



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
INGENIERÍA QUÍMICA – INGENIERÍA DE PROCESOS

DINÁMICA OSCILATORIA LINEAL DE MEMBRANAS FLEXOELÉCTRICAS EN MEDIOS  
VISCOELÁSTICOS CON APLICACIONES A LAS CÉLULAS CILIADAS EXTERNAS DEL  
OÍDO INTERNO

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:

I.Q. RICARDO MENDOZA VIZCAYA

TUTOR

Dr. OCTAVIO MANERO BRITO  
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATERIALES

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., SEPTIEMBRE 2018



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. Medina Torres Luis  
Secretario: Dr. Herrera Valencia Edtson Emilio  
1 er. Vocal: Dr. Rene Osvaldo Vargas Aguilar  
2 do. Vocal: Dr. Pérez Camacho Mariano  
3 er. Vocal: Dr. Manero Brito Octavio

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATERIALES, FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ZARAGOZA

TUTOR DE TESIS:

Dr. OCTAVIO MANERO BRITO

-----  
FIRMA

# Dedicatorias

## ***A mi familia***

Por estar ahí durante todos estos años brindándome su apoyo incondicional, por apoyarme en los momentos difíciles, porque, aunque me equivoqué con ustedes muchas veces han estado ahí (mamá, hermana, sobrina)

## ***A mi prometida***

A ti Priscila Hernández por haber iniciado esta travesía conmigo poco antes de comenzar mis estudios y permitirme seguir a tu lado durante todo este tiempo; por enseñarme que existen cosas muy valiosas que yo no veía antes de conocerte; por demostrarme el apoyo y el cariño incondicional que día a día me demuestras; por ser una mujer especial que me motiva e impulsa a ser una mejor persona.

Como siempre lo he pensado, una pareja es el complemento en tu vida, que te hace crecer en todos los sentidos que, sin que se encuentre físicamente, sabes que está ahí apoyándote y tú para mi eres esa persona que será mi esposa muy pronto. Agradezco a la vida por haber hecho que me cruzara en tu camino y por aceptarme aún con todos mis errores desde aquel día que te conocí.

## ***A mi mentor***

A mi gran amigo y mentor el Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia por aceptarme desde la licenciatura con todas mis deficiencias y apoyarme e impulsarme durante todos estos años para involucrarme en la investigación y compartirme sus experiencias para mejorar profesional y personalmente.

## ***Emilio Herrera Caballero†***

A el Sr. Emilio Herrera Caballero, padre del Dr. Edtson que, aunque no tuve la oportunidad de conocerlo durante más tiempo, puedo decir que era una excelente persona por la manera en que educó al Dr. Edtson, y de igual manera la forma en que el Dr. Edtson se expresa de su papá, durante la elaboración de este trabajo lamentablemente partió a un lugar mejor pero quedan las enseñanzas que le dejo a su hijo y que su hijo nos transmite a sus alumnos.



# Agradecimientos

- A la Universidad Nacional Autónoma de México por haberme permitido ingresar en sus filas y forma parte de esta gran familia universitaria desde la licenciatura.
- A la Facultad de Química de la UNAM por darme la oportunidad de ingresar al posgrado en ingeniería y continuar con mis estudios.
- A mi familia, mi mamá la Sra. Patricia Vizcaya Vega y mi hermana Jessica Jazmin por haberme apoyado durante esta travesía estos años y haber sido además las mejores compañeras y sobre todo haber soportado mi carácter en momentos complicados, sin olvidar también a mi querida sobrina Skarlett (Pericles) que me alegra los días desde que nació.
- Al Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia por su gran y valiosa amistad, sus consejos y su apoyo, sin el cual no hubiera conseguido la motivación necesaria para iniciarme en esta área tan bella que es la investigación. Sus consejos han sido y serán valiosos dentro y fuera del aula, muchísimas gracias doctor.
- Al Dr. Fausto Calderas García por sus valiosos y acertados comentarios sobre este y trabajos previos atendiendo amablemente y siempre con humor mis dudas.
- Al Dr. Mariano Pérez Camacho por las sugerencias experimentales para la implementación de este proyecto en una aplicación biológica.
- M.B.E. Mayra Luz Sánchez Villavicencio por las sugerencias y puntos de vista relacionados a la parte biológica de este proyecto y sobre todo por haber tenido que esperar mientras el Dr. Edtson atendía mis dudas.
- Al Dr. Octavio Manero Brito por las sugerencias, puntos de vista e intercambio de ideas en la realización de este trabajo.
- Al Dr. Luis Medina Torres por las sugerencias, puntos de vista e intercambio de ideas en la realización de este trabajo.



- A la Dra. Eugenia Corvera Poiré por las sugerencias, puntos de vista e intercambio de ideas en la realización de este proyecto. Los artículos que ella desarrolla serán puntos de partida para mejorar este y futuros trabajos.
- Al Dr. René Osvaldo Vargas Aguilar por las sugerencias, puntos de vista e intercambio de ideas en la realización de este trabajo.
- ***Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo otorgado durante la realización de mis estudios de maestría con número de becario 609977 y número de CVU 780132.***
- ***Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPITT) de la UNAM <<IN115615>> <<Fenómenos de Transporte y Reología de Fluidos Complejos aplicados a Sistemas Biológicos>>. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida***
- ***Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIME) de la UNAM <<PE112716>> <<Fenómenos de Transporte y Reología de Fluidos Complejos aplicados a Sistemas Biológicos>>. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida***



# Notación

$a$	Radio del capilar [m]
$C_f$	Coefficiente flexo-eléctrico de la membrana [ $\text{Cm}^{-1}$ ]
$\{c_B, c_S\}$	Coefficiente flexo-eléctrico de deformación, Coeficiente flexo-eléctrico de extensión [ $\text{Cm}^{-1}$ ]
$\{E_F, E_H\}$	Energía elástica de Frank, Energía elástica de Helfrich [ $\text{Jm}^{-3}$ , $\text{Jm}^{-2}$ ]
$\{E, E_0\}$	Magnitud de campo eléctrico, Amplitud del campo eléctrico aplicado [ $\text{NC}^{-1}$ ]
$\{G_b, G_t\}$	Módulo elástico en la región inferior, Módulo elástico en la región superior [Pa]
$h$	Altura del domo esférico [m]
$H$	Curvatura promedio [ $\text{m}^{-1}$ ]
$H_0$	Condición inicial de la curvatura promedio [ $\text{m}^{-1}$ ]
$I$	Variable de entrada
$\{k_c, \bar{k}_c\}$	Módulo elástico de deformación de la membrana, Módulo elástico de torsión de la membrana [J]
$K$	Curvatura Gaussiana [ $\text{m}^{-2}$ ]
$\{K_1, K_{24}\}$	Constante de extensión, Constante de silla [J]
$L$	Longitud axial del capilar [m]



M	Parámetro
O	Variable de salida
P	Potencia [ $\text{Js}^{-1}$ ]
$\{P(z, t), P_0, \Delta P\}$	Presión a la altura $z$ y el tiempo $t$ , Presión en los extremos del capilar, Diferencia de presión en la membrana [ $\text{Pa}$ ]
$\{P_t, P_b\}$	Presión en la región superior, Presión en la región inferior [ $\text{Pa}$ ]
Q	Flujo volumétrico [ $\text{m}^3\text{s}^{-1}$ ]
R	Radio del domo esférico [ $\text{m}$ ]
$(r, \theta, z)$	Coordenadas cilíndricas [ $\text{m}, 1, \text{m}$ ]
$\{r_t, r_b\}$	Relación de viscosidades en la región superior. Relación de viscosidades en la parte inferior [1]
t	Coordenada temporal [ $\text{s}$ ]

### Vectores y tensores

<b>b</b>	Tensor diádico simétrico de curvatura [1]
<b>B</b>	Curvatura deformacional orientacional [ $\text{m}^{-1}$ ]
<b>C<sub>f</sub></b>	Esfuerzo flexo-eléctrico acoplado [ $\text{Nm}^{-1}$ ]
<b><math>\varepsilon</math></b>	Tensor de permutación [1]
$\{\mathbf{E}, \mathbf{E}_{//}\}$	Vector campo eléctrico, Vector campo eléctrico tangencial [ $\text{NC}^{-1}$ ]
$\{\mathbf{I}, \mathbf{I}_s\}$	Diada unitaria, Diada de superficie [1]
<b>k</b>	Vector normal ortonormal hacia afuera [1]





$\mathbf{k}\mathbf{k}$	Producto diádico del vector normal $\mathbf{k}$ [1]
$\mathbf{n}$	Vector director [1]
$\Gamma_f$	Torque flexo-eléctrico [ $\text{Nm}^{-1}$ ]
$T_f$	Esfuerzo flexo-eléctrico [ $\text{Nm}^{-1}$ ]
$P_f$	Polarización flexo-eléctrica [ $\text{JV}^{-1}\text{m}^{-2}$ ]
$\nabla_s$	Gradiente superficial

### Variables adimensionales

$\{a_2^*, a_0^*\}$	Función de entrada inercial, Función de entrada flexo-eléctrica [1]
$\{b_3^*, b_2^*, b_1^*\}$	Función de salida de retardo, Función de salida inercial, Función de salida viscosa [1]
$\bar{\mathbf{E}}$	Campo eléctrico [1]
$\{\bar{G}_b, \bar{G}_t\}$	Módulo elástico en la región inferior, Módulo elástico en la región superior [1]
$\bar{H}(\bar{t})$	Curvatura promedio [1]
$\bar{H}_0$	Condición inicial de la curvatura promedio [1]
$\{k, \bar{M}\}$	Relación elástica, Elasticidad de la membrana [1]
$\bar{\Delta p}(\bar{t})$	Diferencia de presión en la membrana [1]
$D_t \triangleq \partial / \partial_{\bar{t}}$	Operador derivada temporal [1]



$\{J_0(\bar{\beta}), J_1(\bar{\beta})\}$	Función de Bessel de orden cero, Función de Bessel de orden uno [1]
$\bar{r}$	Coordenada radial [1]
$\bar{v}_z(\bar{r}, \bar{t})$	Velocidad axial [1]
$\bar{t}$	Coordenada temporal [1]
$\bar{P}(\bar{\omega})$	Potencia [1]

**Letras griegas**

$\bar{\beta}$	Parámetro beta [1]
$\varepsilon$	Parámetro pequeño [1]
$\gamma_0$	Tensión interfacial de superficie a campo eléctrico cero [Pa]
$\{\eta_b, \eta_t\}$	Viscosidad en la región inferior, Viscosidad en la región superior [Pa s]
$\{\lambda_t, \lambda_b; \lambda_{Jt}, \lambda_{Jb}\}$	Tiempo de relajación de Maxwell en la región superior, Tiempo de relajación de Maxwell en la región inferior, Tiempo de retardo de Jeffreys en la región superior, Tiempo de retardo de Jeffreys en la región inferior [s]
$\{\rho_t, \rho_b\}$	Densidad en la región superior, Densidad en la región inferior [Kgm <sup>-3</sup> ]

**Letras griegas adimensionales**

$\bar{\Pi}(\partial_i)$	Operador inercial
$\bar{\eta}(\partial_i)$	Operador diferencial viscosidad [1]



$\{\bar{\lambda}_t, \bar{\lambda}_b; \bar{\lambda}_{Jt}, \bar{\lambda}_{Jb}\}$	Tiempos de relajación de Maxwell y de retardo de Jeffreys [1]
$\bar{\omega}$	Frecuencia [1]
$\Sigma_{\bar{\eta}}$	Viscosidad total de bulto [1]
$\{\Sigma_{\bar{\eta}_{\min}}, \Sigma_{\bar{\eta}_{\max}}\}$	Viscosidad mínima y máxima de bulto [1]
$\{\bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b, \Sigma_{\bar{\eta}}, k\}$	Números adimensionales del modelo de Maxwell [1]
$\{\Sigma_{\bar{\eta}_j}, \Sigma_{\bar{\lambda}_{\eta_j}}\}$	Viscosidad de retardo y ponderada del modelo de Jeffreys [1]
$\bar{\eta}_i, i = t, b$	Viscosidad en las diferentes regiones [1]



# Índice

Portada.....	1
Dedicatorias .....	I
Agradecimientos.....	II
Notación .....	IV
Índice.....	IX
Índice de figuras.....	XI
Índice de tablas .....	XIII
Abstract .....	2
Resumen .....	3
Capítulo 1 Introducción .....	6
1.1 Flexo-electricidad en las membranas.....	7
1.1.1 Objetivo general.....	14
1.1.2 Objetivos particulares .....	15
1.1.3 Hipótesis .....	15
Capítulo 2 -Marco Teórico .....	16
2.1 Cristales líquidos.....	17
2.2 Modelos electro-reológicos basado en flexo-electricidad.....	21
2.3 Fisiología del oído .....	25
2.3.1 Oído externo .....	26
2.3.2 Oído medio .....	27
2.3.3 Oído interno .....	29
2.3.3.1 Células ciliadas externas .....	30



Capítulo 3 -Modelado .....	33
3.1 Modelado electro-reológico viscoelástico.....	34
3.2 Ecuaciones básicas .....	36
3.3 Potencia disipada.....	43
3.4 Modelo de tercer orden: Ecuación constitutiva de Jeffreys sin inercia .....	45
3.5 Modelo electro-reológico adimensional.....	47
3.5.1 Mecanismos inerciales: $Ma_r \neq 0$ .....	47
3.6 Respuesta mecánica.....	53
Capítulo 4 -Simulaciones numéricas .....	58
4.1 Resultados numéricos.....	59
4.2 Mecanismos de inercia-viscoelásticos: $Ma \neq 0$ .....	59
4.3 Número de Mach pequeño: $Ma \ll 1$ .....	62
Capítulo 5 -Análisis de resultados y conclusiones.....	70
5.1 Propiedades del material y condiciones de resonancia .....	74
5.2 Conclusiones.....	75
5.3 Trabajo futuro.....	81
Apéndice A.....	83
Apéndice B.....	87
Apéndice C.....	90
Bibliografía .....	93



# Índice de figuras

Figura 1 Contracción de la membrana plasmática de la OHC.....	8
Figura 2 Esquema de organización de este trabajo .....	14
Figura 3 Esquema representativo de una membrana flexo-eléctrica. a) en un capilar, b) oscilación en torno a una posición de equilibrio, c) domo esférico para h pequeña .....	21
Figura 4 Sistema auditivo .....	26
Figura 5 Oído medio.....	28
Figura 6 Oído interno .....	30
Figura 7 Geometría esquemática del sistema .....	35
Figura 8 Espacio material del sistema.....	56
Figura 9 Disipación de potencia de la membrana frente a la frecuencia para condiciones de inercia (a) baja inercia, (b) $Ma=1$ .....	62
Figura 10 Disipación de potencia para los modos I y III para el modelo de Maxwell y Jeffreys .....	65
Figura 11 Resonancias de potencia para los modelos de Maxwell y Jeffreys para modo I y III.....	65
Figura 12 Potencia para distintos valores de Viscosidad de Jeffreys y relación elástica .....	67
Figura 13 Curvas de potencia función de la frecuencia adimensional para los parámetros materiales del modo III en el modelo Jeffreys, en el inserto las mismas curvas para el modelo de Maxwell .....	67
Figura 14 Curvas de potencia modificada, almacenamiento, módulo en fase y fuera de fase en función de la frecuencia adimensional para los parámetros materiales del modo I en el modelo Jeffreys .....	68
Figura 15 Curvas de potencia bajo el efecto de variación de la simetría para el modo I .....	72
Figura 16 Curvas de potencia bajo el efecto de variación de la simetría para el modo III .....	72



Figura 17 Efecto de los mecanismos de retardo del sistema en la curva de potencia para los parámetros materiales del modo III ..... 73

Figura 18 Resumen ..... 75

Figura 19 Geometría de la membrana flexo-eléctrica ..... 83



# Índice de tablas

Tabla 1 Operador viscosidad para diferentes modelos reológicos .....	43
Tabla 2 Escenarios posibles en función de los parámetros materiales .....	56
Tabla 3 Resumen de los modelos de Maxwell y Jeffreys para la potencia .....	63





## Abstract

Liquid crystal flexoelectric actuation uses an imposed electric field to create membrane bending, this phenomenon is found in Outer Hair Cells (OHC) located in the inner ear, whose role is to amplify sound through generation of mechanical power. Oscillations in the OHC membranes create periodic viscoelastic flows in the contacting fluid media. A key objective of this work on flexoelectric actuation relevant to OHC is to find the relations and impact of the electro-mechanical properties of the membrane, the rheological properties of the viscoelastic media, and the frequency response of the generated mechanical power output. The model developed and used in this work is based on the integration of: (i) the flexoelectric membrane shape equation applied to a circular membrane attached to the inner surface of a circular capillary, and (ii) the coupled capillary flow of contacting viscoelastic phases, which are characterized by the Jeffreys constitutive equation with different material conditions. The membrane flexoelectric oscillations drive periodic viscoelastic capillary flows, as in OHCs. By applying the Fourier transform formalism to the governing equations and assuming small Mach numbers, analytical equations for the transfer function, associated to the average curvature and for the volumetric rate flow as a function of the electrical field were found and these equations can be expressed as a third order differential equation which depends on the material properties of the system. When the inertial mechanisms are considered, the power spectrum shows several resonance peaks in the average membrane curvature and volumetric flow rate. When the inertia is neglected, the system follows a non-monotonic behavior in the power spectrum. This behavior is associated to the solvent contributions related to the retardation-Jeffreys mechanisms. The specific membrane-viscoelastic fluid properties that control the power response spectrum are identified. The present theory, model and computations contribute to the evolving fundamental understanding of biological shape actuation through electromechanical couplings.

**Keywords:** flexoelectric membrane actuation; flexoelectric-driven viscoelastic capillary flow; rheological transfer function in outer hair cells, electromotility, Fourier formalism, Jeffreys constitutive equation.



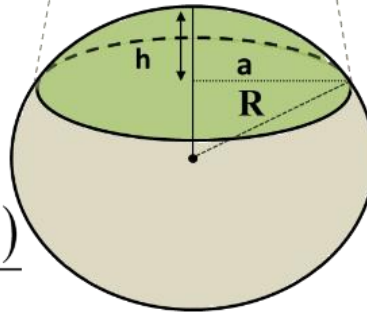
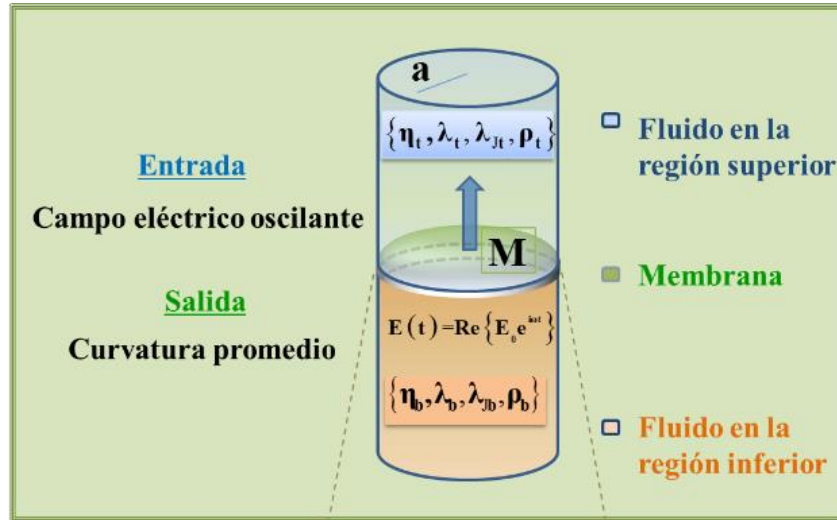
## Resumen

La flexo-electricidad de una membrana tipo cristal líquido utiliza un campo eléctrico inducido para crear un cambio en su curvatura promedio (flexión). Este fenómeno ha sido localizado en las células ciliadas externas (CCE) ubicadas en el oído interno, cuya función es amplificar el sonido mediante la generación de potencia mecánica. Las oscilaciones en las membranas de CCE crean flujos viscoelásticos periódicos en las fases líquidas de contacto. Un objetivo primordial de este trabajo para la aplicación de la flexo-electricidad relevante para las CCE es encontrar las relaciones y el impacto de las propiedades electro-mecánicas de la membrana, las propiedades reológicas de los medios viscoelásticos, y la respuesta de frecuencia de la salida de energía mecánica generada. El modelo desarrollado y utilizado en este trabajo se basa en la integración de: (i) la ecuación de forma de la membrana flexo-eléctrico aplicada a una membrana circular unida a la superficie interior de un capilar circular, y (ii) el flujo capilar acoplada de poner en contacto las fases viscoelásticas, que se caracterizan por la ecuación constitutiva de Jeffreys con diferentes condiciones materiales. Las oscilaciones flexo-eléctricas de la membrana inducen flujos capilares viscoelásticos periódicos, como los que se observan el oído del sistema humano. Mediante la aplicación del formalismo de Fourier se obtiene una función de transferencia compleja que describe la relación entre las variables de entrada (campo eléctrico) y salida (curvatura promedio o flujo volumétrico). La función de transferencia depende de tres números adimensionales que describen los mecanismos flexo eléctricos, elásticos de la membrana y la función viscosidad compleja. En el régimen en donde la inercia es despreciable, el número de Mach reducido es pequeño por lo que se obtiene una ecuación diferencial de tercer orden en la curvatura y de segundo en el campo eléctrico. Esta ecuación diferencial depende de 7 números adimensionales 4 de los cuales describen la reología del modelo Jeffreys. Con base en un estudio paramétrico se obtienen las curvas resonantes en condiciones de inercia y no inerciales. A partir de esto, se obtuvieron ecuaciones analíticas para la potencia disipada viscoelástica y el modelo se reduce al de Maxwell cuando los tiempos de retardo son cero. La curva no-monotónica



(máximos y mínimos) en la potencia se obtiene debido a los efectos del solvente en el medio y su relación con los tiempos de retardo del modelo de Jeffreys. Las bondades de esta descripción son la generalización de estos sistemas, a cualquier operador viscoelástico lineal y fraccionado que permita controlar y caracterizar las curvas resonantes. La presente teoría, modelo y cálculos contribuyen a la comprensión fundamental en evolución de la actuación de formas biológicas a través de acoplamientos

**Palabras clave:** actuación de la membrana flexo-eléctrica; flujo capilar viscoelástico impulsado por flexo-eléctrica; función de transferencia reológica en células ciliadas externas, electro-motilidad, formalismo de Fourier, ecuación constitutiva de Jeffreys



$$Q(t) = -\frac{1}{2} \pi a^4 \frac{dH(t)}{dt}$$

$$\text{Fases Viscoelásticas} = \left\{ \begin{array}{l} \lambda_i = \eta_i / G_i \\ \lambda_{ji} = r_i \lambda_i \\ r_i = \frac{\eta_i}{\eta_{si} + \eta_{pi}} \\ \rho_i \\ i = t, b \end{array} \right.$$



# Capítulo 1 Introducción



## 1.1 Flexo-electricidad en las membranas

La flexo-electricidad en las membranas, es un efecto de acoplamiento electromecánico entre la curvatura promedio de la membrana y la polarización eléctrica macroscópica que es esencial para la fisiología de la audición. La flexo-electricidad aplicada a las membranas utiliza un campo eléctrico impuesto para crear flexión entre ellas, la cual es utilizada por las células ciliadas externas (OHC por sus siglas en inglés outer hair cells) ubicadas en el oído interno. Motivados por el funcionamiento de la OHC, en este trabajo se modela la respuesta mecánica oscilatoria del sistema compuesto por una membrana flexo-eléctrica circular inmersa entre dos fases viscoelásticas sujeto a un campo eléctrico armónico de baja amplitud de frecuencia arbitraria. El modelo se basa en la integración de: (i) la ecuación de forma de la membrana flexo-eléctrica aplicada a una membrana circular unida a la superficie interior de un capilar circular y (ii) el flujo volumétrico acoplado a las fases viscoelásticas de contacto, de tal manera, que el efecto del campo eléctrico produce distorsión en la membrana y la evolución de ella induce un flujo volumétrico, el cual depende completamente de las propiedades viscoelásticas del sistema. El modelo membrano-dinámico que describe la evolución de la curvatura promedio en función del campo eléctrico aplicado. El espacio material conformado por la inercia, viscosidad y la elasticidad de la membrana, se utiliza para clasificar y caracterizar la respuesta de la frecuencia del sistema electromecánico. La respuesta dinámica del sistema es típica de un oscilador armónico forzado y puede mostrar curvas resonantes en la potencia total. La amplitud, la frecuencia y la anchura de las curvas resonantes en la potencia son de relevancia para el funcionamiento de las OHC, las cuales dependen de la inercia que proviene de las fases viscoelásticas y la relación entre la elasticidad de la membrana y la de los fluidos en contacto. El modelo membrano-dinámico (Viscoelástico/Flexo-Eléctrico) integrado y las aportaciones de este trabajo contribuyen a la búsqueda constante en el entendimiento de los motores biológicos, especialmente en el papel fundamental de la deformación de la membrana en la entrega de energía mecánica, a través de electro-motilidad y su conversión en energía dependiente de la frecuencia.

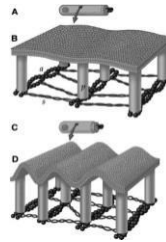


Figura 1 Contracción de la membrana plasmática de la OHC

Los cristales líquidos son materiales multifuncionales que forman parte de muchos procesos de materiales biológicos, como dispositivos sensores y actuadores, superfibras naturales, membranas, películas y gotas (Rey, 2007, 2010; Rey, Herrera-Valencia, & Murugesan, 2014). Otras propiedades notables, como la formación de película y el patrón de superficie, se pueden encontrar en contrachapados biológicos, cutículas de escarabajos (Rey, 2007, 2010; Rey & Herrera-Valencia, 2012; Rey, Herrera-Valencia, et al., 2014) y flujos de formación de película colestérica de soluciones de colágeno (Rey & Herrera-Valencia, 2012; Rey, Herrera-Valencia, et al., 2014). El funcionamiento de las células ciliadas externas (OHC) en el oído interno involucra oscilaciones periódicas de curvatura de las membranas elásticas de tipo cristal líquido (LC) que imparten, mediante flexión y oscilación, impulso y flujo a los fluidos viscoelásticos a granel en contacto (Rey, 2008). Este importante fenómeno se ha estudiado con varios enfoques de modelado mecánico y matemático utilizando diferentes ecuaciones constitutivas (Aguilar Gutierrez, Herrera Valencia, & Rey, 2017; Brownell, Bader, Bertrand, & de Ribaupierre, 1985; E. E. Herrera-Valencia & Rey, 2014; Rabbitt, Clifford, Breneman, Farrell, & Brownell, 2009; Rey, Servio, & Herrera-Valencia, 2013; Rey, Servio, & Herrera Valencia, 2014; Sachs, Brownell, & Petrov, 2009). El accionamiento del campo eléctrico de la membrana de cristal líquido se conoce como flexo-electricidad (Petrov, 2002; Rey, 2008) y fue estudiado y desarrollado por Petrov y colaboradores. El papel clave de OHC es la amplificación del sonido en presencia de disipación viscosa y el almacenamiento de energía en la membrana flexo-eléctrica (Abou-Dakka, Herrera-Valencia, & Rey, 2012; Aguilar Gutierrez et al., 2017; E. E. Herrera-



Valencia & Rey, 2014; Rey et al., 2013; Rey, Servio, et al., 2014). Por lo tanto, la descripción completa y la comprensión del funcionamiento de OHC debe incluir la respuesta de frecuencia de las membranas flexoeléctricas incrustadas en medios viscosos y viscoelásticos debido a un campo eléctrico  $E$  oscilante (Rabbitt et al., 2009; Rey et al., 2013). El campo  $E$  de entrada, a través del efecto flexo-eléctrico electromecánico, produce oscilaciones de curvatura en la membrana elástica que comprende la OHC rodeada de medios viscoelásticos. A su vez, la membrana elástica oscilante desplaza los líquidos viscoelásticos a través de los mecanismos mecánicos viscoelásticos y de disipación. El efecto combinado que permite la conversión de energía electromecánica se basa en la integración del efecto flexo-eléctrico (campo  $E$  impuesto sobre la membrana flexo-eléctrica) y el efecto mecánico (elasticidad de la membrana más flujo de fluido) (Abou-Dakka et al., 2012; Rabbitt et al., 2009).

