UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ECUACIONES DE MOVIMIENTO, ESPACIO LLANO DE MINKOWSKI Y CAMPOS CLASICOS

T E S I S

Que para obtener el grado de:
MAESTRO EN CIENCIAS
PRESENTA EL FISICO

Miguel Peñafiel Nava

México, D. F. 1975.

A MIS AMIGOS

y

CAMARADAS.

AGRADECIMIENTOS:

Deseo manifestar aquí mi agradecimiento - a las siguientes personas e instituciones:

- Al Dr. Fermín Viniegra H. por su decidida - colaboración y paciencia como director de esta tesis.

- A mi esposa Anita, por su constante estímulo y comprensiva actitud hacia mi trabajo.

- A la Organización de Estados Americanos por- la ayuda económica recibida como becario del del Proyecto Multinacional de Física.

****

C O N T E N I D O

...

INTRODUCCION

La estructura matemática de la teoría de la gravitación formulada por A. Einstein y conocida como "Teoría de la Relatividad General", surge de la aplicación del principio de covariancia general a campos físicos cuya característica fundamental es la que, bajo sus efectos, la aceleración de las partículas es independiente de la masa que éstas posean. Lo cual permite, en virtud del principio de equivalencia, la postulación de una geometría riemamiana para el espacio físico -determinada por la densidad de materia presente- donde las ecuaciones de movimiento para una partícula, libre de cualquier otra influencia, coinciden con las de geodésicas.

El campo electromagnético, descriptible en conexión lógica con la teoría de la relatividad especial, se introduce ahora superponiendo el término de fuerza electromagnética en las ecuaciones de geodésicas para hallar las del movimiento de partículas cargadas y el tensor de energía -impulso electromagnético en las ecuaciones de Einstein para obtener las de los campos.

Una forma interesante de lograr los mismos resultados a partir de un punto de vista geométrico común, es lo que propuso Th. Kaluza postulando un espacio de Riemann de cinco dimensiones -sin un significado específico para la quinta- de modo que su escalar de curvatura constituya la densidad langrangiana

******

de campo, simultáneamente, desde un espacio llano tetradimensional de Minkowski.

Propiamente, se plantea una reformulación de dicha teoría (aún en desarrollo) aprovechando la notación pentadimensional que incluye y manteniendo la discusión del tema estrictamente a nivel de ecuaciones de movimiento.

El principio de equivalencia, como en relatividad general, constituye aquí una premisa importante por lo que toca a la gravitación; en cambio, el principio de covariancia general debe sustituirse por el de covariancia de Lorentz -como es natural tratándose de una teoría de espacio plano- y por tal motivo se hace un análisis más o menos detallado de sistemas no-inerciales, de manera que permita un lenguaje de campo físico (y no geométrico) para la gravitación.

Luego se generaliza el procedimiento estableciendo la formulación pentadimensional en términos de un sistema en cinco coordenadas, a diferencia del empleado por Kaluza, con un significado explícito para la quinta y reteniendo la métrica seudoeuclídea. De ahí, con ayuda de postulados adicionales, se extrae la función de Lagrange adecuada y, posteriormente, las ecuaciones de movimiento para partículas cargadas en correspondencia con las propuestas por Viniegra. Se muestra también que, con ligeros cambios, esa formulación permite deducir ecuaciones comparables con las del electromagnetismo de la relatividad general.

Finalmente, se ha anexado un capítulo, de por sí evidente, acerca del formalismo hamiltoniano.

de un principio variacional del que se desprenden las ecuacio- ciones de campo citadas. Las geodésicas se interpretan, entonces, como trayectorias de las partículas cargadas.

Sin embargo, en última instancia, es la propiedad fundamental del campo gravitacional la que permite su eficaz geometrización; propiedad que no es compartida con el campo electromagnético por lo que ningún intento de geometrizar a éste ha resultado completamente satisfactorio.

Por otra parte, ya en el campo gravitacional, cuando los campos no son constantes, la noción misma de sistema de referencia pierde su sentido habitual a raíz de la variación de la geometría espacial con el tiempo, introduciéndose, de esta manera, una complicación conceptual extraordinaria en la descripción de fenómenos físicos. Al margen de que, por principio, cantidades físicas importantes pierden su carácter tensorial en relatividad general.

Lo anterior hace, pues, deseable la existencia de una teoría que permita el tratamiento del campo gravitacional en analogía con el que se emplea para el electromagnético (es decir, inversamente a los intentos conocidos), a fin de lograr, en este contexto, una formulación unificada de los dos fenómenos.

El propósito del trabajo que aquí se presenta, es el de estudiar la teoría clásica de campos sugerida por F. Viniegra en la que, precisamente, se pretende describir ambos tipos-

N O T A C I O N

La métrica seudoeuclídea de Minkowski se representará por

$$\delta_{\alpha\beta} = \| \mathrm{Diag}\ (1,-1,-1,-1) \|$$

o sea,

$$\delta_{00} = -\delta_{11} = -\delta_{22} = -\delta_{33} = 1 \quad ; \quad \delta_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{si} \quad \alpha \neq \beta .$$

Dado un tensor cualquiera $C^{\mu\nu\cdots}_{\alpha\beta\cdots}$, las propiedades de simetría y antisimetría se dan mediante paréntesis y corchetes sobre los índices implicados, respectivamente; así

$$C^{\mu\nu\cdots}_{(\alpha\beta)\cdots} = \frac{1}{2} \left(C^{\mu\nu\cdots}_{\alpha\beta\cdots} + C^{\mu\nu\cdots}_{\beta\alpha\cdots} \right)$$

$$C^{\mu\nu\cdots}_{[\alpha\beta]\cdots} = \frac{1}{2} \left(C^{\mu\nu\cdots}_{\alpha\beta\cdots} - C^{\mu\nu\cdots}_{\beta\alpha\cdots} \right) ,$$

etc.

La coma se emplea para denotar la derivada ordinaria

$$C_{\alpha,\beta} \equiv \frac{\partial C_\alpha}{\partial x^\beta} ,$$

en tanto que el punto y coma se usa en las derivadas covariantes

$$C_{\alpha;\beta} \equiv C_{\alpha,\beta} - \left\{ {\gamma \atop \alpha\beta} \right\} C_\gamma .$$

El resto de la notación está definida a lo largo del texto.

CAPITULO I

LA TEORIA CLASICA DE CAMPOS.

1.- *Electromagnetismo.*

En la teoría covariante del campo electromagnético [1], las ecuaciones de movimiento para una partícula de masa m_0 y carga e se escriben

$$\frac{du_\nu}{ds} = \tau_0 f_{\nu\alpha} u^\alpha \tag{1.1}$$

donde

$$\tau_0 \doteq \frac{e}{m_0 c^2} ; \tag{1.2}$$

$f_{\nu\alpha}$ es el tensor de Máxwell definido, en función del tetra-potencial de campo $B_\mu(x)$ según

$$f_{\nu\alpha} \equiv B_{\alpha,\nu} - B_{\nu,\alpha} \tag{1.3}$$

y u^α son las tetravelocidades (dx^α/ds), tomadas respecto del elemento de arco expresado, para todo sistema inercial de referencia, mediante la forma cuadrática.

$$ds^2 = \delta_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu \tag{1.4}$$

El tensor de Maxwell obedece a las ecuaciones homóni-

Esta formulación es covariante bajo transformaciones de Lorentz.

2.- *Gravitación*.

Existen varias teorías que tratan de extender el fenómeno físico de la gravitación dentro de los límites de la relatividad especial. De entre ellas, la que ha logrado mayor éxito es la llamada teoría de la relatividad general, formulada, como es sabido, por Einstein en 1916. 7

La teoría de la relatividad general consiste, estrictamente hablando, de una geometrización del campo gravitacional; esto es, de la sustitución de éste por una geometría. De acuerdo con ella, un espacio de Riemann tetradimensional con estructura métrica determinada por la materia inmersa en él, permite la incorporación adecuada del principio de equivalencia y del postulado de covariancia general, las cuales se pueden enunciar como sigue:

(1.2) Siempre es posible anular los efectos de un campo gravitacional, en una vecindad pequeña del espacio, mediante la adecuada elección de un sistema de referencia no inercial (Principio de equivalencia).

(1.22) La forma de las ecuaciones que describen los efectos de la gravitación no cambia cualquiera que sea el sistema de referencia que se emplee (Postulado de covariancia general).

De acuerdo con este esquema [2] , una partícula de mas

$$f_{\nu\alpha,\mu} + f_{\mu\nu,\alpha} + f_{\alpha\mu,\nu} = 0 \tag{1.5}$$

$$f_{\alpha\mu,\mu} = \frac{4\pi}{c} J_\alpha \tag{1.6}$$

y a la ecuación de continuidad

$$f_{\alpha\mu,\mu\alpha} = 0 \tag{1.7}$$

La ecuación (1.1) puede obtenerse también del principio variacional

$$\delta \int (-m_o c + \tau_o B_\alpha u^\alpha)\, ds = 0 \tag{1.8}$$

en tanto que, dinámicamente, resulta de resolver la ecuación -- covariante de Newton

$$\frac{dP_\nu}{ds} = K_\nu \tag{1.9}$$

con tetramomento

$$P_\nu = m_o c\, u_\nu = m_o c\, \delta_{\rho\nu}\, u^\rho \tag{1.10a}$$

y tetrafuerza

$$K_\nu = \frac{e}{c} f_{\nu\alpha}\, u^\alpha. \tag{1.10b}$$

sor de Ricci; R, la curvatura escalar del espacio y k la constante de la gravitación.

La ecuación (1.11) resulta del principio variacional

$$\delta \int_{\sigma} - m_o c \, d\sigma = 0 \qquad (1.16)$$

mientras que (1.15) se deduce de

$$\delta \left(W_{campo} + W_{materia} \right) = 0 \qquad (1.17)$$

(W representa la acción) la cual, si se acepta que el escalar de curvatura es una densidad lagrangiana para el campo, toma la forma [1] :

$$\delta \int_{\Omega} R \sqrt{-g} \, d\Omega - \frac{1}{2c} \int T_{\alpha\beta} \, \delta g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} \, d\Omega = 0 \; ; \qquad (1.17a)$$

con $d\Omega$ como elemento de volumen y $g = det(g_{\alpha\beta})$.

3.- *Electromagnetismo y Gravitación.*

Una vez aceptado que el espacio deja de ser plano en presencia de la materia, es obvio que las cantidades características del campo electromagnético deben considerarse afectadas también por la nueva geometría. Sin embargo, formalmente no sufren cambios notables [1] ; por ejemplo, el tensor de Máxwell es ahora

$$F_{\nu\alpha} \equiv A_{\alpha;\nu} - A_{\nu;\alpha} = A_{\alpha,\nu} - A_{\nu,\alpha} \quad , \qquad (1.18)$$

prueba evoluciona, dentro de la influencia gravitatoria, según las geodésicas del espacio en cuestión, siendo sus ecuaciones, por consecuencia,

$$\frac{d^2x^\mu}{d\sigma^2} + \left\{ {\mu \atop \alpha\,\beta} \right\} \frac{dx^\alpha}{d\sigma}\frac{dx^\beta}{d\sigma} = 0 \qquad (1.11)$$

donde

$$d\sigma^2 = g_{\mu\nu}(x)\, dx^\alpha dx^\beta \qquad (1.12)$$

es el elemento de arco riemanniano, $g_{\alpha\beta}(x)$ es el tensor métrico en tal espacio (que ahora hace las veces de ptencial gravitacional) y

$$\left\{ {\mu \atop \alpha\,\beta} \right\} \equiv g^{\mu\nu}\,[\alpha\beta,\nu] \qquad (1.13)$$

$$[\alpha\beta,\nu] \equiv \frac{1}{2}\left(g_{\alpha\nu,\beta} + g_{\nu\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu} \right) \qquad (1.14)$$

los símbolos de Christoffel de segunda y primera especies, respectivamente.

