

(1-61)

DESARROLLOS DE LA MATRIZ DE DISPERSION

TRABAJO DE TESIS QUE PRESENTA  
EL FIS: JOSE JAIME HERRERA MOTE  
PARA OBTENER EL GRADO DE :  
MAESTRO EN CIENCIAS (FISICA)

1 9 7 8 .



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# I N D I C E

## CAPITULO 1.

INTRODUCCION.-

## CAPITULO 2.-

- 2.1).- Matriz de Dispersión.
- 2.2).- Conexión entre la Matriz de Dispersión y la Función de Green.
- 2.3).- Función de Green para el Potencial Delta
- 2.4).- Sección Eficaz y Resonancias
- 2.5).- Polos de la Matriz de Dispersión y Resonancias.
- 2.6).- Determinación de Expresiones Analíticas Aproximadas para los Polos de la Matriz de Dispersión.

## CAPITULO 3.-

- 3.1).- Residuos de la Función de Green
- 3.2).- Conexión de los Residuos de la Matriz de Dispersión con los Residuos de la Función de Green.
- 3.3).- Determinación de la Constante de Normalización para la Función de Onda en el Caso del Potencial Delta.

## CAPITULO 4.-

### Desarrollos de la Matriz de Dispersión

- 4.1).- Desarrollos de Mittag-Leffler de la Matriz de Dispersión.
- 4.2).- Desarrollo de Cauchy de la Función de Green con una substracción.

- 4.3).- Desarrollo de Cauchy de la Función de Green con  $G(t)$  incorporado explícitamente.
- 4.4).- Desarrollo Finito de Cauchy para la Función de Green.

## CAPITULO 5

- 5.1).- Determinación del Parámetro  $\lambda$ .
- 5.2).- Comportamiento de la Sección Eficaz con la Energía.
- 5.3).- Comportamiento de la Sección Eficaz con la Energía, en los Desarrollos de Mittag-Leffler y Cauchy.

## CAPITULO 6

## DISCUSION Y CONCLUSIONES

## CAPITULO 1

### INTRODUCCION

En teoría de colisiones es de gran interés el analizar del comportamiento de la sección eficaz elástica con la energía. En general ocurre en dichos estudios que la sección eficaz sufre cambios bruscos a ciertas energías, los cuales se interpretan como resonancias del sistema. Estas resonancias pueden ser asociadas a la presencia de polos de la matriz de dispersión correspondiente. Esto ha motivado a que algunos autores estudien diferentes desarrollos de la matriz de dispersión en función de sus polos. Como antecedente a estos estudios se debe mencionar el trabajo de H.M. Nussenzveig<sup>1)</sup> quien determinó los polos de la matriz de dispersión para el pozo y la barrera de potencial cuadrados.

Entre los primeros trabajos que se hicieron en relación a desarrollos de la matriz  $S$  está el realizado por R.E. Peierls<sup>10)</sup> en 1959, quien desarrolló una función proporcional a la matriz de dispersión haciendo uso del método de Cauchy con tres subtracciones. Años más tarde en 1961, Humblet y Rosenfeld<sup>2)</sup> desarrollaron la matriz de dispersión en función de sus polos y residuos utilizando el teorema de Mittag-Leffler, el cual da una suma infinita, sobre todos los polos, y un término entero. En 1966, J. Humblet y J.P. Jeukenne<sup>15)</sup>, estudiaron nuevamente el desarrollo de Cauchy para la matriz de dispersión. En lugar de desarrollar como Peierls, la cantidad  $S_R(k) = S(k) e^{2i\delta}$  ellos desarrollaron una función que es proporcional a

$S(k) e^{2ikna}/k$ , por lo cual, para potenciales con una discontinuidad finita, su desarrollo consistente en una suma infinita sobre todos los polos requiere de dos substracciones.

Hace algunos años Hans A. Weidenmüller desarrolló, usando el método de Mittag-Leffler, la matriz  $S$  asociada a el pozo cuadrado en ondas  $S$ . Su objetivo era averiguar si la suma sobre polos, excluyendo los asociados a estados ligados, era suficiente para reproducir la cantidad (1-Real  $S$ ), la cual es proporcional a la sección eficaz exacta.

El resultado fué totalmente negativo pues se obtuvo que el fondo, constituido por la parte entera del desarrollo y la contribución de los estados ligados, es muy grande y varía fuertemente con la energía. Además se observó que la contribución de los estados ligados es enorme, debido a la presencia en los residuos correspondientes, del término  $e^{2\lambda_n a}$  en donde  $\lambda_n$  representa el valor de número de onda del estado ligado en cuestión.

Posteriormente J.P. Jeukenne<sup>14)</sup> aplicó al mismo problema del pozo cuadrado en onda  $S$ , el desarrollo de Cauchy obtenido por Humblet y Jeukenne<sup>15)</sup>. En este caso se obtuvo, debido a que los residuos del desarrollo no poseen el término exponencial  $e^{2ik_n a}$ , donde  $k_n$  es el número de onda del polo correspondiente, que la contribución de los estados ligados es pequeña. Además se observó que una suma finita de términos era suficiente para reproducir (1-Real  $S(k)$ ), es decir en este caso se obtuvo que el fondo es pequeño y que su variación con la energía es lenta.

Debido a que el pozo cuadrado en onda  $S$  no posee resonancias, ya que es puramente atractivo y no tiene una barrera que mantenga a las partículas en la región interna por un tiempo suficientemente largo, resulta de interés estudiar un caso, exactamente soluble, en donde existan resonancias con el objeto de estudiar los distintos desarrollos de la matriz  $S$ .

Por lo tanto en este trabajo estudiamos un problema en el cuál existan resonancias. Por tal motivo se eligió el potencial delta repulsivo. La meta principal que se persigue es ver si en una región de energías donde existan resonancias es posible reproducir la sección eficaz exacta tomando un número finito de polos en el desarrollo de la matriz  $S$ , usando y comparando entre sí los métodos de Mittag-Leffler y Cauchy.

El material de este trabajo lo distribuiremos de la siguiente manera:

El capítulo dos se divide en seis secciones; en la primera sección se indican los pasos necesarios para obtener la matriz de dispersión para el potencial delta repulsivo; la obtención de una ecuación que relacione la matriz de dispersión con la función de Green es analizada en la sección dos; la obtención explícita de la función de Green para el potencial delta repulsivo es tratada en la sección tres; en la sección cuatro discutimos la conexión entre la sección eficaz y las resonancias del sistema; en la sección cinco discutimos y clasificamos los polos de la matriz de dispersión y además se comenta en forma amplia la conexión de los polos con las resonancias del sistema; por último la determinación de expresiones analíticas

para los polos de la matriz de dispersión es discutida en la sección seis.

El capítulo tres lo dividimos en tres secciones: En la sección uno obtenemos explícitamente expresiones analíticas para los residuos de la matriz de dispersión; en la sección dos obtenemos la conexión entre los residuos de la matriz de dispersión y los residuos de la función de Green y en la sección tres se determina la constante de normalización de la función de onda para el potencial delta.

El capítulo cuatro consta de cuatro secciones: En la sección uno desarrollamos la matriz de dispersión usando el método de Mittag-Leffler; en la sección dos estudiamos el desarrollo de la función de Green usando el método de Cauchy para obtener una suma infinita sobre los polos. Una forma ligeramente distinta de escribir el desarrollo de Cauchy es tratado en la sección tres; en la sección cuatro se estudia un desarrollo alternativo de la función de Green haciendo uso del teorema integral de Cauchy para obtener una suma finita sobre los polos y un término entero.

El capítulo cinco lo dividimos en tres secciones: En la sección uno se determina el parámetro  $\lambda$  del potencial delta repulsivo y se obtienen numéricamente los polos de la matriz de dispersión; el estudio del comportamiento con la energía de la sección eficaz exacta se hace en la sección dos; en la sección tres se analizan las contribuciones del fondo y las sumas sobre polos usando los desarrollos de Mittag-Leffler y Cauchy para la matriz

Finalmente en el capítulo seis se presenta una discusión de los resultados junto con las conclusiones.

## CAPITULO II

2.- Matriz de Dispersión.

En problemas de dispersión por un potencial de alcance finito de la forma

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r > a \\ U(r) & \text{si } r \leq a \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Las soluciones a la ecuación radial de Schrödinger

$$\frac{d^2 u_l(r)}{dr^2} + (k^2 - V(r)) u_l(r) = 0 \quad (2.1.2)$$

con  $V(r)$  dado por,  $V(r) = \frac{2m}{\hbar^2} \left( V(r) + \frac{l(l+1)}{r^2} \right)$  están dadas por,

$$u_l(r) = C F_l(k, r), \quad r \leq a \quad (2.1.3)$$

$$u_l(r) = A \bar{h}_l^-(k, r) + B \bar{h}_l^+(k, r), \quad r > a \quad (2.1.4)$$

en donde  $F_l(k, r)$  es la solución regular en el origen y  $\bar{h}_l^-(k, r)$ ,  $\bar{h}_l^+(k, r)$  son las funciones de Riccati-Hankel.

La matriz de dispersión es definida en la forma siguiente<sup>7)</sup>

$$S_l(k) = - \frac{A_l(k)}{B_l(k)} \quad (2.1.5)$$

en la ecuación 2.1.5 los términos  $A_\lambda$  y  $B_\lambda$  se pueden obtener de 2.1.4 y su derivada, los cuales tendrán la forma

$$A_\lambda = \frac{W(u_\lambda, h_\lambda^+; a, k)}{W(\bar{h}_\lambda, h_\lambda^+; a, k)} \quad (2.1.6)$$

$$B_\lambda = \frac{W(u_\lambda, \bar{h}_\lambda; a, k)}{W(h_\lambda^+, \bar{h}_\lambda; a, k)} \quad (2.1.7)$$

$W(u_\lambda, h_\lambda^+; a, k)$  es el Wronskiano de  $u_\lambda(r)$  y  $h_\lambda^+(k, r)$  y en forma similar los otros wronskianos.

La forma analítica de 2.1.6 y 2.1.7 dependerá en general del potencial. La ecuación 2.1.5, satisface la propiedad siguiente

$$S S^x = S^x S = \mathbb{1} \quad (2.1.8)$$

o sea la matriz 2.1.5 es unitaria.

En esta sección consideraremos la dispersión por un potencial de la forma  $V(r) = (\mp\lambda) \delta(r-a)$  y obtendremos la matriz de dispersión en el caso  $\lambda = 0$ .

La ecuación 2.1.2 en este caso esta dada por

$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \left[ k^2 - (\mp\lambda) \frac{2m}{\hbar^2} \delta(r-a) \right] u(r) = 0, \quad r=a \quad (2.1.9)$$

La solución en  $r < a$  está dada por

$$u(r) = C \operatorname{sen} kr, \quad r < a \quad (2.1.10)$$

en  $r > a$  tenemos como solución

$$U(r) = A e^{ikr} + B e^{-ikr} \quad (2.1.11)$$

Las condiciones de frontera en  $r=a$  están dadas por

$$U(a_+) = U(a_-) \quad (2.1.12)$$

La condición para la derivada de  $U(r)$  en  $r=a$  se obtiene integrando 2.1.9, entre los límites  $a-\epsilon$ ,  $a+\epsilon$

$$\int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} \frac{d}{dr} \left( \frac{dU(r)}{dr} \right) dr + k^2 \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} U(r) dr - \left( \frac{\lambda}{\hbar^2} \right) \frac{2m}{\hbar^2} \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} \delta(r-a) U(r) dr = 0 \quad (2.1.13)$$

por comodidad tomamos las unidades  $2m = \hbar^2 = 1$  con lo que se tiene el límite cuando  $\epsilon \rightarrow 0$

$$\left. \frac{dU(r)}{dr} \right|_{r=a_+} - \left. \frac{dU(r)}{dr} \right|_{r=a_-} = \left( \frac{\lambda}{\hbar^2} \right) U(a) \quad (2.1.14)$$

sustituyendo 2.1.10 y 2.1.11 en las condiciones de frontera 2.1.12 y 2.1.14 obtenemos

$$C \operatorname{sen} ka = B e^{-ika} + A e^{ika} \quad (2.1.15)$$

y

$$-ikB e^{-ika} + ikA e^{ika} - Ck \operatorname{cosh} ka = \left( \frac{\lambda}{\hbar^2} \right) C \operatorname{sen} ka \quad (2.1.16)$$

despejando  $C$  de 2.1.15 y sustituyendo en 2.1.16 se tiene

$$A e^{ika} (ik - k \cot ka - (\mp \lambda)) + B e^{-ika} (-ik - k \cot ka - (\mp \lambda)) = 0$$

por lo que según 2.1.5 la matriz de dispersión, queda entonces dada por

$$S(k) = -\frac{A}{B} = \frac{-ik - k \cot ka - (\mp \lambda)}{ik - k \cot ka - (\mp \lambda)} e^{-2ika} \quad (2.1.17)$$

## 2.2.- Conexión entre la Matriz de Dispersión y la Función de Green.

La ecuación de Schrödinger radial para un potencial  $V(r)$ , para ondas  $l=0$ , tiene la forma

$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} + [k^2 - V(r)] u(r) = 0 \quad (2.2.1)$$

consideremos un potencial de alcance finito como el indicado por 2.1.1 las soluciones de 2.2.1, cumplen la condición en el origen

$$u(0) = 0 \quad (2.2.2)$$

en  $r > a$ , la solución general de 2.2.2.1, la podemos escribir como

$$u(r) = \frac{i}{2} \left[ e^{-ikr} - S(k) e^{ikr} \right] \quad (2.2.3)$$

La función de Green  $G(r, r'; k)$  satisface la ecuación siguiente

$$\frac{d^2}{dr^2} G(r, r'; k) + [k^2 - v(r)] G(r, r'; k) = \delta(r - r') \quad (2.2.4)$$

con condiciones a la frontera en  $r=0$  y  $r=a$  dadas respectivamente por

$$G(0, r'; k) = 0 \quad (2.2.5)$$

y

$$\left[ \frac{d}{dr} G(r, r'; k) - i k G(r, r'; k) \right]_{r=a} = 0 \quad (2.2.6)$$

multiplicando 2.2.21 por  $G(r, r'; k)$  y la ecuación 2.2.4 por  $U(r)$  se tiene

$$G(r, r'; k) \frac{d^2 U(r)}{dr^2} + G(r, r'; k) [k^2 - v(r)] U(r) = 0 \quad (2.2.7)$$

$$U(r) \frac{d^2 U(r)}{dr^2} + U(r) [k^2 - v(r)] G(r, r'; k) = \delta(r - r') U(r) \quad (2.2.8)$$

restando a 2.2.2.8 la ecuación 2.2.7 e integrando entre 0 y  $a$  obtenemos

$$\left[ U(r) \frac{d}{dr} G(r, r'; k) - G(r, r'; k) \frac{dU(r)}{dr} \right]_{r=a} = U(r); \quad r \leq a \quad (2.2.9)$$

La derivada de 2.2.3 evaluada en  $r=a$  da

$$\left. \frac{dU(r)}{dr} \right|_{r=a} = \frac{i}{2} \left[ -ik e^{-ika} - S(k) ik e^{ika} \right] \quad (2.2.10)$$

sustituyendo en 2.2.8 las condiciones de frontera 2.2.2, 2.2.5 y 2.2.6 junto con 2.2.10 y tomando  $r'=a$  se tiene

$$2ik G(a, a; k) e^{-ika} = e^{-ika} - S(k) e^{ika}$$

o bien

$$S(k) = \left[ 1 - 2ik G(k) \right] e^{-2ika} \quad (2.2.11)$$

en donde definimos  $G(k) = G(a, a; k)$ .

La relación 2.2.11 nos indica que el conocimiento de la función de Green en  $r=r'=a$  es suficiente para determinar la matriz  $S(k)$  del problema. La expresión 2.2.11 fué por vez primera derivada por Bloch<sup>16)</sup>.

### 2.3.- Función de Green para el potencial Delta.

La función de Green satisface la ecuación diferencial 2.2.4, cuyas soluciones satisfacen las condiciones de frontera 2.2.5 y 2.2.6. La condición 2.2.5 implica que la solución de la ecuación 2.2.4 en  $r'=a$  y  $r < a$  es, para el caso del potencial delta

$$G(r, a; k) = C \operatorname{sen} kr, \quad r < a \quad (2.3.1)$$

derivando 2.3.1 con respecto a  $\gamma$  se tiene

$$\left. \frac{d}{d\gamma} G(r, a; k) \right|_{r=a} = k \coth ka G(a, a; k) \quad (2.3.2)$$

como en  $\gamma=a$  el potencial delta es discontinuo, integramos la ecuación diferencial 2.2.4 entre  $a-\epsilon$  y  $a+\epsilon$

$$\int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} \left[ \frac{d^2}{dr^2} + k^2 - (\mp\lambda) \delta(r-a) \right] G(r, r'; k) dr = \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} \delta(r-a) dr$$

ó bien tomando  $r' = a$

$$\left. \frac{d}{d\gamma} G(r, a; k) \right|_{r=a+\epsilon} - \left. \frac{d}{d\gamma} G(r, a; k) \right|_{r=a-\epsilon} - (\mp\lambda) G(a, a; k) = 1 \quad (2.3.3)$$

usando la condición 2.2.6 y tomando el límite  $\epsilon \rightarrow 0$  se tiene finalmente

$$G(a, a; k) = \frac{1}{ik - k \coth ka - (\mp\lambda)} \quad (2.3.4)$$

#### 2.4.- Sección Eficaz y Resonancias.

En problemas de dispersión elástica la sección eficaz para momento angular  $l$  está dado por<sup>2)</sup>

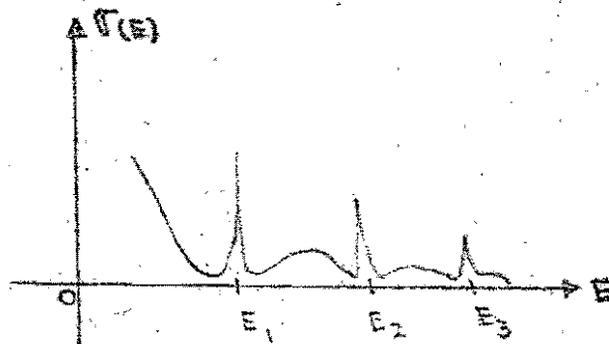
$$\sigma_l(k) = \frac{\pi}{k^2} (2l+1) |1 - S_l|^2 \quad (2.4.1)$$

en donde la matriz de dispersión  $S_l(k)$  es dada por

$$S_l(k) = - \frac{A_l(k)}{B_l(k)} = \frac{W(u_l, \tilde{h}_l)}{W(u_l, h_l^*)} \quad (2.4.2)$$

en donde  $W(u_l, \tilde{h}_l)$  y  $W(u_l, h_l^*)$  son los Wronskianos asociados al problema.