Se han empleado una gran cantidad de enfoques analíticos para simular los cambios en la curvatura promedio de la membrana de una membrana flexo-eléctrica en función del campo eléctrico (Abou-Dakka et al., 2012; Rabbitt et al., 2009; Rey, 2008). Recientemente estudiaron la disipación de la curvatura de las superficies líquidas y las membranas a partir de un enfoque superficial Boussinesq-Scriven generalizado (Aguilar Gutierrez et al., 2017). Rabbits (Rabbitt et al., 2009) desarrolló un modelo basado en un modelo constitutivo compuesto de mezcla. Sus resultados muestran que la eficiencia de potencia máxima probablemente esté ajustada a una frecuencia específica que depende de la longitud de OHC. Además, esta sintonía puede contribuir a la selectividad de frecuencia de la cóclea. Otros estudios han empleado modelos electromecánicos con enfoque en audición, membranas compuestas y células ciliadas externas cocleares. Desde el punto de vista de la transducción mecánica, algunos investigadores han utilizado modelos matemáticos dependientes de tensión y flexión para describir la movilidad de los lípidos en la membrana plasmática externa de las células ciliadas, modelos de flexión con énfasis en electromotilidad celular y genética de las células ciliadas auditivas (Hawkins & Lovett, 2004; Oghalai, Zhao, Kutz, & Brownell, 2000; Raphael, Popel, & Brownell, 2000). Se han propuesto algunos otros modelos electromecánicos y





reológicos, que incluyen mecanismos electromagnéticos, la respuesta dinámica viscoelástica-relajación de la curvatura a través de diferentes pruebas reológicas, incluido el flujo oscilatorio y de fluencia (Ehrenstein & Iwasa, 1996; Fikus & Pawlowski, 1989; Panagopoulos, Karabarbounis, & Margaritis, 2002). Desde un punto de vista electromecánico, la transducción inversa, la capacitancia negativa de la membrana, la respuesta de frecuencia y la curvatura de resonancia de estos modelos físicos (Kuni H. Iwasa, 2016; Ospeck & Iwasa, 2012; Ren, He, & Barr-Gillespie, 2016) juegan un papel importante en los mecanismos de audición de la cóclea y la producción de energía de las células ciliadas externas. Otros autores se han centrado en la descripción de las células ciliadas cocleares de mamíferos a través de la generación de potencia (Wang, Steele, & Puria, 2016), energía de extensión, espectro de ruido actual, mecanismos de pérdida de fluido viscoso, estrés de la capacitancia de la membrana y movilidad del cilio (K. H. Iwasa, 1993; Kuni H Iwasa & Sul, 2008; Nam, Peng, & Ricci, 2015; Ó Maoiléidigh & Jülicher, 2010) En este contexto, hemos desarrollado varios enfoques matemáticos para describir la curvatura de la membrana flexo-eléctrica a través de la teoría del cristal líquido y los modelos electro-reológicos con énfasis en el modelado del dispositivo de células ciliadas externas (OHC). Nos gustaría enfatizar que "uno de los principales problemas en esta área es encontrar la disipación de energía monótona y no monótona en el sistema" inducida por los cambios en la curvatura como consecuencia del campo eléctrico impuesto; esta disipación de potencia se caracteriza por un espectro que depende de la frecuencia del campo eléctrico y sus características específicas, como los picos resonantes y anti-resonantes, son la cuestión clave de este trabajo. Para incluir la naturaleza física de los fluidos, se han empleado varias ecuaciones constitutivas (Abou-Dakka et al., 2012; E. E. Herrera-Valencia & Rey, 2014; Rey, 2008; Rey et al., 2013), desde Euler (fluido no viscoso) hasta las ecuaciones constitutivas de Maxwell (Abou-Dakka et al., 2012), que han conducido a las ecuaciones diferenciales ordinarias que rigen describir los cambios en la curvatura como una función del campo eléctrico. Dependiendo de la ecuación reológica del estado, la forma de la resonancia de potencia puede mostrar varias curvas de resonancia en el régimen de inercia pequeña y cero inercia (número de



Mar igual a cero). Estas curvas de resonancia se pueden describir en términos de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, cuyo orden ( $n$ ) se define por el operador de viscosidad total en el sistema. Por ejemplo, en el caso de los fluidos Euler y Newton ( $n = 0,1$  respectivamente), la disipación de potencia en las fases masivas de contacto no muestra comportamiento de resonancia, pero cuando la naturaleza física de los fluidos es viscoelástica (Maxwell,  $n = 2$ ), el sistema muestra un comportamiento de resonancia en función de la frecuencia.

### **Originalidad de esta investigación**

La originalidad de esta investigación consiste en una generalización crítica y significativa de los trabajos antes mencionados, que incluyen: (a) La formulación matemática desarrollada aquí que puede aplicarse a cualquier ecuación constitutiva viscoelástica lineal que incluya operadores lineales fraccionales; (b) El operador de viscosidad elegido para caracterizar la reología y la transferencia de momento de la membrana en las fases líquidas viscoelásticas es la suma de las contribuciones de un disolvente y polímero. Cuando las viscosidades del solvente son cero, el sistema se reduce a un modelo anterior publicado recientemente (Abou-Dakka et al., 2012; E. E. Herrera-Valencia & Rey, 2014); y (c) Los efectos del solvente y de los mecanismos del polímero inducen un comportamiento de resonancia y anti-resonancia (máximo y mínimo), y el orden del modelo electro-reológico es tres, mientras que cuando el orden de la ecuación dinámica es par, el sistema muestra un comportamiento monótono Este nuevo efecto par-impar reduce los posibles modelos desde el principio. En general, la forma de la resonancia de la curva de potencia, así como el comportamiento monótono y no monótono dependen del orden de la EDO que describe la curvatura promedio de la membrana como una función del campo eléctrico aplicado y el número de Deborah, que puede ser interpretado más adecuadamente como un número reducido de Mach asociado con la propagación de la velocidad de la membrana en los medios viscoelásticos. A partir de un análisis exhaustivo basado en un orden creciente en modelos viscoelásticos clásicos, se encuentra que: (i) para números de Mach cero, la potencia muestra el comportamiento de resonancia en los modelos viscoelásticos clásicos (modelos de



Maxwell, Jeffrey y Burger), mientras que los no monótonos el comportamiento se muestra en el modelo de Jeffrey (3ODE); (ii) cuando la inercia se incluye  $M_a \neq 0$ , el sistema muestra varios picos de resonancia, mientras que en  $M_a \gg 1$  el sistema no muestra ningún pico de resonancia. Estos hallazgos genéricos reducen el rango de condiciones reológicas y modelos reológicos relevantes, y nos permiten establecer conexiones entre la salida del dispositivo y las propiedades del material.

Los tres problemas clave a tratar en este dispositivo de conversión de energía son:

- (i) La magnitud de la potencia  $P$  asociada con la curvatura media o caudal volumétrico entregado al contacto de fluidos viscoelásticos de Jeffreys del campo eléctrico oscilante  $E$  impuesto;
- (ii) La complejidad mínima del modelo no newtoniano necesario para dar el comportamiento no monótono en el espectro de potencia; y
- (iii) Las condiciones materiales necesarias para tener un pico de potencia resonante máximo y mínimo bien localizado (en el espectro de disipación de potencia) como se requiere fisiológicamente.

Como resumen parcial, tanto los efectos flexo-eléctricos de membrana directa como inversa son propiedades de sensor-actuador cuando la curvatura de la membrana y la polarización están acopladas como en los cristales líquidos nemáticos. La flexo-electricidad de la membrana debido a sus capacidades inherentes sensor-actuador es un área de interés actual en medicina, materia blanda y materiales biológicos (Forest, Wang, & Zhou, 2013; Edtson Emilio Herrera-Valencia et al., 2017; K. H. Iwasa, 1993; Sprott, 1997). Los objetivos específicos de este documento son: (1) Derivar un modelo lineal dinámico de tercer orden para una membrana flexo-eléctrica unida a un tubo capilar que contiene fluidos viscoelásticos de Jeffrey y está sujeto a un campo eléctrico fluctuante de pequeña amplitud de frecuencia arbitraria. (2) Calcular la respuesta de frecuencia del dispositivo electro-reológico teniendo en cuenta la naturaleza viscoelástica de los fluidos en contacto; (3) Usar los resultados del modelado para caracterizar el espectro de potencia no monotónico asociado al papel de la flexo-electricidad de membrana y la viscoelasticidad de fluidos de contacto del dispositivo; y (4) Identificar las propiedades del material que conducen a la conversión electromecánica relevante para el funcionamiento de OHC.



Para evitar la repetición de derivaciones largas, se remite al lector a (Abou-Dakka et al., 2012; Rey et al., 2013; Rey, Servio, et al., 2014). Se describe la viscoelasticidad con un modelo de fluido de Maxwell, despreciando la inercia (número de Mach:  $Ma = 0$ ) y formulamos el modelo en el dominio del tiempo. En (E. E. Herrera-Valencia & Rey, 2014) se amplía el modelo anterior de Maxwell con los mecanismos de inercia (número Mach:  $Ma \neq 0$ ) y usando el formalismo de Fourier se encontró dos picos de potencia de resonancia de potencia. Estos dos primeros trabajos no muestran un mínimo en el espectro de potencia, como otros enfoques matemáticos. En esta investigación, modelamos el sistema en el dominio de la frecuencia, sin incluir la inercia, y desarrollamos un enfoque genérico que puede usarse en el futuro con cualquier ecuación constitutiva viscoelástica lineal y fraccional, según lo exijan los resultados experimentales. El nuevo enfoque es novedoso y significativo porque ampliamos el espectro de potencia con un máximo y un mínimo bien localizados, es decir, un comportamiento no monótono que se encuentra en los sistemas biológicos, como las células ciliadas externas.

### **Organización del presente trabajo**

Este documento está organizado como se muestra en la *Figura 2*. La Sección 2 presenta las características genéricas del modelo electro-reológico gobernante adimensional de la membrana sensible al campo eléctrico incorporada en los fluidos viscoelásticos de Jeffrey. Números sin dimensiones y modos característicos. La ecuación gobernante se basa en la integración de: (i) la ecuación de la forma de la membrana flexo-eléctrica aplicada a una membrana circular unida a la superficie interna de un capilar circular; y (ii) el flujo capilar de las fases viscoelásticas en contacto. La Sección 3 presenta el espectro característico de la potencia de salida y los números adimensionales asociados a los mecanismos flexo-eléctricos, viscoelásticos y elásticos del sistema. La Sección 4 presenta resultados numéricos representativos seleccionados del dispositivo (valores numéricos de Mach pequeños). La Sección 5 trata de la discusión de predicciones numéricas, aplicaciones biológicas, mecanismos dominantes y condiciones de resonancia, respectivamente. Los Apéndices muestran los desarrollos utilizado en todo este



trabajo, números adimensionales derivaciones matemáticas de la disipación de potencia para el modelo.

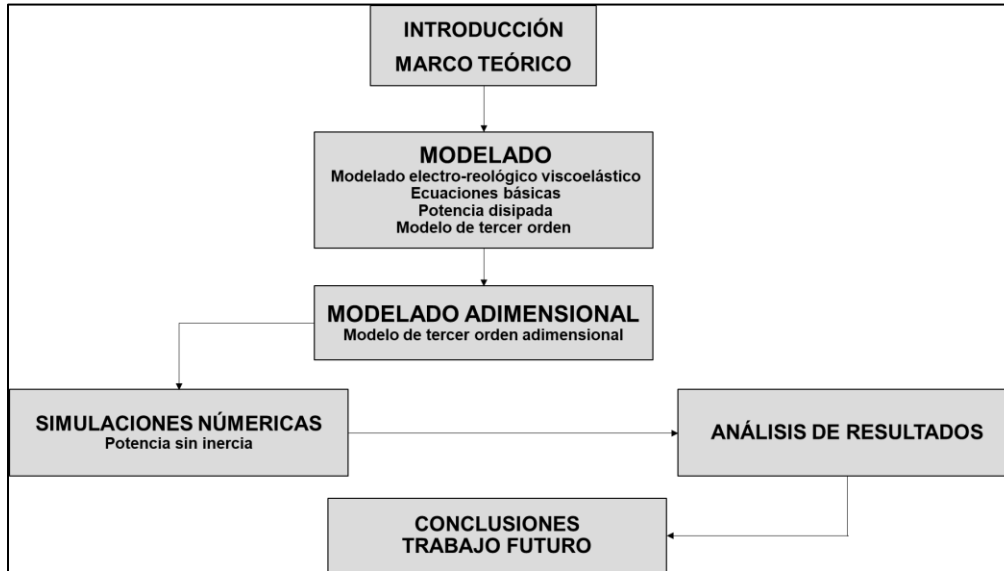


Figura 2 Esquema de organización de este trabajo

## Objetivos

### 1.1.1 Objetivo general

- Desarrollar un modelo membrano dinámico lineal y otro no lineal que describa la curvatura promedio en función del campo eléctrico aplicado, propiedades elásticas de la membrana, eléctricas y viscoelásticas del medio.
- Mediante un campo eléctrico de baja amplitud obtener expresiones correspondientes para la curvatura en fase y fuera de fase con el campo eléctrico.
- Calcular la energía elástica de la membrana y potencia disipada como función de las propiedades elásticas de la membrana, flexoeléctricas y viscoelásticas del medio.
- Obtener en qué condiciones materiales la membrana flexo-eléctrica se comporta como un motor biológico (células ciliadas externas)



### 1.1.2 Objetivos particulares

- a) Obtener un modelo que describa la curvatura promedio utilizando la ecuación constitutiva de Jeffreys que describe las características viscoelásticas de las fases líquidas.
- b) Estudios básicos y aplicados sobre la influencia de las propiedades flexoeléctricas y viscoelásticas de las fases sobre la curvatura promedio de la membrana.
- c) Predecir mediante pruebas de campo eléctrico oscilatorio la región en donde la membrana flexo-eléctrica se comporta como un sistema biológico (células ciliadas externas).

### 1.1.3 Hipótesis

- a) La orientación de la curvatura promedio de una membrana flexo-eléctrica puede ser descrita por medio de un vector normal unitario a la superficie, si este vector se hace coincidir con el vector director que se utiliza para describir la fase nemática de un cristal líquido, por ende, ésta se comportara como un cristal líquido nemático.
- b) Si las membranas flexoeléctricas cambian su curvatura por efecto del campo eléctrico y las fases viscoelásticas de contacto, éstas se pueden analizar como función de los procesos disipativos y la energía de almacenamiento debido a los mecanismos de relajación, cinéticos, térmicos y difusivos.

La potencia disipada por el contacto de las fases viscoelásticas y la energía elástica almacenada por el sistema físico son de fundamental importancia en la electromotilidad de las células ciliadas externas y son funciones de las propiedades eléctricas y viscoelásticas del medio.



## Capítulo 2 -Marco Teórico



## 2.1 Cristales líquidos

Los cristales líquidos nemáticos son materiales multifuncionales viscoelásticos anisotrópicos autoorganizados, los cuales son orientados debido a campos externos como, por ejemplo: (i) campos eléctricos, (ii) campos magnéticos, (iii) esfuerzos cortantes, (iv) potenciales químicos y (vi) sistemas ópticos. El orden orientacional se define por un vector director  $\mathbf{n}$  y las distorsiones elásticas por el tensor  $\nabla\mathbf{n}$ . Una propiedad sorprendente y característica de los cristales líquidos nemáticos es conocida como flexo-electricidad (Petrov, 1999, 2002, 2006), la cual describe el acoplamiento entre los mecanismos asociados a los gradientes elásticos y la polarización eléctrica, como aquella producida por un campo eléctrico el cual modifica la curvatura y esto a su vez crea un efecto de polarización. El vector natural de polarización asociado a las deformaciones  $\mathbf{S} = \mathbf{n}\nabla\cdot\mathbf{n}$  y el asociado con la orientación de la curvatura  $\mathbf{B} = -\mathbf{n}\times\nabla\times\mathbf{n}$  pueden polarizar los cristales líquidos nemáticos (Abou-Dakka et al., 2012; Rey, 2006, 2007, 2008):

$$\mathbf{P}_f = c_s\mathbf{S} + c_B\mathbf{B} \quad 2.1$$

donde  $\mathbf{P}_f$  es la polarización asociada a la flexo-electricidad, en donde los coeficientes flexo-eléctricos  $\{c_s, c_B\}$ , están asociados a los mecanismos de flexión y a la curvatura y son del orden de  $10 \text{ pCm}^{-1}$ . La ecuación 2.1 describe un sensor que cuantifica los mecanismos flexo-eléctricos (Petrov, 1999, 2002, 2006) donde la deformación crea una polarización. El efecto de los mecanismos flexo-eléctricos describe una torca asociado a estos, e inducida por el campo eléctrico:

$$\Gamma_f = \mathbf{n} \times \left\{ (c_s - c_B) [\mathbf{E}\nabla\cdot\mathbf{n} - \nabla(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})] + (c_s + c_B) \mathbf{n}\cdot\nabla\mathbf{E} \right\} \quad 2.2$$

donde  $\Gamma_f$  depende del campo eléctrico y del tensor gradiente del campo eléctrico.

La torca  $\Gamma_f$  está dada por la suma de un tensor de esfuerzos flexo-eléctrico y un tensor acoplado flexo-eléctrico:

$$\Gamma_f = -\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{T}_f + \nabla\cdot\mathbf{C}_f \quad 2.3$$





la Ec. 2.2 indica como el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  crea un efecto mecánico. Las aplicaciones actuales de los cristales líquidos flexo-eléctricos incluyen ahorro de energía, transductores electromecánicos y pantallas.

La electro-elasticidad de membranas biológicas y sintéticas pueden ser eficientemente descritas por los modelos de cristales líquidos, usando una aproximación conocida como nemato-membranología. Por ejemplo, la elasticidad de una membrana bicapa lipídica es bien descrita por la ecuación de energía de Helfrich  $E_H$  tanto para el flexión y torsión

$$E_H = 2k_c H^2 + \bar{k}_c K \quad 2.4$$

donde  $H$  es la curvatura promedio y  $K$  la curvatura gaussiana, la cual surge de la ecuación de energía elástica de Frank,  $E_F$

$$E_F = \frac{K_1}{2} (\nabla \cdot \mathbf{n})^2 - K_{24} \nabla \cdot (\mathbf{n} \nabla \cdot \mathbf{n} + \mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{n}) \quad 2.5$$

donde  $K_1$  y  $K_{24}$  son las constantes de deformación y del punto silla respectivamente.

La ciencia que estudia las membranas flexo-eléctricas desde el punto de vista de los cristales líquidos es conocida como nemato-membranología. Esta se basa en la premisa de que una membrana se comporta como un cristal líquido bajo la hipótesis, de que una membrana es afín a un cristal líquido cuando el vector unitario normal  $\mathbf{k}$ , el cual describe cómo cambia la orientación de una superficie es  $\mathbf{k} \cong \mathbf{n}$ , y considerando deformaciones tangenciales  $\nabla_s$ , es posible obtener la energía elástica de Frank

$$E_F = \left( \frac{K_1}{2} + 4K_{24} \right) H^2 + (-2K_{24}) K \quad 2.6$$

la Ec. 2.6 coincide con la Ec. 2.4 mostrando la relación que existe entre las constantes de la energía de Helfrich y Frank



$$4k_c = K_1 + 8K_{24} \quad 2.7$$

$$\bar{k}_c = -2K_{24} \quad 2.8$$

El gradiente asociado a la superficie puede ser obtenido por la proyección tangencial del gradiente total  $\nabla_s(\cdot) = \mathbf{I}_s \cdot \nabla(\cdot)$ ,  $\mathbf{I}_s = \mathbf{I} - \mathbf{k}\mathbf{k}$ . Usando la misma aproximación que se usó anteriormente, la ecuación 2.1 da la polarización en función de los cambios del vector unitario  $\mathbf{k}$  con relación al espacio  $\nabla_s \cdot \mathbf{k}$ :

$$\mathbf{P}_f = c_f (\nabla_s \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k} \quad 2.9$$

en donde  $c_f$  es el coeficiente flexo-eléctrico de la membrana, el cual puede ser calculado a través de experimentos. La torca  $\Gamma$  asociado a los efectos flexo-eléctricos, puede ser descrita de la siguiente manera:

$$\Gamma = \mathbf{k} \times \left\{ c_f \left[ (\nabla \cdot \mathbf{k}) \mathbf{E}_{//} - \nabla_s (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) \right] \right\} \quad 2.10$$

donde la proyección tangencial del campo eléctrico es  $\mathbf{E}_{//} = (\mathbf{I} - \mathbf{k}\mathbf{k}) \cdot \mathbf{E}$ . Esta ecuación muestra que los efectos eléctricos se llevan a cabo bajo las siguientes condiciones:

$$c_f > 0, \mathbf{E}_{//} \neq 0, \text{ ó } \nabla_s (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) \neq 0 \quad 2.11$$

En conclusión parcial, los mecanismos asociados a la flexo-electricidad pueden aplicarse a sensores de tipo biológicos, debido a su acoplamiento entre la polarización y la curvatura como en los cristales líquidos nemáticos. Esta investigación es motivada por las propiedades flexo-eléctricas, es decir la facilidad que tiene un sistema para modificar su curvatura por efecto de un campo eléctrico aplicado, como aquel encontrado en las células ciliadas externas localizadas en el oído interno y son conocidos como motores biológicos que amplifican el sonido.

La flexo-electricidad en las membranas tienen un potencial uso debido a sus capacidades como sensores biológicos (Rey, 2005, 2006, 2007; Rey & Herrera-



Valencia, 2012; Rey, Herrera-Valencia, et al., 2014; Rey et al., 2013; Rey, Servio, et al., 2014).

Durante muchos años, mucho de las investigaciones en materiales flexo-eléctricos se han centrado en el estudio y cálculo de los coeficientes en diferentes sistemas de cristales líquidos. Para membranas biológicas tipo cristal líquido, el valor numérico de los coeficientes está en el orden de 3 a 20 pCm<sup>-1</sup>, pero recientemente (Jákli, 2010) han reportado coeficientes flexo-eléctricos hasta del orden de 35 nCm<sup>-1</sup> en cristales líquidos tipo banana empleados en transductores mecánico eléctricos (Abou-Dakka et al., 2012; Sachs et al., 2009).

Las células ciliadas externas exhiben un comportamiento complejo llamado electromotilidad (Ahmadpoor & Sharma, 2015; Ashmore et al., 2010; Dong & Olson, 2013; Geisler & Sang, 1995; Kuni H Iwasa & Sul, 2008; Karavitaki & Mountain, 2007; Pollice & Brownell, 1993; Ren et al., 2016; Wang et al., 2016). Las células ciliadas externas ubicadas en el oído interno, específicamente en el túnel de Corti amplifican el sonido hasta un valor cercano de 50 db, la cóclea provee a los mamíferos la capacidad de oír en un amplio intervalo de frecuencias. La potencia disipada por las células ciliadas es de mucho interés en los procesos de pérdida auditiva muchas veces causados por el deterioro de estos motores biológicos, cuyo entendimiento requiere de teoría de ecuaciones constitutivas viscoelásticas para el entendimiento de la electromotilidad en las células ciliadas externas. Un hecho clave en la amplificación del sonido en las células ciliadas externas, son la energía disipada y la energía almacenada por la membrana. El campo eléctrico  $E$  produce oscilaciones en la membrana elástica a través de efectos mecano-eléctricos y flexo-eléctricos. Por otro lado, las oscilaciones de la membrana inducen un flujo volumétrico de las fases viscoelásticas. Los puntos importantes de la conversión de energía son: (i) Cuanta energía es disipada por la membrana a las fases viscoelásticas, (ii) Cuanta energía elástica es almacenada por la membrana y (iii) en sistemas biológicos las propiedades importantes son las curvas resonantes y su caracterización (frecuencia de resonancia, máximo valor en las curvas resonantes, anchura de las curvas resonantes).

## 2.2 Modelos electro-reológicos basado en flexo-electricidad

Los modelos electro-reológicos buscan contribuir a la caracterización de membranas flexo-eléctricas inmersas en fases líquidas, tomando en cuenta la naturaleza viscoelástica de ellas. Estos modelos a pesar de su sencillez han capturado parte de la física empleada en estos sistemas. Para poder modelar estos se supone que la única propiedad importante en la membrana es la flexo-electricidad. La fuerza eléctrica aplicada a la membrana hace que esta se deforme hacia arriba en un domo superior, después pase por una posición de equilibrio y después describa otro domo inferior como se muestra en la *Figura 3*

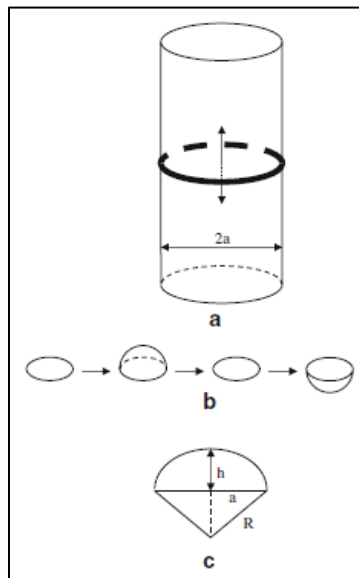


Figura 3 Esquema representativo de una membrana flexo-eléctrica. a) en un capilar, b) oscilación en torno a una posición de equilibrio, c) domo esférico para  $h$  pequeña

En la *Figura 3* se observa una membrana colocada en medio de un capilar en  $z = L$  la membrana es deformada y su curvatura es positiva, cero cuando es en la posición de equilibrio y negativa cuando está en la dirección opuesta. En el caso más simple, es decir las dos fases son invíscidas se obtiene un balance de fuerzas. Así que se tiene lo siguiente:

$$F_{ME} = F_E \quad 2.12$$



$$\left( \frac{2\gamma_0 + (2k_c + \bar{k}_c) \mathfrak{S}}{4L} \right) H(t) = \frac{C_f \mathfrak{S}}{4L} E(t) \quad 2.13$$

es decir, hay un balance de la fuerza elástica y la fuerza eléctrica de la membrana. Esta expresión describe la relación entre la deformación de la membrana y el campo eléctrico. Las constantes materiales están asociadas a las propiedades interfaciales en el sistema y los módulos de torsión y deformación  $\{k_c, \bar{k}_c\}$ ,  $\mathfrak{S}$  es un factor de forma el cual, tiene unidades de inverso de área y resulta de la integración del campo eléctrico en el domo esférico. La curvatura  $H(t)$  tiene unidades de inverso de longitud y  $E(t)$  es la fuerza motriz asociada al campo eléctrico y tiene unidades de fuerza por unidad de carga. El siguiente modelo fue propuesto por A. D. Rey (Rey, 2007, 2008, 2010; Rey, Herrera-Valencia, et al., 2014; Rey, Servio, et al., 2014) y toma en cuenta la naturaleza viscosa de las fases líquidas. La ecuación básica que incorpora esto se describe a continuación

$$\underbrace{(\eta_t + \eta_b) \frac{dH(t)}{dt}}_{\text{Disipación}} + \left( \frac{2\gamma_0 + (2k_c + \bar{k}_c) \mathfrak{S}}{4L} \right) H(t) = \frac{C_f \mathfrak{S}}{4L} E(t) \quad 2.14$$

la incorporación de la viscosidad en las fases líquidas induce un nuevo término que describe la rapidez de la membrana en el sistema. Este tipo de ecuaciones son típicas en los procesos de relajación. En forma simplificada se tiene lo siguiente:

$$\Sigma \eta \frac{dH(t)}{dt} + MH(t) = \frac{C_f \mathfrak{S}}{4L} E(t) \quad 2.15$$

la Ec. 2.15 es punto de partida de varios estudios sobre membranas flexo-eléctricas inmersas en diferentes tipos de fases viscoelásticas. En la Ec. 2.15 se han definido lo siguiente:

$$\Sigma \eta = \eta_t + \eta_b$$

$$M = \frac{2\gamma_0 + (2k_c + \bar{k}_c) \mathfrak{S}}{4L}$$



$\Sigma\eta$  se puede interpretar como un operador temporal que en el caso más simple (newtoniano), es constante.  $M$  es la constante elástica de la membrana la cual depende de las propiedades interfaciales y geométricas de la membrana y del capilar a través de  $L$ .