Las cantidades $g_{\alpha\beta}$ quedan, pues, determinadas a través de las ecuaciones de Einstein para el "campo":

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = \frac{4\pi k}{c^4} T_{\alpha\beta} \qquad (1.15)$$

en las cuales $T_{\alpha\beta}$ es el tensor de energía-momento, $R_{\alpha\beta}$ el ten_ deducibles del principio variacional

$$\delta \int \left(-m_o c + \frac{e}{c} A_\alpha \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \right) d\sigma = 0 . \qquad (1.24)$$

Ecuaciones para los campos se obtienen introduciendo el tensor de energía-momento electromagnético en las de Einstein, lo que da

$$G_{\mu\nu} - \frac{\kappa}{c^4} \left(2 F_{\mu\rho} F_\nu{}^\rho - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right) = 0 \qquad (1.25)$$

y

$$F^{\mu\rho}{}_{;\rho} = 0 \qquad (1.26)$$

$G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein $\left(= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right)$. Tales ecuaciones surgen igualmente del siguiente principio variacional [2] :

$$\delta \int_\Omega \left(R + \frac{\kappa}{c^4} F_{\mu\rho} F^{\mu\rho} \right) \sqrt{-g}\, d\Omega = 0 \qquad (1.27)$$

4.- *Teoría Unificada de Kaluza*

Con base en la teoría de un campo vectorial unitario sobre un espacio métrico de cinco dimensiones V_5, se puede describir geométricamente los resultados de la sección anterior. En efecto, si se impone la condición de que el tensor métrico -

donde A_μ es el vector potencial electromagnético en presencia - de gravitación y la igualdad se sigue de la simetría en los subíndices para los símbolos de Christoffel de segunda especie. En consecuencia, tampoco varía el primer par de ecuaciones de Máxwell:

$$F_{\nu\alpha,\mu} + F_{\mu\nu,\alpha} + F_{\alpha\mu,\nu} = 0 \; ; \qquad (1.19)$$

mientras que, definiendo al tetravector corriente por

$$J^\alpha = \frac{\rho_c}{\sqrt{-g}} \frac{dx^\alpha}{dx^0} \qquad (1.20)$$

el segundo par de ecuaciones de Máxwell toma la forma

$$F_{\alpha\nu;\nu} = \frac{4\pi}{c} J_\alpha \qquad (1.21)$$

y la ecuación de continuidad resulta

$$J^\alpha{}_{;\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left(\sqrt{-g}\, J^\alpha \right)_{,\alpha} = 0 \qquad (1.22)$$

Las ecuaciones de movimiento para una partícula cargada son las covariantes generales de Lorentz:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\sigma^2} + \left\{ {\mu \atop \alpha\beta} \right\} \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \frac{dx^\beta}{d\sigma} = \tau_0 \, g^{\mu\nu} F_{[\nu\alpha]} \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \; , \qquad (1.23)$$

...

Puede verse, además, que

$$\gamma = det(\gamma_{ij}) = det(g_{\alpha\beta}) = g, \tag{1.33}$$

y es posible demostrar [2], que el escalar de curvatura del espacio de cinco dimensiones ($\mathbb{R}$), está relacionado con su similar en el de cuatro (R) mediante

$$\mathbb{R} = R + \frac{1}{4} \varphi_{[\rho\sigma]} \varphi^{[\rho\sigma]} \quad , \tag{1.34}$$

donde

$$\varphi_{\rho\sigma} = \varphi_{[\rho\sigma]} = A_{\sigma,\rho} - A_{\rho,\sigma} \, . \tag{1.35}$$

Proponiendo al escalar de curvatura (1.34) como la densidad lagrangiana de un principio variacional

$$\delta \int_{\Omega} \mathbb{R} \sqrt{-\gamma}\, d\Omega = 0 \tag{1.36}$$

($\Omega \in V_4$) de acuerdo a (1.33), se tiene

$$\delta \int_{\Omega} \left(R + \frac{1}{4} \varphi_{\rho\sigma} \varphi^{\rho\sigma} \right) \sqrt{-g}\, d\Omega = 0 \quad ; \tag{1.37}$$

que conduce, al igual que (1.27), a las ecuaciones (1.26):

$$G_{\mu\nu} - \frac{\kappa}{c^4} \left(2 F_{\rho\mu} F_{\nu}{}^{\rho} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right) = 0 \tag{1.38a}$$

pentadimensional sea independiente de la quinta coordenada en un sistema de coordenadas tal que, en él, las cuatro primeras correspondan a las del espacio físico ordinario (de Riemann), entonces las únicas transformaciones permisibles son las que pertenecen al grupo

$$\begin{aligned} x'^{\mu} &= f^{\mu}(x^{0},\ldots,x^{3}) \\ x'^{5} &= x^{5} + f^{5}(x^{0},\ldots,x^{3}) \end{aligned} \tag{1.28}$$

En este sistema especial de coordenadas, el tensor métrico toma la forma

$$\gamma_{ij} = \left(\begin{array}{c|c} g_{\alpha\beta} + A_{\alpha}A_{\beta} & A_{\alpha} \\ \hline A_{\beta} & 1 \end{array}\right) \tag{1.29}$$

y su inverso,

$$\gamma^{ij} = \left(\begin{array}{c|c} g^{\alpha\beta} & -g^{\alpha\sigma}A_{\sigma} \\ \hline -g^{\beta\sigma}A_{\sigma} & 1 + g^{\rho\sigma}A_{\rho}A_{\sigma} \end{array}\right) \tag{1.30}$$

$(i,j = 0,\ldots,4)$ en donde las A_{α} son las primeras cuatro componentes covariantes de un campo vectorial unitario $\vec{A}$:

$$\gamma_{ij}\, A^{i} A^{j} = 1\,, \tag{1.31}$$

las cuales se transforman bajo (1.28) exactamente como lo hacen las componentes de un potencial electromagnético:

$$A'_{\rho} = \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\rho}}\left(A_{\sigma} - f^{5}{}_{,\sigma}\right). \tag{1.32}$$

CAPITULO II

"UNA NUEVA TEORIA CLASICA DE CAMPOS"

I.- *Ecuaciones de Movimiento.*

En el contexto de la teoría clásica de campos formulada por F. Viniegra [4], para la obtención de las ecuaciones de movimiento de una partícula urgida por campos de fuerzas, se acepta como válidas las siguientes hipótesis:

(2.i) Dados dos sistemas de coordenadas $\{x\}$ y $\{\xi\}$, dentro de un espacio plano tetradimensional M_4, siendo el primero de ellos inercial y no-inercial el segundo,

(a) en ellos se puede definir, respectivamente, las formas cuadráticas diferenciales

$$ds^2 = \delta_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta \tag{2.1a}$$

$$d\sigma^2 = \delta_{\mu\nu}\, d\xi^\mu d\xi^\nu \, , \tag{2.1b}$$

(b) se puede escribir (2.1) en la forma

$$\delta_{\alpha\beta}\, u^\alpha u^\beta = 1 \tag{2.1c}$$

$$\delta_{\mu\nu}\, \dot{\xi}^\mu \dot{\xi}^\nu = k^2 \tag{2.1d}$$

donde $\dot{\xi}^\mu = d\xi^\mu/ds$; $u^\alpha = dx^\alpha/ds$ y

$$k = d\sigma/ds .$$

(c) En estas condiciones, existe la transformación general entre ambos sistemas

$$\dot{\xi}^\mu = H^\mu{}_\alpha(x)\, u^\alpha + \tau\, B^\mu(x) \tag{2.2}$$

siendo τ una constante aún indeterminada.

$$F^{\mu\rho}{}_{;\rho} = 0 \tag{1.38b}$$

si se pone

$$\varphi_{\rho\sigma} = \frac{2\sqrt{\kappa}}{c^2} F_{[\rho\sigma]} \tag{1.39}$$

Por otra parte, usando (1.29) es claro que el elemento de arco pentadimensional es

$$d\rho^2 = \gamma_{ij}\, dx^i dx^j = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta + (dx^5 + A_\alpha\, dx^\alpha)^2 ; \tag{1.40}$$

y, de la independencia de γ_{ij} respecto de x^5, se sigue que, para geodésicas en V_5, puede tomarse

$$\frac{dx^5}{d\rho} + A_\alpha \frac{dx^\alpha}{d\rho} = cte. \quad ; \quad g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\rho}\frac{dx^\beta}{d\rho} = cte. , \tag{1.41}$$

para una adecuada elección del parámetro ρ [3]. Por tanto se tiene

$$\frac{d^2x^\mu}{d\rho^2} + \left\{ {\mu \atop \alpha\beta} \right\} \frac{dx^\alpha}{d\rho}\frac{dx^\beta}{d\rho} = constante\, F^\mu{}_\alpha \frac{dx^\alpha}{d\rho} , \tag{1.42}$$

comparable con (1.23). Las geodésicas en V_5 pueden, así, interpretarse como las trayectorias de las partículas cargadas.

Esta teoría constituye, realmente, una extensión para la relatividad general al caso electromagnético.

do que quede en términos de $\{x\}$ haciendo uso de las siguientes-definiciones:

$$h_{\alpha\beta}(x) \equiv \delta_{\mu\nu} H^{\mu}_{\alpha} H^{\nu}_{\beta} \tag{2.6a}$$

$$A_{\alpha}(x) \equiv \delta_{\mu\nu} H^{(\mu}_{\alpha} B^{\nu)} \tag{2.6b}$$

$$\varphi(x) \equiv \delta_{\mu\nu} B^{\mu} B^{\nu} \tag{2.6c}$$

En consecuencia,

$$\mathcal{L} = -m_{\circ}c\sqrt{h_{\alpha\beta}u^{\alpha}u^{\beta} + 2\tau A_{\alpha}u^{\alpha} + \tau^{2}\varphi} \tag{2.7}$$

Colocando esta función en las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^{\gamma}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^{\gamma}} = 0$$

se obtienen las ecuaciones de movimiento

$$a^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}u^{\alpha}u^{\beta} - \tau h^{\mu\nu}F_{\nu\alpha}u^{\alpha} - \tfrac{1}{2}\tau^{2}h^{\mu\nu}\varphi_{,\nu} = 0 \,, \tag{2.8}$$

en las cuales se ha puesto

$$a^{\mu} \equiv \frac{du^{\mu}}{ds} = \frac{d^{2}x^{\mu}}{ds^{2}} \,, \tag{2.8a}$$

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}_{(\alpha\beta)} \equiv \tfrac{1}{2}k^{\mu\nu}\left(h_{\nu\beta,\alpha} + h_{\alpha\nu,\beta} - h_{\alpha\beta,\nu}\right) \,, \tag{2.8b}$$

$$F_{\nu\alpha} = F_{[\nu\alpha]} \equiv A_{\alpha,\nu} - A_{\nu,\alpha} \tag{2.8c}$$

(2.ii) En (2.1d) se puede tomar a k siendo una constante -- (en particular, con valor igual a uno).

(2.iii) La función acción W es un invariante absoluto:

$$W = \int_s \mathcal{L}\, ds = \int L\, d\sigma = W' . \tag{2.3}$$

(2.iv) Siempre es posible encontrar un marco de referencia - desde el cual los efectos de campos físicos externos- que obran sobre la partícula de prueba pueden ser anulados, al menos en la vecindad de un acontecimiento - en M_4(Principio de equivalencia fuerte).

Entonces, para vecindades pequeñas del espacio, se toma (2.3) en la forma

$$\int_{\Delta s} \mathcal{L}\, ds = \int_{\Delta\sigma} L\, d\sigma$$

de ahí,

$$\mathcal{L} = L\, \frac{d\sigma}{ds} = k\, L \tag{2.4}$$

Si se elige el sistema $\{\xi\}$ de tal manera que, desde él, la partícula se observe como libre, entonces $L = -mc$ y usando (2.1d), la lagrangiana para tal partícula en el sistema $\{x\}$ es

$$\mathcal{L} = -mc\sqrt{\delta_{\mu\nu}\, \dot{\xi}^{\mu}\, \dot{\xi}^{\nu}} \tag{2.5}$$

Tomando en cuenta (2.2), ésta puede traducirse de mocon $dx^4 = ds$. Igualmente, se tiene

$$\delta_{MN}\, d\xi^M d\xi^N = 0 \,, \tag{2.11}$$

siendo $d\xi^4 = d\sigma$. Entonces la transformación (2.2) queda:

$$\dot{\xi}^M \doteq H^M{}_A\, u^A \tag{2.12}$$

y (2.6) se resume en

$$h_{AB}(x) = \delta_{MN}\, H^M{}_A\, H^N{}_B \tag{2.13}$$

donde

$$H^4{}_\alpha(x) \equiv 0 \;; \quad H^4{}_4(x) \equiv 1 \;; \; H^\alpha{}_4(x) \equiv \tau\, B^\alpha(x) \,, \tag{2.14}$$

resultando, por tanto,

$$h_{\alpha\beta} \equiv h_{\alpha\beta} \tag{2.15a}$$

$$h_{\alpha 4} = h_{4\alpha} \equiv \tau\, A_\alpha \tag{2.15b}$$

$$h_{44} \equiv \tau^2 \varphi - 1 \,. \tag{2.15c}$$

Siendo det $(h_{AB}) \neq 0$, se introduce k^{AB} tal que

$$k^{AC} h_{CB} = \delta^A{}_B$$

siendo $k^{\mu\nu}$ tal que

$$k^{\mu\eta} h_{\eta\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} .$$

Las ecuaciones (2.8) contienen términos análogos a -- los que aparecen en las covariantes generales de Lorentz (1.23), difiriendo, sin embargo, en cuanto al parámetro respecto al que se deriva y la presencia, en las primeras, del término adicio-- nal en φ correspondiente al gradiente de un escalar. En lo - que respecta a los campos mismos, se puede apreciar que el po-- tencial vectorial A_α queda aquí formado, propiamente, de las par tes "gravitacional" y "electromagnética" de la transformación - (2.2) de acuerdo con la definición (2.6b) existiendo, así, una- interacción explícita de ambos tipos de campo.

2.- *Notación Pentadimensional.*

Se introduce mayor sencillez en todas las relaciones anteriores si se adopta una notación con cinco índices.

Sea la métrica

$$\delta_{AB} = \| \mathrm{Diag}\,(1,-1,-1,-1,-1) \| \tag{2.9}$$

(A, B = 0,...,4), en función de ésta, la expresión

$$\delta_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta - ds^2 = 0 ,$$

se escribe

$$\delta_{AB}\, dx^A dx^B = 0 \tag{2.10}$$

por lo que la quinta ecuación (2.17) implica una ley de conservación.

