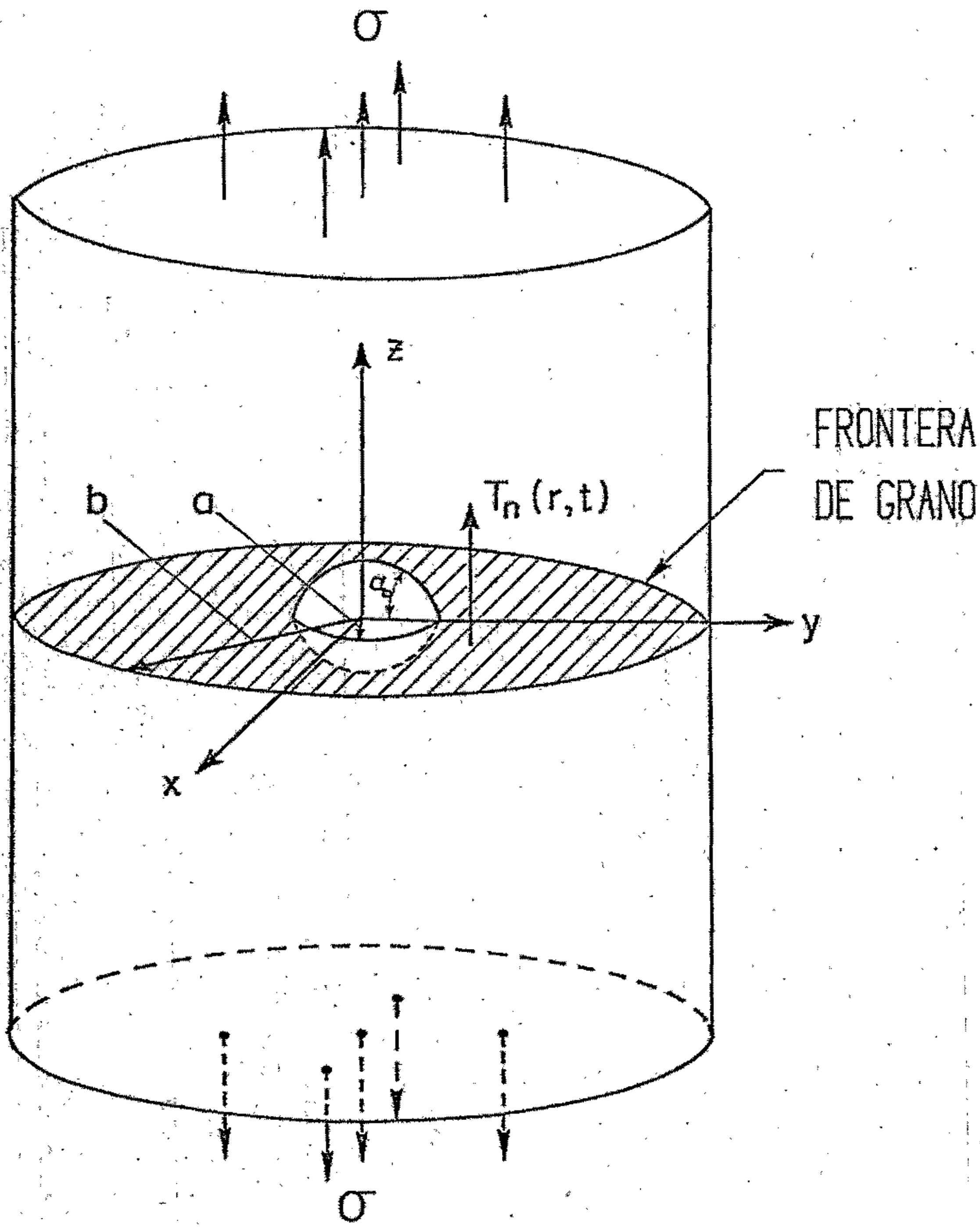


FIGURA 1Ø

El análisis elástico de la expansión de Fourier - Bessel de T_n da una relación aproximada entre el esfuerzo y la deformación elástica

$$T_n(r,t) = \sigma\, G(a,b) \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t)\; B_o(e_n r/a) \tag{17}$$

Aquí B_o $(e_n r/a)$ es una combinación lineal de las funciones de Bessel de órden cero con e_n en tal forma que B_o $(e_n r/a)$ es cero cuando $r = a$ y tiene una derivada cero con respecto a r cuando $r = b$. G es un factor geométrico apropiado que simplifica los cálculos:

$$G = \frac{8b^2(b^2 - a^2)}{4b^4 \ln b/a - 3b^4 + 4b^2a^2 + a^4} \tag{18}$$

El análisis elástico, que se muestra en el Apéndice 2, resulta en

$$\frac{\partial u_{el}}{\partial t} = -\frac{2(1-\nu^2)\,\sigma\, a\, G}{E} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e_n} \frac{d\alpha_n}{dt}\, B_o(e_n r/a) \tag{19}$$

b. El Transitorio

El uso de las ecuaciones (16), (17) y (19) en (15) y de la propiedad de ortogonalidad (A2-10) de un sistema de ecuaciones diferenciales para los coeficientes de Fourier - Bessel.

$$t_{E3}\frac{d\alpha_m}{dt} + e_m^3\,\alpha_m - \frac{8}{\pi\,(b^2/a^2 - 1)\,B_{om}\; Y_o(e_m)\; e_m} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n / Y_o(e_n) = 0 \qquad m = 1, 2, \ldots \tag{20}$$

en donde $t_{E3} = 4(1-\nu^2)kT\,a^3/\Omega\,\delta_b\,D_b\,E$ es el tiempo característico para este transitorio elástico. La condición de equilibrio mecánico en (7), una constricción sobre el sistema (20), es

$$-\frac{4Ga^2}{\pi b^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{Y_o(e_n)\, e_n^2} = 1 \tag{21}$$

La razón de crecimiento volumétrico de la cavidad, $2\pi a \Omega \delta_b J_b(a)$, puede expresarse en la siguiente forma

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi G \Omega \delta_b D_b \sigma}{\kappa T} f_3(t) \tag{22}$$

en donde hemos introducido

$$f_3(t) = -\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n(t)}{Y_0(e_n)}$$

El volumen inicial de la cavidad es $V = \xi_0 a^3$

donde

$$\xi_0 = \frac{2\pi}{3}\left(1/\operatorname{sen}\alpha_0 - \cot\alpha_0\right)^2\left(2/\operatorname{sen}\alpha_0 + \cot\alpha_0\right) \tag{23}$$

Para tiempos cortos, en donde los cambios en a pueden ignorarse, la razón de crecimiento de la unidad de volumen, $v = \frac{1}{V}\frac{dV}{dt}$, puede integrarse para dar

$$v = 1 + \frac{1}{t_{D3}} \int_0^t f_3(t')\,dt'$$

en donde $t_{D3} = \xi_0 \kappa T a^3/\pi \Omega G D_b \delta_b \sigma$. Si dividimos (20) entre $Y_0(e_m)\, e_m^5$ sumamos sobre m, usando (21) y(B.12) e integramos para tiempos pequeños igual que lo anterior, encontramos

$$\int_0^t f_3(t')\,dt' = t + t_{E3}\, g_3(t) \tag{24}$$

en donde

$$g_3(t) = -\left(4 G a^2/\pi b^2\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(t) - d_n(0)}{Y_0(e_n)\, e_n^5}$$

Así, la unidad de crecimiento de la cavidad puede expresarse como

$$\upsilon = 1 + \frac{t}{t_{D3}} + \frac{t_{E3}}{t_{D3}} \, g_3(t)$$

Los tres términos al lado derecho de (25) son análogos a los de (12). El factor t_{E3}/t_{D3} es

$$t_{E3}/t_{D3} = \frac{96\pi}{\xi_0} \, \frac{(1-\nu^2)\sigma}{E}$$

y g_3 (t) empieza de cero con una pendiente infinita y alcanza su estado estacionario y máximo en un tiempo relativamente corto.

c. Condiciones Iniciales

Para las condiciones iniciales usamos la distribución del esfuerzo producido por un hoyo esférico centrado en el eje z de un cilindro grande cargado en tensión [36]

$$T_n(r,0) = \sigma \gamma \left[1 + \frac{4-5\nu}{2(7-5\nu)} \frac{a^3}{r^3} + \frac{9}{2(7-5\nu)} \frac{a^5}{r^5} \right].$$

en donde γ es un factor de equilibrio mecánico dado por

$$\gamma = \frac{(b/a)^2}{(b^2/a^2 - 1) + \frac{4-5\nu}{7-5\nu}(1 - a/b) + \frac{3}{7-5\nu}(1 - a^3/b^3)}$$

Aunque una distribución inicial de esfuerzos más precisa consideraría el - efecto de una punta aguda en los extremos de la cavidad, los resultados del cálculo no se modificarían significativamente.

d. Cálculos numéricos.

La función g_3 (t) fué calculada resolviendo numéricamente el sistema de ecuaciones diferenciales (20) - (21) y se graficó en la figura 11. Esta función alcanza su valor máximo de estado estacionario después de un -- tiempo del orden de g_3

La contribución total del transitorio elástico por unidad de crecimiento de la cavidad, calculada para los valores típicos para la carga y geometría $\left[(1-\nu^2)\sigma/E = 10^{-4}, \ b/a = 10, \ \alpha_0 = 70^\circ \right]$ resultó ser 2.7×10^{-2}. El crecimiento total de la cavidad durante todo el transitorio elástico es 5.4×10^{-2}.

El crecimiento unitario de la cavidad en la ruptura es $(b/a)^3$ la cual para el cálculo presente es 1000. Así, el crecimiento total de la cavidad durante el transitorio es de cuatro órdenes de magnitud más pequeño que la cantidad total de crecimiento de la cavidad en la ruptura.

4. Tiempos de ruptura.

La ecuación (10) puede usarse para calcular los tiempos de ruptura para el caso de cavidades bidimensionales suponiendo que el coeficiente de difusión superficial es tan alto que la cavidad crece en forma circular -- con ángulo de capilaridad fijo. Esto da

$$\frac{dV}{dt} = 2\,\varphi_0\, a \frac{da}{dt} \qquad (26)$$

La cual cuando se usa en (10) y se integra resulta en

$$6\,b^2(a^2 - a_0^2) - 8\,b\,(a^3 - a_0^3) + 3\,(a^4 - a_0^4) =$$

$$= 6\,a_0^2\,(b - a_0)^2 \left(\frac{t}{t_{D2}} + \frac{t_{E1}}{t_{D2}}\, g_{2max} \right) \qquad (27)$$

en donde $a_o = a\ (t=o)$. Las soluciones a (t) de (27) dan el tamaño de la cavidad como función del tiempo (figura 12). Los tiempos de ruptura pue

CONTRIBUCION DEL TRANSITORIO ELASTICO AL CRECIMIENTO DE CAVIDADES

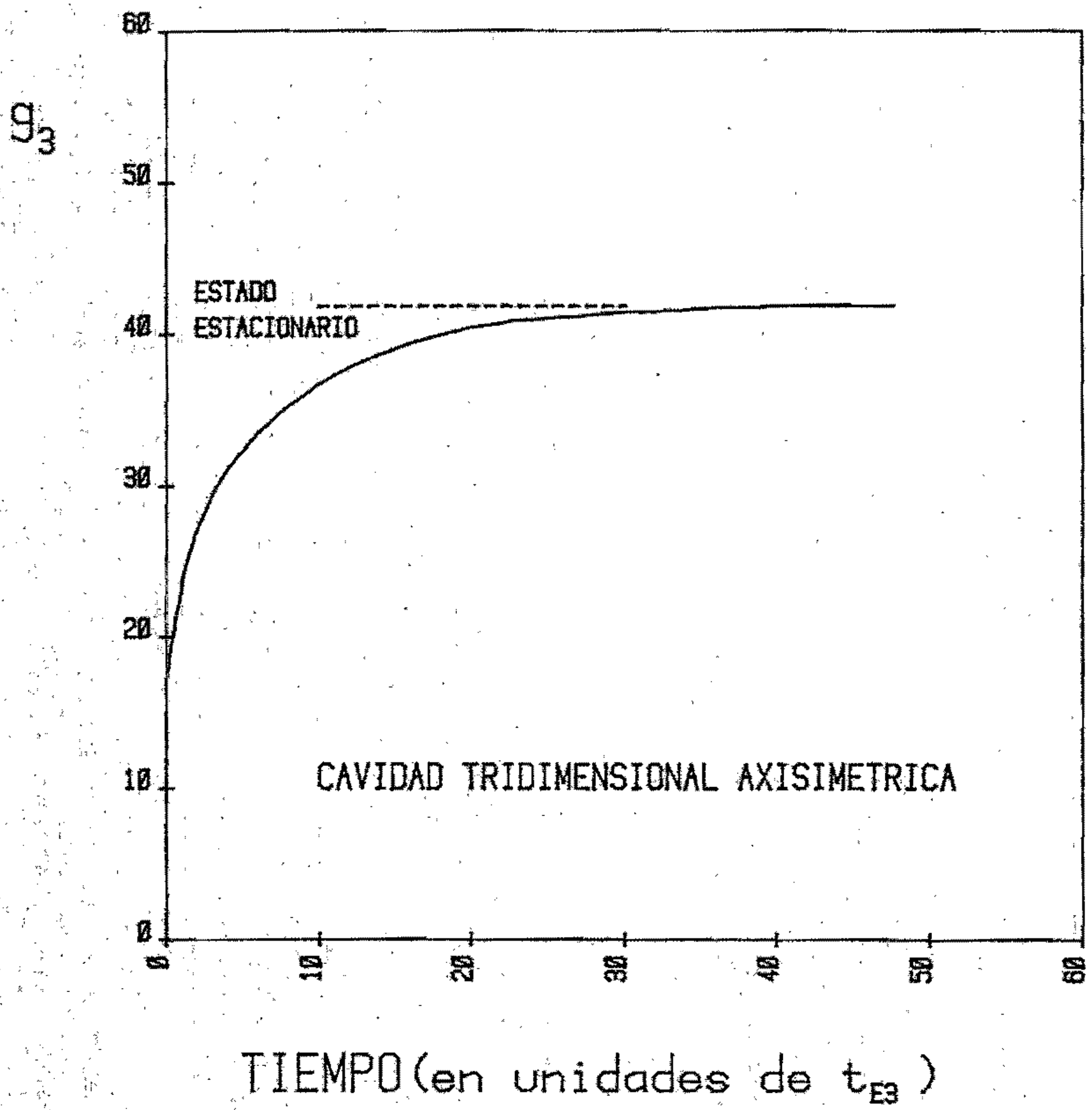


FIGURA 11

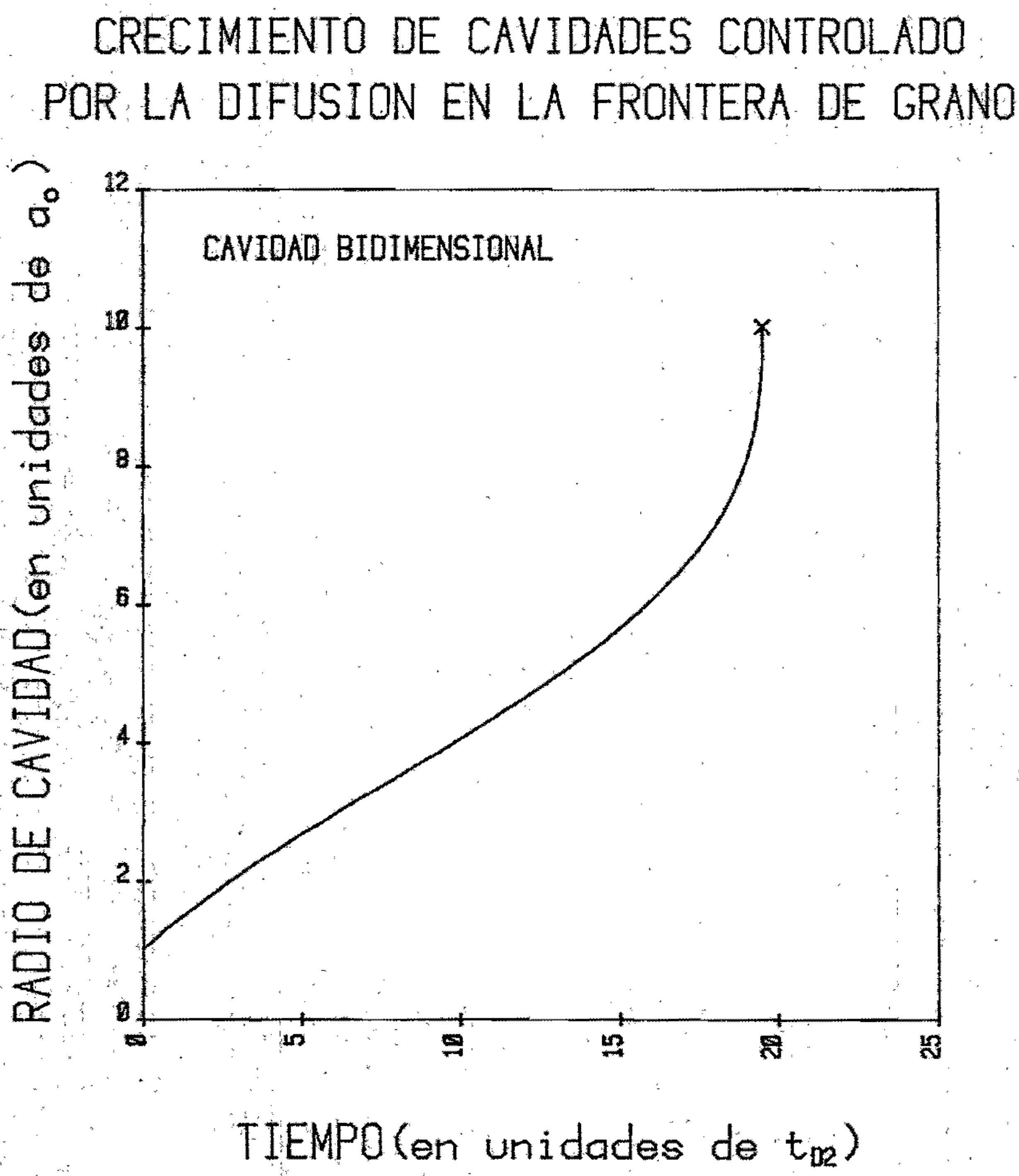

CRECIMIENTO DE CAVIDADES CONTROLADO
POR LA DIFUSION EN LA FRONTERA DE GRANO
CAVIDAD BIDIMENSIONAL
RADIO DE CAVIDAD(en unidades de a_o)
TIEMPO(en unidades de t_{D2})
0
2
4
6
8
10
12
0
5
10
15
20
25

FIGURA 12

den calcularse estableciendo a $(t_{r2}) = b$ en (27)

$$t_{r2} = t_{D2}\left[\frac{1}{6}\,\frac{b}{a_o}\left(\frac{b}{a_o}-1\right)\left(1+\frac{3a_o}{b}\right) - \frac{t_{E2}}{t_{D2}}\,g_{2\,max}\right] \tag{28}$$

Los cálculos con los mismos valores numéricos para carga y geometría - que se usaron antes muestran que el segundo término a la derecha de -- (28) es despreciable si lo comparamos con el primer término. Este primer término puede obtenerse en forma directa de la ecuación (3) al establecer $\dot{\mu}_{EL} = 0$.