El siguiente paso, es modificar la naturaleza de la ecuación base para incluir los efectos viscoelásticos en las fases líquidas a través de los tiempos de relajación, es necesario hacer notar que estos modelos son deducidos para el régimen de viscoelasticidad lineal de las fases líquidas (bajas deformaciones), de igual manera que en el modelo anterior la membrana es descrita para bajas deformaciones.

$$\begin{aligned}\Sigma\eta(\partial_t)\frac{dH(t)}{dt}+MH(t)&=\frac{C_f\mathfrak{I}}{4L}E(t) \\ \Sigma\eta(\partial_t)&=\frac{\eta_t}{1+\lambda_t\partial_t}+\frac{\eta_b}{1+\lambda_b\partial_b}\end{aligned}\tag{2.16a,b}$$

al multiplicar por los operadores diferenciales, llegamos a una ecuación diferencial de segundo orden, que describe la evolución de la curvatura en función del campo eléctrico aplicado:

$$\begin{aligned}\left(b_2\frac{d^2}{dt^2}+b_1\frac{d}{dt}+b_0\right)H(t)&=\left(a_2\frac{d^2}{dt^2}+a_1\frac{d}{dt}+1\right)E(t) \\ b_2&=G_t\lambda_t\lambda_b+G_b\lambda_b\lambda_t+\lambda_t\lambda_b\frac{2\gamma_0+(2k_c+\bar{k}_c)\mathfrak{I}}{4L} \\ b_1&=G_t\lambda_t+G_b\lambda_b+(\lambda_t+\lambda_b)\frac{2\gamma_0+(2k_c+\bar{k}_c)\mathfrak{I}}{4L} \\ b_0&=\frac{2\gamma_0+(2k_c+\bar{k}_c)\mathfrak{I}}{4L} \\ a_2&=a_0\lambda_t\lambda_b \\ a_1&=a_0(\lambda_t+\lambda_b) \\ a_0&=\frac{C_f\mathfrak{I}}{4L} \\ \lambda_t&=\frac{\eta_t}{G_t}; \lambda_b=\frac{\eta_b}{G_b}; M=\frac{2\gamma_0+(2k_c+\bar{k}_c)\mathfrak{I}}{4L};\end{aligned}\tag{2.17}$$



la Ec. 2.17 muestra que la incorporación de un fluido de mayor orden con efectos elásticos incrementa el orden de la ecuación diferencial que describe el sistema, la cual incluye efectos inerciales asociados con la segunda derivada de la curvatura.

En este trabajo se extiende el modelo de segundo orden (Abou-Dakka et al., 2012; E. E. Herrera-Valencia & Rey, 2014) incluyendo mecanismos de retardo al igual que inerciales y disipativos modificando el operador viscosidad dados por la Ec. 2.16b

$$\Sigma\eta \frac{dH(t)}{dt} + MH(t) = \frac{C_f \mathfrak{I}}{4L} E(t) \quad 2.18$$

$$\Sigma\eta(\partial_t) = \eta_t \frac{1 + \lambda_{jt} \partial_t}{1 + \lambda_t \partial_t} + \eta_b \frac{1 + \lambda_{jb} \partial_b}{1 + \lambda_b \partial_b}$$

desarrollando este operador obtenemos la Ec. 2.19

$$\left( b_3 \frac{d^3}{dt^3} + b_2 \frac{d^2}{dt^2} + b_1 \frac{d}{dt} + b_0 \right) H(t) = \left( a_2 \frac{d^2}{dt^2} + a_1 \frac{d}{dt} + 1 \right) E(t) \quad 2.19$$

$$b_3 = \lambda_t \lambda_b (G_t \lambda_{jt} + G_b \lambda_{jb})$$

$$b_2 = \lambda_t \lambda_b (G_t + G_b + M) + G_t \lambda_t \lambda_{jt} + G_b \lambda_b \lambda_{jb}$$

$$b_1 = G_t \lambda_t + G_b \lambda_b + M(\lambda_t + \lambda_b)$$

$$b_0 = M$$

$$a_2 = a_0 \lambda_t \lambda_b$$

$$a_1 = a_0 (\lambda_t + \lambda_b)$$

$$a_0 = \frac{C_f \mathfrak{I}}{4L}$$

$$\lambda_t = \frac{\eta_t}{G_t}; \quad \lambda_b = \frac{\eta_b}{G_b}; \quad M = \frac{2\gamma_0 + (2k_c + \bar{k}_c) \mathfrak{I}}{4L};$$

nótese que cuando los tiempos de retardo del modelo son cero, se reduce al modelo de segundo orden (Abou-Dakka et al., 2012; E. E. Herrera-Valencia & Rey, 2014). Por otro lado, y debido a las aplicaciones científicas y tecnológicas actuales y potenciales de los líquidos no-newtonianos, así como la ausencia de resultados analíticos simples que permitan contrastar las predicciones numéricas y las observaciones experimentales, se justifica plenamente la originalidad de la investigación, contenida en el presente proyecto de maestría.



La deducción del modelo dimensional de tercer orden se presenta en el capítulo 3 para la curvatura promedio.

La Ec. 2.19 es el punto de partida para este trabajo la cual se analizará en los capítulos subsecuentes. La aplicación inmediata de estos modelos está dirigida a las células ciliadas externas (OHC por sus siglas en inglés), para los cuales se deducirán expresiones para la energía elástica almacenada por la membrana flexo-eléctrica, la energía disipada hacia las fases viscoelásticas siendo ésta última de vital importancia para el proceso auditivo.

### **2.3 Fisiología del oído**

La generación de sensaciones auditivas en el ser humano es un proceso extraordinariamente complejo, el cual se desarrolla en tres etapas básicas:

- Captación y procesamiento mecánico de las ondas sonoras.
- Conversión de la señal acústica (mecánica) en impulsos nerviosos, y transmisión de dichos impulsos hasta los centros sensoriales del cerebro.
- Procesamiento neural de la información codificada en forma de impulsos nerviosos.

La captación, procesamiento y transducción de los estímulos sonoros se llevan a cabo en el oído propiamente dicho, mientras que la etapa de procesamiento neural, en la cual se producen las diversas sensaciones auditivas, se encuentra ubicada en el cerebro. Así pues, se pueden distinguir dos regiones o partes del sistema auditivo: la región periférica, en la cual los estímulos sonoros conservan su carácter original de ondas mecánicas hasta el momento de su conversión en señales electroquímicas, y la región central, en la cual se transforman dichas señales en sensaciones.



## Región periférica del sistema auditivo

El oído o región periférica se divide usualmente en tres zonas, llamadas oído externo, oído medio y oído interno, de acuerdo con su ubicación en el cráneo, como puede verse en la *Figura 4*

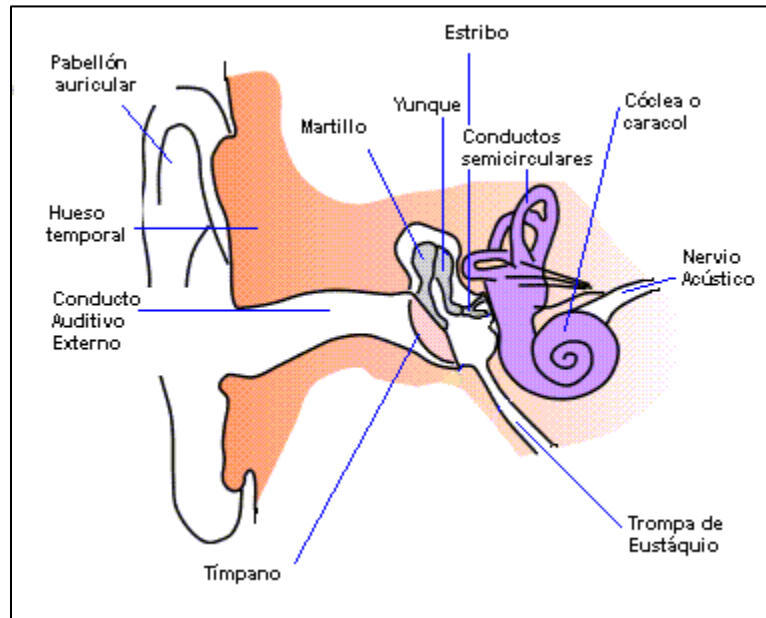


Figura 4 Sistema auditivo

Los estímulos sonoros se propagan a través de estas zonas, sufriendo diversas transformaciones hasta su conversión final en impulsos nerviosos. Tanto el procesamiento mecánico de las ondas sonoras como la conversión de éstas en señales electroquímicas son procesos no lineales, lo cual dificulta la caracterización y modelado de los fenómenos perceptuales.

### 2.3.1 Oído externo

#### Anatomía y funcionamiento

El oído externo está formado por el pabellón auricular u oreja, el cual dirige las ondas sonoras hacia el conducto auditivo externo a través del orificio auditivo como puede observarse en la *Figura 4*. El otro extremo del conducto auditivo se encuentra cubierto por la membrana timpánica o tímpano, la cual constituye la



entrada al oído medio. La función del oído externo es la de recolectar las ondas sonoras y encauzarlas hacia el oído medio. Asimismo, el conducto auditivo tiene dos propósitos adicionales: proteger las delicadas estructuras del oído medio contra daños y minimizar la distancia del oído interno al cerebro, reduciendo el tiempo de propagación de los impulsos nerviosos.

### **Respuesta en frecuencia y localización de las fuentes de sonido**

El conducto auditivo es un "tubo" de alrededor de 2 cm de longitud, el cual influye en la respuesta en frecuencia del sistema auditivo. Dada la velocidad de propagación del sonido en el aire (aprox. 334 m/s), dicha longitud corresponde a 1/4 de la longitud de onda de una señal sonora de unos 4 kHz. Este es uno de los motivos por los cuales el aparato auditivo presenta una mayor sensibilidad a las frecuencias cercanas a los 4 kHz. Adicionalmente, el pabellón auricular, junto con la cabeza y los hombros, contribuye a modificar el espectro de la señal sonora. Las señales sonoras que entran al conducto auditivo externo sufren efectos de difracción debidos a la forma del pabellón auricular y la cabeza, y estos efectos varían según la dirección de incidencia y el contenido espectral de la señal; así, se altera el espectro sonoro debido a la difracción. Estas alteraciones, en forma de "picos" y "valles" en el espectro, son usadas por el sistema auditivo para determinar la procedencia del sonido en el llamado "plano medio" (plano imaginario perpendicular a la recta que une ambos tímpanos).

### **2.3.2 Oído medio**

#### **Anatomía**

El oído medio está constituido por una cavidad llena de aire, como se muestra en la *Figura 5*, dentro de la cual se encuentran tres huesecillos, denominados martillo, yunque y estribo, unidos entre sí en forma articulada. Uno de los extremos del martillo se encuentra adherido al tímpano, mientras que la base del estribo está unida mediante un anillo flexible a las paredes de la ventana oval, orificio que constituye la vía de entrada del sonido al oído interno. Finalmente, la cavidad del



oído medio se comunica con el exterior del cuerpo a través de la trompa de Eustaquio, la cual es un conducto que llega hasta las vías respiratorias y que permite igualar la presión del aire a ambos lados del tímpano.

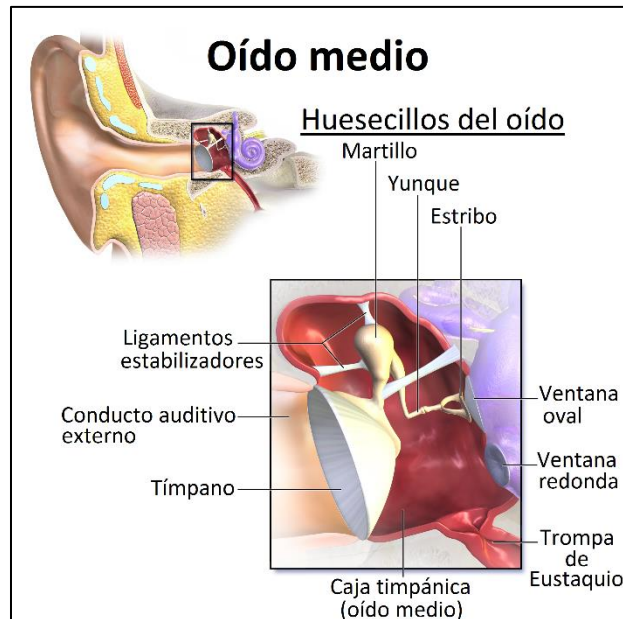


Figura 5 Oído medio

### Propagación del sonido y acople de impedancias

Los sonidos, formados por oscilaciones de las moléculas del aire, son conducidos a través del conducto auditivo hasta el tímpano. Los cambios de presión en la pared externa de la membrana timpánica, asociados a la señal sonora, hacen que dicha membrana vibre siguiendo las oscilaciones de dicha señal. Las vibraciones del tímpano se transmiten a lo largo de la cadena de huesecillos, la cual opera como un sistema de palancas, de forma tal que la base del estribo vibra en la ventana oval. Este huesecillo se encuentra en contacto con uno de los fluidos contenidos en el oído interno; por lo tanto, el tímpano y la cadena de huesecillos actúan como un mecanismo para transformar las vibraciones del aire en vibraciones del fluido.



### 2.3.3 Oído interno

#### Anatomía

El oído interno representa el final de la cadena de procesamiento mecánico del sonido, y en él se llevan a cabo tres funciones primordiales: filtraje de la señal sonora, transducción y generación probabilística de impulsos nerviosos

En el oído interno (véase *Figura 6*) se encuentra la cóclea o caracol, la cual es un conducto rígido en forma de espiral de unos 35 mm de longitud, lleno con dos fluidos de distinta composición. El interior del conducto está dividido en sentido longitudinal por la membrana basilar y la membrana de Reissner, las cuales forman tres compartimientos o escalas. La escala vestibular y la escala timpánica contienen un mismo fluido (perilinfia), puesto que se interconectan por una pequeña abertura situada en el vértice del caracol, llamada helicotrema. Por el contrario, la escala media se encuentra aislada de las otras dos escalas, y contiene un líquido de distinta composición a la perilinfia (endolinfia).

La base del estribo, a través de la ventana oval, está en contacto con el fluido de la escala vestibular, mientras que la escala timpánica desemboca en la cavidad del oído medio a través de otra abertura (ventana redonda) sellada por una membrana flexible (membrana timpánica secundaria). Sobre la membrana basilar y en el interior de la escala media se encuentra el órgano de Corti, el cual se extiende desde el vértice hasta la base de la cóclea y contiene las células ciliares que actúan como transductores de señales sonoras a impulsos nerviosos. Sobre las células ciliares se ubica la membrana tectorial, dentro de la cual se alojan las prolongaciones o cilios de las células ciliares externas. Dependiendo de su ubicación en el órgano de Corti, se pueden distinguir dos tipos de células ciliares: internas y externas. Existen alrededor de 3500 células ciliares internas y unas 20000 células externas. Ambos tipos de células presentan conexiones o sinapsis con las fibras nerviosas aferentes (que transportan impulsos hacia el cerebro) y eferentes (que transportan impulsos provenientes del cerebro), las cuales conforman el nervio auditivo. Sin embargo, la distribución de las fibras es muy desigual: más del 90% de las fibras aferentes



inervan a las células ciliares internas, mientras que la mayoría de las 500 fibras eferentes inervan a las células ciliares externas.

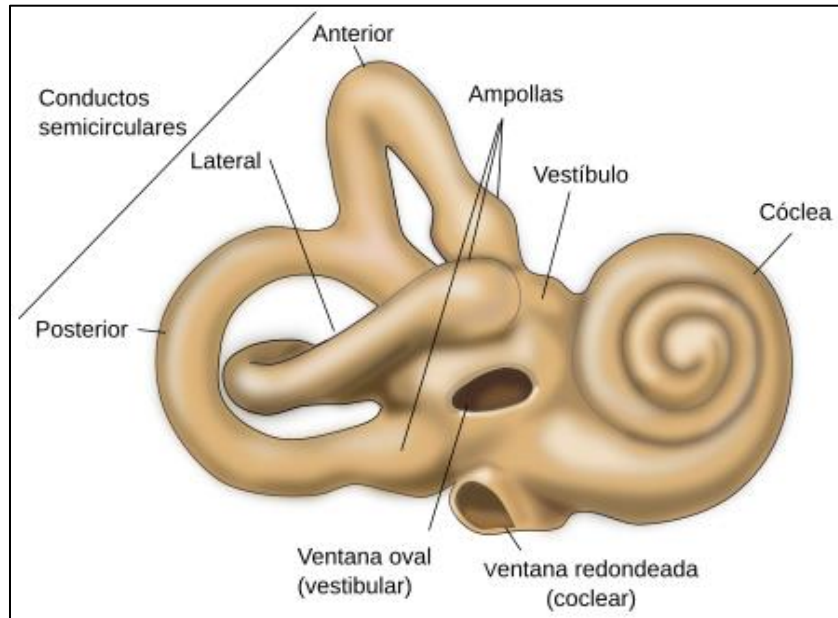


Figura 6 Oído interno

### 2.3.3.1 Células ciliadas externas

Las células ciliadas externas o CCE, están colocadas en tres hileras en el lado externo del túnel de Corti. Son células sensoriales con características realmente únicas. Están preparadas para realizar la transducción mecano-eléctrica, como las CCI, pero no transmiten ninguna característica del estímulo sonoro al cerebro. Al contrario, un mecanismo activo de transducción inversa (electromecánico) le permite reenviar la energía para aumentar la sensibilidad y la selectividad frecuencia. La cóclea humana tiene entre 10.000 y 12.000 de la CCE.

El funcionamiento de las células ciliadas externas es muy complejo ya que estas poseen una capacidad única de contracción-expansión la cual es la base de la transducción electro-mecánica (electromotilidad) descubierta por Brownell en el año 1983, la cual se activa de la siguiente manera, el estímulo eléctrico viaja a través de la escala vestibular en forma de vibraciones mecánicas, excitando la membrana basilar, esta última vibra a una frecuencia de resonancia la cual se acopla con la frecuencia de las vibraciones mecánicas produciendo el efecto de resonancia, la



membrana basilar oscila hacia arriba y abajo permitiendo que estas vibraciones muevan las células ciliadas externas, dándole cierto grado de inclinación a los estereocilios que se encuentran en su polo apical, dando lugar a la transducción mecano-eléctrica, abriendo los canales que permiten el paso de fluido rico en iones potasio (endolinfa), este fluido a su vez modifica el potencial eléctrico de la célula ciliada, lo cual resulta en una contracción de la membrana plasmática, al regresar a su potencial de equilibrio la célula expande su membrana plasmática, estos cambios de curvatura inducen un flujo volumétrico debido a una potencia de energía liberada, la cual es una medida indirecta de la transducción electro-mecánica.





## Capítulo 3 -Modelado





### 3.1 Modelado electro-reológico viscoelástico

El sistema que se modela en este trabajo es similar al presentado en los trabajos previos (Abou-Dakka et al., 2012; E. E. Herrera-Valencia & Rey, 2014; Rey, 2008), el cual se basa en una membrana flexo-eléctrica adherida en medio de un capilar que esta inmersa en la parte superior por una fase viscoelástica respectivamente tratando de representar físicamente a las OHC. De esta manera se utiliza un capilar de longitud  $z = 2L$  de radio  $r = a$ . La parte superior de capilar  $[L, 2L]$  se encuentra llena con una fase líquida viscoelástica de constantes materiales  $\{\eta_t, \lambda_t\}$ , de la misma manera la parte inferior del capilar  $[0, L]$  se encuentra llena con otra fase líquida viscoelástica con constantes materiales  $\{\eta_b, \lambda_b\}$ , las densidades de las fases son  $\{\rho_t, \rho_b\}$  respectivamente. Los subíndices  $t, b$  se refieren a la región superior ( $T_{op}$ ) y a la región inferior ( $Bottom$ ) respectivamente. En medio del capilar ( $z = L$ ), se encuentra adherida una membrana flexo-eléctrica circular, es decir una membrana que interacciona con el sistema mediante la aplicación de un campo eléctrico produciéndose en ella una deformación en forma de domo esférico y oscila en torno a una posición de equilibrio (Abou-Dakka et al., 2012; E. E. Herrera-Valencia & Rey, 2014; Rey, 2008)

Las siguientes suposiciones físicas son necesarias para el modelado de este problema:

- i. Los efectos inerciales son despreciables, i.e. el sistema opera bajo número de Reynolds pequeño,  $Re \ll 1$ .
- ii. Los efectos gravitacionales son despreciables en comparación con el gradiente de presión inducido por el movimiento de la membrana debido al campo eléctrico.
- iii. La presión en la parte superior e inferior es la misma, i.e.  $P(z = 0) = P_0$ ;  $P(z = 2L) = P_0$ .

- iv. El flujo y la reología del sistema pueden ser descritos mediante el modelo viscoelástico de Jeffreys, i.e. las deformaciones en el fluido son bajas (viscoelasticidad lineal).
- v. Simetría cilíndrica, i.e. no existe dependencia de ningún atributo o variable dinámica con la coordenada angular.
- vi. La rapidez de evolución de la curvatura promedio de la membrana induce un flujo volumétrico.
- vii. El flujo volumétrico es generado por una diferencia de presiones en la parte superior e inferior de la membrana flexo-eléctrica.

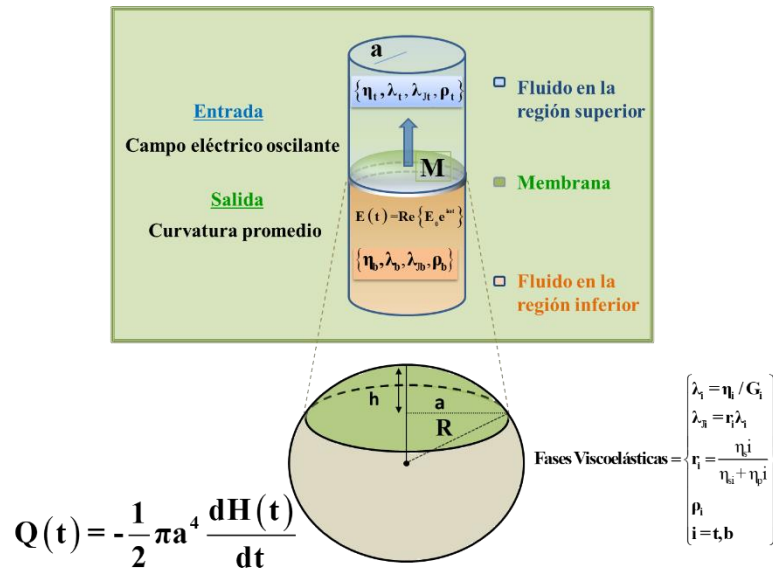


Figura 7 Geometría esquemática del sistema

En la *Figura 7* se presenta el sistema a modelar, un capilar de radio de radio  $r = a$  y de longitud  $z = 2L$  con la membrana flexoeléctrica inmersa. El campo eléctrico  $E$  que se aplica en la fase inferior i.e.  $z = 0$ , distorsiona la membrana y la evolución de la membrana con con el tiempo, induce un flujo volumétrico por la transferencia de momento a las fases viscoelásticas caracterizadas por el modelo constitutivo de



Jeffreys. con propiedades materiales: Domo superior  $\{\eta_t, \lambda_t, \eta_b, \lambda_b\}$  y densidades  $\{\rho_t, \rho_b\}$ .

### 3.2 Ecuaciones básicas

Las ecuaciones que se emplean para resolver este problema se basan en la conservación de la materia y la segunda ley de Newton aplicada a un medio continuo. La ecuación de continuidad en termino de operadores vectoriales, toma la forma:

$$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\alpha \mathbf{v}) = 0; \alpha = \{t, b\} \quad 3.1$$

en donde  $\rho$  es la densidad de las fases viscoelásticas,  $\mathbf{v}$  es el vector velocidad,  $\nabla$  en el operador espacial nabla. Nótese que el producto  $\rho \mathbf{v}$  tiene unidades de flux asociada a la cantidad de movimiento. El balance de fuerzas se puede escribir en términos de una ecuación de transporte.

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_\alpha \mathbf{v}) = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho_\alpha \mathbf{g}; \alpha = \{t, b\} \quad 3.2$$

El tensor de esfuerzos totales dado por la Ec. (3.3) es la suma de una contribución debido a la presión termodinámica,  $\mathbf{I}$  es el tensor unitario,  $\otimes$  es el producto diádico entre tensores de orden uno y  $\boldsymbol{\sigma}$  es el tensor de esfuerzos viscosos.