Por las relaciones (2.10), (2.11) y (2.12), se afirma que las partículas se mueven siempre sobre la "superficie" de un cono en el espacio pentadimensional así construído (el cono de existencia).

No se expondrá la parte de éste teoría dedicada a las ecuaciones de campos, no obstante existir algunos resultados importantes al respecto [5].

Con esta notación, las ecuaciones de movimiento (2.8) vienen representadas por

$$h_{DM}\, a^M + [D, AB]\, u^A u^B = 0 \tag{2.16}$$

o bién, según

$$a^C + \begin{bmatrix} C \\ A\ B \end{bmatrix} u^A u^B = 0 \tag{2.17}$$

en las cuales

$$\begin{bmatrix} C \\ A\ B \end{bmatrix} \equiv k^{CD}\, [AB, D] \tag{2.18a}$$

y

$$[AB, D] \equiv \tfrac{1}{2}\left(h_{DB,A} + h_{AD,B} - h_{AB,D} \right) . \tag{2.18b}$$

Se puede ver que, no dependiendo h_{AB} explícitamente de $x^4 = s$, son

$$[\mu, 4\alpha] = -\tfrac{1}{2}\, \tau\, F_{\mu\alpha} \tag{2.19}$$

$$[\mu, 44] = -\tfrac{1}{2}\, \tau^2\, \varphi_{,\mu} \tag{2.20}$$

y

$$u^4 = 1 \quad ; \quad a^4 = 0 \tag{2.21}$$

CAPITULO III

SISTEMAS NO-INERCIALES

1.- *Transformaciones no-inerciales.*

Por sistema inercial se entiende un sistema de referencia en el que las leyes covariantes de Newton se satisfacen. Las transformaciones que llevan de un sistema inercial a otro de la misma naturaleza se conocen como transformaciones inerciales, contenidos dentro del grupo general de Lorentz.

Por contraposición con las anteriores, se llama sistema no-inercial, a todo sistema de referencia sometido a la acción de fuerzas externas.

En general, las transformaciones de coordenadas que relacionan sistemas de referencia con propiedades dinámicas diferentes, se denominarán transformaciones no inerciales, contenidas en el grupo general de transformaciones admisibles [6] y caracterizadas como sigue:

Dados dos sistemas de coordenadas $\{x\}$ y $\{\xi\}$, entre ellos existe una transformación no inercial si están relacionados por una ecuación de la forma

$$\xi^{\mu} = f^{\mu}(x, a) \qquad (3.1)$$

(f^{μ} arbitraria; $\mu = 0,\ldots,3$) donde $x = \{x^0,\ldots,x^3\}$ y $a = \{a^1,\ldots,a^r\}$ es un conjunto de parámetros tales que para ciertos de sus valo

3.- *Geometría en un Sistema No-inercial.*

Si se considera al elemento de arco del sistema inercial

$$ds^2 = \delta_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta \tag{3.5}$$

como el invariante fundamental,entonces, bajo la transformación (3.1) éste se evalúa de acuerdo con

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, d\xi^\mu d\xi^\nu \tag{3.6}$$

donde

$$g_{\mu\nu}(\xi) = \delta_{\alpha\beta}\, \bar{J}^{\alpha}_{\ \mu}\, \bar{J}^{\beta}_{\ \nu} \tag{3.7}$$

resulta ser el tensor métrico del sistema no-inercial $\{\xi\}$.

De esta manera, la geometría en un sistema no-inercial queda establecida a partir de (3.6) de acuerdo al formalismo de un espacio de Riemann de curvatura cero; circunstancia que se expresa en la propiedad adicional

$$J^{\mu}_{\ \alpha,\beta} = J^{\mu}_{\ \beta,\alpha} \tag{3.8}$$

Así considérese la ecuación

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} = 0\,, \tag{3.9}$$

que representa el movimiento de una partícula libre en el sis--

res, por ejemplo $a_0 = \{0, \ldots, 0\}$, la transformación es lineal o idéntica. Así, quedan excluídas otros cambios arbitrarios tales como el paso de coordenadas cartesianas a polares, etc.

Por tratarse de transformaciones admisibles, el jacobiano de (3.1) no debe anularse

$$| J^{\mu}{}_{\alpha} | \equiv \left| \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \right| \neq 0, \qquad (3.2)$$

entonces las diferenciales de las coordenadas en ambos sistemas estarán ligados por

$$d\xi^{\mu} = J^{\mu}{}_{\alpha}\, dx^{\alpha} \qquad (3.3a)$$

o bién,

$$dx^{\alpha} = \bar{J}^{\alpha}{}_{\mu}\, d\xi^{\mu} , \qquad (3.3b)$$

donde la barra indica inversión: $\bar{J}^{\alpha}{}_{\mu} = (J^{\mu}{}_{\alpha})^{-1}$, de modo que

$$\bar{J}^{\alpha}{}_{\mu} J^{\nu}{}_{\alpha} = \delta^{\nu}{}_{\mu} . \qquad (3.4)$$

Las transformaciones no-inerciales forman grupo, pero no necesariamente grupo de Lie, aunque existen pretensiones en tal sentido [7].

En lo que sigue, se limita el estudio al caso particular en el que $\{x\}$ es un sistema inercial, en tanto que $\{\xi\}$ es no inercial.

$$\frac{d^2 \xi^\rho}{d s^2} + \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} \frac{d \xi^\mu}{d s} \frac{d \xi^\nu}{d s} = 0 \tag{3.10}$$

con

$$\left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} \equiv g^{\rho\sigma} [\mu\nu, \sigma] = J^\rho{}_\alpha \bar{J}^\alpha_{\mu,\nu} \tag{3.13}$$

la ecuación (3.10)es justamente la ecuación de geodésicas para- el espacio geométrico definido en el sistema $\{\xi\}$ y determinado por (3.6).

Es interesante traducir también la ecuación (1.1) pa- ra el movimiento de una partícula cargada:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d s^2} = \tau_0 \, \delta^{\alpha\beta} f_{\beta\gamma} \frac{d x^\gamma}{d s} \tag{3.14}$$

al lenguaje del sistema no-inercial. Obsérvese, en primer lu-- gar, que dados (3.12) y (3.13), se satisface la relación

$$A_{\mu;\nu} = \bar{J}^\alpha_\mu \bar{J}^\beta_\nu B_{\alpha,\beta} \tag{3.15}$$

siendo B_α el tetravector potencial electromagnético en el sis tema inercial $\{x\}$, y el punto y coma representando la deriva - ción covariante en $\{\xi\}$:

$$A_{\mu;\nu} = A_{\mu,\nu} - \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} A_\rho \, . \tag{3.16}$$

El potencial mismo, de acuerdo con su naturaleza vectorial, se- transforma según tema $\{x\}$. Para describirla en términos del sistema $\{\xi\}$, hay que poner, según (3.3),

$$\frac{d}{ds}\left(\bar{J}^{\alpha}_{\mu}\frac{d\xi^{\mu}}{ds}\right) = 0,$$

lo cual da

$$\bar{J}^{\alpha}_{\mu}\frac{d^2\xi^{\mu}}{ds^2} + \bar{J}^{\alpha}_{\mu,\nu}\frac{d\xi^{\mu}}{ds}\frac{d\xi^{\nu}}{ds} = 0;$$

de donde, multiplicando por $\bar{J}^{\beta}_{\sigma}$ y contrayendo los índices contravariantes con la métrica $\delta_{\alpha\beta}$, se obtiene, teniendo en cuenta (3.7),

$$g_{\mu\sigma}\frac{d^2\xi^{\mu}}{ds^2} + \delta_{\alpha\beta}\bar{J}^{\beta}_{\sigma}\bar{J}^{\alpha}_{\mu,\nu}\frac{d\xi^{\mu}}{ds}\frac{d\xi^{\nu}}{ds} = 0 \qquad (3.10a)$$

y puede demostrarse por simple sustitución que, en vista de (3.8) es

$$[\mu,\nu,\sigma] \equiv \frac{1}{2}\left(g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\sigma\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}\right) = \delta_{\alpha\beta}\bar{J}^{\beta}_{\sigma}\bar{J}^{\alpha}_{\mu,\nu}. \qquad (3.11)$$

De (3.2) se sigue

$$\det(g_{\mu\nu}) \neq 0,$$

por lo que existe $g^{\rho\sigma}$ tal que $g^{\rho\sigma}g_{\mu\sigma} = \delta^{\rho}_{\mu}$, explícitamente,

$$g^{\rho\sigma} = \delta^{\alpha\beta}J^{\rho}_{\alpha}J^{\sigma}_{\beta}. \qquad (3.12)$$

introduciendo (3.11) y (3.12) en (3.10a), ésta se transforma en

3.- *Campos Inerciales.*

Es posible, sin embargo, interpretar de distinta manera el comportamiento de los sistemas no-inerciales.

En efecto, un observador fijo en uno de tales sistemas, $\{\xi\}$, puede siempre elegir la base cortesiana, introduciendo, como especificación de sus medidas, la métrica seudoeuclídea de Minkowski $\delta_{\mu\nu}$ y afirmando que su elemento de línea está, consecuentemente, determinado con la forma cuadrática diferencial

$$d\sigma^2 = \delta_{\mu\nu}\, d\xi^\mu\, d\xi^\nu . \tag{3.20}$$

Obviamente ,

$$d\sigma \neq ds .$$

De acuerdo con este hecho, para semejante observador el sistema $\{\xi\}$ se comporta, métricamente hablando, como si fuera inercial. Una partícula "libre" debe pues describirse mediante la ecuación

$$\frac{d^2\xi^\mu}{d\sigma^2} = 0 . \tag{3.21}$$

Por otra parte, la ecuación de geodésicas (3.10) adquiere, bajo el punto de vista adoptado, un carácter dinámico; pudiendo obtenerse del principio variacional

$$\delta\int -m_0 c\, ds = \delta\int -m_0 c\sqrt{g_{\alpha\beta}\frac{d\xi^\alpha}{ds}\frac{d\xi^\beta}{ds}}\, ds = 0 , \tag{3.22}$$

$$A_\mu = \bar{J}^{\alpha}_{\ \mu} B_\alpha \ . \tag{3.17}$$

Consecuentemente, el tensor de Máxwell en $\{\xi\}$ viene definido por

$$F_{\mu\nu} = F_{[\mu\nu]} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu} \ , \tag{3.18}$$

que se obtiene también directamente de la ley de transformación para un tensor covariante de segundo orden

$$F_{\mu\nu} = \bar{J}^{\alpha}_{\ \mu} \bar{J}^{\beta}_{\ \nu} f_{\alpha\beta} \ . \tag{3.18a}$$

Por todo lo anterior, la ecuación (3.14) debe escribirse, en -- términos de $\{\xi\}$ como

$$\frac{d^2 \xi^\rho}{ds^2} + \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} \frac{d\xi^\mu}{ds} \frac{d\xi^\nu}{ds} = \tau_0 \ g^{\rho\sigma} F_{\sigma\mu} \frac{d\xi^\mu}{ds} \ . \tag{3.19}$$

Hay que subrayar que tanto las potenciales A_μ cuanto el tensor- de Máxwell $F_{\mu\nu}$ se encuentran aquí afectados por las propiedades no inerciales del sistema $\{\xi\}$ a través de los elementos del jacobiano

$$\bar{J}^{\alpha}_{\ \mu} = \bar{J}^{\alpha}_{\ \mu} (\xi ; \bar{a}) .$$

Una vez aceptado el postulado de covariancia general, los resultados obtenidos en esta sección permiten introducir la descripción geométrica riemanniana de métrica no integrable para la gravitación (ecs. (1.11) y (1.23)).

usando las definiciones

$$\gamma^{\rho\sigma} \equiv g^{\rho\sigma} - \delta_{\theta\lambda}\, g^{\theta\sigma} u^{\lambda} u^{\rho} \tag{3.26}$$

y

$$\left\langle {\rho \atop \mu\nu} \right\rangle \equiv \gamma^{\rho\sigma}[\mu\nu, \sigma] \,. \tag{3.27}$$

En vista de (3.21) y de la métrica usada, ahora el segundo término de (3.25) aparece como una perturbación al movimiento libre de la partícula, independiente de la masa que ésta tuviera. El observador en $\{\xi\}$ puede afirmar que éste se debe a la existencia de un campo con propiedades análogas a las del campo gravitacional que se anula, sin embargo, al pasar al sistema $\{x\}$ sin cambiar la forma de medir, esto es, formando a ds como el intervalo infinitesimal. A ese campo de fuerzas se le llama <u>campo inercial</u>.