La extensión natural de los cálculos anteriores para el caso de cavidades tridimensionales muestra que el tamaño de la cavidad como función- del tiempo a (t), se determina por las raíces de (figura 13)

$$-\frac{4a}{b} - \frac{a^3}{b^3} + \frac{a^5}{5b^5} + 4\sum_n a^{2n-1}/b^{2n-1}(2n-1)^2 + 4\frac{a}{b}\ln\frac{a}{b} - 2\ln\frac{a}{b}\ln\left(\frac{1+a/b}{1-a/b}\right) +$$

$$+ 4/\beta + 1/\beta^3 - 1/5\beta^5 - 4\sum_n 1/\beta^{2n-1}(2n-1)^2 + \frac{4}{\beta}\ln\beta - 2\ln\beta\,\ln\left(\frac{1+1/\beta}{1-1/\beta}\right) = \tag{29}$$

$$= \frac{8}{3\beta^3 G}\left[\frac{t}{t_{D3}} + \frac{t_{E3}}{t_{D3}}\,g_{3\,max}\right]$$

en donde $\beta = b/a_o$. El tiempo de ruptura, a $(t_{r3}) = b$, se da por

$$t_{r3} = t_{D3}\left[\frac{3G\beta^3}{8}\left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{24}{5} + \frac{4}{\beta} + \frac{1}{\beta^3} - \frac{1}{5\beta^5} - 4\sum_{n=1}^{\infty} 1/\beta^{2n-1}(2n-1)^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{4}{\beta}\ln\beta - 2\ln\beta\,\ln\left(\frac{1+1/\beta}{1-1/\beta}\right)\right) - t_{E3}\,g_{3max}/t_{D3}\right] \tag{30}$$

El segundo término a la derecha de (30), $\frac{t_{E3}}{t_{D3}}g_{3max}$ se puede eliminar con respecto al primero si se calcula con los datos usados antes. El primer término puede obtenerse en forma directa de (15) eliminando el término $\dot{\mu}_{EL}$.

CRECIMIENTO DE CAVIDADES CONTROLADO POR LA DIFUSION EN LA FRONTERA DE GRANO

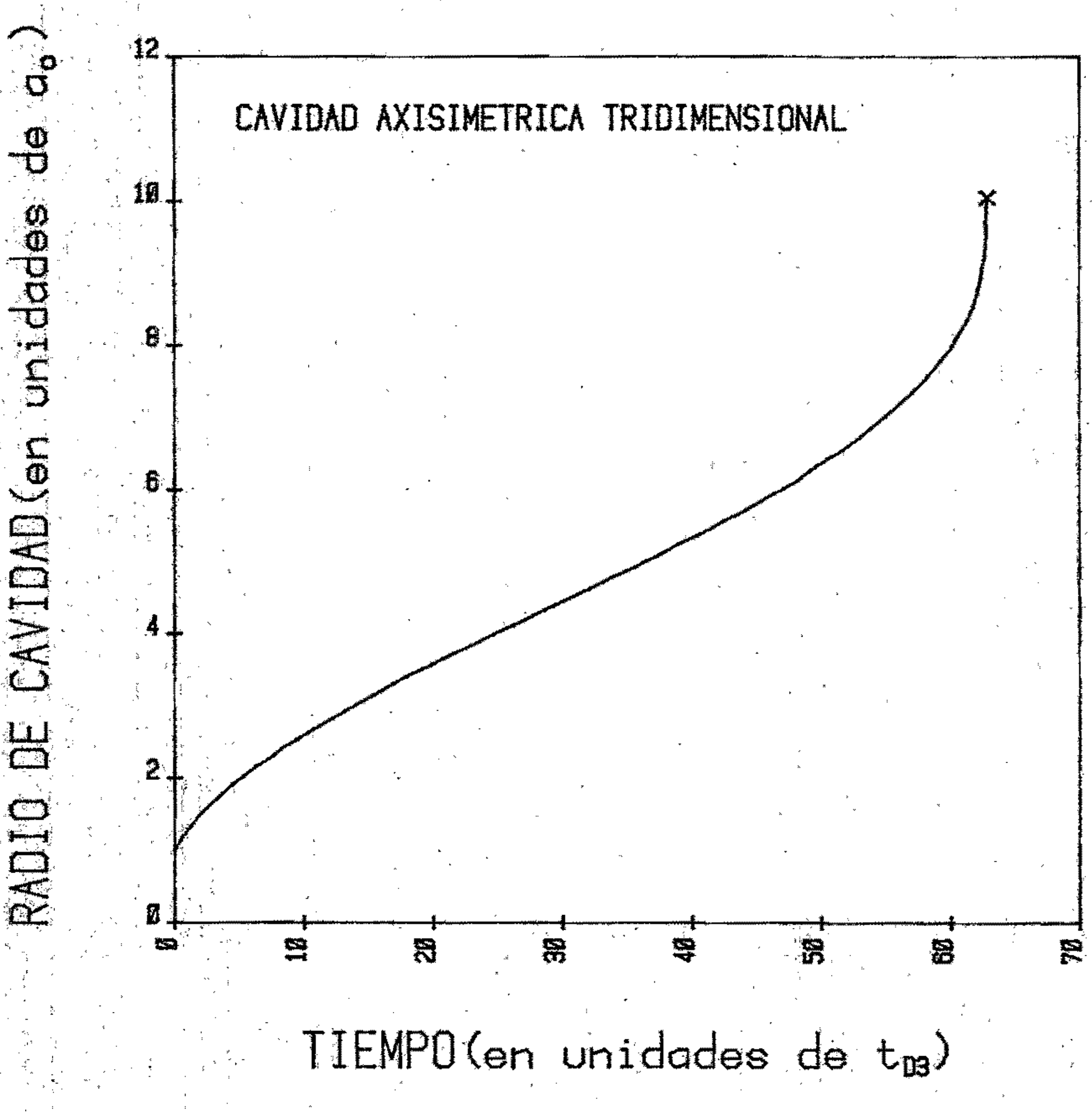


FIGURA 13

Capítulo III. Crecimiento de cavidades intergranulares controlado por un proceso que acopla la difusión en la superficie de la cavidad y en la frontera de grano.

1. Introducción.

En el Capítulo I se señaló que la comparación de los resultados experimentales de Goods y Nix [14] y Nieh y Nix [17] con el modelo para la punta de la grieta de Chuang y Rice [28] sugiere fuertemente que el crecimiento de la cavidad está controlado por difusión superficial y no por difusión en la frontera de grano.

Esta conclusión está basada fundamentalmente en la dependencia cúbica inversa del tiempo de ruptura con el esfuerzo aplicado. Sin embargo, como se observó antes, no es fácil ver por qué la difusión superficial para estos metales deberá ser mucho más lenta que la difusión en la frontera de grano, aún considerando lo disperso de la información. Se puede concebir que las premisas de Chuang y Rice [22] no se aplican cuando la difusión en la frontera de grano es comparable con la difusión superficial y que la observación experimental de una sensibilidad del tiempo de ruptura con respecto al esfuerzo aplicado igual a 3, no es necesariamente una prueba de control por difusión superficial. Para determinar si la sensibilidad $n=3$ implica el control del crecimiento de la cavidad por difusión superficial (a diferencia del crecimiento de una grieta) se requiere un análisis del crecimiento de las cavidades (más que del crecimiento de las puntas de la grieta).

El presente Capítulo es una extensión del trabajo de Pharr y Nix [30], e incluye los resultados de la solución numérica dependiente del tiempo del proceso de difusión en la superficie de la cavidad acoplado al de la frontera de grano para diferentes razones de los coeficientes de difusión. Los-resultados numéricos obtenidos en el presente trabajo muestran que las sensibilidades predichas por Chuang y Rice [28] para grietas se aplican también a cavidades y que la sensibilidad n=3 implica realmente el control del crecimiento de la cavidad por difusión superficial.

2. Las Ecuaciones.

Consideremos un arreglo de cavidades bidimensionales uniformemente espaciadas en una frontera de grano en donde se aplica un esfuerzo en la dirección vertical, como se muestra en la fig. 7.

a. Difusión en la Superficie.

La diferencia en potencial químico entre un punto de curvatura K y un punto de curvatura cero en la superficie de la cavidad está dado por [38]

$$\Delta\mu = -\Omega \gamma_s K$$

En donde Ω es el volumen atómico y γ_s la energía libre superficial, que se supone constante. La curvatura es positiva en superficies cóncavas. El flujo sobre la superficie es [39]:

$$J_s = \frac{D_s \gamma_s}{\kappa T} \frac{dK}{dS} \qquad (2)$$

en donde D_s es el coeficiente de difusión superficial, T la temperatura, κ la constante Boltzmann y dS el elemento de longitud de arco. La ecuación de conservación de la materia señala que

$$v_n = \frac{\partial^2 K}{\partial s^2} \qquad (3)$$

en donde v_n es la velocidad de la superficie de la cavidad normal a sí misma. v_n se mide en unidades de a_o/t_s en donde a_o, la mitad del tamaño inicial de la cavidad, es la unidad de distancia y

$$t_s = \kappa T a_o^4 / D_s \delta_s \gamma_s \Omega \qquad (4)$$

es la unidad natural de tiempo del problema. Aquí δ_s es el espesor en donde ocurre la difusión superficial y k y s en (3), son la curvatura y longitud de arco en estas unidades.

b. Difusión en la Frontera de Grano.

Si los esfuerzos de corte se relajan por el deslizamiento de las fronteras de grano, en dichas fronteras solamente quedan los esfuerzos de tracción normales, T_n [31]. El exceso de potencial químico de los átomos en la frontera de grano relativo al estado libre de esfuerzos es [29]

$$\Delta\mu = -T_n \Omega \tag{5}$$

en donde T_n es positivo para un esfuerzo a tensión en la interfase. El flujo atómico en la frontera es

$$J_b = \frac{D_b}{kT}\frac{\partial T_n}{\partial x} \tag{6}$$

en donde D_b es la difusividad de la frontera de grano. La ecuación de conservación de masa

$$\frac{D_b \delta_b}{2kT}\frac{\partial^2 T_n}{\partial x^2} + \dot{u}_n = 0 \tag{7}$$

en donde δ_b es el espesor de la frontera de grano y $\dot{u}_n$ es la rapidez de acumulación de volumen por unidad de área de frontera de grano. Hay un transitorio elástico involucrado en la ecuación [8]. Sin embargo la contribución de este transitorio al crecimiento de la cavidad es despreciable [40] y podemos suponer que $\dot{u}_n$ = constante. Si la geometría del problema es como se describe en la fig. 7, la solución general de [7] es

$$T_n(x) = \frac{\sigma}{1-\gamma/\beta}\left[-\frac{A}{2}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2 + A\left(\frac{x-a}{b-a}\right) + 1 - A/3\right] \tag{8}$$

en donde $\gamma = a/a_0$ y $\beta = b/a$. Este resultado incluye las condiciones de equilibrio mecánico y flujo cero en x = b.

c. Condiciones a la Frontera.

La constante en (8) se elimina cuando las condiciones a la frontera se imponen en la punta de la cavidad. Hay dos formas diferentes de acoplar la superficie de la cavidad al proceso de difusión en la frontera de grano.

1) El ángulo de capilaridad. Puede suponerse que la cavidad crece con un ángulo de capilaridad fijo en su punta, que está dado por

$$\alpha_0 = \cos^{-1}\left(\gamma_b / 2\gamma_s\right) \tag{9}$$

Se imponen las condiciones de continuidad sobre el potencial químico

$$-\Omega \frac{\gamma_s}{a_0} K_{tip} = -\Omega \frac{\sigma}{1-r/\rho}\left(1 - A/3\right) \tag{10}$$

y sobre el flujo

$$2\frac{D_s \delta_s \gamma_s}{kT a_0^2}\left(\frac{\partial K}{\partial s}\right)_{tip} = \frac{D_b \delta_b \sigma}{kT a_0 \beta} \frac{A}{(1-r/\rho)^2} \tag{11}$$

las que, cuando se elimina la constante, dan

$$K_{tip} = \frac{c}{1-r/\rho}\left[1 - \frac{2}{3}(1-r/\rho)^2 \frac{\beta}{fc}\left(\frac{\partial K}{\partial s}\right)_{tip}\right] \tag{12}$$

en donde $c = \sigma a_0/\gamma_s$ es el esfuerzo aplicado en unidades de γ_s/a_0 y $f = D_b\delta_b/D_s\delta_s$ es la relación de difusividades en la frontera de grano y en la superficie de la cavidad.

2) El Sumidero de Materia.

Se puede suponer que la frontera de grano actúa como sumidero de materia para la cavidad como se muestra en la fig. 14. En esta región la ecuación de difusión ya no será (3), sino

$$v_n = \frac{\partial^2 K}{\partial s^2} + q \tag{13}$$

MODELO DEL SUMIDERO DE MATERIA

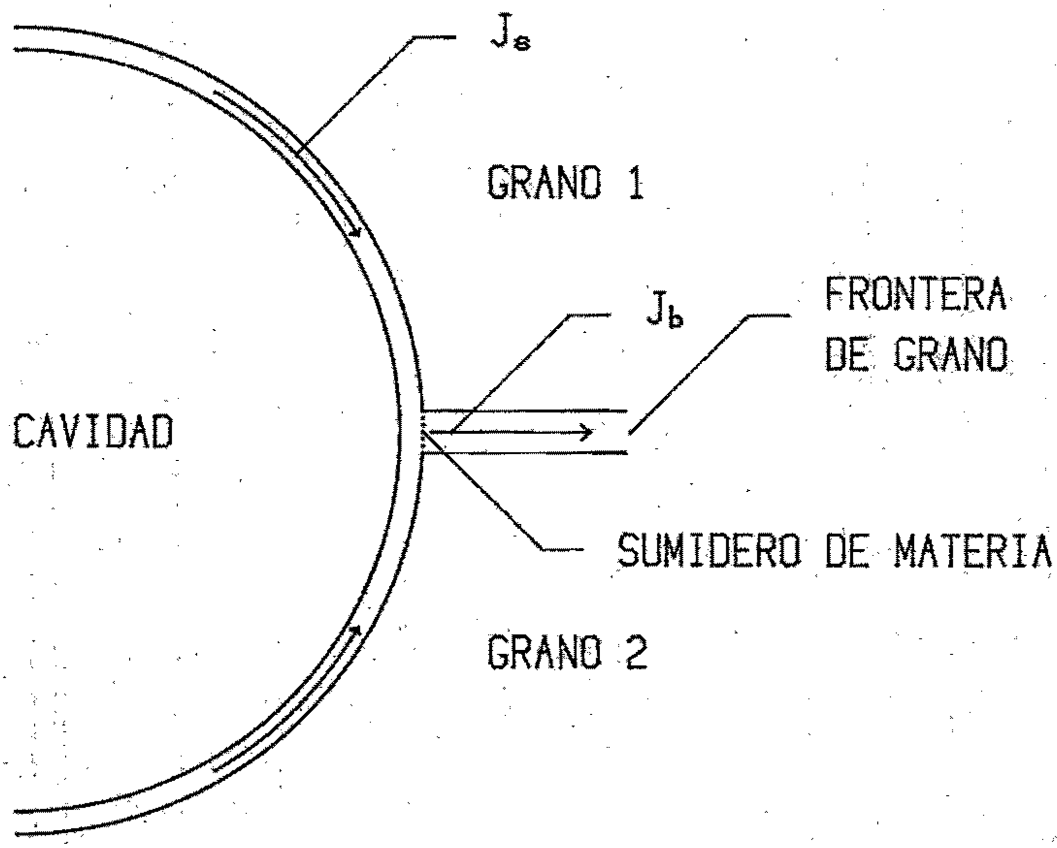


FIGURA 14

en donde el término sumidero es $q = \frac{kTa_b^3}{D_s \delta_s \gamma_s} J_b(\alpha)$. Después de usar (6) y la condición de continuidad del potencial químico, el término sumidero es

$$q = \frac{3fc}{\rho} \frac{a_b}{\delta_b} \frac{1}{(1-r/\rho)^2} \left[1 - (1-r/\rho) K_{tip}/c \right] \tag{14}$$

3. Resultados

La evolución de la superficie de la cavidad predicha por nuestros cálculos numéricos se muestra en las figs. 15-16 para el modelo de capilaridad y en las figs. 17-19 para el modelo de sumidero de materia. Los casos - analizados para el factor de difusión (f entre 1 y 10^4), muestran que la cavidad crece con una forma de grieta en punta, teniendo anchuras muy -- aproximadas a las predichas por Chuang y Rice . En las figuras 21 y 22 se muestran las gráficas logarítmicas de los tiempos de ruptura como función del esfuerzo aplicado. La concordancia de las sensibilidades (pendientes) entre nuestros resultados numéricos y los predichos por Chuang y Rice está a la vista.

Cuando tratamos de analizar el crecimiento de la cavidad en procesos controlados por difusión en las fronteras de grano, $f \ll 1$, nuestro método numérico se volvió inestable. También en este caso el modelo de Chuang y - Rice predice superficies de grosores irrazonablemente grandes. De nuestro estudio numérico podemos concluír que el modelo de Chuang y Rice para el avance de puntas de grieta en las fronteras de grano da resultados razonablemente buenos cuando los factores de difusión son iguales o mayores a 1.

Los datos experimentales para plata [14] y cobre [17], junto con los -- resultados numéricos de Chuang y Rice se han graficado en las figuras 23- y 24. De esta comparación podemos concluír que el proceso difusional de - crecimiento de cavidades está controlado por autodifusión superficial.