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma}; \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 3.3$$

Es importante resaltar que el tensor de esfuerzos es de naturaleza viscoelástica. La ecuación reológica que caracteriza las fases viscoelásticas es el modelo de Oldroyd-B de tres constantes materiales, i.e.

$$\boldsymbol{\sigma} + \lambda_\alpha \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = 2\eta_\alpha \left( \mathbf{D} + \lambda_{J\alpha} \overset{\nabla}{\mathbf{D}} \right); \alpha = \{t, p\} \quad 3.4$$



en donde las derivadas convectivas superiores de los tensores de esfuerzo y rapidez de deformación  $\left\{ \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}, \overset{\nabla}{\mathbf{D}} \right\}$ , se definen matemáticamente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} &= \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\sigma} - \left\{ \nabla \mathbf{v}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{v} \right\} \\ \overset{\nabla}{\mathbf{D}} &= \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{D} - \left\{ \nabla \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \nabla \mathbf{v} \right\} \end{aligned} \quad 3.5(a,b)$$

Los operadores convectivos superiores describen los cambios de los tensores esfuerzo y rapidez de deformación con respecto al tiempo y al espacio en la dirección de la velocidad y los términos no lineales cuadráticos. El tiempo de retardo en el modelo Oldroyd-B se define como:

$$\lambda_{J\alpha} = \left( \frac{\eta_{s\alpha}}{\eta_{s\alpha} + \eta_{p\alpha}} \right) \lambda_{\alpha}$$

Es decir, el tiempo de retardo  $\lambda_{J\alpha}$  es un múltiplo del de Maxwell  $\lambda_{\alpha}$  y el factor  $\eta_{s\alpha} / (\eta_{s\alpha} + \eta_{p\alpha})$  es un factor menor a uno, y es un cociente que relaciona la viscosidad del solvente entre la viscosidad total, en cada una de las fases líquidas viscoelásticas. En el régimen de viscoelasticidad lineal (bajas deformaciones),

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma} + \lambda_{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\sigma} = 2\eta_{\alpha} \left( \mathbf{D} + \lambda_{J\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} \right); \alpha = \{t, b\}} \quad (3.6)$$

La dinámica lineal de la membrana es descrita mediante un balance de fuerzas entre las fuerzas eléctricas, la diferencia de presiones en la membrana flexo-eléctrica y la fuerza restauradora asociada con la elasticidad de la membrana, la ecuación fundamental puede ser descrita de la siguiente manera (Abou-Dakka et al., 2012; E. E. Herrera-Valencia & Rey, 2014; Rey, 2008) :

$$\mathbf{F}_E = \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_{EM}$$



$$(C_f \mathfrak{S})E(t) = \Delta p(z=L, t) + (2\gamma_0 + (2k_c + \bar{k}_c) \mathfrak{S})H(t) = \Delta p(z=L, t) + 4MLH(t) \quad 3.7$$

La Ec. 3.7 es un balance de fuerzas entre la fuerza eléctrica, la fuerza de bulto debido a la disipación y la fuerza elástica del sistema basada en la recuperación de la membrana y la elasticidad que presentan las fases viscoelásticas, el factor geométrico indica el área deformada debido al campo eléctrico aplicado en la dirección axial de la geometría mostrada en la *Figura 7*. Nótese que en la Ec. 3.7 se redefinió la elasticidad de la membrana como

$$4LM = 2\gamma_0 + (2k_c + \bar{k}_c) \mathfrak{S} \quad 3.8$$

la fuerza eléctrica motriz en el sistema  $\mathbf{F}_E$  se puede escribir como:

$$\mathbf{F}_E = (C_f \mathfrak{S})\mathbf{E} = C_f \left( \frac{8}{a^2} \right) \mathbf{E} \quad 3.9$$

es directamente proporcional al campo eléctrico aplicado y a un coeficiente  $C_f$  el cual está asociado a las propiedades eléctricas del sistema (Abou-Dakka et al., 2012; E. E. Herrera-Valencia & Rey, 2014; Rey, 2008). Para que la Ec. 3.7 pueda ser utilizada para relacionar la deformación de la membrana con el campo eléctrico aplicado, es necesario conocer la diferencia de presiones en la membrana i.e.  $\Delta P(z=L)$ , para esto se aplica un balance de fuerzas entre la parte superior e inferior de la membrana.

**Balance en la parte superior del capilar:**

$$p_t(\xi = 2L, t) - p_t(\xi = z, t) = p_0 - p_t(\xi = z, t) = \left( \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \right) \sigma_{rz}^t - \rho_t \frac{\partial v_z(r, t)}{\partial t} \right) (2L - z) \quad 3.10$$

**Balance en la parte inferior del capilar:**

$$p_b(\xi = z, t) - p_b(\xi = 0, t) = p_b(\xi = z, t) - p_0 = \left( \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \right) \sigma_{rz}^b - \rho_b \frac{\partial v_z(r, t)}{\partial t} \right) z \quad 3.11$$



la diferencia de presión en  $z = L$ ,

$$\frac{\Delta p(z=L,t)}{L} = \frac{p_b(\xi=L,t) - p_t(\xi=L,t)}{L} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \right) \sigma_{rz} - (\rho_t + \rho_b) \frac{\partial v_z(r,t)}{\partial t} \quad 3.12$$

el esfuerzo total  $\sigma_{rz}$  es la suma de los esfuerzos en las dos fases viscoelásticas:

$$\sigma_{rz} = \sigma_{rz}^{(t)} + \sigma_{rz}^{(b)} = (\eta_t(t) + \eta_b(t)) \frac{\partial v_z(r,t)}{\partial r} = \eta(t) \frac{\partial v_z(r,t)}{\partial r} \quad 3.13$$

en donde el esfuerzo total, este dado por la siguiente expresión:

$$\eta(\partial_t) = (\eta_t + \eta_b)(\partial_t) = \eta_t(\partial_t) + \eta_b(\partial_t) \quad 3.14$$

en donde el operador temporal  $\partial_t$  está definido como la derivada parcial con respecto al tiempo, i.e.,  $\partial_t = \partial / \partial t$ . La forma del operador viscosidad definido en la Ec. 3.14., depende de la naturaleza reológica de las fases líquidas, la forma matemática que se empleará en esta tesis será determinada por el modelo viscoelástico lineal de Jeffreys.

Al sustituir las Ecs. (3.12-3.14), con la ecuación de forma de la membrana, se tiene lo siguiente:

$$\left\{ \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \right) \frac{\partial}{\partial r} + \beta^2 \right\} v_z(r,t) = \frac{(c_f \mathfrak{I} / L) E(t) - 4MH(t)}{\eta(\partial_t)} \quad 3.15$$

$$\beta^2 = - \frac{\Sigma \rho}{\eta(\partial_t)} \partial_t \quad 3.16$$

El parámetro  $\beta$  es el inverso de una longitud característica, la cual es una combinación de la densidad total, el operador temporal  $\partial_t$  relacionado con la inercia del sistema y la fluidez inverso de la viscosidad. La Ec. 3.15 es lineal no homogénea, la cual se resuelve separando la solución en una homogénea y otra particular. La Ec. 3.15 es una ecuación paramétrica de Bessel la cual, puede ser descrita en



términos de una combinación lineal de funciones de Bessel, por lo que se tiene lo siguiente:

$$v_{z_H}(r,t) = C_1 J_0(\beta r) + C_2 Y_0(\beta r) \quad 3.17$$

la solución particular toma la forma:

$$v_{z_p}(r,t) = \frac{(c_f \mathfrak{I} / L) E(t) - 4MH(t)}{\beta^2 \eta (\partial_t)} \quad 3.18$$

la solución general de la Ec. 3.15 toma la forma:

$$v_z(r,t) = v_{z_H}(r,t) + v_{z_p}(r,t) \quad 3.19$$

utilizando las expresiones para las soluciones homogénea y particular obtenemos la Ec. 3.20

$$v_z(r,t) = C_1 J_0(\beta r) + C_2 Y_0(\beta r) - \frac{(c_f \mathfrak{I} / L) E(t) - 4MH(t)}{\Sigma \rho \partial_t} \quad 3.20$$

Con el fin de calcular las constantes C1, y C2 se proponen las siguientes condiciones de frontera: (i) La velocidad axial en la pared del capilar es cero, es decir, no hay deslizamiento, y (ii) la solución debe de permanecer acotada en todo el espacio, así que, en particular, cuando la coordenada radial es cero, i.e.  $r=0$  la velocidad debe ser finita:  $|V_z(r=0,t)| \leq M$ , así que la solución general es:

$$C_1 = \frac{(c_f \mathfrak{I} / L) E(t) - 4MH(t)}{\Sigma \rho \partial_t J_0(\beta a)} \quad 3.21$$

por lo que,



$$v_z(r,t) = -\frac{(c_f \mathfrak{I}/L)E(t) - 4MH(t)}{\Sigma\rho\partial_t} \left( 1 - \frac{J_0(\beta r)}{J_0(\beta a)} \right) \quad 3.22$$

el flujo volumétrico, se puede calcular a través de una doble integral, por lo que se tiene lo siguiente:

$$v_z(r,t) = -\frac{(c_f \mathfrak{I}/L)E(t) - 4MH(t)}{\Sigma\rho\partial_t} \left( 1 - \frac{J_0(\beta r)}{J_0(\beta a)} \right) \quad 3.23$$

el flujo volumétrico toma la forma:

$$Q = -\pi \int_0^a v_z(r,t) r dr = \pi \frac{(c_f \mathfrak{I}/L)E(t) - 4MH(t)}{\Sigma\rho\partial_t} \int_0^a \left( 1 - \frac{J_0(\beta r)}{J_0(\beta a)} \right) r dr \quad 3.24$$

el flujo volumétrico es calculado usando las propiedades de las funciones de Bessel, por lo que se tiene lo siguiente:

$$Q(t) = -\frac{\pi a^4}{8\Pi(\partial_t)} \left( (c_f \mathfrak{I}/L)E(t) - 4MH(t) \right); \quad \Pi(\partial_t) = \frac{a^2 \Sigma\rho\partial_t / 8}{1 - 2 \frac{J_1(\beta a)/\beta a}{J_0(\beta a)}} \quad 3.25$$

en la Ec. 3.25 se ha utilizado la siguiente propiedad de las funciones de Bessel, así que:  $x^{n+1}J_n(x) = d[J_{n+1}(x)]/dx$  ;  $x = \beta r$  , y  $\Pi(\partial_t)$  tiene unidades de viscosidad y puede ser visualizado como una extensión de una función viscosidad en el régimen de viscoelasticidad lineal modificada por la inercia del sistema. A partir de la definición de flujo volumétrico inducido por la rapidez con la que la membrana propaga su momento en las fases líquidas, se tiene la siguiente relación (diríjase al apéndice A para más detalles):





$$Q(t) = -\pi a^4 \frac{dH}{dt} \quad 3.26$$

al sustituir la Ec. 3.26 en la Ec. 3.25, se tiene lo siguiente:

$$\boxed{H(t) = \frac{c_f \mathfrak{I} / 4L}{\Pi(\partial_t) \partial_t + M} E(t)} \quad 3.27$$

La Ec. 3.27 es una ecuación diferencial no lineal que describe los cambios de la curvatura promedio  $H(t)$  en función del campo eléctrico aplicado. Nótese que la relación entre la variable de entrada (Campo eléctrico) y de salida (Curvatura Promedio), se puede representar en términos de una función de transferencia compleja. La Ec. 3.27 es la más importante de este trabajo y es punto de partida en el análisis presente. Nótese que la Ec. 3.27 contiene varios casos particulares los cuales pueden ser resumidos en la Tabla 1 de este capítulo.

Si el operador  $\Pi(\partial_t)$  se desarrolla en serie de potencias por la definición de las funciones de Bessel se obtiene la siguiente expresión

$$\Pi(\partial_t) = \frac{a^2 \Sigma \rho \partial_t / 8}{1 - 2 \frac{J_1(\beta a) / \beta a}{J_0(\beta a)}} = \frac{a^2 \Sigma \rho \partial_t / 8}{-(\beta a)^2 / 8 - (\beta a)^4 / 48 - 11(\beta a)^6 / 3072 + O((\beta a)^6)} \quad 3.28$$

despreciando los términos pequeños en el parámetro  $\beta \ll 1$ , el operador asociado a la inercia y a la viscosidad se expresa como:

$$\Pi(\partial_t) = \frac{a^2 \Sigma \rho \partial_t / 8}{1 - 2 \frac{J_1(\beta a) / \beta a}{J_0(\beta a)}} \cong \eta(\partial_t) \quad 3.29$$

Dependiendo de la naturaleza reológica del sistema, el operador viscosidad total, puede ser descrito por cualquiera de la **Tabla 1**. En particular, en este trabajo se estudiará el modelo de Jeffreys el cual, se puede expresar como la suma de dos



contribuciones, una asociada al solvente y la otra a la solución viscoelástica del sistema.

**Tabla 1 Operador viscosidad para diferentes modelos reológicos**

	<b>Inercia</b>	<b>Operador viscosidad</b>	<b>Aproximación Matemática</b>
Fluido de Euler	$\Sigma\rho\partial_t v_z = 0$	$\eta(\partial_t) = \eta_t + \eta_b \rightarrow 0$	Ecuación algebraica
Fluido de Newton	$\Sigma\rho\partial_t v_z = 0$	$\eta(\partial_t) = \eta_t + \eta_b$	Ecuación diferencial de primer orden
Fluido de Maxwell	$\Sigma\rho\partial_t v_z = 0$	$\eta(\partial_t) = \frac{\eta_t}{1 + \lambda_t \partial_t} + \frac{\eta_b}{1 + \lambda_b \partial_t}$	Ecuación diferencial de segundo orden
Fluido de Jeffreys	$\Sigma\rho\partial_t v_z = 0$	$\eta(\partial_t) = \frac{\eta_t}{1 + \lambda_t \partial_t} + \frac{\eta_b}{1 + \lambda_b \partial_b}$	Ecuación diferencial de tercer orden
Fluido de Burgers	$\Sigma\rho\partial_t v_z = 0$	$\eta(\partial_t) = \eta_t \frac{1 + \lambda_{jt} \partial_t}{1 + \lambda_t \partial_t + \beta_t \partial_t^2} + \eta_b \frac{1 + \lambda_{jb} \partial_t}{1 + \lambda_b \partial_t + \beta_b \partial_t^2}$	Ecuación diferencial de cuarto orden
Fluido viscoelástico o con inercia	$\Sigma\rho\partial_t v_z \neq 0$	$\Pi(\partial_t) = \frac{a^2 \Sigma\rho \partial_t / 8}{1 - 2 \frac{J_1(\beta a) / \beta a}{J_0(\beta a)}}; \beta^2 = -\frac{\Sigma\rho}{\eta(\partial_t)} \partial_t$	Ecuación diferencial no lineal

### 3.3 Potencia disipada

En esta investigación en particular, el punto clave es la potencia disipada por la transferencia de momento de la membrana hacia las fases líquidas viscoelásticas, inducida por la fuerza motriz asociada al campo eléctrico. La potencia disipada se define como el promedio del producto entre el campo eléctrico y el flujo volumétrico, así que, si multiplicamos la ecuación de forma de la membrana por el flujo volumétrico, se tienen la siguiente expresión

$$(C_f \mathfrak{Z})E(t)Q = \Delta p(z = L, t)Q + 4MLH(t)Q \tag{3.30}$$



integrando sobre un periodo de tiempo se tiene lo siguiente

$$E_{\text{fuerza impulsora}}(\omega) = E_{\text{fluido}}(\omega) + E_{\text{membrana}}(\omega) \quad 3.31$$

Las contribuciones energéticas se han definido de la siguiente manera, (i) la primera es la potencia disipada debido a la fuerza motriz, (ii) la segunda es debida al cambio de presión y (iii) la tercera al flujo volumétrico multiplicado por la curvatura de la membrana, que no es otra cosa que la fuerza de restauración de la membrana.

$$P(\omega) = c_f \Im \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} E(t)Q(t)dt \quad 3.32$$

$$P_{\text{FLUIDO}}(\omega) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \Delta p(z=L,t)Q(t)dt \quad 3.33$$

$$E_{\text{MEMBRANA}}(\omega) = 4ML \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} H(t)Q(t)dt \quad 3.34$$

La Ec. 34 puede ser integrada asumiendo que el flujo volumétrico es el negativo de la evolución de la membrana, así que:

$$E_{\text{MEMBRANA}}(\omega) = -\frac{1}{2} \pi a^4 4ML \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} H(t) \frac{dH(t)}{dt} dt \quad (3.35)$$

Integrando obtenemos:

$$E_{\text{MEMBRANA}}(\omega) = -\frac{1}{4} \pi a^4 4ML \frac{\omega}{2\pi} \{H^2(2\pi/\omega) - H^2(0)\} \quad (3.36)$$

La potencia desarrollada por el fluido puede ser calculada mediante la diferencia de la fuerza motriz y la elástica del material. Las Ecs. (3.32- 3.34) fueron estudiadas en profundidad por (Abou-Dakka et al., 2012; E. E. Herrera-Valencia & Rey, 2014) y por esta razón nuestro interés se centra en la potencia disipada debido al movimiento de la membrana en las fases viscoelásticas en el sistema y las propiedades materiales que nos permiten obtener las curvas resonantes que son de interés biológico y su aplicación a las células ciliadas externas del oído interno.



### 3.4 Modelo de tercer orden: Ecuación constitutiva de Jeffreys sin inercia

El modelo de Jeffreys es uno de los modelos más sencillos viscoelásticos que acopla la contribución del solvente polímero respectivamente. La primera de ellas se modela con Newton y la segunda con Maxwell. Para el modelo Jeffreys el operador  $\eta(\partial_t)$  (Ec. 3.14) toma la forma

$$\eta(\partial_t) = \frac{\eta_t + \eta_b + (\eta_t \lambda_b + \eta_b \lambda_t + \eta_t \lambda_{Jt} + \eta_b \lambda_{Jb}) \partial_t + (\eta_t \lambda_{Jt} \lambda_b + \eta_b \lambda_{Jb} \lambda_t) \partial_t^2}{1 + (\lambda_t + \lambda_b) \partial_t + \lambda_t \lambda_b \partial_t^2} \quad 3.37$$

la Ec. 3.35 es el operador de Jeffreys para las dos fases viscoelásticas del sistema considerado.

Aplicando este operador en la ecuación en el balance de fuerzas de la membrana y siguiendo los pasos dados en el apéndice B y C obtenemos

$$b_3 \frac{d^3 H(t)}{dt^3} + b_2 \frac{d^2 H(t)}{dt^2} + b_1 \frac{dH(t)}{dt} + b_0 H(t) = a_2 \frac{d^2 E(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dE(t)}{dt} + a_0 E(t) \quad 3.38$$

donde los coeficientes están dados por las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} b_3 &= \eta_{0t} \lambda_b \lambda_{Jt} + \eta_{0b} \lambda_t \lambda_{Jb} = \lambda_t \lambda_b (G_t \lambda_{Jt} + G_b \lambda_{Jb}) \\ b_2 &= \eta_{0t} (\lambda_b + \lambda_{Jt}) + \eta_{0b} (\lambda_t + \lambda_{Jb}) + M \lambda_t \lambda_b = \\ &\quad \lambda_t \lambda_b (G_t + G_b + M) + \lambda_t G_t \lambda_{Jt} + \lambda_b G_b \lambda_{Jb} \\ b_1 &= (\eta_{0t} + \eta_{0b}) + M (\lambda_t + \lambda_b) = \\ &\quad \lambda_t G_t + \lambda_b G_b + M (\lambda_t + \lambda_b) \\ b_0 &= \frac{2\gamma_0 + (2k_c + \bar{k}_c) \mathfrak{F}}{4L} = M \\ a_2 &= \lambda_t \lambda_b a_0 \\ a_1 &= (\lambda_t + \lambda_b) a_0 \\ a_0 &= \frac{C_f \mathfrak{F}}{4L} \end{aligned} \quad 3.39$$

La evolución de la curvatura promedio con el tiempo responde a un balance entre los mecanismos de retardo, inerciales, viscosos y elásticos de la membrana asociados a los coeficientes de las derivadas de la curvatura promedio



respectivamente. El modelo membrano-dinámico dado por la expresión anterior, contiene propiedades materiales las cuales son descritas a continuación: (i) propiedades viscoelásticas del material  $\{\eta_b, \lambda_b, \lambda_{Jb}, \eta_t, \lambda_t, \lambda_{Jt}\}$ ; (ii) propiedades interfaciales y elásticas de la membrana, (iii) geométricas del sistema  $\{a, L; \mathfrak{F}\}$ ; and (iv) propiedades flexo-eléctricas  $\{C_f, E_0\}$ . Los módulos elásticos de las fases líquidas viscoelásticas se definen como el cociente entre las viscosidades y los tiempos viscoelásticos de Maxwell:  $G_i = \eta_i / \lambda_i$ ;  $i = t, b$ . La elasticidad de la membrana  $M$ , se ve reflejada en los coeficientes  $\{b_0, b_1, b_2, b_3\}$ . Todos estos parámetros pueden ser estimados mediante experimentos reológicos en estado estacionario y no estacionario (Abou-Dakka et al., 2012; E. E. Herrera-Valencia & Rey, 2014). El modelo antes descrito, enfatiza un sistema electro-reológico con tres fases, dos líquidas (viscoelásticas) y la otra sólida asociada a la membrana. Un aspecto importante, es que la única propiedad importante de la membrana es inherente al cambio de su curvatura por efecto del campo eléctrico (fuerza motriz), cualquier atributo diferente a esta, no es tomada en cuenta en el modelo (porosidad, espesor, propiedades mecánicas como rigidez, tensión, etc.) y queda fuera del enfoque y los alcances de este proyecto de investigación. Los casos en que las fases líquidas son de naturaleza newtoniana o viscoelástica (Maxwell) fueron desarrollados mediante una metodología similar y fueron discutidos ampliamente (Abou-Dakka et al., 2012; E. E. Herrera-Valencia & Rey, 2014; Rey, 2008; Rey, Servio, et al., 2014). En este trabajo nuestro interés se centrará en el modelo de tercer orden, obtenido con el operador viscosidad temporal de Jeffreys.



### 3.5 Modelo electro-reológico adimensional

#### 3.5.1 Mecanismos inerciales: $Ma_r \neq 0$

Los mecanismos inerciales están inmersos en el operador  $\bar{\Pi}(\partial_t)$ , en el que se incluyen en el término del número de  $Ma_r$  (un numero de Mach reducido asociado a una relación de velocidad con respecto al tiempo de relajación y otra velocidad con respecto a la inercia y los mecanismos elásticos de los fluidos) mediante la expresión

$$\bar{R}(\partial_t) = \frac{\bar{H}}{E} = \frac{a_0^*}{\bar{\Pi}(\partial_t)\partial_t + k(1-k)^{-1}} \quad 3.40$$

donde el operador esta dado por la siguiente expresión

$$\bar{\Pi}(\partial_t) = \frac{Ma_r^2 \partial_t / 8}{1 - 2 \frac{J_1(\bar{\beta}) / \bar{\beta}}{J_0(\bar{\beta})}} \quad 3.41$$

A partir de la función de transferencia se puede calcular la potencia disipada mediante la parte real de la Ec. (3.40). En la Ec. (3.41) se han definido los siguientes grupos adimensionales:

$$Ma_r = \frac{Ma_{ve}}{Ma_{ei}} = \frac{(a / \Sigma_\lambda) / v_s}{\sqrt{\Sigma_G / \Sigma_\rho} / v_s} = \begin{cases} Ma_r \gg 1 \\ Ma_r = 1 \\ Ma_r \ll 1 \end{cases} \quad 3.42$$

El número adimensional  $Ma_r$ , se puede considerar como un número de Mach reducido. Nótese que este, está relacionado a los mecanismos inerciales y puede ser considerado como una velocidad reducida. El segundo número es  $a_0^*$  el cual se define de la siguiente manera:



$$a_0^* = \frac{ac_f \mathfrak{S} E_0 / 4L}{Gt + Gb} \quad 3.43$$

Este número relaciona los mecanismos flexo-eléctricos del material con viscoelasticidad de bulto en el sistema. Es claro que si  $a_0^*$  es mayor a uno, i.e.  $a_0^* \gg 1$  la fuerzas flexo-eléctricas dominan sobre las fuerzas elásticas dominan. Por otra parte, sí  $a_0^* \ll 1$ . Los mecanismos elásticos de bulto asociados a los fluidos dominan sobre los flexo-eléctricos. El tercer número es un cociente de longitudes características, las cuales relacionan una longitud referente a la geometría del sistema y la otra a los mecanismos inerciales a través del número de Mach, i.e.

$$\bar{\beta} = \beta a = \sqrt{-\frac{\Sigma \rho a^2}{\eta(\partial_t)} \partial_t} \quad 3.44$$

A partir de estos resultados se obtendrá la potencia disipada por efecto de la transferencia de momento de la membrana flexo-eléctrica a las fases líquidas viscoelásticas. Por último, el número adimensional  $\bar{M}$  el cual es un cociente de mecanismos elásticos:

$$\bar{M} = \frac{(2\gamma_0 + (2k_c + \bar{k}_c)\mathfrak{S})/4L}{G_t + G_b} = \frac{k}{1-k} \quad \} \quad 3.45$$

con el fin de analizar el caso en donde la elasticidad de la membrana es muy grande, i.e.  $\bar{M} \gg 1$ , se propone el siguiente cambio de variable:

$$\bar{M}^{-1} = \frac{1-k}{k} \quad 3.46$$

Cuando la elasticidad de la membrana es muy grande, i.e.  $\bar{M} \rightarrow \infty$ ; la relación elástica  $k \rightarrow 1$ , por lo que computacionalmente el radio elástico esta acotado entre un valor muy pequeño y uno, i.e.  $k \in (0,1)$ .



## Potencia disipada

La potencia disipada es una consecuencia de la oscilación de la membrana flexo-eléctrica que induce la transferencia de momento en las fases líquidas viscoelásticas en el sistema. La curvatura de la membrana flexo-eléctrica responde a un campo eléctrico oscilatorio complejo,  $\bar{E}(\bar{t}, \bar{\omega}) = \text{Exp}(\bar{\omega}j\bar{t})$ . La transformada de Fourier del campo eléctrico es una función delta de Dirac,  $\bar{E}(\bar{\omega}) = \delta(\bar{\omega} - \bar{\omega}^*)$ , así que la curvatura de la membrana flexo-eléctrica se puede expresar como el producto de la función de transferencia y la función delta de Dirac:  $\bar{H}(\bar{\omega}) = R(\bar{\omega})\delta(\bar{\omega} - \bar{\omega}^*)$ . Finalmente tomando la anti-transformada de Fourier de la curvatura, se tiene lo siguiente:

$$\bar{H}(\bar{t}, \bar{\omega}) = \text{Re}[\bar{H}(\bar{t}, \bar{\omega})] + j\text{Im}[\bar{H}(\bar{t}, \bar{\omega})] = R(\bar{\omega})\text{Exp}(j\bar{\omega}\bar{t}) \quad 3.47$$

La curvatura es una función que depende del tiempo y de la frecuencia. Las propiedades flexo-eléctricas y reológicas del material. La parte real de la ecuación anterior toma la forma:

$$\text{Re}[\bar{H}(\bar{t}, \bar{\omega})] = \text{Re}[R(\bar{\omega})]\text{Cos}(\bar{\omega}\bar{t}) + \text{Im}[R(\bar{\omega})]\text{Sin}(\bar{\omega}\bar{t}) \quad 3.48$$

Por razones físicas, solo la parte real será utilizada para los cálculos posteriores de la potencia disipada. El flujo volumétrico es una consecuencia del negativo de la rapidez de la oscilación de la membrana flexo-eléctrica en el medio, por lo que en forma adimensional se tiene lo siguiente:

$$\text{Re}[\bar{Q}(\bar{t}, \bar{\omega})] = -\frac{1}{2} \frac{d}{d\bar{t}} \text{Re}[\bar{H}(\bar{t}, \bar{\omega})] \quad 3.49$$

por lo tanto, la parte real del flujo volumétrico este dado por:

$$\text{Re}[\bar{Q}(\bar{t}, \bar{\omega})] = \frac{1}{2} \bar{\omega} \text{Re}[R(\bar{\omega})]\text{Sin}(\bar{\omega}\bar{t}) - \frac{1}{2} \bar{\omega} \text{Im}[R(\bar{\omega})]\text{Cos}(\bar{\omega}\bar{t}) \quad 3.50$$

la potencia promedio puede ser calculada de la siguiente manera:





$$\langle P(\omega) \rangle = -\frac{1}{2} c_f E_0 Q_0 \mathfrak{S} \frac{\bar{\omega}}{2\pi} \int_0^{2\pi/\bar{\omega}} \text{Re}[\bar{E}(t)] \frac{d}{dt} \text{Re}[\bar{H}(t)] dt \quad 3.51$$

sustituyendo la parte real del campo eléctrico multiplicada por la derivada temporal de la parte real de la curvatura promedio, se tiene lo siguiente:

$$\langle \bar{P}(\bar{\omega}) \rangle = \frac{1}{2} |\bar{\omega} \text{Im}[\bar{R}(\bar{\omega})] / 2| \quad 3.52$$

la potencia disipada adimensional, fue escalada con la potencia característica:  $P_c = c_f E_0 (\pi a^3 / \Sigma_\lambda) \mathfrak{S}$ . Los detalles de esta expresión se dan en el Apéndice A.