Considérese ahora la ecuación de movimiento para partículas cargadas bajo la acción combinada de campos electromagnético e inercial. Una forma directa de trasladar tal ecuación al punto de vista de la métrica $\delta_{\mu\nu}$ es la de cambiar las derivaciones respecto de s por aquellas respecto de σ en (3.19). Con esto se obtiene

$$\frac{du^{\rho}}{d\sigma} + \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} u^{\mu} u^{\nu} - \tau_0 \left(\frac{ds}{d\sigma}\right) g^{\rho\sigma} F_{[\sigma\mu]}\, u^{\mu} = \grave{\lambda}\, u^{\mu} \,, \tag{3.28}$$

en donde $\grave{\lambda}$ está dada por (3.25a), como antes. Definiendo tomado respecto del parametro σ. Se sabe que (3.22) para cualquier otro parametro, digamos θ, conduce a las ecuaciones de Euler-Lagrange [6].

$$\frac{d^2\xi^\rho}{d\theta^2} + \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} \frac{d\xi^\mu}{d\theta}\frac{d\xi^\nu}{d\theta} = \frac{d^2 s/d\theta^2}{ds/d\theta}\frac{d\xi^\rho}{d\theta} , \tag{3.23}$$

entonces, haciendo $\theta = \sigma$, se tiene

$$\frac{du^\rho}{d\sigma} + \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} u^\mu u^\nu = \lambda u^\rho \tag{3.24}$$

en la cual

$$u^\mu = \frac{d\xi^\mu}{d\sigma}$$

$$\lambda = \frac{d^2 s/d\sigma^2}{ds/d\sigma} = \frac{d}{d\sigma} \ln \left(\frac{ds}{d\sigma} \right) ; \tag{3.25a}$$

pero, como consecuencia de (3.20), resulta claro que

$$\delta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 1$$

y

$$\delta_{\mu\nu} \frac{du^\mu}{d\sigma} u^\nu = 0$$

por lo que el escalar λ de (3.25a) puede obtenerse en términos de coordenadas y velocidades multiplicando (3.24) por u_ρ, esto es,

$$\lambda = \delta_{\rho\lambda} \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} u^\mu u^\nu u^\lambda , \tag{3.25b}$$

y (3.24) misma, en virtud de este resultado, se convierte en

$$\frac{du^\rho}{d\sigma} + \left\langle {\rho \atop \mu\nu} \right\rangle u^\mu u^\nu = 0 , \tag{3.25}$$

ejemplo, en éste último, las ecuaciones (3.21) tienen la forma de ecuaciones de geodésicas si se considera al elemento de arco $d\sigma$ como el invariante fundamental, siendo la nueva métrica

$$\bar{g}_{\alpha\beta}(x) = \delta_{\mu\nu} J^{\mu}{}_{\alpha} J^{\nu}{}_{\beta} \ . \tag{3.33}$$

En cambio, las mismas ecuaciones, tomadas respecto del elemento de arco ds resultan formalmente iguales a (3.25) y situaciones análogas caracterizarán al caso de partículas cargadas.

Por lo anterior, parecería que la distinción entre sistemas inerciales y no-inerciales desaparece o es cuestión de mera conveniencia. En el marco de la relatividad especial ese no es el caso. Mientras que en sistemas inerciales los rayos de luz describen trayectorias rectilíneas y se propagan con velocidad constante c, en sistemas no inerciales, por el contrario, bajo ninguna parametrización se puede lograr las dos condiciones simultáneamente; conclusión que se sigue, matemáticamente, del hecho de que no es posible conectar ambos tipos de sistema mediante transformaciones de Lorentz. Y tal vez fuera más apropiado adoptar esa diferencia como punto de partida para una definición adecuada de uno y otro sistemas de referencia.

4.- Dinámica para Campos Inerciales.

Empleando los resultados obtenidos, interesa ahora describir dinámicamente el movimiento de partículas sometidas a la acción de campos inerciales.

$$\tau \equiv \tau_0 \left(\frac{ds}{d\sigma}\right) = \tau_0 \sqrt{g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu} \;, \tag{3.29}$$

y con el mismo procedimiento que condujo a (3.25b), se encuen-- tra que

$$\dot{\lambda} = \delta_{\theta\lambda} \left\{ {\theta \atop \mu\nu} \right\} u^\mu u^\nu u^\lambda - \tau\, \delta_{\theta\lambda}\, g^{\theta\sigma} F_{\sigma\mu}\, u^\mu u^\lambda \;; \tag{3.30a}$$

consecuentemente, la ecuación (3.34) queda

$$\frac{du^\rho}{d\sigma} + \left\langle {\rho \atop \mu\nu} \right\rangle u^\mu u^\nu - \tau\, M^\rho{}_\mu\, u^\mu = 0 \;, \tag{3.30}$$

con las definiciones (3.26), (3.27) y

$$M^\rho{}_\mu \equiv \gamma^{\rho\sigma} F_{\sigma\mu} \tag{3.31}$$

El potencial electromagnético A_μ debe considerarse da do también por (3.17) pero escrita en la forma

$$A_\mu = \delta_{\alpha\beta}\, \bar{J}^\alpha{}_\mu\, B^\beta \tag{3.32}$$

y se puede definir al tensor de Máxwell directamente usando de- rivadas ordinarias:

$$F_{\sigma\mu} = A_{\mu,\sigma} - A_{\sigma,\mu} \,.$$

Hay que observar que la situación es completamente si métrica para la descripción de $\{\xi\}$ en términos de $\{x\}$. Por --

representando a la "fuerza inercial".

Por otra parte, poniendo (3.37) en (3.36a) y comparando el resultado con (3.25a) se ve que

$$\frac{d(mc)}{d\sigma} = -mc \frac{d}{d\sigma} \ln\left(\frac{ds}{d\sigma}\right),$$

esto es,

$$\frac{d}{d\sigma}\left[\ln\left(mc \frac{ds}{d\sigma}\right)\right] = 0$$

por tanto,

$$\ln\left(mc \frac{ds}{d\sigma}\right) = \text{constante} \quad ;$$

y dado que en ausencia de aceleraciones $\{\xi\} = \{x\}$, o sea,- $ds = d\sigma$, siendo entonces $m_o c = mc$, se tiene que

$$\text{constante} = \ln(m_o c)$$

de donde

$$mc = \frac{m_o c}{\omega} \tag{3.38}$$

con

$$\omega \equiv \frac{ds}{d\sigma} = \sqrt{g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu}\,. \tag{3.39}$$

Resultados comparables a los de N. Rosen [8] y de iguales implicaciones.

Análogamente, para partículas cargadas, la ecuación - (3.36) proporciona la (3.30) si para la tetrafuerza se propone-

Sea la ecuación relativista de Newton

$$\frac{dP^\rho}{d\sigma} = K^\rho \tag{3.34}$$

en el sistema $\{\xi\}$, bajo la métrica $\delta_{\mu\nu}$ adoptada. Supondremos - que el tetramomento está definido, como es usual, por

$$P^\rho = mc\,u^\rho \quad ; \tag{3.35}$$

sin hacer suposiciones acerca de la constancia de la masa, - - (3.33) nos lleva a

$$\frac{d(mc)}{d\sigma} u^\rho + mc\,\frac{du^\rho}{d\sigma} = K^\rho ,$$

de la cual, la derivada de la cantidad mc se obtiene en función de las restantes multiplicando toda la ecuación por u_ρ :

$$\frac{d(mc)}{d\sigma} = K^\rho u_\rho = \delta_{\theta\lambda} K^\theta u^\lambda . \tag{3.35a}$$

Reemplazando (3.35a) en (3.34), la aceleración de la partícula- es

$$\frac{du^\rho}{d\sigma} = \frac{1}{mc}\left(K^\rho - \delta_{\theta\lambda} K^\theta u^\lambda u^\rho \right) . \tag{3.36}$$

La expresión analítica de la tetrafuerza que hay que emplear para que (3.36) sea la misma que (3.25) es pues

$$K^\rho = -mc \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} u^\mu u^\nu , \tag{3.37}$$

implica una transformación entre los dos conjuntos de variables $\{u^\mu\}$ y $\{v^\alpha\}$ dada por

$$u^\mu = S^\mu{}_\alpha v^\alpha , \tag{3.43}$$

con la condición

$$\delta_{\mu\nu} S^\mu{}_\alpha S^\nu{}_\beta = \delta_{\alpha\beta} . \tag{3.44}$$

la expresión:

$$K^{\rho} = -mc\, g^{\rho\sigma}\left([\mu\nu,\sigma]\, \mathcal{U}^{\mu}\mathcal{U}^{\nu} - \tau\, F_{\sigma\mu}\, \mathcal{U}^{\mu} \right) \tag{3.40}$$

con $\tau\ (\neq \tau_{\circ})$ dada por (3.29), como consecuencia de la modificación de la masa, (3.38), por el campo inercial.

5.- *Consideraciones Adicionales.*

Hay que advertir que la estructura construída en la sección anterior es válida únicamente en el marco de una covariancia de Lorentz. Bajo esta restricción la tetrafuerza (3.37) así como la (3.40), se comportan como vectores, igual que la aceleración; así, el observador no inercial puede afirmar que su sistema es inercial, pero que su espacio se encuentra afectado por un campo de fuerzas (inercial).

Por otra parte, es interesante apuntar que las velocidades medidas en los sistemas $\{x\}$ y $\{\xi\}$ están relacionadas por transformaciones de tipo Lorentz. En efecto, si (3.5) y (3.20) se escriben como

$$\delta_{\mu\nu}\, \mathcal{U}^{\mu}\mathcal{U}^{\nu} = 1 \quad ; \quad \delta_{\alpha\beta}\, v^{\alpha} v^{\beta} = 1 \tag{3.41}$$

siendo

$$\mathcal{U}^{\mu} = \frac{d\xi^{\mu}}{d\sigma} \quad ; \quad v^{\alpha} = \frac{dx^{\alpha}}{ds} \quad ,$$

la igualdad

$$\delta_{\mu\nu}\, \mathcal{U}^{\mu}\mathcal{U}^{\nu} = \delta_{\alpha\beta}\, v^{\alpha} v^{\beta} \tag{3.42}$$

CAPITULO IV

CAMPOS GRAVITACIONALES

1.- *Principio de Equivalencia.*

Se ha visto hasta este punto que los efectos físicos-no-inerciales se caractèrizan por dos propiedades:

(a) La de que su influencia dinámica es independiente de las cantidades específicas de las partículas de prueba.

(b) La de ser anulables en todo el espacio mediante un cambio de sistema de referencia -la transformación no inercial inversa-, esto es, satisfacen una condición de integrabilidad.

Los efectos gravitacionales, como propiedad fundamental de la materia, no satisfacen la condición de integrabilidad siendo, por tànto, imposible anularlos en todo el espacio sin importar el sistema a que estén referidos. En cambio, comparten con los anteriormente mencionados la propiedad (a); existiendo una estrecha semejanza en el comportamiento dinámico de las partículas sometidas a uno u otro efectos. Es ésta, esencialmente, la información contenida en el llamado principio de equivalencia que establece la igualdad de las masas inercial y gravitatoria; o bién, la posibilidad de neutralizar los efectos gravitacionales en un punto <u>dado</u> cualquiera del espacio haciendo uso de una transformación no inercial (3.1) adecuada.

Consecuentemente, en base al comportamiento conocido para partículas observadas desde sistemas no-inerciales, se puede ya definir un "tensor de campo gravitacional" no integrable, a diferencia del "tensor de campo inercial" (la matriz jacobiano) cuya integrabilidad está implícita en (3.38) o en

$$\bar{J}^{\alpha}_{\mu,\nu} - \bar{J}^{\alpha}_{\nu,\mu} = 0 ,$$

luego, usando ese tensor de campo gravitacional, en analogía con (3.7), introducir el "potencial gravitacional" con el cual se estaría en condiciones de definir la fuerza gravitatoria, si se aplica el principio de equivalencia así como se lo ha concebido, partiendo del supuesto de que para algún punto del espacio la ecuación (3.21) se satisface. Trasladando dicha ecuación al lenguaje del sistema y métrica inerciales se obtendrá un valor para la fuerza buscada en términos de expresiones semejantes a (3.25); el desarrollo posterior se seguirá automáticamente a raíz de que el procedimiento descrito es por principio practicable para cualquier otro punto del espacio.

2.- *Tensor y Potencial Gravitacionales.*

Sea un sistema inercial $\{x\}$ con métrica de Minkowski $\delta_{\alpha\beta}$. El elemento de arco es pues

$$ds^2 = \delta_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta \qquad (4.1)$$

Acéptese ahora que en un campo gravitacional está presente en el espacio referido a tal sistema. Para caracterizarlo, se intro-

Gracias a ese principio es factible la construcción - de la teoría matemática de la gravitación una vez conocida la - de sistemas no-inerciales, si se prescinde de la condición de - integrabilidad que identifica a estos últimos.

Pero se ha visto que hay cuando menos dos maneras de- describir matemáticamente los efectos no inerciales: una de - ellas geométrica y la otra dinámica, como campos de fuerzas a - los que se ha denominado campos inerciales.

La relatividad general toma el punto de vista de una- geometría con métrica no integrable; esto es, aquella cuyo tensor de Riemann - Christoffel no es nulo (Cap.I, Sec.2). El - - principio de equivalencia se integra en ella a través del de covariancia general según el cual las ecuaciones que describen leyes físicas son invariantes, esto es, no cambian de forma, bajo ninguna transformación perteneciente al grupo de transformaciones admisibles.

