Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

DESARROLLOS INVARIANTES DE GALILEO DE LAS AMPLITUDES DE DISPERSION NO-RELATIVISTAS

T E S I S

Que para obtener el grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (FISICA)

p r e s e n t a :

JOSE MANUEL PIÑA MARTINEZ

México, D. F. 1976

A mis padres y hermanos

A mi esposa Eddy por su infinito amor y comprensión.

A la memoria de mi hijo José Manuel.

A mis hijas Maribel y Mariana

AGRADECIMIENTO

Mi reconocimiento y mi agradecimiento a mi maestro el Dr. Alfonso Mondragón Ballesteros quién propuso este tema de tesis y lo dirigió hasta su feliz culminación.
Al Dr. Elpidio Chacón por sus valiosas discusiones en algunos tópicos de la teoría de grupos.
A los Drs. Argimiro Bracamonte y Francisco Cañizales Verde Ex-Rector y Ex-Vicerector de la Universidad Centro Occidental Venezuela.
Al Departamento de Física Teórica del Instituto de Física de la U.N.A.M. y a su director el Dr. Mariano Bauer por las facilidades otorgadas al aceptarme como estudiante asociado de dicho departamento.
A la Universidad Centro Occidental Venezuela por haberme concedido Beca-Sueldo durante el período 1973-76.
A la Srita. Irma Orozco quién mecanografió este trabajo.

CAPITULO V

INTRODUCCION

En los últimos años se ha enfocada el estudio de la matriz S relativista desde un punto de vista que pone gran énfasis en la conexión con la teoría de la representación de los grupos y el análisis armónico de funciones sobre grupos. El propósito de este trabajo es el de demostrar como es posible un enfoque semejante para la matriz S no-relativista, de este modo se pone de manifiesto la simetría galileana de los problemas no-relativistas y en particular, se muestra en este trabajo que el concepto de desarrollo en ondas parciales se generaliza fácilmente de manera que un desarrollo en ondas parciales generalizado es un análisis armónico sobre un grupo de simetrias. La amplitud de dispersión y la amplitud de ondas parciales resultan ser transformadas integrales una de otra, la función que actúa como núcleo (Kernel) de la transformación es un elemento de matriz de un operador del grupo de simetrias en una representación apropiada. Los desarrollos obtenidos en este trabajo aparecen como sumas o integrales múltiples a diferencia de los que se usan comunmente que son sumas o integrales simples. Estos son casos particulares de los aquí obtenidos.

El material se distribuye por capítulos y secciones de la manera siguiente:

En el Capítulo I se introducen los conceptos básicos de operador de dispersión o matriz S, la sección eficaz diferencial, se discuten los diversos marcos de referencia así como las transformaciones de Galileo que permiten pasar de un marco de referencia a otro, finalmente se plantea el problema cuya solución es tema de esta tesis.

En el Capítulo II, se introduce la noción de grupo de Galileo y su algebra de Lie, grupo de Euclides y varias cadenas de subgrupos de éste, se hace una clasificación sistemática de las algebras y subalgebras del grupo de Euclides, también se determinan las bases de funciones del espacio de Hilbert apropiados para la descripción de las colisiones de dos partículas sin Spin con ayuda de los operadores invariantes del grupo de Euclides.

En el Capítulo III se muestra la amplitud de dispersión como una función de punto en el espacio de momentos, se definen las variables invariantes de Galileo y se encuentran las relaciones de estas con las variables comunmente usadas. Con ayuda de las bases definidas en el Capítulo II se hace el análisis de Fourier de la amplitud de dispersión sobre las cadenas de grupos $E(3) \supset O(3) \supset O(2)$, $E(3) \supset E(2) \times T_{\perp} \supset O(2) \times T_{\perp}$ y se muestra que en el primer caso se obtiene el desarrollo generalizado en ondas parciales, en el segundo caso se obtienen dos desarrollos uno de los cuales es una generalización del desarrollo iconal (Eikonal) del parámetro de impacto [5,10,16] salvo que él aquí encontrado es exacto y no está restringido a valores de la energía grandes y valores del momento transferido pequeños.

El otro desarrollo cilíndrico es relativamente novedoso y es también un desarrollo iconal en el que el eje de simetría es el momento transferido $\vec{q}$, que es un invariante de Galileo, es también exacto es decir válido para energías y ángulos arbitrarios, y coincide con el límite no-relativista del desarrollo en ondas parciales en el canal cruzado de la amplitud de dispersión relativista como ha sido demostrado por G. Cocho et al y G. Cocho, A. Mondragón, Colón Vela[9,11].

En el Capítulo IV se generaliza el análisis para el caso en que las partículas que chocan tienen Spin, se discute brevemente algunas consecuencias de la invariancia galileana, se introduce el formalismo de la helicidad y se muestra la relación que tiene con el formalismo de los armónicos esféricos vectoriales.

En el Capítulo V se hacen los análisis "esféricos"y "cilíndricos" para partículas con Spin con las bases definidas por los operadores invariantes de las cadenas de grupos $E(3) \supset O(3) \supset O(2)$ y $E(3) \supset E(2) \times T_{\perp} \supset O(2) \times T_{\perp}$ respectivamente, se obtienen representaciones integrales de la amplitud de dispersión como series o integrales dobles cuyo núcleo (Kernel) son elementos de matriz de operadores de los subgrupos de E(3).

Estos desarrollos son la generalización natural de los encontrados antes para el caso en que las partículas no tienen Spin.

El desarrollo esférico no es más que el análisis en ondas parciales para partículas con Spin en el formalismo de la helicidad discutido por Jacob y Wick[18].

Los desarrollos cilíndricos que aparecen aquí como "análisis en ondas parciales generalizado" son representaciones iconales (eikonal) de la amplitud de dispersión para partículas con Spin. La representación iconal del parámetro de impacto que se discute en este trabajo tiene como eje de simetría $(\vec{p}-\vec{q})$ en el caso de que todas las masas de las partículas sean iguales donde $\vec{p}$ es el impulso total en el sistema de referencia del laboratorio y $\vec{q}$ es el momento transferido y es exacta para angulos y energías arbitrarias y también para Spines arbitrarios de las partículas. La representación iconal del momento transferido tiene como eje de simetría la dirección del momento transferido, $\vec{q}$ y es válida para todos los valores de la energía, del ángulo de dispersión y Spines de las partículas.

Este desarrollo ha sido discutido antes por otros autores[9,11] quienes obtienen resultados semejantes a los de este trabajo por un procedimiento ligeramente diferente. Finalmente en el Capítulo VI se discute el significado de los resultados obtenidos y se hacen algunos comentarios.

CAPITULO I

I.1 - Descripción de las colisiones en la mecánica cuántica.

En mecánica cuántica el estado de un sistema físico se describe con ayuda de vectores de estados $|\psi_t\rangle$ que satisfacen la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo:

$$i \frac{d}{dt} |\psi_t\rangle = H |\psi_t\rangle \tag{1}$$

La solución de esta ecuación se puede escribir como:

$$|\psi_t\rangle = U(t) |\psi\rangle \equiv e^{-iHt} |\psi\rangle$$

donde $U(t)$ se llama el operador de evolución y $|\psi\rangle$ es un vector del espacio de Hilbert apropiado.

Supondremos que $|\psi_t\rangle$ describe la evolución de un sistema formado por dos partículas. Antes de la colisión $\lim_{t \to -\infty} U(t) |\psi\rangle$ representa un paquete de ondas libres que describe el movimiento de las partículas que se aproximan una a otra y mucho después de la colisión $\lim_{t \to +\infty} U(t) |\psi\rangle$ representa un paquete de ondas que describe el movimiento de dos partículas libres que se alejan una de la otra. El movimiento de una partícula libre esta dado por el operador de evolución libre $U^0(t) = e^{-iH^0 t}$ y entonces cuando $t \to -\infty$

$$\lim_{t \to -\infty} U(t) |\psi\rangle = \lim_{t \to -\infty} U^0(t) |\psi_{in}\rangle \quad \text{antes de la colisión}$$

Similarmente, despues de la colisión

$$\lim_{t \to \infty} U(t)|\Psi\rangle = \lim_{t \to \infty} U^{\circ}(t)\,|\Psi_{out}\rangle$$

Multiplicando por $U^{+}(t)$ las dos últimas expresiones se tiene

$$\lim_{t \to -\infty} U^{+}(t)\,U(t)|\Psi\rangle = \lim_{t \to -\infty} U^{+}(t)\,U^{\circ}(t)\,|\Psi_{in}\rangle$$

$$\lim_{t \to +\infty} U^{+}(t)\,U(t)|\Psi\rangle = \lim_{t\, +\infty} U^{+}(t)\,U^{\circ}(t)\,|\Psi_{out}\rangle$$

Las cuales se pueden escribir como:

$$|\Psi\rangle = \lim_{t \to -\infty} U^{+}(t)\,U^{\circ}(t)\,|\Psi_{in}\rangle \equiv \Omega_{+}\,|\Psi_{in}\rangle$$

$$|\Psi\rangle = \lim_{t \to +\infty} U^{+}(t)\,U^{\circ}(t)|\Psi_{out}\rangle \equiv \Omega_{-}\,|\Psi_{out}\rangle$$

Los dos operadores $\Omega_{\pm}$, definidos como el límite

$$\Omega_{\pm} = \lim_{t \to \mp\infty} U(t)^{+}\,U^{\circ}(t)$$

son llamados los operadores de Møller.[1,2]

I.2 - El operador de dispersión o matriz S.

Teniamos que $|\Psi\rangle = \Omega_{-}\,|\Psi_{out}\rangle$ multiplicando por la izquierda por Ω_{-}^{+} , $\Omega_{-}^{+}\,|\Psi\rangle = \Omega_{-}^{+}\,\Omega_{-}\,|\Psi_{out}\rangle$ entonces $|\Psi_{out}\rangle = \Omega_{-}^{+}\,|\Psi\rangle$ ya que $\Omega_{-}^{+}\,\Omega_{-} = 1$

La cual se puede escribir también como:

$|\Psi_{out}\rangle = \Omega_{-}^{+}\,\Omega_{+}\,|\Psi_{in}\rangle$ si definimos el operador de dispersión o matriz S como:

$$S = \Omega^{\dagger} \Omega_{+} \qquad (2)$$

Podemos escribir el estado saliente $|\psi_{out}\rangle$ en función del estado entrante $|\psi_{in}\rangle$ en la siguiente forma

$$|\psi_{out}\rangle = S\,|\psi_{in}\rangle \qquad (3)$$

Si dos partículas que inicialmente estan en un estado asintótico $|\psi_{in}\rangle$ chocan, después de un tiempo relativamente grande comparado con el tiempo que dura la colisión, su estado se puede expresar de la siguiente forma $|\psi_{out}\rangle = S\,|\psi_{in}\rangle$

Ya que solamente el movimiento libre es observable en el laboratorio, el operador S contiene toda la información de interés experimental. Vamos a definir a continuación la sección eficaz diferencial y su relación con la matriz S.

I.3 - La sección eficaz diferencial.

La sección eficaz diferencial está definida como:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dN_{sc}/d\Omega}{dN_{inc}/dA} \qquad (4)$$

donde dN_{sc} es el número de partículas por unidad de angulo sólido y por unidad de tiempo y dN_{inc} es el número de partículas por unidad de área y por unidad de tiempo.

La relación entre la matriz S y la sección eficaz diferencial es:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{2\pi}{p}\right)^2 \left| \langle \psi_{out} | (S-1) | \psi_{in} \rangle \right|^2 \qquad (5)$$

La sección eficaz diferencial es la cantidad que es experimentalmente observable[3,4].

I.4 - Sistemas de referencia.

Aunque todas nuestras medidas las efectuamos en el sistema de laboratorio es necesario introducir otros sistemas de referencia en las cuales las simetrías del problema sean más evidentes. En este trabajo introduciremos el sistema de referencia del centro de masa que se define por el requisito que en éste el momento total del sistema sea nulo, en este marco de referencia se discutira la simetría respecto de rotaciones en el espacio.

Los dos sistemas de Breit o pared de ladrillos asociados a dos direcciones especificadas por el experimento la del momento total $\vec{P}$ y la del momento transferido $\vec{q}$ en estos sistemas de referencia la discusión de la simetria translacional es particularmente simple.

I.5 - Sistema de referencia del centro de masa.

El sistema del centro de masa se define por las condiciones $\vec{P} = 0$, $\vec{p}_1^{\,c.M} = -\vec{p}_2^{\,c.M}$, $\vec{p}_3^{\,c.M} = -\vec{p}_4^{\,c.M}$

donde $\vec{p}_1$ y $\vec{p}_2$ son los momentos de las partículas antes de la colisión y $\vec{p}_3$, $\vec{p}_4$ son los momentos despues de la colisión y $\vec{P}$ es el momento lineal total.

Consideraremos reacciones del tipo $1+2 \rightarrow 3+4$

con $m_1 = m_3$, $m_2 = m_4$

La conservación del momento lineal nos dice:

$$\vec{p}_1^{\,c.m} + \vec{p}_2^{\,c.m} = \vec{P} = cte = \vec{p}_3^{\,c.m} + \vec{p}_4^{\,c.m} \tag{6}$$

La conservación de la energía nos dice

$$\frac{\vec{p}_1^{\,2\,c.m}}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^{\,2\,c.m}}{2m_2} = \frac{\vec{p}_3^{\,2\,c.m}}{2m_1} + \frac{\vec{p}_4^{\,2\,c.m}}{2m_2} = cte \tag{7}$$

I.6 - <u>Relación entre el sistema del centro de masa y el sistema de Laboratorio.</u>

<u>Datos</u>

<u>antes de la colisión</u>	<u>Después de la colisión</u>
$\vec{p}_1^{\,L} = \vec{P}^L$	$\vec{p}_3^{\,L}$
$\vec{p}_2^{\,L} = 0$	$\vec{p}_4^{\,L}$

Debemos sumar una velocidad constante a la velocidad del centro de masa para obtener la velocidad en el sistema de Laboratio

$$\begin{aligned} \vec{v}_1^{\,L} &= \vec{v}_1^{\,c.m} + \vec{V}^{c.m} \\ 0 &= \vec{v}_2^{\,c.m} + \vec{V}^{c.m} \end{aligned} \tag{8}$$

múltiplicando por m_1 la primera de las ecuaciones (8) y por m_2 la segunda de las ecs. (8) se tiene:

$$m_1 \vec{V}_1^{L} = m_1 \vec{V}_1^{c.M} + m_1 \vec{V}^{c.M} \tag{9}$$

$$0 = m_2 \vec{V}_2^{c.M} + m_2 \vec{V}^{c.M} \tag{10}$$

Sumando (9) y (10) y despejando $(V^{c.M})^{L}$ entonces

$$\vec{V}^{c.M} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{V}_1^{L} \tag{11}$$

Esta velocidad es la velocidad del centro de masa medida con respecto al sistema de laboratorio.

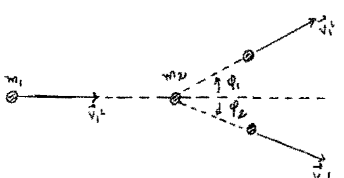
Podemos entonces conocer $V_1^{c.M}$ en función V_1^{L} de la siguiente manera:

$$\vec{V}_1^{c.M} = \vec{V}_1^{L} - \vec{V}^{c.M} = \vec{V}_1^{L} - \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{V}_1^{L} = \frac{m_1 + m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\vec{V}_1^{L}$$

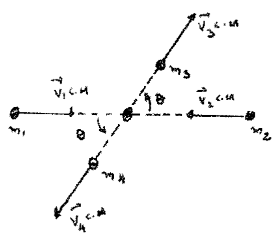
$$\therefore \quad \vec{V}_1^{c.M} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{V}_1^{L} \tag{12}$$

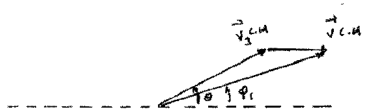
de igual manera:

$$\vec{V}_2^{c.M} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{V}_1^{L} \tag{13}$$



Sistema de Laboratorio





Relación entre la velocidad en el sistema de laboratorio y el sistema del centro de masa

La relación entre los vectores velocidad $\vec{V}^{C.M}$, $\vec{V}_1^{L}$ y $\vec{V}_1^{C.M}$ es la siguiente:

$$V_1^L \operatorname{sen} \varphi_1 = V_3^{C.M} \operatorname{sen} \theta \tag{14}$$

$$V_1^L \cos \varphi_1 = V_3^{C.M} \cos \theta + V^{C.M} \tag{15}$$

de (14) y (15) dividiendo conseguimos la ecuación que expresa los angulos de dispersión en la siguiente forma:

$$\operatorname{Tg} \varphi_1 = \frac{V_3^{C.M} \operatorname{sen} \theta}{V_3^{C.M} \cos \theta + V^{C.M}} \tag{16}$$

I.7 - Relación entre los momentos en el sistema de Laboratorio y el sistema de centro de masa.

De la ecuación (12) múltiplicando por m_1 se tiene:

$$m_1 \vec{V}_1^{C.M} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} m_1 \vec{V}_1^{L}$$

$$\therefore \quad \vec{p}_1^{C.M} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{p}_1^{L} \tag{17}$$

ya que $\vec{p}_1^{C.M} = -\vec{p}_2^{C.M}$ entonces:

$$\vec{p}_2^{C.M} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{p}_1^{L} \tag{18}$$

busquemos $\vec{p}_3$ y $\vec{p}_4$

$$\vec{V}_3^{L} = \vec{V}_3^{C.M} + V_{C.M}^{L} \quad \therefore \quad \vec{V}_3^{C.M} = \vec{V}_3^{L} - \vec{V}^{C.M} \qquad \text{con} \quad \vec{V}^{C.M} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{V}_1^{L}$$

$$\therefore \quad \vec{V}_3^{C.M} = \vec{V}_3^{L} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{V}_1^{L} = \frac{(m_1 + m_2)\vec{V}_3^{L} - m_1 \vec{V}_1^{L}}{m_1 + m_2}$$

multiplicando por m_3 se tiene:

$$\vec{p}_3^{C.M} = \vec{p}_3^{L} - \frac{m_3}{m_1 + m_2} \vec{p}_1^{L} \tag{19}$$

pero $\vec{p}_3 = -\vec{p}_4$ de tal modo que :

$$\vec{p}_4^{\,c.M} = \frac{m_3}{m_1+m_2}\,\vec{p}_1^{\,L} - \vec{p}_3^{\,L} \tag{20}$$

I.8 - <u>La relación entre la energía en el sistema de Laboratorio y el sistema del centro de masa.</u>

La energía cinética de la partícula 1 en el sistema del centro de masa es:

$$E_1 = \frac{\vec{p}_1^{\,2\,c.M}}{2m_1} = \left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)^2 \frac{p_1^{2L}}{2m_1}$$ donde se usa la ec.(17) .

La cual se puede escribir también como:

$$E_L = \frac{(m_1+m_2)^2}{m_2^2}\,\frac{p_1^{2\,c.M}}{2m_1} = \left(\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}\right)^2 \frac{m_1}{2}\,\vec{p}_1^{\,2\,c.M} = \frac{m_1}{2}\left[\frac{m_1^2+2m_1m_2+m_2^2}{m_1^2 m_2^2}\right] p_1^{2\,c.M}$$

La cual se puede reordenar de la siguiente manera

$$E_L = \frac{m_1}{2}\left[\frac{1}{m_2^2} + \frac{2}{m_1 m_2} + \frac{1}{m_1^2}\right] p_1^{2\,c.M} = \frac{p_1^{2\,c.M}}{2m_1} + \frac{p_1^{2\,c.M}}{m_2} + \frac{m_1 p_1^{2\,c.M}}{2m_2^2}$$

En el sistema del centro de masa se tiene $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$ tomaremos en cuenta este hecho y ademas sumaremos y restaremos $\frac{\vec{p}_2^{\,2\,c.M}}{2m_2}$ entonces:

$$E_L = \frac{p_1^{2\,c.M}}{2m_1} + \frac{p_1^{2\,c.M}}{m_2} + \frac{m_1}{2m_2^2}\,p_1^{2\,c.M} - \frac{p_2^{2\,c.M}}{2m_2} + \frac{p_2^{2\,c.M}}{2m_2}$$

ya que $$E^{c.M} = \frac{p_1^{2\,c.M}}{2m_1} + \frac{p_2^{2\,c.M}}{2m_2} = \frac{m_2+m_1}{2m_1m_2}\,p_1^{2\,c.M} = E_r$$

$$E_L = E_r + \frac{p_1^{2\,c.M}}{m_2} + \frac{m_1}{2m_2^2}\,p_1^{2\,c.M} - \frac{p_1^{2\,c.M}}{2m_2} = E_r + \frac{p_1^{2\,c.M}}{2m_2} + \frac{m_1 p_1^{2\,c.M}}{2m_2^2}$$

La cual se puede escribir también como:

$$E_L = E_r + \frac{m_2 p_1^{2\,c.M} + m_1 p_1^{2\,c.M}}{2 m_2^2} = E_r + \frac{M}{2 m_2^2} \vec{p}_1^{\,2\,c.M} \quad \text{con} \quad M = m_1 + m_2$$

segun la ec.(17) $\vec{p}_1^{\,L} = \vec{P} = \frac{M}{m_2} \vec{p}_1^{\,c.M}$

de tal manera que:

$$E_L = E_r + \frac{M}{2 m_2^2} \frac{m_2^2}{M^2} P^2 = E_r + \frac{P^2}{2M}$$

El resultado anterior nos dice que la energía total es igual a la energía del movimiento relativo más la energía del movimiento del centro de masa.

I.9 - El sistema de Breit o de la pared de ladrillo del momento transferido.

Este marco de referencia lo obtenemos cuando tomamos el momento transferido en la dirección del eje z y además exigimos que: $\vec{p}_2 = -\vec{p}_4$ ($\vec{p}_2$ y $\vec{p}_4$ son los momentos de las partículas 2 y 4)

Como el momento transferido es un invariante de Galileo si sigue:

$$\vec{p}_4^{\,L} - \vec{p}_2^{\,L} = \vec{q} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{p}_4^{\,L} = \vec{q}$$

y en el sistema del momento transferido:

$$\vec{p}_4^{\,B} - \vec{p}_2^{\,B} = \vec{q}$$ de donde es obvio que:

$$\vec{p}_4^{\,B} = \frac{1}{2}\vec{q} = \vec{q}_\perp \qquad \text{y} \qquad \vec{p}_2^{\,B} = -\frac{1}{2}\vec{q} = -\vec{q}_\perp$$

De la elección del eje z en la dirección de $\vec{q}$ entonces

$\vec{p}_2^{\,B} = (0, 0, -q_\perp)$ y $\vec{p}_4^{\,B} = (0, 0, q_\perp)$

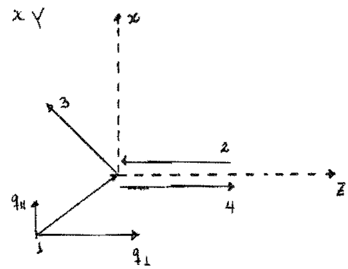
El vector $\vec{p}_1^{\,B}$ y $\vec{p}_3^{\,B}$ van a tener las siguientes coordenadas:

$\vec{p}_1^{\,B} = (q_\parallel, 0, q_\perp)$ y $\vec{p}_3^{\,B} = (q_\parallel, 0, -q_\perp)$

Sumando $\vec{p}_1^{\,B}$ y $\vec{p}_3^{\,B}$

$\vec{p}_1^{\,B} + \vec{p}_3^{\,B} = 2\vec{q}_\parallel \quad \therefore \quad \vec{q}_\parallel = \frac{1}{2}(\vec{p}_1^{\,B} + \vec{p}_3^{\,B})$

El subindice de q indica si la componente es paralela o perpendicular al sistema de pared de ladrillos identificado con el plano xY



Sistema de pared de ladrillo del momento transferido

I.10 - Transformación del sistema de Laboratorio al sistema de pared de ladrillos del momento transferido.

Calculemos la velocidad que le debemos sumar a la velocidad de laboratorio para obtener la misma velocidad en el sistema de Breit

$$\vec{V}_1^{\,B} = \vec{V}_1^{\,L} + \vec{V} \tag{21}$$

$$\vec{V}_2^{\,B} = \vec{V}_2^{\,L} + \vec{V} \tag{22}$$

de la ecuacion (22) se concluye que:

$\vec{V}_2^B = \vec{V}$ pero $\vec{p}_2^B = -\frac{1}{2}\vec{q}$

de donde obviamente $$\vec{V} = -\frac{1}{2}\frac{\vec{q}}{m_2} \qquad (23)$$

entonces:

$$\vec{p}_1^B = \vec{p}_1^L - \frac{1}{2}\mu\vec{q} \qquad \vec{p}_2^B = -\frac{1}{2}\vec{q}$$
$$\vec{p}_3^B = \vec{p}_3^L - \frac{1}{2}\mu\vec{q} \qquad \vec{p}_4^B = \vec{p}_4^L - \frac{1}{2}\vec{q} = \frac{1}{2}\vec{q}$$

I.11 - <u>Relación entre la energía en el sistema de Laboratorio y el sistema de pared de ladrillo del momento transferido.</u>

La energía total en el sistema de Breit es:

$$E^B = \frac{\vec{p}_1^{2B}}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^{2B}}{2m_2} = \frac{\vec{p}_1^{2L} - \mu\vec{q}\cdot\vec{p}_1^L + \frac{1}{4}\mu^2 q^2}{2m_1} + \frac{q^2/4}{2m_2}$$

La cual se puede escribir también como:

$$E^B = \frac{\vec{p}_1^{2L}}{2m_1} - \frac{1}{2m_2}\vec{q}\cdot\vec{p}_1^L + \frac{m_1}{8m_2^2}q^2 + \frac{q^2}{8m_2}$$

$$E^B = E^L + \frac{1}{2m_2}\left[-\vec{P}^L + \frac{1}{4}(1+\mu)\vec{q}\right]\cdot\vec{q} \qquad (24)$$

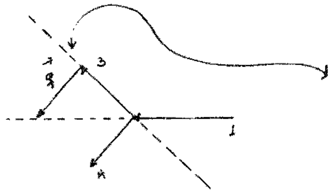
Vamos a ver una colisión en el sistema de laboratorio y como se veria ésta en el sistema de pared de ladrillo del momento transferido:

<u>después de la colisión</u>

$$\vec{p}_3^L = \vec{P} - \vec{q}$$
$$\vec{p}_4^L = \vec{q}$$

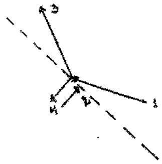
<u>antes de la colisión</u>

$$\vec{p}_1^L = \vec{P}$$
$$\vec{p}_2^L = 0$$



Pared de ladrillo

La colisión en el sistema de Laboratorio



<u>después de la colisión</u>

$$\vec{p}_3^{\,B} = \vec{p}_3^{\,L} - \frac{1}{2}\mu\vec{q}$$

$$\vec{p}_4^{\,B} = \frac{1}{2}\vec{q}$$

<u>antes de la colisión</u>

$$\vec{p}_1^{\,B} = \vec{p}_1^{\,L} - \frac{1}{2}\mu\vec{q}$$

$$\vec{p}_2^{\,B} = -\frac{1}{2}\vec{q}$$

I.12 - <u>El sistema de referencia de pared de ladrillo del parámetro de impacto</u>.