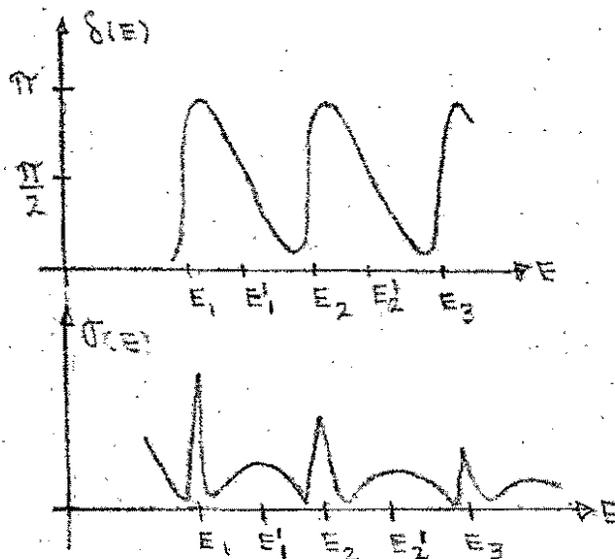
En general es bien conocido el hecho de que para ciertas energías la sección eficaz sufre cambios bruscos<sup>8)</sup>, como se ilustra en la gráfica 2.1



Gráfica 2.1

Los picos para energías  $(E_1, E_2, E_3, \dots)$  en la sección eficaz se interpretan como resonancias del sistema (proyectil, potencial)<sup>2,8)</sup>, esto es si el proyectil es lanzado hacia el potencial, con esas energías  $E_1, E_2, E_3, \dots$ , el proyectil queda atrapado en la región del potencial un tiempo mucho mayor que el tiempo de paso en ausencia de potencial. Los picos anchos de la gráfica 2.1 se interpretan como anti-resonancias del sistema<sup>4)</sup>.

Un criterio más específico para distinguir cuando existen resonancias y antiresonancias está basado en el comportamiento del corrimiento de fase con la energía. Si en una región de energía el corrimiento de fase, como función de la energía, sufre una variación del orden de  $\pi$  con pendiente positiva el sistema está en resonancia. Si en cambio, el corrimiento de fase sufre una variación con pendiente negativa, en este caso se dice que el sistema está en antiresonancia. Lo anterior se ilustra en la gráfica 2.2.



Gráfica 2.2

La gráfica 2.2 nos muestra que en las energías  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3 \dots$  el sistema está en resonancia, mientras que para las energías  $E_1'$ ,  $E_2'$  .. el sistema está en anti-resonancia.

Es posible mostrar<sup>8)</sup> una relación entre la pendiente y el corrimiento de fase y el tiempo de duración del sistema en resonancia o en antiresonancia<sup>8)</sup>:

$$\frac{d}{dE} S(E) \propto \gamma \quad (2.4.3)$$

$$\frac{d}{dE} S(E) \propto -\gamma \quad (2.4.4)$$

La ecuación 2.4.3, es para el caso de resonancia, mientras que la 2.4.4 para antirresonancias. En las ecuaciones 2.4.3 y 2.4.4

$\gamma$  es un tiempo relativo que se compara con el tiempo de tránsito en ausencia de potencial.

## 2.5 - Polos de la Matriz de Dispersión y Resonancias.

En esta sección estudiamos la conexión entre polos de la matriz de dispersión con las resonancias del sistema.

En la sección 2.4 vimos que la matriz de dispersión se puede escribir como

$$S(k) = - \frac{A(k)}{B(k)} \quad (2.5.1)$$

si consideramos en 2.5.1

$$B(k) = 0 \quad (2.5.2)$$

2.5.2 implica que el conjunto de valores de  $k$  que satisfacen 2.5.2 son los polos de  $S(k)$ , la condición 2.5.2 no es válida para  $k$  real, pues de lo contrario la condición de unitariedad, dada por 2.1.8, no se cumpliría, pues tendríamos

$A(k) = B^*(k) = 0$ . Sin embargo para  $k$  compleja la condi-

ción 2.5.2 es desde luego posible.

De hecho se puede demostrar<sup>2)</sup> que existe un conjunto infinito de valores complejos  $\{k_n\}$  que cumplen 2.5.2. La condición de unitariedad para  $S(k)$  dada por 2.1.8, con  $k$  compleja se puede ver<sup>6)</sup> que está dada por

$$S^*(k^*) S(k) = \mathbb{1} \quad (2.5.3)$$

es posible mostrar<sup>2)</sup> que el conjunto  $\{k_n\}$  de soluciones que satisfacen 2.5.2, pueden ser distribuidos de la siguiente manera

$$k_n = \begin{cases} iB_n \\ -iB_n \\ \alpha_n - iB_n \end{cases} \quad (2.5.4)$$

en donde los polos de la forma  $iB_n$  representan estados ligados del sistema;  $-iB_n$  estados antiligados y  $\alpha_n - iB_n$  estados complejos, con energías dadas por

$$E_n = \begin{cases} -B_n^2 & \text{Ligado} \\ -B_n^2 & \text{antiligado} \\ \alpha_n^2 - B_n^2 - 4\alpha_n B_n i & \text{Energía compleja} \end{cases} \quad (2.5.5)$$

en los estados de energía compleja el término<sup>2)</sup>

$$E_n = \alpha_n^2 - B_n^2 \quad (2.5.6)$$

se interpreta como la posición del nivel de energía del sistema y el término

$$\Gamma_n = 4\alpha_n B_n \quad (2.5.7)$$

corresponde al ancho del nivel de energía. Existe un criterio cualitativo<sup>2)</sup> que dice que todos los polos complejos de 2.5.4 que cumplan la siguiente condición

$$|k_n - k_{n\pm 1}| \gg B_n \quad (2.5.8)$$

corresponden a resonancias del sistema.

La matriz de dispersión cerca de la resonancia adquiere la forma

$$S_\lambda(k) \approx \frac{P_\lambda}{E - E_n} + D \quad (2.5.9)$$

en donde  $D$  es una función entera y  $P_\lambda$  es el residuo de  $S_\lambda$  en la resonancia 2.5.2.

Tomando 2.5.9 a primer orden tenemos

$$S_\lambda \approx \frac{P_\lambda}{E - E_n} \quad (2.5.10)$$

puesto que en 2.5.10  $E_n$  está dado por

$$E_n = \epsilon_n - \frac{i}{2} \Gamma_n \quad (2.5.11)$$

sustituyendo 2.5.10 en 2.4.1 y desarrollando se tiene que la sección eficaz para una onda parcial  $l$ , se comporta de la manera siguiente

$$\sigma_l(k) \propto \frac{\Gamma_n^2}{(E - \epsilon_n)^2 + \Gamma_n^2/4} \quad (2.5.12)$$

que es la fórmula de Brit-Wigner<sup>2)</sup>.

Analizando el comportamiento de 2.5.12 con la energía, es posible mostrar que en  $E \approx \epsilon_n$  la sección eficaz adquiere su valor máximo. Se puede ver además de 2.5.12 que en los valores de la energía en donde  $E \approx \epsilon_n$  los máximos están aislados.

Los polos que den origen a resonancias tienen la forma<sup>2)</sup>

$$k_n = \alpha_n - i\beta_n, \quad \beta_n > 0 \quad (2.5.13)$$

se puede mostrar también que los números de onda de la forma<sup>2)</sup>

$$-i k_n^* = -\alpha_n - i\beta_n \quad (2.5.14)$$

son también soluciones de la condición 2.5.2

## 2.6 Determinación de Expresiones Analíticas Aproximadas para los Polos de la Matriz de Dispersión.

En la sección 2.1 encontramos que para el potencial delta la matriz de dispersión tiene la forma

$$S(k) = \frac{-ik - k \cot ka - (\frac{1}{4}\lambda)}{ik - k \cot ka - (\frac{1}{4}\lambda)} e^{-2ika} \quad (2.6.1)$$

la condición para que ocurran polos de  $S(k)$  es que el denominador en 2.6.1 se anule, esto es

$$ik - k \cot ka - (\frac{1}{4}\lambda) = 0 \quad (2.6.2)$$

como se discutió antes el conjunto  $\{k_n\}$  de soluciones de 2.6.2 será complejo. Para cada solución de 2.6.2 se debe cumplir

$$ik_n - k_n \cot k_n a - (\frac{1}{4}\lambda) = 0 \quad (2.6.3)$$

A nosotros nos interesa encontrar las soluciones aproximadas de la ecuación 2.6.3, si escribimos la cotangente en términos de exponenciales tenemos

$$-2ik_n e^{-ik_n a} - (\frac{1}{4}\lambda) (e^{ik_n a} - e^{-ik_n a}) = 0$$

multiplicando esta ecuación por  $a e^{ik_n a}$  se tiene la expresión

$$-2ik_n a - (\frac{1}{4}\lambda) (e^{2ik_n a} - 1) = 0 \quad (2.6.4)$$

por simplicidad llamamos  $W_n = 2k_n a = 2\alpha_n a - 2i\beta_n a = X_n - iY_n$   
 y  $Q = \lambda a$ , con lo que 2.6.4 puede ser escrito como

$$e^{iW_n} = \frac{-iW_n}{Q} + 1$$

ó bien

$$e^{iX_n} e^{Y_n} = \frac{-iX_n}{Q} - \frac{Y_n}{Q} + 1$$

igualando partes reales e imaginarias se tiene

$$\cos X_n e^{Y_n} = \frac{-Y_n}{Q} + 1 \quad (2.6.5)$$

$$\operatorname{sen} X_n e^{Y_n} = \frac{-X_n}{Q} \quad (2.6.6)$$

dividiendo 2.6.6 entre 2.6.5 tenemos

$$\operatorname{Tan} 2\alpha_n a = \frac{-2\alpha_n a / a}{1 - 2\beta_n a / a} \quad (2.6.7)$$

Elevando al cuadrado las ecuaciones 2.6.5, 2.6.6 y sumando obtenemos

$$4\beta_n a = \ln \left[ \left( \frac{2\alpha_n a}{a} \right)^2 + \left( 1 - \frac{2\beta_n a}{a} \right)^2 \right] \quad (2.6.8)$$

El par de ecuaciones 2.6.7 y 2.6.8 son equivalentes a la ecuación 2.6.3 las soluciones de las ecuaciones 2.6.7 y 2.6.8 nos dan los polos de la matriz de dispersión  $S(k)$ . De las ecuaciones 2.3.4 y 2.6.1 concluimos que los polos de de la matriz de dispersión y los polos de la función de Green son los mismos, puesto que en ambos casos se tiene la misma condición de resonancia.

A continuación estudiaremos las soluciones de las ecuaciones 2.6.7 y 2.6.8 para el potencial  $(\mp\lambda) \delta(r-a)$  haremos la siguiente división.

(A1a).- polos de la forma  $k_n = i\alpha_n, \alpha_n > 0$  para el potencial  $-\lambda \delta(r-a)$

(A1b).- polos de la forma  $k_n = -i\alpha_n, \alpha_n > 0$  para el potencial  $-\lambda \delta(r-a)$

(B1a).- polos de la forma  $k_n = i\alpha_n, \alpha_n > 0$  para el potencial  $\lambda \delta(r-a)$

(B1b).- polos de la forma  $k_n = -i\alpha_n, \alpha_n > 0$  para el potencial  $\lambda \delta(r-a)$

(C1a).- polos de la forma  $k_n = \alpha_n - i\beta_n, \alpha_n > 0, \beta_n > 0$  para el potencial  $-\lambda \delta(r-a)$

(C1b).- polos de la forma  $k_n = \alpha_n - i\beta_n, \alpha_n > 0, \beta_n > 0$  para el potencial  $-\lambda \delta(r-a)$

(A1a).- En este caso el número de onda tiene la forma

$$k_n = i\alpha_n, \alpha_n > 0 \quad (2.6.9)$$

sustituyendo 2.6.9 en 2.6.4 se tiene

$$\lambda - 2\alpha_n = \lambda e^{-2\alpha_n a} \quad (2.6.10)$$

ó bien definiendo H, G :

$$H(\alpha_n) = -\frac{2}{\lambda} \alpha_n + 1 \quad (2.6.11)$$

y

$$G(\alpha_n) = e^{-2\alpha_n a} \quad (2.6.12)$$

Las soluciones de 2.6.10 se obtienen usando el método gráfico, auxiliándonos de 2.6.11 y 2.6.12.

En la gráfica 2.3 observamos que existe un conjunto infinito de valores de  $\lambda$  para los cuales 2.6.11 y 2.6.12 se cruzan, lo cual nos indica que para ciertos valores de  $\lambda$  nuestro sistema forma estados ligados

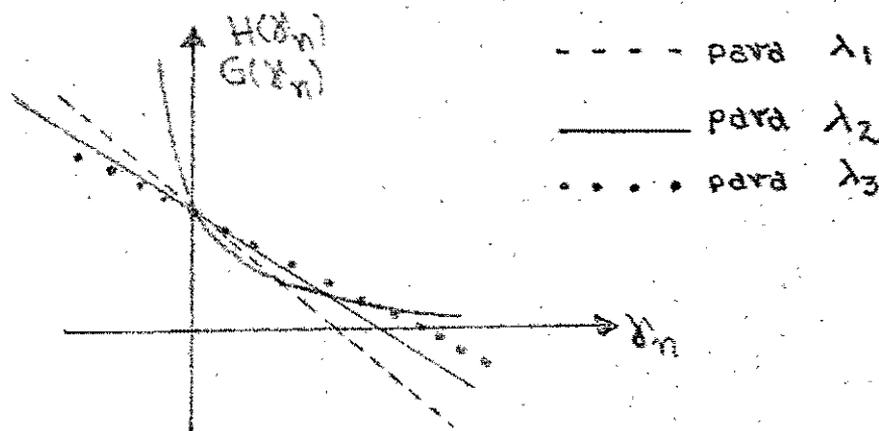


Fig. 2.3

Las curvas se interceptan en un solo punto lo cual quiere decir que ocurre un estado ligado con energía dada por

$$E_n = -\frac{\hbar^2 \delta_n^2}{2m} \quad (2.6.13)$$

(A1b).- Para el caso que el número de onda sea de la forma

$$k_n = -i\delta_n$$

las soluciones de la ecuación

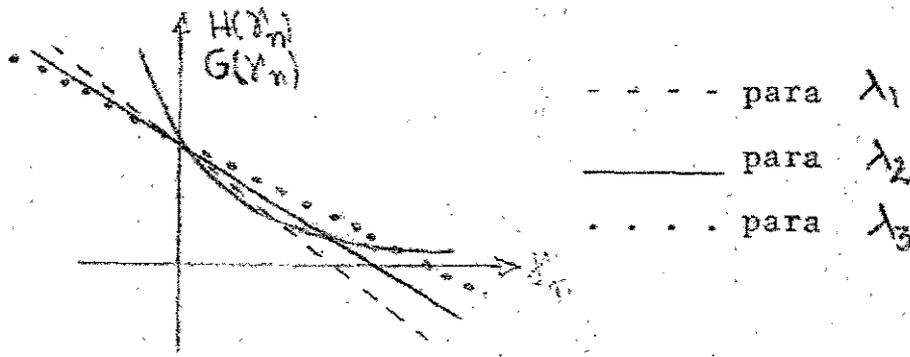
$$i k_n - k_n \cot k_n a + \lambda = 0 \quad (2.6.14)$$

son dadas por la intercepción de las siguientes ecuaciones

$$H(\gamma_n) = \frac{2}{\lambda} \gamma_n + 1 \quad (2.6.15)$$

$$G(\gamma_n) = e^{2\gamma_n a} \quad (2.6.16)$$

La gráfica 2.4, nos muestra como son las soluciones de 2.6.14



Gráfica 2.4

En la gráfica 2.4, se muestra que existe un número infinito de valores de  $\lambda$  tal que 2.6.15 y 2.6.16 se interceptan. Lo anterior implica que el potencial  $-\lambda \delta(r-a)$  posee para ciertos valores de  $\lambda$  un estado antiligado.

(B1a).- para el caso de un potencial de la forma

$$V(r) = \lambda \delta(r-a) \quad (2.6.17)$$

La condición de resonancia toma la forma

$$ik_n - k_n \cot k_n a - \lambda = 0 \quad (2.6.18)$$

La ecuación 2.6.18 es equivalente a

$$-2ik_n - \lambda(e^{2ik_n a} - 1) = 0 \quad (2.6.19)$$

sustituyendo en 2.6.19 el número de onda

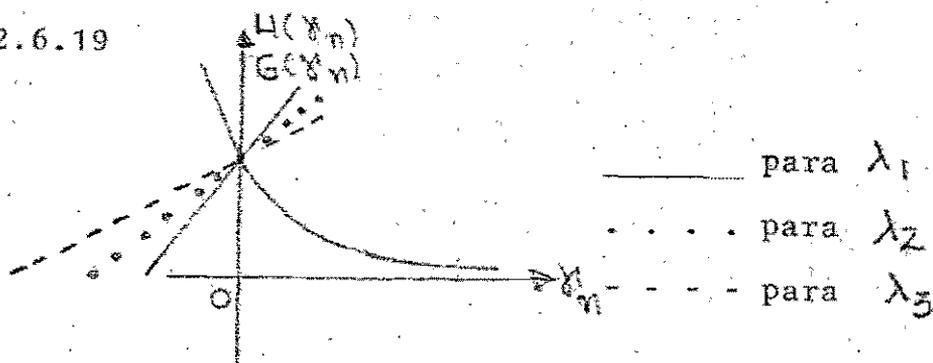
$$k_n = i\lambda_n \quad (2.6.20)$$

se tiene

$$H(\lambda_n) = \frac{2}{\lambda} \lambda_n + 1 \quad (2.6.21)$$

$$G(\lambda_n) = e^{-2\lambda_n a} \quad (2.6.22)$$

Las soluciones de 2.6.19 son dadas por las intercepciones de 2.6.21 y 2.6.22. La gráfica 2.5 nos muestra como son las soluciones de 2.6.19



Gráfica 2.5

La gráfica 2.5 muestra que no existe ningún valor de  $\lambda$  tal que 2.6.21 y 2.6.22 se intercepten, lo cual quiere decir que para este caso no existen estados ligados.