Por el contrario, desde el punto de vista de campos - inerciales -que es el que aquí se adoptará-, el principio de -- equivalencia es útil solamente en tanto que posibilita la postulación de una expresión formal para la fuerza gravitatoria. Una vez lograda esa información, los observadores no-inerciales, como en el caso electromagnético, no se consideran aptos para establecer leyes físicas; es decir, éstas, tal y como se encuentran formuladas en un sistema inercial, deben conservar su invariancia únicamente bajo transformaciones inerciales (covariancia de Lorentz).

$$h_{\mu\nu} = \delta_{\alpha\beta} H^{\alpha}{}_{\mu} H^{\beta}{}_{\nu} . \tag{4.2}$$

Luego,el objeto

$$G_{\mu\nu.\sigma} = \frac{1}{2} (h_{\mu\sigma,\nu} + h_{\sigma\nu,\mu} - h_{\mu\nu,\sigma}) \tag{4.3}$$

hace las veces de "tensor de Máxwell Gravitacional".

Por otra parte, (4.iv) permite introducir el tensor - gravitacional inverso $\bar{H}^{\rho}{}_{\alpha}$ tal que

$$\bar{H}^{\rho}{}_{\alpha} H^{\alpha}{}_{\mu} = \delta^{\rho}{}_{\mu} , \tag{4.4}$$

y construir con él un "potencial inverso" $k^{\rho\sigma}$ $(\neq h^{\rho\sigma})$,

$$k^{\rho\sigma} = \delta^{\alpha\beta} \bar{H}^{\rho}{}_{\alpha} \bar{H}^{\sigma}{}_{\beta} \tag{4.5}$$

que, obviamente, satisface

$$k^{\rho\sigma} h_{\mu\sigma} = \delta^{\rho}{}_{\mu} . \tag{4.5a}$$

Por tanto, si se escribe

$$\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} = k^{\rho\sigma} G_{\mu\nu.\sigma} \tag{4.6}$$

entonces la tetrafuerza gravitacional, lo mismo que en (3.36),- viene expresada como duce un tensor mixto $H^{\alpha}_{\ \mu}$ que satisface las siguientes propieda des:

(4.i) Sus componentes serán funciones analíticas de las -- coordenadas $x = \{x^0, \ldots, x^3\}$ y de ciertos parámetros -- $q = \{q^1, \ldots, q^k\}$ dando la dependencia del campo - con sus fuentes:

$$H^{\alpha}_{\ \mu} = H^{\alpha}_{\ \mu}(x; q)$$

(4.ii) Debe ser no integrable, esto es

$$H^{\alpha}_{\ \mu,\nu} - H^{\alpha}_{\ \nu,\mu} \neq 0$$

(4.iii) En ausencia de campo se reducirá al tensor de Krone cher, o bién,

$$\lim_{r \to \infty} H^{\alpha}_{\ \mu} = \delta^{\alpha}_{\ \mu} ,$$

donde r es la distancia desde las fuentes al punto -- considerado.

(4.iv) El tensor es no-singular:

$$\det(H^{\alpha}_{\ \mu}) \neq 0$$

Excepto por (4.ii) y (4.iii), este tensor recuerda a la matriz- del jacobiano para las transformaciones no-inerciales; enton- - ces, desde la perspectiva de un formalismo en lenguaje de campos de fuerzas, el desarrollo posterior debe seguir completamente - paralelo a lo establecido en la sección 3 del capítulo anterior.

Así, el potencial gravitacional se define, como en -- (3.7), mediante la relación ahora con las definiciones

$$\gamma^{\rho\sigma} \equiv k^{\rho\sigma} - \delta_{\theta\lambda} k^{\theta\sigma} u^{\lambda} u^{\rho} \tag{4.12a}$$

$$D^{\rho}_{\mu\nu} \equiv \gamma^{\rho\sigma} G_{\mu\nu.\sigma} \tag{4.12b}$$

Las mismas ecuaciones se deducen también del princi-- pio variacional

$$\delta \int \mathcal{L} \, ds = 0 \tag{4.13}$$

si se toma como función de Lagrange la cantidad

$$\mathcal{L} = - m_o c \, \omega_g = - m_o c \sqrt{h_{\mu\nu} u^{\mu} u^{\nu}} \; . \tag{4.13a}$$

Y se ve que (4.13) se puede escribir, tomando en cuenta (4.11)- bajo la forma

$$\delta \int - m c \, h_{\mu\nu} u^{\mu} \, d x^{\nu} = 0 \tag{4.13b}$$

que recuerda, en cierto sentido, a la integral que define la -- función acción de campo-partícula para el caso electromagnético:

$$\int \frac{e}{c} B_{\mu} \, d x^{\mu} \; .$$

El tensor (4.12a) está relacionado con el comporta- - miento de la masa, esto es, con su dependencia en las coordena- das y velocidades, la cual da lugar a los "términos de Rosen" - (3.25b) y que están contenidos en $\gamma^{\rho\sigma}$ a través de la defini- -

$$K^{\rho} = -mc\,\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\,u^{\mu}u^{\nu} \tag{4.7}$$

donde $u^{\mu} \equiv dx^{\mu}/ds$.

3.- *Ecuaciones de Movimiento*.

Igual que para campos inerciales, hay que sustituir - (4.7) en las ecuaciones covariantes de Newton

$$\frac{dP^{\rho}}{ds} = K^{\rho}, \tag{4.8}$$

en las que el tetravector momento debe ser

$$P^{\rho} = mc\,u^{\rho} \tag{4.9}$$

la masa, siguiendo en la misma línea de razonamientos, se considera variable y relacionada con la masa en ausencia de campo -- mediante

$$m = \frac{m_o}{\omega_g} \tag{4.10}$$

siendo

$$\omega_g \equiv \sqrt{h_{\mu\nu}\,u^{\mu}u^{\nu}}\,. \tag{4.11}$$

En consecuencia, las ecuaciones de movimiento para -- una partícula (de masa m_o en ausencia de campo) al encontrarse- urgida por la gravitación, tendrán una forma similar a (3.25),- o sea

$$\frac{du^{\rho}}{ds} + D^{\rho}_{\mu\nu}\,u^{\mu}u^{\nu} = 0\,, \tag{4.12}$$

Es natural tomar como proyector complementario al tensor

$$\Upsilon^{\rho}{}_{\kappa} \equiv u_{\kappa} u^{\rho},$$

puesto que para éste se tiene

$$\text{(d)} \qquad \Upsilon^{\rho}{}_{\kappa} \Upsilon^{\kappa}{}_{\sigma} = \Upsilon^{\rho}{}_{\sigma}$$

$$\text{(e)} \qquad \Upsilon^{\rho}{}_{\kappa} u^{\kappa} = u^{\rho}$$

$$\text{(f)} \qquad \Upsilon^{\rho}{}_{\kappa} a^{\kappa} = 0$$

e igualmente,

$$\text{(g)} \qquad \Delta^{\rho}{}_{\kappa} + \Upsilon^{\rho}{}_{\kappa} = \delta^{\rho}{}_{\kappa}$$

$$\text{(h)} \qquad \Delta^{\rho}{}_{\kappa} \Upsilon^{\kappa}{}_{\sigma} = 0,$$

como debía ser.

Por otra parte, debido a (4.12 e) y a la propiedad (c) del tensor $\Delta^{\rho}{}_{\kappa}$, la ecuación (4.12) se podría escribir tam-- bién bajo la forma

$$\Delta^{\rho}{}_{\kappa} \left(a^{\kappa} + \Gamma^{\kappa}{}_{\mu\nu} u^{\mu} u^{\nu} \right) = 0 \qquad (4.14)$$

En vista de la relación (3.26), es claro que hay una- ecuación similar a (4.14) para que la (3.25). De hecho, dado - el carácter tensorial de (4.12 d) y sus propiedades arriba des- critas, suponiendo que $\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\nu}$ se transforma como un auténtico -

ción (4.12 b). Nótese que este factor se puede reescribir en la forma

$$\gamma^{\rho\sigma} = k^{\kappa\sigma} (\delta^{\rho}{}_{\kappa} - u_{\kappa} u^{\rho}) \tag{4.12c}$$

por lo que

$$\det (\gamma^{\rho\sigma}) = 0 .$$

En función del tensor singular

$$\Delta^{\rho}{}_{\kappa} \equiv \delta^{\rho}{}_{\kappa} - u_{\kappa} u^{\rho} \tag{4.12d}$$

la cantidad (4.12 b) queda

$$D^{\rho}{}_{\mu\nu} \equiv \Delta^{\rho}{}_{\kappa} \Gamma^{\kappa}{}_{\mu\nu} \tag{4.12e}$$

Además, es fácil verificar que (4.12 d) tiene las propiedades de un proyector. En efecto, recordando que

$$u_{\mu} u^{\mu} = 1 \quad ; \quad a_{\mu} u^{\mu} = 0 \ ,$$

se tiene:

(a) $\quad \Delta^{\rho}{}_{\kappa} \Delta^{\kappa}{}_{\sigma} = \Delta^{\rho}{}_{\sigma}$

(b) $\quad \Delta^{\rho}{}_{\kappa} u^{\kappa} = 0$

(c) $\quad \Delta^{\rho}{}_{\kappa} a^{\kappa} = a^{\rho} .$

...

$$A_{\mu} = \delta_{\alpha\beta}\, H^{\alpha}{}_{\mu}\, B^{\beta} \qquad (4.15)$$

el potencial que da lugar al tensor de Máxwell

$$F_{\sigma\mu} = A_{\mu,\sigma} - A_{\sigma,\mu} \qquad (4.16)$$

y que aparece en las ecuaciones de movimiento

$$\frac{du^{\rho}}{ds} + D^{\rho}{}_{\mu\nu}\, u^{\mu} u^{\nu} - \tau\, M^{\rho}{}_{\mu}\, u^{\mu} = 0 \qquad (4.17)$$

donde, como en (3.30),

$$\tau = \tau_o\, \omega_g \quad ; \quad \tau_o = \frac{e}{m_o c^2} \qquad (4.17a)$$

y

$$M^{\rho}{}_{\mu} \equiv \gamma^{\rho\sigma}\, F_{\sigma\mu}\,. \qquad (4.17b)$$

la fuerza modificada que ha de sustituirse en (4.8) es ahora

$$K^{\rho} = -mc\, k^{\rho\sigma} \left(G_{\mu\nu.\sigma}\, u^{\mu} u^{\nu} - \tau\, F_{\sigma\mu}\, u^{\mu} \right) \qquad (4.18)$$

De estas relaciones se sigue que, efectivamente, la - fuerza electromagnética sufre el mismo ajuste que la gravitatoria y que el factor $\gamma^{\rho\sigma}$ juega el mismo papel que en (3.12), - como se esperaba; existiendo, además, una composición de las -- cantidades que caracterizan a los campos en (4.15).

tensor, por simple álgebra se encuentra que en un sistema no -- inercial (4.14) debe expresarse como

$$\overset{\backprime}{\Delta}{}^{\eta}{}_{\gamma}\left[\frac{d^2\xi^\gamma}{d\sigma^2}+\left(\left\{{\gamma \atop \alpha\beta}\right\}+\Gamma'^{\gamma}{}_{\alpha\beta}\right)\frac{d\xi^\alpha}{d\sigma}\frac{d\xi^\beta}{d\sigma}\right]=0$$

donde

$$\overset{\backprime}{\Delta}{}^{\eta}{}_{\gamma}=\delta^{\eta}{}_{\gamma}-\frac{d\xi_\gamma}{d\sigma}\frac{d\xi^\eta}{d\sigma}$$

y

$$\Gamma'^{\gamma}{}_{\alpha\beta}=J^{\gamma}{}_{\kappa}\,\bar{J}^{\mu}{}_{\alpha}\,\bar{J}^{\gamma}{}_{\beta}\,\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\nu}$$

($J^{\gamma}{}_{\kappa}$, etc. son los elementos del jacobiano de la transforma-- ción).

El principio de equivalencia adoptado exige que para- un punto determinado P_0 sea posible hacer

$$\frac{d^2\xi^\gamma}{d\sigma^2}=0\ ,$$

lo que en este caso se satisface siempre que

$$\left\{{\gamma \atop \alpha\beta}\right\}_{P_0}=-\left(\Gamma'^{\gamma}{}_{\alpha\beta}\right)_{P_0}$$

El formalismo desarrollado hasta este punto es, por tanto, con- sistente con tal principio de equivalencia.

4.- Interacciones.

Por ejemplo, si se ha de incluir también un campo - - electromagnético, caracterizado por un tetrapotencial B_α, por analogía con (3.32) debe ser

$$A_\mu=\delta_{\alpha\beta}\,H^{\alpha}{}_{\mu}\,B^{\beta} \tag{4.15}$$

CAPITULO V

FORMULACION PENTADIMENSIONAL

1.- El Espacio Dinámico.