Este sistema de referencia se define como:

$$-\vec{p}_2^{\,B} \parallel \vec{p}_3^{\,B} \quad y \quad E_1 = E_4 \, , \quad E_2 = E_3$$

La velocidad de transformación del sistema de laboratorio al sistema de pared de ladrillo viene dada por:

$$\vec{V} = \vec{V}_L^{\,B} - \vec{V}_L^{\,L}$$

de la condición $-\vec{p}_2^{\,B} \parallel \vec{p}_3^{\,B}$ se concluye que:

$$-(\vec{v}_2^{\,L} + \vec{v}) \parallel (\vec{v}_3^{\,L} + \vec{v}) \quad \text{como} \quad \vec{v}_2^{\,L} = 0 \quad y \quad \vec{v}_3^{\,L} = \frac{1}{m_1}(\vec{p}^{\,L} - \vec{q}) \tag{24}$$

$$\vec{v} \parallel \frac{1}{m_1}(\vec{p}^{\,L} - \vec{q}) \quad \therefore \quad \vec{v} = \frac{\alpha}{m_1}(\vec{p}^{\,L} - \vec{q}) \tag{25}$$

Averiguemos cuanto vale α y para ello utilizaremos la condición $E_2^B = E_3^B$

$$\frac{1}{2m_2}(0 + v)^2 = \frac{1}{2m_3}(v_3^L + v)^2 \tag{26}$$

Sustituyendo (24) y (25) en (26)

$$\frac{m_2}{2}\,\frac{\alpha^2}{m_1^2}\,(\vec{p}^L-\vec{q})^2 = \frac{m_3}{2}\left[\frac{1}{m_1}(\vec{p}^L-\vec{q}) + \frac{\alpha}{m_1}(\vec{p}^L-\vec{q})\right]^2$$

de donde se sigue que:

$$\left(\frac{m_2}{m_1}-1\right)\alpha^2 - 2\alpha - 1 = 0 \tag{27}$$

La cual tiene la solución:

$$\alpha = \frac{1\pm\sqrt{1+\left(\frac{1}{\mu}-1\right)}}{\frac{1}{\mu}-1} \tag{28}$$

Eligiendo $\qquad \alpha = \dfrac{\mu}{1-\mu} - \dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{\mu}-1}}{\frac{1}{\mu}-1}$ (29)

se escoge la solución negativa para que $-\vec{p}_2^{\,B} \parallel \vec{p}_3^{\,B}$

La velocidad de transformación:

$$\vec{V} = \frac{1}{m_1}\left[\frac{\mu}{1-\mu} - \frac{\sqrt{\frac{1}{\mu}}}{\frac{1}{\mu}-1}\right](\vec{P}-\vec{q}) \tag{30}$$

Los momentos de las partículas en el sistema de Breit son:

$$\vec{p}_1^{\,B} = \vec{p}_1^{\,L} + \left[\frac{\mu}{1-\mu} \qquad \frac{\sqrt{\mu}}{1-\mu}\right](\vec{P}-\vec{q}) \tag{31}$$

$$\vec{p}_2^{\,B} = \frac{1}{\mu}\left[\frac{\mu}{1-\mu} - \frac{\sqrt{\mu}}{1-\mu}\right](\vec{P}-\vec{q}) \tag{32}$$

$$\vec{p}_3^{\,B} = -\frac{\sqrt{\mu}}{\mu}\left[\frac{\mu}{1-\mu} - \frac{\sqrt{\mu}}{1-\mu}\right](\vec{P}-\vec{q}) \tag{33}$$

$$\vec{p}_4^{\,B} = \vec{p}_4^{\,L} + \frac{1}{\mu}\left[\frac{\mu}{1-\mu} - \frac{\sqrt{\mu}}{1-\mu}\right](\vec{P}-\vec{q}) \tag{34}$$

de (32) y (33) es fácil ver que:

$$\vec{p}_3^{\,B} = -\sqrt{\mu}\,\vec{q} = \vec{p}_2^{\,B} \tag{35}$$

con:

$$q = \frac{1}{\mu} \left[\frac{\mu}{1-\mu} - \frac{\sqrt{\mu}}{1-\mu} \right] \tag{36}$$

El momento de las partículas 2 y 3 en el sistema del parámetro de impacto son:

$$\vec{p}_2^{\,B} = (0, 0, q) \qquad\qquad \vec{p}_3^{\,B} = (0, 0, -\sqrt{\mu}\, q)$$

Definamos a continuación las componentes: paralelas y perpendiculares a nuestro plano de la siguiente manera:

$$\vec{p}_2^{\,B} = \frac{1}{2} (\vec{p}_2^{\,B} + \vec{p}_4^{\,B}) - \frac{1}{2} (\vec{p}_4^{\,B} - \vec{p}_2^{\,B}) \tag{37}$$

$$\vec{p}_{\parallel} \equiv \frac{1}{2} (\vec{p}_4^{\,B} - \vec{p}_2^{\,B}) = \frac{1}{2} \left\{ \vec{p}_4^{\,L} + \frac{1}{\mu} \left[\frac{\mu}{1-\mu} - \frac{\sqrt{\mu}}{1-\mu} \right] (\vec{p} - \vec{q}) - \frac{1}{\mu} \left[\frac{\mu}{1-\mu} - \frac{\sqrt{\mu}}{1-\mu} \right] (\vec{p} - \vec{q}) \right\}$$

Pero $\vec{p}_4^{\,L} = \vec{q}$ de donde

$$\vec{p}_{\parallel}' = \frac{1}{2} \vec{q} \tag{38}$$

Análogamente $\vec{P}_{\perp}$ es:

$$\vec{P}_{\perp} = \frac{1}{2} \left\{ \vec{q} + \frac{2}{\mu} \left[\frac{\mu}{1-\mu} - \frac{\sqrt{\mu}}{1-\mu} \right] (\vec{p} - \vec{q}) \right\} \tag{39}$$

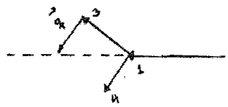
Los momentos de las particulas 1 y 4 son:

$$\vec{p}_1^{\,B} = (p_{\parallel}, 0, p_{\perp}) \qquad \text{y} \qquad \vec{p}_4^{\,B} = (p_{\parallel}, 0, -\tilde{p}_{\perp})$$

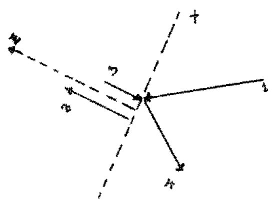
con: $\tilde{p}_{\perp} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left[p_{\perp}^2 + p_{\parallel}^2 (1-\mu) \right]^{\frac{1}{2}}$

y $$q = \frac{1}{1+\sqrt{\mu}} \left\{ p_{\perp} + \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left[p_{\perp}^2 + p_{\parallel}^2 (1-\mu) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}$$

Nuestro sistema de pared de ladrillo del parámetro de impacto queda definido con un plano perpendicular a $(\vec{p}-\vec{q})$ y paralelo a $\vec{q}$.



La colisión 1 + 2 = 3 + 4 en el
sistema de Laboratorio



La colisión 1 + 2 = 3 + 4 en el sistema
del parámetro de impacto.

I.13 - <u>Planteamiento del problema</u>.

El problema que nos proponemos resolver es: dada la amplitud de dispersión, hacer un análisis de Fourier de ella sobre el grupo de Galileo considerando las diferentes cadenas de subgrupos posibles.

El procedimiento a seguir consistirá en obtener eigenfunciones simultáneas de los operadores invariantes del grupo y aprovechar las relaciones de cerradura y ortogonalidad de la base así obtenida para representar la amplitud de dispersión.

CAPITULO II

Las propiedades de muchos sistemas son invariantes bajo transformaciones de Galileo. Nosotros queremos discutir cuales son las consecuencias de que el operador de dispersión sea invariante bajo transformaciones de Galileo, introduciremos en consecuencia el grupo de Galileo.

El grupo de Galileo esta definido por las siguientes operaciones dadas en la tabla siguiente:

Operaciones del grupo	Generadores infinitesimales	Estructura
(1) Generador de rotaciones alrededor del eje	$L_i = -i\, \epsilon_{ikl}\, x_k \frac{\partial}{\partial x_l}$	$L_x = -i\left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y}\right)$ $L_y = -i\left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z}\right)$ $L_z = -i\left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}\right)$
(2) Generadores de translaciones en las tres direcciones espaciales	$P_i = -i \frac{\partial}{\partial x_i}$	$P_x = -i \frac{\partial}{\partial x}$ $P_y = -i \frac{\partial}{\partial y}$ $P_z = -i \frac{\partial}{\partial z}$
(3) Desplazamiento del origen del tiempo	$T = \frac{\partial}{\partial t}$	$T = \frac{\partial}{\partial t}$
(4) Generador de incrementos de velocidades en las tres direcciones espaciales (boosts)	$V_i = -i t \frac{\partial}{\partial x_i}$	$V_x = -i t \frac{\partial}{\partial x}$ $V_y = -i t \frac{\partial}{\partial y}$ $V_z = -i t \frac{\partial}{\partial z}$

Las reglas de conmutación de los generadores son:

$$[L_i, L_k] = i\,\epsilon_{ikl}\, L_l$$
$$[L_i, P_k] = i\,\epsilon_{ikl}\, P_l$$
$$[L_i, T] = 0$$
$$[L_i, V_k] = i\,\epsilon_{ikl}\, V_l$$
$$[P_i, T] = 0$$
$$[P_i, V_k] = 0$$
$$[T, V_k] = P_k$$
$$[V_i, V_k] = 0$$
$$[P_i, P_k] = 0$$

Ya que la matriz S es independiente del tiempo y además es invariante bajo translaciones en el tiempo nosotros nos restringiremos al subgrupo del grupo de Galileo que tiene por generadores P_i y L_i y este grupo es llamado el grupo de Euclides en tres dimensiones.

II.1 - El grupo de Euclides E(3).

Es el grupo de transformaciones que conservan la distancia de un espacio Euclidiano tridimensional y es un producto semi-directo del grupo de rotaciones O(3) y translaciones T(3).

Como ya vimos los generadores de este grupo cumplen las siguientes reglas de conmutación

$$[L_i, L_k] = i\,\epsilon_{ikl}\, L_l$$
$$[L_i, L_k] = i\,\epsilon_{ikl}\, P_l$$
$$[P_i, P_k] = 0$$

Los dos operadores de casimir de E(3) son:

$$\vec{P}^2 \quad y \quad \vec{P}\cdot\vec{L}$$

En mecánica cuántica P^2 es el operador de energía cinética y $\vec{P}\cdot\vec{L}$ se llama helicidad.

II.2 - Subgrupos del Grupo de Euclides.

Nosotros estamos interesados en desarrollos de las amplitudes de dispersión en términos de funciones bases de las representaciones irreducibles de E(3). Debido a que diferentes tipos de bases corresponden a cadenas de subgrupos no equivalentes, necesitamos clasificar todos los subgrupos continuos de E(3) en clases equivalentes.

II.3 - Clasificación de las subalgebras de E(3).

Dos subalgebras A_1 y A_2 del algebra A del grupo C se consideran equivalentes si para cada $a_1 \in A_1$ existe $g \in G$ y $a_2 \in A_2$ tal que $g\, a_1\, g^{-1} = a_2$, por ejemplo, si existe un automorfismo, que transforma A_1 en A_2

Consideremos un elemento general del algebra de E(3):

$$C = a_i L_i + b_i P_i$$

Consideremos el siguiente automorfismo:

$$P_i = -i \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad L_i = -i\, \epsilon_{ikl}\, x_k \frac{\partial}{\partial x_l}$$

Veamos como se transforma C bajo un cambio de coordenadas que se obtenga de una rotación y una translación:

$$x'_i = \alpha_{ik} x_k + \beta_i \tag{40}$$

con $\alpha_{ik}\alpha_{il} = \delta_{kl}$ (suma sobre indices repetidos se entiende)

de la ec. (48) se puede obtener fácilmente que:

$$x_l = \alpha_{il} x'_i - \alpha_{il} \beta_i \tag{41}$$

y también

$$\frac{\partial}{\partial x_l} = \alpha_{ml} \frac{\partial}{\partial x'_m} \tag{42}$$

De las ecuaciones (41) y (42) podemos ver que:

$$L'_i = -i\,\epsilon_{iml}\left[\alpha_{ik} x'_i - \alpha_{ik}\beta_i\right]\alpha_{ml}\frac{\partial}{\partial x'_m} = \left[-i\,\epsilon_{iml}\,\alpha_{ik} x'_i \alpha_{ml} + i\,\epsilon_{iml}\,\alpha_{ik}\beta_i\alpha_{ml}\right] \times \frac{\partial}{\partial x'_m} \tag{43}$$

y de la ecuación (42)

$$P_i = -i\,\alpha_{mi}\frac{\partial}{\partial x'_m} \tag{44}$$

de (43):

$$a'_i L'_i = \left[-i\,\epsilon_{iml}\,a'_i\,\alpha_{ik} x'_i \alpha_{ml} + i\,\epsilon_{iml}\,a'_i\,\alpha_{ik}\beta_i\alpha_{ml}\right]\frac{\partial}{\partial x'_m} \tag{45}$$

analogamente:

$$b'_i P'_i = -i\, b'_i \frac{\partial}{\partial x'_i} \tag{46}$$

de (45) y (46)

$$C' = \alpha_{ml}\, a_i L_i + (a_i\,\epsilon_{iml}\,\alpha_{ml}\beta_i + b_i\,\alpha_{ik})\, P_l \tag{47}$$

la cual se puede escribir como:

$$C' = (\vec{a}\ \vec{R}) \cdot \vec{L} \ + \ [\ (\vec{a} \times \vec{\beta}\ ) \cdot \vec{R} \ + \ b\ \vec{R}\ ] \cdot \vec{P} \tag{48}$$

vamos a demostrar que si escogemos la rotación y la translación de la siguiente manera:

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{pmatrix} \qquad y \qquad \vec{\beta} = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{a^2} \qquad con \quad \vec{a} = (a_1, 0, 0)$$

las algebras de un parámetro determinadas por $C = a_i L_i + b_i P_i$ son equivalentes a una algebra generada por $C'(\alpha) = \cos\alpha L_1 + \operatorname{sen}\alpha P_1$

Prueba

Efectuemos el producto $\vec{a}\ \vec{R} \cdot \vec{L}$

$$a\ \vec{R} \cdot \vec{L} = (a_1, 0, 0) \begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = (a_1, 0, 0) \begin{pmatrix} r_1 L_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 L_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 L_3 \end{pmatrix} = a_1 r_1 L_1$$

$$\therefore \quad \vec{a}\ \vec{R} \cdot \vec{L} = a_1 r_1 L_1 \tag{49}$$

por definición:

$$b' = \vec{a} \times \vec{\beta} + \vec{b} = \vec{a} \times \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{a^2} + \vec{b} \qquad \text{donde hemos usado que } \beta = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{a^2}$$

el triple producto vectorial de 3 vectores es:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}\ (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}\ (\vec{A} \cdot \vec{B})$$

de modo que:

$$\vec{a} \times \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a}\ (\vec{a} \cdot \vec{b}) - \vec{b}\ (\vec{a} \cdot \vec{a})$$

b' se puede escribir entonces como:

$$b' = \frac{\vec{a}\ (\vec{a} \cdot \vec{b})}{a^2} - \frac{\vec{b}\ a^2}{a^2} + \vec{b}$$

de donde:

$$b' = \frac{\vec{a}(\vec{a}\cdot\vec{b})}{a^2} \tag{50}$$

Esta ecuación nos dice que b' y $\vec{a}$ son paralelos de tal modo que:

$$C' = a_1 v_1 L_1 + \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a^2} a_1 v_1 P_1$$

Si dividimos por $a_1 v_1 \sqrt{1 + \left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a^2}\right)^2}$ C' queda:

$$C' = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{a^4}}} L_1 + \frac{\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a^2}}{\sqrt{1 + \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{a^4}}} P_1$$

ahora definamos :

$$\cos\alpha = \frac{a^2}{\sqrt{a^4 + (\vec{a}\cdot\vec{b})^2}} \quad y \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\sqrt{a^4 + (\vec{a}\cdot\vec{b})^2}}$$

Entonces C' queda como:

$$C' = \cos\alpha\, L_1 + \operatorname{sen}\alpha\, P_1$$

La clasificación de subalgebras de dos parámetros, tres parámetros etc. es ahora fácil y procederemos de las que se caracterizan por un número menor a las que se caracterizan por un número mayor de parámetros.

Denotaremos una subalgebra por $\mathcal{L}$ y su algebra derivada por $\mathcal{L}'$ (algebra de conmutadores), y ordenaremos las álgebras de acuerdo a la dimensión de $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$

<u>1er. caso</u> $\dim \mathcal{L} = 2$ $\dim \mathcal{L}' = 0$ $[A, B] = 0$

Tomando A en la forma $A(\alpha) = \cos\alpha\, L_1 + \operatorname{sen}\alpha\, P_1$ dejando B general y pidiendo que A y B conmuten

$$[\cos\alpha\, L_1 + \operatorname{sen}\alpha\, P_1, B] \Rightarrow \cos\alpha\, [L_1, B] + \operatorname{sen}\alpha\, [P_1, B] = 0$$

Analicemos el caso:

$[P_1, B] = 0$ conocemos que $[P_i, P_k] = 0$ entonces B puede ser P_2 ó P_3

Analicemos ahora el caso:

$[L_i, B] = 0$ conocemos que $[L_i, P_k] = i\epsilon_{ikl} P_l$

de donde $[L_i, P_2] = iP_3$; $[L_i, P_3] = -iP_2$ y $[L_1, P_1] = 0$

Entonces las subalgebras no-equivalentes que satisfacen nuestra condición son:

$\{P_1, P_2\}$ y $\{P_1, L_i\}$

<u>2do. caso</u> $\dim \mathcal{L} = 2$ $\dim \mathcal{L}' = 1$ $[A, B] = iA$

Escogiendo de nuevo $A(\alpha) = \cos\alpha\, L_1 + \operatorname{sen}\alpha\, P_1$

$[A, B] = i\cos\alpha\, L_1 + i\operatorname{sen}\alpha\, P_1$ inmediatamente vemos que esta condición no puede satisfacerse por ninguna B. Ninguna otra algebra de dos dimensiones existe.

<u>3er. caso</u> $\dim \mathcal{L}' = 3$ $\dim \mathcal{L}' = 0$ $[A, B] = [B, C] = [C, A] = 0$

podemos identificar $\{A, B\}$ con una de las algebras del caso (1) y agregar una C general, que conmute con A y B tenemos dos subcasos:

a) $A = P_1$, $B = P_2$ como $[A, B] = [B, C] = [C, A] \Rightarrow C = P_3$

b) $A = P_1$, $B = L_1$ $C = P_2$ ó $C = P_3$ pero es este caso

$[L_1, P_2] = iP_3$ y $[L_1, P_3] = -iP_2$ entonces C en este caso no cumple la condición exigida.

Analogamente $[P_1, C]$ con $C = L_2$ ó $C = L_3$ tampoco satisgace la condición $[A, B] = [B, C] = [C, A] = 0$

Entonces la única subalgebra que existe es de la forma:

$\{P_1, P_2, P_3\}$

<u>4° caso</u> $\dim \mathcal{L} = 3$ $\dim \mathcal{L}' = 1$

tal algebra contiene un algebra del tipo 2 y es rechazada.

<u>5° caso</u> $\dim \mathcal{L} = 3$ $\dim \mathcal{L}' = 2$

identificando $\mathcal{L}'$ con $\{A, B\}$ entonces A y B conmutan. En general, podemos escribir $[A, B] = 0$ $[B, C] = i a A$ $[A, C] = i (bA + dB)$

donde a,b, d son reales. Si tomamos $\{A, B\} = \{P_1, L_1\}$ entonces no existe ninguna C que satisfaga $[L_1, C] = i a P_1$. Escogiendo $A = P_1$, $B = P_2$ entonces $[P_2, C] = i a P_1$ de donde conseguimos que $C = L_3 + b P_3$

El algebra en este caso es del tipo:

$\{P_1, P_2, L_3 + b P_3\}$

<u>6° caso</u> $\dim \mathcal{L} = 3$ $\dim \mathcal{L}' = 3$

solamente dos algebras existen en este caso la O(3) y la de O(2,1). El algebra de O(2,1) contiene una subalgebra del tipo $[A, B] = i A$ y es desechada, el algebra del grupo de rotaciones es del tipo:

$\{L_1, L_2, L_3\}$

7° caso $\dim \mathcal{L} = 4$ $\dim \mathcal{L}' = 2$

Poniendo $A = P_1$, $B = P_2$, $C = L_3 + b P_3$ y dejando D general pidiendo que conmute con todos los otros generadores tenemos:

$[A, B] = 0$ $[C, D] = 0$ $[A, C] = i(bA + dB)$

La única que satisgace estas condiciones es $D = P_3$ y de

$[P_1, L_3 + b P_3] = [P_1, L_3] = -i P_2$ con $d = 1$ y $b = 0$

de modo que la única algebra que conseguimos es:

$\{ P_1 , P_2 , P_3 , L_3 \}$

8° caso El grupo E(3) no contiene subalgebra de cinco parámetros. En verdad, un subalgebra de cinco parámetros se obtendría dejando fuera uno de los elementos del algebra de E(3). Las subalgebra contienen L_2 , L_3 , P_2 y P_3 sin embargo $[L_2, L_3] = i L_1$ y $[L_2, P_3] = i P_1$ entonces la subalgebra contiene a L_1 y P_1 . Esto es una contradicción por lo tanto ninguna algebra de cinco parámetros existe [5).

A continuación daremos una lista de todos.los subgrupos continuos de E(3) junto con algunas de sus propiedades.

TABLA I. SUBGRUPOS CONTINUOS DEL GRUPO E(3)

N°	Dimensión	Generadores y algebra	Invariantes del algebra	Caracterización del grupo
1	1	$A(\alpha) = L_1 \cos\alpha + P_1 \operatorname{sen}\alpha$ $0 \leq \alpha < \pi$	$A(\alpha)$	Compacto para $\alpha = 0$ (rotación en el plano) no-compacto para $\alpha \neq 0$; translaciones a lo largo de un eje para $\alpha = \frac{\pi}{2}$
2	2	L_1, P_1 ; $[L_1, P_1] = 0$	L_1 y P_1	No-compacto, Abeliano. Translaciones sobre un cilindro.
3	2	P_1, P_2 ; $[P_1, P_2] = 0$	P_1 y P_2	No-compacto, Abeliano. Translaciones sobre un plano Euclidiano
4	3	L_1, L_2, L_3 $[L_i, L_k] = i\epsilon_{ik\ell} L_\ell$	$L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$	Compacto, simple: El grupo de rotaciones
5	3	$P_1, P_2, L_3 + bP_3 \equiv M$ $0 \leq b < \infty$ $[P_1, P_2] = 0$ $[M, P_1] = i P_2$ $[P_2, M] = i P_1$	$P_1^2 + P_2^2$	No-compacto: El grupo de Euclides E(2).
6	3	P_1, P_2, P_3 $[P_i, P_k] = 0$	$P_1, P_2,$ y P_3	No-compacto, Abeliano: El grupo de translaciones $T_1 \times T_2 \times T_3$ del espacio Euclidiano
7	4	P_1, P_2, L_3, P_3 $[P_i, P_k] = 0$ $[P_3, L_3] = 0$ $[L_3, P_1] = i P_2$ $[P_2, L_3] = i P_1$	$P_1^2 + P_2^2$ y P_3	No-compacto: El grupo $E(2) \times T_\perp$, donde $T_\perp$ son translaciones perpendiculares al plano E(2).

II.4 - Funciones bases para partículas de Spin cero.

A continuación consideraremos representaciones irreducibles de E(3) para las cuales el operador invariante $\vec{P}\cdot\vec{J}$ sea nulo, en otras palabras cuando consideramos que $\vec{P}\cdot\vec{J} = 0$ es equivalente a afirmar que las partículas que estamos estudiando no tienen Spin.

II.5 - Estados de una partícula.

Los estados de una partícula sin Spin están definidas por las funciones de onda de cuadrado sumable, es decir, las funciones que satisfacen:

$$\int d^3x \, |\psi(\vec{x})|^2 < \infty$$

Es claro que además nuestras funciones de onda deben ser solución de la ecuación de Schrödinger.

II.6 - Estados de dos partículas.

Los estados de dos partículas sin Spin están representados por funciones de onda $\psi(\vec{x}_1, t_1, \vec{x}_2, t_2)$

Un caso especial de tal función es un producto de la forma $\psi(\vec{x}_1, t_1, \vec{x}_2, t_2) = \phi(\vec{x}_1, t_1)\, \chi(\vec{x}_2, t_2)$ cuyos vectores de estados correspondientes los derrotaremos por $|\psi\rangle = |\phi\rangle \otimes |\chi\rangle$ donde $|\psi\rangle$ es un vector en el espacio de Hilbert de las dos partículas $\mathcal{H}$, en el cual $|\phi\rangle$ pertenece al espacio de Hilbert $\mathcal{H}_1$, de la primera partícula y $|\chi\rangle$ esta en el correspondiente $\mathcal{H}_2$ de la segunda partícula.

II.4-1 - La Base Esférica E(3) $\supset$ O(3) $\supset$ O(2).

Las funciones bases son eigenfunciones de $\vec{P}^2$, $\vec{L}^2$ y L_3

Vamos a demostrar a continuación que: $[\vec{P}, P^2] = 0$

Prueba: $[\vec{P}, P^2] = [\vec{P}, P_x^2] + [\vec{P}, P_y^2] + [\vec{P}, P_z^2]$

El conmutador de $[\vec{P}, P_x^2] = [\vec{P}_x, P_x^2] + [\vec{P}_y, P_x^2] + [\vec{P}_z, P_x^2]$

pero $[P_i, P_k] = 0$ de tal modo que $[\vec{P}, P_x^2] = 0$

Analogamente es fácil demostrar que:

$[\vec{P}, P_y^2] = 0$ y $[\vec{P}, P_z^2] = 0$ de donde concluimos que:

$[\vec{P}, P^2] = 0$

Es necesario demostrar también que: $[L_z, L^2] = 0$

donde $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ de tal modo que:

$[L_z, L_x^2 + L_y^2 + L_z^2] = [L_z, L_x^2] + [L_z, L_y^2] + [L_z, L_z^2]$

vamos a aplicar la siguiente propiedad de los conmutadores

$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$

entonces

$[L_z, L_x^2] + [L_z, L_y^2] + [L_z, L_z^2] = [L_z, L_x]\cdot L_x + L_x\cdot[L_z, L_x]$

$+ [L_z, L_y]\cdot L_y + L_y\cdot[L_z, L_y] + [L_z, L_z]\cdot L_z + L_z\cdot[L_z, L_z]$

Tomando en cuenta el hecho que: $[L_i, L_k] = i\,\epsilon_{ikl} L_l$ la relación anterior nos queda:

$[L_z, L^2] = i L_y L_x + i L_x L_y - i L_x L_y - i L_y L_x = i[L_y, L_x] + i[L_x, L_y]$

$= -i^2 L_z + i^2 L_z$

$\therefore \quad [L_z, L^2] = 0$

Similarmente es fácil demostrar que:

$[L_z, P^2] = 0$, $[\vec{L}, P^2] = 0$ usando el hecho que:

$$[A, B^n] = \sum_{s=0}^{n-1} B^s [A, B] B^{n-s-1}$$

Finalmente nos queda por demostrar que:

$[L^2, P^2] = 0$

Prueba: $[L^2, P^2] = [\vec{L}, P^2] \cdot \vec{L} + \vec{L} \cdot [\vec{L}, P^2]$

como $[\vec{L}, P^2] = 0$

entonces: $[L^2, P^2] = 0$

Como es conocido operadores que conmutan entre si tienen eigenfunciones simultáneas; entonces P^2 , L^2 y L_z tienen eigenfunciones simultáneas.