(B1b).-- para el mismo potencial del inciso (B1a), pero para un número de onda de la forma

$$k_n = -i\gamma_n \quad (2.6.23)$$

En este caso la ecuación 2.6.19 toma la forma

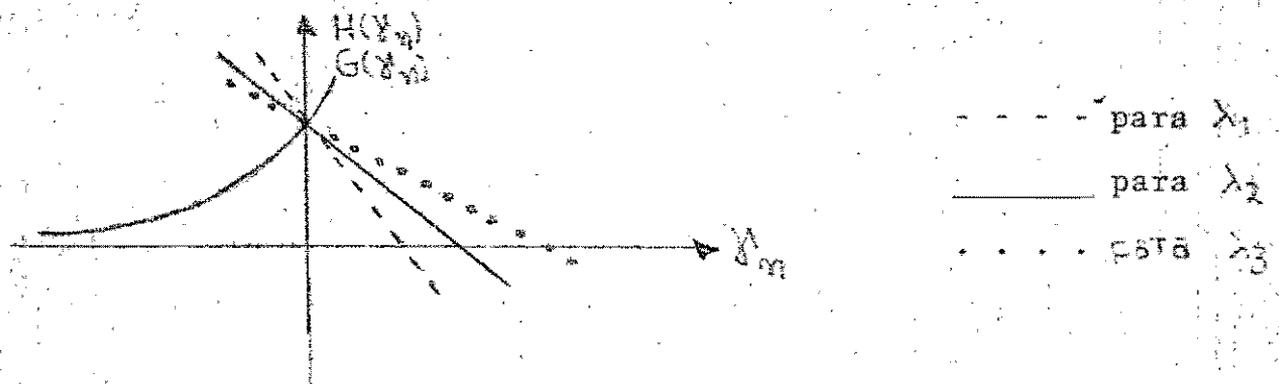
$$-2\gamma_n + \lambda - \lambda e^{2\gamma_n a} = 0 \quad (2.6.24)$$

ó también

$$H(\gamma_n) = -\frac{2}{\lambda} \gamma_{n+1} \quad (2.6.25)$$

$$G(\gamma_n) = e^{2\gamma_n a} \quad (2.6.26)$$

La solución de 2.6.24; las encontramos usando el método gráfico auxiliandonos de 2.6.25 y 2.6.26, la gráfica 2.6 nos muestra como son las soluciones de 2.6.24



Gráfica 2.6

La gráfica 2.6 nos muestra que no existe ningún valor de  $\lambda$  tal que 2.6.25 y 2.6.26 se intercepten, lo cual quiere decir que el potencial  $\lambda \delta(x-a)$  no posee estados antiligados.

(C1a).- Estados complejos para el potencial  $\lambda \delta(r-a)$

Como primer caso, analicemos que le sucede al sistema cuando  $\lambda \rightarrow \infty$ , este caso se reduce al problema de un pozo de potencial infinitamente profundo, el espectro de energías, en tal situación es conocido<sup>12)</sup> y dado por

$$E_n = \frac{(n\pi)^2}{a^2}; \quad \chi_1 = 2m = 1 \quad (2.6.27)$$

puesto que el número de onda en general para  $\lambda$  finita está dado por<sup>2)</sup>

$$k_n = \alpha_n - i B_n \quad (2.6.28)$$

de 2.6.7 y 2.6.8 es claro que en el caso,  $\lambda = 0$

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{a} \quad (2.6.29)$$

y

$$B_n = 0 \quad (2.6.30)$$

Entonces de 2.6.28, 2.6.29 y 2.6.30 los polos tendrán la forma

$$k_n = \frac{n\pi}{a} \quad (2.6.31)$$

Analicemos los siguientes casos límites.

1.- Para  $\lambda$  finita y fija, las siguientes condiciones:

$$\lambda \gg 1, \lambda \gg n\pi, \lambda \gg B_n \quad \text{y} \quad n\pi \gg B_n$$

en el caso anterior se tomó  $\lambda = \infty$  en ese caso  $\alpha_n$  es dado por 2.6.29, entonces para  $\lambda$  grande pero finita,  $\alpha_n$  tendrá la forma

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{a} + \epsilon_n \quad (2.6.32)$$

en donde  $\epsilon_n \ll 1$ . Ahora, usando la ecuación 2.6.8, se tiene para la parte imaginaria

$$B_n = \frac{1}{4a} \ln \left[ \left( \frac{2n\pi}{\lambda} \right)^2 + 1 \right] \quad (2.6.33)$$

Desarrollando 2.6.33 en serie, a primer orden se tiene

$$B_n \approx \frac{1}{a} \left( \frac{n\pi}{\lambda} \right)^2 \quad (2.6.34)$$

para determinar la parte real explícitamente necesitamos conocer  $\epsilon_n$ .

Sustituyendo 2.6.32 en 2.6.7 se tiene

$$\tan 2\epsilon_n a = \frac{\frac{-2n\pi}{\lambda}}{1 - \frac{2B_n}{\lambda}} \approx -\frac{2n\pi}{\lambda} \quad (2.6.35)$$

ó bien

$$\epsilon_n = \frac{1}{2a} \tan^{-1} \left( -\frac{2n\pi}{\lambda} \right) \quad (2.6.36)$$

Desarrollando en serie 2.6.36 y despreciando los términos de orden superior puesto que  $\lambda \gg 2n\pi$ , queda finalmente

$$\epsilon_n = -\frac{n\pi}{\lambda a} \quad (2.6.37)$$

de 2.6.32 y 2.6.37 se tiene que la parte real es dada por

$$\alpha_n \cong \frac{n\pi}{a} \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \quad (2.6.38)$$

Usando 2.6.34 y 2.6.37 se obtiene que los polos para este caso, quedan dados aproximadamente por

$$k_n \cong \frac{n\pi}{a} \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) - \frac{i}{a} \left(\frac{n\pi}{\lambda}\right)^2 \quad (2.6.39)$$

Usaremos la expresión 2.6.39 para calcular un número determinado de polos haciendo uso del método de Newton-Raphsón<sup>13)</sup>.

2.- En este caso límite consideramos las siguientes condiciones,  $n\pi \gg B_n$ ,  $\lambda \gg 1$  y  $\frac{2B_n}{\lambda} \gg 1$ . La parte real de los polos tendrá la forma

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{a} + \epsilon_n \quad (2.6.40)$$

con  $0 \leq \epsilon_n < \pi$ , para determinarlo usamos 2.6.7, y desarrollando, se tiene

$$\tan 2\epsilon_n a = -\frac{n\pi}{\lambda - 2B_n} \quad (2.6.41)$$

usando las condiciones dadas arriba tenemos en este caso que 2.6.41 queda de la forma

$$\epsilon_n = \frac{1}{2a} \tan^{-1} \left( \frac{n\pi}{2B_n} \right) \quad (2.6.42)$$

Desarrollando en serie 2.6.42 se tiene

$$\epsilon_n \cong \frac{\pi}{4a} - \frac{B_n}{n\pi a} \quad (2.6.43)$$

Tomando en 2.6.43 a primer orden tenemos que 2.6.40 queda de la forma

$$\alpha_n = \frac{1}{a} \left( n\pi + \frac{\pi}{4} \right) \quad (2.6.44)$$

para encontrar la parte imaginaria de los polos hacemos uso 2.6.8 y de las condiciones dadas anteriormente, con lo que se tendrá finalmente

$$4B_n \approx \frac{1}{a} \left[ \left( \frac{2n\pi}{\lambda} \right)^2 + \left( \frac{2B_n}{\lambda} \right)^2 \right] \quad (2.6.45)$$

factorizando  $\left( \frac{2n\pi}{\lambda} \right)^2$  en el argumento del Logaritmo, es fácil ver que 2.6.45 se puede escribir como

$$4B_n \approx \frac{1}{a} \left[ \left( \frac{2n\pi}{\lambda} \right)^2 \right] + \ln \left[ 1 + \left( \frac{B_n}{n\pi} \right)^2 \right] \quad (2.6.46)$$

por lo tanto obtenemos a primer orden

$$B_n \approx \frac{1}{2a} \ln \frac{2n\pi}{\lambda} \quad (2.6.47)$$

Así, los polos en este caso, tendrán la forma

$$k_n \approx \left( n + \frac{1}{4} \right) \frac{\pi}{a} - \frac{i}{2a} \ln \left( \frac{2n\pi}{\lambda} \right) \quad (2.6.48)$$

3.- Existe la posibilidad de que algunos polos queden fuera de los dos casos límites mencionados arriba.

En tal caso es necesario utilizar las fórmulas analíticas exactas dadas por 2.6.7 y 2.6.8. La parte real de estos polos tendrá entonces la forma siguiente

$$d_n = \frac{n\pi}{a} + \epsilon_n \quad (2.6.49)$$

sustituyendo en 2.6.7, se tiene

$$\tan 2\epsilon_n a = \frac{-2n\pi}{\lambda - 2B_n} = \frac{\frac{-2n\pi}{\lambda}}{1 - \frac{2B_n}{\lambda}} \quad (2.6.50)$$

de la ecuación 2.6.50 podemos obtener explícitamente la expresión de  $\epsilon_n$

$$\epsilon_n = \frac{1}{2a} \tan^{-1} \left( \frac{\frac{-2n\pi}{\lambda}}{1 - \frac{2B_n}{\lambda}} \right) \quad (2.6.51)$$

Por otro lado de la ecuación 2.6.8 tenemos que la parte imaginaria de los polos es dada por

$$B_n = \frac{1}{4a} \ln \left[ \left( \frac{2n\pi}{\lambda} \right)^2 + \left( 1 - \frac{2B_n}{\lambda} \right)^2 \right] \quad (2.6.52)$$

como en la ecuación 2.6.52 aparece  $B_n$  en ambos miembros, y por la forma de la ecuación no es posible despejar  $B_n$ , en este caso conviene usar un método de interacción propuesto por Brujin<sup>(1)</sup>. Proponemos una solución, a primer orden dada por

$$B_n^{(1)} = \frac{1}{a} \ln \left( \frac{2n\pi}{\lambda} \right) \quad (2.6.53)$$

Substituimos 2.6.53 en 2.6.52 e iniciamos el proceso de iteración que a continuación indicamos

$$B_n^{(r)} = \frac{1}{4a} \ln \left[ \left( \frac{2n\pi}{\lambda} \right)^2 + \left( 1 - \frac{2B_n^{(r-1)}}{\lambda} \right)^2 \right]$$

hasta obtener que  $B_n^{(r)} \cong B_n^{(r-1)}$ . El método anterior da una magnífica aproximación con 3 iteraciones. Sustituyendo el valor  $B_n^{(r)}$  encontrado por este método en 2.6.51 se tiene explícitamente  $\epsilon_n$  ó sea

$$\epsilon_n = \frac{1}{2a} \operatorname{Tan}^{-1} \left( \frac{-\frac{2n\pi}{\lambda}}{1 - \frac{2B_n^{(r)}}{\lambda}} \right) \quad (2.6.54)$$

sustituyendo 2.6.54 en 2.6.49 tenemos explícitamente la parte real de los polos:

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{a} + \frac{1}{2a} \operatorname{Tan}^{-1} \left( \frac{-\frac{2n\pi}{\lambda}}{1 - \frac{2B_n^{(r)}}{\lambda}} \right) \quad (2.6.55)$$

Por lo tanto los polos en este caso están dados por

$$k_n = \frac{n\pi}{a} + \frac{1}{2a} \operatorname{Tan}^{-1} \left( \frac{-\frac{2n\pi}{\lambda}}{1 - \frac{2B_n^{(r)}}{\lambda}} \right) - i B_n^{(r)} \quad (2.6.56)$$

C1b).- Para el caso de un potencial de la forma  $-\lambda \delta(r-a)$  la condición de resonancia tendrá en este caso la forma

$$i(k_n - k_n \cot k_n a + \lambda) = 0 \quad (2.6.57)$$

sustituyendo en 2.6.57  $\cot k_r a$  por exponenciales, se obtendrá una ecuación similar a 2.6.4, haciendo un cálculo similar al hecho para el potencial  $\lambda \delta(r-a)$ , es posible obtener fórmulas generales para la parte real e imaginaria de los polos, en caso del potencial  $-\lambda \delta(r-a)$  tales fórmulas serán muy similares a las ecuaciones 2.6.7 y 2.6.8.

CAPITULO 3

3.1. - RESIDUOS DE LA FUNCION DE GREEN.

Puesto que la función de Green  $G(x, r'; k)$  satisfice la ecuación, en onda  $S$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x, r'; k) + [k^2 - V(x)] G(x, r'; k) = \delta(x - r') \quad (3.1.1)$$

las condiciones a la frontera en  $x=c$  y  $x=a$  son dadas por

$$G(c, r'; k) = 0 \quad (3.1.2)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial r} G(x, r'; k) - (k^2 - V(x)) G(x, r'; k) \right]_{r=a_+} = 0, \quad x \leq a \quad (3.1.3)$$

En donde  $a_+ = \lim_{\eta \rightarrow 0} a + \eta$ . Por otro lado cerca de un polo complejo  $k_n$ , el comportamiento de la función de Green

$G(x, r'; k)$  se puede expresar como

$$G(x, r'; k) \approx \frac{f_n(x, r')}{k - k_n} + f(x, r'; k) \quad (3.1.4)$$

en donde  $f_n(x, r')$  es el residuo de la función  $G(x, r'; k)$  y  $f(x, r'; k)$  es una función regular en  $k_n$ . Sustituyendo

3.1.4 en 3.1.1 y reagrupando términos tenemos

$$\frac{1}{k - k_n} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} f_n(x, r') + [k^2 - V(x)] f_n(x, r') \right\} + \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x, r'; k) + (k^2 - V(x)) G(x, r'; k) - \delta(x - r') \right] = 0 \quad (3.1.5)$$

sumando y restando a la ecuación 3.1.5, la cantidad

$R_n^2 P_n(r, r') / (k - k_n)$  y tomando el límite cuando  $k \rightarrow k_n$  se tiene

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} P_n(r, r') + [k_n^2 - v(r)] P_n(r, r') = 0 \quad (3.1.6)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} Q(r, r'; k) + [k_n^2 - v(r)] Q(r, r'; k) + 2k_n P_n(r, r') = \delta(r - r') \quad (3.1.7)$$

substituimos ahora en las condiciones de frontera 3.1.2 y 3.1.3, la ecuación 3.1.4 y procediendo como en el caso anterior tomando el límite cuando  $k \rightarrow k_n$  se tiene en el origen el par de condiciones

$$P_n(0, r') = c \quad (3.1.8)$$

$$Q(0, r'; k) = c \quad (3.1.9)$$

y también las condiciones de frontera en  $r = a_+$  quedarán de la forma siguiente

$$\left[ \frac{\partial}{\partial r} P_n(r, r') - k_n P_n(r, r') \right]_{r=a_+} = 0, \quad r' \leq a \quad (3.1.10)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial r} Q(r, r'; k) - k_n Q(r, r'; k) \right]_{r=a_+} = \frac{c}{2k_n} \left[ P_n(r, r') \right]_{r=a_+} \quad (3.1.11)$$

Introduzcamos, ahora a la función de onda radial la cual satisface la siguiente ecuación diferencial en onda  $S$

$$u_n''(r) + [k_n^2 - v(r)] u_n(r) = 0 \quad (3.1.12)$$

con condiciones a la frontera dadas por

$$u_n(0) = 0 \quad (3.1.13)$$

y

$$\left[ \frac{du_n(r)}{dr} - i k_n u_n(r) \right]_{r=a} = 0 \quad (3.1.14)$$

La función  $u_n(r)$  está asociada a cada solución  $k_n$  y obedece una condición de onda saliente. Observando la ecuación 3.1.6 junto con sus condiciones de frontera 3.1.8 y 3.1.10 nos damos cuenta que es idéntica a 3.1.12, 3.1.13, 3.1.14, de lo anterior concluimos que las soluciones de 3.1.6 son proporcionales a las soluciones de 3.1.12. Esto es,

$$P_n(r, r') = u_n(r) L(r') \quad (3.1.15)$$

La función  $L(r')$  que aparece en 3.1.15 es desconocida, para determinarla usamos la fórmula de Green entre 3.1.6 y 3.1.7 esto es, multiplicando 3.1.7 por  $u_n(r)$  y 3.1.12 por

$G(r, r'; b)$  restando e integrando entre  $r=0$  y  $r=a$  se tiene finalmente

$$\begin{aligned} & \left[ u_n(r) G'(r, r'; b) - u_n'(r) G(r, r'; b) \right]_0^a + 2i k_n \int_0^a u_n(r) P_n(r, r') dr = \\ & = \int_0^a u_n(r) \delta(r-r') dr \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

usando las condiciones de frontera 3.1.8, 3.1.11, 3.1.13, 3.1.14 y la ecuación 3.1.15, se tiene finalmente

$$L(r') = \frac{u_n(r')}{2k_n \left\{ \int_0^a u_n(r) dr + i \frac{u_n^2(a)}{2k_n} \right\}} \quad (3.1.17)$$

substituyendo 3.1.17 en 3.1.15, los residuos de la función de Green en cada polo están dados por

$$g_n(r, r') = \frac{u_n(r) u_n(r')}{2k_n \left\{ \int_0^a u_n^2(r) dr + i \frac{u_n^2(a)}{2k_n} \right\}} \quad (3.1.18)$$

De la ecuación 3.1.18 definimos la condición de normalización de la forma siguiente<sup>5)</sup>

$$\int_0^a u_n^2(r) dr + i \frac{u_n^2(a)}{2k_n} = 1 \quad (3.1.19)$$

entonces los residuos de la función de Green quedan finalmente de la siguiente manera

$$g_n(r, r') = \frac{u_n(r) u_n(r')}{2k_n} \quad (3.1.19a)$$

Analícemos el conjunto de funciones asociadas a los estados resonantes. La ecuación para  $u_n(r)$  con sus condiciones a la frontera está dada por

$$\frac{d^2 u_n(r)}{dr^2} + [k_n^2 - v(r)] u_n(r) = 0 \quad (3.1.20)$$

$$u_n(0) = 0 \quad (3.1.21)$$

$$\left. \frac{d}{dr} U_n(r) \right|_{r=a} = i k_n(r) \Big|_{r=a} \quad (3.1.22)$$