Considérese un espacio seudo-euclideano pentadimensional M_5 con métrica

$$\delta_{AB} = \| \mathrm{Diag}\,(1, -1, -1, -1, -1) \| \, . \tag{5.1}$$

Sea un sistema $\{x\}$ de coordenadas al cual se refiere el espacio; en este sistema, el elemento de arco es

$$d\rho^2 = \delta_{AB}\, dx^A dx^B \tag{5.2}$$

(A, B = 0,...,4). Desde ahora se elige el sistema de tal manera que las cuatro primeras coordenadas corresponden a las del - espacio tetradimensional llano de Minkowski, en tanto que la -- quinta coordenada, x^4, se define mediante la expresión

$$W = \int_1^2 \alpha_0 \, dx^4 \, , \tag{5.3}$$

esto es, tal que su diferencial, multiplicada por la constante- $\alpha_0 = -m_0 c$, e integrada entre dos puntos dados, proporcione la acción para el movimiento de una partícula bajo determinadas condiciones. Así, si se toma cualquier otro parámetro θ para - evaluar (5.3), entonces la "lagrangiana"

No obstante, esta manera de introducir el campo electromagnético en la teoría no deja de ser artificial. Sobre todo tomando en cuenta que el principio de equivalencia no comtempla características ajenas a los campos inercial y gravitacional y, por el contrario, las aísla. Las ecuaciones (4.18), en este sentido, deben verse como una simple extensión de las (4.12) con el caso no-inercial como modelo; de hecho, esa extensión no es tan obvia como desde el punto de vista de las ecuaciones obtenidas pudiera parecer: así, mientras que en el contexto de sistemas no-inerciales la magnitud

$$S_{\alpha\beta} B^{\alpha} B^{\beta}$$

no tiene ningún significado, pues

$$\varphi(\xi) = g^{\mu\nu} A_{\mu} A_{\nu} ,$$

en el caso presente adquiere una existencia independiente de las relaciones ya establecidas, puesto que (4.15) no excluye a los potenciales electromagnéticos "puros", como lo hace (3.32).

Conviene, por lo que antecede, investigar la posibilidad de sentar ecuaciones de movimiento comunes para los campos electromagnético y gravitacional partiendo de otro formalismo, una vez que se conocen las propiedades y entes matemáticos que los caracterizan por separado. El siguiente capítulo está dedicado a esa cuestión.

jeto matemático al que se dará el nombre de "tensor de campos".

2.- El Tensor de Campos.

Como en el anterior capítulo, se introduce aquí un -- tensor $H^A{}_M$ cuyas componentes sean funciones analíticas de las coordenadas y de cierto conjunto de parámetros $\{q\}$, conteniendo todas las propiedades del sistema campos-partícula y bajo las condiciones:

(5.i) $H^A{}_M$ no es función explícita de la quinta coordenada:

$$H^A{}_M = H^A{}_M(x, q) \neq H^A{}_M(x^4) .$$

(5.ii) Lejos de las fuentes se tiene

$$\lim_{r \to \infty} H^A{}_M = \delta^A{}_M$$

(5.iii) $H^A{}_M$ es no-singular :

$$det(H^A{}_M) \neq 0 .$$

(5.iv) El potencial formado con el tensor de campos,

$$b_{MN} = \delta_{AB} H^A{}_M H^B{}_N , \tag{5.7}$$

Satisface la forma cuadrática diferencial de valor cero:

$$b_{MN}\, dx^M dx^N = 0 . \tag{.58}$$

$$\mathcal{L} \doteq \alpha_o \frac{dx^4}{d\theta}, \tag{5.4}$$

satisfará las ecuaciones

$$\frac{d}{d\theta}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\nu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\nu} = 0 \tag{5.5}$$

en las que $\dot{x}^\nu \equiv dx^\nu/d\theta$.

De acuerdo con lo anterior, puesto que

$$\delta_{\alpha 4} = \delta_{4\alpha} = 0,$$

es

$$\begin{aligned} d\rho^2 &= \delta_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta + \delta_{44}\,(dx^4)^2 \\ &= ds^2 - (dx^4)^2, \end{aligned}$$

$(\alpha,\beta = 0,\ldots,3)$ y (5.3) se transforma en

$$W = \int_s \alpha_o \sqrt{1-\beta^2}\, ds, \tag{5.6}$$

donde

$$\beta^2 = \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2 \tag{5.6a}$$

Se supone, además, que las líneas-mundo de las partículas materiales en este espacio dinámico están determinadas por la naturaleza de los campos de fuerzas a que están sometidas y que éstos se pueden caracterizar a travéz de un solo ob

$$H^{A}{}_{M} = \left(\begin{array}{c|c} H^{\alpha}{}_{\mu} & 0 \\ \hline \tau_o A_{\mu} & 1 \end{array}\right) \tag{5.9}$$

y

$$H^{A}{}_{M} = \left(\begin{array}{c|c} H^{\alpha}{}_{\mu} & \tau_o B^{\alpha} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) , \tag{5.10}$$

en éstas, tanto A_{μ} como B^{α} representan componentes electromagnéticas, H^{α}_{μ} es el tensor de campo gravitacional y $\tau_o = e/m_o c^2$ como antes.

La elección de una u otra estructuras, conectada con los supuestos establecidos en la sección previamente expuesta - conducen, como se verá, a dos tipos diferentes de ecuaciones de movimiento para la partícula material cargada y urgida por los campos mencionados.

Por el momento, conviene, ante todo, determinar el potencial b_{MN} para cada caso.

Desarrollando (5.7) se tiene

$$b_{\mu\nu} = \delta_{\alpha\beta} H^{\alpha}_{\mu} H^{\beta}_{\nu} + \delta_{44} H^{4}_{\mu} H^{4}_{\nu} \tag{5.11a}$$

$$b_{\mu 4} = b_{4\mu} = \delta_{\alpha\beta} H^{\alpha}_{\mu} H^{\beta}_{4} + \delta_{44} H^{4}_{\mu} H^{4}_{4} \tag{5.11b}$$

$$b_{44} = \delta_{\alpha\beta} H^{\alpha}_{4} H^{\beta}_{4} + \delta_{44} H^{4}_{4} H^{4}_{4} \tag{5.11c}$$

$(\delta_{\alpha 4} = \delta_{4\alpha} = 0)$, ,de manera que el potencial formado con el

Existen, además, consideraciones obvias que permiten decidir acerca de su estructura. A nivel de teoría clásica de campos, hay que restringir la información que $H^{A}{}_{M}$ puede proporcionar, a dos tipos de campo únicamente: el electromagnético y el gravitacional. Por ende, todas las características de éstos se reflejarán en la forma de $H^{A}{}_{M}$; ellas son

(a) De acuerdo a lo estudiado anteriormente, el campo electromagnético está descrito básicamente por un vector, mientras que el gravitacional lo está a través de un tensor.

(b) El hecho de que ni la carga ni la masa de las partículas de prueba intervienen en las ecuaciones de movimiento para la gravitación, cosa que no ocurre con el electromagnetismo. El tensor $H^{A}{}_{M}$, consecuentemente, debe incluir un parámetro relacionado con las especificaciones de la partícula de prueba allá donde aparezcan las componentes electromagnéticas.

(c) Para la partícula libre (o a grandes distancias de las fuentes, como ya se dijo), las componentes electromagnéticas se hacen cero; las gravitacionales se identifican con el tensor unidad según (4.ii), y por consecuencia:

$$H_{\bullet}{}^{A}{}_{M} = \delta^{A}{}_{M}$$

Es posible proponer al menos dos formas apropiadas para el tensor de campos satisfaciendo esos tres requisitos:

$$h_{\mu\nu} = \delta_{\alpha\beta} H^{\alpha}_{\mu} H^{\beta}_{\nu} \quad , \tag{5.17a}$$

$$A_{\mu} = \delta_{\alpha\beta} H^{\alpha}_{\mu} B^{\beta} \quad , \tag{5.14b}$$

$$\varphi = \delta_{\alpha\beta} B^{\alpha} B^{\beta} \quad . \tag{5.14c}$$

Hay que notar que mientras en (5.12) los campos aparecen separados uno de otro, en (5.13) existe la composición vista ya en capítulos anteriores. De hecho, aunque se ha usado la misma notación en ambas situaciones, debe subrayarse que las cantidades a que representan, especialmente en lo que toca a los potenciales electromagnéticos A_{μ} , no son de ninguna manera iguales.

3.- Ecuaciones de Movimiento Generalizadas de Viniegra.

El problema de deducir las ecuaciones de movimiento, se reduce al de encontrar la funcionalidad y parametrización adecuadas para hacer uso explícito de (5.3). Aunque este proceso puede lograrse de modo general, para los fines que aquí se persiguen conviene aplicar directamente las estructuras propuestas para el tensor de campos.

Así, desarrollando (5.7), se tiene

$$b_{44} (dx^4)^2 + b_{\mu 4} \, dx^{\mu} dx^4 + b_{\mu\nu} \, dx^{\mu} dx^{\nu} = 0 \quad ; \tag{5.15}$$

en ésta, se sustituye las componentes b_{MN} correspondientes para (5.13), obteniéndose:

tensor de campos (5.9) tiene por componentes,

$$b_{\mu\nu} = \delta_{\alpha\beta} H^{\alpha}{}_{\mu} H^{\beta}{}_{\nu} - \tau_0^2 A_{\mu} A_{\nu} \tag{5.12a}$$

$$b_{\mu 4} = -\tau_0 A_{\mu} \tag{5.12b}$$

$$b_{44} = -1 \tag{5.12c}$$

o sea (véase (1.29)),

$$b_{MN} = \left(\begin{array}{c|c} h_{\mu\nu} - \tau_0^2 A_{\mu} A_{\nu} & -\tau_0 A_{\nu} \\ \hline -\tau_0 A_{\mu} & -1 \end{array} \right) \tag{5.12}$$

Por el contrario, poniendo (5.10) en los desarrollos (5.11), re sultan (véase (2.15) y (1.30)):

$$b_{\mu\nu} = \delta_{\alpha\beta} H^{\alpha}{}_{\mu} H^{\beta}{}_{\nu} \tag{5.13a}$$

$$b_{\mu 4} = \tau_0 \delta_{\alpha\beta} H^{\alpha}{}_{\mu} B^{\beta} \tag{5.13b}$$

$$b_{44} = \tau_0^2 \delta_{\alpha\beta} B^{\alpha} B^{\beta} - 1 \tag{5.13c}$$

que se resumen en

$$b_{MN} = \left(\begin{array}{c|c} h_{\mu\nu} & \tau_0 A_{\nu} \\ \hline \tau_0 A_{\mu} & \tau_0^2 \varphi - 1 \end{array} \right) \tag{5.13}$$

con las definiciones explícitas ya conocidas:

$$F_{[\sigma\alpha]} \equiv A_{\alpha,\sigma} - A_{\sigma,\alpha} \quad ; \tag{5.17c}$$

que coinciden con las (2.8 a-c), en tanto que las (5.17) corresponden a las (2.8) obtenidas por Viniegra, exceptuando en lo que respecta al parámetro $d\omega$ $(\neq ds)$, discrepancia que se origina en el hecho de haberse levantado toda condición de localidad para el actual tratamiento.

Las relaciones correspondientes a la parametrización respecto del elemento de arco ds, se obtienen simplemente efectuando un cambio en las derivaciones totales de (5.17) y eliminando los términos residuales aprovechando la normalidad de las velocidades y ortogonalidad de éstas con las aceleraciones, lo que da

$$a^{\mu} + D^{\mu}{}_{\alpha\beta}\, u^{\alpha} u^{\beta} - \tau\, M^{\mu}{}_{\alpha}\, u^{\alpha} - \frac{\tau^2}{2}\, \Phi^{\cdot\mu} = 0 \; ; \tag{5.18}$$

en donde, como era de esperar,

$$\gamma^{\mu\sigma} = k^{\rho\sigma} \Delta^{\mu}{}_{\rho} \tag{5.18a}$$

$$D^{\mu}{}_{\alpha\beta} = \gamma^{\mu\sigma} G_{\alpha\beta.\sigma} \tag{5.18b}$$

$$M^{\mu}{}_{\alpha} = \gamma^{\mu\sigma} F_{\sigma\alpha} \tag{5.18c}$$

$$\Phi^{\cdot\mu} \equiv \gamma^{\mu\sigma} \varphi_{,\sigma} \tag{5.18d}$$

y también

$$(\tau_o^2 \varphi - 1)(dx^4)^2 + 2\tau_o A_\mu dx^\mu dx^4 + h_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0 ,$$

que también, se puede escribir como

$$dx^4 = [h_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + 2\tau_o dx^\mu dx^4 + \tau_o^2 \varphi (dx^4)^2]^{1/2} . \qquad (5.15a)$$

Sustituida esta expresión en (5.3), conduce a la función de Lagrange

$$\mathcal{L} = -m_o c \left(h_{\mu\nu} U^\mu U^\nu + 2\tau_o A_\mu U^\mu + \tau_o^2 \varphi \right)^{1/2} , \qquad (5.16)$$

en la cual el factor radical tiene valor numérico igual a la unidad y $U^\mu \equiv dx^\mu / dx^4$

Haciendo

$$dx^4 \equiv dw$$

las ecuaciones (5.5) de Lagrange:

$$\frac{d}{dw} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U^\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha} = 0$$

proporcionan entonces:

$$\frac{dU^\mu}{dw} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} U^\alpha U^\beta - \tau_o k^{\mu\sigma} F_{[\sigma\alpha]} U^\alpha - \frac{\tau_o^2}{2} k^{\mu\sigma} \varphi_{,\sigma} = 0 \qquad (5.17)$$

para las ecuaciones de movimiento; en ellas se ha definido

$$k^{\mu\sigma} \ni k^{\mu\sigma} h_{\nu\sigma} = \delta^\mu{}_\nu , \qquad (5.17a)$$

$$\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2} k^{\mu\sigma} (h_{\alpha\sigma,\beta} + h_{\sigma\beta,\alpha} - h_{\alpha\beta,\sigma}) , \qquad (5.17b)$$

nes de Viniegra conducen a ecuaciones de tipo "ordinario".