Escribiendo P^2 , L^2 y L_z como operadores diferenciales en coordenadas esféricas:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right] \qquad (51)$$

$$L^2 = -\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right] \qquad (52)$$

$$L_z = -i \frac{\partial}{\partial \varphi} \qquad (53)$$

Propongamos que nuestra solución sea de la forma

$$\psi_{k\ell m}(r, \theta, \varphi) = R_k(r)\, Y_m^{\ell}(\theta, \varphi)$$

A continuación obtendremos entonces nuestras eigenfunciones simultáneas

$$L^2 \psi_{k\ell m}(r, \theta, \varphi) = -\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right] R_k(r)\, Y_m^{\ell}(\theta, \varphi)$$

Como $R_K(r)$ es independiente de θ y φ entonces:

$$L^2\, Y_m^{\ell}(\theta,\varphi) = -\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]Y_m^{\ell}(\theta,\varphi) = c\, Y_m^{\ell}(\theta,\varphi)$$

de nuevo $Y_m^{\ell}(\theta,\varphi)$ puede separarse por medio de la sustitución:

$$Y_m^{\ell}(\theta,\varphi) = P(\theta)\,\Phi(\varphi)$$

$$L^2\, Y_m^{\ell}(\theta,\varphi) = -\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]P(\theta)\,\Phi(\varphi)$$

$$= -\left[\frac{\Phi(\varphi)}{\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{dP(\theta)}{d\theta}\right) + \frac{P(\theta)}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}\right] = c\,P(\theta)\,\Phi(\varphi)$$

la cual se puede separar entonces en:

$$\frac{1}{P(\theta)}\left[\operatorname{sen}\theta\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{dP(\theta)}{d\theta}\right)\right] + c\operatorname{sen}^2\theta = -\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = m^2$$

en la cual la constante de sepración se escribió como m^2

inmediatamente conseguimos que: $\dfrac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + m^2\,\Phi(\varphi) = 0$

la cual tiene la solución $\Phi(\varphi) = A\, e^{\pm i m\varphi}$ si exigimos que

$\Phi(\varphi+2\pi) = \Phi(\varphi)$ entonces

$$A\, e^{\pm i m(\varphi+2\pi)} = A\, e^{\pm i m\varphi} \implies m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots\ldots$$

$\Phi(\varphi) = A\, e^{i m\varphi}$ vamos a calcular ahora el valor de la constante de normalización:

$$|A|^2\int_0^{2\pi} e^{i(m-m')\varphi}\, d\varphi = 1 \qquad \therefore \qquad |A|^2\, 2\pi = 1 \implies A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Nuestra solución queda ahora entonces como:

$$\Phi(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{i m\varphi}$$

Resolvamos a continuación

$$\frac{1}{P(\theta)}\left[\operatorname{sen}\theta\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{dP(\theta)}{d\theta}\right)\right] + c\operatorname{sen}^2\theta = m^2$$

si hacemos la sustitución $\mu = \cos\theta$ entonces la ecuación anterior nos queda

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dP(\mu)}{d\mu}\right] + \left(C - \frac{m^2}{1-\mu^2}\right)P(\mu) = 0$$

la cual define las funciones asociadas de Legendre, las soluciones regulares de esta ecuación existen si y sólo si la constante $C = \ell(\ell+1)$ donde ℓ es un entero no-negativo[7].

Finalmente aplicaremos P^2 a nuestra función

$$-\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]\right\}R_K(r)Y_m^{\ell}(\theta,\varphi) = K^2R_K(r)Y_m^{\ell}(\theta,\varphi)$$

la cual se puede escribir como:

$$-\frac{Y_m^{\ell}(\theta,\varphi)}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_K(r)}{dr}\right) + \frac{R_K(r)}{r^2}\left[\ell(\ell+1)\right]Y_m^{\ell}(\theta,\varphi) = K^2R_K(r)Y_m^{\ell}(\theta,\varphi)$$

dividiendo por $Y_m^{\ell}(\theta,\varphi)$ se tiene:

$$\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_K(r)}{dr}\right) + \left\{K^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right\}R_K(r)\right] = 0$$

La cual se puede escribir también como:

$$\frac{d^2R_K(r)}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR_K(r)}{dr} + \left[K^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right]R_K(r) = 0$$

haciendo el cambio de variable $\rho = Kr$ esta ecuación diferencial se transforma en:

6

$$\frac{d^2R_K(\rho)}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{dR_K(\rho)}{d\rho} + \left(1 - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2}\right)R_K(\rho) = 0$$

Esta es la ecuación diferencial de ~~Ricatti~~-Bessel.

Las funciones esféricas de Bessel son soluciones particulares de esta ecuación y las denotaremos por $j_\ell(Kr)$

ya que: $Y_m^\ell(\theta,\varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{(2\ell+1)}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\, e^{im\varphi} P_m^\ell(\cos\theta)$

entonces las soluciones regulares de nuestro problema son:

$$\psi_{km\ell}(r,\theta,\varphi) = j_\ell(kr)\, Y_m^\ell(\theta,\varphi)$$

Demostraremos a continuación que los armónicos esféricos $Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$ y $Y_{\ell' m}(\theta,\varphi)$ de grados ℓ y ℓ' son ortogonales. La prueba esta basada en el hecho que el correspondiente polinomio armónico:

$\psi_\ell = r^\ell Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$ y $\psi_{\ell'} = r^{\ell'} Y_{\ell' m}(\theta,\varphi)$

satisfacen la ecuación de Laplace; entonces

$$\psi_{\ell'}^* \nabla^2 \psi_\ell - \psi_\ell \nabla^2 \psi^*_{\ell'} = 0$$

vamos a aplicar el teorema de Green al volumen encerrado por una esfera unidad.

El teorema de Green establece que:

$$\int_V (\phi \nabla^2\psi - \psi \nabla^2 \phi)\, d^3x = \oint_S \left[\phi \frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial\phi}{\partial n}\right] da$$

donde ϕ y ψ son funciones escalares arbitrarias y $\frac{\partial}{\partial n}$ es la derivada normal a la superficie S entonces

$$\int_0^1 \int_\Omega \left[\psi_{\ell'}^* \nabla^2 \psi_\ell - \psi_\ell \nabla^2 \psi^*_{\ell'}\right] = \int_\Omega \left[\psi_{\ell'}^* \frac{\partial\psi_\ell}{\partial r} - \psi_\ell \frac{\partial\psi_{\ell'}^*}{\partial r}\right]_{r=1} d\Omega$$

donde $\frac{\psi_\ell}{\partial r} = \ell\, r^{\ell-1} Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$ y $\frac{\psi_{\ell'}}{\partial r} = \ell'\, r^{\ell'-1} Y_{\ell' m}(\theta,\varphi)$

$$\therefore \int_\Omega \left[\psi_{\ell'}^* \frac{\partial\psi_\ell}{\partial r} - \psi_\ell \frac{\partial\psi_{\ell'}^*}{\partial r}\right]_{r=1} d\Omega = \int_\Omega \Big[r^{\ell'} Y_{\ell' m}^*(\theta,\varphi)\, \ell\, r^{\ell-1} Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$$

$$- r^\ell Y_{\ell m}(\theta,\varphi)\, \ell'\, r^{\ell'-1} Y_{\ell' m}^*(\theta,\varphi)\Big]_{r=1} d\Omega = 0$$

de donde

$$(\ell-\ell')\int_{\Omega} Y_{\ell' m}^{*}(\theta,\varphi)\, Y_{\ell m}(\theta,\varphi)\, d\Omega = 0$$

la cual es equivalente a:

$$\int_{\Omega} Y_{\ell' m}^{*}(\theta,\varphi)\, Y_{\ell m}(\theta,\varphi)\, d\Omega = \delta_{\ell\ell'}$$

vamos a demostrar a continuación que además

$$\int_{\Omega} Y_{\ell}^{m'*}(\theta,\varphi)\, Y_{\ell}^{m}(\theta,\varphi)\, d\Omega = \delta_{mm'}$$

Para ello recordaremos que un armónico esférico puede escribirse como:

$$Y_{\ell}^{m}(\theta,\varphi) = A_{\ell}^{m}\, e^{im\varphi}\, P_{\ell}^{m}(\cos\theta) \qquad \text{de donde} \quad Y_{\ell}^{m*}(\theta,\varphi) = A_{\ell'}^{m'*}\, e^{-im'\varphi}\, P_{\ell'}^{m'}(\cos\theta)$$

nos basta entonces con calcular:

$$\int_{0}^{2\pi} d\varphi\, e^{i(m-m')\varphi} = 2\pi\,\delta_{mm'}$$

$$\therefore \quad \int_{\Omega} Y_{\ell'}^{m'}(\theta,\varphi)\, Y_{\ell}^{m}(\theta,\varphi)\, d\Omega = \delta_{mm'}\,\delta_{\ell\ell'}$$

O sea que los armónicos esféricos $Y_{\ell}^{m}(\theta,\varphi)$ son un conjunto ortonormal completo de funciones definidas sobre la superficie de una esfera de radio unidad.

Vamos a demostrar que $\left\{ j_{\ell}(kr) \right\}$ forman un conjunto ortonormal completo de funciones definidas en el intervalo $0 \leq r < \infty$

Para ello usaremos la integral indefinida: 8

$$\int x^2\, dx\, Z_{\ell}(\alpha x)\, \tilde{Z}_{\ell}(\beta x) = \frac{x^2}{\alpha^2-\beta^2}\left\{ \beta\, Z_{\ell}(\alpha x)\, \tilde{Z}_{\ell-1}(\beta x) - \alpha\, Z_{\ell-1}(\alpha x)\, \tilde{Z}_{\ell}(\beta x) \right\}$$

la cual es válida para cualquier solución Z_ℓ y $\tilde{Z}_\ell$ de

$$\left(\frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \rho^2 \frac{d}{d\rho} + 1 - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} \right) R_K(\rho)$$

En partícular para la solución asintótica:

$$j_\ell(\rho) \xrightarrow[\rho \to \infty]{} \frac{1}{\rho} \operatorname{sen}\left(\rho - \frac{\pi \ell}{2} \right) + \theta\left(\frac{1}{\rho^2} \right)$$

Calculemos entonces:

$$\int_0^K j_\ell(Kr)\, j_\ell(Kr')\, K^2 dK$$

donde $K = x$ $\quad \alpha = r$ $\quad \beta = r'$ $\quad Z_\ell(\alpha x) = j_\ell(Kr)$ y $\tilde{Z}_\ell(\beta x) = j_\ell(Kr')$

$$\therefore \int_0^K j_\ell(Kr)\, j_\ell(Kr')\, K^2 dK = \frac{K^2}{r^2 - r'^2} \left\{ r' j_\ell(Kr)\, j_{\ell-1}(Kr') - r\, j_\ell(Kr)\, j_\ell(Kr') \right\}$$

pero $j_\ell(\rho) \xrightarrow[\rho \to \infty]{} \frac{1}{\rho} \operatorname{sen}\left(\rho - \frac{\pi \ell}{2} \right) + \theta\left(\frac{1}{\rho^2} \right)$ con $\rho = Kr$

y $j_{\ell-1}(\rho) \xrightarrow[\rho \to \infty]{} \frac{1}{\rho} \operatorname{sen}\left(\rho - \frac{\pi(\ell-1)}{2} \right) + \theta\left(\frac{1}{\rho^2} \right)$

nuestra integral se ve ahora como:

$$\int_0^K j_\ell(Kr)\, j_\ell(Kr')\, K^2 dK = \frac{K^2}{r^2 - r'^2} \left\{ r' \frac{1}{Kr} \operatorname{sen}\left(Kr - \frac{\pi}{2}\ell\right) \frac{1}{Kr'} \operatorname{sen}\left(Kr' - \frac{\pi(\ell-1)}{2}\right) - r \frac{1}{Kr} \operatorname{sen}\left(Kr - \frac{\pi(\ell-1)}{2}\right) \frac{1}{Kr'} \operatorname{sen}\left(Kr' - \frac{\pi \ell}{2}\right) \right\}$$

la cual se puede transformar a la siguiente forma

$$\int_0^K j_\ell(Kr)\, j_\ell(Kr')\, K^2 dK = \frac{1}{2rr'} \left[\frac{1}{r - r'} \operatorname{sen} K(r - r') + \frac{1}{r + r'} \operatorname{sen} K(r + r') \right]$$

cuando $K \to \infty$ el segundo término del segundo miembro siempre oscila porque r y r' son positivos y su contribución es despreciable. La contribución del primer término puede ser evaluada con la ayuda de:

$$\frac{1}{\pi} \lim_{K \to \infty} \frac{\operatorname{sen} Kx}{x} = \delta(x)$$

y por lo tanto: $$\int_0^\infty j_\ell(kr)\, j_\ell(kr')\, k^2 dk = \frac{\pi}{2r^2}\,\delta(r-r')$$

obviamente: $$\int_0^\infty j_\ell(kr)\, j_\ell(k'r)\, r^2 dr = \frac{\pi}{2k^2}\,\delta(k-k')$$

Nuestras funciones bases satisfacen entonces la relación de ortogonalidad siguiente:

$$\int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi \operatorname{sen}\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\; j_\ell(kr)\, Y_{\ell m}(\theta,\varphi)\, j_{\ell'}^*(k'r)\, Y_{\ell' m'}(\theta,\varphi) = \frac{\pi}{2}\,\frac{\delta(k-k')}{k^2}\,\delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}$$

<u>Relación de Cerradura</u>: Demostraremos que nuestras funciones bases satisfacen la siguiente relación de cerradura:

$$\sum_{\ell=0}^\infty \sum_{m=-\ell}^{\ell} \int_0^\infty k^2 dk\; j_\ell(kr)\, Y_{\ell m}(\theta,\varphi)\, j_\ell^*(kr')\, Y_{\ell m}^*(\theta',\varphi') = \frac{\pi}{2}\,\frac{\delta(r-r')}{r^2}\,\frac{\delta(\theta_r-\theta_r')}{\operatorname{sen}\theta_r}\,\delta(\varphi_r-\varphi_r')$$

Utilizaremos el hecho que:

$$\int_0^\infty k^2 dk \int_0^\pi \operatorname{sen}\theta_k\, d\theta_k \int_0^{2\pi} d\varphi_k\; e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} = (2\pi)^3\,\frac{\delta(r-r')\,\delta(\theta_r-\theta_r')\,\delta(\varphi_r-\varphi_r')}{r^2\,\operatorname{sen}\theta_r} \tag{54}$$

El desarrollo de una onda plana en ondas parciales es

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = 4\pi \sum_{\ell=0}^\infty \sum_{m=-\ell}^{\ell} i^\ell\, j_\ell(kr)\, Y_\ell^{m*}(\theta_k,\varphi_k)\, Y_\ell^m(\theta_r,\varphi_r) \tag{55}$$

Tomando conjugación compleja:

$$e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}'} = 4\pi \sum_{\ell'=0}^\infty \sum_{m'=-\ell'}^{\ell'} (-i)^{\ell'}\, j_{\ell'}^*(kr')\, Y_{\ell'}^{m'}(\theta_k,\varphi_k)\, Y_{\ell'}^{m'*}(\theta_r',\varphi_r') \tag{56}$$

Sustituyendo (55) y (56) en (54)

$$(4\pi)^2 \int_0^\infty k^2 dk \int_0^\pi \operatorname{sen}\theta_k\, d\theta_k \int_0^{2\pi} d\varphi_k \sum_{\ell=0}^\infty \sum_{m=-\ell}^{\ell} i^\ell\, j_\ell(kr)\, Y_\ell^{m*}(\theta_k,\varphi_k)\, Y_\ell^m(\theta_r,\varphi_r)$$

$$\sum_{\ell'=0}^\infty \sum_{m'=-\ell'}^{\ell'} (-i)^{\ell'}\, j_{\ell'}^*(kr)\, Y_{\ell'}^{m'}(\theta_k,\varphi_k)\, Y_{\ell'}^{m'*}(\theta_r',\varphi_r') =$$

$$= (4\pi)^2 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} \int_0^{\infty} k^2 dk \left[\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta_k \, d\theta_k \int_0^{2\pi} d\varphi_k \, Y_l^{m*}(\theta_k, \varphi_k) \, Y_{l'}^{m'}(\theta_k, \varphi_k) \right]$$

$$(i)^l (-i)^{l'} j_l(kr) \, j_{l'}^*(kr') \, Y_l^m(\theta_r, \varphi_r) \, Y_{l'}^{m'*}(\theta_r', \varphi_r') \qquad (57)$$

ahora:

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta_k \, d\theta_k \int_0^{2\pi} d\varphi_k \; Y_l^{m*}(\theta_k, \varphi_k) \, Y_{l'}^{m'}(\theta_k, \varphi_k) = \delta_{mm'} \delta_{ll'}$$

entonces la ecuación (57) nos queda

$$= (4\pi)^2 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \int_0^{\infty} k^2 dk \; j_l(kr) \, j_l^*(kr') \, Y_l^m(\theta_r, \varphi_r) \, Y_l^{m*}(\theta_r', \varphi_r')$$

de donde:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \int_0^{\infty} k^2 dk \; j_l(kr) \, Y_l^m(\theta_r, \varphi_r) \, j_l^*(kr') \, Y_l^{m*}(\theta_r', \varphi_r') =$$

$$= \frac{\pi}{2} \, \frac{\delta(r - r')}{r^2} \, \frac{\delta(\theta_r - \theta_r')}{\operatorname{sen}\theta_r} \, \delta(\varphi_r - \varphi_r')$$

I.4-2 - <u>La base cilíndrica $E(3) \supset E(2) \times T_{\perp} \supset O(2) \times T_{\perp}$</u> :

En este sistema de referencia las funciones bases son eigen-funciones de los operadores $\vec{P}^2$, $\vec{P}_3$ y $\vec{L}_3$ también de $(\vec{P}_1^2 + \vec{P}_2)$

Nos conviene introducir coordenadas cilíndricas:

$x = \rho \cos\varphi$ con $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\operatorname{tag}\varphi = \frac{y}{x}$

$y = \rho \operatorname{sen}\varphi$

$z = z$

$0 \leq \rho < \infty$

$0 \leq \varphi < 2\pi$

$-\infty < z < \infty$

El operador Laplaciano en dos dimensiones es coordenadas cartesianas es: $-\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}$

La transformación de este operador a coordenadas cilíndricas se consigue de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varphi} \tag{58}$$

La $\frac{\partial \rho}{\partial x}$ es fácil de calcular de $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$

$$\therefore \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\rho \cos\varphi}{\rho} = \cos\varphi \tag{59}$$

La $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ se puede calcular de $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$

$$\therefore \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\rho} \tag{60}$$

Sustituyendo (59) y (60) en (58) se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\varphi \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi} \tag{61}$$

Analogamente:

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \varphi} \tag{62}$$

de nuevo $\frac{\partial \rho}{\partial y}$ se calcula de $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{2y}{2y\sqrt{x^2+y^2}} = \operatorname{sen}\varphi \tag{63}$$

y $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ se evalua de $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$

$$\therefore \quad \sec^2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{x} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos\varphi}{\rho} \tag{64}$$

Por sustitución de (63) y (64) en (62) se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial Y} = \operatorname{sen}\varphi \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\cos\varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \tag{65}$$

Es fácil ver entonces usando (61) y (65)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \tag{66}$$

Nos proponemos entonces encontrar las eigenfunciones simultaneas de

$$\begin{aligned} (\vec{P}_1^2 + \vec{P}_2^2)\,|Kqm\rangle &= K^2\,|Kqm\rangle \\ P_3\,|Kqm\rangle &= q\,|Kqm\rangle \\ L_3\,|Kqm\rangle &= m\,|Kqm\rangle \end{aligned} \tag{67}$$

Si denotamos nuestra función de onda como:

$\langle \rho z \varphi | Kqm \rangle = \Psi_{Kqm}(\rho z \varphi)$ y resolviendo las ecuaciones diferenciales (67)

$$-\left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right]\Psi_{Kqm}(z\rho\varphi) = K^2\Psi_{Kqm}(\rho z\varphi) \tag{68}$$

$$-i\frac{\partial}{\partial z}\Psi_{Kqm}(\rho z\varphi) = q\,\Psi_{Kqm}(\rho z\varphi) \tag{69}$$

$$-i\frac{\partial}{\partial \varphi}\Psi_{Kqm}(\rho z\varphi) = m\,\Psi_{Kqm}(\rho z\varphi) \tag{70}$$

Si proponemos $\Psi_{Kqm}(\rho z\varphi) = R_m(K)\, Z(z)\, \Phi(\varphi)$ (71)

Por sustitución de (71) en (69)

$$Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{iqz} \qquad \text{donde} \qquad -\infty < q < \infty$$

Por sustitución de (71) en (70)

$$\Phi(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \quad (72) \qquad \text{con} \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots\ldots$$

Finalmente sustituyendo (71) en (68) y rearreglando obtenemos:

$$\frac{d^2 R_m(K)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR_m(K)}{d\rho} + \left(K^2 - \frac{m^2}{\rho^2}\right) R_m(K) = 0 \qquad (73)$$

haciendo el cambio de variable $x = K\rho$ la ecuación (79) se transforma en:

73

$$\frac{d^2 R_m(x)}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dR_m(x)}{dx} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) R_m(x) = 0 \qquad (74)$$

La ecuación diferencial (74) es la ecuación diferencial de Bessel, las $J_m(K\rho)$ son soluciones de esta ecuación y reciben el nombre de Funciones cilíndricas de Bessel.

Nuestras funciones bases son entonces:

$$\Psi_{Kqm}(\rho z \varphi) = \frac{1}{2\pi} J_m(K\rho)\, e^{iqz} e^{im\varphi}$$

Los eigenvalores K, q, m son: $K^2 = k^2 - q^2$ donde q es el momento transferido y k es proporcional a la raiz cuadrada de energia, y m se puede interpretar como las unidades de momento angular intercambiados entre la partícula incidente y la fuente (Cocho, Fronsdal).

Las soluciones de nuestro problema son

$$\Psi_{Kqm}(\rho z \varphi) = \frac{1}{2\pi} J_m(K\rho)\, e^{iqz} e^{im\varphi}$$

vamos a demostrar a continuación, La relación de cerradura para nuestras funciones bases.

El desarrollo de una onda plana en coordenadas cilíndricas es:

$$e^{i(\vec{K}_{\parallel}+\vec{q})\cdot\vec{r}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^{n} e^{in(\varphi_{K_{\parallel}}-\varphi_{\rho})} J_{n}(K_{\parallel}\rho)\, e^{iqz} \tag{74a}$$

Con $\vec{K} = \vec{K}_{\parallel} + \vec{q}$ donde $\vec{q} = (0,0,q)$, $\vec{r} = (\rho\cos\varphi, \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi, z)$

y $\varphi_{K_{\parallel}} - \varphi_{\rho}$ es el ángulo entre el vector $\vec{K}_{\parallel}$ y el vector $\vec{\rho}$.

Tomando conjugación compleja en (74a) nos queda:

$$e^{-i(\vec{K}_{\parallel}+\vec{q})\cdot\vec{r}'} = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} (-i)^{n'} e^{-in'(\varphi_{K_{\parallel}}-\varphi_{\rho'})} J_{n'}(K_{\parallel}\rho')\, e^{-iqz'} \tag{74b}$$

La función delta de Dirac en coordenadas cilíndricas

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{\infty} K_{\parallel}\,dK_{\parallel}\int_{-\infty}^{\infty} dq \int_0^{2\pi} d\varphi_{K_{\parallel}}\; e^{i(\vec{r}-\vec{r}')\cdot\vec{K}} = \frac{\delta(\rho-\rho')}{\rho}\,\delta(z-z')\,\delta(\varphi_{\rho}-\varphi_{\rho'}) \tag{74c}$$

Por sustitución de (74a) y (74b) en (74c)

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{\infty} K_{\parallel}\,dK_{\parallel}\int_{-\infty}^{\infty} dq \int_0^{2\pi} d\varphi_{K_{\parallel}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^{n} e^{in(\varphi_{K_{\parallel}}-\varphi_{\rho})} J_{n}(K_{\parallel}\rho)\, e^{iqz} \tag{74d}$$

$$\sum_{n'=-\infty}^{\infty} (-i)^{n'} e^{-in'(\varphi_{K_{\parallel}}-\varphi_{\rho'})} J_{n'}(K_{\parallel}\rho')\, e^{-iqz'} = \frac{\delta(\rho-\rho')}{\rho}\,\delta(z-z')\,\delta(\varphi_{\rho}-\varphi_{\rho'})$$

Intercambiando las sumas por las integrales (74d) nos queda:

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{n'=-\infty}^{\infty} (i)^{n}(-i)^{n'} \int_0^{\infty} K_{\parallel}\,dK_{\parallel}\int_{-\infty}^{\infty} dq\; J_{n}(K_{\parallel}\rho)\, J_{n'}(K_{\parallel}\rho')\, e^{iq(z-z')} \tag{74e}$$

$$\times \int_0^{2\pi} d\varphi_{K_{\parallel}}\; e^{i(n-n')\varphi_{K_{\parallel}}}\, e^{-in\varphi_{\rho}}\, e^{in'\varphi_{\rho'}} = \frac{\delta(\rho-\rho')}{\rho}\,\delta(z-z')\,\delta(\varphi_{\rho}-\varphi_{\rho'})$$

Ya que $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi_{K_{\|}'}\, e^{i(n-n')\varphi_{K_{\|}}} = \delta_{nn'}$ entonces la ecuación (74e) nos queda:

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}dq\int_0^{\infty}K_{\|}\,dK_{\|}\; J_n(K_{\|}\rho)\,J_n(K_{\|}\rho')\,e^{iq(z-z')}\,e^{in(\varphi_{\rho'}-\varphi_{\rho})}$$

$$= \frac{\delta(\rho-\rho')}{\rho}\,\delta(z-z')\,\delta(\varphi_{\rho'}-\varphi_{\rho})$$

Analogamente es fácil de verificar que nuestras funciones bases satisfacen la siguiente relación de ortogonalidad:

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{\infty}\rho\,d\rho\int_{-\infty}^{\infty}dz\int_0^{2\pi}d\varphi\; J_m(K_{\|}\rho)\,J_{m'}(K'\rho)\,e^{i(q-q')z}\,e^{i(m-m')\varphi} =$$

$$= \frac{\delta(K_{\|}-K_{\|}')}{K_{\|}}\,\delta(q-q')\,\delta_{mm'}$$

CAPITULO III

El desarrollo de las Amplitudes de dispersión no-relativistas para partículas sin Spin.

Consideraremos las dispersión de partículas sin Spin

$$1 + 2 \to 3 + 4$$

Consideraremos la amplitud de dispersión como una función del momento de una sola partícula. Esta función $F(\vec{k})$ donde $\vec{K}$ es un vector un espacio Euclidiano tridimensional, puede descomponerse en componentes irreducibles con respecto al grupo Euclidiano E(3). En esta forma nosotros obtenemos formulas de "dos variables" del análisis de ondas parciales no-relativistas. Este desarrollo, depende del sistema de referencia, de la parametrización del espacio E(3), y de la elección de una base para la representación. Por simplicidad nos restringiremos a dispersión elástica cuando la masa de las partículas satisfacen:

$$m_1 = m_3 \quad y \quad m_2 = m_4$$

ya que este es el caso de interes para dispersión por un potencial. Sin embargo, la cinemática sería ligeramente más complicada para masas más generales.

III.1 - La amplitud de dispersión para partículas sin Spin como una función de un punto en el espacio de momento.

Por analogía con las variables invariantes relativistas de Mandelstam[15) s, t y u . Introduciremos las variables invariantes de Galileo

$$
\begin{aligned}
s_E &= (\vec{p}_1 - \mu \vec{p}_2)^2 \\
t_E &= -(\vec{p}_1 - \vec{p}_3)^2 \qquad \mu = \frac{m_1}{m_2} \\
u_E &= -(\vec{p}_1 - \mu \vec{p}_4)^2
\end{aligned}
\tag{75}
$$

(El subindice E significa euclidiano). Los factores μ son necesarios, ya que transformaciones de Galileo preservan diferencias entre velocidades en vez de diferencias entre momentos. Es apropiado en este punto hacer hincapié en que el grupo de Euclides E(3) genera nuestros desarrollos consistentes de rotaciones y translaciones en el espacio de momentos.