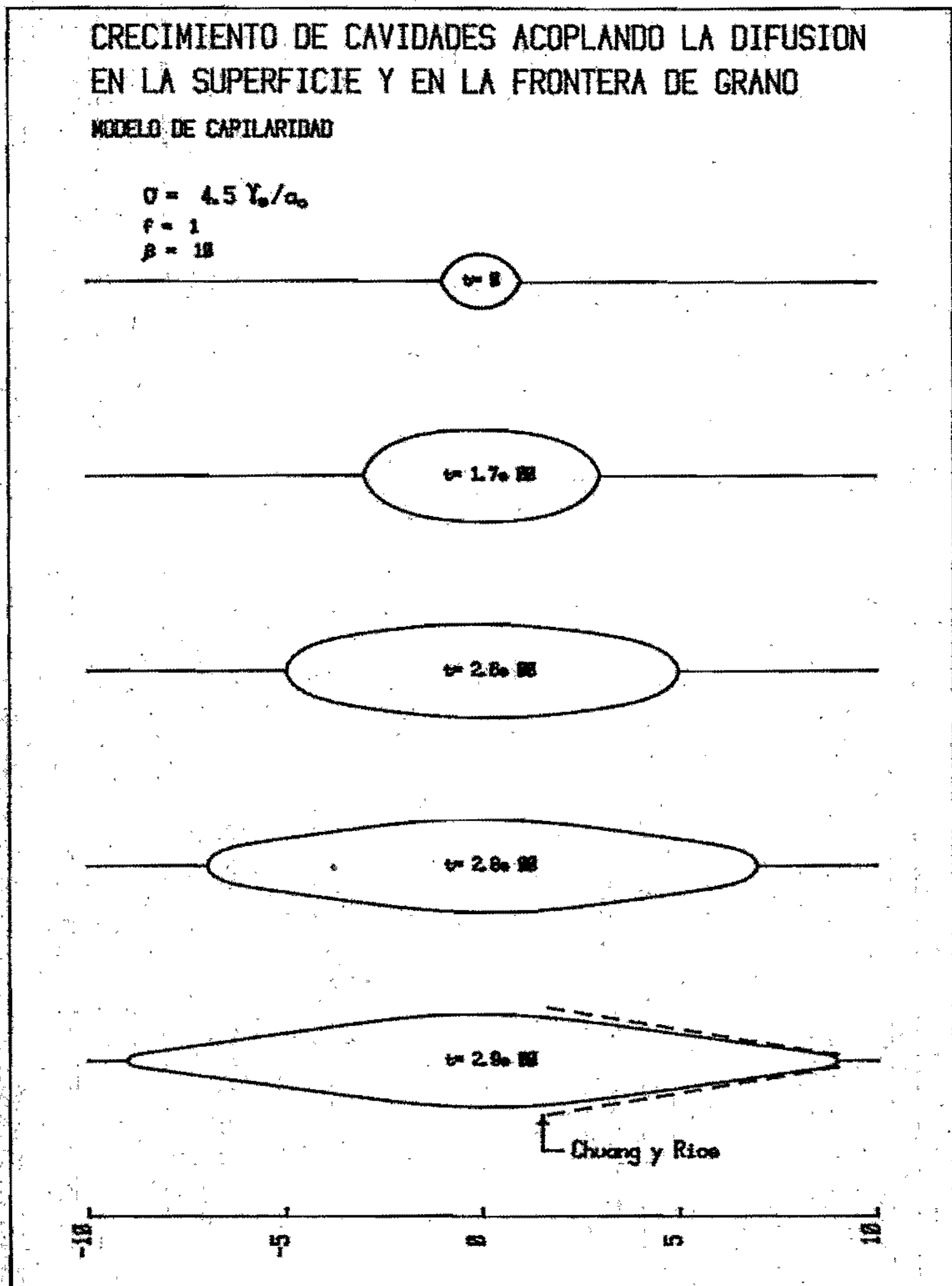

CRECIMIENTO DE CAVIDADES ACOPLANDO LA DIFUSION
EN LA SUPERFICIE Y EN LA FRONTERA DE GRANO
MODELO DE CAPILARIDAD
$\sigma = 4.5\,\gamma_s/a_o$
f = 1
Chuang y Rice

FIGURA 15

CRECIMIENTO DE CAVIDADES ACOPLANDO LA DIFUSION EN LA SUPERFICIE Y EN LA FRONTERA DE GRANO

MODELO DE CAPILARIDAD

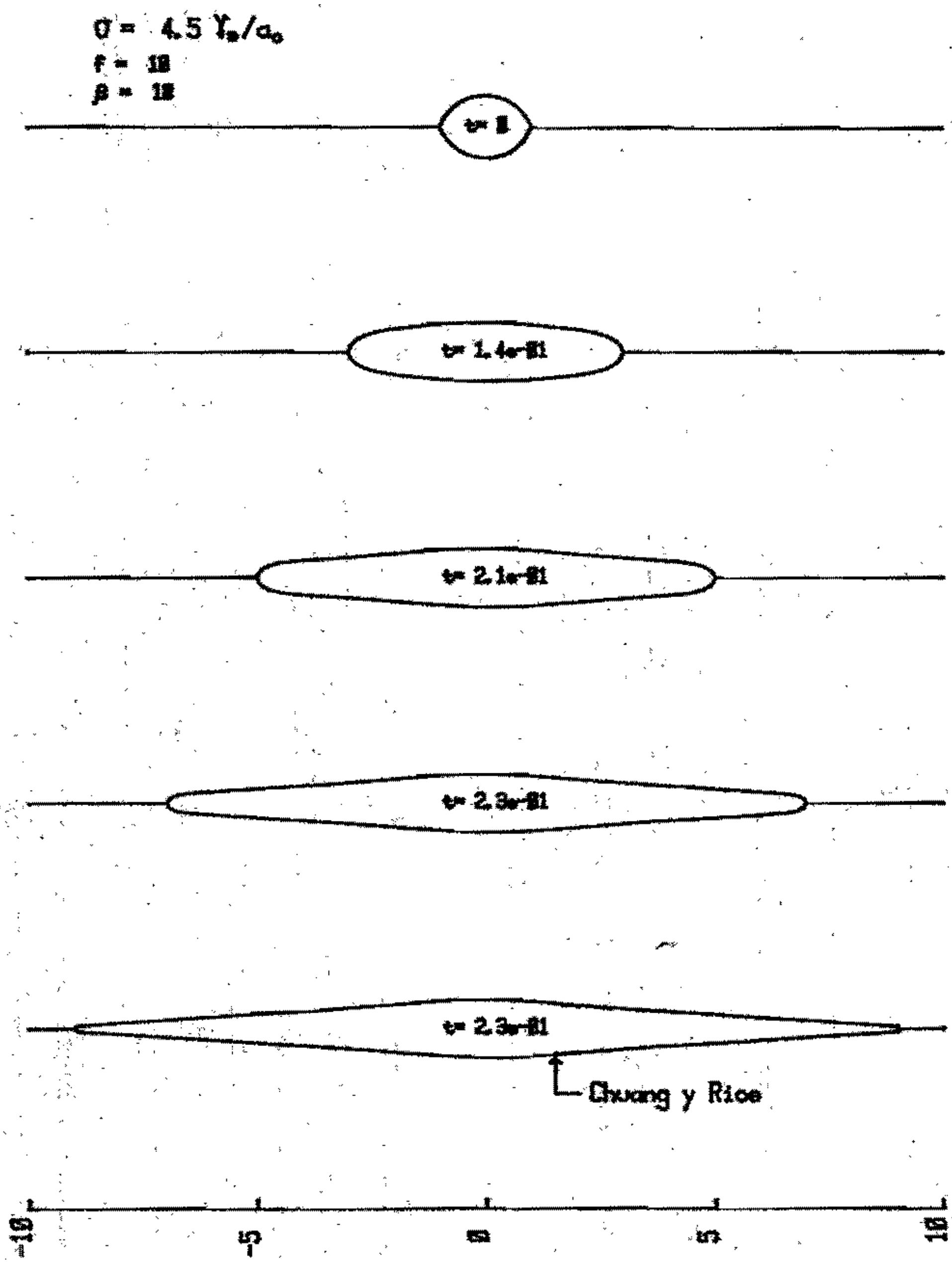


FIGURA 16

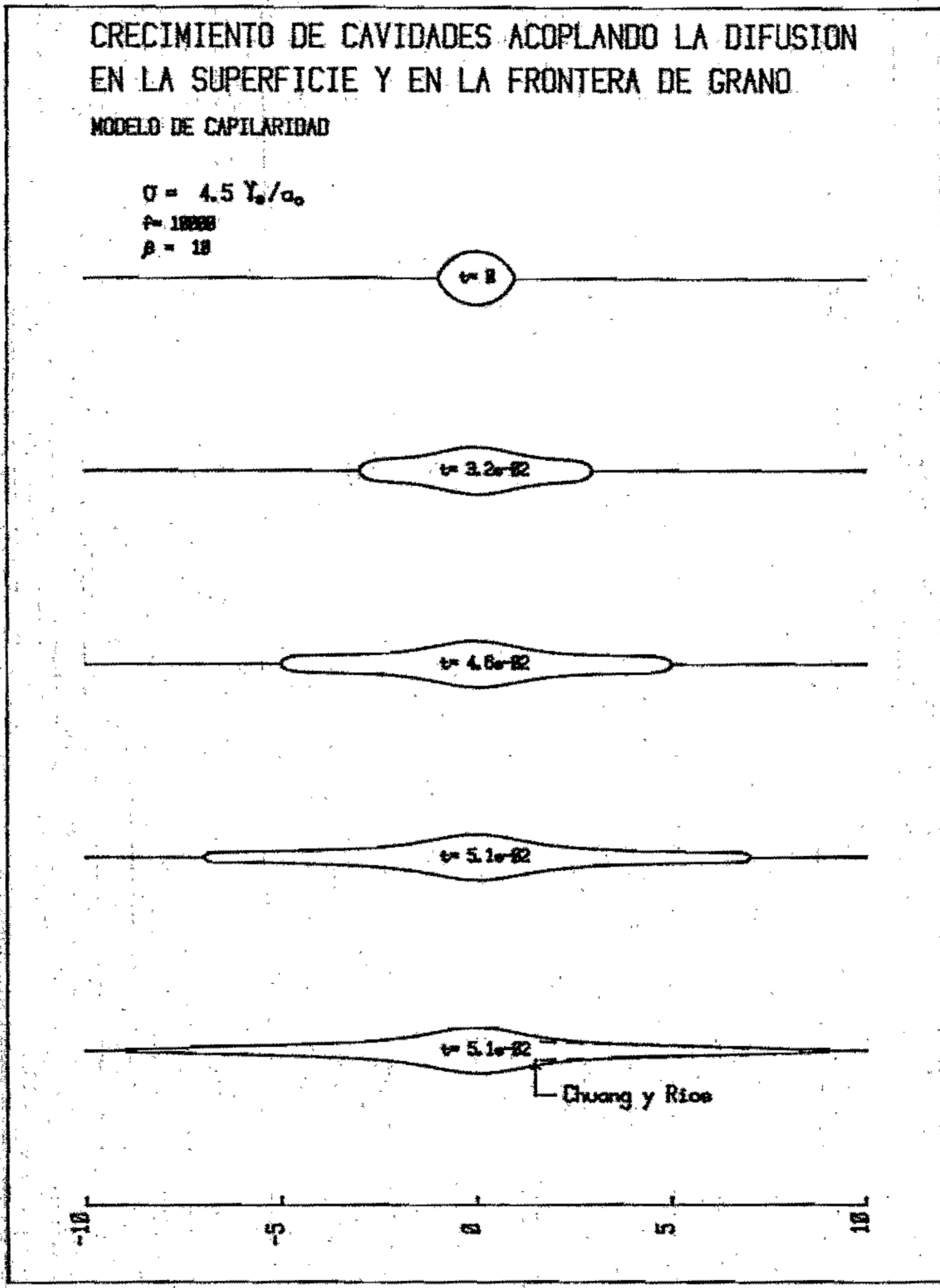

CRECIMIENTO DE CAVIDADES ACOPLANDO LA DIFUSION
EN LA SUPERFICIE Y EN LA FRONTERA DE GRANO
MODELO DE CAPILARIDAD
σ = 4.5 γs/a0
f= 10000
β = 10
t= 0
t= 3.2e-02
t= 4.6e-02
t= 5.1e-02
t= 5.1e-02
Chuang y Rios
-10
-5
0
5
10

FIGURA 17

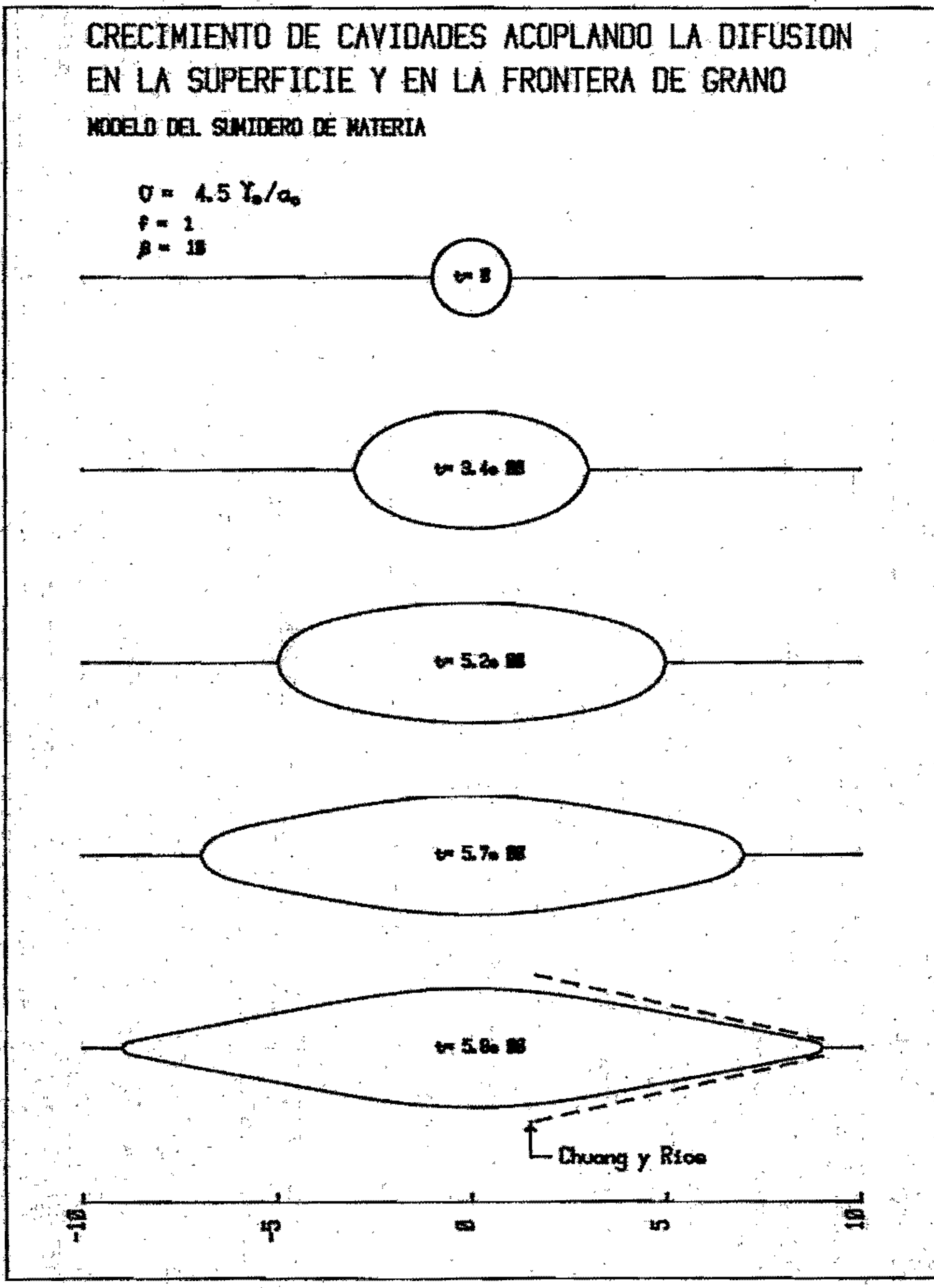

CRECIMIENTO DE CAVIDADES ACOPLANDO LA DIFUSION
EN LA SUPERFICIE Y EN LA FRONTERA DE GRANO
MODELO DEL SUMIDERO DE MATERIA
$\sigma = 4.5\ \gamma_s/a_0$
$f = 1$
t= 3.4e
t= 5.2e
t= 5.7e
Chuang y Rice
-10
-5
0
5
10

FIGURA 18

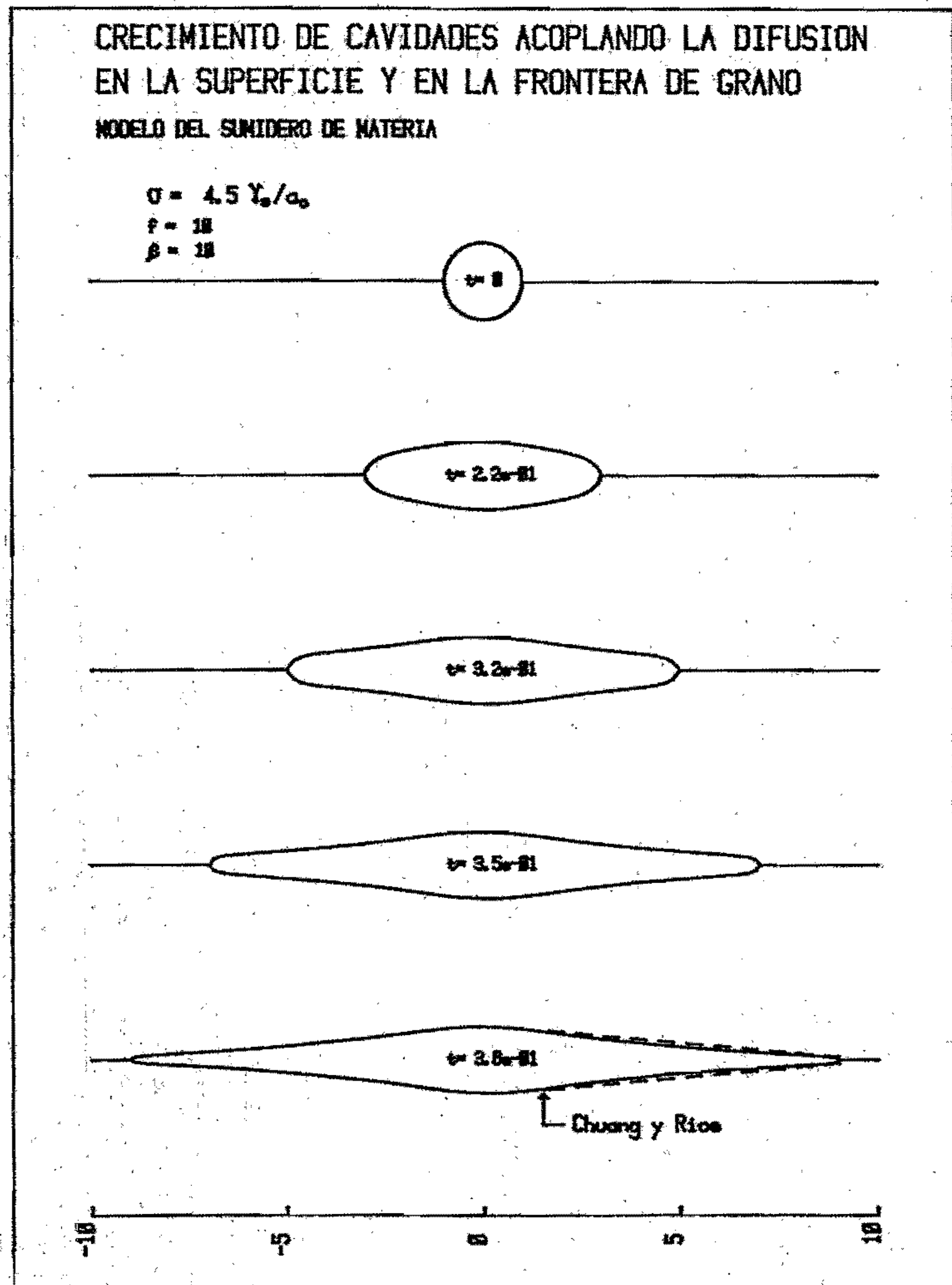

CRECIMIENTO DE CAVIDADES ACOPLANDO LA DIFUSION
EN LA SUPERFICIE Y EN LA FRONTERA DE GRANO
MODELO DEL SUMIDERO DE MATERIA
σ = 4.5 γs/a0
Chuang y Rice
-10
-5
0
5
10