4.- *Ecuaciones Ordinarias de Movimiento.*

Si ahora se introduce la estructura (5.12) de poten--cial pentadimensional en la expresión

$$dx^4 = \frac{1}{-b_{44}} \left\{ \pm \left[(b_{\mu 4} b_{\nu 4} - b_{44} b_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu \right]^{1/2} + b_{\mu 4} dx^\mu \right\} \qquad (5.20)$$

que es la solución de la ecuación cuadrática (5.15):

$$b_{44} (dx^4)^2 + 2 b_{\mu 4} dx^\mu dx^4 + b_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0 ,$$

lo que resulta es

$$dx^4 = \varepsilon (h_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu)^{1/2} + \tau_0 A_\mu dx^\mu \qquad (5.21)$$

$(\varepsilon = \pm 1)$. La parametrización que introduce mayor sencillez - en las ecuaciones de movimiento es, naturalmente, aquella basada en

$$d\sigma^2 = h_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu ; \qquad (5.22)$$

entonces, el principio variacional para la acción definida en - (5.3) es formalmente igual al que se utilizó en (1.24), es decir,

$$\delta \int -m_0 c \left(1 + \tau_0 A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} \right) d\sigma = 0 , \qquad (5.23)$$

y las ecuaciones de movimiento resultantes se escriben, por con

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{ds} = \frac{d^2x^\mu}{ds^2} \quad ,$$

$$G_{\alpha\beta.\sigma} = \frac{1}{2}\left(h_{\alpha\sigma,\beta} + h_{\sigma\beta,\alpha} - h_{\alpha\beta,\sigma} \right) \tag{5.18e}$$

$$\tau = \tau_0 \frac{dw}{ds} = \tau_0 \sqrt{1-\beta^2} \ . \tag{5.18f}$$

La última igualdad se sigue de la comparación de (5.3) y (5.6); de ésta, se ve que la dependencia de masas y cargas respecto de sus valores en ausencia de campos, de coordenadas y velocidades es bastante más complicada que la que se tenía, por ejemplo, en (4.17a).

Si se resuelve (5.15a) para dx^4, se tiene

$$dx^4 = \frac{1}{-(1-\tau_0^2\varphi)} \left\{ \varepsilon \left[\left\{ (1-\tau_0^2\varphi) h_{\mu\nu} + \tau_0^2 A_\mu A_\nu \right\} dx^\mu dx^\nu \right]^{1/2} - \tau_0 A_\mu dx^\mu \right\},$$

de donde, en el caso de campos débiles, despreciando los términos cuadráticos en τ_0, resulta

$$dx^4 = \left(h_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \right)^{1/2} + \tau_0 A_\mu dx^\mu$$

y de ahí, las ecuaciones (5.17) se transforman en

$$\frac{dv^\mu}{d\sigma} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta - \tau_0 F^\mu{}_\alpha v^\alpha = 0 \tag{5.19}$$

con

$$d\sigma^2 \equiv h_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

y

$$F^\mu{}_\alpha \equiv k^{\mu\sigma} F_{\sigma\alpha} \ .$$

En este caso, y por las mismas razones, las ecuacio-

Naturalmente, tratándose de un formalismo en espacio-plano, hay que suponer que en (5.9) y (5.12) es

$$A_\mu = B_\mu \;;$$

aquí los campos actúan, pues, por separado sin más interacción que (5.23b) ó (4.17b), las cuales ahora se deben escribir

$$F^\mu{}_\alpha \equiv k^{\mu\sigma} f_{\sigma\alpha} \qquad (5.25a)$$

y

$$M^\rho{}_\mu \equiv \gamma^{\rho\sigma} f_{\sigma\alpha} \;, \qquad (5.25b)$$

respectivamente.

Sólo la aplicación de estas ecuaciones a la resolución de problemas concretos y bajo el respaldo de experimentación podrían determinar el grado de validéz que cada una de ellas posee.

Por su naturaleza formal, en las aproximaciones que habitualmente se toman (y en ausencia de carga o campo electromagnético), es claro que todas conducirán más o menos a los mismos resultados y predicciones que actualmente se conocen para los fenómenos gravitacionales en la relatividad general.

5.- *La Partícula Libre.*

En ausencia de campos, es decir, muy lejos de toda densidad de materia, la partícula de prueba debe considerarse libre de toda fuerza externa. En esas condiciones, el postulaveniencia, en la forma:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\sigma^2} + \left\{ {\mu \atop \alpha\beta} \right\} \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \frac{dx^\beta}{d\sigma} - \tau_0 F^\mu{}_\alpha \frac{dx^\alpha}{d\sigma} = 0 \tag{5.24}$$

con

$$\left\{ {\mu \atop \alpha\beta} \right\} \equiv k^{\mu\sigma} \frac{1}{2} (h_{\alpha\sigma,\beta} + h_{\sigma\beta,\alpha} - h_{\alpha\beta,\sigma}) \tag{5.24a}$$

y

$$F^\mu{}_\alpha \equiv k^{\mu\sigma} F_{\sigma\alpha} , \tag{5.24b}$$

(tomando $\varepsilon = 1$), relaciones que son fácilmente identificables a las (1.25) si se toma el punto de vista geométrico; lo que aquí podría hacerse si se considerara a δ_{AB} como métrica de signatura y a $H^A{}_M$ como una tétrada en el lenguaje de formas diferenciales; readoptando, además, el principio de covariancia general. Los potenciales electromagnéticos caerían bajo la misma categoría que en la teoría de Kaluza.

Regresando, sin embargo, a nuestros postulados para la parametrización seudoeuclideana basada en la longitud del arco, s, el mismo principio variacional (5.22) a través de las ecuaciones de Euler-Lagrange, como en el capítulo III, conduce a ecuaciones del tipo (4.17)

$$a^\mu + D^\mu{}_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta - \tau M^\mu{}_\alpha u^\alpha = 0 \tag{5.25}$$

con las definiciones (4.12a), (4.12b), (4.17a) y (4.17b).

Es interesante comparar (5.27) con (5.6); de ahí se infiere que

$$\beta = \frac{d\rho}{ds} = 0 ,$$

luego, para partícula libre,

$$d\rho = 0 . \tag{5.30}$$

En el espacio dinámico, por lo tanto, únicamente la partícula libre se mueve sobre el cono pentadimensional (5.25) o "cono de existencia" y lo hace describiendo trayectorias rectilíneas.

do (5.ii) exige que el tensor de campos coincida con la delta de Kronecker $\delta^{A}{}_{M}$; por la tanto, el potencial pantadimensional (5.7) resulta simplemente

$$b_{MN} = \delta_{MN} .$$

Puestos esos valores en (5.8) del postulado (5.iv), se tiene

$$\delta_{MN}\, dx^{M} dx^{N} = 0 \tag{5.26a}$$

o sea

$$\delta_{\mu\nu}\, dx^{\mu} dx^{\nu} - (dx^{4})^{2} = 0$$

por lo que

$$dx^{4} = ds \tag{5.26b}$$

y la integral de acción (5.3) se escribe

$$W = \int_{1}^{2} -m_{o} c \; ds \tag{5.27}$$

El principio variacional

$$\delta W = 0$$

conduce, así, a la ecuación de movimiento

$$\frac{du^{\mu}}{ds} = 0 , \tag{5.29}$$

como debía ser.

CAPITULO VI

FORMALISMO HAMILTONIANO

1.- Formalismo Hamiltoniano para las Ecuaciones de Viniegra.

Para concluir el tratamiento desarrollado, interesa en este punto establecer una función de tipo Hámilton que conduzca a los mismos resultados que se obtuvieron empleando otros métodos. Esto se puede lograr en la forma convencional aplicando la definición.

$$\mathcal{H} = \mathcal{P}_\nu \dot{x}^\nu - \mathcal{L} , \tag{6.1}$$

que constituye una transformación de Legendre donde donde $\mathcal{H}$ la hamiltoniana buscada, $\dot{x}^\nu$ las "velocidades" tomadas respecto de cierto parámetro $(\dot{x}^\nu = dx^\nu / d\theta)$; $\mathcal{L}$ es la función de Lagrange y y $\mathcal{P}_\nu$ los momentos generalizados, que se definen mediante

$$\mathcal{P}_\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \tag{6.2}$$

Una vez encontrada $\mathcal{H}$, las ecuaciones de Hamilton

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathcal{P}_\mu} = \dot{x}^\mu \tag{6.3a}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^\mu} = -\dot{\mathcal{P}}_\mu \tag{6.3b}$$

proporcionarán las de movimiento. Además, mediante una transexpresión soluble para las velocidades, si se emplea (5.17a), -dando

$$v^{\alpha} = k^{\mu\alpha}\left(-\frac{1}{m_o c}\mathcal{P}_{\mu} - \tau_o A_{\mu}\right) \; ; \tag{6.6a}$$

en términos de ésta, la langrangiana es

$$\mathcal{L} = -m_o c \left[\frac{1}{m_o^2 c^2} k^{\mu\nu}\mathcal{P}_{\mu}\mathcal{P}_{\nu} - \tau_o^2 k^{\mu\nu}A_{\mu}A_{\nu} + \tau_o^2 \varphi\right]^{1/2}. \tag{6.7}$$

Pero, de (4.5) y (5.14b), las cantidades

$$k^{\mu\nu} = \delta^{\gamma\eta}\bar{H}^{\mu}{}_{\gamma}\bar{H}^{\nu}{}_{\eta}$$

y

$$A_{\mu} = \delta_{\varepsilon\alpha} H^{\varepsilon}{}_{\mu} B^{\alpha}$$

implican, por (4.4), que

$$\varphi = \delta_{\alpha\beta} B^{\alpha} B^{\beta} = k^{\mu\nu} A_{\mu} A_{\nu} \tag{6.7b}$$

y, por lo tanto, (6.7) se reduce a

$$\mathcal{L} = -m_o c \left(\frac{1}{m_o^2 c^2} k^{\mu\nu}\mathcal{P}_{\mu}\mathcal{P}_{\nu}\right)^{1/2}. \tag{6.8}$$

además, por la forma en que fué construída (6.15), se sabe que -tiene valor constante:

$$\mathcal{L} = -m_o c \frac{dx^4}{dx^4} = -m_o c \; ,$$

luego en (6.8) es

$$\left(\frac{1}{m_o^2 c^2} k^{\mu\nu}\mathcal{P}_{\mu}\mathcal{P}_{\nu}\right)^{1/2} = 1 \tag{6.9}$$

Sustituyendo (6.6a) y (6.8) en (6.1) resulta formación de contacto se puede conseguir otra función de Hamilton de valor cero, dada según

$$\mathcal{K} = \mathcal{H} + \frac{\partial S}{\partial \theta} = 0 \tag{6.4a}$$

donde S es la llamada "función principal de Hamilton". El problema de encontrar S consiste, entonces, en resolver la ecuación fundamental de Hamilton-Jacobi:

$$\mathcal{H}\left(\frac{\partial S}{\partial x} ; x \right) + \frac{\partial S}{\partial \theta} = 0 , \tag{6.4}$$

en la que los momentos generalizados han sido reemplazados por sus equivalentes en términos de S:

$$P_\mu = \frac{\partial S}{\partial x^\mu} . \tag{6.4b}$$

Las coordenadas que aparezcan en la hamiltoniana $\mathcal{K}$ de (6.4a) serán todas cíclicas.

Considérese, así, la función (5.16)

$$\mathcal{L} = -m_0 c \left(h_{\alpha\beta} U^\alpha U^\beta + 2\tau_0 A_\alpha U^\alpha + \tau_0^2 \varphi \right)^{1/2} \tag{6.5}$$

de la que se siguieron las ecuaciones generalizadas (5.17) de Viniegra. Los momentos generalizados son ahora según (6.2),

$$P_\nu = - m_0 c \left(h_{\alpha\nu} U^\alpha + \tau_0 A_\nu \right) , \tag{6.6}$$

($\pi_o = \{\pi_o^o, \ldots, \pi_3^o\}$ = constantes).

El formalismo análogo para las ecuaciones (5.18, así como para las "ordinarias" (6.24) y (5.25), puede manejarse desde una estructura formal común. La siguiente sección se dedica a establecerla.