Vamos a demostrar que las variables (75) satisfacen:

$$
s_E + \mu t_E + u_E = 0 \tag{76}
$$

demostración de (76)

Usando 75 es fácil ver que

$$
\begin{aligned}
s_E &= p_1^2 - 2\mu \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 + \mu^2 p_2^2 \\
t_E &= -p_1^2 + 2 \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_3 - p_3^2 \\
u_E &= -p_1^2 + 2\mu \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_4 - \mu^2 p_4^2
\end{aligned}
\tag{77}
$$

suponiendo $m_1 = m_3$, $m_2 = m_4$, la conservación del momento y energía nos queda:

$$
\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{p_3^2}{2m_1} + \frac{p_4^2}{2m_2}
$$

$$
\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4
$$

o equivalentemente:

$$
\left\{
\begin{aligned}
p_1^2 + \mu p_2^2 &= p_3^2 + \mu p_4^2 \\
\vec{p}_1 + \vec{p}_2 &= \vec{p}_3 + \vec{p}_4
\end{aligned}
\right.
$$

de (77)

$$s_E + \mu t_E + u_E = \vec{p}_1^{\,2} - 2\mu\, \vec{p}_1\cdot\vec{p}_2 + \mu^2 \vec{p}_2^{\,2} - \mu \vec{p}_1^{\,2} + 2\mu\, \vec{p}_1\cdot\vec{p}_3 - \mu \vec{p}_3^{\,2} - \vec{p}_1^{\,2}$$
$$+ 2\mu\, \vec{p}_1\cdot\vec{p}_4 - \mu^2 \vec{p}_4^{\,2}$$
$$= -2\mu\, \vec{p}_1\cdot\vec{p}_2 + \mu \vec{p}_3^{\,2} + \mu^2 \vec{p}_4^{\,2} - \mu \vec{p}_1^{\,2} - \mu \vec{p}_1^{\,2} + 2\mu\, \vec{p}_1\cdot\vec{p}_3 - \mu \vec{p}_3^{\,2} + 2\mu\, \vec{p}_1\cdot\vec{p}_4$$
$$- \mu^2 \vec{p}_4^{\,2}$$
$$= 2\mu\, \vec{p}_1\cdot(\vec{p}_4+\vec{p}_3) - 2\mu\, \vec{p}_1\cdot(\vec{p}_1+\vec{p}_2) = 2\mu\, \vec{p}_1\cdot(\vec{p}_1+\vec{p}_2) - 2\mu\, \vec{p}_1\cdot(\vec{p}_1+\vec{p}_2)$$

$$\therefore \quad s_E + \mu t_E + u_E = 0 \tag{78}$$

Las amplitudes de dispersión, independientemente de la elección del sistema de referencia, puede considerarse como una función de cuales quiera dos de esas variables.

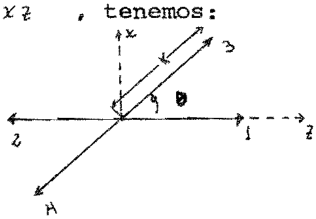
III.2 - Sistema del centro de masa y las variables invariantes de Galileo.

Introduciremos coordinadas esféricas en el espacio de momentos y escribiremos cada uno de los momentos como:

$$p_i = (k_i \operatorname{sen}\theta_i \cos\varphi_i \; ; \; k_i \operatorname{sen}\theta_i \operatorname{sen}\varphi_i \, , \; k_i \cos\theta_i)$$

Tomando $p_1 \| -p_2$ paralelas al eje z e identificando el plano de dispersión con el plano xz, tenemos:

$$\begin{aligned} \vec{p}_1 &= (0,\, 0,\, k) \\ \vec{p}_2 &= (0,\, 0,\, -k) \\ \vec{p}_3 &= (k \operatorname{sen}\theta,\, 0,\, k\cos\theta) \\ \vec{p}_4 &= (-k \operatorname{sen}\theta,\, 0,\, -k\cos\theta) \end{aligned} \tag{79}$$



Consigamos la relación entre las variables (75) y las del centro de masa.

De acuerdo con (75) $S_E = (\vec{p}_1 - \mu \vec{p}_2)^2$ Sustituyendo $\vec{p}_1$ y $\vec{p}_2$ dados por (79)

$$S_E = \left[\sqrt{(K+\mu K)^2} \right]^2 = \left[K^2 + 2\mu K^2 + \mu^2 K^2 \right]$$

de donde $S_E = K^2(1+\mu)^2$ (80)

Analogamente de 75 y 79 es fácil ver que:

$$t_E = -(\vec{p}_1 - \vec{p}_3)^2 = -\left[\sqrt{(-K \operatorname{sen}\theta)^2 + (K - K\cos\theta)^2} \right]^2$$

$$t_E = -\left[K^2 \operatorname{sen}^2\theta + K^2 - 2K^2\cos\theta + K^2\cos^2\theta \right]$$

de donde $t_E = -2K^2 \left[1 - \cos\theta \right]$ (81)

Analogamente:

$$u_E = -(\vec{p}_1 - \mu \vec{p}_4)^2 = -\left[\sqrt{(-K\mu \operatorname{sen}\theta)^2 + (K + K\mu\cos\theta)^2} \right]^2$$

Efectuando operaciones

$$u_E = -\left[K^2\mu^2 \operatorname{sen}^2\theta + K^2 + 2K^2\mu\cos\theta + K^2\mu^2\cos^2\theta \right]$$

factorizando:

$$u_E = -K^2 \left[1 + \mu^2 + 2\mu\cos\theta \right] \tag{82}$$

por ejemplo: de (80) $K = \dfrac{(S_E)^{1/2}}{1+\mu}$ (83)

de (81) $-\dfrac{t_E}{2K^2} = 1 - \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = 1 + \dfrac{t_E}{2K^2}$ sustituyendo (80)

entonces:

$$\cos\theta = 1 + \frac{t_E}{\frac{2S_E}{(1+\mu)^2}} \quad \therefore \quad \cos\theta = 1 + (1+\mu)^2 \frac{t_E}{2S_E} \tag{84}$$

Asi podemos escribir

$$F(s_E, t_E) = F(\kappa, \cos\theta) = F(\vec{p}_3) \tag{85}$$

donde $0 \leq \kappa < \infty$ y $0 \leq \theta \leq \pi$ son la energía del c.m. y el ángulo dispersión. El ángulo azimutal φ es redundante para partículas sin Spin.

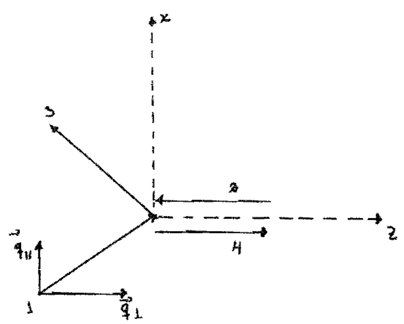
III.3 - Las variables de Galileo del sistema de pared de ladrillo del momento transferido.

Introduciendo coordenadas cilíndricas, escribiendo cada uno de los momentos como:

$$\vec{p}_i = (p_{\parallel i} \cos\varphi_i \,,\; p_{\parallel i} \operatorname{sen}\varphi_i \,,\; p_{\perp}^{i})$$

Tomando $-\vec{p}_2 \parallel \vec{p}_4$ paralelo al eje z, tomando oxz como el plano de dispersión, y poniendo $E_1 = E_3$, $E_2 = E_4$ tenemos:

$$\vec{p}_1 = (q_{\parallel}, 0, q_{\perp}) \qquad \vec{p}_3 = (q_{\parallel}, 0, -q_{\perp})$$
$$\vec{p}_2 = (0, 0, -q_{\perp}) \qquad \vec{p}_4 = (0, 0, q_{\perp})$$



El subindice de $\vec{q}$ indica si la componente es paralela o perpendicular a la pared de ladrillo (brick wall) identificada con el plano xy

Por definición

Usando de nuevo (75)

$$s_E \equiv (\vec{p}_1 - \mu \vec{p}_2)^2 = \left[\sqrt{q_{\parallel}^2 + (q_{\perp} + \mu q_{\perp})^2} \right]^2$$

de donde $$s_E = q_{\parallel}^2 + q_{\perp}^2 (1+\mu)^2 \tag{86}$$

Analogamente

$$t_E = -(\vec{p}_1 - \vec{p}_3)^2 = -\left[\sqrt{(q_{\parallel} - q_{\parallel})^2 + (q_{\perp} + q_{\perp})^2} \right]^2$$

$$\therefore \quad t_E = -4\, q_{\perp}^2 \tag{87}$$

Es fácil ver también que:

$$u_E = -(\vec{p}_1 - \mu \vec{p}_4)^2 = -\left[\sqrt{q_{\parallel}^2 + (q_{\perp} - \mu q_{\perp})^2} \right]^2$$

$$\therefore \quad u_E = -q_{\parallel}^2 - q_{\perp}^2 (1-\mu)^2 \tag{88}$$

de (87) $$q_{\perp} = \frac{1}{2} (-t_E)^{1/2} \tag{89}$$

de (86) $$q_{\parallel} = \sqrt{s_E + \frac{t_E}{4} (1+\mu)^2} \tag{90}$$

Entonces, podemos escribir la amplitud de dispersión como una función de las coordenadas cilíndricas $q_{\parallel}$, $q_{\perp}$ del momento $\vec{p}_1$ (El ángulo azimutal es redundante)

$$F(s_E, t_E) = F(q_{\perp}, q_{\parallel}) = F(\vec{p}_1)$$

III.4 - Relación entre las variables de Galileo de la pared de ladrillo y las del c.m.

$$S_E = K^2(1+\mu)^2$$
$$t_E = -2K^2(1-\cos\theta)$$
$$u_E = -K^2(1+\mu^2+2\mu\cos\theta)$$

(variables invariantes de Galileo del sistema c.m.)

$$S_E = q_{\parallel}^2 + q_{\perp}^2(1+\mu)^2$$
$$t_E = -4q_{\perp}^2$$
$$u_E = -q_{\parallel}^2 - q_{\perp}^2(1-\mu)^2$$

(variables invariantes de Galileo del sistema B.W.)

$$t_E^{c.M} = t_E^{B.W}$$

$$\therefore \quad -4q_{\perp}^2 = -2K^2(1-\cos\theta)$$

de donde $\quad q_{\perp} = K \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$ (91)

Analogamente:

$$S_E^{c.M} = S_E^{B.W}$$

$K^2(1+\mu)^2 = q_{\parallel}^2 + q_{\perp}^2(1+\mu)^2$ ya que $q_{\perp} = K \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$ entonces

$$q_{\parallel} = (1+\mu)K\cos\frac{\theta}{2} \tag{92}$$

Note que para la dispersión hacia adelante correspondiente a $\theta = 0$ $\quad q_{\perp} = 0$; $q_{\parallel} \sim (1+\mu)K$ y para dispersión hacia atrás $\theta = \pi$; $q_{\perp} \sim K$, $q_{\parallel} \sim 0$

III.5 - Sistema de Pared de Ladrillo del parámetro de impacto.

Introduciendo de nuevo coordenadas cilíndricas y tomando oxz como el plano de dispersión (de modo que $\operatorname{sen}\varphi_i = 0 \quad i = 1\ldots4$) poniendo $-\vec{p}_2 \parallel \vec{p}_3$ paralelo al eje z y $E_1 = E_4$, $E_2 = E_3$ se tiene

$$\vec{p}_i = (p_{\parallel i} \cos\varphi_i \, , \ p_{\parallel i} \operatorname{sen}\varphi_i \, , \ p_{\perp}^{i})$$

$$\vec{p}_1 = (p_{\parallel} \, , \ 0 \, , \ p_{\perp})$$

$$\vec{p}_2 = (0 \, , \ 0 \, , \ -q)$$

Consigamos $\vec{p}_3$ sabemos que: $E_2 = E_3$ y $m_1 = m_3$

entonces $\dfrac{q^2}{2m_2} = \dfrac{p_3^2}{2m_1} \implies p_3^2 = \dfrac{m_1}{m_2} q^2$

$\therefore \quad p_3 = \sqrt{\mu}\, q$ podemos escribir a $\vec{p}_3$ como un vector de la siguiente forma $\vec{p}_3 = (0 , 0 , \sqrt{\mu}\, q)$ (93)

Usando el hecho que:

$E_1 = E_4$ y $m_2 = m_4$

entonces: $\dfrac{p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2}{2m_1} = \dfrac{p_4^2}{2m_2}$

$\vec{p}_4$ se puede escribir como $(p_{\parallel} , \ 0 \ , \ \tilde{p}_{\perp})$ de donde

$p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2 = \mu (p_{\parallel}^2 + \tilde{p}_{\perp}^2)$ obviamente:

$$\tilde{p}_{\perp} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left[p_{\perp}^2 + p_{\parallel}(1-\mu) \right]^{\frac{1}{2}} \tag{94}$$

y el momento transferido definido por:

$$\vec{q} = \vec{p}_1 - \vec{p}_4 = (p_{\parallel} , 0 , p_{\perp}) - (p_{\parallel} , 0 , -\tilde{p}_{\perp}) = (0 , 0 , p_{\perp} + \tilde{p}_{\perp})$$

$$\therefore \quad \vec{q} = (0 , 0 , p_{\perp} + \tilde{p}_{\perp}) \tag{95}$$

$$-\vec{q} = \vec{p}_2 - \vec{p}_3 = (0,0,-q) - (0,0,\sqrt{\mu}\, q) = (0,0,-q-\sqrt{\mu}\, q)$$

$$\therefore \quad \vec{q} = (0,0,\ q + \sqrt{\mu}\, q) \tag{96}$$

de (95) y (96) $\quad q + \sqrt{\mu}\, q = p_\perp + \tilde{p}_\perp$

$$\therefore \quad q = \frac{1}{1+\sqrt{\mu}} \left\{ p_\perp + \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left[p_\perp^2 + p_\parallel^2 (1-\mu) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \tag{97}$$

Consigamos la relación entre las coordenadas invariantes, del sistema de pared de ladrillo y el sistema del centro de masa de las ecs. (75)

$$t_E = -(\vec{p}_1 - \vec{p}_3)^2$$

Sustituyendos los valores de los momentos $\vec{p}_1$ y $\vec{p}_3$ se tiene

$$t_E = -\left[\sqrt{p_\parallel^2 + (p_\perp - \sqrt{\mu}\, q)^2} \right]^2$$

donde $\quad (p_\perp - \sqrt{\mu}\, q)^2 = p_\perp^2 - 2\sqrt{\mu}\, \vec{p}_\perp \cdot \vec{q} + \mu q^2$

$$= p_\perp^2 - 2\sqrt{\mu}\, p_\perp \frac{1}{1+\sqrt{\mu}} \left\{ p_\perp + \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left[p_\perp^2 + p_\parallel^2 (1-\mu) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} + \mu \frac{1}{(1+\sqrt{\mu})^2} \left\{ p_\perp + \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left[p_\perp^2 + p_\parallel^2 (1-\mu) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^2$$

$$= p_\perp^2 - \frac{2\sqrt{\mu}\, p_\perp^2}{1+\sqrt{\mu}} - \frac{2 p_\perp}{1+\sqrt{\mu}} \left[p_\perp^2 + p_\parallel^2 (1-\mu) \right]^{\frac{1}{2}} \Big\} + \frac{\mu p_\perp^2}{(1+\sqrt{\mu})^2} + \frac{2\sqrt{\mu}\, p_\perp}{(1+\sqrt{\mu})^2} \left[p_\perp^2 + p_\parallel^2 (1-\mu) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \frac{1}{(1+\sqrt{\mu})^2} \left[p_\perp^2 + p_\parallel^2 (1-\mu) \right]$$

Efectuando operaciones conseguimos que

$$-t_E = \frac{2}{(1+\sqrt{\mu})^2} \left\{ p_\perp^2 + p_\parallel^2 \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) - p_\perp \left[p_\perp^2 + p_\parallel^2 (1-\mu) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \tag{98}$$

En el sistema del centro de masa se cumple que:

$t_E = -2K^2(1-\cos\theta)$

Ya que t_E es un invariante en cualquier sistema de referencia entonces:

$$2K^2(1-\cos\theta) = \frac{2}{(1+\sqrt{\mu})^2}\left\{ p_\perp^2 + p_\parallel^2\left(1-\frac{\mu}{2}\right) - p_\perp\left[p_\perp^2 + p_\parallel^2(1-\mu)\right]^{\frac{1}{2}}\right\}$$

de donde

$$4K^2\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{2}{(1+\sqrt{\mu})^2}\left\{ p_\perp^2 + p_\parallel^2\left(1-\frac{\mu}{2}\right) - p_\perp\left[p_\perp^2 + p_\parallel^2(1-\mu)\right]^{1/2}\right\} \qquad (99)$$

Analogamente de (75)

$u_E = -\left[\vec{p}_1 - \mu\vec{p}_4\right]^2$

Sustituyendo los valores de los momentos obviamente:

$u_E = -\left[\sqrt{(p_\perp + \mu\tilde{p}_\perp)^2}\right]^2$

Efectuando las operaciones indicadas

$u_E = -\left[p_\perp^2 + 2p_\perp\check{p}_\perp + \mu^2\tilde{p}_\perp^2\right]$

Usando la ec (94)

$$-u_E = p_\perp^2 + 2p_\perp\frac{1}{\sqrt{\mu}}\left[p_\perp^2 + p_\parallel^2(1-\mu)\right]^{\frac{1}{2}} + \mu^2\frac{1}{\mu}\left[p_\perp^2 + p_\parallel^2(1-\mu)\right]$$

Simplificando conseguimos que

$$-u_E = \mu p_\parallel^2(1-\mu) + 2p_\perp\sqrt{\mu}\left[p_\perp^2 + p_\parallel^2(1-\mu)\right]^{\frac{1}{2}} + p_\perp^2(1+\mu) = K^2(1+\mu^2+2\mu\cos\theta) \qquad (100)$$

de nuevo la amplitud de dispersión

$F(s_E, t_E) = F(p_\perp, p_\parallel) = F(\vec{p}_1)$

La fórmula (99) se simplifica grandemente para masas iguales.

$p_\parallel = 4K\sin\frac{\theta}{2}$ para $\mu = 1$

III.6 - El desarrollo de la Amplitud de dispersión.

La amplitud de dispersión es ahora una función $F(\vec{p})$ de uno de los tres momentos de las partículas. Suponiendo que pertenece al espacio de Hilbert de las funciones de cuadrado integrable satisfacen

$$\int |F(\vec{p})|^2 \, dp_x \, dp_y \, dp_z < \infty \tag{101}$$

III.6-1 - El desarrollo esférico en el sistema del centro de masa.

Haremos uso de la relación de ortogonalidad y cerradura de la base esférica

$$\int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi \operatorname{sen}\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \; j_\ell(kr) \, Y_{\ell m}(\theta,\varphi) \, j_{\ell'}^*(k'r) \, Y_{\ell' m'}^*(\theta,\varphi) = \frac{\pi}{2} \frac{\delta(k-k')}{k^2} \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}$$

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-L}^{L} \int_0^\infty k^2 dk \; j_\ell(kr) \, Y_{\ell m}(\theta,\varphi) \, j_\ell^*(kr') \, Y_{\ell m}^*(\theta',\varphi') \quad \frac{\pi}{2} \frac{\delta(r-r')}{r^2} \frac{\delta(\theta-\theta')}{\operatorname{sen}\theta} \delta(\varphi-\varphi')$$

$$F(s_E, t_E) = F(k, \cos\theta) = F(\vec{p}_3)$$

entonces

$$F(k,\cos\theta) = 4 \int_0^\infty k'^2 dk' \int_0^\pi \operatorname{sen}\theta' d\theta' \; F(k', \cos\theta') \frac{\delta(k-k')}{k'^2} \frac{\delta(\theta-\theta')}{\operatorname{sen}\theta'}$$

$$F(k,\cos\theta) = 4 \int_0^\infty k'^2 dk' \int_0^\pi \operatorname{sen}\theta' d\theta' \; F(k',\cos\theta') \int_0 r^2 dr \; j_\ell(kr) \, j_\ell^*(k'r) \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2\ell+1}{4\pi} P_\ell(\cos\theta) P_\ell(\cos\theta')$$

Reorganizando:

$$F(k,\cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2\ell+1) \int_0^\infty r^2 dr \; j_\ell(kr) \, P_\ell(\cos\theta) \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty k'^2 dk' \int_0^\pi \operatorname{sen}\theta' d\theta' \; j_\ell^*(k'r) \, P_\ell(\cos\theta') \, F(k',\cos\theta') \right\}$$

Si definimos:

$$f_\ell(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty k'^2 dk' \int_0^\pi \operatorname{sen}\theta' d\theta' \; j_\ell(k'r) \, P_\ell(\cos\theta') \; F(k',\cos\theta') \tag{102}$$

Entonces:

$$F(k,\cos\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \int_0^\infty r^2 dr \; j_\ell(kr) \, P_\ell(\cos\theta) \; f_\ell(r) \tag{103}$$

donde se tomó en cuenta que el ángulo φ es redundante y el único valor de m que contribuye es cuando $m=0$ y además se tomó en cuenta el hecho que : $j_\ell^*(k'r) = j_\ell(k'r)$

Tomando $a_\ell(k) = \int_0^\infty r^2 dr\, f_\ell(r)\, j_\ell(kr)$ la ecuación (103) se convierte en:

$$F(k, \cos\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1)\, a_\ell(k)\, P_\ell(\cos\theta) \tag{104}$$

que no es más que el desarrollo usual de ondas parciales y la ec. (103) es la amplitud de onda parcial para el grupo O(3)

III.6-2 - <u>El desarrollo cilíndrico del momento transferido para partículas sin Spin</u>.

Como se discutió en los capítulos I y II.3 en coordenadas cilíndricas cualquier vector arbitrario se puede descomponer en una parte que es paralela al sistema de referencia de la pared de ladrillo y en una parte que es perpendicular, en consecuencia la amplitud de dispersión en este caso va a ser función de los vectores $2\vec{q} = \vec{q}_1$ y $\vec{k} = \frac{1}{2}(\vec{p}_1^{\,0} + \vec{p}_2^{\,0})$, desarrollaremos esta amplitud de dispersión con ayuda de nuestra base:

$$|k q m\rangle = \frac{1}{2\pi} J_m(k\rho)\, e^{iqz}\, e^{im\varphi}$$

Si consideramos que las partículas no tienen Spin entonces el único valor posible de m es $m=0$, la amplitud entonces se puede representar como:

$$F(q, k) = \int_0^\infty k' dk' \int_{-\infty}^{\infty} dq' \frac{\delta(k-k')}{k'}\, \delta(q-q')\, F(q', k') \tag{105}$$

Usaremos las relaciones de ortogonalidad de nuestras funciones bases esto es:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{0}^{\infty} \rho d\rho \; J_o(k\rho)\, J_o(k'\rho)\, e^{i(q-q')z} = \frac{\delta(k-k')}{K}\, \delta(q-q') \tag{106}$$

Sustituyendo (106) en (105)

$$F(q,k) = \int_{0}^{\infty} k'dk' \int_{-\infty}^{\infty} dq' \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{0}^{\infty} \rho d\rho \; J_o(k\rho)\, J_o(k'\rho)\, e^{i(q-q')z} \right] F(q',k') \tag{107}$$

Reorganizando podemos escribir (107) en la forma siguiente

$$F(q,K) = \int_{0}^{\infty} \rho d\rho \int_{-\infty}^{\infty} dz \; J_o(k\rho)\, e^{iqz} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} k'dk' \int_{-\infty}^{\infty} dq'\, J_o(k'\rho)\, e^{-iq'z}\, F(q',k') \right] \tag{108}$$

Si llamamos

$$f(\rho, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} k'dk' \int_{-\infty}^{\infty} dq'\; J_o(k'\rho)\, e^{-iq'z}\, F(q',k') \tag{109}$$

entonces la ecuación (108) nos queda:

$$F(q,k) = \int_{0}^{\infty} \rho d\rho \int_{-\infty}^{\infty} dz \;\; J_o(k\rho)\;\; e^{iqz}\; f(\rho, z) \tag{110}$$

La cual la podemos interpretar como lo que se conoce en la literatura como un desarrollo iconal[16) si

$$A(q,\rho) = \int_{-\infty}^{\infty} dz \;\; e^{iqz}\; f(\rho, z) \tag{111}$$

En esta identificación la ecuación (110) queda:

$$F(q,k) = \int_{0}^{\infty} \rho d\rho \;\; J_o(k\rho) \;\; A(q,\rho) \tag{112}$$

El desarrollo iconal es común para dispersión hacia adelante en altas energías. El desarrollo (112) es una generalización para energías y angulos arbitrarios.

III.6-3 - El desarrollo cilíndrico del parámetro de impacto.

Si desarrollamos ahora nuestra amplitud de dispersión en la base del parámetro de impacto

$$|kqm\rangle = \frac{1}{2\pi} J_m(qb)\, e^{i(p-q)z} e^{im\varphi}$$

Es fácil ver que $\vec{q}$ es perpendicular $\vec{P}-\vec{q}$ en el caso que: $m_1 = m_2 = m_3 = m_4$ en el sistema de referencia del sistema de laboratorio de acuerdo con la conservación de la energía se tiene:

$$\frac{\vec{p}_1^{\,2L}}{2m_1} = \frac{\vec{p}_3^{\,2L}}{2m_3} + \frac{\vec{p}_4^{\,2L}}{2m_4} \tag{113}$$

En el sistema de laboratorio se tiene que:

$$\vec{p}_1^{\,L} = \vec{P}^L \quad \text{(momento lineal total)} \tag{114}$$

$\vec{p}_3^{\,L} = \vec{P}^L - \vec{q}$ (el momento lineal total - el momento transferido)

$\vec{p}_4^{\,L} = \vec{q}$ (momento transferido)

Por sustitución de (114) en (113) es claro que:

$$\vec{P}^{L2} = (\vec{P}^L - \vec{q}) + \vec{q}^{\,2} \Rightarrow (\vec{P}^L - \vec{q})\cdot\vec{q} = 0 \tag{115}$$

o lo que es lo mismo el vector $\vec{P}^L - \vec{q}$ es perpendicular al vector $\vec{q}$

Como se eligio el eje z en la dirección de $\vec{P}^L - \vec{q}$

y $\vec{p}^{L} - \vec{q}$ es perpendicular a la pared de ladrillo entonces $\vec{q}$ está en el plano de la pared de ladrillo y vamos a tener que:

$$- \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] = q^2$$

y esto quiere decir que el argumento de nuestra función de Bessel en este caso va a ser $q b$, entonces la función de Bessel se puede denotar por $J_m(q b)$ [10)]

La amplitud de dispersión se puede escribir como:

$$F(q, p-q) = \int_0^\infty b\,db\, J_0(qb)\, A(p-q, b) \tag{116}$$

con

$$A(p-q, b) = \int_{-\infty}^\infty dz\, e^{i(p-q)z} f(b, z) \tag{117}$$

y

$$f(b, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty q'\,dq' \int_{-\infty}^\infty d(p-q)'\, J_0(q'b)\, e^{-i(p-q)'z}\, F(q', p^L - q') \tag{118}$$

La ecuación (116) es lo que se conoce como el desarrollo del parámetro de impacto[10)], tal como nosotros la hemos representado es válida para energías y ángulos arbitrarios.

CAPITULO IV

IV.1 - El espacio de Hilbert para partículas con spin.

El espacio de Hilbert apropiado para una partícula con spin s es el producto tensorial

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{espacial} \otimes \mathcal{H}_{spin}$$

donde $\mathcal{H}_{espacial}$ es el espacio $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ de las funciones de onda ordinarias de cuadrado integrable y $\mathcal{H}_{spin}$ es el espacio de spin de $(2s+1)$ dimensiones.

Es común usar los eigenvectores $|m\rangle$ de la tercera componente del operador de spin como una base de $\mathcal{H}_{spin}$

$$S_3|m\rangle = m|m\rangle$$

m toma los valores enteros entre -s y s, un vector arbitrario de $\mathcal{H}_{spin}$ se escribe como:

$$|\chi\rangle = \sum_{m=-s}^{s} \chi_m |m\rangle \qquad (119)$$

Es conveniente recordar que, aunque sólo hay $(2s+1)$ estados de la base $|m\rangle$, una partícula con spin tiene un número infinito de estados de spin diferentes, correspondiente al número infinito de combinaciones en (119).