### Modelo sin inercia: $Ma \ll 1$

Considerando el caso en el que los mecanismos inerciales son menores uno, el producto del operador viscosidad, con el operador parcial temporal, se tiene lo siguiente:

$$\bar{\Pi}(\partial_t) = \frac{Ma_r^2 \partial_t / 8}{1 - 2 \frac{J_1(\bar{\beta}) / \bar{\beta}}{J_0(\bar{\beta})}} \cong \frac{Ma_r^2 \partial_t / 8}{-(\bar{\beta})^2 / 8} \cong \bar{\eta}(\partial_t) = \bar{\eta}_t(\partial_t) + \bar{\eta}_b(\partial_t) \quad 3.53$$

A número de Mach muy pequeños, el operador viscosidad/inercia reduce a la viscosidad total de las fases líquidas, i.e.  $\bar{\Pi}(\partial_t) \rightarrow \bar{\eta}(\partial_t)$ . Por lo que la función de transferencia adimensional toma la forma:

$$\frac{\bar{H}(\bar{t})}{\bar{E}(\bar{t})} = \frac{a_0^*}{\bar{\eta}(\partial_t) \partial_t + k(1-k)^{-1}} \quad 3.54$$

la función viscosidad para las dos fases es la suma de la viscosidad en el cilindro inferior y en el cilindro superior respectivamente.



$$\begin{aligned} \bar{\eta}(\partial_t) &= \bar{\eta}_t(\partial_t) + \bar{\eta}_b(\partial_t) \\ &= \frac{\bar{\eta}_t + \bar{\eta}_b + (\bar{\eta}_t \bar{\lambda}_b + \bar{\eta}_b \bar{\lambda}_t + \bar{\eta}_t \bar{\lambda}_{Jt} + \bar{\eta}_b \bar{\lambda}_{Jb}) \partial_t + (\bar{\eta}_t \bar{\lambda}_{Jt} \bar{\lambda}_b + \bar{\eta}_b \bar{\lambda}_{Jb} \bar{\lambda}_t) \partial_t^2}{1 + \partial_t + \bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b \partial_t^2} \end{aligned} \quad 3.55$$

al sustituir la viscosidad total en el sistema en la función de transferencia y realizar las operaciones correspondientes, se obtiene el modelo de tercer orden lineal de coeficientes constantes y que es punto de partida en la presente investigación. Partiendo del apéndice B obtenemos el modelo electro-reológico adimensional dado por la Ec. 3.36 sin incluir la inercia

$$\left( b_3^* \frac{d^3}{dt^3} + b_2^* \frac{d^2}{dt^2} + b_1^* \frac{d}{dt} + 1 \right) \bar{H}(\bar{t}) = a_0^* \left( \frac{1-k}{k} \right) \left( a_2^* \frac{d^2}{dt^2} + \frac{d}{dt} + 1 \right) \quad 3.56$$

donde los coeficientes de la Ec. 3.56 están dados en el apéndice B. La Ec. 3.56 contiene 6 números adimensionales  $\{k, a_0^*, \bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b, \Sigma_{\bar{\eta}}^-, \Sigma_{\bar{\eta}_t}^-, \Sigma_{\bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b}^-\}$  los cuales están asociados con los diferentes mecanismos del sistema.

- 1) El producto de los tiempos de relajación de las fases viscoelásticas,  $\bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b$ , se conoce como memoria del sistema y está relacionada con la simetría elástica del sistema, este producto está definido en un rango  $10^{-4} \leq \bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b \leq 1/4$  donde una memoria de  $10^{-4}$  nos indica el caso donde uno de los fluidos es débilmente elástico en comparación con el otro fluido (baja simetría ó asimetría), un valor de memoria de 1/4 significa que ambos fluidos tienen la misma elasticidad (alta simetría).
- 2) Viscosidad volumétrica o viscosidad total del sistema,  $\Sigma_{\bar{\eta}}^- = \bar{\eta}_t + \bar{\eta}_b$ , la cual involucra la viscosidad de los fluidos y la membrana flexo-eléctrica, este número adimensional depende de la memoria del sistema por lo tanto la viscosidad volumétrica se encuentra acotada i.e.  $\Sigma_{\bar{\eta}_{\min}}^-, \Sigma_{\bar{\eta}_{\max}}^-$  de acuerdo con esto la viscosidad volumétrica se encuentre entre  $\varepsilon = \Sigma_{\bar{\eta}_{\min}}^- \leq \Sigma_{\bar{\eta}}^- \leq \Sigma_{\bar{\eta}_{\max}}^- = 1$ .



- 3) Viscosidad volumétrica de retardo,  $\Sigma_{\bar{\eta}_j} = \bar{\eta}_{jt} + \bar{\eta}_{jb}$ , este mecanismo se encuentra asociado con los tiempos de los tiempos de relajación de **Jeffreys** o tiempos de retardo donde a diferencia de los tiempos de relajación adimensionales de Maxwell, estos no se encuentran acotados.
- 4) Viscosidad volumétrica de retardo ponderada con los tiempos de relajación de Maxwell,  $\Sigma_{\bar{\lambda}\bar{\eta}_j} = \bar{\lambda}_t \bar{\eta}_{jt} + \bar{\lambda}_b \bar{\eta}_{jb}$ .
- 5) La relación elástica adimensional es la relación de la elasticidad adimensional de la membrana y elasticidad total i.e.  $k = \bar{M} / (\bar{M} + \bar{G}_t + \bar{G}_b) = \bar{M} / (\bar{M} + 1)$ , este número adimensional se encuentra acotado,  $10^{-4} \leq k \leq 1$ , el valor límite de  $10^{-4}$  para la relación elástica indica que se tiene una membrana flexo-eléctrica suave por otro lado el valor límite de 1 significa que se trata de una membrana flexo-eléctrica rígida.

Estos números adimensionales son las que definen los coeficientes de la ecuación 3.56 los cuales están relacionados con los diferentes mecanismos de retardo, inercia y viscosos.

$$b_3^*(k, \bar{\lambda}_t, \bar{\lambda}_b, \Sigma_{\bar{\eta}_j}) = \frac{1-k}{k} \bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b \Sigma_{\bar{\eta}_j} \quad 3.57$$

$$b_2^*(k, \bar{\lambda}_t, \bar{\lambda}_b, \Sigma_{\bar{\lambda}\bar{\eta}_j}) = \frac{\bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b}{k} + \left( \frac{1-k}{k} \right) \Sigma_{\bar{\lambda}\bar{\eta}_j} \quad 3.58$$

$$b_1^*(k, \Sigma_{\bar{\eta}_j}) = 1 + \left( \frac{1-k}{k} \right) \Sigma_{\bar{\eta}_j} \quad 3.59$$

El análisis cuidadoso de las ecuaciones anteriores nos conduce a que los mecanismos viscosos son de mayor orden de magnitud seguidos de los mecanismos inerciales de memoria y retardo.

$$\underbrace{b_3^*(k, \bar{\lambda}_t, \bar{\lambda}_b, \Sigma_{\bar{\eta}_j})}_{\text{Retardo}} < \underbrace{kb_2^* - (1-k) \Sigma_{\bar{\lambda}\bar{\eta}_j}}_{\text{Memoria}} = \bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b = a_2^* < \underbrace{b_2^*(k, \bar{\lambda}_t, \bar{\lambda}_b, \Sigma_{\bar{\lambda}\bar{\eta}_j})}_{\text{Inercia}} < \underbrace{b_1^*(k, \Sigma_{\bar{\eta}_j})}_{\text{Viscosos}} \quad 3.60$$



El modelo presentado en este trabajo es una extensión del modelo presentado por (Abou-Dakka et al., 2012; E. E. Herrera-Valencia & Rey, 2014; Rey, 2008), un caso límite de este modelo se presenta cuando los tiempos de retardo de **Jeffreys** son nulos i.e.  $\bar{\lambda}_{jt} = \bar{\lambda}_{jb} = 0$ , en este caso el modelo del presente trabajo se reduce al modelo el cual es descrito por una ecuación diferencial simétrica de segundo orden el cual no incluye mecanismos de retardo.

### 3.6 Respuesta mecánica

Para obtener la respuesta mecánica del dispositivo electro-reológico, se necesita definir una función para el campo eléctrico y obtener la respuesta de la curvatura promedio.

$$\text{Re} \left[ \bar{E}(\bar{t}, \bar{\omega}) \right] = \text{Re} \text{Exp} \left( j\bar{\omega}\bar{t} \right) \quad 3.61$$

La Ec. (3.36) se puede poner en la siguiente forma:

$$\frac{\bar{H}(\bar{t})}{\bar{E}(\bar{t})} = a_0^* \left( \frac{1-k}{k} \right) \frac{a_2^* \frac{d^2}{dt^2} + \frac{d}{dt} + 1}{b_3^* \frac{d^3}{dt^3} + b_2^* \frac{d^2}{dt^2} + b_1^* \frac{d}{dt} + 1} \quad 3.62$$

tomando la transformada de Fourier de la Ec. (3.56) se tiene lo siguiente:

$$R(\bar{\omega}) = \frac{\bar{H}(\bar{\omega})}{\bar{E}(\bar{\omega})} = a_0^* \left( \frac{1-k}{k} \right) \frac{a_2^* (i\bar{\omega})^2 + (i\bar{\omega}) + 1}{b_3^* (i\bar{\omega})^3 + b_2^* (i\bar{\omega})^2 + b_1^* (i\bar{\omega}) + 1} \quad 3.63$$

La expresión real para la curvatura promedio ya fue calculado anteriormente, y se puede expresar como:

$$\bar{H}(\bar{t}) = \text{Re} \left| \bar{R} \right| \text{Cos}(\bar{\omega}\bar{t}) + \text{Im} \left| \bar{R} \right| \text{Sin}(\bar{\omega}\bar{t}) = \bar{H}_{oi}(\bar{\omega}) \text{Cos}(\bar{\omega}\bar{t}) + \bar{H}_{io}(\bar{\omega}) \text{Sin}(\bar{\omega}\bar{t}) \quad 3.64$$

en donde las partes real e imaginaria de la función de transferencia en ausencia de mecanismos inerciales o  $Ma_r$  pequeños, se puede obtener tomando el límite de la función de transferencia de:



$$\begin{aligned} \text{Lim}_{Ma_r \rightarrow 0} \text{Re}|\mathbf{R}| &= \bar{H}_{io} \left( \bar{\omega}; b_1^*, b_2^*, b_3^*, \Sigma_{\bar{\lambda}_{\eta_j}}, k \right) \\ &= \frac{1 + \left( b_1^* - (1+k)b_2^* + (1-k)\Sigma_{\bar{\lambda}_{\eta_j}} \right) \bar{\omega}^2 + \left( kb_2^* - (1-k)\Sigma_{\bar{\lambda}_{\eta_j}} \right) b_2^* - b_3^* \bar{\omega}^4}{\left( 1 - b_2^* \bar{\omega}^2 \right)^2 + \bar{\omega}^2 \left( b_1^* - b_3^* \bar{\omega}^2 \right)^2} \end{aligned} \quad 3.65$$

$$\begin{aligned} \text{Lim}_{Ma_r \rightarrow 0} \text{Im}|\mathbf{R}| &= \bar{H}_{oi} \left( \bar{\omega}; b_1^*, b_2^*, b_3^*, \Sigma_{\bar{\lambda}_{\eta_j}}, k \right) \\ &= \frac{\left( b_1^* - 1 \right) \bar{\omega} + \left( 1 - kb_1^* \right) b_2^* + (1-k)\Sigma_{\bar{\lambda}_{\eta_j}} b_1^* - b_3^* \bar{\omega}^3 + \left( kb_2^* - (1-k)\Sigma_{\bar{\lambda}_{\eta_j}} \right) b_3^* \bar{\omega}^5}{\left( 1 - b_2^* \bar{\omega}^2 \right)^2 + \bar{\omega}^2 \left( b_1^* - b_3^* \bar{\omega}^2 \right)^2} \end{aligned} \quad 3.66$$

podemos observar de las ecuaciones anteriores que la curvatura en fase con el campo eléctrico depende de una función par de la frecuencia adimensional y se espera que tenga un máximo, contrario a la dependencia de la curvatura fuera de fase con una función impar de la frecuencia. Las cantidades de interés para la aplicación de este modelo a las células ciliadas externas son, la potencia disipada por la membrana hacia las fases viscoelásticas  $\bar{P}(\bar{\omega}, t)$  y la energía almacenada por la membrana  $\bar{E}_M(\bar{\omega})$ , donde la suma de estas energías debe ser, por la primera ley de la termodinámica, igual a la energía proporcionada por la aplicación del campo eléctrico (Abou-Dakka et al., 2012; E. E. Herrera-Valencia & Rey, 2014). La potencia está en función de la curvatura que se encuentra fuera de fase con el campo eléctrico, es decir

$$\langle \bar{P}(\bar{\omega}) \rangle = \frac{1}{2} \left| \bar{\omega} \text{Im}[\bar{\mathbf{R}}(\bar{\omega})] / 2 \right| = \frac{1}{2} \bar{\omega} \bar{H}_{oi} \quad 3.67$$

el módulo fuera de fase  $\bar{H}_{oi}$  esta dado por la Ec. 3.66. Mediante un análisis de orden de magnitud de la función potencia se encuentra que el orden del término  $\bar{\omega}^{-6}$  son muy pequeños de modo que

$$\overbrace{k(1-k)\bar{\omega}^2}^{O(10^{-5})} + \overbrace{\Sigma_{\bar{\eta}} k(1-k)(1-\bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b) \bar{\omega}^4}^{O(10^{-10})} \gg \overbrace{k(1-k)\Sigma_{\bar{\eta}} (\bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b)^2 \bar{\omega}^6}^{O(10^{-20})} \quad 3.67$$



bajo este argumento la potencia queda definida de la forma por la Ec. 3.67, por el modelo de Jeffreys toma la sencilla relación:

$$\bar{P}_J(\bar{\omega}) = \frac{1}{2} \frac{(b_1^* - 1)\bar{\omega}^2 + ((1 - kb_1^*)b_2^* + (1 - k)\Sigma_{\frac{\bar{\omega}}{\lambda_1}} b_1^* - b_3^*)\bar{\omega}^4}{(1 - b_2^*\bar{\omega}^2)^2 + \bar{\omega}^2 (b_1^* - b_3^*\bar{\omega}^2)^2} \quad 3.68$$

en el caso de que  $b_3^* = 0$  , se obtiene el modelo de Maxwell:

$$\bar{P}_M(\bar{\omega}) = \frac{1}{2} \frac{(b_1^* - 1)\bar{\omega}^2 + ((1 - kb_1^*)b_2^*)\bar{\omega}^4}{(1 - b_2^*\bar{\omega}^2)^2 + \bar{\omega}^2 (b_1^*)^2} \quad 3.69$$

Aboud Dakka (Abou-Dakka et al., 2012) demostró que en el caso particular de  $1 - kb_1^* = 0$  , se obtiene la potencia disipada para el modelo de Maxwell:

$$\bar{P}_{M-R}(\bar{\omega}) = \frac{1}{2} \frac{(b_1^* - 1)\bar{\omega}^2}{(1 - b_2^*\bar{\omega}^2)^2 + \bar{\omega}^2 (b_1^*)^2}$$

Un análisis paramétrico de los distintos números adimensionales nos conduce a la conclusión que solo hay dos números adimensionales independientes, la memoria del sistema  $\bar{\lambda}_t, \bar{\lambda}_b$  y la relación elástica  $k$  adicionalmente recordando las restricciones sobre la viscosidad de Jeffreys y la viscosidad ponderada con respecto a la viscosidad de bulto podemos representar los efectos de este sistema en un espacio material de tres dimensiones. De acuerdo con las magnitudes de estos tres números adimensionales se presentan seis posibles escenarios los cuales se muestra en la Tabla 2.



**Tabla 2 Escenarios posibles en función de los parámetros materiales**

Escenarios	$\bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b$	$\Sigma_{\bar{\eta}}$	k
<b>I</b>	$\varepsilon$	$\varepsilon$	$\varepsilon$
<b>II</b>	$\varepsilon$	$\varepsilon$	1
<b>III</b>	$\varepsilon$	1	$\varepsilon$
<b>IV</b>	$\varepsilon$	1	1
<b>V</b>	$1/4$	$1/2$	$\varepsilon$
<b>VI</b>	$1/4$	$1/2$	1

$\varepsilon = 0(10^{-4})$

Los seis escenarios posibles dados por las distintas combinaciones de los parámetros materiales son representados en la *Figura 8* en un espacio de tres dimensiones con coordenadas materiales i.e. viscosidad de bulto, relación elástica y memoria del sistema.

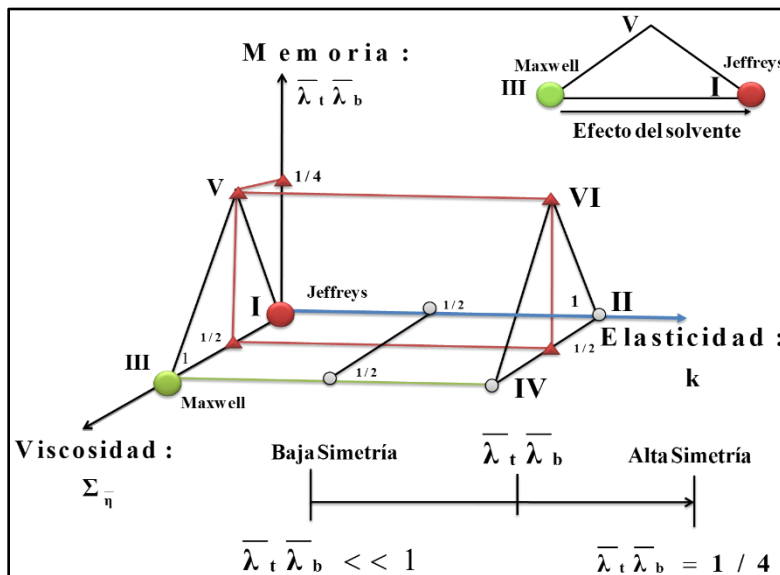


Figura 8 Espacio material del sistema

En este espacio material 3D está conformado por tres ejes principales. El primero de ellos representa la viscosidad total de bulto, el segundo representa la razón elástica entre la membrana y los fluidos, el último es el producto de los tiempos de relajación de Maxwell, el cual describe la viscoelasticidad en el sistema. Los límites



físicos de este sistema están acotados por seis modos: (i) la dirección asociada a la viscosidad total de bulto es la mínima, la dirección asociada a la razón elástica es mínima (se tiene una membrana muy suave) y la dirección que hace referencia a la viscoelasticidad en el sistema es mínima (una de las fases es muy viscosa y otra muy elástica), (ii) la dirección asociada a la viscosidad total de bulto es la mínima, la dirección asociada a la razón elástica es la máxima (se tiene una membrana rígida) y la dirección que hace referencia a la viscoelasticidad en el sistema es mínima (una de las fases es altamente viscosa y otra altamente elástica). Debido al significado físico de los valores acotados que pueden adoptar los tres ejes principales el modo (iii) la viscosidad total de bulto es el máxima, se tiene una membrana suave y una de las fases es altamente elástica y la otra es altamente viscosa, en el modo (iv) la viscosidad total de bulto es la máxima, se tiene una membrana rígida y una de las fases es altamente elástica y la otra es altamente viscosa, en el modo (v) la viscosidad total de bulto es la mitad de la máxima, se tiene una membrana suave y ambas fases tienen la misma elasticidad, en el modo (vi) es análogo al modo anterior con una membrana rígida. Más adelante se observará que no todos los modos tienen importancia biológica para este trabajo (OHC).





## **Capítulo 4 -Simulaciones numéricas**



En este capítulo se presentan las simulaciones realizadas para observar gráficamente el comportamiento de la respuesta mecánica del sistema bajo las variaciones de los distintos parámetros materiales mostrados en el espacio material, es decir  $\bar{H}_{io}, \bar{H}_{oi}, \bar{P}, \bar{E}_m$ . Las ecuaciones básicas que emplearemos en el análisis de las ecuaciones:

$$\langle \bar{P}(\bar{\omega}) \rangle = \frac{1}{2} |\bar{\omega} \text{Im}[\bar{R}(\bar{\omega})]| \quad 4.1$$

$$\text{Lim}_{Ma \rightarrow 0} \text{Re} |R| = \bar{H}_{io}(\bar{\omega}; b_1^*, b_2^*, b_3^*, \Sigma_{\lambda, \eta}, k) \quad 4.2$$

$$\text{Lim}_{Ma \rightarrow 0} \text{Im} |R| = \bar{H}_{oi}(\bar{\omega}; b_1^*, b_2^*, b_3^*, \Sigma_{\lambda, \eta}, k) \quad 4.3$$

$$\begin{aligned} E_m(\bar{\omega}) &= \sqrt{(\bar{H}_{io}(\bar{\omega}))^2 + (\bar{H}_{oi}(\bar{\omega}))^2} \\ &= \sqrt{(\bar{H}_{io}(\bar{\omega}))^2 + (\bar{H}_{oi}(\bar{\omega}))^2} \end{aligned} \quad 4.4$$

#### 4.1 Resultados numéricos

En esta sección, caracterizamos la potencia disipada, los mecanismos inerciales y viscoelásticos son evaluados mediante las Ecs. 4.1-4.4. En las *Figura 9* se ilustran dos diferentes diagramas de potencia disipada para dos números de Mach seleccionados. Los valores numéricos que se emplearon para las simulaciones de las figuras *Figura 9* se basan en el primer y tercer modo de nuestro espacio material (Consulte la Tabla 2)

#### 4.2 Mecanismos de inercia-viscoelásticos: $Ma \neq 0$

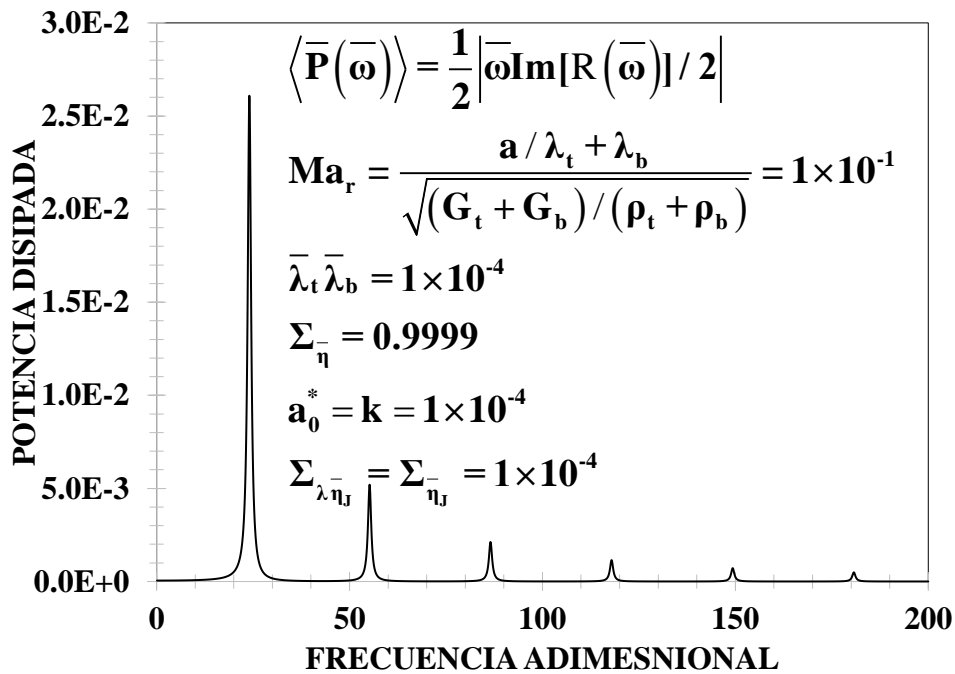
La *Figura 9* (a) muestra los diagramas de resonancia clásicos que han sido estudiados con diferentes ecuaciones constitutivas en el régimen de viscoelasticidad lineal (Flores, Alastruey, & Corvera Poiré, 2016), las cuales han sido empleadas para describir sistemas micelares y fluidos biológicos como la sangre humana.