Para otro conjunto de funciones  $U_m(r)$  tenemos respectivamente,

$$\frac{d^2}{dr^2} U_m(r) + [k_m^2 - v(r)] U_m(r) = 0 \quad (3.1.23)$$

$$U_m(0) = 0 \quad (3.1.24)$$

$$\left. \frac{d}{dr} U_m(r) \right|_{r=a} = i k_m U_m(r) \Big|_{r=a} \quad (3.1.25)$$

Multiplicando 3.1.20 por  $U_m(r)$  y 3.1.23 por  $U_n(r)$  restando, integrando el resultado de 0 a  $a$  y aplicando las condiciones 3.1.21, 3.1.22, 3.1.24 y 3.1.25 se tiene

$$(k_m - k_n) \left\{ i U_n(a) U_m(a) + (k_m + k_n) \int_0^a U_m(r) U_n(r) dr \right\} = 0 \quad (3.1.26)$$

Si  $k_n \neq k_m$  entonces el término entre paréntesis  $\{ \}$  debe anularse, por lo tanto observamos que el conjunto de funciones  $U_n(r)$  no es ortogonal en la región interna  $r \leq a$  esto es que

$$\int_0^a U_m(r) U_n(r) dr \neq 0 \quad \text{para } m \neq n \quad (3.1.27)$$

de 3.1.26, es claro que para  $m = n$  el segundo factor será en general distinto de cero. Si lo hacemos igual a la unidad obtenemos la condición 3.1.19, o sea

$$\frac{i u_n^2(a)}{2k_n} + \int_0^a u_n^2(r) dr = 1 \quad (3.1.28)$$

ahora, para  $m \neq n$  podemos escribir en 3.1.26 como

$$i \frac{u_m(a)u_n(a)}{k_m + k_n} + \int_0^a u_m(r)u_n(r) dr = 0 \quad (3.1.29)$$

de las expresiones 3.1.28 y 3.1.29 se puede obtener finalmente

$$\int_0^a u_m(r)u_n(r) dr + i \frac{u_m(a)u_n(a)}{k_m + k_n} = \delta_{mn} \quad (3.1.30)$$

### 3.2. - Conexión de los Residuos de la Matriz de Dispersión con los Residuos de la Función de Green.

En la sección 2.2. se demostró que la matriz de dispersión está relacionada con la función de Green en la forma siguiente

$$S(k) = [1 - zik G(a, a; k)] e^{-zik a} \quad (3.2.1)$$

Haciendo uso de la definición de residuo, obtendremos en seguida los residuos de la matriz de dispersión de la siguiente manera

$$\eta_n(a, a) = \text{Res}(S(k)) = \lim_{k \rightarrow k_n} (k - k_n) S(k)$$

o bien

$$\eta_n(a, a) = -zik_n P_n(a, a) e^{-zik_n a} \quad (3.2.2)$$

como  $f_n(a, a)$  esta dado por 3.1.19a para  $r=r'=a$  se tiene

$$\eta_n(a, a) = -i u_n^2(a) e^{-2i k_n a} \quad (3.2.3)$$

en donde las funciones de onda  $u_n(a)$  están normalizadas de acuerdo con la condición 3.1.19.

### 3.3. - Determinación de la Constante de Normalización para la Función de Onda, en el Caso del Potencial Delta.

Puesto que para  $r < a$  la función de onda radial tiene la forma

$$u_n(r) = C_n \text{Sen } k_n r \quad (3.3.1)$$

Para determinar la forma analítica de la constante  $C_n$  en 3.3.1, hacemos uso de 3.1.19 y auxiliandonos de las igualdades siguientes

$$\text{Sen}^2 k_n r = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2k_n r$$

$$\text{Sen } 2k_n r = 2 \text{ Sen } k_n r \cos k_n r$$

Se puede obtener fácilmente la siguiente expresión

$$\frac{C_n^2}{2k_n} \left[ k_n^2 a + \text{Sen}^2 k_n a (i k_n - k_n \cot k_n a) \right] = 1 \quad (3.3.2)$$

la expresión 3.3.2 puede ser simplificada usando la condición de resonancia, esto es

$$ik_n - k_n \cot k_n a - (\mp \lambda) = 0 \quad (3.3.3)$$

usando 3.3.3 en 3.3.2 se tiene

$$\frac{C_n^2}{2k_n^2} \left[ k_n^2 a + (\mp \lambda) \operatorname{sen}^2 k_n a \right] = 1 \quad (3.3.4)$$

De la condición de resonancia 3.3.3 se puede ver que

$$\operatorname{sen}^2 k_n a = \frac{k_n^2}{-2ik_n(\mp \lambda) + (\mp \lambda)^2} \quad (3.3.5)$$

sustituyendo 3.3.5 en 3.3.4 se tiene que  $C_n^2$  tiene la forma

$$C_n^2 = \frac{2(-2ik_n a + (\mp \lambda))}{-2ik_n a + (\mp \lambda)a + 1} \quad (3.3.6)$$

de 3.3.5 y 3.3.6 tenemos que  $U_n^2(a)$  adquiere la forma siguiente

$$U_n^2(a) = \frac{2k_n}{(-2ik_n(\mp \lambda) + (\mp \lambda)a + 1)(\mp \lambda)} \quad (3.3.6a)$$

Entonces los residuos de la función de Green dados por 3.1.19a en  $\gamma = \gamma' = a$  se pueden escribir de la forma

$$P_n(a, a) = \frac{k_n}{(\mp \lambda)(-2ik_n a + (\mp \lambda)a + 1)} \quad (3.3.7)$$

similáramente los residuos de la matriz de dispersión, dados por 3.2.3, son

$$\eta_n(a, a) = \frac{-2i k_n^2}{(\mp\lambda)(-2i k_n a + (\mp\lambda)a + 1)} e^{-2i k_n a} \quad (3.3.8)$$

Es conveniente recordar que los signos que aparecen en  $(\mp\lambda)$  en las fórmulas anteriores se consideran según el criterio siguiente: el signo  $(-)$  corresponde al potencial  $-\lambda \delta(r-a)$  el signo  $(+)$  al potencial  $\lambda \delta(r-a)$ .

## CAPITULO 4

DESARROLLOS DE LA MATRIZ DE DISPERSION4.1.- Desarrollo de Mittag-Leffler de la Matriz de Dispersión.

Teorema<sup>2)</sup>. Sea  $S(k)$  una función meromorfa con todos los polos  $k_n$  simples ordenados en módulo creciente,

$$0 < |k_1| \leq |k_2| \leq \dots \quad (4.1.1)$$

con residuos dados por

$$\eta_n(a, a) = \text{Res } S(k) \Big|_{k=k_n}$$

si existe un entero  $M \geq 0$  tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n(a, a)| / |k_n|^{M+1} < \infty \quad (4.1.2)$$

el siguiente desarrollo es válido

$$S(k) = E^M(k) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k_n}\right)^M \frac{\eta_n(a, a)}{(k - k_n)} \quad (4.1.3)$$

en donde  $E^M(k)$  es una función entera.

Para potenciales de alcance finito se puede mostrar que es suficiente tomar  $M \geq 1$ , entonces la matriz queda de la forma siguiente

$$S(k) = \varepsilon(k) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k_n}\right) \frac{\eta_n(a, a)}{(k - k_n)} \quad ; \quad \varepsilon'(k) \equiv \varepsilon(k)$$

como estamos interesados en trabajar con  $N$  polos, podemos expresar la ecuación anterior de la forma siguiente

$$S(k) = \varepsilon(k) + \sum_{n=1}^N \left(\frac{k}{k_n}\right) \frac{\eta_n(a, a)}{(k - k_n)} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{k}{k_n}\right) \frac{\eta_n(a, a)}{(k - k_n)}$$

Si definimos

$$S_Z(k) = - \sum_{n=1}^N \frac{2ik k_n e^{-2ik_n a}}{(k - k_n)(\mp i) (-2ik_n + (\mp i)(a+1))} \quad (4.1.3a)$$

y

$$S_B(k) = \varepsilon(k) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2ik k_n e^{-2ik_n a}}{(k - k_n)(\mp i) (-2ik_n + (\mp i)(a+1))} \quad (4.1.3b)$$

donde hemos introducido los residuos  $\eta_n(a, a)$  dados por 3.3.38. Así, tenemos que

$$S(k) = S_Z(k) + S_B(k) \quad (4.1.4)$$

Esperamos que  $S_Z(k)$  reproduzca el valor exacto de  $S(k)$ . La cantidad  $S_B(k)$  es considerada como el "fondo" y se espera que su contribución a la sección eficaz sea pequeña.

En lugar de evaluar  $S_B(k)$  explícitamente, utilizamos el hecho de conocer  $S(k)$  analíticamente para calcularla. Es decir usando la expresión de  $S(k)$  exacta dada por 4.1.4 podemos escribir  $S_B(k)$  como

$$S_B(k) = \frac{-ik - k \cot ka - (\mp i)}{ik - k \cot ka - (\mp i)} - S_Z(k)$$

sustituyendo en la expresión de arriba 4.1.3a se tiene finalmente

$$S_B(k) = \frac{-ik - k \cot ka - (\frac{\pi}{2})}{ik - k \cot ka - (\frac{\pi}{2})} e^{-2ika} + \sum_{n=1}^N \frac{2ik k_n e^{-2ika}}{(k - k_n)(-2ik_n + (\frac{\pi}{2})a + 1)} \quad (4.1.5)$$

Usando las expresiones 4.1.4 podemos evaluar la sección eficaz, la cual está dada por

$$\sigma(E) = \frac{\pi}{k^2} |1 - S(k)|^2 \quad (4.1.6)$$

para escribir

$$\sigma(E) = \sigma_{\Sigma}(E) + \sigma_B(E) \quad (4.1.7)$$

en donde  $\sigma_{\Sigma}(E)$  proviene de la parte de la suma de  $S_{\Sigma}(k)$  dada por 4.1.4  $S_B(k)$  y  $\sigma_B(E)$  proviene de la contribución de  $S_B(k)$  y los términos cruzados, o sea

$$\sigma_{\Sigma}(E) = \frac{\pi}{k^2} (1 - 2 \operatorname{Re} S_{\Sigma} + S_{\Sigma}^* S_{\Sigma}) \quad (4.1.8)$$

$$\sigma_B(E) = \frac{\pi}{k^2} (1 - 2 \operatorname{Re} S_B + S_B^* S_B) + \frac{\pi}{k^2} (S_{\Sigma}^* S_B + S_{\Sigma} S_B^* + 1) \quad (4.1.9)$$

#### 4.2.- Desarrollo de Cauchy de la Función de Green con Substracción.

En la sección 4.1 desarrollamos la matriz de dispersión usando el teorema de Mittag-Leffler. En dicho desarrollo aparecía el inconveniente de que la función entera  $\zeta(k)$  es en general desconocida. Un desarrollo alternativo se logra a través de la función de Green del problema.

Teorema. Sea  $G(k)$  una función meromorfa, con todos sus polos  $k_n$  simples los cuales satisfacen las siguientes propiedades

$$0 < |k_1| \leq |k_2| \leq |k_3| \leq \dots \quad (4.2.1)$$

y

$$P_n = \text{Res } G(k) \Big|_{k=k_n} \quad (4.2.2)$$

Si además existe una secuencia de contornos  $C_n$  cerrados tal que  $C_n$  incluya solamente  $k_1, k_2, \dots, k_n$  y que la mínima distancia  $R_n$  de  $C_n$  tienda a infinito con  $n$ , siendo  $l(R_n)$  la longitud de  $C_n$  y si además, en  $C_n$

$$G(k) = O(R_n^p)$$

en donde  $p$  es un entero no negativo, entonces

$$G(k) = \sum_{q=0}^p \frac{G^{(q)}(0)}{q!} k^q + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{k}{k_n} \right)^p \frac{P_n}{(k-k_n)} \quad (4.2.3)$$

donde  $G^{(p)}$  es la  $p$ -ésima derivada de  $G(z)$  con respecto a  $z$  evaluada en  $z=0$ .

La expresión 4.2.3 es válida para todos los valores de  $z$  excepto en los polos, esta serie converge uniformemente dentro de cualquier contorno que no contenga polos.

En la sección 2.3, para el caso del potencial

$\nabla^2 \phi(x-a)$  se obtuvo la función de Green, la cuál está dada por 2.3.4. A nosotros nos interesa conocer el comportamiento de la función de Green cuando  $|z| \rightarrow \infty$ , es conveniente dividir el plano  $z$  en las siguientes regiones,  $I_+$ ,  $I_0$ ,  $I_-$  en donde  $I_+$  es la región superior del plano complejo en donde los puntos  $z$  son de la forma  $z = \alpha - i\beta$  con  $-\infty \leq \alpha \leq \infty$   $-\infty \leq \beta \leq \infty$ ,  $I_0$  es la parte de plano  $z$  que consta del eje real, cuyos elementos son de la forma  $z = \alpha$ ;  $-\infty \leq \alpha \leq \infty$ ,  $I_-$  es la parte inferior del plano  $z$  cuyos elementos son de la forma  $z = \alpha - i\beta$   $-\infty \leq \alpha \leq \infty$   $-\infty \leq \beta \leq 0$ .

Resulta fácil mostrar que la función de Green tiene el comportamiento siguiente de acuerdo a 2.3.4

$$\text{en } I_+, \lim_{\beta \rightarrow \infty} G(z) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{e^{2i\alpha} e^{-2\beta} - 1}{-2i\alpha + 2\beta + \lambda(e^{2i\alpha} e^{-2\beta} - 1)} \rightarrow 0$$

$$\text{en } I_0, \lim_{\alpha \rightarrow \infty} G(z) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{e^{2i\alpha} - 1}{-2i\alpha + \lambda(e^{2i\alpha} - 1)} \rightarrow 0$$

$$\text{en } I_-, \lim_{\beta \rightarrow \infty} G(z) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{e^{2i\alpha} e^{2\beta} - 1}{-2i\alpha - 2\beta + \lambda(e^{2i\alpha} e^{2\beta} - 1)} \rightarrow \frac{1}{\lambda}$$

por lo tanto el comportamiento de la función de Green en el límite  $|k| \rightarrow 0$  es dado por

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} G(k) = \frac{1}{\lambda} = \text{cte} \quad (4.2.4)$$

La ecuación 4.2.4 quiere decir que para desarrollar la función de Green, según el teorema dado en la sección 4.2 se requiere una substracción<sup>1)</sup>, en este caso se toma  $q=0$  en 4.2.3, finalmente usando 3.3.7 escribimos la función de Green en la forma siguiente

$$G(k) = G(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k}{(k-k_n)(-i\lambda)(-2ik_n a + (-i\lambda)a + 1)} \quad (4.2.5)$$

como nosotros usaremos solamente  $N$  polos, en este caso 4.2.5 se puede escribir como sigue

$$G(k) = G_B(k) + \sum_{n=1}^N \frac{k}{(k-k_n)(-i\lambda)(-2ik_n a + (-i\lambda)a + 1)} \quad (4.2.6)$$

en donde  $G_B(k)$  esta dado por

$$G_B(k) = G(0) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{k}{(k-k_n)(-i\lambda)(-2ik_n a + (-i\lambda)a + 1)} \quad (4.2.7)$$

De 4.2.6 podemos determinar  $G_B(k)$  explícitamente puesto que conocemos  $G(k)$  dado por 2.3.4.

Usando las ecuaciones 4.2.6 y 4.2.7 introducimos  $G_2(k)$  y  $G_B(k)$  las cuales quedan de la forma siguiente

$$G_Z(k) = \sum_{n=1}^N \frac{k}{(k-k_n)(-i\lambda)(-2ik_n a + (-i\lambda)(a+1))} \quad (4.2.8a)$$

$$G_B(k) = G(k) - G_Z(k) = G(0) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{k}{(k-k_n)(-i\lambda)(-2ik_n a + (-i\lambda)(a+1))} \quad (4.2.8b)$$

en donde 4.2.8a da la contribución de los primeros  $N$  polos en el desarrollo de Cauchy y 4.2.8b da la contribución del fondo.

Por otro lado sabemos que la matriz de dispersión y la función de Green están conectadas de la forma siguiente i.e. ecuación 2.2.11,

$$S(k) = \left[ 1 - 2ik G(a, a; k) \right] e^{-2ika} \quad (4.2.9)$$

Como hemos escrito  $G(k)$  en la forma siguiente

$$G(k) = G_Z(k) + G_B(k) \quad (4.2.10)$$

Substituyendo 4.2.10 en 4.2.9 se tiene la matriz de dispersión en función del desarrollo de Cauchy dada por

$$S(k) = \left[ 1 - 2ik G_Z(k) \right] e^{-2ika} - 2ik G_B(k) e^{-2ika}$$

ó bien

$$S(k) = S_Z(k) + S_B(k)$$

en donde los sumandos  $S_{\Sigma}(k)$  y  $S_B(k)$  son dados por

$$S_{\Sigma}(k) = \left[ 1 - 2i^a b \sum_{n=1}^N \frac{k}{(k-k_n)(-z^i k_n^a + (\mp \lambda)a + 1)} \right] e^{-z^i k a} \quad (4.2.11)$$

$$S_B(k) = S(k) - S_{\Sigma} = -2i^a b \left[ G(k) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{k}{(k-k_n)(-z^i k_n^a + (\mp \lambda)a + 1)} \right] e^{-z^i k a} \quad (4.2.12)$$

con lo que la sección eficaz queda finalmente de la forma siguiente

$$\begin{aligned} \sigma(E) = & \frac{\pi}{k^2} (1 - 2 \operatorname{Re} a | S_{\Sigma} + S_{\Sigma}^* S_{\Sigma}) + \frac{\pi}{k^2} (1 - 2 \operatorname{Re} a | S_B + \\ & + S_B S_B^*) - \frac{\pi}{k^2} (S_{\Sigma}^* S_B + S_{\Sigma} S_B^* - 1) \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

Por comodidad es conveniente escribir 4.2.13 de la forma siguiente

$$\sigma(E) = \sigma_{\Sigma}(E) + \sigma_B(E) \quad (4.2.14)$$

en donde  $\sigma_{\Sigma}(E)$  y  $\sigma_B(E)$  están dados como

$$\sigma_{\Sigma}(E) = \frac{\pi}{k^2} (1 - 2 \operatorname{Re} a | S_{\Sigma} + S_{\Sigma}^* S_{\Sigma}) \quad (4.2.15)$$

$$\sigma_B(E) = \frac{\pi}{k^2} (1 - 2 \operatorname{Re} a | S_{\Sigma} + S_{\Sigma}^* S_{\Sigma}) + \frac{\pi}{k^2} (S_{\Sigma}^* S_B + S_{\Sigma} S_B^* - 1) \quad (4.2.16)$$

con  $S_{\Sigma}(k)$  y  $S_B(k)$  dados por 4.2.11 y 4.2.12 lo que a nosotros a fin de cuentas nos interesa en esta sección, es obtener una expresión para la sección eficaz en función del des-

arrollo de Cauchy, el cual nos servirá para estudiar como contribuyen a la sección eficaz exacta los primeros  $N$  polos. Esto es, empleamos 4.2.15 como aproximación a  $S(k)$  exacta.