El estado del spin $|\chi\rangle$ en (119) esta univocamente definido por los coeficientes χ_m, los que pueden ser agrupados convenientemente en un espinor de 2s+1 componentes

$$\chi = \begin{bmatrix} \chi_s \\ \vdots \\ \chi_{-s} \end{bmatrix}$$

Al discutir el spin, con frecuencia se ignora la distinción entre el vector abstracto $|\chi\rangle$ y su espinor representativo χ y se consideran los dos como uno y el mismo objeto. En este caso los operadores lineales definidos sobre $\mathcal{H}_{spin}$ son identificados con matrices cuadradas de (2s+1) dimensiones.

Ejemplo: El operador del spin para una partícula con spin se puede representar como $\vec{S}=\frac{1}{2}\vec{\sigma}$ en donde σ_1, σ_2 y σ_3 son las matrices de Pauli comunes y corrientes.

Una base para el espacio $\mathcal{H}$ se puede construir a partir de cualquier base de $\mathcal{H}_{esp.}$ y $\mathcal{H}_{spin}$

Ejemplo: Una base conveniente y frecuentemente usada está dada en términos de los eigenvectores de $\vec{p}$ y σ_3

$$|\vec{p}, m\rangle = |\vec{p}\rangle \otimes |m\rangle$$

que son productos de los eigenvectores del impulso $|\vec{p}\rangle$ en $\mathcal{H}_{esp.}$ y los eigenvectores de σ_3 en $\mathcal{H}_{spin}$

El espacio de Hilbert para dos partículas distintas con spines s_1 y s_2 es el producto directo:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$$

de los dos espacios de una partícula cada uno de los cuales es un producto del tipo descrito antes.

Las funciones de onda espaciales tienen la forma

$$\psi_{m_1 m_2}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$$

Como base para el espacio del spin de dos partículas podemos usar los eigenvectores

$$|m_1, m_2\rangle = |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle$$

de las componentes z o los eigenvectores del spin total y su componente z. La relación entre estos es:

$$| s, m \rangle = \sum_{\substack{m_1 \\ m_2}} | m_1 m_2 \rangle \langle s_1 s_2 m_1 m_2 | s m \rangle$$

el coeficiente $\langle s_1 s_2 m_1 m_2 | s m \rangle$ es el coeficiente de Clebsch-Gordan

En cualquiera de los casos el estado del spin de las partículas se puede desarrollar como:

$$| \chi \rangle = \sum_{\xi} \chi_{\xi} | \xi \rangle$$

ξ comunmente representa a $(m_1 m_2)$ ó $(s\ m)$ y en cualquiera de estos casos toma $(2s_1+1) \otimes (2s_2+1)$ valores distintos para cualquier base $\{ | \xi \rangle \}$

IV.2 -. <u>Los operadores S y T para partículas con spin. Las amplitudes de dispersión.</u>

Como en el caso de partículas sin spin calculamos la sección eficaz en el sistema del centro de masa en términos de la amplitud de dispersión. Sin embargo, en lugar de una sola amplitud de dispersión escalar como en el caso de partículas sin spin, ahora tenemos una matriz de $(2s+1) \times (2s+1)$

Consideremos primero el caso en el cual las partículas entran en uno de los estados de spin $| \xi \rangle$ y contamos el número de partículas salientes en $d\Omega$ en un estado $| \xi' \rangle$(Recordando que ξ es justamente la etiqueta para una base adecuada en el espacio de spin; por ejemplo $\xi = (m_1, m_2)$. En este caso:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} (p', \xi' \leftarrow p, \xi) = | F(p', \xi' \leftarrow p, \xi) |^2 \qquad (120)$$

La cual es la sección eficaz diferencial en el sistema del centro de masa observando las partículas finales en la dirección de $\vec{p}'$ con spines dados por $|\xi'\rangle$, si las partículas iniciales tubieron momento relativo $\vec{p}$ con spines $|\xi\rangle$. La sección eficaz observando un estado de spin final arbitrario $|\chi'\rangle$ proveniendo de cualquier estado de spin inicial $|\chi\rangle$ puede ser evaluada de la misma manera. Si

$$|\chi\rangle = \sum_{\xi} \chi_{\xi} |\xi\rangle \qquad \text{y}$$

$$|\chi'\rangle = \sum_{\xi'} \chi'_{\xi'} |\xi'\rangle$$

entonces:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(p', \xi' \leftarrow p, \xi) = \Big| \sum_{\xi'\xi} \chi'^{*}_{\xi'} F(p', \xi' \leftarrow p, \xi) \chi_{\xi} \Big|^2 \qquad (121)$$

Este resultado expresa la sección eficaz para spines arbitrarios $(|\chi'\rangle \leftarrow |\chi\rangle)$ en terminos de las $[(2s_1+1)(2s_2+1)]^2$ amplitudes de los procesos $(|\xi'\rangle \leftarrow |\xi\rangle)$. Esto sugiere reescribir las amplitudes básicas como:

$$F(p', \xi' \leftarrow p, \xi) = F_{\xi'\xi}(p' \leftarrow p)$$

y considerarlas como los elementos de una matriz de amplitud

$$f(p' \leftarrow p) = \{ F_{\xi'\xi}(p' \leftarrow p) \} \qquad (122)$$

nuestro resultado puede escribirse en forma compacta como

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(p', \chi' \leftarrow p, \chi) = | \chi'^{+} f(p' \leftarrow p) \chi |^2 \qquad (123)$$

(f es una matriz de $(2s+1) \times (2s+1)$ dimensiones) de lo cual es claro que toda la informacion relevante para el proceso de dispersión de las dos partículas está contenida en la matriz $f(p' \leftarrow p)$, justamente como en el caso de partículas sin spin donde toda la información estaba contenida en la amplitud

$$F(p' \leftarrow p)$$

El caso mas simple de partículas con spin es la dispersión de partículas con spin $\frac{1}{2}$ sobre blancos de spin cero. Este ejemplo incluye procesos importantes como la dispersión de electrones por atomos de spin cero. Ya que una partícula no tiene spin, el espacio de spin del sistema completo es justamente el espacio de spin de dos dimensiones del proyectil de spin $\frac{1}{2}$. Usaremos la base usual (eigenfunciones de S_3) con los vectores bases $|+\rangle$ y $|-\rangle$ correspondientes a los eigenvalores $m=\pm\frac{1}{2}$, De acuerdo con la ecuacion (123), la dispersión esta determinada por una matriz de 2x2 :

$$f(p' \leftarrow p) = \begin{pmatrix} f_{++}(p' \leftarrow p) & f_{+-}(p' \leftarrow p) \\ f_{-+}(p' \leftarrow p) & f_{--}(p' \leftarrow p) \end{pmatrix} \qquad (124)$$

El elemento $f_{m'm}(p' \leftarrow p)$ es la amplitud inicial para una partícula con momento $\vec{p}$ y componente z del spin m que es dispersada en la dirección p' y es observada con componente z del spin m' . Debido a relaciones de simetria sólo hay dos amplitudes independientes, o sea $f_{++}(p' \leftarrow p) = f_{--}(p' \leftarrow p)$ y $f_{+-}(p' \leftarrow p) = f_{-+}(p' \leftarrow p)$

El estado de spin inicial y final general estan dados por los dos espinores χ y χ' y de acuerdo a (123), la amplitud observando el proceso $(p', \chi' \leftarrow p, \chi)$ es justamente el número $\chi'^{+} f(p' \leftarrow p)\, \chi$

La matriz T está relacionada a la matriz S por la ecuación usual

$$S - 1 = i T \qquad (125)$$

La relacion entre la matriz T y la amplitud es:

$$\left(\frac{2\pi}{p}\right)^2 \left| \chi'^{\dagger} \, T(p' \leftarrow p) \, \chi \right|^2 = \left| \chi'^{\dagger} f(p' \leftarrow p) \chi \right|^2 \qquad (126)$$

IV.3 - La conservación del momento lineal usando la base translacional $E(3) \supset T_1 \times T_2 \times T_3$

Los operadores invariantes son $\vec{P}^2$ y $\vec{P}_i^2$, las funciones bases son

$$\langle \vec{r} | \vec{K} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i \vec{K} \cdot \vec{r}}$$

cumplen las siguientes relaciones de ortogonalidad y cerradura

$$\langle K' | K \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\vec{r} \; e^{i(\vec{K} - \vec{K}') \cdot \vec{r}} = \delta(\vec{K} - \vec{K}')$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\vec{K} \; e^{i \vec{K} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

Nos proponemos ver el efecto de invariancia translacional sobre un elemento S_{ji} de la matriz S. En la representación de coordenadas S puede escribirse como $S(\vec{r}_1', \vec{r}_2' ; \vec{r}_1, \vec{r}_2)$ Podemos considerar que esta sea función de otras cuatro variables $\vec{r}, \vec{r}'$ y la diferencia y la suma de las coordenadas del centro de masa, $\vec{R} - \vec{R}'$ y $\vec{R} + \vec{R}'$ donde $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ y $\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$. Los tres primeros vectores no cambian bajo translaciones mientras que $\vec{R} + \vec{R}'$ si cambia.

Entonces invariancia bajo translaciones implica que S debe depender solo de las coordenadas relativas y de la di ferencia de las coordenadas del centro de masa, entonces

$$S(\vec{r}_1{}', \vec{r}_2{}'; \vec{r}_1, \vec{r}_2) = S(\vec{r}\,', \vec{r}, \vec{R} - \vec{R}\,') \qquad (127)$$

En la base translacional un elemento de la matriz S puede escribirse como

$$S_{fi} = \int e^{i\vec{k}_1{}'\cdot\vec{r}_1{}'} e^{i\vec{k}_2{}'\cdot\vec{r}_2{}'} d^3\vec{r}_1{}' d^3\vec{r}_2{}' \; S(\vec{r}_1{}', \vec{r}_2{}', \vec{r}_1, \vec{r}_2) d^3\vec{r}_1 d^3\vec{r}_2 \, e^{i\vec{k}_1\cdot\vec{r}_1} e^{i\vec{k}_2\cdot\vec{r}_2}$$

se puede verificar facilmente que:

$$e^{i\vec{k}_1\cdot\vec{r}_1} e^{i\vec{k}_2\cdot\vec{r}_2} = e^{i\vec{K}_i\cdot\vec{R}} e^{i\vec{k}_i\cdot\vec{r}} \qquad (128)$$

donde el momento total es $\vec{K}_i = \vec{k}_1 + \vec{k}_2$ y el momento relativo es

$$\vec{k}_i = \frac{m_2\vec{k}_1 - m_1\vec{k}_2}{m_1 + m_2}$$

Si tomamos en cuenta la relación (128) entonces (S_{fi}) se transforma de la siguiente manera:

$$S_{fi} = \int d^3\vec{R}\, d^3\vec{R}'\, d^3\vec{r}\, d^3\vec{r}\,' \, e^{-i\vec{K}_f\cdot\vec{R}'} e^{-i\vec{k}_f\cdot\vec{r}\,'} S(\vec{r}\,', \vec{r}, \vec{R} - \vec{R}') e^{i\vec{K}_i\cdot\vec{R}} e^{i\vec{k}_f\cdot\vec{r}} \qquad (129)$$

haciendo el cambio de variable $\vec{x} = \vec{R} - \vec{R}'$

$$S_{fi} = \int d^3\vec{R}\, d^3\vec{x}\, d^3\vec{r}\, d^3\vec{r}\,' \, e^{-i\vec{K}_f\cdot(\vec{R} - \vec{x})} e^{-i\vec{k}_f\cdot\vec{r}\,'} S(\vec{r}\,', \vec{r}, \vec{R} - \vec{R}') e^{i\vec{K}_i\cdot\vec{R}} e^{i\vec{k}_f\cdot\vec{r}}$$

la cual se puede escribir como

$$S_{fi} = \int d^3\vec{R}\, e^{i(\vec{K}_i - \vec{K}_f)\cdot\vec{R}} d^3\vec{x}\, d^3\vec{r}\, d^3\vec{r}\,' \, e^{i\vec{K}_f\cdot\vec{x}} e^{-i\vec{k}_f\cdot\vec{r}\,'} S(\vec{r}\,', \vec{r}, \vec{x}) e^{i\vec{k}_i\cdot\vec{r}}$$

de donde obviamente

$$S_{fi} = (2\pi)^3 \delta(\vec{K}_i - \vec{K}_f) \int d^3\vec{x}\, d^3\vec{r}\, d^3\vec{r}\,' \, e^{i\vec{K}_f\cdot\vec{x}} e^{-i\vec{k}_f\cdot\vec{r}\,'} S(\vec{r}\,', \vec{r}, \vec{x}) e^{i\vec{k}_i\cdot\vec{r}}$$

La funcion delta de Dirac nos dice que el proceso de dispersión no ocurre a menos que $\vec{K}_f = \vec{K}_i$. De tal modo que conseguimos que la invariancia bajo translaciones implica que el momento total se conserva.

IV.4 - Invariancia bajo translaciones en el tiempo.

Si el hamiltoniano es independiente del tiempo, la ecuación de Schrodinger $i\hbar \frac{\partial\psi(t)}{\partial t} = H\psi(t)$ es invariante bajo translaciones a lo largo de este eje, esto es, bajo la trans formacion $t \to t+t_0$ o sea

$$i\hbar \frac{\partial\psi(t+t_0)}{\partial t} = H\,\psi(t+t_0) \qquad (130)$$

Si definimos $\bar\psi(t) = \psi(t+t_0)$ la ecuación anterior se ve enton - ces como

$$i\hbar \frac{\partial\bar\psi(t)}{\partial t} = H\,\bar\psi(t)$$

de (130) se ve que

$$\frac{d\,\bar\psi(t)}{\bar\psi(t)} = -\frac{i}{\hbar} H\,dt$$

la cual se puede integrar y nos da

$$\psi(t+t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht_0}\,\psi(t)$$

lo que nos dice que H es el generador de translaciones en el tiempo.

Los eigenestados del generador H son simplemente los estados $\psi_i^{(\pm)}$, un elemento de la matriz S es:

$$S_{fi} = \langle\psi_f^{(-)}|\psi_i^{(+)}\rangle = \langle\bar\psi_f^{(-)}|\bar\psi^{(+)}\rangle$$

$$= \langle\psi_f^{(-)}|\exp\left(\frac{i}{\hbar}Ht_0\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}Ht_0\right)|\psi_i^{(+)}\rangle$$

$$= \langle\bar\psi_f^{(-)}|\exp\left(\frac{i}{\hbar}E_f t_0\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_i t_0\right)|\bar\psi_i^{(+)}\rangle$$

$$\therefore\quad S_{fi} = S_{fi}\exp\left[\frac{i}{\hbar}(E_f - E_i)t_0\right]$$

Si esto se cumple para cualquier t_0 entonces $E_f = E_i$ cuando

$S_{fi} \neq 0$; y esto es la ley de conservación de la energia.

IV.5 - <u>Invariancia bajo rotaciones.</u> Para una rotacion arbitraria, la i-esima componente de un vector se transforma como

$$\bar{V}_i = \sum_{j=1}^{3} R_{ij} V_j \qquad (131)$$

donde R_{ij} es un elemento de las matrices de 3x3 de rotación. Por simplicidad, denotaremos esta transformación por:

$$\bar{V} = \vec{R}\,\vec{V}$$

donde $\vec{R}$ es un operador del espacio vectorial que satisface $\vec{R}^{+} R = \vec{R}\,\vec{R}^{+} = 1$ así bajo una rotación

$$\vec{\bar{r}} = \vec{R}\,\vec{r}$$
$$\vec{\bar{p}} = \vec{R}\,\vec{p}$$
$$\vec{\bar{S}} = \vec{R}\,\vec{S}$$

Si el hamiltoniano es invariante bajo tal transformación, esto es, si no hay ninguna dirección privilegiada en el espacio, la matriz S será invariante bajo rotaciones. La correspondiente ley de conservación se obtiene en la representación en la cual el operador canonicamente conjugado es diagonal.

Si la rotación es alrededor del eje z, este operador es J_z , la componente z del momento angular total.Si la rotación es alrededor de un eje arbitrario, el generador de la transformación es el operador correspondiente al momento angular alrededor de ese eje. Así, si $\vec{\theta}_0$ es un vector que tiene una magnitud igual al angulo de rotación θ_0 y dirigido a lo largo del eje de rotación, el operador de la transformación es

$$U = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\,\vec{J}\cdot\vec{\theta}_0\right) \qquad (132)$$

La representación apropiada es aquella en la cual J^2 y J_z son diagonales. Si S es invariante bajo rotaciones, conmutará con ambos (J^2 y J_z) y la matriz $\langle J_f M_f | S | J_i M_i \rangle$ será diagonal. Este elemento de matriz debe tambien ser independiente de M_i ya que no puede depender de la eleccion del eje z o de la orientación del sistema. Usaremos operadores de subida y de bajada $J_{\pm} = J_x \pm i J_y$ los cuales conmutan con S ya que J_x y J_y conmutan con S.

Usaremos el hecho de que

$$J_+ | J_i, M_i \rangle = \hbar \left[J_i(J_i+1) - M_i(M_i+1) \right]^{\frac{1}{2}} | J_i, M_i+1 \rangle \qquad (133)$$

La normalización se obtiene de la relación $J_- J_+ = J^2 - J_z(J_z+1)$ junto con el hecho de que $(J_-^{\dagger}) = J_+$. De (133) se sigue entonces que:

$$\hbar \left[J_i(J_i+1) - M_i(M_i+1) \right]^{\frac{1}{2}} \langle J_i, M_i+1 | = \langle J_i, M_i | (J_+)^{\dagger}$$

$$\therefore \quad \langle J_i, M_i | J_- J_+ | J_i, M_i \rangle = \left[J_i(J_i+1) - M_i(M_i+1) \right] \hbar^2 \qquad (134)$$

usando que $[S, J_-] = 0$ y las ecuaciones (133) y (134)

$$\langle J_i, M_i | S | J_i, M_i \rangle = \langle J_i, M_i | \frac{S}{\hbar^2} \left[\frac{J_- J_+}{J_i(J_i+1) - M_i(M_i+1)} \right] | J_i, M_i \rangle$$

$$= \left[J_i(J_i+1) - M_i(M_i+1) \right]^{-1} \hbar^{-2} \langle J_i, M_i | J_- S J_+ | J_i, M_i \rangle$$

$$= \left[J_i(J_i+1) - M_i(M_i+1) \right]^{-1} \hbar^{-2} \hbar^2 \left[J_i(J_i+1) - M_i(M_i+1) \right] \langle J_i, M_i+1 | S | J_i, M_i+1 \rangle$$

$$= \langle J_i, M_i+1 | S | J_i, M_i+1 \rangle$$

$$\therefore \quad \langle J_i, M_i | S | J_i, M_i \rangle = \langle J_i, M_i+1 | S | J_i, M_i+1 \rangle \qquad (135)$$

Entonces todos los elementos $\langle J_i, M_i | S | J_i, M_i \rangle$ teniendo un valor dado de J_i son iguales. Conseguimos entonces que la matriz S en el sistema de referencia del centro de masa esta dada por:

$$\langle J_f, M_f | S | J_i, M_i \rangle = S_{J_i}(E)\, \delta_{J_i,J_f}\, \delta_{M_i,M_f}$$

demostrando esto la conservación del momento angular total y de su componente a lo largo de cualquier eje. El número $S_{J_i}(E)$ es el eigenvalor de S en la representación $\vec{J}$

Nuestros resultados pueden resumirse en la siguiente forma

$$\langle E_f J_f M_f | S | E_i J_i M_i \rangle = \delta(E_f - E_i)\, \delta_{J_i,J_f}\, \delta_{M_i,M_f}\, S_{J_i}(E) \quad (17)$$

Este resultado significa que debido a la invariancia rotacional S es diagonal con respecto a J y M y que debido a invariancia bajo translaciones en el tiempo es diagonal con respecto a E.

IV.6 - El formalismo de la helicidad .

Definición 1 - La helicidad λ de una partícula se define como la componente del spin en la dirección del momento de la partícula.

El uso de una base de estados de una partícula etiquetados con $\vec{p}$ y λ tiene múltiples ventajas sobre las bases de estados etiquetados con $\vec{p}$ y m (m es el eigen valor de S_3)

A diferencia de lo que ocurre con m, la helicidad λ no cambia bajo rotaciones, lo que simplifica considerablemente el análisis de la invariancia rotacional. Puesto que el operador de helicidad $\vec{S}\cdot\hat{P}$ puede expresarse como $\vec{J}\cdot\hat{P}$, ya que $\vec{L}\cdot\hat{P}$ es nulo, la helicidad se puede definir sin dificultad en la formulación relativista en donde la definición de $\vec{L}$ y $\vec{S}$ por separado es engorrosa.

A cada valor del momento $\vec{P}$ de la partícula le corresponden $(2s+1)$ eigenvalores del operador de helicidad $\vec{S}\cdot\hat{P}$ que son:

$$\lambda = -s, -s+1 \, \ldots\ldots \, s-1, s \tag{136}$$

y por lo tanto el espacio de todos los estados de una partícula está subtendido por los eigenvectores de $\vec{p}$ y $\vec{S}\cdot\hat{P}$ $\{|\vec{p},\lambda\rangle\}$ del mismo modo que por el conjunto de los eigenvectores de $\vec{p}$ y $\vec{S}_3$ $\{|\vec{p},m\rangle\}$. Al escoger la base de helicidad la única ambiguedad es la inevitable en la elección de la fase de los vectores $|\vec{p},\lambda\rangle$. Esta se escoge comunmente del modo siguiente: Consideremos primero los estados cuyo momento $\vec{p}$ está alineado con el eje positivo oz , $\vec{p} = \hat{z}\,p$ para estos estados la helicidad coincide con $\vec{S}_3$ y podemos escoger los estados $|\vec{p},\lambda\rangle$ de modo que sean precisamente los eigenestados usuales de S_3 con las convenciones de fase usuales

$$|\vec{p},\lambda\rangle = |\vec{p}\rangle \otimes |s_3 = \lambda\rangle \quad [\vec{p} = \hat{z}\,p] \tag{137}$$

A continuación; notemos que un momento arbitrario $\vec{p}$ en la dirección (θ_p, φ_p) se puede obtener siempre a partir de uno en la dirección oz por medio de una rotación. De hecho, esto se puede hacer de muchas maneras, de las cuales la mas simple es justamente hacer un giro de θ grados alrededor de un eje perpendicular a $\hat{3}$ y $\vec{p}$ (Fig 7)

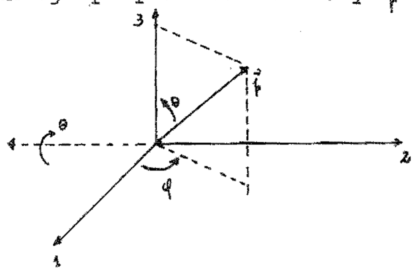


Fig 7.- El momento $\vec{p}$ puede obtenerse de $p\hat{3}$ por una rotación de θ alrededor de un eje perpendicular a $\vec{p}$ y $\hat{3}$ Esto equivale a tres rotaciones sucesivas: $-\varphi$ alrededor de $\hat{3}$, θ alrededor de $\hat{2}$, y φ alrededor de $\hat{3}$. Esta rotación tiene los angulos de Euler ($\varphi, \theta - \varphi$)

Es conveniente parametrizar esta rotación con ayuda de los ángulos de Euler, que definimos de modo que

$$D(\varphi, \theta, \psi) = e^{-i\varphi J_3} e^{-i\theta J_2} e^{-i\psi J_3} \qquad (138)$$

Esta es la llamada definición activa, en la que se hace girar al sistema y no a los ejes. En términos de esta definición la rotación descrita es $D(\varphi, \theta, -\varphi)$ (fig 7). Puesto que la helicidad no cambia por efecto de las rotaciones, podemos definir ahora el estado $|\vec{p}, \lambda\rangle$ como el estado obtenido efectuando una rotación $D(\varphi, \theta, -\varphi)$ sobre el estado $|p\hat{3}, \lambda\rangle$

$$|\vec{p}, \lambda\rangle = D(\varphi, \theta, -\varphi)\, |p\hat{3}, \lambda\rangle \qquad (139)$$

El primer ángulo de rotación, $-\varphi$ es solamente asunto de definición, pues $D(\varphi,\theta,-\varphi)$ llevaría $p\hat{3}$ a $\vec{p}$ con cual - quier valor de ψ; el uso de valores diferentes de ψ le daría a $|\vec{p},\lambda\rangle$ fases diferentes. La elección $\psi = -\varphi$ es la más común y tambien la mas conveniente. Este procedi - miento nos provee con una base ortonormal bien definida para los estados de una sola partícula que satisfacen

$$\langle \vec{p}\,',\lambda'|\vec{p},\lambda\rangle = \delta^3(p'-p)\,\delta_{\lambda'\lambda} \tag{140}$$

Con estos podemos construir una base para los estados de dos partículas con los productos directos

$$|\vec{p}_1,\lambda_1\rangle \otimes |\vec{p}_2,\lambda_2\rangle \tag{141}$$

IV.7 - <u>El desarrollo esférico</u>. En el sistema del centro de masa se cumple que

$$\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \tag{142}$$

y esto nos permite encontrar una representación mas simple para los estados de dos partículas. Los estados (141) estan definidos mediante rotaciones independientes, una para cada partícula, en tanto que para el caso especial $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$ pode mos definir un estado equivalente con una sola rotación. Así pues, definimos primero un estado del movimiento relativo con el momento relativo p en la dirección de $\hat{3}$

$$|\vec{p},\lambda_1,\lambda_2\rangle = |\vec{p}\rangle \otimes |s_3^{(1)}=\lambda_1\rangle \otimes |s_3^{(2)}=-\lambda_2\rangle \quad [\vec{p}=\hat{3}\,p] \tag{143}$$

En el marco de referencia del centro de masa (143) representa un estado en el cual la partícula 1 se mueve a lo largo del eje oz con momento $\vec{p}$ en tanto que la partícula 2 se mueve en la dirección contraria con momento $-\vec{p}$.El signo negativo en el último factor de (143) se debe a que con su momento en la dirección $-\hat{3}$, la partícula 2 tiene helicidad $-s_3^{(2)}$. El estado general del movimiento relativo con momento relativo $\vec{p}$ arbitrario se obtiene ahora median te la rotación apropiada como

$$|\vec{p}, \lambda_1, \lambda_2> = D(\varphi, \theta, -\varphi)\ |p\hat{3}, \lambda_1, \lambda_2> \qquad [\vec{p} = (\theta,\varphi)] \quad (144)$$

en donde D es ahora el operador de rotación de dos partí - culas generado por el momento angular total de las dos partículas.

Los vectores (144) definen estados del movimiento relativo en los que las partículas tienen helicidades λ_1 y λ_2 y momento relativo $\vec{p}$, es decir que en el marco de referencia del centro de masa las dos partículas tienen momentos de igual magnitud y signos contrarios $\vec{p}_1 = \vec{p}$ y $\vec{p}_2 = -\vec{p}$. Estan normalizados de manera que

$$< \vec{p}'; \lambda_1' \lambda_2' | \vec{p}, \lambda_1, \lambda_2 > = \delta^3(p' - p)\, \delta_{\lambda_1' \lambda_1}\, \delta_{\lambda_2' \lambda_2} \quad (145)$$

y nos proveen con una base ortonormal para describir el mo vimiento relativo.