FIGURA 19

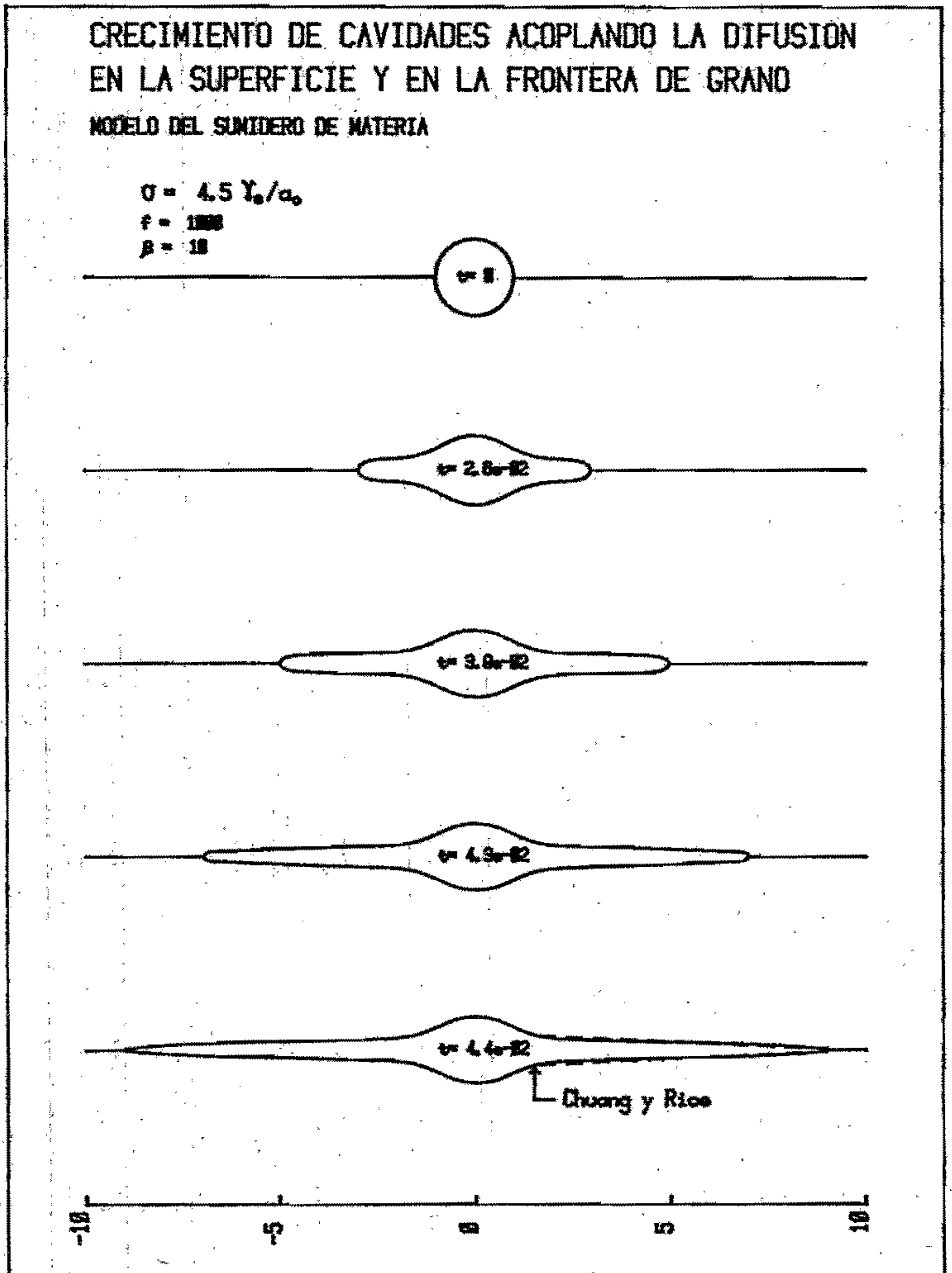
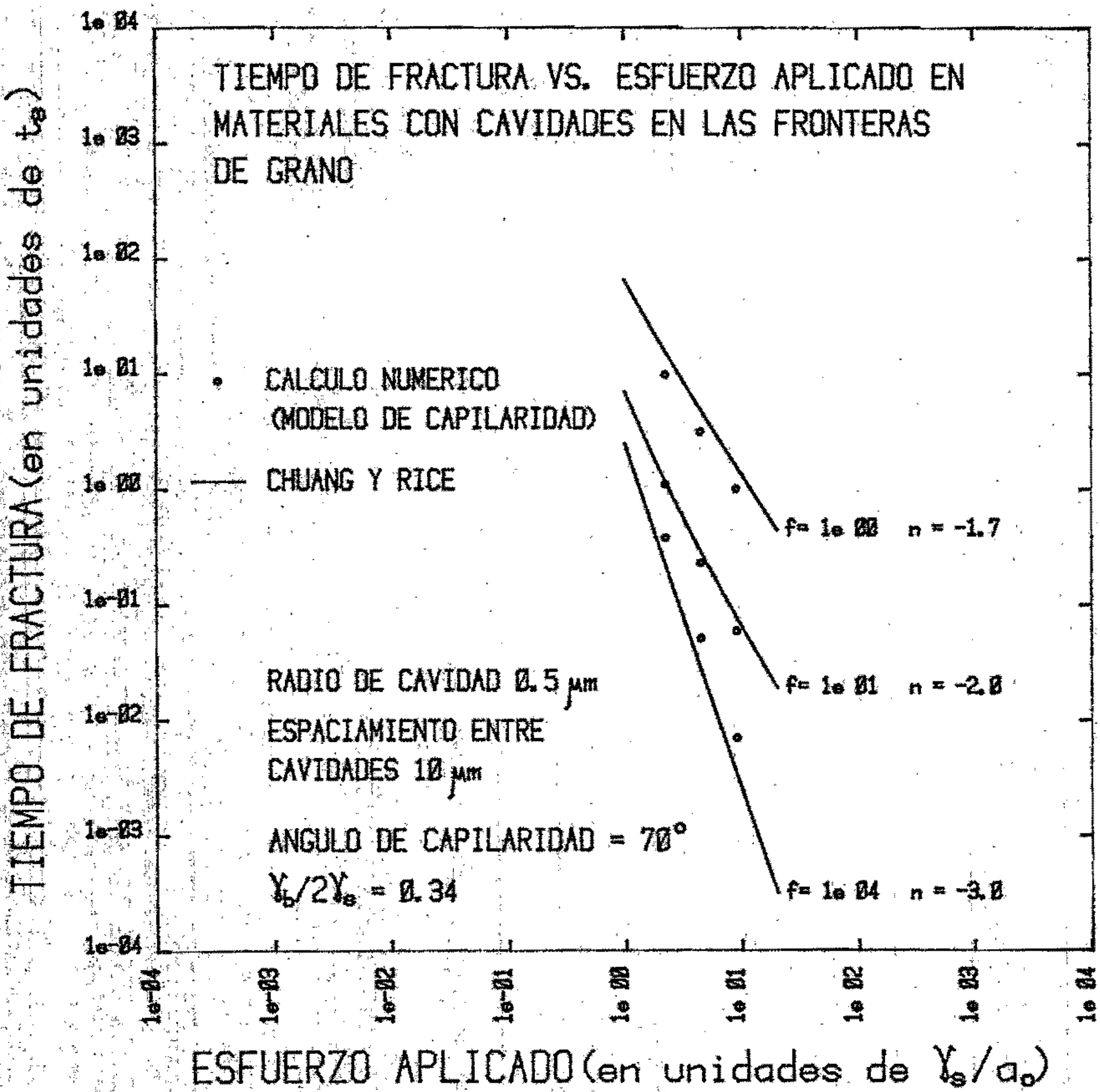
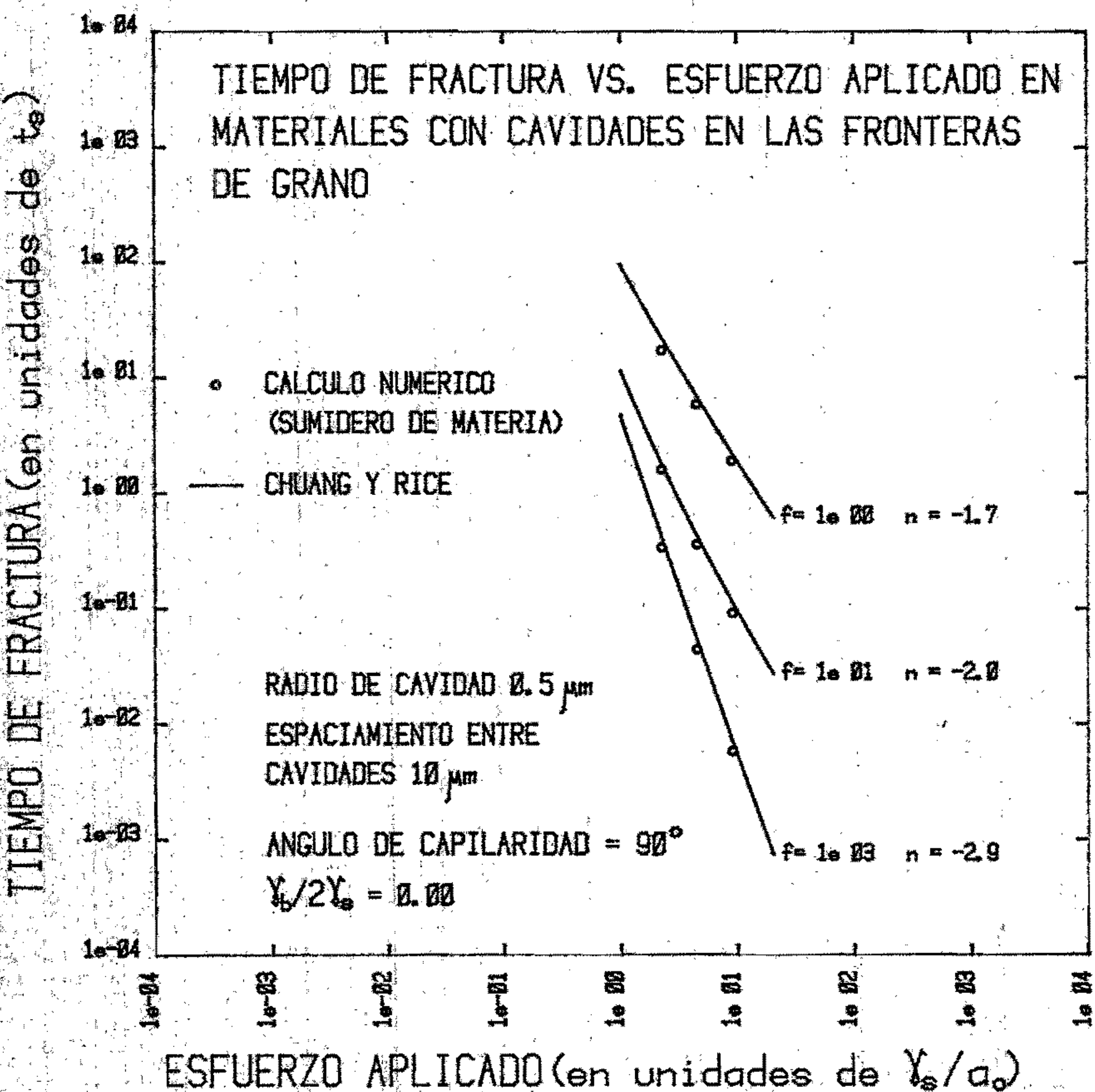

CRECIMIENTO DE CAVIDADES ACOPLANDO LA DIFUSION
EN LA SUPERFICIE Y EN LA FRONTERA DE GRANO
MODELO DEL SUMIDERO DE MATERIA
$\sigma = 4.5\ \gamma_s/a_o$
Chuang y Rice
-10
-5
0
5
10

FIGURA 20



TIEMPO DE FRACTURA VS. ESFUERZO APLICADO EN MATERIALES CON CAVIDADES EN LAS FRONTERAS DE GRANO
• CALCULO NUMERICO (MODELO DE CAPILARIDAD)
— CHUANG Y RICE
RADIO DE CAVIDAD 0.5 μm
ESPACIAMIENTO ENTRE CAVIDADES 10 μm
ANGULO DE CAPILARIDAD = 70°
$\gamma_b/2\gamma_s$ = 0.34
f= 1e 00 n = -1.7
f= 1e 01 n = -2.0
f= 1e 04 n = -3.0
TIEMPO DE FRACTURA (en unidades de t_s)
ESFUERZO APLICADO (en unidades de γ_s/a_o)
1e 04
1e 03
1e 02
1e 01
1e 00
1e-01
1e-02
1e-03
1e-04

FIGURA 21



TIEMPO DE FRACTURA VS. ESFUERZO APLICADO EN MATERIALES CON CAVIDADES EN LAS FRONTERAS DE GRANO
CALCULO NUMERICO (SUMIDERO DE MATERIA)
CHUANG Y RICE
RADIO DE CAVIDAD 0.5 μm
ESPACIAMIENTO ENTRE CAVIDADES 10 μm
ANGULO DE CAPILARIDAD = 90°
$\gamma_b/2\gamma_s$ = 0.00
f= 1e 00 n = -1.7
f= 1e 01 n = -2.0
f= 1e 03 n = -2.9
TIEMPO DE FRACTURA (en unidades de t_o)
ESFUERZO APLICADO (en unidades de γ_s/a_o)
1e 04
1e 03
1e 02
1e 01
1e 00
1e-01
1e-02
1e-03
1e-04

FIGURA 22

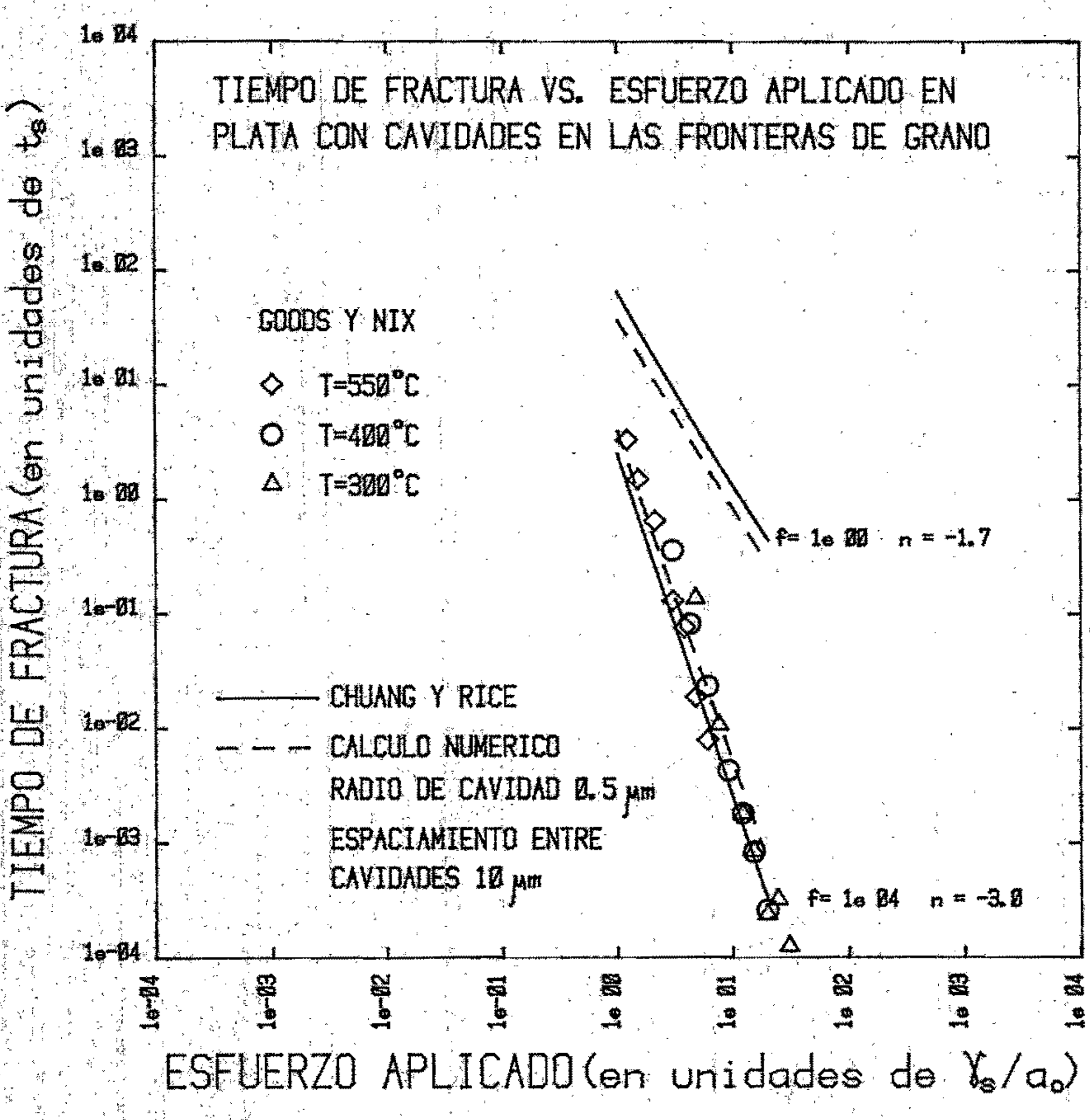

TIEMPO DE FRACTURA VS. ESFUERZO APLICADO EN
PLATA CON CAVIDADES EN LAS FRONTERAS DE GRANO
GOODS Y NIX
T=550°C
T=400°C
T=300°C
CHUANG Y RICE
CALCULO NUMERICO
RADIO DE CAVIDAD 0.5 μm
ESPACIAMIENTO ENTRE
CAVIDADES 10 μm
f= 1e 00 n = -1.7
f= 1e 04 n = -3.0
TIEMPO DE FRACTURA (en unidades de t_s)
ESFUERZO APLICADO (en unidades de γ_s/a_o)

FIGURA 23

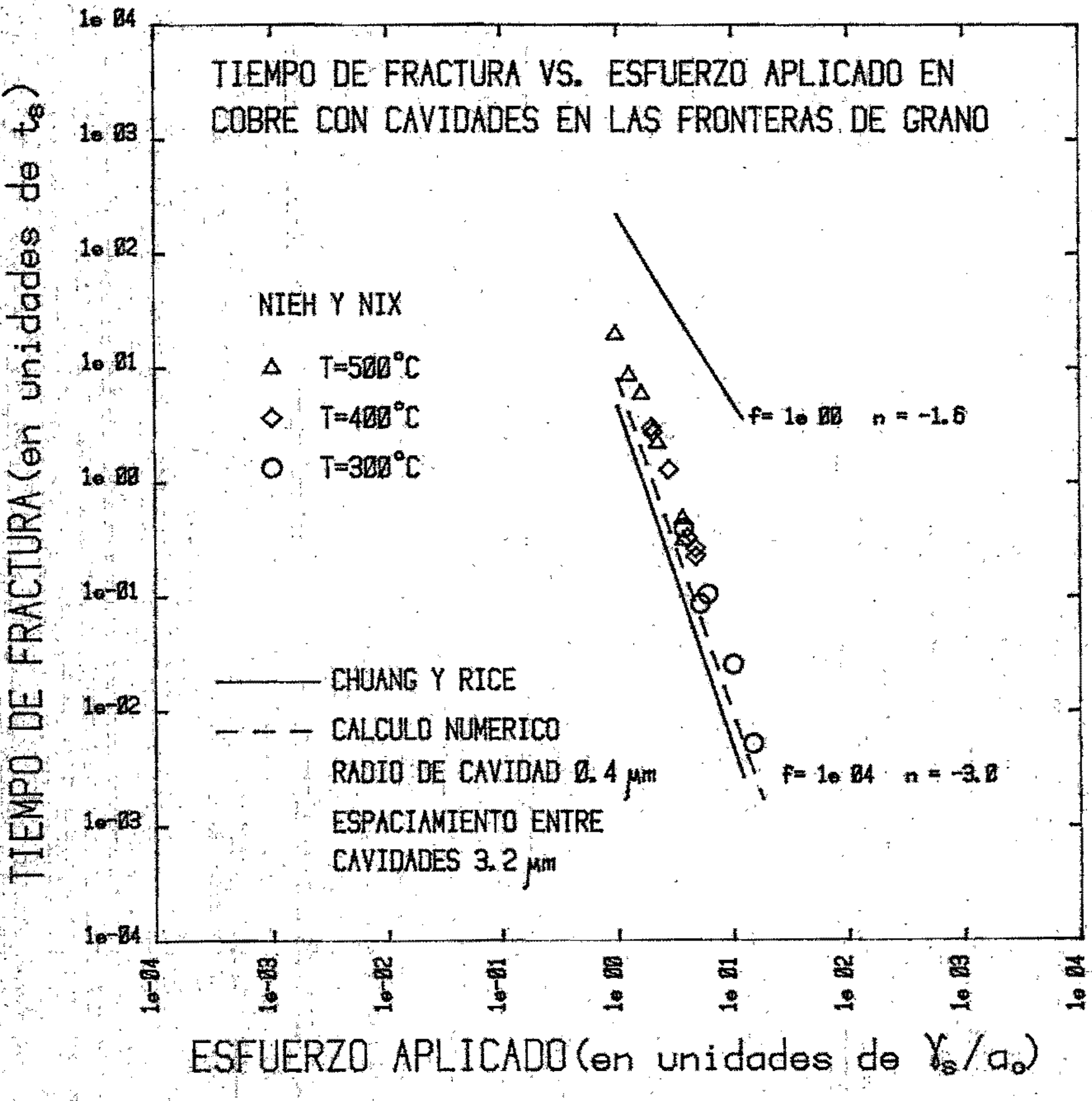

TIEMPO DE FRACTURA VS. ESFUERZO APLICADO EN
COBRE CON CAVIDADES EN LAS FRONTERAS DE GRANO
NIEH Y NIX
T=500°C
T=400°C
T=300°C
CHUANG Y RICE
CALCULO NUMERICO
RADIO DE CAVIDAD 0.4 μm
ESPACIAMIENTO ENTRE
CAVIDADES 3.2 μm
f= 1e 00 n = -1.6
f= 1e 04 n = -3.0
TIEMPO DE FRACTURA(en unidades de t_o)
ESFUERZO APLICADO(en unidades de γ_s/a_o)
1e 04
1e 03
1e 02
1e 01
1e 00
1e-01
1e-02
1e-03
1e-04

FIGURA 24

Capítulo IV. Balance energético del crecimiento de una punta de grieta de Chuang y Rice en una frontera de grano.