2.- *Una Formulación Generalizada.*

Considérese la ecuación (5.20); de ella, a través de (5.4) se extraé la función de Lagrange

$$\mathcal{L} = \alpha_o \left\{ \varepsilon \left(t_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \right)^{1/2} + E_\alpha \dot{x}^\alpha \right\} \tag{6.13}$$

$\left(\dot{x}^\alpha = dx^\alpha / d\theta \right)$, con las definiciones

$$t_{\alpha\beta} \equiv \frac{b_{\alpha 4} b_{\beta 4} - b_{44} b_{\alpha\beta}}{(b_{44})^2} \tag{6.13a}$$

$$E_\alpha \equiv - \frac{b_{\alpha 4}}{b_{44}} . \tag{6.13b}$$

Los momentos generalizados (6.2) son pues

$$P_\nu = \alpha_o \left(\frac{\varepsilon}{\Lambda} t_{\alpha\nu} \dot{x}^\alpha + E_\nu \right) \tag{6.14}$$

donde

$$\Lambda = \left(t_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \right)^{1/2} . \tag{6.14a}$$

Resolviendo (6.14) para $\dot{x}^\alpha$, se tiene

$$\mathcal{H} = m_o c \left\{ \left(\frac{1}{m_o^2 c^2} k^{\mu\nu} \mathcal{P}_\mu \mathcal{P}_\nu \right)^{1/2} + \frac{\tau_o}{m_o c} k^{\mu\nu} \mathcal{P}_\mu A_\nu - \frac{1}{m_o^2 c^2} k^{\mu\nu} \mathcal{P}_\mu \mathcal{P}_\nu \right\},$$

la cual, teniendo en cuenta (6.9), se puede escribir finalmente en la forma

$$\mathcal{H} = m_o c \left\{ \frac{1}{2 m_o^2 c^2} k^{\mu\nu} \mathcal{P}_\mu \mathcal{P}_\nu + \frac{\tau_o}{m_o c} k^{\mu\nu} \mathcal{P}_\mu A_\nu - \frac{1}{2} \right\} \qquad (6.10)$$

Y es fácil comprobar que las ecuaciones de Hámilton (6.3) para esta función reproducen las ecuaciones (5.17).

Cuando una hamiltoniana no depende explícitamente del parámetro independiente (en nuestro caso θ), la relación de tipo general

$$\frac{d\mathcal{H}}{d\theta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} ,$$

asegura que su valor es constante. Por ello, (6.10) debe satisfacer también la igualdad

$$\mathcal{H} = cte. = \varepsilon_o \qquad (6.10a)$$

Como consecuencia, la ecuación de Hamilton-Jacobi que caracteriza al problema es

$$k^{\mu\nu} \left(\frac{\partial S_o}{\partial x^\mu} \frac{\partial S_o}{\partial x^\nu} + 2\tau_o m_o c \frac{\partial S_o}{\partial x^\mu} A_\nu \right) - (1 + 2\varepsilon_o) m_o^2 c^2 = 0, \qquad (6.11)$$

en donde S_o es la función característica de Jacobi; relacionada con la función principal de Hámilton, S , mediante

$$S = S_o(x, \pi_o) + \varepsilon_o x^4 \qquad (6.12)$$

de, dado ya su valor, es evidentemente

$$\bar{t}^{\mu\nu}\left(\frac{\partial S}{\partial x^{\mu}} - \alpha_{o} E_{\mu}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial x^{\nu}} - \alpha_{o} E_{\nu}\right) - \alpha_{o}^{2} = 0\,, \tag{6.19}$$

completando la formulación. Como se verá, de ésta se siguen varios casos de interés usando las formas propuestas del tensor de campos en (5.9) y (5.10).

3.- *Ecuaciones de Viniegra parametrizadas respecto de la longitud de arco.*

Aunque el procedimiento algebraico es más complicado, puede comprobarse por cálculo directo que las ecuaciones (6.3) aplicadas a (6.18) conducen a las ecuaciones de movimiento (5.18) si se emplean las definiciones (6.13) en términos del potencial pentadimensional (5.13), esto es,

$$t_{\alpha\beta} \equiv \frac{(1-\tau_{o}^{2}\varphi)h_{\alpha\beta} + \tau_{o}^{2} A_{\alpha} A_{\beta}}{(1-\tau_{o}^{2}\varphi)^{2}} \tag{6.20a}$$

$$E_{\alpha} \equiv \tau_{o} \frac{A_{\alpha}}{(1-\tau_{o}^{2}\varphi)} \tag{6.20b}$$

Consecuentemente, la ecuación de Hamilton-Jacobi para este caso es también (6.19) con $\alpha_{o} = -m_{o}c$. $\bar{t}^{\mu\nu}$ se puede, encontrar, en concordancia con (6.14c), haciendo

$$\bar{t}^{\mu\nu} = \left(\frac{\text{cofactor de } t_{\mu\nu}}{\det(t_{\mu\nu})}\right). \tag{6.21}$$

$t_{\mu\nu}$ dado por (6.20a).

$$\dot{x}^{\alpha} = \frac{\Lambda}{\varepsilon}\,\bar{t}^{\alpha\nu}\left(\frac{1}{\alpha_o}P_\nu - E_\nu\right) \qquad (6.14b)$$

siento $\bar{t}^{\alpha\nu}$ tal que

$$\bar{t}^{\alpha\nu}t_{\alpha\beta} = \delta^{\nu}{}_{\beta}\,. \qquad (6.14c)$$

La sustitución de (6.14b) en (6.13) proporciona la función

$$\mathcal{L} = \alpha_o\frac{\Lambda}{\varepsilon}\left\{\left[\bar{t}^{\mu\nu}\left(\frac{1}{\alpha_o}P_\mu - E_\mu\right)\left(\frac{1}{\alpha_o}P_\nu - E_\nu\right)\right]^{1/2} + \right.$$
$$\left. + \bar{t}^{\mu\nu}\left(\frac{1}{\alpha_o}P_\mu - E_\mu\right)E_\nu\right\} \qquad (6.15)$$

por lo que la hamiltoniana (6.1) es, para estas cantidades

$$\mathcal{H} = \frac{\alpha_o\Lambda}{\varepsilon}\left\{\bar{t}^{\mu\nu}\left(\frac{1}{\alpha_o}P_\mu - E_\mu\right)\left(\frac{1}{\alpha_o}P_\nu - E_\nu\right) - \right.$$
$$\left. - \left[\bar{t}^{\mu\nu}\left(\frac{1}{\alpha_o}P_\mu - E_\mu\right)\left(\frac{1}{\alpha_o}P_\nu - E_\nu\right)\right]^{1/2}\right\} \qquad (6.16)$$

Sin embargo, poniendo (6.14b) en (6.14a) resulta

$$\Lambda = \Lambda\left[\bar{t}^{\mu\nu}\left(\frac{1}{\alpha_o}P_\mu - E_\mu\right)\left(\frac{1}{\alpha_o}P_\nu - E_\nu\right)\right]^{1/2}$$

de donde se sigue que

$$\bar{t}^{\mu\nu}\left(\frac{1}{\alpha_o}P_\mu - E_\mu\right)\left(\frac{1}{\alpha_o}P_\nu - E_\nu\right) = 1\,; \qquad (6.17)$$

entonces la hamiltoniana (6.16) tiene valor cero, y puede representarse, en una forma más compacta, según

$$\mathcal{H} = -\frac{\alpha_o\Lambda}{2\varepsilon}\left\{\bar{t}^{\mu\nu}\left(\frac{1}{\alpha_o}P_\mu - E_\mu\right)\left(\frac{1}{\alpha_o}P_\nu - E_\nu\right) - 1\right\}. \qquad (6.18)$$

La ecuación de Hamilton-Jacobi que de ésta se despren

$$\mathcal{H}_2 = m_o c\, \omega_g \left\{ \left[k^{\mu\nu} \left(\frac{1}{m_o c} P_\mu + \tau_o A_\mu \right) \left(\frac{1}{m_o c} P_\nu + \tau_o A_\nu \right) \right] - 1 \right\} \quad (6.26)$$

Como es obvio, en ésta y en (6.23) se toma

$$\bar{t}^{\mu\nu} \equiv k^{\mu\nu}$$

La ecuación de Hamilton-Jacobi tiene exactamente la - misma forma que (6.24):

$$k^{\mu\nu} \left(\frac{\partial S_2}{\partial x^\mu} + \frac{e}{c} A_\mu \right) \left(\frac{\partial S_2}{\partial x^\nu} + \frac{e}{c} A_\nu \right) - m_o^2 c^2 = 0 , \quad (6.27)$$

terminando así la descripción hamiltoniana y, a la vez, la formulación propuesta a lo largo de esta tesis para ecuaciones de movimiento de partículas en presencia de campos clásicos.

4.- *Ecuaciones "Ordinarias"*

En cambio, para las ecuaciones (5.24), usando el potencial (5.12), las definiciones (6.13) devienen

$$t_{\alpha\beta} \equiv h_{\alpha\beta} \tag{6.22a}$$

$$E_{\alpha} \equiv \tau_{\circ} A_{\alpha} \tag{6.22b}$$

Con éstas y $\alpha_{\circ} = -m_{\circ}c$; $\Lambda = 1$; $\varepsilon = 1$, la función de Hamilton (6.18) se convierte en

$$\mathcal{H} = m_{\circ}c \left\{ \left[k^{\mu\nu} \left(\frac{1}{m_{\circ}c} P_{\mu} + \tau A_{\mu} \right) \left(\frac{1}{m_{\circ}c} P_{\nu} + \tau_{\circ} A_{\nu} \right) \right]^{1/2} - 1 \right\} \tag{6.23}$$

siendo τ el parámetro de derivación, definido en (522).

De aquí, la ecuación de Hamilton-Jacobi (6.19) resulta, teniendo en cuenta que $\tau_{\circ} m_{\circ} c = e/c$,

$$k^{\mu\nu} \left(\frac{\partial S_1}{\partial x^{\mu}} + \frac{e}{c} A_{\mu} \right) \left(\frac{\partial S_1}{\partial x^{\nu}} + \frac{e}{c} A_{\nu} \right) - m_{\circ}^2 c^2 = 0 \tag{6.24}$$

Análogamente, en la parametrización de acuerdo al arco s, las ecuaciones (5.25) resultan de la hamiltoniana (6.19) si se hace

$$\Lambda = \omega_g = \sqrt{h_{\alpha\beta} u^{\alpha} u^{\beta}} \tag{6.25}$$

y se adoptan las definiciones (6.22). Así

...

C O N C L U S I O N E S.

Dentro de los alcances del formalismo propuesto, se ha logrado reproducir las ecuaciones (2.8) de Viniegra partiendo de postulados alternativos, lo cual constituyó el objetivo principal de este trabajo.

El procedimiento que se siguió, del todo paralelo al originalmente empleado por F. Viniegra en lo que a las ideas fundamentales se refiere, ha permitido salvar las restricción de localidad en la teoría y, consecuentemente, evitar los fuertes postulados que le servían de base; resultado conveniente aún cuando conduce a la necesidad de reinterpretar las ecuaciones citadas y reemplazarlas, en último término, por sus equivalentes escritas por entero en lenguaje de sistemas inerciales con métrica de Minkowski. A pesar de ello, las características básicas de esta teoría se conservaron íntegramente; en especial, lo que concierne a la interacción explícita de los campos considerados.

El análisis de sistemas no-inerciales mostró que es posible tratar a sus efectos como fuerzas de un campo actuando sobre las partículas desde aquellos descritas, si se impone la métrica minkowskiana variando, en cambio, la longitud del elemento de arco. Se encuentra así un conjunto de relaciones (Lorentz invariantes), con cierta similitud a los resultados que N. Rosen obtuvo sin abandonar la relatividad general. Con el auxilio del principio de equivalencia, tal tratamiento permitió

B I B L I O G R A F I A

[1] Landau L. & Lifshitz E. "The Classical Theory of fields
Pergamon Press

[2] Bergman P. G. "Introduction to the theory of Relativity."
Prentice Hall, 1959.

[3] Sen D. K. "Fields and/or Particles"
Academic Press, 1968.

[4] Viniegra F. "Una nueva Teoría Clásica de Campos."
Tesis Doctoral. U. N. A. M.
México, 1970.

[5] Lifshitz E. "La Deflexión de Ondas Electromagnéticas Planas en Presencia de un Campo Gravitacional Central."
Tesis Profesional. U. N. A. M.
México, 1974.

[6] Sokoluikoff I. S. "Tensor Analisis"
John Wiley & Sons, 1958.

postular una formulación matemática para la gravitación, siempre dentro de los límites de la covariancia de Lorentz.

El formalismo pentadimensional propuesto, con la introducción de un espacio dinámico en el que la quinta coordenada se define en término de la integral de acción y de un tensor de campos conteniendo toda información a cerca del sistema campos-partícula, proporcionó, además de las ecuaciones buscadas, otras formalmente relacionables con las covariantes generales de Lorentz, mediante la proposición de formas estructurales específicas para el tensor de campos pentadimensional.

Por supuesto, no se pretende que todas las ecuaciones obtenidas formen parte integrante de la misma teoría. Aunque en el estado actual de ésta no existen, en realidad, argumentos decisivos para elegir preferentemente una u otra formas del tensor de campos, un desarrollo posterior que consiga determinarlo a partir del conocimiento de sus fuentes generatrices dentro de un esquema lógico y autoconsistente resolverá, sin duda, ese problema, conducirá a las ecuaciones de campo y cerrará a las con ello la teoría.

Es de esperar que, lograda semejante estructura, pueda reconsiderarse este trabajo exponerlo menos burdamente mediante el empleo de técnicas matemáticas adecuadas y fundamentarlo, teniéndose entonces un panorama más amplio, en forma clara y elegante.

7] Hill E. L. "On Accelerated Coordinate Systems in Clasical and Relativistic Mechanics."
Phys. Rev. 67.358 (1945)

8] Rosen N. "General Relativity and Flat Space II."
Phys. Rev. 57. 150 (1940).

***