La matriz S en la base de helicidad se puede des- componer como

$$< \vec{p}', \lambda_1', \lambda_2' | S | \vec{p}, \lambda_1, \lambda_2 > = \delta^3(\vec{p}' - \vec{p})\, \delta_{\lambda_1' \lambda_1}\, \delta_{\lambda_2' \lambda_2}$$
$$+ \frac{i}{2\pi m}\, \delta(E_{p'} - E_p)\, f(\vec{p}', \lambda_1', \lambda_2'; \vec{p}, \lambda_1, \lambda_2) \quad (146)$$

y la sección eficaz diferencial en el marco de referencia del centro de masa para un proceso que involucra helicida - des definidas es

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}\left(\vec{p}\,',\lambda_1',\lambda_2';\ \vec{p},\lambda_1,\lambda_2\right)=\left|f\left(\vec{p}\,',\lambda_1',\lambda_2';\ \vec{p},\lambda_1,\lambda_2\right)\right|^2 \quad (147)$$

IV.8 - Invariancia rotacional. Supongamos que el sistema es invariante rotacionalmente. Para aprovechar esta propiedad naturalmente usaremos una base de eigenvectores del momento angular. Es aquí donde se ve la ventaja de la base de heli - cidad pues los operadores $\vec{S}^{(1)}.\hat{p}$ y $\vec{S}^{(2)}.\hat{p}$ son escalares y por lo tanto conmutan con $\vec{J}$ y por consiguiente podemos escoger un conjunto completo de observables que conmuten incluyendo a J^2 y J_z y las dos helicidades. Especificamente, podemos es coger una base para describir el movimiento relativo $\{|E,j,m,\lambda_1,\lambda_2\rangle\}$ y la transformación de esta base a la base del momento lineal $|\vec{p},\lambda_1,\lambda_2\rangle$ se puede hacer sin usar los coeficientes de Clebsch-Gordan para acoplar spines y momentos angulares orbitales.

La teoría del grupo de rotaciones muestra que los estados del momento angular se pueden expresar en funcion de los estados del momento lineal con la fórmula (8)

$$|E,j,m,\lambda_1,\lambda_2\rangle = N\int d\Omega\, \mathcal{D}^{(j)}_{m\lambda}(\Omega)^{*}\,|\vec{p},\lambda_1,\lambda_2\rangle \quad (148)$$

en donde $\mathcal{D}^{(j)}_{m\lambda}(\varphi,\theta,-\varphi)$ son los elementos de la matriz de rota - ción de (2j+1) dimensiones para los angulos de Euler $(\varphi,\theta,-\varphi)$, $\lambda=\lambda_1-\lambda_2$ y $\vec{p}$ apunta en la dirección (θ,φ) y tiene la magnitud $\sqrt{2mE}$

Vamos a demostrar entonces la formula (148).

Demostración: Sea $|p\hat{3},\lambda\rangle$ un estado de helicidad λ y momento lineal $p\hat{3}$. Un estado $|\vec{p},\lambda\rangle$ en el cual el momento tiene la misma magnitud pero esta en la dirección (θ,φ) esta dado por

$$|\vec{p},\lambda\rangle = D(\varphi,\theta,-\varphi)\,|p\hat{3},\lambda\rangle \tag{149}$$

Podemos descomponer en eigenestados simultaneos $|E,j,m,\lambda\rangle$ de p^2, J^2, y J_z como sigue:

$$|p\hat{3},\lambda\rangle = \sum_{j=|\lambda|}^{\infty} |E,j,\lambda\rangle\langle E,j,\lambda|p\hat{3},\lambda\rangle \tag{150}$$

El estado rotado se obtiene aplicando $D(\varphi,\theta,-\varphi)$ a (150)

$$D(\varphi,\theta,-\varphi)|p\hat{3},\lambda\rangle = \sum_{j=|\lambda|}^{\infty} D(\varphi,\theta,-\varphi)\,|E,j,\lambda\rangle\langle E,j,\lambda|p\hat{3},\lambda\rangle \tag{151}$$

descomponiendo en eigenestados $|j,m\rangle$ de J^2 y J_z y tomando en cuenta (149)

$$|\vec{p},\lambda\rangle = \sum_{j=|\lambda|}^{\infty}\sum_{m=-j}^{j} \langle jm|D(\varphi,\theta,-\varphi)|j\lambda\rangle\,|E,j,m\rangle\langle E,j,\lambda|p\hat{3},\lambda\rangle$$

de donde

$$|\vec{p},\lambda\rangle = \sum_{j=|\lambda|}^{\infty}\sum_{m=-j}^{j} \mathcal{D}^{(j)}_{m\lambda}(\varphi,\theta,-\varphi)\,|E,j,m\rangle\langle E,j,\lambda|p\hat{3},\lambda\rangle \tag{152}$$

Esta es claramente la generalización para partículas con spin, de la descomposición en ondas esféricas de una onda plana.

Ejemplo: Si la partícula no tiene spin $\lambda=0$, j=l entonces de (152)

$$\langle\vec{r}|\vec{p}\rangle = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \mathcal{D}^{(l)}_{m0}(\varphi,\theta,-\varphi)\,\langle\vec{r}|E,l,m\rangle\langle E,l|p\hat{3}\rangle \tag{153}$$

pero

$$\mathcal{D}^{(l)}_{m0}(\varphi,\theta,-\varphi) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\,Y^*_{lm}(\theta_p,\varphi_p)$$

y

$$\langle\vec{r}|p,l,m\rangle = c_l\, j_l(kr)\, Y_{lm}(\theta_r,\varphi_r)$$

$$\langle\vec{r}|\vec{p}\rangle = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

haciendo estas substituciones entonces (153) se ve como

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} C_l\, j_l(kr)\, Y_{lm}(\theta_r,\varphi_r)\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\, Y^*_{lm}(\theta_p,\varphi_p)\langle E,l|p\hat{3}\rangle$$

$$\therefore\quad e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = 2^2\sqrt{2}\,\pi^2\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{C_l(\langle El|p\hat{3}\rangle)}{\sqrt{2l+1}}\, j_l(kr)Y_{lm}(\theta_r,\varphi_r)\,Y^*_{lm}(\theta_p,\varphi_p) \qquad (154)$$

Pero el desarrollo usual de una onda plana en ondas esféricas es

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = 4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} i^l\, j_l(kr)\, Y_{lm}(\theta_r,\varphi_r)\, Y^*_{lm}(\theta_p,\varphi_p) \qquad (155)$$

como estos desarrollos deben coincidir, entonces

$$4\pi\, i^l = 4\sqrt{2}\,\pi^2\,\frac{C_l(\langle El|p\hat{3}\rangle)}{\sqrt{2l+1}} \quad\Rightarrow\quad 1 = \pi\sqrt{2}\, C_l\,\frac{\langle El|p\hat{3}\rangle}{i^l\sqrt{2l+1}}$$

$$1 = \pi\sqrt{\frac{2}{2l+1}}\,\frac{1}{i^l}\, C_l\,\langle El|p\hat{3}\rangle \qquad (156)$$

Para conseguir el valor explícito de C_l debemos calcular la siguiente integral:

$$\langle El|p\hat{3}\rangle = \int\langle El|\vec{r}\rangle\, d^3r\,\langle\vec{r}|p\hat{3}\rangle = \int d^3r\, C_l^*\, j_l(kr)\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\, P_l(\cos\theta_r)e^{ikr\cos\theta_r}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}\int_0^\infty r^2dr\int_0^\pi \operatorname{sen}\theta_r\, d\theta_r\int_0^{2\pi} d\varphi_r\; C_l^*\, j_l(kr)\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\, P_l(\cos\theta_r)\sum_{l'=0}^{\infty}(2l'+1)\, i^{l'} j_{l'}(kr)P_{l'}(\cos\theta_r)$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{(2\pi)^3}}\, C_l^*\sum_{l'=0}^{\infty}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\,(2l'+1)\, i^{l'}\int_0^\infty r^2dr\, j_l(kr)\, j_{l'}(kr)\int_0^\pi \operatorname{sen}\theta_r\, d\theta_r\, P_l(\cos\theta_r)\, P_{l'}(\cos\theta_r)$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{(2\pi)^3}}\, C_l^*\sum_{l'=0}^{\infty} i^{l'}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\,(2l'+1)\int_0^\infty r^2dr\, j_l(kr)\, j_{l'}(kr)\,\frac{2}{2l+1}\,\delta_{ll'}$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{(2\pi)^3}}\, C_l^*\, i^l\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\,(2l+1)\,\frac{2}{2l+1} = C_l^*\sqrt{\frac{2l+1}{2^3\pi^2}}\, i^l$$

$$\therefore\quad \langle El|p\hat{3}\rangle = C_l^*\sqrt{\frac{2l+1}{2^3\pi^2}}\, i^l \qquad (157)$$

se usó la ortogonalidad de los polinomios de Legendre y las funciones de Bessel. Sustituyendo (157) en (156)

$$1 = \pi \sqrt{\frac{2}{2\ell+1}} \frac{1}{i^\ell} |c_\ell|^2 \sqrt{\frac{2\ell+1}{2^3\pi^2}} i^\ell \Rightarrow 1 = \frac{1}{2}|c_\ell|^2$$

$$\therefore \quad c_\ell = \sqrt{2}$$

Los elementos de las matrices de rotación satisfacen la siguiente relación de ortogonalidad

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, \mathcal{D}^{(j)}_{m\lambda}(\varphi,\theta,-\varphi)\, \mathcal{D}^{(j')}_{m'\lambda}(\varphi,\theta,-\varphi) = \frac{4\pi}{2j+1}\delta_{jj'}\delta_{mm'} \tag{158}$$

multiplicando la ec. (152) por $\mathcal{D}^{(j')}_{m'\lambda}(\varphi,\theta,-\varphi)$ e integrando

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, \mathcal{D}^{(j')*}_{m'\lambda}(\varphi,\theta,-\varphi)\, |\vec{p},\lambda\rangle = \sum_{j=|\lambda|}^{\infty}\sum_{m=-j}^{j} \int_0^\pi \operatorname{sen}\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, \mathcal{D}^{(j)}_{m\lambda}(\varphi,\theta,-\varphi)\mathcal{D}^{(j')*}_{m'\lambda}(\varphi,\theta,-\varphi)\, |E,j,m\rangle\langle E,j,\lambda|p\hat{3},\lambda\rangle$$

de la relación (158)

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, \mathcal{D}^{(j')*}_{m'\lambda}(\varphi,\theta,-\varphi)\, |\vec{p},\lambda\rangle = \sum_{j=|\lambda|}^{\infty}\sum_{m=-j}^{j} |E,j,m\rangle\langle E,j,\lambda|p\hat{3},\lambda\rangle \frac{4\pi}{2j+1}\delta_{jj'}\delta_{mm'}$$

$$\therefore \quad |E,j,m,\lambda\rangle = \frac{2j+1}{4\pi\langle E,j,\lambda|p\hat{3},\lambda\rangle} \int_0^\pi \operatorname{sen}\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, \mathcal{D}^{(j)*}_{m\lambda}(\varphi,\theta,-\varphi)\, |\vec{p},\lambda\rangle \tag{159}$$

Demostraremos la ecuacion (158), esto es:

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, \mathcal{D}^{(j_1)}_{m\lambda}(\varphi,\theta,-\varphi)\, \mathcal{D}^{(j_2)*}_{m'\lambda}(\varphi,\theta,-\varphi) = \frac{4\pi}{2j+1}\delta_{jj'}\delta_{mm'} \tag{160}$$

se satisface la siguiente relación:

$$\mathcal{D}^{(j_2)*}_{m'\lambda}(\varphi,\theta,-\varphi) = (-1)^{m'-\lambda}\mathcal{D}^{(j_2)}_{-m',-\lambda}(\varphi,\theta,-\varphi)$$

Las matrices de rotación son dos tensores esféricos y por consiguiente el acoplamiento de dos matrices de rotación es

$$\mathcal{D}^{(j_2)*}_{m'\lambda}(\varphi,\theta,-\varphi)\, \mathcal{D}^{(j_1)}_{m\lambda}(\varphi,\theta,-\varphi) = (-1)^{m'-\lambda}\mathcal{D}^{(j_2)}_{-m',-\lambda}(\varphi,\theta,-\varphi)\, \mathcal{D}^{(j_1)}_{m\lambda}(\varphi,\theta,-\varphi)$$

$$= \sum_j (-1)^{m'-\lambda}\langle j_1 j_2, m, -m'|j, m-m'\rangle\langle j_1 j_2, \lambda, -\lambda|j, \lambda-\lambda\rangle \mathcal{D}^{(j)}_{m-m',\lambda-\lambda}(\varphi,\theta,-\varphi)$$

$$\therefore \quad \mathcal{D}^{(j_2)*}_{m'\lambda}(\varphi,\theta,-\varphi)\, \mathcal{D}^{(j_1)}_{m\lambda}(\varphi,\theta,-\varphi) = \sum_j (-1)^{m'-\lambda}\langle j_1 j_2\, m,-m'|j, m-m'\rangle \times \langle j_1 j_2, \lambda-\lambda|j\, 0\rangle\, \mathcal{D}^{(j)}_{m-m',0}(\varphi,\theta,-\varphi) \tag{161}$$

sustituyendo (161) en (160)

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \sum_{j} (-1)^{m'-\lambda} \langle j_1 j_2, m, -m' | j, m-m' \rangle \langle j_1 j_2 \lambda, -\lambda | j 0 \rangle \mathcal{D}^{(j)}_{m-m',0}(\varphi,\theta,-\varphi)$$

$$= \sum_{j} (-1)^{m'-\lambda} \langle j_1 j_2 m, -m' | j\; m-m' \rangle \langle j_1 j_2 \lambda, -\lambda | j 0 \rangle \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, \mathcal{D}^{(j)}_{m-m',0}(\varphi,\theta,-\varphi) \qquad (162)$$

Ahora,

$$\mathcal{D}^{(j)}_{m-m',0}(\varphi,\theta,-\varphi) = e^{-i(m-m')\varphi} d^{(j)}_{m-m'}(\theta)\, e^{i0\varphi} = e^{-i(m-m')\varphi} d^{(j)}_{m-m'}(\theta)$$

$$\therefore \quad \mathcal{D}^{(j)}_{m-m'}(\varphi,\theta,-\varphi) = \mathcal{D}^{(j)}_{m-m',0}(\varphi,\theta)$$

por otro lado

$$\mathcal{D}^{(j)}_{m-m',0}(\varphi,\theta,-\varphi) = \sqrt{\frac{4\pi}{2j+1}}\, Y^{(j)*}_{m-m'}(\theta,\varphi) \quad \text{y} \quad Y^{0}_{0}(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

La ecuación (162) puede reescribirse como

$$\sum_{j} (-1)^{m'-\lambda} \langle j_1 j_2 m, -m' | j, m-m' \rangle \langle j_1 j_2 \lambda, -\lambda | j 0 \rangle \times$$

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \sqrt{\frac{4\pi}{2j+1}}\, Y^{(j)*}_{m-m'}(\theta,\varphi) \sqrt{4\pi}\, Y^{0}_{0}(\theta,\varphi)$$

$$= 4\pi \sum_{j=} (-1)^{m'-\lambda} \langle j_1 j_2 m, -m' | j, m-m' \rangle \langle j_1 j_2 \lambda, -\lambda | j 0 \rangle \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \delta_{m-m',0}\delta_{j,0}$$

$$= 4\pi (-1)^{m-\lambda} \langle j_1 j_2 m', -m | 0 0 \rangle \langle j_1 j_2 \lambda, -\lambda | 0 0 \rangle$$

Apliquemos la relación de simetria para los coeficientes

de Clebsch-Gordan

$$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j m \rangle = (-1)^{j_1-m_1} \sqrt{\frac{2j+1}{2j_2+1}} \langle j_1 j\, m_1, -m | j_2, -m_2 \rangle$$

$$\therefore \quad \langle j_1 j_2 m', -m | 0 0 \rangle = (-1)^{j_1-m} \sqrt{\frac{1}{2j_2+1}} \langle j_1 0\, m' 0 | j_2 m \rangle$$

$$\langle j_1 j_2 \lambda, -\lambda | 0 0 \rangle = (-1)^{j_1-\lambda} \sqrt{\frac{1}{2j_2+1}} \langle j_1 0 \lambda 0 | j_2 \lambda \rangle$$

de tal modo que:

$$\langle j_1 j_2 m, -m' | 0, m-m' \rangle \langle j_1 j_2 \lambda, -\lambda | 0 0 \rangle = (-1)^{2j_1-m-\lambda} \frac{1}{2j_2+1} \langle j_1 0 m, m'-m | j_2 m' \rangle \times$$

$$\times \langle j_1 0 \lambda 0 | j_2 \lambda \rangle$$

los Clebsch-Gordan tienen la siguiente propiedad

$$\langle j_1 0 m_1 0 | j m\rangle = \delta_{j_1 j}\,\delta_{m_1 m}$$

$$\therefore \quad \langle j_1 0 \lambda 0 | j_2 \lambda\rangle = \delta_{j_1 j_2}\,\delta_{\lambda\lambda} \qquad\qquad y$$

$$\langle j_1 0 m' 0 | j_2 m\rangle = \delta_{j_1 j_2}\,\delta_{m' m} \qquad\qquad y$$

de donde

$$4\pi\,(-1)^{m-\lambda}\langle j_1 j_2\, m', -m|00\rangle\langle j_1 j_2\,\lambda, -\lambda|00\rangle =$$

$$= 4\pi\,(-1)^{m-\lambda}(-1)^{j_1-m'}(-1)^{j_1-\lambda}\frac{1}{2j_2+1}\,\delta_{j_1 j_2}\,\delta_{m' m}$$

$$\therefore \int_0^{\pi}\operatorname{sen}\theta\, d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi\; \mathcal{D}^{(j_1)}_{m\lambda}(\varphi,\theta,-\varphi)\,\mathcal{D}^{(j_2)*}_{m'\lambda}(\varphi,\theta,-\varphi) = \frac{4\pi}{2j_2+1}\,\delta_{j_1 j_2}\,\delta_{m' m} \qquad (163)$$

De la ecuación (152)

$$|\vec{p},\lambda\rangle = \sum_{j=|\lambda|}^{\infty}\sum_{m=-j}^{j}\mathcal{D}^{(j)}_{m\lambda}(\hat{n})\,|\vec{p}, j m\lambda\rangle\langle\vec{p}, j\lambda|p\hat{3},\lambda\rangle \qquad (164)$$

de donde obviamente

$$\langle\vec{p}',\lambda'| = \sum_{j'=|\lambda'|}^{\infty}\sum_{m'=-j'}^{j'}\langle\vec{p}', j' m'\lambda'|\,\mathcal{D}^{(j')*}_{m'\lambda'}(\hat{n}')\,\langle p'\hat{3},\lambda'|\vec{p}', j'\lambda'\rangle \qquad (165)$$

Los eigenestados del momento satisfacen la relación de ortonormalización usual

$$\langle\vec{p}',\lambda'|\vec{p},\lambda\rangle = \frac{\delta(p-p')}{p p'}\,\frac{\delta(\theta_r-\theta_r')}{\operatorname{sen}\theta_r}\,\delta(\varphi_r-\varphi_r')$$

y ademas

$$\langle\vec{p}, j m\lambda|\vec{p}', j' m'\lambda'\rangle = \frac{\delta(p-p')}{p p'}\,\delta_{j j'}\,\delta_{m m'}\,\delta_{\lambda\lambda'}$$

de (164) y (165)

$$\langle\vec{p}',\lambda'|\vec{p},\lambda\rangle = \sum_{j'=|\lambda'|}^{\infty}\sum_{m'=-j'}^{j'}\sum_{j=|\lambda|}^{\infty}\sum_{m=-j}^{j}\langle\vec{p}', j' m'\lambda'|\vec{p}, j m\lambda\rangle$$

$$\mathcal{D}^{(j')*}_{m'\lambda'}(\hat{n}')\,\mathcal{D}^{(j)}_{m\lambda}(\hat{n})\,\langle\vec{p}, j\lambda|p\hat{3},\lambda\rangle\langle p'\hat{3},\lambda'|\vec{p}', j'\lambda'\rangle$$

$$\langle\vec{p}',\lambda'|\vec{p},\lambda\rangle = \sum_{j' m' j m}\frac{\delta(p-p')}{p p'}\,\delta_{j j'}\,\delta_{m m'}\,\delta_{\lambda\lambda'}\,\mathcal{D}^{(j')*}_{m'\lambda'}(\hat{n}')\,\mathcal{D}^{(j)}_{m\lambda}(\hat{n})$$
$$\langle\vec{p}, j\lambda|p\hat{3},\lambda\rangle\langle p'\hat{3},\lambda'|\vec{p}', j',\lambda'\rangle$$

$$\frac{\delta(\vec{p}-\vec{p}')}{p p'}\,\frac{\delta(\theta_r-\theta_r')}{\operatorname{sen}\theta_r}\,\delta(\varphi_r-\varphi_r') = \sum_{jm}\langle\vec{p}, j\lambda|p\hat{3},\lambda\rangle\langle p\hat{3},\lambda|\vec{p}, j\lambda\rangle\,\times$$
$$\times\,\mathcal{D}^{(j)*}_{m\lambda}(\hat{n}')\,\mathcal{D}^{(j)}_{m\lambda}(\hat{n})\,\frac{\delta(p-p')}{p p'}$$

$$\sum_{jm}\langle p, j\lambda|p\hat{3},\lambda\rangle\langle p\hat{3},\lambda|\vec{p}, j\lambda\rangle\,\mathcal{D}^{(j)*}_{m\lambda}(\hat{n}')\,\mathcal{D}^{(j)}_{m\lambda}(\hat{n}) = \qquad (166)$$
$$= \frac{\delta(\theta_r-\theta_r')}{\operatorname{sen}\theta_r}\,\delta(\varphi_r-\varphi_r')$$

pero $\langle \vec{p}, j\lambda | p\hat{z}, \lambda \rangle = \dfrac{2j+1}{4\pi N}$ y N puede evaluarse de la siguiente manera:

$$| \vec{p}, jm\lambda \rangle = N \int d\hat{n}\, \mathcal{D}^{(j)}_{m\lambda}(\hat{n})^* \, | p\hat{n}, \lambda \rangle$$

$$\therefore \quad \langle \vec{p}', j'm'\lambda' | = N^* \int d\hat{n}'\, \mathcal{D}^{(j')}_{m'\lambda'}(\hat{n}') \langle \vec{p}'\hat{n}', \lambda' |$$

$$\langle p', j'm'\lambda' | p, jm\lambda \rangle = |N|^2 \int d\hat{n}\, d\hat{n}'\, \mathcal{D}^{(j)}_{m\lambda}(\hat{n})^* \mathcal{D}^{(j')}_{m'\lambda'}(\hat{n}') \langle \vec{p}'\hat{n}', \lambda' | p\hat{n}, \lambda \rangle$$

$$\frac{\delta(p-p')}{pp'} \delta_{jj'} \delta_{m'm} \delta_{\lambda'\lambda} = |N|^2 \int d\hat{n}\, d\hat{n}'\, \mathcal{D}^{(j)}_{m\lambda}(\hat{n})^* \mathcal{D}^{(j')}_{m'\lambda'}(\hat{n}') \frac{\delta(p-p')}{pp'} \delta(\hat{n}-\hat{n}') \delta_{\lambda'\lambda}$$

$$\therefore \quad \int d\hat{n}\, \mathcal{D}^{(j)*}_{m\lambda}(\hat{n})\, \mathcal{D}^{(j)}_{m'\lambda}(\hat{n}) = \frac{1}{N^2} \delta_{jj'} \delta_{m'm}$$

comparando con la ecuación (160) entonces $N = \sqrt{\dfrac{2j+1}{4\pi}}$

de tal modo que

$$\langle \vec{p}, j\lambda | p\hat{z}, \lambda \rangle \langle p\hat{z}, \lambda | \vec{p}, j\lambda \rangle = \left(\frac{2j+1}{4\pi N}\right)^2 = \left(\frac{2j+1}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{\frac{2j+1}{4\pi}} = \frac{2j+1}{4\pi}$$

La ecuación (166) nos queda entonces:

$$\sum_{j=|\lambda|}^{\infty} \sum_{m=-j}^{j} \frac{2j+1}{4\pi} \mathcal{D}^{(j)*}_{m\lambda}(\varphi_r', \theta_r', -\varphi_r') \mathcal{D}^{(j)}_{m\lambda}(\varphi_r, \theta_r, -\varphi_r) = \frac{\delta(\theta_r - \theta_r')}{\operatorname{sen}\theta_r} \delta(\varphi_r - \varphi_r') \quad (167)$$

<u>Teorema</u>

$|E, j, m, \lambda_1, \lambda_2\rangle$ es un eigenvector de la energía, el momento angular total y las dos helicidades. Está normalizado de tal modo que

$$\langle E', j', m', \lambda_1', \lambda_2' | E, j, m, \lambda_1, \lambda_2 \rangle = \delta(E'-E)\, \delta_{j'j}\, \delta_{m'm}\, \delta_{\lambda_1'\lambda_1}\, \delta_{\lambda_2'\lambda_2}$$

<u>Teorema 1</u>

El ket $|E, j, m, \lambda_1, \lambda_2\rangle$ es un eigenvector de la energía.