1. Introducción.

Como se demostró en el Capítulo I, Chuang y Rice encontraron una superficie de punta de grieta que avanza a velocidad constante y es una solución de la ecuación de difusión superficial. Usando condiciones de continuidad del potencial químico y del flujo pudieron acoplar la superficie al proceso difusivo en la frontera de grano al estilo de Hull y Rimmer [20]. En este Capítulo usamos una ecuación de Fuentes-Samaniego y Nix [33] que representa un balance energético del proceso difusivo en la superficie y en la frontera de grano para analizar el avance de una punta de grieta de Chuang y Rice en una frontera de grano. En esta ecuación, las fuentes energéticas son el trabajo externo asociado con la tensión aplicada y la eliminación de superficie de la frontera de grano a medida que la punta de la grieta avanza. Esta energía se ocupa en la creación de nueva superficie de cavidad y se disipa en los procesos difusivos en la superficie y en la frontera de grano. La fórmula del tiempo de fractura obtenida con la ecuación de balance energético da resultados numérico muy cercanos a los obtenidos por Chuang y Rice para un amplio rango de los parámetros relevantes. Un análisis de las diferencias permite explicarlas por el carácter aproximado de la ecuación que describe la superficie de punta de grieta.

2. Las Ecuaciones

Consideremos un arreglo de cavidades bidimensionales igualmente espacia das en una frontera de grano horizontal, donde el material está sometido a una tensión vertical como se muestra en la figura 7.

a. Difusión en la Superficie.

Como se mencionó antes, en la superficie de una cavidad la diferencia de potencial químico entre un punto de curvatura K y otro de curvatura cero está dado por [38]

$$\Delta\mu = -\Omega\,\gamma_s\,K \tag{1}$$

el flujo sobre la superficie es [39]

$$J_s = \frac{D_s\,\gamma_s}{\kappa T}\,\frac{dK}{dS} \tag{2}$$

y la ecuación de conservación de energía es

$$V_n = \frac{D_s\,\gamma_s\,\delta_s}{\kappa T}\,\frac{d^2K}{dS^2} \tag{3}$$

Chuang y Rice obtuvieron una superficie en forma de punta de grieta que al avanzar con velocidad constante es una solución de la ecuación (3). Sobre esta superficie el flujo está dado por

$$J_s = \frac{V\,Y}{\Omega\,\delta_s} \tag{4}$$

Donde V es la velocidad de la punta de grieta y Y es la coordenada que se muestra en la figura 4.

La geometría de esta superficie se describe aproximadamente por

$$\operatorname{sen}\theta = 1 - \frac{1}{2}\left(\kappa T\,V / D_s\,\delta_s\,\gamma_s\,\Omega\right)^{2/3} Y^2 \tag{5}$$

Donde el ángulo θ se muestra en la figura 4. La potencia disipada por el flujo en la superficie,

$$P_s = \int \frac{\partial \Delta\mu}{\partial s} \cdot J_s \, \delta_s \, dS \qquad (6)$$

que se calcula sustituyendo las ecuaciones (1), (4), dS = dY/cosθ y (5), - es

$$P_s = - 8 \gamma_s V \left[1 - \left(\tfrac{1}{2}(1 + \gamma_b/2\gamma_s) \right)^{1/2} \right] \qquad (7)$$

El avance de la punta de grieta crea nueva superficie y requiere para ésto una potencia dada por

$$P_{\gamma_s} = - 2 \gamma_s V \qquad (8)$$

b. Difusión en la Frontera de Grano.

La potencia disipada por el flujo difusivo en la frontera de grano está dada por

$$P_b = \int \frac{\partial \Delta\mu}{\partial X} \, J_b \, \delta_b \, dX \qquad (9)$$

y cuando se usan aquí las ecuaciones (III-5), (III-6) y (III-8), se obtiene

$$P_b = - \frac{D_b \delta_b \Omega \sigma^2}{kT\, b\, (1 - r/p)^3} \, \frac{A^2}{3} \qquad (10)$$

El avance de la punta de grieta causa la eliminación de superficie de la -- frontera de grano produciendo una potencia dada por

$$P_{\gamma_b} = \gamma_b V \qquad (11)$$

c. Balance Energético

La fuente de energía para el crecimiento difusivo de las cavidades, es, además de la reducción de superficie de frontera de grano, la pérdida de energía potencial de la carga aplicada en el experimento de termofluencia (figura 28), y está dada por

$$P_\sigma = \sigma b \dot{u}_n \tag{12}$$

Donde $\dot{u}_n$ es la velocidad de la carga al bajar y coincide con la rapidez de acumulación de volumen por unidad de superficie de frontera de grano que aparece en la ecuación (III-7). La velocidad puede obtenerse sustituyendo (III-8) en (III-7), y cuando esta se sustituye en (12) resulta

$$P_\sigma = \frac{D_b \delta_b \Omega \sigma^2 A}{kT b (1-r/\beta)^3} \tag{13}$$

La ecuación

$$P_\sigma + P_b + P_s + P_{\gamma_s} + P_{\gamma_b} = 0 \tag{14}$$

Representa el balance energético del proceso de crecimiento de cavidades. La contribución debida al cambio en la energía elástica del sistema no se incluye debido a que en los experimentos de termofluencia el esfuerzo aplicado es 10^4 veces menor ñque el módulo elástico y, como se demuestra en el Apéndice 7, estos cambios pueden despreciarse. Sustituyendo las ecuaciones (7), (8), (10), (11) y (13) en (14) se obtiene

$$\frac{A}{(1-r/\beta)^3}(1-A/3) - 2\beta\xi v / f c^2 = 0 \tag{15}$$

donde $\xi = 4\left[1-\left(\frac{1}{2}(1+\gamma_b/2\gamma_s)\right)^{1/2}\right] + 1 - \gamma_b/2\gamma_s$

Las unidades para el esfuerzo c, el factor de difusividades f y la velocidad adimensional v fueron definidas con anterioridad.

d. Tiempo de Fractura.

La condición de continuidad del flujo en la unión de la superficie de la cavidad y la frontera de grano ($\delta_s J_s = \delta_b J_b$) puede usarse para obte

BALANCE ENERGETICO DEL CRECIMIENTO DE CAVIDADES

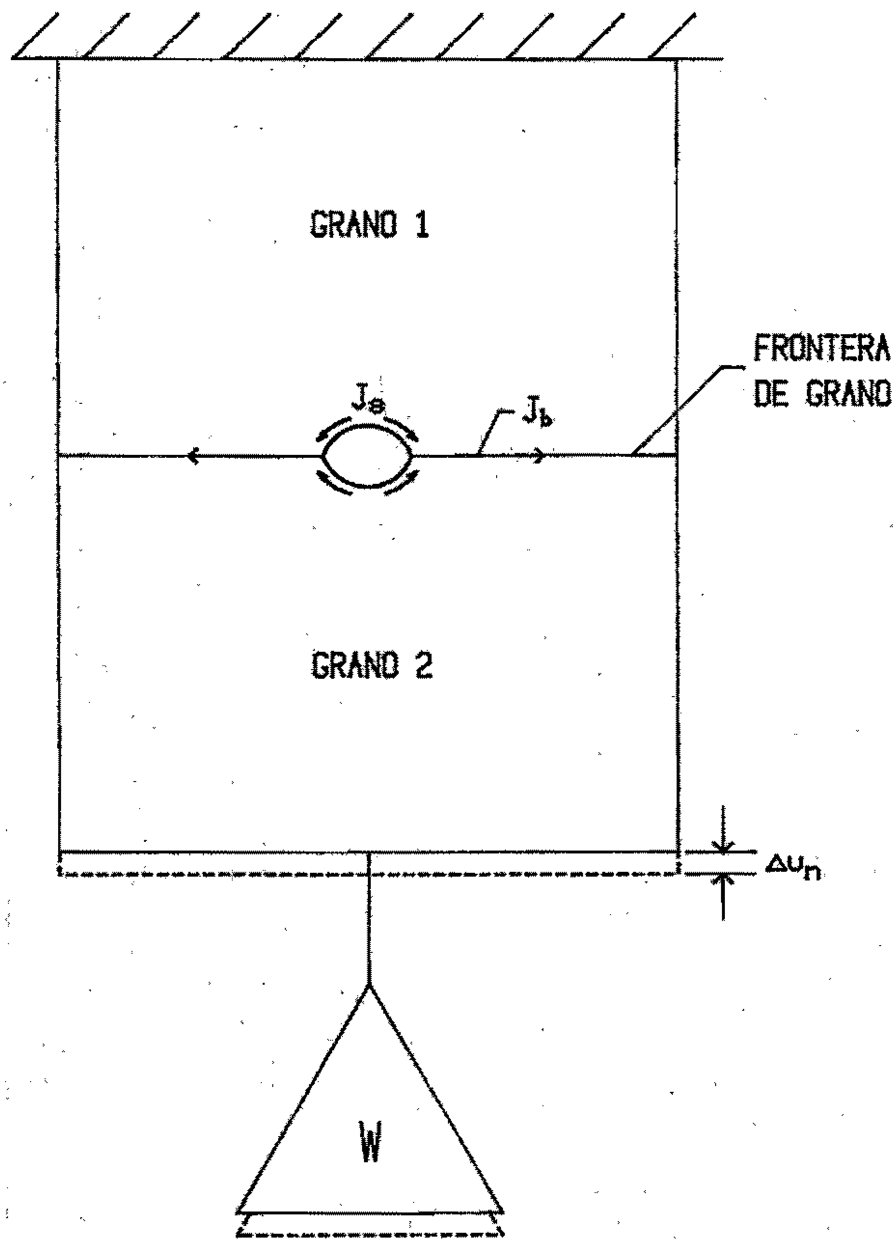


FIGURA 28

ner

$$v^{2/3} = \frac{fc}{2\alpha\beta} \; \frac{A}{(1-r/\beta)^2} \tag{16}$$

donde $\alpha = (2(1-\gamma_b/2\gamma_s))^{1/2}$ Las ecuaciones (15) y (16) permiten eliminar la constante A y despejar la velocidad

$$v = \left(\frac{\alpha c}{\xi}\right)^3 \; p(\xi^2 f/2\alpha\beta c)^{3/2}/(1-r/\beta)^3 \tag{17}$$

Donde la función p, al igual que en la fórmula de Chuang y Rice que se cita en la Introducción, se describe por

$$p(x) = 3x + \frac{9x^2}{2}\left(1 - \sqrt{1+4/3x}\right)$$

El tiempo de fractura $t_r = \int_1^\beta dr/v(r)$ resulta

$$t_r = \frac{\beta}{4}(1-1/\beta)^4 \left[\frac{\xi}{\alpha c\, p(\xi^2 f/2\beta\alpha c)}\right]^3 \tag{19}$$

3. Resultados

La fórmula de tiempo de ruptura de Chuang y Rice y la ecuación (19) producen resultados muy cercanos como puede verse en las figuras 29-31. Las diferencias se incrementan en la medida en que los ángulos de capilaridad son mayores. La condición de continuidad del potencial químico en el punto donde se juntan la superficie de la cavidad y la frontera de grano resulta alterada por

$$\Delta\mu_s = \epsilon\,\Delta\mu_b \tag{20}$$

donde $\epsilon = \alpha^2/\xi$ y toma valores desde 1, para un ángulo de capilaridad de 0º ($\gamma_b/2\gamma_s = 1$) hasta 0.92 para 90° ($\gamma_b/2\gamma_s = 0$).

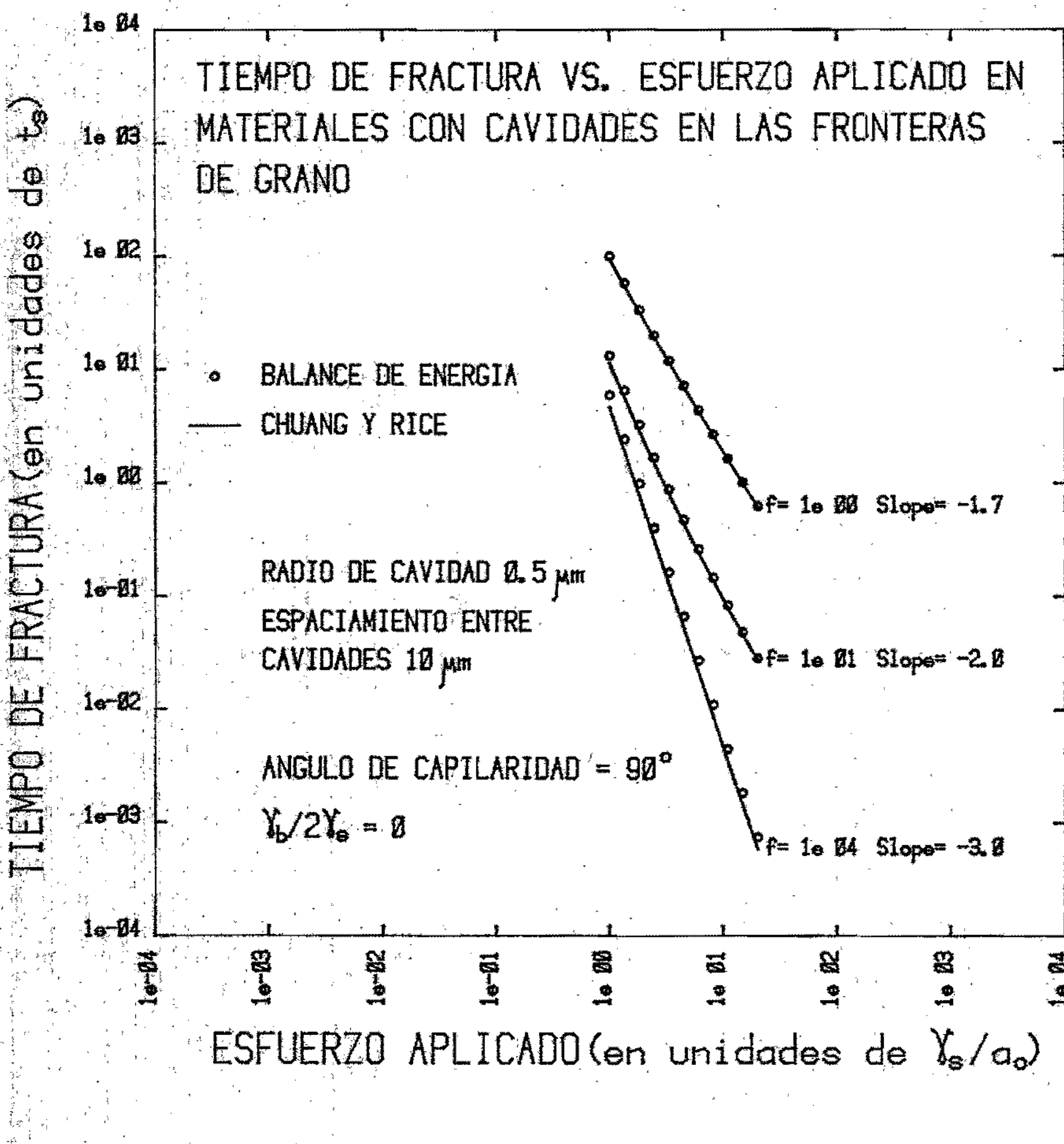

TIEMPO DE FRACTURA VS. ESFUERZO APLICADO EN MATERIALES CON CAVIDADES EN LAS FRONTERAS DE GRANO
BALANCE DE ENERGIA
CHUANG Y RICE
RADIO DE CAVIDAD 0.5 μm
ESPACIAMIENTO ENTRE CAVIDADES 10 μm
ANGULO DE CAPILARIDAD = 90°
$\gamma_b/2\gamma_e = 0$
f= 1e 00 Slope= -1.7
f= 1e 01 Slope= -2.0
f= 1e 04 Slope= -3.0
1e 04
1e 03
1e 02
1e 01
1e 00
1e-01
1e-02
1e-03
1e-04
TIEMPO DE FRACTURA (en unidades de t_s)
ESFUERZO APLICADO (en unidades de γ_s/a_o)

FIGURA 29

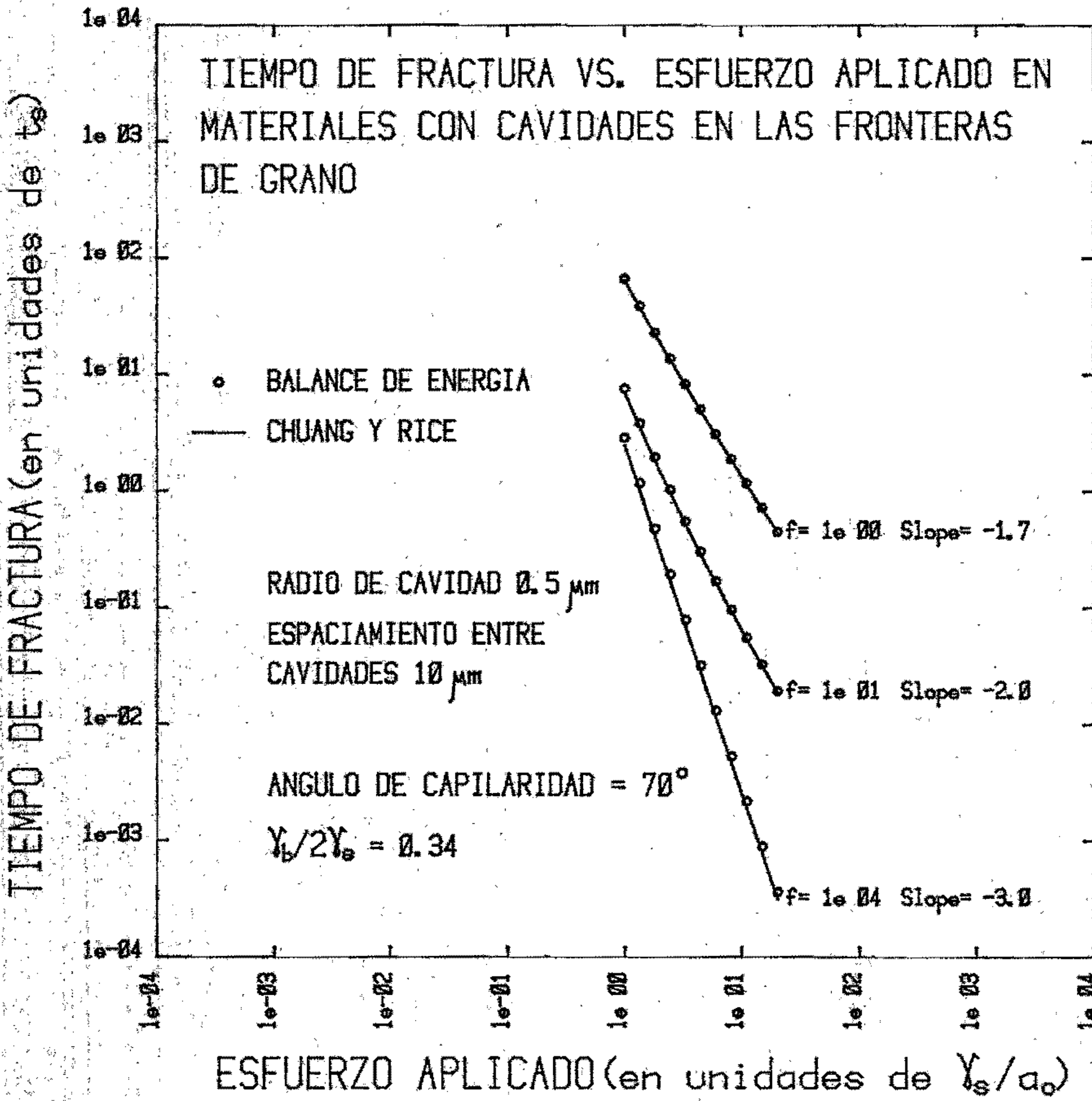

TIEMPO DE FRACTURA VS. ESFUERZO APLICADO EN MATERIALES CON CAVIDADES EN LAS FRONTERAS DE GRANO
BALANCE DE ENERGIA
CHUANG Y RICE
RADIO DE CAVIDAD 0.5 μm
ESPACIAMIENTO ENTRE CAVIDADES 10 μm
ANGULO DE CAPILARIDAD = 70°
$\gamma_b/2\gamma_s$ = 0.34
f= 1e 00 Slope= -1.7
f= 1e 01 Slope= -2.0
f= 1e 04 Slope= -3.0
1e 04
1e 03
1e 02
1e 01
1e 00
1e-01
1e-02
1e-03
1e-04
TIEMPO DE FRACTURA (en unidades de t_s)
ESFUERZO APLICADO (en unidades de γ_s/a_o)