4.3.- Desarrollo de Cauchy de la Función de Green, con  $G(0)$  incorporado explícitamente.

En la sección 4.2 encontramos que la función de Green 2.3.4 tiene una substracción, en base a esto se obtuvo una expresión para la función de Green dada por

$$G(k) = G(0) + \sum_{n=1}^N \frac{k}{(k-k_n)(\mp i\lambda)(-2ik_n a + (\mp i\lambda)(a+1))} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{k}{(k-k_n)(\mp i\lambda)(-2ik_n a + (\mp i\lambda)(a+1))}$$

haciendo uso de 2.3.4 se puede ver fácilmente que

$$G(0) = \lim_{k \rightarrow 0} G(k) = - \frac{1}{1 + (\mp i\lambda)} \quad (4.3.1)$$

por lo tanto sustituyendo 4.3.1. en la expresión anterior se tiene lo siguiente

$$G(k) = - \frac{1}{1 + (\mp i\lambda)} + \sum_{n=1}^N \frac{k}{(k-k_n)(\mp i\lambda)(-2ik_n a + (\mp i\lambda)(a+1))} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{k}{(k-k_n)(\mp i\lambda)(-2ik_n a + (\mp i\lambda)(a+1))} \quad (4.3.2)$$

en donde  $G_Z(k)$  y  $G_B(k)$  están dados por

$$G_{\Sigma}(k) = \sum_{n=1}^N \frac{k}{(k-k_n)(\mp\lambda)(-zik_n + (\mp\lambda)a + 1)} \quad (4.3.2a)$$

$$G_B(k) = -\frac{1}{1+(\mp\lambda)} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{k}{(k-k_n)(\mp\lambda)(-zik_n + (\mp\lambda)a + 1)} \quad (4.3.2b)$$

por lo que 4.3.2 queda finalmente dada por

$$G(k) = G_{\Sigma}(k) + G_B(k) \quad (4.3.3)$$

en donde  $G_{\Sigma}(k)$  es la parte del desarrollo de la función de Green para la suma de  $n=1$  hasta  $n=N$  y  $G_B(k)$  es  $-\frac{1}{1+(\mp\lambda)}$  más la parte de la suma de  $n=N+1$  hasta infinito. Procedemos, como se ve, de manera análoga a la sección anterior, usamos la conexión entre la matriz de dispersión y la función de Green, dada en la sección 2.2, la cual nos da al sustituir 4.3.3, el resultado siguiente

$$S(k) = \left[ 1 - zik G_{\Sigma}(k) \right] e^{-zika} - zik G_B(k) e^{-zika} \quad (4.3.4)$$

Escribimos  $S(k)$  de la forma siguiente

$$S(k) = S_{\Sigma}(k) + S_B(k) \quad (4.3.5)$$

con  $S_{\Sigma}(k)$  representamos la parte de la suma en el desarrollo de la matriz de dispersión de  $n=1$  hasta  $n=N$  y  $S_B(k)$  es la parte correspondiente a  $-\frac{1}{1+(\mp\lambda)}$  más la parte de la suma de  $n=N+1$  hasta infinito, las formas analíticas de  $S_{\Sigma}(k)$  y  $S_B(k)$  son dadas por

$$S_{\Sigma}(k) = \left[ 1 - 2ik \left( -\frac{1}{4(i\lambda)} + \sum_{n=1}^N \frac{k}{(k-k_n)(i\lambda)(-2ik_n a + (i\lambda)(a+1))} \right) \right] e^{-2ika} \quad (4.3.6)$$

$$S_{\theta}(k) = -2ik \left( \frac{1}{ik - k \cot ka + (i\lambda)} - \sum_{n=1}^N \frac{k}{(k-k_n)(i\lambda)(-2ik_n a + (i\lambda)(a+1))} \right) e^{-2ika} \quad (4.3.7)$$

Finalmente la sección eficaz quedará dada por

$$\begin{aligned} \sigma(k) = & \frac{\pi}{k^2} (1 - 2 \operatorname{Re} S_{\Sigma} + S_{\Sigma}^* S_{\Sigma}) + \frac{\pi}{k^2} (1 - 2 \operatorname{Re} S_{\theta} + \\ & + S_{\theta}^* S_{\theta}) + \frac{\pi}{k^2} (S_{\Sigma}^* S_{\theta} + S_{\Sigma} S_{\theta}^* + 1) \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

o bien

$$\sigma(E) = \sigma_{\Sigma}(E) + \sigma_{\theta}(E) \quad (4.3.9)$$

en donde  $\sigma_{\Sigma}(E)$  y  $\sigma_{\theta}(E)$  son dadas por

$$\sigma_{\Sigma}(E) = \frac{\pi}{k^2} (1 - 2 \operatorname{Re} S_{\Sigma} + S_{\Sigma}^* S_{\Sigma}) \quad (4.3.10)$$

$$\sigma_{\theta}(E) = \frac{\pi}{k^2} (1 - 2 \operatorname{Re} S_{\theta} + S_{\theta}^* S_{\theta}) + \frac{\pi}{k^2} (S_{\Sigma}^* S_{\theta} + S_{\Sigma} S_{\theta}^* + 1) \quad (4.3.11)$$

la expresión 4.3.10 dará la contribución en la suma y 4.3.11 la contribución del fondo a la sección eficaz exacta.

#### 4.4.- Desarrollo finito de Cauchy para la Función de Green.

Consideremos en el plano complejo  $\mathbb{C}$  un contorno cerrado de radio limitado por la curva  $C$ , como se indica en la figura 3.1

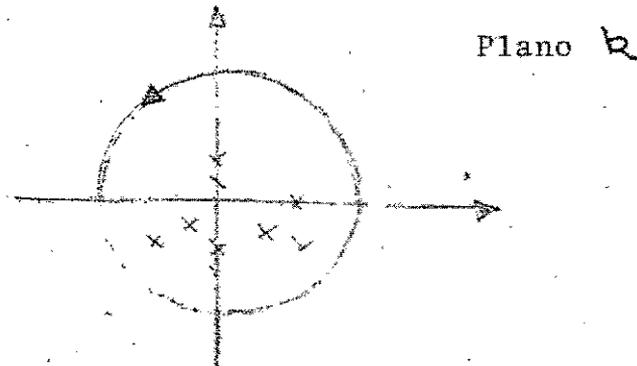


Figura 3.1

la curva de la figura 3.1 encierra un número  $N$  de polos. Hacemos uso del teorema del residuo para determinar la integral sobre el contorno  $C$  de la función  $G(z)/(z-z_n)$  esto nos da

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{G(z)}{z-z_n} dz = - \sum_{n=1}^N \frac{P_n(a_n)}{z-z_n} + G(z) \quad (4.4.1)$$

sustituyendo en 4.4.1 la expresión  $G(a_n; z)$  dada por 2.3.4 quedará determinado el valor de la integral para  $N$  polos.

Finalmente se podrá evaluar la función de Green en un punto fijo dentro del contorno, usando la expresión siguiente

$$G(a_n; z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C G(a_n; z) dz + \sum_{n=1}^N \frac{P_n(a_n)}{z-z_n} \quad (4.4.2)$$

por comodidad hacemos,  $D(k) = \frac{1}{2\pi i} \oint G(k, a; k) dk$   
 con lo que la expresión 4.4.2 queda de la forma

$$G(k) = Q(k) + \sum_{n=1}^N \frac{P_n(a)}{(k-k_n)} = Q(k) + \sum_{n=1}^N \frac{k_n}{(k-k_n)(\mp\lambda)(-2ik_n a + (\mp\lambda)a + 1)} \quad (4.4.3)$$

usando la conexión entre la matriz de dispersión y la función de Green, dada por 2.2.11 y tomando  $G(k)$  como  $G_Z(k) + G_B(k)$  con

$$G_Z(k) = \sum_{n=1}^N \frac{k_n}{(k-k_n)(\mp\lambda)(-2ik_n a + (\mp\lambda)a + 1)} \quad (4.4.3a)$$

$$G_B(k) = \frac{1}{ib - k \cot ka - (\mp\lambda)} - \sum_{n=1}^N \frac{k_n}{(k-k_n)(\mp\lambda)(-2ik_n a + (\mp\lambda)a + 1)} \quad (4.4.3b)$$

en donde 4.4.3a es la suma del desarrollo 4.4.3 y 4.4.3b es la función de Green dada por 2.3.4 más el término de la suma de  $n=1$  hasta  $N$ , finalmente la matriz de dispersión adquiere la forma siguiente

$$S(k) = \left[ 1 - 2ik \sum_{n=1}^N \frac{k_n}{(k-k_n)(\mp\lambda)(-2ik_n a + (\mp\lambda)a + 1)} \right] e^{-2ika} - 2ik \left( \frac{1}{ib - k \cot ka - (\mp\lambda)} + \sum_{n=1}^N \frac{k_n}{(k-k_n)(\mp\lambda)(-2ik_n a + (\mp\lambda)a + 1)} + Q(k) \right) e^{2ika} \quad (4.4.4)$$

Por comodidad separamos 4.4.4 de la siguiente forma

$$S(k) = S_B(k) + S_Z(k) \quad (4.4.5)$$

en donde

$$S_{\Sigma}(k) = \left[ 1 - 2ik \sum_{n=1}^N \frac{k_n}{(k-k_n)(i\lambda k - 2ik_n a + (i\lambda)a + 1)} \right] e^{-2ika} \quad (4.4.5a)$$

$$S_B(k) = -2ik \left( \frac{1}{(iz - b\cot\theta a - (i\lambda))} + \sum_{n=1}^N \frac{k_n}{(k-k_n)(i\lambda k - 2ik_n a + (i\lambda)a + 1)} + O(k) \right) e^{-2ika} \quad (4.4.5b)$$

substituyendo 4.4.5 en 4.1.4 la sección eficaz quedará de la forma siguiente

$$\begin{aligned} \sigma(E) = & \frac{\pi}{k^2} (1 - 2\text{Real } S_{\Sigma} + S_{\Sigma}^* S_{\Sigma}) + \frac{\pi}{k^2} (1 - 2\text{Real } S_B + S_B^* S_B) - \\ & - \frac{\pi}{k^2} (S_{\Sigma}^* S_B + S_{\Sigma} S_B^* + 1) \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

por comodidad dividimos la ecuación 4.4.6 de la siguiente manera.

$$\sigma_{\Sigma}(E) = \frac{\pi}{k^2} (1 - 2\text{Real } S_{\Sigma} + S_{\Sigma}^* S_{\Sigma}) \quad (4.4.7)$$

$$\sigma_B(E) = \frac{\pi}{k^2} (1 - 2\text{Real } S_B + S_B^* S_B) - \frac{\pi}{k^2} (S_{\Sigma}^* S_B + S_B^* S_{\Sigma} + 1) \quad (4.4.8)$$

La ecuación 4.4.7 dará la contribución a la sección eficaz exacta debida a los primeros  $N$  polos y 4.4.8 dará la contribución del fondo a la sección eficaz exacta.

Otro contorno útil para evaluar  $G(k)$ , lo indicamos en la figura 4.1, este contorno es interesante porque únicamente se consideran los polos que dan lugar a estados ligados y los polos que dan estados resonantes.

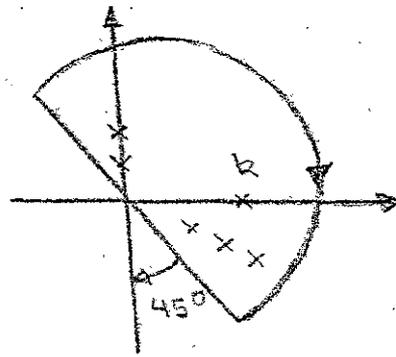


Figura 4.1

Lo interesante de esta sección es tener una expresión eficaz, con la cual se pueda analizar, la contribución a la sección eficaz exacta, de los primeros  $N$  polos y la contribución del fondo, este análisis se obtendrá usando las expresiones 4.4.6, 4.4.7, 4.4.8 y estudiando su comportamiento con la energía.

## CAPITULO 5

### 5.1.- Determinación del parámetro $\lambda$ .

En esta sección nos interesa encontrar un método cualitativo que nos diga el valor de  $\lambda$  requerido para que el potencial delta produzca resonancias de acuerdo a los criterios discutidos en la sección 2.4, para ello graficamos los valores del cambio máximo que sufre el corrimiento de fase para energías cercanas a la parte real de cada uno de los tres primeros polos complejos.

Lo anterior se obtuvo usando la fórmula siguiente para el corrimiento de fase

$$\delta(k) = \frac{1}{2i} \ln(S(k)) \quad (5.1.1)$$

donde  $S(k)$  está dada por la expresión 5.1.17.

El comportamiento del corrimiento de fase se obtuvo para los potenciales  $-\lambda \delta(r-a)$  y  $\lambda \delta(r-a)$ . Los resultados son ilustrados en las gráficas 5.1. y 5.2. De las gráficas se encuentra que valores positivos y negativos de  $\lambda$  son equivalentes. Lo anterior implica que ambas gráficas se pueden usar para elegir el valor de  $\lambda$  que produzca resonancias en los tres primeros polos complejos del sistema. Como se discutió en la sección 2.5 estas ocurren cuando el corrimiento de fase alcanza un cambio del orden de  $\pi$ .

Dado que ambos signos de  $\lambda$  en el potencial delta producen resonancias para valores suficientemente grandes de  $|\lambda|$ , hemos escogido basándonos en las condiciones pre-

sentadas en la introducción, esto es escoger un potencial que solo produzca resonancias, se realizan los cálculos con el signo de  $\lambda$  positivo, pues para este caso no existen ni estados ligados ni antiligados, como se vió en la sección 2.6. Para  $\lambda = \infty$ , las condiciones para encontrar valores aproximados de los polos complejos corresponden al caso de la parte (C1a) de la sección 2.6. Esto es, se usa la expresión 2.6.39 dada por

$$k_n \approx \frac{n\pi}{a} \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) - \frac{i}{a} \left(\frac{n\pi}{\lambda}\right)^2 \quad (5.1.2)$$

Usamos la expresión de arriba como primera aproximación al valor exacto, el cual se obtiene utilizando el método de Newton-Ralpstón<sup>15)</sup>. En la tabla 5.1 se presentan los valores para los primeros 28 polos situados en el cuarto cuadrante del plano complejo  $k$ . Los polos del tercer cuadrante  $k_{-n}$  se obtienen, claramente, a través de la expresión

$$k_{-n} = -k_n^* \quad (5.1.3)$$

## 5.2.- Comportamiento de la Sección Eficaz Exacta con la energía.

Sabemos de la sección 2.4, que la sección eficaz en términos de la matriz de dispersión es dada por

$$\sigma(k) = \frac{\pi}{k^2} |1 - S(k)|^2 \quad (5.2.1)$$

En la expresión de arriba, la matriz, de dispersión

como se vió en la sección 2.1, esta dada, para el caso del potencial  $V = \lambda \delta(r-a)$ , por

$$S(k) = \frac{-ik - k \cot ka + \lambda}{ik - k \cot ka + \lambda} e^{-2ika} \quad (5.2.2)$$

Estamos interesados en estudiar el comportamiento de la sección eficaz 5.2.1, como función de la energía. El resultado del cálculo se presenta en la gráfica 5.3. El cálculo se ha realizado en un intervalo de energías de  $E=0$  a  $E=100$  <sup>unidades?</sup> Las unidades son, como se recordará  $\hbar = 2M = 1$  y si escogemos también  $a=1$ . *¿Para propósitos de comparación?*

La gráfica nos muestra una región de energías donde aparecen las tres primeras resonancias. También en esta gráfica se muestran dos picos anchos, los cuales corresponden a anti-resonancias del sistema. Como se ve usando la tabla 5.1, a la presencia de cada resonancia puede asociársele un polo de la matriz de dispersión.

### 5.3.- Comportamiento de la Sección Eficaz con la Energía, para los Desarrollos de Mittag-Leffler y Cauchy.

Sabemos que la sección eficaz está dada por la expresión

$$\sigma(E) = \frac{\pi}{k^2} |1 - S(k)|^2 \quad (5.3.1)$$

Si escribimos  $S(k)$  en términos de los distintos desarrollos hemos visto en las secciones 4.1, 4.2, 4.3 y 4.4 que podemos es-

cribir  $S(k)$ , como

$$S(k) = S_Z(k) + S_B(k) \quad (5.3.2)$$

en donde  $S_Z(k)$  y  $S_B(k)$  representan respectivamente la contribución de  $N$  polos y del fondo.

Substituyendo 5.3.2 en la ecuación 5.3.1, vimos que adquiere la siguiente forma

$$\sigma(E) = \sigma_Z(E) + \sigma_B(E) \quad (5.3.3)$$

En donde  $\sigma_Z(E)$  representa la contribución de  $S_Z(k)$  a la sección eficaz exacta y  $S_B(k)$  representa la contribución del "fondo".