<u>Prueba</u>: Nuestro ket se puede escribir como

$$|p, j, m, \lambda_1, \lambda_2\rangle = |p\rangle \otimes |j, m, \lambda_1, \lambda_2\rangle$$

Entonces si aplicamos el operador P^2 tenemos

$$P^2|p, j, m, \lambda_1, \lambda_2\rangle = K^2|p\rangle \otimes |j, m, \lambda_1, \lambda_2\rangle$$

de donde

$$P^2|p, j, m, \lambda_1, \lambda_2\rangle = K^2|p, j, m, \lambda_1, \lambda_2\rangle$$

Por otro lado, veamos si

$$|p, j, m, \lambda_1, \lambda_2\rangle = \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} \int d\Omega_p \mathcal{D}_{m\lambda}^{(j)*}(\Omega_p)|\vec{p}, \lambda_1, \lambda_2\rangle$$

es un eigenvector de la energía

$$P^2|p, j, m, \lambda_1, \lambda_2\rangle = \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}}\; P^2 \int d\Omega_p \mathcal{D}_{m\lambda}^{(j)*}(\Omega_p)|\vec{p}, \lambda_1, \lambda_2\rangle$$

ya que P^2 es un escalar entonces

$$[P^2, D(\varphi, \theta, -\varphi)] = 0$$

de donde

$$P^2|p, j, m, \lambda_1, \lambda_2\rangle = \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}}\; K^2 \int d\Omega_p \mathcal{D}_{m\lambda}^{(j)*}(\Omega_p)|\vec{p}, \lambda_1, \lambda_2\rangle$$

lo cual nos dice que $|p, j, m, \lambda_1, \lambda_2\rangle$ es una combinación lineal de eigenestados de P^2

Teorema 2

$|p, j, m, \lambda_1, \lambda_2\rangle$ son eigenestados de J^2 y J_z

Prueba: Para probar lo anterior es conveniente escribir

$$|p, j, m, \lambda_1, \lambda_2\rangle = \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} \int d\Omega_p \mathcal{D}_{m\lambda}^{(j)*}(\Omega_p)|\vec{p}, \lambda_1, \lambda_2\rangle$$

que puede tambien escribirse como

$$|p, j, m, \lambda_1, \lambda_2\rangle = \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} \int_0^{2\pi} d\varphi_p \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta_p d\theta_p\, \mathcal{D}_{m\lambda}^{(j)*}(\varphi_p, \theta_p, -\varphi_p) \times D(\varphi_p, \theta_p, -\varphi_p)|p\hat{3}, \lambda_1, \lambda_2\rangle \tag{25}$$

Esta integral es precisamente el operador de proyección de Wigner y tiene la siguiente propiedad

$$f_m^j(\lambda) = \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} \int_0^{2\pi} d\varphi_p \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta_p\, d\theta_p\, \mathcal{D}_{m\lambda}^{(j)*}(\varphi_p, \theta_p, -\varphi_p) D(\varphi_p, \theta_p, -\varphi_p)|p\hat{3}, \lambda_1, \lambda_2\rangle$$

Demostraremos ahora que $f_m^j(\lambda)$ portan representaciones irreducibles de $SO(3)$

Si multiplicamos la relación anterior por $D(\Omega')$ se tiene:

$$D(\Omega')\, f_m^j(\lambda) = \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}}\; D(\Omega') \int d\Omega_p\, \mathcal{D}_{m\lambda}^{(j)*}(\Omega_p)\, D(\Omega_p)\,|p\hat{3}, \lambda_1, \lambda_2\rangle$$

la cual se puede reescribir como

$$D(\Omega')\, f_m^j(\lambda) = \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} \int d\Omega_p\, \mathcal{D}_{m\lambda}^{(j)*}(\Omega_p)\, D(\Omega'\Omega_p)\,|p\hat{3}, \lambda_1, \lambda_2\rangle$$

donde se usó la definición de representación

$$D(\Omega')\, D(\Omega_p) = D(\Omega'\Omega_p)$$

Ahora:

$$\mathcal{D}_{m\lambda}^{(j)*}(\Omega'^{-1}\Omega'\Omega_p) = \sum_{\sigma} \mathcal{D}_{m\sigma}^{(j)*}(\Omega'^{-1})\, \mathcal{D}_{\sigma\lambda}^{j*}(\Omega'\Omega_p)$$

la expresión anterior nos queda entonces como

$$D(\Omega')\, f_m^j(\lambda) = \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} \int d\Omega_p \sum_{\sigma} \mathcal{D}_{m\sigma}^{(j)*}(\Omega'^{-1})\, \mathcal{D}_{\sigma\lambda}^{(j)*}(\Omega'\Omega_p)\, D(\Omega'\Omega_p)\,|p\hat{3}, \lambda_1, \lambda_2\rangle$$

$$D(\Omega')\, f_m^j(\lambda) = \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} \sum_{\sigma} \mathcal{D}_{m\sigma}^{(j)*}(\Omega'^{-1}) \int d\Omega_p\, \mathcal{D}_{\sigma\lambda}^{(j)*}(\Omega'\Omega_p)\, D(\Omega'\Omega_p) \times |p\hat{3}, \lambda_1, \lambda_2\rangle$$

pero la integral invariante del grupo de rotaciones es por definición

$$\int d\Omega_p\, \mathcal{D}_{m\lambda}^{(j)*}(\Omega_p)\, D(\Omega_p) = \int d\Omega_p\, \mathcal{D}_{m\lambda}^{(j)*}(\Omega'\Omega_p)\, D(\Omega'\Omega_p)$$

tomando en cuenta este hecho entonces la relación anterior nos queda

$$D(\Omega')\, f_m^j(\lambda) = \sum_{\sigma} \mathcal{D}_{m\sigma}^{(j)*}(\Omega'^{-1})\, f_\sigma^{(j)}(\lambda)$$

ya que

$$\mathcal{D}_{m\sigma}^{(j)*}(\Omega'^{-1}) = \mathcal{D}_{\sigma m}^{(j)}(\Omega')$$

entonces

$$D(\Omega')\, f_m^{(j)}(\lambda) = \sum_{\sigma} \mathcal{D}_{\sigma m}^{(j)}(\Omega')\, f_\sigma^{j}(\lambda) \tag{168}$$

de donde concluimos que $|p, j, m, \lambda_1, \lambda_2\rangle$ es un eigenestado de J^2 y J_z

Los estados $|p, j, m, \lambda_1, \lambda_2\rangle$ son eigenestados de $\vec{s}_1 \cdot \hat{p}$ y $\vec{s}_2 \cdot \hat{p}$

$$\therefore \quad \vec{s}_1 \cdot \hat{p}\, |p, j, m, \lambda_1, \lambda_2\rangle = \lambda_1 |p, j, m, \lambda_1, \lambda_2\rangle \quad \text{y}$$
$$\vec{s}_2 \cdot \hat{p}\, |p, j, m, \lambda_1, \lambda_2\rangle = \lambda_2 |p, j, m, \lambda_1, \lambda_2\rangle$$

Los elementos de la matriz de transformación que lleva de la base $\{|\vec{p}, \mu_1, \mu_2\rangle\}$ del momento lineal $\vec{p}$ y helicidades μ_1, μ_2 a la base $\{|p, j, m, \lambda_1, \lambda_2\rangle\}$ son:

$$\langle \vec{p}, \mu_1, \mu_2 | \vec{p}, j, m, \lambda_1, \lambda_2\rangle = \frac{\delta(p-p')}{pp'} \delta_{\mu_1\lambda_1} \delta_{\mu_2\lambda_2} \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}}\, \mathcal{D}^{(j)*}_{m\lambda}(\varphi, \theta, -\varphi)$$

En el caso particular en el cual las partículas no tienen spin $\lambda = 0$ y $j = \ell$

$$Y_\ell^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}}\, \mathcal{D}^{\ell *}_{m0}(\varphi, \theta, -\varphi) \tag{169}$$

y el resultado anterior se reduce a

$$\langle p | E, \ell, m\rangle = \delta(E_p - E)\, Y_\ell^m(\theta, \varphi) \tag{170}$$

IV.9 - Relación entre el formalismo de los armónicos esféricos vectoriales y el formalismo de helicidad

Hemos definido los estados de dos partículas en el sistema del centro de masa que se transforman de acuerdo con las representaciones irreducibles del grupo de rotaciones. Estos son:

$$|j, m; \lambda_1, \lambda_2; \gamma\rangle \otimes |p\rangle \tag{171}$$

en donde

$$|j, m; \lambda_1, \lambda_2; \gamma\rangle$$

es un estado de helicidad de dos partículas.

El esquema L S

Consideremos ahora la base alternativa

$$\{ | j m ; L S ; \gamma > \}$$

en donde L y S denotan los números cuánticos del momento angular relativo y el spin total de las partículas respectivamente

$$S = s_1 + s_2 \; , \quad s_1 + s_2 - 1 \; , \; \ldots\ldots , \quad |s_1 - s_2|$$

$$L = j + s \; , \quad j + s - 1 \; , \; \ldots\ldots , \quad |j - s|$$

en donde s_1 y s_2 son los spines de las dos partículas. Acoplando el momento angular con el spin total

$$| j m ; L S ; \gamma > = \sum_{m_1 m_2} < L S M_L M_S | j m > < s_1 s_2 m_1 m_2 | S M_S > | L M_L ; m_1 m_2 ; \gamma >$$

en donde el estado $| L M_L ; m_1 m_2 ; \gamma >$ describe a las dos partí - culas en el sistema del centro de masa en un estado de momento angular relativo L, M_L con componentes de los spines m_1 , m_2 en la dirección del eje $\hat{3}$

A partir de la relación (148) podemos expresar los eigenestados del momento angular orbital en función de estados de ondas planas $| \vec{p} , m_1 , m_2 >$ en los que los spines de las partículas estan cuantizados en la dirección del eje $\hat{3}$

$$| L M_L ; m_1 m_2 > = \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}} \int d\Omega \; \mathcal{D}^{(L)*}_{M_L , 0} \; | \vec{p} , m_1 m_2 > \qquad (172)$$

La relación entre los estados $| j m ; L S ; \gamma >$ del acoplamiento LS y los estados $| j m ; \lambda_1 \lambda_2 ; \gamma >$ se obtiene de la relación entre los estados que representan ondas planas $| \vec{p} ; m_1 m_2 >$ y $| \vec{p} ; \lambda_1 , \lambda_2 >$

Para el estado de helicidad de una sola partícula teniamos

$$|\vec{p},\lambda\rangle = \sum_{m_s} \mathcal{D}^{(s)}_{m_s\lambda}(R)\,|\vec{p},m_s\rangle$$

en donde m_s es la componente del spin en la dirección $\hat{3}$

$D(\varphi,\theta,-\varphi)$ denota la rotación caracterizada por los ángulos de Euler $(\varphi,\theta,-\varphi)$ en donde (θ,φ) son los ángulos polares de $\vec{p}$

Teníamos:

$$|j\,m;\ \lambda_1,\lambda_2\ ;\gamma\rangle = \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}}\int d\Omega\ \mathcal{D}^{(j)*}_{m\lambda}(\Omega)\ |\vec{p}\ ;\ \lambda_1\lambda_2\rangle$$

que se puede reescribir como

$$|j\,m,\ \lambda_1,\lambda_2\ ;\gamma\rangle = \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}}\sum_{m_1m_2}\int d\Omega\ \mathcal{D}^{(j)*}_{m\lambda}(\Omega)\,\mathcal{D}^{(s_1)}_{m_1\lambda_1}(\Omega)\,\mathcal{D}^{(s_2)}_{m_2,-\lambda_2}(\Omega)\,|\vec{p}\ ;m_1m_2\rangle \qquad (173)$$

El producto de dos matrices de rotación es

$$\mathcal{D}^{(j_1)}_{m_1'm_1}(\Omega)\,\mathcal{D}^{(j_2)}_{m_2'}(\Omega) = \sum_j \langle j_1j_2\,m_1m_2|j,m_1+m_2\rangle\langle j_1j_2\,m_1'm_2'|j,m_1'+m_2'\rangle\,\mathcal{D}^{(j)}_{m_1'+m_2',m_1+m_2}(\Omega) \qquad (174)$$

Vamos a demostrar que

$$\mathcal{D}^{(j)*}_{m\lambda}(\Omega)\ \mathcal{D}^{(s_1)}_{m_1\lambda_1}(\Omega)\ \mathcal{D}^{(s_2)}_{m_2,-\lambda_2}(\Omega) = \sum_{L,S}\langle LS\,0\lambda|j\lambda\rangle\langle s_1s_2\,\lambda_1,-\lambda_2|s\lambda\rangle \langle LS\,M_LM_S|j\,m\rangle\langle s_1s_2\,m_1m_2|SM_S\rangle\,\mathcal{D}^{(L)}_{M_L,0}(\Omega)$$

Acoplemos $\mathcal{D}^{(s_1)}_{m_1\lambda_1}(\Omega)$ y $\mathcal{D}^{(s_2)}_{m_2,-\lambda_2}(\Omega)$ usemos (174)

$$\mathcal{D}^{(s_1)}_{m_1\lambda_1}(\Omega)\ \mathcal{D}^{(s_2)}_{m_2,-\lambda_2}(\Omega) = \sum_S\langle s_1s_2\,m_1m_2|SM_S\rangle\langle s_1s_2\,\lambda_1,-\lambda_2|s\lambda\rangle\ \mathcal{D}^{(s)}_{M_S,\lambda}(\Omega) \qquad (175)$$

acoplemos $\mathcal{D}^{(j)*}_{m\lambda}(\Omega)$ a (175)

$$\mathcal{D}^{(j)*}_{m\lambda}(\Omega)\,\mathcal{D}^{(s_1)}_{m_1\lambda_1}(\Omega)\,\mathcal{D}^{(s_2)}_{m_2,-\lambda_2}(\Omega) = \sum_S\langle s_1s_2\,m_1m_2|SM_S\rangle\langle s_1s_2\,\lambda_1,-\lambda_2|s\lambda\rangle\,\mathcal{D}^{(j)*}_{m\lambda}(\Omega)\,\mathcal{D}^{(s)}_{M_S,\lambda}(\Omega)$$

tomando en cuenta que $\mathcal{D}^{(j)*}_{m\lambda}(\Omega) = (-1)^{m-\lambda}\,\mathcal{D}^{(j)}_{-m,-\lambda}(\Omega)$ la relación anterior nos queda

$$\mathcal{D}^{(j)*}_{m\lambda}(\Omega)\,\mathcal{D}^{(s_1)}_{m_1\lambda_1}(\Omega)\,\mathcal{D}^{(s_2)}_{m_2,-\lambda_2}(\Omega) = \sum_S\langle s_1s_2\,m_1m_2|SM_S\rangle\langle s_1s_2\,\lambda_1,-\lambda_2|s\lambda\rangle(-1)^{m-\lambda}\,\mathcal{D}^{(j)}_{-m,-\lambda}(\Omega)\,\mathcal{D}^{(s)}_{M_S,\lambda}(\Omega)$$

$$= \sum_{LS}(-1)^{m-\lambda}\langle s_1s_2\,m_1m_2|SM_S\rangle\langle s_1s_2\,\lambda_1,-\lambda_2|s\lambda\rangle\langle jS,-m\,M_S|L\,\bar{M}\rangle\langle jS,-\lambda\lambda|L0\rangle\,\mathcal{D}^{(L)}_{\bar{M},0}(\Omega) \qquad (176)$$

Aplicando la siguiente relación de simetria de los Clebsch-Gordan

$$\langle j_1 j_2\, m_1 m_2 | j_3 m_3\rangle = (-1)^{j_2+m_2}\sqrt{\frac{2j_3+1}{2j_1+1}}\,\langle j_3 j_2, -m_3 m_2 | j_1, -m_1\rangle$$

entonces

$$\langle j s, -m, M_s | L \bar{M}\rangle = (-1)^{s+M_s}\sqrt{\frac{2L+1}{2j+1}}\,\langle L s, -\bar{M}\, M_s | j m\rangle \qquad (177)$$

$$\langle j s, -\lambda, \lambda | L 0\rangle = (-1)^{s+\lambda}\sqrt{\frac{2L+1}{2j+1}}\,\langle L s 0 \lambda | j \lambda\rangle \qquad (178)$$

sustituyendo (177) y (178) en (176)

$$\mathcal{D}^{(j)*}_{m\lambda}(\Omega)\,\mathcal{D}^{(s_1)}_{m_1\lambda_1}(\Omega)\,\mathcal{D}^{(s_2)}_{m_2,-\lambda_2}(\Omega) = \sum_{LS}(-1)^{m-\lambda}(-1)^{s+M_s}(-1)^{s+\lambda}$$
$$\langle s_1 s_2\, m_1 m_2 | s M_s\rangle\langle s_1 s_2\, \lambda_1, -\lambda_2 | s\lambda\rangle\sqrt{\frac{2L+1}{2j+1}}\sqrt{\frac{2L+1}{2j+1}}\,\langle L s, -\bar{M}\, M_s | j m\rangle\langle L s 0 \lambda | j\lambda\rangle$$
$$\times\ \mathcal{D}^{(L)}_{\bar{M},0}(\Omega)$$

llamando $-\bar{M} = M_L$

$$\mathcal{D}^{(j)*}_{m\lambda}(\Omega)\,\mathcal{D}^{(s_1)}_{m_1\lambda_1}(\Omega)\,\mathcal{D}^{(s_2)}_{m_2,-\lambda_2}(\Omega) = \sum_{LS}(-1)^{m-\lambda}(-1)^{s+M_s}(-1)^{s+\lambda}\langle s_1 s_2 m_1 m_2 | s M_s\rangle$$
$$\langle s_1 s_2\, \lambda_1, -\lambda_2 | s\lambda\rangle\langle L s M_L M_s | j m\rangle\langle L s 0 \lambda | j\lambda\rangle\,\frac{2L+1}{2j+1}\,\mathcal{D}^{(L)}_{-M_L,0}(\Omega)$$

$$\mathcal{D}^{(j)*}_{m\lambda}(\Omega)\,\mathcal{D}^{(s_1)}_{m_1\lambda_1}(\Omega)\,\mathcal{D}^{(s_2)}_{m_2,-\lambda_2}(\Omega) = \sum_{LS}(-1)^{m-\lambda}(-1)^{s+M_s}(-1)^{s+\lambda}\,\frac{2L+1}{2j+1}$$
$$\langle s_1 s_2\, m_1 m_2 | s M_s\rangle\langle s_1 s_2\, \lambda_1, -\lambda_2 | s\lambda\rangle\langle L s M_L M_s | j m\rangle\langle L s 0 \lambda | j\lambda\rangle\,\mathcal{D}^{(L)}_{-M_L,0}(\Omega)$$

ya que $\quad (-1)^{M_L}\mathcal{D}^{(L)}_{-M_L,0}(\Omega) = \mathcal{D}^{(L)*}_{M_L,0}(\Omega)$

$$\mathcal{D}^{(j)*}_{m\lambda}(\Omega)\,\mathcal{D}^{(s_1)}_{m_1\lambda_1}(\Omega)\,\mathcal{D}^{(s_2)}_{m_2,-\lambda_2}(\Omega) = \sum_{LS}(-1)^{2s}\,\frac{2L+1}{2j+1}\,\langle s_1 s_2 m_1 m_2 | s M_s\rangle$$
$$\langle s_1 s_2\, \lambda_1, -\lambda_2 | s\lambda\rangle\langle L s\, M_L M_s | j m\rangle\langle L s 0 \lambda | j\lambda\rangle\,\mathcal{D}^{(L)*}_{M_L,0}(\Omega)$$

$$\therefore\ \mathcal{D}^{(j)}_{m\lambda}(\Omega)\,\mathcal{D}^{(s_1)}_{m_1\lambda_1}(\Omega)\,\mathcal{D}^{(s_2)}_{m_2,-\lambda_2}(\Omega) = \sum_{LS}\frac{2L+1}{2j+1}\,\langle s_1 s_2\, m_1 m_2 | s M_s\rangle$$
$$\langle s_1 s_2\, \lambda_1, -\lambda_2 | s\lambda\rangle\langle L s\, M_L M_s | j m\rangle\langle L s 0 \lambda | j\lambda\rangle\,\mathcal{D}^{(L)*}_{M_L,0}(\Omega) \qquad (179)$$

con esta relación (173) se ve como:

$$|j m;\ \lambda_1\lambda_2;\ \gamma\rangle = \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}}\sum_{m_1 m_2 LS}\frac{2L+1}{2j+1}\,\langle L s 0 \lambda | j\lambda\rangle\langle s_1 s_2\, \lambda_1, -\lambda_2 | s\lambda\rangle$$
$$\langle L s\, M_L M_s | j m\rangle\langle s_1 s_2\, m_1 m_2 | s M_s\rangle\int d\Omega\,\mathcal{D}^{(L)*}_{M_L,0}(\Omega)\ |\vec{p}, m_1 m_2\rangle$$

Pero según (172)

$$|LM_L;m_1m_2\rangle = \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}}\int d\Omega\, D^{(L)*}_{M_L,0}(\Omega)|\vec{p},m_1m_2\rangle$$

sustituyendo en la relación anterior

$$|jm;\lambda_1\lambda_2;\gamma\rangle = \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}}\sum_{m_1m_2LS}\frac{2L+1}{2j+1}\langle LS0\lambda|j\lambda\rangle\langle s_1s_2\lambda_1,-\lambda_2|s\lambda\rangle$$

$$\langle LSM_LM_S|jm\rangle\langle s_1s_2m_1m_2|SM_S\rangle\sqrt{\frac{4\pi}{2L+1}}|LM_L;m_1m_2\rangle$$

$$|jm;\lambda_1\lambda_2;\gamma\rangle = \sum_{m_1m_2LS}\sqrt{\frac{2L+1}{2j+1}}\langle LS0\lambda|j\lambda\rangle\langle s_1s_2\lambda_1,-\lambda_2|s\lambda\rangle$$

$$\langle LSM_LM_S|jm\rangle\langle s_1s_2m_1m_2|SM_S\rangle|LM_L;m_1m_2\gamma\rangle$$

Pero

$$|jm;LS;\gamma\rangle = \sum_{m_1m_2}\langle LSM_LM_S|jm\rangle\langle s_1s_2m_1m_2|SM_S\rangle|LM_L;m_1m_2\gamma\rangle$$

entonces, finalmente

$$|jm;\lambda_1\lambda_2;\gamma\rangle = \sum_{LS}\sqrt{\frac{2L+1}{2j+1}}\langle LS0\lambda|j\lambda\rangle\langle s_1s_2\lambda_1,-\lambda_2|s\lambda\rangle|jm;LS;\gamma\rangle$$

De aquí, por inspección obtenemos la matriz que relaciona los estados de helicidad y j definidos, con los estados en el acoplamiento LS

$$\langle jm;LS;\gamma|jm;\lambda_1\lambda_2;\gamma\rangle = \sqrt{\frac{2L+1}{2j+1}}\langle LS0\lambda|j\lambda\rangle\langle s_1s_2\lambda_1,-\lambda_2|s\lambda\rangle \qquad (180)$$

CAPITULO V

V.1 - Los desarrollos de las amplitudes de dispersión para partículas con spin en la base esférica

Hemos encontrado que la matriz de transformación entre la base de momento lineal y helicidad $\{|p, \mu_1, \mu_2\rangle\}$ y la base del momento angular y helicidad $\{|p, j, m, \lambda_1, \lambda_2\rangle\}$ es:

$$\langle \vec{p}, \mu_1, \mu_2 | E, j, m, \lambda_1, \lambda_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{m p}} \delta(E_p - E) \delta_{\mu_1 \lambda_1} \delta_{\mu_2 \lambda_2} \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} \mathcal{D}^{(j)*}_{m\lambda}(\varphi, \theta, -\varphi)$$

Con ayuda de esta matriz podemos aprovechar la invariancia rotacional de S para encontrar el desarrollo esférico de la amplitud de dispersión. En la base de momento angular la matriz S es diagonal respecto de E, j y m y por consiguiente tiene la forma

$$\langle E', j', m', \lambda_1', \lambda_2' | S | E, j, m, \lambda_1, \lambda_2 \rangle = \delta(E' - E) \delta_{j'j} \delta_{m'm} S^{(E)}_{\lambda_1', \lambda_2', \lambda_1 \lambda_2} \tag{180a}$$

esto significa que la matriz de colisiones para E, j y m dados, está determinada por una matriz unitaria $S^{j(E)}$ cuyos renglones y columnas llevan como etiqueta las helicidades de los estados final e inicial (λ_1', λ_2') y (λ_1, λ_2). Introducimos la amplitud de las ondas parciales como es costumbre

$$f^{(j)}_{\lambda_1' \lambda_2', \lambda_1 \lambda_2}(E) = \frac{S^{(j)}_{\lambda_1' \lambda_2', \lambda_1 \lambda_2}(E) - 1}{2 i p} \tag{181}$$

y la amplitud total se puede expresar ahora en función de las amplitudes de las ondas parciales de una manera análoga al caso de partículas sin spin

$$\langle \vec{p}\,', \lambda_1' \lambda_2' \,|\, (S-1) \,|\, \vec{p}, \lambda_1, \lambda_2 \rangle = \frac{i}{2\pi m} \delta(E_{p}' - E_p) f(\vec{p}_1, \lambda_1', \lambda_2'; \vec{p}, \lambda_1, \lambda_2) \tag{182}$$

Ahora introduciremos una unidad descompuesta con ayuda del conjunto completo $\{|E, j, m, \lambda_1, \lambda_2\rangle\}$ antes y despues del factor $(S-1)$ en el lado derecho de (182)

$$\sum_{jm} |E, j, m, \mu_1, \mu_2\rangle \langle E, j, m, \mu_1 \mu_2| = 1$$

$$\langle \vec{p}\,', \lambda_1', \lambda_2' \,|\, 1 (S-1) 1 \,|\, \vec{p}, \lambda_1, \lambda_2 \rangle =$$

$$\sum_{j''m''} \sum_{jm} \langle p', \lambda_1', \lambda_2' \,|\, E'', j'', m'', \mu_1'', \mu_2'' \rangle \langle E'', j'', m'', \mu_1'', \mu_2'' | (S-1)$$

$$|E, j, m, \mu_1 \mu_2\rangle \langle E, j, m, \mu_1 \mu_2 | \vec{p}, \lambda_1, \lambda_2 \rangle$$

$$= \iint \sum_{j''m''} \sum_{jm} \frac{1}{\sqrt{m p'}} \delta(E_p' - E'') \delta_{\mu_1'' \lambda_1'} \delta_{\mu_2'' \lambda_2'} \sqrt{\frac{2j''+1}{4\pi}} \mathcal{D}^{j''*}_{m''\lambda'}(\varphi', \theta', -\varphi') dE''$$

$$\left[\delta(E''-E) \delta_{j''j} \delta_{m''m} \delta_{\mu_1''\mu_1} \delta_{\mu_2''\mu_2} S^{(j)}_{\mu_1''\mu_2'', \mu_1\mu_2}(E) - 1 \right]$$

$$\times \left[\frac{1}{\sqrt{m p}} \delta(E_p - E) \delta_{\mu_1\lambda_1} \delta_{\mu_2\lambda_2} \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} \mathcal{D}^{(j)}_{m\lambda}(\varphi, \theta, -\varphi) \right] dE$$

$$= \frac{1}{m p} \delta(E_p' - E_p) \sum_{jm} \frac{2j+1}{4\pi} \mathcal{D}^{(j)}_{m\lambda'}(\varphi', \theta', -\varphi') \left(S^{(E)}_{\lambda_1'\lambda_2', \lambda_1\lambda_2} - 1 \right) \times$$
$$\times \mathcal{D}^{(j)}_{m\lambda}(\varphi, \theta, -\varphi)$$

de donde

$$\langle \vec{p}\,', \lambda_1', \lambda_2' \,|\, (S-1) \,|\, \vec{p}, \lambda_1, \lambda_2 \rangle = \frac{1}{m p} \delta(E_p' - E_p) \sum_{jm} \frac{2j+1}{4\pi} \times$$
$$\times \mathcal{D}^{(j)*}_{m\lambda'}(\varphi', \theta', -\varphi') \left(S^{(E)}_{\lambda_1'\lambda_2', \lambda_1\lambda_2} - 1 \right) \mathcal{D}^{(j)}_{m\lambda}(\varphi, \theta, -\varphi)$$

ahora:

$$2ip\, f^{(j)}_{\lambda_1'\lambda_2', \lambda_1\lambda_2}(E) = S^{(j)}_{\lambda_1'\lambda_2', \lambda_1\lambda_2}(E) - 1$$

de tal modo que

$$\langle \vec{p}\,', \lambda_1', \lambda_2' | (S-1) | \vec{p}, \lambda_1, \lambda_2 \rangle = \frac{1}{m p} \delta(E_{p'} - E_p) \times$$

$$\sum_{jm} \frac{2j+1}{4\pi} D^{(j)*}_{m\lambda'}(\varphi', \theta', -\varphi') \left[2ip\, f^{(j)(E)}_{\lambda_1'\lambda_2', \lambda_1\lambda_2} \right] D^{(j)}_{m\lambda}(\varphi, \theta, -\varphi)$$

$$\langle \vec{p}\,', \lambda_1', \lambda_2' | (S-1) | \vec{p}, \lambda_1, \lambda_2 \rangle = \frac{2i}{m} \delta(E_{p'} - E_p) \sum_{jm} \frac{2j+1}{4\pi} D^{(j)*}_{m\lambda'}(\varphi', \theta', -\varphi') \times f^{(E)}_{\lambda_1'\lambda_2', \lambda_1\lambda_2} D^{(j)}_{m\lambda}(\varphi, \theta, -\varphi) \quad (183)$$

En esta formula la dirección de $\vec{p}$ está especificada por (θ, φ) y la de p' por (θ', φ'), la expresión se simplifica si elegimos la dirección de $\vec{p}$ en el eje OZ , en este caso $\theta = 0$ y recordemos que $D^{(j)}_{m\lambda}(\varphi, \theta, -\varphi) = \delta_{m\lambda}$ .Si designamos con (θ, φ) la dirección de p' obtenemos

$$\langle \vec{p}\,'(\theta, \varphi), \lambda_1' \lambda_2' | (S-1) | p\hat{3}, \lambda_1 \lambda_2 \rangle = \frac{2i}{m} \delta(E_{p'} - E_p) \times$$

$$\times \sum_{jm} \frac{2j+1}{4\pi} D^{(j)}_{m\lambda'}(\varphi', \theta', -\varphi') f^{(E)}_{\lambda_1'\lambda_2', \lambda_1\lambda_2} \delta_{m\lambda}$$

$$\langle p'(\theta, \varphi), \lambda_1' \lambda_2' | (S-1) | p\hat{3}, \lambda_1, \lambda_2 \rangle = \frac{2i}{m} \delta(E_{p'} - E_p) \times \sum_j \frac{2j+1}{4\pi} D^{(j)}_{\lambda\lambda'}(\varphi', \theta', -\varphi') f^{(E)}_{\lambda_1'\lambda_2', \lambda_1\lambda_2}$$

de la expresión (182)

$$\langle p'(\theta, \varphi), \lambda_1' \lambda_2' | (S-1) | p\hat{3}, \lambda_1, \lambda_2 \rangle = \frac{i}{2\pi m} \delta(E_{p'} - E_p) \times f(p', \lambda_1', \lambda_2', p\hat{3}, \lambda_1, \lambda_2)$$

de donde

$$\frac{2i}{m} \delta(E_{p'} - E_p) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2j+1}{4\pi} D^{(j)}_{\lambda\lambda'}(\varphi', \theta', -\varphi') f^{(E)}_{\lambda_1'\lambda_2', \lambda_1\lambda_2} =$$

$$= \frac{i}{2\pi m} \delta(E_{p'} - E_p) f^{(E', \theta', \varphi')}_{\lambda_1'\lambda_2', \lambda_1\lambda_2}$$

$$f^{(E', \theta', \varphi')}_{\lambda_1'\lambda_2', \lambda_1\lambda_2} = \sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) f^{(E)}_{\lambda_1'\lambda_2', \lambda_1\lambda_2} D^{(j)}_{\lambda\lambda'}(\varphi', \theta', -\varphi') \quad (184)$$

En el caso de partículas con spin

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_1' = \lambda_2' = 0 \qquad y \qquad j = \ell$$

$$D^{(\ell)}_{00}(\varphi, \theta, -\varphi) = P_\ell(\cos\theta)$$

y en este caso la ec. (184) se reduce a

$$f(E, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) f^{\ell}(E) P_\ell(\cos\theta)$$

Podemos transformar la ec. (184) haciendo uso de la relación de ortogonalidad de nuestras eigenfunciones bases:

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\; \mathcal{D}_{m\lambda}^{(j')*}(\varphi,\theta,-\varphi)\; \mathcal{D}_{\lambda'\lambda}^{(j)}(\varphi,\theta,-\varphi) = \frac{4\pi}{2j+1}\,\delta_{jj'}\,\delta_{m\lambda'}$$

Multiplicando (184) por $\mathcal{D}_{m\lambda}^{(j')}(\varphi',\theta',-\varphi')$ e integrando tenemos

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta'\, d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi'\; \mathcal{D}_{m\lambda}^{(j')*}(\varphi',\theta',-\varphi')\; f_{\lambda_1'\lambda_2',\lambda_1\lambda_2}^{(E',\theta',\varphi')} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}(2j+1)\, f_{\lambda_1'\lambda_2',\lambda_1\lambda_2}^{(E)} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta' d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi'\; \mathcal{D}_{m\lambda'}^{(j')*}(\varphi',\theta',-\varphi')\; \mathcal{D}_{\lambda'\lambda}^{(j)}(\varphi',\theta',-\varphi')$$

de donde obviamente

$$f_{\lambda_1'\lambda_2',\lambda_1\lambda_2}^{(E)} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta' d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi'\; \mathcal{D}_{m\lambda}^{(j)*}(\varphi',\theta',-\varphi')\; f_{\lambda_1'\lambda_2',\lambda_1\lambda_2}^{(E',\theta',\varphi')} \qquad (185)$$

donde $m=\lambda_1-\lambda_2$ y $\lambda=\lambda_1'-\lambda_2'$ son respectivamente las helicidades de las partículas entrantes y salientes.