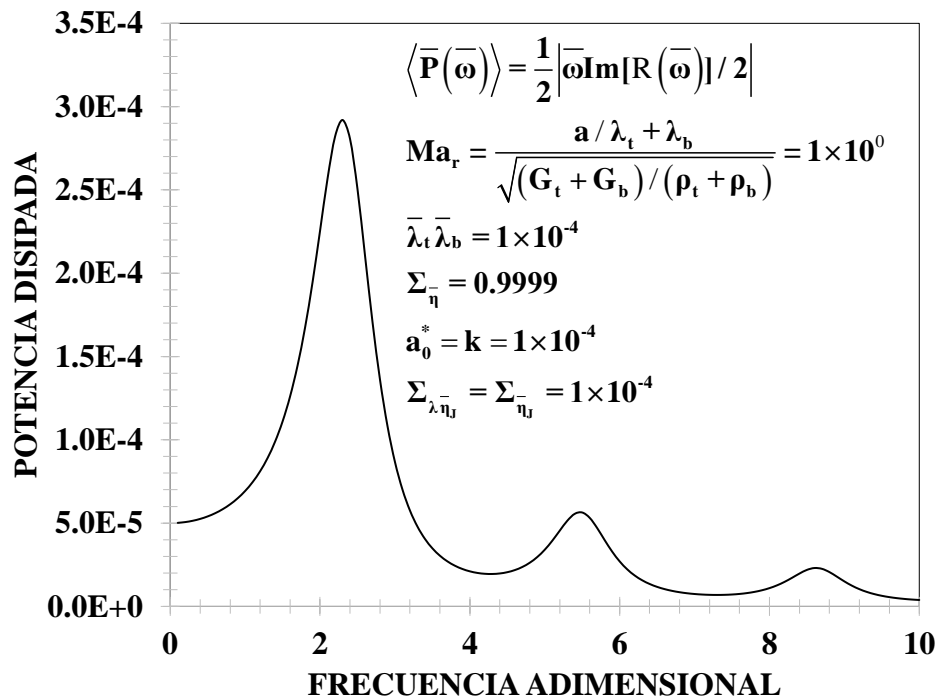
Los mecanismos resonantes se ven claramente en los diferentes picos que se ilustran en la *Figura 9*. Aquí el número de  $Ma$  es menor a uno, i.e. cuando el  $Ma=0.1$ , cuyo valor numérico implica que los mecanismos inerciales son menores que los elásticos relacionados al bulto del fluido, en trabajos en trabajos previos se demostró que para obtener los valores de potencia disipada, se necesitó desarrollar las funciones de Bessel hasta seis términos y estas solo mostraron dos picos resonantes (E. E. Herrera-Valencia & Rey, 2014), mientras que cuando se consideran todos los términos de las funciones de Bessel, el sistema despliega varios picos resonantes como se muestran en las figuras 4a. Cuando el número de Mach aumenta, i.e.  $Ma=1$ , los máximos en las curvas resonantes decrecen considerablemente como se muestra en la *Figura 9 (b)*. Como fue investigado en sistemas micelares, sangre y células ciliadas externas (Haro & Whitaker, 2001; E. E. Herrera-Valencia & Rey, 2014; Lo & Whitaker, 1998). El comportamiento de resonancia es una consecuencia del cociente de las funciones de Bessel, una de primer orden y otra de orden cero, la función viscosidad asociada a la reología y la transferencia de momento, las propiedades materiales a través de los números adimensionales característicos. Físicamente, la membrana transfiere el momento a las fases viscoelásticas líquidas asociadas a la disipación viscosa. Los picos resonantes aparecen en intervalos constantes, pero el máximo del pico se atenúa rápidamente a medida que la frecuencia aumenta. La *Figura 9b* muestra la potencia disipada en función de la frecuencia adimensional al incrementar los procesos inerciales a través de la velocidad de los mecanismos viscoelásticos. El efecto neto del aumento en los procesos inerciales es desplazar las curvas de resonancias a valores más bajos de frecuencia adimensional, con una disminución drástica del valor de los picos de resonancia en la disipación de potencia asociada a la membrana flexo-eléctrica. El último caso, corresponde a un número de Mach reducido  $Ma=10$ , cuando los mecanismos inerciales dominan sobre los viscoelásticos respectivamente. En este caso, las curvas resonantes desaparecen. Los resultados obtenidos en estas dos simulaciones son resaltados a continuación:



- A) La inercia en el sistema juega un papel preponderante en los sistemas resonantes, debido a que se observan varias curvas resonantes.
- B) De acuerdo con las simulaciones, existe una curva dominante que se observa en un intervalo de frecuencia de [0,50]. Para valores de frecuencia mayores a 50, i.e.  $\omega > 50$  se observa decrementos en los máximos y las resonancias se presentan en intervalos equidistantes.
- C) La manera de cuantificar estas resonancias es a través del número adimensional reducido  $Ma$



(a)



(b)

Figura 9 Disipación de potencia de la membrana frente a la frecuencia para condiciones de inercia (a) baja inercia, (b) Ma=1

Los otros parámetros empleados en la simulación de la Figura 9 corresponden al tercer modo y las viscosidades numéricas de Jeffrey son aproximadamente del mismo orden de magnitud

### 4.3 Número de Mach pequeño: $Ma \ll 1$

En esta sección, se muestra el espectro de potencia en el caso de un número pequeño de Mach, es decir, cuando los mecanismos de inercia son más pequeños en comparación con las fuerzas viscoelásticas. En este caso, el punto de partida de los resultados numéricos proviene de las ecuaciones del capítulo 3 y del apéndice C. En la *Figura 10* el efecto de la disipación de potencia vs frecuencia adimensional en función del mecanismo de retardo a través de números adimensionales para cuatro casos particulares correspondientes a los modos {I, III} de la *Tabla 2*, se muestra. Las predicciones de potencia, matemática y física, de las ecuaciones constitutivas de Maxwell y Jeffreys se resumen en la **Tabla 3**.



**Tabla 3 Resumen de los modelos de Maxwell y Jeffreys para la potencia**

MODELO	NÚMEROS ADIMENSIONALES	VISCOSIDADES	CONDICIONES MATERIALES	DESCRIPCIÓN MATEMÁTICA
MAXWELL Modo I	$\bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b = \varepsilon$ $k = \varepsilon \ll 1$ $a_0^* = k$ $\varepsilon = 10^{-4}$	$\Sigma_{\bar{\eta}} = \left(\Sigma_{\bar{\eta}}\right)_{\min} = \varepsilon$ $\Sigma_{\bar{\lambda}\bar{\eta}_j} = \Sigma_{\bar{\eta}_j} = 0$ $\varepsilon = 10^{-4}$	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Baja simetría</li> <li>2. Baja viscosidad de bulto</li> <li>3. Membrana suave</li> <li>4. Viscosidades de Jeffreys nulas</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Comportamiento constante</li> <li>2. Comportamiento monótono creciente</li> <li>3. Meseta a altas frecuencias</li> </ol> <p>No hay resonancia</p>
MAXWELL Modo III	$\bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b = \varepsilon$ $k = \varepsilon \ll 1$ $a_0^* = k$ $\varepsilon = 10^{-4}$	$\Sigma_{\bar{\eta}} = \left(\Sigma_{\bar{\eta}}\right)_{\max} = 1 - \varepsilon$ $\Sigma_{\bar{\lambda}\bar{\eta}_j} = \Sigma_{\bar{\eta}_j} = 0$ $\varepsilon = 10^{-4}$	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Baja simetría</li> <li>2. Alta viscosidad de bulto</li> <li>3. Membrana suave</li> <li>4. Viscosidades de Jeffreys nulas</li> </ol>	<p>Resonancia</p>
JEFFREYS Modo I	$\bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b = \varepsilon = 10^{-4}$ $k = \varepsilon \ll 1$ $a_0^* = k$	$\Sigma_{\bar{\eta}} = \left(\Sigma_{\bar{\eta}}\right)_{\min} = \varepsilon$ $\Sigma_{\bar{\lambda}\bar{\eta}_j} \approx \Sigma_{\bar{\eta}_j} \approx \varepsilon$ $\varepsilon = 10^{-4}$	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Baja simetría</li> <li>2. Baja viscosidad de bulto</li> <li>3. Membrana suave</li> <li>4. Viscosidades de Jeffreys no nulas del orden de <math>\varepsilon</math></li> </ol>	<p>Comportamiento no monótono</p> <p>Máximo y mínimo</p>
JEFFREYS Modo III	$\bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b = \varepsilon = 10^{-4}$ $k = \varepsilon \ll 1$ $a_0^* = k$	$\Sigma_{\bar{\eta}} = \left(\Sigma_{\bar{\eta}}\right)_{\max} = 1 - \varepsilon$ $\Sigma_{\bar{\lambda}\bar{\eta}_j} \cong \Sigma_{\bar{\eta}_j} = \varepsilon$ $\varepsilon = 10^{-4}$	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Baja simetría</li> <li>2. Alta viscosidad de bulto</li> <li>3. Membrana suave</li> <li>4. Viscosidades de Jeffreys no nulas del orden de <math>\varepsilon</math></li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Comportamiento monótono creciente</li> <li>2. Meseta a altas frecuencias</li> </ol> <p>No hay resonancia</p>

En todos los casos contenidos en la Tabla 3, a valores más bajos de la frecuencia adimensional, el valor de la disipación de potencia es cercano a cero. Sin embargo, para un valor crítico de las frecuencias adimensionales, el sistema muestra un comportamiento monótonamente creciente seguido de: (i) meseta y (ii) pico de resonancia o (iii) comportamiento no monótonamente. El comportamiento no monótono de la disipación de potencia (máximo y mínimo) puede obtenerse moviendo el sistema desde el punto JI a través de las siguientes condiciones materiales: (i) gran asimetría entre las fases viscoelásticas (una de ellas es débilmente elástica y la otra altamente elástica), (ii) viscosidad total mínima, es decir  $\Sigma_{\bar{\eta}} = 10^{-4}$ , (iii) pequeña elasticidad  $1/\bar{M} \ll 1$ , es decir, la elasticidad de la membrana es pequeña en comparación con la elasticidad total del sistema, (iv) los mecanismos



flexo-eléctricos son del mismo orden que la relación elástica, es decir  $a_0^* = k$ . La condición matemática para alcanzar el máximo y mínimo se da cuando los valores máximos de los mecanismos de retardo son iguales al valor mínimo de la viscosidad total bulto. Físicamente, las viscosidades Jeffreys deben satisfacer la siguiente desigualdad  $\{r_t \bar{\lambda}_t, r_b \bar{\lambda}_b\} = \Sigma_{\eta_{\min}} \leq \Sigma_{\eta_j} = \Sigma_{\eta_j} (\bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b) \leq \Sigma_{\eta_{\max}} = \{r_t \bar{\lambda}_t, r_b \bar{\lambda}_b\}$ . La viscosidad de bulto debe ser mayor (cerca de la unidad). La mayor asimetría de las fases viscoelásticas implica que el valor de los tiempos de Maxwell es igual a un parámetro pequeño  $\varepsilon$ .

Para tener el comportamiento monótonico de la disipación de potencia, las viscosidades tanto del solvente como del polímero de Jeffreys deben ser esencialmente las mismas. La única posibilidad de cumplir con la igualdad  $\varepsilon r_t \bar{\eta}_t + (1 - \varepsilon) r_b \bar{\eta}_b = \Sigma_{\lambda \bar{\eta}_j} \leq \Sigma_{\eta_j} = r_t \bar{\eta}_t + r_b \bar{\eta}_b$  es cuando el producto entre el valor de la relación de viscosidad  $r_t$  se vuelve muy pequeño. Físicamente, la condición anterior implica que las viscosidades del solvente y del polímero juegan un papel importante en el comportamiento dinámico del modelo de Jeffrey. Como primera conclusión parcial, en el modelo de Maxwell (2ODE) el comportamiento de resonancia se alcanza en el tercer modo (Abou-Dakka et al., 2012; E. E. Herrera-Valencia & Rey, 2014), mientras que en el modelo de Jeffreys (3ODE), el comportamiento de resonancia con máximo y mínimo se alcanza dirigiéndose hacia el modo I. Para las curvas mostradas en la *Figura 10*, la disipación de potencia es despreciable a bajas frecuencias hasta una frecuencia adimensional donde la disipación de potencia muestra un comportamiento monótonamente creciente hasta un máximo seguido de un comportamiento decreciente seguido de una zona de meseta en frecuencias intermedias. Para un segundo valor crítico de la frecuencia adimensional, el sistema experimenta un comportamiento monótonamente creciente

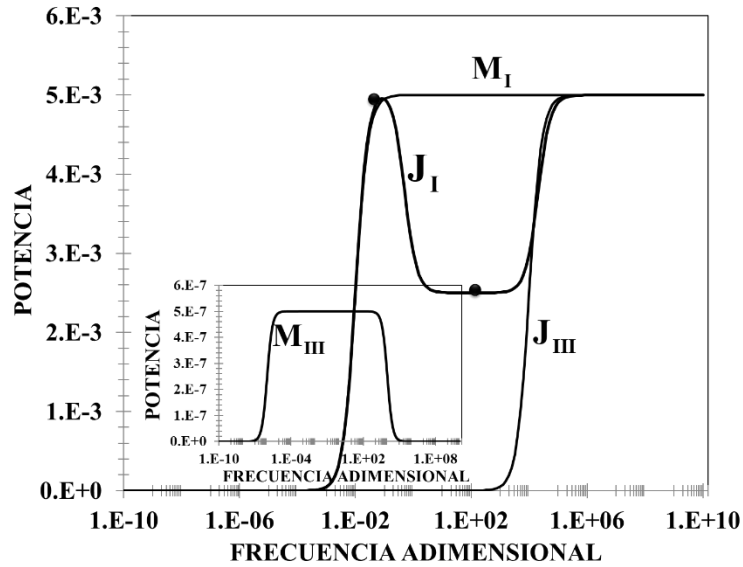


Figura 10 Disipación de potencia para los modos I y III para el modelo de Maxwell y Jeffreys

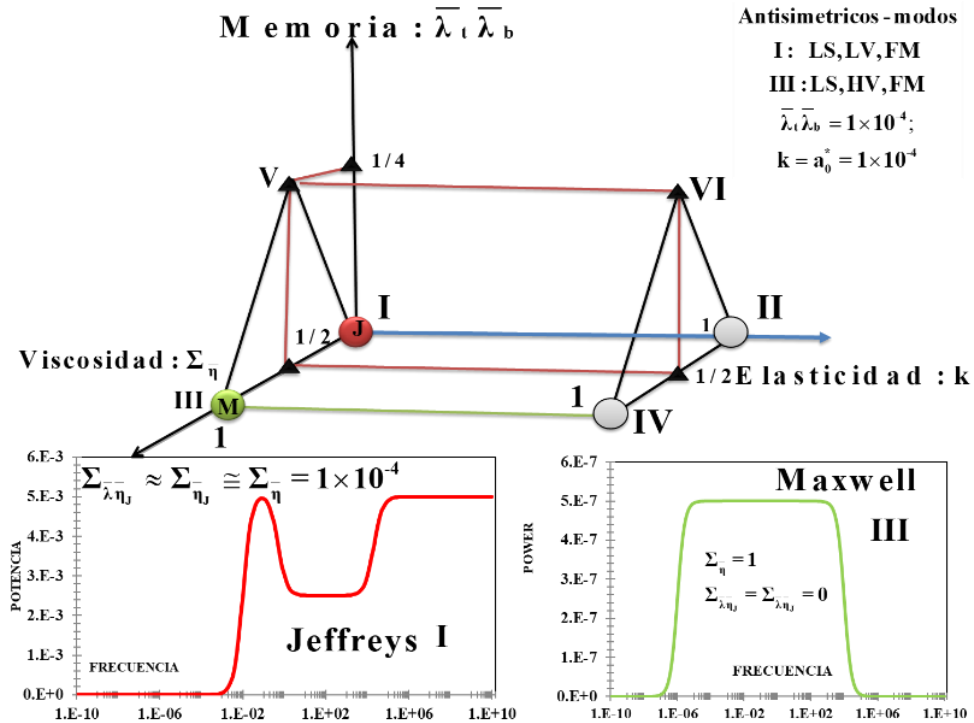


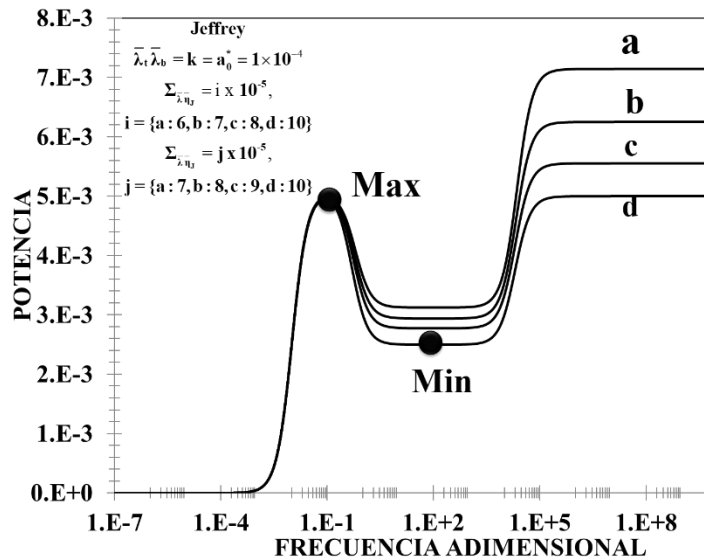
Figura 11 Resonancias de potencia para los modelos de Maxwell y Jeffreys para modo I y III



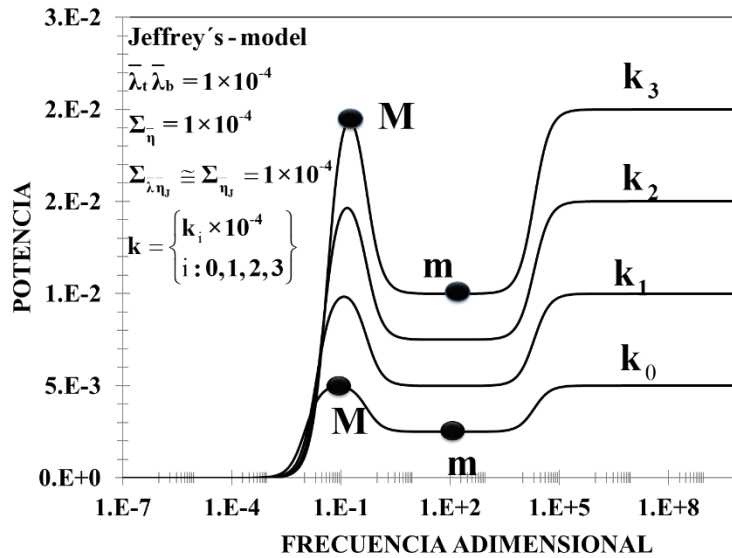


La *Figura 12 b* ilustra el efecto de la viscosidad en función de la frecuencia adimensional en el modo I, en función de la relación elástica  $k$ . Las condiciones materiales que se establecen son las siguientes: (i) Contraste entre las fases viscoelásticas a través del producto de los tiempos de relajación de Maxwell, (ii) la viscosidad de bulto del sistema de fases líquidas viscoelásticas es la menor, (iii) las viscosidades de bulto de Jeffreys y la viscosidad ponderada son prácticamente del mismo orden. El efecto que se observa en este sistema es la elasticidad de la membrana. Se observa que la descripción matemática es similar que la figura anterior, sin embargo, cuando se aumenta la elasticidad del material flexo-eléctrico, los máximos, mínimos y la meseta a frecuencias altas, se desfazan a valores mayores en la potencia disipada. Estas simulaciones implican que el comportamiento resonante (máximo) y anti-resonante (mínimo), se obtienen por efecto de los siguientes puntos:

- Las viscosidades de Jeffreys son del mismo orden
- La elasticidad de la membrana debe ser menor que la de bulto y su valor numérico modifica los valores máximos y mínimos en la potencia disipada por la membrana en las fases viscoelásticas.



(a)



(b)

Figura 12 Potencia para distintos valores de Viscosidad de Jeffreys y relación elástica

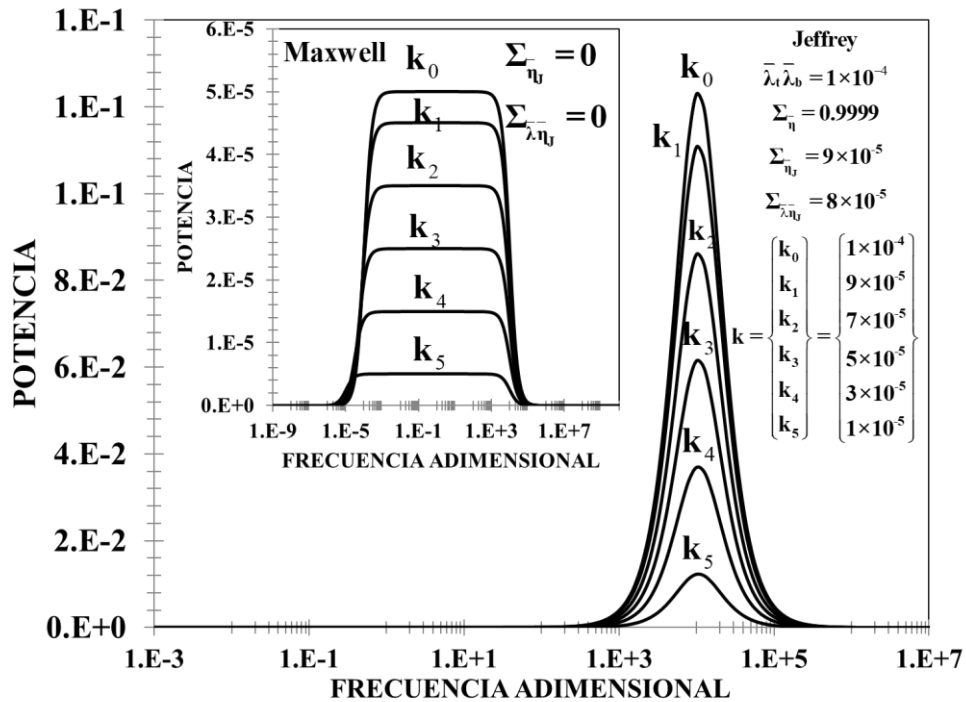


Figura 13 Curvas de potencia función de la frecuencia adimensional para los parámetros materiales del modo III en el modelo Jeffreys, en el inserto las mismas curvas para el modelo de Maxwell



De la *Figura 12* inmediatamente se puede observar la no monotonía de la curva que describe la energía disipada a las fases viscoelásticas  $\bar{P}$ , cabe señalar que bajo este primer escenario el sistema se comporta como un sólido a bajas frecuencias y conforme se incrementa la frecuencia el sistema se comporta como un líquido.

Los modos pares del espacio material no se muestran gráficamente debido a que el parámetro material que representa la relación elástica del sistema, es decir,  $k$  tiene un valor máximo el cual físicamente indica que se trata de una membrana rígida, matemáticamente esto indica que la ecuación se anula y no existe energía que sea disipada hacia las fases viscoelásticas. El modo V tiene el mismo comportamiento que el modo III en diferente escala de la respuesta del sistema.

La importancia de este trabajo radica en la aplicación de este modelo a las células ciliadas externas, bajo esta premisa es necesario encontrar los parámetros materiales bajo los cuales la mayor cantidad de energía se disipa hacia las fases viscoelásticas.

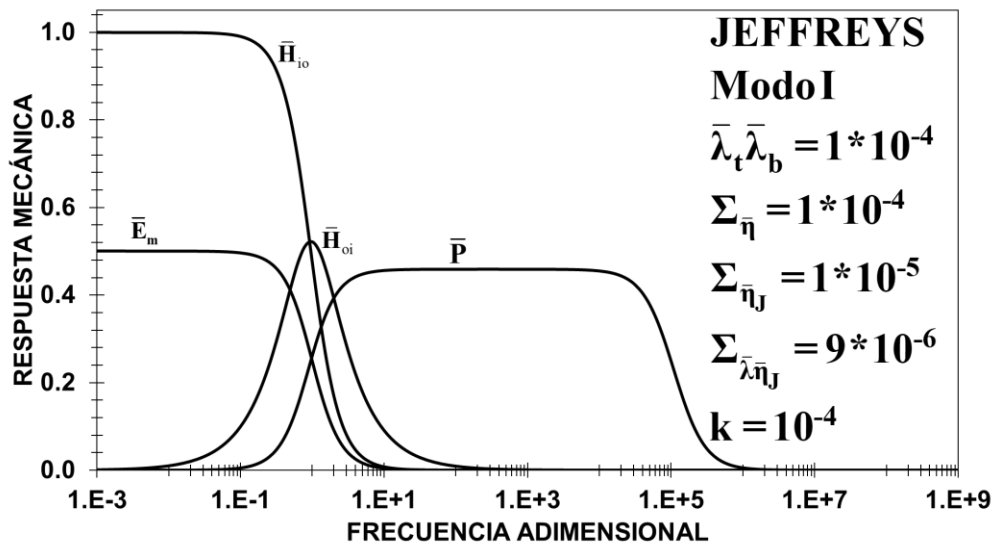


Figura 14 Curvas de potencia modificada, almacenamiento, módulo en fase y fuera de fase en función de la frecuencia adimensional para los parámetros materiales del modo I en el modelo Jeffreys



En la *Figura 14* inmediatamente observamos un máximo en la energía disipada a las fases viscoelásticas bajo las condiciones materiales del modo I, es decir, tenemos una asimetría de las fases, la viscosidad de bulto mínima del sistema y una membrana suave, cabe mencionar que bajo estas condiciones materiales el modelo de Maxwell no presenta el máximo en la potencia, indicando que la inclusión de un solvente en el sistema, produce una viscosidad de retardo  $\Sigma_{\eta_1}^-$  y una viscosidad ponderada  $\Sigma_{\lambda\eta_1}^-$  que modifica drásticamente la energía que se disipa hacia las fases.

Bajo los parámetros materiales del modo V en el cual tenemos ambas fases con la elasticidad más alta posible, esto fija la viscosidad total de bulto en el valor intermedio y una membrana suave, obtenemos un comportamiento similar al mostrado en *Figura 14*, donde el máximo que se obtienen es la potencia es del orden de  $O(10^{-5})$ , entorno a las consideraciones antes mencionadas el efecto del solvente implica movernos del modo III hacia el modo I con una membrana suave.

En la *Figura 13* se muestra el efecto en la curva de potencia, de la variación del parámetro material  $k$  para fases asimétricas y una viscosidad máxima. Nótese que las resonancias en las curvas de potencia son similares a las obtenidas con el modelo de Maxwell (Abou-Dakka et al., 2012; E. E. Herrera-Valencia & Rey, 2014), cabe recalcar que una membrana muy suave i.e.  $k = \varepsilon$  disminuye el efecto de disipación hacia las fases viscoelásticas.

En la se muestra el comportamiento de las curvas de potencia para un sistema con la máxima viscosidad, podemos observar que las curvas de potencia empiezan a definirse más modificando el ancho de la curva resonante.



## **Capítulo 5 -Análisis de resultados y conclusiones**



La potencia disipada en términos de las funciones y coeficientes adimensionales está dada por la Ec. 3.67. Las condiciones materiales que conducen a encontrar el máximo en la energía disipada (potencia) son de vital importancia para la aplicación biológica de este modelo. La potencia definida en la Ec. 3.67 no presenta un máximo, inherente a la propia función ya que el orden del polinomio del numerador es mayor al orden del polinomio del denominador, de acuerdo al análisis realizado en la sección anterior respecto al orden de magnitud sobre los coeficientes del polinomio en el numerador de la Ec. 3.67 el coeficiente del término  $\bar{w}^6$  es de orden  $O(10^{-20})$ , bajo este argumento la contribución de  $\left(kb_2^* - (1-k)\sum_{\lambda, \eta_j} \right) b_3^* \bar{w}^6$  es muy pequeña, obteniéndose la *Figura 14* donde en el modo I observamos un máximo en la potencia similar al obtenido en el modelo de Maxwell. Los modos pares, es decir II, IV y VI quedan descartados ya que matemáticamente anulan la función, físicamente esto significa que la membrana es rígida y toda la energía que entra al sistema es almacenada por la membrana flexo-eléctrica.

Como se muestra en la *Figura 14* la curva de la potencia bajo las condiciones materiales del modo I presenta un máximo. El modelo presentado en este trabajo se reduce al modelo propuesto por (Abou-Dakka et al., 2012) en el cual, las curvas resonantes se encontraron en el modo III, es decir, una asimetría en las fases viscoelásticas, la máxima viscosidad de bulto y una membrana suave, en esta investigación de igual manera se encontró que se necesitan las mismas condiciones materiales, lo que se busca es saber cuál es el efecto de incluir un solvente en las fases viscoelásticas, bajo esta premisa, el efecto de la viscosidad de bulto es reducir el ancho de la curva de potencia, esto se puede interpretar como una selectividad frecuencial como se muestra en la *Figura 13*. El efecto de la asimetría de las fases se muestra en la *Figura 15*, al incrementar la simetría de las fases se observa que hay resonancia de la curva de potencia sin embargo se pierde la selectividad de la frecuencia y el orden de magnitud disminuye mostrando un comportamiento similar al modelo de Maxwell (Abou-Dakka et al., 2012), de esta manera sabemos que al igual que en el modelo de Maxwell el máximo se obtiene cuando las fases



viscoelásticas son asimétricas, es decir,  $\bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b = 10^{-4}$ , el efecto de la viscosidad de bulto es de igual manera reducir el ancho de la curva de potencia incrementando la selectividad frecuencial antes mencionada.