Las cantidades  $\sigma_Z(E)$  y  $\sigma_B(E)$  poseen en general la estructura siguiente:

$$\sigma_Z(E) = \frac{\pi}{k^2} (1 - 2 \operatorname{Re} S_Z + S_Z^* S_Z) \quad (5.3.4)$$

$$\sigma_B(E) = \frac{\pi}{k^2} (1 - 2 \operatorname{Re} S_Z + S_Z^* S_Z) + \frac{\pi}{k^2} (S_Z^* S_B + S_Z S_B^* + 1) \quad (5.3.5)$$

Usando las expresiones 5.3.4 y 5.3.5 podemos estudiar la contribución de  $\sigma_Z(E)$  y  $\sigma_B(E)$  a la sección eficaz exacta discutida en la sección anterior. En el cálculo se utilizan los polos obtenidos en la sección 5.1, Tabla 5.1.

En esta sección queremos averiguar cuál de los formalismos dados en las secciones 4.1, 4.2, 4.3 y 4.4 reproduce mejor la sección eficaz exacta en el rango de energías que incluye las tres primeras resonancias producidas por el potencial

delta. La respuesta esperamos tenerla al comparar el comportamiento con la energía, de la sección eficaz exacta  $\sigma(E)$  con el comportamiento de las secciones eficaces  $\sigma_Z(E)$  de los formalismos mencionados anteriormente. Asimismo es de interés observar el comportamiento con la energía del llamado "fondo", para cada formalismo, y ver si es pequeño y varía lentamente con la energía.

A continuación presentamos los resultados de calcular  $\sigma_Z(E)$  para los diferentes desarrollos.

Para el caso del desarrollo de Mittag-Leffler, la tabla 5.2 muestra, para un conjunto de energías, los valores que adquieren la sección eficaz exacta  $\sigma(E)$ , la contribución de la suma  $\sigma_Z(E)$  y la contribución del fondo  $\sigma_B(E)$ . El cálculo se realizó para 6 polos. La tabla 5.3 exhibe un cálculo similar usando 56 polos. Al comparar los resultados presentados en ambas tablas se observa que son equivalentes, es decir que los valores del  $\sigma_Z(E)$  y  $\sigma_B(E)$  son esencialmente los mismos usando 6 ó 56 polos.

Por otro lado se observa que en las energías de resonancia,  $\sigma_Z(E)$ , no reproduce adecuadamente a la sección eficaz exacta. Lo anterior parece sorprendente pues uno esperaría, dado que las resonancias son aisladas, que  $\sigma_Z(E)$  se aproximara a la fórmula de Breit-Wigner en la aproximación de un polo.

La discrepancia resulta de que al evaluar  $\sigma_Z(E)$ , se requiere de  $(1 - S_Z(E))$ . La unidad en esta última cantidad provoca una contribución adicional que impide que en las energías de resonancia,  $\sigma_Z(E)$  reproduzca la fórmula de

Breit-Wigner. Para evitar lo anterior se requiere sumar y restar la unidad al desarrollo de  $S(k)$ , incorporando el signo positivo en  $S_Z(k)$  y el negativo en el fondo. De esta manera  $S_Z(k)$  queda en lugar de 4.1.3a

$$S_Z(k) = 1.0 - i \sum_n^N \frac{2k k_n e^{-2ikna}}{(k - k_n)(\Gamma) - (2k_n a + (\Gamma) + i)} \quad 5.3.6$$

Cabe mencionar que otros autores<sup>2,14)</sup> realizan exactamente la misma maniobra, la cual en realidad implica desarrollar  $(1 - S_Z)$ , cantidad que es proporcional a la matriz de transición  $T_Z$ <sup>8)</sup>.

El resultado de evaluar  $\sigma_Z(E)$  usando la expresión 5.3.6, se muestra en la gráfica 5.4, en donde se ve que en energías de resonancia la sección exacta es reproducida adecuadamente. Por otro lado, fuera de resonancia, dicho cálculo, da un valor esencialmente nulo. Lo anterior se muestra en la tabla (5.4a).

Los resultados para los distintos desarrollos de Cauchy se muestran respectivamente para 6 y 56 polos, en las tablas 5.4 y 5.5, 5.6 y 5.7, 5.8 y 5.9 respectivamente para el desarrollo de Cauchy con una substracción, con el valor de  $G(0)$  incorporado explícitamente en la suma, y, para el desarrollo finito sin substracciones. Se observa primeramente que usar 6 ó 56 polos es esencialmente equivalente. Además se ve que la sección eficaz exacta  $\sigma(E)$  es reproducida en forma muy aproximada por  $\sigma_Z(E)$  y que el fondo varía lentamente con la energía, como se muestra en las gráficas 5.5, 5.6 y 5.7 para los diferentes casos.

Un hecho interesante es que comparando entre si los distintos desarrollos de Cauchy, se observa que dan resultados muy semejantes.

Por último en la gráfica 5.8 se muestra el comportamiento con la energía de la sección eficaz exacta  $\sigma(E)$ , y las contribuciones  $\sigma_{\Sigma}(E)$ , usando respectivamente el método de Mittag-Leffler, con  $S_{\Sigma}(k)$  dado por la expresión 5.3.6 y el desarrollo finito de Cauchy. Como se observa, el método de Cauchy reproduce en forma muy aproximada a la sección eficaz exacta a través de todo el rango de energías que comprende a las 3 primeras resonancias. Por otro lado como se vió ya en la gráfica 5.4a, el método de Mittag-Leffler solo reproduce satisfactoriamente a la sección eficaz exacta en las energías de resonancia.

En el capítulo próximo se discuten y analizan los resultados que hemos presentado en este capítulo.

Tabla 5.1 - Valores exactos para los polos complejos

$m$	$d_m$	$B_m$
1.	3.110526	-.00956
2	6.22128	-.00380
3	9.33249	-.00847
4	12.44437	-.01488
5	15.55707	-.02289
6	18.67075	-.03235
7	21.78553	-.04309
8	24.90148	-.05495
9	28.01865	-.06775
10	31.13707	-.08134
11	34.25673	-.09556
12	37.37761	-.11027
13	40.49968	-.12535
14	43.62290	-.14069
15	46.74721	-.15620
16	49.8725	-.17178
17	52.99888	-.18739
18	56.12612	-.20294
19	59.25423	-.21841
20	62.38310	-.23376
21	65.51279	-.24894
22	68.64314	-.26394
23	71.77415	-.27874
24	74.90576	-.29332
25	78.03792	-.30768
26	81.17061	-.32180
27	84.17061	-.33568
28	87.43741	-.34932

Tabla 5.2 - Método de Mittag-Leffler (56 polos).

$E$	$\sigma_{\Sigma}(E)$	$\sigma_{\Omega}(E)$	$\sigma(E)$
3	4.102661	1.048421	3.054239
4.5	2.081207	.699410	1.381796
5.5	1.222264	.572532	.649731
6.5	.650079	.484743	.165336
9.605	.031944	.360706	-.360706
9.65	.151891	.574716	-.422825
9.675	1.298844	2.907507	1.608662
38.7	.324415	.717794	-.393379
39	.001155	.084488	-.083333
45	.035890	.070353	-.034463
60	.202376	.053478	.148898
80	.048340	.041570	.006769
87.07	.144241	.311533	-.167292
87.5	.006358	.054894	-.048535
89	.00000009	.033759	-.033759
90	.000083	.033828	-.033744

Tabla 5.3 - Método de Mittag-Leffler (6 polos)

$E$	$\sigma_Z(E)$	$\sigma_B(E)$	$\sigma(E)$
3	4.102661	1.047546	3.055115
4.5	2.081207	.698530	1.382676
5.5	1.222264	.571648	.650615
6.5	.650079	.483854	.166224
9.605	.031944	.359308	-.327363
9.65	.141891	.572129	-.420238
9.675	1.298844	2.905895	-1.607051
38.7	.324415	.715534	-.391119
39	.001155	.084088	-.082933
45	.035890	.069417	-.033526
60	.202376	.052470	-.149906
80	.483402	.040422	.007917
85	.019256	.042186	-.022930
87.07	.144241	.308935	-.164694
87.5	.006358	.054842	-.048484
89	.00000009	.032925	-.032925
90	.000083	.032893	-.032809

Tabla 5.4 - Desarrollo de Cauchy con una Substracción con  
(6 polos).

$E$	$\sigma_{\Sigma}(E)$	$\sigma_{\Sigma}(E)$	$\sigma(E)$
3	4.102661	4.080724	.021972
4.5	2.081207	2.029115	.052101
5.5	1.222264	1.168902	.05336
6.5	.650079	.604082	.045996
9.605	.031944	.020598	.011346
9.65	.151891	.126526	.025364
9.675	1.298844	1.292833	.006081
38.7	.324415	.319610	.004804
39	.001155	.004827	-.003672
45	.035890	.049600	-.013710
60	.202376	.207010	-.00463
80	.048340	.035117	.013222
85	.019256	.010413	.008843
87.07	.144241	.138627	.005613
87.5	.006358	.013115	-.006757
89	.00000009	.001413	-.001413
90	.000083	.002162	-.002078

Tabla 5.4a - Comparación de la sección eficaz exacta con las contribuciones de la suma y el "fondo" para el Método de Mittag-Leffler.

$E$	$\sigma_{\Sigma}(E)$	$\sigma_B(E)$	$\sigma(E)$
3	$.3 \times 10^{-4}$	4.080	4.1026
9.675	1.2887	.0101	1.2988
15	$.1 \times 10^{-4}$	.3736	.3429
21.5	$.2 \times 10^{-4}$	.5811	.5758
38.7	.3184	.006	.3244
62.0	$.1 \times 10^{-4}$	.2026	.2020

Tabla 5.5 - Desarrollo de Cauchy con una Substracción  
con (56 polos)

$E$	$\sigma_z(E)$	$\sigma_B(E)$	$\sigma(E)$
3	4.102661	4.079429	.023231
4.5	2.081207	2.028214	.052992
5.5	1.222264	1.168327	.053936
6.5	.650079	.603780	.046298
9.605	.031944	.020653	.011291
9.65	.151891	.126751	.025139
9.675	1.298844	1.294141	.004703
38.7	.324415	.321066	.003348
39	.001155	.004745	-.003590
45	.035890	.04903	-.013148
60	.202376	.205408	-.003031
80	.048340	.035360	.012979
85	.019256	.010765	.008491
87.07	.144241	.140329	.003911
89	.00000009	.001256	-.001256
90	.000083	.001960	-.001876

Tabla 5.6 - Desarrollo de Cauchy con (6 polos).

$E$	$\sqrt{Z}(E)$	$\sqrt{R}(E)$	$\sqrt{J}(E)$
3	4.102661	4.05916	.04335
4.5	2.08120	1.978104	.103102
5.5	1.222264	1.117019	.105244
6.5	.650079	.560001	.09007
9.605	.031944	.011790	.020154
9.65	.151891	.103939	.047951
9.675	1.298844	1.291316	.007442
39.7	.324415	.319556	.004825
39	.001155	.010932	-.097777
45	.035890	.0651261	-.029239
60	.202376	.211775	-.009398
80	.048340	.024561	.023778
85	.019256	.004509	.014747
87.07	.144241	.138130	.006110
87.5	.006358	.021922	-.015844
89	.00000009	.005275	-.005275
90	.008398	.006645	-.005611

Tabla 5.7 - Desarrollo de Cauchy con (56 polos).

$E$	$\sigma_{\Sigma}(E)$	$\sigma_{\mathcal{B}}(E)$	$\sigma(E)$
3	4.102661	4.057883	.044797
4.5	2.081207	1.977091	.104116
5.5	1.222264	1.116438	.105825
6.5	.650079	.559692	.090383
9.605	.031944	.011835	.020109
9.65	.151889	.104154	.047736
9.675	1.298844	1.292721	.006123
38.7	.394415	.321000	.003414
39	.001155	.010805	-.009650
45	.035890	.084510	-.028619
60	.202376	.210095	-.007718
80	.048340	.024685	-.023655
85	.019256	.004729	.014527
87.07	.144241	.139694	.004547
87.5	.006358	.021736	-.015378
89	.000013	.005458	-.005444
90	.000083	.006298	-.006214

Tabla 5.8 - Desarrollo Finito de Cauchy (6 polos)

$E$	$\sigma_z(E)$	$\sigma_B(E)$	$\sigma(E)$
3	4.102661	4.082072	.020588
4.5	2.081207	2.032196	.049010
5.5	1.222264	1.172039	.050224
6.5	.650079	.606759	.043319
9.605	.031944	.021121	.010823
9.65	.151891	.127935	.023956
9.675	1.298844	1.292922	.005921
38.7	.324415	.319688	.004726
39	.001155	.004544	-.003389
45	.035890	.048762	-.012871
60	.202376	.206806	-.004429
80	.048340	.035817	.012522
85	.019256	.010838	.008418
87.07	.144241	.138734	.005506
97.5	.006358	.012657	-.006337
89.0	.00000009	.001263	-.001263
90	.000083	.001975	-.001891

Tabla 5.9 - Desarrollo Finito de Cauchy (56 polos)

$E$	$\sigma_Z(E)$	$\sigma_B(E)$	$\sigma(E)$
3	4.102661	4.087128	.015539
4.5	2.081207	2.045702	.035504
5.5	1.222264	1.186069	.036194
6.5	.650069	.618936	.031142
9.605	.031944	.024119	.007825
9.65	.151891	.134784	.017106
9.675	1.298844	1.295155	.003688
38.7	.324415	.321632	.002782
39	.001155	.003280	-.002125
45	.035890	.044454	-.008564
60	.202376	.204399	-.002022
80	.048340	.039442	.008897
85	.019256	.013309	.005947
87.07	.144241	.141083	.003157
87.5	.006358	.010365	-.004006
89	.00000009	.0000567	-.000567
90	.000083	.001067	-.000983

Tabla 6.1 - Método de Mittag-Leffler con Esfera Dura.

E	$\sigma_2(E)$	$\sigma_B(E)$	$\sigma(E)$
3	4.086351	.016310	4.102661
6	.862367	.042725	.905092
7	.144423	.034457	.448881
9.675	1.289520	.009323	1.298844
11	.034968	-.010422	.024545
38.7	.316377	.008316	.324415
87.07	.135925	.008316	.144241

Tabla 6.2 - Método de Cauchy sin Esfera Dura.

$E$	$\sigma_{\Sigma}(E)$	$\sigma_B(E)$	$\sigma(E)$
3	1.063442	3.039219	4.102661
6	.561362	.343729	.905092
7	.763467	-.611576	.151891
9.675	.317472	.971371	1.298844
11	.713467	-.611576	.151891
38.7	.080545	.243869	.324415
87.07	.036518	.107722	.144241

Tabla 6.3 - Métodos de Mittag Leffler y Cauchy sin  
Esfera Dura.

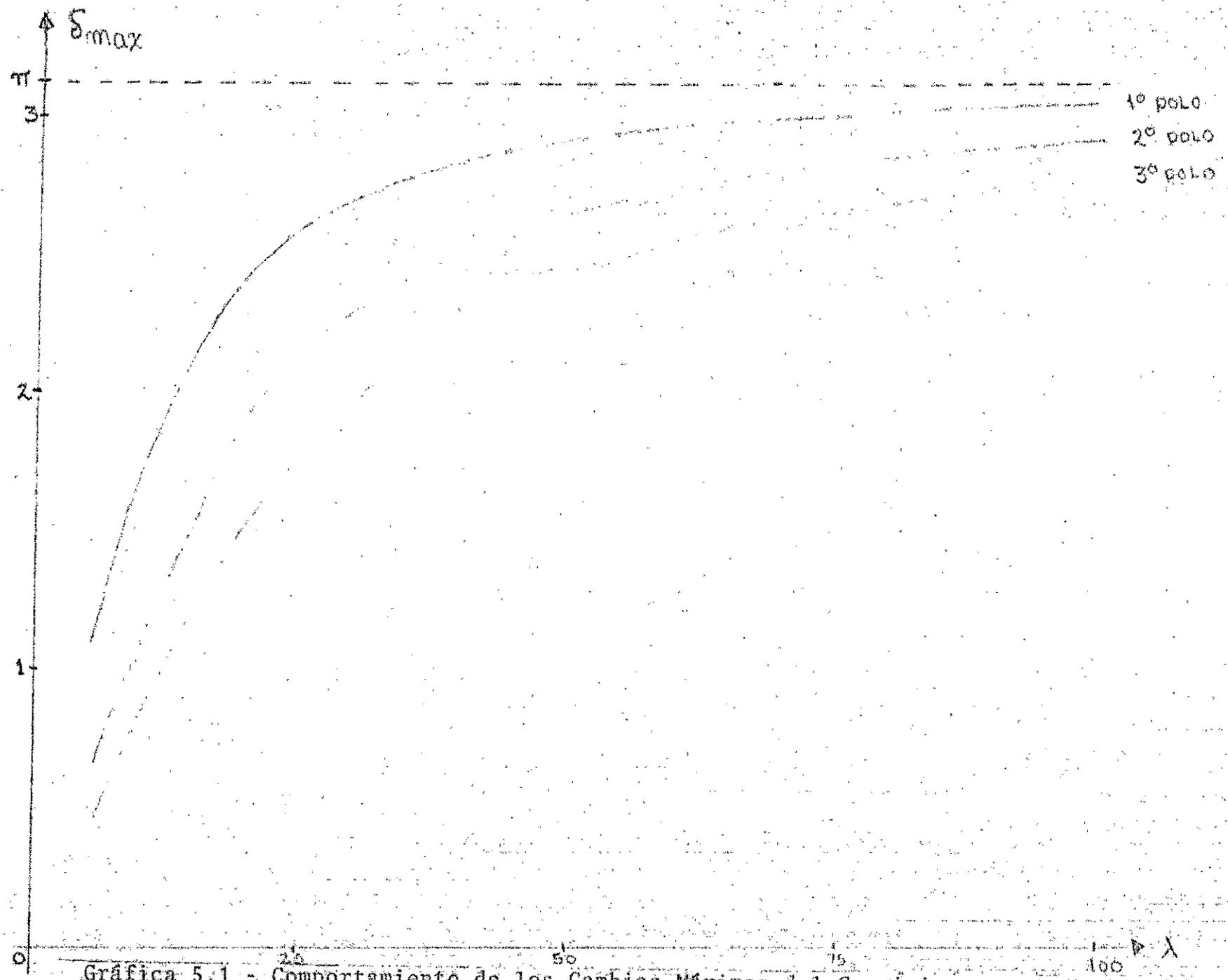
	METODO DE MITTAG-LEFFLER		METODO DE CAUCHY	
	Re $S_z$	Im $S_z$	Re $S_z$	Im $S_z$
3	-.000573	.004791	-.007478	-.022378
6	-.001396	.008730	-.035412	.006685
7	-.001608	.009807	-.034422	.022509
9.675	-1.990250	-.111849	-.003049	-.048922
11	-.000739	-.001526	.008162	.022357
38.7	-1.959671	-.287346	.004578	-.036583
87.07	-1.913766	-.379731	-.005607	.029588

Tabla 6.4 - Métodos de Mittag-Leffler y Cauchy con Esfera Dura.