FIGURA 30

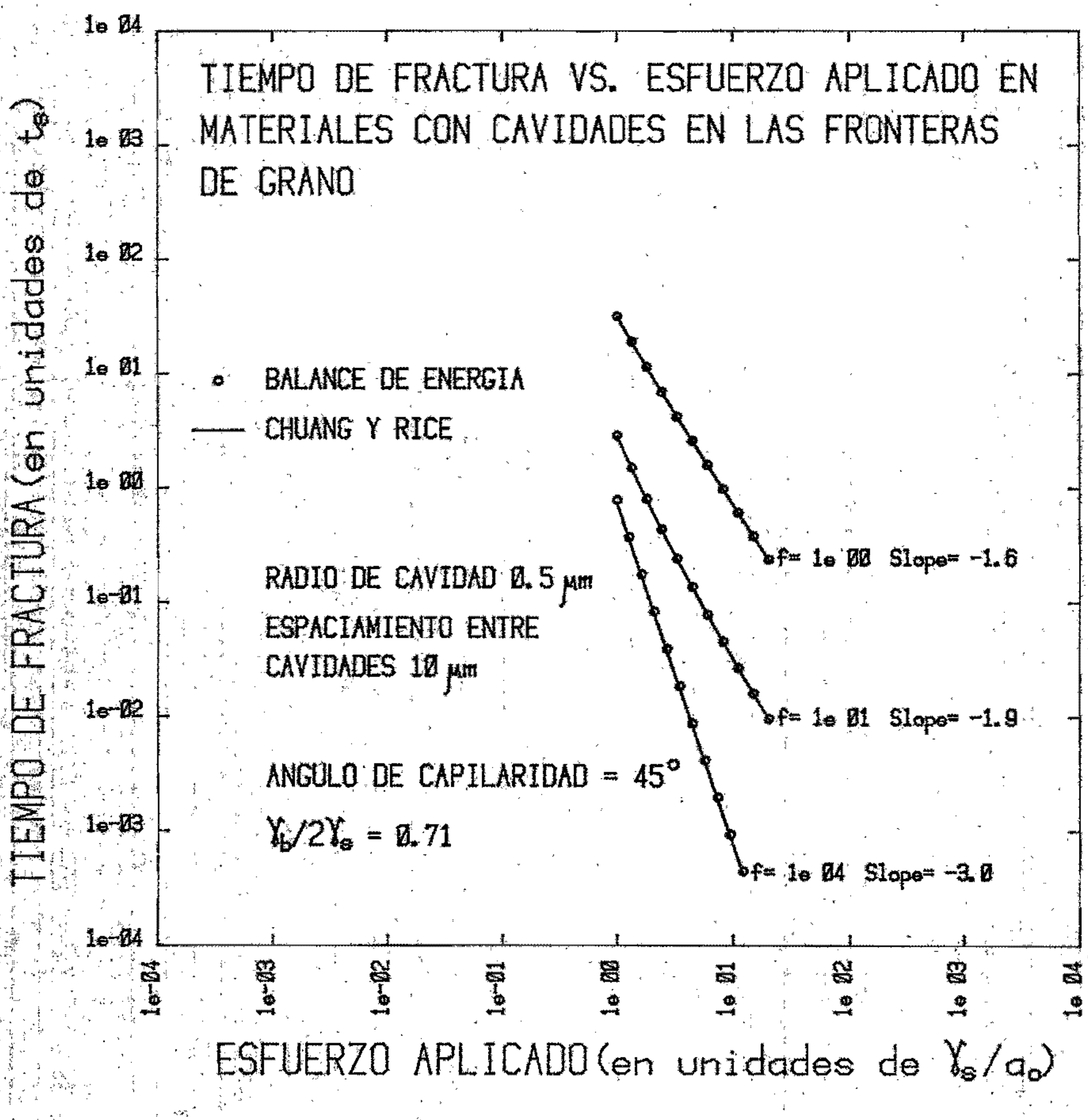

TIEMPO DE FRACTURA VS. ESFUERZO APLICADO EN MATERIALES CON CAVIDADES EN LAS FRONTERAS DE GRANO
BALANCE DE ENERGIA
CHUANG Y RICE
RADIO DE CAVIDAD 0.5 μm
ESPACIAMIENTO ENTRE CAVIDADES 10 μm
ANGULO DE CAPILARIDAD = 45°
γb/2γs = 0.71
f= 1e 00 Slope= -1.6
f= 1e 01 Slope= -1.9
f= 1e 04 Slope= -3.0
TIEMPO DE FRACTURA (en unidades de ts)
ESFUERZO APLICADO (en unidades de γs/ao)
1e 04
1e 03
1e 02
1e 01
1e 00
1e-01
1e-02
1e-03
1e-04

FIGURA 31

La tendencia general de disminuir las diferencias en tiempo de fractura y las alteraciones en la continuidad del potencial químico cuando los ángulos de capilaridad se reducen, hace pensar que el origen de las diferencias se encuentra en el carácter aproximado de la superficie de punta de grieta de Chuang y Rice. La geometría de la superficie, aproximada por la ecuación (5), se describe con mayor precisión cuando los ángulos de capilaridad son pequeños.

De lo anterior podemos concluír que el modelo para el avance de puntas de grieta en fronteras de grano de Chuang y Rice satisface con buen grado de exactitud la ecuación de balance energético, especialmente en puntas de grieta donde el ángulo de capilaridad es pequeño.

Capítulo V. Conclusiones.

Se analizaron los procesos de difusión dependientes del tiempo que se presentan en la superficie de las cavidades y en la frontera de grano durante el crecimiento de las cavidades intergranulares bajo condiciones de termofluencia.

En cuando a la difusión en la frontera del grano se encontró que el período transitorio es siempre muy corto y que el crecimiento atribuíble al transitorio es más de cuatro órdenes de magnitud menor que el crecimiento total de la cavidad al momento de la fractura. Esto significa que se pueden hacer cálculos precisos usando una distribución estacionaria de esfuerzos para describir el proceso de difusión en la frontera del grano.

La evolución de la superficie de la cavidad se modeló con un código numérico simulando el acoplamiento de los procesos difusivos en la superficie y en la frontera del grano.

Las diferencias en los tiempos de fractura numericamente calculados y los predichos por Chuang y Rice resultaron ser pequeñas. Esto permitió concluír que la fórmula de Chuang y Rice para el tiempo de fractura es útil para los procesos de crecimiento de cavidades en donde la difusividad de la superficie es igual o menor que la frontera del grano.

La comparación de los cálculos con datos de ruptura de termofluencia para plata y cobre con cavidades, lleva a la conclusión de que el mecanismo de crecimiento de las cavidades se controla por difusión en -

la superficie. Se hizo un análisis del balance energético del avance de una superficie de Chuang y Rice en una frontera de grano. Se en-- contró que el modelo de Chuang y Rice satisface la condición de balance energético con buena aproximación. Las desviaciones de la condición del balance energético caen dentro de los límites de aproximación del modelo de Chuang y Rice.

APENDICE 1

ANALISIS ELASTICO BIDIMENSIONAL

Consideremos la columna de material definida por $a \leq x \leq b$ y $0 \leq y < \infty$ en la Figura 7. La ecuación diferencial parcial de la función de esfuerzos es [34].

$$\left[\frac{\partial^4}{\partial\xi^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial\xi^2\partial\eta^2} + \frac{\partial^4}{\partial\eta^4}\right]\phi(\xi,\eta) = 0 \qquad (1)$$

donde se han definido $\xi = (x-a)/(b-a)$ y $\eta = y/(b-a)$. Las soluciones para esta ecuación son

$$\phi_n(1+\gamma_n\eta)\exp\left(-\frac{2n-1}{2}\pi\eta\right)\operatorname{sen}\frac{2n-1}{2}\pi\xi \qquad n=1,2,\ldots \qquad (2)$$

La solución general para la función de esfuerzos ϕ, que satisface la condición de esfuerzos de corte cero en la frontera de grano, es

$$\phi(\xi,\eta) = \sum_{n=1}^{\infty}\phi_n\left(1+\frac{2n-1}{2}\pi\eta\right)\exp\left(-\frac{2n-1}{2}\pi\eta\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2}\pi\xi\right) \qquad (3)$$

El esfuerzo a tensión en la dirección y, $\sigma_y = \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$, es

$$\sigma_y = \sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{ny}\left(1+\frac{2n-1}{2}\pi\eta\right)\exp\left(-\frac{2n-1}{2}\pi\eta\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2}\pi\xi\right) \qquad (4)$$

donde

$$\sigma_{ny} = -\frac{\phi_n}{(b-a)^2}\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)^2$$

El esfuerzo en la dirección x, $\sigma_x = \dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2}$, es

$$\sigma_x = \sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{ny}\left(1-\frac{2n-1}{2}\pi\eta\right)\exp\left(-\frac{2n-1}{2}\pi\eta\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2}\pi\xi\right) \qquad (5)$$

y el esfuerzo de corte, $\tau_{xy} = -\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}$, es

$$\tau_{xy} = -\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{ny}\left(\frac{2n-1}{2}\pi\eta\right)\exp\left(-\frac{2n-1}{2}\pi\eta\right)\cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi\xi\right) \qquad (6)$$

La componente x-y de la deformación unitaria, $\gamma_{xy} = \dfrac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}$,

puede usarse para calcular u_y. Por definición,

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}$$

donde u_x y u_y son las deformaciones elásticas en las direcciones x y y respectivamente.

Tomando la segunda derivada con respecto a x se obtiene

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_x}{\partial y} \qquad (7)$$

donde $\epsilon_x = \frac{1}{E}\left((1-\nu^2)\,\sigma_y - \nu(\nu+1)\,\sigma_x\right)$. Sustituyendo en (7) -- las ecuaciones (4), (5) y (6) resulta

$$\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}\right)_{y=0} = \frac{2(1-\nu^2)}{E(b-a)} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{xy}\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2}\pi\,\xi\right)$$

Una doble integración sobre x da

$$u_y(\xi, 0) = -\frac{4(1-\nu^2)}{E\pi}(b-a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_{xy}}{2n-1} \operatorname{sen} \frac{2n-1}{2}\pi\,\xi \qquad (8)$$

Con las ecuaciones (4) y (8) se puede establecer la relación entre las --- ecuaciones (II-5) y (II-6).

APENDICE 2

ANALISIS ELASTICO TRIDIMENSIONAL

Consideremos el cilindro hueco de radios interior y exterior a y b de la Figura 10. La ecuación diferencial de la función de esfuerzos ϕ está dada por [36].

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\right]^2 \phi(\rho,\xi) = 0 \qquad (1)$$

donde $\rho = r/a$ y $\xi = z/a$. Las funciones $g(\rho)\exp(-e\xi)$, $g(\rho)\exp(+e\xi)$, $g(\rho)\xi\exp(-e\xi)$ y $g(\rho)\xi\exp(+e\xi)$ son soluciones de (1) siempre que g (p) sea solución de la ecuación de Bessel de orden cero,

$$\frac{d^2g}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dg}{d\rho} + e^2 g = 0 \qquad (2)$$

De las cuatro soluciones se seleccionan solamente $g(\rho)\exp(-e\xi)$ y $g(\rho)\exp(-e\xi)\xi$ por su comportamiento adecuado cuando $\xi \to \infty$. Las soluciones para g(p) - son

$$g(\rho) = c_1 J_0(e\rho) + c_2 Y_0(e\rho)$$

donde $J_0(e\rho)$ y $Y_0(e\rho)$ son funciones de Bessel de orden cero [37] . Las condiciones de frontera impuestas son

$$\begin{aligned} c_1 J_0(e) + c_2 Y_0(e) &= 0 \\ c_1 J_0'(\beta e) + c_2 Y_0(\beta e) &= 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

donde $\beta = b/a_0$. Las constantes c_1 y c_2 son diferentes de cero solamente - si

$$J_0(e)\, Y_0'(\beta e) - J_0'(\beta e)\, Y_0(\varepsilon) = 0 \qquad (4)$$

Llamaremos e_n a la sucesión de números reales que son raíces de (4) y definimos las funciones

$$B_0(e_n\rho) = J_0(e_n\rho) + d_n Y_0(e_n\rho) \qquad (5)$$

donde $\quad d_n = -J_o(e_n)/Y_o(e_n) = -J_o^{1}(\beta e_n)/Y_o^{1}(\beta e_n)$.

Estas funciones son soluciones de (2) y satisfacen las condiciones de frontera (3). Al final de este apéndice se listan las propiedades más importantes de las funciones (5).

La solución general para la función de esfuerzo es

$$\phi(\rho,\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \left(1+\frac{e_n\zeta}{2\nu}\right) \exp(-e_n\zeta)\; B_o(e_n\rho) \qquad (6)$$

y satisface la condición de esfuerzos de corte cero en la frontera de grano. La componente z del esfuerzo,

$$\sigma_z = \frac{\partial}{\partial z}\left((2-\nu)\nabla^2\phi - \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)$$

es

$$\sigma_z = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{zn}\,(1+e_n\zeta)\exp(-e_n\zeta)\; B_o(e_n\rho) \qquad (7)$$

donde

$$\sigma_{zn} = \frac{\phi_n e_n^3}{2\nu a^3}$$

El desplazamiento correspondiente en la dirección z , $\mu_z = \frac{(1+\nu)}{E}\left[2(1-\nu)\nabla^2\phi - \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right]$

es $$\mu_z = -\frac{2(1-\nu^2)a}{E}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_{zn}}{e_n}\left(1+\frac{e_n\zeta}{2(1-\nu)}\right)\exp(-e_n\zeta)\; B_o(e_n\rho) \qquad (8)$$

las ecuaciones (7) y (8) en la frontera de grano ($\zeta=0$) se utilizan para obtener entre estas ecuaciones (II-17) y (II-18) la relación.

Propiedades de la función $\quad B_o(e_n\rho)$

a) $$\int_1^{\beta} B_o(e_n\rho)\,\rho\, d\rho = -\frac{2}{\pi\, Y_o(e_n)\, e_n^2} \qquad (9)$$

b) $$\int_1^{\beta} B_o(e_n\rho)\, B_o(e_m\rho)\,\rho\, d\rho = B_{om}\,\delta_{mn} \qquad (10)$$

donde δ_{mn} es la delta de Kronecker y $B_{om} = \frac{2}{\pi^2 e_m^2}\left[\frac{1}{Y_1(\beta e_m)^2} - \frac{1}{Y_o(e_m)^2}\right]$. (11)

c) $$G = \frac{8(\beta^2-1)\beta^2}{\left[4\beta^4 \ln\beta - 3\beta^4 + 4\beta^2 - 1\right]} = \frac{\pi^2 \beta^2(\beta^2-1)}{8\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{B_{on} Y_o(e_n)^2 e_n^6}} \qquad (12)$$

Apéndice 3

Programa Numérico para Resolver la Distribución de Esfuerzos en la Frontera de Grano durante el Transitorio Elástico

```
0: "Numerical Solution of the Elastic ":
1: "Transient of the Traction Distribution":
2: "in the Grain Boundary":
3: ent N,O
4: 40→M
5: dim A[N,N],Z[4],Y[N],X[N],D[50]
6: dim T[0:100],G[0:100],H[0:100]
7: rad
8: 0→r50
9: .3→Q;Q/100→r10
10: 1→r11;0→G[0]→H[0]
11: 1e-6→H;2H→r20;2→r22;10→r24
12: 10→B
13: cll 'Form'
14: cll 'Iniload'
15: cll 'Amatrix'
16: "AGA":
17: cll 'Jump'
18: dsp "T",T,"G",G
19: if T>=r10;cll 'StoG';r10+Q/100→r10
20: if T>=r20;cll 'Stalfa';r22*r20→r20;1→O
21: if T>1e-5;5→r22
22: if r20>.0001;2→r22
23: if O=1;cll 'Conf';0→O
24: if T<Q;gto "AGA"
25: for J=0 to 100;plt H[J],G[J];next J;pen
26: trk 1;rcf r24,H[*];r24+1→r24
27: trk 1;rcf r24,G[*]
28: end
29: "StoG":
30: if r11>100;gto "NG";dsp "Gfull";stp
31: G→G[r11];T→H[r11];r11+1→r11
32: "NG":ret
33: "Stalfa":N→T[0];T→T[N+1];G→T[N+2]
34: for J=1 to N;Y[J]→T[J];next J
35: trk 1;rcf r24,T[*];r24+1→r24
36: ret
37: "Jump":
38: 0→r0
39: for J=1 to N;0→X[J];next J
40: for K=1 to N
41: for J=1 to N
42: if Y[J]<1e-9;0→Y[J]
43: X[K]+A[K,J]*Y[J]→X[K]
44: next J
45: r0+X[K]/(2K-1)→r0
46: next K
47: π/2r0→r0;1/r0→V
48: 0→r1
49: for K=1 to N
50: X[K]r0→Y[K]
51: r1+Y[K]/(2K-1)↑4→r1
```

```
52: next K
53: 2(r1-D)/π→L
54: if H>1e-4;gto "NH"
55: if abs(U-V)/V<1e-6;2H→H;cll 'Amatrix'
56: "NH":
57: V→U
58: T+H→T
59: ret
60: "Amatrix":
61: wrt "New Amat",H
62: for J=1 to N
63: for K=1 to N
64: (π(2K-1)/π)↑2→A[J,K]
65: if J=K;A[K,J]-H(2J-1)↑3→A[J,K]
66: next K
67: next J
68: ret
69: "Iniload":
70: trk 1;ldf 0,D[*]
71: 0→r0→r1
72: for J=1 to 50;r0+D[J]/(2J-1)↑4→r0;1/(2J-1)↑7+r1→r1;next J
73: 48r1/π↑3→r1
74: r0+D↑9→ 0
75: 2(r1-D)/π→r30
76: for J=1 to N
77: r0+D[J]/(2J-1)→r0
78: next J
79: π/2r0→r0
80: for J=1 to N
81: D[J]r0→Y[J]
82: next J
83: ret
84: "Conf":
85: for K=0 to M
86: 0→r0
87: for J=1 to N
88: r0+Y[J]*sin((2J-1)πK/2M)→r0
89: next J
90: r0→T[K]
91: next K
92: cll 'Plot'
93: ret
94: "Plot":r50+1→r50
95: if r50=4;1→r50
96: pen# r50
97: for J=0 to M;plt J/M,T[J];next J;pen
98: ret
99: "Form":
100: scl -.2,1.8,-.2,1.8
101: lin -.2,1.0,-.2,2.3
102: ret
*5664
```

APENDICE 4

EL METODO NUMERICO

a) ECUACIONES GENERALES.