El otro desarrollo de la amplitud de dispersión lo podemos conseguir de la manera siguiente:

$$f_{\lambda_1'\lambda_2',\lambda_1\lambda_2}^{(K,\theta,\varphi)} = \int_0^{\infty} K'^2 dK' \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta'_K\, d\theta'_K \int_0^{2\pi} d\varphi'_K\, \frac{\delta(K-K')}{K'^2}\, \frac{\delta(\theta_K-\theta'_K)}{\operatorname{sen}\theta'_K}\,\delta(\varphi_K-\varphi'_K) \times f_{\lambda_1'\lambda_2',\lambda_1\lambda_2}^{(K',\theta',\varphi')}$$

usaremos el hecho de que

$$\sum_{j=|\lambda|}^{\infty}\sum_{m=-j}^{j} \frac{2j+1}{4\pi}\, \mathcal{D}_{m\lambda}^{(j)*}(\varphi'_K,\theta'_K,-\varphi'_K)\, \mathcal{D}_{m\lambda}^{(j)}(\varphi_K,\varphi_K,-\varphi_K) = \frac{\delta(\theta_K-\theta'_K)}{\operatorname{sen}\theta'_K}\,\delta(\varphi_K-\varphi'_K)$$

y

$$\frac{2j+1}{4\pi}\int_0^{\infty} r^2 dr \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta_r\, d\theta_r \int_0^{2\pi} d\varphi_r \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta_K\, d\theta_K \int_0^{2\pi} d\varphi_K\, \mathcal{D}_{m\lambda}^{(j)*}(\varphi'_K,\theta_K,-\varphi'_K) \times \mathcal{D}_{m\lambda}^{(j)}(\varphi_K,\theta_K,-\varphi_K) < p(\theta_K,\varphi_K),\lambda \,|\, p(\theta'_K,\varphi'_K)> = \frac{\delta(p-p')}{p\,p'_{2\pi}}$$

de donde

$$f_{\lambda_1'\lambda_2',\lambda_1\lambda_2}^{(K,\theta,\varphi)} = \int_0^{\infty} K'^2 dK' \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta'_K\, d\theta'_K \int_0^{2\pi} \varphi'_K\, \frac{2j+1}{4\pi}\int_0^{\infty} r^2 dr \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta_r\, d\theta_r \int_0 d\varphi_r$$

$$\times \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta_K\, d\theta_K \int_0^{2\pi} d\varphi_K\, \mathcal{D}_{m\lambda}^{(j)*}(\varphi'_K,\theta'_K,-\varphi'_K)\, \mathcal{D}_{m\lambda}^{(j)}(\varphi_K,\theta_K,-\varphi_K)$$

$$\times < \vec{p}\,(\theta_K,\varphi_K),\lambda \,|\, \vec{p}\,(\theta'_K,\varphi'_K),\lambda >$$

$$\times \sum_{j=|\lambda|}^{\infty}\sum_{m=-j}^{j} \frac{2j+1}{4\pi}\, \mathcal{D}_{m\lambda}^{(j)}(\varphi'_K,\theta'_K,-\varphi'_K)\, \mathcal{D}_{m\lambda}^{(j)*}(\varphi_K,\theta_K,-\varphi_K)\, f_{\lambda_1'\lambda_2',\lambda_1\lambda_2}^{(K',\theta',-\varphi')} .$$

que se puede reorganizar en la forma siguiente

$$f^{(K,\theta,\varphi)}_{\lambda_1'\lambda_2',\lambda_1\lambda_2} = \sum_{j=|\lambda|}^{\infty}\sum_{m=-j}^{j}\frac{2j+1}{4\pi}\int_0^\infty r^2 dr\int_0^\pi \operatorname{sen}\theta_K\, d\theta_K\int_0^{2\pi} d\varphi_K\, \mathcal{D}^{(j)*}_{m\lambda}(\varphi_K,\theta_K,-\varphi_K)$$
$$\langle \vec{\varphi}(\theta_K,\varphi_K),\lambda|\,\mathcal{D}^{(j)}_{m\lambda}(\varphi_K,\theta_K,-\varphi_K)\left\{\frac{2j+1}{4\pi}\int_0^\infty K'^2 dK'\int_0^\pi \operatorname{sen}\theta_r\, d\theta_r\int_0^{2\pi} d\varphi_r\right.$$
$$\int_0^\pi \operatorname{sen}\theta_K'\, d\theta_K'\int_0^{2\pi} d\varphi_K'\,\mathcal{D}^{(j)*}_{m\lambda}(\varphi_K',\theta_K',-\varphi_K')\,|\,\vec{\varphi}(\theta_K',\varphi_K')\rangle\,\mathcal{D}^{(j)}_{m\lambda}(\varphi_K',\theta_K',-\varphi_K)$$
$$\left. f^{(K',\theta',\varphi')}_{\lambda_1'\lambda_2',\lambda_1\lambda_2}\right\}$$

si definimos

$$f^{(j)}_{m\lambda}(r) = \frac{2j+1}{4\pi}\int_0^\infty K'^2 dK'\int_0^\pi \operatorname{sen}\theta_r\, d\theta_r\int_0^{2\pi} d\varphi_r\int_0^\pi \operatorname{sen}\theta_K'\, d\theta_K'\int_0^{2\pi} d\varphi_K'$$
$$\mathcal{D}^{(j)*}_{m\lambda}(\varphi_K',\theta_K',-\varphi_K')\,|\,\vec{\varphi}(\theta_K',\varphi_K'),\lambda\rangle\,\mathcal{D}^{(j)}_{m\lambda}(\varphi_K',\theta_K',-\varphi_K')\, f^{(K',\theta',\varphi')}_{\lambda_1'\lambda_2',\lambda_1,\lambda_2} \tag{186}$$

entonces

$$f^{(K,\theta,\varphi)}_{\lambda_1'\lambda_2',\lambda_1\lambda_2} = \sum_{j=|\lambda|}^{\infty}\sum_{m=-j}^{j}\frac{2j+1}{4\pi}\int_0^\infty r^2 dr\int_0^\pi \operatorname{sen}\theta_K\, d\theta_K\int_0^{2\pi} d\varphi_K\,\mathcal{D}^{(j)*}_{m\lambda}(\varphi_K,\theta_K,-\varphi_K)$$
$$\langle \vec{\varphi}(\theta_K,\varphi_K),\lambda|\,\mathcal{D}^{(j)}_{m\lambda}(\varphi_K,\theta_K,-\varphi_K)\; f^{(j)}_{m\lambda}(r) \tag{187}$$

Ejemplo: En el caso de que no haya spin $m=\lambda=0$ y $j=\ell$

$\mathcal{D}^{(\ell)}_{00}(\varphi,\theta,-\varphi) = P_\ell(\cos\theta)$ la ecuación (187) se transforma en

$$f(K,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{2\ell+1}{4\pi}\int_0^\infty r^2 dr\int_0^\pi \operatorname{sen}\theta_K\, d\theta_K\int_0^{2\pi} d\varphi_K\, P_\ell(\cos\theta_K')\, e^{i Kr\cos\theta_K} P_\ell(\cos\theta_K) \times f^\ell_m(r)$$

el desarrollo de ondas planas es:

$$e^{-iKr\cos\theta_K} = \sum_{\ell'=0}^{\infty}(2\ell'+1)\,(-i)^{\ell'} j_{\ell'}(Kr)\, P_{\ell'}(\cos\theta_K)$$

con r en la dirección z. La integral sobre φ se puede

evaluar inmediatamente y entonces

$$F(K,\cos\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{2\ell+1}{2}\int_0^\infty r^2 dr\int_0^\pi \operatorname{sen}\theta_K\, d\theta_K\, P_\ell(\cos\theta_K')\sum_{\ell'=0}^{\infty}(2\ell'+1)(-i)^{\ell'}\times$$
$$\times\; j_{\ell'}(Kr)\, P_{\ell'}(\cos\theta_K)\, P_\ell(\cos\theta_K)\; f^\ell_m(r)$$

la cual se puede reescribir como

$$f(k,\cos\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{\ell'=0}^{\infty}(-i)^{\ell'}\frac{2\ell+1}{2}\int_0^{\infty} r^2 dr\ j_{\ell'}(kr)\ f_m^{\ell}(r)\ P_\ell(\cos\theta_k')$$
$$(2\ell'+1)\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta_k d\theta_k\ P_\ell(\cos\theta_k)\ P_{\ell'}(\cos\theta_k)$$

Usando la ortogonalidad de los polinomios deLegendre:

$$\int_1^{-1} \operatorname{sen}\theta_k\, d\theta_k\ P_\ell(\cos\theta_k)\ P_{\ell'}(\cos\theta_k) = \frac{2}{2\ell+1}\delta_{\ell\ell'}$$

de donde

$$F(k,\cos\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}(-i)^{\ell}(2\ell+1)\int_0^{\infty} r^2 dr\ f_m^{\ell}(r)\ j_\ell(kr)\ P_\ell(\cos\theta_k')$$

que coincide con la amplitud de dispersión para partículas sin spin.

V.2 - El desarrollo cilíndrico del momento transferido para partículas con spin

En el capítulo II sección 2 obtuvimos que las funciones base en el sistema de referencia de la pared de ladrillos del momento transferido son

$$\{|k,q\,m\rangle\} = \left\{\frac{1}{2\pi}J_m(k\rho)e^{iqz}e^{im\varphi}\right\} \qquad (188)$$

Podemos usar esta base para representar la amplitud de dispersión para partículas con spin, los valores de m son $m = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \ldots$

Consideremos la dispersión de una partícula de masa m_1 y spin s_1 por otra de masa m_2 y spin s_2 que salen después de la colisión con masa $m_3 = m_1$ y spin s_3, y masa $m_4 = m_2$ y spin s_4. La amplitud de dispersión se puede escribir como

$$F_n(k,q) = \sum_{n'=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} k'dk' \int_{-\infty}^{\infty} dq'\,\frac{\delta(k-k')}{k'}\,\delta(q-q')\,F_{n'}(k',q')\,\delta_{nn'} \qquad (189)$$

con $\quad n = (\lambda_4-\lambda_2) - (\lambda_1-\lambda_3)$ 9-11

Usando la relación de ortogonalidad de nuestras funciones base, la ec. (189) nos queda

$$F_n(K,q) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty k'dk' \int_{-\infty}^{\infty} dq' \int_0^\infty \rho\, d\rho\, J_n(K\rho)\, J_{n'}(k'\rho) \int_{-\infty}^{\infty} dz\, e^{i(q-q')z} \times \int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{i(n-n')\varphi}\, F_{n'}(k',q')$$

reorganizando

$$F_n(K,q) = \int_0^\infty \rho\, d\rho \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{2\pi} d\varphi\, J_n(K\rho)\, e^{iqz} e^{in\varphi} \left\{ \frac{1}{2\pi} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty k'dk' \int_{-\infty}^{\infty} dq'\, e^{-in'\varphi} J_{n'}(k'\rho)\, e^{-iq'z} F_{n'}(k',q') \right\}$$

si definimos

$$f(\rho z \varphi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty k'dk' \int_{-\infty}^{\infty} dq'\, e^{-in'\varphi} J_{n'}(k'\rho)\, e^{-iq'z} F_{n'}(k',q')$$

la amplitud de dispersión nos queda entonces como

$$F_n(K,q) = \int_0^\infty \rho\, d\rho \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{in\varphi} J_n(K\rho)\, e^{iqz} f(\rho z \varphi) \qquad (190)$$

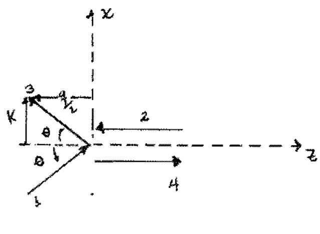
si definimos de nuevo

$$a(q,\rho) = \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{in\varphi} f(\rho z \varphi)$$

la ec. (190) queda entonces como

$$F_n(K,q) = \int_0^\infty \rho\, d\rho\, J_n(K\rho)\, a(q,\rho) \qquad (191)$$

En nuestro caso todas las λ estan cuantizadas en la dirección del momento transferido



Sistema de referencia del

momento transferido.

Si queremos obtener la expresión para la amplitud en el sistema del momento transferido, debemos invertir la helicidad de la partícula 2 y rotar los spines de las partículas 1 y 3. La ec. (191) se transformará en

$$F_n(k,q) = \sum_{\mu=-s_3}^{s_3} \mathcal{D}^{s_3}_{\lambda_3\mu}(\Omega) \sum_{\sigma=-s_1}^{s_1} \mathcal{D}^{s_1}_{\lambda_1\sigma}(\Omega) \int_0^\infty \rho\, d\rho\; a(q,\rho)\, J^{(k\rho)}_{\lambda_4-\lambda_2+\mu-\sigma} \tag{192}$$

donde $\mathcal{D}^{s_3}_{\lambda_3\mu}(0,\pi-\theta,0) = d^{s_3}_{\lambda_3\mu}(\pi-\theta)$ y

$$\mathcal{D}^{s_1}_{\lambda_1\sigma}(0,\theta,0) = d^{s_1}_{\lambda_1\sigma}(\theta) \tag{193}$$

Por sustitución de (193) en (192)

$$F_n(k,q) = \sum_{\mu\sigma} d^{s_3}_{\lambda_3\mu}(\pi-\theta)\, d^{s_1}_{\lambda_1\sigma}(\theta) \int_0^\infty \rho\, d\rho\; a(q,\rho)\, J^{(k\rho)}_{\lambda_4-\lambda_2+\mu-\sigma}$$

el ángulo viene definido por

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{p_1^B + p_2^B}{q} = \frac{2k}{q}$$

Entonces, ahora λ etiqueta la amplitud de helicidad en el sistema de Breit.

V.3 - <u>El desarrollo cilíndrico del parámetro de impacto para partículas con spin</u>. La amplitud de dispersión en este sistema de referencia por analogía con el caso anterior es:

$$F_n(P-q,q) = \int_0^\infty b\, db\; J_n(qb)\; a(q,\rho)$$

con

$$a(q,b) = \int_{-\infty}^{\infty} dz\; f(\rho z \varphi)\, e^{i(P-q)z}$$

y

$$\eta = (\lambda_3-\lambda_2) - (\lambda_1-\lambda_4)$$

Si consideramos que todas las λ estan cuantizadas a lo largo de la dirección de $\vec{P}-\vec{q}$ si queremos obtener la amplitud de dispersión en el sistema de Breit del parámetro de impacto debemos invertir la helicidad de la partícula 2 y rotar los spines de las partículas 1 y 4, obtenemos

$$F_n(P-q, q) = \sum_{\mu=-S_4}^{S_4} \mathcal{D}^{S_4}_{\lambda_4 \mu}(0, \pi-\theta, 0) \sum_{\sigma=-S_1}^{S_1} \mathcal{D}^{S_1}_{\lambda_1 \sigma}(0, \theta, 0) \int_0^\infty b\,db\, J_n(qb)\, a(q, \rho)$$

con

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{q}{\left\{ q + \frac{2}{\mu}\left[\frac{\mu}{1-\mu} - \frac{\sqrt{\mu}}{1-\mu}\right](P-q)\right\}} = \frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}}$$

CAPITULO VI

En este capítulo se enumeraran los resultados que se encontraron en este trabajo y se haran algunos comentarios finales.

1) Se clasificarón las subalgebras del grupo de Euclides siguiendo el procedimiento de Kalnis et al[5)]

2) Se encontrarón los conjuntos de funciones bases en el espacio de Hilbert apropiado resolviendo el problema de eigenvalores y eigenfunciones para los operadores invariantes de $E(3) \supset O(3) \supset O(2)$ y $E(3) \supset E(2) \times T_{\perp} \supset O(2) \times T_{\perp}$.

3) Usando las funciones bases obtenidas se hicieron desarrollos "en ondas, parciales generalizadas" de la amplitud de dispersión estos desarrollos pueden tabularse en la siguiente forma: (ver Tabla 2).

Si identificamos la función:

$$i^n J_n(k\rho) = \langle \lambda_f | T_\rho (k,0,0) | \lambda_i \rangle$$

donde $T_\rho (k,0,0)$ es el generador de una translación a lo largo de k en la representación ρ [20)] y

$$e^{iqz} = \langle \lambda_f | T_z (0,0,q) | \lambda_i \rangle$$

como elementos de matriz del operador de translaciones sobre el eje z perpendicular al plano de la pared de ladrillos, la función:

$$\mathcal{D}^{(j)}_{m\lambda}(\varphi, \theta, -\varphi) = \langle j m | D(\varphi, \theta, -\varphi) | j \lambda \rangle$$

TABLA 2

D e s a r r o l l o s	Base	Spin
$F(k,\cos\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\int_0^{\infty} r^2 dr\, j_\ell(kr)\, P_\ell(\cos\theta)\, f_\ell(r)$	$E(3)\supset O(3)\supset O(2)$	sin
$f_\ell(r) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} k'^2 dk' \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta' d\theta'\, j_\ell(k'r)\, P_\ell(\cos\theta')\, F(k',\cos\theta')$	$E(3)\supset O(3)\supset O(2)$	sin
$F_{\lambda_1'\lambda_2',\lambda_1\lambda_2}^{(k,\theta,\varphi)} = \sum_{j=\lvert\lambda\rvert}^{\infty}\sum_{m=-j}^{j}\frac{2j+1}{4\pi}\int_0^{\infty} r^2 dr \int d\Omega_k\, D_{m\lambda}^{(j)*}(\Omega_k)$ $\langle \vec{\phi}(\Omega_k),\lambda \rvert D_{m\lambda}^{(j)}(\Omega_k)\, f_{m\lambda}^{(j)}(r)$	$E(3)\supset O(3)\supset O(2)$	con
$f_{m\lambda}^{(j)}(r) = \frac{2j+1}{4\pi}\int_0^{\infty} k'^2 dk' \int d\Omega_r \int d\Omega_k'\, D_{m\lambda}^{(j)}(\Omega_k')\, \lvert\vec{\phi}(\Omega_{k'}),\lambda\rangle$ $D_{m\lambda}^{(j)}(\Omega_{k'})\, f_{\lambda_1'\lambda_2',\lambda_1\lambda_2}^{(k',\theta',\varphi')}$	$E(3)\supset O(3)\supset O(2)$	con
$F(q,k) = \int_0^{\infty}\rho\, d\rho\, J_0(k\rho)\, A(q,\rho)$	$E(3)\supset E(2)xT_\perp\supset O(2)xT_\perp$	sin
$A(q,\rho) = \int_{-\infty}^{\infty} dz\, e^{iqz} f(\rho,z)$	$E(3)\supset E(2)xT_\perp\supset O(2)xT_\perp$	sin
$F(q,P-q) = \int_{-\infty}^{\infty} dz\, e^{i(P-q)z} f(b,z)$	$E(3)\supset E(2)xT_\perp\supset O(2)xT_\perp$	sin
$A(P-q,b) = \int_{-\infty}^{\infty} dz\, e^{i(P-q)z} f(b,z)$	$E(3)\supset E(2)xT_\perp\supset O(2)xT_\perp$	sin
$F_n(q,k) = \int_0^{\infty}\rho\, d\rho\, J_n(k\rho)\, a(q,\rho)$	$E(3)\supset E(2)xT_\perp\supset O(2)xT_\perp$	con
$a(q,\rho) = \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{in\varphi} f(\rho z\varphi)$	$E(3)\supset E(2)xT_\perp\supset O(2)xT_\perp$	con
$F_n(q,P-q) = \int_0^{\infty} b\, db\, J_n(q,b)\, a(P-q,b)$	$E(3\supset E(2)xT_\perp\supset O(2)xT_\perp$	con
$a(P-q,b) = \int_{-\infty}^{\infty} dz\, f(bz\varphi)\, e^{i(P-q)z} f(b,z)$	$E(3)\supset E(2)xT_\perp\supset O(2)xT_\perp$	con

como un elemento de matriz del operador de rotaciones en tres dimensiones, entonces los desarrollos en dos variables de las amplitudes de dispersión no-relativistas discutidas en este trabajo se pueden escribir en todos los casos como transformadas integrales

$$F_{\lambda_f, \lambda_i} = \oint \langle \, | \mathcal{O} | \, \rangle \, f_{\lambda_f, \lambda_i}$$

en donde $F_{\lambda_f \lambda_i}$ es la amplitud de dispersión en función de las variables ordinarias, energía y ángulo o momentos de las partículas antes y después de la colisión, y f_{λ_f, λ_i} es la "amplitud parcial" y $\langle \, | \mathcal{O} | \, \rangle$ es un elemento de matriz de los operadores de los subgrupos de E(3) apropiados, rotaciones o translaciones. De esta manera los desarrollos iconales y en ondas parciales ordinarias aparecen como casos particulares de "desarrollos en ondas parciales generalizados" que son transformadas integrales cuyo núcleo son las funciones que representan los operadores de una cadena de subgrupos de $E(3)$

Finalmente, es conveniente notar que en este trabajo se ha puesto énfasis sobre algunos aspectos formales de la teoría, y no se han discutido las propiedades dinámicas que estan contenidas en las amplitudes parciales. La discusión de estas propiedades se hace comunmente a partir de las propiedades de las soluciones de la ecuación de Schrödinger con un potencial definido y es probablemente un procedimiento más simple y directo que una teoría de las colisiones no-relativistas que estuviera basada en la invariancia galileana. Por otra parte, la noción de potencial no se generaliza fácilmente al caso relativista, en tanto que las amplitudes invariantes de Galileo tienen su contrapartida inmediata en las amplitudes invariantes de Lorentz, a partir de las cuales se pueden obtener en el límite $c \to \infty$. Esta última características permite suponer que el estudio de las propiedades de las amplitudes invariantes de Galileo a partir del modelo familiar de la dispersión por un potencial, además del interés que por sí misma presenta permite obtener una comprensión mejor de algunos aspectos de la dispersión relativista de partículas elementales.

1.- Paul Roman "Advanced Quantum Theory" Chapter 3 p. 316-323 Addison-Wesley, 1965.

2.- R. Hagedorn "Selected Topics on Scattering Theory" Parts II and III, p. 106 CERN.

3.- Leonard S. Rodberg "Introduction to the Quantum Theory of Scattering" Chapter I, II, III, VI, X, XI, Academic Press 1967.

4.- John R. Taylor "Scattering Theory", John Wiley, Chapter II, 1973.

5.- E.G. Kalnins et al, Phys. Rev. D8 2552 (1973).

6.- Albert Messiah "Mecanique Quantique" Chapitre V p. 150-151 455 Dunod,Paris 1962.

7.- E.T. Whittaker and G.N. Watson "A Course of Modern Analysis" Cambridge University Press, 1927, Section 15.5 ff.

8.- Kurt Gottfried "Quantum Mechanics" Chapter III, p. 90-91 284-299, W.A. Benjamin, Inc. (1966).

9.- G. Cocho, C. Fronsdal et al, Phys. Rev. Vol. 168 N° 5 (1968).

10.- R.J. Glauber, "Lectures in Theoretical Physics", (Interscience) Publishers Inc. New York,(1958) Vol. pag. 315.

11.- G. Cocho, A. Mondragón, M. Colón Vela, Nucl. Phys. A25, 425 (1969).

12.- G. Cocho y A. Mondragón, Nuclear Physics, A25 417-424 (1969).

13.- A. Mondragón, G. Cocho, M. Colón Vela, Rev.Mex.Fís. Vol. 17 p. 59-67 (1968).

14.- A.A. Makarov, a, A. Smorodinsky, Kh. Valiek, and P. Winternitz, Nuovo Cimento 52A 1061 (1967).

15.- A.D. Martin, T.D. Spearman "Elementary Particles Theory" North Holland (1970).

16.- R.G. Newton, "Scattering Theory of Particles and Waves Mc Graw-Hill, New York, Section 183,(1966).

17.- F. Coester, Phys. Rev. Vol. 89 N° 3, 619 (1953).

18.- M. Jacob and G.C. Wick, Annals of Physics 7, 404-428 (1959).

19.- Toschimi Adachi and Tsuneyuki Kotoni, Progr. Theor. Phys. Suppl. 316 (1965).

20.- N. Vilenkin "Fonctions Speciales et Théorie de la représentation des Groupes" Dunod, Paris (1969) Chap. IV.

21.- S.M. Berman and M. Jacob, Phys. Rev. Vol. 139 N° 4B (1965).

22.- A.R. Edmonds, "Angular Momentum in Quantum Mechanics", Princeton Univ. Press, Princeton (1957).

23.- M.E. Rose, "Elementary Theory of Angular Momentum", Wiley, New York (1957).

24.- E. Chacón, "Introducción a la Teoría de los Grupos y sus Aplicaciones a la Mecánica Cuántica", IFUNAM, (1975).

25.- E.P. Wigner "Group Theory" Academic Press. N.Y. (1959).

26.- R. Gilmore "Lie Groups, Lie Algebras and Some of Their Applications", Johu Wiley, p. 220-456 (1974).

27.- N.N. Lebedev "Special functions and their Applications", Dover p. 98 (1965).

28.- James D. Talman "Special Function" W.A. Benjamin, Inc.
(1968) Cap. II y XII.

29.- W. Miller Jr., Commun Pure Appl. Math. 17,527 (1964).