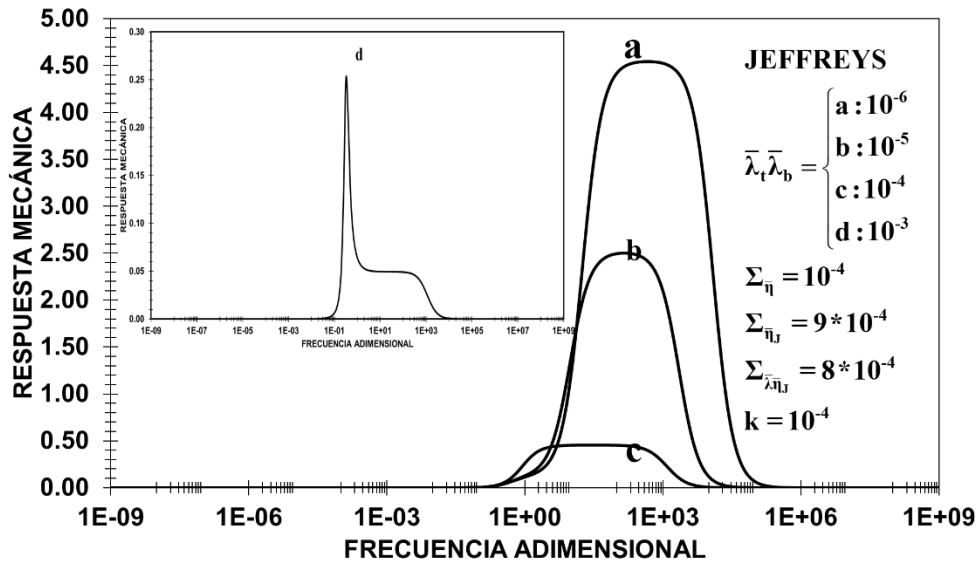


Figura 15 Curvas de potencia bajo el efecto de variación de la simetría para el modo I

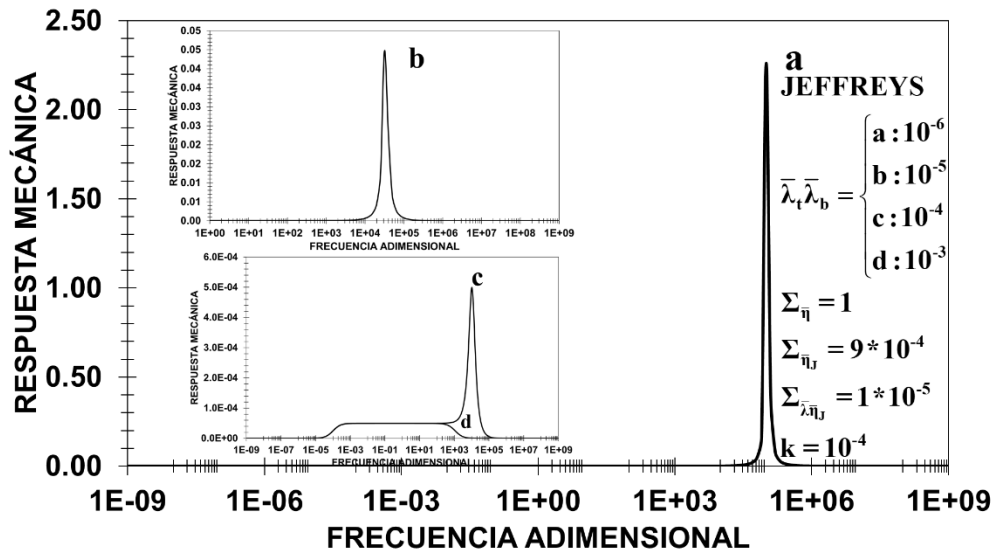


Figura 16 Curvas de potencia bajo el efecto de variación de la simetría para el modo III

El efecto que tiene el modificar los mecanismos de retardo en el sistema se muestran en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, Los m

ecanismos de retardo no pueden aumentar independientemente o disminuir debido a que están relacionados con la viscosidad de bulto, nótese que si disminuye la viscosidad de retardo y ponderada hasta el caso límite obtenemos las curvas resonantes dadas por el modelo de Maxwell (Abou-Dakka et al., 2012; E. E. Herrera-Valencia & Rey, 2014)

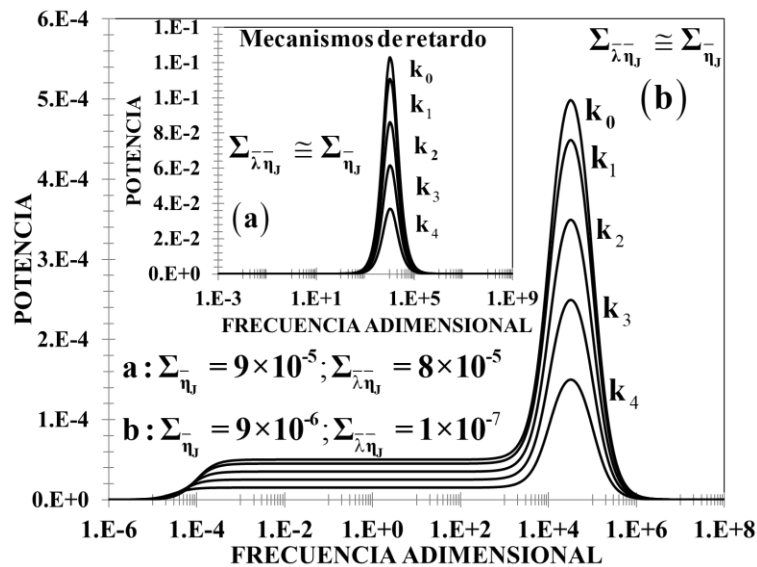


Figura 17 Efecto de los mecanismos de retardo del sistema en la curva de potencia para los parámetros materiales del modo III

Finalmente podemos concluir que existe una competencia entre la selectividad frecuencial y la máxima disipación de potencia, la aplicación principal de este modelo está enfocada a la OHC (células ciliadas externas), estas se encuentran colocadas en tres hileras en el lado externo del túnel de Corti, son células sensoriales que no transmiten ninguna característica sonora al cerebro, pero estas células reenvían la energía para aumentar la sensibilidad y la selectividad frecuencial.

Como se demostró (Abou-Dakka et al., 2012; E. E. Herrera-Valencia & Rey, 2014; Rabbitt et al., 2009) una característica biológica clave es la forma y la ubicación del pulso de amplificación de potencia. En el modelo flexo-eléctrico el comportamiento





no monótono de la potencia asociado con su máximo y mínimo emerge bajo las siguientes condiciones materiales: (i) asimetría de las fases, (ii) viscosidad de bulto máxima, (iii) pequeña relación elástica y, (iv) el mecanismo de retardo es casi igual y sus valores están cerca del valor mínimo de la viscosidad de bulto. Las condiciones del material anterior implican que la relación entre las viscosidades del disolvente y del polímero en una de las fases viscoelásticas debe ser del orden del valor principal de la viscosidad aparente, es decir,  $\tau_1 \rightarrow 0$ . Físicamente, el sistema disminuye el mecanismo de disipación hasta que se alcanza su valor mínimo y la mecánica de retardo lo maximiza. Rabbits (Rabbitt et al., 2009) emplearon un sistema electromecánico en el que el comportamiento no monótono depende de las propiedades del material en el sistema y la longitud de las células ciliadas externas. En nuestro modelo membrano-dinámico 3ODE, la geometría y las propiedades flexoeléctricas están contenidas en el número adimensional que es del orden de la relación elástica  $k$ , es decir  $a_0^* = k$ .

## 5.1 Propiedades del material y condiciones de resonancia

Los parámetros materiales de importancia son: (i) tiempos máximos de relajación, (ii) elasticidad aparente de las fases viscoelásticas, (iii) viscosidades del polímero, (iv) energía elástica de la membrana y (v) viscosidades del disolvente. Las formas específicas de adaptar estos parámetros son cambiando la concentración y la distribución del peso molecular de las cadenas poliméricas disueltas. Para tener el comportamiento no monótono (máximo y mínimo) y la amplitud de potencia, una de las fases líquidas debe ser débilmente elástica y la otra completamente viscoelástica (asimetría de fase). Para cambiar la posición de la meseta de potencia localizada y el ancho de la meseta de potencia, se debe ajustar la viscosidad de bulto siempre hacia su máximo (fases viscoelásticas). Para ampliar la meseta de potencia, se deben modificar los tiempos de relajación de Maxwell, la elasticidad de la membrana y las fases viscoelásticas. Los resultados generales se ejemplifican cualitativamente en la *Figura 18*.

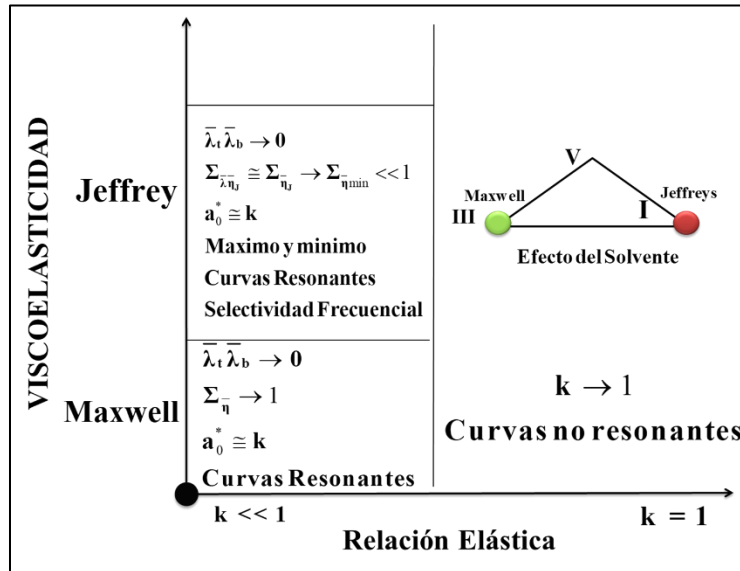


Figura 18 Resumen

Análisis subsecuentes a este y a trabajos previos pretenden incluir efectos de pared elástica del capilar (Flores et al., 2016), efectos de transferencia de masa para incluir la difusión como sucede en el sistema real de iones  $k^+$  y  $Ca^{2+}$  presentes en los líquidos linfáticos que se encuentran en la cóclea, modificaciones a la ecuación de movimiento para incluir el efecto del campo eléctrico en los fluidos electrolíticos.

## 5.2 Conclusiones

En este trabajo de investigación a nivel de maestría exploramos la dinámica de membranas flexo-eléctricas inmersas en fases líquidas viscoelásticas. Mediante un balance de fuerzas en el sistema, se obtiene una expresión que describe los mecanismos eléctricos, elásticos de la membrana y la diferencia de presión en la membrana por el contacto con los líquidos complejos. Para modelar este sistema, la membrana flexo-eléctrica es colocada en medio de un capilar ( $z = L$ ) de longitud  $2L$ . El flujo y la reología del sistema es caracterizado con el modelo constitutivo tipo Oldroyd-B. Suponiendo estado no estacionario, y que los líquidos son



incompresibles, bajas deformaciones tanto en la membrana y en los líquidos, se obtuvo una expresión que relaciona la entrada del sistema (campo eléctrico) y la salida (curvatura promedio).

El modelo obtenido es no lineal y para entender la física del sistema, se propone un conjunto de variables adimensionales (Ver apéndice B), las cuales permiten obtener grupos adimensionales los cuales describen las bondades del mismo. Bajo este contexto, son siete los grupos adimensionales que se obtuvieron con esta metodología. Tres de ellos  $\{a_0^*, Ma_r, k\}$  asociados con las propiedades flexo-eléctricas del material, el número de Mach reducido asociado a los mecanismos inerciales en el sistema. El tercer número  $k$  relaciona la energía de almacenamiento de la membrana (elasticidad de la membrana) con la elasticidad total del bulto en el sistema. Suponiendo que los fluidos son caracterizados por los modelos constitutivos de Jeffreys (Ver Tabla 1), el operador viscosidad  $\bar{\Pi}$  relaciona los mecanismos viscosos e inerciales en el sistema. Para el modelo de Jeffreys este depende de 4 números adimensionales  $\{\bar{\lambda}_l, \bar{\lambda}_b, \Sigma_{\bar{\eta}}, \Sigma_{\bar{\lambda}\eta}\}$ . El primero de estos números es un producto entre tiempos de relajación de Maxwell, el segundo es la viscosidad de bulto de las fases viscoelásticas. El tercero y el cuarto número son consecuencia de los mecanismos de retardo a través del número de Jeffreys. Las viscosidades  $\{\Sigma_{\bar{\eta}}, \Sigma_{\bar{\lambda}\eta}\}$  están relacionados con los procesos de retardo en el material y su valor numérico. Un hecho importante de estos números es que están relacionados con las propiedades del solvente (Newtoniano) y la de la solución polimérica (Maxwell). Ambas contribuciones nos permiten obtener el modelo de Jeffreys de tres propiedades materiales.

### **Mecanismos inerciales**

El efecto de los mecanismos inerciales puede ser cuantificado a través del número de Mach reducido  $Ma_r$ . Cuando el  $Ma_r$  es diferente de cero, i.e.  $Ma \neq 0$ , la respuesta de la curvatura promedio en función del campo eléctrico depende de la



función de transferencia C.7 y de la ecuación constitutiva que se haya seleccionado de la Tabla 1.

El efecto de las curvas resonantes en la potencia disipada puede ser cuantificado a través del número de Mach reducido el cual, tiene como efecto el de mostrar más curvas resonantes como se muestra en la *Figura 10*. Es importante resaltar, que la máxima curva resonante se obtiene en el primer máximo y las subsecuentes curvas, el máximo va decreciendo como se observa en las *Figura 10*. Al aumentar el  $Ma_r = 1$  se observó que las curvas resonantes se abaten considerablemente, por lo que al aumentar los efectos inerciales se tiene un efecto negativo en el contexto de la potencia disipada. Para  $Ma_r = 10$ , las curvas resonantes desaparecen y el sistema no disipa más debido al aumento de los mecanismos inerciales.

### **Mecanismos no-inerciales**

A números de Mach reducidos bajos, i.e.  $Ma_r \ll 1$  los mecanismos inerciales son despreciables, se obtiene una ecuación diferencial de tercer orden de coeficientes constantes. El modelo de tercer orden para el campo eléctrico (entrada) y la curvatura o flujo volumétrico (salida) está dado por un equilibrio de efectos retardantes, inerciales, viscosos y elásticos, que se originan en la membrana flexo-eléctrica y los fluidos viscoelásticos de Jeffreys (mecanismos solventes y polímeros).

Debido a que los mecanismos de retardo son pequeños con respecto a los procesos de relajación de Maxwell, este nuevo modelo (3ODE) puede interpretarse como la suma de un modelo de segundo orden (Maxwell) y una pequeña contribución (pequeña perturbación), que se asocia a los mecanismos de retardo en el sistema.

Estos modelos de tercer orden han sido ampliamente utilizados en sistemas de ecuaciones diferenciales (Sprott, 1997), sistemas caóticos y mecánica clásica. Cuando los mecanismos de retraso son cero, es decir, el modelo de Maxwell se recupera con mecanismos inerciales y viscosos.

Usando variables adimensionales, y teniendo en cuenta los mecanismos de inercia en el sistema, la física se puede describir con siete números adimensionales, los



cuales están asociados con los siguientes mecanismos: 1. Inercia ( $Ma_r$ ), 2. Flexo-eléctricos ( $a_0^*$ ), 3. Elasticidad de la membrana ( $k$ ), 4. Simetría de las fases viscoelásticas  $\bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b$ , 5. Viscosidad de bulto ( $\Sigma_{\eta}^-$ ), 6. Viscosidad de retardo ( $\Sigma_{\lambda\eta}^-$ ), 7. y finalmente viscosidad de retardo ponderada con el tiempo de Maxwell  $\Sigma_{\lambda\eta}^-$ .

Con el fin de obtener las cotas superiores e inferiores de los números adimensionales, se hizo un estudio paramétrico como el expuesto por Dakka et al. (2012), Herrera-Valencia y Rey (2014). Este estudio, permitió obtener seis modos (4 asimétricos y dos asimétricos) que son representados en un prisma en 3D (*Figura 8*), y cada uno de los vértices en este, está asociado con una condición física en el sistema.

El objetivo de esta clasificación fue realizar un estudio paramétrico exhaustivo para identificar las condiciones que conducen a la aparición de un máximo (comportamiento de resonancia) o un mínimo (comportamiento anti-resonante) en el espectro de potencia (Tabla 3). El máximo en la potencia ha sido asociado a la amplificación del sonido debido a la transferencia de momento de la membrana flexo-eléctrica en las fases viscoelásticas debido a la fuerza motriz asociada al campo eléctrico (Dakka et al. 20012, Herrera-Valencia y Rey 2014; Rey 2009). EL comportamiento anti resonante (mínimo) ha sido estudiado por otros autores mediante aproximaciones electro-mecánicas (Rabbitt et al. 2009) y este, ha sido asociado a la longitud de las células ciliadas externas en el sistema. En nuestra aproximación la no-monotonía obedece a un efecto de una tercera derivada inducida por los mecanismos retardantes que relacionan las viscosidades del solvente y del polímero en las fases líquidas respectivamente.

Para un sistema caracterizado con el modelo de Maxwell, las curvas resonantes fueron obtenidas en el modo III. En este modo el sistema presenta un contraste en las fases líquidas viscoelásticas, i.e. una de ellas es muy viscoelástica y la otra débilmente elástica, i.e. su tiempo de Maxwell es muy pequeña, la membrana flexo-eléctrica es elástica ( $k \ll 1$ ) y los mecanismos flexo-eléctricos son del orden de los



elásticos, i.e.  $a_0^* \cong k$  (Abou-Dakka et al., 2012; E. E. Herrera-Valencia & Rey, 2014; Rey, 2008). Por otra parte, en esta propuesta, se caracterizó el sistema con la ecuación constitutiva de Jeffreys, con el fin de obtener un modelo de tercer orden en la curvatura promedio, obteniendo un comportamiento no-monotónico en la potencia.

El máximo y mínimo se encuentran en el modo I cuando el sistema presenta una: (i) gran asimetría entre las fases viscoelásticas (una en fases es débilmente elástica y la otra completamente viscoelástica), (ii) viscosidad mínima, (iii) elasticidad pequeña y (iv) los mecanismos flexo-eléctricos son del orden de la elasticidad de la membrana.

La condición matemática para alcanzar el máximo y mínimo se da cuando las viscosidades asociadas al modelo de Jeffreys  $\{\Sigma_{\eta_j}^-, \Sigma_{\lambda_{\eta_j}}^-\}$  son del mismo orden que el mínimo valor de la viscosidad de bulto  $\Sigma_{\eta_j}^-$ , i.e.  $\Sigma_{\eta_j}^- = \Sigma_{\lambda_{\eta_j}}^- \cong (\Sigma_{\eta_j}^-)_{\min}$ .

La condición matemática anterior implica que las viscosidades del disolvente y del polímero juegan un papel importante en el comportamiento de resonancia y anti-resonancia.

Físicamente, esto significa que para obtener un comportamiento que no aumente monótonamente, es necesario un contraste en las fases líquidas, siendo uno de ellos débilmente elástico y el otro altamente viscoelástico. Por ejemplo, si una de las fases viscoelásticas se caracteriza por el modelo de Burgers, Jeffreys o Maxwell, la otra debe estar representada por una ecuación de orden menor como el modelo los modelos de Jeffreys, Maxwell o Newton respectivamente (Dakka et al. 2012, Herrera-Valencia y Rey 2014, 2018)

Es importante señalar que los tiempos de Maxwell y Jeffrey no son independientes y satisfacen una relación lineal, en donde la variable dependiente es el tiempo de Jeffreys y la independiente es el tiempo de relajación de Maxwell. La pendiente de esta relación, está dada por un cociente entre la viscosidad del solvente y la viscosidad total del sistema.



El valor del máximo y mínimo en la potencia es controlado por la elasticidad de la membrana a través del número adimensional  $k$ . Observe que, para tener el máximo y el mínimo en el sistema, ese número flexo-eléctrico debe ser del mismo orden que  $k$ . Cuando la asimetría de las fases viscoelásticas aumenta, el máximo y el ancho de las curvas resonantes disminuyen y aumentan respectivamente.

El efecto de maximizar la potencia se debe principalmente a disminuir los efectos elásticos y de almacenamiento de la membrana flexo-eléctrica.

El efecto del comportamiento de resonancia a través del número de Mach es mostrar más picos resonantes que pueden asociarse a procesos biológicos (Véase el número de Deborah en la referencia (E. E. Herrera-Valencia & Rey, 2014)). La inclusión de nuevos parámetros reológicos a través de modelos más altos se puede hacer cambiando el operador de viscosidad de Jeffrey dado en la Tabla 1. Los méritos de esta investigación es extender la teoría anterior (Abou-Dakka et al., 2012; E. E. Herrera-Valencia & Rey, 2014; Rey et al., 2013), para cualquier ecuación constitutiva viscoelástica lineal o fraccional particular, a través del operador diferencial de viscosidad generalizado que se proporciona en la Tabla 1.

En particular, se eligió la función de viscosidad Jeffreys para incluir los mecanismos de solvente y polímero. Cuando la inercia se incluye en el sistema a través del número de Mach, se encuentran varios picos de resonancia, que desde un punto de vista biológico podrían ser relevantes. En el régimen sin inercia ( $Ma = 0$ ), se encontró una ecuación diferencial de tercer orden (3ODE). Este modelo electro-reológico condujo a un comportamiento no monotónico que está directamente relacionado con las nuevas viscosidades asociadas a los mecanismos de retardo, que están unidas por las contribuciones de disolvente y polímero

Por último, una evaluación cualitativa de las predicciones del modelo actual basadas en la potencia no-monotónica disipada de una membrana flexo-eléctrica inmersa en fases líquidas viscoelásticas, posee la física necesaria para capturar cualitativamente los fenómenos de conversión de potencia electromecánica.



### 5.3 Trabajo futuro

Las extensiones de esta investigación incluyen modelos viscoelásticos de mayor orden (Burgers) y fraccionados, modelos no lineales debido a altas frecuencias. La disipación de calor y los sistemas compresibles (densidad en función de la caída de presión) y otras enfermedades que pueden afectar el sistema auditivo (hipercolesterolemia, hiperglucemia, problemas genéticos, etc.) se encuentran fuera del alcance de la presente investigación. Un posible camino para continuar esta investigación es probar nuevos modelos en el régimen de viscoelasticidad no lineal. La no linealidad inducida por grandes deformaciones se puede explorar con dos enfoques: (i) El primero de ellos sería por efecto de la membrana flexo-eléctrica o (ii) puede ser inducida a través de las fases líquidas viscoelásticas. Estos nuevos enfoques deben ser explorados a través de algoritmos numéricos analíticos y pueden ser un punto de partida para un nuevo replanteamiento. La presente teoría, modelo y cálculos contribuyen a la comprensión fundamental en evolución de la actuación de forma biológica a través de acoplamientos electromecánicos que implican los fluidos biológicos y su aplicación en nuevos materiales y que utilizan los fenómenos de transporte, reología de fluidos complejos, fenómenos superficiales y cristales líquidos como herramientas para su caracterización biofísica.





## Apéndice A

En este apartado se presenta la deducción de la ecuación que muestra la relación que existe entre la curvatura promedio  $H$  y el flujo volumétrico  $Q$  inducido por la oscilación de la membrana flexo-eléctrica inmersa en las fases viscoelásticas.

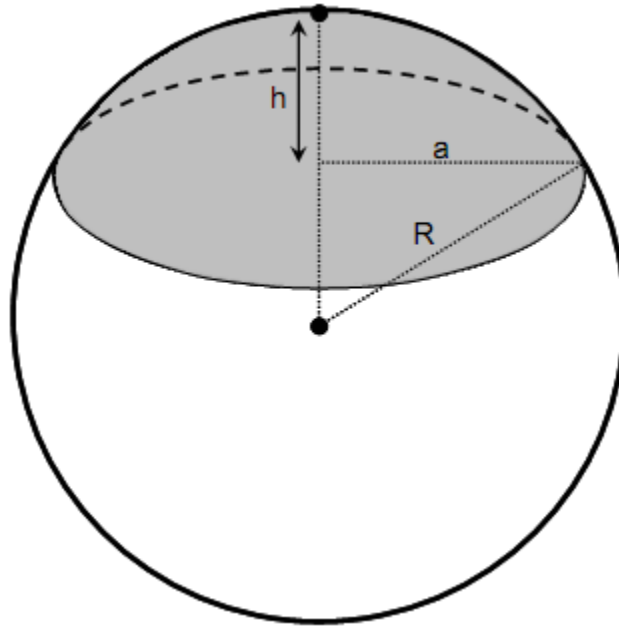


Figura 19 Geometría de la membrana flexo-eléctrica

De la Figura 19 se observa que aplicando el teorema de Pitágoras obtenemos la ecuación

$$R^2 = a^2 + (R - h)^2 \quad \text{A.1}$$

debido a que el interés se centra solo en la parte superior de la esfera, es decir, el domo esférico, el radio de este último es de la forma

$$a^2 = 2Rh - h^2 \quad \text{A.2}$$

por otra parte, la oscilación de la membrana desplaza fluido en una cantidad igual al volumen encerrado por el domo esférico, de acuerdo con la definición general de volumen



$$V = \int_a^b A dh \quad A.3$$

donde  $A$  representa el área de sección transversal y  $h$  la distancia, es importante observar que el área de sección transversal de la altura debido a que a distintas alturas se obtienen distintos círculos de radio cada vez menor por lo tanto podemos escribir

$$V = \int_0^h A(h') dh' = \int_0^h \pi a^2 dh' \quad A.4$$

sustituyendo la Ec. A.2 en la A.4 y resolviendo la integral obtenemos

$$V = \int_0^h \pi(2Rh' - h'^2) dh' \quad A.5$$

$$V(h) = \pi R h^2 - \frac{\pi}{3} h^3 \quad A.6$$

utilizando la Ec. A.2, se obtiene la ecuación anterior en función del radio del capilar y no en términos del radio de la esfera, i.e.

$$V(h) = \frac{\pi}{2} a^2 h + \frac{\pi}{6} h^3 \quad A.7$$

sabemos que la altura varia con el tiempo debido a que la oscilación no es instantánea por lo tanto  $h = h(t)$ , el flujo volumétrico en el domo superior  $Q_s$  se define como la variación del volumen con respecto al tiempo, i.e.

$$Q_s(t) = \frac{dV(t)}{dt} \quad A.8$$

partiendo de las Ec. A.7 y A.8 y utilizando la regla de la cadena obtenemos el flujo volumétrico

$$Q_s(t) = \frac{dV(t)}{dt} = \frac{\pi}{2} a^2 \left[ 1 + \left( \frac{h}{a} \right)^2 \right] \frac{dh}{dt} \quad A.9$$

para introducir la relación buscada entre la curvatura promedio  $H$  y el flujo volumétrico, utilizamos la definición de curvatura promedio para una esfera



$$H = \frac{1}{R} \tag{A.10}$$

la Ec. A.10 nos indica que la curvatura promedio varía en función radio de la esfera, una esfera con  $R \gg 1$  tiene una curvatura promedio muy pequeña, lo cual concuerda con nuestra intuición de curvatura si pensamos en la línea recta como una esfera de radio infinito la cual no se curva, por otro lado una esfera de  $R \ll 1$  tiene una gran curvatura. Utilizando la Ec. A.2 en la Ec. A.10

$$H = \frac{1}{R} = \frac{2h}{a^2 + h^2} = \frac{2h}{a^2 \left[ 1 + \left( \frac{h}{a} \right)^2 \right]} \tag{A.11}$$

reordenando la Ec. A.11

$$a^2 \left[ 1 + \left( \frac{h}{a} \right)^2 \right] H = 2h \tag{A.12}$$

derivando la Ec. A.12 con respecto al tiempo y despejando la variación de la altura con respecto al tiempo obtenemos

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{2} \frac{a \left( 1 + \left( \frac{h}{a} \right)^2 \right) dH}{\frac{1}{a} - H \left( \frac{h}{a} \right)} dt \tag{A.13}$$

sustituyendo la Ec. A.13 en la Ec. A.9

$$Q_s(t) = \frac{\pi}{2} a^2 \left[ 1 + \left( \frac{h}{a} \right)^2 \right] \times \frac{1}{2} \frac{\left\{ a \left[ 1 + \left( \frac{h}{a} \right)^2 \right] \right\}}{\left[ \frac{1}{a} - H \left( \frac{h}{a} \right) \right]} \frac{dH}{dt} \tag{A.14}$$

la Ec. A.14 es la ecuación que relaciona el flujo volumétrico con la curvatura promedio, podemos observar, aunque se ha utilizado la geometría que tiene la curvatura promedio más simple obtenemos una ecuación diferencial no lineal, en



este trabajo se utiliza una aproximación haciendo que el cociente  $a/h$  sea muy pequeño i.e.

$$\frac{h}{a} \ll 1 \quad \text{A.15}$$

físicamente esta aproximación nos dice que la deformación de la membrana es muy pequeña y los fluidos viscoelásticos se encuentran en el régimen de viscoelasticidad lineal de tal modo que

$$Q_s(t) = \frac{\pi}{4} a^4 \frac{dH}{dt} \quad \text{A.16}$$

la Ec. A.16 solo es deducida para el movimiento en la parte superior, en el modelo de este trabajo la membrana oscila formando un domo superior e inferior de tal modo que el flujo volumétrico total es el doble de la Ec. A.16

$$Q(t) = 2Q_s(t) = \frac{\pi}{2} a^4 \frac{dH}{dt} \quad \text{A.17}$$

finalmente, el flujo volumétrico debe ser una cantidad física real y positiva, por lo tanto

$$Q(t) = -\frac{\pi}{2} a^4 \frac{dH}{dt} \quad \text{A.18}$$



## Apéndice B

En este apartado se muestran las variables para adimensionalizar las ecuaciones gobernantes tanto para la curvatura promedio  $H$  como para el flujo volumétrico  $Q$ .