Consideremos la Figura 25. La simetría del problema permite trabajar únicamente con el primer cuadrante de la cavidad para describir su evolución . La superficie de la cavidad inicial se discretiza con un conjunto de puntos igualmente espaciados

$$x_i \, , \, y_i \qquad i = 0, \ldots, N \tag{1}$$

La magnitud de la curvatura κ_i se calcula haciendo pasar un círculo en cada punto y sus dos vecinos, y está dada por

$$\kappa_i = 1 \Big/ \sqrt{(x_i - x_c)^2 + (y_i - y_c)^2} \tag{2}$$

donde (x_c, y_c) son las coordenadas del centro de curvatura dadas por

$$x_c = \frac{(y_i - y_{i+1})\left[x_{i-1}^2 + y_{i-1}^2 - x_i^2 - y_i^2\right] - (y_{i-1} - y_i)\left[x_i^2 + y_i^2 - x_{i+1}^2 - y_{i+1}^2\right]}{2\left[(x_{i-1} - x_i)(y_i - y_{i+1}) - (x_i - x_{i+1})(y_{i-1} - y_i)\right]} \tag{3}$$

$$y_c = \frac{(x_{i-1} - x_i)\left[x_i^2 + y_i^2 - x_{i-1}^2 - y_{i-1}^2\right] - (x_i - x_{i+1})\left[x_{i-1}^2 + y_{i-1}^2 - x_i^2 - y_i^2\right]}{2\left[(x_{i-1} - x_i)(y_i - y_{i+1}) - (x_i - x_{i+1})(y_{i-1} - y_i)\right]}$$

El signo de la curvatura, positivo en las superficies cóncavas, se calcula uniendo con una línea a los vecinos anterior y posterior del punto. Si el punto en cuestión se localiza a la derecha de la línea trazada, la curvatura se considera positiva, y viceversa.

DISCRETIZACION DE LA SUPERFICIE

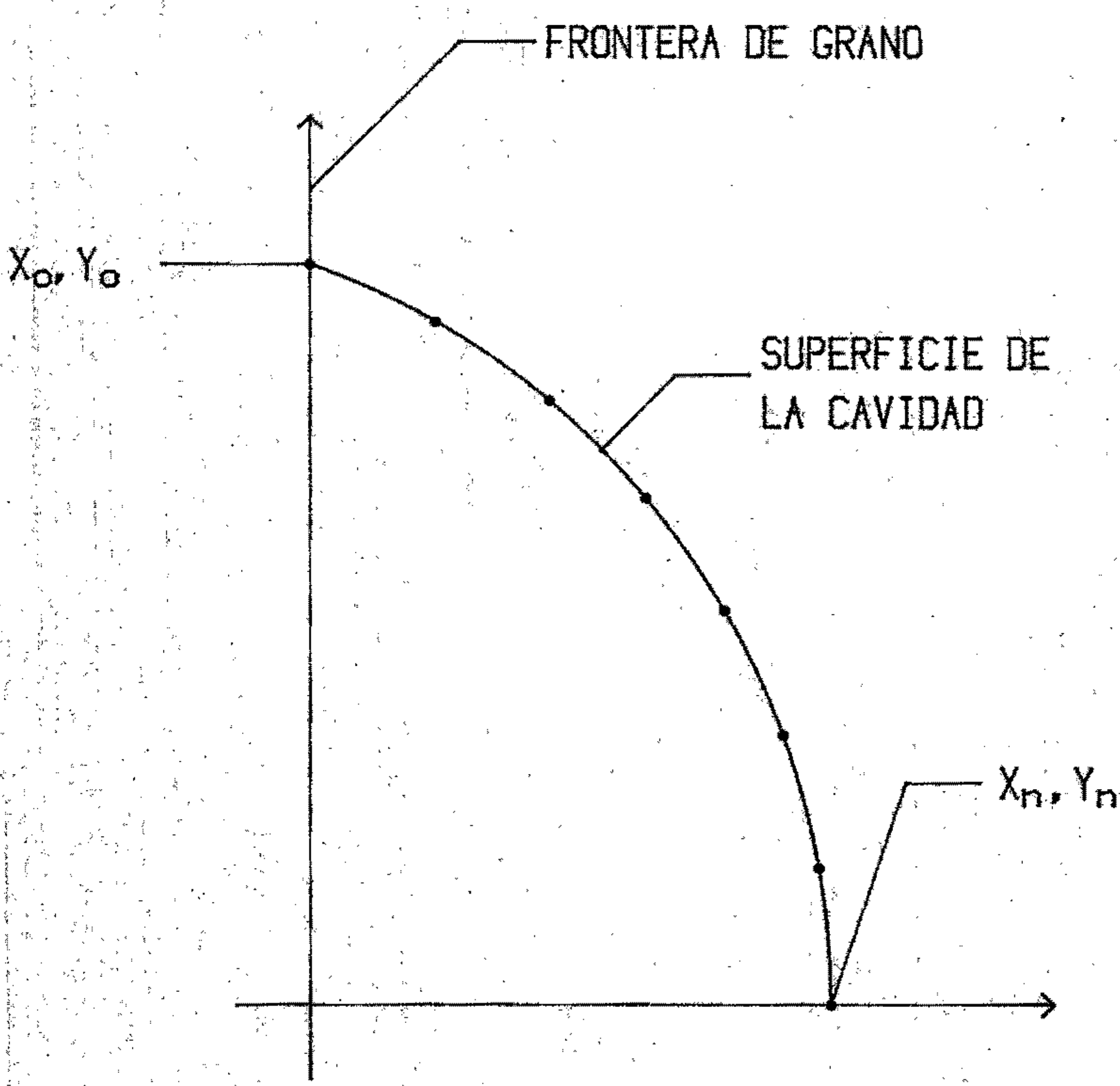


FIGURA 25

La velocidad v_i de cada punto en dirección normal a la superficie, dada por (III-3), se aproxima utilizando diferencias finitas centradas,

$$v_i \cong \frac{\dfrac{k_{i+1}-k_i}{s_{i+1}-s_i} - \dfrac{k_i-k_{i-1}}{s_i-s_{i-1}}}{\frac{1}{2}(s_{i+1}-s_{i-1})} \qquad (4)$$

donde s_i es la longitud de arco desde el punto (x_o, y_o) al punto (x_i, y_i) y se aproxima con

$$s_i = s_{i-1} + \sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(y_i-y_{i-1})^2} \qquad (5)$$

El movimiento de los puntos en la superficie de la cavidad conforme transcurre el tiempo se aproxima por

$$y_i(t+h) = y_i(t) + v_i\, h \cos\theta_i \qquad (6)$$

$$x_i(t+h) = x_i(t) + h\, v_i \operatorname{sen}\theta_i$$

donde h es el incremento en el tiempo y el seno y el coseno de θ_i, como se muestra en la Figura 26, se calculan a partir de

$$\operatorname{tg}\theta_i = -\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{x_{i+1}-x_{i-1}} \qquad (7)$$

mediante

$$\operatorname{sen}\theta_i = \operatorname{tg}\theta_i/\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta_i} \qquad (8)$$

$$\cos\theta_i = 1/\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta_i}$$

El incremento del tiempo h se calcula de manera que el máximo desplazamiento de un punto sea 10^{-3} veces el tamaño inicial de la cavidad.

En la medida que la cavidad crece el espaciamiento entre puntos cambia de manera desigual. Se diseñó una subrutina llamada "Inter" para introducir un punto entre dos que se hayan separado demasiado y en donde la curvatura sea tan grande que requiera más puntos para su mejor descripción. La subrutina "Inter" coloca al nuevo punto en la mitad del arco, de la curva

APROXIMACION A LA DIRECCION NORMAL

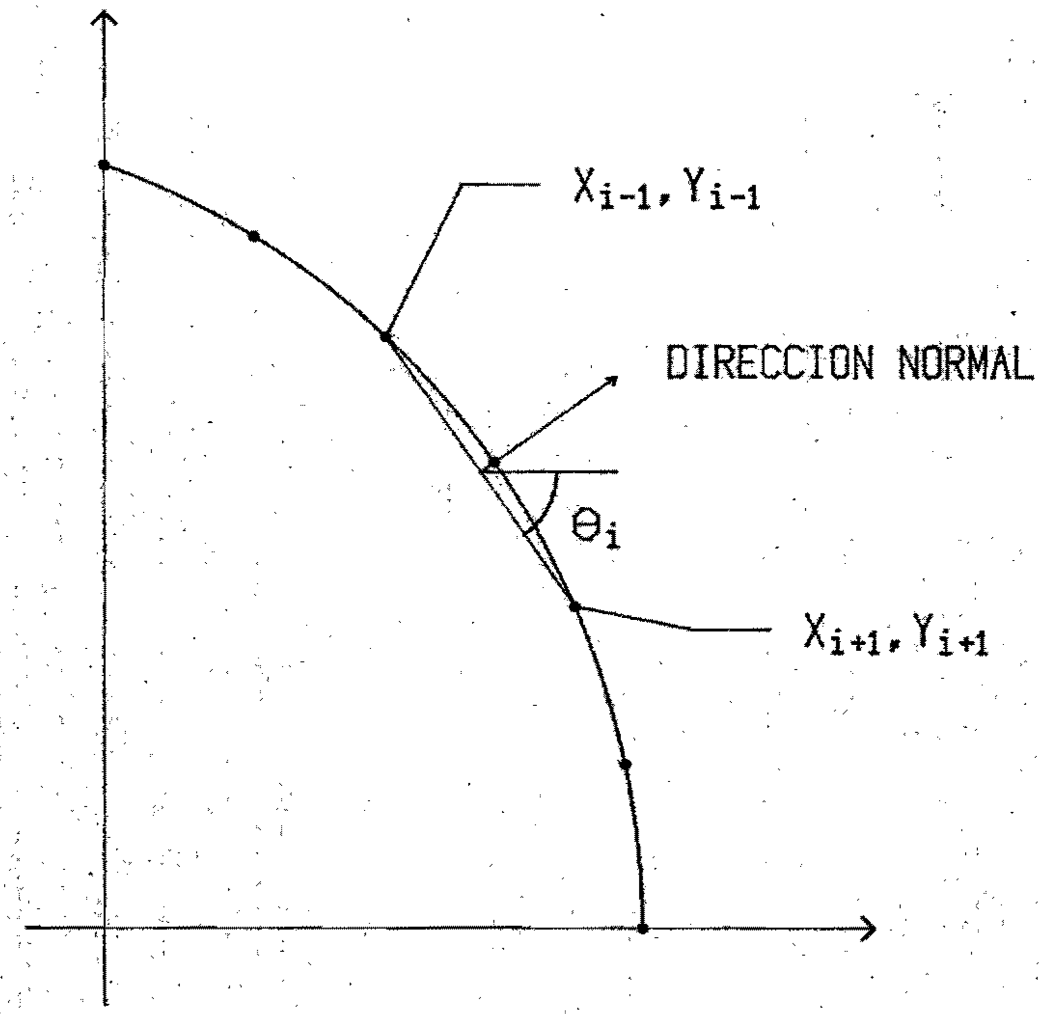


FIGURA 26

tura correspondiente, que unía a los dos puntos anteriormente vecinos. Como las regiones donde la curvatura es muy pequeña no se necesitan muchos puntos para describirla, se diseñó la subrutina "Reducer" para eliminar puntos en las regiones.

El diagrama de flujo del método numérico se muestra en la Figura 27.

b) CONDICIONES DE FRONTERA.

1) Angulo de Capilaridad. En el punto (x_0, y_0) donde se localiza la frontera de grano, se impone la condición (III-12) con la aproximación

$$\left(\frac{\partial K}{\partial s}\right)_{tip} \cong - \frac{K_2 - K_1}{S_2 - S_1} \qquad (9)$$

Además la velocidad v_0 se ajusta de modo que el ángulo de capilaridad se mantenga constante

$$v_0 = v_1 / \cos\theta_1 \qquad (10)$$

en el punto (x_N, y_N) se imponen las condiciones de simetría añadiendo un punto más (x_{N+1}, y_{N+1}) donde

$$\begin{aligned} x_{N+1} &= x_{N-1} \\ y_{N+1} &= -y_{N-1} \\ K_{N+1} &= K_{N-1} \end{aligned} \qquad (11)$$

2) El sumidero de materia. Como el grosor de la frontera de grano es aproximadamente tres órdenes de magnitud más pequeño que el radio inicial de la cavidad, la ecuación (III-14) se aplica en un solo punto. Además la ecuación (III-14) se modifica para asegurar que el crecimiento local de volumen producido por el desplazamiento del punto (X_0, Y_0) sea igual al volumen que se introduce a la frontera de grano, y queda

$$v_0 \simeq \left(\frac{\partial^2 K}{\partial s^2}\right) + \frac{3 f c}{\beta (1 - r/\rho)^2} \left[1 - (1 - r/\rho) \frac{K_0}{c} \right] \frac{1}{S_1} \qquad (12)$$

DIAGRAMA DE FLUJO

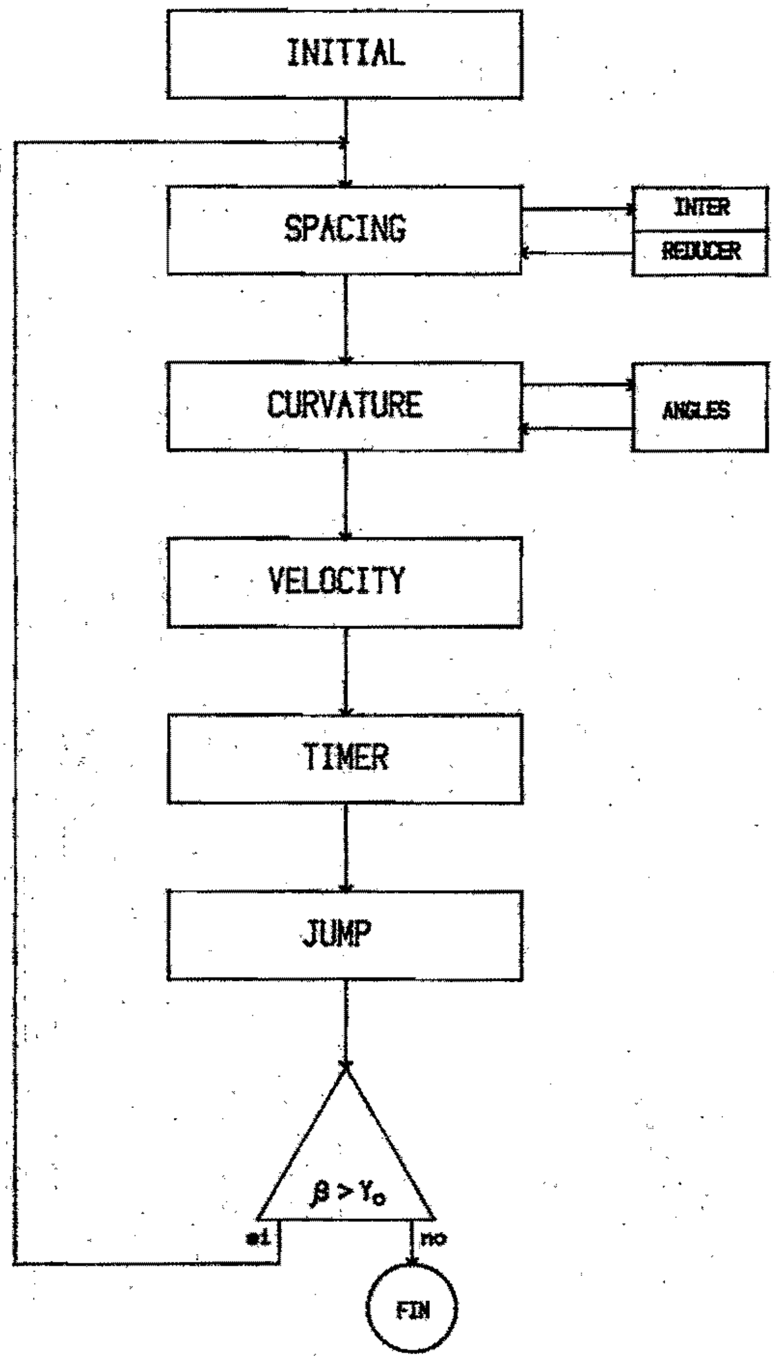


FIGURA 27

donde $r = y_0$. En este modelo se requieren condiciones de simetría también alrededor del punto (x_0, y_0). Entonces, además de (11), introduce un nuevo punto (x_{-1}, y_{-1}) en la red tal que

$$\begin{aligned} x_{-1} &= -x_1 \\ y_{-1} &= y_1 \\ k_{-1} &= k_1 \end{aligned} \qquad (13)$$