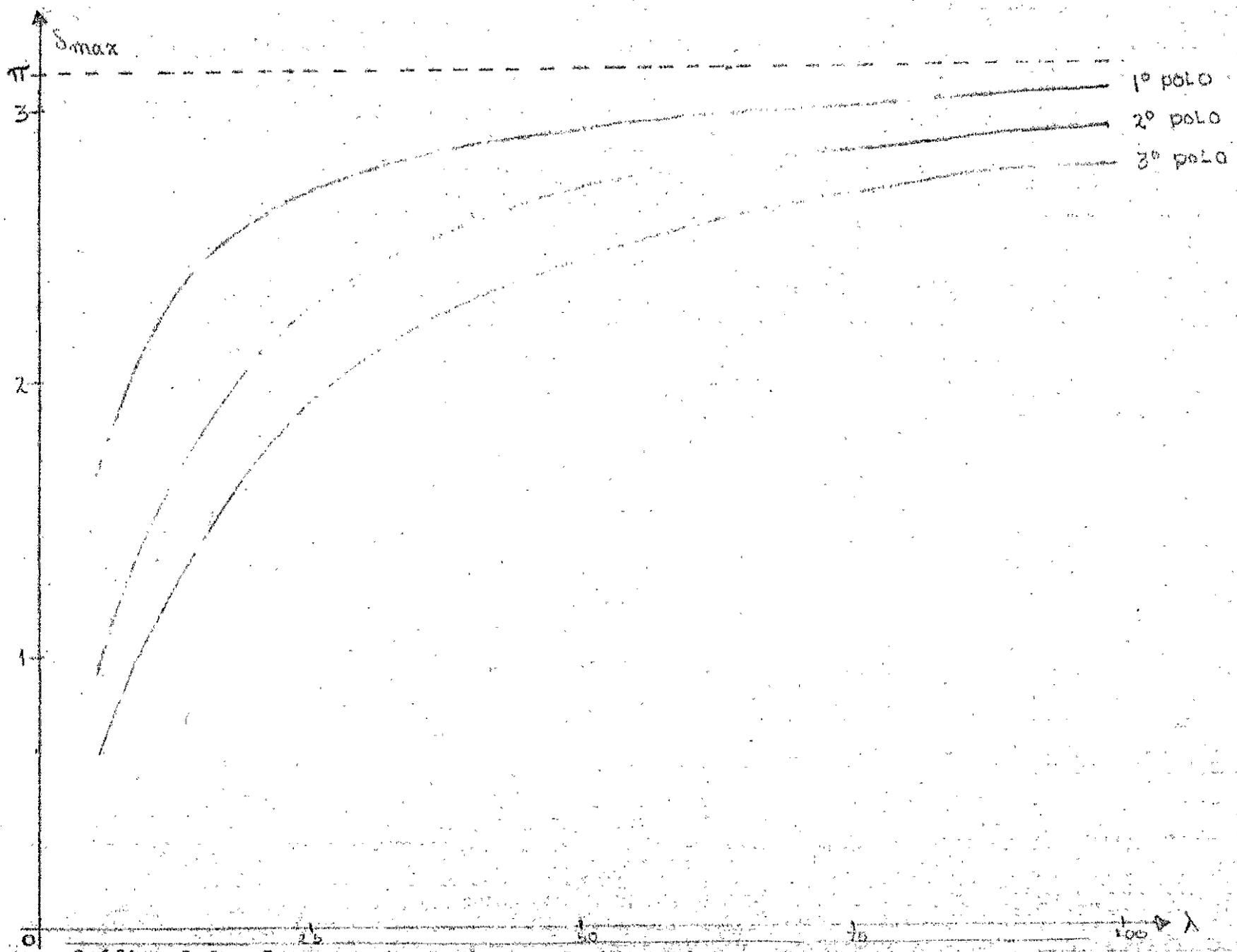
	MÉTODO DE MITTAG LEFFLER		MÉTODO DE CAUCHY	
	$Re S_z$	$Im S_z$	$Re S_z$	$Im S_z$
3	-.949109	.321738	.937322	.348940
6	.184232	.99719	.231099	.973138
7	.545673	.846755	.587856	.809114
9.675	-.992187	-.049636	-.991699	-.119426
11	.938611	-.344484	.912653	-.413631
38.7	-.967412	-.163161	-.965060	-.304653
87.07	-.931254	-.193529	-.924440	-.410259

Tabla 6.5 - Comparación entre la sección eficaz exacta para el potencial delta y la sección eficaz de esfera dura.

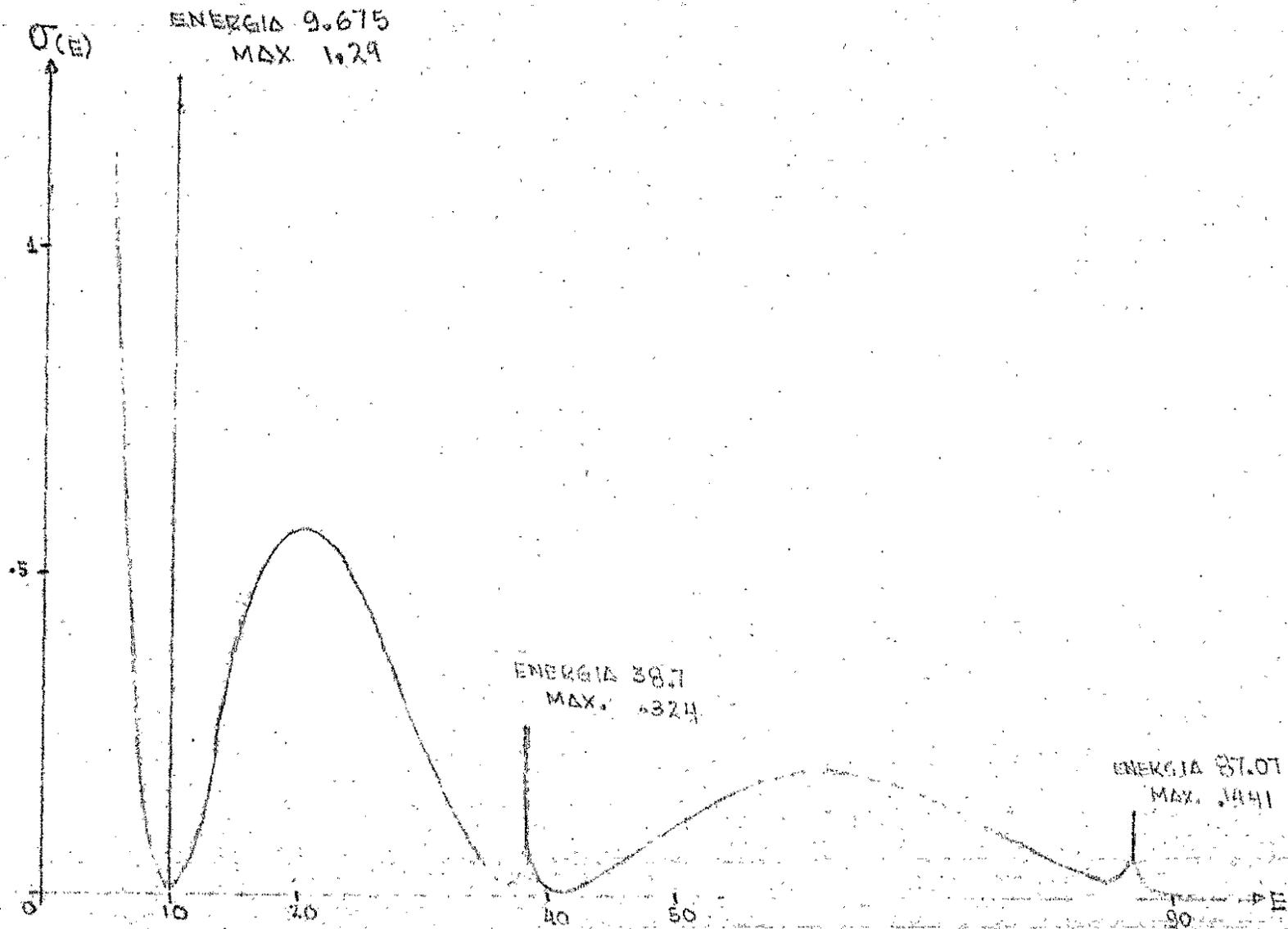
E	$\sigma_{(E)}$ ESFERA DURA	$\sigma_{(E)}$
3	4.0808	4.1026
9.675 (res.)	.00126	1.2988
15	.3736	.3429
21.5	.5811	.5758
38.7 (res.)	.00126	.3244
62.0	.2026	.2020
87.07	.00126	.1442



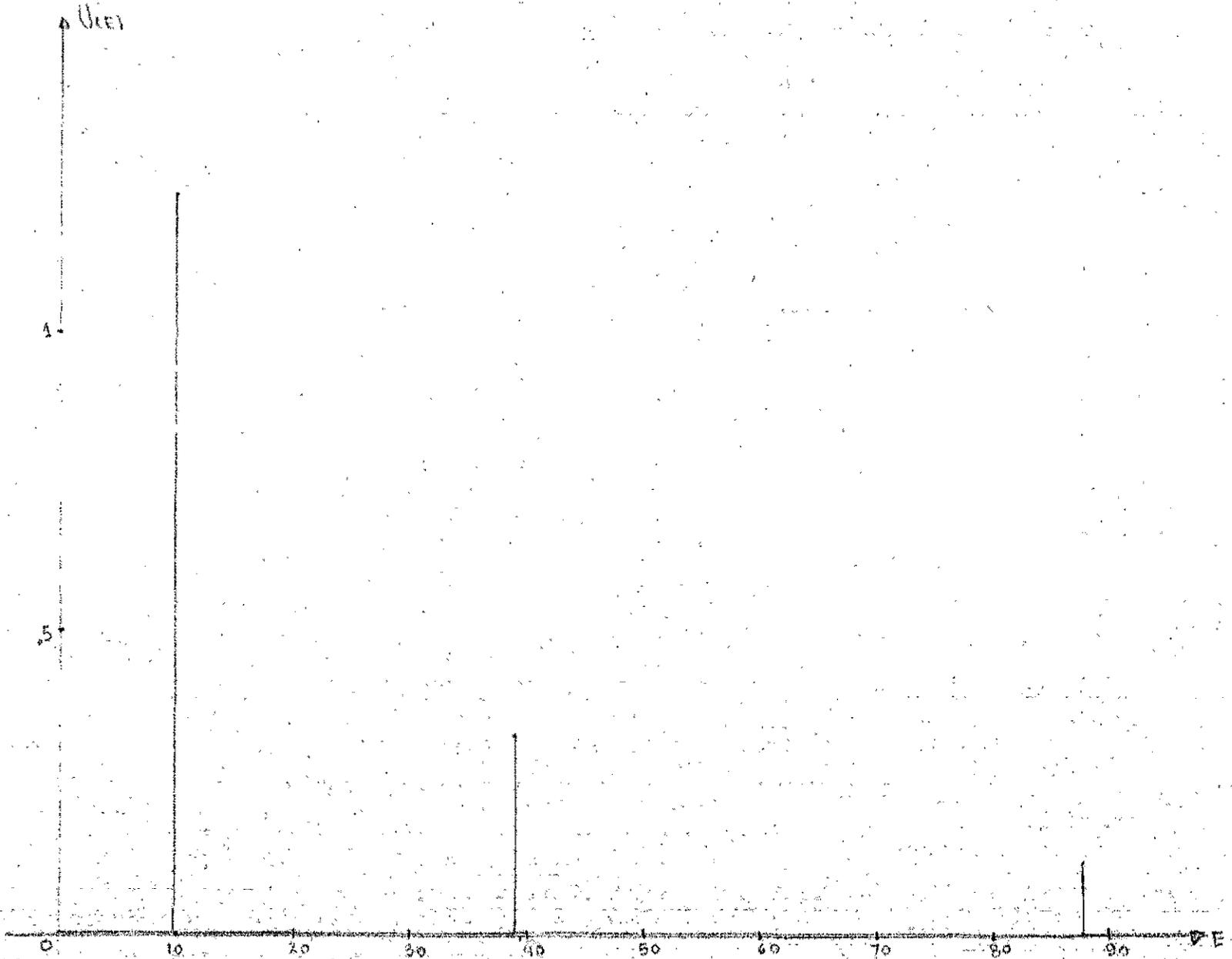
Gráfica 5.1 - Comportamiento de los Cambios Máximos del Corrimiento de Fase para el Caso  $\lambda S(r-\alpha)$  para distintos valores de  $\lambda$



Gráfica 5.2 - Comportamiento de los Cambios Máximos del Corrimiento de Fase para el caso  $\lambda \delta(\alpha)$  para distintos valores de  $\lambda$

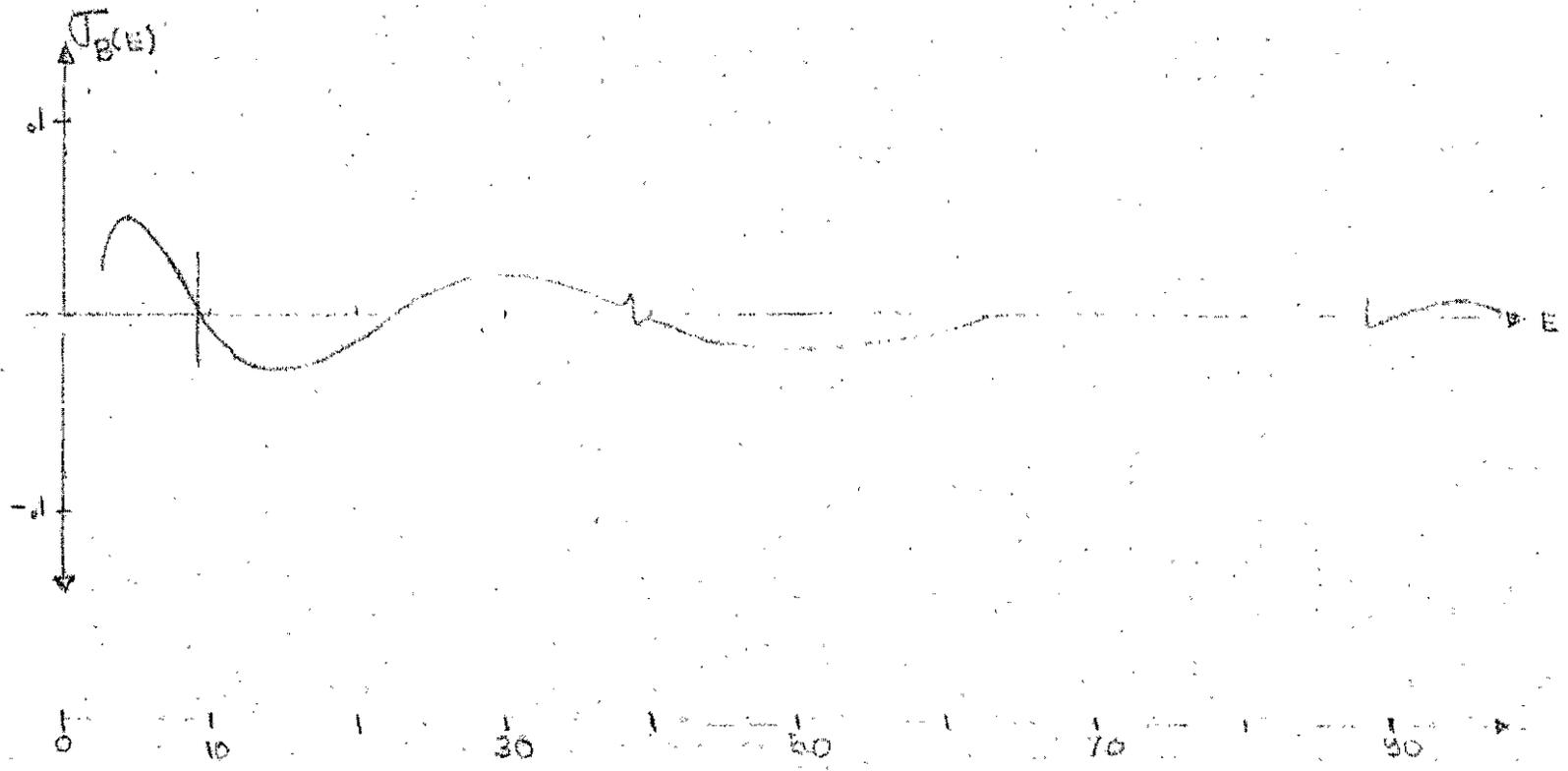


Gráfica 5.3 - Comportamiento de la Sección Eficaz Exacta con la Energía.