Se definen las variables adimensionales para el campo eléctrico, curvatura promedio, tiempo, frecuencia, propiedades viscoelásticas y parámetro  $\beta$

$$\begin{aligned}\bar{E} &= \frac{E}{E_0}; \bar{H} = aH; \bar{t} = \frac{t}{\Sigma_{\lambda_M}}; \bar{\omega} = \omega \Sigma_{\lambda_M}; \bar{Q} = \frac{Q}{\pi a^3 / \Sigma_{\lambda_M}} \\ \bar{G}_i &= \frac{G_i}{\Sigma_G}; \bar{\lambda}_i = \frac{\lambda_i}{\Sigma_\lambda}; \bar{\beta} = \beta a \\ \Sigma_\lambda &= \lambda_t + \lambda_b; \Sigma_G = G_t + G_b; \Sigma_{\bar{\eta}} = \bar{\eta}_t + \bar{\eta}_b = \bar{G}_t \bar{\lambda}_t + \bar{G}_b \bar{\lambda}_b \\ \bar{G}_t + \bar{G}_b &= 1 \\ \bar{\lambda}_t + \bar{\lambda}_b &= 1\end{aligned}\tag{B.1}$$

utilizando las ecuaciones B.1 en las ecuaciones D.5 y D.6 del apéndice D obtenemos la ecuación diferencial adimensional que relaciona la curvatura promedio con el campo eléctrico

$$\begin{aligned}b_3^* \frac{d^3 \bar{H}(\bar{t})}{d\bar{t}^3} + b_2^* \frac{d^2 \bar{H}(\bar{t})}{d\bar{t}^2} + b_1^* \frac{d\bar{H}(\bar{t})}{d\bar{t}} + b_0^* \bar{H}(\bar{t}) &= \\ a_0^* \left( \frac{1-k}{k} \right) \left( a_2^* \frac{d^2 \bar{E}(\bar{t})}{d\bar{t}^2} + a_1^* \frac{d\bar{E}(\bar{t})}{d\bar{t}} + \bar{E}(\bar{t}) \right) & \\ b_3^* &= \left( \frac{1-k}{k} \right) (\bar{\eta}_{0t} \bar{\lambda}_b \bar{\lambda}_{Jt} + \bar{\eta}_{0b} \bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_{Jb}) \\ b_2^* &= \frac{\bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b}{k} + \left( \frac{1-k}{k} \right) (\bar{\eta}_{0t} \bar{\lambda}_{Jt} + \bar{\eta}_{0b} \bar{\lambda}_{Jb}) \\ b_1^* &= 1 + \left( \frac{1-k}{k} \right) (\bar{\eta}_{0t} + \bar{\eta}_{0b}) \\ b_0^* &= 1 \\ a_2^* &= \bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b\end{aligned}\tag{B.3 (a, b, c, d, e)}$$

donde se definen las siguientes expresiones



$$k = \frac{\bar{M}}{\bar{M} + (\bar{G}_t + \bar{G}_b)} = \frac{\bar{M}}{\bar{M} + 1}$$

$$a_0^* = \frac{C_f \Im E_0 a}{4L\Sigma_G}$$

B.4(a, b)

De manera similar partiendo de la ecuación que relaciona el flujo volumétrico con la curvatura promedio obteniendo la ecuación diferencial que relaciona el flujo volumétrico en función del campo eléctrico y adimensionalizando las variables con las ecuaciones B.1 obtenemos la ecuación diferencial que describe la relación adimensional que existe entre el flujo volumétrico y el campo eléctrico

$$b_3^* \frac{d^3 \bar{Q}(\bar{t})}{d\bar{t}^{-3}} + b_2^* \frac{d^2 \bar{Q}(\bar{t})}{d\bar{t}^{-2}} + b_1^* \frac{d \bar{Q}(\bar{t})}{d\bar{t}} + b_0^* \bar{Q}(\bar{t}) =$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right) a_0^* \left(\frac{1-k}{k}\right) \left( a_2^* \frac{d^3 \bar{E}(\bar{t})}{d\bar{t}^{-3}} + a_1^* \frac{d^2 \bar{E}(\bar{t})}{d\bar{t}^{-2}} + \frac{d \bar{E}(\bar{t})}{d\bar{t}} \right)$$

B.5

los coeficientes de la Ec. B.5 están dados por las ecuaciones B.3 y B.4(a,b), generalizando en una ecuación de un solo parámetro finalmente

$$L_0 \{O_\alpha(\bar{t})\} = \left(-\frac{1}{2}\right)^\alpha a_0^* \left(\frac{1-k}{k}\right) L_1 \{I(\bar{t})\}$$

B.6

donde

$$O_\alpha(\bar{t}) = \begin{cases} \bar{H}(\bar{t}) : \alpha = 0 \\ \bar{Q}(\bar{t}) : \alpha = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{Salida} \\ \text{Entrada} \end{matrix} \quad I(\bar{t}) = E(\bar{t})$$

$$L_0 = b_3^* \frac{d^3}{d\bar{t}^{-3}} + b_2^* \frac{d^2}{d\bar{t}^{-2}} + b_1^* \frac{d}{d\bar{t}} + b_0^* \Rightarrow \text{Operador Salida}$$

$$L_1 = a_2^* \frac{d^{2+\alpha}}{d\bar{t}^{2+\alpha}} + \frac{d^{1+\alpha}}{d\bar{t}^{1+\alpha}} + \frac{d^\alpha}{d\bar{t}^\alpha} \Rightarrow \text{Operador Entrada}$$

B.7



$$\begin{aligned}b_3^* &= \left(\frac{1-k}{k}\right) \left(\bar{\eta}_{0t} \bar{\lambda}_b \bar{\lambda}_{Jt} + \bar{\eta}_{0b} \bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_{Jb}\right) \\b_2^* &= \frac{\bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b}{k} + \left(\frac{1-k}{k}\right) \left(\bar{\eta}_{0t} \bar{\lambda}_{Jt} + \bar{\eta}_{0b} \bar{\lambda}_{Jb}\right) \\b_1^* &= 1 + \left(\frac{1-k}{k}\right) \left(\bar{\eta}_{0t} + \bar{\eta}_{0b}\right) \\b_0^* &= 1 \\a_2^* &= \bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b\end{aligned}$$

B.8

8





## Apéndice C

La ecuación diferencial que describe la evolución de la curvatura promedio de la membrana es función del tiempo dada por

$$\left\{ b_3^* \frac{\partial^3}{\bar{t}^3} + b_2^* \frac{\partial^2}{\bar{t}^2} + b_1^* \frac{\partial}{\bar{t}} + 1 \right\} \bar{H}(\bar{t}) = a_0^* \frac{1-k}{k} \left\{ a_2^* \frac{\partial^2}{\bar{t}^2} + \frac{\partial}{\bar{t}} + 1 \right\} \bar{E}(\bar{t}) \quad \text{C.1}$$

Para encontrar el espectro de potencia se utiliza una función armónica para el campo eléctrico dado por

$$\bar{E}(\bar{t}) = \cos(\bar{\omega}\bar{t}) \quad \text{C.2}$$

la respuesta como curvatura promedio adimensional  $\bar{H}(\bar{t};\bar{\omega})$  debida al campo eléctrico oscilante puede ser separada en dos módulos, en fase con el campo eléctrico  $\bar{H}_{io}(\bar{\omega})$  y fuera de fase con el campo eléctrico  $\bar{H}_{oi}(\bar{\omega})$

$$\bar{H}(\bar{t};\bar{\omega}) = \bar{H}_{io}(\bar{\omega}) \cos(\bar{\omega}\bar{t}) + \bar{H}_{oi}(\bar{\omega}) \sin(\bar{\omega}\bar{t}) \quad \text{C.3}$$

El flujo volumétrico este dado por  $\bar{Q} = -2^{-1} d\bar{H}(\bar{t};\bar{\omega}) / d\bar{t}$  .

$$\bar{Q}(\bar{t}) = -\frac{1}{2} \bar{\omega} \bar{H}_{oi}(\bar{\omega}) \cos(\bar{\omega}\bar{t}) + \frac{1}{2} \bar{\omega} \bar{H}_{io}(\bar{\omega}) \sin(\bar{\omega}\bar{t}) = \bar{Q}_{io} \cos(\bar{\omega}\bar{t}) + \bar{Q}_{oi} \sin(\bar{\omega}\bar{t}) \quad \text{C.4}$$

la relación entre la curvatura promedio y el flujo volumétrico esta dada por

$$\bar{Q}_{io}(\bar{\omega}) = -\frac{1}{2} \bar{\omega} \bar{H}_{oi}(\bar{\omega}); \bar{Q}_{oi}(\bar{\omega}) = \frac{1}{2} \bar{\omega} \bar{H}_{io}(\bar{\omega}) \quad \text{C.5}$$

El espectro de disipación de potencia esta dado por el integral promedio del flujo volumétrico y el campo eléctrico y puede ser calculado de la siguiente a través de la ecuación C.6



$$\langle \bar{P}(\bar{\omega}) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \bar{P}(\bar{\omega}) d\bar{t} = \frac{\bar{\omega}}{2\pi} \int_0^{2\pi/\bar{\omega}} \bar{E}(\bar{t}) \bar{Q}(\bar{t}) d\bar{t} = \frac{1}{2} \bar{Q}_{io}(\bar{\omega}) = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} \bar{\omega} \bar{H}_{oi}(\bar{\omega}) \right) \quad C.6$$

La función de transferencia para el campo eléctrico de entrada y la curvatura promedio de salida está dada por

$$\bar{R}_0 = \frac{\bar{H}(\bar{t})}{\bar{E}(\bar{t})} = a_0^* \frac{1-k}{k} \frac{a_2^* \partial_{\bar{t}}^2 + \partial_{\bar{t}}^1 + 1}{b_3^* \partial_{\bar{t}}^3 + b_2^* \partial_{\bar{t}}^2 + b_1^* \partial_{\bar{t}}^1 + 1} \quad C.7$$

aplicando la transformada de Fourier a la función de transferencia

$$R_0(\bar{\omega}) = \text{Re}[R_0(\bar{\omega})] + i \text{Im}[R_0(\bar{\omega})] = \frac{\bar{H}(\bar{\omega})}{\bar{E}(\bar{\omega})} = a_0^* \frac{1-k}{k} \frac{1 - a_2^* \bar{\omega}^{-2} + i \bar{\omega}}{1 - b_2^* \bar{\omega}^{-2} + (b_1^* \bar{\omega} - b_3^* \bar{\omega}^{-3}) i} \quad C.8$$

multiplicando por el complejo conjugado y separando la parte real e imaginaria obtenemos

$$R_0(\bar{\omega}) = \left\{ \begin{array}{l} a_0^* \frac{1-k}{k} \frac{(1 - a_2^* \bar{\omega}^{-2})(1 - b_2^* \bar{\omega}^{-2}) + \bar{\omega}^2 (b_1^* \bar{\omega} - b_3^* \bar{\omega}^{-3})}{(1 - b_2^* \bar{\omega}^{-2})^2 + (b_1^* \bar{\omega} - b_3^* \bar{\omega}^{-3})^2} \\ + i a_0^* \frac{1-k}{k} \frac{\bar{\omega} (1 - b_2^* \bar{\omega}^{-2}) - (1 - a_2^* \bar{\omega}^{-2})(b_1^* \bar{\omega} - b_3^* \bar{\omega}^{-3})}{(1 - b_2^* \bar{\omega}^{-2})^2 + (b_1^* \bar{\omega} - b_3^* \bar{\omega}^{-3})^2} \end{array} \right\} \quad C.9$$

realizando el algebra correspondiente encontramos la relación entre el módulo de

curvatura en fase y fuera de fase y la función de transferencia (i)  $\text{Re}[R_0(\bar{\omega})] = \bar{H}_{io}(\bar{\omega})$

, (ii)  $-\text{Im}[R_0(\bar{\omega})] = \bar{H}_{oi}(\bar{\omega})$



$$\text{Re}[R_0(\bar{\omega})] = \frac{a_0^* \frac{1-k}{k} \frac{1 + (b_1^* - (1+k)b_2^* + (1-k)\Sigma_{\lambda, \eta_1}^-) \bar{\omega}^{-2} + ((kb_2^* - (1-k)\Sigma_{\lambda, \eta_1}^-) b_2^* - b_3^*) \bar{\omega}^{-4}}{(1 - b_2^* \bar{\omega}^{-2})^2 + \bar{\omega}^{-2} (b_1^* - b_3^* \bar{\omega}^{-2})^2}}{1} \quad \text{C.10}$$

$$-\text{Im}[R_0(\bar{\omega})] = \frac{a_0^* \frac{1-k}{k} \frac{(b_1^* - 1) \bar{\omega} + ((1 - kb_1^*) b_2^* + (1-k)\Sigma_{\lambda, \eta_1}^- b_1^* - b_3^*) \bar{\omega}^{-3} + (kb_2^* - (1-k)\Sigma_{\lambda, \eta_1}^-) b_3^* \bar{\omega}^{-5}}{(1 - b_2^* \bar{\omega}^{-2})^2 + \bar{\omega}^{-2} (b_1^* - b_3^* \bar{\omega}^{-2})^2}}{1} \quad \text{C.11}$$

La respuesta oscilatoria (curvatura promedio) debida a la aplicación del campo eléctrico está dada

$$\bar{H}(t; \bar{\omega}) = \text{Re}[R_0(\bar{\omega})] \cos(\bar{\omega}t) + (-\text{Im}[R_0(\bar{\omega})]) \sin(\bar{\omega}t) \quad \text{C.12}$$

finalmente, el promedio de la potencia puede ser expresada en términos de la función de transferencia por la ecuación C.13

$$\langle \bar{P}(\bar{\omega}) \rangle = \frac{1}{2} (\text{Re}[R_1(\bar{\omega})]) = \frac{1}{2} (\bar{\omega} \text{Im}[R_0(\bar{\omega})] / 2) \quad \text{C.13}$$



## Bibliografía

- Abou-Dakka, M., Herrera-Valencia, E. E., & Rey, A. D. (2012). Linear oscillatory dynamics of flexoelectric membranes embedded in viscoelastic media with applications to outer hair cells. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 185–186, 1–17. <https://doi.org/10.1016/j.jnnfm.2012.07.007>
- Aguilar Gutierrez, O. F., Herrera Valencia, E. E., & Rey, A. D. (2017). Generalized Boussinesq-Scriven surface fluid model with curvature dissipation for liquid surfaces and membranes. *Journal of Colloid and Interface Science*, 503, 103–114. <https://doi.org/10.1016/j.jcis.2017.05.012>
- Ahmadpoor, F., & Sharma, P. (2015). Flexoelectricity in two-dimensional crystalline and biological membranes. *Nanoscale*, 7(40), 16555–16570. <https://doi.org/10.1039/C5NR04722F>
- Ashmore, J., Avan, P., Brownell, W. E., Dallos, P., Dierkes, K., Fettiplace, R., ... Canlon, B. (2010). The remarkable cochlear amplifier. *Hearing Research*, 266(1–2), 1–17. <https://doi.org/10.1016/j.heares.2010.05.001>
- Brownell, W., Bader, C., Bertrand, D., & de Ribaupierre, Y. (1985). Evoked mechanical responses of isolated cochlear outer hair cells. *Science*, 227(4683), 194–196. <https://doi.org/10.1126/science.3966153>
- Dong, W., & Olson, E. S. (2013). Detection of cochlear amplification and its activation. *Biophysical Journal*, 105(4), 1067–1078. <https://doi.org/10.1016/j.bpj.2013.06.049>
- Ehrenstein, D., & Iwasa, K. H. (1996). Viscoelastic relaxation in the membrane of the auditory outer hair cell. *Biophysical Journal*, 71(2), 1087–1094. [https://doi.org/10.1016/S0006-3495\(96\)79310-4](https://doi.org/10.1016/S0006-3495(96)79310-4)
- Fikus, M., & Pawlowski, P. (1989). Bioelectrorheological model of the cell. 2. Analysis of creep and its experimental verification. *Journal of Theoretical Biology*, 137(4), 365–373. [https://doi.org/10.1016/S0022-5193\(89\)80035-9](https://doi.org/10.1016/S0022-5193(89)80035-9)
- Flores, J., Alastruey, J., & Corvera Poiré, E. (2016). A Novel Analytical Approach to Pulsatile Blood Flow in the Arterial Network. *Annals of Biomedical Engineering*, 44(10), 3047–3068. <https://doi.org/10.1007/s10439-016-1625-3>
- Forest, M. G., Wang, Q., & Zhou, R. (2013). Kinetic theory and simulations of active polar liquid crystalline polymers. *Soft Matter*, 9(21), 5207. <https://doi.org/10.1039/c3sm27736d>
- Geisler, D., & Sang, C. (1995). III .alkH, 2, 132–146.
- Haro, D., & Whitaker, S. (2001). Erratum: Enhancement in the dynamic response of a viscoelastic fluid flowing in a tube [Phys. Rev. E 58, 6323 (1998)].



*Physical Review E - Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics*, 64(3), 1. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.64.039901>

- Hawkins, R. D., & Lovett, M. (2004). The developmental genetics of auditory hair cells. *Human Molecular Genetics*, 13(REV. ISS. 2), 289–296. <https://doi.org/10.1093/hmg/ddh249>
- Herrera-Valencia, E. E., Calderas, F., Medina-Torres, L., Pérez-Camacho, M., Moreno, L., & Manero, O. (2017). On the pulsating flow behavior of a biological fluid: human blood. *Rheologica Acta*, 56(4), 387–407. <https://doi.org/10.1007/s00397-017-0994-3>
- Herrera-Valencia, E. E., & Rey, A. D. (2014). Actuation of flexoelectric membranes in viscoelastic fluids with applications to outer hair cells. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 372(2029), 20130369–20130369. <https://doi.org/10.1098/rsta.2013.0369>
- Iwasa, K. H. (1993). Effect of stress on the membrane capacitance of the auditory outer hair cell. *Biophysical Journal*, 65(1), 492–498. [https://doi.org/10.1016/S0006-3495\(93\)81053-1](https://doi.org/10.1016/S0006-3495(93)81053-1)
- Iwasa, K. H. (2016). Energy Output from a Single Outer Hair Cell. *Biophysical Journal*, 111(11), 2500–2511. <https://doi.org/10.1016/j.bpj.2016.10.021>
- Iwasa, K. H., & Sul, B. (2008). Effect of the cochlear microphonic on the limiting frequency of the mammalian ear. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 124(3), 1607–1612. <https://doi.org/10.1121/1.2953317>
- Jákli, A. (2010). Electro-mechanical effects in liquid crystals. *Liquid Crystals*, 37(6–7), 825–837. <https://doi.org/10.1080/02678291003784081>
- Karavitaki, K. D., & Mountain, D. C. (2007). Evidence for outer hair cell driven oscillatory fluid flow in the tunnel of Corti. *Biophysical Journal*, 92(9), 3284–3293. <https://doi.org/10.1529/biophysj.106.084087>
- Lo, H. M., & Whitaker, S. (1998). Enhancement in the dynamic response of a viscoelastic uid owing in a tube. *Physical Review E*, 58(5), 6323–6327.
- Nam, J. H., Peng, A. W., & Ricci, A. J. (2015). Underestimated Sensitivity of Mammalian Cochlear Hair Cells Due to Splay between Stereociliary Columns. *Biophysical Journal*, 108(11), 2633–2647. <https://doi.org/10.1016/j.bpj.2015.04.028>
- Ó Maoiléidigh, D., & Jülicher, F. (2010). The interplay between active hair bundle motility and electromotility in the cochlea. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 128(3), 1175. <https://doi.org/10.1121/1.3463804>
- Oghalai, J. ~S., Zhao, H.-B., Kutz, J. ~W., & Brownell, W. ~E. (2000). Voltage-and Tension-Dependent Lipid Mobility in the Outer Hair Cell Plasma Membrane. *Science*, 287(January), 658–661.



- Ospeck, M., & Iwasa, K. H. (2012). How close should the outer hair cell RC roll-off frequency  $\omega_c$  be to the characteristic frequency? *Biophysical Journal*, *102*(8), 1767–1774. <https://doi.org/10.1016/j.bpj.2012.02.049>
- Panagopoulos, D. J., Karabarbounis, A., & Margaritis, L. H. (2002). Mechanism for action of electromagnetic fields on cells. *Biochemical and Biophysical Research Communications*, *298*(1), 95–102. [https://doi.org/10.1016/S0006-291X\(02\)02393-8](https://doi.org/10.1016/S0006-291X(02)02393-8)
- Petrov, A. G. (1999). *The lyotropic state of matter : molecular physics and living matter physics*. Gordon and Breach Science Publishers. Retrieved from [https://books.google.com.mx/books/about/The\\_Lyotropic\\_State\\_of\\_Matter.htm?l?id=2joADpIBf-8C&redir\\_esc=y](https://books.google.com.mx/books/about/The_Lyotropic_State_of_Matter.htm?l?id=2joADpIBf-8C&redir_esc=y)
- Petrov, A. G. (2002). Flexoelectricity of model and living membranes. *Biochimica et Biophysica Acta - Biomembranes*, *1561*(1), 1–25. [https://doi.org/10.1016/S0304-4157\(01\)00007-7](https://doi.org/10.1016/S0304-4157(01)00007-7)
- Petrov, A. G. (2006). Electricity and mechanics of biomembrane systems: Flexoelectricity in living membranes. *Analytica Chimica Acta*, *568*(1–2), 70–83. <https://doi.org/10.1016/j.aca.2006.01.108>
- Pollice, P. A., & Brownell, W. E. (1993). Characterization of the outer hair cell's lateral wall membranes. *Hearing Research*, *70*(2), 187–196. [https://doi.org/10.1016/0378-5955\(93\)90157-V](https://doi.org/10.1016/0378-5955(93)90157-V)
- Rabbitt, R. D., Clifford, S., Breneman, K. D., Farrell, B., & Brownell, W. E. (2009). Power efficiency of outer hair cell somatic electromotility. *PLoS Computational Biology*, *5*(7). <https://doi.org/10.1371/journal.pcbi.1000444>
- Raphael, R. M., Popel, A. S., & Brownell, W. E. (2000). A membrane bending model of outer hair cell electromotility. *Biophysical Journal*, *78*(6), 2844–2862. [https://doi.org/10.1016/S0006-3495\(00\)76827-5](https://doi.org/10.1016/S0006-3495(00)76827-5)
- Ren, T., He, W., & Barr-Gillespie, P. G. (2016). Reverse transduction measured in the living cochlea by low-coherence heterodyne interferometry. *Nature Communications*, *7*, 1–9. <https://doi.org/10.1038/ncomms10282>
- Rey, A. D. (2005). Mechanics of soft-solid-liquid-crystal interfaces. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, *72*(1). <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.72.011706>
- Rey, A. D. (2006). Liquid crystal model of membrane flexoelectricity. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, *74*(1), 1–11. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.74.011710>
- Rey, A. D. (2007). Capillary models for liquid crystal fibers, membranes, films, and drops. *Soft Matter*, *3*(11), 1349. <https://doi.org/10.1039/b704248p>
- Rey, A. D. (2008). Linear viscoelastic model for bending and torsional modes in fluid membranes. *Rheologica Acta*, *47*(8), 861–871.



<https://doi.org/10.1007/s00397-008-0259-2>

- Rey, A. D. (2010). Liquid crystal models of biological materials and processes. *Soft Matter*, 6(15), 3402. <https://doi.org/10.1039/b921576j>
- Rey, A. D., & Herrera-Valencia, E. E. (2012). Invited review: Liquid crystal models of biological materials and silk spinning. *Biopolymers*, 97(6), 374–396. <https://doi.org/10.1002/bip.21723>
- Rey, A. D., Herrera-Valencia, E. E., & Murugesan, Y. K. (2014). Structure and dynamics of biological liquid crystals. *Liquid Crystals*, 41(3), 430–451. <https://doi.org/10.1080/02678292.2013.845698>
- Rey, A. D., Servio, P., & Herrera-Valencia, E. E. (2013). Bioinspired model of mechanical energy harvesting based on flexoelectric membranes. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 87(2). <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.87.022505>
- Rey, A. D., Servio, P., & Herrera Valencia, E. E. (2014). Stress-sensor device based on flexoelectric liquid crystalline membranes. *ChemPhysChem*, 15(7), 1405–1412. <https://doi.org/10.1002/cphc.201300600>
- Sachs, F., Brownell, W. E., & Petrov, A. G. (2009). Membrane Electromechanics in Biology , with a Membrane Flexoelectricity : *MRS Bulletin*, 34(September), 665–670.
- Sprott, J. C. (1997). Some simple chaotic jerk functions. *American Journal of Physics*, 65(6), 537–543. <https://doi.org/10.1119/1.18585>
- Wang, Y., Steele, C. R., & Puria, S. (2016). Cochlear Outer-Hair-Cell Power Generation and Viscous Fluid Loss. *Scientific Reports*, 6(January), 1–14. <https://doi.org/10.1038/srep19475>