Apéndice 5

Programa para Calcular el Crecimiento de Cavidades con el Modelo de Capilaridad

```
0: "Cavity Growth Coupling Surface and":
1: "Grain Boundary Diffusion Processes":
2: " Capillarity Model.":
3: ent N,O
4: 100→M;1→H
5: dim Z[-1:M],C[-1:M]
6: dim U[-1:M],S[-1:M]
7: dim X[-1:M],Y[-1:M],K[-1:M]
8: rad
9: 2→r25
10: 90→r40;91→r41
11: "Data":16→B;4.5→C;1→F
12: 0→T;0→S;0→V;0→A
13: cll 'Form'
14: cll 'Initial'
15: cll 'Curvature'
16: "AGAIN":
17: cll 'Spacing'
18: cll 'Curvature'
19: cll 'Velocity'
20: 'Timer'→H
21: cll 'Jump'
22: if Y[0]-r23>=r25;cll 'Store';Y[0]→r23
23: dsp "U",U[0],"Y=",Y[0]
24: if O=1;cll 'Checking'
25: if B-Y[0]>.01;gto "AGAIN"
26: end
27: "Spacing":
28: 0→S[0]
29: 0→J
30: "NEX":J+1→J
31: √((X[J-1]-X[J])↑2+(Y[J-1]-Y[J])↑2)→r0
32: if abs(K[J-1])<.9;gto "NSS"
33: if abs(K[J]*r0)>1.8D;cll 'Inter'
34: "NSS":
35: if N<15;gto "NRED"
36: if J=1;gto "NRED"
37: if abs(K[J])<.0005;cll 'Reducer'
38: "NRED":
39: S[J-1]+r0→S[J]
40: if J<N;gto "NEX"
41: -S[1]→S[-1]
42: 2S[N]-S[N-1]→S[N+1]
43: ret
44: "Inter":
45: N+1→N
46: for K=N-1 to J by -1
47: X[K]→X[K+1]
48: Y[K]→Y[K+1]
49: next K
50: (X[J+1]+X[J-1])/2→X[J]
```

```
51: (Y[J+1]+Y[J-1])/2→Y[J]
52: √((X[J+1]-X[J-1])↑2+(Y[J+1]-Y[J-1])↑2)→p1
53: K[J]→p4
54: (1-√(1-(p1*p4/2)↑2))/p4→p2
55: X[J]+p2*abs(Y[J+1]-Y[J-1])/p1→X[J]
56: Y[J]+p2*(X[J+1]-X[J-1])/p1→Y[J]
57: deg;if J=1;Y[1]+X[1]/tan(G)→Y[0];rad
58: √((X[J]-X[J-1])↑2+(Y[J]-Y[J-1])↑2)→r0
59: -X[1]→X[-1];Y[1]→Y[-1]
60: X[N-1]→X[N+1];-Y[N-1]→Y[N+1]
61: fxd 0;prt "C",N;flt 5
62: ret
63: "Reducer":
64: for K=J to N
65: X[K+1]→X[K];Y[K+1]→Y[K]
66: next K
67: √((X[J]-X[J-1])↑2+(Y[J]-Y[J-1])↑2)→r0
68: N-1→N
69: fxd 0;prt "E",N;flt 5
70: ret
71: "Curvature":
72: X[-1]↑2+Y[-1]↑2→r0
73: X[0]↑2+Y[0]↑2→r2
74: for I=0 to N
75: X[I+1]↑2+Y[I+1]↑2→r4
76: 2*((Y[I]-Y[I+1])*(X[I-1]-X[I])-(Y[I-1]-Y[I])*(X[I]-X[I+1]))→r5
77: if r5=0;gto "J"
78: ((X[I-1]-X[I])*(r2-r4)-(X[I]-X[I+1])*(r0-r2))/r5→Y
79: ((Y[I]-Y[I+1])*(r0-r2)-(Y[I-1]-Y[I])*(r2-r4))/r5→X
80: "J":
81: r2→r0;r4→r2
82: 1/√((X[I]-X)↑2+(Y[I]-Y)↑2)→K[I]
83: if r5=0;0→K[I]
84: K[I]*'Sign'→K[I]
85: next I
86: -(K[2]-K[1])/(S[2]-S[1])→C
87: 2BC(1-Y[0]/B)↑2/3FC→R
88: C(1-R)/(1-Y[0]/B)→K[0]
89: K[1]→K[-1];K[N-1]→K[N+1]
90: deg;cos(90-G)→C[1];-sin(90-G)→Z[1];rad
91: ret
92: "Sign":1→p1
93: if Y[I+1]=Y[I-1];sgn(Y[I]-Y[I+1])→p1;gto "0SIG"
94: X[I+1]+(Y[I]-Y[I+1])*(X[I+1]-X[I-1])/(Y[I+1]-Y[I-1])→p2
95: sgn(X[I]-p2)→p1
96: "0SIG":
97: "Angles":
98: if X[I-1]=X[I+1];-1→Z[I];0→C[I];gto "NANG"
99: (Y[I+1]-Y[I-1])/(X[I+1]-X[I-1])→r1
100: 1/√(1+r1↑2)→C[I]
101: r1*C[I]→Z[I]
```

```
102: "HANG":
103: ret p1
104: "Velocity":0→U
105: for I=0 to N
106: (K[I+1]-K[I])/(S[I+1]-S[I])-(K[I]-K[I-1])/(S[I]-S[I-1])→U[I]
107: 2*U[I]/(S[I+1]-S[I-1])→U[I]
108: abs(U[I])→r0
109: if I=0;gto "XX"
110: if r0>U;r0→U
111: "XX":
112: next I
113: U[1]/C[1]→U[0]
114: abs(U[0])→r0;if r0>U;r0→U
115: ret
116: "Timer":
117: if U[0]<0;Z/2→Z
118: if abs((R-W)/R)<.002;2Z→Z
119: if Z<.0002;.0002→Z
120: if Z>.001;.001→Z
121: H→p1
122: if U=0;gto "YY"
123: Z/U→p1
124: "YY":
125: if p1>10H;10H→p1
126: if U[0]<0;A+p1→A
127: ret p1
128: "Jump":
129: for I=0 to N
130: H*U[I]*C[I]+Y[I]→Y[I]
131: H*U[I]*abs(Z[I])+X[I]→X[I]
132: next I
133: -X[1]→X[-1];Y[1]→Y[-1]
134: -Y[N-1]→Y[N+1];X[N-1]→X[N+1]
135: T+H→T;S+1→S;V+2H→V
136: ret
137: "Store":
138: N→X[0];T→X[N+1];Y[-1]→r0;Y[N+1]→r1
139: V→Y[-1];R→Y[N+1]
140: trk 1;rcf r40,X[*]
141: rcf r41,Y[*]
142: r40+2→r40;r41+2→r41
143: 0→X[0];X[N-1]→X[N+1]
144: r0→Y[-1];r1→Y[N+1]
145: 1→Q;3→r25
146: ret
147: "Checking":
148: lim -.5L,5.5L,-3L,3L
149: 0→Q;for J=0 to N;plt X[J],Y[J]-2.5L;next J;pen
150: max(K[*])→r21
151: for J=0 to N;plt S[J]+2.5L,-2.5L+L*K[J]/r21;next J;pen
152: if S=1;U[0]→r22
```

```
153: for J=0 to N;plt 2.5L+S[J],U[J]/r22;next J;pen
154: ret
155: "Initial":deg
156: 70→G;1/sin(G)→r1
157: for J=0 to N+1;G-JG/N→r0
158: r1(cos(r0)-cos(G))→X[J]
159: r1sin(r0)→Y[J]
160: next J
161: rad
162: Y[0]/1000→Z
163: Y[0]→r23
164: √(X[1]↑2+(Y[1]-Y[0])↑2)→D→S[1]
165: ret
166: "Form":
167: 3→L
168: pclr
169: scl -.5L,5.5L,-3L,3L
170: lim -.5L,5.5L,-3L,3L
171: fxd 2
172: pen# 1
173: csiz 1.2
174: ofs 0,-2.5L
175: xax 0,.5L,0,2L
176: yax 0,.5L,0,5L
177: ofs 0,2.5L
178: ofs 2.5L,0
179: xax 0,.5L,0,2L
180: yax 0,.5L,0,2L
181: ofs -2.5L,0
182: ofs 2.5L,-2.5L
183: xax 0,.5L,0,2L
184: yax 0,.5L,0,2L
185: ofs -2.5L,2.5L
186: fxd 6
187: ret
*20826
```

Apéndice 6

Programa para Calcular el Crecimiento de Cavidades con el Modelo del Sumidero en Materia

```
0: "Cavity Growth Coupling Surface and":
1: "Grain Boundary Diffusion Processes":
2: " Sink of Matter Model.":
3: ent N,Q
4: 100→M;1→H
5: dim Z[-1:M],C[-1:M]
6: dim U[-1:M],S[-1:M]
7: dim X[-1:M],Y[-1:M],K[-1:M]
8: rad
9: 100→r40;101→r41
10: "Data":10→B;9→C;1600→F
11: 0→T;0→S;0→V;0→A
12: cll 'Initial'
13: cll 'Form'
14: cll 'Curvature'
15: "AGAIN":
16: cll 'Spacing'
17: cll 'Curvature'
18: cll 'Velocity'
19: 'Timer'→H
20: cll 'Jump'
21: if Y[0]-r23>=2;cll 'Store';Y[0]→r23
22: dsp "U";U[0],"Y=",Y[0]
23: if Q=1;cll 'Checking'
24: if B-Y[0]>.01;gto "AGAIN"
25: end
26: "Spacing":
27: 0→S[0]
28: 0→J
29: "NEX":J+1→J
30: r((X[J-1]-X[J])↑2+(Y[J-1]-Y[J])↑2)→r0
31: if J>1;gto "SSJ"
32: if (Y[0]-Y[1])/X[1]>=1;prt "From angle"
33: if (Y[0]-Y[1])/X[1]>=1;cll 'Inter'
34: "SSJ":
35: if abs(K[J-1])<.9;gto "NSS"
36: if r0>1.1D;cll 'Inter'
37: "NSS":
38: if N<13;gto "NRED"
39: if abs(K[J])<.001;cll 'Reducer'
40: "NRED":
41: S[J-1]+r0→S[J]
42: if J<N;gto "NEX"
43: -S[1]→S[-1]
44: 2S[N]-S[N-1]→S[N+1]
45: ret
46: "Inter":
47: N+1→N
48: for K=N-1 to J by -1
49: X[K]→X[K+1]
50: Y[K]→Y[K+1]
51: next K
```

```
52: (X[J+1]+X[J-1])/2→X[J]
53: (Y[J+1]+Y[J-1])/2→Y[J]
54: r((X[J+1]-X[J-1])↑2+(Y[J+1]-Y[J-1])↑2)→p1
55: (K[J-1]+K[J])/2→p4
56: if J=1;K[0]→p4
57: (1-r(1-(p1*p4/2)↑2))/p4→p2
58: X[J]+p2*abs(Y[J+1]-Y[J-1])/p1→X[J]
59: Y[J]+p2*(X[J+1]-X[J-1])/p1→Y[J]
60: r((X[J]-X[J-1])↑2+(Y[J]-Y[J-1])↑2)→r0
61: -X[1]→X[-1];Y[1]→Y[-1]
62: X[N-1]→X[N+1];-Y[N-1]→Y[N+1]
63: fxd 0;prt "C",N;flt 5
64: ret
65: "Reducer":
66: for K=J to N
67: X[K+1]→X[K];Y[K+1]→Y[K]
68: next K
69: r((X[J]-X[J-1])↑2+(Y[J]-Y[J-1])↑2)→r0
70: N-1→N
71: fxd 0;prt "E",N;flt 5
72: ret
73: "Curvature":
74: X[-1]↑2+Y[-1]↑2→r0
75: X[0]↑2+Y[0]↑2→r2
76: for I=0 to N
77: X[I+1]↑2+Y[I+1]↑2→r4
78: 2*((Y[I]-Y[I+1])*(X[I-1]-X[I])-(Y[I-1]-Y[I])*(X[I]-X[I+1]))→r5
79: if r5=0;gto "J"
80: ((X[I-1]-X[I])*(r2-r4)-(X[I]-X[I+1])*(r0-r2))/r5→Y
81: ((Y[I]-Y[I+1])*(r0-r2)-(Y[I-1]-Y[I])*(r2-r4))/r5→X
82: "J":
83: r2→r0;r4→r2
84: 1/r((X[I]-X)↑2+(Y[I]-Y)↑2)→K[I]
85: if r5=0;0→K[I]
86: K[I]*'Sign'→K[I]
87: cll 'Angles'
88: next I
89: K[1]→K[-1];K[N-1]→K[N+1]
90: ret
91: "Sign":1→p1
92: if Y[I+1]=Y[I-1];sgn(Y[I]-Y[I+1])→p1;gto "OSIG"
93: X[I+1]+(Y[I]-Y[I+1])*(X[I+1]-X[I-1])/(Y[I+1]-Y[I-1])→p2
94: sgn(X[I]-p2)→p1
95: "OSIG":ret p1
96: "Angles":
97: if X[I-1]=X[I+1];-1→Z[I];0→C[I];gto "NANG"
98: (Y[I+1]-Y[I-1])/(X[I+1]-X[I-1])→r1
99: 1/r(1+r1↑2)→C[I]
100: r1*C[I]→Z[I]
101: "NANG":
102: ret
103: "Velocity":
```

```
104: for I=0 to N
105: (K[I+1]-K[I])/(S[I+1]-S[I])-(K[I]-K[I-1])/(S[I]-S[I-1])+...
106: 2*U[I]/(S[I+1]-S[I-1])+U[I]
107: next I
108: cll 'Sink'
109: ret
110: "Sink":R→W
111: 1-(1-Y[0]/B)*K[0]/C→r0→R
112: 3F*C*B*r0/(S[1]*(B-Y[0])↑2)→Q
113: Q+U[0]→U[0]
114: ret
115: "Timer":
116: if U[0]>0;Z/2→Z
117: if abs((R-W)/R)<.001;2Z→Z
118: if Z<.0001;.0001→Z
119: if Z>.001;.001→Z
120: max(U[*])→r0;abs(r0)→r0
121: min(U[*])→r1;abs(r1)→r1
122: max(r0,r1)→r0
123: H→p1
124: if r0=0;gto "YY"
125: Z/r0→p1
126: "YY":
127: if p1>10H;10H→p1
128: if U[0]#0;A+p1→A
129: ret p1
130: "Jump":
131: for I=0 to N
132: H*U[I]*C[I]+Y[I]→Y[I]
133: H*U[I]*abs(Z[I])+X[I]→X[I]
134: next I
135: -X[1]→X[-1];Y[1]→Y[-1]
136: -Y[N-1]→Y[N+1];X[N-1]→X[N+1]
137: T+H→T;S+1→S;V+QHS[1]→V
138: ret
139: "Store":
140: N→X[0];T→X[N+1];Y[-1]→r0;Y[N+1]→r1
141: V→Y[-1];A→Y[N+1]
142: trk 1;rcf r40,X[*]
143: rcf r41,Y[*]
144: r40+2→r40;r41+2→r41
145: 0→X[0];X[N-1]→X[N+1]
146: r0→Y[-1];r1→Y[N+1]
147: 1→O
148: ret
149: "Checking":
150: scl -.5L,5.5L,-3L,3L
151: 0→O;for J=0 to N;plt X[J],Y[J]-2.5L;next J;pen
152: max(K[*])→r21
153: for J=0 to N;plt S[J]+2.5L,-2.5L+L*K[J]/r21;next J;pen
154: if S=1;U[0]→r22
155: for J=0 to N;plt 2.5L+S[J],U[J]/r22;next J;pen
```

```
156: ret
157: "Initial":
158: rad
159: for J=1 to N+1;πJ/2N→r0
160: 1→r1
161: r1*sin(r0)→X[J]
162: r1*cos(r0)→Y[J]
163: next J
164: Y[0]/1000→Z
165: Y[0]→r23
166: √(X[1]↑2+(Y[1]-Y[0])↑2)→D
167: ret
168: "Form":
169: 2→L
170: pclr
171: scl -.5L,5.5L,-3L,3L
172: lim -.5L,5.5L,-3L,3L
173: fxd 2
174: pen# 1
175: csiz 1.2
176: ofs 0,-2.5L
177: xax 0,.5L,0,2L
178: yax 0,.5L,0,5L
179: ofs 0,2.5L
180: ofs 2.5L,0
181: xax 0,.5L,0,2L
182: yax 0,.5L,0,2L
183: ofs -2.5L,0
184: ofs 2.5L,-2.5L
185: xax 0,.5L,0,2L
186: yax 0,.5L,0,2L
187: ofs -2.5L,2.5L
188: fxd 6
189: ret
*11321
```

APENDICE 7

LA ENERGIA ELASTICA

La energía elástica asociada con los cambios al crecer la cavidad se puede estimar con

$$U_{EL} \cong \frac{\sigma^2 a^2}{E} \qquad (1)$$

y

$$\frac{dU_{EL}}{dt} \simeq \frac{\sigma^2 a_0^2}{E\, t_s} \, r v \qquad (2)$$

donde, con fines de estimación, v se calcula con la ecuación (IV-21). La potencia asociada con el esfuerzo aplicado es

$$P_\sigma = \frac{\Omega D_b \delta_b \sigma^2 A}{kT\, b(1-r/\beta)^3} \qquad (3)$$

también con fines de estimación A se puede despejar de las ecuaciones (IV-18) y (IV-20),

$$A = \frac{1}{(\zeta^2 f/2\alpha^3 \beta c)} \, p(\zeta^2 f/2\alpha^3 \beta c) \qquad (4)$$

Con estas aproximaciones, la división de (2) por (3) da

$$\frac{1}{P_\sigma} \frac{dU_{EL}}{dt} \sim \frac{\sigma}{E} \, \frac{cr}{\zeta} \, p(\alpha^2 f/2\alpha^3 \beta c)^{1/2} \qquad (5)$$

La función p siempre toma valores entre cero y uno, $\zeta \sim 2$, $r \sim 5$, $c \sim 5$. Como en los experimentos comunes de termofluencia $\sigma/E \sim 10^{-4}$ se puede afirmar que los cambios en la energía elástica durante el crecimiento de la cavidad son tres órdenes de magnitud menores que la potencia asociada con el esfuerzo aplicado y consecuentemente despreciables.

Lista de Figuras

10. Modelo de crecimiento de cavidades tridimensional (axisimétrico)

11. Representación gráfica de la función g_3 (t)

12. Ilustración del tamaño de la cavidad como función del tiempo (bidimensional).

13. Ilustración del tamaño de la cavidad como función del tiempo (tridimensional).

14. El modelo del sumidero de materia.

15. Evolución de la cavidad obtenida numéricamente con el modelo de capilaridad ($c = 4.5$, $f = 1$).

16. Evolución de la cavidad obtenida numéricamente con el modelo de capilaridad ($c = 4.5$, $f = 10$)

17. Evolución de la cavidad obtenida numéricamente con el modelo de capilaridad ($c = 4.5$, $f = 10^4$).

18. Evolución de la cavidad obtenida numéricamente con el modelo del sumidero de materia ($c = 4.5$, $f = 1$)

19. Evolución de la cavidad obtenida numéricamente con el modelo del sumidero de materia ($c= 4.5$, $f = 10$).

30. Gráfica logarítmica del tiempo de fractura en función del esfuerzo aplicado usando el balance energético. Angulo de capilaridad = 70°

31. Gráfica logarítmica del tiempo de fractura en función del esfuerzo aplicado usando el balance energético. Angulo de capilaridad = 45°

Referencias.

1. The effects of Radiation on Structural Metals, ASTM-STP-426 (1967).
2. Irradiation Effect in Structural Alloys for Thermal and Fast Reactors ASTM-STP-457 (1969).
3. Irradiation Effects on Structural Alloys for Nuclear Applications ASTM-STP-484 (1971).
4. D.R. Harries, J. Brit, Nuc. Energy Soc. 5 (1966), 74.
5. M. Kangiloski, React. Mat. 12 (1969), 33.
6. H.E. Mc Coy, J. Nuc. Mat. 31 (1969), 67.
7. P.J. Barton y P.R.B. Higgin, ASTM-STP-484 (1961), 362.
8. K.P. Garr, D. Kramer y G.G. Rodes, Met. Trans. 2 (1971), 269.
9. D.Kramer, R.H. Brager, G.G. Rhodes y A.G. Pard J. Nuc Mat. 37 (1970), 1.
10. R.S. Nelson, D.J. Mazey y J.A. Hudson, J. Nuc. Mat. 25 (1968), 121.
11. D.K. Matloc,, PH. D. Thesis, Stanford University (1975).
12. R. Blackburn, Metall. Rev. 11 (1966), 159.
13. R.G. Hickman, Proceedings of the First Conference on Nuclear Fusion Technology, 2 (1974), 535.
14. S.H. Goods y W.D. Nix, Acta Met. 26 (1978), 739.
15. S.H. Goods y W.D. Nix, Acta Met. 26 (1978), 753.
16. S.H. Goods, Ph. D. Thesis, Stanford University (1977).
17. T.G. Nieh y W.D. Nix, aparecerá en Acta Met.
18. T.G. Nieh, Ph. D. Thesis, Stanford University (1980).
19. R. Raj y M.F. Ashby, Acta Met. 23 (1975), 653.
20. D. Hull y R. E. Rimmer, Phil. Mag. 4 (1959), 573.
21. M.V. Speight y J.E. Harris, Metal Scc. 1 (1967), 83.
22. T.J. Chuang y J.R. Rice, Acta Met. 21 (1973), 1625.
23. P. W. Davis y R. Dutton, Acta Met. 14 (1966), 1138.

24. R.E. Evans, Phil Mag. 23 (1971), 1101.

25. W. D. Nix, D.K. Matlock y R.J.D. Melfi, Acta Met. 25 (1977), 495.

26. T.G. Nieh y W.D. Nix, aparecerá en Acta Met.

27. N.J. Greenwood, D.P. Miller y J.W. Sutter, Acta Met. 2 (1954).

28. T.J. Chuang, K.I. Kagawa, J.R. Rice y L.B. Sills, Acta Met. 27 (1979), 265.

29. C. Herring, J. Appl. Phys. 21 (1950), 437.

30. G.M. Pharr y W.D. Nix, Acta Met. 27, (1979), 1615.

31. R. Raj, Met. Trans. 6A (1975), 1499.

32. J.C.M. Hwang y R.W. Balluffi, Scripta Met., 12 (1978), 709.

33. R. Fuentes-Samaniego y W.D. Nix, aparecerá en Phil Mag.

34. S.P. Timoshenko y J.N. Goodier, Theory of Elasticity (1951) Mc Graw Hill.

35. S.P. Timoshenko y J.N. Goodier, op. cit., 46-53.

36. S.P. Timoshenko y J.N. Goodier, op. cit., 343-347.

37. M. Abramawits y I.A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions (1965), Dover, 358.

38. C. Herring, The Physics of Powder Metallurgy (1951) editado por W.E. Kingston, Mc Graw Hill, New York, p.p. 143-179.

39. W.W. Mullins, J. Appl. Phys. 28 No. 3 (1957), 333.

40. L. Martínez y W.D. Nix, enviado a Met-Trans.