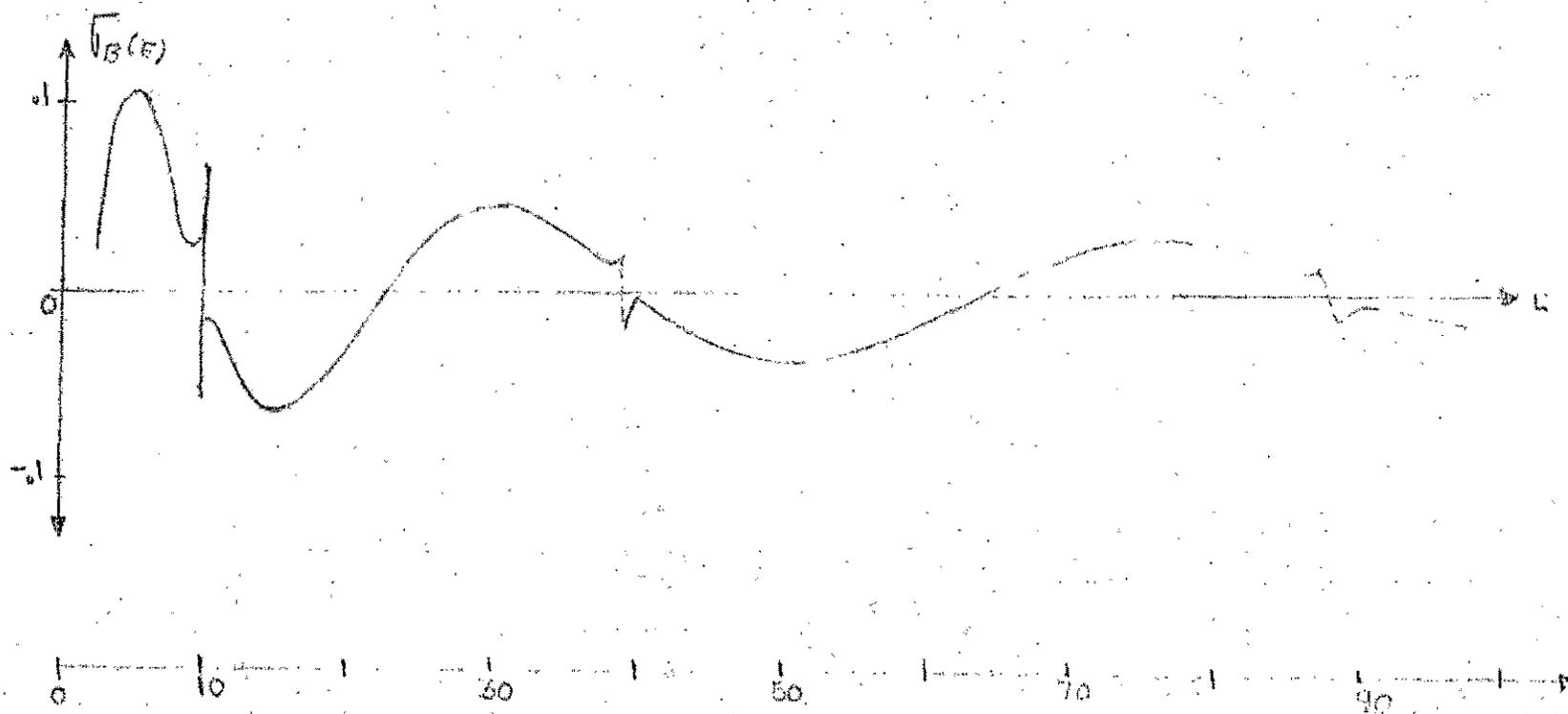


GRAFICA 5.4 CALCULO DE  $U_2(E)$  POR EL METODO DE MITAG-LEFFLER USANDO

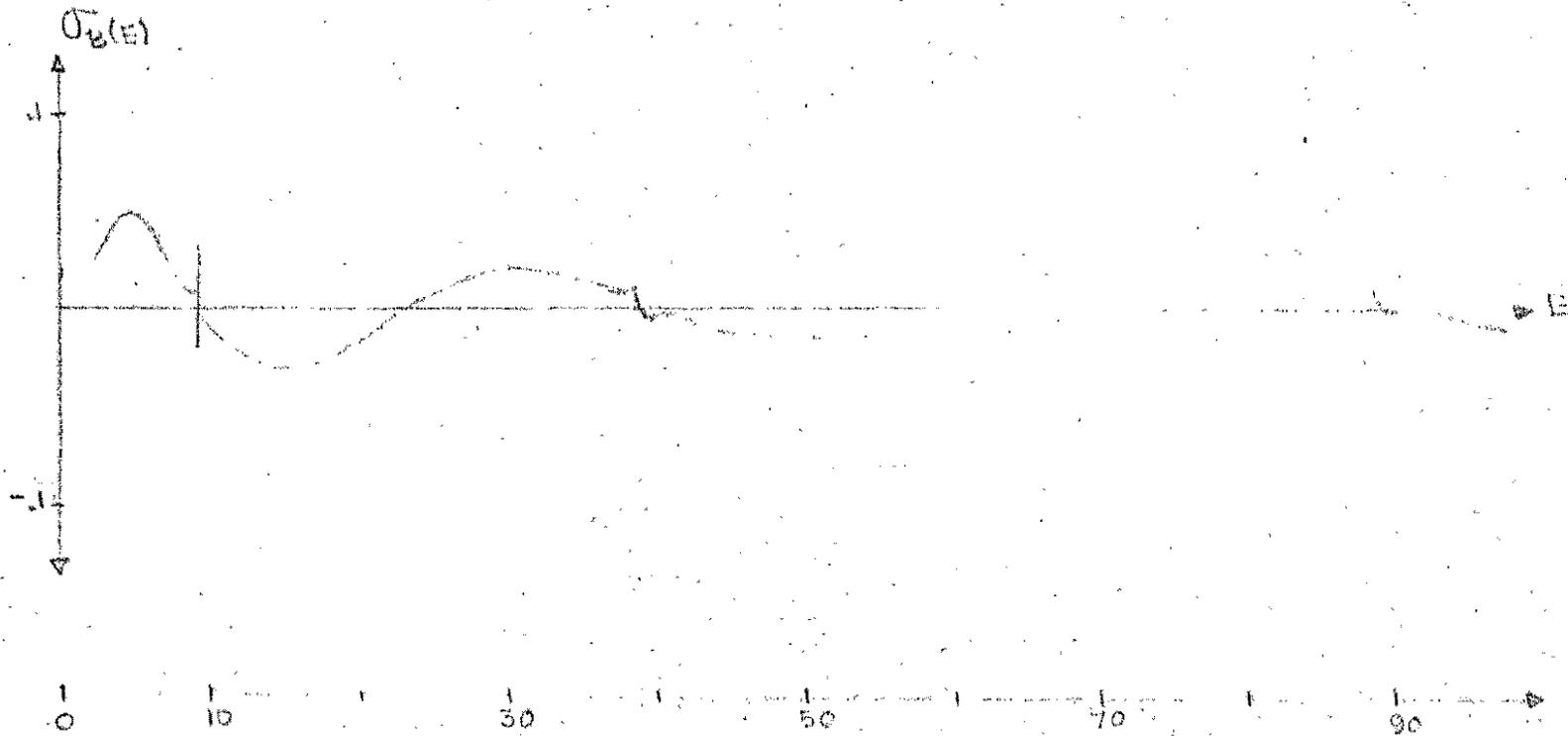
$$S_1 = 6 \text{ y } S_2 = 6$$



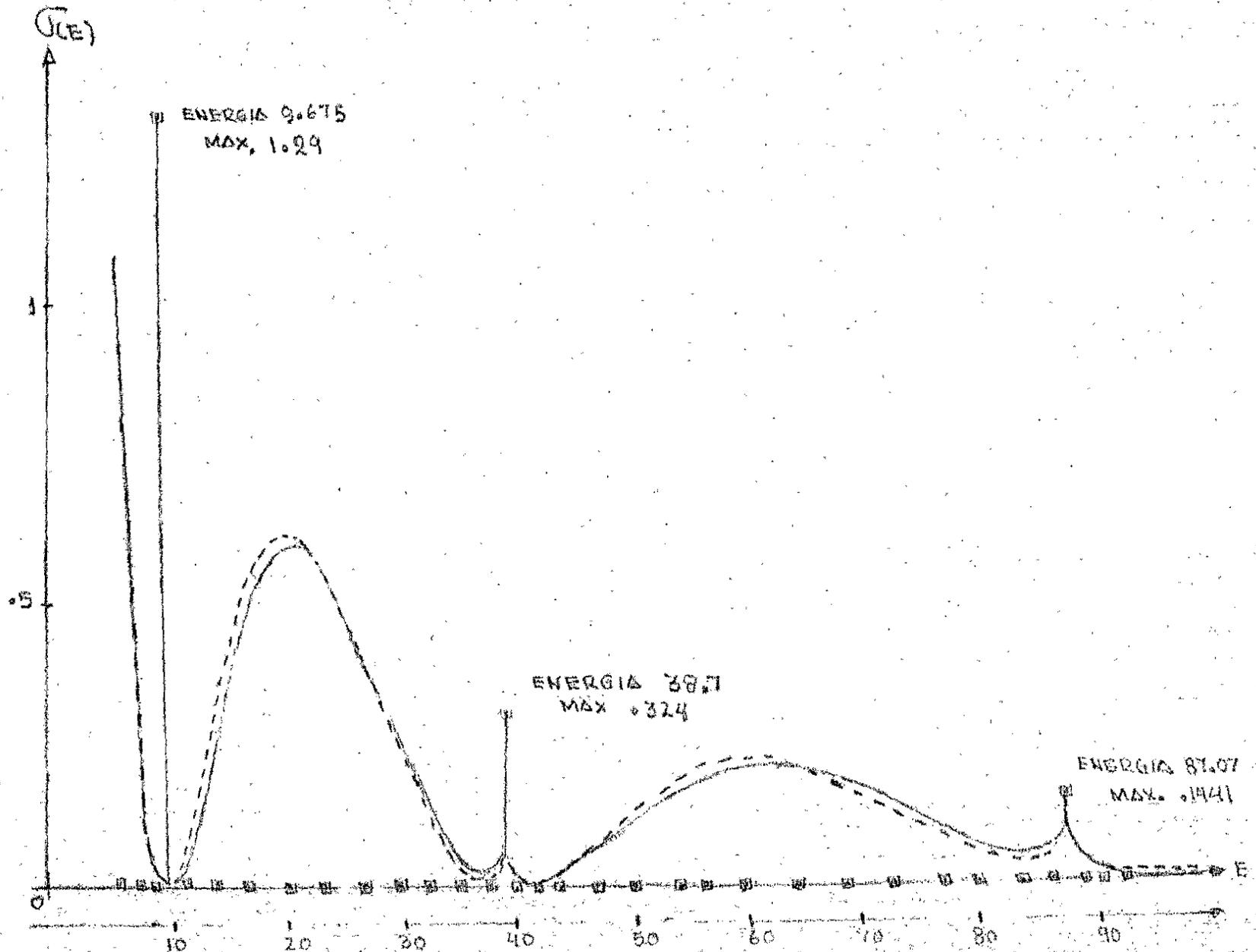
Gráfica 5.5 - Comportamiento con la Energía del Fondo  $\sigma_B(E)$  en el Caso del Desarrollo con una Substracción. CAUCHY



Gráfica 5.6 - Comportamiento con la Energía del Fondo para el Desarrollo de Cauchy con  $G(0)$ , con 6 polos.



Gráfica 5.7 - Comportamiento de la Energía del Fondo en el Caso del Desarrollo Finito de Cauchy, con 6 polos.



GRAFICA 5.8 — CALCULO EXACTO DE MITTAG-LEFFLER, --- DE SARROLLO FINITO DE CAUCHY, ■ EL METODO

## CAPITULO 6

### DISCUSION Y CONCLUSIONES

En el capítulo 5 encontramos que la suma sobre los polos complejos de la matriz  $S$ , usando el desarrollo de Mittag-Leffler, no reproduce adecuadamente a la sección eficaz exacta. Además se mostró que la variación del fondo con la energía es grande.

Por otro lado se vió que la contribución de la suma  $\sigma_2(E)$  utilizando los desarrollos de Cauchy reproduce adecuadamente a la sección eficaz exacta. Se observó también, que para estos desarrollos el valor de  $\sigma_2(E)$  posee aproximadamente el mismo valor con  $N=3$  y  $N=56$  polos lo que sugiere que converge rápidamente para estos casos.

Es de importancia buscar una explicación de las discrepancias entre los desarrollos de Cauchy y de Mittag-Leffler.

Como las expresiones 2.1.17 y 2.3.4 indican que los polos de la matriz de dispersión son los mismos que tiene la función de Green, las discrepancias podrían originarse en el hecho de que los residuos, en el caso de Mittag-Leffler, son diferentes a los de Cauchy. Esto lo podemos ver de las ecuaciones 3.3.7 y 3.3.8 que exhiben la forma explícita de los residuos en ambos casos. Sin embargo, si observamos la estructura de los sumandos de  $S_2(k)$  para Mittag-Leffler y los distintos métodos de Cauchy i.e. ecs. 4.1.3a y 4.2.11, se ve que la diferencia más importante aparece en el término exponencial. En el método de Mittag-Leffler el término exponencial depende del número de onda complejo  $k_n$ , mientras que en los métodos de Cauchy, el término

exponencial depende del número de onda real  $k$ .

Lo anterior indica que los sumandos de Mittag-Leffler y Cauchy van a contribuir respectivamente en forma muy distinta fuera de resonancia, pero en las energías de resonancia, para las cuales  $k a \cong n \pi$ , dado que real  $k_n a \cong n \pi$  i.e. ecuación 2.6.39, si las resonancias son muy estrechas como en el caso que analizamos, la contribución de los sumandos en los distintos desarrollos será muy similar.

Por otro lado si observamos la fórmula 2.2.11, la cual conecta la matriz de dispersión con la función de Green, nos damos cuenta que aparece un término exponencial en el primer sumando, el cual da la contribución de esfera dura al sustituir 2.2.11 en 2.4.1.

Lo anterior sugiere estudiar el efecto de incorporar, en la parte de la suma  $\mathcal{D}_Z(E)$ , del desarrollo de Mittag-Leffler, el término de esfera dura y asimismo en los desarrollos de Cauchy, ver el resultado de incorporar el término de esfera dura en el fondo  $\mathcal{D}_B(E)$ . Los resultados de estas modificaciones se presentan en las tablas 6.1 y 6.2. La tabla 6.1 nos muestra que el término  $\mathcal{D}_Z(E)$  en el desarrollo de Mittag-Leffler reproduce con una muy buena aproximación la sección eficaz exacta. También se observa que la contribución del fondo,  $\mathcal{D}_B(E)$ , es pequeña. Por otro lado la tabla 6.2 nos muestra que el término  $\mathcal{D}_Z(E)$  en el desarrollo finito de Cauchy, no reproduce adecuadamente a la sección eficaz exacta y la contribución del fondo  $\mathcal{D}_B(E)$  en este caso es grande. Conviene mencionar que, dado que los desarrollos de Cauchy son equivalentes, escogimos para este

análisis el desarrollo finito de Cauchy.

Los resultados anteriores indican que los desarrollos de Mittag-Leffler y Cauchy son equivalentes si se introduce el término que da origen a esfera dura al considerar  $\mathcal{V}_2(E)$ .

Es interesante saber si  $S_2$  cumple la condición de unitaridad en el caso que no se incorpore el término de esfera dura para los casos de Mittag-Leffler y Cauchy. Lo anterior se muestra en la tabla 6.3 en donde se ve que  $S_2(k)$  no es, en este caso, unitaria. En cambio si agregamos el término de esfera dura a  $\mathcal{V}_2(E)$ , entonces  $S_2(k)$  es claramente unitaria en ambos desarrollos, como lo muestra la tabla 6.3. Anteriormente nos dimos cuenta que el término de esfera dura es de gran importancia. Es por ello que introducimos la tabla 6.5, en la cual comparamos la sección eficaz exacta con la sección eficaz de esfera dura. Nos damos cuenta que fuera de las energías de resonancia la mayor contribución a la sección eficaz exacta la da el término de esfera dura, lo cual implica que la contribución del término de los polos  $\mathcal{V}_2(E)$ , es muy pequeño y solo alcanza valores apreciables en las energías de resonancia. Asimismo, se puede concluir que los términos cruzados son también muy pequeños.

Por lo tanto, en relación a los objetivos planteados en la introducción, podemos concluir que los desarrollos de Mittag-Leffler y Cauchy usando para  $S_2$  únicamente los términos asociados a los polos, no reproducen a la sección eficaz exacta excepto en las energías de resonancia. Para lograr reproducir adecuadamente a la sección eficaz exacta en una región dada de energías se requiere del término de esfera dura. Como se vió,

éste aparece en forma natural en los desarrollos de Cauchy pero no así en el desarrollo de Mittag-Leffler.

El análisis anterior explica también la discrepancia entre los desarrollos de Mittag-Leffler y, Cauchy con subtracciones, en el caso del pozo cuadrado en ondas  $S$ , estudiado por Weidenmüller<sup>4)</sup> y Jeukenne<sup>14)</sup>.

Sería conveniente en un trabajo posterior considerar un potencial intermedio al pozo y al delta repulsivo, con el fin de ver si en esos casos el término  $\mathcal{P}_Z(E)$  de los primeros  $N$  polos reproduce adecuadamente a la sección eficaz exacta en los casos de Mittag-Leffler y Cauchy.

BIBLIOGRAFIA

- 1).- H.M. Nussenzveig, Nucl. Phys. 11 (1959) 499.
- 2).- J. Humblet and I. Rosenfeld, Nucl. Phys. 26 (1961) 529.
- 3).- K.W. McVoy, Modern Phys. 1 (1967) 39.
- 4).- Hans. A. Weidenmuller, Annals of Phys. 28 (1961) 115.
- 5).- Gastón G. Calderón and Rudolf Peierls, "Resonant States and their Uses" Nucl. Phys. A284 (1976).
- 6).- Paul Roman, Avanced Quantum Theory (Addison Wesley, 1965) Chapter 4.
- 7).- Leonard S. Rodberg and R.M. Thaler, Introduction to the Quantum Theory of Scatering, (Academic Press, 1967), Chapter 3.
- 8).- Johns R. Taylor, Scattering Theory, (John Wiley, 1972) Chapter 12, 13.
- 9).- Luis I. Pennisi, Elements of Complex Variables (Holt, Rene Hart and Winston, 1963) Chapter 7.
- 10).- R. E. Peirls,  
Proc. Roy. Soc. A253 (1959) 16.
- 11).- N.G. de Bruijn, Asymptotic Methods in Analysis (North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1958) p. 25
- 12).- Eugen Merzbacher, Quantum Mechanics (John Wiley 1970), Chapter 6.
- 13).- Margenau-Murphy, The Mathematics of Physics and Chemistry (D. Van Nostrand Company, Inc. 1968), Chapter 13.
- 14).- J.P. Jeukenne, Bull, Soc. Sci. Liege 35 (1966) 627.
- 15).- J. Humblet y J.P. Jeukenne, Bull. Soc. Sci., Liege 35 (1966) 608.
- 16).- C. Bloch, Nucl. Phys. 4 (1957) 503.